Логические исследования
2021. Т. 27. № 2. С. 153–184
УДК 16

Logical Investigations
2021, Vol. 27, No. 2, pp. 153–184
DOI: 10.21146/2074-1472-2021-27-2-153-184

Аналитические обзоры

Analitycal overviews

О.М. Григорьев

Системы временной логики I: моменты, истории, деревья*

Олег Михайлович Григорьев
МГУ им. М.В. Ломоносова.
Российская Федерация, 119991, г. Москва, Ломоносовский пр-т, д. 27, корп. 4.
E-mail: `grig@philos.msu.ru`

Аннотация: В статье дается обзор семантических структур и формализованных языков ряда пропозициональных логик линейного и ветвящегося времени, даны ссылки на основные технические результаты, связанные с формализациями (в виде аксиоматических исчислений гильбертовского типа) этих логических систем. Рассматриваемые модельные структуры строятся на основании онтологии, предполагающей наличие моментов времени и в некоторых случаях образуемых ими историй. Языки систем ветвящегося времени, затрагиваемых в настоящей статье, расширяют стандартный язык классической логики высказываний за счет добавления прайоровских временных операторов, а также модальностей, играющих роль кванторов на множестве историяй. Язык некоторых логик линейного времени содержит также операторы типа Until, Since и NextTime.

Ключевые слова: логика времени, линейное время, ветвящееся время, индетерминизм, будущие случайные события

Для цитирования: *Григорьев О.М.* Системы временной логики I: моменты, истории, деревья // Логические исследования / Logical Investigations. 2021. Т. 27. № 2. С. 153–184. DOI: 10.21146/2074-1472-2021-27-2-153-184

Введение

Логики времени (временны́е логики) возникают и изучаются в связи с поиском решений различных познавательных задач, понимаемых достаточно широко: от описания свойств конкретных вычислений до глубоких философских проблем. Среди таких задач можно выделить по крайней мере следующие:

* Исследование выполнено при финансовой поддержке РФФИ в рамках научного проекта № 20-011-00698а.

1. Логический анализ овременённых (т.е. содержащих временные параметры или характеристики) высказываний естественного языка и рассуждений, в которых временные параметры или характеристики высказываний существенны (см., например, вводные главы книг [Rescher, 1971; McArthur, 1976; Galton, 1987]).

2. Разработка философской проблематики, связанной с оппозицией предопределенности и свободы воли, детерминизма и индетерминизма ([Thomason, 1970; Belnap et al., 2001; Belnap et al., 2021; Correia, Iacona, 2013; Øhrstrøm, 2006]).

3. Исследование различных временных онтологий и обусловленных ими формальных моделей времени ([van Benthem, 1983; van Benthem, 1995; Hajnicz, 1996]).

4. Описание вычислительных процессов, развивающихся во времени, с помощью того или иного формализованного языка, анализ временных аспектов представления знания, извлечения информации из изменяющихся баз данных и т.п. ([Emerson, 1990; Kröger, Merz, 2008; Fisher et al., 2005; Demri et al., 2016]).

Разумеется, этот перечень не претендует на полноту охвата всей проблемной области[1], однако важным здесь является следующее обстоятельство. Каждый из вышеперечисленных пунктов можно принять за отправную точку при изучении как истории формирования и развития логики времени в целом, так и особенностей отдельных ее составляющих: формализованных языков, их возможных интерпретаций, теорий и их представлений в виде формальных систем. Хочется также надеяться, что приведенный список демонстрирует одну важную особенность временной логики, а именно что мотивации для ее развития происходят из очень разных источников: от лингвистического анализа системы времен глаголов до прикладных аспектов компьютерных наук и разработки искусственного интеллекта.

Для философской логики традиционный интерес представляют временные онтологии и определяемые ими семантические структуры, формализации теорий классов тех или иных семантических структур, анализ выразительных возможностей формализованных языков временных логик (см., например, тематику разделов главы [Burgess, 2002]). Вычислительно

[1] Заинтересованный читатель также может обратиться, например, к монографии [Gabbay et al., 1994, с. 3–6], где приводится детализированный перечень сфер применения временной логики с акцентом на использовании ее в компьютерных науках.

ориентированные временные системы, как правило, предназначены для решения конкретных прикладных задач (как, скажем, в работе [Gabbay et al., 1980]).

Логический анализ времени предполагает принятие той или иной его онтологии, то есть представления о том, чтó собой представляют элементарные, исходные сущности (индивиды), образующие время, и какие имеются отношения между ними. В качестве элементарных сущностей обычно[2] берутся моменты времени (неделимые точки) или интервалы, имеющие, в отличие от моментов, протяженность. Иногда рассматривают смешанный вариант (подробнее об этом см. в [van Benthem, 1983, гл. I.1.]). В логиках ветвящегося времени самостоятельным онтологическим статусом могут обладать *истории* (см., например, [Zanardo, 2003]), то есть линейно упорядоченные множества моментов времени. Существуют и иные разновидности исходных онтологических объектов, распространенные в литературе по временной логике, разрабатываемой в рамках исследований по искусственному интеллекту. Упомянем здесь логики действий, событий (см. [Allen, 1984; Allen, Ferguson, 1994] и [Hajnicz, 1996, гл. 1.1]). Варьирование свойств отношений между исходными сущностями времени определяет специфику его «устройства»: оно может иметь (не иметь) начальный (конечный) момент, быть дискретным или плотным, непрерывным или имеющим пробелы, ветвиться в прошлое (будущее) или же нет (подробнее см. [Goranko, Rumberg, 2020]).

Можно далее сказать, что допущение тех или иных исходных онтологических сущностей и характера устройства временного потока порождает самостоятельные традиции внутри общего направления логики времени. Точечно ориентированные онтологии времени естественным образом находят свое формальное представление в виде реляционных структур, которые изучаются с использованием теоретико-модельных методов, разработанных в модальной логике (поэтому временные логики таких модельных структур иногда рассматриваются как разновидности модальной логики ([Blackburn et al., 2002]) или излагаются наряду со «стандартной» мономодальной логикой ([Goldblatt, 1992])). Интервальные семантики требуют несколько иных технических конструкций и развиваются в виде самостоятельной отрасли исследований (см. [Allen, 1984; Allen, Ferguson, 1994; van Benthem, 1983; van Benthem, 1995]). Отдельно могут изучаться логики семантических структур, определяемых конкретными свойствами временных

[2] Как пишет ван Бентем в книге [van Benthem, 1983, гл. I.1.], «превалирующее математическое изображение времени — это множество точек (мгновений, моментов), не имеющих протяженности. Такое представление встречается уже в Античности, в классических парадоксах Зенона».

отношений. Например, это могут быть логики линейного времени, которое, в свою очередь, может быть дискретным, плотным, непрерывным и т.д. (ссылки на соответствующие исследования будут приведены ниже).

Еще один важный аспект изучения временных логик состоит в том, какие именно формализованные языки используются для построения логических теорий и какие временные операторы эти языки содержат. Основная часть исследований в рамках общего направления временной логики предполагает использование пропозициональных языков. Однако не менее важными и интересными являются исследования логических теорий в кванторых языках: с квантификацией по пропозициональным переменным; ограниченные первопорядковые языки, обогащенные временными модальностями. В настоящем обзоре будут фигурировать только пропозициональные языки. Временные логики в кванторных языках потребовали бы отдельного обзора.

За последние полвека логика времени претерпела впечатляющую эволюцию. Отчасти это объясняется различными по происхождению стимулами, определяющими развитие этой ветви неклассической логики. Первичными мотивациями были философские и даже грамматические изыскания[3]. Примерно с середины 70-х годов прошлого века (в особенности после выхода работы [Pnueli, 1977]) временная логика стала рассматриваться как средство для описания вычислительных процессов в теоретической информатике. Отсюда происходит некоторый параллелизм в развитии систем временной логики. Например, разнообразные логические системы ветвящегося времени активно изучаются в философской логике в рамках широкого контекста противопоставления детерминизма и индетерминизма, проблемы свободы воли и т.п., тогда как в компьютерных науках существуют родственные системы, логики вычислительных деревьев (хорошо известные системы **CTL** и **CTL***, а также их разновидности). Однако методы, развиваемые для решения метатеоретических задач, оказываются полезными как для «философских» систем временной логики, так и для их «вычислительных» напарников[4].

Энциклопедический обзор текущего состояния области исследования, существующей и развивающейся под общим названием «временная логика», вряд ли возможен в объеме небольшой статьи. В рамках данного обзора мы сосредоточимся на временных системах, семантически основанных на онтологии, предполагающей наличие моментов времени и в некоторых

[3] Не случайно логика времени первоначально носила название *tense logic*, которое постепенно заменилось на *temporal logic*.

[4] В качестве примера укажем на работы [Reynolds, 2001; Reynolds, 2003].

случаях более сложных объектов — образуемых ими историй. С точки зрения устройства временного потока наиболее важным для данной статьи является наличие или отсутствие ветвления времени. Более пристальное внимание будет уделено логикам ветвящегося времени, изучаемым в русле философской логической традиции (иногда называемым логиками исторической необходимости, философскими напарниками логик вычислительных деревьев).

Настоящий обзор рассчитан не только на специалистов в области логики, но и на более широкий круг исследователей-философов, интересующихся логическими аспектами проблематики детерминизма/индетерминизма, онтологии времени, выразительными возможностями формализованных языков. В силу этого обстоятельства автор постарался не перегружать изложение материала сложными техническими деталями. В частности, в обзоре отсутствуют доказательства каких-либо утверждений, но в то же время выписываются некоторые хорошо известные специалистам-логикам сведения.

Литература по временной логике трудно обозрима, учитывая динамический характер развития данного направления и его широту. Без сомнения, и по сей день актуальными, богатыми философскими и логическими идеями остаются труды основоположника современных исследований в логике времени А. Прайора, в особенности его монографии [Prior, 1957; Prior, 1967]. Результаты Прайора получили развитие в книгах [Rescher, 1971; McArthur, 1976]. Хорошим источником информации по разнообразным модельным структурам (как точечно, так и интервально ориентированным) может служить книга [van Benthem, 1983] и обзорная глава [van Benthem, 1995] того же автора. Наиболее значительным источником сведений технического характера является монография [Gabbay et al., 1994]. Большое количество справочной и библиографической информации имеется в [Blackburn et al., 2006, ch. 11] и [Goranko, Rumberg, 2020]. Вычислительные варианты временных логик представлены в [Emerson, 1990; Kröger, Merz, 2008; Demri et al., 2016]. Монография [Blackburn et al., 2002] также содержит обширную информацию по временной логике как разделу широко понимаемой модальной логики.

1. Логики линейного времени

Формальная модель времени (временной поток, временная шкала, временная модельная структура)[5] представляет собой пару $\mathcal{T} = (T, <)$, состоящую из непустого множества моментов времени T и заданного на нем бинарного отношения $<$, которое по крайней мере иррефлексивно (то есть

[5]См., например, источники [Gabbay et al., 1994; Blackburn et al., 2006, гл. 11], в которых используется термин *flow of time* в указанном далее смысле. В русскоязычной литературе по модальной логике такие объекты называют (*временными*) *шкалами Крипке* или просто *шкалами*; в традиции философской логики часто употребляется термин (*временная*) *модельная структура*. Мы будем использовать все эти термины как синонимы.

$\forall t(t \not< t)$) и транзитивно ($\forall t_1 \forall t_2 \forall t_3(t_1 < t_2 \wedge t_2 < t_3 \Rightarrow t_1 < t_3)$). Следующее свойство, естественным образом добавляемое к указанным двум, — это линейность, или трихотомия ($\forall t_1 \forall t_2(t_1 < t_2 \vee t_2 < t_1 \vee t_1 = t_2)$).

Сам по себе линейный временной поток может обладать рядом дополнительных свойств: наличие/отсутствие начального/конечного момента времени, дискретность/плотность, полнота, непрерывность[6]. Математические модели перечисленных видов линейных порядков — числовые множества: $(\mathbb{N}, <)$ — бесконечное в будущее дискретное время с начальным моментом; $(\mathbb{Z}, <)$ — бесконечное дискретное время без начального и конечного моментов; $(\mathbb{Q}, <)$ — бесконечное плотное время без начального и конечного моментов; $(\mathbb{R}, <)$ — бесконечное непрерывное время без начального и конечного моментов.

Числовые множества, таким образом, выступают в роли модельных структур. Коль скоро определены классы модельных структур, дальнейшая задача, решению которой посвящено большое количество работ по временной (и не только) логике, состоит в исследовании метатеоретических свойств логик этих классов. Можно ли построить адекватные семантикам исчисления (аксиоматического, секвенциального, аналитико-табличного или иного типа), решить проблему разрешения (множества теорем исчисления, общезначимых в классе определенных структур формул), исследовать сложность этой проблемы, если он решена, и т.д.?

1.1. Логики линейного времени в языке с прайоровскими модальностями

Логические теории линейных порядков строятся в рамках определенных формализованных (то есть интерпретированных искусственных [Tarski, 1935]) языков. Первоначально, в частности в работах А. Прайора, язык временной логики получался добавлением к языку классической логики высказываний двух исходных временных операторов, например, F (*когда-нибудь будет*) и P (*когда-то было*). Сильные модальности G (*всегда будет*) и H (*всегда было*) вводятся по определению: $GA \equiv_{df} \neg F \neg A$, $HA \equiv_{df} \neg P \neg A$. Модальности типа F и P иногда называют в литературе прайоровскими, так же как и сами языки, содержащие только эти операторы (или даже лишь один из них).

Временная модельная структура $\mathcal{T} = (T, <)$ становится моделью для прайоровского языка временной логики, если задана функция оценки на множестве PV пропозициональных переменных. Обычно это отображение $v \colon PV \mapsto 2^T$, которое каждой переменной ставит в соответствие множество моментов времени (в которых эта переменная полагается истинной). Для приписывания значений сложным формулам можно расширить функцию

[6]Определения этих свойств см., например, в [Burgess, 2002; Goranko, Rumberg, 2020].

оценки или же индуктивно определить отношение $\models$ истинности формулы A в момент времени t модельной структуры $\mathcal{T}$. Для случая классических пропозициональных связок определение истинности формулы стандартное для всех языков, рассматриваемых в данном обзоре. Напомним лишь условия истинности для формул с внешними прайоровскими модальностями в момент t модельной структуры $\mathcal{T}$:

$$\mathcal{T}, t \models FA \Leftrightarrow \exists t'(t < t' \wedge \mathcal{T}, t' \models A),$$
$$\mathcal{T}, t \models PA \Leftrightarrow \exists t'(t' < t \wedge \mathcal{T}, t' \models A).$$

Формула A общезначима во временной модельной структуре $\mathcal{T}$, если она истинна в каждой точке временной модельной структуры $\mathcal{T}$ при любой оценке v.

Формула A общезначима в классе временных модельных структур $\mathcal{C}$, если она общезначима в каждой модельной структуре этого класса. Логика класса модельных структур $\mathcal{C}$ есть множество всех общезначимых в этом классе формул.

Основные технические результаты, относящиеся к метатеоретическим свойствам логик линейных порядков в прайоровском языке, можно найти в монографии [Goldblatt, 1992, ch. 8]. Отметим здесь некоторые нюансы.

Конечная аксиоматизация логики шкалы $(\mathbb{N}, <)$ (логика, обозначенная как Ω), построенная в языке, содержащем только модальность будущего F, есть, по существу, расширение мономодальной системы **K**. Доказательство полноты системы аксиом обеспечивает также и *финитную аппроксимируемость* Ω, а значит (при учете *конечности* аксиоматизации), и разрешимость данной логики. Финитная аппроксимируемость обеспечивается тем, что фактически доказательство полноты аксиоматизации логики Ω относительно $(\mathbb{N}, <)$ сводится к доказательству полноты этой системы аксиом относительно класса конечных структур. Модификации данного метода одновременного доказательства полноты и финитной аппроксимируемости для логики Ω используются в тех же целях и для других систем логик линейного времени, изучаемых в той же главе. Конечные аксиоматизации логик модельных структур $(\mathbb{Q}, <)$ и $(\mathbb{R}, <)$ в мономодальном языке не различаются.

Временные логики числовых множеств в бимодальном прайоровском языке уже отличаются от мономодального случая. В той же главе 8 указанной монографии Гольдблатта (p. 78–83) даются конечные аксиоматизации логик множеств целых, рациональных и действительных чисел. В этом случае системы аксиом для логик структур $(\mathbb{Q}, <)$ и $(\mathbb{R}, <)$, как сами их логики, различны, поскольку в бимодальном языке можно выписать аксиому, характеристическую для $(\mathbb{R}, <)$, но опровержимую в $(\mathbb{Q}, <)$.

Дополнительные сведения о логиках линейного времени в прайоровском языке можно найти в монографии [Gabbay et al., 1994, ch. 6].

Минимальная система временной логики $\mathbf{K}_t$ представляет собой логику *всех* временных модельных структур, без каких-либо ограничений на отношение $<$, в том числе без иррефлексивности и транзитивности. Первые результаты, включая аксиоматизацию в языке с временными операторами F и P, были получены еще А. Прайором в [Prior, 1957]. Однако с содержательной точки зрения эта логика еще не «полноценная» временная, так как ее семантические структуры если и репрезентируют какую-то модель времени, то все же еще не вполне соответствующую философской интуиции времени. Расширения системы $\mathbf{K}_t$ получаются добавлением к числу ее аксиом новых постулатов, которым соответствуют определенные свойства временного потока (наличие или отсутствие начального / конечного моментов, дискретности/плотности и т.п.). На сегодняшний день наиболее важными как с философской, так и с прикладной точек зрения являются логики линейных порядков и логики деревьев. Основные технические сведения о системе $\mathbf{K}_t$ и ряде ее стандартных расширений приведены в [Goldblatt, 1992; Gabbay et al., 1994; Burgess, 2002].

1.2. Логики линейного времени в расширенных языках

Появление в языке временной логики двухместных модальностей *Until* и *Since* оказало серьезное влияние на развитие всей этой области исследований в целом, существенно расширив *выразительные возможности* ее формализованных языков. Данные модальности были введены в обиход в диссертации Х. Кампа ([Kamp, 1968]). Основной результат Кампа связан с вопросом об уточнении выразительных возможностей языков временной логики. Камп показал, что 1) операторы *Until* и *Since* не выразимы в стандартном прайоровском языке временной логики и 2) в языке временной логики с *Until* и *Since* (говоря нестрого) выразимы все временные операторы на непрерывных строгих линейных порядках (таких, как $(\mathbb{R}, <)$), определимые в языке первопорядковой логики. В этом смысле расширенный операторами *Until* (U) и *Since* (S) язык временной логики является *выразительно полным.*

В литературе встречается как префиксная, так и инфиксная нотации для формул с данными операторами: $U(A, B)$ означает то же самое, что и $B\,U A$. В естественном языке выражение $U(A, B)$ читается как «будет A, и до того, как это случится, всегда будет B», $S(A, B)$ — как «было A, и с тех пор, как это случилось, всегда было B».

Точный смысл утверждений с этими модальностями передается первопорядковыми условиями истинности[7] для формул $U(A, B)$ и $S(A, B)$ в момент t модельной структуры $\mathcal{T}$:

[7] Заметим, что такой вариант семантических условий для U и S считается характерным для философской логической литературы (см. [Blackburn et al., 2006, с. 672–673]), тогда как в вычислительных вариантах логики линейного времени обычно употребляются «рефлексивные» разновидности этих операторов.

$$\mathcal{T}, t \models U(A, B) \Leftrightarrow \exists t'(t < t' \wedge \mathcal{T}, t' \models A \wedge \forall t''(t < t'' < t' \Rightarrow \mathcal{T}, t'' \models B)),$$
$$\mathcal{T}, t \models S(A, B) \Leftrightarrow \exists t'(t' < t \wedge \mathcal{T}, t' \models A \wedge \forall t''(t' < t'' < t \Rightarrow \mathcal{T}, t'' \models B)).$$

Прайоровские операторы выразимы через U и S: $FA \equiv_{df} U(A, \top)$, $PA \equiv_{df} S(A, \top)$.

Аксиоматизации логик всех линейных порядков в языке с модальностями U и S были предложены в статьях [Burgess, 1982; Xu, 1988]. Система аксиом логики множества действительных чисел была опубликована в работе [Reynolds, 1992], логики множества целых чисел — в работе [Reynolds, 1994], логики множества натуральных чисел — в статье [Venema, 1993].

Стоит сказать несколько слов и о «вычислительном» варианте логики линейного времени, системе LTL (также PLTL), сформулированной в языке, содержащем одноместный оператор X (*NextTime, в следующий момент времени*) и двухместный оператор U в «рефлексивном» варианте.

Последнее обстоятельство приводит к тому, что и прайоровские модальности в языке LTL тоже «рефлексивны». В частности, для обеспечения истинности утверждения FA в момент времени t достаточно истинности A в этот же самый момент.

Оператор X осмысленно вводить лишь в языке, интерпретируемом в таких моделях, в которых для любого элемента t множества-носителя модели существует элемент t', непосредственно следующий за t. Например, в модельной структуре $(\mathbb{N}, <)$ условия истинности для XA задаются следующим образом:

$$(\mathbb{N}, <), n \models XA \Leftrightarrow (\mathbb{N}, <), n' \models A,$$

где n' — следующее за n натуральное число.

В логиках времени, развиваемых в прикладных целях в теоретической информатике, обычно ограничиваются лишь модальностями будущего[8], а время представляется в виде дискретной бесконечной линейно упорядоченной последовательности состояний, имеющей начальный момент.

Система LTL была задумана как средство для описания свойств вычислительных процессов, программ. Сформулирована она была в основополагающей статье [Pnueli, 1977], а первые технические результаты, в том числе и аксиоматизация, появились в работе [Gabbay et al., 1980]. Более современный и общепринятый на сегодняшний день вариант этой системы представлен в [Demri et al., 2016].

[8]Система логики линейного времени типа LTL с операторами прошлого исследована в работе [Lichtenstein et al., 1985]. Даны полная аксиоматическая система и разрешающая процедура.

2. Логики ветвящегося времени

«Ветвление» времени кажется само собой разумеющейся идеей, когда рассуждают о случайности, возможных сценариях развития событий. Однако же подобные представления о времени формировались постепенно, в результате длительной эволюции идей, связанных с трактовкой утверждений о будущих случайных событиях (см., например, [Øhrstrøm, 1995; Øhrstrøm, 2006]). Более того, встает вопрос о том, действительно ли эта идея является адекватной для понимания *природы* времени? Более или менее стандартный ответ на этот вопрос приведен в известной работе [Thomason, 1970]:

> Линейная модель времени может допускать «альтернативное будущее» как эпистемическую возможность; хотя в соответствии с таким пониманием каждый момент времени α может иметь только одно возможное будущее, мы можем не обладать в момент α полным знанием относительно этого будущего, поэтому это лишь знание о множественности альтернатив будущего. $<\ldots>$ Мы будем называть временные модельные структуры подобного типа *индетерминистскими* модельными структурами.

В соответствии с эпистемической трактовкой ветвления времени можно было бы рассматривать ситуации, когда время ветвится как в прошлое, так и в будущее. Однако в процитированной выше статье Томасон также пишет, что допущение «альтернативных прошлых» было бы в высшей степени контринтуитивным, поскольку два момента α и β совпадают, если их прошлое неразличимо. В противном случае α и β различны. Этот взгляд на модельные структуры стал преобладающим в литературе, индетерминистские модельные структуры имеют *древовидную* структуру с ветвлением в будущее. Формально такая модельная структура есть пара $(T, <)$, где T есть непустое множество моментов времени, $<$ есть иррефлексивное и транзитивное бинарное отношение на T, линейное влево, то есть $\forall t_1 \forall t_2 \forall t_3 (t_2 < t_1 \wedge t_3 < t_1 \Rightarrow t_2 < t_3 \vee t_3 < t_2 \vee t_2 = t_3)$, а также связное: $\forall t_1 \forall t_2 \exists t_3 (t_3 \leqslant t_1 \wedge t_3 \leqslant t_2)$. В некоторых случаях на отношение $<$ накладываются дополнительные ограничения. Так, в семантике переходов, о которой пойдет речь в разделе 2.4., добавляются требования сериальности и наличия точной нижней грани у каждой пары элементов множества T (тогда как свойство связности требует лишь наличия нижней границы).

2.1. Оценка высказываний о будущих событиях в древовидных структурах: пирсеанизм и оккамизм

Прежде чем говорить о логиках индетерминистских модельных структур, нужно ответить на вопрос в том, как приписывать истинностные значения формулам, соответствующим утверждениям о будущих событиях, в таких модельных структурах ([Thomason, 1984, p. 2]). Как известно, А. Прайор выделял два подхода, *оккамистский* (ockhamist) и *пирсовский* (peircean), к решению этой задачи [Prior, 1967, ch. VII]. Следует заметить, что отправной точкой для самого Прайора послужил вопрос о том, каково может быть формальное представление традиционных детерминистских рассуждений и как избежать нежелательных следствий тех или иных постулатов временной логики.

И оккамистский, и пирсовский подходы предполагают учет не только момента времени, но и *истории*, содержащей его, при оценке формул с временными модальностями. Второпорядковая квантификация (явная или неявная) по историям является характерной чертой семантик обоих типов, отличающей (и отдаляющей) их от стандартных крипкевских семантик модальных и временных логик. Формально история h во временной модельной структуре $(T, <)$ есть максимальное линейно упорядоченное подмножество множества T, то есть h не является собственным подмножеством какого-либо другого линейно упорядоченного подмножества множества T. Можно мыслить историю и как бесконечный ряд событий, причем это актуальная бесконечность.

Предварительно заметим, что временные логики, определяемые этими двумя подходами, различаются уже своими языками. Обозначим через $\mathcal{L}_o$ и $\mathcal{L}_p$ языки оккамистской и пирсовской временных логик соответственно. Оба этих языка расширяют язык классической логики высказываний за счет добавления прайоровских временных модальностей F и P, но язык $\mathcal{L}_p$ дополнительно содержит исходную модальность G (неопределимую через F), а язык $\mathcal{L}_o$ содержит модальность $\Diamond$ исторической возможности. В языке $\mathcal{L}_p$ можно ввести по определению модальности g («возможно, всегда будет», $gA \equiv_{df} \neg F \neg A$) и f («возможно, будет», $fA \equiv_{df} \neg G \neg A$). В языке $\mathcal{L}_o$ обычным образом определяются сильные модальности G ($GA \equiv_{df} \neg F \neg A$) и модальность исторической необходимости $\Box$ ($\Box A \equiv_{df} \neg \Diamond \neg A$). Определения формулы в этих языках стандартные.

Итак, при оккамистском подходе любая формула (в частности, и пропозициональная переменная) получает истинностную оценку *в паре* (момент, история), тогда как в пирсовской семантике формула оценивается только в моменте времени. Рассмотрим более детально условия истинности для формул с внешней модальностью F. Пусть $\mathcal{T} = (T, <)$ есть древовидная модельная структура. В оккамистской логике истинность формулы FA в паре (t, h) определяется следующим образом:

$$\mathcal{T}, (t, h) \models FA \quad \Leftrightarrow \quad \exists t' \in h(t < t' \wedge \mathcal{T}, (t', h) \models A).$$

Принадлежность момента t' той же самой истории h, которая содержит t, здесь существенна. Утверждение FA истинно в момент t истории h, если и только если A осуществляется в той же самой истории. Для «коммуникации» между историями используется модальность $\Diamond$ (или $\Box$). Введем некоторые обозначения: $H(T)$ есть множество всех историй модельной структуры $(T,<)$, H_t есть множество историй из $H(T)$, содержащих (проходящих через) момент времени $t \in T$. Тогда

$$\mathcal{T},(t,h) \models \Diamond A \quad \Leftrightarrow \quad \exists h' \in H_t(\mathcal{T},(t,h') \models A).$$

Определения выполнимой и общезначимой формулы в рамках данной семантики, по существу, стандартные, с поправкой на тип объекта, с которым формула находится в отношении «быть истинной».

В оккамистском случае формула A называется выполнимой в модельной структуре $(T,<)$, если она истинна в некоторой паре (t,h) этой модельной структуры (где $t \in T$, $h \in H(T)$) при некоторой оценке пропозициональных переменных. Формула A выполнима, если она выполнима в какой-то модельной структуре. Формула A общезначима в модельной структуре $(T,<)$ (символически $(T,<) \models A$), если $\neg A$ невыполнима в этой модельной структуре. Формула A общезначима (символически $\models A$), если $\neg A$ невыполнима.

Оккамистский вариант семантики логики ветвящегося времени называют в литературе актуалистским [Burgess, 1979], поскольку история h, относительно которой релятивизируется истинность формулы FA, в каком-то смысле представляет *действительную* историю, тогда как другие истории являются ее альтернативами.

Еще один важный аспект, связанный с оценкой формул в оккамистских модельных структурах, состоит в специфике приписывания значений пропозициональным переменным. Коротко говоря, пропозициональная переменная p может полагаться истинной в момент времени t *независимо* от того, какой истории принадлежит t, или же p может быть истинной в некоторой паре (t,h), но ложной в какой-то другой паре (t,h'). Ряд известных систем логики ветвящегося времени, например $\mathbf{CTL}^*$, используют именно независимую от истории оценку пропозициональных переменных. Заметим, что при таком подходе правило подстановки не сохраняет свойство общезначимости формулы. Так, формула $p \supset \Box p$ является общезначимой (так как если переменная p истинна в какой-то момент времени t, то она истинна во всех историях, содержащих t, то есть истинна формула $\Box p$), но подстановка в нее (например, формулы Fq вместо вхождений переменной p) может дать опровержимую формулу.

Антактуалистский (*antactualist*) [Burgess, 1978] подход реализуется в пирсовской семантике. Здесь условия истинности для формул FA и GA имеют следующий вид:

$$\begin{array}{lcl}\mathcal{T},t \models FA & \Leftrightarrow & \forall h \in H_t \exists t' \in h(t < t' \wedge \mathcal{T},t' \models A),\\ \mathcal{T},t \models GA & \Leftrightarrow & \forall h \in H_t \forall t' \in h(t < t' \Rightarrow \mathcal{T},t' \models A).\end{array}$$

Пирсовский вариант истинности FA в момент t предполагает осуществление события A в каждой истории, содержащей t, то есть при любом возможном развитии событий. Этот вариант семантики отвергает наличие какой бы то ни было действительной истории[9]. При этом FA и GA в пирсовском смысле можно представить, соответственно, как $\Box FA$ и $\Box GA$ в оккамистском языке. В силу этого обстоятельства пирсовский вариант временной логики рассматривается в литературе как менее интересный с чисто логической точки зрения.

Доказательство разрешимости логики индетерминистских модельных структур с пирсовским вариантом оценки [Burgess, 1980] потребовало введения дополнительного технического понятия, оказавшегося в некоторых случаях существенным для определения множества общезначимых (в классе модельных структур) формул. В множестве $H(T)$ всех историй модельной структуры $(T,<)$ берется подмножество $\mathcal{B}$ выделенных или допустимых историй[10]. Для множества $\mathcal{B} \subseteq H(T)$ должно выполняться следующее требование: $\forall t \in T \exists h \in H(T)(t \in h)$, то есть каждый момент времени из T должен встречаться в какой-то истории. Структуру $(T, \mathcal{B}, <)$ называют *деревом с множеством допустимых историй* (bundled tree). В случае, когда $\mathcal{B} = H(T)$, дерево называют *полным.* Условия истинности для формул с временными модальностями в модельной структуре $(T, \mathcal{B}, <)$ в обоих рассматриваемых подходах претерпевают соответствующие изменения:

$$\mathcal{T},(t,h) \models FA \quad \Leftrightarrow \quad \exists h \in \mathcal{B}\, \exists t' \in h(t < t' \wedge \mathcal{T},(t',h) \models A)$$

для оккамистского случая,

$$\mathcal{T},t \models FA \quad \Leftrightarrow \quad \forall h \in \mathcal{B}_t\, \exists t' \in h(t < t' \wedge \mathcal{T},t' \models A)$$

для пирсовского. Здесь $\mathcal{B}_t = \{h \mid h \in \mathcal{B} \subseteq H(T) \wedge t \in h\}$.

Как показано в статье [Ibid.], в пирсовском случае множество общезначимых формул не изменяется, если вместо класса «обычных» древовидных модельных структур рассматривать деревья с множеством допустимых историй. Однако в оккамистской семантике можно привести примеры формул, которые общезначимы в классе древовидных модельных структур, но

[9] Заметим, что А. Прайор был приверженцем именно такого подхода. Дискуссии по поводу обоснованности и целесообразности выделения *актуальной*, или *действительной*, истории (также употребляется англоязычный термин *thin red line*) время от времени возобновляются в литературе, см., например, [Belnap, Green, 1994; Wawer, 2014; Belnap et al., 2001, ch. 6].

[10] В англоязычной литературе используется термин *bundle*, что можно перевести как «пучок» или «связка». Общепринятого русскоязычного термина в настоящий момент, по-видимому, нет.

опровержимы в деревьях с множествами допустимых историй. Например, в [Burgess, 1979] доказывается, что формула $\Box G\Diamond F\Box p \supset \Diamond GFp$ общезначима в классе всех деревьев, но опровержима в некотором дереве с множеством допустимых историй.

Технические результаты

Основные результаты, связанные с пирсовской логикой индетерминистских модельных структур, были получены в работе [Burgess, 1980]. В частности, в этой статье была предложена конечная аксиоматизация пирсовской логики класса деревьев с множествами допустимых историй, доказаны теоремы о полноте и непротиворечивости, разрешимость множества общезначимых в этом классе формул. Там же было показано, что для классов деревьев и деревьев с множеством допустимых историй множество общезначимых формул одно и то же. Особенность конечной аксиоматизации состоит в том, что она содержит правило иррефлексивности Габбая [Gabbay, 1981], часто встречающееся в аксиоматизациях систем временной логики:

$$\frac{\neg q \wedge Hq \supset A}{A}, \qquad \text{где } q \text{ есть пропозициональная переменная, не встречающаяся в формуле } A.$$

В работе [Zanardo, 1990] показано, что возможна аксиоматизация пирсовской временной логики без правила иррефлексивности, но с бесконечным множеством аксиом.

Для оккамистской логики ветвящегося времени, как уже отмечалось, различие между деревьями с множествами допустимых историй и деревьями без таковых является существенным. Конечная аксиоматизация логики класса деревьев с множествами допустимых историй была получена в работе [Zanardo, 1985], другая аксиоматизация с правилом иррефлексивности Габбая содержится в монографии [Gabbay et al., 1994, ch. 7.7]. Заметим, что для доказательств полноты в обеих этих работах используются особые семантические структуры — оккамистские шкалы, предложенные в [Zanardo, 1985] (хотя, по существу, уже неявно описанные в [Burgess, 1979]). Что касается оккамистской логики деревьев без множеств допустимых историй, то первый крупный результат — это доказательство разрешимости множества общезначимых в классе таких деревьев формул, предложенное в работе [Gurevich, Shelah, 1985]. Существенно, что в указанной статье используется независимая от истории оценка переменных. Проблема аксиоматизации данной логики долгое время была открытой, ее решение было заявлено в ряде работ австралийского логика М. Рейнолдса [Reynolds, 2002; Reynolds, 2003], однако детальное доказательство в указанных публикациях не приводится. Проблема аксиоматизации оккамистской логики деревьев (в том числе и с произвольной оценкой в множестве пар вида (t, h)) остается, по-видимому, открытой [Rumberg, 2019].

2.2. Шкалы Кампа и оккамистские шкалы: представления деревьев

Древовидные модельные структуры, используемые для оценки формул языка как пирсовского, так и оккамистского вариантов временной логики, имеют очевидный недостаток, состоящий во второпорядковой квантификации по множеству историй. Деревья с выделенными множествами историй содержат сами истории как исходные сущности, что характеризуется в работе [Zanardo, 2003, с. 9] как «переход от второпорядковой к первопорядковой логике».

В работе [Zanardo, 1985] были определены первопорядковые реляционные структуры, *оккамистские шкалы*, особым образом представляющие информацию, содержащуюся в деревьях[11]. Несколько ранее, в главе [Thomason, 1984], были описаны семантические структуры, очень похожие на оккамистские шкалы, которые называются *шкалами Кампа*, поскольку впервые они появились в неопубликованной статье Х. Кампа 1979 года. Рассмотрим шкалы Кампа более детально.

Общая идея, лежащая в основе этой конструкции, — «сделать достаточно копий каждой точки дерева и разделить различные его истории» [Reynolds, 2003]. Дерево как бы расслаивается в совокупность параллельных линейных порядков. При этом исходные сущности в шкале Кампа — возможные миры, с которыми истории ассоциируются.

Формально шкала Кампа $\mathcal{K}$ представляет собой тройку $(\mathcal{T}, W, \approx)$, где W есть непустое множество возможных миров, каждому из которых функция $\mathcal{T}$ ставит в соответствие иррефлексивный линейный порядок $\mathcal{T}(w) = (T_w, <_w)$; $\approx$ есть функция, которая каждому $t \in \bigcup_{w \in W} T_w$ ставит в соответствие отношение эквивалентности $\approx_t$ на множестве $W_t = \{w \in W \mid t \in T_w\}$ такое, что *a*) если $w \approx_t w'$, то $\{t' \in T_w \mid t' <_w t\} = \{t' \in T_{w'} \mid t' <_{w'} t\}$, *b*) если $w \approx_t w'$ и $t' <_w t$, то $w \approx_{t'} w'$ [Thomason, 1984; Zanardo, 2003].

Формулы языка оккамистской временной логики получают истинностную оценку в парах вида (t, w), где $t \in T_w$. Условия истинности для формул с модальностями определяются следующим образом:

$$
\begin{aligned}
\mathcal{K}, (t, w) \models FA &\quad\Leftrightarrow\quad \exists t'(t <_w t' \wedge \mathcal{K}, (t', w) \models A),\\
\mathcal{K}, (t, w) \models PA &\quad\Leftrightarrow\quad \exists t'(t' <_w t \wedge \mathcal{K}, (t', w) \models A),\\
\mathcal{K}, (t, w) \models \Diamond A &\quad\Leftrightarrow\quad \exists w' \approx_t w(\mathcal{K}, (t, w') \models A).
\end{aligned}
$$

[11] Хотя, как отмечает сам автор, неявным образом эти структуры уже содержались в статье [Burgess, 1979].

Наиболее интересный технический аспект шкал Кампа состоит представлении структуры деревьев. Для осуществления этого представления определим для каждого w и каждого $t \in T_w$ шкалы $\mathcal{K}$ класс эквивалентности $[(t, w)] = \{(t, w') \mid w \approx_t w'\}$. Множество всех классов эквивалентности шкалы $\mathcal{K}$ обозначим как $T_{\mathcal{K}}$. Далее определим отношение $\lhd_{\mathcal{K}}$ на множестве $T_{\mathcal{K}}$:

$$[(t, w)] \lhd_{\mathcal{K}} [(t', w')] \quad \Leftrightarrow \quad w \approx_t w' \wedge t <_{w'} t'.$$

Пара $(T_{\mathcal{K}}, \lhd_{\mathcal{K}})$ есть дерево. Обратно, по любому дереву $(T, <)$ можно построить шкалу Кампа $\mathcal{K}_T$, положив $W = H(T)$, $T_w = w$ (то есть возможный мир и соответствующий ему порядок фактически совпадают), $<_w$ есть ограничение отношения $<$ на w, наконец, $w \approx_t w'$, если и только если оба порядка, w и w', содержат элемент t.

Если по дереву T построить шкалу $\mathcal{K}_T$, то, конечно, можно получить дальше дерево $T_{\mathcal{K}_T}$. Оказывается, деревья T и $T_{\mathcal{K}_T}$ будут изоморфны. Можно ожидать аналогичного результата и для пары $\mathcal{K}$ и $\mathcal{K}_{T_{\mathcal{K}}}$. Однако в этом случае изоморфизма нет.

Глубинная причина в возможном нарушении изоморфизма состоит в том, что шкала Кампа не представляет (и не должна представлять) все истории, содержащиеся в соответствующем ей дереве. То есть дерево $T_{\mathcal{K}}$, построенное по шкале $\mathcal{K}$, может содержать истории, которым не соответствует какое-либо множество $\{[(t, w)] \mid t \in T_w\}$.

Однако если принимать во внимание только деревья с множествами допустимых историй, полагая, что при перестройке такого дерева $(T, \mathcal{B}, <)$ в шкалу Кампа $W = \mathcal{B}$, а $<_w$ и $\approx_t$ задаются так же, как описано выше, то сохранить изоморфизм между $\mathcal{K}$ и $\mathcal{K}_{T_{\mathcal{K}}}$ можно. Для этого нужно предварительно исключить ситуацию, когда шкала Кампа содержит неразличимые миры, что само по себе тоже может быть причиной нарушения изоморфизма: $\forall w \neq w' \in W \exists t \in T_w (w \not\approx_t w')$. Теперь заметим, что с каждым миром w шкалы Кампа можно связать историю $h_w = \{[(t, w)] \mid t \in T_w\}$. Можно показать, что $\mathcal{B}_{\mathcal{K}} = \{h_w \mid w \in W\}$ образует множество допустимых историй в дереве $T_{\mathcal{K}}$. Обозначим через $\mathfrak{T}_{\mathcal{K}} = (T_{\mathcal{K}}, \mathcal{B}_{\mathcal{K}})$ полученное дерево с множеством допустимых историй. Теперь $\mathcal{K}$ изоморфно $\mathcal{K}_{\mathfrak{T}_{\mathcal{K}}}$ и $\mathfrak{T}$ изоморфно $\mathfrak{T}_{\mathcal{K}_{\mathfrak{T}}}$ [Zanardo, 2003].

Как отмечается в статьях [Zanardo, 1996; Zanardo, 2003], шкалы Кампа онтологически «сложнее» деревьев, поскольку предполагают онтологические допущения относительно существования возможных миров как особого рода примитивных (то есть исходных) сущностей. Деревья предполагают лишь существование моментов времени и отношения между ними.

Тем не менее с логической точки зрения шкалы Кампа оказываются проще деревьев, поскольку оценка формул не требует явной второпорядковой квантификации по историям.

Шкалы Кампа играют существенную роль в наброске доказательства полноты для оккамистской временной логики в [Reynolds, 2003]. В отличие от деревьев, эти шкалы позволяют использовать step-by-step-метод из доказательств полноты и разрешимости логик линейного времени[12].

В статьях [Zanardo, 1985; Zanardo, 1996] для представления деревьев были предложены реляционные структуры крипкевского типа, имеющие вид $(W, <, \sim)$, называемые *оккамистскими шкалами.* В целом эти шкалы по своему устройству близки к шкалам Кампа, но теперь W есть множество, на котором заданы два непересекающихся отношения: $<$ — объединение всех иррефлексивных линейных порядков, заданных на множестве W, а $\sim$ — отношение эквивалентности, репрезентирующее «общую часть» линейных порядков, то есть если $t \sim s$, то ограничение $\sim$ на $\{t' \mid t' < t\} \times \{s' \mid s' < s\}$ есть порядковый изоморфизм, а, кроме того, линейные порядки должны различаться: для всяких t и s найдется такой $t' \geqslant t$, что для любого $s' \geqslant s$ верно, что $t' \not\sim s'$. Оккамистские шкалы также представляют собой средство для представления информации, содержащейся в древовидной шкале, процесс перестройки шкалы одного типа в шкалу другого типа схож с описанным выше для случая шкал Кампа. При этом если $\mathcal{O}$ — некоторая оккамистская шкала, $T_{\mathcal{O}}$ — дерево, построенное по этой шкале, то изоморфизм между $\mathcal{O}$ и $\mathcal{O}_{T_{\mathcal{O}}}$ имеет место в том случае, когда принимаются во внимание только деревья с множествами допустимых историй [Zanardo, 1996].

2.3. Неразделимость и неразличимость историй

От шкал Кампа и оккамистских шкал вновь вернемся к деревьям и рассмотрим некоторые понятия, существенно обогатившие данные семантические конструкции.

Отношение неразделимости (undividedness) историй пришло из семантики для логик, описывающих поведение рациональных объектов во временном потоке (см., например, [Belnap, 1991]). В контексте изучения семантических структур, репрезентирующих ветвящееся время, данное отношение оказалось весьма полезным и привело фактически к появлению

[12] Подобная конструкция была применена тем же автором для доказательства разрешимости временной логики параллельных линейных потоков времени в [Reynolds, 1997], родственной оккамистской временной логике. Для общего знакомства с данным методом см. [Blackburn et al., 2002, ch. 4.6].

структур нового типа. В статье [Zanardo, 1998] подробно изучаются свойства модельных структур с отношением неразделимости, а также более общим отношением *неразличимости* на множестве историй.

Две истории h_1 и h_2 могут содержать общий элемент t, то есть $t \in h_1 \cap h_2$, но для того, чтобы они были *неразделимы* в этом моменте t, требуется наличие такого t', что $t < t'$ и $t < t'$. Отношение неразделимости на множестве историй, проходящих через момент t (то есть на множестве H_t), является отношением эквивалентности и задает разбиение H_t на классы эквивалентности. Обозначим через $[h]_t$ множество всех историй, находящихся в отношении эквивалентности с историей h (то есть класс эквивалентности по h), а через Π_t — разбиение множества H_t по указанному отношению эквивалентности. Элементы множества Π_t называются *непосредственными возможностями* в момент t. Квантификация по историям в оккамистском языке, осуществляемая за счет модальности $\Diamond$, может быть сужена на истории, лежащие в рамках одной непосредственной возможности. В работе [Ibid.] язык оккамистской временной логики $\mathcal{L}_o$ расширяется модальным оператором $\Diamond^u$ (обозначим расширенный язык как $\mathcal{L}_o^+$). Условие истинности для этого оператора похоже на то, которое ранее было дано для $\Diamond$ в языке $\mathcal{L}_o$:

$$\mathcal{T}, (t, h) \models \Diamond^u A \quad \Leftrightarrow \quad \exists h' \in [h]_t \in H_t(\mathcal{T}, (t, h') \models A),$$

с той лишь разницей, что теперь квантификация производится по множеству $[h]_t$. Язык $\mathcal{L}_o^+$ оказывается богаче по своим выразительным возможностям, чем $\mathcal{L}_o$, в [Ibid., p. 303] доказывается утверждение, что не существует формулы A такой, что общезначима формула[13] $\Diamond^u Gp \equiv A$, то есть оператор $\Diamond^u$ неопределим в $\mathcal{L}_o$. Также неопределимой в $\mathcal{L}_o$ является комбинация модальностей $\Box\Diamond^u Gp$.

Язык пирсовской временной логики $\mathcal{L}_p$ расширяется до языка $\mathcal{L}_p^+$ за счет добавления составных модальных операторов. Например, модальность $[\Diamond^U F]$ читается как «в некоторой непосредственной возможности будет так, что». Здесь выражение «будет так, что» имеет пирсовский смысл. Это значит, что $[\Diamond^U F]A$ истинно в момент времени t, если существует непосредственная такая возможность $[h]_t$, что в *каждой* истории $h' \in [h]_t$ найдется такое t', что $t < t'$ и в t' истинна A. Обратим внимание на то, что дуальным оператором для $[\Diamond^U F]$ является модальность $\neg[\Diamond^U F]\neg$, которая обозначается как $\Box^U g$ и содержательно читается как «каждая непосредственная возможность содержит историю, в которой всегда будет...». Имеется доказательство утверждения, что в языке $\mathcal{L}_p$ не существует такой

[13]Здесь и далее связка $\equiv$ есть материальная эквиваленция.

формулы A, что общезначимой является формула $[\Box^U g]p \equiv A$ [Zanardo, 1998, p. 308–310].

Рассмотрим далее обобщение отношения неразделимости. Получается оно за счет сопоставления каждому моменту времени t абстрактного отношения эквивалентности на множестве H_t. В частности, это может быть и разбиение, индуцируемое отношением неразличимости. Для этих целей вводится понятие I-дерева [Zanardo, 1998]. I-дерево — это пара $(\mathcal{T}, I)$, где $\mathcal{T}$ есть дерево, а I есть функция, которая каждому $t \in T$ ставит в соответствие отношение эквивалентности на H_t (обозначаемое как I_t) такое, что

$$\forall t' \forall h \forall h'(t' < t \wedge I_t(h, h') \Rightarrow I_{t'}(h, h')).$$

Функцию I называют *функцией неразличимости*, а отношение I_t — *отношением неразличимости*.

I-деревья могут быть использованы в качестве обобщенных семантических структур логики ветвящегося времени, а оккамистский и пирсовский подходы оказываются частными (предельными) случаями такой семантики.

Язык временной логики I-деревьев расширяет язык классической логики высказываний за счет добавления модальностей P, F и G пирсовского типа и оккамистской модальности $\Diamond$. Функция оценки ставит в соответствие каждой пропозициональной переменной множество пар вида (t, X), где $t \in T$, а X есть непосредственная возможность в момент t. Приведем условия истинности для некоторых модальных операторов:

$$\begin{array}{lcl} \mathcal{T}, (t, [h]_t) \models FA & \Leftrightarrow & \forall h' \in [h]_t \exists t' \in h'(t < t' \wedge \mathcal{T}, (t', [h']_{t'}) \models A), \\ \mathcal{T}, (t, [h]_t) \models GA & \Leftrightarrow & \forall h' \in [h]_t \forall t' \in h'(t < t' \Rightarrow \mathcal{T}, (t', [h']_{t'}) \models A), \\ \mathcal{T}, (t, [h]_t) \models \Diamond A & \Leftrightarrow & \exists h' \in H_t(\mathcal{T}, (t, [h']_t) \models A). \end{array}$$

I-дерево $(\mathcal{T}, I)$ называется *оккамистским*, если для всякого $t \in T$ верно, что $I_t = \{(h, h) \mid h \in H_t\}$; I-дерево называется *пирсовским*, если $I_t = H_t \times H_t$.

Имеется следующая характеризация I-деревьев указанных выше типов чрез общезначимость формул: I-дерево $(\mathcal{T}, I)$ является оккамистским, если и только если $(\mathcal{T}, I) \models Gp \equiv \neg F \neg p$; I-дерево $(\mathcal{T}, I)$ является пирсовским, если и только если $(\mathcal{T}, I) \models \Diamond p \equiv p$.

2.4. Семантика переходов

Польза от введенного ранее определения неразделимости историй не исчерпывается лишь I-деревьями. Не менее интересный подход представляет собой *семантика переходов* (transition semantics), предложенная в работе [Rumberg, 2016a], основанная на идеях более ранних статей [Belnap, 2005; Müller, 2014].

Наряду с отношением неразделимости историй в момент t и задаваемого им разбиения Π_t множества H_t, исходным для всей конструкции являются понятия точки ветвления и перехода. Момент времени t называется *точкой ветвления*, если он является наибольшим элементом в множестве $h \cap h'$ для некоторых историй h и h'[14]. *Переходом* называется пара $(t \rightarrowtail H)$, где t есть точка ветвления, $H \in \Pi_t$ (то есть класс эквивалентности по отношению неразделимости). Множество всех переходов модельной структуры $\mathcal{T} = (T, <)$ обозначается как $trans(\mathcal{T})$.

Если выбрать произвольное множество переходов $\mathtt{T}$ структуры $\mathcal{T}$ и взять пересечение их вторых компонент (то есть классов эквивалентности), то те истории, которые в этом пересечении окажутся, называются *допустимыми* для $\mathtt{T}$. Если множество $\mathrm{H}(\mathtt{T})$ допустимых историй для $\mathtt{T}$ непусто, то $\mathtt{T}$ называют *совместным* (и *несовместным* в противном случае).

На множестве переходов задается отношение предшествования $\prec$: $(t \rightarrowtail H) \prec (t' \rightarrowtail H')$, если $H' \subset H$. Заметим, что $H' \subset H$, если и только если $t < t'$ и $H \cap H' \neq \varnothing$. Отношение $\prec$ на множестве $trans(\mathcal{T})$ произвольной модельной структуры $\mathcal{T}$ линейно влево (см. с. 162). Более того, $\mathrm{H}(\mathtt{T}) \neq \varnothing$, если и только если $\mathtt{T}$ линейно упорядочено отношением $\prec$.

Для того чтобы определить оценку формул в структурах с множеством переходов, потребуется ввести ряд дополнительных технических понятий.

Множество переходов $\mathtt{T}$ называется *замкнутым*[15], если

$$\forall \tau \in trans(\mathcal{T}) \forall \tau' \in trans(\mathcal{T})((\tau \in \mathtt{T} \land \tau' \prec \tau) \Rightarrow \tau' \in \mathtt{T}).$$

Пополнением множества переходов $\mathtt{T}$ модельной структуры $\mathcal{T}$ называется множество $\mathtt{dc}(\mathtt{T}) = \{\tau \in trans(\mathcal{T}) \mid \exists \tau' \in \mathtt{T}(\tau = \tau' \lor \tau \prec \tau')\}$. Пусть $\mathcal{T} = (T, <)$ — модельная структура. Тогда $\mathtt{dcts}(\mathcal{T})$ обозначает множество всех совместных замкнутых множеств переходов модельной структуры $\mathcal{T}$, содержащее также пустое множество переходов $\varnothing_{tr}$. Другими словами, $\mathtt{dcts}(\mathcal{T})$ таково, что наряду со всяким совместным множеством $\mathtt{T} \subseteq trans(\mathcal{T})$ оно содержит и его пополнение $\mathtt{dc}(\mathtt{T})$. Замкнутые множества переходов, как и истории, линейно упорядочены влево. В отличие от «обычных» историй, они могут представлять незавершенные линии развития событий, незавершенные истории, открытые для продолжения в будущее. При этом продолжение какого-то (совместного) множества переходов

[14] В рамках данной семантики стандартное определение дерева модифицируется усилением связности влево: любая пара элементов t, t' дерева $\mathcal{T}$ не только обладает нижней границей, но и точной нижней гранью, инфимумом. Кроме того, постулируется сериальность. В данном разделе речь будет идти именно о таких модельных структурах.

[15] Соответствующий англоязычный термин — *downward closed*, то есть замкнутое в сторону «уменьшения» по отношению порядка. Для краткости будем говорить просто *замкнутый*. То же самое относится и к термину *пополнение* (*downward completion*).

$\mathtt{T}$ по отношению $\prec$ исключает некоторые истории, сужает множество $\mathrm{H}(\mathtt{T})$. Максимальное непротиворечивое множество переходов допускает ровно одну историю.

Язык временной логики рассматриваемых семантических структур отличается от языка логики I-деревьев наличием еще одного одноместного оператора S, оператора стабильности.

Истинностная оценка формулы в модельной структуре $\mathcal{T}$ дается в паре, состоящей из момента времени t и замкнутого множества переходов $\mathtt{T} \in \mathtt{dcts}(\mathcal{T})$. Естественно потребовать, чтобы это множество переходов $\mathtt{T}$ и момент времени t были совместимы в том смысле, что $\mathrm{H}(\mathtt{T}) \cap H_t \neq \varnothing$. Далее для истинностной оценки формул будут использоваться именно такие пары. Таким образом, функция оценки пропозициональных переменных ставит в соответствие каждой переменной множество пар вида $(t, \mathtt{T})$. Приведем условия истинности для формул с модальными операторами в паре $(t, \mathtt{T})$ модельной структуры $\mathcal{T}$:

$$\begin{array}{lcl}
\mathcal{T}, (t, \mathtt{T}) \models FA & \Leftrightarrow & \forall \mathtt{T}' \supseteq \mathtt{T}\, (\mathrm{H}(\mathtt{T}') \cap H_t \neq \varnothing \Rightarrow \\
& & \exists t'(t < t' \wedge \mathrm{H}(\mathtt{T}') \cap H_{t'} \neq \varnothing \wedge \mathcal{T}, (t', \mathtt{T}) \models A)), \\
\mathcal{T}, (t, \mathtt{T}) \models PA & \Leftrightarrow & \exists t'(t' < t \wedge \mathcal{T}, (t', \mathtt{T}) \models A), \\
\mathcal{T}, (t, \mathtt{T}) \models \Diamond A & \Leftrightarrow & \exists \mathtt{T}' \in \mathtt{dcts}(\mathcal{T}) \wedge \mathrm{H}(\mathtt{T}') \cap H_t \neq \varnothing \wedge \mathcal{T}, (t, \mathtt{T}') \models A.
\end{array}$$

Заметим, однако, что условие истинности для формулы с оператором F может быть эквивалентным образом сформулировано и без квантификации по возможным расширениям множества переходов. Вместо этого можно использовать квантификацию по множеству историй, допустимых данным множеством переходов $\mathtt{T}$:

$$\mathcal{T}, (t, \mathtt{T}) \models FA \quad \Leftrightarrow \quad \forall h \in \mathrm{H}(\mathtt{T}) \cap H_t\, \exists t'(t < t' \wedge \mathcal{T}, (t', \mathtt{T}) \models A).$$

Оператор стабильности S является специфическим для данной семантики, поскольку множество переходов может представлять незавершенные истории и истинностное значение формулы в определенный момент времени может меняться при расширении второй компоненты пары, множества переходов. Данный оператор особенно интересен в контексте рассуждений о будущих случайных событиях. Случайно истинные или случайно ложные в определенный момент времени высказывания могут становиться устойчиво истинными или устойчиво ложными по мере продолжения в будущее множества переходов:

$$\mathcal{T}, (t, \mathtt{T}) \models SA \quad \Leftrightarrow \quad \forall \mathtt{T}' \supseteq \mathtt{T}(\mathrm{H}(\mathtt{T}') \cap H_t \neq \varnothing \Rightarrow \mathcal{T}, (t, \mathtt{T}') \models A).$$

Как видно из условия истинности, S действует как квантор общности по возможным расширениям множества переходов. По определению можно ввести дуал этого оператора, $\neg S \neg$. Оператор стабильности является

$S4$-модальностью, в отличие от $\Diamond$ и $\Box$, которые характеризуются свойствами $S5$-модальности. Область квантификации в определении условия истинности для S — множество совместимых с t расширений в будущее множества $\mathtt{T}$. Область квантификации для модальностей $\Diamond$ и $\Box$ более широкая все совместимые с t множества переходов. Поэтому все, что необходимо в смысле модальности $\Box$, стабильно, но не наоборот.

Как и в случае с I-деревьями, оккамистский и пирсовский варианты семантики логики ветвящегося времени оказываются предельными случаями семантики переходов в следующем смысле. Если ограничиться только пустым множеством переходов $\varnothing_{tr}$ в модельной структуре $\mathcal{T}$, то допустимым является все множество историй $H(\mathcal{T})$, что приводит к пирсовскому варианту. Если же множество переходов, используемое для оценки формул, является максимальным совместным множеством, то оно допускает ровно одну историю, что дает оккамистский случай. Эти наблюдения приводят к следующему определению *структуры переходов* (*transition structure*).

Структура переходов есть тройка $\mathcal{T}^{tr} = (T, <, ts)$, в которой $\mathcal{T} = (T, <)$ есть модельная структура в обычном понимании (для данного раздела), а $ts \subseteq \mathtt{dcts}(\mathcal{T})$ есть такое непустое множество множеств переходов, что для каждого момента времени $t \in T$ существует множество переходов $\mathtt{T} \in ts$ такое, что $\mathrm{H}(\mathtt{T}) \cap H_t \neq \varnothing$[16]. Функция оценки пропозициональных переменных, как и раньше, ставит в соответствие каждой переменной множество пар, но только таких, в которых вторая компонента лежит в множестве ts. Условия истинности для временных модальностей F и P не претерпевают изменений, тогда как для $\Diamond$, $\Box$ и S квантификация ограничивается на множество переходов, принадлежащих ts. Например, условие истинности для формулы $\Box A$ выглядит следующим образом:

$$\mathcal{T}^{tr}, (t, \mathtt{T}) \models \Box A \quad \Leftrightarrow \quad \forall \mathtt{T}' \in ts(\mathrm{H}(\mathtt{T}') \cap H_t \neq \varnothing \Rightarrow \mathcal{T}^{tr}, (t, \mathtt{T}') \models A).$$

Подобно тому как оккамистские шкалы являются первопорядково определимым аналогом шкал Кампа и деревьев с допустимыми историями, *индексные структуры* представляют собой первопорядково определимый вариант структур переходов. Эта конструкция была предложена в работе [Rumberg, 2019], основной результат которой состоит в аксиоматизируемости фрагмента логики структур переходов, язык которого не содержит оператор F. Однако сама система аксиом на сегодняшний день еще не найдена.

[16]Отметим здесь аналогию с деревьями с множествами допустимых историй, в которых также каждый момент времени должен принадлежать какой-то допустимой истории.

Заключение

За пределами данного обзора остались интереснейшие топологический (см. работы [Zanardo, 2003; Zanardo, 2006a]) и геометрический (см. статью [Zanardo, 2003] и содержащуюся в ней библиографию) подходы к построению семантики логики ветвящегося времени.

Логика времени не останавливается в своем развитии. Традиционная философская дихотомия — детерминизм/индетерминизм (фатализм / свобода воли) — по-прежнему продолжает работать как один из мощных стимулов развития этой области логического знания. За последние годы появилось немало работ, в которых технические аспекты построения логик ветвящегося времени очень тонко увязаны с философским анализом проблемы индетерминизма (см., например, сборники [Correia, Iacona, 2013; Hasle et al., 2017; Blackburn et al., 2019], статьи [Müller, 2010; Rumberg, 2016a; Belnap et al., 2021] и имеющуюся там библиографию). Кроме того, временная логика остается значимым логическим формализмом в теоретической информатике (см. [Demri et al., 2016]), а также в разработках в сфере логически ориентированного (logical AI) искусственного интеллекта (см. [Fisher et al., 2005; Thomason, 2020]).

Логика времени дает один из наиболее ярких примеров того, как логические формализмы, логико-математические конструкции могут служить для анализа и уточнения различных аспектов глубоких и непреходящих философских проблем, таких как проблема фатализма и свободы воли, детерминизма (в разных его проявлениях) и случайных событий.

Литература

Allen, 1984 – *Allen J.F.* Towards a General Theory of Action and Time // Artificial Intelligence. 1984. Vol. 23. P. 123–154.

Allen, Ferguson, 1994 – *Allen, J.F., Ferguson G.* Actions and Events in Interval Temporal Logic // Journal of Logic and Computation. 1994. Vol. 4. No. 5. P. 531–579.

van Benthem, 1983 – *van Benthem J.* The Logic of Time. Dordrecht; Boston; London: Kluwer Academic Publishers, 1983.

van Benthem, 1995 – *van Benthem J.* Temporal logic // D.M. Gabbay, C.J. Hogger, and J.A. Robinson (eds.). Handbook of Logic in Artificial Intelligence and Logic Programming: Epistemic and Temporal Reasoning. Vol. 4. Oxford: Oxford University Press, 1995. P. 241–351.

Belnap, 1991 – *Belnap N.* Before refraining: Concepts for agency // Erkenntnis. 1991. Vol. 34. P. 137–169.

Belnap, Green, 1994 – *Belnap N., Green M.* Indeterminism and the thin red line // Philosophical Perspectives. 1994. Vol. 8. P. 365–388.

Belnap et al., 2001 – *Belnap N., Perloff M., Xu M.* Facing the future: Agents and choices in our indeterministic world. Oxford: Oxford University Press, 2001.

Belnap, 2005 – *Belnap N.* A theory of causation: Causae causantes (originating causes) as inus conditions in branching space-times // British Journal for the Philosophy of Science. 2005. Vol. 56. No. 2. P. 221–253.

Belnap et al., 2021 – *Belnap N., Müller T., Placek T.* New Foundations for Branching Space-Times // Studia Logica. 2021. Vol. 109. P. 239–284.

Blackburn et al., 2006 – *Blackburn P., van Benthem J., Wolter F.* Handbook of Modal Logics. Amsterdam: Elsevier, 2006.

Blackburn et al., 2002 – *Blackburn P., de Rijke M., Venema Y.* Modal Logic. Cambridge: Cambridge University Press, 2002.

Blackburn et al., 2019 – *Blackburn P., Hasle P., Øhrstrøm P.* (eds.). Logic and Philosophy of Time: Further Themes from Prior. Vol. 2. Aalborg: Aalborg Universitetsforlag, 2019. 230 p.

Burgess, 1978 – *Burgess J.* The Unreal Future // Theoria. 1978. Vol. 44. No. 3. P. 157–179.

Burgess, 1979 – *Burgess J.* Logic and Time // Journal of Symbolic Logic. 1979. Vol. 44. P. 566–582.

Burgess, 1980 – *Burgess J.* Decidability for Branching Time // Studia Logica. 1980. Vol. 39. P. 203–218.

Burgess, 1982 – *Burgess J.* Axioms for Tense Logic I: 'Since' and 'Until' // Notre Dame Journal of Formal Logic. 1982. Vol. 23. P. 367–374.

Burgess, 2002 – *Burgess J.* Basic Tense Logic // D.M. Gabbay and F. Guenthner (eds.). Handbook of Philosophical Logic. Vol. 7. Springer, 2002. P. 1–42.

Correia, Iacona, 2013 – *Correia F., Iacona F.* (eds.) Around the Tree: Semantic and Metaphysical Issues Concerning Branching and the Open Future. Synthese Library. Vol. 361. Dordrecht: Springer, 2013.

Demri et al., 2016 – *Demri S., Goranko V., Lange M.* Temporal Logics in Computer Science. Cambridge: Cambridge University Press, 2016.

Emerson, 1990 – *Emerson E.* Temporal and modal logics // J. van Leeuwen (ed.). Handbook of Theoretical Computer Science. Amsterdam: Elsevier, 1990. P. 995–1072.

Fisher et al., 2005 – *Fisher M., Gabbay D., Vila L.* Handbook of Temporal Reasoning in Artificial Intelligence. Amsterdam: Elsevier, 2005.

Gabbay et al., 1980 – *Gabbay D., Pnueli A., Shelah S., Stavi J.* On the temporal analysis of fairness // Proceedings of the 7th ACM SIGPLAN-SIGACT symposium on Principles of programming languages (POPL '80). Association for Computing Machinery. New York, 1980. P. 163–173.

Gabbay, 1981 – *Gabbay D.* An irreflexivity lemma with applications to axiomatizations of conditions on tense frames // U. Mönnich (ed.). Aspects of Philosophical Logic. Reidel; Dordrecht, 1981. P. 67–89.

Gabbay et al., 1994 – *Gabbay D., Hodkinson I., Reynolds M.* Temporal Logic: Mathematical Foundations and Computational Aspects. Vol. 1. Oxford: Clarendon Press, 1994.

Galton, 1987 – *Galton A.P.* Temporal Logics and their Applications. London: Academic Press, 1987.

Goldblatt, 1992 – *Goldblatt R.* Logics of Time and Computation. (CSLI Lecture Notes 7.) Second Edition. Stanford: CSLI Publications, 1992.

Goranko, Rumberg, 2020 – *Goranko V., Rumberg A.* Temporal Logic // The Stanford Encyclopedia of Philosophy (Summer 2020 Edition). E.N. Zalta (ed.). `https://plato.stanford.edu/archives/sum2020/entries/logic-temporal/`

Gurevich, Shelah, 1985 – *Gurevich Y., Shelah S.* The Decision Problem for Branching Time Logic // Journal of Symbolic Logic. 1985. Vol. 50. P. 668–681.

Hajnicz, 1996 – *Hajnicz E.* Time Structures. Lecture Notes in Computer Science (Lecture Notes in Artificial Intelligence). Vol. 1047. Springer, 1996.

Hasle et al., 2017 – *Hasle P., Blackburn P.R., Øhrstrøm P.* (eds.). Logic and Philosophy of Time: Themes from Prior. Vol. 1. Aalborg: Aalborg Universitetsforlag, 2017.

Kröger, Merz, 2008 – *Kröger F., Merz S.* Temporal Logic and State Systems. Texts in Theoretical Computer Science (An EATCS Series). Springer, 2008.

Lichtenstein et al., 1985 – *Lichtenstein O., Pnueli A., Zuck L.D.* The glory of the past // Proceedings the Conference on Logic of Programs. London: Springer-Verlag, 1985. P. 196–218.

Kamp, 1968 – *Kamp H.* Tense Logic and the Theory of Linear Order. PhD Thesis. Los Angeles: University of California, 1968.

McArthur, 1976 – *McArthur R.* Tense Logic. Springer, Synthese Library, 1976. 91 p.

Müller, 2010 – *Müller T.* Towards a theory of limited indeterminism in branching space-times // Journal of Philosophical Logic. 2010. Vol. 39. P. 395–423.

Müller, 2014 – *Müller T.* Alternatives to histories? Employing a local notion of modal consistency in branching theories // Erkenntnis. 2014. No. 79. P. 343–364.

Øhrstrøm, 2009 – *Øhrstrøm P.* In Defence of the Thin Red Line: A Case for Ockhamism // Humana.mente. 2009. No. 8. P. 17–32.

Øhrstrøm, 1995 – *Øhrstrøm P., Hasle P.* Temporal Logic: From Ancient Ideas to Artificial Intelligence. Dordrecht: Kluwer Academic Publishers, 1995.

Øhrstrøm, 2006 – *Øhrstrøm P., Hasle P.* Modern Temporal Logic: The Philosophical Background // Handbook of the History of Logic. Vol. 7. 2006. P. 447–498.

Pnueli, 1977 – *Pnueli A.* The Temporal Logic of Programs // Proceedings of the 18th IEEE Symposium on Foundations of Computer Science. 1977. P. 46–67.

Prior, 1957 – *Prior A.* Time and Modality. Oxford: Oxford University Press, 1957.

Prior, 1967 – *Prior A.N.* Past, Present and Future. Oxford: Oxford University Press, 1967.

Rescher, 1971 – *Rescher N., Urquhart A.* Temporal Logic. Berlin: Springer, 1971.

Reynolds, 1992 – *Reynolds M.* An axiomatization for Until and Since over the reals without the IRR rule // Studia Logica. 1992. Vol. 51. P. 165–193.

Reynolds, 1994 – *Reynolds M.* Axiomatizing U and S over Integer Time // D. Gabbay, H. Ohlbach (eds.). Temporal Logic. Proceedings of the First International Conference ICTL. (Lecture Notes in Artificial Intelligence: Vol. 828.) Berlin; Heidelberg: Springer, 1994. P. 117–132.

Reynolds, 1997 – *Reynolds M.* A Decidable Temporal Logic of Parallelism // Notre Dame Journal of Formal Logic. 1997. Vol. 38. No. 3. P. 419–436.

Reynolds, 2001 – *Reynolds M.* An Axiomatization of Full Computation Tree Logic // Journal of Symbolic Logic. 2001. Vol. 66. P. 1011–1057.

Reynolds, 2002 – *Reynolds M.* Axioms for Branching Time // Journal of Logic and Computation. 2002. Vol. 12. No. 4. P. 679–697.

Reynolds, 2003 – *Reynolds M.* An Axiomatization of Prior's Ockhamist Logic of Historical Necessity // Balbiani et al. (eds.) Advances in Modal Logic. Vol. 4. London: College Publications, 2003. P. 355–370.

Rumberg, 2016a – *Rumberg A.* Transition Semantics for Branching Time // Journal of Logic Language and Information. 2016. Vol. 25. P. 77–108.

Rumberg, 2019 – *Rumberg A., Zanardo A.* First-Order Definability of Transition Structures // Journal of Logic, Language and Information. 2019. Vol. 28. No. 3. P. 459–488.

Tarski, 1935 – *Tarski A.* Der Wahrheitsbegriff in den formalisierten Sprachen. // Studia Philosophica. 1935. Vol. 1. P. 261–405. (English translation: *Tarski A.* The Concept of Truth in Formalized Languages // Logic, Semantics, Metamathematics. Ed. by J. Corcoran. Second edition. Indianapolis: Hackett, 1983.)

Thomason, 1970 – *Thomason R.H.* Indeterminist Time and Truth-Value Gaps // Theoria. 1970. Vol. 36. No. 3. P. 264–281.

Thomason, 1984 – *Thomason R.H.* Combinations of Tense and Modality // D. Gabbay, F. Guenther (eds.). Handbook of Philosophical Logic (Extensions of Classical Logic: Volume 2). Dordrecht: Reidel, 1984. P. 135–165.

Thomason, 2020 – *Thomason R.H.* Logic and Artificial Intelligence // The Stanford Encyclopedia of Philosophy (Summer 2020 Edition). E.N. Zalta (ed.). `https://plato.stanford.edu/archives/sum2020/entries/logic-ai/`

Venema, 1993 – *Venema Y.* Completeness via Completeness: Since and Until // M. de Rijke (ed.). Diamonds and Defaults. Dordrecht: Kluwer, 1993. P. 279–286.

Wawer, 2014 – *Wawer J.* The Truth About the Future // Erkenntnis. 2014. Vol. 79. P. 365–401.

Xu, 1988 – *Xu M.* On some U, S-Tense Logics // Journal of Philosophical Logic. 1988. Vol. 17. P. 181–202.

Zanardo, 1985 – *Zanardo A.* A finite axiomatization of the set of strongly valid Ockhamist formulas // Journal of Philosophical Logic. 1985. Vol. 14. P. 447–468.

Zanardo, 1990 – *Zanardo A.* Axiomatization of 'Peircean' branching-time logic // Studia Logica. 1990. Vol. 49. No. 2. P. 183–195.

Zanardo, 1996 – *Zanardo A.* Branching-time logic with quantification over branches: The point of view of modal logic // The Journal of Symbolic Logic. 1996. Vol. 61. No. 1. P. 1–39.

Zanardo, 1998 – *Zanardo A.* Undivided and Indistinguishable Histories in Branching-Time Logics // Journal of Logic, Language and Information. 1998. Vol. 7. P. 297–315.

Zanardo, 2003 – *Zanardo A.* First-Order and Second-Order Aspects of Branching-Time Semantics. Preprint Dipartimento di Matematica Università di Padova. No. 3, 17 febbraio 2003.

Zanardo, 2006a – *Zanardo A.* Moment/history duality in Prior's logics of branching time // Synthese. 2006. Vol. 150. No. 3. P. 483–507.

Zanardo, 2006b – *Zanardo A.* Quantification over sets of possible worlds in branching-time semantics // Studia Logica. 2006. Vol. 82. No. 3. P. 379–400.

Oleg M. Grigoriev

Systems of temporal logic: moments, histories, trees

Oleg M. Grigoriev
Lomonosov Moscow State University,
27/4 Lomonosovskiy prospect, Moscow, 119991, Russian Federation.
E-mail: grig@philos.msu.ru

Abstract: The article is intended to give a review of semantic structures and formalized languages of some propositional logics of linear and branching time, links for the relevant technical results concerning formalizations of these logics (as Hilbert-style axiomatic calculi) are given. Model structures under considerations presuppose moment-based ontologies and, in some cases, histories as additional primitive entities. The languages of described systems extend the standard language of classical propositional logic with Priorean tense modalities and special modalities acting like quantifier over a set of histories. Languages of some linear tome temporal logics can include operators like Until, Since and NextTime.

Keywords: logic of time, linear time, branching time, indeterminism, future contigents

For citation: Grigoriev O.M. "Sistemy vremennoi logiki I: momenty, istorii, derev'ya" [Systems of temporal logic: moments, histories, trees], *Logicheskie Issledovaniya / Logical Investigations*, 2021, Vol. 27, No. 2, pp. 153–184. DOI: 10.21146/2074-1472-2021-27-2-153-184 (In Russian)

Acknowledgements. The reported study was funded by RFBR, project number 20-011-00698a.

References

Allen, 1984 – Allen, J.F. "Towards a General Theory of Action and Time", *Artificial Intelligence*, 1984, Vol. 23, pp. 123–154.

Allen, Ferguson, 1994 – Allen, J.F., Ferguson G. "Actions and Events in Interval Temporal Logic", *Journal of Logic and Computation*, 1994, Vol. 4, No. 5, pp. 531–579.

van Benthem, 1983 – van Benthem, J. *The Logic of Time*. Dordrecht; Boston; London: Kluwer Academic Publishers, 1983.

van Benthem, 1995 – van Benthem, J. "Temporal logic", in: D.M. Gabbay, C.J. Hogger, J.A. Robinson (eds.). *Handbook of Logic in Artificial Intelligence and Logic Programming: Epistemic and Temporal Reasoning*. Vol. 4. Oxford: Oxford University Press, 1995, pp. 241–351.

Belnap, 1991 – Belnap, N., "Before refraining: Concepts for agency", *Erkenntnis*, 1991, Vol. 34, pp. 137–169.

Belnap, Green, 1994 – Belnap, N., Green, M. "Indeterminism and the thin red line", *Philosophical Perspectives*, 1994, Vol. 8, p. 365.

Belnap et al., 2001 – Belnap, N., Perloff, M., Xu, M. *Facing the future: Agents and choices in our indeterministic world*. Oxford: Oxford University Press, 2001.

Belnap, 2005 – Belnap, N. "A theory of causation: Causae causantes (originating causes) as inus conditions in branching space-times", *British Journal for the Philosophy of Science*, 2005, Vol. 56, No. 2, pp. 221–253.

Belnap et al., 2021 – Belnap, N., Müller, T., Placek, T. "New Foundations for Branching Space-Times", *Studia Logica*, 2021, Vol. 109, pp. 239–284.

Blackburn et al., 2006 – Blackburn, P., van Benthem, J. Wolter, F. (eds.), *Handbook of Modal Logics*. Amsterdam: Elsevier, 2006.

Blackburn et al., 2002 – Blackburn, P., de Rijke, M., Venema, Y. *Modal Logic*. Cambridge: Cambridge University Press, 2002.

Blackburn et al., 2019 – Blackburn, P.R., Hasle, P., Øhrstrøm, P. (eds.), *Logic and Philosophy of Time: Further Themes from Prior*, Vol. 2. Aalborg: Aalborg Universitetsforlag, 2019. 230 pp.

Burgess, 1978 – Burgess, J. "The Unreal Future", *Theoria*, 1978, Vol. 44, No. 3, pp. 157–179.

Burgess, 1979 – Burgess, J. "Logic and Time", *Journal of Symbolic Logic*, 1979, Vol. 44, pp. 566–582.

Burgess, 1980 – Burgess, J. "Decidability for Branching Time", *Studia Logica*, 1980, Vol. 39, pp. 203–218.

Burgess, 1982 – Burgess, J. "Axioms for Tense Logic I: 'Since' and 'Until'", *Notre Dame Journal of Formal Logic*, 1982, Vol. 23, pp. 367–374.

Burgess, 2002 – Burgess, J., "Basic Tense Logic", in: D.M. Gabbay, and F. Guenthner (eds.), *Handbook of Philosophical Logic. Vol. 7*. Springer, 2002, pp. 1–42.

Correia et al., 2013 – Correia, F., Iacona, F. (eds.), *Around the Tree: Semantic and Metaphysical Issues Concerning Branching and the Open Future* (Synthese Library: Volume 361). Dordrecht: Springer, 2013.

Demri et al., 2016 – Demri, S., Goranko, V., Lange, M. *Temporal Logics in Computer Science*. Cambridge: Cambridge University Press, 2016.

Emerson, 1990 – Emerson, E. "Temporal and modal logics", in: J. van Leeuwen (ed.), *Handbook of Theoretical Computer Science*. Amsterdam: Elsevier, 1990, pp. 995–1072.

Fisher et al., 2005 – Fisher, M., Gabbay, D.M., Vila, L. *Handbook of Temporal Reasoning in Artificial Intelligence*. Amsterdam: Elsevier, 2005.

Gabbay, 1980 – Gabbay, D. "An irreflexivity lemma with applications to axiomatizations of conditions on tense frames", in: U. Mönnich (ed.), *Aspects of Philosophical Logic*. Reidel; Dordrecht, 1980, pp. 67–89.

Gabbay et al., 1980 – Gabbay, D., Pnueli, A., Shelah, S., Stavi J. "On the temporal analysis of fairness", in: *Proceedings of the 7th ACM SIGPLAN-SIGACT symposium on Principles of programming languages (POPL '80)*. Association for Computing Machinery. New York, 1980, pp. 163–173.

Gabbay et al., 1994 – Gabbay, D.M., Hodkinson I., Reynolds M. *Temporal Logic: Mathematical Foundations and Computational Aspects*, Vol. 1. Oxford: Clarendon Press, 1994.

Galton, 1987 – Galton, A.P. *Temporal Logics and their Applications.* London: Academic Press, 1987.

Goldblatt, 1992 – Goldblatt, R. *Logics of Time and Computation* (CSLI Lecture Notes 7), Second Edition. Stanford: CSLI Publications, 1992.

Goranko, Rumberg, 2020 – Goranko, V. Rumberg, A. "Temporal Logic", E.N. Zalta (ed.), *The Stanford Encyclopedia of Philosophy (Summer 2020 Edition)*, https://plato.stanford.edu/archives/sum2020/entries/logic-temporal/.

Gurevich, Shelah, 1985 – Gurevich, Y., Shelah, S. "The Decision Problem for Branching Time Logic", *Journal of Symbolic Logic*, 1985, Vol. 50, pp. 668–681.

Hajnicz, 1996 – Hajnicz, E. (eds.) *Time Structures.* Lecture Notes in Computer Science (Lecture Notes in Artificial Intelligence), Vol. 1047. Springer, Berlin, Heidelberg, 1996.

Hasle et al., 2017 – Hasle, P., Blackburn, P.R., Øhrstrøm, P. (eds.), *Logic and Philosophy of Time: Themes from Prior*, Vol. 1. Aalborg: Aalborg Universitetsforlag, 2017.

Kröger, Merz, 2008 – Kröger F., Merz, S. *Temporal Logic and State Systems. Texts in Theoretical Computer Science* (An EATCS Series). Springer; Berlin; Heidelberg, 2008.

Lichtenstein et al., 1985 – Lichtenstein, O., Pnueli, A., Zuck, L.D. "The glory of the past", in: *Proceedings the Conference on Logic of Programs.* London: Springer-Verlag, 1985, pp. 196–218.

Kamp, 1968 – Kamp, H., *Tense Logic and the Theory of Linear Order*, PhD Thesis. Los Angeles: University of California, 1968.

McArthur, 1976 – McArthur, R. *Tense Logic.* Springer, Synthese Library, 1976. 91 pp.

Müller, 2010 – Müller, T. "Towards a theory of limited indeterminism in branching space-times", *Journal of Philosophical Logic*, 2010, Vol. 39, pp. 395–423.

Müller, 2014 – Müller, T. "Alternatives to histories? Employing a local notion of modal consistency in branching theories", *Erkenntnis*, 2014, Vol. 79, pp. 343–364.

Øhrstrøm, 2009 – Øhrstrøm, P. "In Defence of the Thin Red Line: A Case for Ockhamism", *Humana.mente*, 2009, Vol. 8, pp. 17–32.

Øhrstrøm, Hasle, 1995 – Øhrstrøm, P., Hasle, P. *Temporal Logic: From Ancient Ideas to Artificial Intelligence.* Dordrecht: Kluwer Academic Publishers, 1995.

Øhrstrøm, Hasle, 2006 – Øhrstrøm, P., Hasle, P. "Modern Temporal Logic: The Philosophical Background", in: *Handbook of the History of Logic* Vol. 7. 2006, pp. 447–498.

Pnueli, 1977 – Pnueli, A. "The Temporal Logic of Programs", in: *Proceedings of the 18th IEEE Symposium on Foundations of Computer Science*, 1977, pp. 46–67.

Prior, 1957 – Prior, A. *Time and Modality.* Oxford: Oxford University Press, 1957.

Rescher, Urquhart 1971 – Rescher, N., Urquhart, A. *Temporal Logic*. Berlin: Springer, 1971.

Prior, 1967 – Prior, A.N. *Past, Present and Future*. Oxford: Oxford University Press, 1967.

Reynolds, 1992 – Reynolds, M. "An axiomatization for Until and Since over the reals without the IRR rule", *Studia Logica*, 1992, Vol. 51, pp. 165–193.

Reynolds, 1994 – Reynolds, M. "Axiomatizing U and S over Integer Time", in: D.M. Gabbay, H.J. Ohlbach (eds.), *Temporal Logic, Proceedings of the First International Conference ICTL 1994 (Lecture Notes in Artificial Intelligence. Vol. 828)*. Berlin; Heidelberg: Springer, 1994, pp. 117–132.

Reynolds, 1997 – Reynolds, M. "A Decidable Temporal Logic of Parallelism", *Notre Dame Journal of Formal Logic*, 1997, Vol. 38, No. 3, pp. 419–436.

Reynolds, 2001 – Reynolds, M. "An Axiomatization of Full Computation Tree Logic", *Journal of Symbolic Logic*, 2001, Vol. 66, pp. 1011–1057.

Reynolds, 2002 – Reynolds, M. "Axioms for Branching Time", *Journal of Logic and Computation*, 2002, Vol. 12, No. 4, pp. 679–697.

Reynolds, 2003 – Reynolds, M. "An Axiomatization of Prior's Ockhamist Logic of Historical Necessity", in: Balbiani et al. (eds.), *Advances in Modal Logic*. Vol. 4. London: College Publications, 2003, pp. 355–370.

Rumberg, 2016a – Rumberg, A. "Transition Semantics for Branching Time", *Journal of Logic Language and Information*, 2016, Vol. 25, pp. 77–108.

Rumberg, Zanardo 2019 – Rumberg, A., Zanardo A. "First-Order Definability of Transition Structures", *Journal of Logic, Language and Information*, 2019, Vol. 28, No. 3, pp. 459–488.

Tarski, 1935 – Tarski, A. "Der Wahrheitsbegriff in den formalisierten Sprachen", *Studia Philosophica*, 1935, Vol. 1, pp. 261–405. (English translation: Tarski, A. "The Concept of Truth in Formalized Languages", in: *Logic, Semantics, Metamathematics*, ed. by J. Corcoran. Second edition. Indianapolis: Hackett, 1983.)

Thomason, 1970 – Thomason, R.H. "Indeterminist Time and Truth-Value Gaps", *Theoria*, 1970, Vol. 36, No. 3, pp. 264–281.

Thomason, 1984 – Thomason, R.H. "Combinations of Tense and Modality", in: D.M. Gabbay, F. Guenther (eds.), *Handbook of Philosophical Logic (Extensions of Classical Logic: Vol. 2)*. Dordrecht: Reidel, 1984, pp. 135–165.

Thomason, 2020 – *Thomason R.H.* "Logic and Artificial Intelligence", in: E. N. Zalta (ed.), *The Stanford Encyclopedia of Philosophy (Summer 2020 Edition)*, `https://plato.stanford.edu/archives/sum2020/entries/logic-ai/`

Venema, 1993 – *Venema Y.* "Completeness via Completeness: Since and Until", in: M. de Rijke (ed.), *Diamonds and Defaults*. Dordrecht: Kluwer, 1993, pp. 279–286.

Wawer, 2014 – Wawer, J. "The Truth About the Future", *Erkenntnis*, 2014, Vol. 79, pp. 365–401.

Xu, 1988 – Xu, M. "On some U,S-Tense Logics", *Journal of Philosophical Logic*, 1988, Vol. 17, pp. 181–202.

Zanardo, 1985 – Zanardo, A. “A finite axiomatization of the set of strongly valid Ockhamist formulas”, *Journal of Philosophical Logic*, 1984, Vol. 14, pp. 447–468.

Zanardo, 1990 – Zanardo, A. “Axiomatization of ‘Peircean’ branching-time logic”, *Studia Logica*, 1990, Vol. 49, No. 2, pp. 183–195.

Zanardo, 1996 – Zanardo, A. “Branching-time logic with quantification over branches: The point of view of modal logic”, *Journal of Symbolic Logic*, 1996, Vol. 61, No. 1, pp. 1–39.

Zanardo, 1998 – Zanardo, A. “Undivided and Indistinguishable Histories in Branching-Time Logics”, *Journal of Logic, Language and Information*, 1998, Vol. 7, pp. 297–315.

Zanardo, 2003 – Zanardo, A. “First-Order and Second-Order Aspects of Branching-Time Semantics”, *Preprint Dipartimento di Matematica Università di Padova*, N. 3, 17 febbraio 2003. Presented at HPLMC-02, Second International Workshop oh the History and Philosophy of Logic, Mathematics and Computation (Donostia-San Sebastian, Spain, 7–9 November 2002).

Zanardo, 2006a – Zanardo, A. “Moment/history duality in Prior’s logics of branching time”, *Synthese*, 2006, Vol. 150, No. 3, pp. 483–507.

Zanardo, 2006b – Zanardo, A. “Quantification over sets of possible worlds in branching-time semantics”, *Studia Logica*, 2006, Vol. 82, No. 3, pp. 379–400.