В.И. ШАЛАК

Тезис Пирса: логический анализ и онтологические следствия

Владимир Иванович Шалак

Институт философии РАН.

Российская Федерация, 109240, г. Москва, ул. Гончарная, д. 12, стр. 1.

E-mail: shalack@gmail.com

Аннотация: Ч.С. Пирс выдвинул гипотезу о том, что любые отношения могут быть редуцированы к отношениям, местность которых не превышает трех. Эта гипотеза тесно связана с базовыми категориями его феноменологии.

В данной публикации дан семантический анализ и подробное доказательство следующих двух результатов.

1. Любая первопорядковая теория может быть представлена в языке, содержащем конечный набор одноместных функциональных символов. Философски важным следствием этого является равноправие реляционных и функциональных языков и соответствующих им онтологий.
2. Любая первопорядковая теория может быть представлена в языке, содержащем единственный трехместный предикатный символ U и конечный набор индивидуальных констант. Это подтверждает гипотезу Пирса о фундаментальной роли, которую играют трехместные отношения. Язык, дескриптивные символы которого содержат лишь индивидуальные константы и единственный трехместный предикат, оказывается универсальным языком для представления любых теорий первого порядка.

Имеется структурное сходство трехместного предиката $U(e, u, x)$ и трехместного предиката $UM(e, u, x)$, представляющего универсальную машину Тьюринга. И тот и другой можно рассматривать как контейнеры одноместных функций. С этой точки зрения предикат U является расширением предиката UM на любые, а не только эффективно вычислимые функции.

Доказанные теоремы заставляют по-новому взглянуть на многие физические теории. В теории относительности фундаментальной структурой считается четырехмерное пространство-время Минковского, которое можно представить в виде четырехместного предиката $S(x, y, z, t)$. Из теоремы о существовании предиката $U(e, u, x)$ следует, что четырехмерное пространство-время Минковского не является фундаментальной физической структурой, поскольку может быть редуцировано к единственному трехместному отношению.

Ключевые слова: тезис Пирса, редукция отношений, отношения между теориями, дефинициальная вложимость теорий, онтологические допущения

Для цитирования: Шалак В.И. Тезис Пирса: логический анализ и онтологические следствия // Логические исследования / Logical Investigations. 2019. Т. 25. № 2. С. 138–163. DOI: 10.21146/2074-1472-2019-25-2-138-163

Введение

Мое внимание к редукционному тезису Пирса было привлечено В.А. Смирновым.

«Ч. Пирс выдвинул гипотезу, что все отношения могут быть сведены не более чем к трехместным отношениям. Естественным образом, сведены не в смысле теории множеств — в предположении теории множеств (или теории типов), каждое отношение может быть определено через свойство. Речь идет о сводимости в рамках исчисления предикатов первого порядка. Согласно Ч. Пирсу, имеются одноместные отношения — монады, двухместные — диады и трехместные — триады. С этой классификацией у Пирса связаны важные философские следствия.

В связи с этой гипотезой прежде всего отметим, что существуют теории, сформулированные в терминах трехместного отношения, для которых нельзя построить дефиниционно эквивалентные им теории, сформулированные в терминах не более чем двухместных отношений. Истинность последнего утверждения следует из одного результата Р. Робинсона, который показал, что евклидова (как и гиперболическая) первопорядковая геометрия не может быть сформулирована в терминах двухместных отношений. Однако она может быть сформулирована в терминах одного трехместного отношения» [Смирнов, 1987, с. 66–67].

Если обратиться к работам Пирса, то можно обнаружить, что редукционный тезис непосредственно связан с базовыми категориями его феноменологии.

«Три идеи являются основными: нечто, другое и третье... В этом математическом высказывании (ибо оно таково), как в ореховой скорлупе, заключена вся логика и вся метафизика»¹.

¹ «The three ideas are basic: those of something, other, and third. . . In this mathematical proposition (for such it is shown to be), you have all logic and all metaphysics in a nut-shell». Цит. по [Herzberger, 1981, p. 41].

Одна из кратких формулировок тезиса звучит следующим образом:

«Триада – низшая форма релятивов, из которой могут быть получены все остальные»².

Более того, Пирс утверждал, что доказал теорему о редукции:

«Теперь я хочу обратить ваше внимание на замечательную теорему. Каждую полиаду выше триады можно разложить на триады, хотя не каждую триаду можно разложить на диады» [Пирс, 2005, с. 184].

В разное время логики и философы уже обращались к темам, непосредственно или косвенно связанным с тезисом Пирса [Church, Quine, 1952], [Skidmore, 1971], [Herzberger, 1981], [Kleinert, 2007]. Так А. Черч и У. Куайн показали, что элементарная теория чисел представима в терминах единственного двухместного симметричного отношения. Но арифметика – это всего лишь одна из теорий, а тезис Пирса имеет глобальный характер и распространяется на любые теории. В этом отношении особого внимания заслуживает статья Х. Херцбергера. Несмотря на то что Пирс неоднократно утверждал о существовании доказательства редукционного тезиса, Херцбергер так и не сумел обнаружить его в архивах и потому поставил цель выяснить принципиальную возможность такого доказательства, т.е. попытаться построить его средствами развиваемой Пирсом алгебры отношений.

В качестве основной алгебраической операции Пирс рассматривал относительное произведение отношений, видя в нем аналогию с комбинацией химических элементов. Местность отношений выступала в роли аналога валентности химических элементов, а относительное произведение — аналогом их соединения.

Понятие ρ -редуцируемости Херцбергер определяет следующим образом.

Отношение R ρ -редуцируемо над областью D , если и только если существует такое множество отношений над областью D , что каждое из них имеет меньшую местность, чем R , и R может быть получено из этих отношений с помощью операции относительного произведения [Herzberger, 1981, p. 44].

Легко видеть, что относительное произведение двух отношений местности n и k дает в результате отношение местности $n + k - 2$. Отсюда следует, что отношения местности $n \leq 3$ абсолютно нередуцируемы. Это является содержанием первой теоремы Херцбергера.

² «The triad is the lowest form of relative from which all others can be derived». Цит. по [Herzberger, 1981, p. 57].

Далее на конкретном примере он показывает, что на области $D = \{a, b, c\}$ четырехместное отношение $R = \{abba, baab, cbcb, bcbc\}$ не может быть ρ -редуцируемо к двум трехместным. Чтобы убедиться в этом, достаточно рассмотреть следующую таблицу:

R	G	H
$abba$	abx	xba
$baab$	bay	yab
$cbcb$	cbw	wcb
$bcbc$	bcz	zbc

Простое рассуждение показывает, что для того, чтобы посредством операции относительного произведения из отношений G и H получить R , область D должна содержать хотя бы четыре различных элемента x, y, w, z , но она содержит всего три. Т.е. размер предметной области является препятствием для выполнения редукционного тезиса [Herzberger, 1981, pp. 45–46].

Далее Херцбергер приходит к двум теоремам, первая из которых гласит, что все отношения местности $n > 3$ ρ -редуцируемы к трехместным для достаточно больших областей D , в которых мощность отношения R не превышает мощности D . Следующая теорема является следствием предыдущей. Согласно ей тезис Пирса выполняется для бесконечных областей. Это имеет место в силу того, что для любой бесконечной области D и любого n ее мощность равна мощности декартова произведения $D \times \dots^n \times D$ [Herzberger, 1981, p. 48].

Затем Херцбергер выходит за рамки использования одного лишь относительного произведения и определяет операцию *тройного соединения* (triple junction):

$$t(Q, R, S) = \{\langle \mathbf{a}, \mathbf{b}, \mathbf{c} \rangle \mid \exists x (\langle \mathbf{a}, x \rangle \in Q^k, \langle \mathbf{b}, x \rangle \in R^m, \langle \mathbf{c}, x \rangle \in S^n)\},$$

где $\mathbf{a}$ – сокращение для $a_1, \dots, a_{k-1}$, аналогично для $\mathbf{b}$ и $\mathbf{c}$.

В языке логики предикатов первого порядка операция тройного соединения представима формулой:

$$\exists x (Q(\mathbf{a}, x) \& R(\mathbf{b}, x) \& S(\mathbf{c}, x))$$

Заключительная теорема говорит, что в теории квантификации в достаточно больших предметных областях все трехместные отношения редуцируемы к двухместным. Это позволяет сделать вывод о том, что для стандартной теории определений редукционный тезис проваливается [Herzberger, 1981, pp. 54–55].

В отношении работы Херцбергера можно высказать ряд критических замечаний.

Замечание 1. Все рассуждения Херцбергера проводятся на уровне моделей и могут выходить за рамки использования одних лишь первопорядковых характеристик. Это относится, например, к часто повторяющейся оговорке о *достаточно больших областях*.

Замечание 2. Если последовать примеру Херцбергера и проводить доказательства на уровне конкретных моделей, то можно вспомнить, что современная алгебра отношений помимо операции относительного произведения включает также операции объединения, пересечения и относительного дополнения отношений соответствующей местности. При наличии относительного произведения и объединения оговорка о достаточно больших областях в теоремах Херцбергера становится излишней. Это легко показать на его контрпримере для трехэлементной области $D = \{a, b, c\}$ и четырехместного отношения $R = \{abba, baab, cbcb, bc bc\}$. Вместо того, чтобы редуцировать исходное отношение R к относительному произведению двух трехместных отношений, возьмем четыре трехместных отношения, где $x \neq y$.

G_1	H_1	G_2	H_2
abx	xba	cbx	xcb
bay	yab	bcy	ybc

В этом случае R редуцируется к отношениям G_1, G_2, H_1, H_2 следующим образом:

$$R = (G_1 \bullet H_1) \cup (G_2 \bullet H_2)$$

Аналогичным образом можно провести редукцию любых отношений на любых конечных областях. Так как теорема о редукции и так имеет место для бесконечных моделей, то теперь она не требует никаких оговорок, но будет иметь вид теоремы существования, поскольку доказательство будет зависеть от размера конкретной предметной области. Такая же теорема существования будет справедлива и для редукции к двухместным отношениям в теории квантификации.

Замечание 3. Одна и та же теория может иметь как конечные, так и бесконечные модели. Херцбергер не приводит единообразного доказательства теоремы, чтобы она имела место для всех моделей.

Цель настоящей работы — проанализировать редукционный тезис Пирса в терминах отношений между первопорядковыми теориями, а не их моделями, что позволит в более общем виде очертить границы его применимости.

1. Виды отношений между теориями

Сигнатура $\Sigma = \langle Const, Func, Pred \rangle$ — это набор нелогических символов языка, которые делятся на индивидные, функциональные и предикатные символы. Множество всех правильно построенных формул сигнатуры Σ будем обозначать посредством $L(\Sigma)$. Если S — некоторое множество формул, то $Cn(S)$ — множество всех его логических следствий.

Под теорией T мы будем понимать множество нелогических аксиом $Ax(T)$, замкнутое относительно выводимости. Запись $S \vdash_T A$ будет использоваться в качестве сокращения для логической выводимости $Ax(T) \cup S \vdash A$.

Определения новых предикатных символов в теории T — это предложения вида $\forall \mathbf{x}(P\mathbf{x} \equiv A)$, где

1. P — новый предикатный символ, который не входит в сигнатуру теории T ;
2. $\mathbf{x} (= x_1, \dots, x_n)$ — попарно различные переменные;
3. Формула A сформулирована в словаре теории T ;
4. Все свободные переменные, входящие в формулу A , содержатся среди $x_1, \dots, x_n$.

Нам понадобятся следующие отношения между теориями, которые были подробно рассмотрены в книге [Смирнов, 1987, с. 35–79].

1. T_2 есть *дефинициальное расширение* $T_1 \Leftrightarrow$ существует такое множество D_2 определений терминов теории T_2 , отсутствующих в T_1 , в терминах теории T_1 , что $T_2 = Cn(T_1 \cup D_2)$.
2. T_1 *дефинициально эквивалентна* $T_2 \Leftrightarrow$ существуют такие дефинициальные расширения T_1 и T_2 , что $Cn(T_1 \cup D_2) = Cn(T_2 \cup D_1)$.
3. T_1 *дефинициально вложима* в $T_2 \Leftrightarrow \exists D_1 \forall A \in L(\Sigma_1)(\vdash_{T_1} A \Leftrightarrow D_1 \vdash_{T_2} A)$.

2. Редукция к одноместным функциям

Доказательство теоремы мы проведем в два этапа. Сначала содержательно на семантическом уровне проанализируем саму возможность редукции, а затем представим подробное доказательство в терминах отношений между теориями.

2.1. Семантический анализ

Идея теоремы очень проста. Пусть на некоторой предметной области D задано n -местное отношение R , которое условно представим в виде таблицы с, возможно, бесконечным числом строк.

$R(x_1, \dots, x_n)$			
a_1	a_2	$\dots$	a_n
b_1	b_2	$\dots$	b_n
$\dots$	$\dots$	$\dots$	$\dots$

Если предметная область D бесконечна, то D равномощна n -кратному декартову произведению $D \times \dots^n \times D$, т.е. $|D| = |D \times \dots^n \times D|$, и, соответственно, существует сюръективное отображение $g : D \twoheadrightarrow R$, которое схематично представим в виде таблицы:

D	g	$R(x_1, \dots, x_n)$			
u_1	$\twoheadrightarrow$	a_1	a_2	$\dots$	a_n
u_2	$\twoheadrightarrow$	b_1	b_2	$\dots$	b_n
$\dots$	$\twoheadrightarrow$	$\dots$	$\dots$	$\dots$	$\dots$

При помощи сюръекции g мы как бы индексируем строки таблицы элементами самой предметной области D . Если $g(u_1) = \langle a_1, \dots, a_n \rangle$ и pr^i — функция проекции на i -й член кортежа, то $a_1 = pr^1(g(u_1)), \dots, a_n = pr^n(g(u_1))$. Это позволяет нам определить n одноместных функций $f_i(u) = pr^i(g(u))$, после чего таблица примет вид:

D	$R(x_1, \dots, x_n)$			
u_1	$f_1(u_1)$	$f_2(u_1)$	$\dots$	$f_n(u_1)$
u_2	$f_1(u_2)$	$f_2(u_2)$	$\dots$	$f_n(u_2)$
$\dots$	$\dots$	$\dots$	$\dots$	$\dots$

Это и есть решение задачи. Определение отношения $R(x_1, \dots, x_n)$ будет выглядеть следующим образом:

$$\forall x_1 \dots \forall x_n (R(x_1 \dots x_n) \equiv \exists u (f_1(u) = x_1 \& \dots \& f_n(u) = x_n)).$$

В том случае, если область D не является бесконечной, то $|D| \neq |D \times \dots \times D|$, и сюръективное отображение $g : D \twoheadrightarrow R$ может не существовать. Для решения этой проблемы достаточно расширить область D до D' таким образом, что $|R| \leq |D'|$. Это всегда можно сделать.

2.2. Доказательство теоремы о редукции к одноместным функциям

Пусть T_1 – произвольная теория первого порядка в сигнатуре $\Sigma_1 = \langle \emptyset, \emptyset, Pred_1 \rangle$ с множеством нелогических аксиом $Ax(T_1)$, представленных замкнутыми формулами логики предикатов первого порядка. Хорошо известно, что любая теория первого порядка может быть приведена к такому виду. Предполагается, что теория T_1 имеет стандартную аксиоматизацию с двумя правилами вывода — *modus ponens* и введение квантора всеобщности $\forall_{in}$.

Определение 1. Для нового одноместного предикатного символа D примем следующее определение:

$$(DD) : \quad \forall x(Dx \equiv Q \supset Q),$$

где Q — замкнутая формула сигнатуры Σ_1 .

Определение 2. Определим операцию релятивизации кванторов ρ :

1. $\rho(x = y) = (x = y)$;
2. $\rho(Px_1..x_n) = Px_1..x_n$;
3. $\rho(\neg A) = \neg \rho(A)$;
4. $\rho(A \nabla B) = \rho(A) \nabla \rho(B) \quad - \nabla \in \{ \&, \vee, \supset, \equiv \}$;
5. $\rho(\exists x A) = \exists x(Dx \& \rho(A))$;
6. $\rho(\forall x A) = \forall x(Dx \supset \rho(A))$.

В следующей лемме мы формулируем и доказываем важнейшее свойство операции релятивизации кванторов.

Лемма 1. $(DD) \vdash A \equiv \rho(A)$.

Доказательство.

Доказательство проводится структурной индукцией по построению формулы A с использованием следующих выводимостей:

$$\bullet \vdash \forall x Dx \equiv \forall x(Dx \equiv Q \supset Q);$$

- $\forall x(Dx \equiv Q \supset Q) \vdash \forall xA \equiv \forall x(Dx \supset A)$;
- $\forall x(Dx \equiv Q \supset Q) \vdash \exists xA \equiv \exists x(Dx \& A)$.

■

Определим сигнатуру $\Sigma_2 = \langle \emptyset, Func_2, \emptyset \rangle$, где $Func_2 = \{f_0^1\} \cup \{f_{P_1}^1, \dots, f_{P_n}^1 \mid P_n \in Pred_1\}$.

Определение 3. Определим операцию φ замены в формуле A всех вхождений подформулы вида Dx на формулу $f_0(x) = x$, а подформулы вида $Px_1..x_n$ на $\exists u(f_{P_1}(u) = x_1 \& .. \& f_{P_n}(u) = x_n)$.

1. $\varphi(x = y) = (x = y)$;
2. $\varphi(Dx) = (f_0(x) = x)$;
3. $\varphi(Px_1..x_n) = \exists u(f_{P_1}(u) = x_1 \& .. \& f_{P_n}(u) = x_n)$;
4. $\varphi(\neg A) = \neg \varphi(A)$;
5. $\varphi(A \nabla B) = \varphi(A) \nabla \varphi(B) \quad - \nabla \in \{\&, \vee, \supset, \equiv\}$;
6. $\varphi(QxA) = Qx\varphi(A) \quad - Q \in \{\forall, \exists\}$.

Нелогическими аксиомами теории T_2 будут $Ax(T_2) = \varphi\rho(Ax(T_1))$.

Определение 4. Примем в языке теории T_2 следующие определения:

$(Df) : \forall x(Dx \equiv f_0(x) = x)$;

$(Pf) : \forall x_1..x_n(Px_1..x_n \equiv \exists u(f_{P_1}(u) = x_1 \& .. \& f_{P_n}(u) = x_n))$ для всех $P^n \in Pred_1$.

Лемма 2. $(Df), (Pf) \vdash \varphi(A) \equiv A$.

Доказательство.

Утверждение леммы следует из определения операции φ и теоремы о замене эквивалентных [Мендельсон, 1976, с. 82–83]. ■

Теорема 1. $\forall A \in L(\Sigma_1) : (DD) \vdash_{T_1} \rho(A) \Rightarrow (Df), (Pf) \vdash_{T_2} \rho(A)$.

Доказательство.

Поскольку по Лемме 1 $(DD) \vdash A \equiv \rho(A)$, то по условию теоремы будет иметь место $(DD) \vdash_{T_1} A$, где формула A не содержит вхождений предикатного символа D . Заменяя в формулах вывода $(DD) \vdash_{T_1} A$ все вхождения

Dx на $Q \supset Q$, мы получим вывод $\forall x(Q \supset Q \equiv Q \supset Q) \vdash_{T_1} A$. Так как $\forall x(Q \supset Q \equiv Q \supset Q)$ – теорема логики, то будет иметь место вывод $\vdash_{T_1} A$.

Доказательство теоремы проводим индукцией по построению вывода $\vdash_{T_1} A$.

Базис. $A \in Ax(T_1)$.

Так как $Ax(T_2) = \varphi\rho(Ax(T_1))$, то $\vdash_{T_2} \varphi\rho(A)$.

По Лемме 2 имеет место $(Df), (Pf) \vdash \varphi\rho(A) \equiv \rho(A)$.

Следовательно, $(Df), (Pf) \vdash_{T_2} \rho(A)$.

Индукционный шаг. Формула A получена по одному из правил вывода из предшествующих формул.

Случай 1. Формула A получена по правилу $m.p.$ из формул B и $B \supset A$.

По индуктивному допущению имеет место $(Df), (Pf) \vdash_{T_2} \rho(B)$ и $(Df), (Pf) \vdash_{T_2} \rho(B \supset A)$. Так как $\rho(B \supset A) = \rho(B) \supset \rho(A)$, то $(Df), (Pf) \vdash_{T_2} \rho(B) \supset \rho(A)$. Отсюда по $m.p.$ получаем, что $(Df), (Pf) \vdash_{T_2} \rho(A)$.

Случай 2. Формула A имеет вид $\forall xB$ и получена по правилу $\forall_{in}$ из формулы B .

Из аксиомы логики $\vdash \rho(B) \supset (Dx \supset \rho(B))$ и индуктивного допущения $(Df), (Pf) \vdash_{T_2} \rho(B)$ по $m.p.$ получаем $(Df), (Pf) \vdash_{T_2} (Dx \supset \rho(B))$. Далее по правилу $\forall_{in}$ получаем $(Df), (Pf) \vdash_{T_2} \forall x(Dx \supset \rho(B))$. Но $\forall x(Dx \supset \rho(B)) = \rho(\forall xB)$. Следовательно, $(Df), (Pf) \vdash_{T_2} \rho(\forall xB)$. ■

Теорема 2. $\forall A \in L(\Sigma_1) : (Df), (Pf) \vdash_{T_2} \rho(A) \Rightarrow (DD) \vdash_{T_1} \rho(A)$.

Доказательство.

Докажем контрпозицию утверждения теоремы. Допустим, не верно, что $(DD) \vdash_{T_1} \rho(A)$. В силу теоремы о полноте логики предикатов первого порядка это означает, что существует такая модель $M_1 = \langle W_1, I_1 \rangle$ для аксиом $Ax(T_1)$ теории T_1 и такое приписывание значений индивидуальным переменным $v \in Val_1 = \{v|v : Var \rightarrow W_1\}$, что $M_1, v \models (DD)$, но $M_1, v \not\models \rho(A)$.

Покажем, что в этом случае существует модель $M_2 = \langle W_2, I_2 \rangle$ для аксиом $Ax(T_2)$ теории T_2 и такое приписывание значений индивидуальным переменным $v \in Val_2 = \{v|v : Var \rightarrow W_2\}$, что $M_2, v \models (Df)$ и $M_2, v \models (Pf)$, но $M_2, v \not\models \rho(A)$.

Определение 5. Модель $M_2 = \langle W_2, I_2 \rangle$ определим следующим образом.

- $W_2 = W_1 \cup Nat$, где Nat – множество натуральных чисел. Вместо Nat можно взять любое другое бесконечное счетное множество.

- $I_2(D) = W_1$.
- $I_2(P^n) = I_1(P^n)$ для каждого $P^n \in Pred_1$.
- Для каждого $P^n \in Pred_1$ фиксируем сюръекцию (отображение на) $g_{P^n} : W_2 \twoheadrightarrow I_2(P^n)$, которая существует в силу бесконечности W_2 . Пусть $I_2(f_{P^i})(a) = pr^i(g_{P^n}(a))$, т.е. если $g_{P^n}(a) = \langle a_1, \dots, a_n \rangle$, то $I_2(f_{P^i})(a) = a_i$.

•

$$I_2(f_0)(a) = \begin{cases} a, & \text{если } a \in W_1; \\ b, & \text{для некоторого } b \in W_1, \text{ если } a \notin W_1. \end{cases}$$

Для дальнейшего доказательства нам понадобятся две леммы.

Лемма 3. В модели M_2 имеют место:

- (1) $M_2 \models (Df)$;
- (2) $M_2 \models (Pf)$.

Доказательство.

(1). Покажем, что $M_2 \models (Df)$, т.е. $M_2 \models \forall x(Dx \equiv f_0(x) = x)$.

$\lceil +1. v \in Val_2$	– доп.
$\lceil +2 M_2, v \models Dx$	– доп.
$\parallel 3. v(x) \in I_2(D)$	– из 2 по опр.
$\parallel 4. v(x) \in W_1$	– из 3, так как $I_2(D) = W_1$
$\parallel 5. I_2(f_0)(v(x)) = v(x)$	– из 4 по опр. $I_2(f_0)$
$\parallel 6. M_2, v \models f_0(x) = x$	– из 5
$\mid 7. M_2, v \models Dx \Rightarrow M_2, v \models f_0(x) = x$	– из 2–6
$\mid 8. M_2, v \models Dx \supset f_0(x) = x$	– из 7
$\lceil +9. M_2, v \models f_0(x) = x$	– доп.
$\parallel 10. I_2(f_0)(v(x)) = v(x)$	– из 9
$\parallel 11. v(x) \in W_1$	– из 10, по опр. $I_2(f_0)$
$\parallel 12. v(x) \in I_2(D)$	– из 11 по опр. $I_2(D)$
$\parallel 13. M_2, v \models Dx$	– из 12
$\mid 14. M_2, v \models f_0(x) = x \Rightarrow M_2, v \models Dx$	– из 9–13
$\mid 15. M_2, v \models f_0(x) = x \supset Dx$	– из 14
$\mid 16. M_2, v \models Dx \equiv f_0(x) = x$	– из 8, 15
$17. M_2 \models \forall x(Dx \equiv f_0(x) = x)$	– из 1, 16

(2). Покажем, что $M_2 \models (Pf)$, т.е. $M_2 \models \forall x_1..x_n(Px_1..x_n \equiv \exists u(f_{P^1}(u) = x_1 \&.. \& f_{P^n}(u) = x_n))$.

- [+1. $v \in Val_2$ — доп.
- [+2. $M_2, v \models D x$ — доп.
- [| 3. $\langle v(x_1), \dots, v(x_n) \rangle \in I_2(P)$ — из 2 по опр.
- [| 4. $g_{P_n}(a) = \langle v(x_1), \dots, v(x_n) \rangle$ — из 3 по опр. M_2 для некот. $a \in W_2$
- [| 5. $I_2(f_{P_i})(a) = v(x_i)$ — из 4 по опр. $I_2(f_{P_i})$ для $1 \leq i \leq n$
- [| 6. $v'(u) = a$ — для некот. $v' \approx_u v$
- [| 7. $M_2, v' \models f_{P_i}(u) = x_i$ — из 5, 6 для всех $1 \leq i \leq n$
- [| 8. $M_2, v' \models f_{P_1}(u) = x_1 \& \dots \& f_{P_n}(u) = x_n$ — из 7
- [| 9. $M_2, v \models \exists u(f_{P_1}(u) = x_1 \& \dots \& f_{P_n}(u) = x_n)$ — из 6, 8
- [| 10. $M_2, v \models P x_1 \dots x_n \Rightarrow M_2, v \models \exists u(f_{P_1}(u) = x_1 \& \dots \& f_{P_n}(u) = x_n)$ — из 2–9
- [| 11. $M_2, v \models P x_1 \dots x_n \supset \exists u(f_{P_1}(u) = x_1 \& \dots \& f_{P_n}(u) = x_n)$ — из 10
- [+12. $M_2, v \models \exists u(f_{P_1}(u) = x_1 \& \dots \& f_{P_n}(u) = x_n)$ — доп.
- [| 13. $M_2, v' \models f_{P_1}(u) = x_1 \& \dots \& f_{P_n}(u) = x_n$ — из 12 для $v' \approx_u v$
- [| 14. $M_2, v' \models f_{P_i}(u) = x_i$ — из 13 для всех $1 \leq i \leq n$
- [| 15. $I_2(f_{P_i})(v'(u)) = v'(x_i)$ — из 14 для всех $1 \leq i \leq n$
- [| 16. $I_2(f_{P_i})(v'(u)) = pr^i(g_{P_n}(v'(u)))$ — из 15 по опр. $I_2(f_{P_i})$
- [| 17. $g_{P_n}(v'(u)) = \langle v'(x_1), \dots, v'(x_n) \rangle$ — из 16 по опр. $I_2(f_{P_i}), g_{P_n}$
- [| 18. $\langle v'(x_1), \dots, v'(x_n) \rangle \in I_2(P)$ — из 17 по опр. g_{P_n}
- [| 19. $M_2, v' \models P x_1 \dots x_n$ — из 18
- [| 20. $M_2, v \models P x_1 \dots x_n$ — из 19, т.к. $v' \approx_u v$
- [| 21. $M_2, v \models \exists u(f_{P_1}(u) = x_1 \& \dots \& f_{P_n}(u) = x_n) \Rightarrow M_2, v \models P x_1 \dots x_n$ — из 12–20
- [| 22. $M_2, v \models \exists u(f_{P_1}(u) = x_1 \& \dots \& f_{P_n}(u) = x_n) \supset P x_1 \dots x_n$ — из 21
- [| 23. $M_2, v \models P x_1 \dots x_n \equiv \exists u(f_{P_1}(u) = x_1 \& \dots \& f_{P_n}(u) = x_n)$ — из 11, 22
- 24. $M_2 \models \forall x_1 \dots x_n (P x_1 \dots x_n \equiv \exists u(f_{P_1}(u) = x_1 \& \dots \& f_{P_n}(u) = x_n))$ — из 1, 23

■

Лемма 4. $\forall A \in L(\Sigma_1) : \forall v \in Val_1 : M_1, v \models \rho(A) \Leftrightarrow M_2, v \models \rho(A).$

Доказательство. Индукцией по построению формулы A .

Базис

Случай 1. $A = (x_1 = x_2), \rho(x_1 = x_2) = (x_1 = x_2).$

- [+1. $M_1, v \models (x_1 = x_2)$ — доп.
- [| 2. $M_2, v \models (x_1 = x_2)$ — из 1, т.к. $Val_1 \subseteq Val_2$
- 3. $M_1, v \models (x_1 = x_2) \Rightarrow M_2, v \models (x_1 = x_2)$ — из 1–2

- [+1. $M_2, v \models (x_1 = x_2)$ — доп.
- [| 2. $M_1, v \models (x_1 = x_2)$ — из 1, т.к. $v \in Val_1$
- 3. $M_2, v \models (x_1 = x_2) \Rightarrow M_1, v \models (x_1 = x_2)$ — из 1–2

Случай 2. $A = Px_1..x_n$, $\rho(Px_1..x_n) = Px_1..x_n$.

$\lceil +1. M_1, v \models Px_1..x_n$	– доп.
$ 2. \langle v(x_1), \dots, v(x_n) \rangle \in I_1(P^n)$	– из 1 по опр.
$ 3. I_2(P^n) = I_1(P^n)$	– по опр. M_2
$ 4. \langle v(x_1), \dots, v(x_n) \rangle \in I_2(P^n)$	– из 2, 3
$ 5. M_2, v \models Px_1..x_n$	– из 4, т.к. $Val_1 \subseteq Val_2$
$6. M_1, v \models Px_1..x_n \Rightarrow M_2, v \models Px_1..x_n$	– из 1–5
$\lceil +1. M_2, v \models Px_1..x_n$	– доп.
$ 2. \langle v(x_1), \dots, v(x_n) \rangle \in I_2(P^n)$	– из 1 по опр.
$ 3. I_2(P^n) = I_1(P^n)$	– по опр. M_2
$ 4. \langle v(x_1), \dots, v(x_n) \rangle \in I_1(P^n)$	– из 2, 3
$ 5. M_1, v \models Px_1..x_n$	– из 4, т.к. $v \in Val_1$
$6. M_2, v \models Px_1..x_n \Rightarrow M_1, v \models Px_1..x_n$	– из 1–5

Индукционный шаг

Случай 1. $A = \neg B$, $\rho(\neg B) = \neg\rho(B)$.

1. $M_1, v \models \rho(B) \Leftrightarrow M_2, v \models \rho(B)$	– инд. доп.
2. $M_1, v \not\models \rho(B) \Leftrightarrow M_2, v \not\models \rho(B)$	– из 1
3. $M_1, v \models \neg\rho(B) \Leftrightarrow M_2, v \models \neg\rho(B)$	– из 2
4. $M_1, v \models \rho(\neg B) \Leftrightarrow M_2, v \models \rho(\neg B)$	– из 3 по опр. ρ

Случай 2. $A = B \nabla C$, $\rho(A \nabla B) = \rho(A) \nabla \rho(B)$, $\nabla \in \{\&, \vee, \supset, \equiv\}$.

1. $M_1, v \models \rho(B) \Leftrightarrow M_2, v \models \rho(B)$	– инд. доп.
2. $M_1, v \models \rho(C) \Leftrightarrow M_2, v \models \rho(C)$	– инд. доп.
3. $M_1, v \models \rho(B) \nabla \rho(C) \Leftrightarrow M_2, v \models \rho(B) \nabla \rho(C)$	– из 1, 2
4. $\rho(B \nabla C) = \rho(B) \nabla \rho(C)$	– по опр. ρ
5. $M_1, v \models \rho(B \nabla C) \Leftrightarrow M_2, v \models \rho(B \nabla C)$	– из 3, 4

Случай 3. $A = \forall x B$, $\rho(\forall x B) = \forall x (Dx \supset \rho(B))$.

$\lceil +1. M_1, v \models \forall x (Dx \supset \rho(B))$	– доп. для $v \in Val_1$
$\lceil +2. M_2, v \not\models \forall x (Dx \supset \rho(B))$	– доп.
$\parallel 3. M_2, v' \not\models Dx \supset \rho(B)$	– из 2 для некот. $v' \approx_x v$, $v' \in Val_2$
$\parallel 4. M_2, v' \models Dx$	– из 3 по опр.
$\parallel 5. M_2, v' \not\models \rho(B)$	– из 3 по опр.
$\parallel 6. v'(x) \in I_2(D)$	– из 4 по опр.
$\parallel 7. v'(x) \in D_1$	– из 6, так как $I_2(D) = W_1$

- || 8. $v' \in Val_1$ – из 7, т.к. $v' \approx_x v$
- || 9. $M_1, v' \models Dx$ – из 4, 8
- || 10. $M_1, v' \not\models \rho(B)$ – из 5, 8 по инд. доп.
- || 11. $M_1, v' \not\models Dx \supset \rho(B)$ – из 9, 10
- || 12. $M_1, v \not\models \forall x(Dx \supset \rho(B))$ – из 11
- | 13. прт. – 1, 12
- | 14. $M_2, v \models \forall x(Dx \supset \rho(B))$ – из 2, 13
- 15. $M_1, v \models \rho(\forall xB) \Rightarrow M_2, v \models \rho(\forall xB)$ – из 1–14

- [+1. $M_2, v \models \forall x(Dx \supset \rho(B))$ – доп. для $v \in Val_1$
- | 2. $\dot{\forall} v' \in Val_2 : v' \approx_x v \Rightarrow M_2, v' \models Dx \supset \rho(B)$ – из 1
- | 3. $\dot{\forall} v' \in Val_1 : v' \approx_x v \Rightarrow M_2, v' \models Dx \supset \rho(B)$ – т.к. $Val_1 \subseteq Val_2$
- | 4. $\dot{\forall} v \in Val_1 : M_1, v \models \rho(B) \Leftrightarrow M_2, v \models \rho(B)$ – инд. доп.
- | 5. $\dot{\forall} v' \in Val_1 : v' \approx_x v \Rightarrow M_1, v' \models Dx \supset \rho(B)$ – из 3, 4
- | 6. $M_1, v' \models \forall x(Dx \supset \rho(B))$ – из 5
- 7. $M_1, v \models \rho(\forall xB) \Rightarrow M_2, v \models \rho(\forall xB)$ – из 1–6

Случай 4. $A = \exists xB$, $\rho(\exists xB) = \exists x(Dx \& \rho(B))$.

- [+1. $M_1, v \models \exists x(Dx \& \rho(B))$ – доп. для $v \in Val_1$
- | 2. $\dot{\exists} v' \in Val_1 : v' \approx_x v$ и $M_1, v' \models Dx \& \rho(B)$ – из 1
- | 3. $\dot{\exists} v' \in Val_1 : v' \approx_x v$ и $M_1, v' \models Dx$ и $M_1, v' \models \rho(B)$ – из 2
- | 4. $\dot{\forall} v \in Val_1 : M_1, v \models \rho(B) \Leftrightarrow M_2, v \models \rho(B)$ – инд. доп.
- | 5. $\dot{\exists} v' \in Val_1 : v' \approx_x v$ и $M_1, v' \models Dx$ и $M_2, v' \models \rho(B)$ – из 3, 4
- | 6. $\dot{\exists} v' \in Val_2 : v' \approx_x v$ и $M_2, v' \models Dx$ и $M_2, v' \models \rho(B)$ – из 5, т.к. $Val_1 \subseteq Val_2$
- | 7. $M_2, v \models \exists x(Dx \& \rho(B))$ – из 6
- 8. $M_1, v \models \rho(\exists xB) \Rightarrow M_2, v \models \rho(\exists xB)$ – из 1–7

- [+1. $M_2, v \models \exists x(Dx \& \rho(B))$ – доп. для $v \in Val_1$
- [+2. $M_1, v \not\models \exists x(Dx \& \rho(B))$ – доп.
- || 3. $M_2, v' \models Dx \& \rho(B)$ – для некот. $v' \approx_x v, v' \in Val_2$
- || 4. $M_2, v' \models Dx$ – из 3
- || 5. $M_2, v' \models \rho(B)$ – из 3
- || 6. $v'(x) \in I_2(D)$ – из 4 по опр.
- || 7. $v'(x) \in W_1$ – из 6, так как $I_2(D) = W_1$
- || 8. $v' \in Val_1$ – из 7, т.к. $v' \approx_x v$
- || 9. $M_1, v' \models Dx$ – из 4, 8
- || 10. $M_1, v' \models \rho(B)$ – из 5, 8 по инд. доп.
- || 11. $M_1, v \models Dx \& \rho(B)$ – из 9, 10
- || 12. $M_1, v \models \exists x(Dx \& \rho(B))$ – из 11
- || 13. прт. – 2, 12

└ 14. $M_1, v \models \exists x(Dx \& \rho(B))$	– из 2, 13
15. $M_2, v \models \rho(\exists x B) \Rightarrow M_1, v \models \rho(\exists x B)$	– из 1–14

■

С учетом Лемм 3 и 4 доказательство теоремы будет выглядеть следующим образом.

+1. $(DD) \not\models_{T_1} \rho(A)$	– доп.
2. $Ax(T_1), (DD) \not\models \rho(A)$	– из 1
3. $M_1, v \models Ax(T_1)$	– из 2
4. $M_1, v \models (DD)$	– из 2
5. $M_1, v \not\models \rho(A)$	– из 2
6. $(DD) \models Ax(T_1) \equiv \rho(Ax(T_1))$	– из Леммы 1
7. $M_1, v \models \rho(Ax(T_1))$	– из 3, 4, 6
8. $M_2, v \models \rho(Ax(T_1))$	– из Леммы 4
9. $M_2, v \models (Df)$	– из Леммы 3
10. $M_2, v \models (Pf)$	– из Леммы 3
11. $M_2, v \models \rho(Ax(T_1)) \equiv \varphi\rho(Ax(T_1))$	– из 9, 10 и Леммы 2
12. $M_2, v \models \varphi\rho(Ax(T_1))$	– из 8, 11
13. $M_2, v \models Ax(T_2)$	– из 12 по опр. $Ax(T_2)$
14. $M_2, v \not\models \rho(A)$	– из 5 и Леммы 4
15. $Ax(T_2), (Df), (Pf) \not\models \rho(A)$	– из 9, 10, 13, 14
16. $(Df), (Pf) \not\models_{T_2} \rho(A)$	– из 15

■

Таким образом, на основании Теорем 1 и 2 мы можем утверждать, что между теориями T_1 и T_2 имеет место отношение дефинициального вложения для релятивизированных формул:

$$\dot{\forall} A \in L(\Sigma_1) : (DD) \vdash_{T_1} \rho(A) \Leftrightarrow (Df), (Pf) \vdash_{T_2} \rho(A).$$

Релятивизация является платой за то, что в общем случае теории могут иметь как конечные, так и бесконечные модели. В силу Леммы 1 эта плата несущественна.

Следствие. В частном случае, если все модели исходной теории T_1 бесконечны, будет иметь место обычное отношение дефинициального вложения теории T_1 в T_2 :

$$\dot{\forall} A \in L(\Sigma_1) : \vdash_{T_1} A \Leftrightarrow (Pf) \vdash_{T_2} A.$$

Это утверждение легко получить из уже имеющегося доказательства.

3. Редукция к единственному трехместному предикату

Как и в случае с функциями, мы проведем доказательство теоремы о редукции в два этапа – содержательного семантического обоснования и формального доказательства в терминах отношений между теориями. При этом единственность предиката следует понимать как единственность трехместного предикатного символа языка.

3.1. Семантический анализ

На семантическом уровне идея редукции произвольного набора отношений к единственному трехместному предикату еще более проста, чем в случае редукции к одноместным функциям. Обратим внимание на следующий очевидный факт. Пусть нам дан лист бумаги в клетку, на котором что-то написано.

a_1	a_2	$\dots$	a_n	$\dots$
b_1	b_2	$\dots$	b_n	$\dots$
$\dots$	$\dots$	$\dots$	$\dots$	$\dots$

Все его содержимое может быть закодировано с помощью единственного трехместного предиката $U(col, row, x)$, смысл которого заключается в том, что на пересечении столбца col и строки row листа бумаги записан символ x .

Нашу таблицу для предиката $R(x_1, \dots, x_n)$ можно рассматривать как такой лист бумаги.

$R(x_1, \dots, x_n)$				
a_1	a_2	$\dots$	a_n	
b_1	b_2	$\dots$	b_n	
$\dots$	$\dots$	$\dots$	$\dots$	

Если область D бесконечна, то существует сюръекция $g : D \rightarrow R$, с помощью которой мы как бы индексируем строки таблицы элементами самой предметной области. Столбцы таблицы упорядочены, и им мы сопоставим отличные друга от друга выделенные элементы предметной области $e_1, \dots, e_n$.

$R(x_1, \dots, x_n)$				
	e_1	e_2	$\dots$	e_n
u_1	a_1	a_2	$\dots$	a_n
u_2	b_1	b_2	$\dots$	b_n
$\dots$	$\dots$	$\dots$	$\dots$	$\dots$

Определение отношения $R(x_1, \dots, x_n)$ будет выглядеть следующим образом:

$$\forall x_1 \dots \forall x_n (Rx_1 \dots x_n \equiv \exists u (U(e_1, u, x_1) \& \dots \& U(e_n, u, x_n))).$$

В том случае, если область D не является бесконечной, то $|D| \neq |D \times \dots \times D|$, и сюръективное отображение $g : D \rightarrow R$ может не существовать. Для решения этой проблемы, как и в случае с одноместными функциями, достаточно расширить область D до D' таким образом, что $|R| \leq |D'|$. Это всегда можно сделать.

3.2. Доказательство теоремы о редукции

Опять берем теорию T_1 в сигнатуре $\Sigma_1 = \langle \emptyset, \emptyset, Pred_1 \rangle$ и задаем сигнатуру $\Sigma_3 = \langle Const_3, \emptyset, Pred_3 \rangle$, где

- $Const_3 = \{e_0\} \cup \{e_{P1}, \dots, e_{Pn} | P^n \in Pred_1\}$;
- $Pred_3 = \{U_3\}$.

Определение 6. Определим операцию ψ замены в формуле A всех вхождений подформулы вида Dx на формулу $U(e_0, x, x)$, а подформулы вида $Px_1 \dots x_n$ на $\exists u (U(e_{P1}, u, x_1) \& \dots \& U(e_{Pn}, u, x_n))$:

1. $\psi(x = x) = (x = y)$;
2. $\psi(Dx) = U(e_0, x, x)$;
3. $\psi(Px_1 \dots x_n) = \exists u (U(e_{P1}, u, x_1) \& \dots \& U(e_{Pn}, u, x_n))$;
4. $\psi(\neg A) = \neg \psi(A)$;
5. $\psi(A \nabla B) = \psi(A) \nabla \psi(B)$ — $\nabla \in \{\&, \vee, \supset, \equiv\}$;
6. $\psi(QxA) = Qx\psi(A)$ — $Q \in \{\forall, \exists\}$.

Нелогическими аксиомами теории T_3 будут $Ax(T_3) = \psi\rho(Ax(T_1))$.

Определение 7. Примем в языке теории T_3 следующие определения:

$$(DU) : \forall x (Dx \equiv U(e_0, x, x));$$

$$(PU) : \forall x_1 \dots x_n (Px_1 \dots x_n \equiv \exists u (U(e_{P1}, u, x_1) \& \dots \& U(e_{Pn}, u, x_n))) \text{ для всех } P^n \in Pred_1.$$

Лемма 5. $\forall A \in L(\Sigma_1) : (DU), (PU) \vdash \psi(A) \equiv A$.

Доказательство. Утверждение леммы следует из определения операции ψ и теоремы о замене эквивалентных [Мендельсон, 1976, с. 82–83]. ■

Теорема 3. $\forall A \in L(\Sigma_1) : (DD) \vdash_{T_1} \rho(A) \Rightarrow (DU), (PU) \vdash_{T_3} \rho(A)$.

Доказательство. Аналогично доказательству Теоремы 1. ■

Теорема 4. $\forall A \in L(\Sigma_1) : (DU), (PU) \vdash_{T_3} \rho(A) \Rightarrow (DD) \vdash_{T_1} \rho(A)$

Доказательство.

Докажем контрпозицию утверждения теоремы. Допустим, не верно, что $(DD) \vdash_{T_1} \rho(A)$. В силу теоремы о полноте логики предикатов первого порядка это означает, что существует такая модель $M_1 = \langle W_1, I_1 \rangle$ для аксиом $Ax(T_1)$ теории T_1 и такое приписывание значений индивидуальным переменным $v \in Val_1 = \{v|v : Var \rightarrow W_1\}$, что $M_1, v \models (DD)$, но $M_1, v \not\models \rho(A)$.

Покажем, что в этом случае существует модель $M_3 = \langle W_3, I_3 \rangle$ для аксиом $Ax(T_3)$ теории T_3 и такое приписывание значений индивидуальным переменным $v \in Val_3 = \{v|v : Var \rightarrow W_3\}$, что $M_3, v \models (DU)$ и $M_3, v \models (PU)$, но $M_3, v \not\models \rho(A)$.

Определение 8. Модель $M_3 = \langle W_3, I_3 \rangle$ определим следующим образом.

- $W_3 = W_1 \cup Nat$, где Nat — множество натуральных чисел. Вместо Nat можно взять любое другое бесконечное счетное множество.
- $I_3(D) = W_3$.
- $I_3(P^n) = I_3(P^n)$ для каждого $P^n \in Pred_1$.
- Если $i \neq j$, то $I_3(e_i) \neq I_3(e_j)$.
- Для каждого $P^n \in Pred_1$ фиксируем сюръекцию (отображение на) $g_{P^n} : W_3 \twoheadrightarrow I_3(P^n)$, которая существует в силу бесконечности W_3 .
- $I_3(U) = I_{e_0}(U) \cup I_{P_1}(U) \cup \dots \cup I_{P_n}(U) \cup \dots$ — для $P^n \in Pred_1$, где
 - * $I_{e_0}(U) = \{\langle I_3(e_0), a, a \rangle | a \in D_1\}$;
 - * $I_{P_i}(U) = \{\langle I_3(e_{P_i}), a, b_i \rangle | pr^i(g_{P^n}(a)) = b_i, P^n \in Pred_1\}$.

Для дальнейшего доказательства нам понадобятся две леммы.

Лемма 6. В модели M_3 имеют место:

- (1) $M_3 \models (DU)$;
- (2) $M_3 \models (PU)$.

Доказательство.

(1). Покажем, что $M_3 \models \forall x(Dx \equiv U(e_0, x, x))$.

$\lceil +1. v \in Val_3$	– доп.
$\lceil +2. M_3, v \models Dx$	– доп.
$\lceil 3. v(x) \in I_3(D)$	– из 2 по опр.
$\lceil 4. v(x) \in W_1$	– из 3, так как $I_3(D) = W_1$
$\lceil 5. \langle I_3(e_0), v(x), v(x) \rangle \in I_{e_0}(U)$	– из 4 по опр. $I_{e_0}(U)$
$\lceil 6. \langle I_3(e_0), v(x), v(x) \rangle \in I_3(U)$	– из 5 по опр. $I_3(U)$
$\lceil 7. M_3, v \models U(e_0, x, x)$	– из 6
$\lceil 8. M_3, v \models Dx \Rightarrow M_3, v \models U(e_0, x, x)$	– из 2–7
$\lceil 9. M_3, v \models Dx \supset U(e_0, x, x)$	– из 8
$\lceil +10. M_3, v \models U(e_0, x, x)$	– доп.
$\lceil 11. \langle I_3(e_0), v(x), v(x) \rangle \in I_3(U)$	– из 10 по опр.
$\lceil 12. \langle I_3(e_0), v(x), v(x) \rangle \in I_{e_0}(U)$	– из 11 по опр. $I_3(U)$
$\lceil 13. v(x) \in W_1$	– из 12, по опр. $I_{e_0}(U)$
$\lceil 14. v(x) \in I_3(D)$	– из 13, так как $I_3(D) = W_1$
$\lceil 15. M_3, v \models Dx$	– из 14
$\lceil 16. M_3, v \models U(e_0, x, x) \Rightarrow M_3, v \models Dx$	– из 10–15
$\lceil 17. M_3, v \models U(e_0, x, x) \supset Dx$	– из 16
$\lceil 18. M_3, v \models Dx \equiv U(e_0, x, x)$	– из 9, 17
$\lceil 19. M_3 \models \forall x(Dx \equiv U(e_0, x, x))$	– из 1, 18

(2). Докажем $M_3 \models \forall x_1 \dots x_n (Px_1 \dots x_n \equiv \exists u (U(e_{P1}, u, x_1) \& \dots \& U(e_{Pn}, u, x_n)))$.

$\lceil +1. v \in Val_3$	– доп.
$\lceil +2. M_3, v \models Px_1 \dots x_n$	– доп.
$\lceil 3. \langle v(x_1), \dots, v(x_n) \rangle \in I_3(P)$	– из 2 по опр.
$\lceil 4. g_{Pn}(a) = \langle v(x_1), \dots, v(x_n) \rangle$	– из 3 по опр. M_3 для некот. $a \in D_3$
$\lceil 5. \langle I_3(e_{Pi}), a, v(x_i) \rangle \in I_{Pi}(U)$	– из 4 по опр. $I_{Pi}(U)$ для $1 \leq i \leq n$
$\lceil 6. \langle I_3(e_{Pi}), a, v(x_i) \rangle \in I_3(U)$	– из 5 по опр. $I_3(U)$ для $1 \leq i \leq n$
$\lceil 7. v'(u) = a$	– для некот. $v' \approx_u v$
$\lceil 8. M_3, v' \models U(e_{Pi}, u, x_i)$	– из 6, 7 для $1 \leq i \leq n$
$\lceil 9. M_3, v' \models U(e_{P1}, u, x_1) \& \dots \& U(e_{Pn}, u, x_n)$	– из 8
$\lceil 10. M_3, v \models \exists u (U(e_{P1}, u, x_1) \& \dots \& U(e_{Pn}, u, x_n))$	– из 7, 9
$\lceil 11. M_3, v \models Px_1 \dots x_n \Rightarrow M_3, v \models \exists u (U(e_{P1}, u, x_1) \& \dots \& U(e_{Pn}, u, x_n))$	– из 2–10
$\lceil 12. M_3, v \models Px_1 \dots x_n \supset \exists u (U(e_{P1}, u, x_1) \& \dots \& U(e_{Pn}, u, x_n))$	– из 11
$\lceil +13. M_3, v \models \exists u (U(e_{P1}, u, x_1) \& \dots \& U(e_{Pn}, u, x_n))$	– доп.
$\lceil 14. M_3, v' \models U(e_{P1}, v'(u), x_1) \& \dots \& U(e_{Pn}, v'(u), x_n)$	– из 13 для $v' \approx_u v$
$\lceil 15. M_3, v' \models U(e_{Pi}, v'(u), x_i)$	– из 14 для $1 \leq i \leq n$

- ||16. $\langle I_3(e_{P_i}), v'(u), v'(x_i) \rangle \in I_3(U)$ — из 15
- ||17. $\langle I_3(e_{P_i}), v'(u), v'(x_i) \rangle \in I_{P_i}(U)$ — из 16 по опр. $I_{P_i}(U)$
- ||18. $g_{P_n}(v'(u)) = \langle v'(x_1), \dots, v'(x_n) \rangle$ — из 17 по опр. $I_{P_i}(U)$, g_{P_n}
- ||19. $\langle v'(x_1), \dots, v'(x_n) \rangle \in I_3(P)$ — из 18 по опр. g_{P_n}
- ||20. $M_3, v' \models Px_1..x_n$ — из 19
- ||21. $M_3, v \models Px_1..x_n$ — из 7, 20, т.к. $v' \approx_u v$
- |22. $M_3, v \models \exists u(U(e_{P_1}, u, x_1) \& \dots \& U(e_{P_n}, u, x_n)) \Rightarrow M_3, v \models Px_1..x_n$ — из 13–21
- |23. $M_3, v \models \exists u(U(e_{P_1}, u, x_1) \& \dots \& U(e_{P_n}, u, x_n)) \supset Px_1..x_n$ — из 22
- |24. $M_3, v \models Px_1..x_n \equiv \exists u(U(e_{P_1}, u, x_1) \& \dots \& U(e_{P_n}, u, x_n))$ — из 12, 23
- 25. $M_3 \models \forall x_1..x_n (Px_1..x_n \equiv \exists u(U(e_{P_1}, u, x_1) \& \dots \& U(e_{P_n}, u, x_n)))$ — из 1, 24

■

Лемма 7. $\forall A \in L(\Sigma_1) : \forall v \in Val_1 : M_1, v \models \rho(A) \Leftrightarrow M_3, v \models \rho(A)$.

Доказательство. Доказательство проводится по построению формулы A совершенно аналогично доказательству Леммы 4. ■

С учетом Лемм 6 и 7 доказательство теоремы будет выглядеть следующим образом.

- +1. $(DD) \not\models_{T_1} \rho(A)$ — доп.
- 2. $Ax(T_1), (DD) \not\models \rho(A)$ — из 1
- 3. $M_1, v \models Ax(T_1)$ — из 2
- 4. $M_1, v \models (DD)$ — из 2
- 5. $M_1, v \not\models \rho(A)$ — из 2
- 6. $(DD) \models Ax(T_1) \equiv \rho(Ax(T_1))$ — из Леммы 1
- 7. $M_1, v \models \rho(Ax(T_1))$ — из 3, 4, 6
- 8. $M_3, v \models \rho(Ax(T_1))$ — из Леммы 7
- 9. $M_3, v \models (DU)$ — из Леммы 6
- 10. $M_3, v \models (PU)$ — из Леммы 6
- 11. $M_3, v \models \rho(Ax(T_1)) \equiv \varphi\rho(Ax(T_1))$ — из 9, 10 и Леммы 2
- 12. $M_3, v \models \varphi\rho(Ax(T_1))$ — из 8, 11
- 13. $M_3, v \models Ax(T_3)$ — из 12 по опр. $Ax(T_3)$
- 14. $M_3, v \not\models \rho(A)$ — из 5 и Леммы 7
- 15. $Ax(T_3), (DU), (PU) \not\models \rho(A)$ — из 9, 10, 13, 14
- 16. $(DU), (PU) \not\models_{T_3} \rho(A)$ — из 15

Таким образом, на основании Теорем 3 и 4 мы можем утверждать, что между теориями T_1 и T_3 имеет место отношение дефинициального вложения для релятивизированных формул:

$$\forall A \in L(\Sigma_1) : (DD) \vdash_{T_1} \rho(A) \Leftrightarrow (DU), (PU) \vdash_{T_3} \rho(A).$$

Релятивизация является платой за то, что в общем случае теории могут иметь как конечные, так и бесконечные модели. В силу Леммы 1 эта плата несущественна.

Следствие. В частном случае, если все модели исходной теории T_1 бесконечны, будет иметь место обычное отношение дефинициального вложения теории T_1 в T_3 :

$$\forall A \in L(\Sigma_1) : \vdash_{T_1} A \Leftrightarrow (PU) \vdash_{T_3} A.$$

Это утверждение легко получить из уже имеющегося доказательства. ■

4. Заключение

Дефинициальное вложение любой теории первого порядка в теорию, язык которой содержит лишь логический предикат равенства и одноместные функциональные символы, говорит о полноте выразительных возможностей этого языка. Его достаточно для изучения логики предикатов первого порядка. На теоретико-модельном уровне этому языку будет соответствовать онтология предметов и функциональных связей между ними.

Обычно онтологические допущения в логике предикатов первого порядка сводят к допущениям о непустоте предметной области. Знаменитый тезис Куайна — «Быть — значит быть значением связанной переменной». С философской точки зрения, это слишком узкое понимание онтологических допущений.

Приведем цитату из работы Р. Карнапа «Старая и новая логика» в связи с его размышлениями о логике Фреге–Рассела.

«Когда Лейбниц осознал возможность использования предположений об отношениях, он смог прийти к правильному истолкованию пространства: не местоположения тел, а их положения по отношению к другим телам, — вот в чем заключается элементарное положение дел. . . . К сожалению, его борьба за релятивистское истолкование пространства со сторонниками ньютоновского абсолютного пространства была столь же безуспешной, как и его стремление расширить область логики. Лишь 200 лет спустя его идеи обрели признание: в логике благодаря созданию теории отношений, в физике — благодаря теории относительности» [Карнап, 2007, с. 110–111].

В этой цитате изучаемым в логике отношениям приписывается онтологический статус правильного истолкования пространства. Можно сказать, что эта точка зрения и сегодня является доминирующей. Ее принимают как само собой разумеющуюся. Как мы уже писали [Шалак, 2010], всякой онтологии отношений соответствует функциональная онтология. Теоремы 1 и 2 усиливают этот результат, позволяя перейти от реляционной к функциональной онтологии, содержащей лишь одноместные функции. То, что логика отношений несет в себе правильный взгляд на окружающий мир, является не более чем иллюзией, ограничивающей кругозор исследователей.

С одной стороны, тезис Пирса проваливается, так как любую теорию мы можем представить в языке одноместных функций, которые, с теретико-множественной точки зрения, являются двухместными отношениями. С другой стороны, существует язык с единственным в определенном смысле универсальным трехместным предикатным символом $U(e, u, x)$, в котором также может быть представлена любая теория. С нашей точки зрения, эта универсальность $U(e, u, x)$ несет в себе определенную онтологическую нагрузку и может рассматриваться как подтверждение тезиса Пирса и его философии троичности.

Логика – это не просто игра в символы. Интерпретируя те или иные теоремы, философы задаются вопросом, что стоит за ними? При онтологической интерпретации смысл трехместного предикатного символа $U(e, u, x)$ заключается в том, что мир может быть представлен как множество индивидов, взаимосвязанных единственным трехместным отношением. Ему соответствует абстрактное универсальное трехмерное пространство, в котором могут быть описаны все законы окружающего мира.

Одной из базовых структур теории относительности является четырехмерное пространство-время Минковского, которое можно представить четырехместным предикатом $S(x, y, z, t)$. Из теоремы о редукции к единственному трехместному предикату $U(e, u, x)$ следует, что пространство-время Минковского не является фундаментальной физической структурой, так как может быть редуцировано к более простому трехместному отношению, физический смысл которого отличен от привычного и потому кажущегося естественным пространственно-временного.

Но возможна и эпистемическая интерпретация предикатного символа $U(e, u, x)$. Не является ли его существование следствием ограниченности структур нашего языка, как конечного средства представления знаний, и невозможности выйти за его границы?

Физики уже много лет размышляют над возможностью построения теории всего [Хокинг, 2018], [Вайнберг]. Из теоремы о редукции к единствен-

ному трехместному предикату $U(e, u, x)$ следует, что если такая теория возможна, то фундаментальным ее отношением будет именно трехместное отношение, а все остальные будут определены через него.

Вспомним универсальную машину Тьюринга и предикат $UM(e, u, x)$, которым можно ее представить. В нем e — это геделев номер конкретной машины Тьюринга, u — входные данные (начальное состояние рабочей ленты), а x — результат вычисления (конечное состояние рабочей ленты). Имеется явный структурный параллелизм между ним и трехместным предикатом $U(e, u, x)$. Предикат $UM(e, u, x)$ — это контейнер всех вычислимых функций, по одной для каждого геделева номера e . Но и предикат $U(e, u, x)$ тоже можно рассматривать как контейнер одноместных функций для каждой конкретной константы e . Это легко видно из определения модели M_3 при доказательстве теоремы о вложении. В этом заключается связь между теоремой о редукции к одноместным функциям и теоремой о редукции к единственному трехместному предикату. Этот предикат, как и предикат универсальной машины Тьюринга, связывает множество одноместных функций в единую структуру. Возможно, за этим стоит нечто большее, но пока не понятно, что.

Литература

- Вайнберг — *Вайнберг С.* Мечты об окончательной теории. Физика в поисках самых фундаментальных законов природы. 2-е изд. М.: Едиториал УРСС, 2004. 256 с.
- Карнап, 2007 — *Карнап Р.* Старая и новая логика // Журнал «Erkenntnis» («Познание»). Избранное. М.: Издательский дом «Территория будущего», Идея-Пресс, 2007. С. 105–119.
- Мендельсон, 1976 — *Мендельсон Э.* Введение в математическую логику. М.: Наука, 1976. 320 с.
- Пирс, 2005 — *Пирс Ч.С.* Рассуждение и логика вещей. Лекции для Кембриджских конференций 1898 года. М.: РГГУ, 2005. 371 с.
- Смирнов, 1987 — *Смирнов В.А.* Логические методы анализа научного знания. М.: Наука, 1987. 256 с.
- Хокинг, 2018 — *Хокинг С.* Теория всего. М.: АСТ, 2018. 160 с.
- Шалак, 2010 — *Шалак В.И.* Логика функций vs логика отношений // Логические исследования. Вып. 16. М.: Наука, 2010. С. 259–271.
- Church, Quine, 1952 — *Church A., Quine W.* Some Theorems on Definability and Decidability // The Journal of Symbolic Logic. 1952. Vol. 17. No. 3. P. 179–187.
- Herzberger, 1981 — *Herzberger H.G.* Peirce's Remarkable Theorem // Pragmatism and Purpose. Toronto: Toronto University Press, 1981. P. 41–58.

-
- Kleinert, 2007 – *Kleinert E.* On the Reducibility of Relations: Variations on a Theme of Peirce // Transactions of the Charles S. Peirce Society. 2007. Vol. 43. No. 3 (Summer, 2007). P. 509–520.
- Skidmore, 1971 – *Skidmore A.* Peirce & Triads // Transactions of the Charles S. Peirce Society. 1971. Vol. 7. No. 1 (Winter, 1971). P. 3–23.

VLADIMIR I. SHALACK

Peirce's thesis: logical analysis and ontological consequences

Vladimir I. Shalack

Institute of Philosophy of RAS,

12/1 Goncharnaya Str., Moscow, 109240, Russian Federation.

E-mail: shalack@gmail.com

Abstract: C. Peirce put forward the hypothesis that any relations can be reduced to relations whose arity does not exceed three. This hypothesis is closely related to the basic categories of his phenomenology.

In the paper we provide semantic analysis and detailed proof of the following two results.

1. Any first-order theory can be represented in a language containing a finite set of one-place functional symbols. A philosophically important consequence of this is the same expressive power of relational and functional languages and corresponding ontologies.
2. Any first-order theory can be represented in a language containing a single three-place predicate symbol U and a finite set of individual constants. This confirms Peirce's conjecture about the fundamental role that three-place relationships play. A language whose descriptive symbols contain only individual constants and the only three-place predicate turns out to be a universal language for representing any first-order theories.

There is a structural similarity between the three-place predicate $U(e, u, x)$ and the three-place predicate $UM(e, u, x)$, which represents the universal Turing machine. Both can be considered as containers of one-place functions. From this point of view, the predicate U is an extension of the predicate UM to any, and not only effectively computable functions. Proved theorems force us to take a fresh look at many physical theories.

In the theory of relativity, the four-dimensional Minkowski space-time is considered as the fundamental structure, which can be represented as a four-place predicate $S(x, y, z, t)$. It follows from the theorem on the existence of the predicate $U(e, u, x)$ that the four-dimensional Minkowski space-time is not a fundamental physical structure, since it can be reduced to a single three-place relation.

Keywords: Peirce's thesis, reduction of relations, relations between theories, definitional embeddability of theories, ontological assumptions

For citation: Shalack V.I. "Tezis Pirs'a: logicheskii analiz i ontologicheskie sledstviya" [Peirce's thesis: logical analysis and ontological consequences], *Logicheskie Issledovaniya / Logical Investigations*, 2019, Vol. 25, No. 2, pp. 138–163. DOI: 10.21146/2074-1472-2019-25-2-138-163 (In Russian)

References

- Carnap, 2007 – Carnap, R. “Staraya i novaya logika” [Old and New Logic], in: *ZHurnal “Erkenntnis” (“Poznanie”). Izbrannoe*. Moscow: Izdatel'skij dom “Territoriya budushchego”, Ideya-Press, 2007. pp. 105–119. (In Russian)
- Church, Quine, 1952 – Church, A., Quine, W. “Some Theorems on Definability and Decidability”, *The Journal of Symbolic Logic*, 1952, Vol. 17, No. 3, pp. 179–187.
- Hawking, 2018 – Hawking, S. *Teoriya vsego* [The Theory of Everything]. Moscow: AST, 2018. 160 pp. (In Russian)
- Herzberger, 1981 – Herzberger, H.G. “Peirce's Remarkable Theorem”, in *Pragmatism and Purpose*. Toronto: Toronto University Press, 1981, pp. 41–58.
- Kleinert, 2007 – Kleinert, E. “On the Reducibility of Relations: Variations on a Theme of Peirce”, in: *Transactions of the Charles S. Peirce Society*, 2007, Vol. 43, No. 3 (Summer, 2007), pp. 509–520.
- Mendelson, 1976 – Mendelson, E. *Vvedenie v matematicheskuyu logiku* [Introduction to Mathematical Logic]. Moscow: Nauka, 1976. 320 pp. (In Russian)
- Peirce, 2005 – Peirce, Ch.S. *Rassuzhdenie i logika veshchei. Lektsii dlya Kembridzhskikh konferentsii 1898 goda* [Reasoning and the Logic of Things. The Cambridge Conferences Lectures of 1898]. Moscow: RGGU, 2005. 371 pp. (In Russian)
- Shalack, 2010 – Shalack, V.I. *Logika funktsij vs logika otnoshenij* [Logic of Functions vs Logic of Relations], in: *Logicheskie issledovaniya*, Vol. 16. Moscow: Nauka, 2010, pp. 259–271. (In Russian)
- Skidmore, 1971 – Skidmore, A. “Peirce & Triads”, *Transactions of the Charles S. Peirce Society*, 1971, Vol. 7, No. 1 (Winter, 1971), pp. 3–23.
- Smirnov, 1987 – Smirnov, V.A. *Logicheskie metody analiza nauchnogo znaniya* [Logical Methods of Analysis of Scientific Knowledge]. Moscow: Nauka, 1987. 256 s. (In Russian)
- Weinberg, 2004 – Weinberg, S. *Mechty ob okonchatel'noj teorii. Fizika v poiskah samyh fundamental'nyh zakonov prirody* [Dreams of a Final Theory], 2-e izd. Moscow: Editorial URSS, 2004. 256 pp. (In Russian)