Символическая логика
Symbolic Logic

И.А. ГОРБУНОВ

**Характеристические теории и обращение
подстановки***

Игорь Анатольевич Горбунов

Тверской государственный университет.

Российская Федерация, 170100, г. Тверь, ул. Желябова, д. 33.

E-mail: i_gorbunov@mail.ru

Аннотация: Матрицей Линденбаума некоторой логики называют логическую матрицу, заданную на алгебре всех формул этой логики и имеющую в качестве выделенного множества некоторую ее теорию. Множество всех таких матриц называют расслоением Линденбаума. Расслоение Линденбаума некоторой логики образует характеристическое для этой логики множество логических матриц. Однако известно достаточно много логик, например классическая, которые характеризуются одной матрицей.

В работе получен ряд критериев того, что логика имеет характеристическую матрицу. Показано, что вопрос наличия такой матрицы связан с операцией обращения подстановки для определенного вида подстановок. Здесь под операцией обращения подстановки подразумеваем взятие прообраза некоторого множества формул для некоторой подстановки.

Получен следующий критерий наличия характеристической матрицы для данной логики: для некоторой логики существует не более чем счетная характеристическая матрица тогда и только тогда, когда существует такая теория, для которой матрица Линденбаума является характеристической. На основании этого факта введено понятие характеристической теории.

Как следует из Леммы Сушко, для любой логики результат обращения подстановки некоторой теории является теорией. В данной работе показано, что теория T является характеристической тогда и только тогда, когда любая непротиворечивая теория является пересечением прообразов теории T , взятых по всем подстановкам, которые вкладывают эту теорию в T . Таким образом, получается, что логика имеет характеристическую матрицу тогда и только тогда, когда существует такая теория T , что любая непротиворечивая теория является пересечением прообразов теории T , взятых по всем вкладывающим подстановкам.

В качестве иллюстрации рассматривается вопрос о характеристических теориях классической логики. Доказано, что любая полная теория классической логики является характеристической. Замечено, что в классической логике любая полная теория является

* Работа выполнена при поддержке РФФИ, проекты №17–03–00818–ОГН и №18–011–00869–а.

результатом обращения некоторой подстановки, примененной к некоторой характеристической теории. Приведен пример такой подстановки для случая, когда характеристическая теория является полной.

Доказано, что минимальная матрица Линденбаума классической логики является характеристической, то есть множество всех тавтологий является характеристической теорией классической логики.

Ключевые слова: матрицы Линденбаума, характеристические матрицы, строгий гомоморфизм, обращение подстановки, полные теории, классическая логика

Для цитирования: Горбунов И.А. Характеристические теории и обращение подстановки // Логические исследования / Logical Investigations. 2019. Т. 25. № 2. С. 9–25. DOI: 10.21146/2074-1472-2019-25-2-9-25

1. Логика. Основные определения

Пусть тройка $\langle \Pi, \Sigma, \{(\cdot), \cdot, \cdot\} \rangle$ — некоторый пропозициональный алфавит. Здесь $\Pi = \{x_i : i \geq 1\}$ — счетное множество пропозициональных переменных, Σ — некоторое множество конечноместных функциональных символов, которые мы будем называть *логическими связками*, а $\{(\cdot), \cdot, \cdot\}$ — множество вспомогательных символов. Для обозначения пропозициональных переменных в качестве метаобозначений будем использовать и другие строчные буквы латинского алфавита, возможно, с индексами.

Всякий терм, построенный из символов алфавита $\langle \Pi, \Sigma, \{(\cdot), \cdot, \cdot\} \rangle$, будем называть *формулой*. Множество всех формул будем обозначать посредством Φ . Посредством $\mathcal{P}_{fin}(\Phi)$ будем обозначать множество всех конечных подмножеств множества Φ .

Подстановкой будем называть гомоморфное продолжение отображения $\varepsilon : \Pi \rightarrow \Phi$ на множество всех формул. Поскольку это продолжение единственно, то обозначать его будем тоже ε . Для любого множества формул Γ посредством $\varepsilon\Gamma$ будем обозначать результат применения подстановки ε ко всем формулам этого множества. Посредством $\mathbf{E}$ обозначим множество всех подстановок.

Следующая лемма относится к фольклору.

Лемма 1. $\forall \varepsilon \in \mathbf{E} \forall \Gamma, \Delta \in 2^\Phi (\Gamma \subseteq \Delta \Leftrightarrow \varepsilon\Gamma \subseteq \varepsilon\Delta).$

Доказательство. Монотонность общеизвестна. Пусть $\varepsilon\Gamma \not\subseteq \varepsilon\Delta$. Значит, существует такая формула φ , что $\varphi \in \varepsilon\Gamma$ и $\varphi \notin \varepsilon\Delta$. Таким образом, имеем, что $\exists \psi \in \Gamma (\varepsilon\psi = \varphi)$ и $\forall \chi \in \Delta (\varepsilon\chi \neq \varphi)$. Следовательно, $\psi \notin \Delta$, и значит, $\Gamma \not\subseteq \Delta$. ■

На множестве 2^Φ следующим образом определим одноместную операцию Sb , которую будем называть *замыканием по подстановке*:

$$Sb(\Gamma) = \bigcup \{ \varepsilon \Gamma : \varepsilon \in \mathbf{E} \}.$$

Множество формул Γ будем называть *замкнутым по подстановке*, если $Sb(\Gamma) = \Gamma$.

Пару $\langle \Gamma, \varphi \rangle$, где $\Gamma \in \mathcal{P}_{fin}(\Phi)$, а φ — формула, будем обозначать $\Gamma \Vdash \varphi$ и называть *секвенцией*.

Множество секвенций $\mathbf{L}$ будем называть *логикой*, если оно удовлетворяет следующим условиям: для любых $\Gamma, \Delta \in \mathcal{P}_{fin}(\Phi)$ и $\varphi \in \Phi$ верно, что

- (A1) $\varphi \in \Gamma \Rightarrow (\Gamma \Vdash \varphi) \in \mathbf{L}$ (*рефлексивность*);
- (A2) $(\Gamma \Vdash \varphi) \in \mathbf{L}$ и $\forall \psi \in \Gamma ((\Delta \Vdash \psi) \in \mathbf{L}) \Rightarrow (\Delta \Vdash \varphi) \in \mathbf{L}$ (*транзитивность*);
- (A3) $(\Gamma \Vdash \varphi) \in \mathbf{L} \Rightarrow \forall \varepsilon \in \mathbf{E} ((\varepsilon(\Gamma) \Vdash \varepsilon(\varphi)) \in \mathbf{L})$ (*структурность*).

Определим *отношение логического следования*, которое будем обозначать $\vdash$, следующим образом: для любого множества Δ , $\varphi \in \Phi$

$$\Delta \vdash \varphi \Leftrightarrow \exists \Gamma \in \mathcal{P}_{fin}(\Phi) (\Gamma \subseteq \Delta \text{ и } (\Gamma \Vdash \varphi) \in \mathbf{L}).$$

Несложно показать, что отношение $\vdash$ обладает свойствами рефлексивности, транзитивности и структурности.

Теорией логики $\mathbf{L}$ будем называть множество формул, замкнутое по отношению логического следования. Посредством $Th(\mathbf{L})$ будем обозначать множество всех теорий логики $\mathbf{L}$. Всякому $\Gamma \subseteq \Phi$ сопоставим множество $C(\Gamma) = \{ \varphi : \Gamma \vdash \varphi \}$. Определенную таким образом операцию C будем называть *оператором замыкания логики $\mathbf{L}$* .

Теорема 1. $C(\Gamma) \in Th(\mathbf{L})$.

Доказательство. Пусть $C(\Gamma) \neq \emptyset$, $\Delta \vdash \varphi$ и $\Delta \subseteq C(\Gamma)$. Следовательно, существует $(\Theta \Vdash \varphi) \in \mathbf{L}$ такая, что $\Theta \subseteq \Delta$. Так как $\forall \psi \in \Theta (\Gamma \vdash \psi)$, то $\Gamma \vdash \varphi$. ■

Множеством тавтологий логики $\mathbf{L}$ будем называть множество формул $L = \{ \varphi : (\Vdash \varphi) \in \mathbf{L} \}$.

Лемма 2. Для любой логики $\mathbf{L}$ верно, что если $(\Gamma \Vdash \varphi) \in \mathbf{L}$ и $\Gamma \subseteq L$, то $(\Vdash \varphi) \in \mathbf{L}$.

Доказательство. Пусть $L \neq \emptyset$, $(\Gamma \Vdash \varphi) \in \mathbf{L}$ и $\Gamma \subseteq L$. Так как $\forall \psi \in \Gamma ((\Vdash \psi) \in \mathbf{L})$, то $(\Vdash \varphi) \in \mathbf{L}$. ■

Теорема 2. Для любой логики множество тавтологий замкнуто по подстановке и логическому следованию.

Доказательство. Пусть $L \neq \emptyset$, $\Delta \subseteq L$ и $\Delta \vdash \varphi$, следовательно, существует $(\Gamma \Vdash \varphi) \in \mathbf{L}$ такая, что $\Gamma \subseteq \Delta$. Тогда, по Лемме 2, $(\Vdash \varphi) \in \mathbf{L}$.

Тот факт, что $Sb(L) = L$, следует из условия структурности. ■

Таким образом, $L = C(\emptyset)$.

Далее считаем логику $\mathbf{L}$ фиксированной.

2. Расслоение Линденбаума

Пару $\mathcal{M} = \langle \mathcal{A}, D \rangle$, где $\mathcal{A}$ — алгебра на некотором непустом множестве A и $D \subseteq A$, будем называть *подходящей матрицей для логики $\mathbf{L}$* , если всякой связке этой логики в алгебре $\mathcal{A}$ поставлена в соответствие операция той же местности. Множество D будем называть *выделенным множеством*. Далее говорим только о матрицах, подходящих для логики $\mathbf{L}$.

Оценкой ν на матрице $\mathcal{M} = \langle \mathcal{A}, D \rangle$ будем называть отображение $\nu : \Pi \rightarrow A$. Множество всех оценок на некоторой фиксированной матрице $\mathcal{M}$ обозначим посредством $\Theta_{\mathcal{M}}$.

Значение формулы φ при оценке ν , которое будем обозначать $\nu(\varphi)$, определим по индукции:

если $\varphi = p \in \Pi$, то $\nu(\varphi) = \nu(p)$;

если $\varphi = f^n(\psi_1, \dots, \psi_n)$ (где $f^n \in \Sigma$), то $\nu(\varphi) = f^n(\nu(\psi_1), \dots, \nu(\psi_n))$.

Будем говорить, что формула φ истинна при оценке ν на матрице $\mathcal{M} = \langle \mathcal{A}, D \rangle$ (и обозначать этот факт посредством записи $\mathcal{M} \models^\nu \varphi$), если $\nu(\varphi) \in D$.

Будем говорить, что формула φ истинна на матрице $\mathcal{M} = \langle \mathcal{A}, D \rangle$ (и обозначать это как $\mathcal{M} \models \varphi$), если $\forall \nu \in \Theta_{\mathcal{M}} (\nu(\varphi) \in D)$.

Будем говорить, что матрица $\mathcal{M} = \langle \mathcal{A}, D \rangle$ является моделью логики $\mathbf{L}$ (согласована с логикой $\mathbf{L}$, является матрицей логики $\mathbf{L}$), если выполняется условие:

$$\Gamma \vdash \varphi \Rightarrow \forall \nu \in \Theta_{\mathcal{M}} (\nu(\Gamma) \subseteq D \Rightarrow \nu(\varphi) \in D).$$

Обозначим посредством Φ^* алгебру термов (формул), которую будем называть алгеброй Линденбаума. Расслоением Линденбаума логики $\mathbf{L}$ назовем следующее семейство матриц:

$$\mathbf{M}_{\mathbf{L}} = \{ \langle \Phi^*, T \rangle : T \in Th(\mathbf{L}), T \neq \Phi \}.$$

Каждую матрицу $\mathcal{M}_T = \langle \Phi^*, T \rangle$ этого семейства будем называть *матрицей Линденбаума* логики $\mathbf{L}$. Матрицу $\mathcal{M}_L = \langle \Phi^*, L \rangle$ будем называть *минимальной матрицей Линденбаума* логики $\mathbf{L}$. Заметим, что всякая оценка на алгебре Линденбаума является подстановкой, поэтому множество оценок на этой алгебре будем обозначать $\mathbf{E}$.

Как известно, *любая матрица Линденбаума логики $\mathbf{L}$ является моделью этой логики* [Wójcicki, 1988, р. 196, Theorem 3.1.5].

Пусть $\mathbf{M}$ — некоторое множество матриц.

Будем говорить, что *множество матриц $\mathbf{M}$ согласовано* с логикой $\mathbf{L}$, если каждая матрица из этого множества согласована с данной логикой.

Будем говорить, что *множество матриц $\mathbf{M}$ является полным для логики $\mathbf{L}$* , если выполняется условие:

$$\Gamma \not\vdash \varphi \Rightarrow \exists \mathcal{M} \in \mathbf{M} \exists \nu \in \Theta_{\mathcal{M}} (\nu(\Gamma) \subseteq D \text{ и } \nu(\varphi) \notin D).$$

Будем говорить, что *множество матриц $\mathbf{M}$ является полным для логики $\mathbf{L}$* , если выполняется условие: если $\Gamma \not\vdash \varphi$, то существует такая матрица $\mathcal{M} \in \mathbf{M}$, что $\exists \nu \in \Theta_{\mathcal{M}} (\nu(\Gamma) \subseteq D \text{ и } \nu(\varphi) \notin D)$.

Будем говорить, что *множество матриц характеризует логику $\mathbf{L}$* , если это множество является согласованным и полным для $\mathbf{L}$.

Расслоение Линденбаума логики $\mathbf{L}$ характеризует эту логику [Wójcicki, 1984, р. 79, 32.4].

Рассмотрим также некоторые другие свойства расслоения Линденбаума.

Будем говорить, что матрица $\mathcal{M} = \langle \mathcal{A}, D \rangle$ *полна* относительно логики $\mathbf{L}$, если выполняется условие:

$$\forall \nu \in \Theta_{\mathcal{M}} (\nu(\Gamma) \subseteq D \Rightarrow \nu(\varphi) \in D) \Rightarrow \Gamma \vdash \varphi.$$

Теорема 3. *Пусть матрица $\mathcal{M} = \langle \mathcal{A}, D \rangle$ полна относительно логики $\mathbf{L}$. Тогда для каждой матрицы $\mathcal{M}_T = \langle \Phi^*, T \rangle$ из расслоения Линденбаума верно, что существует гомоморфизм h из Φ^* в $\mathcal{A}$ такой, что $h(T) \subseteq D$.*

Доказательство. Пусть для некоторой теории T и формулы φ верно, что $T \not\vdash \varphi$. Поскольку матрица $\mathcal{M} = \langle \mathcal{A}, D \rangle$ полна относительно логики $\mathbf{L}$, то существует такая оценка $\nu : \Pi \rightarrow \mathcal{A}$, что $\nu(T) \subseteq D$ и $\nu(\varphi) \notin D$. Оценка ν и будет являться указанным гомоморфизмом h . ■

Будем говорить, что матрица $\mathcal{M} = \langle \mathcal{A}, D \rangle$ характеризует логику $\mathbf{L}$ (или, что матрица $\mathcal{M}$ является *характеристической матрицей* логики $\mathbf{L}$), если выполняется условие:

$$\forall \nu \in \Theta_{\mathcal{M}} (\nu(\Gamma) \subseteq D \Rightarrow \nu(\varphi) \in D) \Leftrightarrow \Gamma \vdash \varphi.$$

Строгим гомоморфизмом матрицы $\mathcal{M} = \langle \mathcal{A}, D \rangle$ на матрицу $\mathcal{N} = \langle \mathcal{B}, G \rangle$ будем называть сюръективный гомоморфизм $h : \mathcal{A} \rightarrow \mathcal{B}$, при котором $h^{-1}(G) = D$ [Wójcicki, 1984, p. 99, 41.1].

Известно, что для всякой логики класс всех матриц этой логики замкнут относительно строгого гомоморфизма и взятия прообраза строгого гомоморфизма [Wójcicki, 1984, p. 100, Theorem 41.4].

Теорема 4. Пусть матрица $\mathcal{M} = \langle \mathcal{A}, D \rangle$ — некоторая, не более чем счетная, подходящая матрица для логики $\mathbf{L}$. Если для каждой матрицы $\mathcal{M}_T = \langle \Phi^*, T \rangle$ из расслоения Линденбаума существует строгий гомоморфизм $h : \mathcal{M}_T \rightarrow \mathcal{M}$, то матрица $\mathcal{M}$ является характеристической матрицей логики $\mathbf{L}$.

Доказательство. Поскольку класс всех матриц этой логики замкнут относительно строгого гомоморфизма, то матрица $\mathcal{M}$ является моделью логики $\mathbf{L}$.

Пусть для некоторого множества формул Γ и формулы φ верно, что $\Gamma \not\vdash \varphi$. Поскольку существует строгий гомоморфизм $h : \mathcal{M}_{C(\Gamma)} \rightarrow \mathcal{M}$, при котором $C(\Gamma) = h^{-1}(D)$, то при оценке ν , совпадающей с гомоморфизмом h на множестве переменных, мы получим, что $\nu(\Gamma) \subseteq D$ и $\nu(\varphi) \notin D$. ■

3. Строгий гомоморфизм и полнота

Рассмотрим, как связан строгий гомоморфизм с таким свойством матриц, как полнота¹.

Лемма 3. Пусть матрица $\mathcal{M} = \langle \mathcal{A}, D \rangle$ полна относительно логики $\mathbf{L}$ и существует строгий гомоморфизм h матрицы $\mathcal{M}$ на матрицу $\mathcal{N} = \langle \mathcal{B}, G \rangle$. Тогда матрица $\mathcal{N}$ полна относительно этой логики.

Доказательство. Пусть $\Delta \not\vdash \varphi$ и для некоторой оценки $\nu \in \Theta_{\mathcal{M}}$ имеем, что $\nu(\Delta) \subseteq D$ и $\nu(\varphi) \notin D$.

Несложно показать индукцией по построению формул, что для любой оценки $\mu \in \Theta_{\mathcal{N}}$, такой, что $\forall p \in \Pi (\mu(p) = h(\nu(p)))$, и для любой формулы φ будет верно, что $\mu(\varphi) = h(\nu(\varphi))$.

¹Заметим, что приведенные ниже леммы являются следствием Леммы 3.1.8 из [Wójcicki, 1988, p. 197].

Так как $\nu(\varphi) \notin D$, то в силу строгости гомоморфизма h получаем, что $h(\nu(\varphi)) \notin G$ и, следовательно, $\mu(\varphi) \notin G$.

При этом поскольку гомоморфизм является строгим и $h(\nu(\Delta)) \subseteq G$, то $\mu(\Delta) \subseteq G$. ■

Лемма 4. Пусть матрица $\mathcal{N} = \langle \mathcal{B}, G \rangle$ полна относительно логики $\mathbf{L}$ и существует строгий гомоморфизм h матрицы $\mathcal{M} = \langle \mathcal{A}, D \rangle$ на матрицу $\mathcal{N}$. Тогда матрица $\mathcal{M}$ полна относительно этой логики.

Доказательство. Пусть $\Delta \not\models \varphi$ и для некоторой оценки $\nu \in \Theta_{\mathcal{N}}$ имеем, что $\nu(\Delta) \subseteq G$ и $\nu(\varphi) \notin G$.

Несложно показать индукцией по построению формул, что для любой оценки $\mu \in \Theta_{\mathcal{M}}$ такой, что $\forall p \in \Pi (\mu(p) \in h^{-1}(\nu(p)))$, и для любой формулы φ будет верно, что $\mu(\varphi) \in h^{-1}(\nu(\varphi))$.

Так как $\nu(\varphi) \notin G$, то $h^{-1}(\nu(\varphi)) \cap h^{-1}(G) = \emptyset$. В силу строгости гомоморфизма h получаем, что $h^{-1}(\nu(\varphi)) \cap D = \emptyset$ и, следовательно, $\mu(\varphi) \notin D$.

Но поскольку $h^{-1}(\nu(\Delta)) \subseteq h^{-1}(G)$ и гомоморфизм является строгим, то $h^{-1}(\nu(\Delta)) \subseteq D$. Таким образом, $\mu(\Delta) \subseteq D$. ■

4. Характеристическая матрица Линденбаума

Конгруэнцией алгебры $\mathcal{A}$ называют отношение эквивалентности, которое сохраняет операции алгебры [Мальцев, 1970, п. 2.4, с. 62]. Пусть $\mathcal{M} = \langle \mathcal{A}, D \rangle$ — некоторая матрица; конгруэнцию алгебры этой матрицы будем называть конгруэнцией матрицы. Пусть R — конгруэнция на матрице $\mathcal{M} = \langle \mathcal{A}, D \rangle$; посредством $\mathcal{M}/R = \langle \mathcal{A}/R, D/R \rangle$ будем обозначать фактор-матрицу матрицы $\mathcal{M}$ по конгруэнции R . Здесь $\mathcal{A}/R$ — фактор-алгебра [Там же], а D/R — множество всех классов эквивалентности по R , содержащих элементы множества D .

Конгруэнцию будем называть совместимой с множеством $D \subseteq \mathcal{A}$, если множество D является объединением классов эквивалентности по этой конгруэнции. Конгруэнцией Лейбница матрицы $\mathcal{M} = \langle \mathcal{A}, D \rangle$ будем называть наибольшую конгруэнцию алгебры $\mathcal{A}$, совместимую с множеством D . Конгруэнцию Лейбница матрицы $\mathcal{M}$ будем обозначать посредством $\Omega\mathcal{M}$.

Для любой матрицы $\mathcal{M} = \langle \mathcal{A}, D \rangle$ множество $F \subseteq \mathcal{A}$ будем называть дедуктивным фильтром матрицы $\mathcal{M}$, если $D \subseteq F$, и для любой оценки $\nu \in \Theta_{\mathcal{M}}$ верно, что если $\Delta \vdash \varphi$ и $\nu(\Delta) \subseteq F$, то $\nu(\varphi) \in F$ [Font et al., 2003, р. 21]. Множество всех фильтров матрицы $\mathcal{M}$ будем обозначать посредством $Fi_{\mathcal{M}}$.

Конгруэнцией Сушко матрицы $\mathcal{M} = \langle \mathcal{A}, D \rangle$ будем называть конгруэнцию, которую определим следующим образом [Czelakowski, 2003, p. 193]:

$$\Sigma\mathcal{M} = \bigcap \{ \Omega\mathcal{N} : \mathcal{N} = \langle \mathcal{A}, F \rangle, F \in Fi_{\mathcal{M}} \}.$$

Наиболее известным отношением на матрицах является отношение Фреге:

$$\Lambda\mathcal{M} = \{ (a, b) \in \mathcal{A}^2 : \forall F \in Fi_{\mathcal{M}} (D \subseteq F \Rightarrow (a \in F \Leftrightarrow b \in F)) \}.$$

Конгруэнция Сушко является наибольшей конгруэнцией, содержащейся в отношении Фреге, [Font et al., 2003, p. 28].

(На матрице Линденбаума $\mathcal{M}_T = \langle \Phi^*, T \rangle$ отношение Фреге обозначают ΛT .

$$\Lambda T = \{ (\varphi, \psi) : T, \varphi \vdash \psi \text{ и } T, \psi \vdash \varphi \}.$$

Оно удовлетворяет следующему условию: $(\varphi, \psi) \in \Lambda T$ и $\varphi \in T \Rightarrow \psi \in T$ [Font et al., 2003, p. 26].

Конгруэнция Сушко на матрице Линденбаума $\mathcal{M}_T = \langle \Phi^*, T \rangle$ определяется следующим образом:

$$\Sigma T = \{ (\varphi, \psi) : \forall \chi \in \Phi \forall p \in \Pi (T, \chi(\varphi/p) \vdash \chi(\psi/p) \text{ и } T, \chi(\psi/p) \vdash \chi(\varphi/p)) \},$$

здесь $\chi(\varphi/p)$ — результат подстановки формулы φ в формулу χ вместо переменной p [Font et al., 2003, p. 27].

Аналогично можно определить конгруэнцию Лейбница:

$$\Omega T = \{ (\varphi, \psi) : \forall \chi \in \Phi \forall p \in \Pi (\chi(\varphi/p) \in T \Leftrightarrow \chi(\psi/p) \in T) \}.$$

Отметим, что для любой теории T выполняется, что $\Sigma T \subseteq \Lambda T$.)

Матрицу $\mathcal{M} = \langle \mathcal{A}, D \rangle$ будем называть *редуцированной* (редуцированной по конгруэнции Сушко), если $\mathcal{M} = \mathcal{M}/\Sigma\mathcal{M}$.

Лемма 5. Пусть матрица $\mathcal{M} = \langle \mathcal{A}, D \rangle$ — не более чем счетная редуцированная матрица логики $\mathbf{L}$. Тогда существует такая теория T , что существует строгий гомоморфизм f матрицы Линденбаума $\mathcal{M}_T$ на матрицу $\mathcal{M}$.

Доказательство. Как известно [Czelakowski, 2003, p. 211, Prop. 5.1], для каждой счетной редуцированной матрицы $\mathcal{M}$, которая является моделью логики $\mathbf{L}$, существует такая теория T , что существует строгий гомоморфизм $g : \mathcal{M}_T/\Sigma T \rightarrow \mathcal{M}$. Поскольку в доказательстве этого утверждения факт счетности использовался только для обоснования возможности сюръективного гомоморфизма $h : \Phi^* \rightarrow \mathcal{A}$, то утверждение останется истинным

и в случае конечности матрицы $\mathcal{M}$. Также известно [Czelakowski, 2003, р. 201, Prop. 2.2], что канонический гомоморфизм $h : \mathcal{M}_T \rightarrow \mathcal{M}_T/\Sigma T$, который каждой формуле φ сопоставляет класс всех эквивалентных ей по ΣT формул, является строгим. Несложно показать, что композиция строгих гомоморфизмов h и g является строгим гомоморфизмом, $hg : \mathcal{M}_T \rightarrow \mathcal{M}$. Таким образом, $f = hg$. ■

Лемма 6. Пусть матрица $\mathcal{M} = \langle \mathcal{A}, D \rangle$ — не более чем счетная редуцированная характеристическая матрица логики $\mathbf{L}$. Тогда существует такая теория T , что матрица Линденбаума $\mathcal{M}_T$ полна.

Доказательство. В силу Леммы 5 существует строгий гомоморфизм $f : \mathcal{M}_T \rightarrow \mathcal{M}$. Так как матрица $\mathcal{M}$ полна, то в силу Леммы 4 матрица $\mathcal{M}_T$ тоже является полной. ■

Теорема 5. Пусть матрица $\mathcal{M} = \langle \mathcal{A}, D \rangle$ — не более чем счетная характеристическая матрица логики $\mathbf{L}$. Тогда существует такая теория T , что матрица Линденбаума $\mathcal{M}_T$ полна.

Доказательство. Поскольку конгруэнция $\Omega\mathcal{M}$ [Czelakowski, 2003, р. 191, Theorem 0.6] существует для любой матрицы логики $\mathbf{L}$, то существует и конгруэнция $\Sigma\mathcal{M}$. Как говорилось выше, сюръективный гомоморфизм $h : \mathcal{M} \rightarrow \mathcal{M}/\Sigma\mathcal{M}$ является строгим, и значит, в силу Леммы 3 матрица $\mathcal{M}/\Sigma\mathcal{M}$ является характеристической редуцированной матрицы логики $\mathbf{L}$. Тогда в силу Леммы 6 матрица $\mathcal{M}_T$ полна. ■

Из Теоремы 5 следует

Теорема 6. Для логики $\mathbf{L}$ существует не более чем счетная характеристическая матрица тогда и только тогда, когда существует такая теория T , что матрица Линденбаума $\mathcal{M}_T$ полна.

Если $\mathcal{M}_T = \langle \Phi^*, T \rangle$ — характеристическая матрица Линденбаума для логики $\mathbf{L}$, то теорию T будем называть *характеристической теорией* логики $\mathbf{L}$.

5. Обращение подстановки и полнота матрицы Линденбаума

Обращением подстановки ε будем называть операцию взятия прообраза множества формул для отображения ε . Обозначать эту операцию будем посредством ε^{-1} . Таким образом, для любого множества формул Γ имеем:

$$\varepsilon^{-1}(\Gamma) = \{\varphi : \varepsilon\varphi \in \Gamma\}.$$

Несложно показать, что обращение подстановки монотонно, то есть верно, что $\forall \varepsilon \in \mathbf{E} \ (\Gamma \subseteq \Delta \Rightarrow \varepsilon^{-1}(\Gamma) \subseteq \varepsilon^{-1}(\Delta))$. Кроме того, верно, что $\varepsilon \varepsilon^{-1}(\Gamma) \subseteq \Gamma$ и $\Gamma \subseteq \varepsilon^{-1}(\varepsilon \Gamma)$.

Пусть Υ — теория логики $\mathbf{L}$. Всякой теории T сопоставим множество $\mathbf{E}^T = \{\varepsilon : \varepsilon T \subseteq \Upsilon\}$. Если Υ — характеристическая теория и матрица $\mathcal{M}_\Upsilon$ является характеристической для логики $\mathbf{L}$, то несложно показать, что для любой непротиворечивой теории T множество $\mathbf{E}^T \neq \emptyset$.

В силу Леммы Сушко [Wójcicki, 1988, р. 35, Lemma 1.4.1] для любой логики $\mathbf{L}$ верно, что $\forall T \in Th(\mathbf{L}) \ \forall \varepsilon \in \mathbf{E} \ (\varepsilon^{-1}(T) \in Th(\mathbf{L}))$.

Лемма 7. *Если Υ — характеристическая теория логики $\mathbf{L}$, то для любой теории T верно, что $T = \bigcap \{\varepsilon^{-1}(\Upsilon) : \varepsilon \in \mathbf{E}^T\}$.*

Доказательство. Для любой $\varepsilon \in \mathbf{E}^T$ выполняется включение $\varepsilon T \subseteq \Upsilon$, следовательно, $T \subseteq \varepsilon^{-1}(\varepsilon T) \subseteq \varepsilon^{-1}(\Upsilon)$. Таким образом, получаем включение $T \subseteq \bigcap \{\varepsilon^{-1}(\Upsilon) : \varepsilon \in \mathbf{E}^T\}$.

Пусть $\varphi \notin T$. В силу полноты матрицы $\mathcal{M}_\Upsilon$ существует такая подстановка $\sigma \in \mathbf{E}^T$, что $\sigma \varphi \notin \Upsilon$. Следовательно, $\varphi \notin \sigma^{-1}(\Upsilon)$, и значит, $\varphi \notin \bigcap \{\varepsilon^{-1}(\Upsilon) : \varepsilon \in \mathbf{E}^T\}$. ■

Лемма 8. *Пусть Υ — такая теория логики $\mathbf{L}$, что для любой теории T верно, что $T = \bigcap \{\varepsilon^{-1}(\Upsilon) : \varepsilon \in \mathbf{E}^T\}$. Тогда Υ — характеристическая теория этой логики.*

Доказательство. Пусть для некоторого множества формул Γ и формулы φ верно, что $\forall \varepsilon \in \mathbf{E}^{C(\Gamma)} \ (\varepsilon \varphi \in \Upsilon)$. В этом случае мы имеем, что $\varphi \in \bigcap \{\varepsilon^{-1}(\Upsilon) : \varepsilon \in \mathbf{E}^{C(\Gamma)}\} = C(\Gamma)$. Таким образом, $\Gamma \vdash \varphi$. ■

Из Леммы 7 и Леммы 8 непосредственно следует

Теорема 7. *Теория Υ является характеристической теорией логики $\mathbf{L}$ (а матрица Линденбаума $\mathcal{M}_\Upsilon = \langle \Phi^*, \Upsilon \rangle$ является характеристической матрицей логики $\mathbf{L}$) тогда и только тогда, когда для любой теории T верно, что $T = \bigcap \{\varepsilon^{-1}(\Upsilon) : \varepsilon \in \mathbf{E}^T\}$.*

Теорию будем называть *полной*, если она непротиворечива и максимальна в решетке теорий.

Теорема 8. *Пусть теория Υ является характеристической теорией логики $\mathbf{L}$ и теория T является полной теорией этой логики. Тогда существует такая подстановка $\varepsilon \in \mathbf{E}^T$, что $T = \varepsilon^{-1}(\Upsilon)$.*

Доказательство. В силу Леммы 7 $T = \bigcap \{\varepsilon^{-1}(\Upsilon) : \varepsilon \in \mathbf{E}^T\}$. Таким образом, для любой подстановки $\varepsilon \in \mathbf{E}^T$ имеем, что $T \subseteq \varepsilon^{-1}(\Upsilon)$. Поскольку T — максимальная, то либо $T = \varepsilon^{-1}(\Upsilon)$, либо $\varepsilon^{-1}(\Upsilon) = \Phi$. Так как T — непротиворечивая теория, то существует такая подстановка $\varepsilon \in \mathbf{E}^T$, что $T = \varepsilon^{-1}(\Upsilon)$. ■

6. Классическая логика

Классическая логика — одна из наиболее известных и хорошо изученных логик. В качестве иллюстрации вышеизложенных фактов рассмотрим некоторые следствия из них для этой логики.

Классическую логику будем считать определенной в произвольном языке с полной системой связок. При этом будем использовать символы булевых связок стандартного языка для обозначения формул, выражающих эти функции в данном языке. (Так, например, в языке с одной связкой (штрихом Шеффера) отрицание переменной будет иметь вид $\neg p = p|p$.) Полной теорией классической логики, как обычно, будем называть теорию, которая для любой формулы содержит либо эту формулу, либо ее отрицание. Заметим, что всякая полная теория классической логики является максимальной.

Воспользовавшись аналогом Леммы 1.12 [Мендельсон, 1984, с. 43] для данного языка, несложно показать, что любая полная теория классической логики аксиоматизируется некоторым множеством литералов всех переменных. (*Литералом* переменной мы, как обычно, называем переменную и отрицание переменной.)

Рассмотрим матрицу $\mathcal{M}_{\mathcal{B}} = \langle \mathcal{B}, \{1\} \rangle$, определенную на двухэлементной булевой алгебре $\mathcal{B}$. Для любой теории T рассмотрим множество оценок $\Theta_{\mathcal{B}}^T = \{\nu : \nu(\varphi) = 1 \Leftrightarrow \varphi \in T\}$. Несложно показать, что для любой полной теории T имеем, что $|\Theta_{\mathcal{B}}^T| = 1$.

Как известно, матрица $\mathcal{M}_{\mathcal{B}}$ полна для классической логики. Поскольку для матриц Линденбаума классической логики конгруэнция Сушко совпадает с отношением Фреге, то в силу Леммы 5 существует такая теория T , что существует строгий гомоморфизм f матрицы Линденбаума $\mathcal{M}_T$ на матрицу $\mathcal{M}_{\mathcal{B}}$. Мы можем утверждать об этой теории следующее:

Лемма 9. *Для теории T существует строгий гомоморфизм f матрицы Линденбаума $\mathcal{M}_T$ на матрицу $\mathcal{M}_{\mathcal{B}}$ тогда и только тогда, когда T — полная теория.*

Доказательство. Пусть теория T полна. Рассмотрим отображение $\nu : \Pi \rightarrow \mathcal{M}_{\mathcal{B}}$ такое, что $\forall p \in \Pi (\nu(p) = 1 \Leftrightarrow p \in T)$. Несложно заметить, что отображение ν является оценкой. Гомоморфное продолжение оценки ν

на множество всех формул обозначим f . Таким образом, для любой формулы φ имеем, что $f(\varphi) = \nu(\varphi)$.

Докажем, что для любой формулы φ верно, что $f(\varphi) = 1 \Leftrightarrow \varphi \in T$. Пусть A — множество литералов, аксиоматизирующих теорию T . Если формула $\varphi \in T$, то существует такое конечное $\Gamma \subseteq A$, что $\Gamma \vdash \varphi$. Так как $\nu(\Gamma) = 1$, то $\nu(\varphi) = 1$.

Пусть $\nu(\varphi) = 1$. Если $\varphi \notin T$, то существует такая оценка μ , что $\mu(A) = 1$ и $\mu(\varphi) = 0$. Так как $\mu(A) = 1$, то $\mu = \nu$.

Таким образом, f — строгий гомоморфизм матрицы $\mathcal{M}_T$ на матрицу $\mathcal{M}_B$ (и $\Theta_B^T = \{\nu\}$).

Пусть теперь для теории T существует строгий гомоморфизм f матрицы $\mathcal{M}_T$ на матрицу $\mathcal{M}_B$. Покажем, что теория T полна. Допустим, что для некоторой формулы φ верно, что $\varphi \notin T$. Тогда $f(\varphi) = 0$. Так как $f(\neg\varphi) = \neg(f(\varphi)) = 1$, то $\neg\varphi \in T$. ■

Из Лемм 5 и 9 следует

Теорема 9. *Всякая полная теория классической логики является характеристической теорией.*

Рассмотрим теперь особенности действия обращения подстановки на теории классической логики.

В силу Теорем 7 и 9 для любой теории T классической логики и любой ее полной теории Υ верно, что $T = \bigcap \{\varepsilon^{-1}(\Upsilon) : \varepsilon \in \mathbf{E}^T\}$.

Лемма 10. *Если T — непротиворечивая теория классической логики, то для любой подстановки ε теория $\varepsilon^{-1}(T)$ непротиворечива.*

Доказательство. Допустим, что теория $\varepsilon^{-1}(T)$ противоречива. Тогда для некоторой формулы φ верно, что формула $\varphi \wedge \neg\varphi \in \varepsilon^{-1}(T)$. В этом случае $\varepsilon(\varphi \wedge \neg\varphi) \in T$, но $\varepsilon(\varphi \wedge \neg\varphi) = \varepsilon\varphi \wedge \neg\varepsilon\varphi$. ■

Из доказательства Теоремы 8, с учетом Леммы 9 следует, что для классической логики верно более сильное утверждение, чем Теорема 8.

Теорема 10. *Пусть теория Υ является характеристической теорией классической логики и T — некоторая полная теория. Тогда для любой подстановки $\varepsilon \in \mathbf{E}^T$ верно, что $T = \varepsilon^{-1}(\Upsilon)$.*

Из Теорем 8, 9 и 10 следует, что если T_1 и T_2 — полные теории, то для любой подстановки ε , такой, что $\varepsilon(T_1) \subseteq T_2$, верно, что $T_1 = \varepsilon^{-1}(T_2)$.

Рассмотрим пример такой подстановки. Пусть T_1 и T_2 — некоторые полные теории и σ — подстановка, которую определим следующим образом: для любой $p \in \Pi$

$$\sigma(p) = \begin{cases} p, & \text{если } (p \in T_1 \Leftrightarrow p \in T_2) \\ \neg p, & \text{если иначе.} \end{cases} \quad (1)$$

Утверждение 1. $\sigma(T_1) \subseteq T_2$.

Доказательство. Обозначим посредством A_1 множество литералов, аксиоматизирующих теорию T_1 . Покажем, что $\sigma A_1 \subseteq T_2$.

Очевидно, что литералы всех переменных, для которых выполняется первое условие из (1), принадлежат теории T_2 .

Пусть $p \in T_1$ и $p \notin T_2$; тогда $\sigma p = \neg p \in T_2$, так как T_2 — полная теория.

Пусть $p \notin T_1$ и $p \in T_2$; тогда $\neg p \in T_1$ и $\sigma(\neg p) = \neg\neg p$. Так как $p \vdash \neg\neg p$, то $\sigma(\neg p) \in T_2$.

Пусть формула $\varphi \in T_1$. Тогда существует такое конечное подмножество $\Gamma \subseteq A_1$, что $\Gamma \vdash \varphi$. В силу структурности следования имеем, что $\sigma\Gamma \vdash \sigma\varphi$. Таким образом, $\sigma\varphi \in T_2$. ■

Заметим, что в силу симметричности определения подстановки σ имеем также, что $\sigma(T_2) \subseteq T_1$. Отсюда следует, что для любых полных теорий T_1 и T_2 верны равенства: $T_1 = \sigma^{-1}(T_2)$ и $T_2 = \sigma^{-1}(T_1)$.

Рассмотрим вопрос о существовании характеристических теорий классической логики, которые не являются полными теориями. Посредством Cl обозначим множество всех тавтологий классической логики.

Теорема 11. Минимальная матрица Линденбаума $M_{Cl} = \langle \Phi^*, Cl \rangle$ является характеристической матрицей классической логики.

Доказательство. Пусть для некоторого множества формул Γ и формулы φ верно, что $\Gamma \not\vdash \varphi$. Тогда существует такая оценка ν , что $\nu(\Gamma) = 1$ и $\nu(\varphi) = 0$. Определим подстановку ε следующим образом:

$$\varepsilon(p) = \begin{cases} p \vee \neg p, & \text{если } \nu(p) = 1 \\ p \wedge \neg p, & \text{если } \nu(p) = 0. \end{cases}$$

В этом случае $\varepsilon\Gamma \subseteq Cl$ и $\varepsilon\varphi \notin Cl$. ■

Следствие 1. Всякая полная теория T классической логики является прообразом множества всех тавтологий при следующей подстановке:

$$\varepsilon(p) = \begin{cases} p \vee \neg p, & \text{если } p \in T \\ p \wedge \neg p, & \text{если } p \notin T. \end{cases}$$

7. Заключение

Таким образом, вследствие существования характеристических матриц Линденбаума вопросы полноты зависят от наличия у теорий логики некоторых свойств, связанных с операцией обращения подстановки (а следовательно, и самой подстановки). Эту связь выражает следующая теорема, которая является непосредственным следствием Теорем 4 и 5.

Теорема 12. *Для логики $\mathbf{L}$ существует не более чем счетная характеристическая матрица тогда и только тогда, когда существует теория Υ такая, что для любой теории T верно, что $T = \bigcap \{\varepsilon^{-1}(\Upsilon) : \varepsilon \in \mathbf{E}^T\}$.*

Возникает предположение, что исследования свойств теорий, связанных с операцией обращения подстановки, позволит по-новому взглянуть на роль основных конгруэнций, таких как конгруэнции Лейбница и Сушко, в построении классов полных моделей.

Например, для классической логики известно, что отношение Фреге ΛCl является конгруэнцией [Расёва и др., 1972, с. 283, § 10]. Также известно, что матрица $\langle \Phi^*/\Lambda Cl, Cl/\Lambda Cl \rangle$ (называемая *матрицей Линденбаума–Тарского*) полна [Расёва и др., 1972, с. 299, Теорема 2.2]. Заметим, что в силу изложенных в нашей работе фактов это непосредственно следует из полноты матрицы $\langle \Phi^*, Cl \rangle$.

В связи с изложенными в работе фактами возникает ряд открытых вопросов.

1. Практически для всех популярных пропозициональных логик полные теории играют значительную роль в вопросах доказательства полноты тех или иных моделей для этих логик. Верно ли, что полные теории оказываются характеристическими для всех пропозициональных логик?

2. Существуют ли логики, в которых существует такая характеристическая теория Υ , что для любой теории T существует такая подстановка $\varepsilon \in \mathbf{E}^T$, что $T = \varepsilon^{-1}(\Upsilon)$?

3. Для каких классов логик верно, что для любой их характеристической теории Υ , любой полной теории T и любой подстановки $\varepsilon \in \mathbf{E}^T$ верно, что $T = \varepsilon^{-1}(\Upsilon)$?

4. Для каких логик существуют такие характеристические матрицы, что они являются образами строгих гомоморфизмов всех матриц из расслоения Линденбаума?

5. Верно ли, что для любой логики, имеющей матрицу с единственным выделенным элементом, множество всех тавтологий этой логики является ее характеристической теорией?

Литература

- Мальцев, 1970 – *Мальцев А.И.* Алгебраические системы. М.: Наука, 1970. 392 с.
- Мендельсон, 1984 – *Мендельсон Э.* Введение в математическую логику. М.: Наука, 1984. 320 с.
- Расёва и др., 1972 – *Расёва Е., Сикорский Р.* Математика метаматематики. М.: Наука, 1972. 592 с.
- Czelakowski, 2003 – *Czelakowski J.* The Suszko Operator. Part I // *Studia Logica*. 2003. Vol. 74. P. 181–231.
- Font et al., 2003 – *Font J.M., Jansana R., and Pigozzi D.* A Survey of Abstract Algebraic Logic // *Studia Logica*. 2003. Vol. 74. P. 13–97.
- Wójcicki, 1984 – *Wójcicki R.* Lectures on Propositional Calculi. Wrocław: Ossolineum, 1984. 179 p.
- Wójcicki, 1988 – *Wójcicki R.* Theory of Logical Calculi: Basic Theory of Consequence Operations. Dordrecht: Kluwer, 1988. 474 p.

IGOR A. GORBUNOV

Characteristic theories and inversion of substitution

Igor A. Gorbunov

Tver State University,
33 Zhelyabova St., Tver, 170100, Russian Federation.
E-mail: i_gorbunov@mail.ru

Abstract:

A Lindenbaum matrix of some logic is a logical matrix defined on the algebra of all formulas of this logic. The set of designated elements of this matrix is some theory of this logic. The set of all such matrices is called the Lindenbaum bundle. The Lindenbaum bundle of some logic is a characteristic set of logical matrices for this logic. However, there are logics, such as classical logic, that are characterized by a single matrix. In this paper we obtain a number of criteria that logic has a characteristic matrix.

It is shown that the question of the presence of characteristic matrix is associated with the operation of inversion of substitution for a certain type of substitutions. Here under the operation of inversion of substitution we mean taking preimages of some set of formulas for some substitution.

The following criterion for the presence of a characteristic matrix for a logic is obtained: for a given logic there is no more than a countable characteristic matrix if, and only if, there is a theory for which the Lindenbaum matrix is a characteristic logical matrix of this logics. In obtaining this criterion, some properties of strict homomorphisms were used. The concept of characteristic theory is introduced, that is, such a theory for which Lindenbaum matrix are characteristic matrices.

As follows from the Lemma of Suszko's, for any structural logic, the set of all theories of this logic is closed under counterimages of substitutions. In this paper, we show that the theory T is a characteristic theory if, and only if, any consistent theory is the intersection of all counterimages of T obtained by substitutions mapping this theory into T . Thus, it turns out that a logic has a characteristic matrix if, and only if, there is such a theory T such that any consistent theory is the intersection of all counterimages of T that are obtained by substitutions mapping this theory into T .

As an illustration of the facts obtained in this paper, the characteristics theories of classical logic are considered. It is proved that any complete theory of classical logic is a characteristic theory. It is noticed that, any complete theory is a counterimage of some characteristic theory under some substitution.

Keywords: Lindenbaum matrices, characteristic matrices, inversion of substitution, complete theory, classical logic

For citation: Gorbunov I.A. "Kharakteristicheskie teorii i obrashchenie podstanovki" [Characteristic theories and inversion of substitution], *Logicheskie Issledovaniya / Logical Investigations*, 2019, Vol. 25, No. 2, pp. 9–25. DOI: 10.21146/2074-1472-2019-25-2-9-25 (In Russian)

Acknowledgements. The paper is supported by Russian Foundation for Basic Research, projects №17-03-00818-OGN and №18-011-00869-a.

References

- Czelakowski, 2003 – Czelakowski, J. “The Suszko Operator. Part I”, *Studia Logica*, 2003, Vol. 74, pp. 181–231.
- Font et al., 2003 – Font, J.M., Jansana, R., and Pigozzi, D. “A Survey of Abstract Algebraic Logic”, *Studia Logica*, 2003, Vol. 74, pp. 13–97.
- Mal’tsev, 1970 – Mal’tsev, A.I. *Algebraicheskie sistemy* [Algebraic system], Moscow: Nauka, 1970. 392 pp. (In Russian)
- Mendelson, 1964 – Mendelson, D. *Introduction to Mathematical Logic*, Princeton, New Jersey, Toronto, New York, London: D. van Nostrand Company, YNC., 1964. 320 pp.
- Rasiowa, 1963 – Rasiowa, H., Sikorski, R. *The Mathematics of Metamathematics*, Warszawa: Państwowe Wydawnictwo Naukowe, 1963. 529 pp.
- Wójcicki, 1984 – Wójcicki, R. *Lectures on Propositional Calculi*, Wrocław: Ossolineum, 1984. 179 pp.
- Wójcicki, 1988 – Wójcicki, R. *Theory of Logical Calculi: Basic Theory of Consequence Operations*. Dordrecht: Kluwer, 1988. 474 pp.