Континуальность трехзначных логик: проблемы и гипотезы¹

А. С. КАРПЕНКО

ABSTRACT. Functional properties of three-valued logics are considered. Among these logics ones with closed function classes set cardinality that is continuum. The problem of continuity of Bochvar's three-valued logic is discussed and a hypothesis concerning the criteria of continuity of an arbitrary three-valued logic is proposed.

Ключевые слова: трехзначные логики, замкнутые классы функций, счётность замкнутых классов, континуальность замкнутых классов

1 Необходимые понятия

Произвольная функция $f(x_1, \dots, x_m)$ от любого конечного числа переменных, областью определения которых и областью значения самой функции является множество V_n (пусть его элементами являются $0, 1, 2, \dots, n-1$), называется n -значной функцией или *функцией n -значной логики*. Пусть P_n есть множество всех n -значных функций и пусть $F \subseteq P_n$. Тогда, следуя А.В. Кузнецову, множество всех функций, которые можно получить с помощью операции суперпозиции [6] из F , называется *замыканием* F и обозначается посредством $[F]$.

Система функций $F = \{f_1, \dots, f_k, \dots\}$ из P_n называется функционально полной, если любая функция из P_n представима посредством суперпозиций функций из системы F . Или, в терминах замыкания: F — полная система, если $[F] = P_n$.

Система F функций называется *предполной (максимальной)* в P_n , если F представляет не полную систему, но добавление к F любой функции f такой, что $f \in P_n$ и $f \notin F$ преобразует F в полную систему. Или, в терминах замыкания: F предполна в P_n , если $[F] \neq P_n$ и $[F \cup \{f\}] = P_n$, где $f \in P_n$ и $f \notin F$.

¹Работа выполнена при поддержке РГНФ, грант № 09-03-00303а.

Важная роль предполных классов функций видна из следующей теоремы А.В. Кузнецова (1956), *система функций F полна в P_n тогда и только тогда, когда она не содержится целиком ни в одном предполном классе.*

2 Счётность и континуальность

Множество F n -значных функций называется (функционально) *замкнутым множеством (классом)*, если оно совпадает со своим замыканием, то есть если $F = [F]$.

В 1941 г. Э. Пост установил, что мощность множества замкнутых классов в P_2 , где P_2 есть множество булевых функций, *счётна* [10]. Уже Постом был поставлен вопрос об описании всех замкнутых классов в P_n . Оказалось, и даже несколько неожиданно, что с многозначной логикой дело обстоит совсем по-другому. В [7] было доказано, что *для всякого n ($n \geq 3$) P_n содержит континуум различных замкнутых классов.* Это говорит о принципиальной несводимости многозначной логики к двузначной. Вообще-то говоря, точная природа такого различия между двузначной и трехзначной логиками неясна, т.е. при переходе от двух истинностных значений к трем озадачивает происходящий скачок от счётности к континуальности.

3 Другие трехзначные логики

А как обстоит дело с другими трехзначными логиками, т.е. с не функционально полными? В [6] С.В. Яблонский дал описание всех 18 предполных классов функций в P_3 , а в [4] В.К. Финн доказал, что класс функций L_3 , соответствующий трехзначной логике Лукасевича $\mathbf{L}_3$ со множеством истинностных значений $\{1, \frac{1}{2}, 0\}$ является предполным в P_3 . Класс функций L_3 задается суперпозицией следующих исходных функций: $\sim$ и $\rightarrow$, где $\sim x = 1 - x$; $x \rightarrow y = 1$, если $x \leq y$, и $x \rightarrow y = 1 - x + y$, если $x > y$.

Рассмотрим следующее полезное понятие, впервые введенное М.Ф. Раца. Будем называть *глубиной* системы F функций в классе K_0 наименьшее из таких натуральных чисел m , что существует убывающая последовательность классов $K_0, K_1, \dots, K_m$, удовлетворяющая двум условиям:

- 1) класс K_{i+1} предполон в K_i ($i = 0, 1, \dots, m - 1$);

2) система F является полной в K_m .

В частности, то, что глубина системы F в классе K_0 равна 0, означает, что F является полной в K_0 .

3.1 Трехзначная логика Гейтинга

Как раз первым примером логики «глубины 2», чьи функциональные свойства были тщательно изучены, была трехзначная логика Гейтинга $\mathbf{G}_3$. Класс функций G_3 , соответствующий логике $\mathbf{G}_3$, задается суперпозицией следующих исходных функций: $\neg, \Rightarrow, \&$ и $\vee$, где $\neg x = 1$, если $x = 0$, и $\neg x = 0$ в остальных случаях; $x \Rightarrow y = 1$, если $x \leq y$, и $x \Rightarrow y = y$, если $x > y$; $x \& y = \min(x, y)$ и $x \vee y = \max(x, y)$. Заметим, что $L_3 = [G_3 \cup \{\sim x\}]$.

М.Ф. Раца показал, что класс функций G_3 предполон в классе функций L_3 и установил критерий функциональной полноты для класса функций G_3 . Но, главное, Раца доказал [3], что G_3 содержит континуум различных замкнутых классов. Для порождения континуального множества замкнутых классов функций М.Ф. Раца строит систему функций C , выраженную следующей формулой:

$$\{\&_{i=1}^n ((\neg x_1 \& \dots \& \neg x_{i-1} \& \neg x_{i+1} \& \dots \& \neg x_n) \Rightarrow \perp x_i) \mid n = 2, 3, \dots\},$$

где $\perp x = x \vee \neg x$.

Обозначим эти функции — двухместную, трехместную и т.д. символами $C_2, C_3, \dots$ соответственно. Например, C_2 есть

$$(\neg x_2 \Rightarrow x_1 \vee \neg x_1) \& (\neg x_1 \Rightarrow x_2 \vee \neg x_2).$$

Условимся для любых функций $f(x_1, \dots, x_i, \dots, x_k)$ и $g(x_1, \dots, x_i, \dots, x_m)$ из G_3 обозначать символом $f(x_i/g)$ результат подстановки в f функции g вместо переменной x_i . Тогда для всякого $n = 2, 3, \dots$ функция C_n является симметрической (т.е. при всякой перестановке аргументов остается равной себе) и удовлетворяет условиям:

1. $C_n = \perp C_n$,
2. $C_n(x_i/1) = 1 \quad (1 \leq i \leq n)$,

$$3. C_n(x_i/\perp y, x_j/\perp z) = 1 \quad (1 \leq i < j \leq n).$$

М.Ф. Раца показывает, что при выполнении этих условий система функций C является независимой, откуда следует, что существует континуум различных замкнутых классов функций.

Поскольку класс функций G_3 предполон в L_3 , то таковыми же континуальными свойствами обладает и сама L_3 , и вообще, любая логика, в которой посредством исходных связок можно задать указанную выше систему функций C , является континуальной. Таким образом, можно говорить о некотором критерии континуальности для трехзначных логик.

Результат Раца является следствием более общей теоремы для предполных классов глубины 2 (такие классы называются еще *субмаксимальными клонами*) [8]:

Всего P_3 имеет 158 субмаксимальных клонов. Из них: 5 имеют конечное множество подклассов; 7 имеют счётное множество классов; остальные 146 имеют мощность континуума.

3.2 Трехзначная логика Бочвара

Класс функций B_3 , соответствующий трехзначной логике Бочвара **B₃**, задается суперпозицией следующих исходных функций: $\sim, \cap, \vdash$, где $x \cap y = \min(x, y)$, если $x, y \in \{0, 1\}$, и $x \cap y = \frac{1}{2}$, в остальных случаях; $\vdash x = \neg \sim x$.

В [5] В.К. Финн установил критерий функциональной полноты для класса функций B_3 . Также В.К. Финн показал, что класс функций H_3 , соответствующий трехзначной логике Холдена **H₃**, включается в один из предполных классов B_3 . Класс функций H_3 задается суперпозицией следующих исходных функций: $\sim, \cap$ и Δ , где $\Delta x = 0$, если $x = \frac{1}{2}$, и $\Delta x = 1$, в остальных случаях.

Тогда можно сделать *предположение* о глубине рассмотренных классов функций:

$$H_3 \subset B_3 \subset E_3 \subset L_3 \subset P_3,$$

где E_3 есть класс функций, соответствующей трехзначной логике Эббингауза **E₃**, т.е. $E_3 = [B_3 \cup \{x \rightarrow_s y\}]$, где $x \rightarrow_s y$ есть импликация Собочиньского: $x \rightarrow_s y = 0$, если $x > y$, $\frac{1}{2} \rightarrow_s \frac{1}{2} = \frac{1}{2}$ и $x \rightarrow_s y = 1$, в остальных случаях [11].

Интересна гипотеза В.К. Финна (высказанная автору много лет назад), что мощность множества замкнутых классов B_3 является счётной, как и для P_2 . Эта гипотеза основывалась на *предположении* о том, что в B_3 класс внутренних функций B_3^{in} (который порождается функциями $\sim, \cap$) и класс внешних функций B_3^{ex} (областью значения которых является множество $\{0, 1\}$) каждый сам по себе счётен, а в объединении они порождают всё множество функций B_3 . Исходя из этого, гипотеза В.К. Финна выглядит очень естественной.

3.3 Другие предположения о счётности/континуальности

В [9] сформулирован следующий критерий счётности:

Пусть F есть подкласс P_n . Там существует отношение частичного порядка $\leq$ на F , удовлетворяющее следующим трем свойствам:

- (a) $f \leq g \Rightarrow [f] \subseteq [g]$,
- (b) *каждая цепь является вполне упорядоченной*² (относительно $\leq$),
- (c) *каждая антицепь*³ (относительно $\leq$) *имеет только конечное число элементов.*

Тогда F имеет как наибольшее только счётное множество различных подклассов.

Обратим внимание на свойство (a). Будем говорить, что функция $f(x_1, \dots, x_m)$ не превосходит функцию $g(x_1, \dots, x_m)$, и писать $f \leq g$, если для любого набора $(a_1, \dots, a_m)$ из V_3^m выполняется

$$f(a_1, \dots, a_m) \leq g(a_1, \dots, a_m).$$

Нетрудно подобрать две функции, например, внутреннюю $\cap$ и внешнюю $\cap^\perp$ конъюнкции из B_3 , такие, что $(x \cap^\perp y) \leq (x \cap y)$, где

²Т.е. каждое непустое подмножество обладает единственным минимальным элементом.

³*Антицепью* называется подмножество частично упорядоченного множества, состоящее из попарно несравнимых элементов, которых не меньше двух.

$x \cap^+ y = \vdash x \cap \vdash y$. Из теоремы В.К. Финна о критерии функциональной полноты B_3 следует, что пересечение множества внутренних функций B_3^{in} и множества внешних функций B_3^{ex} пусто. Это значит, что условие (а) из вышеприведенного критерия счётности в B_3 не выполняется. Однако вышеприведенный критерий счётности формулирует всего лишь *необходимое условие*.

Рассмотрим еще одно предположение в пользу континуальности B_3 . В [1] предложен метод гильбертовской аксиоматизации широкого класса многозначных логик, основанный на расширении классической логики $\mathbf{C}_2$. Для этого должны выполняться следующие условия:

(1) Алгебра $\langle V_n; \vee, \wedge \rangle$ является квазирешеткой;

(2) Наличие всех J_i -операторов:

$$j_i(x) = \begin{cases} 1, & \text{если } x = i \\ 0, & \text{если } x \neq i. \end{cases} \quad (\text{для всех } i \in V_n);$$

(3) Ограничения операций $\neg, \vee, \wedge, \supset$ на подмножество $\{0, 1\}$ множества V_n суть обычные классические операции отрицания, дизъюнкции, конъюнкции и импликации соответственно.

Логика $\mathbf{B}_3$ все эти условия выполняет, но не выполняет их логика $\mathbf{G}_3$: не все J_i -операторы здесь имеют место. Однако все J_i -операторы и не нужны, достаточно, $J_0(\neg)$ или $J_1(\vdash)$, поскольку с их помощью строится *изоморф* $\mathbf{C}_2$. Понятие изоморфа введено Д.А. Бочваром и означает, что логика $\mathbf{B}_3$ содержит фрагмент, который верифицирует аксиомы $\mathbf{C}_2$, а правило *modus ponens* сохраняет классическое отношение логического следования. Такие изоморфы названы «нормальными». Подробно об изоморфах см. диссертацию Л.Ю. Девяткина [2]. Таким образом, задается некоторый «минимум» функциональных свойств, который достаточен для аксиоматизации некоторой трехзначной логики $\mathbf{L}_3$. Заметим, что логика Холдена $\mathbf{H}_3$ не содержит операторов J_0 и J_1 и поэтому не может быть аксиоматизирована как расширение $\mathbf{C}_2$.

4 Гипотеза о континуальности

В связи с этим в качестве гипотезы можно сформулировать следующий критерий континуальности. Пусть $F \subseteq P_3$ и $|F|$ есть мощность множества F . Для класса F , соответствующего некоторой трехзначной логике $\mathbf{L}_3$, $|F| = \mathcal{C}$ т.т.т., когда $\mathbf{L}_3$ аксиоматизируема как расширение $\mathbf{C}_2$. Таким образом, функциональные свойства некоторого множества функций F связываются с чисто логическими свойствами класса формул соответствующей логики $\mathbf{L}_3$.

Литература

- [1] Аншаков О. М., Рычков С. В. О многозначных логических исчислениях // Семиотика и информатика. 1982. Вып. 19. С. 90–117.
- [2] Девяткин Л.Ю. Многозначные изоморфы классической пропозициональной логики. Автореферат на соискание ученой степени кандидата философских наук. М.: ИФ РАН, 2008.
- [3] Раца М.Ф. О классе функций трехзначной логики, соответствующем первой матрице Яськовского // Проблемы кибернетики. 1969. Вып. 21. С. 185–214.
- [4] Финн В.К. О предполноте класса функций, соответствующего трехзначной логике Я. Лукасевича // Научно-техническая информация. Сер. 2. 1969. Вып. 10. С. 35–38.
- [5] Финн В.К. О критерии функциональной полноты для ВЗ // Исследования по формализованным языкам и неклассическим логикам. М.: Наука, 1974. С. 194–199.
- [6] Яблонский С.В. Функциональные построения в k -значной логике // Труды математического института им. В. А.Стеклова. 1958. Т. 51. С. 5–142.
- [7] Янов Ю. И., Мучник А. А. О существовании k -значных замкнутых классов, не имеющих конечного базиса // Доклады Академии Наук СССР. 1959. Т. 127. С. 44–46.
- [8] Bulatov A., Lau D. and Strauch B. The cardinalities of sublattices of depth 2 in the lattices of clones on a 3-elementary set. Preprint Universität Rostock, 1996.
- [9] Lau D. Function Algebras on Finite Sets: A Basic Course on Many-Valued Logic and Clone Theory. Berlin: Springer-Verlag, 2006.
- [10] Post E.L. Two-valued iterative systems // Annals of Mathematical Studies. 1941. Vol. 5. Princeton-London.
- [11] Sobociński B. Axiomatization of a partial system of three-valued calculus of propositions // The Journal of Computing Systems. 1952. Vol. 1. P. 23–55.