Естественные p -логики

Н. Е. ТОМОВА

ABSTRACT. In this paper the notion of p -logic is generalied and the class of natural p -logics and it's functional properties are considered. It is shown that paraconsistent logic $\mathbf{P}^1$ and paracomplete logic $\mathbf{I}^1$ are functionally equivalent. In conclusion natural p -logics are presented as a lattice.

Ключевые слова: трехзначные логики, p -логики, естественные p -логики, решетка естественных p -логик, функциональные свойства p -логик

В работе [3] по аналогии с понятием p -алгебры и дважды p -алгебры вводится понятие p -логики и дважды p -логики. P -логика задается связками $\vee, \wedge, \neg$, дуальная p -логика — связками $\vee, \wedge, \neg$. $\vee$ и $\wedge$ есть обычные $\max$ (дизъюнкция) и $\min$ (конъюнкция), а $\neg$ и $\neg$ задаются следующими таблицами:

p	$\neg p$	$\neg p$
1	0	0
$\frac{1}{2}$	0	1
0	1	1

Логика со связками $\vee, \wedge, \neg$ и $\neg$ есть дважды p -логика.

В данной статье обобщается понятие p -логики и рассматривается класс естественных p -логик, подробно исследуются функциональные свойства этого класса систем.

При определении класса естественных p -логик ключевую роль играет заданный нами в [4] класс естественных импликаций.

Посредством импликации¹ следующим образом определим дизъюнкцию:

$$x \vee y =_{Df} (x \rightarrow_i y) \rightarrow_i y \quad (1 \leq i \leq 28).$$

¹Здесь и далее импликации с указанными номерами см. в [4].

В результате получаем 18 уникальных дизъюнкций. Далее определим двойственную связку — конъюнкцию:

$$x \wedge^i y =_{Df} \sim (\sim x \vee^i \sim y) (1 \leq i \leq 18).$$

Таким образом, имеем 18 естественных p -логик (логик со связками $\{\vee^i, \wedge^i, \sim\}$, где $(1 \leq i \leq 18)$) и соответственно 18 естественных дуальных p -логик (логик со связками $\{\vee^i, \wedge^i, \lceil\}$, где $(1 \leq i \leq 18)$). Приведем таблицы истинности, соответствующие дизъюнкциям и конъюнкциям естественных p -логик, и перенумеруем их.

$\vee^1$	1	$\frac{1}{2}$	0
1	1	1	1
$\frac{1}{2}$	1	$\frac{1}{2}$	1
0	1	$\frac{1}{2}$	0

$\wedge^1$	1	$\frac{1}{2}$	0
1	1	$\frac{1}{2}$	0
$\frac{1}{2}$	0	$\frac{1}{2}$	0
0	0	0	0

$\vee^2$	1	$\frac{1}{2}$	0
1	1	1	1
$\frac{1}{2}$	1	$\frac{1}{2}$	0
0	1	$\frac{1}{2}$	0

$\wedge^2$	1	$\frac{1}{2}$	0
1	1	$\frac{1}{2}$	0
$\frac{1}{2}$	0	$\frac{1}{2}$	0
0	0	0	0

$\vee^3$	1	$\frac{1}{2}$	0
1	1	1	1
$\frac{1}{2}$	1	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{2}$
0	1	$\frac{1}{2}$	0

$\wedge^3$	1	$\frac{1}{2}$	0
1	1	$\frac{1}{2}$	0
$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{2}$	0
0	0	0	0

$\vee^4$	1	$\frac{1}{2}$	0
1	1	1	1
$\frac{1}{2}$	1	0	1
0	1	0	0

$\wedge^4$	1	$\frac{1}{2}$	0
1	1	1	0
$\frac{1}{2}$	0	1	0
0	0	0	0

$\vee^5$	1	$\frac{1}{2}$	0
1	1	1	1
$\frac{1}{2}$	1	0	0
0	1	0	0

$\wedge^5$	1	$\frac{1}{2}$	0
1	1	1	0
$\frac{1}{2}$	1	1	0
0	0	0	0

$\vee^6$	1	$\frac{1}{2}$	0
1	1	1	1
$\frac{1}{2}$	1	0	$\frac{1}{2}$
0	1	0	0

$\wedge^6$	1	$\frac{1}{2}$	0
1	1	1	0
$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{2}$	1	0
0	0	0	0

$\vee^7$	1	$\frac{1}{2}$	0
1	1	1	1
$\frac{1}{2}$	1	1	1
0	1	1	0

$\wedge^7$	1	$\frac{1}{2}$	0
1	1	0	0
$\frac{1}{2}$	0	0	0
0	0	0	0

$\vee^8$	1	$\frac{1}{2}$	0
1	1	1	1
$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{2}$	1	1
0	1	1	0

$\wedge^8$	1	$\frac{1}{2}$	0
1	$\frac{1}{2}$	0	0
$\frac{1}{2}$	0	0	$\frac{1}{2}$
0	0	0	0

$\vee^9$	1	$\frac{1}{2}$	0
1	1	1	1
$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{2}$	1
0	1	$\frac{1}{2}$	0

$\wedge^9$	1	$\frac{1}{2}$	0
1	1	$\frac{1}{2}$	0
$\frac{1}{2}$	0	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{2}$
0	0	0	0

$\vee^{10}$	1	$\frac{1}{2}$	0
1	1	1	1
$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{2}$	1
0	1	1	0

$\wedge^{10}$	1	$\frac{1}{2}$	0
1	1	0	0
$\frac{1}{2}$	0	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{2}$
0	0	0	0

$\vee^{11}$	1	$\frac{1}{2}$	0
1	1	1	1
$\frac{1}{2}$	1	$\frac{1}{2}$	1
0	1	1	0

$\wedge^{11}$	1	$\frac{1}{2}$	0
1	1	0	0
$\frac{1}{2}$	0	$\frac{1}{2}$	0
0	0	0	0

$\vee^{12}$	1	$\frac{1}{2}$	0
1	1	1	1
$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{2}$	0	1
0	1	0	0

$\wedge^{12}$	1	$\frac{1}{2}$	0
1	1	1	0
$\frac{1}{2}$	0	1	$\frac{1}{2}$
0	0	0	0

$\vee^{13}$	1	$\frac{1}{2}$	0
1	1	$\frac{1}{2}$	1
$\frac{1}{2}$	1	0	1
0	1	1	0
$\wedge^{13}$	1	$\frac{1}{2}$	0
1	1	0	0
$\frac{1}{2}$	0	1	0
0	0	$\frac{1}{2}$	0
$\vee^{14}$	1	$\frac{1}{2}$	0
1	1	$\frac{1}{2}$	1
$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{2}$	0	1
0	1	1	0
$\wedge^{14}$	1	$\frac{1}{2}$	0
1	1	0	0
$\frac{1}{2}$	0	1	$\frac{1}{2}$
0	0	$\frac{1}{2}$	0
$\vee^{15}$	1	$\frac{1}{2}$	0
1	1	$\frac{1}{2}$	1
$\frac{1}{2}$	1	$\frac{1}{2}$	1
0	1	$\frac{1}{2}$	0
$\wedge^{15}$	1	$\frac{1}{2}$	0
1	1	$\frac{1}{2}$	0
$\frac{1}{2}$	0	$\frac{1}{2}$	0
0	0	$\frac{1}{2}$	0
$\vee^{16}$	1	$\frac{1}{2}$	0
1	1	$\frac{1}{2}$	1
$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{2}$	1
0	1	$\frac{1}{2}$	0
$\wedge^{16}$	1	$\frac{1}{2}$	0
1	1	$\frac{1}{2}$	0
$\frac{1}{2}$	0	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{2}$
0	0	$\frac{1}{2}$	0
$\vee^{17}$	1	$\frac{1}{2}$	0
1	1	1	1
$\frac{1}{2}$	1	$\frac{1}{2}$	1
0	1	0	0
$\wedge^{17}$	1	$\frac{1}{2}$	0
1	1	1	0
$\frac{1}{2}$	0	$\frac{1}{2}$	0
0	0	0	0
$\vee^{18}$	1	$\frac{1}{2}$	0
1	1	1	1
$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{2}$	1
0	1	0	0
$\wedge^{18}$	1	$\frac{1}{2}$	0
1	1	1	0
$\frac{1}{2}$	0	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{2}$
0	0	0	0

Обратим внимание на то, что среди естественных p -логик присутствует p -логика со связками $\vee^3$ и $\wedge^3$. Заметим, что $\vee^3$ и $\wedge^3$ есть обычные $\max$ (дизъюнкция) и $\min$ (конъюнкция), т.е. $\vee^3, \wedge^3, \lceil$ есть p -логика, описанная в [3]. В этой же работе показано, что трехзначная логика Лукасевича $\mathbf{L}_3$ есть дважды p -логика, т.е. в нашем обозначении логика со связками $\vee^3, \wedge^3, \lceil, \rfloor$.

Рассмотрим функциональные свойства полученного класса естественных p -логик, а также выясним, какие известные трехзначные логики им соответствуют.

УТВЕРЖДЕНИЕ 1. *Естественные p -логики со связками $\vee^i, \wedge^i, \lceil$ и $\vee^i, \wedge^i, \rfloor$, где $(1 \leq i \leq 18$ и $i \neq 3)$, функционально эквивалентны.*

Доказательство. Функциональная эквивалентность логик со связками $\vee^i, \wedge^i, \lceil$ и $\vee^i, \wedge^i, \rfloor$, где $(1 \leq i \leq 18$ и $i \neq 3)$ следует из соотношений (1)–(3):

$$(1) \quad i \in \{1, 4, 7, 8, 9, 10, 11, 12, 13, 14, 15, 16, 17, 18\}$$

- $$\begin{aligned} & [p =_{Df}] (p \wedge^i \lceil p), \\ & \lceil p =_{Df} \lceil (p \vee^i \lceil \lceil p); \\ (2) \quad & i \in \{2, 5\} \\ & [p =_{Df}] ((p \vee^i \lceil p) \wedge^i \lceil p), \\ & \lceil p =_{Df} \lceil ((p \wedge^i \lceil p) \vee^i \lceil \lceil p); \\ (3) \quad & [p =_{Df}] (p \vee^6 \lceil p), \\ & \lceil p =_{Df} \lceil (p \wedge^6 \lceil p). \end{aligned}$$

Утверждение доказано.

Q.E.D.

Таким образом, поскольку логики со связками $\vee^i, \wedge^i, \lceil$ и $\vee^i, \wedge^i, \lceil$, где $(1 \leq i \leq 18 \text{ и } i \neq 3)$, функционально эквивалентны, достаточно будет рассмотреть логики со связками $\vee^i, \wedge^i, \lceil$.

Далее, нам понадобится следующее утверждение.

УТВЕРЖДЕНИЕ 2. *В естественных p -логиках со связками $\vee^i, \wedge^i, \lceil$, где $i \in \{1, 2, 6, 8, 9, 10, 12, 13, 14, 15, 16, 18\}$, выражимо отрицание $\sim$.*

Доказательство. В силу ранее доказанного утверждения 1 доказательство утверждения 2 следует из соотношений (1)–(4):

- $$\begin{aligned} (1) \quad & i \in \{1, 2, 9, 15, 16\} \\ & \sim p =_{Df} \lceil p \wedge^i (\lceil p \vee^i p); \\ (2) \quad & i \in \{8, 10, 12, 14, 18\} \\ & \sim p =_{Df} (p \vee^i \lceil p) \wedge^i \lceil p; \\ (3) \quad & \sim p =_{Df} (p \vee^6 \lceil p) \wedge^6 \lceil p; \\ (4) \quad & \sim p =_{Df} \lceil p \wedge^{13} (\lceil p \vee^{13} p). \end{aligned}$$

Утверждение доказано.

Q.E.D.

Перейдем к рассмотрению взаимоотношений между естественными p -логиками.

УТВЕРЖДЕНИЕ 3. *P -логики со связками $\vee^i, \wedge^i, \lceil$ ($i \in \{4, 5, 7\}$) попарно функционально эквивалентны.*

Доказательство. При доказательстве будем учитывать ранее доказанное утверждение 1.

Сначала покажем эквивалентность логик со связками $\vee^5, \wedge^5, \sqcap$ и $\vee^7, \wedge^7, \sqcap$. Это верно, в силу следующих соотношений:

$$\begin{aligned} (1) \quad & p \vee^7 q =_{Df} \sqcap p \vee^5 \sqcap q, \\ & p \wedge^7 q =_{Df} (p \vee^5 p) \wedge^5 (q \vee^5 q); \\ (2) \quad & p \vee^5 q =_{Df} \sqcap [p \vee^7 \sqcap [q, \\ & p \wedge^5 q =_{Df} (p \vee^7 p) \wedge^7 (q \vee^7 q). \end{aligned}$$

Далее покажем, что логика со связками $\vee^7, \wedge^7, \sqcap$ функционально эквивалентна логике со связками $\vee^4, \wedge^4, \sqcap$.

Это справедливо в силу следующих соотношений:

$$\begin{aligned} (1) \quad & p \vee^7 q =_{Df} \sqcap p \vee^4 \sqcap q, \\ & p \wedge^7 q =_{Df} (p \vee^4 p) \wedge^4 (q \vee^4 q); \\ (2) \quad & p \vee^4 q =_{Df} ((\sqcap q \wedge^7 \sqcap p) \vee^7 \sqcap [q] \vee^7 \sqcap [p, \\ & p \wedge^4 q =_{Df} ((\sqcap q \wedge^7 [q] \wedge^7 \sqcap p) \vee^7 (p \wedge^7 q)). \end{aligned}$$

Таким образом, утверждение доказано.

Q.E.D.

Заметим, что паранепротиворечивая логика $\mathbf{P}^1$ [10] есть логика с исходными связками $\sqcap$ и $\rightarrow_7$. Оказалось, $\mathbf{P}^1$ можно представить в терминах *естественных* p -логик.

УТВЕРЖДЕНИЕ 4. *Логика $\mathbf{P}^1$ есть p -логика со связками $\vee^7, \wedge^7, \sqcap$.*

Доказательство. Покажем, что логика со связками $\sqcap$ и $\rightarrow_7$ функционально эквивалентна логике со связками $\vee^7, \wedge^7, \sqcap$. Это справедливо, поскольку имеют место следующие соотношения:

$$\begin{aligned} (1) \quad & p \vee^7 q =_{Df} ((p \rightarrow_7 q) \rightarrow_7 q), \\ & p \wedge^7 q =_{Df} (\sqcap p \rightarrow_7 q) \text{ или } p \wedge^7 q =_{Df} (\sqcap p \vee^7 \sqcap q); \end{aligned}$$

$$(2) \ p \rightarrow_7 q =_{Df} (\lceil (p \vee^7 p) \rceil \vee^7 (q \vee^7 q)).$$

Утверждение доказано.

Q.E.D.

В работе [11] исследуется так называемая трехзначная *параллельная* логика $\mathbf{I}^1$, дуальная к $\mathbf{P}^1$. Это логика с одним выделенным значением и с исходными связками $\lceil$ и $\rightarrow_5$. Как и $\mathbf{P}^1$, логика $\mathbf{I}^1$ представима в терминах *естественных* p -логик.

УТВЕРЖДЕНИЕ 5. Логика $\mathbf{I}^1$ есть p -логика со связками $\vee^5$, $\wedge^5$, $\lceil$.

Доказательство. Покажем, что логика со связками $\lceil$ и $\rightarrow_5$ функционально эквивалентна логике со связками $\vee^5$, $\wedge^5$, $\lceil$. Это справедливо, поскольку имеют место следующие соотношения:

$$\begin{aligned} (1) \quad & p \vee^5 q =_{Df} ((p \rightarrow_5 q) \rightarrow_5 q), \\ & p \wedge^5 q =_{Df} \lceil \lceil p \rightarrow_5 q \rceil \rceil \text{ или } p \wedge^5 q =_{Df} \lceil \lceil p \vee^5 q \rceil \rceil; \\ (2) \quad & p \rightarrow_5 q =_{Df} (\lceil (p \vee^5 p) \rceil \vee^5 (q \vee^5 q)). \end{aligned}$$

Утверждение доказано.

Q.E.D.

Таким образом, следствием доказанных утверждений 3–5, является тот факт, что логики $\mathbf{P}^1$ и $\mathbf{I}^1$, ранее рассматриваемые в литературе исключительно как дуальные по отношению друг к другу и совершенно различные, с функциональной точки зрения представляют собой одну и ту же логику.

Заметим, что кроме $\mathbf{P}^1$ и $\mathbf{I}^1$ появилась некоммутативная функционально эквивалентная им логика со связками $\vee^4$, $\wedge^4$, $\lceil$, которую обозначим посредством $\mathbf{T}^8$.

В статье [9] указано, что логики $\mathbf{P}^1$ и $\mathbf{I}^1$ являются комбинацией двух изоморфов² классической логики $\mathbf{C}_2$, содержащихся в $\mathbf{B}_3$, однако, поскольку эти логики функционально эквивалентны, справедливо говорить о том, что логика $\mathbf{P}^1(\mathbf{I}^1)$ содержит два изоморфа классической логики $\mathbf{C}_2$.

²Адаптируя терминологию Д.А. Бочвара [1] к языку настоящей работы, под трехзначным изоморфом $\mathbf{C}_2$ понимается фрагмент трехзначной логики по классу тавтологий, совпадающий с $\mathbf{C}_2$. Подробно об изоморфах см. [2].

Далее, рассмотрим другой класс естественных p -логик. Для удобства обозначим p -логику со связками $\vee^8, \wedge^8, \lceil$ как логику $\mathbf{T}^7$. Тогда можем указать целый класс p -логик, эквивалентных $\mathbf{T}^7$.

УТВЕРЖДЕНИЕ 6. *P -логика со связками $\vee^i, \wedge^i, \lceil$ ($i \in \{1, 2, 6, 10, 12, 13, 18\}$) функционально эквивалентна логике $\mathbf{T}^7$.*

Доказательство. Учитывая ранее доказанное утверждение 2 и определение конъюнкции в p -логике, при доказательстве эквивалентности соответствующих p -логик достаточно показать взаимовыразимость дизъюнкций соответствующих p -логик. При доказательстве также будем учитывать следствие из доказанного утверждения 1, т.е. тот факт, что в p -логиках со связками $\vee^i, \wedge^i, \lceil$, где ($1 \leq i \leq 18$ и $i \neq 3$) выразимо отрицание $\lceil$.

- (а) Покажем, что p -логика со связками $\vee^i, \wedge^i, \lceil$ ($i \in \{10, 12, 13, 18\}$) и логика $\mathbf{T}^7$ функционально эквивалентны. Это имеет место в силу соотношений:

$$(1) \quad p \vee^{10} q =_{Df} p \vee^8 \lceil q, \\ p \vee^8 q =_{Df} ((p \vee^{10} \lceil \lceil q) \vee^{10} \lceil q);$$

$$(2) \quad p \vee^{18} q =_{Df} p \vee^8 ((\lceil q \wedge^8 \lceil p) \vee^8 \lceil q), \\ p \vee^8 q =_{Df} (p \vee^{18} \lceil \lceil q) \vee^{18} \lceil q);$$

$$(3) \quad p \vee^{12} q =_{Df} ((p \vee^8 q) \wedge^8 (\lceil q \vee^{18} \lceil p)) \vee^8 \lceil q, \\ p \vee^8 q =_{Df} (p \vee^{12} q) \vee^{12} \lceil q;$$

$$(4) \quad p \vee^{13} q =_{Df} \lceil \lceil q \vee^{13} ((q \vee^{13} p) \wedge^{13} (\lceil q \vee^{13} \lceil p)), \\ p \vee^{13} q =_{Df} (q \vee^{12} p) \vee^{12} (p \vee^{12} q).$$

- (б) Далее покажем, что p -логика со связками $\vee^i, \wedge^i, \lceil$ ($i \in \{1, 2, 6\}$) и логика $\mathbf{T}^7$ функционально эквивалентны. Это имеет место в силу соотношений:

$$(1) \quad p \vee^1 q =_{Df} (\lceil p \wedge^2 \lceil q) \vee^2 (p \vee^2 q), \\ p \vee^2 q =_{Df} (\lceil \lceil p \vee^1 \lceil q) \wedge^1 (p \vee^1 q);$$

$$(2) \quad p \vee^2 q =_{Df} q \vee^6 (p \vee^6 q), \\ p \vee^6 q =_{Df} ((q \vee^2 p) \wedge^2 (\neg q \vee^2 \neg q)) \vee^2 \neg p;$$

$$(3) \quad p \vee^8 q =_{Df} p \vee^6 ((\neg q \wedge^6 \neg p) \vee^6 (\neg p \wedge^6 \neg q)), \\ p \vee^6 q =_{Df} ((p \vee^8 \neg q) \vee^8 \neg p) \wedge^8 (\neg q \vee^8 \neg p).$$

Очевидно, доказательство утверждения 6 следует из доказанных положений (а) и (б).

Q.E.D.

Далее,

УТВЕРЖДЕНИЕ 7. P -логика со связками $\vee^i, \wedge^i, \neg$ ($i \in \{9, 14, 16\}$) есть трехзначная логика Лукасевича $\mathbf{L}_3$.

Доказательство.

- (а) Сначала покажем, что p -логики со связками $\vee^9, \wedge^9, \neg, \vee^{14}, \wedge^{14}, \neg$ и $\vee^{16}, \wedge^{16}, \neg$ попарно функционально эквивалентны. Учитывая определение конъюнкции в p -логике и то, что в указанных p -лógicaх выразимы $\sim$ и $\neg$ (утверждения 1, 2), доказательство положения (а) следует из соотношений (1) и (2):

$$(1) \quad p \vee^9 q =_{Df} (p \vee^{16} q) \vee^{16} (\neg q \wedge^{16} \neg p), \\ p \vee^{16} q =_{Df} (\sim q \wedge^9 q) \vee^9 (p \vee^9 q); \\ (2) \quad p \vee^{16} q =_{Df} ((p \vee^{14} q) \vee^{14} (\neg p \wedge^{14} \neg p)) \vee^{14} q, \\ p \vee^{14} q =_{Df} ((p \vee^{16} \neg q) \vee^{16} (q \vee^{16} \neg p)) \wedge^{16} ((\neg q \wedge^{16} \neg p) \vee^{16} (\neg p \wedge^{16} \neg q)).$$

- (б) Докажем, что, например, p -логика со связками $\vee^{16}, \wedge^{16}, \neg$ есть $\mathbf{L}_3$.

Это справедливо, с одной стороны, в силу функциональной полноты $\mathbf{L}_3$, с другой стороны, в силу того, что посредством связок $\vee^{14}, \wedge^{14}, \neg$ определима импликация логики Лукасевича (в нашем обозначении $\rightarrow_3$)³.

$$p \rightarrow_3 q =_{Df} ((\sim p \wedge^{14} q) \vee^{14} (\neg q \vee^{14} \neg p)).$$

³Для доказательства достаточно определить импликацию Лукасевича, поскольку известно, что в логике со связками $\vee^{14}, \wedge^{14}, \neg$ выразимо отрицание Лукасевича $\sim$ (доказанное ранее утверждение 2).

Таким образом, утверждение 7 доказано.

Q.E.D.

УТВЕРЖДЕНИЕ 8. *P -логики со связками $\vee^{11}, \wedge^{11}, \rfloor$ и $\vee^{17}, \wedge^{17}, \rfloor$ функционально эквивалентны.*

Доказательство. Доказательство утверждения следует из соотношений:

- $$\begin{aligned} (1) \quad & p \vee^{11} q =_{Df} p \vee^{17} (q \vee^{17} p), \\ & p \wedge^{11} q =_{Df} q \wedge^{17} (p \wedge^{17} q); \\ (2) \quad & p \vee^{17} q =_{Df} ((p \vee^{11} q) \wedge^{11} q) \vee^{11} p, \\ & p \wedge^{17} q =_{Df} ((p \wedge^{11} q) \vee^{11} q) \wedge^{11} p. \end{aligned}$$

Утверждение доказано.

Q.E.D.

Для удобства p -логику со связками $\vee^{11}, \wedge^{11}, \rfloor$ обозначим **T⁵**. P -логику со связками $\vee^{15}, \wedge^{15}, \rfloor$ обозначим **T⁶**.

Таким образом, класс естественных p -логик разбивается на пять подклассов: это p -логики, функционально эквивалентные логике Лукасевича **L₃**, p -логики, функционально эквивалентные логике Сетте **P¹**, p -логики, функционально эквивалентные логикам **T⁵**, **T⁶**, **T⁷** соответственно. Связки конъюнкции и дизъюнкции в **T⁷** и **T⁶** являются некоммутативными. Интересно, что для логики **T⁵** получили два эквивалентных построения с некоммутативными связками $(\vee^{17}, \wedge^{17})$ и коммутативными $(\vee^{11}, \wedge^{11})$.

Заметим, что таблицы для связок $\vee^{11}, \wedge^{11}$ логики **T⁵** встречаются в работе [5], где приводится классификация трехзначных логик значения, исходя из свойств соответствующих им универсальных алгебр. Логика со связками $\vee^{11}, \wedge^{11}$ относится к классу слабых исчерпывающих логик значения.

В работе [7] описаны 11 предполных классов логики Бочвара **B₃** и логика **T⁶** является одним из них. Заметим, с этой точки зрения, логика **P¹** есть класс всех внешних функций. Покажем, что это так.

В работе [8] В.И. Шестаков определяет штрих Шеффера γ для внешних связок **B₃**

γ	1	$\frac{1}{2}$	0
1	0	0	0
$\frac{1}{2}$	0	0	1
0	0	1	1

Это множество связей он обозначает как $\mathbf{B}_1$. Тогда докажем следующее утверждение:

УТВЕРЖДЕНИЕ 9. *Логика $\mathbf{P}^1$ есть $\mathbf{B}_1$.*

Доказательство. Докажем функциональную эквивалентность $\mathbf{P}^1$ и $\mathbf{B}_1$.

Очевидно, связи $\mathbf{P}^1$ есть внешние связи $\mathbf{B}_1$, т.е. они определяются посредством штриха Шеффера γ .

Далее посредством связей логики $\mathbf{P}^1$ определим штрих Шеффера γ . Согласно ранее доказанному утверждению 4, логика $\mathbf{P}^1$ есть логика со связками $\vee^7, \wedge^7, \lceil$, также в $\mathbf{P}^1$ выразимо отрицание $\rceil$ (доказанное утверждение 1). Тогда определить штрих Шеффера можно следующим образом:

$$p \gamma q =_{Df} (\lceil p \wedge^7 \lceil q) \vee^7 (\lceil p \wedge^7 \rceil q).$$

Утверждение 9 доказано.

Q.E.D.

Здесь стоит отметить, что класс внешних связей был впервые выделен в 1938 г. Д.А. Бочваром [1]. Как только что указывалось, специально этот класс рассмотрен в [8]. Здесь же представлены нормальные формы для $\mathbf{B}_1$. Далее, в работе В.К. Финна [7] описаны все предполные классы $\mathbf{B}_1$ — семь классов.

При изучении функциональных свойств p -логик относительно логики $\mathbf{P}^1$ справедливо следующее утверждение:

УТВЕРЖДЕНИЕ 10. *$\mathbf{P}^1$ функционально вложима в некоторую p -логику со связками $\vee, \wedge, \lceil$, если p -логика обладает следующими свойствами:*

- (1) *p -логика функционально эквивалентна дважды p -логике (т.е. в p -логике выразимо отрицание $\lceil$);*

- (2) связки $\vee, \wedge$ являются *C-расширяющими*, т.е. сохраняются классические значения, когда аргументы принимают значения из множества $\{0, 1\}$.

Доказательство. Для доказательства утверждения покажем, что посредством связок $\vee, \wedge, \lceil$ выразимы связки логики $\mathbf{P}^1$. Очевидно, достаточно показать, что выразимы $\vee^7, \wedge^7$.

$$p \vee^7 q =_{Df} \lceil \lceil p \vee \lceil \lceil q,$$

$$p \wedge^7 q =_{Df} \lceil \lceil p \wedge \lceil \lceil q.$$

Утверждение 10 доказано.

Q.E.D.

Очевидными следствиями утверждения 10 являются следующие: (1) $\mathbf{P}^1 \subset \mathbf{L}_3$; (2) $\mathbf{P}^1 \subset \mathbf{T}^7$; (3) $\mathbf{P}^1 \subset \mathbf{T}^6$; (4) $\mathbf{P}^1 \subset \mathbf{T}^5$.

Далее покажем, что логики $\mathbf{T}^5$ и $\mathbf{T}^6$ функционально независимы, т.е. $\mathbf{T}^5 \not\subset \mathbf{T}^6$ и $\mathbf{T}^6 \not\subset \mathbf{T}^5$.

$\mathbf{T}^6 \not\subset \mathbf{T}^5$, так как согласно утверждению 2 в $\mathbf{T}^6$ выразимо отрицание $\sim$, в то время как посредством связок $\mathbf{T}^5$ отрицание $\sim$ определить невозможно⁴. С другой стороны, как было ранее упомянуто, логика $\mathbf{T}^6$ есть предполный в $\mathbf{B}_3$ класс функций. Из построения нормальных форм (*I-J-с.д.н.ф.*) для логики $\mathbf{B}_3$ [6] следует, что, например, дизъюнкция $\vee^{11}$ логики $\mathbf{T}^5$ не определима в $\mathbf{B}_3$, а значит, ее нельзя определить и с помощью связок $\mathbf{T}^6$. Таким образом, $\mathbf{T}^5 \not\subset \mathbf{T}^6$.

УТВЕРЖДЕНИЕ 11. Логика $\mathbf{T}^5$ функционально вложима в логику $\mathbf{T}^7$.

Доказательство. Для доказательства достаточно посредством связок $\vee^1, \wedge^1, \lceil$ определить дизъюнкцию $\vee^{11}$. Это можно сделать, например, так:

$$p \vee^{11} q =_{Df} (p \vee^1 q) \vee^1 p.$$

Утверждение 11 доказано.

Q.E.D.

⁴Свойства $\vee, \wedge$ логики $\mathbf{T}^5$ таковы, что (1) они принимают значение $\frac{1}{2}$ только в одном случае — при значении аргументов $\frac{1}{2}$; (2) $x \vee x = x$ и $x \wedge x = x$. Таким образом, посредством связок $\vee, \wedge, \lceil$ определить $\sim$ нельзя.

УТВЕРЖДЕНИЕ 12. *Логика $\mathbf{T}^6$ функционально вложима в логику $\mathbf{T}^7$.*

Доказательство. Для доказательства достаточно посредством связок $\vee^1, \wedge^1, \downarrow$ определить дизъюнкцию $\vee^{15}$. Это можно сделать, например, так:

$$p \vee^{15} q =_{Df} (\downarrow p \wedge^1 \downarrow q) \vee^1 q.$$

Утверждение 12 доказано.

Q.E.D.

С другой стороны, свойства связок логики $\mathbf{T}^7$ таковы, что $\mathbf{T}^7$ не вложима ни в $\mathbf{T}^5$, ни в $\mathbf{T}^6$.

$\mathbf{T}^7 \not\subset \mathbf{T}^5$, так как согласно утверждению 2 в $\mathbf{T}^7$ выразимо отрицание $\sim$, в то время как было ранее указано, посредством связок $\mathbf{T}^5$ отрицание $\sim$ определить невозможно.

$\mathbf{T}^7 \not\subset \mathbf{T}^6$, поскольку $\mathbf{T}^6 \subset \mathbf{B}_3$, и из построения нормальных форм (I - J -с.д.н.ф.) для логики $\mathbf{B}_3$ [6] следует, что, например, дизъюнкция $\vee^1$ логики $\mathbf{T}^7$ не определима в $\mathbf{B}_3$, а значит, ее нельзя определить и с помощью связок $\mathbf{T}^6$.

Далее, в силу функциональной предполноты логики $\mathbf{L}_3$ верно, что $\mathbf{T}^7 \subset \mathbf{L}_3$. Однако $\mathbf{L}_3$ не вложима в $\mathbf{T}^7$, в противном случае, в $\mathbf{T}^7$ была бы выразима, например, сильная регулярная дизъюнкция $\vee$. Возьмем в качестве исходных связок $\mathbf{T}^7$ связки $\vee^1, \wedge^1, \downarrow$.

Имеем: $0 \vee \frac{1}{2} = \frac{1}{2} \vee 0 = \frac{1}{2} \vee \frac{1}{2} = \frac{1}{2}$. Свойства связок $\vee^1, \wedge^1$ таковы, что невозможно определить такую связку $\vee^x$, чтобы $0 \vee^x \frac{1}{2} = \frac{1}{2} \vee^x 0 = \frac{1}{2}$ или $1 \vee^x \frac{1}{2} = \frac{1}{2} \vee^x 1 = \frac{1}{2}$. Подобные рассуждения дают основания говорить, что $\mathbf{L}_3 \not\subset \mathbf{T}^7$.

В результате, класс естественных p -логик образует решетку по отношению функционального вложения одной логики в другую, и в качестве элементов решетки выступают трехзначные логики — логика Лукасевича $\mathbf{L}_3$, логика Сетте $\mathbf{P}^1$, а также новые логики $\mathbf{T}^5, \mathbf{T}^6, \mathbf{T}^7$:

Рис.1. Решетка естественных p -логик

Литература

- [1] Бочвар Д.А. Об одном трехзначном исчислении и его применении к анализу парадоксов классического расширенного функционального исчисления // Математический сборник. 1938. Т. 4. № 2. С. 287-308.
- [2] Девяткин Л.Ю. Многозначные изоморфы классической пропозициональной логики. Дис. ... канд. филос. наук. М., 2008.
- [3] Карпенко А.С. P -логики // Современная логика: проблемы теории, истории и применения в науке. (Материалы X Общероссийской научной конференции, 26-28 июня 2008 г., Санкт-Петербург.) СПб., 2008. С. 278-280.
- [4] Томова Н.Е. Импликативные расширения регулярных логик Клини // Логические исследования. Вып. 16. М., 2010. С. 233-258.
- [5] Финн В.К., Аншаков О.М., Григория Р.Ш., Забежайло М.И. Многозначные логики как фрагменты формализованной семантики // Семиотика и информатика. 1980. Вып. 15. С. 27-60.
- [6] Финн В.К. Аксиоматизация некоторых трехзначных исчислений высказываний и их алгебр // Философия в современном мире. Философия и логика. М.: Наука, 1974. С. 398-438.
- [7] Финн В.К. О критерии функциональной полноты для ВЗ // Исследования по формализованным языкам и неклассическим логикам. М.: Наука, 1974. С. 194-199.
- [8] Шестаков В.И. Об одном фрагменте исчисления Д.А. Бочвара // Информационные вопросы семиотики, лингвистики и автоматического перевода. ВИНТИ. Вып. 1. М., 1971.
- [9] Karpenko A.S. A maximal paraconsistent logic: The combination of two three-valued isomorphs of classical propositional logic // Fronties of Paraconsistent Logic. Baldock: Research Studies Press, 2000. P. 181-187.
- [10] Sette A.M. On propositional calculus P1 // Mathematica Japonica. 1973. Vol. 18. № 3. P. 173-180.
- [11] Sette A.M. and Carnielli W.A. Maximal weakly-intuitionistic logics // Studia Logica. 1995. Vol. 55. P. 181-203.