К проблеме выразимости операций характеристических матриц паранепротиворечивых и параполных логик

Н. А. ЗНАМЕНСКАЯ

ABSTRACT. The following expressibilities are constructed: (1) implication of every logical matrix $\mathcal{M}_{PCont}$, $\mathcal{M}_{PCont(1)}$ and $\mathcal{M}_{PComp(1)}$ in terms of the operations of the logical matrix $\mathcal{M}_{LPF}$, (2) implication of every logical matrix $\mathcal{M}_{PCont}$, $\mathcal{M}_{LPF}$ and $\mathcal{M}_{PComp(1)}$ in terms of the operations of the logical matrix $\mathcal{M}_{PCont(1)}$, (3) implication of every logical matrix $\mathcal{M}_{PCont}$, $\mathcal{M}_{LPF}$ and $\mathcal{M}_{PCont(1)}$ in terms of the operations of the logical matrix $\mathcal{M}_{PComp(1)}$. Also it's proven that the implications of the logical matrices $\mathcal{M}_{LPF}$, $\mathcal{M}_{PCont(1)}$ and $\mathcal{M}_{PComp(1)}$ are not expressible in terms of the operations of the logical matrix $\mathcal{M}_{PCont}$.

Keywords: matrix, operation, implication, valuation, expressibility, paraconsistent logic, paracomplete logic

В [1] построена трехзначная характеристическая матрица для паранепротиворечивой логики $PCont$ (обозначаем эту матрицу через $\mathcal{M}_{PCont}$), в [2] — трехзначная характеристическая матрица для парapolной логики LPF^1 (обозначаем эту матрицу через $\mathcal{M}_{LPF}$), в [3] — трехзначные характеристические матрицы для паранепротиворечивой логики $PCont(1)$ (обозначаем эту матрицу через $\mathcal{M}_{PCont(1)}$) и парapolной логики $PComp(1)$ (обозначаем эту матрицу через $\mathcal{M}_{PComp(1)}$). В предлагаемой работе конструируются тождества, выражающие: 1) импликацию каждой матрицы $\mathcal{M}_{PCont}$, $\mathcal{M}_{PCont(1)}$, $\mathcal{M}_{PComp(1)}$ через операции матрицы $\mathcal{M}_{LPF}$, 2) импликацию каждой матрицы $\mathcal{M}_{PCont}$, $\mathcal{M}_{LPF}$, $\mathcal{M}_{PComp(1)}$ через операции матрицы $\mathcal{M}_{PCont(1)}$, 3) импликацию каждой матрицы $\mathcal{M}_{PCont}$, $\mathcal{M}_{LPF}$, $\mathcal{M}_{PCont(1)}$ через операции матрицы $\mathcal{M}_{PComp(1)}$. Кроме того, доказывается, что импликации

¹В [4] и [5] логика LPF обозначена посредством $PComp$.

логических матриц $\mathcal{M}_{LPF}$, $\mathcal{M}_{PCont(1)}$ и $\mathcal{M}_{PComp(1)}$ не являются выразимыми через операции матрицы $\mathcal{M}_{PCont}$.

Следуя [1], [2] и [3], воспроизведем (с точностью до обозначения элементов носителей матриц и матричных операций) определения этих логических матриц.

Характеристическая матрица из [1] для PCont есть логическая матрица

$\langle \{1, \frac{1}{2}, 0\}, \{1, \frac{1}{2}\}, \{\neg, \&, \vee, \supset_{PCont}\} \rangle$, где

	$\neg$	$\&$	1	$\frac{1}{2}$	0	$\vee$	1	$\frac{1}{2}$	0	$\supset_{PCont}$	1	$\frac{1}{2}$	0
1	0	1	1	$\frac{1}{2}$	0	1	1	1	1	1	1	$\frac{1}{2}$	0
$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{2}$	0	$\frac{1}{2}$	1	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{2}$	1	$\frac{1}{2}$	0
0	1	0	0	0	0	0	1	$\frac{1}{2}$	0	0	1	1	1

Характеристическая матрица из [2] для LPF есть логическая матрица $\langle \{1, \frac{1}{2}, 0\}, \{1\}, \{\neg, \&, \vee, \supset_{LPF}\} \rangle$. Характеристическая матрица из [3] для PCont(1) есть логическая матрица $\langle \{1, \frac{1}{2}, 0\}, \{1, \frac{1}{2}\}, \{\neg, \&, \vee, \supset_{PCont(1)}\} \rangle$. Характеристическая матрица из [3] для PComp(1) есть логическая матрица $\langle \{1, \frac{1}{2}, 0\}, \{1\}, \{\neg, \&, \vee, \supset_{PComp(1)}\} \rangle$. Операции $\supset_{LPF}$, $\supset_{PCont(1)}$, $\supset_{PComp(1)}$ задаются следующими таблицами:

$\supset_{LPF}$	1	$\frac{1}{2}$	0	$\supset_{PCont(1)}$	1	$\frac{1}{2}$	0	$\supset_{PComp(1)}$	1	$\frac{1}{2}$	0
1	1	$\frac{1}{2}$	0	1	1	1	0	1	1	0	0
$\frac{1}{2}$	1	1	1	$\frac{1}{2}$	1	1	0	$\frac{1}{2}$	1	1	1
0	1	1	1	0	1	1	1	0	1	1	1

Существуют различные определения выразимости операций через операции. Здесь мы придерживаемся определений 1–3, предлагаемых В. М. Поповым. Условимся использовать символы $p_1, p_2, p_3, \dots$ в качестве переменных, а символы $(,)$ и $,$ в качестве технических символов. Определения 1 и 2, а также формулируемые далее условия предполагают, что $F_1, \dots, F_k$ (k — целое положительное число) есть операции на непустом множестве M , а $s_1, \dots, s_k$ есть попарно различные символы, каждый из которых отличен от любого из символов $(,), ,, p_1, p_2, p_3, \dots$

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 1. $F_1 \dots F_k s_1 \dots s_k$ -формулы:

- (1) для всякого целого положительного числа n p_n есть $F_1 \dots F_k s_1 \dots s_k$ -формула,

- (2) если $i \in \{1, \dots, k\}$ и ранг операции F_i есть 0, то s_i есть $F_1 \dots F_k s_1 \dots s_k$ -формула,
- (3) если $i \in \{1, \dots, k\}$ и ранг операции F_i отличен от 0 и равен l , а $A_1, \dots, A_l$ есть $F_1 \dots F_k s_1 \dots s_k$ -формулы, то $s_i(A_1, \dots, A_l)$ есть $F_1 \dots F_k s_1 \dots s_k$ -формула,
- (4) ничто другое не есть $F_1 \dots F_k s_1 \dots s_k$ -формула.

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 2. $F_1 \dots F_k s_1 \dots s_k$ -оценки:

$F_1 \dots F_k s_1 \dots s_k$ -оценкой называем отображение множества всех переменных во множество M .

Можно доказать, что существует единственное отображение, обозначим его через $|^{F_1 \dots F_k s_1 \dots s_k}$, удовлетворяющее условиям:

- (1) $|^{F_1 \dots F_k s_1 \dots s_k}$ есть отображение в M декартова произведения множества всех $F_1 \dots F_k s_1 \dots s_k$ -формул на множество всех $F_1 \dots F_k s_1 \dots s_k$ -оценок,
- (2) если n есть целое положительное число и v есть $F_1 \dots F_k s_1 \dots s_k$ -оценка, то $|p_n, v|^{F_1 \dots F_k s_1 \dots s_k} = v(p_n)$,
- (3) если $i \in \{1, \dots, k\}$, ранг операции F_i есть 0 и v есть $F_1 \dots F_k s_1 \dots s_k$ -оценка, то $|s_i, v|^{F_1 \dots F_k s_1 \dots s_k} = F_i$,
- (4) если $i \in \{1, \dots, k\}$, ранг операции F_i отличен от 0 и равен l , $A_1, \dots, A_l$ есть $F_1 \dots F_k s_1 \dots s_k$ -формулы и v есть $F_1 \dots F_k s_1 \dots s_k$ -оценка, то $|s_i(A_1, \dots, A_l), v|^{F_1 \dots F_k s_1 \dots s_k} = F_i(|A_1, v|^{F_1 \dots F_k s_1 \dots s_k}, \dots, |A_l, v|^{F_1 \dots F_k s_1 \dots s_k})$.

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 3. Операция g выражима через операции $f_1, \dots, f_k$ (k — целое положительное число), если операции $g, f_1, \dots, f_k$ являются операциями на одном и том же непустом множестве, существуют попарно различные символы $s_1, \dots, s_k$, каждый из которых отличен от любого из символов $(,), ,, p_1, p_2, p_3, \dots$ и существует такая $f_1 \dots f_k s_1 \dots s_k$ -формула Φ , что выполняются следующие условия:

- (1) если ранг операции g равен 0, то для всякой $f_1 \dots f_k s_1 \dots s_k$ -оценки v $g = |\Phi, v|^{f_1 \dots f_k s_1 \dots s_k}$,

- (2) если ранг операции g есть целое положительное число n , то для всякой $f_1 \dots f_k s_1 \dots s_k$ -оценки v верно, что $g(v(p_1), \dots, v(p_n)) = |\Phi, v|^{f_1 \dots f_k s_1 \dots s_k}$.

Очевидны следующие утверждения (1)–(4).

- (1) Символы $\neg, \&, \vee, \supset$ попарно различны и каждый из них отличен от любого из символов $(,), ,, p_1, p_2, p_3, \dots$
- (2) Операции $\neg, \&, \vee, \supset_{PCont}, \supset_{LPF}, \supset_{PCont(1)}, \supset_{PComp(1)}$ являются операциями на одном и том же множестве (на множестве $\{1, \frac{1}{2}, 0\}$).
- (3) $\neg p_1, p_1 \& p_2, p_1 \vee p_2$ и $p_1 \supset p_2$ есть $\neg \& \vee \supset_{LPF} \neg \& \vee \supset$ -формулы, $\neg \& \vee \supset_{PCont(1)} \neg \& \vee \supset$ -формулы и $\neg \& \vee \supset_{PComp(1)} \neg \& \vee \supset$ -формулы² (внешние скобки опускаем, как это принято).
- (4) Если $f_1, \dots, f_k$ (k — целое положительное число) суть операции на некотором непустом множестве, то для всякого i (i есть целое положительное число, меньшее или равное k) операция f_i выражима через операции $f_1, \dots, f_k$.

ТЕОРЕМА 1 (о выразимости, операций матриц $\mathcal{M}_{PCont}, \mathcal{M}_{PCont(1)}$ и $\mathcal{M}_{PComp(1)}$ через операции матрицы $\mathcal{M}_{LPF}$).

Всякая операция $\neg, \&, \vee, \supset_{PCont}, \supset_{PCont(1)}, \supset_{PComp(1)}$ выражима через операции $\neg, \&, \vee, \supset_{LPF}$.

Доказательство. В свете утверждений (1)–(4) и определения 3 понятно, что для доказательства Теоремы 1 достаточно доказать утверждение (5).

- (5) Для всякой $\neg \& \vee \supset_{LPF} \neg \& \vee \supset$ -оценки v : $v(p_1) \supset_{PCont} v(p_2) = |(\neg p_1 \supset p_2) \supset p_2, v|^{\neg \& \vee \supset_{LPF} \neg \& \vee \supset}, v(p_1) \supset_{PCont(1)} v(p_2) = |\neg((\neg p_2 \supset \neg p_1) \supset \neg(p_1 \supset p_1)), v|^{\neg \& \vee \supset_{LPF} \neg \& \vee \supset}, v(p_1) \supset_{PComp(1)} v(p_2) = |\neg((p_1 \supset p_2) \supset \neg(p_1 \supset p_1)), v|^{\neg \& \vee \supset_{LPF} \neg \& \vee \supset}.$

²Автор надеется, что естественное для данного контекста использование инфиксной, а не префиксной, записи не создаст трудности для читателя.

Докажем утверждение (5).

(5.1) v_0 есть $\neg\&\vee \supset_{LPF} \neg\&\vee \supset$ -оценка (допущение).

Используя утверждение (5.1) и определение отображения $||\neg\&\vee \supset_{LPF} \neg\&\vee \supset$, получаем, что (5.2) $|(\neg p_1 \supset p_2) \supset p_2, v_0 | \neg\&\vee \supset_{LPF} \neg\&\vee \supset = (\neg v_0(p_1) \supset_{LPF} v_0(p_2)) \supset_{LPF} v_0(p_2), | \neg((\neg p_2 \supset \neg p_1) \supset \neg(p_1 \supset p_1)), v_0 | \neg\&\vee \supset_{LPF} \neg\&\vee \supset = \neg((\neg v_0(p_2) \supset_{LPF} \neg v_0(p_1)) \supset_{LPF} \neg(v_0(p_1) \supset_{LPF} v_0(p_1))), | \neg((p_1 \supset p_2) \supset \neg(p_1 \supset p_1)), v_0 | \neg\&\vee \supset_{LPF} \neg\&\vee \supset = \neg((v_0(p_1) \supset_{LPF} v_0(p_2)) \supset_{LPF} \neg(v_0(p_1) \supset_{LPF} v_0(p_1)))$.

Опираясь на табличные определения операций $\supset_{PCont}$, $\supset_{PCont(1)}$, $\supset_{PComp(1)}$, $\neg$ и $\supset_{LPF}$, получаем, что

(5.3) $v_0(p_1) \supset_{PCont} v_0(p_2) = (\neg v_0(p_1) \supset_{LPF} v_0(p_2)) \supset_{LPF} v_0(p_2), v_0(p_1) \supset_{PCont(1)} v_0(p_2) = \neg((\neg v_0(p_2) \supset_{LPF} \neg v_0(p_1)) \supset_{LPF} \neg(v_0(p_1) \supset_{LPF} v_0(p_1))), v_0(p_1) \supset_{PComp(1)} v_0(p_2) = \neg((v_0(p_1) \supset_{LPF} v_0(p_2)) \supset_{LPF} \neg(v_0(p_1) \supset_{LPF} v_0(p_1)))$.

(5.4) $v_0(p_1) \supset_{PCont} v_0(p_2) = |(\neg p_1 \supset p_2) \supset p_2, v_0| \neg\&\vee \supset_{LPF} \neg\&\vee \supset, v_0(p_1) \supset_{PCont(1)} v_0(p_2) = | \neg((\neg p_2 \supset \neg p_1) \supset \neg(p_1 \supset p_1)), v_0 | \neg\&\vee \supset_{LPF} \neg\&\vee \supset, v_0(p_1) \supset_{PComp(1)} v_0(p_2) = | \neg((p_1 \supset p_2) \supset \neg(p_1 \supset p_1)), v_0 | \neg\&\vee \supset_{LPF} \neg\&\vee \supset$ (из (5.2) и (5.3)).

Снимая допущение (5.1) и обобщая, получаем, что верно утверждение (5). Q.E.D.

ТЕОРЕМА 2 (о выразимости операций матриц $\mathcal{M}_{PCont}$, $\mathcal{M}_{LPF}$ и $\mathcal{M}_{PComp(1)}$ через операции матрицы $\mathcal{M}_{PCont(1)}$).

Всякая операция $\neg, \&, \vee, \supset_{PCont}, \supset_{LPF}, \supset_{PComp(1)}$ выражается через операции $\neg, \&, \vee, \supset_{PCont(1)}$.

Доказательство. В свете утверждений (1)–(4) и определения 3 понятно, что для доказательства Теоремы 2 достаточно доказать утверждение (6).

(6) Для всякой $\neg\&\vee \supset_{PCont(1)} \neg\&\vee \supset$ -оценки v : $v(p_1) \supset_{PCont} v(p_2) = |(p_1 \supset \neg((p_2 \supset p_1) \supset p_1)) \vee p_2, v| \neg\&\vee \supset_{PCont(1)} \neg\&\vee \supset, v(p_1) \supset_{LPF} v(p_2) = |(p_1 \supset \neg p_1) \vee p_2, v| \neg\&\vee \supset_{PCont(1)} \neg\&\vee \supset, v(p_1) \supset_{PComp(1)} v(p_2) = | \neg p_2 \supset \neg p_1, v | \neg\&\vee \supset_{PCont(1)} \neg\&\vee \supset$.

Докажем утверждение (6).

(6.1) v_0 есть $\neg\&\vee \supset_{PCont(1)} \neg\&\vee \supset$ -оценка (допущение).

Используя утверждение (6.1) и определение отображения $||\neg\&\vee\supset_{PCont(1)}\neg\&\vee\supset$, получаем, что (6.2) $|(p_1 \supset \neg((p_2 \supset p_1) \supset p_1)) \vee p_2, v_0| \neg\&\vee\supset_{PCont(1)}\neg\&\vee\supset = (v_0(p_1) \supset_{PCont(1)} \neg((v_0(p_2) \supset_{PCont(1)} v_0(p_1)) \supset_{PCont(1)} v_0(p_1))) \vee v_0(p_2), |(p_1 \supset \neg p_1) \vee p_2, v_0| \neg\&\vee\supset_{PCont(1)}\neg\&\vee\supset = (v_0(p_1) \supset_{PCont(1)} \neg v_0(p_1)) \vee v_0(p_2), |\neg p_2 \supset \neg p_1, v_0| \neg\&\vee\supset_{PCont(1)}\neg\&\vee\supset = \neg v_0(p_2) \supset_{PCont(1)} \neg v_0(p_1).$

Опираясь на табличные определения операций $\supset_{PCont}, \supset_{LPF}, \supset_{PComp(1)}, \neg, \vee$ и $\supset_{PCont(1)}$, получаем, что

$$(6.3) \quad v_0(p_1) \supset_{PCont} v_0(p_2) = (v_0(p_1) \supset_{PCont(1)} \neg((v_0(p_2) \supset_{PCont(1)} v_0(p_1)) \supset_{PCont(1)} v_0(p_1))) \vee v_0(p_2), \quad v_0(p_1) \supset_{LPF} v_0(p_2) = (v_0(p_1) \supset_{PCont(1)} \neg v_0(p_1)) \vee v_0(p_2), \quad v_0(p_1) \supset_{PComp(1)} v_0(p_2) = \neg v_0(p_2) \supset_{PCont(1)} \neg v_0(p_1).$$

$$(6.4) \quad v_0(p_1) \supset_{PCont} v_0(p_2) = |(p_1 \supset \neg((p_2 \supset p_1) \supset p_1)) \vee p_2, v_0| \neg\&\vee\supset_{PCont(1)}\neg\&\vee\supset, \quad v_0(p_1) \supset_{LPF} v_0(p_2) = |(p_1 \supset \neg p_1) \vee p_2, v_0| \neg\&\vee\supset_{PCont(1)}\neg\&\vee\supset, \quad v_0(p_1) \supset_{PComp(1)} v_0(p_2) = |\neg p_2 \supset \neg p_1, v_0| \neg\&\vee\supset_{PCont(1)}\neg\&\vee\supset \text{ (из (6.2) и (6.3)).}$$

Снимая допущение (6.1) и обобщая, получаем, что верно утверждение (6).

Q.E.D.

ТЕОРЕМА 3 (о выразимости операций матриц $\mathcal{M}_{PCont}, \mathcal{M}_{LPF}$ и $\mathcal{M}_{PComp(1)}$ через операции матрицы $\mathcal{M}_{PComp(1)}$).

Всякая операция $\neg, \&, \vee, \supset_{PCont}, \supset_{LPF}, \supset_{PCont(1)}$ выражается через операции $\neg, \&, \vee, \supset_{PComp(1)}$.

Доказательство. В свете утверждений (1)–(4) и определения 3 понятно, что для доказательства Теоремы 3 достаточно доказать утверждение (7).

$$(7) \quad \begin{aligned} &\text{Для всякой } \neg\&\vee\supset_{PComp(1)}\neg\&\vee\supset\text{-оценки } v: v(p_1) \supset_{PCont} v(p_2) = |((p_2 \supset p_1) \supset \neg p_1) \vee p_2, v| \neg\&\vee\supset_{PComp(1)}\neg\&\vee\supset, \\ &v(p_1) \supset_{LPF} v(p_2) = |(p_1 \supset p_2) \vee p_2, v| \neg\&\vee\supset_{PComp(1)}\neg\&\vee\supset, \\ &v(p_1) \supset_{PCont(1)} v(p_2) = |\neg p_2 \supset \neg p_1, v| \neg\&\vee\supset_{PComp(1)}\neg\&\vee\supset. \end{aligned}$$

Докажем утверждение (7).

$$(7.1) \quad v_0 \text{ есть } \neg\&\vee\supset_{PComp(1)}\neg\&\vee\supset\text{-оценка (допущение).}$$

Используя утверждение (7.1) и определение отображения $||\neg\&\vee\supset_{PComp(1)}\neg\&\vee\supset$, получаем, что (7.2) $|(p_2 \supset p_1) \supset \neg p_1 \vee p_2, v_0| \neg\&\vee\supset_{PComp(1)}\neg\&\vee\supset = ((v_0(p_2) \supset_{PComp(1)} v_0(p_1)) \supset_{PComp(1)} v_0(p_1)) \supset_{PComp(1)} v_0(p_1)$

$$\neg v_0(p_1)) \vee v_0(p_2), |(p_1 \supset p_2) \vee p_2, v_0|^{-\&\vee \supset \mathcal{P}Comp(1) \neg \&\vee \supset} = (v_0(p_1) \supset \mathcal{P}Comp(1) v_0(p_2)) \vee v_0(p_2), |\neg p_2 \supset \neg p_1, v_0|^{-\&\vee \supset \mathcal{P}Comp(1) \neg \&\vee \supset} = \neg v_0(p_2) \supset \mathcal{P}Comp(1) \neg v_0(p_1).$$

Опираясь на табличные определения операций $\supset \mathcal{P}Cont$, $\supset \mathcal{LPF}$, $\supset \mathcal{P}Comp(1)$, $\neg$, $\vee$ и $\supset \mathcal{P}Comp(1)$, получаем, что

$$(7.3) \quad v_0(p_1) \supset \mathcal{P}Cont v_0(p_2) = ((v_0(p_2) \supset \mathcal{P}Comp(1) v_0(p_1)) \supset \mathcal{P}Comp(1) \neg v_0(p_1)) \vee v_0(p_2), \quad v_0(p_1) \supset \mathcal{LPF} v_0(p_2) = (v_0(p_1) \supset \mathcal{P}Comp(1) v_0(p_2)) \vee v_0(p_2), \quad v_0(p_1) \supset \mathcal{P}Cont(1) v_0(p_2) = \neg v_0(p_2) \supset \mathcal{P}Comp(1) \neg v_0(p_1).$$

$$(7.4) \quad v_0(p_1) \supset \mathcal{P}Cont v_0(p_2) = |((p_2 \supset p_1) \supset \neg p_1) \vee p_2, v_0|^{-\&\vee \supset \mathcal{P}Comp(1) \neg \&\vee \supset}, \quad v_0(p_1) \supset \mathcal{LPF} v_0(p_2) = |(p_1 \supset p_2) \vee p_2, v_0|^{-\&\vee \supset \mathcal{P}Comp(1) \neg \&\vee \supset}, \quad v_0(p_1) \supset \mathcal{P}Cont(1) v_0(p_2) = |\neg p_2 \supset \neg p_1, v_0|^{-\&\vee \supset \mathcal{P}Comp(1) \neg \&\vee \supset} \text{ (из (7.2) и (7.3)).}$$

Снимая допущение (7.1) и обобщая, получаем, что верно утверждение (7).

Q.E.D.

ЛЕММА. Пусть s_1, s_2, s_3 и s_4 есть попарно различные символы, каждый из которых отличен от любого из символов $(,), ,, p_1, p_2, p_3, \dots$, а v есть такая $\neg \&\vee \supset \mathcal{P}Cont s_1 s_2 s_3 s_4$ -оценка, что $v(p_i) = \frac{1}{2}$ для всякого целого положительного числа i .

Для всякой $\neg \&\vee \supset \mathcal{P}Cont s_1 s_2 s_3 s_4$ -формулы A верно, что $|A, v|^{-\&\vee \supset \mathcal{P}Cont s_1 s_2 s_3 s_4} = \frac{1}{2}$.

Лемма доказывается индукцией по построению $\neg \&\vee \supset \mathcal{P}Cont s_1 s_2 s_3 s_4$ -формулы.

ТЕОРЕМА 4 (о невыразимости $\supset \mathcal{LPF}$, $\supset \mathcal{P}Cont(1)$ и $\supset \mathcal{P}Comp(1)$ через операции матрицы $\mathcal{M}_{\mathcal{P}Cont}$).

Операции $\supset \mathcal{LPF}$, $\supset \mathcal{P}Cont(1)$ и $\supset \mathcal{P}Comp(1)$ не являются выразимыми через операции $\neg, \&, \vee, \supset \mathcal{P}Cont$.

Доказательство. Докажем, что $\supset \mathcal{LPF}$ не является выразимой через операции $\neg, \&, \vee, \supset \mathcal{P}Cont$.

Доказательство проводим от противного.

(1) $\supset \mathcal{LPF}$ выразима через $\neg, \&, \vee, \supset \mathcal{P}Cont$ (допущение).

(2) Существуют попарно различные символы s_1, s_2, s_3, s_4 , каждый из которых отличен от любого из символов $(,), ,, p_1, p_2, p_3, \dots$ и существует такая $\neg \&\vee \supset \mathcal{P}Cont s_1 s_2 s_3 s_4$ -формула Φ , что для

всякой $\neg\&\vee \supset_{PCont} s_1 s_2 s_3 s_4$ -оценки v верно, что $v(p_1) \supset_{LPF} v(p_2) = |\Phi, v| \neg\&\vee \supset_{PCont} s_1 s_2 s_3 s_4$ (из (1), по определению 3).

Пусть (3) s'_1, s'_2, s'_3, s'_4 есть попарно различные символы, каждый из которых отличен от любого из символов $(,), ,, p_1, p_2, p_3, \dots$, а Φ' есть такая $\neg\&\vee \supset_{PCont} s'_1 s'_2 s'_3 s'_4$ -формула, что для всякой $\neg\&\vee \supset_{PCont} s'_1 s'_2 s'_3 s'_4$ -оценки v верно, что $v(p_1) \supset_{LPF} v(p_2) = |\Phi', v| \neg\&\vee \supset_{PCont} s'_1 s'_2 s'_3 s'_4$.

Очевидно, что (4) существует такая $\neg\&\vee \supset_{PCont} s'_1 s'_2 s'_3 s'_4$ -оценка v , что $v(p_i) = \frac{1}{2}$ для всякого целого положительного числа i .

Пусть (5) v' есть такая $\neg\&\vee \supset_{PCont} s'_1 s'_2 s'_3 s'_4$ -оценка, что $v'(p_i) = \frac{1}{2}$ для всякого целого положительного числа i .

(6) $|\Phi', v'| \neg\&\vee \supset_{PCont} s'_1 s'_2 s'_3 s'_4 = \frac{1}{2}$ (из (3) и (5), по Лемме).

(7) $v'(p_1) \supset_{LPF} v'(p_2) = |\Phi', v'| \neg\&\vee \supset_{PCont} s'_1 s'_2 s'_3 s'_4$ (из (3) и (5)).

Опираясь на утверждения (6) и (7), получаем, что

(8) $v'(p_1) \supset_{LPF} v'(p_2) \neq 1$.

(9) $v'(p_1) \supset_{LPF} v'(p_2) = 1$ (из того, что $v'(p_1) = v'(p_2) = \frac{1}{2}$, по определению $\supset_{LPF}$).

Утверждение (9) противоречит утверждению (8). Следовательно, неверно допущение (1). Но тогда $\supset_{LPF}$ не является выразимой через $\neg, \&, \vee, \supset_{PCont}$.

Доказательство того, что $\supset_{PCont(1)}$ не является выразимой через операции $\neg, \&, \vee, \supset_{PCont}$, и доказательство того, что $\supset_{PComp(1)}$ не является выразимой через операции $\neg, \&, \vee, \supset_{PCont}$, аналогичны данному выше доказательству того, что $\supset_{LPF}$ не является выразимой через операции $\neg, \&, \vee, \supset_{PCont}$.

Q.E.D.

Автор выражает благодарность В. М. Попову за постановку проблемы и сделанные им исправления в черновом варианте статьи и А. С. Карпенко, прорецензировавшему статью и сообщившему, что уже в работе [6] приведены те же, что и в настоящей статье, тождества, выражающие импликацию $\supset_{PCont(1)}$ через операции матрицы $M_{PComp(1)}$ и импликацию $\supset_{PComp(1)}$ через операции матрицы $M_{PCont(1)}$ (в целях сохранения целостности изложения мы не стали опускать здесь обоснование указанных тождеств).

Литература

- [1] *Розоноэр Л. И.* О выявлении противоречий в формальных теориях. 1 // Автоматика и телемеханика, № 6, 1983. С. 113–124.
- [2] *Avron A.* Natural 3-valued Logics: Characterization and proof theory // Journal of Symbolic Logic. Vol. 56. 1991. P. 276–294
- [3] *Попов В. М.* Между $\text{Par}(1)$ и множеством всех формул // Объединенный научный журнал. № 7–8 (254–255). М., 2011. С. 35–39.
- [4] *Попов В. М.* Между Par и множеством всех формул // Материалы 6 конференции «Смирновские чтения по логике 2009». С. 93–95.
- [5] *Знаменская Н. А., Попов В. М.* Паранормальная логика PContPComp как пересечение паранепротиворечивой логики PCont и парapolной логики PComp // Материалы 6 конференции «Смирновские чтения по логике 2009». С.63–65.
- [6] *Томова Н. Е.* Импликативные расширения регулярных логик Клини // Логические исследования. Вып. 16. М.-СПб., 2010. С.63–65.