Н.Е. ТОМОВА

Об одном классе n -значных лите­раль­ных паранепротиворечивых/параполных логик

Наталья Евгеньевна Томова

Институт философии РАН.

Российская Федерация, 109240, г. Москва, ул. Гончарная, д. 12, стр. 1.

E-mail: natalya-tomova@yandex.ru

Аннотация: Паранепротиворечивые и параполные логики позволяют работать с противоречивой и неполной информацией. В статье рассмотрен небольшой класс n -значных лите­раль­ных паранепротиворечивых/параполных логик. Представителями дан­ного класса являются известная трехзначная логика Сетте $\mathbf{P}^1$ и дуальная ей логика $\mathbf{I}^1$. Существует несколько методов конструирования лите­раль­ных паранепротиворечивых/параполных логик, одним из них является метод комбинирования изоморфов классической логики. А.С. Карпенко было установлено, что паранепротиворечивая логика Сетте $\mathbf{P}^1$ и дуальная ей параполная логика $\mathbf{I}^1$ могут быть получены в результате комбинирования изоморфов классической логики, содержащихся в трехзначной логике Бочвара. В статье рассматривается обобщение данного алгоритма на n -значный случай, и построен класс n -значных лите­раль­ных паранепротиворечивых/параполных логик. В данном классе логик выделены паранепротиворечивые системы: приведены два вида логических матриц, доказаны соответствующие утверждения. Также доказано, что оба вида матриц задают ту же паранепротиворечивую теорию, что и матрица, определяющая паранепротиворечивую логику Сетте $\mathbf{P}^1$. Также посредством указания двух видов логических матриц были выделены и параполные логики. Доказано, что эти два вида матриц задают ту же параполную теорию, что и матрица, определяющая параполную логику $\mathbf{I}^1$. В качестве перспективы исследования указывается изучение функциональных свойств полученных n -значных обобщений, вероятно, как в случае с трехзначными и четырехзначными логиками, паранепротиворечивые и параполные логики будут попарно функционально эквивалентны. Поставлен также вопрос о классе n -значных обобщений паранормальных систем.

Ключевые слова: паранепротиворечивость, параполнота, многозначные логики, логические матрицы, изоморфы

Для цитирования: Томова Н.Е. Об одном классе n -значных лите­раль­ных паранепротиворечивых/параполных логик // Логические исследования / Logical Investigations. 2020. Т. 26. № 2. С. 144–159. DOI: 10.21146/2074-1472-2020-26-2-144-159

1. Введение

Статья продолжает цикл исследований, посвященных изучению лите­ральных паранепротиворечивых/параполных логик (лите­ральных парало­гик или LPP-логик) — логик, в которых свойства паранепротиворечивости и (или) параполноты имеют место только на уровне лите­ралов¹, т. е. про­позициональных переменных и их отрицаний.

Изучению LPP-логик посвящено немало работ. Так, например, в ра­ботах [Puga, Da Costa, 1988; Petrukhin, 2019; Popov, 1999; Девяткин, 2018; Fernández, Coniglio, 2003; Карпенко, Томова, 2016] изложены неко­торые результаты относительно логик данного класса. К классу LPP-логик относятся известная трехзначная паранепротиворечивая логика Сет­те $\mathbf{P}^1$ [Sette, 1953] и дуальная ей параполная логика $\mathbf{I}^1$ [Sette, Carnielli, 1995].

Р. Левин и И. Микенберг в [Lewin, Mikenberg, 2006] задают алгоритм построения LPP-матриц, определяющих весь класс таких логик.

Иной алгоритм конструирования лите­ральных паралогик — посред­ством комбинирования изоморфов классической логики — рассмотрен в работах [Karpenko, 2000; Карпенко, Томова, 2016; Tomova, 2020]. При этом классы лите­ральных паралогик, полученные посредством вышеука­занных методов не эквивалентны. Класс, полученный методом комбиниро­вания изоморфов является лишь подклассом класса логик, заданных LPP-матрицами.

Известно, что трехзначная паранепротиворечивая логика Сетте $\mathbf{P}^1$ [Sette, 1953] и параполная логика $\mathbf{I}^1$ [Sette, Carnielli, 1995] могут быть пред­ставлены как результат комбинирования логических операций двух изо­морфов классической логики, содержащихся в трехзначной логике Бочва­ра [Karpenko, 2000]. В работе [Tomova, 2020] метод построения LPP-логик посредством комбинирования изоморфов классической логики рассмотрен на четырехзначном случае.

Если комбинирование двух трехзначных изоморфов приводит к постро­ению двух LPP-логик — паранепротиворечивой логики $\mathbf{P}^1$ и параполной логики $\mathbf{I}^1$, то комбинирование операций четырех четырехзначных изо­морфов классической логики позволяет получить пять паранепротиворечивых, пять параполных и две паранормальные логики [Карпенко, Томова, 2016, с. 69].

Тот факт, что логики $\mathbf{P}^1$ и $\mathbf{I}^1$ представляют собой комбинацию изо­морфов, является существенным их свойством в том смысле, что, применяя

¹Литералами называем множество Lit всех формул вида $\neg^k p$, где $\neg^0 p = p$ и $\neg^{k+1} p = \neg(\neg^k p)$, для $p \in Var$, Var — счетное множество пропозициональных переменных.

этот метод уже на четырехзначном случае, мы получаем обобщения $\mathbf{P}^1$ и $\mathbf{I}^1$, в которых сохраняются важные свойства этих трехзначных LPP-логик. Так, известно, что $\mathbf{P}^1$ и $\mathbf{I}^1$ функционально эквивалентны [Карпенко, Томова, 2016, с. 44], так же и полученные 10 обобщений попарно функционально эквивалентны, кроме того, четырехзначные паранепротиворечивые обобщения задают одну и ту же паранепротиворечивую теорию, что и $\mathbf{P}^1$, а парapolные — ту же парapolную теорию, что и $\mathbf{I}^1$ [Томова, 2020].

В данной работе мы покажем, что n -значные обобщения $\mathbf{P}^1$ и $\mathbf{I}^1$, полученные посредством комбинирования соответствующих изоморфов классической логики, задают те же теории, что и паранепротиворечивая логика $\mathbf{P}^1$ и парapolная логика $\mathbf{I}^1$.

2. Определения

Для наших целей в данной статье удобно представление логических систем посредством логических матриц. Приведем здесь базовые определения.

Определение 1. Пусть $Var = \{p, q, r \dots\}$ — счетное множество пропозициональных переменных и $Con = \{F_1, \dots, F_n\}$ — конечное множество пропозициональных связок, где каждой связке F_i сопоставлено натуральное число $a(F_i)$, которое обозначает число ее аргументов. Хотя бы для одного $i \in \{1, \dots, n\}$ имеет место $a(F_i) \neq 0$. Множество For определяется индуктивно:

- (1) $Var \subseteq For$,
- (2) Для каждого такого $F_i \in Con$, что $a(F_i) = k$, $F_i(A_1, \dots, A_k) \in For$, если $A_1, \dots, A_k \in For$,
- (3) Ничто иное не принадлежит For .

Алгебру формул $\mathcal{L} = \langle For, F_1, \dots, F_m \rangle$ будем называть *пропозициональным языком*.

Пусть $\mathcal{A} = \langle V, f_1, \dots, f_m \rangle$ алгебра того же типа, что пропозициональный язык $\mathcal{L}$, где V — множество истинностных значений и f_i — функция на V той же местности, что и F_i .

Определение 2. Упорядоченная тройка $\mathfrak{M} = \langle V, f_1, \dots, f_m, D \rangle$, где $D \subseteq V$ — непустое собственное подмножество V , называется *логической матрицей* для $\mathcal{L}$. Элементы D будем называть *выделенными значениями* $\mathfrak{M}$.

Определение 3. *Оценкой* v формулы A в матрице $\mathfrak{M}$ для языка $\mathcal{L}$ называется такое отображение $\mathcal{L}$ в $\mathcal{A} = \langle V, f_1, \dots, f_m \rangle$, что

1. если p — пропозициональная переменная, тогда $v(p) \in V$;
2. если $A_1, A_2, \dots, A_n$ — формулы и F^n — n -местная связка языка $\mathcal{L}$, тогда $v(F^n(A_1, A_2, \dots, A_n)) = f^n(v(A_1), v(A_2), \dots, v(A_n))$, где f^n — функция на V , соответствующая F^n .

Определение 4. Некоторая формула A есть *тавтология* в $\mathfrak{M}$ (сокращенно — $\models_{\mathfrak{M}} A$), е.т.е. для каждой оценки v в $\mathfrak{M}$ верно, что $v(A) \in D$.

Определение 5. Теорией, порождаемой $\mathfrak{M}$, называем множество всех тавтологий в $\mathfrak{M}$ и обозначаем его как $E(\mathfrak{M})$.

Определение 6. Формула B логически следует из множества формул $\Gamma = \{A_1, A_2, \dots, A_n\}$ в $\mathfrak{M}$ (сокращенно — $\Gamma \models_{\mathfrak{M}} B$), е.т.е. не существует такой оценки v в $\mathfrak{M}$, что $v(A_i) \in D$ для каждой $A_i \in \Gamma$, и $v(B) \notin D$.

Определение 7. Отношением следования, порождаемым $\mathfrak{M}$, называем множество $Cn(\mathfrak{M})$ упорядоченных пар $\langle \Gamma, B \rangle$ таких, что для всякой оценки v в $\mathfrak{M}$, если $v(\Gamma) \subseteq D$, то $v(B) \in D$.

Тогда под логикой L будем понимать пару $\langle \mathcal{L}, Cn(\mathfrak{M}) \rangle$.

Пусть матрица $\mathfrak{M}_1$ со множеством базовых матричных операций Φ_1 порождает логику L_1 , матрица $\mathfrak{M}_2$ со множеством базовых матричных операций Φ_2 порождает логику L_2 . При этом матрицы $\mathfrak{M}_1$ и $\mathfrak{M}_2$ — матрицы одинаковой мощности.

Определение 8. Логика L_1 *функционально вложима* в логику L_2 , е.т.е. любая функция из Φ_1 может быть представлена как суперпозиция² функций из Φ_2 .

Определение 9. Логика L_1 *функционально эквивалентна* логике L_2 , е.т.е.

- (1) логика L_1 функционально вложима в логику L_2 и
- (2) логика L_2 функционально вложима в логику L_1 .

Определение 10. *Изоморфом классической пропозициональной логики* называется логическая матрица, характеризующая классический класс тавтологий.

Существуют различные формальные и содержательные критерии, характеризующие паранепротиворечивость, параполноту, паранормальность.

В работе [Karpenko, 1999] подробно рассмотрен критерий Яськовского для построения паранепротиворечивых логических систем. В нашем исследовании мы будем использовать его «импликативно-негативную» часть:

²Операцией суперпозиции называют операцию порождения одних функций через другие с помощью формул.

Определение 11. В системе *паранепротиворечивой* логики не верифицируется закон *Дунса Скота* $A \rightarrow (\neg A \rightarrow B)$ [Jaskowski, 1969].

Определение 12. В системе *параполной* логики не верифицируется закон *Клавия* $(\neg A \rightarrow A) \rightarrow A$ [Ciuciura, 2015].

Определение 13. Логика называется *паранормальной*, если она одновременно является и паранепротиворечивой, и параполной.

3. Логики $\mathbf{P}^1$ и $\mathbf{I}^1$

Паранепротиворечивая логика $\mathbf{P}^1$ [Sette, 1953] и параполная логика $\mathbf{I}^1$ [Sette, Carnielli, 1995] играют центральную роль в нашем исследовании.

Исчисления P^1 и I^1 представлены в языке, включающем отрицание и импликацию в качестве исходных связок.

Аксиоматизация P^1 :

$$(A1) \ A \rightarrow (B \rightarrow A)$$

$$(A2) \ (A \rightarrow (B \rightarrow C)) \rightarrow ((A \rightarrow B) \rightarrow (A \rightarrow C))$$

$$(A3) \ (\neg A \rightarrow \neg B) \rightarrow ((\neg A \rightarrow \neg\neg B) \rightarrow A)$$

$$(A4) \ (A \rightarrow B) \rightarrow \neg\neg(A \rightarrow B)$$

Правило вывода: *modus ponens* [Sette, Alves, 1973].

Исчисление P^1 семантически полно относительно следующей трехзначной логической матрицы:

$$\mathfrak{M}^{P^1} = \langle \{1, 1/2, 0\}, \neg_{P^1}, \rightarrow_{P^1}, \{1, 1/2\} \rangle,$$

где $\neg_{P^1}$ и $\rightarrow_{P^1}$ определяются таблицами

x	$\neg_{P^1}x$	$\rightarrow_{P^1}$	1	$1/2$	0
1	0	1	1	1	0
$1/2$	1	$1/2$	1	1	0
0	1	0	1	1	1

Исчисление I^1 аксиоматизировано посредством следующих схем аксиом:

$$(A1) \ A \rightarrow (B \rightarrow A)$$

$$(A2) \ (A \rightarrow (B \rightarrow C)) \rightarrow ((A \rightarrow B) \rightarrow (A \rightarrow C))$$

$$(A3') (\neg\neg A \rightarrow \neg B) \rightarrow ((\neg\neg A \rightarrow B) \rightarrow \neg A)$$

$$(A4') \neg\neg(A \rightarrow B) \rightarrow (A \rightarrow B)$$

Правило вывода: *modus ponens* [Sette, Carnielli, 1995].

Исчисление I^1 семантически полно относительно следующей трехзначной логической матрицы:

$$\mathfrak{M}^{I^1} = \langle \{1, 1/2, 0\}, \neg_{I^1}, \rightarrow_{I^1}, \{1\} \rangle,$$

где $\neg_{I^1}$ и $\rightarrow_{I^1}$ определяются таблицами

x	$\neg_{I^1}x$		$\rightarrow_{I^1}$	1	1/2	0
1	0		1	1	0	0
1/2	0		1/2	1	1	1
0	1		0	1	1	1

Отметим некоторые свойства $\mathbf{P}^1$ и $\mathbf{I}^1$.

Логика $\mathbf{P}^1$ функционально эквивалентна логике $\mathbf{I}^1$ [Карпенко, Томова, 2016, с. 44].

$\mathbf{P}^1$ и $\mathbf{I}^1$ являются комбинацией логических операций двух изоморфов классической логики, содержащихся в трехзначной логике Бочвара [Карпенко, 2000, р. 34].

В работе [Томова, 2020] приведены четырехзначные обобщения логик $\mathbf{P}^1$ и $\mathbf{I}^1$, полученные методом комбинирования изоморфов классической логики. Доказано, что (1) пять четырехзначных обобщений $\mathbf{P}^1$ задают ту же паранепротиворечивую теорию, что и $\mathbf{P}^1$; (2) пять четырехзначных обобщений $\mathbf{I}^1$ задают ту же параполную теорию, что и $\mathbf{I}^1$. В этой же работе было сделано следующее предположение:

все n -значные литеpальные паранепротиворечивые матрицы (и не параполные) и все n -значные литеpальные параполные матрицы (и не паранепротиворечивые), полученные посредством комбинирования изоморфов классической логики, порождают те же теории, что и $\mathfrak{M}^{P^1}$ и $\mathfrak{M}^{I^1}$.

Далее, перейдем к рассмотрению вышеизложенного предположения.

4. Построение изоморфов классической логики

Для построения изоморфов классической логики используются функции перевода промежуточных истинностных значений. Такая функция каждому промежуточному значению сопоставляет одно из классических значений — 0 или 1. Так, на трехзначном случае имелось только две функции перевода: первая переводила истинностное значение $1/2$ в 0, а вторая — в 1 [Карпенко, Томова, 2016, с. 17]. На четырехзначном случае имеем уже четыре такие функции [Там же, с. 66].

В случае n -значной логики имеем $2^{(n-2)}$ функций перевода:

1. $f_1(x)$ переводит все промежуточные значения $\frac{n-2}{n-1}, \dots, \frac{2}{n-1}, \frac{1}{n-1}$ в 0;
2. $f_2(x)$ переводит все промежуточные значения $\frac{n-2}{n-1}, \dots, \frac{2}{n-1}, \frac{1}{n-1}$ в 1;
3. $f_3(x)$ переводит промежуточные значения $\frac{n-2}{n-1}, \dots, \frac{2}{n-1}$ в 1 и $\frac{1}{n-1}$ в 0;
- ...
- $2^{(n-2)}$. $f_{2^{(n-2)}}(x)$ переводит промежуточное значение $\frac{n-2}{n-1}$ в 0 и промежуточные значения $\frac{n-3}{n-1}, \dots, \frac{2}{n-1}, \frac{1}{n-1}$ в 1.

Логическая матрица n -значных изоморфов классической логики выглядит следующим образом³:

$$\mathfrak{M} = \langle V_n, \neg_i, \rightarrow_i, D \rangle,$$

где $V_n = \{1, \frac{n-2}{n-1}, \dots, \frac{2}{n-1}, \frac{1}{n-1}, 0\}$ — множество истинностных значений, $i = 1, 2, \dots, 2^{(n-2)}$, D — множество выделенных значений.

Используя соответствующие функции перевода, получаем $2^{(n-2)}$ отрицаний и $2^{(n-2)}$ импликаций. Приведем несколько примеров соответствующих таблиц истинности.

x	$\neg_1 x$	$\neg_2 x$	$\neg_3 x$	$\dots$	$\neg_{2^{(n-2)}} x$
1	0	0	0	$\dots$	0
$\frac{n-2}{n-1}$	1	0	0	$\dots$	1
$\frac{n-3}{n-1}$	1	0	0	$\dots$	0
$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$
$\frac{2}{n-1}$	1	0	0	$\dots$	0
$\frac{1}{n-1}$	1	0	1	$\dots$	0
0	1	1	1	$\dots$	1

³В рамках нашего исследования рассматриваются логические системы, сформулированные в пропозициональном языке, включающем только лишь отрицание и импликацию в качестве исходных связок.

$\rightarrow_1$	1	$\frac{n-2}{n-1}$	$\frac{n-3}{n-1}$	$\dots$	$\frac{2}{n-1}$	$\frac{1}{n-1}$	0
1	1	0	0	$\dots$	0	0	0
$\frac{n-2}{n-1}$	1	1	1	$\dots$	1	1	1
$\frac{n-3}{n-1}$	1	1	1	$\dots$	1	1	1
$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$
$\frac{2}{n-1}$	1	1	1	$\dots$	1	1	1
$\frac{1}{n-1}$	1	1	1	$\dots$	1	1	1
0	1	1	1	$\dots$	1	1	1

$\rightarrow_2$	1	$\frac{n-2}{n-1}$	$\frac{n-3}{n-1}$	$\dots$	$\frac{2}{n-1}$	$\frac{1}{n-1}$	0
1	1	1	1	$\dots$	1	1	0
$\frac{n-2}{n-1}$	1	1	1	$\dots$	1	1	0
$\frac{n-3}{n-1}$	1	1	1	$\dots$	1	1	0
$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$
$\frac{2}{n-1}$	1	1	1	$\dots$	1	1	0
$\frac{1}{n-1}$	1	1	1	$\dots$	1	1	0
0	1	1	1	$\dots$	1	1	1

Тогда имеем следующие логические матрицы, соответствующие изоморфам классической логики:

$$\begin{aligned}
 \mathfrak{M}_1 &= \langle \{1, \frac{n-2}{n-1}, \dots, \frac{2}{n-1}, \frac{1}{n-1}, 0\}, \neg_1, \rightarrow_1, \{1\} \rangle, \\
 \mathfrak{M}_2 &= \langle \{1, \frac{n-2}{n-1}, \dots, \frac{2}{n-1}, \frac{1}{n-1}, 0\}, \neg_2, \rightarrow_2, \{1, \frac{n-2}{n-1}, \dots, \frac{2}{n-1}, \frac{1}{n-1}\} \rangle, \\
 \mathfrak{M}_3 &= \langle \{1, \frac{n-2}{n-1}, \dots, \frac{2}{n-1}, \frac{1}{n-1}, 0\}, \neg_3, \rightarrow_3, \{1, \frac{n-2}{n-1}, \dots, \frac{2}{n-1}\} \rangle, \\
 &\dots \\
 \mathfrak{M}_{2(n-2)} &= \langle \{1, \frac{n-2}{n-1}, \dots, \frac{2}{n-1}, \frac{1}{n-1}, 0\}, \neg_{2(n-2)}, \rightarrow_{2(n-2)}, \{1, \frac{n-3}{n-1}, \dots, \frac{2}{n-1}, \frac{1}{n-1}\} \rangle.
 \end{aligned}$$

Таким образом, используя функции перевода, возможно построить $2^{(n-2)}$ изоморфов классической логики. Класс выделенных значений D в вышеприведенных матрицах зависит от того, какие значения функции перевода $f_1(x), f_2(x), \dots, f_{2(n-2)}$ сопоставляют промежуточным значениям, если промежуточному значению сопоставляется 1, тогда это значение включается в класс выделенных значений D .

Метод комбинирования изоморфов состоит в построении такой логической матрицы, в класс матричных операций которой входят операции

из двух различных изоморфов. При этом класс выделенных значений D берется точно такой же, как в изоморфе, из которого взята импликация⁴.

Далее, применив метод комбинирования изоморфов классической логики, мы получим класс n -значных LPP-логик. Этот класс состоит из $2^{(2n-4)}$ логик, включая сами изоморфы, или $2^{(2n-4)} - 2^{(n-2)}$ LPP-логик без изоморфов.

5. N -значные LPP-логики

Относительно класса LPP-логик, полученных посредством комбинирования изоморфов классической логики, справедливы следующие утверждения.

Утверждение 1. Логические матрицы вида

$\mathfrak{M}_1^\circ = \langle \{1, \frac{n-2}{n-1}, \dots, \frac{2}{n-1}, \frac{1}{n-1}, 0\}, \neg_1, \rightarrow_k, D \rangle$, где $k = 2, 3, \dots, 2^{(n-2)}$ и $k \neq 1$, D — множество выделенных значений⁵, и
 $\mathfrak{M}_2^\circ = \langle \{1, \frac{n-2}{n-1}, \dots, \frac{2}{n-1}, \frac{1}{n-1}, 0\}, \neg_i, \rightarrow_2, \{1, \frac{n-2}{n-1}, \dots, \frac{2}{n-1}, \frac{1}{n-1}\} \rangle$, где $i = 1, 3, \dots, 2^{(n-2)}$ и $i \neq 2$, определяют класс паранепротиворечивых логик.

Доказательство. Согласно определению 11 в логических матрицах, задающих паранепротиворечивые системы, не верифицируется закон Дунса Скота $A \rightarrow (\neg A \rightarrow B)$. Покажем, что матрицы $\mathfrak{M}_1^\circ$ и $\mathfrak{M}_2^\circ$ отвечают определению 11.

(1) Докажем утверждение для матрицы $\mathfrak{M}_1^\circ$. Необходимо показать, что найдется такая оценка v в $\mathfrak{M}_1^\circ$, что $v(A \rightarrow_k (\neg_1 A \rightarrow_k B)) = 0$.

Импликация $\rightarrow_k$ ($k \neq 1$) такова, что найдется по крайней мере одно такое промежуточное значение $*$, что $v(* \rightarrow 0) = 0$.

Допустим, $v(A) = *$ и $v(B) = 0$.

Тогда $v(\neg_1 A) = 1$ (согласно таблице для $\neg_1$) и $v(\neg_1 A \rightarrow_k B) = 0$, а, значит, и $v(A \rightarrow_k (\neg_1 A \rightarrow_k B)) = 0$.

Таким образом, мы обосновали, что в $\mathfrak{M}_1^\circ$ найдется такая оценка v , что $v(A \rightarrow_k (\neg_1 A \rightarrow_k B)) = 0$.

(2) Докажем утверждение для матрицы $\mathfrak{M}_2^\circ$. Необходимо показать, что найдется такая оценка v в $\mathfrak{M}_2^\circ$, что $v(A \rightarrow_2 (\neg_i A \rightarrow_2 B)) = 0$.

Допустим, $v(A) = *$, где $*$ — такое промежуточное значение, что $\neg_i(*) = 1$ ($i \neq 2$), и $v(B) = 0$. Тогда $v(\neg_i A \rightarrow_2 B) = 0$. В силу определения для $\rightarrow_2$, очевидно, что $v(A \rightarrow_2 (\neg_i A \rightarrow_2 B)) = 0$.

⁴Это важно, если логика рассматривается в качестве дедуктивной системы. Таким образом выбранный класс D гарантирует, что в случае паранепротиворечивой логики соответствующее отношение логического следования не будет эксплозивным, в случае параполной логики не будет импозивным (соответствующие определения см. в [Карпенко, Томова, 2016, с. 32–33]).

⁵выбирается в зависимости от $\rightarrow_k$.

Таким образом, мы обосновали, что в $\mathfrak{M}_2^\circ$ найдется такая оценка v , что $v(A \rightarrow_2 (\neg_i A \rightarrow_2 B)) = 0$. ■

Утверждение 2. Логические матрицы вида

$\mathfrak{M}_1^\bullet = \langle \{1, \frac{n-2}{n-1}, \dots, \frac{2}{n-1}, \frac{1}{n-1}, 0\}, \neg_k, \rightarrow_1, \{1\}\rangle$, где $k = 2, 3, \dots, 2^{(n-2)}$ и $k \neq 1$, и

$\mathfrak{M}_2^\bullet = \langle \{1, \frac{n-2}{n-1}, \dots, \frac{2}{n-1}, \frac{1}{n-1}, 0\}, \neg_2, \rightarrow_i, D\rangle$, где $i = 1, 3, \dots, 2^{(n-2)}$ и $i \neq 2$ и D — множество выделенных значений⁶, определяют класс параполных логик.

Доказательство. Согласно определению 12 в логических матрицах, задающих параполные системы, не верифицируется закон Клавия $(\neg A \rightarrow A) \rightarrow A$. Покажем, что матрицы $\mathfrak{M}_1^\bullet$ и $\mathfrak{M}_2^\bullet$ отвечают определению 12.

(1) Докажем утверждение для матрицы $\mathfrak{M}_1^\bullet$. Необходимо показать, что найдется такая оценка v в $\mathfrak{M}_1^\bullet$, что $v((\neg_k A \rightarrow_1 A) \rightarrow_1 A) = 0$.

Допустим, $v(A) = *$, где $*$ — такое промежуточное значение, что $\neg_k(*) = 0$ ($k \neq 1$).

Тогда $v(\neg_k A) = 0$, а, значит, $v(\neg_k A \rightarrow_1 A) = 1$. Тогда, в силу определения $\rightarrow_1$, очевидно, что $v((\neg_k A \rightarrow_1 A) \rightarrow_1 A) = 0$.

Таким образом, мы обосновали, что в $\mathfrak{M}_1^\bullet$ найдется такая оценка v , что $v((\neg_k A \rightarrow_1 A) \rightarrow_1 A) = 0$.

(2) Докажем утверждение для матрицы $\mathfrak{M}_2^\bullet$. Необходимо показать, что найдется такая оценка v в $\mathfrak{M}_2^\bullet$, что $v((\neg_2 A \rightarrow_i A) \rightarrow_i A) = 0$.

Допустим, $v(A) = *$, где $*$ — такое промежуточное значение, что $v(1 \rightarrow_i *) = 0$ ($i \neq 2$).

Тогда $v(\neg_2 A) = 0$ (согласно таблице для $\neg_2$) и $v(\neg_2 A \rightarrow_i A) = 1$. Далее имеем, что $v((\neg_2 A \rightarrow_i A) \rightarrow_i A) = 0$.

Таким образом, мы обосновали, что в $\mathfrak{M}_2^\bullet$ найдется такая оценка v , что $v((\neg_2 A \rightarrow_i A) \rightarrow_i A) = 0$. ■

Таким образом, утверждения 1 и 2 определяют свойства логических матриц, определяющих классы n -значных паранепротиворечивых и параполных логик.

Далее, можно показать, что матрицы $\mathfrak{M}_1^\circ$ и $\mathfrak{M}_2^\circ$ задают ту же паранепротиворечивую теорию, что и $\mathfrak{M}^{P1}$, а матрицы $\mathfrak{M}_1^\bullet$ и $\mathfrak{M}_2^\bullet$ задают ту же параполную теорию, что и $\mathfrak{M}^{I1}$. Докажем соответствующие утверждения.

Утверждение 3. Логическая матрица вида

$\mathfrak{M}_1^\circ = \langle \{1, \frac{n-2}{n-1}, \dots, \frac{2}{n-1}, \frac{1}{n-1}, 0\}, \neg_1, \rightarrow_k, D\rangle$, где $k = 2, 3, \dots, 2^{(n-2)}$ и $k \neq 1$, индуцирует ту же паранепротиворечивую теорию, что и матрица $\mathfrak{M}^{P1}$.

⁶выбирается в зависимости от $\rightarrow_i$.

Доказательство. Доказательство утверждения следует из фактов:

- (1) если матрица $\mathfrak{M}$ является гомоморфным прообразом матрицы $\mathfrak{N}$, тогда $E(\mathfrak{M}) = E(\mathfrak{N})$ [Bolc, 1992, р. 21].
- (2) матрица $\mathfrak{M}_1^\circ$ есть гомоморфный прообраз матрицы $\mathfrak{M}^{P1}$ относительно отображения h :

$$h(x) = \begin{cases} 0, & \text{если } x \in \{\frac{n-2}{n-1}, \dots, \frac{2}{n-1}, \frac{1}{n-1}\} \text{ и } x \rightarrow_k y = 0 \rightarrow_k y, \\ 1/2, & \text{если } x \in \{\frac{n-2}{n-1}, \dots, \frac{2}{n-1}, \frac{1}{n-1}\} \text{ и } x \rightarrow_k y = 1 \rightarrow_k y, \\ x, & \text{если } x \in \{1, 0\}, \end{cases}$$

где $y \in \{1, \frac{n-2}{n-1}, \dots, \frac{2}{n-1}, \frac{1}{n-1}, 0\}$, $k = 2, 3, \dots, 2^{(n-2)}$ и $k \neq 1$.

■

Утверждение 4. Логическая матрица вида

$\mathfrak{M}_2^\circ = \langle \{1, \frac{n-2}{n-1}, \dots, \frac{2}{n-1}, \frac{1}{n-1}, 0\}, \neg_i, \rightarrow_2, \{1, \frac{n-2}{n-1}, \dots, \frac{2}{n-1}, \frac{1}{n-1}\} \rangle$, где $i = 1, 3, \dots, 2^{(n-2)}$ и $i \neq 2$, индуцирует ту же паранепротиворечивую теорию, что и матрица $\mathfrak{M}^{P1}$.

Доказательство. Доказательство утверждения следует из фактов:

- (1) если матрица $\mathfrak{M}$ является гомоморфным прообразом матрицы $\mathfrak{N}$, тогда $E(\mathfrak{M}) = E(\mathfrak{N})$ [Bolc, 1992, р. 21].
- (2) матрица $\mathfrak{M}_2^\circ$ есть гомоморфный прообраз матрицы $\mathfrak{M}^{P1}$ относительно отображения h :

$$h(x) = \begin{cases} 1, & \text{если } x \in \{\frac{n-2}{n-1}, \dots, \frac{2}{n-1}, \frac{1}{n-1}\} \text{ и } \neg_i(x) = 0, \\ 1/2, & \text{если } x \in \{\frac{n-2}{n-1}, \dots, \frac{2}{n-1}, \frac{1}{n-1}\} \text{ и } \neg_i(x) = 1, \\ x, & \text{если } x \in \{1, 0\}, \end{cases}$$

где $i = 1, 3, \dots, 2^{(n-2)}$ и $i \neq 2$.

■

Утверждение 5. Логическая матрица вида

$\mathfrak{M}_1^\circ = \langle \{1, \frac{n-2}{n-1}, \dots, \frac{2}{n-1}, \frac{1}{n-1}, 0\}, \neg_k, \rightarrow_1, \{1\} \rangle$, где $k = 2, 3, \dots, 2^{(n-2)}$ и $k \neq 1$, индуцирует ту же паранепротиворечивую теорию, что и матрица $\mathfrak{M}^{I1}$.

Доказательство. Доказательство утверждения следует из фактов:

- (1) если матрица $\mathfrak{M}$ является гомоморфным прообразом матрицы $\mathfrak{N}$, тогда $E(\mathfrak{M}) = E(\mathfrak{N})$ [Bolc, 1992, р. 21].

- (2) матрица $\mathfrak{M}_1^\bullet$ есть гомоморфный прообраз матрицы $\mathfrak{M}^{I^1}$ относительно отображения h :

$$h(x) = \begin{cases} 0, & \text{если } x \in \{\frac{n-2}{n-1}, \dots, \frac{2}{n-1}, \frac{1}{n-1}\} \text{ и } \neg_k(x) = 1, \\ 1/2, & \text{если } x \in \{\frac{n-2}{n-1}, \dots, \frac{2}{n-1}, \frac{1}{n-1}\} \text{ и } \neg_k(x) = 0, \\ x, & \text{если } x \in \{1, 0\}, \end{cases}$$

где $k = 2, 3, \dots, 2^{(n-2)}$ и $k \neq 1$.

■

Утверждение 6. Логическая матрица вида

$\mathfrak{M}_2^\bullet = \langle \{1, \frac{n-2}{n-1}, \dots, \frac{2}{n-1}, \frac{1}{n-1}, 0\}, \neg_2, \rightarrow_i, D \rangle$, где $i = 1, 3, \dots, 2^{(n-2)}$ и $i \neq 2$, индуцирует ту же параполную теорию, что и матрица $\mathfrak{M}^{I^1}$.

Доказательство. Доказательство утверждения следует из фактов:

- (1) если матрица $\mathfrak{M}$ является гомоморфным прообразом матрицы $\mathfrak{N}$, тогда $E(\mathfrak{M}) = E(\mathfrak{N})$ [Bolc, 1992, p. 21].
- (2) матрица $\mathfrak{M}_2^\bullet$ есть гомоморфный прообраз матрицы $\mathfrak{M}^{I^1}$ относительно отображения h :

$$h(x) = \begin{cases} 1, & \text{если } x \in \{\frac{n-2}{n-1}, \dots, \frac{2}{n-1}, \frac{1}{n-1}\} \text{ и } x \rightarrow_i y = 1 \rightarrow_i y, \\ 1/2, & \text{если } x \in \{\frac{n-2}{n-1}, \dots, \frac{2}{n-1}, \frac{1}{n-1}\} \text{ и } x \rightarrow_i y = 0 \rightarrow_i y, \\ x, & \text{если } x \in \{1, 0\}, \end{cases}$$

где $y \in \{1, \frac{n-2}{n-1}, \dots, \frac{2}{n-1}, \frac{1}{n-1}, 0\}$, $i = 1, 3, \dots, 2^{(n-2)}$ и $k \neq 2$.

■

6. Заключение

В работе было изложено обобщение алгоритма построения n -значных LPP-логик посредством комбинирования n -значных изоморфов классической логики. Были определены свойства логических матриц, соответствующих паранепротиворечивым и параполным логикам. Доказано, что матрицы $\mathfrak{M}_1^\circ$ и $\mathfrak{M}_2^\circ$ задают ту же паранепротиворечивую теорию, что и логика $\mathbf{P}^1$, а матрицы $\mathfrak{M}_1^\bullet$ и $\mathfrak{M}_2^\bullet$ ту же параполную теорию, что и логика $\mathbf{I}^1$. В этом смысле они могут рассматриваться как n -значные обобщения $\mathbf{P}^1$ и $\mathbf{I}^1$. В данной статье не затрагивался вопрос о функциональных свойствах обобщений, однако, вероятно, как в случае с трехзначными и четырехзначными логиками, паранепротиворечивые и параполные обобщения будут попарно функционально эквивалентны. Относительно паранормальных LPP-логик сделаем предположение, что логические матрицы вида

$$\mathfrak{M} = \langle \{1, \frac{n-2}{n-1}, \dots, \frac{2}{n-1}, \frac{1}{n-1}, 0\}, \neg_i, \rightarrow_k, D \rangle,$$

где $i = 3, \dots, 2^{(n-2)}$, $k = 3, \dots, 2^{(n-2)}$ и $i \neq k$,

определяют класс паранормальных логик.

Литература

- Девяткин, 2018 – *Девяткин Л.Ю.* О континуальном классе четырехзначных максимально паранормальных логик // Логические исследования / Logical Investigations. 2018. Т. 24. № 2. С. 85–91.
- Карпенко, Томова, 2016 – *Карпенко А.С., Томова Н.Е.* Трехзначная логика Бочвара и литеральные паралогики. М.: ИФ РАН, 2016. 110 с.
- Томова, 2018 – *Томова Н.Е.* О свойствах одного класса четырехзначных паранормальных логик // Логические исследования / Logical Investigations. 2018. Т. 24. № 1. С. 75–89.
- Bolc, 1992 – *Bolc L., Borowik P.* Many-Valued Logics: 1: Theoretical Foundations. Springer-Verlag Berlin Heidelberg, 1992. 288 p.
- Ciuciura, 2015 – *Ciuciura J.* A weakly-intuitionistic logic I1 // Logical Investigations. 2015. Vol. 21. No. 2. P. 53–60.
- Fernández, Coniglio, 2003 – *Fernández V.L., Coniglio M.E.* Combining valuations with society semantics // Journal of Applied Non-Classical Logics. 2003. Vol. 13. No. 1. P. 21–46.
- Jaskowski, 1969 – *Jaśkowski S.* A propositional calculus for inconsistent deductive systems // Studia Logica. 1969. Vol. 24. P. 143–157.
- Karpenko, 1999 – *Karpenko A.S.* Jaśkowski's criterion and three-valued paraconsistent logics // Log. Log. Philos. 1999. Vol. 7. P. 81–86.
- Karpenko, 2000 – *Karpenko A.S.* A maximal paraconsistent logic: The combination of two three-valued isomorphs of classical propositional logic // Frontiers of Paraconsistent Log., Batens, D. et al. (eds.), Baldock Research Studies Press, 2000. P. 181–187.
- Lewin, Mikenberg, 2006 – *Lewin R.A., Mikenberg I.F.* Literal-paraconsistent and literal-paracomplete matrices // Math. Log. Quart. 2006. Vol. 52. No. 5. P. 478–493.
- Petrukhin, 2019 – *Petrukhin Ya.I.* Deduction Normalization Theorem for Sette's Logic and Its Modifications // Moscow University Mathematics Bulletin. 2019. Vol. 74. No. 1. P. 25–31.
- Popov, 1999 – *Popov V.M.* On the logics related to A. Arruda's system V1 // Logic and logical philosophy. 1999. Vol. 7. P. 87–90.
- Puga, Da Costa, 1988 – *Puga L.Z., Da Costa N.C.A.* On the imaginary logic of N.A. Vasiliev // Z. Math. Logik Grundl. Math. 1988. Vol. 34. P. 205–211.
- Sette, 1953 – *Sette A.M.* On propositional calculus P1 // Mathematica Japonicae. 1973. Vol. 18. P. 173–180.

- Sette, Alves, 1973 – *Sette A.M., Alves E.H.* On the equivalence between some systems of non-classical logic // *Bul. Sec. Log.* 1973. Vol. 25. No. 2. P. 68–72.
- Sette, Carnielli, 1995 – *Sette A.M., Carnielli W.A.* Maximal weakly-intuitionistic logics // *Studia Logica.* 1995. Vol. 55. No. 1. P. 181–203.
- Tomova, 2020 – *Tomova N.* A Semi-lattice of Four-valued Literal-paraconsistent-paracomplete Logics // *Bulletin of the Section of Logic.* 2020. (In print)

NATALYA E. TOMOVA

On a class of n -valued literal paraconsistent/paracomplete logics

Natalya E. Tomova

Institute of Philosophy, Russian Academy of Sciences,
12/1 Goncharnaya Str., Moscow, 109240, Russian Federation.
E-mail: natalya-tomova@yandex.ru

Abstract: Paraconsistent and paracomplete logics allow to work with contradictory and incomplete information. The paper considers a small class of n -valued literal paraconsistent / paracomplete logics. Representatives of this class are the well-known three-valued Sette's logic $\mathbf{P}^1$ and its dual logic $\mathbf{I}^1$. There are several methods for constructing literal paraconsistent / paracomplete logics, one of them is the method of combining isomorphs of classical logic. A.S. Karpenko found that paraconsistent Sette's logic $\mathbf{P}^1$ and its dual paracomplete logic $\mathbf{I}^1$ can be obtained by combining isomorphs of classical logic contained in the three-valued Bochvar's logic. The paper considers a generalization of this algorithm to the n -valued case, and a class of n -valued literal paranconsistent / paracomplete logics is regarded. We specify the properties of logical matrices corresponding to paranconsistent logics, two types of such matrices are given, the corresponding statements are proved. It is also proved that both types of matrices induce the same paraconsistent theory as the matrix of paraconsistent Sette's logic $\mathbf{P}^1$. Also, we specify the properties of two types of logical matrices corresponding to paracomplete logics, the corresponding statements are proved. And we show that both types of matrices induce the same paracomplete theory as three-valued matrix of paracomplete logic $\mathbf{I}^1$. As a research perspective, the study of the functional properties of the obtained n -valued generalizations is indicated. It is likely that, as in the case of three-valued and four-valued logics, paraconsistent and paracomplete logics will be functionally equivalent in pairs. The question is also raised about the class of n -valued generalizations of paranormal systems.

Keywords: paraconsistency, paracompleteness, many-valued logics, logical matrices, isomorphs

For citation: Tomova N.E. "Ob odnom klasse n -znachnykh literal'nykh paraneprotivorechivnykh/parapolnykh logik" [On a class of n -valued literal paraconsistent/paracomplete logics], *Logicheskie Issledovaniya / Logical Investigations*, 2020, Vol. 26, No. 2, pp. 144–159. DOI: 10.21146/2074-1472-2020-26-2-144-159 (In Russian)

References

- Bolc, 1992 – Bolc, L., Borowik, P. *Many-Valued Logics: 1: Theoretical Foundations*. Springer-Verlag Berlin Heidelberg, 1992. 288 p.
- Ciuciura, 2015 – Ciuciura, J. "A weakly-intuitionistic logic $\mathbf{I1}$ ", *Logical Investigations*, 2015, Vol. 21, No. 2, pp. 53–60.

- Devyatkin, 2018 – Devyatkin, L.Yu. “O kontinual’nom klasse chetyrekhznachnykh maksimal’noparanormal’nykh logik” [On a continual class of four-valued maximally paranormal logics], *Logical Investigations*, 2018, Vol. 24, No. 2, pp. 85–91. (In Russian)
- Fernández, Coniglio, 2003 – Fernández, V.L., Coniglio, M.E. “Combining valuations with society semantics”, *Journal of Applied Non-Classical Logics*, 2003, Vol. 13, No. 1, pp. 21–46.
- Jaskowski, 1969 – Jaskowski, S. “A propositional calculus for inconsistent deductive systems”, *Studia Logica*, 1969, Vol. 24, pp. 143–157.
- Karpenko, 1999 – Karpenko, A.S. “Jaskowski’s criterion and three-valued paraconsistent logics”, *Log. Log. Philos.*, 1999, Vol. 7, pp. 81–86.
- Karpenko, 2000 – Karpenko, A.S. “A maximal paraconsistent logic: The combination of two three-valued isomorphs of classical propositional logic”, in: *Frontiers of Paraconsistent Log.*, Batens, D. et al. (eds.), Baldock Research Studies Press, 2000, pp. 181–187.
- Karpenko, Tomova, 2016 – Karpenko, A.S., Tomova, N.E. *Trekhznachnaya Logika Bochvara i Literal’nye Paralogiki* [Bochvar’s three-valued logic and literal para-logics]. Moscow: IPh RAS, 2016. 110 pp. (In Russian)
- Lewin, Mikenberg, 2006 – Lewin, R.A., Mikenberg, I.F. “Literal-paraconsistent and literal-paracomplete matrices”, *Math. Log. Quart.*, 2006, Vol. 52, No. 5, pp. 478–493.
- Petrukhin, 2019 – Petrukhin, Ya.I. “Deduction Normalization Theorem for Sette’s Logic and Its Modifications”, *Moscow University Mathematics Bulletin*, 2019, Vol. 74, No. 1, pp. 25–31.
- Popov, 1999 – Popov, V.M. “On the logics related to A. Arruda’s system V1”, *Log. Log. Philos.*, 1999, Vol. 7, pp. 87–90.
- Puga, Da Costa, 1988 – Puga, L.Z., Da Costa, N.C.A. “On the imaginary logic of N.A. Vasiliev”, *Z. Math. Logik Grundle. Math.*, 1988, Vol. 34, pp. 205–211.
- Sette, 1953 – Sette, A.M. “On propositional calculus P1”, *Mathematica Japonicae*, 1973, Vol. 18, pp. 173–180.
- Sette, Alves, 1973 – Sette, A.M., Alves, E.H. “On the equivalence between some systems of non-classical logic”, *Bul. Sec. Log.*, 1973, Vol. 25, No. 2, pp. 68–72.
- Sette, Carnielli, 1995 – Sette, A.M., Carnielli, W.A. “Maximal weakly-intuitionistic logics”, *Studia Logica*, 1995, Vol. 55, No. 1, pp. 181–203.
- Tomova, 2018 – Tomova, N.E. “O svoistvakh odnogo klassa chetyrekhznachnykh paranormal’nykh logik” [On properties of a class of four-valued paranormallogics], *Logical Investigations*, 2018, Vol. 24, No. 1, pp. 75–89.
- Tomova, 2020 – Tomova, N. “A Semi-lattice of Four-valued Literal-paraconsistent-paracomplete Logics”, *Bul. Sec. Log.*, 2020. (In print)