Логика функций vs логика отношений

В. И. ШАЛАК

ABSTRACT. It is proved that for any first-order theory with equality, the domain of interpretation of which contains at least two individuals, there exists mutually embeddable theory in language with functional symbols and only one-place predicate.

Ключевые слова: погружающая операция, функция, предикат

Довольно распространенной является точка зрения, что переход к современной логике, совершенный на рубеже XIX-XX вв., был связан с расширением выразительных возможностей ее языка за счет включения в него суждений об отношениях. Субъектно-предикатная структура предложений традиционной логики не позволяла выразить даже такое простое отношение как « x больше y ». С этой проблемой сталкивается Сократ в диалоге Платона «Теэтет».

«И значит, если бы тебе сказали, что один человек головою больше другого, а другой головою меньше, ты не принял бы этого утверждения, но решительно его отклонил, заявивши так: „Я могу сказать лишь одно — что всякая вещь, которая больше другой вещи, такова лишь благодаря большому, то есть она становится больше благодаря большому, а меньшее становится меньшим лишь благодаря малому, то есть мало делает его меньшим“. А если бы ты признал, что один человек головою больше, а другой меньше, тебе пришлось бы, я думаю, опасаться, как бы не встретить возражения: прежде всего в том, что большее, у тебя есть большее, а меньшее — меньшее по одной и той же причине, а затем и в том, что большее делает большим малое, — ведь голова то мала!» [3, Теэтет, 100e-101a].

Считается, что переход к логике отношений был закономерным шагом, который благотворно сказался не только на самой логике, но и на общем развитии науки.

«Ограничение лишь предикатными предложениями роковым образом сказалось и на областях, лежащих вне сферы логики. Возможно, Рассел был прав, объясняя некоторые ошибки метафизики недостатками логики: если каждое предложение приписывает какому-то субъекту некоторый предикат, то, в сущности, существует лишь один субъект, некий абсолют, и каждое положение вещей сводится к тому, что абсолюту присущ определенный атрибут. Быть может, аналогичным образом всякую субстантивную метафизику можно объяснить как основанную на этой ошибке. ... названная ограниченность вызвала длительную задержку в развитии физики, породив, например, субстанциальное представление о материи. ... понятие абсолютного пространства обусловлено этой ошибкой логики. ... Когда Лейбниц осознал возможность использования предложений об отношениях, он смог прийти к правильному истолкованию пространства: не местоположения тел, а их положения по отношению к другим телам, — вот в чем заключается элементарное положение дел. ... К сожалению, его борьба за релятивистское истолкование пространства со сторонниками ньютоновского абсолютного пространства была столь же безуспешной, как и его стремление расширить область логики. Лишь 200 лет спустя его идеи обрели признание: в логике благодаря созданию теории отношений, в физике — благодаря теории относительности» [1, с.110-111].

Мы покажем, что вопреки устоявшемуся мнению язык свойств (одноместных отношений) и функций вполне достаточен для выражения тех же математических и физических идей, которые находят оформление в терминах многоместных отношений. С логической точки зрения, не было никакой необходимости для отказа от имевших богатую историю субстантивной метафизики и абсолютного пространства, о чем пишет Р. Карнап.

Напомним некоторые определения, связанные с понятием погружающих операций [4].

Пусть S — теория в языке первого порядка L . Принадлежность формулы A языку L будем обозначать посредством $A \in L$, а доказуемость формулы A в теории S — посредством $S \vdash A$. Поскольку теория понимается как дедуктивно замкнутое множество формул, то $S \vdash A$ означает то же самое, что и $A \in S$.

Пусть S_1 и S_2 — теории в языках L_1 и L_2 . Рекурсивную функцию $\varphi: L_1 \rightarrow L_2$ называют операцией, *погружающей* теорию S_1 в S_2 , если и только если для нее выполняется следующее условие:

$$S_1 \vdash A \Leftrightarrow S_2 \vdash \varphi(A).$$

Будем говорить, что теория S_1 *погружаема* в теорию S_2 , если и только если существует операция, погружающая S_1 в S_2 .

Теории S_1 и S_2 *взаимопогружаемы*, если и только если S_1 погружаема в S_2 , и S_2 погружаема в S_1 . Отношение взаимопогружаемости рефлексивно, симметрично и транзитивно [4, с. 110].

Будем говорить, что теория S_1 является *подтеорией* S_2 , если и только если $S_1 \subseteq S_2$.

ЛЕММА 1. *Если теория S_1 является подтеорией S_2 , то достаточным условием взаимопогружаемости S_1 и S_2 является существование рекурсивной функции $\varphi : L_2 \rightarrow L_1$, для которой выполняются следующие условия:*

1. $S_2 \vdash A \Rightarrow S_1 \vdash \varphi(A)$,
2. $S_1 \vdash \varphi(A) \Rightarrow S_1 \vdash A$ для $A \in L_1$,
3. $S_2 \vdash \varphi(A) \Rightarrow S_2 \vdash A$ для $A \in L_2$.

Доказательство. Операцией, погружающей теорию S_1 в теорию S_2 , является тождественная функция $\iota(A) = A$.

- + 1. $A \in L_1$
- + 2. $S_1 \vdash A$
3. $S_1 \vdash \iota(A)$ - из 2 по определению ι
4. $S_2 \vdash \iota(A)$ - из 3 по условию $S_1 \subseteq S_2$
5. $S_1 \vdash A \Rightarrow S_2 \vdash \iota(A)$ - из 2-4
- + 6. $S_2 \vdash \iota(A)$
7. $S_2 \vdash A$ - из 6 по определению ι
8. $S_1 \vdash \varphi(A)$ - из 7 по условию 1)
9. $S_1 \vdash A$ - из 1,8 по условию 2)
10. $S_2 \vdash \iota(A) \Rightarrow S_1 \vdash A$ - из 6-9
11. $S_1 \vdash A \Leftrightarrow S_2 \vdash \iota(A)$ - из 5,10

- +1. $A \in L_2$
2. $S_2 \vdash A \Rightarrow S_1 \vdash \varphi(A)$ - условие 1)
- +3. $S_1 \vdash \varphi(A)$
4. $S_2 \vdash \varphi(A)$ - из 3 по условию $S_1 \subseteq S_2$
5. $S_2 \vdash A$ - из 1,4 по условию 3)
6. $S_1 \vdash \varphi(A) \Rightarrow S_2 \vdash A$ - из 3-5
7. $S_2 \vdash A \Rightarrow S_1 \vdash \varphi(A)$ - из 2,6

Q.E.D.

Пусть нам дана **теория** $\mathbf{T}_1$ в языке исчисления предикатов первого порядка с равенством, одной из аксиом которой является формула:

$$(Ax-ab) \quad \neg(a=b),$$

где a и b — замкнутые термы.

ЛЕММА 2. Если P — n -местный предикатный символ языка теории T_1 , то в ней доказуемы следующие формулы:

1. $\exists y((P(\mathbf{x}) \& y = a) \vee (\neg P(\mathbf{x}) \& y = b)),$
2. $((P(\mathbf{x}) \& y = a) \vee (\neg P(\mathbf{x}) \& y = b)) \& ((P(\mathbf{x}) \& z = a) \vee (\neg P(\mathbf{x}) \& z = b)) \supset y = z,$

где $\mathbf{x}$ — кортеж n -переменных.

Доказательство.

+1.	$P(\mathbf{x})$	
2.	$\vdash a = a$	- акс. равенства
3.	$P(\mathbf{x}) \& a = a$	- из 1,2
4.	$(P(\mathbf{x}) \& a = a) \vee (\neg P(\mathbf{x}) \& a = b)$	- из 3
5.	$\exists y((P(\mathbf{x}) \& y = a) \vee (\neg P(\mathbf{x}) \& y = b))$	- из 4 по $\exists$ в
+6.	$\neg P(\mathbf{x})$	
7.	$\vdash b = b$	- акс. равенства
8.	$\neg P(\mathbf{x}) \& b = b$	- из 6,7
9.	$(P(\mathbf{x}) \& a = a) \vee (\neg P(\mathbf{x}) \& a = b)$	- из 8
10.	$\exists y((P(\mathbf{x}) \& y = a) \vee (\neg P(\mathbf{x}) \& y = b))$	- из 9 по $\exists$ в
11.	$T_1 \vdash y((P(\mathbf{x}) \& y = a) \vee (\neg P(\mathbf{x}) \& y = b))$	- из 1-5, 6-10
-
+1.	$((P(\mathbf{x}) \& y = a) \vee (\neg P(\mathbf{x}) \& y = b)) \& ((P(\mathbf{x}) \& z = a) \vee (\neg P(\mathbf{x}) \& z = b))$	
2.	$(P(\mathbf{x}) \& y = a) \vee (\neg P(\mathbf{x}) \& y = b)$	- из 1
3.	$(P(\mathbf{x}) \& z = a) \vee (\neg P(\mathbf{x}) \& z = b)$	- из 1
+4.	$P(\mathbf{x})$	
5.	$P(\mathbf{x}) \& y = a$	- из 2,4

6.	$P(\mathbf{x}) \& z = a$	- из 3,4
7.	$y = a$	- из 5
8.	$z = a$	- из 6
9.	$y = z$	- из 7,8
+10.	$\neg P(\mathbf{x})$	
11.	$\neg P(\mathbf{x}) \& y = b$	- из 2,10
12.	$\neg P(\mathbf{x}) \& z = b$	- из 3,10
13.	$y = b$	- из 11
14.	$z = b$	- из 12
15.	$y = z$	- из 13, 14
16.	$y = z$	- из 4-9, 10-15
17.	$T_1 \vdash ((P(\mathbf{x}) \& y = a) \vee (\neg P(\mathbf{x}) \& y = b)) \& ((P(\mathbf{x}) \& z = a) \vee (\neg P(\mathbf{x}) \& z = b)) \supset y = z$	- из 1-16

Q.E.D.

Рассмотрим **теорию T_2** , полученную путем расширения языка теории T_1 за счет добавления для каждого n -местного предикатного символа P нового функционального символа f_P и принятия для каждого из них новой аксиомы:

$$(Ax-f_P) \quad (P(\mathbf{x}) \& f_P(\mathbf{x})=a) \vee (\neg P(\mathbf{x}) \& f_P(\mathbf{x})=b),$$

где $\mathbf{x}$ — кортеж n -переменных.

ЛЕММА 3. В теории T_2 доказуемы следующие формулы:

1. $f_P(\mathbf{x}) = a \vee f_P(\mathbf{x}) = b,$
2. $P(\mathbf{x}) \equiv f_P(\mathbf{x}) = a.$

Доказательство.

+1.	$P(\mathbf{x})$	
2.	$P(\mathbf{x}) \vee (f_P(\mathbf{x}) = b)$	- из 1
3.	$\neg(\neg P(\mathbf{x}) \& f_P(\mathbf{x}) = b)$	- из 2
4.	$P(\mathbf{x}) \& f_P(\mathbf{x}) = a$	- из 3 и $Ax-f_P$
5.	$f_P(\mathbf{x}) = a$	- из 4
6.	$f_P(\mathbf{x}) = a \vee f_P(\mathbf{x}) = b$	- из 5

- +7. $\neg P(\mathbf{x})$
- 8. $\neg P(\mathbf{x}) \vee (f_P(\mathbf{x}) = a)$ - из 7
- 9. $\neg(P(\mathbf{x}) \& f_P(\mathbf{x}) = a)$ - из 8
- 10. $\neg P(\mathbf{x}) \& f_P(\mathbf{x}) = b$ - из 9 и $Ax-f_P$
- 11. $f_P(\mathbf{x}) = b$ - из 10
- 12. $f_P(\mathbf{x}) = a \vee f_P(\mathbf{x}) = b$ - из 11
- 13. $T_2 \vdash f_P(\mathbf{x}) = a \vee f_P(\mathbf{x}) = b$ - из 1-6, 7-12

- +1. $f_P(\mathbf{x}) = a$
- 2. $\neg(f_P(\mathbf{x}) = b)$ - из 1, $Ax-ab$
- 3. $P(\mathbf{x}) \& f_P(\mathbf{x}) = a$ - из 2, $Ax-f_P$
- 4. $P(\mathbf{x})$ - из 3
- 5. $f_P(\mathbf{x}) = a \supset P(\mathbf{x})$ - 1-4
- +6. $P(\mathbf{x})$
- 7. $P(\mathbf{x}) \& f_P(\mathbf{x}) = a$ - из 6, $Ax-f_P$
- 8. $f_P(\mathbf{x}) = a$ - из 7
- 9. $P(\mathbf{x}) \supset f_P(\mathbf{x}) = a$ - из 6-8
- 10. $T_2 \vdash P(\mathbf{x}) \equiv f_P(\mathbf{x}) = a$ - из 5, 9

Q.E.D.

ЛЕММА 4. Для всякой формулы A теории T_2 существует такая формула $\phi(A)$ языка теории T_1 , что

- 1. $T_2 \vdash A \equiv \phi(A)$,
- 2. $T_2 \vdash A \Rightarrow T_1 \vdash \phi(A)$,
- 3. $T_2 \vdash A \Rightarrow T_1 \vdash A$ — если A принадлежит языку теории T_1 .

Эта теорема соответствует предложению 2.29 о введении новых функциональных символов из книги [2]. Условием его применимости является лемма 3 и определение теории T_2 . Поэтому мы можем опустить ее доказательство.

ЛЕММА 5. Теории T_1 и T_2 взаимопогружаемы.

Доказательство. Так как теория T_1 является подтеорией T_2 , достаточно найти функцию, удовлетворяющую условиям леммы 1.

Пусть ϕ — отображение теории T_2 в теорию T_1 , определяемое в лемме 4. На основании свойства 2 функции ϕ из леммы 4 имеет место $T_2 \vdash A \Rightarrow T_1 \vdash \phi(A)$. Проверим выполнимость оставшихся двух условий.

+1.	$A \in L_1$	
+2.	$T_1 \vdash \phi(A)$	
3.	$T_2 \vdash \phi(A)$	- из 2, так как $T_1 \subseteq T_2$
4.	$T_2 \vdash A \equiv \phi(A)$	- свойство 1 функции ϕ из леммы 4
5.	$T_2 \vdash A$	- из 3, 4
6.	$T_1 \vdash A$	- из 1, 5 по свойству 3 из леммы 4
7.	$T_1 \vdash \phi(A) \Rightarrow T_1 \vdash A$	- из 2-6
-
+1.	$A \in L_2$	
+2.	$T_2 \vdash \phi(A)$	
3.	$T_2 \vdash A \equiv \phi(A)$	- свойство 1 функции ϕ из леммы 4
4.	$T_2 \vdash A$	- из 2, 3
5.	$T_2 \vdash \phi(A) \Rightarrow T_2 \vdash A$	- из 2-4

Q.E.D.

Определим функцию α из языка теории T_2 в ее подязык, содержащий лишь функциональные символы и единственный двухместный предикатный символ равенства.

- $\alpha(t_1 = t_2) = (t_1 = t_2)$
- $\alpha(P(t_1, \dots, t_n)) = f_P(t_1, \dots, t_n) = a$
- $\alpha(\neg A) = \neg \alpha(A)$
- $\alpha(A \nabla B) = \alpha(A) \nabla \alpha(B) \quad \nabla \in \{\&, \vee, \supset, \equiv\}$
- $\alpha(Qx B) = Qx \alpha(B) \quad Q \in \{\exists, \forall\}$

Пусть формула A является аксиомой **теории T_3** , если и только если $A = \alpha(B)$, где B собственная аксиома теории T_2 .

ЛЕММА 6. *Теории T_3 и T_2 взаимопогружаемы.*

Доказательство. По определению теории T_3 , ее язык является подязыком теории T_2 .

Если A — аксиома T_3 , то $A = \alpha(B)$, где B собственная аксиома теории T_2 . Так как в силу леммы 3(2), определения α , и теоремы 2.20 из [2] имеет место $T_2 \vdash B \equiv \alpha(B)$, то $T_2 \vdash \alpha(B)$. Отсюда следует, что всякое доказательство в теории T_3 одновременно является доказательством в T_2 , т.е. $T_3 \subseteq T_2$.

Так как теория T_3 является подтеорией T_2 , достаточно найти функцию, удовлетворяющую условиям леммы 1.

Индукцией по построению доказательства формулы A в теории T_2 покажем, что в теории T_3 доказуема формула $\alpha(A)$.

Если A — логическая аксиома, то $\alpha(A)$ также логическая аксиома и, следовательно, $T_3 \vdash \alpha(A)$.

Если A — собственная аксиома теории T_2 , то $\alpha(A)$ — аксиома теории T_3 и потому $T_3 \vdash \alpha(A)$.

Допустим, формула A получена в теории T_2 из двух предшествующих формул доказательства B и $(B \supset A)$ по правилу *modus ponens*. По индуктивному допущению, в теории T_3 доказуемы формулы $\alpha(B)$ и $\alpha(B \supset A)$. Так как $\alpha(B \supset A) = \alpha(B) \supset \alpha(A)$, то в теории T_3 доказуема формула $\alpha(A)$.

Допустим, формула A имеет вид $\forall x B$ и получена в теории T_2 из предшествующей формулы доказательства B по правилу генерализации. По индуктивному допущению, в теории T_3 доказуема формула $\alpha(B)$. По правилу генерализации в теории T_3 доказуема формула $\forall x \alpha(B)$. Так как $\forall x \alpha(B) = \alpha(\forall x B)$, то в теории T_3 доказуема формула $\alpha(A)$.

Таким образом, мы показали, что $T_2 \vdash A \Rightarrow T_3 \vdash \alpha(A)$. Проверим выполнимость оставшихся двух условий.

+1.	$A \in L_3$	
+2.	$T_3 \vdash \alpha(A)$	
3.	$\alpha(A) = A$	- из 1 по определению α
4.	$T_3 \vdash A$	- из 2, 3
5.	$T_3 \vdash \alpha(A) \Rightarrow T_3 \vdash A$	- из 2-4
+1.	$A \in L_2$	
+2.	$T_2 \vdash \alpha(A)$	
3.	$T_2 \vdash A \equiv \alpha(A)$	- в силу леммы 3(2) и теоремы 2.20 [2]

4. $T_2 \vdash A$ - из 2, 3
5. $T_2 \vdash \alpha(A) \Rightarrow T_2 \vdash A$ - из 2-4

Q.E.D.

Следующая теорема получается как простое следствие ранее доказанных лемм 5 и 6.

ТЕОРЕМА 7. *Для всякой первопорядковой теории в языке логики предикатов с равенством, в которой для некоторых двух замкнутых термов a и b доказуема формула $\neg(a = b)$, существует взаимопогружимая с ней первопорядковая теория в языке с одними лишь функциональными символами и единственным предикатом равенства.*

Далее мы покажем, что предикат равенства также не является необходимым и может быть заменен специальным одноместным предикатом. Пусть **теория T_4** , получена путем расширения языка теории T_3 новым одноместным предикатным символом H и добавлением новой аксиомы:

$$(Ax-H) \quad (H(x) \equiv x = a).$$

ЛЕММА 8. *В теории T_4 доказуема формула $H(f_=(x_1, x_2)) \equiv (x_1 = x_2)$.*

Доказательство.

1. $T_2 \vdash (x_1 = x_2) \equiv (f_=(x_1, x_2) = a)$ - лемма 3(2)
2. $T_2 \vdash A \Rightarrow T_3 \vdash \alpha(A)$ - лемма 6
3. $T_3 \vdash (x_1 = x_2) \equiv (f_=(x_1, x_2) = a)$ - из 1, 2 и определения α
4. $T_3 \subseteq T_4$ - определение T_4
5. $T_4 \vdash (x_1 = x_2) \equiv (f_=(x_1, x_2) = a)$ - из 3, 4
6. $\forall x(H(x) \equiv x = a)$ - аксиома T_4
7. $T_4 \vdash H(f_=(x_1, x_2)) \equiv (f_=(x_1, x_2) = a)$ - из 6
8. $T_4 \vdash H(f_=(x_1, x_2)) \equiv (x_1 = x_2)$ - из 5, 7

Q.E.D.

ЛЕММА 9. Теории T_3 и T_4 взаимнопогружаемы.

Доказательство. Так как теория T_3 является подтеорией T_4 , достаточно найти функцию, удовлетворяющую условиям леммы 1.

Определим функцию ψ из языка теории T_4 в язык теории T_3 .

$$\begin{aligned} \bullet \quad \psi(H(t)) &= t = a \\ \bullet \quad \psi(t_1 = t_2) &= t_1 = t_2 \\ \bullet \quad \psi(\neg A) &= \neg\psi(A) \\ \bullet \quad \psi(A \nabla B) &= \psi(A) \nabla \psi(B) \quad \nabla \in \{\&, \vee, \supset, \equiv\} \\ \bullet \quad \psi(Qx B) &= Qx\psi(B) \quad Q \in \{\exists, \forall\} \end{aligned}$$

Индукцией по построению доказательства формулы A в теории T_4 покажем, что в этом случае в теории T_3 доказуема формула $\psi(A)$.

Если A — логическая аксиома, то легко проверить, что $\psi(A)$ также является логической аксиомой и потому $T_3 \vdash \psi(A)$.

Если A — аксиома $H(x) \equiv (x = a)$, то $\psi(A)$ есть $(x = a) \equiv (x = a)$ и, следовательно, $T_3 \vdash \psi(A)$.

Если A — собственная аксиома теории T_3 , то $\psi(A) = A$, т.к. A не содержит вхождений предикатного символа H . Поэтому $T_3 \vdash \psi(A)$.

Допустим, формула A получена из двух предшествующих формул доказательства B и $(B \supset A)$ по правилу modus ponens. По индуктивному допущению, в теории T_3 доказуемы формулы $\psi(B)$ и $\psi(B \supset A)$. Так как $\psi(B \supset A) = \psi(B) \supset \psi(A)$, то в теории T_3 доказуема формула $\psi(A)$.

Допустим, формула A имеет вид $\forall x B$ и получена из предшествующей формулы доказательства B по правилу генерализации. По индуктивному допущению, в теории T_3 доказуема формула $\psi(B)$. По правилу генерализации в теории T_3 доказуема формула $\forall x\psi(B)$. Так как $\forall x\psi(B) = \psi(\forall x B)$, то в теории T_3 доказуема формула $\psi(A)$.

Таким образом, $T_4 \vdash A \Rightarrow T_3 \vdash \psi(A)$. Проверим выполнимость оставшихся двух условий.

- +1. $A \in L_3$
- +2. $T_3 \vdash \psi(A)$

3. $\psi(A) = A$ - т.к. A не содержит вхождений H
4. $T_3 \vdash A$ - из 2, 3
5. $T_3 \vdash \psi(A) \Rightarrow T_3 \vdash A$ - из 2-4

- +1. $A \in L_4$
- +2. $T_4 \vdash \psi(A)$
3. $T_4 \vdash \psi(A) \equiv A$ - в силу аксиомы $Ax-H$
и теоремы 2.20 из [2]
4. $T_4 \vdash A$ - из 2, 3
5. $T_4 \vdash \psi(A) \Rightarrow T_4 \vdash A$ - из 2-4

Q.E.D.

Определим функцию β из языка теории T_4 в ее подязык, содержащий лишь функциональные символы и единственный одноместный предикатный символ H .

- $\beta(H(t)) = H(t)$
- $\beta(t_1 = t_2) = H(f_=(t_1 = t_2))$
- $\beta(\neg A) = \neg \beta(A)$
- $\beta(A \nabla B) = \beta(A) \nabla \beta(B) \quad \nabla \in \{\&, \vee, \supset, \equiv\}$
- $\beta(Qx B) = Qx \beta(B) \quad Q \in \{\exists, \forall\}$

Пусть формула A является аксиомой **теории T_5** , если и только если $A = \beta(B)$, где B либо аксиома равенства, либо собственная аксиома теории T_4 .

ЛЕММА 10. *Теории T_5 и T_4 взаимопогружаемы.*

Доказательство. По определению теории T_5 ее язык является подязыком теории T_4 .

Если A — аксиома T_5 , то $A = \beta(B)$, где B либо аксиома равенства, либо собственная аксиома теории T_4 . В силу леммы 8, определения β и теоремы 2.20 из [2] имеет место $T_4 \vdash B \equiv \beta(B)$ и, следовательно, $T_4 \vdash \beta(B)$. Т.е. всякая аксиома теории T_5 доказуема в T_4 . Отсюда получаем, что всякое доказательство в теории T_5 одновременно является доказательством в T_4 , т.е. $T_5 \subseteq T_4$.

Так как теория T_5 является подтеорией T_4 , достаточно найти функцию, удовлетворяющую условиям леммы 1.

Индукцией по построению доказательства формулы A в теории T_4 покажем, что в этом случае в теории T_5 доказуема формула $\beta(A)$.

Если A — пропозициональная или кванторная аксиома, то $\beta(A)$ также пропозициональная или кванторная аксиома и, следовательно, $T_5 \vdash \beta(A)$.

Если A — либо аксиома равенства, либо собственная аксиома теории T_4 , то $\beta(A)$ — аксиома теории T_5 и потому $T_5 \vdash \beta(A)$.

Допустим, формула A получена в теории T_4 из двух предшествующих формул доказательства B и $(B \supset A)$ по правилу *modus ponens*. По индуктивному допущению, в теории T_5 доказуемы формулы $\beta(B)$ и $\beta(B \supset A)$. Так как $\beta(B \supset A) = \beta(B) \supset \beta(A)$, то в теории T_5 доказуема формула $\beta(A)$.

Допустим, формула A имеет вид $\forall x B$ и получена в теории T_4 из предшествующей формулы доказательства B по правилу генерализации. По индуктивному допущению, в теории T_5 доказуема формула $\beta(B)$. По правилу генерализации в теории T_5 доказуема формула $\forall x \beta(B)$. Так как $\forall x \beta(B) = \beta(\forall x B)$, то в теории T_5 доказуема формула $\beta(A)$.

Таким образом, мы показали, что $T_4 \vdash A \Rightarrow T_5 \vdash \alpha(A)$. Проверим выполнимость оставшихся двух условий.

- +1. $A \in L_5$
- +2. $T_5 \vdash \beta(A)$
- 3. $\beta(A) = A$ - из 1 по определению β
- 4. $T_5 \vdash A$ - из 2, 3
- 5. $T_5 \vdash \beta(A) \Rightarrow T_5 \vdash A$ - из 2-4

- +1. $A \in L_4$
- +2. $T_4 \vdash \beta(A)$
- 3. $T_4 \vdash A \equiv \beta(A)$ - в силу леммы 8 и теоремы 2.20 [2]
- 4. $T_4 \vdash A$ - из 2, 3
- 5. $T_4 \vdash \beta(A) \Rightarrow T_4 \vdash A$ - из 2-4

Q.E.D.

Следующая теорема является простым следствием теоремы 7 и лемм 9 и 10.

ТЕОРЕМА 11. *Для всякой первопорядковой теории в языке логики предикатов с равенством, в которой для некоторых двух замкнутых термов a и b доказуема формула $\neg(a = b)$, существует взаимопогружимая с ней теория, язык которой содержит лишь функциональные символы и единственный одноместный предикат.*

Доказательство представленных теоремы не является сложным, и потому их содержание кажется тривиальным. Однако с философской точки зрения они достаточно интересны, поскольку опровергают некоторые устоявшиеся мнения.

«Рассел указал на то, что роковая ошибка школьной философии заключалась в предположении, будто каждое суждение некоторому субъекту приписывает какое-то свойство в качестве предиката. Если, например, говорят, что тело A движется относительно некоторого другого тела B , то представитель школьной логики будет требовать, чтобы одному или другому телу самому по себе был приписан предикат движения. Рассел показал, что очень многие суждения говорят об отношении, о связи двух объектов, и их нельзя свести к высказываниям о присущности свойства отдельному объекту. Последние представляют собой лишь частный случай высказываний об отношениях. Поэтому представителю школьной логики кажутся бессмысленными высказывания, например, такого вида: если два тела движутся относительно друг друга, то не имеет никакого смысла спрашивать, какое из них „действительно движется“, т.е. какому из них присущ предикат „находиться в движении“» [5, с.172].

Рассел ошибался, когда думал, будто показал, что суждения об отношениях нельзя свести к высказываниям о присущности свойства отдельному объекту. Можно предположить, что в результате этой ошибки наша картина мира оказалась искусственно но искаженной.

Литература

- [1] Карнап Р. Старая и новая логика // Журнал «Erkenntnis» («Познание»). Избранное. М.: Издательский дом «Территория будущего», Идея-Пресс, 2007. С. 105-119.
- [2] Мендельсон Э. Введение в математическую логику. М.: Наука, 1976.
- [3] Платон. Собрание сочинений в 4 т. М.: Мысль, 1993.
- [4] Смирнов В.А. Логические методы анализа научного знания. М.: Наука, 1987.
- [5] Франк Ф. Каково значение современных физических теорий для общей теории познания? // Журнал «Erkenntnis» («Познание»). Избранное. М.: Издательский дом «Территория будущего», Идея-Пресс, 2007. С. 160-187.