Неклассическая логика
Non-classical Logic

А.С. КАРПЕНКО¹, А.В. ЧАГРОВ

**Модальная пропозициональная логика истины
 $\mathbf{Tr}$ и ее полнота**

Карпенко Александр Степанович

Сектор логики, Институт философии РАН.
109240, Российская федерация, Москва, ул. Гончарная, 12, строение 1.
E-mail: as.karpenko@gmail.com

Чагров Александр Васильевич

Кафедра алгебры и математической логики,
Тверской государственный университет.
170100, Российская федерация, Тверь, ул. Желябова, 33
E-mail: chagrov@mail.ru

В статье рассмотрена четырехзначная модальная логика Собочиньского $\mathbf{V2}$ (расширение $\mathbf{S5}$). Прослежено ее возникновение, описываются интересные свойства и приводятся различные эквивалентные формулировки. Особый интерес представляют ее алгебраические модели: в виде расширения алгебры Де Моргана булевым отрицанием $\neg$ и в виде расширения булевой алгебры эндоморфизмом g , который затем интерпретируется как пропозициональный оператор истинности T . Логика, соответствующая последнему случаю, обозначена посредством $\mathbf{Tr}$. Обращается внимание на применение $\mathbf{Tr}$ в теории истины М. Фиттинга. Приводится аксиоматизация $\mathbf{Tr}$ в языке $(\rightarrow, \neg, T)$. Доказывается полнота логики $\mathbf{Tr}$ с помощью применения очень мощной теоремы Салквиста, которая дает достаточное условие полноты по Крипке для нормальных модальных логик. Доказывается также алгебраическая полнота логики $\mathbf{Tr}$.

Ключевые слова: модальная логика $\mathbf{V2}$, алгебра Де Моргана, булева алгебра, эндоморфизмы, логика $\mathbf{Tr}$, теория истины Фиттинга, полнота по Крипке, теорема Салквиста, алгебраическая полнота

1. Четырехзначная классическая логика $\mathbf{C}_4$

Пусть $\mathcal{M}_4^C$ есть четырехзначная логическая матрица

$$\langle \{1, a, b, 0\}, \neg, \rightarrow, \vee, \wedge, \{1\} \rangle,$$

¹Работа выполнена при поддержке РГНФ, грант № 14-03-00341.

которая получена посредством прямого произведения матрицы $\mathfrak{M}_2^C$ (для классической пропозициональной логики $\mathbf{C}_2$) саму на себя, т.е. $\mathfrak{M}_4^C = \mathfrak{M}_2^C \times \mathfrak{M}_2^C$, где матричные операции $\neg, \rightarrow, \vee, \wedge$ определяются следующим образом:

x	$\neg x$	$\rightarrow$	1	a	b	0
1	0	1	1	a	b	0
a	b	a	1	1	b	b
b	a	b	1	a	1	a
0	1	0	1	1	1	1

$\vee$	1	a	b	0
1	1	1	1	1
a	1	a	1	a
b	1	1	b	b
0	1	a	b	0

$\wedge$	1	a	b	0
1	1	a	b	0
a	a	a	0	0
b	b	0	b	0
0	0	0	0	0

Как обычно:

$$x \vee y = \neg x \rightarrow y,$$

$$x \wedge y = \neg(\neg x \vee \neg y),$$

$$x \rightarrow y = \neg x \vee y,$$

$$x \leftrightarrow y = (x \rightarrow y) \wedge (y \rightarrow x).$$

Хорошо известно, что матрица $\mathfrak{M}_4^C$ является характеристической для $\mathbf{C}_2$. Логику с соответствующими логическими связками обозначим посредством $\mathbf{C}_4$.

2. Модальная логика V2 и ее алгебры

В книге [12] К. Льюис и К. Лэнгфорд определяют и исследуют модальные системы $\mathbf{S1-S5}$, используя главным образом 4-значные матрицы. Обратим внимание на группу истинностных таблиц для связок $\rightarrow, \neg$ и $\Box$, которые образуют матрицу «группы III» [12, с. 493], где модальный оператор $\Box$ определяется следующим образом:

$$\Box 1 = 1; \Box a = \Box b = \Box 0 = 0.$$

В [16, с. 305] Б. Собочинский обнаруживает формулу α :

$$\Box p \vee \Box(p \rightarrow q) \vee \Box(p \rightarrow \neg q)$$

и устанавливает, что она не выводима в **S5**, а добавление ее к **S5** не превращает всю систему в **C2**. Собочинский замечает, что в силу результата С. Скросса [15] о предтабличности **S5** система **S5** + α является конечнозначной логикой. В [17, с. 350] эта система обозначается посредством **V2**, и это стало её стандартным обозначением. Сам Собочинский занялся исследованием системы **V1**(**S4** + α). Нас же как раз интересует система **V2**.

В [5, с. 121] Е. Леммон рассматривает двухэлементные модели Крипке для 15 четырехзначных модальных логик, являющихся расширением **C4**. Как раз $\mathfrak{R}_{15}$ является такой моделью для **V2**, где отношение достижимости U определяется следующим образом: $\{\langle a, a \rangle, \langle b, b \rangle, \langle a, b \rangle, \langle b, a \rangle\}$. Также эти модели наглядно представлены с помощью *направленных графов* (с. 122).

В [6] Л.Л. Максимова рассмотрела все нормальные расширения модальной логики **S5** (кроме самой **S5**, **C2** и противоречивой логики), которые обладают интерполяционным свойством Крейга. Оказалось, что модальная логика **V2** является *единственным* таким расширением!

В [1] Н.М. Ермолаева и А.А. Мучник рассматривают расширение алгебр Де Моргана² операций булева отрицания $\neg$. Получившиеся алгебры названы “*MB-алгебрами*”³. Доказывается полнота аксиоматики *MB-алгебр* и устанавливается топологическое (множественное) представление *MB-алгебр*. Авторы показывают, что «логика *MB-алгебр*... является усилением **S5**, а именно **V2**» [1, с. 190]. Также утверждается, что матрица «группы III» является характеристической для модальной логики **V2**, а сама логика **V2** является “предполной”. Это значит, что между **V2** и **C2** нет промежуточного исчисления. Дру-

²То есть дистрибутивная решетка $\langle A, \vee, \wedge \rangle$ с 1 и 0 и операцией $\sim$, причем $\sim(x \vee y) = \sim x \wedge \sim y$; $\sim(x \wedge y) = \sim x \vee \sim y$; $\sim \sim x = x$; $\sim 1 = 0$; $\sim 0 = 1$; $\sim a = a$; $\sim b = b$; $a \vee b = 1$; $a \wedge b = 0$. Операция $\sim$ называется отрицанием Де Моргана. Заметим, что решетка Де Моргана $\langle A, \vee, \wedge, \sim \rangle$ лежит в основании известной четырехзначной логики Белнапа (см. [9]).

³Обратим внимание на четырехзначную логику **DMB4** в [13]. Здесь вводится алгебраическая аксиоматизация **DMB4** в сигнатуре $\langle A, \vee, \wedge, \sim, \neg, 1, 0 \rangle$ под названием *деморгановская булева алгебра*: $\langle A, \vee, \wedge, \sim \rangle$ -редукт есть решетка Де Моргана, а $\langle A, \vee, \wedge, \neg, 1, 0 \rangle$ -редукт есть булева алгебра. Здесь же представлено секвенциальное исчисление для **DMB4**.

гими словами, $\mathbf{C}_2$ является единственным собственным непротиворечивым расширением $\mathbf{V2}$.

В [2] отмечается, что многие неклассические пропозициональные логики и соответствующие им алгебры могут быть единообразно введены и исследованы с помощью эндоморфизмов в дистрибутивных решетках. Здесь рассматривается расширение булевой алгебры $B = \langle A, \vee, \wedge, \neg \rangle$ одноместной операцией g , удовлетворяющей условиям дистрибутивности:

$$g(x \vee y) = g(x) \vee g(y), \quad (1)$$

$$g(x \wedge y) = g(x) \wedge g(y), \quad (2)$$

т. е. g является эндоморфизмом дистрибутивной решетки, причем

$$g(1) = 1, g(0) = 0. \quad (3)$$

Также имеет место

$$g\neg(x) = \neg g(x). \quad (4)$$

Полученная алгебра называется Bg -алгеброй, а тождества булевой алгебры вместе с (1)–(4) образуют аксиоматику для Bg -алгебр. Здесь же доказывается теорема стоуновского типа о представлении Bg -алгебр алгеброй множеств.

Если для всякого x $gg(x) = x$, то g есть инволюция. Заметим, что тождество (4) есть не что иное, как определение отрицания Де Моргана $\sim$.

Полагая в Bg -алгебре

$$\Box x = x \wedge g(x), \Diamond x = x \vee g(x),$$

получаем алгебру, соответствующую модальной логике $\mathbf{V2}$.

В свою очередь, в этой алгебре операция g определяется следующим образом:

$$g(x) = \Box x \vee (\neg x \wedge \Diamond x), \text{ где } \Diamond x = \neg \Box \neg x \text{ [2, с. 245],}$$

т. е. $g(1) = 1, g(0) = 0, g(a) = b, g(b) = a$.

Таким образом, показано, что логики со связками $\{\neg, \rightarrow, \vee, \wedge, \Box\}$ ($= \mathbf{V2}$) и $\{\neg, \rightarrow, \vee, \wedge, g\}$ функционально эквивалентны.

3. Логика Tr

Логику со связками $\{\rightarrow, \neg, T\}$, где T есть g , обозначим посредством Tr .⁴ Связку T будем интерпретировать как оператор истинности. Заметим, что для него выполняется закон исключенного третьего:

$$T(\varphi) \vee T(\neg\varphi)$$

и он коммутирует с отрицанием $\neg$:

$$\neg T\varphi \leftrightarrow T\neg\varphi.$$

Обратим внимание на работу М. Фиттинга [8]. В то время как С. Крипке в своей известной работе о теории истины [11], альтернативной к теории истины Тарского, использует трехзначную логику Клини $\mathbf{K}_3$ [4, § 64], Фиттинг применяет четырехзначную логику, считая ее более естественной. Четырехзначная логика позволяет работать с полными решетками, а не с полу-решетками, что упрощает математический аппарат. Фиттинг подчеркивает, что четырехзначный подход имеет самое прямое отношение к семейству би-решеток (см. [10]), где наименьшей нетривиальной би-решеткой является как раз решетка Де Моргана. Развиваемая здесь четырехзначная теория истины включает в себя также подход Крипке. Интересно, что здесь Фиттинг расширяет язык новой теории истины операцией “конфляция” (*conflation*), которая есть не что иное как эндоморфизм g .

4. Аксиоматизация Tr

1. Множество всех пропозициональных тавтологий (включая формулы с оператором T).
2. $T(\varphi \rightarrow \psi) \leftrightarrow (T\varphi \rightarrow T\psi)$.
3. $\neg T\varphi \leftrightarrow T\neg\varphi$.
4. $TT\varphi \leftrightarrow \varphi$.

Правила вывода: *modus ponens* и правило Гёделя для T .

Заметим, что добавление аксиомы

$$5. T\varphi \leftrightarrow \varphi$$

⁴О функциональных свойствах логики Tr см. в [3]. По крайней мере, очевидно, что она не является функционально полной.

превращает логику **Tr** в консервативное расширение **C₂** посредством добавления к **C₂** оператора идентичности T .

Стоит отметить, что в силу функциональной эквивалентности логик **V2** и **Tr**, последняя также обладает интерполяционным свойством Крейга.

5. Модальная логика **Tr**

По техническим причинам нам будет удобно использовать следующий вариант аксиоматизации **Tr**, эквивалентный исходному. Определим логику **Tr** как множество формул (для удобства не различаем исчисления и множества выводимых в них формул), выводимых из следующих схем аксиом, где $\Box$ есть T :

1. Всевозможные подстановки модальных формул в классические тавтологии,
2. $\Box(\varphi \rightarrow \psi) \rightarrow (\Box\varphi \rightarrow \Box\psi)$,
3. $\Box\varphi \rightarrow \Diamond\varphi$,
4. $\Diamond\varphi \rightarrow \Box\varphi$,
5. $\varphi \rightarrow \Box\Box\varphi$,
6. $\Box\Box\varphi \rightarrow \varphi$

по правилам вывода

- *modus ponens*: если есть формулы φ и $\varphi \rightarrow \psi$, то есть и формула ψ ,
- правило Гёделя: если есть формула φ , то есть и формула $\Box\varphi$.

Здесь мы полагаем, что $\Diamond$ есть сокращение для $\neg\Box\neg$. Принципиально ничего не изменится, если считать связку $\Diamond$ исходной и ввести еще одну схему аксиом — $\Diamond\varphi \leftrightarrow \neg\Box\neg\varphi$.

ЗАМЕЧАНИЕ 1. Логика **Tr** является нормальной модальной логикой (это по определению означает, что в вышеприведенном определении обязательно наличие схем аксиом 1 и 2 и обоих правил вывода, если и не постулируемых, то допустимых). Для **Tr** (как для любой нормальной модальной логики!) справедливы следующие полезные в дальнейшем факты:

- логике $\mathbf{Tr}$ принадлежат все формулы вида ($n \geq 1$):
 - $\Box\varphi_1 \wedge \cdots \wedge \Box\varphi_n \leftrightarrow \Box(\varphi_1 \wedge \cdots \wedge \varphi_n)$,
 - $\Diamond\varphi_1 \vee \cdots \vee \Diamond\varphi_n \leftrightarrow \Diamond(\varphi_1 \vee \cdots \vee \varphi_n)$;
- теорема о замене эквивалентных (в двух вариантах):
 - если $\mathbf{Tr} \vdash \psi \leftrightarrow \chi$, то $\mathbf{Tr} \vdash \varphi(\psi) \leftrightarrow \varphi(\chi)$, где $\varphi(\psi)$ — формула с некоторым отмеченным вхождением ψ , $\varphi(\chi)$ — результат замены ψ в φ на χ ,
 - если $\mathbf{Tr} \vdash \psi \leftrightarrow \chi$, то если $\mathbf{Tr} \vdash \varphi(\psi)$, то $\mathbf{Tr} \vdash \varphi(\chi)$, где $\varphi(\psi)$ — формула с некоторым отмеченным вхождением ψ , $\varphi(\chi)$ — результат замены ψ в φ на χ .

Еще одно

ЗАМЕЧАНИЕ 2. Легко показать, что из приведенной аксиоматики можно исключить одну из схем аксиом (любую) 5 или 6. Например, ввиду наличия аксиом 3 и 4 выводимости в $\mathbf{Tr}$ эквивалентности $\Box\varphi \leftrightarrow \Diamond\varphi$ (она разбита на конъюнктивные члены лишь для удобства дальнейших доказательств), легко видеть, что ввиду теоремы о замене эквивалентных, которая справедлива для всех нормальных модальных логик, мы в любой формуле можем заменять подформулу вида $\Box\varphi$ на $\Diamond\varphi$, и наоборот. Возьмем для примера схему аксиом 5, то есть $\varphi \rightarrow \Box\Box\varphi$. Поскольку здесь φ — произвольная формула, мы можем заменить ее на $\neg\varphi$, что дает нам $\neg\varphi \rightarrow \Box\Box\neg\varphi$, откуда по контрапозиции (аксиоме 1) получаем $\neg\Box\Box\neg\varphi \rightarrow \neg\neg\varphi$, что применением классической тавтологии «снятия-навешивания двойного отрицания» и теоремы о замене эквивалентных позволяет получить $\neg\Box\neg\Box\neg\varphi \rightarrow \varphi$, а значит, по определению $\Diamond$, формулу (точнее, схему аксиом) 6.

6. Логика $\mathbf{Tr}^-$

Определяем логику $\mathbf{Tr}^-$ как множество модальных формул, выводимых из следующих схем аксиом:

1. Всевозможные подстановки модальных формул в классические тавтологии,
2. $\Box(\varphi \rightarrow \psi) \rightarrow (\Box\varphi \rightarrow \Box\psi)$,
3. $\Box\varphi \rightarrow \Diamond\varphi$,

4. $\Diamond\varphi \rightarrow \Box\varphi$,
 5. $\varphi \rightarrow \Box\Box\varphi$,
 6. $\Box\Box\varphi \rightarrow \varphi$,
 7. Всевозможные формулы вида $\Box\varphi$, где φ — подстановка в классическую тавтологию,
 8. $\Box(\Box(\varphi \rightarrow \psi) \rightarrow (\Box\varphi \rightarrow \Box\psi))$,
 9. $\Box(\Box\varphi \rightarrow \Diamond\varphi)$,
 10. $\Box(\Diamond\varphi \rightarrow \Box\varphi)$,
 11. $\Box(\varphi \rightarrow \Box\Box\varphi)$,
 12. $\Box(\Box\Box\varphi \rightarrow \varphi)$
- *modus ponens*: если имеются φ и $\varphi \rightarrow \psi$, есть и формула ψ .

Коротко говоря, логика $\mathbf{Tr}^-$ по своей аксиоматике отличается от $\mathbf{Tr}$ тем, что удалено правило Гёделя, но добавлены схемы аксиом, а именно — каждая из схем аксиом χ логики $\mathbf{Tr}$ продублирована схемой $\Box\chi$.

7. Совпадение логик $\mathbf{Tr}$ и $\mathbf{Tr}^-$

ТЕОРЕМА 1. *Логики $\mathbf{Tr}$ и $\mathbf{Tr}^-$ совпадают как множества выводимых формул.*

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Включение $\mathbf{Tr}^- \subseteq \mathbf{Tr}$ совершенно очевидно, поскольку все аксиомы $\mathbf{Tr}^-$ тривиально выводимы в $\mathbf{Tr}$, а замкнутость относительно правила *modus ponens* уже постулирована, так что требуется доказать лишь включение $\mathbf{Tr} \subseteq \mathbf{Tr}^-$, то есть надо доказать, что если $\varphi \in \mathbf{Tr}$, то $\varphi \in \mathbf{Tr}^-$.

Также совершенно очевидно, что если замкнуть $\mathbf{Tr}^-$ по правилу Гёделя, то получится $\mathbf{Tr}$. Значит, надо доказать, что $\mathbf{Tr}^-$ уже и так замкнута относительно правила Гёделя, то есть если формула φ принадлежит логике $\mathbf{Tr}^-$, то и $\Box\varphi$ принадлежит логике $\mathbf{Tr}^-$.

Принадлежность φ логике $\mathbf{Tr}^-$ означает, что есть список (конечная последовательность) формул $\varphi_1, \dots, \varphi_n$, каждая из которых есть либо аксиома $\mathbf{Tr}^-$, либо получается из предыдущих по правилу вывода *modus ponens*, причем $\varphi_n = \varphi$. Покажем, что в этом случае $\Box\varphi \in \mathbf{Tr}^-$, продемонстрировав как исходный вывод в $\mathbf{Tr}^-$ перестроить в вывод

формулы $\Box\varphi$ в $\mathbf{Tr}^-$ возвратной индукцией по длине вывода n . По сути мы должны «промоделировать» правило Гёделя, то есть показать, что если φ выводима, то и $\Box\varphi$ выводима.

Итак (в соответствии с определением выводимости), пусть φ является аксиомой логики $\mathbf{Tr}^-$. Тогда она имеет вид аксиомы $\mathbf{Tr}$ или $\Box\chi$, где χ — аксиома $\mathbf{Tr}$. В первом случае автоматически получается, что формула $\Box\chi$ выводима в $\mathbf{Tr}^-$ по определению аксиоматики, а во втором — из того, что χ является аксиомой $\mathbf{Tr}$, и по аксиоме $\chi \rightarrow \Box\Box\chi$ и правилу *modus ponens* получаем, что выводима и $\Box\Box\chi$, то есть и в этом случае удалось «навесить» дополнительный $\Box$.

Теперь рассмотрим случай, когда φ_n получается из φ_k и φ_l при $k < n$ и $l < n$ по правилу *modus ponens*. Для определенности положим, что $\varphi_l = \varphi_k \rightarrow \varphi_n$. По индукционному предположению имеем, что формулы $\Box(\varphi_k \rightarrow \varphi_n)$ и $\Box\varphi_k$ выводимы в $\mathbf{Tr}^-$. Остается воспользоваться аксиомой $\Box(\varphi_k \rightarrow \varphi_n) \rightarrow (\Box\varphi_k \rightarrow \Box\varphi_n)$ и дважды применить правило *modus ponens*, чтобы получить, что $\Box\varphi_n$ выводима $\mathbf{Tr}^-$.

Доказательство закончено. $\square$

8. Шкалы Крипке логики $\mathbf{Tr}$

Здесь мы интересуемся устройством шкал логики $\mathbf{Tr}$, которое является довольно простым, как показывает

ТЕОРЕМА 2. *Шкала Крипке $\mathcal{F} = \langle W, R \rangle$ является шкалой логики $\mathbf{Tr}$ в точности тогда, когда в $\mathcal{F}$ выполняются условия*

1. $\forall w \in W \exists v \in W wRv$
«из каждой точки (мира) что-нибудь достижимо»,
2. $\forall w \in W \forall v_1 \in W \forall v_2 \in W (wRv_1 \ \& \ wRv_2 \Rightarrow v_1 = v_2)$
«из каждой точки достижимо не более одной точки»,
3. $\forall w_1 \in W \forall w_2 \in W \forall w_3 \in W (w_1Rw_2 \ \& \ w_2Rw_3 \Rightarrow w_3 = w_1)$
«из каждой точки за два шага мы вновь попадаем в ту же точку».

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Предположим, что $\mathcal{F} \models \mathbf{Tr}$ или, что по сути то же самое, в шкале $\mathcal{F}$ истинны все аксиомы $\mathbf{Tr}$. Покажем, что $\mathcal{F}$ удовлетворяет всем условиям из формулировки теоремы.

Справедливость первого условия следует из истинности в $\mathcal{F}$ формулы $\Box p \rightarrow \Diamond p$ (она получена по схеме аксиом 3). В самом деле, $\Box p \rightarrow \Diamond p$

легко преобразуется в $\Diamond(\neg p \vee p)$, а любая формула вида $\Diamond\alpha$ может быть истинной в точке шкалы только в том случае, если из этой точки что-нибудь достижимо. Приведем соответствующие преобразования в виде последовательности эквивалентных формул:

$$\begin{aligned} & \Box p \rightarrow \Diamond p, \\ & \neg \Box p \vee \Diamond p, \\ & \neg \neg \neg \Box \neg \neg p \vee \Diamond p, \\ & \neg \neg \Diamond \neg p \vee \Diamond p, \\ & \Diamond \neg p \vee \Diamond p, \\ & \Diamond(\neg p \vee p). \end{aligned}$$

Отметим, что последний переход здесь осуществлен с помощью доказуемой во всех нормальных модальных логиках схемы $(\Diamond\varphi \vee \Diamond\psi) \leftrightarrow \Diamond(\varphi \vee \psi)$.

Покажем, что второе условие справедливо, рассуждением «от противного».

Итак, предположим, что для некоторых w, v_1, v_2 выполняется wRv_1 , wRv_2 , причем $v_1 \neq v_2$. Введем оценку V на шкале $\mathcal{F}$ так: $V(p) = \{v_1\}$, то есть v_1 — единственная точка, в которой истинна p , а в остальном оценка V произвольна. Полученную модель обозначим $\mathcal{M}$.

По выбору оценки имеем $\mathcal{M}, v_1 \models p$ и $\mathcal{M}, v_2 \not\models p$, откуда по условиям wRv_1 , wRv_2 получаем $\mathcal{M}, w \models \Diamond p$ и $\mathcal{M}, w \not\models \Box p$, что дает $\mathcal{M}, w \not\models \Diamond p \rightarrow \Box p$, а это противоречит истинности в $\mathcal{F}$ аксиом, получаемых по схеме 4.

Наконец, последнее — третье — условие. Опять рассуждаем «от противного».

Предположим, что для некоторых w_1, w_2, w_3 из $\mathcal{F}$ верно, что w_1Rw_2 и w_2Rw_3 , но $w_1 \neq w_3$. Определим оценку V так: $V(p) = \{w_3\}$, то есть w_3 — единственная точка, в которой истинна переменная p , а в остальном V произвольна. Полученную модель обозначим $\mathcal{M}$.

По выбору оценки и ввиду того, что w_1Rw_2 и w_2Rw_3 , имеем последовательно: $\mathcal{M}, w_3 \models p$, $\mathcal{M}, w_2 \models \Diamond p$, $\mathcal{M}, w_1 \models \Diamond\Diamond p$. Однако $\mathcal{M}, w_1 \not\models p$, что в итоге дает $\mathcal{M}, w_1 \not\models \Diamond\Diamond p \rightarrow p$, а это противоречит нашему предположению об истинности всех аксиом **Tr**, в частности — полученных по схеме 5, которая, как уже отмечалось, эквивалентна (в присутствии других схем, конечно) схеме 6.

Теперь покажем, что если для шкалы $\mathcal{F}$ выполнены все условия из формулировки теоремы, то в $\mathcal{F}$ истинны все формулы, принадлежащие **Tr**. Ясно, что для этого достаточно проверить истинность аксиом, поскольку правила вывода истинность формул сохраняют. Да-

лее, нет нужды проверять истинность формул (аксиом), получаемых по схемам 1 и 2, поскольку они истинны во всех шкалах. То есть нам нужно проверить истинность аксиом, полученных по схемам 3, 4, 6 (схеме 5, как замечено, рассматривать не обязательно, поскольку в контексте остальных схем она эквивалентна схеме 6). Вновь рассуждаем «от противного».

Предположим, что некоторая формула вида $\Box\varphi \rightarrow \Diamond\varphi$ (схема 3) опровергнута в шкале $\mathcal{F}$ при некоторой оценке V (то есть в модели $\mathcal{M} = \langle \mathcal{F}, V \rangle$) в некоторой точке w , символически — $\mathcal{M}, w \not\models \Box\varphi \rightarrow \Diamond\varphi$. Последнее означает, что $\mathcal{M}, w \models \Box\varphi$ и $\mathcal{M}, w \not\models \Diamond\varphi$. Может ли какая-нибудь точка v шкалы $\mathcal{F}$ быть достижима из w ? Нет, поскольку тогда из wRv следовало бы одновременно $\mathcal{M}, v \models \varphi$ и $\mathcal{M}, v \not\models \varphi$. Однако это противоречит условию «из каждой точки что-нибудь достижимо». Значит, наше предположение неверно, то есть все формулы вида $\Box\varphi \rightarrow \Diamond\varphi$ в шкале $\mathcal{F}$ истинны.

Перейдем к рассмотрению схемы 4 («по традиции» рассуждаем «от противного»).

Предположим, что некоторая формула вида $\Diamond\varphi \rightarrow \Box\varphi$ опровергнута в шкале $\mathcal{F}$ при некоторой оценке V (то есть в модели $\mathcal{M} = \langle \mathcal{F}, V \rangle$) в некоторой точке w , символически — $\mathcal{M}, w \not\models \Diamond\varphi \rightarrow \Box\varphi$. Это означает, что $\mathcal{M}, w \models \Diamond\varphi$ и $\mathcal{M}, w \not\models \Box\varphi$. Таким образом, существуют точки v_1 и v_2 , такие что wRv_1 , wRv_2 и $v_1 \models \varphi$, $v_2 \not\models \varphi$, а потому $v_1 \neq v_2$. Тем самым получается, что условие «из каждой точки достижимо не более одной точки» нарушено, а это противоречие показывает, что на самом деле ни одна из формул вида $\Diamond\varphi \rightarrow \Box\varphi$ опровергнута в шкале $\mathcal{F}$ быть не может.

Наконец, последняя схема — схема 6 (и вновь рассуждение «от противного»).

Предположим, что некоторая формула $\Box\Box\varphi \rightarrow \varphi$ опровергается в шкале $\mathcal{F}$ при некоторой оценке V (то есть модели $\mathcal{M} = \langle \mathcal{F}, V \rangle$) в некоторой точке w_1 , символически — $\mathcal{M}, w_1 \not\models \Box\Box\varphi \rightarrow \varphi$, в частности, $\mathcal{M}, w_1 \not\models \varphi$. Возьмем произвольные точки w_2 и w_3 , такие что w_1Rw_2 и w_2Rw_3 (такие точки существуют ввиду условия «из каждой точки что-нибудь достижимо»). Поскольку $\mathcal{M}, w_1 \models \Box\Box\varphi$, мы имеем $\mathcal{M}, w_3 \models \varphi$. Значит, $w_1 \neq w_3$, что противоречит условию «из каждой точки за два шага мы вновь попадаем в эту же точку». Таким образом, мы вновь получили противоречие, откуда можно сделать вывод, что все формулы вида $\Box\Box\varphi \rightarrow \varphi$ в $\mathcal{F}$ истинны.

Доказательство теоремы закончено. $\square$

Легко понять, что утверждение этой теоремы может быть упрощено. А именно, если интересоваться только шкалами с корнем, то есть шкалами, у которых есть точка r , обладающая тем свойством, что всякая точка достижима из r за какое-то число (конечное, разумеется, в частности, может быть за ноль) шагов по отношению достижимости.

Так вот, следствием из доказанной теоремы является

ТЕОРЕМА 3. *Шкалами с корнем логики $\mathbf{Tr}$ являются с точностью до изоморфизма две шкалы: $\mathcal{F}_1 = \langle \{a\}, \{\langle a, a \rangle\} \rangle$ (шкала из одной рефлексивной точки) и $\mathcal{F}_2 = \langle \{b, c\}, \{\langle b, c \rangle, \langle c, b \rangle\} \rangle$ (шкала из двух взаимодостижимых иррефлексивных точек).*

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Итак, r — корень шкалы $\mathcal{F}$ логики $\mathbf{Tr}$. Возможны два случая: точка r рефлексивна; точка r иррефлексивна.

В первом случае из r не может быть достижима ни одна другая точка, поскольку в противном случае нарушилось бы свойство «из каждой точки достижимо не более одной точки». Эта шкала, очевидно, изоморфна шкале $\mathcal{F}_1$.

Во втором случае из точки r должна быть достижима (другая!) точка s (условие «из каждой точки что-нибудь достижимо»), причем ровно одна (условие «из каждой точки достижимо не более одной точки»). Из точки s тоже должна быть достижима и ровно одна точка, а она по условию «из каждой точки за два шага мы вновь попадаем в ту же точку» должна совпасть с r . Ясно, что мы получили шкалу, изоморфную $\mathcal{F}_2$: в качестве изоморфизма можно взять, например, функцию $f(r) = b, f(s) = c$.

Доказательство теоремы закончено. $\square$

9. Полнота по Крипке логики $\mathbf{Tr}$. Применение теоремы Салквиста

Известная теорема Салквиста [14, р. 110–143] дает достаточное условие полноты по Крипке нормальных модальных логик, более того, их каноничности и первопорядковости соответствующего класса шкал Крипке. Это условие состоит в том, что для аксиоматизации используется дополнительная к минимальной нормальной логике $\mathbf{K}$ аксиома, являющаяся конъюнкцией формул вида $\Box^k(\psi \rightarrow \chi)$, где $k \geq 0$, χ — позитивная формула, а ψ построена из пропозициональных переменных и отрицаний пропозициональных переменных, констант $\perp$ и $\top$ с помощью связок $\wedge$, $\vee$, $\Box$ и $\Diamond$ таким образом, что никакая из подформул формулы ψ вида $\psi_1 \vee \psi_2$ или $\Diamond\psi_1$, содержащих переменную без отрицания, не находится в области действия связки $\Box$. Некоторую несколько более сильную

формулировку теоремы Салквиста с доказательством можно найти в [7, р. 347–354].

Ясно, что аксиомы 3–6 (точнее, их конъюнкция) удовлетворяют условию теоремы Салквиста, что сразу дает полноту по Крипке этой логики, то есть справедлива

ТЕОРЕМА 4. *Логика **Tr** полна по Крипке, то есть всякая формула φ выводима в **Tr** тогда и только тогда, когда φ истинна во всякой шкале логики **Tr**.*

Поскольку всякая полная по Крипке нормальная модальная логика полна относительно своих шкал с корнем, мы получаем, что утверждение этой теоремы можно усилить: логика **Tr** полна относительно класса шкал $\{\mathcal{F}_1, \mathcal{F}_2\}$, где шкалы $\mathcal{F}_1$ и $\mathcal{F}_2$ определены в конце предыдущего раздела. Иными словами, справедливо равенство $\mathbf{Tr} = \text{Log}\mathcal{F}_1 \cap \text{Log}\mathcal{F}_2$, где $\text{Log}\mathcal{F}_1$ и $\text{Log}\mathcal{F}_2$ — обозначения множеств формул, истинных в шкалах $\mathcal{F}_1$ и $\mathcal{F}_2$ соответственно. Однако и это утверждение имеет усиление. Перед его формулировкой докажем вспомогательное утверждение.

ЛЕММА 1. *Справедливо включение $\text{Log}\mathcal{F}_2 \subset \text{Log}\mathcal{F}_1$, причем включение является строгим.*

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Покажем, что справедливо $\text{Log}\mathcal{F}_2 \subseteq \text{Log}\mathcal{F}_1$ (то есть нестрогое включение) рассуждением «от противного» (более точно, по контрапозиции). Другими словами, предположив, что $\varphi \notin \text{Log}\mathcal{F}_1$, покажем, что $\varphi \notin \text{Log}\mathcal{F}_2$.

Итак, пусть $\varphi \notin \text{Log}\mathcal{F}_1$. Это означает, что при некоторой оценке V_1 на $\mathcal{F}_1$ для модели $\mathcal{M}_1 = \langle \mathcal{F}_1, V_1 \rangle$ выполняется

$$\mathcal{M}_1, a \not\models \varphi.$$

Введем оценку V_2 на шкале $\mathcal{F}_2$ таким образом: полагаем для всякой переменной p , что

- если $V_1(p) = \emptyset$, то $V_2(p) = \emptyset$;
- если $V_1(p) = \{a\}$, то $V_2(p) = \{b, c\}$.

Индукцией по построению произвольной формулы ψ (в частности, это может быть и φ) рутинно доказывается, что

$$\mathcal{M}_1, a \models \psi \iff \mathcal{M}_2, b \models \psi \iff \mathcal{M}_2, c \models \psi.$$

Отсюда следует, что поскольку $\mathcal{M}_1, a \not\models \varphi$, то

$$\mathcal{M}_2, b \not\models \varphi, \text{ и } \mathcal{M}_2, c \not\models \varphi.$$

Теперь покажем, что включение строгое. Для этого достаточно заметить, что $\mathcal{F}_1 \models \Box p \rightarrow p$, но $\mathcal{F}_2 \not\models \Box p \rightarrow p$.

Лемма доказана. $\square$

ТЕОРЕМА 5. *Логика $\mathbf{Tr}$ и $\mathbf{LogF}_2$ совпадают, то есть логика $\mathbf{Tr}$ полна относительно одноэлементного класса шкал $\{\mathcal{F}_2\}$.*

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Как замечено выше, $\mathbf{Tr} = \mathbf{LogF}_1 \cap \mathbf{LogF}_2$, а по лемме мы имеем $\mathbf{LogF}_1 \cap \mathbf{LogF}_2 = \mathbf{LogF}_2$, что и дает требуемое.

Теорема доказана. $\square$

10. Алгебраическая полнота логики $\mathbf{Tr}$

Итак, выше установлено, что логика $\mathbf{Tr}$ совпадает со множеством формул, истинных в шкале $\mathcal{F}_2 \langle \{b, c\}, \{\langle b, c \rangle, \langle c, b \rangle\} \rangle$. Стандартным способом преобразуем эту шкалу в алгебраическую модель (модальную алгебру) $\mathcal{A}_2$, которая семантически эквивалентна шкале $\mathcal{F}_2$.

В качестве носителя (то есть множества элементов) алгебры $\mathcal{A}_2$ множества возможных значений переменных, а значит и формул, в $\mathcal{F}_2$ (обозначения довольно произвольны): $1 = \{b, c\}$, $\mathbf{b} = \{b\}$, $\mathbf{c} = \{c\}$, $0 = \emptyset$. Обозначим алгебры посредством A_2 , то есть $A_2 = \{1, \mathbf{b}, \mathbf{c}, 0\}$.

Булевы операции на A_2 вводим обычным теоретико-множественным образом, обозначая их как соответствующие классические связки. Так, отрицание есть теоретико-множественное дополнение:

$$\neg 1 = 0, \quad \neg \mathbf{b} = \mathbf{c}, \quad \neg \mathbf{c} = \mathbf{b}, \quad \neg 0 = 1.$$

Сходным образом «определяются» пересечение («конъюнкция») и объединение («дизъюнкция»):

$$1 \wedge x = x \wedge 1 = x, \quad \mathbf{b} \wedge \mathbf{c} = \mathbf{c} \wedge \mathbf{b} = 0, \quad 0 \wedge x = x \wedge 0 = 0,$$

и

$$1 \vee x = x \vee 1 = 1, \quad \mathbf{b} \vee \mathbf{c} = \mathbf{c} \vee \mathbf{b} = 1, \quad 0 \vee x = x \vee 0 = x,$$

где x произвольно. Константам $\perp$ и $\top$ сопоставляем 0 и 1 соответственно. Остальным булевым связкам сопоставляем те операции, которые получаются по обычным определениям через суперпозию. Например, с учетом того, что импликация $\rightarrow$ определяется через дизъюнкцию и отрицание — $x \rightarrow y = \neg x \vee y$, получаем соответствующую операцию:

$$1 \rightarrow x = x, \quad \mathbf{b} \rightarrow \mathbf{c} = \mathbf{c}, \quad \mathbf{b} \rightarrow 0 = \mathbf{c},$$

$$\mathbf{b} \rightarrow \mathbf{b} = \mathbf{b}, \quad \mathbf{b} \rightarrow 0 = \mathbf{b}, \quad 0 \rightarrow x = 1, \quad x \rightarrow 1 = 1,$$

где x произвольно.

Осталось определить операцию, соответствующую связке $\Box$ (считаем связку $\Diamond$ производной). Воспользуемся тем же интуитивным соображением, которое мы использовали для булевых связок. Если x — некоторое множество истинности формул, то разумно полагать, что $\Box x$ — множество миров $\mathcal{F}_2$, из которых достижимы в точности миры из x . Так получаем:

$$\Box 1 = 1, \quad \Box 0 = 0, \quad \Box \mathbf{b} = \mathbf{c}, \quad \Box \mathbf{c} = \mathbf{b}.$$

Алгебра $\mathcal{A}_2$ определена. Полагаем, что множество выделенных элементов в ней состоит только из 1 («формула истинна в шкале, если она истинна во всех мирах этой шкалы»). Так получается четырехэлементная логическая матрица, которую обозначим Ω_2 .

Истинность формулы в матрице Ω_2 определяем, как обычно.

Оценкой в матрице Ω_2 считаем функцию v , которая каждой пропозициональной p сопоставляет некоторый элемент A_2 . Оценка переменных распространяется на все формулы тривиальным индуктивным образом в соответствии с приведенными выше определениями операций. Например, $v(\alpha \wedge \beta) = v(\alpha) \wedge v(\beta)$ (должно быть ясно, что в последнем равенстве символ $\wedge$ имеет разный смысл — слева это пропозициональная связка конъюнкция, а справа — соответствующая операция в алгебре $\mathcal{A}_2$, то есть пересечение).

Тривиальной индукцией по построению формул доказываются следующие две леммы.

ЛЕММА 2. Пусть V — оценка пропозициональных переменных на шкале $\mathcal{F}_2$. Определим оценку v на матрице Ω_2 так:

$$v(p) = \{x \in \{b, c\} \mid x \in V(p)\}.$$

Тогда для всякой формулы φ справедливо, что

$$v(\varphi) = \{x \in \{b, c\} \mid x \in V(\varphi)\}.$$

ЛЕММА 3. Пусть v — оценка пропозициональных переменных на матрице Ω_2 . Определим оценку V на шкале $\mathcal{F}_2$ так:

$$V(p) = v(p).$$

Тогда для всякой формулы φ справедливо, что

$$V(\varphi) = v(\varphi).$$

Из этих лемм следует, что шкала $\mathcal{F}_2$ и матрица Ω_2 семантически эквивалентны, то есть они опровергают, а тем самым и принимают, одни и те же формулы. Тем самым, поскольку **Tr** полна относительно шкалы $\mathcal{F}_2$, доказана

ТЕОРЕМА 6. *Логика **Tr** полна относительно матрицы Ω_2 , то есть формула принадлежит логике **Tr** тогда и только тогда, когда она (формула) истинна в матрице Ω_2 .*

11. Замечание о расширениях **Tr**

Итак, мы получили в свое распоряжение логику **Tr**, о которой может быть много вопросов, но мы коснемся только одного: какие расширения имеет **Tr**? Ввиду известного факта (всякая табличная логика имеет только табличные расширения) мы получаем, с учетом предыдущего, что всякое расширение **Tr** определяется либо шкалой $\mathcal{F}_2$, то есть является самой **Tr**, либо шкалой $\mathcal{F}_1$, либо пустым множеством шкал, то есть является противоречивой логикой. Других вариантов нет!

Литература

- [1] Ермолаева Н.М., Мучник А.А. Модальные расширения логических исчислений типа Хао Вана // Исследования по формализованным языкам и неклассическим логикам. М.: Наука, 1974. С. 172–193.
- [2] Ермолаева Н.М., Мучник А.А. Модальные логики, определяемые эндоморфизмами дистрибутивных решеток // Исследования по теории множеств и неклассическим логикам. М.: Наука, 1976. С. 229–246.
- [3] Карпенко А.С. Решетки четырехзначных модальных логик // Логические исследования. 2015. № 21(1). С. 122–137.
- [4] Клини С.К. Введение в метаматематику. М.: Иностранная литература, 1957. 527 с.
- [5] Леммон Е. Алгебраическая семантика для модальных логик I // Семантика модальных и интенциональных логик / Ред. В.А. Смирнов. М.: Прогресс, 1981. С. 98–124.
- [6] Максимова Л. Л. Интерполяционные теоремы в модальных логиках и амальгамируемые многообразия топобулевых алгебр // Алгебра и логика. 1979. Т. 18(5). С. 556–586.
- [7] Chagrov A., Zakharyashev M. Modal Logic. Oxford: Clarendon Press, 1997. 624 p.

- [8] *Fitting M.* Bilattices and the theory of truth // Journal of Philosophical Logic. 1989. Vol. 18. P. 225–256.
- [9] *Font J.M.* Belnap’s four-valued logic and De Morgan lattices // Logic Journal of the IGPL. 1997. Vol. 5(3). P. 413–440.
- [10] *Ginsberg M.L.* Multivalued logics: A uniform approach to inference in artificial intelligence // Computational Intelligence. 1988. Vol. 4(3). P. 265–315.
- [11] *Kripke S.* Outline of a theory of truth // Journal of Philosophy. 1975. Vol. 72. P. 690–716.
- [12] *Lewis C.I., Langford C.H.* Symbolic Logic. N.Y.: Dover Publications, 1959 (2nd ed. with corrections). 506 p.
- [13] *Pynko A.P.* Functional completeness and axiomatizability within Belnap’s four-valued logic and its expansion // Journal of Applied Non-Classical Logics. 1999. Vol. 9(1). P. 61–105.
- [14] *Sahlqvist H.* Completeness and correspondence in the first and second order semantics for modal logic / Ed. S. Kanger. Proceedings of the Third Scandinavian Logic symposium. Amsterdam: North-Holland, 1975. P. 110–143.
- [15] *Scroggs S.J.* Extensions of the Lewis system S5 // The Journal of Symbolic Logic. 1951. Vol. 16. P. 112–120.
- [16] *Sobochiński B.* Modal system S4.4 // Notre Dame Journal of Formal Logic. 1964. Vol. 5(4). P. 305–312.
- [17] *Sobochiński B.* Certain extensions of modal system S4 // Notre Dame Journal of Formal Logic. 1970. Vol. 11(3). P. 347–367.

A.S. KARPENKO, A.V. CHAGROV

Modal Propositional Truth Logic $\mathbf{Tr}$ and its Completeness

Karpenko Alexander Stepanovich

Department of Logic, Institute of Philosophy, Russian Academy of Sciences.
12/1 Goncharnaya St., Moscow, 109240, Russian Federation.
E-mail: as.karpenko@gmail.com

Chagrov Alexander Vasilievich

Department of algebra and mathematical logic
Tver State University.
33 Zhelabova St., Tver, 170100, Russian Federation.
E-mail: chagrov@mail.ru

In this paper Sobochiński's four-valued modal logic $\mathbf{V2}$ (extension of $\mathbf{S5}$) is considered. The emergence of that logic, some its interesting properties and different equivalent formulations are presented. Its algebraic models are of particular interest: as the extension of De Morgan algebra by boolean negation $\neg$ and as the extension of Boolean algebra by the endomorphism g , which is interpreted then as the propositional truth operation T . The logic corresponding to the last case is denoted by $\mathbf{Tr}$. The attention is paid to the application of $\mathbf{Tr}$ in Fitting's theory of truth. The axiomatization of $\mathbf{Tr}$ in language $(\rightarrow, \neg, T)$ is considered. The completeness of logic $\mathbf{Tr}$ is proved with use of Sahlqvist's powerful theorem, which gives the sufficient condition of Kripke completeness for normal modal logics. Algebraic completeness of logic $\mathbf{Tr}$ is also proved.

Keywords: modal logic $\mathbf{V2}$, De Morgan algebra, boolean algebra, endomorphism, logic $\mathbf{Tr}$, Fitting's theory of truth, Kripke completeness, Sahlqvist's theorem, algebraic completeness

References

- [1] Ermolaeva, N. M., Muchnik, A. A. "Modal'nye rasshireniya logicheskikh ischislenii tipa Khao Vana" [Modal expansion of logical calculi such as Wang Hao], *Issledovaniya po formalizovannym yazykam i neklassicheskim logikam* [Studies on the formal language and non-classical logics]. M.: Science, 1974, pp. 172–193. (In Russian)
- [2] Ermolaeva, N. M., Muchnik, A. A. "Modal'nye logiki, opredelyaemye endomorfizmami distributivnykh reshetok" [Modal logic determined by the endomorphisms of distributive lattices], *Issledovaniya po teorii mnozhestv i neklassicheskim logikam* [Investigations on the theory of sets and non-classical logics]. M.: Science, 1976, pp. 229–246. (In Russian)
- [3] Karpenko, A. S. "Reshetki chetyrekhznachnykh modal'nykh logik" [Lattices of Four-valued Modal Logics], *Logicheskie issledovaniya* [Logical investigations]. 2015, no 21(1), pp. 122–137. (In Russian)

- [4] Klini, S. K. *Vvedenie v matematiku* [Introduction to mathematics]. M.: Foreign Literature, 1957. 527 pp. (In Russian)
- [5] Lemmon, E. "Algebraichesкая semantika dlya modal'nykh logik I" [Algebraic semantics for modal logics I], *Semantika modal'nykh i intensional'nykh logik* [The semantics of modal and intensional logic], ed. V. A. Smirnov. M.: Progress, 1981, pp. 98–124. (In Russian)
- [6] Maksimova, L. L. "Interpolyatsionnye teoremy v modal'nykh logikakh i amal'gamiruemye mnogoobraziya topobulevykh algebr" [Interpolation theorems in modal logics and topo-Boolean algebra amalgamatable varieties], *Algebra i logika* [Algebra and logic]. 1979, vol. 18(5), pp. 556–586. (In Russian)
- [7] Chagrov, A., Zakharyashev, M. *Modal Logic*. Oxford: Clarendon Press, 1997. 624 pp.
- [8] Fitting, M. "Bilattices and the theory of truth", *Journal of Philosophical Logic*. 1989, vol. 18, pp. 225–256.
- [9] Font, J.M. "Belnap's four-valued logic and De Morgan lattices", *Logic Journal of the IGPL*. 1997, vol. 5(3), pp. 413–440.
- [10] Ginsberg, M.L. "Multivalued logics: A uniform approach to inference in artificial intelligence", *Computational Intelligence*. 1988, vol. 4(3), pp. 265–315.
- [11] Kripke, S. "Outline of a theory of truth", *Journal of Philosophy*. 1975, vol. 72, pp. 690–716.
- [12] Lewis, C.I., Langford, C.H. *Symbolic Logic*. N.Y.: Dover Publications, 1959 (2nd ed. with corrections). 506 pp.
- [13] Pynko, A.P. "Functional completeness and axiomatizability within Belnap's four-valued logic and its expansion", *Journal of Applied Non-Classical Logics*. 1999, Vol. 9(1), pp. 61–105.
- [14] Sahlqvist, H. "Completeness and correspondence in the first and second order semantics for modal logic", Ed. S. Kanger. *Proceedings of the Third Scandinavian Logic symposium*. Amsterdam: North-Holland, 1975, pp. 110–143.
- [15] Scroggs, S.J. "Extensions of the Lewis system S5", *The Journal of Symbolic Logic*. 1951, vol. 16, pp. 112–120.
- [16] Sobochiński, B. "Modal system S4.4", *Notre Dame Journal of Formal Logic*. 1964, vol. 5(4), pp. 305–312.
- [17] Sobochiński, B. "Certain extensions of modal system S4", *Notre Dame Journal of Formal Logic*. 1970, vol. 11(3), pp. 347–367.