О двух предполных классах трехзначной логики Лукасевича

Н. Н. ПРЕЛОВСКИЙ

ABSTRACT. Two submaximal classes of 3-valued functionally complete iterative system are characterized in the paper. These two classes are functionally precomplete classes of the famous Łukasiewicz's logic.

Keywords: Łukasiewicz logic, functional class, submaximal class, iterative system

Данная работа посвящена анализу вопросов, связанных с критерием функциональной полноты замкнутых классов функций, соответствующих различным трехзначным логикам. Известный критерий функциональной полноты был сформулирован А.В. Кузнецовым и приводится в [11]. Необходимым условием для применения данного критерия является перечисление всех предполных классов, содержащихся в исследуемом классе. Поиск предполных классов систем функций, соответствующих различным трехзначным логикам, приобретает в связи с этим немаловажное значение в решении вопроса о функциональной полноте.

В работе С.В. Яблонского [12] содержится описание восемнадцати предполных классов трехзначной логики Поста P_3 , что позволяет сформулировать необходимое и достаточное условие полноты в этой системе. М.Ф. Раца в [7] описал десять предполных классов трехзначной логики Гейтинга H_3 $S_0, \dots, S_9$. В.К. Финн в [9] дал описание одиннадцати предполных классов трехзначной логики Бочвара B_3 . Работы Раца и Финна также позволяют сформулировать необходимые и достаточные условия полноты замкнутого класса функций в H_3 и B_3 .

Однако для трехзначной логики Лукасевича L_3 , являющейся, как H_3 и B_3 , функционально неполной (т. е. $L_3 \subset P_3$ и $P_3 \not\subset L_3$),

аналогичные результаты отсутствуют. Из теоремы 2 в [7] следует, что H_3 предполна в L_3 . Тем не менее, в известной литературе отсутствует описание предполных в L_3 классов функций, отличных от H_3 . Ниже будут рассмотрены два других предполных класса трехзначной логики Лукасевича, а также приведены доказательства их предполноты.

1 Основные понятия

Сделаем предварительно несколько замечаний, касающихся используемой нотации, а также дадим определения основных понятий, встречающихся в настоящей работе.

В качестве переменных для аргументов функций используются латинские буквы x, y, z , возможно с индексами. Для обозначения значений переменных используются греческие буквы α, β и γ также возможно с индексами. Запись функций осуществляется с использованием известного понятия формулы логики высказываний [7]. Аргументы функций, как и сами функции, принимают значения из множества $\{1, 1/2, 0\}$. Значение $1/2$ будем называть промежуточным. В рассмотрении используются понятия операции суперпозиции, замыкания системы функций относительно операции суперпозиции, замкнутого класса, функционально полного и предполного классов, а также понятие базиса.

Дадим вначале определение операции суперпозиции.

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 1. Если имеется система функций

$$\{f_1(x_1, \dots, x_n), \dots, f_r(x_1, \dots, x_n)\},$$

то суперпозицией функций данной системы называется либо функция, полученная из уже имеющихся функций путем замены переменных, либо, если установлено, что функции $f_j^i(x_{1_{ij}}, \dots, x_{n_{ij}}), \dots, f_m^k(x_{1_{km}}, \dots, x_{n_{km}})$, а также функция $f_t^s(x_{j_{st}}, \dots, x_{m_{st}})$ являются суперпозициями исходной системы, то и функция

$$f_t^s(f_j^i(x_{1_{ij}}, \dots, x_{n_{ij}}), \dots, f_m^k(x_{1_{km}}, \dots, x_{n_{km}}))$$

также является суперпозицией функций данной системы.

Говоря неформально, речь идет о всевозможных подстановках вместо аргументов исходной системы функций. Буквы F и G

будем в дальнейшем использовать для обозначения произвольных систем и классов функций.

В [4], [11], [12] содержится определение замыкания и замкнутого класса функций.

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 2. Множество $[F]$ называется замыканием системы (класса) функций F , если оно содержит все суперпозиции функций над классом F и не содержит никаких других функций.

Оператор замыкания $[\dots]$ удовлетворяет следующим четырем условиям:

- $F \subseteq [F]$
- $[[F]] = [F]$
- $F \subseteq G \Rightarrow [F] \subseteq [G]$
- Множество функций F замкнуто, если $F = [F]$

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 3. Систему функций называем базисом данного класса функций, если она эквивалентна этому классу, но никакая ее собственная подсистема не эквивалентна ему. Система функций G , эквивалентная классу F , называется (функционально) полной в этом классе, т. е. G (функционально) полна в $F \Leftrightarrow_{def} [G] = F$

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 4. Система функций G , функционально полная в классе $F = P_k$, где P_k есть k -значная логика Поста, называется функционально полной (о логиках Поста см. [5, с. 88–91]).

Самым важным для дальнейшего рассмотрения является следующее понятие **предполного в F класса**.

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 5. Если G и F — замкнутые классы функций и $G \subset F$, но $F \not\subset G$, то G называется предполным в F , если и только если замыкание объединения класса G и функции $f(x_1, \dots, x_n)$ такой, что $f(x_1, \dots, x_n) \in F$ и $f(x_1, \dots, x_n) \notin G$, совпадает с F , т. е. G предполон в $F \Leftrightarrow_{def} f(x_1, \dots, x_n) \in F \& f(x_1, \dots, x_n) \notin G \Rightarrow [G \cup f(x_1, \dots, x_n)] = F$, где $[G \cup f(x_1, \dots, x_n)]$ есть замыкание теоретико-множественного объединения.

ЗАМЕЧАНИЕ 1. Множество функций k -значной логики Поста P_k , где $k \in \{2, 3, \dots\}$, есть множество $\{f(x_1, \dots, x_n) : \{0, 1, \dots,$

$k - 1\}^n \mapsto \{0, 1, \dots, k - 1\}$, где $\{0, 1, \dots, k - 1\}^n$ есть декартова n -ая степень множества $\{0, 1, \dots, k - 1\}$. В частности, множество функций P_3 содержит все функции, аргументы которых, как и сами функции, принимают значения из множества $\{0, 1, 2\}$. В настоящей работе приняты иные обозначения для элементов множества значений функций и их аргументов: значение 0 остается без изменений; вместо значения 1 пишем $1/2$; вместо значения 2, используем 1.

ЗАМЕЧАНИЕ 2. С понятием предполноты непосредственно связано определяемое индуктивно понятие глубины.

ЗАМЕЧАНИЕ 3.

- Класс функций, соответствующий k -значной логике Поста P_k , имеет глубину $d(P_k)$, равную нулю;
- Если класс $F \subseteq P_k$ имеет глубину $d(F)$, равную n , и класс G предполон в F , то $d(G) = n + 1$.

В частности, любой предполный в P_k класс имеет глубину $d(F) = 1$.

2 Класс функций, соответствующий трехзначной логике Лукасевича

Самой известной и исторически первой неклассической многозначной логикой является трехзначная логика Лукасевича L_3 . Дальнейшие результаты имеют отношение к данной логике, поэтому имеет смысл рассмотреть ее специально. В данном разделе будет также доказано утверждение о том, что множество функций логики Лукасевича является предполным в трехзначной логике Поста и совпадает с множеством функций, сохраняющих неравенство промежуточного значения в P_3 , а именно: $L_3 = \{f(x_1, \dots, x_n) \in P_3 : \forall \langle \alpha_1, \dots, \alpha_n \rangle (\neg \exists i \in \{1, 2, \dots, n\} (\alpha_i = 1/2) \Rightarrow f(\alpha_1, \dots, \alpha_n) \neq 1/2)\}$. Множество функций логики Лукасевича может быть определено как замыкание системы функций $\{\neg_L x, x \rightarrow y\}$, где $\neg_L x = 1 - x$, а функция $x \rightarrow y$, называемая импликацией Лукасевича, определяются таблично:

$\rightarrow$	1	1/2	0
1	1	1/2	0
1/2	1	1	1/2
0	1	1	1

Заметим, что существуют и другие системы функций, полные в L_3 . В частности, в дальнейшем будут использоваться следующие полные в L_3 системы функций: $\{\neg_L x, \Box x, x \vee y\}$, $\{\neg_L x, \Diamond x, x \vee y\}$ и $\{\neg_L x, \nabla x, x \vee y\}$, — где функция $\Box x$ называется оператором необходимости, функция $\Diamond x$ называется оператором возможности, а функция ∇x называется оператором случайности (см. [6, разд. 2.1.2]). Функция $x \vee y$ есть $\max(x, y)$. Дадим табличные определения операторов необходимости, возможности и случайности:

x	$\Box x$	$\Diamond x$	∇x
1	1	1	0
1/2	0	1	1
0	0	0	0

Очевидно, что все вышеприведенные функции удовлетворяют условию сохранения неравенства промежуточного значения, а операция суперпозиции сохраняет свойство удовлетворения данному условию. Покажем теперь, что добавление к полной в L_3 системе функций функции из P_3 , не сохраняющей неравенства промежуточного значения, дает систему, полную в P_3 .

Для этого используем утверждение, содержащееся в [5], а именно: добавление к функциям из L_3 функции $T(x)$, принимающей значение 1/2 на всех значениях x , дает систему, полную в P_3 . Функция $T(x)$ называется оператором Слупецкого.

Рассмотрим функцию $f(x_1, \dots, x_n) \in P_3$, такую, что:

$$\exists \langle \alpha_1, \dots, \alpha_n \rangle (\neg \exists i \in \{1, 2, \dots, n\} (\alpha_i = 1/2) \& f(\alpha_1, \dots, \alpha_n) = 1/2).$$

Поскольку L_3 содержит константы 1 и 0, может быть осуществлена подстановка соответствующих констант вместо переменных x_i ($1 \leq i \leq n$) в $f(x_1, \dots, x_n)$ в зависимости от того, чему равны соответствующие значения α_i в $\langle \alpha_1, \dots, \alpha_n \rangle$. В результате получим функцию, тождественно равную промежуточному значению. Следовательно, $[L_3 \cup f(x_1, \dots, x_n)] = P_3$, что и требовалось доказать.

3 Класс K_3^D диагональных функций

Докажем теперь предполноту класса диагональных функций K_3^D в L_3 . Для доказательства потребуется использовать функции сильной логики Клини K_3 . Базовыми в K_3 являются функции $\{\neg_L x, x \vee y\}$, где, как и прежде, $x \vee y = \max(x, y)$, а $\neg_L x = 1 - x$.

Класс K_3^D определяется следующим образом:

$$K_3^D = \{f(x_1, \dots, x_n) \in L_3 : \forall \langle \alpha_1, \dots, \alpha_n \rangle, \langle \beta_1, \dots, \beta_n \rangle \\ ((\exists i \in \{1, 2, \dots, n\} (\alpha_i = 1/2) \Rightarrow (f(\alpha_1, \dots, \alpha_n) = 1 \Rightarrow \\ \forall \langle \alpha'_1, \dots, \alpha'_n \rangle (f(\alpha'_1, \dots, \alpha'_n) = 1))) \& (\exists j \in \{1, 2, \dots, n\} (\beta_j = \\ 1/2) \Rightarrow \\ (f(\beta_1, \dots, \beta_n) = 0 \Rightarrow \forall \langle \beta'_1, \dots, \beta'_n \rangle (f(\beta'_1, \dots, \beta'_n) = 0))))\},$$

где $\langle \alpha'_1, \dots, \alpha'_n \rangle$, $\langle \beta'_1, \dots, \beta'_n \rangle$ есть результаты произвольных замен всех вхождений значения $1/2$ в $\langle \alpha_1, \dots, \alpha_n \rangle$ и $\langle \beta_1, \dots, \beta_n \rangle$, соответственно, на единицы и нули.

ЗАМЕЧАНИЕ 4. Предыдущее определение означает, что каждый из наборов значений $\langle \alpha_1, \dots, \alpha_n \rangle$, $\langle \beta_1, \dots, \beta_n \rangle$ порождает, возможно, пустой класс подстановок $\langle \alpha'_1, \dots, \alpha'_n \rangle$, $\langle \beta'_1, \dots, \beta'_n \rangle$ единиц и нулей в исходные наборы. Эти подстановки могут быть просто и естественно описаны при помощи введенного Ю.В. Ивлевым в [4] понятия квазифункции.

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 6. Под квазифункцией будем понимать соответствие, в силу которого определенный объект из некоторого множества соотносится с некоторым объектом из определенно-го подмножества того же самого множества.

Дадим табличное определение одноместной квазифункции $\varphi(x)$:

x	$\varphi(x)$
1	1
1/2	1/0
0	0

Здесь запись $1/0$ означает, что значению $1/2$ ставится в соответствие 1 или 0. С использованием данной квазифункции определение класса K_3^D может быть записано в следующем виде:

$$K_3^D = \{f(x_1, \dots, x_n) \in L_3 : \forall \langle \alpha_1, \dots, \alpha_n \rangle ((\exists i \in \{1, 2, \dots, n\} \\ (\alpha_i = 1/2)) \Rightarrow ((f(\alpha_1, \dots, \alpha_n) \in \{1, 0\}) \Rightarrow (f(\alpha_1, \dots, \alpha_n) = \\ f(\varphi(\alpha_1), \dots, \varphi(\alpha_n))))))\}.$$

ЗАМЕЧАНИЕ 5. Классу K_3^D принадлежат все функции сильной регулярной логики Клини K_3 , а также константы 1 и 0, т. е. $[K_3 \cup \{1, 0\}] \subset K_3^D$. Однако K_3^D не принадлежит ни одна из функций $\Box x$, $\Diamond x$, ∇x , а также импликация Лукасевича $x \rightarrow y$. Следовательно, класс диагональных функций не совпадает с классом функций логики Лукасевича. Данный класс содержит и функции, не являющиеся регулярными, по Клини. Примером такой функции является $\psi(x, y)$, определяемая следующей таблицей:

ψ	1	1/2	0
1	1	1/2	1
1/2	1/2	1	1/2
0	1	1/2	1

Докажем, что K_3^D является замкнутым. Для этого достаточно показать, что если функции $f(x_1, \dots, x_s)$, $f_1(x_{11}, x_{21}, \dots, x_{n1})$, $f_2(x_{12}, x_{22}, \dots, x_{n2})$, $\dots$, $f_s(x_{1s}, x_{2s}, \dots, x_{ns})$ принадлежат K_3^D , то и функция $\Phi = f(f_1(x_{11}, x_{21}, \dots, x_{n1}), f_2(x_{12}, x_{22}, \dots, x_{n2}), \dots, f_s(x_{1s}, x_{2s}, \dots, x_{ns}))$ также принадлежит K_3^D . Поскольку функции $f(x_1, \dots, x_s)$, $f_1(x_{11}, x_{21}, \dots, x_{n1})$, $f_2(x_{12}, x_{22}, \dots, x_{n2})$, $\dots$, $f_s(x_{1s}, x_{2s}, \dots, x_{ns})$ принадлежат L_3 , то на всех наборах $\langle \alpha_{11}, \alpha_{21}, \dots, \alpha_{n1}, \alpha_{12}, \alpha_{22}, \dots, \alpha_{n2}, \dots, \alpha_{1s}, \alpha_{2s}, \dots, \alpha_{ns} \rangle$ и $\langle \beta_{11}, \beta_{21}, \dots, \beta_{n1}, \beta_{12}, \beta_{22}, \dots, \beta_{n2}, \dots, \beta_{1s}, \beta_{2s}, \dots, \beta_{ns} \rangle$ значений переменных $x_{11}, x_{21}, \dots, x_{n1}, x_{12}, x_{22}, \dots, x_{n2}, \dots, x_{1s}, x_{2s}, \dots, x_{ns}$, не содержащих вхождений промежуточного значения, функция Φ , очевидно, удовлетворяет определению K_3^D .

Если же в наборе значений переменных функции Φ имеются вхождения промежуточного значения, то Φ либо принимает промежуточное значение, либо значение Φ принадлежит множеству $\{1, 0\}$. В первом случае функция Φ удовлетворяет условиям определения класса K_3^D . Во втором случае данная функция также удовлетворяет условиям определения, поскольку для каждой из функций f_j ($1 \leq j \leq s$) будет иметь место один из следующих случаев:

1. Если значение функции f_j на некотором наборе значений переменных равняется 1/2, то на любых соответствующих поднаборах $\langle \alpha'_{1j}, \dots, \alpha'_{nj} \rangle$ и $\langle \beta'_{1j}, \dots, \beta'_{nj} \rangle$ значений переменных $x_{1j}, x_{2j}, \dots, x_{nj}$ значение f_j принадлежит $\{1, 0\}$.

Однако поскольку $f(x_1, \dots, x_s)$ принадлежит K_3^D , то и функция Φ не изменит в этом случае своего значения.

2. Если f_j принадлежит множеству $\{1, 0\}$, то так как $f_j \in K_3^D$, значение данной функции не изменится на любых соответствующих поднаборах $\langle \alpha'_{1j}, \dots, \alpha'_{nj} \rangle$ и $\langle \beta'_{1j}, \dots, \beta'_{nj} \rangle$ значений переменных $x_{1j}, x_{2j}, \dots, x_{nj}$, а следовательно, значение функции Φ не изменится и в этом случае.

Следовательно, функция Φ также принадлежит K_3^D , что и требовалось доказать.

ТЕОРЕМА 1. *Класс диагональных функций K_3^D является предполным в L_3 .*

Доказательство. Добавим к функциям K_3^D функцию $f(x_1, \dots, x_n) \in L_3$, такую что $f(x_1, \dots, x_n) \notin K_3^D$. Поскольку $f(x_1, \dots, x_n) \notin K_3^D$, возможны случаи:

1. Существует набор $\langle \alpha_1, \dots, \alpha_n \rangle$ значений переменных $x_1, \dots, x_n$ такой, что в $\langle \alpha_1, \dots, \alpha_n \rangle$ имеются вхождения промежуточного значения и $f(\alpha_1, \dots, \alpha_n) = 1$. А также существует набор $\langle \alpha'_1, \dots, \alpha'_n \rangle$, в котором все вхождения промежуточного значения в $\langle \alpha_1, \dots, \alpha_n \rangle$ заменены на единицы и нули, такой, что $f(\alpha'_1, \dots, \alpha'_n) \neq 1$. Так как $f(x_1, \dots, x_n)$ принадлежит множеству функций логики Лукасевича, то $f(\alpha'_1, \dots, \alpha'_n) \neq 1/2$, поскольку в $\langle \alpha'_1, \dots, \alpha'_n \rangle$ не имеется вхождений значения $1/2$. Следовательно, $f(\alpha'_1, \dots, \alpha'_n) = 0$. Осуществим теперь подстановку соответствующих констант вместо всех α_i ($1 \leq i \leq n$), принадлежащих множеству $\{1, 0\}$ в $\langle \alpha_1, \dots, \alpha_n \rangle$, в функцию $f(x_1, \dots, x_n)$. На место незатронутых предыдущей подстановкой переменных в $f(x_1, \dots, x_n)$ подставим функции x и $\neg_L x$ в зависимости от того, какие константы (1 или 0 соответственно) были подставлены в $\langle \alpha'_1, \dots, \alpha'_n \rangle$ вместо каждого из вхождений значения $1/2$ в $\langle \alpha_1, \dots, \alpha_n \rangle$. Такие подстановки могут быть осуществлены, поскольку K_3^D содержит функции 1, 0 и $\neg_L x$.

В результате получим функцию $f'(x)$, зависящую от одной переменной, такую, что $f'(1/2) = 1$ и $f'(1) \neq 1$ или $f'(0) \neq 1$. Следовательно, $f'(x)$ совпадает с одной из трех функций:

x	$f'_1(x)$	x	$f'_2(x)$	x	$f'_3(x)$
1	0	1	1	1	0
1/2	1	1/2	1	1/2	1
0	1	0	0	0	0

Функции $f'_2(x)$ и $f'_3(x)$ совпадают с операторами $\Diamond x$ и ∇x , соответственно. Функция $\neg_L f'_1(x)$ эквивалентна оператору $\Box x$. Так как класс K_3^D содержит функции $\neg_L x$ и $x \vee y$, а системы $\{\neg_L x, \Box x, x \vee y\}$, $\{\neg_L x, \Diamond x, x \vee y\}$ и $\{\neg_L x, \nabla x, x \vee y\}$ являются полными в L_3 (см. [5, разд. 2.1.2]), то $[K_3^D \cup f(x_1, \dots, x_n)] = L_3$.

Рассмотрение случая 1 завершено.

2. Существует набор $\langle \beta_1, \dots, \beta_n \rangle$ значений переменных $x_1, \dots, x_n$ такой, что в $\langle \beta_1, \dots, \beta_n \rangle$ имеются вхождения промежуточного значения и $f(\beta_1, \dots, \beta_n) = 0$. А также существует набор $\langle \beta'_1, \dots, \beta'_n \rangle$, в котором все вхождения промежуточного значения в $\langle \beta_1, \dots, \beta_n \rangle$ заменены на единицы и нули, такой, что $f(\beta'_1, \dots, \beta'_n) \neq 0$. Так как $f(x_1, \dots, x_n)$ принадлежит множеству функций логики Лукасевича, то $f(\beta'_1, \dots, \beta'_n) \neq 1/2$, поскольку в $\langle \beta'_1, \dots, \beta'_n \rangle$ не имеется вхождений значения $1/2$. Следовательно, $f(\beta'_1, \dots, \beta'_n) = 1$. Осуществим теперь подстановку соответствующих констант вместо всех β_j ($1 \leq j \leq n$), принадлежащих множеству $\{1, 0\}$ в $\langle \beta_1, \dots, \beta_n \rangle$, в функцию $f(x_1, \dots, x_n)$. На место незатронутых предыдущей подстановкой переменных в $f(x_1, \dots, x_n)$ подставим функции x и $\neg_L x$ в зависимости от того, какие константы (1 или 0 соответственно) были подставлены в $\langle \beta'_1, \dots, \beta'_n \rangle$ вместо каждого из вхождений значения $1/2$ в $\langle \beta_1, \dots, \beta_n \rangle$. Такие подстановки могут быть осуществлены, поскольку K_3^D содержит функции 1, 0 и $\neg_L x$.

В результате получим функцию $f'(x)$, зависящую от одной переменной, такую, что $f'(1/2) = 0$ и $f'(1) \neq 0$ или $f'(0) \neq 0$. Следовательно, $f'(x)$ совпадает с одной из трех функций:

x	$f'_1(x)$	x	$f'_2(x)$	x	$f'_3(x)$
1	1	1	0	1	1
1/2	0	1/2	0	1/2	0
0	0	0	1	0	1

Функция $f'_1(x)$ эквивалентна оператору $\Box x$. А функции $\neg_L f'_2(x)$

и $\neg_L f'_3(x)$ совпадают с операторами $\Diamond x$ и ∇x соответственно. Так как класс K_3^D содержит функции $\neg_L x$ и $x \vee y$, а системы $\{\neg_L x, \Box x, x \vee y\}$, $\{\neg_L x, \Diamond x, x \vee y\}$ и $\{\neg_L x, \nabla x, x \vee y\}$ являются полными в L_3 (см. [5, разд. 2.1.2]), то $[K_3^D \cup f(x_1, \dots, x_n)] = L_3$.

Рассмотрение случая 2 завершено.

Доказательство теоремы завершено.

Q.E.D.

Таким образом, установлено, что класс диагональных функций является предполным в классе функций трехзначной логики Лукасевича.

4 Класс H_3^* , двойственный трехзначной логике Гейтинга

В [7] было показано, что класс функций трехзначной логики Гейтинга H_3 является предполным в L_3 . В этом разделе будет доказана теорема о том, что и класс H_3^* , двойственный H_3 , также предполон в L_3 . В доказательстве предполноты H_3 существенным образом используется тот факт, что множество функций данного класса совпадает с множеством функций, дистрибутивных относительно функции $\neg\neg x$, где $\neg x$ эквивалентно функции $\neg_L \Diamond x$ логики Лукасевича. А именно: $H_3 = \{f(x_1, \dots, x_n) \in L_3 : \neg\neg f(x_1, \dots, x_n) = f(\neg\neg x_1, \dots, \neg\neg x_n)\}$. Достаточно заметить, что $\neg\neg x = \neg_L \Diamond \neg_L \Diamond x = \Box \Diamond x = \Diamond x$. Тогда приведенное определение можно заменить эквивалентным ему:

$$H_3 = \{f(x_1, \dots, x_n) \in L_3 : \Diamond f(x_1, \dots, x_n) = f(\Diamond x_1, \dots, \Diamond x_n)\}$$

Таким образом, **двойственный к H_3 класс** может быть определен следующим способом¹:

$$H_3^* = \{f(x_1, \dots, x_n) \in L_3 : \Box f(x_1, \dots, x_n) = f(\Box x_1, \dots, \Box x_n)\}$$

Докажем, что класс H_3^* является замкнутым. Для этого достаточно показать, что если функции $f(x_1, \dots, x_s)$, $f_1(x_{11}, x_{21}, \dots, x_{n1})$, $f_2(x_{12}, x_{22}, \dots, x_{n2})$, ..., $f_s(x_{1s}, x_{2s}, \dots, x_{ns})$ принадлежат H_3^* , то и функция $\Phi = f(f_1(x_{11}, x_{21}, \dots, x_{n1}), f_2(x_{12}, x_{22}, \dots, x_{n2}), \dots, f_s(x_{1s}, x_{2s}, \dots, x_{ns}))$ также принадлежит H_3^* .

¹Заметим, что класс H_3^* , по всей видимости, совпадает с классом функций логики G_3^* , впервые рассмотренной А. С. Карпенко в [5] под названием трехзначной логики Брауэра.

Так как функция $f(x_1, \dots, x_s)$ принадлежит H_3^* , то $\Box\Phi = f(\Box f_1(x_{11}, x_{21}, \dots, x_{n1}), \Box f_2(x_{12}, x_{22}, \dots, x_{n2}), \dots, \Box f_s(x_{1s}, x_{2s}, \dots, x_{ns}))$. Поскольку каждая из функций f_j ($1 \leq j \leq s$) принадлежит H_3^* , то для них выполняются равенства $\Box f_j(x_{1j}, x_{2j}, \dots, x_{nj}) = f_j(\Box x_{1j}, \Box x_{2j}, \dots, \Box x_{nj})$. Следовательно, $\Box\Phi = f(f_1(\Box x_{11}, \Box x_{21}, \dots, \Box x_{n1}), f_2(\Box x_{12}, \Box x_{22}, \dots, \Box x_{n2}), \dots, f_s(\Box x_{1s}, \Box x_{2s}, \dots, \Box x_{ns}))$.

Значит, функция Φ также принадлежит H_3^* , что и требовалось доказать.

Для доказательства предполноты H_3^* потребуется использовать функции трехзначной логики Брауэра G_3^* . Исходными в логике Брауэра являются функции $\{\neg_{G_3^*}x, x \& y, x \vee y, x \Leftarrow y\}$, где $x \& y = \min(x, y)$, $x \vee y = \max(x, y)$, а функции $\neg_{G_3^*}x$ и $x \Leftarrow y$ определяются следующими таблицами:

x	$\neg_{G_3^*}x$	$\Leftarrow$	1	1/2	0
1	0	1	0	0	0
1/2	1	1/2	1	0	0
0	1	0	1	1/2	0

H_3^* содержит функцию $\Box x$, в силу очевидного равенства $\Box\Box x = \Box\Box x$. Покажем, что все исходные функции G_3^* принадлежат H_3^* , то есть $G_3^* \subset H_3^*$. Для этого построим истинностные таблицы для каждой из функций, входящих в следующие пары:

1. $\Box\neg_{G_3^*}x, \neg_{G_3^*}\Box x$;
2. $\Box(x \& y), \Box x \& \Box y$;
3. $\Box(x \vee y), \Box x \vee \Box y$;
4. $\Box(x \Leftarrow y), \Box x \Leftarrow \Box y$

Приведем здесь в качестве примера таблицы всех пар функций.

1.

$\Box$	$\neg_{G_3^*}$	x	$\neg_{G_3^*}$	$\Box$	x
0	0	1	0	1	1
1	1	1/2	1	0	1/2
1	1	0	1	0	0

2.

$\square$	$(x$	$\&$	$y)$	$\square$	x	$\&$	$\square$	y
1	1	1	1	1	1	1	1	1
0	1	1/2	1/2	1	1	0	0	1/2
0	1	0	0	1	1	0	0	0
0	1/2	1/2	1	0	1/2	0	1	1
0	1/2	1/2	1/2	0	1/2	0	0	1/2
0	1/2	0	0	0	1/2	0	0	0
0	0	0	1	0	0	0	1	1
0	0	0	1/2	0	0	0	0	1/2
0	0	0	0	0	0	0	0	0

3.

$\square$	$(x$	$\vee$	$y)$	$\square$	x	$\vee$	$\square$	y
1	1	1	1	1	1	1	1	1
1	1	1	1/2	1	1	1	0	1/2
1	1	1	0	1	1	1	0	0
1	1/2	1	1	0	1/2	1	1	1
0	1/2	1/2	1/2	0	1/2	0	0	1/2
0	1/2	1/2	0	0	1/2	0	0	0
1	0	1	1	0	0	1	1	1
0	0	1/2	1/2	0	0	0	0	1/2
0	0	0	0	0	0	0	0	0

4.

$\square$	$(x$	$\Leftarrow$	$y)$	$\square$	x	$\Leftarrow$	$\square$	y
0	1	0	1	1	1	0	1	1
0	1	0	1/2	1	1	0	0	1/2
0	1	0	0	1	1	0	0	0
1	1/2	1	1	0	1/2	1	1	1
0	1/2	0	1/2	0	1/2	0	0	1/2
0	1/2	0	0	0	1/2	0	0	0
1	0	1	1	0	0	1	1	1
0	0	1/2	1/2	0	0	0	0	1/2
0	0	0	0	0	0	0	0	0

Перейдем теперь к доказательству основной теоремы этого раздела.

ТЕОРЕМА 2. Класс H_3^* является предполным в L_3 .

Доказательство. Рассмотрим функцию $f(x_1, \dots, x_n) \in L_3$ такую, что $f(x_1, \dots, x_n) \notin H_3^*$. Заметим, что H_3^* содержит функции $\{\Box x, x \vee y\}$. Следовательно, для доказательства утверждения теоремы достаточно показать, что $\neg_L x \in [H_3^* \cup f(x_1, \dots, x_n)]$, так как система функций $\{\neg_L x, \Box x, x \vee y\}$ является полной в L_3 . Поскольку $f(x_1, \dots, x_n) \notin H_3^*$, то существует набор $\langle \alpha_1, \dots, \alpha_n \rangle$ значений переменных $x_1, \dots, x_n$, такой, что $\Box f(\alpha_1, \dots, \alpha_n) \neq f(\Box \alpha_1, \dots, \Box \alpha_n)$. Так как $\Box 1 = 1$ и $\Box 0 = 0$, и $f(x_1, \dots, x_n) \in L_3$, то в $\langle \alpha_1, \dots, \alpha_n \rangle$ имеются вхождения промежуточного значения. Осуществим подстановку переменной x , вместо всех вхождений промежуточного значения в $f(\alpha_1, \dots, \alpha_n)$. На место переменных, не затронутых предыдущей подстановкой в $f(x_1, \dots, x_n)$, подставим константы 1 или 0 в зависимости от того, чему равны соответствующие $\alpha_j \in \{1, 0\}$ ($1 \leq j \leq n$) в $\langle \alpha_1, \dots, \alpha_n \rangle$. Такие подстановки могут быть осуществлены, поскольку константы 1 и 0 принадлежат классу H_3^* . В результате получим функцию $f'(x)$, зависящую от одной переменной, такую, что: а) $f'(1/2) = f(\alpha_1, \dots, \alpha_n)$; и б) $f'(0) = f(\Box \alpha_1, \dots, \Box \alpha_n)$ (так как $\Box 1/2 = 0$, а $\Box 1 = 1$ и $\Box 0 = 0$). Поскольку функция $\Box x$ удовлетворяет условию $\forall x, y (x = y \Rightarrow \Box x = \Box y)$, то из а) следует, что $\Box f'(1/2) = \Box f(\alpha_1, \dots, \alpha_n)$. Таким образом, получаем $\Box f'(1/2) = \Box f(\alpha_1, \dots, \alpha_n) \neq f(\Box \alpha_1, \dots, \Box \alpha_n) = f'(0)$, и отсюда $\Box f'(1/2) \neq f'(0)$. Следовательно, $f'(x)$ совпадает с одной из шести функций $f'_1(x), \dots, f'_6(x)$:

x	$f'_1(x)$	$f'_2(x)$	$f'_3(x)$	$f'_4(x)$	$f'_5(x)$	$f'_6(x)$
1	1	0	0	1	1	0
1/2	1/2	1/2	1	1	0	0
0	1	1	0	0	1	1

Покажем теперь, что функция $\neg_L x$ может быть получена с использованием каждой из функций $f'_1(x), \dots, f'_6(x)$ и, быть может, других функций из H_3^* . А именно покажем, что $\neg_L x = \Box x \Leftarrow f'_1(x) = f'_2(x) = \Box x \Leftarrow (\neg_{G_3^*} f'_3(x) \vee x) = \Box x \Leftarrow (\neg_{G_3^*} f'_4(x) \vee x) = \Box x \Leftarrow (f'_5(x) \vee x) = \Box x \Leftarrow (f'_6(x) \vee x)$. Приведем таблицы полученных функций:

$\Box$	x	$\Leftarrow$	f'_1	(x)
1	1	0	1	1
0	1/2	1/2	1/2	1/2
0	0	1	1	0

$\square$	x	$\Leftarrow$	$(\neg G_3^*)$	f'_3	(x)	$\vee$	x
1	1	0	1	0	1	1	1
0	1/2	1/2	0	1	1/2	1/2	1/2
0	0	1	1	0	0	1	0

$\square$	x	$\Leftarrow$	$(\neg G_3^*)$	f'_4	(x)	$\vee$	x
1	1	0	0	1	1	1	1
0	1/2	1/2	0	1	1/2	1/2	1/2
0	0	1	1	0	0	1	0

$\square$	x	$\Leftarrow$	(f'_5)	(x)	$\vee$	x
1	1	0	1	1	1	1
0	1/2	1/2	0	1/2	1/2	1/2
0	0	1	1	0	1	0

$\square$	x	$\Leftarrow$	(f'_6)	(x)	$\vee$	x
1	1	0	0	1	1	1
0	1/2	1/2	0	1/2	1/2	1/2
0	0	1	1	0	1	0

Таким образом, теорема о предполноте класса H_3^* , двойственного трехзначной логике Гейтинга, в L_3 доказана. Q.E.D.

Литература

- [1] Гаврилов Г. П. О мощности множеств замкнутых классов конечной высоты в PA_0 // ДАН. 1964. Т. 158. № 3. С. 503–506.
- [2] Гаврилов Г. П., Яблонский С. В. Функции алгебры логики и классы Поста. М.: Наука, 1966.
- [3] Захарова Е. Ю., Кудрявцев В. Б., Яблонский С. В. О предполных классах в k -значных логиках // ДАН. 1969. Т. 186. № 3. С. 509–512.
- [4] Ивлев Ю. В. Модальная логика. М.: Изд-во Моск. ун-та, 1991.
- [5] Карпенко А. С., Логика Лукасевича и простые числа, М.: URSS, 2007.
- [6] Карпенко А. С. Многозначные логики / Сер. Логика и компьютер. М.: Наука, 1997.
- [7] Раца М. Ф. О классе функций трехзначной логики, соответствующем первой матрице Яськовского. Кишинев. С. 185–213.
- [8] Раца М. Ф. О классе функций логики, соответствующей первой матрице Яськовского // Исследования по общей алгебре. Кишинев. 1965. С. 99–110.
- [9] Финн В. К. О критерии функциональной полноты в V_3 // Исследования по формализованным языкам и неклассическим логикам. М.: Наука, 1974. С. 194–199.
- [10] Яблонский С. В. О функциональной полноте в трехзначном исчислении // ДАН. 1954. Т. 95. № 6. С. 1153–1155.
- [11] Яблонский С. В. Введение в дискретную математику. М.: Наука, 1986.
- [12] Яблонский С. В. Функциональные построения в k -значной логике // Труды математического института имени В. А. Стеклова. 1958. Т. 51. С. 5–142.