Логические исследования
2023. Т. 29. № 2. С. 104–124
УДК 510.644

Logical Investigations
2023, Vol. 29, No. 2, pp. 104–124
DOI: 10.21146/2074-1472-2023-29-2-104-124

Н.Е. Томова

К вопросу о критерии параполноты логик

Наталья Евгеньевна Томова
Институт философии РАН.
Российская Федерация, 109240, г. Москва, ул. Гончарная, д. 12, стр. 1.
E-mail: natalya-tomova@yandex.ru

Аннотация: В статье рассмотрены вопросы, связанные с определением параполных логик. Существуют различные способы формализации основного условия параполноты — требования наличия в логической системе таких формул, что сами эти формулы и их отрицания ложны. Приводятся соответствующие определения параполноты, а также условия эквивалентности некоторых определений. Рассмотрены условия эквивалентности закона исключенного третьего $\varphi \vee \neg\varphi$, закона Клавия $(\neg\varphi \to \varphi) \to \varphi$ и его частного случая $(\varphi \to \neg\varphi) \to \neg\varphi$. Отдельный раздел посвящен вопросам параполного отрицания, а также его модальной интерпретации.

Ключевые слова: параполнота, закон Клавия, закон исключенного третьего, имплозивность отношения следования

Для цитирования: *Томова Н.Е.* К вопросу о критерии параполноты логик // Логические исследования / Logical Investigations. 2023. Т. 29. № 2. С. 104–124. DOI: 10.21146/2074-1472-2023-29-2-104-124

Введение

Данная статья является продолжением исследования, посвященного вопросам определения паранепротиворечивых и параполных логик, и касается параполноты логических систем. Первую часть исследования см. в [Томова, 2022].

Паранепротиворечивые и параполные логики часто рассматриваются как дуальные системы. Если первые подходят для работы с противоречивыми контекстами, то вторые применимы для корректной работы в условиях недостаточности, неполноты информации.

Прежде всего отметим, что в области изучения паралогик свойство паранепротиворечивости является отправной точкой. Исторически первыми сформулированы именно паранепротиворечивые системы, параполные логики формулировались позже как некоторые дуальные системы с симметричными свойствами. И полученные результаты в области паранепротиворечивых логик часто обобщаются на случай параполных (хотя иногда и с некоторыми изменениями и уточнениями).

Так, в определениях паранепротиворечивых и параполных логик прослеживаются параллели и аналогии, они строятся вокруг следующих понятий:

Паранепротиворечивость	**Параполнота**
• неэксплозивность следования	• неимплозивность следования
• закон непротиворечия	• закон исключенного третьего
• закон Дунса Скота	• закон Клавия

Термин «параполная логика» (так же как и термин «паранепротиворечивая логика») был предложен Ф. Миро Кесада по просьбе Н. да Косты [D'Ottaviano, Gomes, 2020, p. 263]. Непосредственно само определение параполной логики в общем виде мы находим позже в работе [Loparić, da Costa, 1984, p. 119]:

> Логическая система является *параполной*, если она может лежать в основе теорий, в которых существуют замкнутые формулы, такие, что сами эти формулы и их отрицания одновременно ложны. Такие теории называются *параполными*.

Как следствие, в параполных теориях не верифицируется закон исключенного третьего в следущей форме: из двух противоречащих утверждений одно должно быть истинным[1].

Интуиционисткая логика, а также некоторые системы многозначных логик являются параполными в этом смысле.

Возникновение параполной логики стало результатом работы тех исследователей, которые каким-то образом стремилсь предотвратить всеобщее применение принципа исключенного третьего. Первые системы параполных логик были разработаны для решения вопросов интуиционистской логики.

Математики и логики интуиционистского и конструктивного направления признают применимость закона исключенного третьего в рассуждениях о конечных множествах, но не применяют этот закон в рассуждениях о бесконечных множествах.

[1] Напомним, что для паранепротиворечивых теорий существует требование неверификации закона непротиворечия. Хотя и имеются различные взгляды на необходимость данного требования (см. [Томова, 2022, с. 85–86]).

Обратим внимание, что параполная логика также встречается в литературе под названием слабо интуиционисткой логики (см., например, работы [Sette, Carnielli, 1995; Ciuciura, 2015]).

Мотивация для возникновения параполных логик связана и с тем фактом, что классическое требования о том, что по крайней мере что-то одно — или само утверждение, или его отрицание — должно быть истинным, не всегда соответствует нашей интуиции. Например, неуниверсальность закона исключенного третьего видна, когда имеется некоторый неопределенный предикат P («высокий», «низкий» и т.п.) и пограничный индивид a, такой, что мы можем считать, что одновременно $P(a)$ и $\neg P(a)$ ложны. Так, различные подходы к вопросу неопределенности в языке, когда постулируются истинностнозначные провалы, предполагают логику, допускающую неполноту, поскольку наличие в теории предложений, которые не являются ни истинными, ни ложными, означает также допущение наличия предложений, которые не являются истинными, в то время как их отрицания также не являются истинными (см., например, [Hyde, 2008, pp. 73–92]).

Параполная логика дает возможность корректно обрабатывать неполные данные, отвергая закон исключенного третьего.

Как и в случае паранепротиворечивых логик, существуют различные подходы к определению параполноты логик. В статье будут приведены определения параполноты, которые встречаются в литературе. Также будут затронуты вопросы, связанные с параполным отрицанием.

1. Определения

Приведем основные определения, которые будут нами использованы в статье.

Пусть $Var = \{p, q, r \dots\}$ — счетное множество пропозициональных переменных и $Con = \{\S_1, \dots \S_n\}$ — конечное множество пропозициональных связок, где каждой связке $\S_i$ сопоставлено натуральное число $a(\S_i)$, которое обозначает число ее аргументов. Хотя бы для одного $i \in \{1, \dots n\}$ имеет место $a(\S_i) \neq 0$. Множество формул For определяется индуктивно стандартным образом:

(1) $Var \subseteq For$;

(2) Для каждого такого $\S_i \in Con$, что $a(\S_i) = k$, $\S_i(\varphi_1, \dots, \varphi_k) \in For$, если $\varphi_1, \dots, \varphi_k \in For$;

(3) Ничто иное не принадлежит For.

Алгебру формул $\mathcal{L} = \langle For, \S_1, \dots, \S_n \rangle$ будем называть *пропозициональным языком.*

Множества формул из For называются *теориями* и обозначаются $\mathcal{T}, \mathcal{S}$.

Отношением следования для пропозиционального языка $\mathcal{L}$ называем бинарное отношение $\vdash$ между $\mathcal{T} \subseteq For$ и $\varphi \in For$, отвечающее условиям:

- если $\varphi \in \mathcal{T}$, то $\mathcal{T} \vdash \varphi$ (рефлексивность);
- если $\mathcal{T} \vdash \varphi$ и $\mathcal{T} \subseteq \mathcal{T}'$, то $\mathcal{T}' \vdash \varphi$ (монотонность);
- если $\mathcal{T} \vdash \varphi$ и $\mathcal{T}', \varphi \vdash \psi$, то $\mathcal{T}, \mathcal{T}' \vdash \psi$ (транзитивность).

Если $\vdash$ также замкнуто относительно всех эндоморфизмов (подстановок) $\mathcal{L}$, называем такое следование *структурным*.

Если $\mathcal{L}$ — пропозициональный язык и $\vdash$ — структурное логическое следование на $\mathcal{L}$, то $\mathbf{L} = \langle \mathcal{L}, \vdash \rangle$ — *пропозициональная логика*. Далее, если не оговорено иное, будем рассматривать логики, заданные в стандартном языке, в котором имеются связки $\neg$, $\vee$, $\wedge$, $\rightarrow$.

Теория $\mathcal{T}$ *противоречива*, е.т.е. существует такая формула φ, что:

$$\mathcal{T} \vdash \varphi \quad \text{и} \quad \mathcal{T} \vdash \neg\varphi.$$

Теория $\mathcal{T}$ *полна*, е.т.е. для любой формулы φ верно, что:

$$\mathcal{T} \vdash \varphi \quad \text{или} \quad \mathcal{T} \vdash \neg\varphi.$$

Теория $\mathcal{T}$ *тривиальна*, е.т.е. для любой формулы φ верно, что:

$$\mathcal{T} \vdash \varphi.$$

Отношением следования со множественными заключениями для пропозиционального языка $\mathcal{L}$ называем бинарное отношение $\vdash$ между $\mathcal{T} \subseteq For$ и $\mathcal{S} \subseteq For$, отвечающее условиям:

- если $\mathcal{T} \cap \mathcal{S} \neq \varnothing$, то $\mathcal{T} \vdash \mathcal{S}$;
- если $\mathcal{T} \vdash \mathcal{S}$, где $\mathcal{T} \subset \mathcal{T}'$ и $\mathcal{S} \subset \mathcal{S}'$, то $\mathcal{T}' \vdash \mathcal{S}'$;
- если $\mathcal{T}, \mathcal{Z}_1 \vdash \mathcal{Z}_2, \mathcal{S}$, где $\mathcal{Z}_1 \cup \mathcal{Z}_2 = \mathcal{Z}$ и $\mathcal{Z}_1 \cap \mathcal{Z}_2 = \varnothing$ ($\mathcal{Z} \subseteq For$), то $\mathcal{T} \vdash \mathcal{S}$ [Shoesmith, Smiley, 1978, p. 29].

Логическая матрица для $\mathcal{L}$ — это структура $\mathcal{M} = \langle V, f_1, \ldots, f_k, D \rangle$, где $\mathcal{A} = \langle V, f_1, \ldots, f_k \rangle$ алгебра того же типа, что пропозициональный язык $\mathcal{L}$, V — множество истинностных значений и f_i — функция на V той же местности, что и $\S_i$; $D \subseteq V$ — непустое собственное подмножество V. Когда $\mathcal{M}$ — матрица для $\mathcal{L}$, гомоморфизм h из $\mathcal{L}$ в $\mathcal{A}$ называем *оценкой* $\mathcal{L}$ в $\mathcal{M}$.

Некоторая формула φ есть *тавтология* в $\mathcal{M}$, е.т.е. для каждой оценки h в $\mathcal{M}$ верно, что $h(\varphi) \in D$.

Теорией, порождаемой $\mathcal{M}$, называем множество всех тавтологий в $\mathcal{M}$ и обозначаем его как $E(\mathcal{M})$.

Матричное отношение следования есть множество $Cn(\mathcal{M})$ упорядоченных пар $\langle \mathcal{T}, \varphi \rangle$, таких, что для всякой оценки h в $\mathcal{M}$, если $h(\mathcal{T}) \subseteq D$, то $h(\varphi) \in D$.

Следование со множественными заключениями (multiple-conclusion consequence relation), порождаемым $\mathcal{M}$, называется множество $Cn_m(\mathcal{M})$ упорядоченных пар $\langle \mathcal{T}_1, \mathcal{T}_2 \rangle$, таких, что для всякой оценки h в $\mathcal{M}$, если $h(\mathcal{T}_1) \subseteq D$, то $h(\mathcal{T}_2) \cap D \neq \varnothing$.

Тогда под логикой L можно понимать пару $\langle \mathcal{L}, Cn(\mathcal{M}) \rangle$[2], с другой стороны, логику L можно также рассматривать как матричную теорию, т.е. класс тавтологий $E(\mathcal{M}_L)$.

2. Определения параполноты логик

Формулировки критерия параполноты логики зависят от того, что мы понимаем под логикой, как мы ее задаем и в каком языке.

Понимаем ли мы логику как пропозициональный язык с заданным отношением следования (обычным или со множественными заключениями) и тогда рассматриваем свойства соответствующих теорий; или, используя матричный подход, рассматриваем логику как матричную теорию или как множество умозаключений, при этом определяя обычное следование или следование со множественными заключениями.

Аналогично тому, как на основании понятия *эксплозивности* следования, определялась *паранепротиворечивая* логика, на основании понятия *имплозивности* следования дается определение *параполной* логики.

Отношение следования называется *имплозивным* (implosive), если $\psi \vdash \varphi, \neg\varphi$ для любых $\varphi, \psi \in For$[3].

> Если $\mathbf{L} = \langle \mathcal{L}, \vdash \rangle$ — пропозициональная логика, то она является *параполной*, если существуют формулы $\varphi, \psi \in For$, такие, что $\psi \nvdash \varphi, \neg\varphi$[4], т.е. если ее отношение логического следования не является имплозивным.

[2] Или $\langle \mathcal{L}, Cn_m(\mathcal{M}) \rangle$ в случае следования со множественными заключениями.

[3] Приведена формулировка в терминах следования, допускающего множественные заключения.

[4] В терминах следования с единственными заключениями: $\mathcal{T}, \psi \vdash \varphi$ и $\mathcal{T}, \neg\psi \vdash \varphi$, но $\mathcal{T} \nvdash \varphi$. То есть возможна ситуация, когда ни само утверждение, ни его отрицание не имеют места.

С другой стороны, логику можно рассматривать как матричную теорию, т.е. как некоторый класс тавтологий, законов. В этом случае наличие или отсутствие какого-либо закона может характеризовать эту теорию.

Так, например, формализация требования, чтобы противоречие не приводило к тривиализации теории, позволяет сформулировать критерии паранепротиворечивости теории. При матричном подходе в качестве такого критерия может выступать тот факт, что закон Дунса Скота $\varphi \to (\neg\varphi \to \psi)$ не является тавтологией (более подробно см., например, [Томова, 2022, с. 82][5].

Аналогичным образом, при определении параполноты логики в качестве импликативно-негативного критерия может выступать требование неверификации закона Клавия (*consequentia mirabilis*) $(\neg\varphi \to \varphi) \to \varphi$ [Ciuciura, 2015]. Таким образом,

> Логика *параполна*, если в ней не верифицируется закон Клавия $(\neg\varphi \to \varphi) \to \varphi$.

В указанной работе такая логика называется *слабо интуиционисткой* логикой. При этом это второе определение *слабо интуиционисткой* логики, которое автор приводит в этой работе.

Первое определение такое:

> *Слабо интуиционисткая* логика — логика, в которой не верифицируется закон исключенного третьего $\varphi \vee \neg\varphi$[6].

Может возникнуть вопрос об эквивалентности данных определений и о связи закона исключенного третьего и закона Клавия.

Остановимся подробнее и сделаем некоторое уточнение.

В работе также приводится частный случай закона Клавия[7], а именно: $(\varphi \to \neg\varphi) \to \neg\varphi$.

Действительно, если мы имеем дело с пропозициональным языком, состоящим из отрицания и импликации, можем использовать следующее условие выразимости дизъюнкции посредством импликации:

$$A \vee B \equiv (A \to B) \to B.$$

[5] Однако недостаточность данного требования для паранепротиворечивой логики была очевидна для многих исследователей, см.: [Томова, 2022, с. 82–83].

[6] В [Sette, Carnielli, 1995] дуальным образом, логика, в которой не верифицируется закон непротиворечия, называется *слабо паранепротиворечивой* логикой.

[7] См.: [Д'Оттавиано, Гомес, 2018, p. 217–218].

Тогда, очевидно,

$A \vee \neg A \equiv (A \to \neg A) \to \neg A.$

Согласно [Batens et al., 1999]:

> Логика *параполна*, если существует такая формула φ, что $\nvdash (\varphi \to \neg\varphi) \to \neg\varphi$.

В каком случае мы можем говорить об эквивалентности формул: $\varphi \vee \neg\varphi$, $(\neg\varphi \to \varphi) \to \varphi$ и $(\varphi \to \neg\varphi) \to \neg\varphi$?

Итак, имеем определение стандартных матричных операций [Rosser, Turquette, 1952, p. 26][8], они задаются следующими условиями:

- $x \wedge y \in D \Longleftrightarrow x \in D$ и $y \in D$;
- $x \vee y \notin D \Longleftrightarrow x \notin D$ и $y \notin D$;
- $x \to y \notin D \Longleftrightarrow x \in D$ и $y \notin D$;
- $\neg x \in D \Longleftrightarrow x \notin D$.

Тогда возможно доказать следующее утверждение.

Утверждение 1. Если связки определеяются стандартыми логическими операциями, то формулы $\varphi \vee \neg\varphi$, $(\neg\varphi \to \varphi) \to \varphi$ и $(\varphi \to \neg\varphi) \to \neg\varphi$ эквивалентны.

Доказательство.
Сначала докажем, что

$$v((\neg\varphi \to \varphi) \to \varphi) \in D \ \text{т.т.т.} \ v((\varphi \to \neg\varphi) \to \neg\varphi) \in D.$$

Имеем 2 случая (I) и (II).

(I) Если $v((\neg\varphi \to \varphi) \to \varphi) \in D$, то $v((\varphi \to \neg\varphi) \to \neg\varphi) \in D$.

+1. (I) не имеет места	– доп.
2. $v((\neg\varphi \to \varphi) \to \varphi) \in D$	– из 1
3. $v((\varphi \to \neg\varphi) \to \neg\varphi) \notin D$	– из 1
4. $v(\varphi \to \neg\varphi) \in D$	– из 3, усл. станд. $\to$
5. $v(\neg\varphi) \notin D$	– из 3, усл. станд. $\to$
6. $v(\varphi) \in D$	– из 5, усл. станд. $\neg$
7. $v(\varphi \to \neg\varphi) \notin D$	– из 5, 6, усл. станд. $\to$
8. Допущение 1 неверно	– из 4 и 7

[8] См. также [Девяткин, 2016, с. 32].

(II) Если $v((\varphi \to \neg\varphi) \to \neg\varphi) \in D$, то $v((\neg\varphi \to \varphi) \to \varphi) \in D$.

+1. (II) не имеет места	– доп.
2. $v((\varphi \to \neg\varphi) \to \neg\varphi) \in D$	– из 1
3. $v((\neg\varphi \to \varphi) \to \varphi) \notin D$	– из 1
4. $v(\neg\varphi \to \varphi) \in D$	– из 3, усл. станд. $\to$
5. $v(\varphi) \notin D$	– из 3, усл. станд. $\to$
6. $v(\neg\varphi) \in D$	– из 5, усл. станд. $\neg$
7. $v(\neg\varphi \to \varphi) \notin D$	– из 5, 6, усл. станд. $\to$
8. Допущение 1 неверно	– из 4 и 7

Далее достаточно доказать, что

$$v(\varphi \vee \neg\varphi) \in D \text{ т.т.т. } v((\neg\varphi \to \varphi) \to \varphi) \in D.$$

Имеем 2 случая (I) и (II).

(I) Если $v(\varphi \vee \neg\varphi) \in D$, то $v((\neg\varphi \to \varphi) \to \varphi) \in D$.

+1. (I) не имеет места	– доп.
2. $v(\varphi \vee \neg\varphi) \in D$	– из 1
3. $v(\neg\varphi \to \varphi) \to \varphi \notin D$	– из 1
4. $v(\neg\varphi \to \varphi) \in D$	– из 3, усл. станд. $\to$
5. $v(\varphi) \notin D$	– из 3, усл. станд. $\to$
6. $v(\neg\varphi) \in D$	– из 5, усл. станд. $\neg$
7. $v(\neg\varphi \to \varphi) \notin D$	– из 5, 6, усл. станд. $\to$
8. Допущение 1 неверно	– из 4 и 7

(II) Если $v((\neg\varphi \to \varphi) \to \varphi) \in D$, то $v(\varphi \vee \neg\varphi) \in D$.

+1. (II) не имеет места	– доп.
2. $v(\neg\varphi \to \varphi) \to \varphi \in D$	– из 1
3. $v(\varphi \vee \neg\varphi) \notin D$	– из 1
4. $v(\varphi) \notin D$	– из 3, усл. станд. $\vee$
5. $v(\neg\varphi) \notin D$	– из 3, усл. станд. $\vee$
6. $v(\neg\varphi) \in D$	– из 3, усл. станд. $\neg$
7. Допущение 1 неверно	– из 5 и 6

■

Соответствие связок стандартным условиям Россера и Тюркетта является достаточным условием эквивалентности указанных формул, однако это не является необходимым условием. Можем привести примеры, когда формулы эквивалентны, а связки стандартными не являются. Так, например, вышеприведенные формулы являются тавтологиями в трехзначной логике Приста **LP** [Priest, 1979], в трехзначной логике Лукасевича с двумя выделенными значениями $\mathbf{J}_3$ [D'Ottaviano, da Costa, 1970], в двух нестрогих изоморфах трехзначной логики Бочвара: в $\mathbf{B}_3^{\Box}$ с двумя выделенными значениями и в $\mathbf{B}_3^{\Diamond}$ с одним выделенным значением [Девяткин и др., 2007].

В чем состоит необходимое условие — на данный момент вопрос открытый. Можно предложить следующую гипотезу:

> Во всех логических матрицах вида $\mathcal{M} = \langle V, f_1, \dots, f_k, D\rangle$, где $V = \{0, \dots, 1\}$ и $D = V \setminus 0$ формулы $\varphi \vee \neg\varphi$, $(\neg\varphi \to \varphi) \to \varphi$ и $(\varphi \to \neg\varphi) \to \neg\varphi$ эквивалентны (т.е. в таких матрицах, в которых класс выделенных значений состоит из всех истинностных значений за исключением 0).

Также представляет интерес ответ на вопрос: существует ли параполная логика, в которой указанные формулы не являются эквивалетными?

С другой стороны, можем привести пример логики, в которой стандартность связок не выполняется и три рассматриваемые формулы не эквивалентны. Это, например, известная трехзначная логика Гейтинга [Heyting, 1930].

2.1. Уточнения понятия параполноты

Существуют различные формализации закона исключенного третьего.

В терминах отошения следования закон исключенного третьего может быть формализован следующим образом:

(1) $\vdash \varphi \vee \neg\varphi$,

или, если следование допускает множественные заключения, так:

(1′) $\vdash \varphi, \neg\varphi$.

Как отмечено в [Hernández-Tello et al., 2020, p. 38] закон исключенного третьего иногда выражается следующим образом:

(2) $\neg(\varphi \vee \neg\varphi) \vdash$.

Однако формулировки (1) и (2) не эквивалентны, по сути они независимы. Независимость (1) и (2) на примере трехзначных логик показана в [Ibid., p. 66].

В связи с этим, как отмечают указанные выше исследователи, использование в определении параполной логики отдельно или (1), или (2) некорректно, и вводится понятие *подлинно параполной* (или сильно параполной) логики[9].

> Логика с отрицанием и дизъюнкцией называется *подлинно параполной* (или сильно параполной), если ни (1), ни (2) не имеет места, т.е. (1) $\nvdash \varphi \vee \neg\varphi$ и (2) $\neg(\varphi \vee \neg\varphi) \nvdash$.

Подклассы параполных логик

На основе понятия *мягкой имплозивности*, в [Marcos, 2005a; Carnielli et al., 2020] определяется особый класс параполных логик — *логик формальной неопределенности.*

> Если $\mathbf{L} = \langle \mathcal{L}, \vdash \rangle$ — пропозициональная логика, то она является *логикой формальной неопределенности*, если $\mathcal{T} \subseteq For$, $\varphi \in For$ и существует такое множество формул $\bigstar(\varphi)$, зависящих от φ, что выполняются условия:
>
> $\mathcal{T} \nvdash \varphi, \neg\varphi$;
>
> $\mathcal{T} \nvdash \bigstar(\varphi), \varphi$;
>
> $\mathcal{T} \nvdash \bigstar(\varphi), \neg\varphi$;
>
> $\mathcal{T} \vdash \bigstar(\varphi), \varphi, \neg\varphi$.

При определении этого класса параполных логик вводится оператор определенности, с помощью которого наличие закона исключенного третьего становится возможным для некоторых *определенных* (determined) предложений.

О связи трехзначных подлинно параполных логик с классом логик формальной неопределенности см.: [Девяткин, 2019, с. 34–37]. Так, например, здесь показано, что каждая трехзначная подлинно параполная логика является логикой формальной неопределенности.

Определяя логику посредством логических матриц, мы можем, варьируя определенные условия, задавать свойства логических матриц, в т.ч. влиять на парасвойства логических систем.

[9] По аналогии с понятием *подлинно паранепротиворечивой* (или сильно паранепротиворечивой) логики, см.: [Béziau, 2016].

В работе [Lewin, Mikenberg, 2006] задается класс литеральных паралогик — логик, в которых свойства паранепротиворечивости и/или параполноты имеют место только на уровне литералов[10], т.е. пропозициональных переменных и их отрицаний.

Определены следующие условия для литеральных *параполных* матриц.

Пусть V есть множество истинностных значений, такое, что $\{0,1\} \subseteq V$, и множество D, такое, что $D \subsetneq V$, $1 \in D$ и $0 \notin D$.

Пусть $\sim$: $V \to V$ есть функция, такая, что $\sim 1 = 0$ и $\sim 0 = 1$.

Тогда $\langle V, D, \sim\rangle$ — *литеральная паранепротиворечивая-параполная матрица* (или *LPP-матрица*) (*the literal-paraconsistent-paracomplete matrix*) со следующими операциями:

$$x \vee y = \begin{cases} 1, & \text{если } x \in D \text{ или } y \in D, \\ 0, & \text{в противном случае,} \end{cases}$$

$$x \wedge y = \begin{cases} 1, & \text{если } x \in D \text{ и } y \in D, \\ 0, & \text{в противном случае,} \end{cases}$$

$$x \to y = \begin{cases} 1, & \text{если } x \notin D \text{ или } y \in D, \\ 0, & \text{в противном случае.} \end{cases}$$

LPP-матрица является *параполной*, если одновременно $x \notin D$, и $\sim x \notin D$.

Очевидно, что в *параполной* LPP-матрице ни одна из следующих формул: $x \vee \neg x$, $(\neg x \to x) \to x$ и $(x \to \neg x) \to \neg x$ не является тавтологией. Что касается $\neg\neg x \to x$ и $x \to \neg\neg x$, то можно подобрать такие $\neg$ и $\to$, что в некоторых матрицах эти формулы будут тавтологиями, а в некоторых — нет.

Обобщенное определение параполноты

В статье [Ciuciura, 2019] Я. Цюцюра приводит определение параполной логики, которое объединяет в себе требования из различных определений.

> Логика $\langle \mathcal{L}, \vdash\rangle$ является *параполной*, е.т.е. одновременно имеют место следующие условия[11]:
>
> 1. $\mathcal{T}, \psi \vdash \varphi$, $\mathcal{T}, \neg\psi \vdash \varphi$ и $\mathcal{T} \nvdash \varphi$, для некоторых формул ψ, φ;
> 2. $\psi \nvdash \varphi, \neg\varphi$, для некоторых формул ψ, φ;
> 3. $\nvdash \varphi \vee \neg\varphi$, для некоторой формулы φ;

[10]Литералами называем множество Lit всех формул вида $\neg^k p$, где $\neg^0 p = p$ и $\neg^{k+1} p = \neg(\neg^k p)$, для $p \in Var$, Var — счетное множество пропозициональных переменных.

[11]Формулировки условий приведены в нашей нотации.

4. $\nvdash (\neg\varphi \to \varphi) \to \varphi$, для некоторой формулы φ;
5. $\nvdash (\varphi \to \neg\varphi) \to \neg\varphi$, для некоторой формулы φ;
6. $\nvdash \varphi \to \neg\neg\varphi$, для некоторой формулы φ;
7. $\nvdash \neg\neg\varphi \to \varphi$, для некоторой формулы φ.

Условия 1–5 Я. Цюцюра берет из определений параполноты, которые приведены в работе [Petrukhin, 2018], условия 6–7 вводятся дополнительно. Автор в вышеупомянутой работе приводит иерархию параполных исчислений, удовлетворяющих этому определению параполноты.

2.2. Об отрицании

Некоторые исследователи прямо говорят о том, что тип отрицания определяет ту или иную паралогику. Так, например, Ж.-И. Безьё [Béziau, 2000, p. 99] пишет:

> Логика *паранепротиворечива*, е.т.е. она содержит паранепротиворечивое отрицание.

Тогда:

> Логика *параполна*, е.т.е. она содержит *параполное* отрицание.

Понятие *параполное отрицание*, как и понятие *паранепротиворечивое отрицание* было впервые введено Ф. Миро Кесада [Beziau, 2003, p. 222].

Отрицание $\sim$ является *параполным*, е.т.е. существует утверждение φ, такое, что φ и $\sim \varphi$ могут быть одновременно ложными.

Также в литературе встречаем определение *строгого* отрицания — отрицания, для которого закон исключенного третьего не имеет места [Lenzen, 1998, p. 215]; [Smolenov, 1998, p. 15].

При этом параполное отрицание также может быть и паранепротиворечивым, такое отрицание, которое одновременно является и паранепротиворечивым[12], и параполным называется *неалетическим отрицанием* [Beziau, 2003, p. 223].

Ж.-И. Безье вводит уточнение и называет *собственно параполным отрицанием* отрицание, которое является параполным и не является неалетическим.

В своих исследованих паранепротиворечивых и параполных логик К. Карет [Caret, 2017] указывает, что отправной точкой является то, что *закон*

[12]Отрицание $\sim$ является *паранепротиворечивым*, е.т.е. существует утверждение φ, такое, что φ и $\sim \varphi$ могут быть одновременно истинными [Beziau, 2003, p. 222].

исключенного третьего и *закон непротиворечия* имеют отношение не к отрицанию «в вакууме», а к тому, как отрицание взаимодействует с дизъюнкцией в одном случае и с конъюнкцией в другом.

Он отмечает [Caret, 2017, p. 285], что во многих параполных (и не паранепротиворечивых) логиках отказ от закона исключенного третьего приводит к тривиализации теории, т.е. становится возможной ситуация, когда из посылок вида $\neg(\varphi \vee \neg\varphi)$ может быть выведено любое следствие, что, в свою очередь, обусловлено наличием закона Де Моргана. Так, например, в предложенной Каретом трехзначной параполной (и не паранепроворечивой) логике **MH**, соединяющей в себе свойства известной трехзначной логики Клини K_3, и параполной (слабо интуиционисткой логики) $\mathbf{I}^1$, тривиализации не происходит, поскольку закон Де Моргана не имеет места.

В работе [Middelburg, 2021, p. 606] приведено семантическое определение параполноты логики, где явно указывается требование непротиворечивости для отрицания.

> Пропозициональная логика является *параполной*, если:
>
> (a) существует формула A языка $\mathcal{L}$, такая, что $\nvDash_{\mathcal{L}} A \vee \neg A$, и
>
> (b) для любой пропозициональной переменной p верно, что $p \nvDash_{\mathcal{L}} \neg p$ и $\neg p \nvDash_{\mathcal{L}} p$.

Ж.-И. Безьё [Beziau, 2003] устанавливает связь между аристотелевскими понятиями противопоставления и отрицанием. Как он указывает, это не только представляет интерес с исторической точки зрения, но и служит способом обоснования теории отрицания, которая позволяет рассматривать паранепротиворечивое и параполное отрицания именно как отрицания[13].

Согласно Аристотелю, два утверждения P и Q могут находиться в следующих отношениях:

- *противоречия* (контрадикторность), е.т.е. они не могут быть одновременно истинны и одновременно ложны;
- *противоложности* (контрарность), е.т.е. они могут быть одновременно ложны, но не могут быть одновременно истинны;
- *подпротивоположности* (субконтрарность), если они могут быть одновременно истинны, но не могут быть одновременно ложны.

[13]Некоторые исследователи утверждают, что паранепротиворечивое и параполное отрицание не являются отрицаниями в полном смысле этого слова, см., например, [Beziau, 2002].

На основании этих отношений противопоставления Безье вводит определения соответствующих операторов:

Логический оператор # есть

- оператор противоречия[14], е.т.е. для любого утверждения P, P и $\#P$ не могут быть одновременно истинными и не могут быть одновременно ложными;
- оператор противоположности, е.т.е. существует утверждение P, такое, что P и $\#P$ могут быть одновременно ложными и для любого утверждения Q, Q и $\#Q$ не могут быть одновременно истинны;
- оператор подпротивоположности, е.т.е. существует утверждение P, такое, что P и $\#P$ могут быть одновременно истинными и для любого утверждения Q, Q и $\#Q$ не могут быть одновременно ложны.

Далее проводится соответствие между логическими операторами (определенными на основе аристотелевских понятий противопоставления) и тремя типами отрицаний: *классическое* отрицание соответствует оператору противоречия, *собственно параполное* отрицание — оператору противоположности и *собственно паранепротиворечивое* отрицание — оператору подпротивоположности.

Как указывает А.С. Ахманов, Аристотель в своей книге «Об истолковании» определяет разные смыслы отрицания [Ахманов, 2011, с. 146]. Когда отрицание точно соответствует утверждению, устанавливается подлинное противоречие, здесь речь идет о классическом отрицании и в этом случае и *закон исключенного третьего*, и *закон непротиворечия* имеют место и «восполняют» друг друга. «Но если отрицание соответствует утверждению не точно, то или оба закона теряют свое значение, или действует лишь один закон противоречия» [Там же]. В этом смысле неточное соответствие отрицания утверждению приводит к понятиям параполного и паранепротиворечивого отрицания.

Модальная интерпретация отрицания

Ж.-И. Безьё указывает на особое значение модальной интерпретации паранепротиворечивого и параполного отрицания. Так, например, он пишет: «Модальная интерпретация паранепротиворечивого отрицания очень интересна с точки зрения интуитивного понимания паранепротиворечивости и является хорошей основой для применения паранепротиворечивой логики к естественному языку, лингвистике и вычислениям» [Beziau, 2005, p. 8].

[14] Оператор, формирующий противоречие.

В [Lenzen, 1998, p. 216] приведено определение строгого отрицания[15] через модальность «необходимость» и классическое отрицание.

$\sim_s p := \Box\neg p.$

Оператор необходимости удовлетворяет аксиоме $\Box p \supset p$, тогда, учитывая вышеприведенное определение, имеем, что $\Box\neg p$ (отрицание с необходимостью, сильное отрицание) влечет $\neg p$ (обычное отрицание), но не наоборот. В этом смысле сильно отрицаемая формула сильнее, чем классически отрицаемая формула. Поэтому сильное отрицание, как указывает Ленцен, в общем случае не удовлетворяет закону исключенного третьего. Аналогичная ситуация с законом снятия двойного отрицания, который также не имеет места в общем случае, т.е. $\sim_s\sim_s p \nvdash p$ или $\Box\neg\Box\neg p \nvdash p$ ($\Box\Diamond p \nvdash p$) [Lenzen, 1998, p. 216]. Как отмечает Ленцен, в противном случае, если модальная система в качестве теоремы содержит формулу ($\Box\Diamond p \supset p$), то доказуема формула ($\Diamond p \supset \Box p$). В этом смысле сильное отрицание по свойствам схоже с интуиционистским.

В то же время этот результат нельзя распространять на любое параполное отрицание, поскольку несложно подобрать такое отрицание, когда закон исключенного третьего не имеет места, а закон снятия двойного отрицания место имеет. Например, такая ситуация имеет место в трехзначной параполной логике $\mathbf{I}^2$ [Marcos, 2005b, p. 66].

Ленцен отдельно изучает также и аналог паранепротиворечивого отрицания — слабое отрицание: $\sim_w p := \neg\Diamond p$.

Ж.-И. Безье исследует паранепротиворечивое и параполное отрицания как модальности, рассматривая модальную версию логического квадрата, так называемый квадрат модальностей, который можно найти, например, в статье Лукасевича [Łukasiewicz, 1953]. Квадрат модальностей имеет следующие четыре вершины: $\Box$, $\Diamond$, $\neg\Box$ и $\neg\Diamond$.

Модальность $\neg\Diamond$, невозможность, рассматривается как параполное отрицание, интуиционистский вариант которого является частным случаем. Это связано с результатом К. Гёделя о возможности перевода интуиционистской логики в модальную логику S4 [Beziau, 2005, p. 8].

Классическое отрицание необходимости имеет паранепротиворечивый характер, т.е. модальность $\neg\Box$ рассматривается как паранепротиворечивое отрицание.

Таким образом, Ж.-И. Безье устанавливает связь между отрицаниями и модальностями: невозможность — параполное отрицание; ненеобходимость — паранепротиворечивое, — и указывает на возможность

[15]Нами приведено отпределение строгого отрицания на стр. 115.

изучения и уточнения свойств паранепротиворечивого и параполного отрицания в рамках модальной логики.

Заключение

В предложенном обзоре рассмотрены различные определения параполноты логических систем. Как и в случае с определением паранепротиворечивости, формализация основного условия параполноты — требования наличия в логической системе формул, таких, что сами эти формулы и их отрицания одновременно ложны, — может быть осуществлена различными способами. В определениях параполноты очевидным образом прослеживается дуальность параполных логик и логик паранепротиворечивых. Приведены условия эквивалентности некоторых определений. А также рассмотрены вопросы, связанные с отрицанием в параполных логиках, в т.ч. вопрос модальной интерепретации отрицаний в паралогиках.

Литература

Ахманов, 2011 – *Ахманов А.С.* Логическое учение Аристотеля. 3-е изд. М.: Едиториал УРСС, 2011.

Девяткин, 2016 – *Девяткин Л.Ю.* Неклассические модификации многозначных матриц классической логики. Часть I // Логические исследования. 2016. Т. 22. № 2. С. 27–58.

Девяткин, 2019 – *Девяткин Л.Ю.* О подлинно паранепротиворечивых и подлинно параполных многозначных логиках // Логические исследования. 2019. Т. 25. № 2. С. 26–45.

Девяткин и др., 2007 – *Девяткин Л.Ю., Карпенко А.С., Попов В.М.* Трехзначные характеристические матрицы классической пропозициональной логики // Труды научно-исследовательского семинара Логического центра Института философии РАН. Вып. XVIII. М.: ИФ РАН, 2007. С. 50–62.

Д'Оттавиано, Гомес, 2018 – *Д'Оттавиано И.М.Л., Гомес Э.Л.* На заре reductio ad absurdum в ранней античной логике // Современная логика: основания, предмет и перспективы развития. М., 2018. С. 187–229.

Томова, 2022 – *Томова Н.Е.* К вопросу о критерии паранепротиворечивости логик // Логические иследедования / Logical Investigations. 2022. Т. 28. № 2. С. 77–95.

Batens et al., 1999 – *Batens D., De Clercq K., Kurtonina N.* Embedding and interpolation for some paralogics. The propositional case // Rep. Math. Log. 1999. Vol. 33. P. 29–44.

Béziau, 2000 – *Béziau J.-Y.* What is paraconsistent logic? // Frontiers of Paraconsistent Logic. Batens D. et al. (eds.). Research Studies Press, Baldock, 2000. P. 95–111.

Beziau, 2002 – *Beziau J.-Y.* Are paraconsistent negations negations? // Paraconsistency: The Logical Way to the Inconsistent. W.A. Carnielli et al. (eds.). New York, 2002.

Beziau, 2003 – *Beziau J.-Y.* New light on the square of oppositions and its nameless corner // Логические исследования. 2003. Т. 10. С. 218–232.

Beziau, 2005 – *Beziau J.-Y.* Paraconsistent logic from a modal viewpoint // Journal of Applied Logic. 2005. Vol. 3. P. 7–14.

Béziau, 2016 – *Béziau J.-Y.* Two Genuine 3-Valued Paraconsistent Logics // Akama S. (ed.). Towards Paraconsistent Engineering. Intelligent Systems Reference Library. Vol. 110. Cham: Springer, 2016. P. 35–47.

Caret, 2017 – *Caret C.* Hybridized Paracomplete and Paraconsistent Logics // The Australasian Journal of Logic. 2017. Vol. 14. № 1. P. 281–325.

Carnielli et al., 2020 – *Carnielli W.A., Coniglio M.E., Rodrigues A.* Recovery operators, paraconsistency and duality // Logic Journal of the IGPL. 2020. Vol. 28. № 5. P. 624–656.

Ciuciura, 2015 – *Ciuciura J.* A Weakly-Intuitionistic Logic I1 // Logical Investigations. 2015. Vol. 21. No. 2. P. 53–60.

Ciuciura, 2019 – *Ciuciura J.* Paraconsistency and Paracompleteness // Logical Investigations. 2019. Vol. 25. № 2. P. 46–60.

D'Ottaviano, da Costa, 1970 – *D'Ottaviano I.M.L., da Costa N.C.A.* Sur un problème de Jaśkowski // Comptes Rendus de l'Académie de Sciences de Paris. Ser. A. 1970. Vol. 270. P. 1349–1353.

D'Ottaviano, Gomes, 2020 – *D'Ottaviano I.M.L., Gomes E.L.* Baptizing Paraconsistent Logics: The Unique Touch of Miró Quesada // South American Journal of Logic. 2020. Vol. 6. № 2. P. 249–269.

Hernández-Tello et al., 2020 – *Hernández-Tello A., Borja-Macias V., Coniglio M.E.* Paracomplete Logics Dual to the Genuine Paraconsistent Logics: The Three-valued Case // Electronic Notes in Theoretical Computer Science. 2020. Vol. 354. P. 61–74.

Heyting, 1930 – *Heyting A.* Die formalen Regeln der intuitionistischen Logik // Sitzungsberichte der Preussischen Akademie der Wissenschaften zu Berlin. 1930. P. 42–56. (Англ. пер. в: Mancosu P. From Brouwer to Hilbert. The Debate on the Foundations of Mathematics in the 1920s. Oxford University Press, 1998).

Hyde, 2008 – *Hyde D.* Vagueness, logic and ontology. Hampshire: Ashgate, 2008.

Lenzen, 1998 – *Lenzen W.* Necessary Conditions for Negation-Operators (with Particular Applications to Paraconsistent Negation) // *Besnard P., Hunter A.* (eds.). Reasoning with Actual and Potential Contradictions. Handbook of Defeasible Reasoning and Uncertainty Management Systems. Vol. 2. Dordrecht: Springer, 1998. P. 211–239.

Lewin, Mikenberg, 2006 – *Lewin R.A., Mikenberg I.F.* Literal-paraconsistent and literal-paracomplete matrices // Math. Log. Quart. 2006. Vol. 52. No. 5. P. 478–493.

Loparić, da Costa, 1984 – *Loparić A., da Costa N.C.A.* Paracomplete logics which are dual to the paraconsistent logics L3A and L3B // Logique et Analyse. 1984. Vol. 106. P. 119–131.

Łukasiewicz, 1953 – *Łukasiewicz J.* A system of modal logic // J. Comput. Systems. 1953. Vol. 1. P. 111–149.

Marcos, 2005a – *Marcos J.* Nearly every normal modal logic is paranormal // Logique et Analyse. Vol. 48. № 189/192. P. 279–300.

Marcos, 2005b – Marcos J. On a Problem of da Costa // Essays on the Foundations of Mathematics and Logic / Ed. by G. Sica. Monza: Polimetrica, 2005. P. 39–55.

Middelburg, 2021 – *Middelburg C.A.* On the Strongest Three-Valued Paraconsistent Logic Contained in Classical Logic and Its Dual // Journal of Logic and Computation. 2021. Vol. 31. Is. 2. P. 597–611.

Petrukhin, 2018 – *Petrukhin Y.* Generalized Correspondence Analysis for Three-Valued Logics // Logica Universalis. 2018. Vol. 12. № 3–4. P. 423–460.

Priest, 1979 – *Priest G.* The logic of paradox // Journal of Philosophical Logic. 1979. Vol. 8. P. 219–241.

Rosser, Turquette, 1952 – *Rosser J.B., Turquette A.R.* Many-Valued logics. Amsterdam: North-Holland, 1952. 124 p.

Sette, Carnielli, 1995 – *Sette A.M., Carnielli W.A.* Maximal Weakly-Intuitionistic Logics // Studia Logica. 1995. Vol. 55. P. 181–203.

Shoesmith, Smiley, 1978 – *Shoesmith D.J., Smiley T.J.* Multiple-Conclusion Logic. Cambridge University Press, 1978. 409 p.

Smolenov, 1998 – *Smolenov H.* Paraconsistency, Paracompleteness and Intentional Contradictions // The Journal of Non-Classical Logic. 1997. Vol. 4. № 1. P. 6–35.

Natalya E. Tomova

On the question of the criteria for the paracompleteness of logics

Natalya E. Tomova
Institute of Philosophy, Russian Academy of Sciences,
12/1 Goncharnaya Str., Moscow, 109240, Russian Federation.
E-mail: `natalya-tomova@yandex.ru`

Abstract: The paper discusses some aspects related to the definition of a paracomplete logics. There are various ways to formalize the basic condition of paracompleteness — the requirement of the presence in the logical system of such formulas that these formulas themselves and their negations are false. The corresponding definitions of the paracompleteness are given. It is indicated in which cases these definitions may be equivalent. The conditions of equivalence of the law of excluded middle $\varphi \vee \neg\varphi$, the law of Clavius $(\neg\varphi \to \varphi) \to \varphi$ and its special case $(\varphi \to \neg\varphi) \to \neg\varphi$ are considered. The paper deals with issues related to the issues of the paracomplete negation, as well as its modal interpretation.

Keywords: paracompleteness, the law of Clavius, the law of excluded middle, implosive consequence relation

For citation: Tomova N.E. “K voprosu o kriterii parapolnoty logik” [On the question of the criteria for the paracompleteness of logics], *Logicheskie Issledovaniya / Logical Investigations*, 2023, Vol. 29, No. 2, pp. 104–124. DOI: 10.21146/2074-1472-2023-29-2-104-124 (In Russian)

References

Akhmanov, 2011 – Akhmanov, A.S. “Logicheskoe uchenie Aristotelya” [The logical teaching of Aristotle]. 3-e izd. Moscow: Editorial URSS, 2011.

Batens et al., 1999 – Batens, D., De Clercq, K., Kurtonina, N. “Embedding and interpolation for some paralogics. The propositional case”, *Rep. Math. Log.*, 1999, Vol. 33, pp. 29–44.

Béziau, 2000 – Béziau, J.-Y. “What is paraconsistent logic?”, *Frontiers of Paraconsistent Logic*, ed. by Batens D. et al. Research Studies Press, Baldock, 2000, pp. 95–111.

Beziau, 2002 – Beziau, J.-Y. “Are paraconsistent negations negations?”, in: *Paraconsistency: The Logical Way to the Inconsistent*, W.A. Carnielli et al. (eds.). New York, 2002.

Beziau, 2003 – Beziau, J.-Y. “New light on the square of oppositions and its nameless corner”, *Logical Investigations*, 2003, Vol. 10, pp. 218–232.

Beziau, 2005 – Beziau, J.-Y. “Paraconsistent logic from a modal viewpoint”, *Journal of Applied Logic*, 2005, Vol. 3, pp. 7–14.

Béziau, 2016 – Béziau, J.-Y. "Two Genuine 3-Valued Paraconsistent Logics", in: Akama S. (ed.). *Towards Paraconsistent Engineering. Intelligent Systems Reference Library. Vol. 110.* Cham: Springer, 2016, pp. 35–47.

Caret, 2017 – Caret, C. "Hybridized Paracomplete and Paraconsistent Logics", *The Australasian Journal of Logic*, 2017, Vol. 14, No. 1, pp. 281–325.

Carnielli et al., 2020 – Carnielli, W.A., Coniglio, M.E., Rodrigues, A. "Recovery operators, paraconsistency and duality", *Logic Journal of the IGPL*, 2020, Vol. 28, No. 5, pp. 624–656.

Ciuciura, 2015 – Ciuciura, J. "A Weakly-Intuitionistic Logic I1", *Logical Investigations*, 2015, Vol. 21, No. 2, pp. 53–60.

Ciuciura, 2019 – Ciuciura, J. "Paraconsistency and Paracompleteness", *Logical Investigations*, 2019, Vol. 25, No. 2, pp. 46–60.

Devyatkin, 2016 – Devyatkin, L.Yu. "Neklassicheskie modifikatsii mnogoznachnykh matrits klassicheskoi logiki. Chast' I" [Non-classical Modifications of Many-valued Matrices of the Classical Propositional Logic. Part I], *Logical Investigations*, 2016, Vol. 22, No. 2, pp. 27–58.

Devyatkin, 2019 – Devyatkin, L.Yu. "O podlinno paraneprotivorechivykh i podlinno parapolnykh mnogoznachnykh logikakh" [On genuine paraconsistent and genuine paracomplete many-valued logics], *Logical Investigations*, 2019, Vol. 25, No. 2, pp. 26–45.

Devyatkin et al., 2007 – Devyatkin, L.Yu., Karpenko, A.S., Popov, V.M. "Trekhznachnye kharakteristicheskie matritsy klassicheskoi propozitsional'noi logiki" [Three-valued characteristic matrices of classical propositional logic], *Proceedings of the Scientific research seminar of the Logic Center of the Institute of Philosophy of the Russian Academy of Sciences*, Vol. XVIII. Moscow, IPh RAN, 2007, pp. 50–62.

D'Ottaviano, da Costa, 1970 – D'Ottaviano, I.M.L, da Costa, N.C.A. "Sur un problème de Jaśkowski", *Comptes Rendus de l'Académie de Sciences de Paris. Ser. A.*, 1970, Vol. 270, pp. 1349–1353.

D'Ottaviano, Gomes, 2018 – D'Ottaviano, I.M.L, Gomes, E.L. "Na zare reductio ad absurdum v rannei antichnoi logike" [At the dawn of reduction ad absurdum in early ancient logic], in: *Modern logic: foundations, subject and prospects of development.* Moscow, 2018, pp. 187–229.

D'Ottaviano, Gomes, 2020 – D'Ottaviano, I.M.L., Gomes, E.L. "Baptizing Paraconsistent Logics: The Unique Touch of Miró Quesada", *South American Journal of Logic*, 2020, Vol. 6, No. 2, pp. 249–269.

Hernández-Tello et al., 2020 – Hernández-Tello, A., Borja-Mac1as, V., Coniglio, M.E. "Paracomplete Logics Dual to the Genuine Paraconsistent Logics: The Three-valued Case", *Electronic Notes in Theoretical Computer Science*, 2020, Vol. 354, pp. 61–74.

Heyting, 1930 – Heyting, A. "Die formalen Regeln der intuitionistischen Logik", in: *Sitzungsberichte der Preussischen Akademie der Wissenschaften zu Berlin.* 1930, pp. 42–56. (Engl. transl. in: Mancosu, P. *From Brouwer to Hilbert. The Debate on the Foundations of Mathematics in the 1920s.* Oxford University Press, 1998.)

Hyde, 2008 – Hyde, D. *Vagueness, logic and ontology.* Hampshire: Ashgate, 2008.

Lenzen, 1998 – Lenzen, W. “Necessary Conditions for Negation-Operators (with Particular Applications to Paraconsistent Negation)”, in: Besnard P., Hunter A. (eds.), *Reasoning with Actual and Potential Contradictions. Handbook of Defeasible Reasoning and Uncertainty Management Systems. Vol. 2.* Dordrecht: Springer, 1998, pp. 211–239.

Lewin, Mikenberg, 2006 – Lewin, R.A., Mikenberg, I.F. “Literal-paraconsistent and literal-paracomplete matrices”, *Math. Log. Quart.*, 2006, Vol. 52, No. 5, pp. 478–493.

Loparić, da Costa, 1984 – Loparić, A., da Costa, N.C.A. “Paracomplete logics which are dual to the paraconsistent logics L3A and L3B”, *Logique et Analyse*, 1984, Vol. 106, pp. 119–131.

Łukasiewicz, 1953 – Łukasiewicz, J. “A system of modal logic”, *J. Comput. Systems*, 1953, Vol. 1, pp. 111–149.

Marcos, 2005a – Marcos, J. “Nearly every normal modal logic is paranormal”, *Logique et Analyse*, 2005, Vol. 48, No. 189/192, pp. 279–300.

Marcos, 2005b – Marcos, J. “On a Problem of da Costa”, in: *Essays on the Foundations of Mathematics and Logic*, ed. by G. Sica. Monza: Polimetrica, 2005, pp. 39–55.

Middelburg, 2021 – Middelburg, C.A. “On the Strongest Three-Valued Paraconsistent Logic Contained in Classical Logic and Its Dual”, *Journal of Logic and Computation*, 2021, Vol. 31, Is. 2, pp. 597–611.

Petrukhin, 2018 – Petrukhin, Y. “Generalized Correspondence Analysis for Three-Valued Logics”, *Logica Universalis*, 2018, Vol. 12, No. 3–4, pp. 423–460.

Priest, 1979 – Priest, G. “The logic of paradox”, *Journal of Philosophical Logic*, 1979, Vol. 8, pp. 219–241.

Rosser, Turquette, 1952 – Rosser, J.B., Turquette, A.R. *Many-Valued logics.* Amsterdam: North-Holland, 1952. 124 pp.

Sette, Carnielli, 1995 – Sette, A.M., Carnielli, W.A. “Maximal Weakly-Intuitionistic Logics”, *Studia Logica*, 1995, Vol. 55, pp. 181–203.

Shoesmith, Smiley, 1978 – Shoesmith, D.J., Smiley, T.J. *Multiple-Conclusion Logic.* Cambridge University Press, 1978. 409 p.

Smolenov, 1998 – Smolenov, H. “Paraconsistency, Paracompleteness and Intentional Contradictions”, *The Journal of Non-Classical Logic*, 1997, Vol. 4, No. 1, pp. 6–35.

Tomova, 2022 – Tomova, N.E. “K voprosu o kriterii paraneprotivorechivosti logik” [On the question of the criteria for the paraconsistency of logics], *Logical Investigations*, 2022, Vol. 28, No. 2, pp. 77–95.