В.И. ШАЛАК

Слабое отношение следования между λ -термами*

Владимир Иванович Шалак

Институт философии РАН.

Российская Федерация, 109240, г. Москва, ул. Гончарная, д.12, стр.1.

E-mail: shalack@gmail.com

Аннотация: Язык λ -исчисления находит широкое применение для решения задач в логике, информатике, лингвистике и искусственном интеллекте. Само λ -исчисление строится вокруг базисного отношения между термами, которое называется β -редукцией. В предлагаемом докладе для типизированного в смысле Карри λ -исчисления формулируется более слабое отношение между термами, которое может как иметь самостоятельное значение, так и позволить установить более тонкие связи между логикой и λ -исчислением. Основная идея заключается в том, что при приписывании терму X типа α относительно контекста Γ , что записывается в виде $\Gamma \vdash X : \alpha$, понятие контекста играет роль, аналогичную понятию модели в логике. Если в логике выражение $M \models A$ означает, что формула A истинна в модели M , то в типизированном λ -исчислении выражение $\Gamma \vdash X : \alpha$ означает, что в контексте Γ терму X приписан тип α , и этот терм имеет значение, которое может быть вычислено. В логике отношение следования между формулами A и B определяют как $A \models B \Leftrightarrow \forall M (M \models A \Rightarrow M \models B)$. Если перенести эту схему в λ -исчисление, то отношение λ -следования между темами может быть определено как $X \vdash_{\lambda} Y \Leftrightarrow \forall \Gamma \in Ctx [\exists \alpha (\Gamma \vdash X : \alpha) \Rightarrow \exists \beta (\Gamma \vdash Y : \beta)]$. Смысл этого отношения заключается в том, что в каждом контексте, в котором терму X может быть приписан некоторый тип, терму Y также может быть приписан некоторый тип. Иными словами, если вычислима функция, представленная термом X , то вычислима функция, представленная термом Y . Отношение λ -следования обладает многими свойствами, присущими классическому отношению следования между формулами логики, а также рядом новых свойств, характерных для λ -исчисления с типами.

Ключевые слова: λ -исчисление с типами, отношение следования

Для цитирования: Шалак В.И. Слабое отношение следования между λ -термами // Логические исследования / Logical Investigations. 2018. Т. 24. № 2. С. 151–157. DOI: 10.21146/2074-1472-2018-24-2-151-157

* Статья представляет собой расширенную версию тезисов выступления на I Конгрессе РОИФН, опубликованных в электронном виде: Шалак В.И. Слабое отношение следования между λ -термами // История и философия науки в эпоху перемен: сб. науч. ст.: в 6 т. Т. 1. [Электронный ресурс]. М.: РОИФН, 2018. С. 58–61.

1. Бестиповое λ -исчисление

Теория бестипового λ -исчисления подробно изложена в [Барендрегт, 1985]. Напомним определения его базовых понятий — исходных символов, термов, аксиом и правил вывода.

1.1. Исходные символы

1. Var — множество переменных;
2. λ — оператор ламбда-абстракции;
3. $)$, $($ — скобки.

1.2. Термы

1. Всякая переменная $x \in Var$ есть терм;
2. Если X и Y — термы, то (XY) есть терм;
3. Если $x \in Var$ и Y — терм, то $(\lambda x.Y)$ — терм.

Терм $\lambda x.Y$ понимается как предписание для вычисления некоторой функции. Применение $\lambda x.Y$ к терму X записывается как $(\lambda x.Y)X$, а результатом его будет терм $Y[X/x]$, т. е. подстановка терма X вместо всех свободных вхождений переменной x в терм Y при выполнении ограничения, что после подстановки ни одна свободная переменная терма X не оказывается связанной. Аналогичные ограничения на подстановку термов имеют место и в логике предикатов. Они удовлетворяются автоматически, если все свободные переменные отличны от связанных.

Простое первопорядковое λ -исчисление задается двумя аксиомами и четырьмя правилами вывода.

1.3. Аксиомы

1. $(\lambda x.Y)X \rightarrow Y[X/x]$ — β -редукция
2. $X \rightarrow X$

1.4. Правила вывода

1. $X \rightarrow Y \Rightarrow ZX \rightarrow ZY$
2. $X \rightarrow Y \Rightarrow XZ \rightarrow YZ$
3. $X \rightarrow Y, Y \rightarrow Z \Rightarrow X \rightarrow Z$
4. $X \rightarrow Y \Rightarrow \lambda x.X \rightarrow \lambda x.Y$

Определение доказательства — обычное.

2. Типизация в стиле Карри

При обычном понимании функций мы связываем с ними области определения и области значений. Если f — некоторая функция, то запись $f : A \rightarrow B$ служит обозначением того, что множество A — область ее определения, множество B — область значений, а $A \rightarrow B$ понимается как множество всех функций из A в B , т. е. B^A . Если $x \in A$, то $f(x) \in B$. Более подробно с типизацией в стиле Карри можно ознакомиться в [Hindley, Seldin, 2008].

В языке λ -исчисления нет явного указания на типы значений термов, но мы бы хотели иметь возможность в случае необходимости приписать их. Для этого в метаязыке определим множество меток, которые будем называть *типами*.

Пусть $AType$ — некоторое множество *атомарных типов*. Тогда множество всех типов $Type$ определяется по индукции:

1. Если $\alpha \in AType$, то $\alpha \in Type$;
2. Если $\alpha, \beta \in Type$, то $(\alpha \rightarrow \beta) \in Type$;
3. Ничто другое не принадлежит $Type$.

Пусть $X : \alpha$ будет обозначать, что терму X приписан тип α .

Контекстом Γ будем называть множество переменных, каждой из которых приписан тип. При этом если $x : \alpha \in \Gamma$ и $x : \beta \in \Gamma$, то $\alpha = \beta$. Множество всех контекстов обозначим посредством Ctx .

Индуктивное определение приписывания типов λ -термам относительно контекста Γ имеет следующий вид.

$$T.1 \quad \frac{x : \alpha \in \Gamma}{\Gamma \vdash x : \alpha}$$

$$T.2 \quad \frac{\Gamma \vdash X : \alpha \rightarrow \beta, \Gamma \vdash Y : \alpha}{\Gamma \vdash (XY) : \beta}$$

$$T.3 \quad \frac{\Gamma, x : \alpha \vdash Y : \beta}{\Gamma \vdash (\lambda x.Y) : \alpha \rightarrow \beta}$$

Правило $T.1$ — базис индукции, а правила $T.2$ и $T.3$ — индукционный шаг.

Будем называть терм X *типизируемым*, если существует контекст Γ и такой тип α , что $\Gamma \vdash X : \alpha$. Предикат *быть типизируемым* термом разрешим, т. е. существует алгоритм, который позволяет по каждому типизируемому терму X построить такой контекст Γ и тип α , что $\Gamma \vdash X : \alpha$. Более того, существует алгоритм, который позволяет по заданному терму

X построить в определенном смысле минимальный контекст с требуемыми свойствами.

Например, если X и Y — переменные, а (XY) — терм, то одним из контекстов, который позволяет приписать ему тип, будет $\{X : \alpha \rightarrow \beta, Y : \beta\}$. Тогда сам терм (XY) будет иметь тип β , т. е. $(XY) : \beta$. В то же время, согласно определению $T.1 - T.3$ приписывания типов λ -термам, терму $\lambda X.(\lambda Y.(XY))$ может быть приписан некоторый тип $(\alpha \rightarrow \beta) \rightarrow (\alpha \rightarrow \beta)$ в любом контексте, в том числе и пустом.

Вместе с тем можно показать, что ни один терм вида (XX) не является типизируемым, т. е. не существует контекста, в котором ему может быть приписан какой-либо тип.

3. Следование в классической логике

Одним из центральных понятий классической логики является понятие следования/выводимости. В ней имеет место следующая цепочка эквивалентностей:

$$A \vdash B \Leftrightarrow A \models B \Leftrightarrow \forall M (M \models A \Rightarrow M \models B) \Leftrightarrow \forall \Gamma (\Gamma \vdash A \Rightarrow \Gamma \vdash B),$$

где переменная M пробегает по моделям, а Γ — по множествам формул. По аналогии можно определить новое отношение между термами λ -исчисления, более слабое, чем отношение редукции в λ -исчислении.

4. λ -следование

Наше определение слабого отношения λ -следования ' $\models_\lambda$ ' между термами имеет вид:

$$X \models_\lambda Y \Leftrightarrow \forall \Gamma \in Ctx [\exists \alpha (\Gamma \vdash X : \alpha) \Rightarrow \exists \beta (\Gamma \vdash Y : \beta)]$$

Очевидно, что правая часть определения отношения ' $\models_\lambda$ ' эквивалентна следующей формулировке в терминах отношения включения между множествами:

$$\{\Gamma : \exists \alpha (\Gamma \vdash X : \alpha)\} \subseteq \{\Gamma : \exists \beta (\Gamma \vdash Y : \beta)\}$$

Смысл отношения $X \models_\lambda Y$ заключается в том, что если терм/предписание X типизируем (может быть вычислен в некотором контексте), то он содержит в качестве составных частей такие более простые термы/предписания, из которых может быть составлен и в этом же контексте вычислен терм/предписание Y . При этом типы и значения термов X и Y в общем случае могут не совпадать.

Можно показать, что для типизируемых термов отношение ' $\models_\lambda$ ' обладает следующими свойствами:

- $R.1 \ \emptyset \vdash N \Rightarrow M \vDash_{\lambda} N$
 $R.2 \ (\lambda x.M)N \vDash_{\lambda} M[N/x]$
 $R.3 \ M \vDash_{\lambda} M$
 $R.4 \ M \vDash_{\lambda} N, N \vDash_{\lambda} L \Rightarrow M \vDash_{\lambda} L$
 $R.5 \ MN \vDash_{\lambda} M$
 $R.6 \ MN \vDash_{\lambda} N$
 $R.7 \ M \vDash_{\lambda} N \Rightarrow M \vDash_{\lambda} \lambda x.N$
 $R.8 \ \lambda x.M \vDash_{\lambda} N \Rightarrow M \vDash_{\lambda} N$
 $R.9 \ M \vDash_{\lambda} N \Rightarrow \lambda x.M \vDash_{\lambda} \lambda x.N$
 $R.10 \ M \vDash_{\lambda} \lambda x.(NL) \Rightarrow M \vDash_{\lambda} \lambda x.N$
 $R.11 \ M \vDash_{\lambda} \lambda x.(NL) \Rightarrow M \vDash_{\lambda} \lambda x.L$
 $R.12 \ M \vDash_{\lambda} \lambda x.N \Rightarrow M \vDash_{\lambda} N$ — если $x \notin FV(N)$

Свойство $R.1$ говорит о том, что замкнутые типизируемые термы ведут себя по аналогии с общезначимыми формулами логики — они следуют из любого терма.

О том, что отношение β -редукции включено в отношение λ -следования, говорит свойство $R.2$.

$R.3$ и $R.4$ — рефлексивность и транзитивность следования.

Свойства $R.5$ и $R.6$ позволяют переходить от термов вида (XY) к подтермам X и Y , совершать разборку сложного терма (XY) .

Свойства $R.7$ – $R.12$ описывают взаимодействие следования и оператора лямбда-абстракции λ .

Существует аналогия между поведением нетипизируемых термов и поведением противоречивых формул логики. Как противоречивые формулы не имеют ни одной модели, в которых они истинны, так и для нетипизируемых термов не существует ни одного контекста, в котором им может быть приписан какой-нибудь тип. Перечень свойств отношения следования пополнится, по крайней мере, еще тремя $R.13$ – $R.15$.

- $R.13 \ \neg \exists \Gamma \exists \alpha (\Gamma \vdash: \alpha) \Rightarrow X \vDash_{\lambda} M$
 $R.14 \ M \vDash_{\lambda} N \Rightarrow ML \vDash_{\lambda} N$
 $R.15 \ M \vDash_{\lambda} N \Rightarrow LM \vDash_{\lambda} N$

Отношение λ -следования разрешимо, т. е. рекурсивно. Это позволяет поставить вопрос о его аксиоматизации в виде исчисления.

Литература

- Барендрегт, 1985 — *Барендрегт Х.* Лямбда-исчисление. Его синтаксис и семантика. М.: Мир, 1985. 606 с.
 Hindley, Seldin, 2008 — *Hindley R.J., Seldin P.* Lambda-Calculus and Combinators, an Introduction. Cambridge University Press, 2008. 345 p.

VLADIMIR I. SHALACK

Weak consequence relation between λ -terms

Vladimir I. Shalack

Institute of Philosophy of Russian Academy of Sciences,
12/1 Goncharnaya St., Moscow, 109240, Russian Federation.
E-mail: shalack@gmail.com

Abstract: The language of the λ -calculus has many applications for solving different problems in logic, information technology, linguistics and artificial intelligence. The λ -calculus is based on the basic relation between terms, which is called β -conversion. In the presented report, we formulate a weaker relation between the λ -terms, which makes it possible to establish more subtle connections between logic and λ -calculus. The basic idea is that when we assign a type α to a term X relative to the context Γ , which is written in the form $\Gamma \vdash X : \alpha$, the concept of context plays a role analogous to the concept of a model in logic. If in logic the expression $M \models A$ means that the formula A is true in the model M , then in the λ -calculus with types the expression $\Gamma \vdash X : \alpha$ means that in the context Γ the term X is assigned the type α , and this term has a value that can be computed. In logic, the relation of logical consequence between the formulas A and B is defined as $A \models B \Leftrightarrow \forall M (M \models A \Rightarrow M \models B)$. If we transfer this scheme to the λ -calculus, then the λ -consequence relation between terms can be defined as $X \models_{\lambda} Y \Leftrightarrow \forall \Gamma \in Ctx [\exists \alpha (\Gamma \vdash X : \alpha) \Rightarrow \exists \beta (\Gamma \vdash Y : \beta)]$. The meaning of this relation is that in every context in which we can assign some type to the X , we can also assign some type to the term Y . In other words, if the function represented by the term X is computable, then the function represented by the term Y is also computable. The λ -consequence between terms relation has many properties analogous to the classical logical consequence relation between formulas, as well as a number of new properties, characteristic for the λ -calculus with types.

Keywords: λ -calculus with types, consequence relation

For citation: Shalack V.I. “Slaboe otnoshenie sledovaniya mezhdu λ -termami” [Weak consequence relation between λ -terms], *Logicheskie Issledovaniya / Logical Investigations*, 2018, Vol. 24, No. 2, pp. 151–157. DOI: 10.21146/2074-1472-2018-24-2-151-157 (In Russian)

Acknowledgements. The paper is an expanded version of the abstract, published in the I Congress of RSHPS Proceedings in electronic form: Shalack V.V. “Slaboe otnoshenie sledovaniya mezhdu λ -termami” [Weak consequence relation between λ -terms], in: *Istoriya i filosofiya nauki v epokhu peremen* [History and philosophy of science in the era of change]. 6 Vols. Vol. 1. Moscow: RSHPS Publ., 2018, pp. 58–61. (In Russian)

References

- Barendregt, 1985 – Barendregt, Kh. *Lambda-ischislenie. Ego sintaksis i semantika* [Lambda-Calculus. Its syntax and semantics]. Moscow: Mir, 1985. 606 pp. (In Russian)
- Hindley, Seldin, 2008 – Hindley, R.J., Seldin, P. *Lambda-Calculus and Combinators, an Introduction*. Cambridge University Press, 2008. 345 pp.