Бесконечнозначная логика Лукасевича и критерии наличия фактор-семантики у многозначных логик

Н. Н. ПРЕЛОВСКИЙ

ABSTRACT. The article deals with a special kind of bivalent semantics for multi-valued logics, called factor-semantics. A concept of *local factor-semantics* is introduced while constructing matrices $\mathfrak{K}$ and $\mathfrak{K}'$, isomorphic to the standard rational-valued matrix for infinite-valued logic of Łukasiewicz.

Keywords: logics of Łukasiewicz, factor-semantics, logical matrices, isomorphism, local factor-semantics

А.С. Карпенко (см. [1, с. 311–315]) описывает построение особого впервые рассмотренного им в [3] типа бивалентных семантик для различных многозначных логических систем, включающих конечнозначные логики Лукасевича L_n и конечнозначные логики Клини K_n . Данный тип бивалентных семантик получил название «фактор-семантик».

Суть фактор-семантики в первом приближении сводится к отказу от интерпретации пропозициональных логических формул неклассическими логическими значениями, рассматриваемыми в качестве не имеющих внутренней структуры элементов соответствующей алгебры, и переходу к интерпретации формул на множестве классов, образованных конечными или бесконечными последовательностями классических истинностных значений T и F (в дальнейшем — TF -последовательностями).

Несмотря на внесение столь радикальных изменений в определения семантических понятий, А.С. Карпенко доказал, что

получающиеся в результате всех преобразований структуры изоморфны исходным логическим матрицам, являющимся характеристическими для соответствующих логик. Образующие фактор-семантики логические матрицы в дальнейшем часто будут называться фактор-матрицами, в отличие от исходных характеристических матриц.

Изоморфизм двух объектов является очень сильным свойством, и во многих контекстах может означать математическую неразличимость практически «всех» свойств этих объектов. В случае конечнозначных логических матриц, например, изоморфизм матриц $\mathfrak{M}_1$ и $\mathfrak{M}_2$ (символически будем обозначать этот факт выражением $\mathfrak{M}_1 \equiv \mathfrak{M}_2$) гарантирует совпадение классов тавтологий $E(\mathfrak{M}_1)$ и $E(\mathfrak{M}_2)$ в этих матрицах, а также совпадение соответствующих этим матрицам логических систем, полученных добавлением к обеим матрицам того или иного определения логического следования. Между множествами-носителями M_1 и M_2 этих матриц может быть установлено взаимнооднозначное соответствие $\varphi : M_1 \mapsto M_2$, гарантирующее выполнение равенства $|M_1| = |M_2|$, а также совпадение табличных определений соответствующих связок с точностью до переименования элементов множеств-носителей. Таким образом, отвлечение от способов задания изоморфных объектов (в данном случае придется отвлечься от внутренней структуры элементов матриц, соответствующих фактор-семантикам) ведет к невозможности их практического различения.

Но такая обусловленная изоморфизмом неразличимость сохраняется лишь при рассмотрении фактор-семантик в узком контексте логик, для которых фактор-семантики уже построены и наличие отношения изоморфизма (что эквивалентно наличию сохраняющего связки взаимнооднозначного отображения φ) между соответствующими матрицами уже доказано.

Возникает вопрос о том, какие многозначные логики могут иметь фактор-семантики, а какие — нет. Всегда ли возможно построение фактор-семантики, изоморфной исходной логической матрице, или же в некоторых случаях изоморфизм является слишком большой «роскошью», и тогда свойства соответствующей фактор-семантике матрицы (в некотором смысле, такая

матрица, конечно, уже не может считаться точной семантикой для заданной исходной матрицей логики) могут совпадать лишь с некоторыми из свойств исходной матрицы, а с другими ее свойствами могут и не совпадать? Или же в некоторых случаях возможно добиться изоморфизма с исходными матрицами, но за счет сохранения лишь отдельных черт фактор-семантики и одновременной утраты других ее черт?

Ответ на первый из этих вопросов требует выявления логических матриц, для которых не могут быть построены фактор-семантики, и такие матрицы существуют. В частности, в [1] отмечается, что циклическое отрицание логик Поста P_n не может быть выражено через покомпонентные булевы операции. С другой стороны, для любой конечнозначной логики процесс построения соответствующей фактор-семантики, если она существует, может быть алгоритмизирован. Для этого необходимо и достаточно рассмотреть множество всех отношений $R(\alpha, \beta)$ между особым образом заданными TF -последовательностями α и β из всевозможных классов эквивалентности $[\alpha]$ и $[\beta]$ (это возможно с учетом конечности множеств всех бинарных отношений и всех отношений эквивалентности, заданных на конечном множестве). В случае бесконечнозначной логики, ситуация изменяется, рассмотрению некоторых предварительных результатов в этом направлении и посвящена данная статья.

Приведем формальное определение фактор-семантик на примере n -значных логик Лукасевича L_n .

С булевой алгеброй

$$\mathcal{A}^B = \langle B^s, \neg^+, \supset^+ \rangle$$

ассоциируется логическая матрица

$$\mathfrak{M}_s^C = \langle B^s, \neg^+, \supset^+, \{T^s\} \rangle.$$

Эта логическая матрица представляет собой s -кратное прямое произведение двужначной характеристической для классической логики матрицы

$$\mathfrak{M}_2^C = \langle \{T, F\}, \neg, \supset, \{T\} \rangle$$

на саму себя (то есть декартову s -ю степень данной матрицы).

Таким образом, любой элемент $\alpha \in B^s$ есть последовательность компонентов T и F , состоящая из s вхождений этих компонентов, то есть α есть $\langle a_1, \dots, a_s \rangle$, где $\forall i \leq s (a_i \in \{T, F\})$.

Через $\eta(\alpha)$ обозначается число компонентов α , равных T . Определим на элементах B^s следующее отношение эквивалентности. Так, для всяких α, β в B^s будем говорить, что $\alpha \cong \beta$, если $\eta(\alpha) = \eta(\beta)$. Рассмотрим фактор-множество $B^s / \cong$ множества B^s по отношению $\cong$. Очевидно, что

$$|B^s / \cong| = s + 1.$$

Если $\alpha \in B^s$, обозначим, соответствующий α класс эквивалентности через $[\alpha]$. На множестве $B^s / \cong$ определим операции $\neg^{L_{s+1}}$ и $\rightarrow^{L_{s+1}}$:

$$\neg^{L_{s+1}}[\alpha] = [\neg^+ \alpha],$$

$$[\alpha] \rightarrow^{L_{s+1}} [\beta] = [\alpha' \supset^+ \beta'],$$

где $\alpha, \beta \in B^s / \cong$, $\alpha' \in [\alpha]$, $\beta' \in [\beta]$ и $R(\alpha', \beta')$, причем отношение R определяется следующим образом:

$$R(\langle a_1, \dots, a_s \rangle, \langle b_1, \dots, b_s \rangle)$$

имеет место, если и только если выполняется одно из следующих условий:

1. $\forall i \leq s (a_i = T \Rightarrow b_i = T)$, если $\eta(\alpha) \leq \eta(\beta)$;
2. $\forall i \leq s (b_i = T \Rightarrow a_i = T)$, если $\eta(\alpha) > \eta(\beta)$.

Таким образом, получена матрица

$$\mathfrak{N}_{s+1}^L = \langle B^s / \cong, \neg^{L_{s+1}}, \rightarrow^{L_{s+1}}, \{[T^s]\} \rangle.$$

Данная матрица, согласно теореме 3 (см. [1, с. 312]), изоморфна характеристической для n -значной логики Лукасевича L_n матрице:

$$\mathfrak{M}_n^L = \langle V_n, \sim, \rightarrow, \{1\} \rangle$$

при $n = s + 1$, где $V_n = \{0, \frac{1}{n}, \dots, \frac{n-1}{n}, 1\}$, а для всех $v, v_1, v_2 \in V_n$ выполняется $\sim v = 1 - v$, и $v_1 \rightarrow v_2 = 1$, если $v_1 \leq v_2$; в противном случае: $v_1 \rightarrow v_2 = 1 - v_1 + v_2$.

Возникает вопрос, можно ли построить аналогичным образом фактор-семантику для бесконечнозначной логики Лукасевича L_∞ .

Отметим, что определение матрицы $\mathfrak{M}_\infty^L$, являющейся характеристической для бесконечнозначной логики Лукасевича, отличается от определения матрицы $\mathfrak{M}_n^L$ лишь тем, что множество V_n заменяется на множество всех рациональных или действительных чисел в интервале $[0; 1]$, а определения соответствующих функций остаются неизменными с поправкой на новое множество значений. Выбор рациональнозначного или действительнозначного интервала во многих контекстах оказывается несущественным, поскольку класс тавтологий L_∞ является инвариантным относительно данного выбора. При переходе к рассмотрению фактор-семантики бесконечнозначной логики Лукасевича это различие приобретает значимый характер.

А.С. Карпенко была построена фактор-матрица, являющаяся характеристической для бесконечнозначной логики L_Σ (см. [2, с. 269–272] и [1, с. 315–318], множество тавтологий которой представляет собой расширение множества тавтологий логики L_∞ . Ниже будет осуществлено построение матриц, одна из которых совпадает с L_∞ по классу тавтологий, а две других — изоморфны счетной характеристической матрице L_∞ , то есть матрице $\mathfrak{M}_\infty^L$, множество-носитель которой представляет собой множество всех рациональных чисел из интервала $[0; 1]$.

С этой целью рассмотрим логические матрицы:

$$\mathfrak{M}_1 = \langle M_1, f_1, \dots, f_n, D_1 \rangle \text{ и } \mathfrak{M}_2 = \langle M_2, g_1, \dots, g_n, D_2 \rangle.$$

В дальнейшем будем считать, что соответствующие матрицы имеют одинаковую сигнатуру.

Произведением матриц $\mathfrak{M}_1$ и $\mathfrak{M}_2$ будем называть логическую матрицу

$$\mathfrak{M}_1 \otimes \mathfrak{M}_2 = \langle M_1 \times M_2, F_1, \dots, F_n, D_1 \times D_2 \rangle,$$

где « $\times$ » означает декартово произведение соответствующих множеств, а $F_1, \dots, F_n$ – следующим образом определенные функции:

$$\forall m_1, \dots, m_i \in M_1, k_1, \dots, k_i \in M_2, j \in \{1, \dots, n\}$$

$$F_j(< m_1, k_1 >, \dots, < m_i, k_i >) = < f_j(m_1, \dots, m_i), g_j(k_1, \dots, k_i) > .$$

Хорошо известен результат, согласно которому множество тавтологий бесконечнозначной логики Лукасевича является пересечением множеств тавтологий конечнозначных логик Лукасевича, то есть:

$$E(\mathfrak{M}_\infty^L) = \bigcap_1^\infty E(\mathfrak{M}_{i+1}^L).$$

Операция произведения матриц является в логическом инструментарии аналогом теоретико-множественного пересечения множеств тавтологий, поскольку, как показал Н. Решер в [4]:

$$E(\mathfrak{M}_1 \otimes \mathfrak{M}_2) = E(\mathfrak{M}_1) \cap E(\mathfrak{M}_2).$$

Так как операция произведения матриц и результат Н. Решера тривиально обобщаются на случай счетного множества матриц, можно сделать следующее заключение:

$$E(\mathfrak{M}_\infty^L) = E(\bigotimes_1^\infty \mathfrak{M}_{i+1}^L).$$

Значит, произведение всех фактор-матриц для конечнозначных логик Лукасевича в силу их изоморфизма с исходными матрицами соответствующих логик даст матрицу, совпадающую по классу тавтологий с бесконечнозначной логикой Лукасевича.

Эта матрица имеет следующий вид:

$$\bigotimes_1^\infty \mathfrak{M}_{i+1}^L =$$

$$\left\langle \{ < [\alpha_1], [\alpha_2], \dots > : [\alpha_i] \in B^i / \cong \}, \neg_{\otimes}^L, \rightarrow_{\otimes}^L, \{ < [T], [TT], [TTT], \dots > \} \right\rangle ,$$

где $\neg_{\otimes}^{\mathbf{L}}(< [\alpha_1], [\alpha_2], \dots >) = < \neg^{\mathbf{L}_2}([\alpha_1]), \neg^{\mathbf{L}_3}([\alpha_2]), \dots >$, а

$$\begin{aligned} < [\alpha_1], [\alpha_2], \dots > \rightarrow_{\otimes}^{\mathbf{L}} < [\beta_1], [\beta_2], \dots > = \\ < [\alpha_1] \rightarrow^{\mathbf{L}_2} [\beta_1], [\alpha_2] \rightarrow^{\mathbf{L}_3} [\beta_2], \dots >. \end{aligned}$$

Однако данная матрица, по всей видимости, в силу приводимых ниже причин не может использоваться в построении искомой фактор-семантики для бесконечнозначной логики Лукасевича.

Рассмотрим отношение эквивалентности между элементами $< [\alpha_1], [\alpha_2], \dots >$ и $< [\beta_1], [\beta_2], \dots >$, принадлежащими множеству-носителю данной матрицы: $< [\alpha_1], [\alpha_2], \dots > \cong < [\beta_1], [\beta_2], \dots > \Leftrightarrow \forall i \in \mathbb{N}(\eta(\alpha_i) = \eta(\beta_i))$.

Это отношение представляется наиболее интуитивно приемлемым кандидатом на роль отношения эквивалентности, порождающего соответствующее разбиение множества элементов матрицы.

Эквивалентными в этом случае являются, например, элементы $< [T], [TF], [TFT], \dots >$ и $< [T], [FT], [FTT], \dots >$, если положить, что каждая, начиная со второй, из бесконечного числа TF -последовательностей в соответствующем компоненте каждого из элементов содержит в точности по одному вхождению F . То есть элементы рассматриваемой матрицы эквивалентны, если и только если они содержат в точности одни и те же классы эквивалентности на каждой из кортежных позиций. Полученное таким образом разбиение на классы является тривиальным, поскольку каждый элемент эквивалентен лишь самому себе с точностью до выбора представителя для обозначения «внутреннего» класса эквивалентности на соответствующей кортежной позиции. А именно, выполняется:

$$\bigotimes_1^{\infty} \mathfrak{N}_{i+1}^{\mathbf{L}} / \cong \equiv \bigotimes_1^{\infty} \mathfrak{N}_{i+1}^{\mathbf{L}}.$$

Таким образом, можно заключить, что операция произведения фактор-матриц не сохраняет свойство «быть фактор-матрицей».

Однако компоненты элементов соответствующих матриц не обязательно должны представлять собой классы эквивалентности. Рассмотрим множество

$$B^\infty = B \times B^2 \times B^3 \times \dots$$

B^∞ представляет собой множество всех бесконечных последовательностей, состоящих из всевозможных конечных TF -последовательностей. Мощность множества B^∞ есть континуум, и в связи с этим оно является «слишком большим», чтобы определить на нем счетную фактор-матрицу для бесконечнозначной логики Лукасевича. Будем считать, что каждая конечная TF -последовательность внутри элементов множества B^∞ сопоставлена весу W этой последовательности, определенному для всякого s и для всякой последовательности $\langle a_1, \dots, a_s \rangle \in B^s$ следующим образом:

$$W(\langle a_1, \dots, a_s \rangle) = \frac{\eta(\langle a_1, \dots, a_s \rangle)}{s}.$$

Рассмотрим все такие суммы $\Sigma_1^\infty W(\langle a_1, \dots, a_i \rangle)$, где $1 \leq i < \omega$, а $\langle a_1, \dots, a_i \rangle$ — i -е TF -последовательности в некотором $\alpha \in B^\infty$. С их помощью определим множество $B_*^\infty \subset B^\infty$ такое, что: $\forall \alpha \in B^\infty$ выполняется $\alpha \in B_*^\infty$, если $\Sigma_1^\infty W(\langle a_1, \dots, a_i \rangle)$ находится в интервале $[0; 1]$ и является неотрицательным рациональным числом, то есть может быть выражено дробью вида $\frac{m}{n}$, где m — неотрицательное целое число, n — натуральное число, а $\langle a_1, \dots, a_i \rangle \in \alpha$ для всякого $i \in \{1, 2, \dots\}$.

Установим на множестве B_*^∞ отношение эквивалентности таким образом, что для всяких α и β из B_*^∞ выполняется, что $\alpha \cong \beta$, если и только если

$$\Sigma_1^\infty W(\langle a_1, \dots, a_i \rangle) = \Sigma_1^\infty W(\langle b_1, \dots, b_j \rangle),$$

где i и j пробегают по всем конечным TF -последовательностям в α и β , соответственно.

Определим матрицу

$$\mathfrak{K} = \left\langle B_*^\infty / \cong, \neg^{\mathfrak{K}}, \rightarrow^{\mathfrak{K}}, \{[\langle \langle T \rangle, \langle FF \rangle, \langle FFF \rangle, \dots \rangle]\} \right\rangle,$$

где $B_*^\infty / \cong$ есть результат разбиения множества B_*^∞ по отношению эквивалентности $\cong$, [$\langle \langle T \rangle, \langle FF \rangle, \langle FFF \rangle, \dots \rangle$] есть класс элементов множества B_*^∞ (то есть элемент множества $B_*^\infty / \cong$), эквивалентных последовательности $\langle \langle T \rangle, \langle FF \rangle, \langle FFF \rangle, \dots \rangle$, в которой первое вхождение T является единственным, то есть класс всех таких последовательностей $\alpha = \langle \langle a_{11} \rangle, \langle a_{21}, a_{22} \rangle, \langle a_{31}, a_{32}, a_{33} \rangle, \dots \rangle$ из B_*^∞ , что $\Sigma_1^\infty W(\langle a_{i1}, \dots, a_{ii} \rangle) = 1$.

Связки $\neg^{\mathfrak{K}}$ и $\rightarrow^{\mathfrak{K}}$ определяются следующим образом:

•

$$\neg^{\mathfrak{K}}([\langle \langle a_{11} \rangle, \langle a_{21}, a_{22} \rangle, \langle a_{31}, a_{32}, a_{33} \rangle, \dots \rangle]) =$$

$$[\langle \langle a'_{11} \rangle, \langle a'_{21}, a'_{22} \rangle, \dots, \neg^+ \langle a'_{i1}, \dots, a'_{ii} \rangle, \dots \rangle],$$

где правая часть равенства представляет собой класс последовательностей, эквивалентных последовательности, все компоненты которой, кроме $\neg^+ \langle a'_{i1}, \dots, a'_{ii} \rangle$, состоят только из вхождений F (в частности, если $i \neq 2$, то $\langle a'_{21}, a'_{22} \rangle = \langle FF \rangle$), а $\langle a'_{i1}, \dots, a'_{ii} \rangle$ есть такой компонент, что:

$$W(\langle a'_{i1}, \dots, a'_{ii} \rangle) =$$

$$W(\langle a_{11} \rangle) + W(\langle a_{21}, a_{22} \rangle) + W(\langle a_{31}, a_{32}, a_{33} \rangle) + \dots = \frac{\eta(\langle a'_{i1}, \dots, a'_{ii} \rangle)}{i}.$$

•

$$[\langle \langle a_{11} \rangle, \langle a_{21}, a_{22} \rangle, \langle a_{31}, a_{32}, a_{33} \rangle, \dots \rangle] \rightarrow^{\mathfrak{K}}$$

$$[\langle \langle b_{11} \rangle, \langle b_{21}, b_{22} \rangle, \langle b_{31}, b_{32}, b_{33} \rangle, \dots \rangle] =$$

$$[\langle \langle a'_{11} \rangle, \langle a'_{21}, a'_{22} \rangle, \dots,$$

$$\langle a'_{i1}, \dots, a'_{ii} \rangle \supset^+ \langle b'_{i1}, \dots, b'_{ii} \rangle, \dots \rangle],$$

где правая часть равенства представляет класс последовательностей, эквивалентных последовательности, все компоненты

$$\langle a'_{11} \rangle, \langle a'_{21}, a'_{22} \rangle, \dots,$$

$\langle a'_{(i-1),1}, \dots, a'_{(i-1),(i-1)} \rangle, \langle a'_{(i+1),1}, \dots, a'_{(i+1),(i+1)} \rangle, \dots$
 которой состоят лишь из вхождений F , а
 $\langle a'_{i1}, \dots, a'_{ii} \rangle \supset^+ \langle b'_{i1}, \dots, b'_{ii} \rangle$ есть такой компонент, что:

$$W(\langle a'_{i1}, \dots, a'_{ii} \rangle) =$$

$$W(\langle a_{11} \rangle) + W(\langle a_{21}, a_{22} \rangle) + W(\langle a_{31}, a_{32}, a_{33} \rangle) + \dots =$$

$$\frac{\eta(\langle a'_{i1}, \dots, a'_{ii} \rangle)}{i};$$

и

$$W(\langle b'_{i1}, \dots, b'_{ii} \rangle) =$$

$$W(\langle b_{11} \rangle) + W(\langle b_{21}, b_{22} \rangle) + W(\langle b_{31}, b_{32}, b_{33} \rangle) + \dots =$$

$$\frac{\eta(\langle b'_{i1}, \dots, b'_{ii} \rangle)}{i};$$

и в соответствующей конечнозначной фактор-матрице $\mathfrak{M}_{i+1}^L$ имеет место:

$$R(\langle a'_{i1}, \dots, a'_{ii} \rangle, \langle b'_{i1}, \dots, b'_{ii} \rangle).$$

Матрица $\mathfrak{K}$ изоморфна счетной матрице $\mathfrak{M}_{\infty}^L$, являющейся характеристической для бесконечнозначной логики Лукасевича L_{∞} . Доказательство этого утверждения существенно опирается на изоморфизм между конечнозначными фактор-матрицами $\mathfrak{M}_{s+1}^L$ и n -значными матрицами логик Лукасевича L_n , в которых $n = s + 1$. Докажем соответствующую теорему.

ТЕОРЕМА 1. Матрица $\mathfrak{K}$ изоморфна матрице $\mathfrak{M}_{\infty}^L = \langle [0; 1], \sim, \rightarrow, \{1\} \rangle$, где $[0; 1] \in \mathcal{P}(\mathbb{Q})$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Определим отображение $\varphi : B_{*}^{\infty} / \cong \mapsto [0; 1]$, что для всякого $[\alpha]$ в $B_{*}^{\infty} / \cong$ выполняется:

$$\varphi([\alpha]) = \Sigma_1^{\infty} W(\langle a_{i1}, \dots, a_{ii} \rangle),$$

где i пробегает по индексам в соответствующих конечных последовательностях из α . Данное отображение в силу определения множества $B_{*}^{\infty} / \cong$ является взаимнооднозначным. Покажем теперь, что изоморфизм имеет место, то есть:

- $\varphi(\neg^{\mathfrak{K}}([\alpha])) = \sim \varphi([\alpha]);$
- $\varphi([\alpha] \rightarrow^{\mathfrak{K}} [\beta]) = \varphi([\alpha] \rightarrow \varphi([\beta])).$

Рассмотрим первое равенство. Допустим, что $[\alpha]$ есть $[< a_{11} >, < a_{21}, a_{22} >, < a_{31}, a_{32}, a_{33} >, \dots >]$. Тогда, по определению, выполняется следующее равенство:

$$\neg^{\mathfrak{K}}([\alpha]) = [< a'_{11} >, < a'_{21}, a'_{22} >, \dots, \neg^+ < a'_{i1}, \dots, a'_{ii} >, \dots >],$$

где все конечные последовательности из списка

$$< a'_{11} >, < a'_{21}, a'_{22} >, \dots,$$

$$< a'_{(i-1),1}, \dots, a'_{(i-1),(i-1)} >, < a'_{(i+1),1}, \dots, a'_{(i+1),(i+1)} >, \dots$$

содержат лишь вхождения F , а

$$\begin{aligned} W(< a'_{i1}, \dots, a'_{ii} >) = \\ W(< a_{11} >) + W(< a_{21}, a_{22} >) + W(< a_{31}, a_{32}, a_{33} >) + \dots = \\ \frac{\eta(< a'_{i1}, \dots, a'_{ii} >)}{i}. \end{aligned}$$

Поэтому:

$$\begin{aligned} \varphi([< a'_{11} >, < a'_{21}, a'_{22} >, \dots, \neg^+ < a'_{i1}, \dots, a'_{ii} >, \dots >]) = \\ \frac{i - \eta(< a'_{i1}, \dots, a'_{ii} >)}{i} = 1 - \frac{\eta(< a'_{i1}, \dots, a'_{ii} >)}{i} = \\ 1 - W(< a_{11} >) - W(< a_{21}, a_{22} >) - W(< a_{31}, a_{32}, a_{33} >) - \dots = \\ 1 - \varphi([< a_{11} >, < a_{21}, a_{22} >, < a_{31}, a_{32}, a_{33} >, \dots >]) = \sim \varphi([\alpha]). \end{aligned}$$

Таким образом, первое равенство доказано.

Рассмотрим теперь второе равенство. Выберем для доказательства компоненты $< a'_{i1}, \dots, a'_{ii} >$ и $< b'_{i1}, \dots, b'_{ii} >$ соответствующей последовательности

$$< a'_{11} >, < a'_{21}, a'_{22} >, \dots, < a'_{i1}, \dots, a'_{ii} > \supset^+ < b'_{i1}, \dots, b'_{ii} >, \dots >,$$

удовлетворяющие условиям из определения связки $\rightarrow^{\mathfrak{K}}$ в $\mathfrak{K}$. Такие компоненты существуют в силу определений матриц $\mathfrak{K}, \mathfrak{N}_{i+1}^{\mathbf{L}}$ и того, что два любых рациональных числа могут быть представлены в виде дробей с общим знаменателем.

Возможны два случая.

1. $W(< a'_{i1}, \dots, a'_{ii} >) \leq W(< b'_{i1}, \dots, b'_{ii} >)$. В этом случае очевидно, что правая часть второго равенства есть 1. Далее:

$$\begin{aligned} [\alpha] \rightarrow^{\mathfrak{K}} [\beta] = \\ [< < a'_{11} >, \dots, < a'_{(i-1),1} >, \dots, a'_{(i-1),(i-1)} >, \\ < \underbrace{T \dots T}_i >, < a'_{(i+1),1} >, \dots, a'_{(i+1),(i+1)} >, \dots >] = \\ [< < T >, < FF >, < FFF >, \dots >]. \end{aligned}$$

Значит, $\varphi([\alpha] \rightarrow^{\mathfrak{K}} [\beta]) = W(< T >) = 1$. Что и дает требуемое доказательство первого случая.

2. $W(< a'_{i1}, \dots, a'_{ii} >) > W(< b'_{i1}, \dots, b'_{ii} >)$. Тогда правая часть равенства в силу определения φ и $\rightarrow$ равняется $1 - W(< a'_{i1}, \dots, a'_{ii} >) + W(< b'_{i1}, \dots, b'_{ii} >)$. Но, согласно определению $\rightarrow^{\mathfrak{K}}$ и $\supset^+$, а также поскольку имеет место

$$R(< a'_{i1}, \dots, a'_{ii} >, < b'_{i1}, \dots, b'_{ii} >),$$

то число вхождений T в $< a'_{i1}, \dots, a'_{ii} > \supset^+ < b'_{i1}, \dots, b'_{ii} >$ есть

$$\eta(< b'_{i1}, \dots, b'_{ii} >) + (i - \eta(< a'_{i1}, \dots, a'_{ii} >)).$$

Значит:

$$\begin{aligned} W(< a'_{i1}, \dots, a'_{ii} > \supset^+ < b'_{i1}, \dots, b'_{ii} >) = \\ \frac{\eta(< b'_{i1}, \dots, b'_{ii} >) + (i - \eta(< a'_{i1}, \dots, a'_{ii} >))}{i} = \\ 1 - \frac{\eta(< a'_{i1}, \dots, a'_{ii} >)}{i} + \frac{\eta(< b'_{i1}, \dots, b'_{ii} >)}{i}. \end{aligned}$$

То есть $\varphi([\alpha] \rightarrow^{\mathfrak{K}} [\beta])$ в этом случае также равняется $1 - W(< a'_{i1}, \dots, a'_{ii} >) + W(< b'_{i1}, \dots, b'_{ii} >)$. Что дает искомого доказательство второго случая.

□

Матрица $\mathfrak{K}$ не является фактор-семантикой для бесконечнозначной логики Лукасевича, однако она имеет локальные черты фактор-семантики, поскольку при определении связки $\rightarrow^{\mathfrak{K}}$ потребовалось использовать отношение R соответствующей конечнозначной фактор-матрицы $\mathfrak{N}_{i+1}^L$. Такая семантика может быть названа *локальной фактор-семантикой*.

Отметим, что взятие сумм весов конечных TF -последовательностей легко распространяется и на соответствующее подмножество элементов матрицы $\bigotimes_1^\infty \mathfrak{N}_{i+1}^L$. А именно, назовем *весом* W' компонента $[\alpha_j]$ в элементе $\langle [\alpha_1], \dots, [\alpha_j], \dots \rangle$ матрицы $\bigotimes_1^\infty \mathfrak{N}_{i+1}^L$ значение $W(\langle a_1, \dots, a_j \rangle)$ при каком-нибудь $\langle a_1, \dots, a_j \rangle$ из $[\alpha_j]$.

Определим теперь множество

$$B' \subset \{ \langle [\alpha_1], [\alpha_2], \dots \rangle : [\alpha_i] \in B^i / \cong \},$$

что всякая последовательность $\langle [\alpha_1], [\alpha_2], \dots \rangle$ из $\bigotimes_1^\infty \mathfrak{N}_{i+1}^L$ содержится в B' , если и только если $\Sigma_1^\infty W'([\alpha_j])$ есть рациональное число из интервала $[0; 1]$.

Тогда $\langle [\alpha_1], [\alpha_2], \dots \rangle \cong \langle [\beta_1], [\beta_2], \dots \rangle$, если и только если:

$$\Sigma_1^\infty W'([\alpha_i]) = \Sigma_1^\infty W'([\beta_j]),$$

где i и j пробегают по всем индексам компонентов $\langle [\alpha_1], [\alpha_2], \dots \rangle$ и $\langle [\beta_1], [\beta_2], \dots \rangle$, соответственно.

Рассмотрим матрицу

$$\mathfrak{K}' = \left\langle B' / \cong, \neg^{\mathfrak{K}'}, \rightarrow^{\mathfrak{K}'}, \{ \langle [T], [FF], [FFF], \dots \rangle \} \right\rangle,$$

где $B' / \cong$ есть результат разбиения множества B' по отношению эквивалентности $\cong$, а $\langle [T], [FF], [FFF], \dots \rangle$ есть класс последовательностей из B' , эквивалентных последовательности, все компоненты которой, за исключением первого, содержат лишь вхождения F , а первый компонент есть $[T]$, то есть класс таких последовательностей $\langle [\alpha_1], [\alpha_2], \dots \rangle$, что $\Sigma_1^\infty W'([\alpha_i]) = 1$.

Связки $\neg^{\mathfrak{K}'}$ и $\rightarrow^{\mathfrak{K}'}$ определяются следующим образом:

- $\neg^{\mathfrak{K}'}(\langle [\alpha_1], [\alpha_2], \dots \rangle) = \langle [\alpha'_1], [\alpha'_2], \dots, [\neg^+ \alpha'_j], \dots \rangle$, где правая часть равенства означает класс последовательностей, эквивалентных последовательности, в которой все

компоненты

$$[\alpha'_1], [\alpha'_2], \dots, [\alpha'_{j-1}], [\alpha'_{j+1}], \dots$$

содержат лишь вхождения F , а $[\alpha'_j]$ таково, что $W'([\alpha'_j]) = \Sigma_1^\infty W'([\alpha_i])$, где i пробегает по всем индексам компонентов последовательности $\langle [\alpha_1], [\alpha_2], \dots \rangle$.

•

$$\begin{aligned} \langle [\alpha_1], [\alpha_2], \dots \rangle &\rightarrow^{\mathfrak{K}'} \langle [\beta_1], [\beta_2], \dots \rangle = \\ &\langle [\alpha_1^*], [\alpha_2^*], \dots, [\alpha_j^* \supset^+ \beta_j^*], \dots \rangle, \end{aligned}$$

где правая часть равенства означает класс последовательностей, эквивалентных последовательности, в которой все компоненты

$$[\alpha_1^*], [\alpha_2^*], \dots, [\alpha_{j-1}^*], [\alpha_{j+1}^*], \dots$$

содержат только вхождения F , а $[\alpha_j^*]$ и $[\beta_j^*]$ таковы, что $W'([\alpha_j^*]) = \Sigma_1^\infty W'([\alpha_i])$, $W'([\beta_j^*]) = \Sigma_1^\infty W'([\beta_i])$, где i пробегает по всем индексам компонентов последовательностей $\langle [\alpha_1], [\alpha_2], \dots \rangle$ и $\langle [\beta_1], [\beta_2], \dots \rangle$, соответственно; а также в фактор-матрице $\mathfrak{M}_{j+1}^L$ соответствующей конечнозначной логики Лукасевича выполняется $R(\alpha_j^*, \beta_j^*)$.

Матрица $\mathfrak{K}'$ также изоморфна матрице $\mathfrak{M}_\infty^L$ с рациональнозначным множеством-носителем. Докажем соответствующую теорему.

ТЕОРЕМА 2. Матрица $\mathfrak{K}'$ изоморфна матрице $\mathfrak{M}_\infty^L = \langle [0; 1], \sim, \rightarrow, \{1\} \rangle$, где $[0; 1] \in \mathcal{P}(\mathbb{Q})$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Определим отображение $\varphi : B' / \cong \mapsto [0; 1]$, что для всякого $\langle [\alpha_1], [\alpha_2], \dots \rangle$ в $B' / \cong$ выполняется:

$$\varphi(\langle [\alpha_1], [\alpha_2], \dots \rangle) = \Sigma_1^\infty W'([\alpha_i]),$$

где i пробегает по всем индексам соответствующих «внутренних» классов эквивалентности из $[\alpha_1], [\alpha_2], \dots$

Данное отображение в силу определения множества $B' / \cong$ является взаимнооднозначным. Покажем теперь, что изоморфизм имеет место, то есть выполняются два равенства:

- $\varphi(\neg^{\mathfrak{K}'}([< [\alpha_1], [\alpha_2], \dots >])) = \sim \varphi([< [\alpha_1], [\alpha_2], \dots >]);$
- $\varphi([< [\alpha_1], [\alpha_2], \dots >] \rightarrow^{\mathfrak{K}'} [< [\beta_1], [\beta_2], \dots >]) =$
 $\varphi([< [\alpha_1], [\alpha_2], \dots >]) \rightarrow \varphi([< [\beta_1], [\beta_2], \dots >]).$

Рассмотрим первое из этих двух равенств. Верно следующее:

$$\neg^{\mathfrak{K}'}([< [\alpha_1], [\alpha_2], \dots >]) = [< [\alpha'_1], [\alpha'_2], \dots, [\neg^+ \alpha'_j], \dots >],$$

где стоящее справа выражение удовлетворяет условиям определения $\neg^{\mathfrak{K}'}$.

Тогда:

$$\begin{aligned} \varphi([< [\alpha'_1], [\alpha'_2], \dots, [\neg^+ \alpha'_j], \dots >]) &= \\ W'([\neg^+ \alpha'_j]) = 1 - W'([\alpha'_j]) = 1 - \Sigma_1^\infty W'([\alpha_i]) &= \\ 1 - \varphi([< [\alpha_1], [\alpha_2], \dots >]) = \sim \varphi([< [\alpha_1], [\alpha_2], \dots >]). \end{aligned}$$

Что и дает искомое доказательство первого равенства.

Рассмотрим второе равенство. Выберем для доказательства классы эквивалентности $[\alpha_j^*]$ и $[\beta_j^*]$, удовлетворяющие условиям из определения связки $\rightarrow^{\mathfrak{K}'}$ в $\mathfrak{K}'$. Такие классы существуют в силу определений матриц $\mathfrak{K}'$, $\mathfrak{N}_{j+1}^L$ и того, что два любых рациональных числа могут быть представлены в виде дробей с общим знаменателем.

Возможны два случая.

1. $W([\alpha_j^*]) \leq W([\beta_j^*])$. В этом случае очевидно, что правая часть второго равенства есть 1. Далее:

$$\begin{aligned} \varphi([< [\alpha_1], [\alpha_2], \dots >] \rightarrow^{\mathfrak{K}'} [< [\beta_1], [\beta_2], \dots >]) &= \\ W([\alpha_j^* \supset^+ \beta_j^*]) &= 1, \end{aligned}$$

что дает искомое доказательство данного случая.

2. $W([\alpha_j^*]) > W([\beta_j^*])$. Тогда правая часть второго равенства в силу определения φ и $\rightarrow$ есть $1 - W([\alpha_j^*]) + W([\beta_j^*])$. Левая же часть второго равенства есть в этом случае:

$$\frac{j - \eta(\alpha_j^*) + \eta(\beta_j^*)}{j} = 1 - W([\alpha_j^*]) + W([\beta_j^*]),$$

что завершает доказательство теоремы.

□

Полученная матрица $\mathfrak{K}'$ также имеет локальные черты фактор-семантики и может рассматриваться в качестве *локальной фактор-семантики* для L_∞ . Более того, процедуру построения матрицы $\mathfrak{K}'$ можно рассматривать в качестве особой операции над логическими матрицами, которая может быть применена и к более широкому классу логик.

Отношение изоморфизма логических матриц обладает следующим свойством:

$$\mathfrak{M}_1 \equiv \mathfrak{N} \ \& \ \mathfrak{M}_2 \equiv \mathfrak{N} \Rightarrow \mathfrak{M}_1 \equiv \mathfrak{M}_2.$$

Поэтому теоремы 1 и 2 позволяют вывести следствие.

СЛЕДСТВИЕ 1. Матрица $\mathfrak{K}$ изоморфна матрице $\mathfrak{K}'$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Доказательство непосредственно следует из теорем 1 и 2 и вышеприведенного свойства отношения изоморфизма логических матриц. □

Возвращаясь к поставленным в начале статьи вопросам, можно заключить, что бесконечнозначные логики, совпадающие по классу тавтологий с пересечением классов тавтологий некоторой бесконечной последовательности конечнозначных логик, каждая из которых имеет фактор-семантику, могут иметь «локальные фактор-семантики», построенные с использованием процедур, аналогичных рассмотренным в теоремах 1 и 2. Причем, результирующие матрицы будут изоморфны исходным бесконечнозначным логическим матрицам.

Литература

- [1] *Карпенко А.С.* Развитие многозначной логики. М.: Издательство ЛКИ, 2010.
- [2] *Карпенко А.С.* Логика Лукасевича и простые числа. М.: Наука, 2000.
- [3] *Karpenko A.S.* Factor-Semantics for n-valued Logics // *Studia Logica*. 42(2/3). 1983. P. 179–185.
- [4] *Rescher N.* Many-Valued Logic. New York: McGraw Hill, 1969.

References (transliteration)

- [1] *Karpenko A.S.* Razvitie mnogoznachnoj logiki. M.: Izdatel'stvo LKI, 2010.
- [2] *Karpenko A.S.* Logiki Lukasevicha i prostye chisla. M.: Nauka, 2000.
- [3] *Karpenko A.S.* Factor-Semantics for n-valued Logics // *Studia Logica*. 42(2/3). 1983. P. 179–185.
- [4] *Rescher N.* Many-Valued Logic. New York: McGraw Hill, 1969.