Неклассическая логика
Non-classical Logic

Л.Ю. ДЕВЯТКИН

**О подлинно паранепротиворечивых
и подлинно парapolных многозначных логиках**

Леонид Юрьевич Девяткин

Институт философии РАН.

Российская Федерация, 109240, г. Москва, ул. Гончарная, д. 12, стр. 1.

E-mail: deviatkin@iph.ras.ru

Аннотация: Статья посвящена анализу нескольких классов паранепротиворечивых и парapolных логик на примере трехзначных и четырехзначных логик, сохраняющих классические истинностные значения. Результаты, представленные в статье, можно разделить на три группы. Первая группа результатов касается паранепротиворечивых логик. Показано, что все трехзначные подлинно паранепротиворечивые логики являются логиками формальной противоречивости, а все трехзначные логики формальной противоречивости, расширяющие позитивный фрагмент классической логики, являются языковыми вариантами подлинно паранепротиворечивых логик. Приводятся примеры четырехзначных подлинно паранепротиворечивых логик, которые не являются логиками формальной противоречивости. Найден ряд необходимых условий, которым должны соответствовать четырехзначные матрицы подлинно паранепротиворечивых логик, чтобы задаваемые этими матрицами логики не являлись логиками формальной противоречивости. Вторая группа результатов касается парapolных логик. Показано, что все трехзначные подлинно парapolные логики являются логиками формальной неопределенности, а все трехзначные логики формальной неопределенности, расширяющие дуально-позитивный фрагмент классической логики, являются языковыми вариантами подлинно парapolных логик. Приводятся примеры четырехзначных подлинно парapolных логик, которые не являются логиками формальной неопределенности. Найден ряд необходимых условий, которым должны соответствовать четырехзначные матрицы подлинно парapolных логик, чтобы задаваемые этими матрицами логики не являлись логиками формальной неопределенности. Третья группа результатов касается паранормальных логик. Приводится ряд необходимых условий, которым должны соответствовать четырехзначные матрицы подлинно паранормальных логик, чтобы они не являлись ни логиками формальной противоречивости, ни логиками формальной неопределенности. Для паранормальных расширений «полезной четырехзначной логики» Белнапа даются также необходимые и достаточные условия, для того чтобы они были максимальными подлинно паранормальными логиками и в то же время не являлись ни логиками формальной противоречивости, ни логиками формальной неопределенности.

Ключевые слова: паранепротиворечивость, парapolнота, многозначные логики, логические матрицы, закон непротиворечия, формальная противоречивость, формальная неопределенность, функциональные свойства

Для цитирования: Десяткин Л.Ю. О подлинно паранепротиворечивых и подлинно парapolных многозначных логиках // Логические исследования / Logical Investigations. 2019. Т. 25. № 2. С. 26–45. DOI: 10.21146/2074-1472-2019-25-2-26-45

Введение

Базовый критерий, которому должна соответствовать паранепротиворечивая логика, — это отсутствие в ней принципа *ex contradictione (sequitur) quodlibet* (ECQ): $\alpha, \neg\alpha \vdash \beta$. Однако, как отмечают многие авторы, такое определение паранепротиворечивости слишком абстрактно (см., например, [Urbas, 1990], [Béziau, 2000]).

В этой связи актуальна проблема выделения полезных классов паранепротиворечивых логик, обладающих более четко определенными свойствами. Такие классы возникают, когда на рассматриваемые системы накладывают дополнительные условия. В качестве примеров можно привести строго паранепротиворечивые логики [Urbas, 1990], логики формальной противоречивости [Carnielli et al., 2002], идеальные паранепротиворечивые логики [Arieli et al., 2011b], подлинно паранепротиворечивые логики [Béziau, Franceschetto, 2015]. Однако это, в свою очередь, приводит к вопросу о соотношении между различными классами паранепротиворечивых логик.

В данной статье мы рассматриваем соотношение между логиками формальной противоречивости и подлинно паранепротиворечивыми логиками. Логика **L** называется *подлинно паранепротиворечивой*, если в ней отвергается не только ECQ, но и закон непротиворечия (NC): $\neg(\alpha \wedge \neg\alpha)$ [Béziau, Franceschetto, 2015], [Béziau, 2016]. Логика **L** называется *логикой формальной противоречивости* (сокращенно — **LFI**), если она отвечает двум условиям: (1) $p, \neg p \not\vdash q$, то есть в **L** отвергается ECQ; (2) существует такое множество формул $\bigcirc(p)$, зависящих в точности от единственной пропозициональной переменной p , что (i) $\bigcirc(\alpha), \alpha \not\vdash \beta$; (ii) $\bigcirc(\alpha), \neg\alpha \not\vdash \beta$; (iii) $\bigcirc(\alpha), \alpha, \neg\alpha \vdash \beta$ для любых формул α и β [Carnielli et al., 2007], [Carnielli, Coniglio, 2016].

Работы [Marcos, 2005] и [Brunner, Carnielli, 2005] посвящены анализу феномена дуальности между паранепротиворечивыми и парapolными логиками. В рамках выбранного авторами подхода парapolные логики оказываются, в определенном смысле, изоморфны паранепротиворечивым. Это позволяет легко переносить концепции и результаты с паранепротиворечивых логик на парapolные. Однако переносятся также и проблемы, в том

числе проблема поиска классов полезных парapolных логик и соотношения между такими классами. В статье [Marcos, 2005] дано определение логик формальной неопределенности, дуальных логикам формальной противоречивости. В настоящей работе, опираясь на понятие дуальности, мы определяем подлинно парapolные логики и устанавливаем соотношение между такими логиками и логиками формальной неопределенности.

Отдельным направлением в рамках исследований, посвященных паранепротиворечивым логикам, является изучение логик, которые являются паранепротиворечивыми и парapolными одновременно. Знаменитым примером такой логики является «полезная четырехзначная логика» **FDE** [Belnap, 1977]. В заключительной части работы мы сравниваем класс логик, являющихся одновременно логиками формальной противоречивости и формальной неопределенности, с классом логик, являющихся одновременно подлинно паранепротиворечивыми и подлинно парapolными. В частности, мы даем описание новых расширений **FDE**, обладающих рядом интересных свойств.

1. Базовые определения

Пропозициональный язык $\mathcal{L} = \langle L, F \rangle$ рассматриваем как алгебру, свободно порожденную бесконечным множеством пропозициональных переменных $Var(L)$.

Логическое следование $\vdash$ над $\mathcal{L}$ определяем как множество пар $\langle X, Y \rangle$, где $X, Y \subseteq L$, замкнутое относительно следующих свойств:

- Если $X \cap Y \neq \emptyset$, то $X \vdash Y$ (рефлексивность)
- Если $X \vdash Y$ и $X \subseteq X'$, $Y \subseteq Y'$, то $X' \vdash Y'$ (монотонность)
- Если для всех $Z \subseteq S$ имеет место $X \cup Z \vdash Y \cup (S \setminus Z)$, то $X \vdash Y$ (сечение)

Если $\vdash$ также замкнуто относительно всех эндоморфизмов $\mathcal{L}$, называем такое следование *структурным*. Когда $\vdash$ — структурное логическое следование, называем пару $\langle \mathcal{L}, \vdash \rangle$ *пропозициональной логикой*.

Называем *логической матрицей* структуру $\mathcal{M} = \langle \mathcal{A}, D \rangle$, где $\mathcal{A} = \langle A, F \rangle$ — алгебра, и $D \subseteq A$. Если $\mathcal{L}$ and $\mathcal{A}$ подобны, называем $\mathcal{M}$ *матрицей для $\mathcal{L}$* . В этом случае гомоморфизм h из $\mathcal{L}$ в $\mathcal{A}$ называем *оценкой $\mathcal{L}$ в $\mathcal{M}$* . Матричное следование определяем следующим образом:

$$Cn(\mathcal{M}) = \{ \langle X, Y \rangle \mid \forall h (h(X) \subseteq D \Rightarrow h(Y) \cap D \neq \emptyset) \}.$$

Упорядоченную пару $\mathbf{L} = \langle \mathcal{L}, Cn(\mathcal{M}) \rangle$ называем *многозначной пропозициональной логикой*.

Пусть f — операция на A , и $A' \subseteq A$. Если $f(a_1, \dots, a_n) \in A'$ для всех таких наборов $(a_1, \dots, a_n)$, что $a_i \in A'$ при каждом $1 \leq i \leq n$, говорим, что f *сохраняет множество A'* . Говорим, что матрица $\mathcal{M}$ сохраняет множество A' , если каждая операция этой матрицы сохраняет множество A' .

Примем следующую нотационную конвенцию: пропозициональная связка языка $\mathcal{L}$ и соответствующая ей операция матрицы $\mathcal{M}$ для языка $\mathcal{L}$ будут обозначаться одним и тем же символом.

2. Паранепротиворечивые логики

Этот раздел посвящен соотношению между понятиями подлинной паранепротиворечивости и формальной противоречивости в трехзначных и четырехзначных логиках. Следуя [Arieli et al., 2011a], принимаем следующие минимальные условия, при которых функция многозначной матрицы может трактоваться как паранепротиворечивое отрицание: $a \in D$, $\neg a \notin D$, $b \notin D$, $\neg b \in D$, $c \in D$, $\neg c \in D$ для некоторых $a, b, c \in A$. Не теряя общности, в трехзначном случае будем считать, что $a = 1$, $b = 0$, $c = 2$. Далее, определение подлинно паранепротиворечивой логики требует выполнения условия: $h(\neg(p \wedge \neg p)) \notin D$ для некоторой оценки h . Следуя [Béziau, Franceschetto, 2015] и [Béziau, 2016], полагаем также, что конъюнкция в подлинно паранепротиворечивой логике ведет себя классическим образом, то есть $\alpha \wedge \beta \vdash \alpha$; $\alpha \wedge \beta \vdash \beta$; $\alpha, \beta \vdash \alpha \wedge \beta$, или — эквивалентно в случае многозначных логик — $h(\alpha \wedge \beta) \in D \Leftrightarrow h(\alpha) \in D \ \& \ h(\beta) \in D$. В этом случае можно доказать следующую теорему.

Теорема 1. *Каждая трехзначная подлинно паранепротиворечивая логика является логикой формальной противоречивости.*

Доказательство. В силу требований, предъявляемых к отрицанию и конъюнкции, $\neg(0 \wedge \neg 0) \in D$ и $\neg(1 \wedge \neg 1) \in D$, поэтому единственная возможность выполнить также $h(\neg(p \wedge \neg p)) \notin D$ состоит в выборе таких $\neg$ и $\wedge$, что $h(\neg(p \wedge \neg p)) = 0$ при $h(p) = 2$. Ясно, что в таком случае $\neg(p \wedge \neg p)$ отвечает определению $\bigcirc(p)$. ■

Определение **LF1** таково, что ему может отвечать и логика, язык которой содержит только унарные связки. На практике **LF1** обычно определяются как языковые расширения позитивного фрагмента классической многозначной логики [Carnielli, Coniglio, 2016]. То есть язык **LF1** содержит $\wedge$, $\vee$, $\rightarrow$, свойства которых идентичны классическому случаю. Для многозначных логик это означает, что матричные операции, соответствующие данным связкам, отвечают следующим условиям:

- $x \wedge y \in D \Leftrightarrow x \in D$ и $y \in D$;
- $x \vee y \notin D \Leftrightarrow x \notin D$ и $y \notin D$;
- $x \rightarrow y \notin D \Leftrightarrow x \in D$ и $y \notin D$.

Кроме того, обычно предполагается, что операции сохраняют классические истинностные значения: $h(\Phi(p_1, \dots, p_n)) \in \{0, 1\}$, когда $h(p_i) \in \{0, 1\}$ для всех $i \in \{1, \dots, n\}$. Заметим, что такой подход к построению многозначных паранепротиворечивых логик не ограничен логиками формальной противоречивости [Arieli, Avron, 2015].

Следуя этим конвенциям, получаем следующие варианты табличных определений для $\wedge$, $\vee$, $\rightarrow$ и оператора $\circ$, выступающего в роли $\bigcirc$ в трехзначной логике:

$\wedge$	0	1	2	$\vee$	0	1	2	$\rightarrow$	0	1	2	x	$\circ x$
0	0	0	0	0	0	1	1 2	0	1	1	1 2	0	1
1	0	1	1 2	1	1	1	1 2	1	0	1	1 2	1	1
2	0	1 2	1 2	2	1 2	1 2	1 2	2	0	1 2	1 2	2	0

Здесь и далее таблицы являются не определениями связок, а схемами таких определений. Нотация $a|b$ обозначает, что необходимо выбрать либо a , либо b при построении табличного определения связки.

Теорема 2. *Каждая трехзначная логика формальной противоречивости $\mathbf{L}$, являющаяся расширением $\mathbf{CPC}^+$, является языковым расширением подлинно паранепротиворечивой логики.*

Доказательство. Достаточно показать, что в матрице $\mathcal{M}$ логики $\mathbf{L}$ определима такая конъюнкция $\dot{\wedge}$, что $\not\models \neg(p \dot{\wedge} \neg p)$. Это всегда можно сделать следующим образом:

$$x \dot{\wedge} y =: ((x \rightarrow (\circ x \wedge x \wedge \neg x)) \rightarrow (\circ x \wedge x \wedge \neg x)) \wedge ((y \rightarrow (\circ y \wedge y \wedge \neg y)) \rightarrow (\circ y \wedge y \wedge \neg y)).$$

■

Если мы примем $\dot{\wedge}$ в качестве базовой конъюнкции, то получим языковой вариант исходной $\mathbf{LFI}$, являющийся подлинно паранепротиворечивой логикой. Таким образом, в трехзначном случае для расширений $\mathbf{CPC}^+$ понятия формальной противоречивости и подлинной паранепротиворечивости, в определенном смысле, совпадают.

Четырехзначный случай существенно отличается от трехзначного. Главное отличие состоит в том, что увеличение числа значений истинности позволяет конструировать подлинно паранепротиворечивые логики, не являющиеся логиками формальной противоречивости.

Теорема 3. Пусть матрица $\mathcal{M} = \langle \{0, 1, 2, 3\}, \wedge, \neg, \{1, 3\} \rangle$, сохраняющая $\{0, 1\}$, задает паранепротиворечивую логику $\mathbf{L}$. Если $2 \wedge 2 = 2$, $3 \wedge 3 = 3$, $\neg 2 = 2$ и $\neg 3 = 3$, то $\mathbf{L}$ — подлинно противоречивая логика, которая не является $\mathbf{LFI}$.

Доказательство. Логика $\mathbf{L}$ является подлинно паранепротиворечивой логикой, так как $\neg(2 \wedge \neg 2) = 2$. Логика $\mathbf{L}$ не является логикой формальной противоречивости, так как $h(\otimes p) = 3$ при $h(p) = 3$ для любой унарной связки $\otimes$, и поэтому условие $\bigcirc(p), p, \neg p \vdash q$ не может быть выполнено никаким $\bigcirc(p)$. ■

Результаты, приведенные ниже, устанавливают более общие свойства четырехзначных логик с двумя выделенными значениями, которые подлинно паранепротиворечивы, но не являются логиками формальной противоречивости. В каждом случае рассматриваем матрицу $\mathcal{M} = \langle \{0, 1, 2, 3\}, F, \{1, 3\} \rangle$, где $\{\wedge, \neg\} \subseteq F$, и все операции в F сохраняют множество $\{0, 1\}$. Кроме того, полагаем, как и в трехзначном случае, что $x \wedge y \in D \Leftrightarrow x \in D \ \& \ y \in D$.

Теорема 4. Пусть матрица $\mathcal{M}$ задает подлинно паранепротиворечивую логику $\mathbf{L}$. Если операции $\{\wedge, \neg\}$ не сохраняют множество $\{3\}$, то $\mathbf{L}$ является логикой формальной противоречивости.

Доказательство. Случай 1. Пусть $3 \wedge 3 = 1$. Пусть $\diamond x =: x \wedge x$. Тогда $\diamond x =: \neg(\diamond x \wedge \neg \diamond x)$ удовлетворяет определению $\bigcirc$. Случай 2. Пусть $\neg(3) = 1$. Пусть $\diamond x =: \neg \neg x$. Снова $\diamond x =: \neg(\diamond x \wedge \neg \diamond x)$ удовлетворяет определению $\bigcirc$. ■

Теорема 5. Пусть матрица $\mathcal{M}$ задает подлинно паранепротиворечивую логику $\mathbf{L}$, не являющуюся $\mathbf{LFI}$. Тогда $\neg 2 = 0$ и $2 \wedge 0 = 0 \wedge 2 = 2$, либо $\neg 2 = 2$ и $2 \wedge 2 = 2$.

Доказательство. В силу Теоремы 4 $\{\wedge, \neg\}$ сохраняет $\{3\}$. Согласно допущению, в $\mathbf{L}$ имеет место $\not\models \neg(p \wedge \neg p)$. В силу определения $\{\wedge, \neg\}$ $\neg(x \wedge \neg x) = 1$ для всех $x \in \{1, 0\}$. Так как $\{\wedge, \neg\}$ сохраняет $\{3\}$, $\neg(3 \wedge \neg 3) = 3$. Следовательно, $\neg(x \wedge \neg x) \notin D$, только если $\neg(2 \wedge \neg 2) \notin D$. По определению $\wedge$, $2 \wedge x \notin D$ для всех x . Так как $\neg 0 = 1$, получаем, что $2 \wedge \neg 2 = 2$. Следовательно, $\neg 2 = 0$ и $2 \wedge 0 = 0 \wedge 2 = 2$, либо $\neg 2 = 2$ и $2 \wedge 2 = 2$. ■

В силу Теорем 4 и 5, если матрица $\mathcal{M}$ задает подлинно паранепротиворечивую логику $\mathbf{L}$, не являющуюся $\mathbf{LFI}$, то $\wedge$ отвечает схеме $\wedge_1$ и $\neg$ есть $\neg_1$, либо $\wedge$ отвечает схеме $\wedge_2$ и $\neg$ есть $\neg_2$:

$\wedge_1$	0	1	2	3	x	$\neg_1 x$
0	0	0	2	0 2	0	1
1	0	1	0 2	1 3	1	0
2	2	0 2	0 2	0 2	2	0
3	0 2	1 3	0 2	3	3	3

$\wedge_2$	0	1	2	3	x	$\neg_2 x$
0	0	0	0 2	0 2	0	1
1	0	1	0 2	1 3	1	0
2	0 2	0 2	2	0 2	2	2
3	0 2	1 3	0 2	3	3	3

В исследованиях паранепротиворечивых логик важную роль играет понятие максимальности [Arieli et al., 2011a]. Различают максимальность относительно классической логики и максимальность в абсолютном смысле. Логика *максимально паранепротиворечива относительно классической логики*, если добавление к ней любого правила классической логики в том же языке дает классическую логику. Логика *максимально паранепротиворечива в абсолютном смысле*, если ни одно ее собственное дедуктивное расширение в том же языке не является паранепротиворечивым. В рамках данной работы будем называть максимально паранепротиворечивой логику, которая максимально паранепротиворечива в абсолютном смысле.

Теорема 6. Пусть матрица $\mathcal{M}$ задает паранепротиворечивую логику $\mathbf{L}$, не являющуюся $\mathbf{LFI}$. Логика $\mathbf{L}$ максимально паранепротиворечива, только если $\mathcal{M}$ не сохраняет множество $\{0, 1, 3\}$.

Доказательство. Если $\mathcal{M}$ сохраняет множество $\{0, 1, 3\}$, то $\mathcal{M}' = \langle \{0, 1, 3\}, F', \{1, 3\} \rangle$ — подматрица $\mathcal{M}$, задающая паранепротиворечивую логику $\mathbf{L}'$, причем $Cn(\mathcal{M}) \subseteq Cn(\mathcal{M}')$. В то же время $p, \neg p \vdash q, \neg q \in Cn(\mathcal{M}')$, но $p, \neg p \vdash q, \neg q \notin Cn(\mathcal{M})$. Таким образом, $\mathbf{L}'$ — паранепротиворечивое собственное расширение $\mathbf{L}$ в том же языке, и логика $\mathbf{L}$ не является максимально паранепротиворечивой. ■

Теорема 7. Пусть матрица $\mathcal{M}$ задает подлинно паранепротиворечивую логику $\mathbf{L}$, не являющуюся $\mathbf{LFI}$, которая максимально паранепротиворечива. Тогда $\mathcal{M}$ сохраняет множество $\{3\}$.

Доказательство. Так как $\mathbf{L}$ максимально паранепротиворечива, в силу Теоремы 6 найдется такая операция $f \in \mathcal{M}$, что $f(x_1, \dots, x_n) = 2$ на некотором наборе $(a_1, \dots, a_n)$, где $a_i \in \{0, 1, 3\}$ для всех $1 \leq i \leq n$. Предположим, что $g(3) \neq 3$ для некоторой операции $g \in \mathcal{M}$.

Случай 1. $g(3) = 0$. Пусть $f'(x) = f(\Phi_1, \dots, \Phi_n)$, где:

$$\Phi_i = \begin{cases} g(x), & \text{если } a_i = 0, \\ \neg g(x), & \text{если } a_i = 1, \\ x, & \text{если } a_i = 3. \end{cases}$$

Ясно, что $f'(3) = 2$. Если $f'(0) = 0$, то $\circ x =: f'(\neg(x \wedge \neg x))$. Если $f'(0) = 1$, то $\circ x =: f'(x \wedge \neg x)$. В обоих случаях $\circ p, p, \neg p \vdash q$. Но это противоречит условию теоремы.

Случай 2. $g(3) = 1$. Сводится к предыдущему, так как $\neg g(3) = 0$.

Случай 3. $g(3) = 2$. Если $g(0) = 0$, то $\circ x =: \neg(g(x \wedge \neg x))$. Если $g(0) = 1$, то $\circ x =: g(x \wedge \neg x)$. Снова $\circ p, p, \neg p \vdash q$, и приходим к противоречию. ■

Итак, мы сформулировали ряд необходимых условий, которым должны отвечать матрицы довольно обширного класса многозначных логик, которые являются подлинно паранепротиворечивыми логиками, но не являются логиками формальной противоречивости. Следующий раздел посвящен классу парapolных логик, изоморфному только что рассмотренному.

3. Парapolные логики

В этом разделе рассматривается соотношение между понятиями формальной неопределенности и подлинной парapolности в трехзначных и четырехзначных логиках. Понятие парapolности введено в [Loparic, da Costa, 1984]. Логика аналогичного рода рассматриваются в [Sette, Carnielli, 1995] под названием «слабо интуиционистские». Феномен дуальности между паранепротиворечивыми и парapolными логиками исследуется в [Brunner, Carnielli, 2005] и [Marcos, 2005]. В последней работе также вводится понятие формальной неопределенности, дуальное понятию формальной противоречивости.

Дуальность логических систем определяется следующим образом. Если $\odot$ — произвольная связка, обозначим дуальную ей как $\odot^d$. Если X — множество формул, обозначим как X^d результат замены всех связок в X на дуальные им. Если дана логика $\mathbf{L}_1$ с отношением следования $\vdash_1$, заданным на множестве формул $\mathcal{S}_1$, дуальную логику $\mathbf{L}_2$ определяем, полагая $\mathcal{S}_2 = \mathcal{S}_1^d$ и $X^d \vdash_2 Y^d \Leftrightarrow Y \vdash_1 X$. Маркос характеризует процедуру дуализации следующим образом: «Итак, в абстрактных терминах, все что нам нужно сделать, некоторым образом, это читать изначальные умозаключения справа налево вместо того, чтобы читать их слева направо, и менять имена логических констант, когда необходимо» [Marcos, 2005]. Когда речь, как в нашем случае, идет о многозначных логиках, процедуру дуализации можно также интерпретировать как перенос фокуса с сохранения истинности от посылок к заключению на сохранение ложности от заключения к посылкам. Проиллюстрируем этот тезис примерами.

Логики формальной паранепротиворечивости определяются с помощью мягкой эксплозивности: $\bigcirc(\alpha), \alpha \not\vdash \beta$; $\bigcirc(\alpha), \neg\alpha \not\vdash \beta$; $\bigcirc(\alpha), \alpha, \neg\alpha \vdash \beta$ для всех α и β — существует оценка, при которой $\bigcirc(\alpha)$ и α истинны, а β ложна; существует оценка, при которой $\bigcirc(\alpha)$ и $\neg\alpha$ истинны, а β ложна; не существует оценки, при которой $\bigcirc(\alpha)$, α и $\neg\alpha$ истинны, а β ложна. Дуальные логики формальной неопределенности (**LFU**) определяются посредством мягкой импозивности: $\beta \not\vdash \star(\alpha), \alpha$; $\beta \not\vdash \star(\alpha), \neg\alpha$; $\beta \vdash \star(\alpha), \alpha, \neg\alpha$ для всех α и β — существует оценка, при которой $\star(\alpha)$ и α ложны, а β истинна; существует оценка, при которой $\star(\alpha)$ и $\neg\alpha$ ложны, а β истинна; не существует оценки, при которой $\star(\alpha)$, α и $\neg\alpha$ ложны, а β истинна.

Аналогичным образом получаем критерий подлинной параполноты, дуальный критерию подлинной паранепротиворечивости. Критерий подлинной паранепротиворечивости: $\not\vdash \neg(\alpha \wedge \neg\alpha)$ — существует оценка, при которой формула $\neg(\alpha \wedge \neg\alpha)$ ложна. Дуальный критерий подлинной параполноты: $\neg(\alpha \vee \neg\alpha) \not\vdash$ — существует оценка, при которой формула $\neg(\alpha \vee \neg\alpha)$ истинна. То есть критерий подлинной параполноты базируется на свойствах $\vee$ и $\neg$.

Многозначное параполное отрицание, дуальное паранепротиворечивому, определяем так: $a \in D$, $\neg a \notin D$, $b \notin D$, $\neg b \in D$, $c \notin D$, $\neg c \notin D$ для некоторых $a, b, c \in A$. Не теряя общности, в трехзначном случае будем считать, что $a = 1$, $b = 0$, $c = 2$. Далее, определение подлинно паранепротиворечивой логики требует выполнения условия: $h(\neg(p \vee \neg p)) \in D$ для некоторой оценки h . По аналогии с подлинно паранепротиворечивыми логиками полагаем, что дизъюнкция в подлинно параполной логике ведет себя классическим образом: $\alpha \vdash \alpha \vee \beta$; $\beta \vdash \alpha \vee \beta$; $\alpha \vee \beta \vdash \alpha, \beta$, или — эквивалентно в случае многозначных логик — $h(\alpha \vee \beta) \notin D \Leftrightarrow h(\alpha) \notin D \ \& \ h(\beta) \notin D$. В этом случае можно доказать следующую теорему.

Теорема 8. *Каждая трехзначная подлинно параполная логика является логикой формальной неопределенности.*

Доказательство. В силу требований, предъявляемых к отрицанию и дизъюнкции, $\neg(0 \vee \neg 0) \notin D$ и $\neg(1 \vee \neg 1) \notin D$, поэтому единственная возможность выполнить также $h(\neg(p \vee \neg p)) \in D$ состоит в выборе таких $\neg$ и $\vee$, что $h(\neg(p \vee \neg p)) = 1$ при $h(p) = 2$. Ясно, что в таком случае $\neg(p \vee \neg p)$ отвечает определению $\star(p)$. ■

Теперь постараемся ответить на обратный вопрос: когда трехзначные логики формальной неопределенности являются подлинно параполными?

Классу логик формальной противоречивости, являющихся языковыми расширениями позитивного фрагмента классической логики высказываний

(**СРС**⁺), дуален класс логик формальной неопределенности, расширяющих дуально-позитивный фрагмент классической логики (**СРС**⁻). Такой фрагмент можно получить, поменяв местами роли выделенных и невыделенных значений в определениях связок.

СРС ⁺	СРС ⁻
$x \wedge y \in D \Leftrightarrow x \in D \text{ и } y \in D$	$x \notin D \text{ и } y \notin D \Leftrightarrow x \vee y \notin D$
$x \vee y \notin D \Leftrightarrow x \notin D \text{ и } y \notin D$	$x \in D \text{ и } y \in D \Leftrightarrow x \wedge y \in D$
$x \rightarrow y \notin D \Leftrightarrow x \in D \text{ и } y \notin D$	$x \notin D \text{ и } y \in D \Leftrightarrow x \Leftarrow y \in D$

Получаем следующие варианты табличных определений для $\wedge$, $\vee$, $\Leftarrow$ в **СРС**⁻:

$\wedge$	0	1	2	$\vee$	0	1	2	$\Leftarrow$	0	1	2
0	0	0	0 2	0	0	1	0 2	0	0	1	0 2
1	0	1	0 2	1	1	1	1	1	0	0	0 2
2	0 2	0 2	0 2	2	0 2	1	0 2	2	0 2	1	0 2

Заметим, что логика, которая является расширением **СРС**⁻ и **СРС**⁺, также является расширением классической пропозициональной логики целиком.

Теорема 9. *Каждая трехзначная логика формальной неопределенности **L**, являющаяся расширением **СРС**⁻, является языковым расширением подлинно парapolной логики.*

Доказательство. Достаточно показать, что в матрице **M** логики **L** определима такая дизъюнкция $\dot{\vee}$, что $\neg(p\dot{\vee}\neg p) \not\models$. Это всегда можно сделать следующим образом:

$$x\dot{\vee}y =: ((x \Leftarrow (\star x \vee x \vee \neg x)) \Leftarrow (\star x \vee x \vee \neg x)) \vee ((y \Leftarrow (\star y \vee y \vee \neg y)) \Leftarrow (\star y \vee y \vee \neg y)).$$

■

Если мы примем $\dot{\vee}$ в качестве базовой дизъюнкции, то получим языковой вариант исходной **LFU**, являющийся подлинно парapolной логикой.

Четырехзначный случай отличается от трехзначного тем, что возможно конструировать подлинно парapolные логики, не являющиеся логиками формальной неопределенности.

Теорема 10. *Пусть матрица $\mathcal{M} = \langle \{0, 1, 2, 3\}, \vee, \neg, \{1, 3\} \rangle$, сохраняющая $\{0, 1\}$, задает парapolную логику **L**. Если $2 \wedge 2 = 2$, $3 \wedge 3 = 3$, $\neg 2 = 2$ и $\neg 3 = 3$, то **L** — подлинно парapolная логика, которая не является **LFU**.*

Доказательство. Логика **L** является подлинно парapolной логикой, так как $\neg(3 \vee \neg 3) = 3$. Логика **L** не является логикой формальной противоречивости, так как $h(\otimes p) = 2$ при $h(p) = 2$ для любой унарной связки $\otimes$, и поэтому условие $q \vdash \star(p), p, \neg p$ не может быть выполнено никаким $\star(p)$. ■

Результаты, приведенные ниже, устанавливают более общие свойства четырехзначных логик с двумя выделенными значениями, которые подлинно парapolны, но не являются логиками формальной неопределенности. В каждом случае рассматриваем матрицу $\mathcal{M} = \langle \{0, 1, 2, 3\}, F, \{1, 3\} \rangle$, где $\{\vee, \neg\} \subseteq F$, и все операции в F сохраняют множество $\{0, 1\}$.

Теорема 11. Пусть матрица $\mathcal{M}$ задает подлинно парapolную логику **L**. Если операции $\{\vee, \neg\}$ не сохраняют множество $\{2\}$, то **L** является логикой формальной неопределенности.

Доказательство. Случай 1. Пусть $2 \vee 2 = 0$. Пусть $\Box x =: x \vee x$. Тогда $\star x =: \neg(\Box x \vee \Box \neg x)$ удовлетворяет определению $\star$. Случай 2. Пусть $\neg(2) = 0$. Пусть $\Box x =: \neg \neg x$. Снова $\star x =: \neg(\Box x \vee \Box \neg x)$ удовлетворяет определению $\star$. ■

Теорема 12. Пусть матрица $\mathcal{M}$ задает подлинно парapolную логику, не являющуюся **LFU**. Тогда $\neg 3 = 1$ и $3 \wedge 1 = 1 \wedge 3 = 3$, либо $\neg 3 = 3$ и $3 \wedge 3 = 3$.

Доказательство. В силу Теоремы 11 $\{\vee, \neg\}$ сохраняет $\{2\}$. Согласно допущению, в **L** имеет место $\neg(p \vee \neg p) \not\models$. В силу определения $\{\vee, \neg\}$ $\neg(x \vee \neg x) = 0$ для всех $x \in \{1, 0\}$. Так как $\{\vee, \neg\}$ сохраняет $\{2\}$, $\neg(2 \wedge \neg 2) = 2$. Следовательно, $\neg(x \vee \neg x) \in D$, только если $\neg(3 \vee \neg 3) \in D$. По определению $\vee$, $3 \vee x \in D$ для всех x . Так как $\neg 1 = 0$, получаем, что $3 \vee \neg 3 = 3$. Следовательно, $\neg 3 = 1$ и $3 \vee 1 = 1 \vee 3 = 3$, либо $\neg 3 = 3$ и $3 \wedge 3 = 3$. ■

В силу Теорем 11 и 12, если матрица $\mathcal{M}$ задает подлинно парapolную логику **L**, не являющуюся **LFU**, то $\vee$ отвечает схеме $\vee_1$ и $\neg$ есть $\neg_1$, либо $\vee$ отвечает схеме $\vee_2$ и $\neg$ есть $\neg_2$:

$\vee_1$	0	1	2	3	x	$\neg_1 x$
0	0	1	0 2	1 3	0	1
1	1	1	1 3	3	1	0
2	0 2	1 3	2	1 3	2	2
3	1 3	3	1 3	1 3	3	1

$\vee_2$	0	1	2	3	x	$\neg_2 x$
0	0	1	0 2	1 3	0	1
1	1	1	1 3	1 3	1	0
2	0 2	1 3	2	1 3	2	2
3	1 3	1 3	1 3	3	3	3

Говорим, что логика *максимально парapolна* (в абсолютном смысле), если ни одно ее собственное расширение в том же языке не парapolно.

Теорема 13. Пусть матрица $\mathcal{M}$ задает парapolную логику $\mathbf{L}$. Логика $\mathbf{L}$ *максимально парapolна*, только если $\mathcal{M}$ не сохраняет множество $\{0, 1, 2\}$.

Доказательство. Если $\mathcal{M}$ сохраняет множество $\{0, 1, 2\}$, то у $\mathcal{M}$ имеется такая подматрица $\mathcal{M}' = \langle \{0, 1, 2\}, \vee, \neg, \{1\} \rangle$, что (1) $\beta \not\vdash \alpha, \neg\alpha$ в $\mathcal{M}'$ и (2) $\beta, \neg\beta \vdash \alpha, \neg\alpha$ в $\mathcal{M}'$. Однако $\beta, \neg\beta \not\vdash \alpha, \neg\alpha$ в $\mathcal{M}$. Поскольку $\mathcal{M}'$ — подматрица $\mathcal{M}$, также имеет место: $Cn(\mathcal{M}) \subseteq Cn(\mathcal{M}')$. То есть $\mathcal{M}'$ задает парapolное собственное расширение логики, задаваемой $\mathcal{M}$, без изменения языка. ■

Теорема 14. Пусть матрица $\mathcal{M}$ задает подлинно парapolную логику $\mathbf{L}$, не являющуюся $\mathbf{LFU}$, которая *максимально парapolна*. Тогда операции F сохраняют множество $\{2\}$.

Доказательство. Так как $\mathbf{L}$ *максимально парapolна*, в силу Теоремы 13 найдется такая операция $f \in \mathcal{M}$, что $f(x_1, \dots, x_n) = 3$ на некотором наборе $(a_1, \dots, a_n)$, где $a_i \in \{0, 1, 2\}$ для всех $1 \leq i \leq n$. Предположим, что $g(2) \neq 2$ для некоторой операции $g \in \mathcal{M}$.

Случай 1. $g(2) = 1$. Пусть $f'(x) = f(\Phi_1, \dots, \Phi_n)$, где:

$$\Phi_i = \begin{cases} g(x), & \text{если } a_i = 1, \\ \neg g(x), & \text{если } a_i = 0, \\ x, & \text{если } a_i = 2. \end{cases}$$

Ясно, что $f'(2) = 3$. Если $f'(1) = 1$, то $\star x = f'(\neg(x \vee \neg x))$. Если $f'(1) = 0$, то $\star x = f'(x \vee \neg x)$. В обоих случаях $q \vdash \star p, p, \neg p$. Но это противоречит условию теоремы.

Случай 2. $g(2) = 0$. Сводится к предыдущему, так как $\neg g(2) = 1$.

Случай 3. $g(2) = 3$. Если $g(1) = 1$, то $\star x = \neg(g(x \vee \neg x))$. Если $g(1) = 0$, то $\star x = g(x \vee \neg x)$. Снова $q \vdash \star p, p, \neg p$, и приходим к противоречию. ■

В заключительном разделе объединим результаты, полученные в отношении паранепротиворечивых и парapolных логик, и исследуем логики, которые являются одновременно паранепротиворечивыми и парapolными.

4. Паранормальные логики

Следуя [Béziau, 1999], называем логику *паранормальной*, если она одновременно паранепротиворечива и параполна. Как показано в [Arieli, Avron, 2017], минимальное число истинностных значений в матрице такой логики равняется четырем, причем два из них — выделенные, а два — невыделенные. Будем говорить, что логика *подлинно паранормальна*, если она подлинно паранепротиворечива и подлинно параполна.

Ниже нас будут интересовать подлинно паранормальные логики, которые не являются ни логиками формальной противоречивости, ни логиками формальной неопределенности.

Из Теорем 4, 5, 11, 12 вытекает следующее. Пусть $\mathcal{M} = \langle \{0, 1, 2, 3\}, F, \{1, 3\} \rangle$ — матрица, которая сохраняет $\{0, 1\}$ и задает подлинно паранормальную логику **L**, которая не является ни **LFI**, ни **LFU**. В таком случае $\{\wedge, \vee, \neg\} \subseteq F$ и $\wedge, \vee, \neg$ отвечают схемам, приведенным ниже.

$\wedge_2$	0	1	2	3	$\vee_2$	0	1	2	3	x	$\neg_2 x$
0	0	0	0 2	0 2	0	0	1	0 2	1 3	0	1
1	0	1	0 2	1 3	1	1	1	1 3	1 3	1	0
2	0 2	0 2	2	0 2	2	0 2	1 3	2	1 3	2	2
3	0 2	1 3	0 2	3	3	1 3	1 3	1 3	3	3	3

Перечислим несколько свойств, которыми обладает матрица $\mathcal{M}$, описанная выше, и логика **L**, которую она порождает. Ясно, что в логике **L** имеет место следующее: $\not\vdash \neg(\alpha \wedge \neg \alpha)$; $\neg(\alpha \vee \neg \alpha) \not\vdash$; $\neg(\alpha \vee \neg \alpha) \not\vdash \neg(\beta \wedge \neg \beta)$. Как следует из Теоремы 7, если $\mathcal{M}$ задает максимально паранепротиворечивую логику и не сохраняет $\{3\}$, то в ней можно определить $\bigcirc$, то есть соответствующая логика является логикой формальной противоречивости. Как следует из Теоремы 14, если $\mathcal{M}$ задает максимально параполную логику и не сохраняет $\{2\}$, то в ней можно определить $\star$, то есть соответствующая логика является логикой формальной неопределенности.

Будем говорить, что логика *максимально паранормальна* (в абсолютном смысле), если она максимально паранепротиворечива и максимально параполна. Пусть матрица $\mathcal{M}$ задает максимально паранормальную логику **L**. Если найдется такая формула α , что $\vdash \alpha$ в **L**, то **L** есть **LFU**. Если найдется такая формула α , что $\alpha \vdash$ в **L**, то **L** есть **LFI**. Таким образом, добавление классических $\rightarrow$ или $\Leftarrow$ к матрице $\mathcal{M}$ дает, соответственно, **LFU** или **LFI**, поскольку $x \rightarrow x \in D$, $x \Leftarrow x \notin D$ для всех $x \in \{0, 1, 2, 3\}$.

Интересным примером подлинно паранормальной логики, которая не является ни **LFI**, ни **LFU**, выступает логика **FDE** [Belnap, 1977]. Операции ее четырехзначной матрицы имеют следующий вид ($0 = \mathbf{f}$, $1 = \mathbf{t}$, $2 = \perp$, $3 = \top$):

$\wedge$	0	1	2	3	$\vee$	0	1	2	3	x	$\neg x$
0	0	0	0	0	0	0	1	2	1	0	1
1	0	1	2	3	1	1	1	1	1	1	0
2	0	2	2	0	2	2	1	2	1	2	2
3	0	3	0	3	3	3	1	1	3	3	3

Эта логика и ее расширения неоднократно привлекали внимание исследователей. Обзоры таких расширений доступны, например, в [Arieli, Avron, 2017], [Karpenko, 2017], [Omori, Wansing, 2017]. Ниже мы предлагаем новый класс расширений, а именно расширений, сохраняющих множество $\{0, 1\}$, которые максимально паранормальны и подлинно паранормальны, но не являются логиками формальной противоречивости либо неопределенности.

Нижеследующие теоремы дают условия, достаточные для того, чтобы расширение матрицы логики **FDE** задавало максимально паранепротиворечивую и максимально парapolную логику.

Теорема 15. *Если $\mathcal{M}$ — сохраняющее $\{0, 1\}$ расширение матрицы логики **FDE**, и $\mathcal{M}$ не сохраняет $\{0, 1, 3\}$, то логика $\mathbf{L}$, задаваемая $\mathcal{M}$, максимально паранепротиворечива.*

Доказательство. Предположим, что $\mathbf{L}' = \langle \mathcal{L}, \Vdash \rangle$ — логика в языке $\mathbf{L}$, которая строго сильнее $\mathbf{L}$. Тогда найдутся такие формулы γ и α , что $h^*(\gamma) \subseteq \{1, 3\}$ и $h^*(\alpha) \in \{0, 2\}$ для некоторой оценки h^* в $\mathcal{M}$, однако $\gamma \Vdash \alpha$. Также допустим, что матрица $\mathcal{M}$ логики $\mathbf{L}$ не сохраняет $\{0, 1, 3\}$. В этом случае найдется такая формула β , что $h^2(\beta) = 2$ и $h^2(r) \in \{0, 1, 3\}$ для каждой $r \in \text{Var}(\beta)$.

Определим подстановки для каждой $r \in \text{Var}(\beta)$ и $p \in \text{Var}(\gamma, \alpha)$:

$$\varphi(r) = \begin{cases} (p_0 \wedge q_0) \wedge (p_0 \wedge \neg q_0), & \text{если } h^2(r) = 0, \\ \neg((p_0 \wedge q_0) \wedge (p_0 \wedge \neg q_0)), & \text{если } h^2(r) = 1, \\ p_0, & \text{если } h^2(r) = 3. \end{cases}$$

$$\varepsilon(p) = \begin{cases} (p_0 \wedge q_0) \wedge (p_0 \wedge \neg q_0), & \text{если } h^*(p) = 0, \\ \neg((p_0 \wedge q_0) \wedge (p_0 \wedge \neg q_0)), & \text{если } h^*(p) = 1, \\ \varphi(\beta), & \text{если } h^*(p) = 2, \\ p_0, & \text{если } h^*(p) = 3. \end{cases}$$

Для каждой оценки h в $\mathcal{M}$ имеет место: если $h(p_0) = 3$ и $h(q_0) \in \{0, 1, 2\}$, то $h(\varepsilon(\gamma)) \subseteq \{1, 3\}$ и $h(\varepsilon(\alpha)) \in \{0, 2\}$. Кроме того, поскольку $\mathcal{M}$ сохраняет $\{3\}$, если $h(p_0) = h(q_0) = 3$, то $h(\varepsilon(\alpha)) = 3$ и $h(\varepsilon(\gamma)) = 3$. Таким образом, имеет место следующее: (1) $p_0, \neg p_0 \vdash \varepsilon(\gamma)$; (2) $p_0, \neg p_0, \varepsilon(\alpha) \vdash q_0$.

Вспомним, что $\mathbf{L}'$ строго сильнее $\mathbf{L}$. Поэтому $p_0, \neg p_0 \Vdash \varepsilon(\gamma)$ и $p_0, \neg p_0, \varepsilon(\alpha) \Vdash q_0$. Кроме того, в $\mathbf{L}'$ также выполняется $\varepsilon(\gamma) \Vdash \varepsilon(\alpha)$.

Из $p_0, \neg p_0 \Vdash \varepsilon(\gamma)$ получаем $p_0, \neg p_0 \Vdash \varepsilon(\gamma), \varepsilon(\alpha)$ (монотонность). Из $\varepsilon(\gamma) \Vdash \varepsilon(\alpha)$ получаем $\varepsilon(\gamma), p_0, \neg p_0 \Vdash \varepsilon(\alpha)$ (монотонность). Из $p_0, \neg p_0 \Vdash \varepsilon(\gamma), \varepsilon(\alpha)$ и $\varepsilon(\gamma), p_0, \neg p_0 \Vdash \varepsilon(\alpha)$ получаем $p_0, \neg p_0 \Vdash \varepsilon(\alpha)$ (сечение). Из $p_0, \neg p_0 \Vdash \varepsilon(\alpha)$ получаем $p_0, \neg p_0 \Vdash \varepsilon(\alpha), q_0$ (монотонность). Из $p_0, \neg p_0 \Vdash \varepsilon(\alpha), q_0$ и $p_0, \neg p_0, \varepsilon(\alpha) \Vdash q_0$ получаем $p_0, \neg p_0 \Vdash q_0$ (сечение). В силу последнего $\mathbf{L}'$ не является паранепротиворечивой. ■

Теорема 16. *Если $\mathcal{M}$ — сохраняющее $\{0, 1\}$ расширение матрицы логики FDE, и $\mathcal{M}$ не сохраняет $\{0, 1, 2\}$, то логика $\mathbf{L}$, задаваемая $\mathcal{M}$, максимально паранепротиворечива.*

Доказательство. Вновь предположим, что $\mathbf{L}' = \langle \mathcal{L}, \Vdash \rangle$ — логика в языке $\mathbf{L}$, которая строго сильнее $\mathbf{L}$. Тогда найдутся такие γ и α , что $h^*(\gamma) \subseteq \{1, 3\}$ и $h^*(\alpha) \in \{0, 2\}$ для некоторой оценки h^* в $\mathcal{M}$, однако $\gamma \Vdash \alpha$. Также допустим, что матрица $\mathcal{M}$ логики $\mathbf{L}$ не сохраняет $\{0, 1, 2\}$. В этом случае найдется такая формула β , что $h^3(\beta) = 3$ и $h^3(r) \in \{0, 1, 2\}$ для каждой $r \in \text{Var}(\beta)$.

Определим подстановки для каждой $r \in \text{Var}(\beta)$ и $p \in \text{Var}(\gamma, \alpha)$:

$$\varphi(r) = \begin{cases} \neg((p_0 \vee q_0) \vee (p_0 \vee \neg q_0)), & \text{если } h^3(r) = 0, \\ (p_0 \vee q_0) \vee (p_0 \vee \neg q_0), & \text{если } h^3(r) = 1, \\ p_0, & \text{если } h^3(r) = 2. \end{cases}$$

$$\varepsilon(p) = \begin{cases} \neg((p_0 \vee q_0) \vee (p_0 \vee \neg q_0)), & \text{если } h^*(p) = 0, \\ (p_0 \vee q_0) \vee (p_0 \vee \neg q_0), & \text{если } h^*(p) = 1, \\ p_0, & \text{если } h^*(p) = 2, \\ \varphi(\beta), & \text{если } h^*(p) = 3. \end{cases}$$

Для каждой оценки h в $\mathcal{M}$ имеет место: если $h(p_0) = 2$ и $h(q_0) \in \{0, 1, 3\}$, то $h(\varepsilon(\gamma)) \subseteq \{1, 3\}$ и $h(\varepsilon(\alpha)) \in \{0, 2\}$. Кроме того, поскольку $\mathcal{M}$ сохраняет $\{2\}$, если $h(p_0) = h(q_0) = 2$, то $h(\varepsilon(\alpha)) = 2$ и $h(\varepsilon(\gamma)) = 2$. Таким образом, имеет место следующее: (1) $\varepsilon(\alpha) \vdash p_0, \neg p_0$; (2) $q_0 \vdash p_0, \neg p_0, \varepsilon(\gamma)$.

Вспомним, что $\mathbf{L}'$ строго сильнее $\mathbf{L}$. Поэтому $\varepsilon(\alpha) \Vdash p_0, \neg p_0$ и $q_0 \Vdash p_0, \neg p_0, \varepsilon(\gamma)$. Кроме того, в $\mathbf{L}'$ также выполняется $\varepsilon(\gamma) \Vdash \varepsilon(\alpha)$.

Из $\varepsilon(\alpha) \Vdash p_0, \neg p_0$ получаем $\varepsilon(\gamma), \varepsilon(\alpha) \Vdash p_0, \neg p_0$ (монотонность). Из $\varepsilon(\gamma) \Vdash \varepsilon(\alpha)$ получаем $\varepsilon(\gamma) \Vdash \varepsilon(\alpha), p_0, \neg p_0$ (монотонность). Из $\varepsilon(\gamma), \varepsilon(\alpha) \Vdash p_0, \neg p_0$ и $\varepsilon(\gamma) \Vdash \varepsilon(\alpha), p_0, \neg p_0$ получаем $\varepsilon(\gamma) \Vdash p_0, \neg p_0$ (сечение). Из $\varepsilon(\gamma) \Vdash p_0, \neg p_0$ получаем $q_0, \varepsilon(\gamma) \Vdash p_0, \neg p_0$ (монотонность). Из $q_0, \varepsilon(\gamma) \Vdash p_0, \neg p_0$

и $q_0 \Vdash p_0, \neg p_0, \varepsilon(\gamma)$ получаем $q_0 \Vdash p_0, \neg p_0$ (сечение). В силу последнего **L'** не является парapolной. ■

Таким образом, необходимые и достаточные условия, при которых сохраняющая $\{0, 1\}$ матрица $\mathcal{M}$, представляющая собой расширение матрицы логики **FDE**, задает подлинно паранормальную логику, которая максимально паранормальна, а также не является ни **LFI**, ни **LFU**, таковы: (1) $\mathcal{M}$ сохраняет $\{2\}$ (Теорема 14); (2) $\mathcal{M}$ сохраняет $\{3\}$ (Теорема 7); (3) $\mathcal{M}$ не сохраняет $\{0, 1, 2\}$ (Теоремы 13 и 16); (4) $\mathcal{M}$ не сохраняет $\{0, 1, 3\}$ (Теоремы 6 и 15).

Помимо прочего, это позволяет дать описание подобного расширения **FDE**, обладающего наибольшей выразительной силой. Такое расширение задается матрицей $\mathcal{M} = \langle \{0, 1, 2, 3\}, F, \{1, 3\} \rangle$, где F — порождающая система замкнутого класса функций $T_{01} \cap T_2 \cap T_3$; T_{01} — замкнутый класс всех функций, сохраняющих $\{0, 1\}$, T_2 — замкнутый класс всех функций, сохраняющих $\{2\}$, T_3 — замкнутый класс всех функций, сохраняющих $\{3\}$.

Литература

- Arieli, Avron, 2015 – *Arieli O., Avron A.* Three-Valued Paraconsistent Propositional Logics // *New Directions in Paraconsistent Logic* / Ed. by J.-Y. Béziau et al. Springer, India, 2015. P. 91–129.
- Arieli, Avron, 2017 – *Arieli O., Avron A.* Four-valued parafinite logics // *Studia Logica*. 2017. Vol. 105. No. 6. P. 1087–1122.
- Arieli et al., 2011a – *Arieli O., Avron A., Zamansky A.* Maximal and premaximal paraconsistency in the framework of three-valued semantics // *Studia Logica*. 2011. Vol. 97. No 1. P. 31–60.
- Arieli et al., 2011b – *Arieli O., Avron A., Zamansky A.* Ideal paraconsistent logics. *Studia Logica*. 2011. Vol. 99. No. 1–3. P. 31–60.
- Belnap, 1977 – *Belnap N.* A useful four-valued logic // *Modern Uses of Multiple-Valued Logic* / Ed. by J.M. Dunn, G. Epstein. Reidel Publishing Co., 1977. P. 8–37.
- Béziau, 1999 – *Béziau J.-Y.* The future of paraconsistent logic // *Logical Investigations*. 1999. Vol. 2. P. 1–23.
- Béziau, 2000 – *Béziau, J.-Y.* What is paraconsistent logic // *Frontiers of paraconsistent logic* / Ed. by D. Batens et al. Research Studies Press, 2000. P. 95–111.
- Béziau, 2016 – *Béziau J.-Y.* Two genuine 3-valued paraconsistent logics // *Towards Paraconsistent Engineering* / Ed. by S. Akama. Springer, 2016. P. 35–47.
- Béziau, Franceschetto, 2015 – *Béziau J.-Y., Franceschetto A.* Strong three-valued paraconsistent logics / *New Directions in Paraconsistent Logic* // Ed. by J.-Y. Béziau et al. Springer, New Delhi, 2015. P. 131–145.
- Brunner, Carnielli, 2005 – *Brunner A.B., Carnielli W.A.* Anti-intuitionism and paraconsistency // *Journal of Applied Logic*. 2005. Vol. 3. No. 1. P. 161–184.

- Carnielli, Coniglio, 2016 – *Carnielli W., Coniglio M.E.* Paraconsistent Logic: Consistency, Contradiction and Negation. Springer, 2016. 398 p.
- Carnielli et al., 2002 – *Carnielli W., Marcos J.* A taxonomy of C-systems // Paraconsistency: The Logical Way to the Inconsistent / Ed. by W.A. Carnielli et al. Marcel Dekker, 2002. P. 1–94.
- Carnielli et al., 2007 – *Carnielli W., Coniglio M.E., Marcos J.* Logics of formal inconsistency // Handbook of Philosophical Logic. Vol. 14 / Ed. by D. Gabbay, F. Guenther. Springer, 2007. P. 1–93.
- Karpenko, 2017 – *Karpenko A.S.* Four-valued logics BD and DM4: Expansions // Bulletin of the Section of Logic. 2017. Vol. 46. No. 1–2. P. 33–45.
- Loparic, da Costa, 1984 – *Loparic A., da Costa N.C.A.* Paraconsistency, paracompleteness, and valuations // Logique et Analyse. Nouvelle série. 1984. Vol. 27. No. 106. P. 119–131.
- Marcos, 2005 – *Marcos J.* Nearly every normal modal logic is paranormal // Logique et Analyse. Nouvelle série. 2005. Vol. 48. No. 189–192. P. 279–300.
- Omori, Wansing, 2017 – *Omori H., Wansing H.* 40 years of FDE: an introductory overview // Studia Logica. 2017. Vol. 105. No. 6. P. 1021–1049.
- Sette, Carnielli, 1995 – *Sette A.M., Carnielli W.A.* Maximal weakly-intuitionistic logics // Studia Logica. 1995. Vol. 55. No. 1. P. 181–203.
- Urbas, 1990 – *Urbas I.* Paraconsistency // Studies in Soviet Thought. 1990. Vol. 39. No. 3–4. P. 343–354.

LEONID YU. DEVIATKIN

On genuine paraconsistent and genuine paracomplete many-valued logics

Leonid Yu. Devyatkin

Institute of Philosophy, Russian Academy of Sciences,
12/1 Goncharnaya Str., Moscow, 109240, Russian Federation.
E-mail: deviatkin@iph.ras.ru

Abstract: The paper is devoted to the analysis of several classes of paraconsistent and paracomplete logics using the example of three- and four-valued logics which preserve the classical truth-values. The results presented in the paper can be divided into three groups. The first group concerns paraconsistent logics. We demonstrate that all three-valued genuine paraconsistent logics are logics of formal inconsistency, while all three-valued logics of formal inconsistency which expand the positive fragment of classical propositional logic are linguistic variants of genuine paraconsistent logics. Further, we provide examples of four-valued genuine paraconsistent logics which are not logics of formal inconsistency. We present a number of necessary conditions that four-valued matrices of genuine paraconsistent logics must satisfy in order to not induce logics that are logics of formal inconsistency. The second group concerns paracomplete logics. We demonstrate that all three-valued genuine paracomplete logics are logics of formal undeterminedness, while all three-valued logics of formal undeterminedness which expand the dual-positive fragment of classical propositional logic are linguistic variants of genuine paracomplete logics. We also provide examples of four-valued genuine paracomplete logics which are not logics of formal undeterminedness. We present a number of necessary conditions that four-valued matrices of genuine paracomplete logics must satisfy in order to not induce logics that are logics of formal undeterminedness. The second group concerns paranormal logics. We give a number of necessary conditions which must be satisfied by four-valued matrices of genuine paranormal logics so that those logics were neither logics of formal inconsistency nor logics of formal undeterminedness. For paranormal expansions of Belnap's "useful four-valued logic" we also provide the necessary and sufficient conditions for being maximal genuine paranormal logics which are neither logics of formal inconsistency nor logics of formal undeterminedness.

Keywords: paraconsistency, paracompleteness, many-valued logics, logical matrices, the law of non-contradiction, formal inconsistency, formal undeterminedness, functional properties

For citation: Devyatkin L.Yu. "O podlinno paraneprotivorechivyykh i podlinno parapolnykh mnogoznachnykh logikakh" [On genuine paraconsistent and genuine paracomplete many-valued logics], *Logicheskie Issledovaniya / Logical Investigations*, 2019, Vol. 25, No. 2, pp. 26–45. DOI: 10.21146/2074-1472-2019-25-2-26-45 (In Russian)

References

- Arieli, Avron, 2015 – Arieli, O., Avron, A. “Three-Valued Paraconsistent Propositional Logics”, *New Directions in Paraconsistent Logic*, ed. by J.-Y. Béziau et al. Springer India, 2015, pp. 91–129.
- Arieli, Avron, 2017 – Arieli, O., Avron, A. “Four-valued parafinite logics”, *Studia Logica*, 2017, Vol. 105, No. 6, pp. 1087–1122.
- Arieli et al., 2011a – Arieli, O., Avron, A., Zamansky, A. “Maximal and premaximal paraconsistency in the framework of three-valued semantics”, *Studia Logica*, 2011, Vol. 97, No. 1, pp. 31–60.
- Arieli et al., 2011b – Arieli, O., Avron, A., Zamansky, A. “Ideal paraconsistent logics”, *Studia Logica*, 2011, Vol. 99, No. 1–3, pp. 31–60.
- Belnap, 1977 – Belnap, N. “A useful four-valued logic”, *Modern Uses of Multiple-Valued Logic*, ed. by J.M. Dunn, G. Epstein. Reidel Publishing Co., 1977, pp. 8–37.
- Béziau, 1999 – Béziau, J.-Y. “The future of paraconsistent logic”, *Logical Investigations*, 1999, Vol. 2, pp. 1–23.
- Béziau, 2000 – Béziau, J.-Y. “What is paraconsistent logic”, *Frontiers of paraconsistent logic*, ed. by D. Batens et al. Research Studies Press, 2000, pp. 95–111.
- Béziau, 2016 – Béziau, J.-Y. “Two genuine 3-valued paraconsistent logics”, *Towards Paraconsistent Engineering*, ed. by S. Akama. Springer, 2016, pp. 35–47.
- Béziau, Franceschetto, 2015 – Béziau, J.-Y., Franceschetto, A. “Strong three-valued paraconsistent logics”, *New Directions in Paraconsistent Logic*, ed. by J.-Y. Béziau et al. Springer, 2015, pp. 131–145.
- Brunner, Carnielli, 2005 – Brunner, A.B., Carnielli, W.A. “Anti-intuitionism and paraconsistency”, *Journal of Applied Logic*, 2005, Vol. 3, No. 1, pp. 161–184.
- Carnielli, Coniglio, 2016 – Carnielli, W., Coniglio, M.E. *Paraconsistent Logic: Consistency, Contradiction and Negation*. Springer, 2016. 398 p.
- Carnielli et al., 2002 – Carnielli, W., Marcos, J. “A taxonomy of C-systems”, *Paraconsistency: The Logical Way to the Inconsistent*, ed. by W.A. Carnielli et al. Marcel Dekker, 2002, pp. 1–94.
- Carnielli et al., 2007 – Carnielli, W., Coniglio, M.E., Marcos, J. “Logics of formal inconsistency”, *Handbook of Philosophical Logic*. Vol. 14, ed. by D. Gabbay, F. Guenther. Springer, 2007, pp. 1–93.
- Karpenko, 2017 – Karpenko, A.S. “Four-valued logics BD and DM4: Expansions”, *Bulletin of the Section of Logic*, 2017, Vol. 46, No. 1–2, pp. 33–45.
- Loparic, da Costa, 1984 – Loparic, A., da Costa, N.C.A. “Paraconsistency, para-completeness, and valuations”, *Logique et Analyse. Nouvelle série*, 1984, Vol. 27, No. 106, pp. 119–131.
- Marcos, 2005 – Marcos, J. “Nearly every normal modal logic is paranormal”, *Logique et Analyse. Nouvelle série*, 2005, Vol. 48, No. 189–192, pp. 279–300.
- Omori, Wansing, 2017 – Omori, H., Wansing, H. “40 years of FDE: an introductory overview”, *Studia Logica*, 2017, Vol. 105, No. 6, pp. 1021–1049.

Sette, Carnielli, 1995 – Sette, A.M., Carnielli, W.A. “Maximal weakly-intuitionistic logics”, *Studia Logica*, 1995, Vol. 55, No. 1, pp. 181–203.

Urbas, 1990 – Urbas, I. “Paraconsistency”, *Studies in Soviet Thought*, 1990, Vol. 39, No. 3–4, pp. 343–354.