Секвенциальные аксиоматизации пропозициональных логик нельсоновского типа¹

В. М. Попов

ABSTRACT. The sequent systems axiomatizing four Nelson's type logics are presented.

Ключевые слова: секвенция, исчисление, паранормальная логика, паранепротиворечивая логика, парapolная логика

Формулируются свободные от сечения секвенциальные аксиоматизации четырех пропозициональных логик, родственных логикам, определяемым построенными в [5] и в [6] исчислениями N и N^- . В [5] предложены секвенциальные исчисления N_s и N_s^- , первое из которых эквивалентно исчислению N , а второе — исчислению N^- . Построенные ниже секвенциальные исчисления $\text{GPComp}(N)$ и $\text{GPar}(N)$ эквивалентны с точностью до несущественных деталей секвенциальному исчислению, являющемуся пропозициональной частью исчисления N_s , и секвенциальному исчислению, являющемуся пропозициональной частью исчисления N_s^- соответственно.

Язык L всех рассматриваемых здесь логик есть стандартный пропозициональный язык, алфавиту которого принадлежат все следующие символы и только они: $\&$, $\vee$, $\supset$ (бинарные логические связки языка L), $\neg$ (унарная логическая связка языка L), $)$ и $($ (технические символы языка L), $p_1, p_2, p_3, \dots$ (пропозициональные переменные языка L). Допускаем применение обычных соглашений об опускании скобок в L -формулах и используем «формула» вместо « L -формула». Опишем исчисления

¹Работа выполнена при поддержке РГНФ, проект № 10-03-00570а.

$\text{HPar}(\mathbf{N})$, $\text{HPContPComp}(\mathbf{N})$, $\text{HPCont}(\mathbf{N})$ и $\text{HPComp}(\mathbf{N})$ гильбертовского типа, индуцирующие интересные нас логики. Множеству всех аксиом исчисления $\text{HPar}(\mathbf{N})$ принадлежат все те и только те формулы, каждая из которых имеет хотя бы один из следующих семнадцати видов (здесь и далее A , B и C есть формулы):

- (I) $(A \supset B) \supset ((B \supset C) \supset (A \supset C))$,
- (II) $A \supset (A \vee B)$,
- (III) $A \supset (B \vee A)$,
- (IV) $(A \supset C) \supset ((B \supset C) \supset ((A \vee B) \supset C))$,
- (V) $(A \& B) \supset A$,
- (VI) $(A \& B) \supset B$,
- (VII) $(C \supset A) \supset ((C \supset B) \supset (C \supset (A \& B)))$,
- (VIII) $(A \supset (B \supset C)) \supset ((A \& B) \supset C)$,
- (IX) $((A \& B) \supset C) \supset (A \supset (B \supset C))$,
- (X) $\neg(A \vee B) \supset (\neg A \& \neg B)$,
- (XI) $(\neg A \& \neg B) \supset \neg(A \vee B)$,
- (XII) $\neg(A \& B) \supset (\neg A \vee \neg B)$,
- (XIII) $(\neg A \vee \neg B) \supset \neg(A \& B)$,
- (XIV) $\neg(A \supset B) \supset (\neg A \& B)$,
- (XV) $(\neg A \& B) \supset \neg(A \supset B)$,
- (XVI) $\neg\neg A \supset A$,
- (XVII) $A \supset \neg\neg A$.

Множеству всех аксиом исчисления $\text{HPContPComp}(\mathbf{N})$ принадлежат все те и только те формулы, каждая из которых имеет хотя бы один из видов (I)-(XVII) или имеет вид $(A \& \neg A) \supset (B \vee \neg B)$. Множеству всех аксиом исчисления $\text{HPCont}(\mathbf{N})$ принадлежат все те и только формулы, каждая из которых имеет хотя бы один из видов (I)-(XVII) или имеет вид $(B \vee \neg B)$. Множеству всех аксиом исчисления $\text{HPComp}(\mathbf{N})$ принадлежат все те и только формулы, каждая из которых имеет хотя бы один из видов (I)-(XVII) или имеет вид $(A \& \neg A) \supset B$. Каждое из исчислений $\text{HPar}(\mathbf{N})$, $\text{HPContPComp}(\mathbf{N})$, $\text{HPCont}(\mathbf{N})$, $\text{HPComp}(\mathbf{N})$ имеет единственное правило вывода — правило *modus ponens* в L . Во всяком из этих исчислений выводы (в частности, доказательства) строятся обычным для гильбертовского типа исчис-

лений образом. Опираясь на вышеприведенные определения исчислений $\text{HPar}(N)$, $\text{HPContPComp}(N)$, $\text{HPCont}(N)$, $\text{HPComp}(N)$ и данные в [2] определения исчислений HPar , HPContPComp , HPCont , HPComp , замечаем, что язык всех указанных исчислений есть L , каждое из этих исчислений имеет единственное правило вывода — правило *modus ponens* в L , выводы (в частности, доказательства) во всех этих исчислениях строятся обычным для гильбертовского типа исчислений образом, множество всех аксиом исчисления HPar (исчисления HPContPComp , исчисления HPCont , исчисления HPComp) есть объединение множества всех аксиом исчисления $\text{HPar}(N)$ (исчисления $\text{HPContPComp}(N)$, исчисления $\text{HPCont}(N)$, исчисления $\text{HPComp}(N)$ соответственно) с множеством всех формул вида $((A \supset B) \supset A) \supset A$. Кроме того, можно доказать, что формула $((p_1 \supset p_2) \supset p_1) \supset p_1$ недоказуема ни в одном из исчислений $\text{HPar}(N)$, $\text{HPContPComp}(N)$, $\text{HPCont}(N)$, $\text{HPComp}(N)$. Таким образом, исчисления $\text{HPar}(N)$, $\text{HPContPComp}(N)$, $\text{HPCont}(N)$, $\text{HPComp}(N)$ являются собственными сужениями исчислений HPar , HPContPComp , HPCont , HPComp соответственно. Определяем $\text{Par}(N)$ как множество всех формул, доказуемых в $\text{HPar}(N)$. Аналогично определяем $\text{PContPComp}(N)$, $\text{PCont}(N)$ и $\text{PComp}(N)$. Термины «логика», «паранепротиворечивая логика» и «паранормальная логика» далее используем в соответствии с их определениями, данными в [3]. Можно доказать, что

- (а) $\text{Par}(N)$ и $\text{PContPComp}(N)$ есть различные паранормальные логики, при этом $\text{Par}(N) \subseteq \text{PContPComp}(N)$,
- (б) $\text{PCont}(N)$ есть паранепротиворечивая, но не параполная логика,
- (в) $\text{PComp}(N)$ есть параполная, но не паранепротиворечивая логика,
- (г) $\text{PContPComp}(N) \subseteq \text{PCont}(N) \cap \text{PComp}(N)$, но $\text{PContPComp}(N)$ и $\text{PCont}(N) \cap \text{PComp}(N)$ не равны.

Приступим теперь к конструированию секвенциальных исчислений $\text{GPar}(N)$, $\text{GPContPComp}(N)$, $\text{GPCont}(N)$, $\text{GPComp}(N)$. Построение каждого из этих исчислений аналогично построению исчисления GPContPComp в работе [3]. Обозначая через

ВИП(N) секвенциальное правило, являющееся множеством всех упорядоченных пар вида $\langle (A \bullet \Gamma) \rightarrow B, \Gamma \rightarrow A \supset B \rangle$, где Γ — последовательность формул, определяем множество всех правил вывода каждого из исчислений $GPar(N)$, $GPContPComp(N)$, $GPCont(N)$ и $GPComp(N)$ как такое множество M , что $\Pi \in M$ тогда и только тогда, когда Π есть ВИП(N) или любое, исключая ВИП, правило вывода исчисления $GPContPComp$. Множество всех основных секвенций исчисления $GPar(N)$ есть множество всех секвенций вида $A \rightarrow A$. Множество всех основных секвенций исчисления $GPContPComp(N)$ есть объединение множества всех основных секвенций исчисления $GPar(N)$ с множеством всех секвенций вида $A, \neg A \rightarrow B, \neg B$. Множество всех основных секвенций исчисления $GPCont(N)$ есть объединение множества всех основных секвенций исчисления $GPar(N)$ с множеством всех секвенций вида $\rightarrow A, \neg A$. Множество всех основных секвенций исчисления $GPComp(N)$ есть объединение множества всех основных секвенций исчисления $GPar(N)$ с множеством всех секвенций вида $A, \neg A \rightarrow$. Выводы во всех секвенциальных исчислениях $GPar(N)$, $GPContPComp(N)$, $GPCont(N)$ и $GPComp(N)$ строятся обычным для этого типа исчислений образом. Для каждого из этих исчислений доказана теорема об устранимости сечения. С использованием этой теоремы показано, что исчисления $GPar(N)$, $GPContPComp(N)$, $GPCont(N)$, $GPComp(N)$ являются секвенциальными аксиоматизациями логик $Par(N)$, $PContPComp(N)$, $PCont(N)$, $PComp(N)$, соответственно. Точнее, доказана теорема о том, что для всякой логики $\mathbf{L}$ из $\{Par(N), PContPComp(N), PCont(N), PComp(N)\}$ и для всякой формулы A верно, что секвенция $\rightarrow A$ выводима в $\mathbf{GL}$ тогда и только тогда, когда $A \in \mathbf{L}$. Можно доказать также следующее **утверждение**: позитивный фрагмент любой из логик $Par(N)$, $PContPComp(N)$, $PCont(N)$, $PComp(N)$ является позитивным фрагментом интуиционистской пропозициональной логики, язык которой есть L . В свете **утверждения** ясно, что ни одна из логик $Par(N)$, $PContPComp(N)$, $PCont(N)$, $PComp(N)$ не имеет конечной характеристической матрицы. Тем не менее, все эти логики разрешимы. Разрешимость любой из указанных логик вытекает из разрешимости построенного выше секвенциального исчисления, аксиоматизирующего эту логику. В свою

очередь, для каждого исчисления $GPar(N)$, $GParComp(N)$, $GParCont(N)$, $GParComp(N)$ разрешимость доказывается генценовским методом, который впервые применен в [1]. При этом в ходе применения генценовского метода для доказательства разрешимости исчисления $\mathbf{G}$ из $\{GPar(N), GParComp(N), GParCont(N), GParComp(N)\}$ используется нижеследующая теорема об обобщенной подформульности $\mathbf{G}$ -выводов, а не аналог теоремы 2.513 из [1] (теоремы о подформульности LI -выводов и LK -выводов).

ТЕОРЕМА. Пусть $\mathbf{G} \in \{GPar(N), GParComp(N), GParCont(N), GParComp(N)\}$.

Если формула A есть подформула формулы, входящей в некоторую секвенцию, принадлежащую $\mathbf{G}$ -выводу, последняя секвенция которого есть S , то

- (1) *если A не имеет вид $\neg B$ ни для какой формулы B , то A есть подформула некоторой формулы, входящей в S ,*
- (2) *если A имеет вид $\neg B$ для некоторой формулы B , то по крайней мере одна из формул B или $\neg B$ есть подформула некоторой формулы, входящей в S .*

В заключение заметим, что естественно возникающая проблема построения свободной от сечения секвенциальной аксиоматизации логики $PCont(N) \cap PComp(N)$ открыта.

Литература

- [1] Генцен Г. Исследования логических выводов // Математическая теория логического вывода. М., 1967. С.9-74.
- [2] Попов В.М. Между Par и множеством всех формул // Шестые смирновские чтения по логике. Материалы международной научной конференции 17-19 июня 2009. М., 2009. С. 93-95.
- [3] Попов В.М. Секвенциальная аксиоматизация паранормальной логики $PContPComp$ // В настоящем сборнике.
- [4] Смирнов В.А. Формальный вывод и логические исчисления // Смирнов В.А. Теория логического вывода. М., 1999. С. 16-233.
- [5] Almkud A., Nelson D. Constructible falsity and inexact predicates // J. Symb. Log. 1984. Vol. 49. № 1. P. 231-233.
- [6] Nelson D. Constructible falsity // J. Symb. Log. 1949. Vol. 14. № 1. P. 16-26.