О понятии конечного множества в конструктивной математике¹

А. А. ВЛАДИМИРОВ

ABSTRACT. It is known that the concept of non-infinite set is non-monolithic from the point of view of A.A. Markov's constructive mathematics. In the paper we present one general approach to constructivist conception of «type of non-infiniteness».

Ключевые слова: конструктивная математика, марковский конструктивизм, конечное множество

1 Введение

1. С интуитивной точки зрения, факт конечности того или иного множества объектов сводится к возможности перечислить эти объекты посредством некоторого списка. Например, конечность множества натуральных чисел, заданного условием

$$\langle n = 0 \text{ или } n = 1 \rangle,$$

устанавливается предъявлением списка $\{0, 1\}$, исчерпывающего все — с точностью до равенства — элементы указанного множества. Тем самым свойство конечности множества относится к числу свойств общего вида

- (1) «существует вспомогательный объект A , находящийся в некотором заранее известном отношении к рассматриваемому объекту X ».

С точки зрения «классических» логики и математики, суждения вида (1) ничем не выделяются среди прочих. Напротив, с точки зрения марковского конструктивного направления при

¹Работа поддержана РФФИ, проект № 09-06-00125.

попытке понимания таких суждений встает принципиальный вопрос о характере упоминаемого в них «существования». Ситуация, когда известен метод явного построения искомого вспомогательного объекта, — как раз и отвечающая интуитивным представлениям, — не считается в его рамках равнозначной ситуации, когда имеется лишь логическое опровержение предположения о невозможности такого объекта. Соответственно математические понятия, определения которых имеют вид (1), в рамках марковского конструктивизма подвержены эффекту «расщепления». В качестве хорошо известного [6, гл. 2] примера здесь можно указать на «классическое» определение вещественного числа по Г. Кантору, перенесение которого в конструктивный математический анализ приводит к несовпадающим понятиям «конструктивного вещественного числа» и «псевдочисла». Представление о конечности множества не является в этом смысле исключением.

Согласно сообщениям [10, 9], уже в 1950-е годы А.А. Марковым было указано на наличие, самое меньшее, четырех несовпадающих конструктивных истолкований представления о конечности, которые были связаны им с понятиями *финитного*, *субфинитного*, *квазифинитного* и *неинфинитного* множества. Аналогичная проблематика (хотя и несколько иначе трактуемая) возникла также в «классической» теории рекурсии. Например, в известной монографии [11, § 5.6] используются способы задания конечного множества посредством канонических индексов², а также посредством гёделевых номеров, разрешающих или перечисляющих эти множества рекурсивных функций³. Указанному вопросу уделялось также внимание и в рамках математического интуиционизма [1]. Целью настоящей статьи является развитие одного общего подхода к понятию «тип конечности множества» с точки зрения марковского конструктивного направления в математике. Некоторые из излагаемых далее результатов были анонсированы в заметке [2].

2. В качестве точных языков, применяемых для записи и истолкования математических суждений, мы намерены использовать языки *ступенчатой семантической системы* А.А. Маркова. В

²Это отвечает «финитным» множествам А.А. Маркова.

³Очерченная в [9] схема таких типов конечности не содержит.

частности, мы сохраняем применявшуюся самим автором этой системы [7] польскую запись логических связок. Более подробное описание используемых обозначений может быть найдено в монографии [4].

Термин «множество» будет далее рассматриваться в качестве сокращения для словосочетания «формула языка $\mathcal{Y}_{\omega+1}$ [4, § 27], не имеющая отличных от $|\Diamond$ параметров». Множества, задаваемые посредством формул языка $\mathcal{Y}_1$ [4, § 8], мы будем называть *порождаемыми*.

Элементом произвольно фиксированного множества $\mathfrak{A}$ будет считаться всякий постоянный терм [4, § 6], подстановка которого в формулу $\mathfrak{A}$ вместо переменной $|\Diamond$ приводит к верной замкнутой формуле. Ввиду возможности кодирования конструктивных объектов любой известной природы постоянными термами, указанные соглашения не влекут существенного ограничения общности рассмотрения.

2 Основные определения

1. Под *списком* постоянных термов естественным образом понимается постоянный терм, рассматриваемый как перечень своих звеньев [4, § 12]. Например, постоянный терм $**\Diamond\Diamond*\Diamond\Diamond$ представляет собой с указанной точки зрения список с членами $*\Diamond\Diamond$ и $\Diamond$. Порождаемое множество [4, § 12.4(1)] пар $*ut$ вида «постоянный терм t есть член списка u » мы в дальнейшем будем обозначать символом $\mathfrak{L}$.

2. Введенные А.А. Марковым понятия *финитного*, *субфинитного*, *квазифинитного* и *неинфинитного* множества могут быть определены следующим образом:

2.1. *Множество $\mathfrak{A}$ называется финитным, если верна замкнутая формула*

$$\exists \#_2 \forall |\Diamond \equiv \mathfrak{A} \exists \#_3 \& = \#_3 * \#_2 |\Diamond [\mathfrak{L} \#_3^\varepsilon.$$

Иначе говоря, финитность множества $\mathfrak{A}$ означает, что известен способ построения списка, членами которого являются все элементы множества $\mathfrak{A}$, и только они.

2.2. Множество $\mathfrak{A}$ называется *субфинитным*, если верна замкнутая формула

$$\exists \#_2 \forall \Diamond \supset \mathfrak{A} \exists \#_3 \& = \#_3 * \#_2 \mid \Diamond [\mathfrak{L} \#_3^\varepsilon.$$

Иначе говоря, субфинитность множества $\mathfrak{A}$ означает, что известен способ построения списка, членами которого являются все элементы множества $\mathfrak{A}$ — но, возможно, не только они.

2.3. Множество $\mathfrak{A}$ называется *квазифинитным*, если верна замкнутая формула

$$\exists \#_3 \neg \forall \#_2 \supset \mathfrak{C} \neg \forall \Diamond \equiv \mathfrak{A} \exists \#_3 \& = \#_3 * \#_2 \mid \Diamond [\mathfrak{L} \#_3^\varepsilon,$$

где $\mathfrak{C}$ — формула языка $\mathcal{Y}_1$ вида

$$(1) \quad \exists \Diamond \& \exists \#_4 = \mid \Diamond ** \#_2 \#_3 \#_4 \forall \Diamond < \mid \Diamond \vee \vee = \mid \Diamond \Diamond \exists \#_3 = \mid \Diamond ** \Diamond \#_3 \Diamond \\ \exists \#_2 \exists \#_3 \exists \#_4 \exists \#_5 \exists \#_6 = \mid \Diamond *** \#_5 \#_2 * \#_6 \#_3 ** \#_2 \#_3 \#_4,$$

выражающая отношение «число звеньев списка, являющегося значением переменной $\#_2$, не превосходит таковое для списка, являющегося значением переменной $\#_3$ ».

Иначе говоря, квазифинитность множества $\mathfrak{A}$ означает известность способа построения натурального числа n , для которого будет опровергаться приведением к нелепости предположение о невозможности списка элементов множества $\mathfrak{A}$ среди списков с не более чем n членами.

2.4. Множество $\mathfrak{A}$ называется *неинфинитным*, если верна замкнутая формула

$$\neg \forall \#_2 \neg \forall \Diamond \equiv \mathfrak{A} \exists \#_3 \& = \#_3 * \#_2 \mid \Diamond [\mathfrak{L} \#_3^\varepsilon.$$

Иначе говоря, неинфинитность множества $\mathfrak{A}$ означает возможность привести к нелепости предположение о невозможности списка, членами которого являлись бы все элементы множества $\mathfrak{A}$, и только они.

3. Как несложно заметить, каждое из определений 2.2, 2.3 и 2.4 имеет структуру вида

- (1) «осуществим вспомогательный объект A , для которого список L элементов рассматриваемого множества квазиосуществим среди списков, находящихся к объекту A в некотором заранее известном отношении».

Исключением является определение 2.1 — в случае *существенно проблемного* [5, § 1], т. е. удовлетворяющего условию

$$\neg\forall|\diamond \supset \neg\neg\mathfrak{A}\mathfrak{A},$$

множества $\mathfrak{A}$. Попытка переформулирования указанного определения в виде (1) давала бы утверждение о финитности множества $\neg\neg\mathfrak{A}$, а не множества $\mathfrak{A}$. Однако для *нормальных*⁴ множеств определение финитности также подпадает под указанную схему, что позволяет рассматривать последнюю в качестве основы для общего определения типа конечности.

4. Понятие *типа конечности* множеств мы вводим следующим образом:

4.1. Множество $\mathfrak{T}$ называется *типом конечности*, если для любого постоянного терма t осуществим постоянный терм u , удовлетворяющий соотношению $*ut \in \mathfrak{T}$.

Для произвольно фиксированного типа конечности $\mathfrak{T}$ мы вводим следующее понятие $\mathfrak{T}$ -конечного множества:

4.2. Пусть $\mathfrak{T}$ — тип конечности множеств. Множество $\mathfrak{A}$ называется $\mathfrak{T}$ -конечным, если осуществим постоянный терм u со свойством

$$\neg\forall\#_2\forall|\diamond \supset \&=|\diamond *u\#_2\mathfrak{T} \neg\forall|\diamond \equiv \mathfrak{A} \exists\#_3 \&= \#_3*\#_2|\diamond [\mathfrak{L}\#_3^\varepsilon.$$

Иначе говоря, $\mathfrak{T}$ -конечность множества $\mathfrak{A}$ означает осуществимость указания постоянного терма u , для которого список элементов $\mathfrak{A}$ квазиосуществим среди постоянных термов t со свойством $*ut \in \mathfrak{T}$.

⁴То есть заданных средствами языка $\mathcal{Y}_\omega$ и потому равнообъемных своим вторым отрицаниям.

Типы конечности множеств, описанные в пункте 2, допускают в рамках изложенной схемы следующую характеристику:

4.3. Пусть $\mathfrak{T}$ — тип конечности вида

$$\exists \#_2 = |\Diamond * \#_2 \#_2|.$$

Тогда $\mathfrak{T}$ -конечными являются множества с финитными вторыми отрицаниями, и только они.

4.4. Пусть $\mathfrak{T}$ — тип конечности вида

$$\exists \#_2 \exists \#_3 \& = |\Diamond * \#_2 \#_3 \vee \#_3 < \#_3 \vee = \#_3 \Diamond \exists \#_4 \exists \#_5 \& = \#_3 * \#_4 \#_5 [\mathfrak{L} * \#_2 \#_4]^\varepsilon.$$

Тогда $\mathfrak{T}$ -конечными являются субфинитные множества, и только они.

4.5. Пусть $\mathfrak{T}$ — тип конечности вида

$$\exists \#_2 \exists \#_3 \& = |\Diamond * \#_3 \#_2 \mathfrak{C}|,$$

где через $\mathfrak{C}$ обозначена формула 2(1). Тогда $\mathfrak{T}$ -конечными являются квазифинитные множества, и только они.

4.6. Пусть $\mathfrak{T}$ — тип конечности вида $= \Diamond \Diamond$. Тогда $\mathfrak{T}$ -конечными являются неинфинитные множества, и только они.

3 Сравнение типов конечности

1. Тип конечности $\mathfrak{T}$ естественно считать *мажорирующим* типом конечности $\mathfrak{S}$, если любое $\mathfrak{T}$ -конечное множество является также и $\mathfrak{S}$ -конечным. Используемая нами семантика языка $\mathcal{Y}_{\omega+1}$ не позволяет, однако, считать осмысленными условия, содержащие неограниченный теоретико-множественный квантор общности. Поэтому вышеописанное представление о мажорировании типов конечности нуждается в уточнении. Стандартным способом здесь является наложение ограничений на высоту рассматриваемых множеств:

1.1. Тип конечности $\mathfrak{T}$ называется *n-мажорирующим типом конечности $\mathfrak{S}$* , если любое нормальное $\mathfrak{T}$ -конечное множество не превосходящей *n* высоты является также $\mathfrak{S}$ -конечным.

Далее факт *n*-мажорирования типа конечности $\mathfrak{S}$ типом конечности $\mathfrak{T}$ мы будем обозначать символом $\mathfrak{T} \succ_n \mathfrak{S}$.

2. В дальнейшем два постоянных терма мы будем называть *равносоставленными*, если каждое звено одного из них является также звеном второго. Кроме того, мы введем следующее представление о *разрешимости* типа конечности:

2.1. Тип конечности $\mathfrak{T}$ называется *разрешимым*, если множество $\mathfrak{T}$ является порождаемым, а также может быть указано порождаемое множество $\mathfrak{T}'$, удовлетворяющее следующим условиям:

2.1.1. Для любых постоянного терма u и двух равносоставленных постоянных термов t и s невозможно одновременное выполнение соотношений $*ut \in \mathfrak{T}$ и $*us \in \mathfrak{T}'$.

2.1.2. Для любых двух постоянных термов u и t найдется равносоставленный с t постоянный терм s , удовлетворяющий соотношению $*us \in \bigvee \mathfrak{T}\mathfrak{T}'$.

В частности, несложным образом устанавливается разрешимость всех типов конечности § 2.4.3–§ 2.4.6.

3. Основной целью настоящего параграфа является доказательство следующего утверждения:

3.1. Пусть $\mathfrak{T}$ и $\mathfrak{S}$ — два разрешимых типа конечности множеств. Тогда при любом $n \geq 1$ для выполнения соотношения $\mathfrak{T} \succ_n \mathfrak{S}$ необходимо и достаточно, чтобы для любого постоянного терма u , удовлетворяющего условию

$$(1) \quad \exists \#_2 \exists |\diamond \& = |\diamond * u \#_2 \mathfrak{T},$$

был осуществим такой постоянный терм v , что для любого постоянного терма t со свойством $*ut \in \mathfrak{T}$ найдется равносоставленный ему постоянный терм s со свойством $*vs \in \mathfrak{S}$.

Доказательство. Достаточность сформулированного условия очевидна. Поэтому для завершения доказательства утверждения 3.1 остается установить необходимость этого условия.

В дальнейших рассуждениях постоянный терм u со свойством (1) мы будем предполагать зафиксированным.

Обозначим через $(t : x \Rightarrow y)$ формулу языка $\mathcal{Y}_1$, выражающую отношение «постоянный терм t есть перевод [4, § 13] схемы [8, § 27] нормального алгорифма над алфавитом $\diamond^*$, перерабатывающего значение переменной x в значение переменной y ». Далее,

обозначим через $\mathfrak{S}'$ порождаемое множество, отвечающее разрешимому типу конечности $\mathfrak{S}$ согласно определению 2.1. Наконец, обозначим через $\mathcal{A}$ нормальный алгорифм над алфавитом $\diamond*$, применимый к произвольно фиксированному постоянному терму v в том и только том случае, когда осуществимы два равносоставленных постоянных терма t и s со свойствами $*ut \in \mathfrak{T}$ и $*vs \in \mathfrak{S}'$. При этом будет предполагаться, что значением $\mathcal{A}(v)$ всегда является постоянный терм, удовлетворяющий соотношению $*u\mathcal{A}(v) \in \mathfrak{T}$ и обладающий равносоставленным постоянным термом s со свойством $*vs \in \mathfrak{S}'$.

Зафиксируем произвольным образом некоторый постоянный терм r со свойством $*ur \in \mathfrak{T}$, и сопоставим каждому постоянно-терму w имеющее высоту 1 множество $\mathcal{K}(w)$ вида

$$\begin{aligned} \mathcal{K}(w) = & \&\vee\exists\#_2 \&=\#_2 *r \mid \diamond [\mathfrak{L}\#_2^\varepsilon \exists\#_2\exists\#_3 \mathfrak{K}_w \\ & \supset \exists\#_2\exists\#_3 \mathfrak{K}_w \exists\#_2\exists\#_3 \&\mathfrak{K}_w \exists\#_2 \&=\#_2 * \#_3 \mid \diamond [\mathfrak{L}\#_2^\varepsilon, \end{aligned}$$

где положено

$$\mathfrak{K}_w = \exists \mid \diamond \&\&=\mid \diamond w (w : \mid \diamond \Rightarrow \#_2) ([\mathcal{A}^\tau : \#_2 \Rightarrow \#_3).$$

В том случае, когда постоянный терм w является переводом схемы самоприменимого⁵ нормального алгорифма, результат самоприменения которого представляет собой постоянный терм v из области применимости алгорифма $\mathcal{A}$, элементы множества $\mathcal{K}(w)$ перечисляются списком $\mathcal{A}(v)$. В противном случае они перечисляются списком r . Соответственно, при любом выборе постоянного терма w среди постоянных термов t со свойством $*ut \in \mathfrak{T}$ квазиосуществим список элементов множества $\mathcal{K}(w)$.

Предположим теперь, что выполняется соотношение $\mathfrak{T} \succ_n \mathfrak{S}$. Это означает осуществимость нормального алгорифма $\mathcal{B}$ над алфавитом $\diamond*$, применимого к переводу любого множества $\mathfrak{A}$ не превосходящей n высоты, список элементов которого квазиосуществим среди постоянных термов t со свойством $*ut \in \mathfrak{T}$, и перерабатывающего указанный перевод в такой постоянный терм v , что список элементов множества $\mathfrak{A}$ квазиосуществим среди постоянных термов s со свойством $*vs \in \mathfrak{S}$. Тогда, согласно вышесказанному, осуществим нормальный алгорифм $\mathcal{C}$ над алфавитом $\diamond*$, перерабатывающий любой постоянный терм w в такой

⁵То есть применимого к переводу своей схемы.

постоянный терм v , что среди постоянных термов s со свойством $*vs \in \mathfrak{S}$ квазиосуществим список элементов множества $\mathcal{K}(w)$.

По своему построению алгоритм $\mathcal{C}$ является самоприменимым, причем результатом его самоприменения является такой постоянный терм v , что среди постоянных термов s со свойством $*vs \in \mathfrak{S}$ квазиосуществим список элементов множества $\mathcal{K}(\mathcal{C}^\tau)$. Однако последнее, по построению алгоритмов $\mathcal{K}$ и $\mathcal{A}$, автоматически означает неприменимость алгоритма $\mathcal{A}$ к постоянному терму v . Тем самым для любого постоянного терма t со свойством $*ut \in \mathfrak{T}$ найдется равносоставленный ему постоянный терм s со свойством $*vs \in \mathfrak{S}$, что и означает справедливость доказываемого утверждения. Q.E.D.

4. В качестве простейшего приложения утверждения 3.1 приведем основанные на нем доказательства результатов А.А. Маркова о сравнении типов конечности § 2.2.1–§ 2.2.4.

Рассмотрим постоянный терм $u \equiv **\diamond\diamond*\diamond\diamond$. Легко видеть, что для любого постоянного терма v найдется постоянный терм t , не равносоставленный с v , но не обладающий звеньями, не являющимися звеньями списка u . Тем самым, утверждение о финитности любого субфинитного множества является неверным.

Рассмотрим постоянный терм $u \equiv *\diamond\diamond$. Легко видеть, что для любого постоянного терма v найдется постоянный терм t , обладающий ровно одним не входящим в v звеном. Тем самым, утверждение о субфинитности любого квазифинитного множества является неверным.

Рассмотрим постоянный терм $u \equiv \diamond$. Легко видеть, что для любого постоянного терма v найдется постоянный терм t , число попарно графически различных звеньев которого превышает число звеньев v . Тем самым утверждение о квазифинитности любого неинфинитного множества является неверным.

Отметим, что неверность утверждения о финитности всех неинфинитных множеств может также быть выведена из теоремы [11, гл. 5, Теорема XV (b)].

4 Дополнительные замечания

1. Одним из математических понятий, определение которого опирается на понятие конечного множества, является понятие

иммунного множества. С точки зрения вышеизложенной схемы, указанное определение может быть сформулировано — при конструктивном понимании математических суждений — следующим образом:

1.1. *Инфинитное множество $\mathfrak{A}$ называется иммунным, если неверно, что для любого натурального числа n найдется финитное множество $\mathfrak{A}_n \subseteq \mathfrak{A}$, содержащее не менее n попарно различных элементов.*

Одна из форм [11, гл. 9, Теорема XV] определения понятия гипериммунного множества при этом легко переписывается следующим образом:

1.2. *Инфинитное множество $\mathfrak{A}$ называется гипериммунным, если неверно, что для любого натурального числа n найдется субфинитное множество $\mathfrak{A}_n \subseteq \mathfrak{A}$, квазисодержащее не менее n попарно различных элементов.*

Таким образом, хорошо известное различие между понятиями иммунного и гипериммунного множества по существу сводится к различию между понятиями финитного и субфинитного множества.

2. Некоторые характерные различия конструктивного и «классического» вариантов математического анализа также легко находят свое объяснение в «классической» установке подразумевать конечные множества всех возможных типов финитными. Здесь может быть указана, в частности, теорема об эквивалентности определений интеграла по Риману (в виде предела интегральных сумм) и по Дарбу (в виде сечения в множестве интегралов ступенчатых оценок рассматриваемой функции), с точки зрения конструктивного направления опровергаемая на примере [3]. Основным моментом «классического» доказательства, нарушающимся при этом с конструктивной точки зрения, является именно финитность (заведомо субфинитной) совокупности отрезков интегрального разбиения, содержащих «большие» колебания интегрируемой функции.

Литература

- [1] Veldman W. Some intuitionistic variations on the notion of a finite set of natural numbers// Repsectives on negation. Tilburg Univ. Press, Tilburg, 1995. P. 177-202.

- [2] *Владимиров А. А.* Об иерархиях конечных множеств// ДАН. 2006. Т. 406, № 3. С. 295-297.
- [3] *Владимиров А. А.* О сравнении интегралов Дарбу и Римана в конструктивном математическом анализе// Препринт доступен на сайте <http://arxiv.org/abs/0911.2892>
- [4] *Владимиров А. А., Домбровский-Кабанченко М. Н.* Ступенчатая семантическая система. М.: Изд-во ВЦ РАН, 2009.
- [5] *Заславский И. Д.* Некоторые свойства конструктивных вещественных чисел и конструктивных функций// Труды матем. ин-та им. В. А. Стеклова. Т. 67. С. 385–457.
- [6] *Кушнер Б. А.* Лекции по конструктивному математическому анализу. М.: Наука, 1973.
- [7] *Марков А. А.* Попытка построения логики конструктивной математики// Исследования по теории алгорифмов и математической логике. Т. 2. М.: Изд-во ВЦ АН СССР, 1976. С. 3-31.
- [8] *Марков А. А., Нагорный Н. М.* Теория алгорифмов. М.: ФАЗИС, 1996.
- [9] *Нагорный Н. М.* Монолитно ли понятие конечного множества? (По поводу одной неопубликованной работы А. А. Маркова)// Марков А. А. Избр. труды. Т. 2. М.: Изд-во МЦНМО, 2003. С. 527-534.
- [10] *Нагорный Н. М., Шанин Н. А.* Андрей Андреевич Марков (к шестидесятилетию со дня рождения)// Успехи матем. наук. 1964. Т. 19, № 3. С. 207-223.
- [11] *Роджерс Х.* Теория рекурсивных функций и эффективная вычислимость. М.: Мир, 1972.