Философия и логика
Philosophy and logic

М.М. ЛЕГЕЙДО

**Интенциональные семантики
для некоторых систем позитивной силлогистики***

Мария Михайловна Легейдо

МГУ им. М.В. Ломоносова.

Российская Федерация, 119991, г. Москва, Ломоносовский пр-т, д. 27, корп. 4.

E-mail: legeydo.mm@philos.msu.ru

Аннотация: Статья посвящена рассмотрению интенциональных семантик для некоторых систем позитивной силлогистики: фундаментальной силлогистики и ее подсистем, силлогистики **С2** и силлогистики Больцано.

Интенциональные семантики, представленные в статье, строятся на основе синтаксического подхода, предложенного В.И. Шалаком и далее развитого В.И. Маркиным, при котором общим терминам приписываются формулы пропозиционального языка, а значимость силлогистических констант определяется через отношение классического, а потом и релевантного следования.

В первом разделе статьи содержится описание уже имеющихся интенциональных семантик с релевантным следованием для фундаментальной силлогистики и ее подсистемы **ИФС**, а также предлагаются две новые системы (промежуточные между **ФС** и **ИФС**), для одной из которых доказана адекватность семантики исчислению.

Второй и третий разделы посвящены двум другим известным силлогистическим системам: силлогистике **С2** и силлогистике Больцано. Для обеих систем представлена интенциональная семантика с классическим и релевантным следованием, доказаны адекватность данных семантик соответствующим исчислениям.

Предложенные семантики расширяют выразительные возможности силлогистики, а также представляются интересными в свете развивающегося интенционального подхода к трактовке силлогистических семантик. Также в статье обозначены еще нерешенные проблемы в данной области: предложены возможные семантики для некоторых систем, поиск аксиоматизаций для которых представляет дальнейший интерес.

Ключевые слова: силлогистика, интенциональная семантика, формализация, аксиоматическое исчисление, логическое следование, релевантное следование

Для цитирования: Легейдо М.М. Интенциональные семантики для некоторых систем позитивной силлогистики // Логические исследования / Logical Investigations. 2021. Т. 27. № 2. С. 9–30. DOI: 10.21146/2074-1472-2021-27-2-9-30

* Исследование выполнено при финансовой поддержке РФФИ в рамках научного проекта № 20-311-90043.

Введение

В современной силлогистике преобладает понимание категорических суждений как выражающих информацию об отношениях между множествами объектов, а общие термины (субъект и предикат) трактуются как знаки этих множеств. Например, суждение SaP предлагается понимать как «все элементы множества S являются элементами множества P ».

Существует и другой подход к пониманию силлогистических суждений, предложенный впервые Г.В. Лейбницем [Лейбниц, 1982, т. 3, с. 514–523] и названный впоследствии интенциональным, согласно которому отношения между общими терминами трактуются как отношения между содержаниями понятий, которые понимаются как множества общих признаков (свойств) элементов объемов этих понятий. Данный подход был развит с помощью средств современной символической логики, например, В.И. Маркиным [Маркин, 2001; Маркин, 2002].

Следующий шаг в развитии такого подхода был сделан В.И. Шалаком [Шалак, 2015], который предложил приписывать общим терминам формулы языка классической пропозициональной логики, а силлогистические константы интерпретировать через отношение классической выводимости с использованием константы ложности **f**. Такую семантику можно развить, используя вместо отношения выводимости отношение классического логического следования, а затем и релевантного в системе **FDE** [Маркин, 2016а; Маркин, Легейдо, 2019].

1. Интенциональная фундаментальная силлогистика и ее подсистемы

Адекватные релевантизированные семантики для систем фундаментальной силлогистики (система **ФС**) и интенциональной фундаментальной силлогистики (система **ИФС**) были предложены В.И. Маркиным [Маркин, 2016а]. Приведем их здесь.

Напомним, что схемами аксиом системы **ФС** являются:

ФС0. Схемы аксиом классического исчисления высказываний;

ФС1. $(MaP \wedge SaM) \supset SaP$; **ФС5.** $SiP \supset SiS$;

ФС2. $(MeP \wedge SaM) \supset SeP$; **ФС6.** $SoP \supset SiS$;

ФС3. $SeP \supset PeS$; **ФС7.** $SeP \equiv \neg SiP$.

ФС4. SaS ; **ФС8.** $SoP \equiv \neg SaP$.

Единственным правилом вывода в **ФС** является правило *modus ponens*.

Для оценки силлогистических формул при той или иной интерпретации общих терминов вводится функция δ , сопоставляющая каждому общему

термину формулу языка классической логики высказываний (который содержит в качестве исходных связи $\neg, \wedge, \vee$), и задается двухместный метепредикат (например, для системы **ФС** им будет Φ для семантики с классическим следованием и V — для семантики с релевантным). Запись $V(\mathbf{A}, \delta)$ означает: «силлогистическая формула $\mathbf{A}$ значима при интерпретации общих терминов δ ».

Условия значимости для атомарных формул в системе **ФС** с классическим следованием определяются следующим образом:

Определение 1.

$$\begin{aligned}\Phi(SaP, \delta) &\Leftrightarrow \delta(S) \models \delta(P); \\ \Phi(SeP, \delta) &\Leftrightarrow \delta(S) \models \neg\delta(P); \\ \Phi(SiP, \delta) &\Leftrightarrow \delta(S) \not\models \neg\delta(P); \\ \Phi(SoP, \delta) &\Leftrightarrow \delta(S) \not\models \delta(P).\end{aligned}$$

Формула $\mathbf{A}$ называется Φ -общезначимой, если и только если $\dot{\forall}\delta\Phi(\mathbf{A}, \delta)$.

При замене следования с классического на релевантное меняются и условия значимости атомарных формул в семантике **ФС**:

Определение 2.

$$\begin{aligned}V(SaP, \delta) &\Leftrightarrow \delta(S) \models_{rel} \delta(P) \dot{\vee} \delta(S) \not\models_{rel} \neg\delta(S); \\ V(SeP, \delta) &\Leftrightarrow \delta(S) \models_{rel} \neg\delta(P) \dot{\vee} \delta(S) \models_{rel} \neg\delta(S) \dot{\vee} \delta(P) \models_{rel} \neg\delta(P); \\ V(SiP, \delta) &\Leftrightarrow \delta(S) \not\models_{rel} \neg\delta(P) \dot{\wedge} \delta(S) \not\models_{rel} \neg\delta(S) \dot{\wedge} \delta(P) \not\models_{rel} \neg\delta(P); \\ V(SoP, \delta) &\Leftrightarrow \delta(S) \not\models_{rel} \delta(P) \dot{\vee} \delta(S) \models_{rel} \neg\delta(S).\end{aligned}$$

Формула $\mathbf{A}$ называется V -общезначимой, если и только если $\dot{\forall}\delta V(\mathbf{A}, \delta)$.

Система **ИФС** получается путем отбрасывания **ФС5** и **ФС6** и содержит следующие схемы аксиом:

- ИФС0.** Схемы аксиом классического исчисления высказываний;
ИФС1. $(MaP \wedge SaM) \supset SaP$; **ИФС4.** SaS ;
ИФС2. $(MeP \wedge SaM) \supset SeP$; **ИФС5.** $SeP \equiv \neg SiP$.
ИФС3. $SeP \supset PeS$; **ИФС6.** $SoP \equiv \neg SaP$.

Единственным правилом вывода в **ИФС** является правило *modus ponens*.

В.И. Маркиным [Маркин, 2016a] было доказано, что данная система адекватна следующей семантике, для построения которой введем новый предикат значимости V_i :

Определение 3.

$$\begin{aligned}
V_i(SaP, \delta) &\Leftrightarrow \delta(S) \models_{rel} \delta(P); \\
V_i(SeP, \delta) &\Leftrightarrow \delta(S) \models_{rel} \neg\delta(P); \\
V_i(SiP, \delta) &\Leftrightarrow \delta(S) \not\models_{rel} \neg\delta(P); \\
V_i(SoP, \delta) &\Leftrightarrow \delta(S) \not\models_{rel} \delta(P).
\end{aligned}$$

Системы **ИФС** и **ФС** схожи, однако условия истинности для общих высказываний в системе **ФС** более слабые, чем в **ИФС**, а для частных — более сильные.

Если комбинировать различные условия значимости для атомарных формул, то можно получить еще две системы, которые будут промежуточными между **ФС** и **ИФС**.

Одна из них — **ИФС₂**, где константы e и i трактуются как в **ФС**, а константы a и o — как в **ИФС**. Класс общезначимых формул в такой семантике аксиоматизирует исчисление, полученное из **ФС** путем отбрасывания аксиомы **ФС6** ($SoP \supset SiS$):

ИФС₂0. Схемы аксиом классического исчисления высказываний;

ИФС₂1. $(MaP \wedge SaM) \supset SaP$; **ИФС₂5.** $SiP \supset SiS$;

ИФС₂2. $(MeP \wedge SaM) \supset SeP$; **ИФС₂6.** $SeP \equiv \neg SiP$.

ИФС₂3. $SeP \supset PeS$;

ИФС₂7. $SoP \equiv \neg SaP$.

ИФС₂4. SaS ;

Единственным правилом вывода в **ИФС₂** является правило *modus ponens*.

Понятие значимости формул определим для данной системы следующим образом (будем использовать здесь символ W_2 для метапредиката значимости):

Определение 4.

$$\begin{aligned}
W_2(SaP, \delta) &\Leftrightarrow \delta(S) \models_{rel} \delta(P); \\
W_2(SeP, \delta) &\Leftrightarrow \delta(S) \models_{rel} \neg\delta(P) \dot{\vee} \delta(S) \models_{rel} \neg\delta(S) \dot{\vee} \delta(P) \models_{rel} \neg\delta(P); \\
W_2(SiP, \delta) &\Leftrightarrow \delta(S) \not\models_{rel} \neg\delta(P) \dot{\wedge} \delta(S) \not\models_{rel} \neg\delta(S) \dot{\wedge} \delta(P) \not\models_{rel} \neg\delta(P); \\
W_2(SoP, \delta) &\Leftrightarrow \delta(S) \not\models_{rel} \delta(P).
\end{aligned}$$

Для сложных формул W_2 задается стандартно.

Зададим перевод η из силлогистики **ИФС**₂ в ее подсистему **ИФС**:

Определение 5.

$$\begin{aligned}\eta(SaP) &= SaP; & \eta(SeP) &= (SeP \vee SeS) \vee PeP; \\ \eta(SiP) &= (SiP \wedge SiS) \wedge PiP; & \eta(SoP) &= SoP; \\ \eta(\neg A) &= \neg \eta(A); & \eta(A \nabla B) &= \eta(A) \nabla \eta(B).\end{aligned}$$

Теорема 1. Перевод η погружает **ИФС**₂ в **ИФС**, т.е.

$$\dot{\forall} A (\mathbf{ИФС}_2 \vdash A \Leftrightarrow \mathbf{ИФС} \vdash \eta(A)).$$

Доказательство. Данная теорема будет доказываться с использованием следующего критерия погружаемости одного исчисления в другое, в основе которого лежит известный критерий В.А. Смирнова [Смирнов, 2021, с. 121–122] (нам потребуется простой вариант этого критерия для случая, когда оба исчисления строятся в одном и том же языке):

«Исчисление **S**₁ погружается в исчисление **S**₂ посредством функции φ_1 , если и только если (1) для каждой формулы **A** имеет место: $\mathbf{S}_1 \vdash A \Rightarrow \mathbf{S}_2 \vdash \varphi_1(A)$, и существует такая функция φ_2 , что (2) для каждой формулы **A** имеет место: $\mathbf{S}_2 \vdash A \Rightarrow \mathbf{S}_1 \vdash \varphi_2(A)$, и (3) для каждой формулы **A** имеет место: $\mathbf{S}_1 \vdash A \equiv \varphi_2(\varphi_1(A))$ ».

Во-первых, покажем, что η -переводы (см. опр. 5) всех теорем системы **ИФС**₂ доказуемы в исчислении **ИФС**. Во-вторых, укажем функцию γ такую, что (а) γ -переводы всех теорем **ИФС** доказуемы в **ИФС**₂ и (б) для любой формулы **A** верно, что формула $A \equiv \gamma(\eta(A))$ доказуема в исчислении **ИФС**₂.

Предварительно нам потребуется продемонстрировать доказуемость в системе **ИФС** формул следующего типа:

T1. $(MeM \wedge SaM) \supset SeS$.

1. $(MeM \wedge SaM) \supset SeM$ **ИФС**₂

2. $SeM \supset MeS$ **ИФС**₃

3. $(MeS \wedge SaM) \supset SeS$ **ИФС**₂

4. $(MeM \wedge SaM) \supset SeS$ 1, 2, 3; ЛВ (логика высказываний)

Покажем справедливость первой части критерия погружаемости, а именно:

$$\dot{\forall} A (\mathbf{ИФС}_2 \vdash A \Rightarrow \mathbf{ИФС} \vdash \eta(A)).$$

Для обоснования этого утверждения достаточно доказать, что η -переводы всех аксиом **ИФС**₂ доказуемы в **ИФС** и что если η -переводы посылок правила *modus ponens* доказуемы в **ИФС**, то в этой системе доказуем и η -перевод его заключения.

ИФС₂0. Переводы аксиом классического исчисления высказываний также являются пропозициональными тавтологиями и поэтому доказуемы в **ИФС**.

ИФС₂1. $\eta((MaP \wedge SaM) \supset SaP) = (MaP \wedge SaM) \supset SaP$.

Аксиома **ИФС1** системы **ИФС**.

ИФС₂2. $\eta((MeP \wedge SaM) \supset SeP) = ((MeP \vee MeM) \vee PeP) \wedge SaM) \supset (SeP \vee SeS \vee PeP)$.

1. $(MeP \wedge SaM) \supset SeP$	ИФС2
2. $(MeM \wedge SaM) \supset SeS$	T1
3. $(PeP \wedge SaM) \supset PeP$	ИФС0
4. $((MeP \vee MeM) \vee PeP) \wedge SaM) \supset (SeP \vee SeS \vee PeP)$	1, 2, 3; ЛВ

ИФС₂3. $\eta(SeP \supset PeS) = (SeP \vee SeS \vee PeP) \supset (PeS \vee PeP \vee SeS)$.

Выводится непосредственно из **ИФС3**. $(SeP \supset PeS)$ с использованием законов **ЛВ**.

ИФС₂4. $\eta(SaS) = SaS$.

Аксиома **ИФС4** системы **ИФС**.

ИФС₂5. $\eta(SiP \supset SiS) = (SiP \wedge SiS \wedge PiP) \supset (SiS \wedge SiS \wedge SiS)$.

Пропозициональная тавтология (**ИФС0**).

ИФС₂6. $\eta(SeP \equiv \neg SiP) = (SeP \vee SeS \vee PeP) \equiv \neg(SiP \wedge SiS \vee PiP)$.

1. $SeP \equiv \neg SiP$	ИФС5
2. $SeS \equiv \neg SiS$	ИФС5
3. $PeP \equiv \neg PiP$	ИФС5
4. $(SeP \vee SeS \vee PeP) \equiv \neg(SiP \wedge SiS \vee PiP)$	1, 2, 3; ЛВ

ИФС₂7. $\eta(SoP \equiv \neg SaP) = (SoP \equiv \neg SaP)$.

Аксиома **ИФС7** системы **ИФС**.

Modus ponens

Допустим, что $\eta(\mathbf{A} \supset \mathbf{B})$ и $\eta(\mathbf{A})$ доказуемы в **ИФС**. Поскольку $\eta(\mathbf{A} \supset \mathbf{B}) = \eta(\mathbf{A}) \supset \eta(\mathbf{B})$, формула $\eta(\mathbf{A}) \supset \eta(\mathbf{B})$ является теоремой **ИФС**. Но $\eta(\mathbf{A})$ тоже теорема этой системы. Следовательно, $\eta(\mathbf{B})$ доказуема в **ИФС**.

Итак, мы показали, что η -переводы всех теорем системы **ИФС₂** доказуемы в **ИФС**.

Перейдем к доказательству второй части критерия погружаемости. В качестве обратной функции (перевода из **ИФС** в **ИФС₂**) рассмотрим тождественное преобразование γ : $\gamma(\mathbf{A}) = \mathbf{A}$.

Поскольку **ИФС** является подсистемой **ИФС**₂, γ -переводы всех теорем **ИФС**₂ доказуемы в **ИФС**:

$$\forall \mathbf{A}(\mathbf{ИФС} \vdash \mathbf{A} \Rightarrow \mathbf{ИФС}_2 \vdash \gamma(\mathbf{A})).$$

Остается обосновать следующее утверждение:

$$\forall \mathbf{A}(\mathbf{ИФС}_2 \vdash (\mathbf{A} \equiv \gamma(\eta(\mathbf{A}))))).$$

Его доказательство осуществляем индукцией по числу пропозициональных связок в силлогистической формуле $\mathbf{A}$.

Базис включает четыре случая.

I. $\mathbf{A} = SaP$. Тогда $\gamma(\eta(\mathbf{A})) = \eta(SaP) = SaP$.

Формула $SaP \equiv SaP$ является тавтологией, а потому и аксиомой (**ИФС**₂0) системы **ИФС**₂.

II. $\mathbf{A} = SeP$. Тогда $\gamma(\eta(\mathbf{A})) = \eta(SeP) = SeP \vee SeS \vee PeP$.

1. $SeP \supset (SeP \vee SeS \vee PeP)$ **ИФС**₂0
2. $SiP \supset SiS$ **ИФС**₂5
3. $SeP \equiv \neg SiP$ **ИФС**₂6
4. $SeS \equiv \neg SiS$ **ИФС**₂6
5. $SeS \supset SeP$ 2, 3, 4; ЛВ
6. $PiS \supset PiP$ **ИФС**₂5
7. $PeS \equiv \neg PiS$ **ИФС**₂6
8. $PeP \equiv \neg PiP$ **ИФС**₂6
9. $PeP \supset PeS$ 6, 7, 8; ЛВ
10. $PeS \supset SeP$ **ИФС**₂3
11. $PeP \supset SeP$ 9, 10; ЛВ
12. $SeP \equiv (SeP \vee SeS \vee PeP)$ 1, 5, 11; ЛВ

III. $\mathbf{A} = SiP$. Тогда $\gamma(\eta(\mathbf{A})) = \eta(SiP) = SiP \wedge SiS \wedge PiP$.

IV. $\mathbf{A} = SoP$. Тогда $\gamma(\eta(\mathbf{A})) = \eta(SoP) = SoP$.

Эти два случая сводятся, соответственно, к случаям **II** и **I** в силу схем аксиом **ИФС**₂6 и **ИФС**₂7.

При обосновании индуктивного перехода принимаем допущение, что для любой формулы $\mathbf{B}$, содержащей меньше пропозициональных связок, чем $\mathbf{A}$, верно, что $\mathbf{B} \equiv \gamma(\eta(\mathbf{B}))$ доказуема в системе **ИФС**₂.

V. $\mathbf{A} = \neg \mathbf{B}$.

Согласно индуктивному допущению, $\mathbf{ИФС}_2 \vdash \mathbf{B} \equiv \gamma(\eta(\mathbf{B}))$. По законам логики высказываний отсюда вытекает: $\mathbf{ИФС}_2 \vdash (\neg \mathbf{B} \equiv \neg \gamma(\eta(\mathbf{B})))$. По определению переводов η и γ имеем: $\gamma(\eta(\neg \mathbf{B})) = \gamma(\neg \eta(\mathbf{B})) = \neg \gamma(\eta(\mathbf{B}))$. Следовательно, $\mathbf{ИФС}_2 \vdash (\neg \mathbf{B} \equiv \gamma(\eta(\neg \mathbf{B})))$.

VI. $\mathbf{A} = \mathbf{B} \supset \mathbf{C}$.

Согласно индуктивному допущению, формулы $\mathbf{B} \equiv \gamma(\eta(\mathbf{B}))$ и $\mathbf{C} \equiv \gamma(\eta(\mathbf{C}))$

доказуемы в **ИФС₂**. Отсюда по законам логики высказываний вытекает, что и формула $(\mathbf{B} \supset \mathbf{C}) \equiv (\gamma(\eta(\mathbf{B})) \supset \gamma(\eta(\mathbf{C})))$ доказуема в этой системе. Но по определению переводов η и γ $\gamma(\eta(\mathbf{B} \supset \mathbf{C})) = \gamma(\eta(\mathbf{B}) \supset \eta(\mathbf{C})) = \gamma(\eta(\mathbf{B})) \supset \gamma(\eta(\mathbf{C}))$. Следовательно, **ИФС₂** $\vdash (\mathbf{B} \supset \mathbf{C}) \equiv \gamma(\eta(\mathbf{B} \supset \mathbf{C}))$.

Другие случаи, когда $\mathbf{A}$ есть сложная формула, рассматриваются сходным образом. ■

Теорема 2. *Произвольная силлогистическая формула $\mathbf{A}$ W_2 -общезначима, если и только если ее перевод $\eta(\mathbf{A})$ V_i -общезначим.*

Доказательство. Рассмотрим произвольную функцию δ , сопоставляющую общим терминам формулы пропозиционального языка в сигнатуре $\{\neg, \wedge, \vee\}$. Покажем, что $W_2(\mathbf{A}, \delta) \Leftrightarrow V_i(\eta(\mathbf{A}), \delta)$ (см. опр. 3 и 4) для любой формулы $\mathbf{A}$ языка силлогистики.

Снова будем использовать возвратную индукцию по числу пропозициональных связок в составе $\mathbf{A}$.

I. $\mathbf{A} = SaP$. $W_2(SaP, \delta) \Leftrightarrow \delta(S) \models_{rel} \delta(P) \Leftrightarrow V_i(SaP, \delta) \Leftrightarrow V_i(\eta(SaP), \delta)$.

II. $\mathbf{A} = SeP$.

$W_2(SeP, \delta) \Leftrightarrow \delta(S) \models_{rel} \neg\delta(P) \dot{\vee} \delta(S) \models_{rel} \neg\delta(S) \dot{\vee} \delta(P) \models_{rel} \neg\delta(P) \Leftrightarrow V_i(SeP, \delta) \dot{\vee} V_i(SeS, \delta) \dot{\vee} V_i(PeP, \delta) \Leftrightarrow V_i(SeP \vee SeS \vee PeP, \delta) \Leftrightarrow V_i(\eta(SeP), \delta)$.

III. $\mathbf{A} = SiP$.

IV. $\mathbf{A} = SoP$.

Эти два случая сводятся, соответственно, к случаям **II** и **I** в силу того, что условия их W_2 -значимости и V_i -значимости противоречат соответствующим условиям значимости атомарных формул SeP и SaP .

Далее рассматриваем случаи, когда $\mathbf{A}$ — сложная формула. Используем индуктивное допущение: для любой формулы $\mathbf{B}$ с меньшим, чем у $\mathbf{A}$, числом пропозициональных связок верно, что $W_2(\mathbf{B}, \delta) \Leftrightarrow V_i(\eta(\mathbf{B}), \delta)$.

V. $\mathbf{A} = \neg B$.

$W_2(\neg B, \delta) \Leftrightarrow \neg V_i(\eta(\mathbf{B}), \delta) \Leftrightarrow V_i(\neg\eta(\mathbf{B}), \delta) \Leftrightarrow V_i(\eta(\neg B), \delta)$.

VI. $\mathbf{A} = (\mathbf{B} \supset \mathbf{C})$.

$W_2(\mathbf{B} \supset \mathbf{C}) \Leftrightarrow \neg W_2(\mathbf{B}, \delta) \dot{\vee} W_2(\mathbf{C}, \delta) \Leftrightarrow \neg V_i(\eta(\mathbf{B}), \delta) \dot{\vee} V_i(\eta(\mathbf{C}), \delta) \Leftrightarrow V_i((\eta(\mathbf{B}) \supset \eta(\mathbf{C})), \delta) \Leftrightarrow V_i(\eta(\mathbf{B} \supset \mathbf{C}), \delta)$.

Остальные случаи индуктивного перехода рассматриваются аналогично.

Таким образом, мы обосновали следующее метаутверждение:

$$\dot{\vee} \mathbf{A} \dot{\vee} \delta(W_2(\mathbf{A}, \delta) \Leftrightarrow V_i(\eta(\mathbf{A}), \delta)).$$

Из него по законам первопорядковой логики следует:

$$\dot{\vee} \mathbf{A} (\dot{\vee} \delta W_2(\mathbf{A}, \delta) \Leftrightarrow \dot{\vee} \delta V_i(\eta(\mathbf{A}), \delta)).$$

Последнее означает, что произвольная формула $\mathbf{A}$ W_2 -общезначима в том и только в том случае, когда V_i -общезначим ее перевод $\eta(\mathbf{A})$. ■

Теорема 3. *Для произвольной силлогистической формулы $\mathbf{A}$ верно, что $\eta(\mathbf{A})$ доказуема в ИФС, если и только если $\eta(\mathbf{A})$ — V_i -общезначимая формула.*

Доказательство. Семантические непротиворечивость и полнота силлогистики ИФС доказаны в [Маркин, 2016a]: произвольная формула языка силлогистики доказуема в данной системе, если и только если она V_i -общезначима (см. опр. 3). Поскольку η -перевод (см. опр. 5) любой формулы силлогистического языка также принадлежит этому языку, то указанная равносильность (доказуемости и общезначимости) имеет место и для него. ■

Теорема 4. *Произвольная силлогистическая формула $\mathbf{A}$ доказуема в исчислении ИФС₂, если и только если $\mathbf{A}$ W_2 -общезначима.*

Доказательство. Согласно Теореме 1, доказуемость произвольной формулы $\mathbf{A}$ в системе ИФС₂ равносильна доказуемости ее перевода $\eta(\mathbf{A})$ (см. опр. 5) в системе ИФС. Согласно Теореме 3, доказуемость $\eta(\mathbf{A})$ в ИФС равносильна V_i -общезначимости $\eta(\mathbf{A})$ (см. опр. 3). Наконец, согласно Теореме 2, V_i -общезначимость $\eta(\mathbf{A})$ равносильна W_2 -общезначимости формулы $\mathbf{A}$ (см. опр. 4). ■

Таким образом, адекватная релевантизированная семантика для силлогистики ИФС₂ построена.

2. Интенциональная семантика силлогистики C2

Рассмотрим систему C2, предложенную В.А. Смирновым. Ее схемами аксиом являются:

- A0.** Схемы аксиом классического исчисления высказываний;
A1. $(MaP \wedge SaM) \supset SaP$; **A5.** $SiP \supset SaS$;
A2. $(MeP \wedge SaM) \supset SeP$; **A6.** $SeP \equiv \neg SiP$.
A3. $SeP \supset PeS$; **A7.** $SoP \equiv \neg SaP$.
A4. $SaP \supset SiP$;

Единственным правилом вывода в C2 является правило *modus ponens*.

Перевод χ , погружающий исчисление C2 в исчисление ФС, задается следующим образом [Бочаров, Маркин, 2010, с. 87–89]:

Определение 6.

$$\begin{aligned}
\chi(SaP) &= SaP \wedge SiS; & \chi(SeP) &= SeP; \\
\chi(SiP) &= SiP; & \chi(SoP) &= SoP \vee \neg SiS; \\
\chi(\neg \mathbf{A}) &= \neg \chi(\mathbf{A}); & \chi(\mathbf{A} \nabla \mathbf{B}) &= \chi(\mathbf{A}) \nabla \chi(\mathbf{B}).
\end{aligned}$$

Адекватную семантику в духе В.И. Шалака для системы **C2** предложил В.И. Маркин [Маркин, 2016b]. Условия значимости простых формул задаются следующим образом:

Определение 7.

$$\begin{aligned}
Q'(SaP, \delta) &\Leftrightarrow \delta(S) \models \delta(P) \wedge \delta(S) \not\models \neg \delta(S); \\
Q'(SeP, \delta) &\Leftrightarrow \delta(S) \models \neg \delta(P); \\
Q'(SiP, \delta) &\Leftrightarrow \delta(S) \not\models \neg \delta(P); \\
Q'(SoP, \delta) &\Leftrightarrow \delta(S) \not\models \delta(P) \dot{\vee} \delta(S) \models \neg \delta(S).
\end{aligned}$$

Формула **A** называется Q' -общезначимой, если и только если $\dot{\vee} \delta Q'(\mathbf{A}, \delta)$.

Для доказательства адекватности данной семантики исчислению **C2** необходимо сначала доказать следующую метатеорему:

Теорема 5. Произвольная силлогистическая формула **A** Q' -общезначима, если и только если ее перевод $\chi(\mathbf{A})$ Φ -общезначим (см. опр. 1).

Доказательство. Для этого докажем предварительно следующее утверждение:

$$\dot{\vee} \mathbf{A} \dot{\vee} \delta(Q'(\mathbf{A}, \delta) \Leftrightarrow \Phi(\chi(\mathbf{A}), \delta)).$$

Будем использовать возвратную индукцию по числу пропозициональных связок в **A**.

I. $\mathbf{A} = SaP$.

$$Q'(SaP, \delta) \Leftrightarrow \delta(S) \models \delta(P) \wedge \delta(S) \not\models \neg \delta(S) \Leftrightarrow \Phi(SaP \wedge SiS, \delta) \Leftrightarrow \Phi(\chi(SaP), \delta).$$

II. $\mathbf{A} = SeP$.

$$Q'(SeP, \delta) \Leftrightarrow \delta(S) \models \neg \delta(P) \Leftrightarrow \Phi(SeP, \delta) \Leftrightarrow \Phi(\chi(SeP), \delta).$$

III. $\mathbf{A} = SiP$.

$$Q'(SiP, \delta) \Leftrightarrow \delta(S) \not\models \neg \delta(P) \Leftrightarrow \Phi(SiP, \delta) \Leftrightarrow \Phi(\chi(SiP), \delta).$$

IV. $\mathbf{A} = SoP$.

$$Q'(SoP, \delta) \Leftrightarrow \delta(S) \not\models \delta(P) \dot{\vee} \delta(S) \models \neg \delta(S) \Leftrightarrow \Phi(SoP \vee SeS, \delta) \Leftrightarrow \Phi(SoP \vee \neg SiS, \delta) \Leftrightarrow \Phi(\chi(SoP), \delta).$$

V. $\mathbf{A} = \neg \mathbf{B}$.

$$Q'(\neg \mathbf{B}, \delta) \Leftrightarrow \neg Q'(\mathbf{B}, \delta) \Leftrightarrow \neg \Phi(\chi(\mathbf{B}), \delta) \Leftrightarrow \Phi(\neg(\chi(\mathbf{B})), \delta) \Leftrightarrow \Phi(\chi(\neg \mathbf{B}), \delta).$$

VI. $\mathbf{A} = \mathbf{B} \supset \mathbf{C}$.

$$Q'(\mathbf{B} \supset \mathbf{C}, \delta) \Leftrightarrow \neg Q'(\mathbf{B}, \delta) \dot{\vee} Q'(\mathbf{C}, \delta) \Leftrightarrow \neg \Phi(\chi(\mathbf{B}), \delta) \dot{\vee} \Phi(\chi(\mathbf{C}), \delta) \Leftrightarrow \Phi(\chi(\mathbf{B}) \supset \chi(\mathbf{C}), \delta) \Leftrightarrow \Phi(\chi(\mathbf{B} \supset \mathbf{C}), \delta).$$

Другие случаи, когда $\mathbf{A}$ есть сложная формула, обосновываются аналогично.

Эквивалентные преобразования в трех базисных пунктах осуществляются на основе определений предикатов Q' (см. опр. 7) и Φ (см. опр. 1) и операции χ (см. опр. 6), в индуктивном переходе используется также индуктивное допущение о том, что утверждение леммы верно для формул с меньшим, чем у $\mathbf{A}$, числом пропозициональных связок.

Из только что доказанного утверждения $\dot{\forall} \mathbf{A} \dot{\forall} \delta (Q'(\mathbf{A}, \delta) \Leftrightarrow \Phi(\chi(\mathbf{A}), \delta))$ по законам первопорядковой логики следует:

$$\dot{\forall} \mathbf{A} (\dot{\forall} \delta (Q'(\mathbf{A}, \delta) \Leftrightarrow \dot{\forall} \delta \Phi(\chi(\mathbf{A}), \delta))).$$

Последнее означает, что произвольная формула $\mathbf{A}$ Q' -общезначима в том и только в том случае, когда Φ -общезначима формула $\chi(\mathbf{A})$. ■

Докажем теперь теорему об адекватности предложенной семантики исчислению **C2**.

Теорема 6. *Произвольная формула $\mathbf{A}$ доказуема в исчислении **C2**, если и только если формула $\mathbf{A}$ Q' -общезначима.*

Доказательство. Данная теорема является элементарным следствием трех утверждений:

- (1) произвольная формула $\mathbf{A}$ доказуема в исчислении **C2**, если и только если ее перевод $\chi(\mathbf{A})$ (см. опр. 6) доказуем в исчислении **ФС**;
- (2) произвольная формула $\mathbf{A}$ Q' -общезначима (см. опр. 7), если и только если ее перевод $\chi(\mathbf{A})$ является Φ -общезначимым (см. опр. 1);
- (3) для любой формулы $\mathbf{A}$ верно, что $\chi(\mathbf{A})$ доказуема в исчислении **ФС**, если и только если $\chi(\mathbf{A})$ Φ -общезначима.

Утверждение (1) справедливо в силу того, что перевод χ погружает **C2** в **ФС**. Утверждение (2) доказано выше (Теорема 5). Утверждение (3) следует из доказанной В.И. Шалаком [Шалак, 2015] адекватности синтаксической интерпретации формул стандартного силлогистического языка системе **ФС**. ■

Покажем далее, что адекватная релевантизированная семантика для системы **C2** определяется следующими условиями значимости для атомарных силлогистических формул (для сложных формул они обычные). В качестве метапредиката значимости будем использовать символ Q :

Определение 8.

$$\begin{aligned}
Q(SaP, \delta) &\Leftrightarrow \delta(S) \models_{rel} \delta(P) \dot{\wedge} \delta(S) \not\models_{rel} \neg\delta(S); \\
Q(SeP, \delta) &\Leftrightarrow (\delta(S) \models_{rel} \neg\delta(P) \dot{\vee} \delta(S) \models_{rel} \neg\delta(S)) \dot{\vee} \delta(P) \models_{rel} \neg\delta(P); \\
Q(SiP, \delta) &\Leftrightarrow (\delta(S) \not\models_{rel} \neg\delta(P) \dot{\wedge} \delta(S) \not\models_{rel} \neg\delta(S)) \dot{\wedge} \delta(P) \not\models_{rel} \neg\delta(P); \\
Q(SoP, \delta) &\Leftrightarrow \delta(S) \not\models_{rel} \delta(P) \dot{\vee} \delta(S) \models_{rel} \neg\delta(S).
\end{aligned}$$

Зададим перевод μ из силлогистики **C2** в систему **ИФС**:

Определение 9.

$$\begin{aligned}
\mu(SaP) &= SaP \wedge SiS; & \mu(SeP) &= SeP \vee SeS \vee PeP; \\
\mu(SiP) &= SiP \wedge SiS \wedge PiP; & \mu(SoP) &= SoP \vee \neg SiS; \\
\mu(\neg A) &= \neg\mu(A); & \mu(A \nabla B) &= \mu(A) \nabla \mu(B).
\end{aligned}$$

Покажем, что он погружает **C2** в **ИФС**.

Для этого сначала зададим перевод ψ , погружающий систему **ФС** в ее подсистему **ИФС** [Маркин, 2016b]:

Определение 10.

$$\begin{aligned}
\psi(SaP) &= SaP \vee SeS; & \psi(SeP) &= (SeP \vee SeS) \vee PeP; \\
\psi(SiP) &= (SiP \wedge SiS) \wedge PiP; & \psi(SoP) &= SoP \wedge SiS; \\
\psi(\neg A) &= \neg\psi(A); & \psi(A \nabla B) &= \psi(A) \nabla \psi(B).
\end{aligned}$$

Теорема 7. *Перевод μ погружает **C2** в **ИФС**, т.е.*

$$\dot{\forall} A (C2 \vdash A \Leftrightarrow ИФС \vdash \mu(A)).$$

Доказательство. Так как исчисление **C2** погружается в исчисление **ФС** с помощью функции χ (см. опр. 6), а исчисление **ФС** погружается в **ИФС** с помощью функции ψ , то **C2** погружается в **ИФС** посредством композиции переводов χ и ψ , т.е.

$$\dot{\forall} A (C2 \vdash A \Leftrightarrow ИФС \vdash \psi(\chi(A))).$$

Остается доказать, что композиция переводов χ и ψ для произвольной формулы равносильна ее μ -переводу в системе **ИФС**:

$$\dot{\forall} A (ИФС \vdash \mu(A) \equiv \psi(\chi(A))).$$

Доказательство ведется возвратной индукцией по числу пропозициональных связок в формуле **A**.

Базис содержит четыре случая:

I. $A = SaP$.

Необходимо доказать, что $\mathbf{ИФС} \vdash \mu(SaP) \equiv \psi(\chi(SaP))$, то есть что формула $(SaP \wedge SiS) \equiv ((SaP \vee SeS) \wedge SiS \wedge SiS \wedge SiS)$ доказуема в $\mathbf{ИФС}$.

1. $((SaP) \wedge SiS) \supset ((SaP \vee SeS) \wedge SiS \wedge SiS \wedge SiS)$ **A0**
2. $((SaP \vee SeS) \wedge SiS \wedge SiS \wedge SiS) \supset SiS$ **A0**
3. $SiS \equiv \neg SeS$ **A7**
4. $((SaP \vee SeS) \wedge SiS \wedge SiS \wedge SiS) \supset SaP$ **3; ЛВ**
5. $((SaP \vee SeS) \wedge SiS \wedge SiS \wedge SiS) \supset (SaP \wedge SiS)$ **2, 4; ЛВ**
6. $(SaP \wedge SiS) \equiv ((SaP \vee SeS) \wedge SiS \wedge SiS \wedge SiS)$ **1, 5; ЛВ**

II. $A = SeP$.

Необходимо доказать, что $\mathbf{ИФС} \vdash \mu(SeP) \equiv \psi(\chi(SeP))$, то есть что формула $(SeP \vee SeS \vee PeP) \equiv (SeP \vee SeS \vee PeP)$ доказуема в $\mathbf{ИФС}$.

Она является законом логики высказываний, то есть одной из аксиом **A0**.

III. $A = SiP$.

Необходимо доказать, что $\mathbf{ИФС} \vdash \mu(SiP) \equiv \psi(\chi(SiP))$.

IV. $A = SoP$.

Необходимо доказать, что $\mathbf{ИФС} \vdash \mu(SoP) \equiv \psi(\chi(SoP))$.

Эти два случая сводятся, соответственно, к случаям **II** и **I** в силу схем аксиом **ИФС5** и **ИФС6** системы $\mathbf{ИФС}$.

Индуктивный переход обосновывается с помощью тех пунктов определений функций μ , χ и ψ (см. опр. 5, 6, 10), которые связаны с их применением к сложным формулам.

Итак, мы показали, что формулы $\mu(A)$ и $\psi(\chi(A))$ логически эквивалентны в $\mathbf{ИФС}$. Поскольку композиция переводов χ и ψ погружает **C2** в $\mathbf{ИФС}$, то перевод μ также является операцией, погружающей **C2** в $\mathbf{ИФС}$. ■

Теорема 8. Произвольная силлогистическая формула A Q -общезначима, если и только если ее перевод $\mu(A)$ V_i -общезначим, т.е.

$$\dot{V}A(Q(A, \delta) \Leftrightarrow V_i(\mu(A), \delta)).$$

Доказательство. Рассмотрим произвольную функцию δ , сопоставляющую общим терминам формулы пропозиционального языка в сигнатуре $\{\neg, \wedge, \vee\}$. Покажем, что $Q(A, \delta)$, если и только если $V_i(\mu(A), \delta)$ (см. опр. 3 и 5), для любой формулы A языка силлогистики.

Снова будем использовать возвратную индукцию по числу пропозициональных связок в составе A .

I. $A = SaP$.

$$Q(SaP, \delta) \Leftrightarrow \delta(S) \models_{rel} \delta(P) \wedge \delta(S) \not\models_{rel} \neg\delta(S) \Leftrightarrow V_i(SaP, \delta) \wedge V_i(SiS, \delta) \Leftrightarrow V_i(SaP \wedge SiS, \delta) \Leftrightarrow V_i(\mu(SaP), \delta).$$

II. $A = SeP$.

$$Q(SeP, \delta) \Leftrightarrow \delta(S) \models_{rel} \neg\delta(P) \dot{\vee} \delta(S) \models_{rel} \neg\delta(S) \dot{\vee} \delta(P) \models_{rel} \neg\delta(P) \Leftrightarrow \\ V_i(SeP, \delta) \dot{\vee} V_i(SeS, \delta) \dot{\vee} V_i(PeP, \delta) \Leftrightarrow V_i(SeP \vee SeS \vee PeP, \delta) \Leftrightarrow \\ V_i(\mu(SeP), \delta).$$

III. $A = SiP$.

IV. $A = SoP$.

Эти два случая сводятся, соответственно, к случаям **II** и **I** в силу того, что условия их Q -значимости (см. опр. 8) и V_i -значимости противоречат соответствующим условиям значимости атомарных формул SeP и SaP .

Индуктивный переход доказывается аналогично Теореме 2. ■

Теорема 9. *Для произвольной силлогистической формулы A верно, что $\mu(A)$ доказуема в ИФС, если и только если $\mu(A)$ — V_i -общезначимая формула.*

Доказательство. Семантические непротиворечивость и полнота силлогистики **ИФС** доказаны в [Маркин, 2016a]: произвольная формула языка силлогистики доказуема в данной системе, е.т.е. она V_i -общезначима (см. опр. 3). Поскольку μ -перевод (см. опр. 5) любой формулы силлогистического языка также принадлежит этому языку, то указанная равносильность (доказуемости и общезначимости) имеет место и для него. ■

Теорема 10. *Произвольная силлогистическая формула A доказуема в исчислении **C2**, е.т.е. A Q -общезначима.*

Доказательство. Согласно Теореме 7, доказуемость произвольной формулы A в системе **C2** равносильна доказуемости ее перевода $\mu(A)$ (см. опр. 5) в системе **ИФС**. Согласно Теореме 9, доказуемость $\mu(A)$ в **ИФС** равносильна V_i -общезначимости $\mu(A)$ (см. опр. 3). Наконец, согласно Теореме 8, V_i -общезначимость $\mu(A)$ равносильна Q -общезначимости формулы A (см. опр. 8). ■

3. Интенциональная семантика силлогистики Больцано

Другая интерпретация категорических высказываний была предложена чешским математиком Бернардо Больцано: при экстенциональном подходе она подразумевает непустоту субъекта в истинных высказываниях (как общих, так и частных). Данная силлогистическая теория не является аристотелевской, в ней не принимаются некоторые законы логического квадрата, обращения для e и два модуса **IV** фигуры силлогизма.

Схемами аксиом системы **СБ** — одной из возможных формализаций этой теории — являются:

СБ0. Схемы аксиом классического исчисления высказываний;

СБ1. $(MaP \wedge SaM) \supset SaP$; **СБ5.** $SiP \supset SaS$;

СБ2. $(MeP \wedge SaM) \supset SeP$; **СБ6.** $SeP \equiv \neg SiP \wedge SiS$.

СБ3. $SiP \supset PiS$;

СБ7. $SoP \equiv \neg SaP \wedge SiS$.

СБ4. $SaP \supset SiP$;

Единственным правилом вывода в **СБ** является правило *modus ponens*.

Перевод ρ , погружающий исчисление **СБ** в исчисление **ФС**, задается следующим образом [Бочаров, Маркин, 2010, с. 78–82]:

Определение 11.

$$\begin{aligned} \rho(SaP) &= SaP \wedge SiS; & \rho(SeP) &= SeP \wedge SiS; \\ \rho(SiP) &= SiP; & \rho(SoP) &= SoP; \\ \rho(\neg A) &= \neg \rho(A); & \rho(A \nabla B) &= \rho(A) \nabla \rho(B). \end{aligned}$$

Построим адекватную семантику в духе В.И. Шалака для системы **СБ**. Условия значимости простых формул задаются следующим образом:

Определение 12.

$$\begin{aligned} R'(SaP, \delta) &\Leftrightarrow \delta(S) \models \delta(P) \dot{\wedge} \delta(S) \not\models \neg \delta(S); \\ R'(SeP, \delta) &\Leftrightarrow \delta(S) \models \neg \delta(P) \dot{\wedge} \delta(S) \not\models \neg \delta(S); \\ R'(SiP, \delta) &\Leftrightarrow \delta(S) \not\models \neg \delta(P); \\ R'(SoP, \delta) &\Leftrightarrow \delta(S) \not\models \delta(P). \end{aligned}$$

Формула **A** называется R' -общезначимой, если и только если $\dot{\forall} \delta R'(A, \delta)$.

Для доказательства адекватности данной семантики исчислению **СБ** необходимо сначала доказать следующую метатеорему:

Теорема 11. Произвольная силлогистическая формула **A** R' -общезначима, если и только если ее перевод $\rho(A)$ Φ -общезначим (см. опр. 1).

Доказательство. Для этого докажем предварительно следующее утверждение:

$$\dot{\forall} A \dot{\forall} \delta (R'(A, \delta) \Leftrightarrow \Phi(\rho(A), \delta)).$$

Будем использовать возвратную индукцию по числу пропозициональных связок в **A**.

I. $A = SaP$.

$$R'(SaP, \delta) \Leftrightarrow \delta(S) \models \delta(P) \dot{\wedge} \delta(S) \not\models \neg \delta(S) \Leftrightarrow \Phi(SaP \wedge SiS, \delta) \Leftrightarrow \Phi(\rho(SaP), \delta).$$

II. $A = SeP$.

$$R'(SeP, \delta) \Leftrightarrow \delta(S) \models \neg \delta(P) \dot{\wedge} \delta(S) \not\models \neg \delta(S) \Leftrightarrow \Phi(SeP \wedge SiS, \delta) \Leftrightarrow \Phi(\rho(SeP), \delta).$$

III. $A \equiv SiP$.

$$R'(SiP, \delta) \Leftrightarrow \delta(S) \not\models \neg\delta(P) \Leftrightarrow \Phi(SiP, \delta) \Leftrightarrow \Phi(\rho(SiP), \delta).$$

IV. $A \equiv SoP$.

$$R'(SoP, \delta) \Leftrightarrow \delta(S) \not\models \delta(P) \Leftrightarrow \Phi(SoP, \delta) \Leftrightarrow \Phi(\rho(SoP), \delta).$$

Случаи, когда A есть сложная формула, и дальнейшее доказательство рассматриваются аналогично Теореме 5. ■

Докажем теперь теорему об адекватности предложенной семантики исчислению **СБ**.

Теорема 12. *Произвольная формула A доказуема в исчислении **СБ**, если и только если формула A R' -общезначима.*

Доказательство. Данная теорема является элементарным следствием трех утверждений:

- (1) произвольная формула A доказуема в исчислении **СБ**, если и только если ее перевод $\rho(A)$ (см. опр. 11) доказуем в исчислении **ФС**;
- (2) произвольная формула A R' -общезначима (см. опр. 12), если и только если ее перевод $\rho(A)$ является Φ -общезначимым (см. опр. 1);
- (3) для любой формулы A верно, что $\rho(A)$ доказуема в исчислении **ФС**, если и только если $\rho(A)$ Φ -общезначима.

Утверждение (1) справедливо в силу того, что перевод ρ погружает **СБ** в **ФС**. Утверждение (2) доказано выше (Теорема 11). Утверждение (3) следует из доказанной В.И. Шалаком [Шалак, 2015] адекватности синтаксической интерпретации формул силлогистического языка системе **ФС**. ■

Покажем теперь, что адекватная релевантизированная семантика для системы **СБ** определяется следующими условиями значимости для атомарных силлогистических формул (для сложных формул они обычные). В качестве метапредиката значимости будем использовать символ R :

Определение 13.

$$\begin{aligned} R(SaP, \delta) &\Leftrightarrow \delta(S) \models_{rel} \delta(P) \wedge \delta(S) \not\models_{rel} \neg\delta(S); \\ R(SeP, \delta) &\Leftrightarrow (\delta(S) \models_{rel} \neg\delta(P) \vee \delta(P) \models_{rel} \neg\delta(P)) \wedge \delta(S) \not\models_{rel} \neg\delta(S); \\ R(SiP, \delta) &\Leftrightarrow (\delta(S) \not\models_{rel} \neg\delta(P) \wedge \delta(S) \not\models_{rel} \neg\delta(S)) \wedge \delta(P) \not\models_{rel} \neg\delta(P); \\ R(SoP, \delta) &\Leftrightarrow \delta(S) \not\models_{rel} \delta(P) \vee \delta(S) \not\models_{rel} \neg\delta(S). \end{aligned}$$

Покажем, что множество теорем исчисления **СБ** совпадает с классом R -общезначимых формул. Будем использовать тот же метод, что и в предыдущем разделе.

Зададим перевод τ из силлогистики **СБ** в систему **ИФС**:

Определение 14.

$$\begin{aligned}
\tau(SaP) &= SaP \wedge SiS; & \tau(SeP) &= (SeP \vee PeP) \wedge SiS; \\
\tau(SiP) &= (SiP \wedge SiS) \wedge PiP; & \tau(SoP) &= SoP \wedge SiS; \\
\tau(\neg A) &= \neg \tau(A); & \tau(A \nabla B) &= \tau(A) \nabla \tau(B).
\end{aligned}$$

Покажем, что τ -перевод погружает **СБ** в **ИФС**.

Теорема 13. *Перевод τ погружает **СБ** в **ИФС**, т.е.*

$$\forall A (\mathbf{СБ} \vdash A \Leftrightarrow \mathbf{ИФС} \vdash \tau(A)).$$

Доказательство. Так как исчисление **СБ** погружается в исчисление **ФС** посредством функции ρ (см. опр. 11), а исчисление **ФС** погружается в **ИФС** посредством функции ψ (см. опр. 10), то **СБ** погружается в **ИФС** посредством композиции переводов ρ и ψ .

Остается доказать, что композиция переводов ρ и ψ для произвольной формулы равносильна ее τ -переводу в системе **ИФС**:

$$\forall A (\mathbf{ИФС} \vdash \tau(A) \equiv \psi(\rho(A))).$$

Доказательство этого метаясждения ведется индукцией по числу пропозициональных связок в формуле **A**.

Базис содержит четыре случая:

I. $A = SaP$.

Необходимо доказать, что $\mathbf{ИФС} \vdash \tau(SaP) \equiv \psi(\rho(SaP))$, то есть что формула $(SaP \wedge SiS) \equiv ((SaP \vee SeS) \wedge SiS \wedge SiS \wedge SiS)$ доказуема в **ИФС**.

Доказательство приведено в предыдущем разделе.

II. $A = SeP$.

Необходимо доказать, что $\mathbf{ИФС} \vdash \tau(SeP) \equiv \psi(\rho(SeP))$, то есть что формула $((SeP \vee PeP) \wedge SiS) \equiv (SeP \vee SeS \vee PeP) \wedge SiS \wedge SiS \wedge SiS$ доказуема в **ИФС**.

1. $((SeP \vee PeP) \wedge SiS) \supset ((SeP \vee SeS \vee PeP) \wedge SiS \wedge SiS \wedge SiS)$ **A0**
2. $((SeP \vee SeS \vee PeP) \wedge SiS \wedge SiS \wedge SiS) \supset SiS$ **A0**
3. $SiS \equiv \neg SeS$ **A7**
4. $((SeP \vee SeS \vee PeP) \wedge SiS \wedge SiS \wedge SiS) \supset (SeP \vee PeP)$ **3; ЛВ**
5. $((SeP \vee PeP) \wedge SiS) \equiv ((SeP \vee SeS \vee PeP) \wedge (SiS \wedge SiS \wedge SiS))$ **1, 4; ЛВ**

III. $A = SiP$.

Необходимо доказать, что $\mathbf{ИФС} \vdash \tau(SiP) \equiv \psi(\rho(SiP))$, то есть что формула $((SiP \wedge SiS) \wedge PiP) \equiv ((SiP \wedge SiS) \wedge PiP)$ доказуема в **ИФС**. Она

является законом логики высказываний и, следовательно, одной из аксиом **A0**.

IV. $\mathbf{A} = SoP$.

Необходимо доказать, что $\mathbf{ИФС} \vdash \tau(SoP) \equiv \psi(\rho(SoP))$, то есть что формула $(SoP \wedge SiS) \equiv (SoP \wedge SiS)$ доказуема в **ИФС**. Она является законом логики высказываний и, следовательно, одной из аксиом **A0**.

Обоснование индуктивного перехода ведется совершенно аналогично тому, как это делалось при доказательстве Теоремы 7 предыдущего раздела.

Мы показали, что формулы $\tau(\mathbf{A})$ и $\psi(\rho(\mathbf{A}))$ логически эквивалентны в **ИФС**. Поскольку композиция переводов ρ и ψ погружает **СБ** в **ИФС**, то перевод τ также является операцией, погружающей **СБ** в **ИФС**. ■

Теорема 14. *Произвольная силлогистическая формула $\mathbf{A}$ R -общезначима, если и только если ее перевод $\tau(\mathbf{A})$ V_i -общезначим, т.е.*

$$\forall \mathbf{A} (R(\mathbf{A}, \delta) \Leftrightarrow V_i(\tau(\mathbf{A}), \delta)).$$

Доказательство. Рассмотрим произвольную функцию δ , сопоставляющую общим терминам формулы пропозиционального языка в сигнатуре $\{\neg, \wedge, \vee\}$. Покажем, что $R(\mathbf{A}, \delta)$, если и только если $V_i(\tau(\mathbf{A}), \delta)$ (см. опр. 13 и 3), для любой формулы $\mathbf{A}$ языка силлогистики.

Снова будем использовать возвратную индукцию по числу пропозициональных связок в составе $\mathbf{A}$.

I. $\mathbf{A} = SaP$.

$$R(SaP, \delta) \Leftrightarrow \delta(S) \models_{rel} \delta(P) \dot{\wedge} \delta(S) \not\models_{rel} \neg\delta(S) \Leftrightarrow V_i(SaP, \delta) \dot{\wedge} V_i(SiS, \delta) \Leftrightarrow V_i(SaP \wedge SiS, \delta) \Leftrightarrow V_i(\tau(SaP), \delta).$$

II. $\mathbf{A} = SeP$.

$$R(SeP, \delta) \Leftrightarrow (\delta(S) \models_{rel} \neg\delta(P) \dot{\vee} \delta(P) \models_{rel} \neg\delta(P)) \dot{\wedge} \delta(S) \not\models_{rel} \neg\delta(S) \Leftrightarrow (V_i(SeP, \delta) \dot{\vee} V_i(PeP, \delta)) \dot{\wedge} V_i(SiS, \delta) \Leftrightarrow V_i((SeP \vee PeP) \wedge SiS, \delta) \Leftrightarrow V_i(\tau(SeP), \delta).$$

III. $\mathbf{A} = SiP$.

$$R(SiP, \delta) \Leftrightarrow (\delta(S) \not\models_{rel} \neg\delta(P) \dot{\wedge} \delta(S) \not\models_{rel} \neg\delta(S)) \dot{\wedge} \delta(P) \not\models_{rel} \neg\delta(P) \Leftrightarrow (V_i(SiP, \delta) \dot{\wedge} V_i(SiS, \delta)) \dot{\wedge} V_i(PiP, \delta) \Leftrightarrow V_i((SiP \wedge SiS) \wedge PiP, \delta) \Leftrightarrow V_i(\tau(SiP), \delta).$$

IV. $\mathbf{A} = SoP$.

$$R(SoP, \delta) \Leftrightarrow \delta(S) \not\models_{rel} \delta(P) \dot{\vee} \delta(S) \not\models_{rel} \neg\delta(S) \Leftrightarrow V_i(SoP, \delta) \dot{\wedge} V_i(SiS, \delta) \Leftrightarrow V_i(SoP \wedge SiS, \delta) \Leftrightarrow V_i(\tau(SoP), \delta).$$

Случаи, когда $\mathbf{A}$ — сложная формула, и дальнейшее доказательство рассматриваются аналогично тому, как это делалось при доказательстве Теоремы 2 первого раздела. ■

Теорема 15. Для произвольной силлогистической формулы $\mathbf{A}$ верно, что $\tau(\mathbf{A})$ доказуема в **ИФС**, если и только если $\tau(\mathbf{A})$ — V_i -общезначимая формула.

Доказательство. Семантические непротиворечивость и полнота силлогистики **ИФС** доказаны в [Маркин, 2016а]: произвольная формула языка силлогистики доказуема в данной системе, е.т.е. она V_i -общезначима (см. опр. 3). Поскольку τ -перевод (см. опр. 14) любой формулы силлогистического языка также принадлежит этому языку, то указанная равносильность (доказуемости и общезначимости) имеет место и для него. ■

Теорема 16. Произвольная силлогистическая формула $\mathbf{A}$ доказуема в исчислении **СБ**, е.т.е. $\mathbf{A}$ R -общезначима.

Доказательство. Согласно Теореме 13, доказуемость произвольной формулы $\mathbf{A}$ в системе **СБ** равносильна доказуемости ее перевода $\tau(\mathbf{A})$ (см. опр. 14) в системе **ИФС**. Согласно Теореме 15, доказуемость $\tau(\mathbf{A})$ в **ИФС** равносильна V_i -общезначимости $\tau(\mathbf{A})$ (см. опр. 3). Наконец, согласно Теореме 14, V_i -общезначимость $\tau(\mathbf{A})$ равносильна R -общезначимости формулы $\mathbf{A}$ (см. опр. 13). ■

Заключение

В свете построенных семантик остается несколько вопросов, решение которых является дальнейшей задачей.

Кроме **ИФС**₂, у **ФС** есть и другая подсистема — силлогистика **ИФС**₁, где константы a и o трактуются как в **ФС**, а константы e и i — как в **ИФС**.

Понятие значимости формул определим для данной системы следующим образом (будем использовать здесь символ W_1 для метапредиката значимости):

Определение 15.

$$\begin{aligned} W_1(SaP, \delta) &\Leftrightarrow \delta(S) \models_{rel} \delta(P) \dot{\vee} \delta(S) \not\models_{rel} \neg\delta(S); \\ W_1(SeP, \delta) &\Leftrightarrow \delta(S) \models_{rel} \neg\delta(P); \\ W_1(SiP, \delta) &\Leftrightarrow \delta(S) \not\models_{rel} \neg\delta(P); \\ W_1(SoP, \delta) &\Leftrightarrow \delta(S) \not\models_{rel} \delta(P) \dot{\vee} \delta(S) \models_{rel} \neg\delta(S). \end{aligned}$$

Для сложных формул W_1 задается стандартно.

Можно предположить, что класс общезначимых формул в такой семантике аксиоматизирует исчисление, полученное из **ФС** путем отбрасывания

аксиомы **ФС5** $SiP \supset SiS$. Однако доказать это утверждение тем же методом, который использовался выше для системы **ИФС₂**, не удалось. Проблема остается открытой.

Еще один вопрос кажется интересным для дальнейшего развития данного подхода: изменятся ли множество теорем систем **С2** и **СБ**, если заменить в их интенциональных семантиках классическое следование на релевантное?

Как и для системы **ИФС₁**, можно лишь предположить, какие именно исчисления будут аксиоматизировать данные семантики. Например, в обоих случаях можно показать общезначимость переводов, но показать погружаемость используемым выше способом не удалось: для релевантных фрагментов **С2** и **СБ** не проходят аксиомы **А5** и **СБ5** соответственно: $SiP \supset SaS$. Проблема также остается открытой.

Литература

- Бочаров, Маркин, 2010 – *Бочаров В.А., Маркин В.И.* Силлогистические теории. М.: Прогресс–Традиция, 2010. 333 с.
- Лейбниц, 1982 – *Лейбниц Г.В.* Соч.: В 4 т. М.: Мысль, 1982–1989.
- Маркин, 2001 – *Маркин В.И.* Интенциональная семантика традиционной силлогистики // Логические исследования. Вып. 8. М.: Наука, 2001. С. 82–91.
- Маркин, 2002 – *Маркин В.И.* Фундаментальная силлогистика с интенциональной точки зрения // Логические исследования. Вып. 9. М.: Наука, 2002. С. 119–130.
- Маркин, 2016a – *Маркин В.И.* Интерпретация категорических высказываний в терминах релевантного следования // Логические исследования. 2016. Т. 22. № 1. С. 70–81.
- Маркин, 2016b – *Маркин В.И.* Семантика позитивных силлогистик и релевантное следование // Логико-философские штудии. 2016. Т. 13. № 2. С. 34–39.
- Маркин, Легейдо, 2019 – *Маркин В.И., Легейдо М.М.* Интенциональная семантика логики классов Дж. Венна // Логические исследования. 2019. Т. 25. № 2. С. 114–137.
- Смирнов, 2021 – *Смирнов В.А.* Логические методы анализа научного знания. М.: ЛЕНАНД, 2021. 264 с.
- Шалак, 2015 – *Шалак В.И.* Синтаксическая интерпретация категорических атрибутивных высказываний // Логические исследования. 2015. Т. 21. № 1. С. 60–78.

MARIA M. LEGEYDO

Intensional semantics for some positive syllogistic systems

Maria M. Legeydo

Lomonosov Moscow State University,
27/4 Lomonosovskiy prospect, Moscow, 119991, Russian Federation.
E-mail: legeydo.mm@philos.msu.ru

Abstract: The article is devoted to the consideration of intensional semantics for some systems of positive syllogistics: fundamental syllogistics and its subsystems, **C2** syllogistics and Bolzano syllogistics.

The intensional semantics presented in the article are based on the syntactic approach proposed by V. Shalak and further developed by V. Markin, in which the formulas of the propositional language are attributed to general terms, and the significance of syllogistic constants is determined through the relation of classical, and then relevant, entailment.

The first section of the article contains a description of the already existing intensional semantics with a relevant entailment for fundamental syllogistics and its **IFS** subsystem, and also offers two new systems (intermediate between **FS** and **IFS**), for one of which the adequacy of semantics to calculus is proved.

The second and third sections are devoted to two other well-known syllogistic systems: **C2** syllogistics and Bolzano syllogistics. For both systems, an intensional semantics with classical and relevant entailment is presented, and the adequacy of these semantics to the corresponding calculi is proved.

The proposed semantics expand the expressive power of syllogistics, and are also interesting in the light of the developing intensional approach to the interpretation of syllogistic semantics. The article also identifies problems that have not yet been solved in this area: possible semantics for some systems are proposed, the search for axiomatizations for which is of further interest.

Keywords: syllogistic, intensional semantics, formalization, axiomatic calculus, logical entailment, relevant entailment

For citation: Legeydo M.M. “Intensional’nye semantiki dlya nekotorykh sistem pozitivnoi sillogistiki” [Intensional semantics for some positive syllogistic systems], *Logicheskie Issledovaniya / Logical Investigations*, 2021, Vol. 27, No. 2, pp. 9–30. DOI: 10.21146/2074-1472-2021-27-2-9-30 (In Russian)

Acknowledgements. The reported study was funded by RFBR, project number 20-311-90043.

References

- Bocharov, Markin, 2010 – Bocharov, V.A., Markin, V.I. “Sillogisticheskie teorii” [Syllogistic theories]. Moscow: Progress-tradition, 2010. 333 pp. (In Russian)
- Leibniz, 1982 – Leibniz, G. Sochineniya v 4-h tomah [Writings in 4 volumes]. Moscow: Mysl', 1982–1989. (In Russian)
- Markin, 2001 – Markin, V.I. “Intensional'naya semantika tradicionnoj sillogistiki” [Intensional semantics for traditional syllogistic], in: *Logicheskie issledovaniya* [Logical investigations], Vol. 8. Moscow: Nauka, 2001, pp. 82–91. (In Russian)
- Markin, 2002 – Markin, V.I. “Fundamental'naya sillogistika s intensional'noj tochki zreniya” [Fundamental syllogistic from the intensional standpoint], in: *Logicheskie issledovaniya* [Logical investigations], Vol. 9. Moscow: Nauka, 2002, pp. 119–130. (In Russian)
- Markin, 2016a – Markin, V.I. “Interpretaciya kategoricheskikh vyskazyvanij v terminah relevantnogo sledovaniya” [Interpretation of categorical propositions in terms of relevant entailment], *Logicheskie issledovaniya* [Logical investigations], 2016, Vol. 22, No. 1, pp. 70–81. (In Russian)
- Markin, 2016b – Markin, V.I. “Semantika pozitivnykh sillogistik i relevantnoe sledovanie” [Semantics of positive syllogistics and relevant entailment], *Logiko-filosofskie shtudii* [Logical and philosophical studies], 2016, Vol. 13, No. 2, pp. 34–39. (In Russian)
- Markin, Legeydo, 2019 – Markin, V.I., Legeydo, M.M. “Intensional'naya semantika logiki klassov Dzh. Venna” [Intensional Semantics for J. Venn's Logic of Classes], *Logicheskie issledovaniya* [Logical investigations], 2019, Vol. 25, No. 2, pp. 114–137. (In Russian)
- Shalack, 2015 – Shalack, V.I. “Sintaksicheskaya interpretaciya kategoricheskikh atributivnykh vyskazyvanij” [Syntactic interpretation of categorical attributive propositions], *Logicheskie issledovaniya* [Logical investigations], 2015, Vol. 21, No. 1, pp. 60–78. (In Russian)
- Smirnov, 2021 – Smirnov, V.A. “Logicheskie metody analiza nauchnogo znaniya” [Logical methods of the analyses of scientific knowledge]. Moscow: LENAND, 2021. 264 pp. (In Russian)