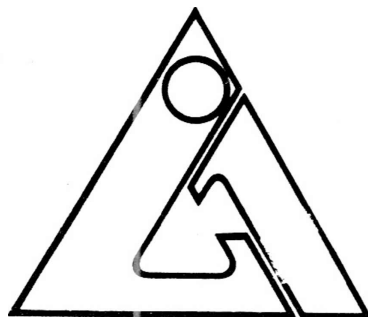


РОССИЙСКАЯ АКАДЕМИЯ НАУК
ИНСТИТУТ ФИЛОСОФИИ



LOGICAL INVESTIGATIONS

Vol. 1



MOSCOW "NAUKA" 1993

ЛОГИЧЕСКИЕ ИССЛЕДОВАНИЯ

Выпуск 1



МОСКВА "НАУКА" 1993

ББК 87.4
Л 69

Рецензенты:
доктора философских наук
И.А.Акчурин, Л.Б.Баженов, В.А.Бочаров

Редколлегия:
Смирнов В.А. (отв. редактор),
Анисов А.М., Арутюнова Н.Д., Божанишвили М.Н., Быстров П.И.,
Войшвилло Е.К., Герасимова И.А., Карпенко А.С.,
Ненейвода Н.Н., Успенский В.А., Финн В.К.

Редактор издательства Е.А.Жукова

*Федеральная целевая программа
книгоиздания России*

Л69 **Логические исследования. Вып. 1. – М.: Наука, 1993 г. – 248 с.**
ISBN 5-02-008103-5

Основное содержание книги составляют результаты совместных российско-польских исследований по современной логике. Рассматриваются различные, как теоретические, так и прикладные аспекты неклассических логических исчислений, предлагаются новые нестандартные синтаксические и семантические методы анализа формальных языков. Особое внимание уделяется логическим основаниям теоретического программирования, методам представления знания, автоматического образования логических баз, поиска доказательства. Значительное место занимают исследования логического вывода во временных, модальных и релевантных контекстах.

Для логиков, лингвистов, специалистов в области компьютерной техники и искусственного интеллекта.

0301060000–126
Л—042(02)–93 11–1993 1 полугодие

ББК 87.4

ISBN 5-02-008103-5

© Институт философии РАН, 1993
© Российская академия наук, 1993

От редколлегии

Центр логических исследований Института философии Российской Академии Наук и Общественный институт логики, когнитологии и развития личности начинают публиковать регулярную серию "Логические исследования". Сектор логики ИФАН с момента своего образования в 1960 году выпустил 20 коллективных работ по логике и ее приложениям, в том числе: "Философские вопросы современной формальной логики"(1962), "Проблемы логики научного познания"(1964), "Логическая семантика и модальная логика"(1967), "Неклассическая логика"(1970), "Философия и логика"(1974), "Методы логического анализа"(1977), "Логический вывод"(1979), "Модальные и интенциональные логики и их применение к проблемам науки"(1984), "Синтаксические и семантические исследования неэкстенциональных логик"(1989), "Исследования по неклассическим логикам"(1989).

Координации исследований способствовал постоянно действующий научно-исследовательский семинар по логике (руководитель профессор В.А.Смирнов). Начиная с 1982 года регулярно публикуются ротапринтным способом труды семинара; к настоящему времени вышло 9 выпусков. В работе семинара и изданиях сектора логики принимали активное участие ведущие ученые нашей страны и зарубежных стран.

На современном этапе развитие логики связано, с одной стороны, с глубокими эпистемологическими и онтологическими проблемами, а с другой - с применением логики к компьютерным наукам. Это единый процесс. Сюда следовало бы добавить работы на стыке логики и лингвистики.

Целью издания "Логических исследований" является публикация оригинальных работ в области символической и философской логики и их приложений к методологии науки, компьютерным наукам, лингвистики, когнитологии.

Учитывая, что логика является необходимым компонентом образования, в том числе и гуманитарного, мы надеемся, что систематический выпуск "Логических исследований" будет способствовать развитию научной философии и внедрению рациональных форм аргументации, столь необходимых в наше время.

В первый выпуск вошли статьи, написанные на основе докладов, сделанных на 3-ей польско-советской конференции по логике (Москва, 1990 г.)

ПРИБЛИЖЕННЫЕ МНОЖЕСТВА - ОСНОВНЫЕ ПОНЯТИЯ*

Введение

Понятие приближенного множества было предложено автором в [16] в качестве математического инструмента для анализа расплывчатых и неточных данных, инструмента, отличного от теории нечетких множеств [27]. Представляется, что такой подход может иметь значение во многих областях, связанных с использованием искусственного интеллекта, например: в машинном обучении, индуктивном выводе, распознавании образов, анализе расплывчатых данных, системах поддержки принятия решения и др.

Исходным пунктом настоящего обсуждения проблемы является то обстоятельство, что во многих приложениях математических теорий нам дано некое множество объектов (состояний, процессов, обстоятельств и т.д.), но мы не можем различить их доступными нам средствами измерения, наблюдения или описания. Иными словами, недостаток знания может быть серьезным препятствием при рассуждениях об объектах, явлениях, процессах и т.д.

Таким образом, наша основная предпосылка состоит в том, что *расплывчатость* или *неточность* ведет к *неразличимости*, формально репрезентирующей наш недостаток знаний и являющейся основополагающей идеей философии приближенных множеств. Это отношение используется для определения основных операций на множествах, нижней и верхней аппроксимаций множества; имеется в виду, что эти последние используются вместо точных понятий (мы, как обычно, отождествляем понятия с подмножествами некоторого универсума).

Мы трактуем любое множество данных как особого рода таблицу решений, а нижние и верхние аппроксимации используются для анализа свойств таблиц решений. Например, таблица принятия решений может содержать данные о пациентах, страдающих определенной болезнью, а симптомы, наличествующие у пациентов, рассматриваются как кондициональные атрибуты, и, например, состояние здоровья пациента можно рассматривать как атрибут, относительно которого принимается решение. Тогда основной вопрос состоит в том, можно ли по симптомам пациента определить состояние его здоровья. Иными словами, нас интересуют зависимости между атрибутами в таблице решений.

Концепция приближенных множеств представляется очень хорошо приспособленной для формального анализа вопросов такого рода.

В настоящее время несколько компьютерных систем анализа

*Пер. с англ. А.Л.Блинова.

данных реализованы и успешно применяются в промышленности, медицине, социологии, психологии и других областях: [2,9,20]. В этой статье мы даем основные определения и свойства приближенных множеств и таблиц решений, необходимые для этих приложений.

С приближенными множествами связаны и другие области исследований. Соответствующая литература перечислена в конце статьи.

1. Приближенные множества

1.1. Аппроксимационное пространство. Исходный пункт нашего анализа - понятие аппроксимационного пространства. *Аппроксимационное пространство* есть пара $A=(U,R)$, где U - множество, называемое *универсумом*, а R - бинарное отношение на U , называемое *отношением неразличимости*.

Отношение неразличимости должно, конечно, быть рефлексивным и симметричным, т.е. $R(x,x)$, и $R(x,y)$ влечет $R(y,x)$ для каждого $x,y \in U$. Стало быть, в общем случае R есть отношение типа толерантности. Мы будем предполагать, что отношение неразличимости также и транзитивно, т.е. из $R(x,y)$ и $R(y,z)$ следует $R(x,z)$ для всех $x,y,z \in U$. Таким образом, мы предполагаем, что R - отношение типа эквивалентности. Это допущение мотивировано многими практическими приложениями вводимого нами понятия.

Если R - некоторое отношение неразличимости, то символом R^* обозначим семейство всех классов эквивалентности отношения R (т.е. разбиение, соответствующее R), классы эквивалентности отношения R называются *R -элементарными множествами* пространства A (или *блоками* семейства R^*). Если понятно, какое R имеется в виду, R -элементарные множества будут называться элементарными множествами в A . R -элементарное множество, содержащее элемент $x \in U$, будет обозначаться $[x]_R$.

Если $R(x,y)$, то мы говорим, что x и y *R -неразличимы*.

Каждое объединение некоторых R -элементарных множеств будем называть *R -различимым множеством* и обозначать $DIS(R)$, если множество не является R -различимым, будем говорить, что оно *R -неразличимое*, или *приближенное* относительно R или приближенное в аппроксимационном пространстве $A=(U,R)$. Мы постулируем, что пустое множество $\emptyset$ R -различно для любого R . Очевидно, что семейство всех R -различимых множеств образует булеву алгебру, т.е. оно замкнуто относительно пересечения, объединения и дополнения множеств. А вот семейство всех R -неразличимых множеств не является булевой алгеброй, потому что оно не замкнуто относительно теоретико-множественных объединения и пересечения.

Если $A=(U,R)$ и $A'=(U',R')$ - два аппроксимационных пространства и $U' \subseteq U$, $R' \subseteq R$, мы говорим, что A' - *субаппроксимационное пространство* пространства A .

Если $B=(U,Q)$ - субаппроксимационное пространство прост-

пространства $A=(U,R)$, мы говорим, что B мельче, чем A , а A крупнее, чем B .

Если все R -элементарные множества состоят из одного элемента каждое (R - отношение равенства), то соответствующее аппроксимационное пространство $A=(U,R)$ будем называть дискретным.

Разумеется, в дискретном аппроксимационном множестве каждое подмножество универсума U R -различно.

З а м е ч а н и е. Иногда можно считать, что отношение неразличимости репрезентирует недостаток наших знаний об элементах универсума. Чем больше мы знаем, тем тоньше соответствующее аппроксимационное пространство, и следовательно, мы способны точнее различать элементы универсума.

1.2. Аппроксимация множеств. В излагаемом подходе основную роль играет понятие аппроксимации одного множества другим.

Предположим, нам дано аппроксимационное пространство $A=(U,R)$ и подмножество $X \subseteq U$. Определим два множества

$$\underline{R}X = \{x \in U : [x]_R \subseteq X\}$$

и

$$\bar{R}X = \{x \in U : [x]_R \cap X \neq \emptyset\},$$

называемые R -нижней и R -верхней аппроксимациями множества X соответственно.

Множество $BN_R(X) = \bar{R}X - \underline{R}X$ будем называть R -границей множества X , или R -пограничной областью множества X .

Будем также использовать следующие обозначения:

$POS_R(X) = \underline{R}X - R$ - R -положительная область множества X .

$NEG_R(X) = U - \bar{R}X$ - R -отрицательная область множества X .

Положительная область $POS_R(X)$ и отрицательная область $NEG_R(X)$ обозначают множества всех тех элементов универсума U , которые в аппроксимальном пространстве $A=(U,R)$ можно в собственном смысле слова отнести либо к X , либо к $-X$, соответственно.

$$\text{Число } \alpha_R(X) = \frac{\text{card } \underline{R}X}{\text{card } \bar{R}X}$$

будем называть R -точностью множества X , а число

$$\rho_R(X) = 1 - \alpha_R(X)$$

- R -приближенностью множества X .

Конечно, $0 \leq \alpha_R(X)$, $\rho_R(X) \leq 1$, для любого R и $X \subseteq U$.

Нетрудно доказать следующее свойство.

УТВЕРЖДЕНИЕ 1.1.

а) X R -различно т.т.т. $\underline{R}X = \bar{R}X$

б) X приближенно относительно R т.т.т. $\underline{R}X \neq \bar{R}X$.

Заметим также, что $\underline{R}X$ - максимальное R -различное множество, содержащееся в X , а $\bar{R}X$ - минимальное R -различное множество, содержащее X .

Отметим, что понятие аппроксимации множества приводит к следующему определению двух отношений принадлежности $\in_R$ и $\bar{\in}_R$:

$$x \in_R X \quad \text{т.т.т.} \quad x \in \underline{R}X$$

$$x \bar{\in}_R X \quad \text{т.т.т.} \quad x \in \bar{R}X,$$

где $\in_R$ читается " x наверняка принадлежит множеству X относительно R " и $\bar{\in}_R$ - " x возможно принадлежит множеству X относительно R ".

1.3. Аппроксимации семейств множеств. Далее нам понадобится также понятие аппроксимации семейств множеств.

Пусть $F = \{X_1, X_2, \dots, X_n\}$ - семейство подмножества универсума U и $A = (U, R)$ - аппроксимационное пространство.

R -нижняя и R -верхняя аппроксимация семейства F есть семейства:

$$\underline{R}F = \{\underline{R}X_1, \underline{R}X_2, \dots, \underline{R}X_n\}$$

$$\bar{R}F = \{\bar{R}X_1, \bar{R}X_2, \dots, \bar{R}X_n\},$$

соответственно.

Для семейства множеств F определяем:

а) R -положительная область семейства F

$$POS_R(F) = \bigcup_{X \in F} \underline{R}X$$

б) R -отрицательная область семейства F

$$NEG_R(F) = U - \bigcup_{X \in F} \bar{R}X$$

в) R -пограничная область семейства F

$$BN_R(F) = \bigcup_{X \in F} \bar{R}X - \bigcup_{X \in F} \underline{R}X.$$

Число

$$\gamma_R(F) = \frac{\text{card } POS_R(F)}{\text{card } (U)}$$

будем называть *качеством* аппроксимации семейства F отношением

$$R, \text{ а число } \beta_R(F) = \frac{\text{card } POS_R(F)}{\sum_{X \in F} \text{card } \underline{R}X}$$

- *точностью* аппроксимации семейства F отношением R .

1.4. Свойства аппроксимации. Каждое аппроксимационное пространство однозначно задает некоторое топологическое пространство $T_A = (U, DIS(R))$, где $DIS(R)$ - семейство всех открытых и замкнутых множеств в T_A (топология для U), а R^* - база для T_A .

R -нижняя и R -верхняя аппроксимации множества X в A суть операции взятия внутреннейности и замыкания в топологическом пространстве T_A , соответственно; поэтому выполняются следующие свойства:

$$A1) \underline{R}X \subseteq X \subseteq \bar{R}X$$

$$A2) \underline{R}\emptyset = \bar{R}\emptyset = \emptyset; \underline{R}U = \bar{R}U = U$$

$$A3) \underline{R}(X \cup Y) \supseteq \underline{R}X \cup \underline{R}Y$$

$$A4) \bar{R}(X \cup Y) = \bar{R}X \cup \bar{R}Y$$

$$A5) \underline{R}(X \cap Y) = \underline{R}X \cap \underline{R}Y$$

$$A6) \bar{R}(X \cap Y) \subseteq \bar{R}X \cap \bar{R}Y$$

$$A7) \underline{R}(-X) = -\bar{R}X$$

$$A8) \bar{R}(-X) = -\underline{R}X$$

Кроме того, в топологическом пространстве T_A выполняется

$$A9) \underline{R}\underline{R}X = \bar{R}\underline{R}X = \underline{R}X$$

$$A10) \bar{R}\bar{R}X = \underline{R}\bar{R}X = \bar{R}X$$

1.5. Классификация приближенных множеств. С топологической точки зрения приближенные множества можно классифицировать следующим образом:

а) Если $\underline{R}X \neq \emptyset$ и $\bar{R}X \neq U$,
то X *приближенно R -различно*.

б) Если $\underline{R}X = \emptyset$ и $\bar{R}X \neq U$,
то X *внутренне R -неразлично*.

в) Если $\underline{R}X \neq \emptyset$ и $\bar{R}X = U$,
то X *внешне R -неразлично*.

г) Если $\underline{R}X = \emptyset$ и $\bar{R}X = U$,
то X *тотально R -неразлично*.

Заметьте, что если X R -различно (приближенно R -неразлично, тотально R -неразлично), то этим же свойством обладает и $-X$; если X внешне (внутренне) R -неразлично, то $-X$ внутренне (внешне) R -неразлично.

Интуитивное значение этой классификации таково:

Если множество X *приближенно R -различно*, это значит, что мы в состоянии решить для некоторых элементов универсума U , принадлежат ли они к X или к $-X$.

Если X *внутренне R -неразлично*, это значит, что мы в состоянии решить для некоторых элементов универсума U , принадлежат ли они к $-X$, но ни для одного элемента из U мы не в состоянии решить, принадлежит ли он к X .

Если X *внешне R -неразлично*, это значит, что мы в состоянии решить для некоторых элементов из U , принадлежат ли они к X , но ни для одного элемента из U мы не в состоянии решить, принадлежит ли он к $-X$.

Если X *тотально R -неразлично*, мы не в состоянии решить ни для одного элемента из U ни того, принадлежит ли он к X , ни того, принадлежит ли он к $-X$.

1.6. Приближенное равенство множеств. Пусть $A = (U, R)$ и $X, Y \subseteq U$. Мы говорим, что

а) Множества X и Y *R -равны снизу* ($X \underline{\sim}_R Y$), если $\underline{R}X = \underline{R}Y$.

б) Множества X и Y *R -равны сверху* ($X \bar{\sim}_R Y$), если $\bar{R}X = \bar{R}Y$.

в) Множества X и Y *R -равны* ($X \approx_R Y$), если $X \underline{\sim}_R Y$ и $X \bar{\sim}_R Y$.

Нетрудно видеть, что $\underline{\sim}_R, \bar{\sim}_R$ и $\approx_R$ — отношения типа эквивалентности для любого отношения неразличимости R . Далее мы будем опускать нижний индекс R , если понятно, какое R подразумевается.

Ниже приведены некоторые элементарные свойства отношений $\sim_R$, $\tilde{\sim}_R$ и $\approx_R$:

УТВЕРЖДЕНИЕ 1.2. Для любого отношения неразличимости имеет место

1. $X \sim Y$ т.т.т. $X \cap Y \sim X \sim Y$
2. $X \sim Y$ т.т.т. $X \cup Y \sim X \sim Y$
3. Если $X \sim X'$ и $Y \sim Y'$, то $X \cup Y \sim X' \cup Y'$
4. Если $X \sim X'$ и $Y \sim Y'$, то $X \cap Y \sim X' \cap Y'$
5. Если $X \sim Y$, то $X \cup Y \sim U$
6. Если $X \sim Y$, то $X \cap Y \sim \emptyset$
7. Если $X \subseteq Y$ и $Y \sim \emptyset$, то $X \sim \emptyset$
8. Если $X \subseteq Y$ и $X \sim U$, то $Y \sim U$
9. $X \sim U$ т.т.т. $\neg X \sim \emptyset$
10. $X \cap Y \sim \emptyset$ т.т.т. $X \sim \emptyset$ или $Y \sim \emptyset$
11. $X \cup Y \sim U$ т.т.т. $X \sim U$ или $Y \sim U$.

УТВЕРЖДЕНИЕ 1.3. Для любого отношения неразличимости

- а) R_X есть пересечение всех $Y \subseteq U$ таких, что $X \sim_R Y$
- б) $\bar{R}_X$ есть объединение всех $Y \subseteq U$ таких, что $X \sim_R Y$.

Множество $X \subseteq U$ R -плотно, если $X \sim_R U$

Множество $X \subseteq U$ R -со-плотно, если $X \sim_R \emptyset$

Множество $X \subseteq U$ R -рассеяно, если X и R -плотно и R -со-плотно.

Очевиден следующий факт:

УТВЕРЖДЕНИЕ 1.4.

1. Если u и X , и Y R -плотны, то $X \sim_R Y$
2. Если u и X , и Y R -со-плотны, то $X \sim_R Y$
3. Если u и X , и Y R -рассеяны, то $X \approx_R Y$.

1.7. Приближенное включение множеств. Пусть $A=(U, R)$ - аппроксимационное пространство и $X, Y \subseteq U$. Будем использовать следующие определения:

- а) Множество X R -содержится снизу в Y ($X \subseteq_R Y$), если $R_X \subseteq R_Y$.
- б) Множество X R -содержится сверху в Y ($X \tilde{\subseteq}_R Y$), если $\bar{R}_X \subseteq R_Y$.
- в) Множество X R -содержится в Y ($X \tilde{\subseteq}_R Y$), если $X \subseteq_R Y$ и $X \tilde{\subseteq}_R Y$.

Нетрудно видеть, что $\subseteq_R$, $\tilde{\subseteq}_R$ и $\tilde{\subseteq}$ - отношения порядка для любого отношения неразличимости R .

Следующие определения могут также оказаться полезными:

Если $X \subseteq_R Y$, то X - нижнее R -подмножество множества Y .

Если $X \tilde{\subseteq}_R Y$, то X - верхнее R -подмножество множества Y .

Если $X \tilde{\subseteq}_R Y$, то X - подмножество множества Y .

Ниже перечисляются простые свойства введенных нами приближенных включений.

УТВЕРЖДЕНИЕ I.5.

- 1) Если $X \subseteq Y$, то $X \subseteq Y$, $X \subseteq Y$ и $X \subseteq Y$
- 2) Если $X \subseteq Y$ и $Y \subseteq X$, то $X = Y$
- 3) Если $X \subseteq Y$ и $Y \subseteq X$, то $X = Y$
- 4) Если $X \subseteq Y$ и $Y \subseteq X$, то $X = Y$
- 5) $X \subseteq Y$ т.т.т. $X \cup Y = Y$
- 6) $X \subseteq Y$ т.т.т. $X \cap Y = X$
- 7) Если $X \subseteq Y$, $X = X'$ и $Y = Y'$, то $X' \subseteq Y'$
- 8) Если $X \subseteq Y$, $X = X'$ и $Y = Y'$, то $X' \subseteq Y'$
- 9) Если $X \subseteq Y$, $X = X'$ и $Y = Y'$, то $X' \subseteq Y'$
- 10) Если $X \subseteq X'$ и $Y \subseteq Y'$, то $X \cup Y \subseteq X' \cup Y'$
- 11) Если $X \subseteq X'$ и $Y \subseteq Y'$, то $X \cap Y \subseteq X' \cap Y'$
- 12) $X \cup Y \subseteq X \cap Y$
- 13) Если $X \subseteq Y$ и $X = Z$, то $Z \subseteq Y$
- 14) Если $X \subseteq Y$ и $X = Z$, то $Z \subseteq Y$
- 15) Если $X \subseteq Y$ и $X = Z$, то $Z \subseteq Y$.

БИБЛИОГРАФИЧЕСКИЕ ЗАМЕЧАНИЯ. Понятие приближенного множества впервые появилось в печати в [16]. Имеется несколько обобщений понятия приближенного множества. Первое принадлежит Вонгу и Зярко [25]; в этой работе приближенные множества связываются с измерением вероятностей. Дюбуа и Прейд в [3] ввели "приближенные нечеткие" множества. Ан предложил в [1] аппроксимацию множеств в степени i ($0 \leq i \leq 1$). Алгебраические свойства приближенных множеств рассматриваются в [6]. Взаимосвязь между нечеткими (см. Заде [27]) и приближенными множествами исследуется в [3], [17] и [26]. Гжимала-Буссе [4] сравнивает приближенные множества с подходом к неточной информации, развиваемым Демистером и Шейфером [23]. Жаковский [28] и Помыкала рассматривают аппроксимационные пространства с отношением толерантности (см. Зиман [29]) вместо эквивалентности.

2. Информационные системы и таблицы решений

2.1. Формальное определение. Здесь мы собираемся показать, как понятие приближенного множества можно использовать в качестве базиса информационных систем и таблиц решений.

Информационная система (и таблица решений) – это, по существу, таблица данных, столбцы которой помечены атрибутами, а строки – объектами (состояниями, процессами и т.д.), и в каждой строке представлена информация о соответствующем объекте (состоянии, процессе и т.д.).

Таблицу данных можно получить в результате измерений, наблюдений, либо она репрезентирует знания эксперта или группы экспертов. Происхождение таблицы данных, с нашей точки зрения, не существенно, и нас будут интересовать лишь математические свойства таких таблиц с формальной точки зрения. На самом деле нас интересуют больше всего таблицы решений, а идея информационной системы введена здесь по чисто математическим мотивам.

Таблицы решений обычно используются как инструмент, помогающий принимать решения в программировании и управлении, но мы здесь имеем в виду использование таблиц решений в гораздо более широком классе приложений, подобно анализу данных, алгоритмам обучения и т.д. Подход к таблицам решений с точки зрения приближенных множеств приводит к новым математическим основаниям теории таблиц решений и позволяет значительно расширить класс приложений этих таблиц.

Информационная система есть упорядоченная четверка

$$S=(U, A, V, f),$$

где U - непустое конечное множество, называемое *универсумом*, A - конечное множество атрибутов, $V = \bigcup_{a \in A} V_a$ - V_a называется *областью атрибута* a ; $f: U \times A \rightarrow V$ - *информационная функция* такая, что $f(x, a) \in V_a$ для любого $a \in A$ и $x \in U$.

Если f - всюду определенная функция, S будем называть *полной*, если же f - частичная функция, то S называется *неполной*. Далее мы будем в основном рассматривать полные информационные системы, если только не будет оговорено противное.

Пусть $x \in U$. Функцию $f_x: A \rightarrow V$ такую, что $f_x(a) = f(x, a)$ для любого $a \in A$ будем называть *информацией на x в S* .

2.2. Отношение неразличимости. В этом разделе мы покажем, как понятия, введенные в предыдущей главе, можно использовать в анализе информационных систем.

Пусть $S=(U, A, V, f)$ - информационная система и пусть $P \subseteq A$. Символом $\tilde{P}$ будем обозначать бинарное отношение на U , определенное следующим образом: $(x, y) \in \tilde{P}$ т.т.т. $f_x(a) = f_y(a)$ для каждого $a \in P$.

Нетрудно видеть, что $\tilde{P}$ - отношение эквивалентности для каждого P . Таким образом, каждое подмножество атрибутов порождает отношение неразличимости в информационной системе. Элементы универсума U , имеющие одинаковые значения атрибутов из P , неразличимы посредством значений атрибутов из P .

Заметим, что $\tilde{P} = \bigcap \tilde{\alpha}$ для каждого $P \subseteq A$.

Определив отношение неразличимости, мы теперь в состоянии использовать понятия нижней и верхней аппроксимаций.

Пусть $P \subseteq A$ и $X \subseteq U$. P -нижняя аппроксимация множества X , обозначенная $\underline{P}X$, и P -верхняя аппроксимация множества X , обозначенная $\overline{P}X$, определяются следующим образом

$$\underline{P}X = \{x \in U : [x]_{\tilde{P}} \subseteq X\}$$

$$\overline{P}X = \{x \in U : [x]_{\tilde{P}} \cap X \neq \emptyset\}.$$

Аналогичным образом граница множества X определяется так: $BN_P(X) = \overline{P}X - \underline{P}X$.

Множество $\underline{P}X$ - это множество всех элементов универсума U , которые можно наверняка отнести к элементам множества X на

основе множества атрибутов P ; $\bar{P}X$ - это множество элементов из U , для которых на основе множества атрибутов P можно говорить о возможности их принадлежности к X . Множество $BN_P(X)$ - это множество элементов, которые на основе множества атрибутов P нельзя с определенностью отнести ни к X , ни к $-X$.

2.3. Зависимость атрибутов. Зависимость атрибутов - фундаментальное теоретическое понятие в нашем подходе.

Пусть $S=(U, A, V, f)$ - таблица решений и пусть $P, Q \subseteq A$.

Мы говорим, что множество атрибутов Q зависит от множества атрибутов P в S (этот факт мы будем обозначать $P \rightarrow_S Q$ или короче: $P \rightarrow Q$), если $\bar{P} \subseteq \bar{Q}$.

Нетрудно с помощью простых вычислений показать следующие свойства.

УТВЕРЖДЕНИЕ 2.1. Следующие условия эквивалентны:

$$1. \bar{P} \subseteq \bar{Q}$$

$$2. P \cup Q = P$$

$$3. POS_P(Q^*) = U$$

Далее, семейство всех классов эквивалентности отношения $\bar{Q}$ будем для простоты обозначать Q^* .

УТВЕРЖДЕНИЕ 2.2.

$$1. P \rightarrow Q \text{ и } P' \supset P, \text{ то } P' \rightarrow Q$$

$$2. P \rightarrow Q \text{ и } Q' \subset Q, \text{ то } P \rightarrow Q'$$

УТВЕРЖДЕНИЕ 2.3.

$$1. \text{Из } P \rightarrow Q \text{ и } Q \rightarrow R \text{ следует } P \rightarrow R$$

$$2. \text{Из } P \rightarrow R \text{ и } Q \rightarrow R \text{ следует } P \cup Q \rightarrow R$$

$$3. \text{Из } P \rightarrow P \cup Q \text{ следует } P \rightarrow R \text{ и } P \rightarrow Q$$

$$4. \text{Из } P \rightarrow Q \text{ и } Q \cup R \rightarrow T \text{ следует } P \cup R \rightarrow T$$

$$5. \text{Из } P \rightarrow Q \text{ и } R \rightarrow T \text{ следует } P \cup R \rightarrow Q \cup T$$

2.4. Частичная зависимость атрибутов. Введенное выше понятие зависимости атрибутов можно обобщить следующим образом.

Пусть $S=(U, A, V, f)$ - информационная система и $P, Q \subseteq A$.

Мы говорим, что множество атрибутов Q зависит в степени k ($0 \leq k \leq 1$) от множества атрибутов P (в S), если $k = f_P(Q^*)$, символически: $P \rightarrow^k Q$.

Если $k=1$, будем говорить, что Q полностью зависит от P (или короче: зависит); если $0 < k < 1$, будем говорить, что Q частично зависит от P , и если $k=0$, будем говорить, что Q полностью не-зависимо от P .

Если $P \rightarrow^1 Q$, будем также писать $P \rightarrow Q$.

Заметим, что если $P \rightarrow^1 Q$, то зависимость совпадает с тем понятием, которое введено в 2.3.

УТВЕРЖДЕНИЕ 2.4.

1. Если $R \rightarrow^k P$ и $Q \rightarrow^l P$, то $R \cup Q \rightarrow^m P$, где $m \geq \max(k, l)$
2. Если $R \cup P \rightarrow^k Q$, то $R \rightarrow^l Q$ и $P \rightarrow^m Q$, где $l, m \leq k$.
3. Если $R \rightarrow^k Q$ и $R \rightarrow^l P$, то $R \rightarrow^m Q \cup P$, где $m \leq \min(k, l)$
4. Если $R \rightarrow^k Q \cup P$, то $R \rightarrow^l Q$ и $R \rightarrow^m P$, где $l, m \geq k$.
5. Если $R \rightarrow^k P$ и $P \rightarrow^l Q$, то $R \rightarrow^m Q$, где $m \geq l$.

2.5. Редукция атрибутов. Второе по важности из вводимых нами понятий - это понятие редукции атрибутов.

Пусть $S = (U, A, V, f)$ - информационная система и пусть $P \subseteq A$.

Мы говорим, что подмножество атрибутов P *независимо* (в S), если для каждого $Q \subset P$ $P \neq \tilde{Q}$, в противном случае подмножество P *зависимо* (в S).

Подмножество $P \subseteq Q \subseteq A$ есть *редукт* множества Q (в S), если P - максимальное (в смысле включения) независимое подмножество множества Q .

Ясно, что если R - редукт множества P , то $\tilde{R} = \tilde{P}$.

УТВЕРЖДЕНИЕ 2.5. Если P - редукт множества Q , то $P \rightarrow Q$.

УТВЕРЖДЕНИЕ 2.6. Если P *зависимо*, то существует подмножество $Q \subset P (Q \neq P)$ такое, что Q - редукт множества P . Атрибуты $a, b \in A$ *независимы* в S , если не имеет места ни $a \rightarrow b$, ни $b \rightarrow a$.

УТВЕРЖДЕНИЕ 2.7. Если $P \subseteq A$ - независимое подмножество атрибутов, то все атрибуты из P попарно независимы.

УТВЕРЖДЕНИЕ 2.8. Если $P \rightarrow A$ - независимое подмножество атрибутов, то любое собственное подмножество Q множества P *независимо*.

УТВЕРЖДЕНИЕ 2.9. Если $P \rightarrow^k Q$ и R - редукт множества P , то $R \rightarrow^k Q$.

2.6. Относительная редукция атрибутов. Понятия, введенные в предыдущем разделе, можно обобщить следующим образом.

Пусть $S = (U, A, V, f)$ - информационная система и пусть $P, Q \subseteq A$. Мы говорим, что P *независимо относительно* Q , если для каждого $R \subset P$ $POS_P(Q^*) \neq POS_R(Q^*)$; в противном случае P *зависимо относительно* Q .

Отметим, в частности, что если $P = Q$, получаем введенное ранее понятие зависимости множества атрибутов.

Множество $R \subset P$ будем называть *относительным редуктором* множества P относительно Q , или короче: Q -редуктом множества P , если R - максимальное независимое подмножество множества P относительно Q .

Опять же, если $P = Q$, относительный редукт множества P относительно Q совпадает с редуктом множества P . Очевидно, что если R - относительный редукт множества P относительно Q , то

$$POS_R(Q^*) = POS_P(Q^*).$$

УТВЕРЖДЕНИЕ 2.10. Если $P \rightarrow^k Q$ и R - относительный редукт множества P относительно Q , то $R \rightarrow^k Q$.

УТВЕРЖДЕНИЕ 2.11. Если P - редукт, а Q - редукт относительно R , то $P \rightarrow Q$.

2.7. Ядро атрибутов. В этом разделе мы собираемся определить одно очень полезное в нашем подходе понятие - понятие ядра атрибутов.

Пусть $S=(U, A, V, f)$ - таблица принятия решений, $P \subseteq A$ и $a \in P$.

Мы говорим, что атрибут $a \in P$ избыточен в P , если $\tilde{P} - \{a\} = \tilde{P}$; в противном случае атрибут a необходим в P .

Множество всех необходимых атрибутов множества P будем называть ядром множества P , т.е. ядро множества P есть множество:

$$CORE(P) = \{a \in P : \tilde{P} - \{a\} \neq \tilde{P}\}.$$

Очевидно, что атрибут $a \in P$ избыточен в P т.т.т. $P - \{a\} \rightarrow a$.

Следующее свойство объясняет взаимосвязь между ядром и редуктами атрибута.

УТВЕРЖДЕНИЕ 2.12.

$$CORE(P) = \bigcap_{Q \in RED(P)} Q,$$

где $RED(P)$ - семейство всех редуктов множества P .

Подмножества атрибутов $P, Q \subseteq A$ эквивалентны (символически:

$P \approx Q$), если $\tilde{P} = \tilde{Q}$.

Нетрудно доказать следующее свойство:

УТВЕРЖДЕНИЕ 2.13. Пусть $R_1, R_2, \dots, R_n$, $n \geq 2$ редукты множества атрибутов P . Для любых i, j ($1 \leq i, j \leq n$)

$$R_i - CORE(P) \approx R_j - CORE(P).$$

2.8. Относительное ядро атрибутов. Понятие ядра можно обобщить так же, как и понятие редукта. Пусть $S=(U, A, V, f)$ - информационная система и $P, Q \subseteq A$.

Атрибут $a \in P$ избыточен в P относительно Q (Q -избыточен), если

$$POS_P(Q^*) = POS_{P - \{a\}}(Q^*);$$

в противном случае a необходим в P относительно Q (Q -необходим).

Относительное ядро множества P относительно Q (Q - ядро множества P , символически: $CORE_Q(P)$) - это множество всех необходимых атрибутов множества P относительно Q , т.е.

$$CORE_Q(P) = \{a \in P : POS_P(Q^*) \neq POS_{P - \{a\}}(Q^*)\}.$$

Для относительного ядра выполняется свойство:

УТВЕРЖДЕНИЕ 2.14.

$$CORE_Q(P) = \bigcap_{R \in RED_Q(P)} R.$$

Нетрудно видеть, что если $P=Q$, то относительное ядро совпадает с ядром, определенным в предыдущем разделе.

2.9. Таблицы решений. Пусть $S=(U, A, V, f)$ - информационная система и $C, D \subseteq A$ - два подмножества атрибутов такие, что $C \cap D = \emptyset$ и $C \cup D = A$; элементы из C назовем атрибутами *условий*, а элементы из D - атрибутами *решений*. Информационную систему S , в которой выделены атрибуты условий и атрибуты решений, будем называть *таблицей решений* и обозначать $S=(U, C, D, V, f)$.

Функцию $f_x: A \rightarrow V$ такую, что $f_x(a) = f(x, a)$ для каждого $a \in A$, $x \in U$ будем называть *правилом принятия решений* (в S).

Если g - правило принятия решений, то сужение g до C (символически: g/C) и сужение g до D (символически: g/D) будем называть *условиями* и *решениями* (действиями) правила g , соответственно.

Правило принятия решений *детерминистично* (в S), если для каждого $y \neq x$, из $f_x/C = f_y/C$ следует $f_x/D = f_y/D$ в противном случае f_x *недетерминистично*.

Таблица решений *детерминистична* (непротиворечива), если все ее правила принятия решений детерминистичны; в противном случае таблица решений *недетерминистична* (противоречива).

Приведем одно важное свойство, устанавливающее взаимосвязь между детерминистичностью (непротиворечивостью) и зависимостью атрибутов в таблице решений.

УТВЕРЖДЕНИЕ 2.15. Таблица решений $S=(U, C, D, V, f)$ *детерминистична* (непротиворечива), т.т.т. $C \rightarrow D$.

Важно также и следующее свойство.

УТВЕРЖДЕНИЕ 2.16. Каждую таблицу решений $S=(U, C, D, V, f)$ можно единственным способом разложить на две таблицы решений $S_1=(U_1, C, D, V_1, f_1)$ и $S_2=(U_2, C, D, V_2, f_2)$ такие, что $C \rightarrow D$ в S_1 и $C \not\rightarrow D$ в S_2 , где $U_1 = \text{POS}_C(D^*)$, f_1 - сужение f до U_1 , $U_2 = \bigcup_{x \in D^*} \text{BN}_C(x)$, f_2 - сужение f до U_2 и V_1, V_2 - области значений функций f_1 и f_2 соответственно.

БИБЛИОГРАФИЧЕСКИЕ ЗАМЕЧАНИЯ. Идея информационной системы была введена автором в [14] и развита Мареком и Павляком в [7]. Использованное выше понятие информационной системы основано на определении, введенном в [15].

Математические свойства информационных систем в контексте приближенных множеств исследовались Новотным и Павляком [11, 12, 13, 14].

Применение информационных систем к таблицам решений в общих рамках аппарата приближенных множеств введено в [18, 19] и исследовалось Зярко и Вонгом [24].

Основные понятия, касающиеся таблиц решений, можно найти в Хэрли [5], Монтальбано [8] и Поллак и др. [21].

Литература

1. Ahn S.B. Ri-approximation on Rough Sets. University of Minnesota, (manuscript).
2. Arciszewski T., Ziarko W. Adaptive Expert System for Preliminary Engineering Design // Proc. Intern. Workshop Expert Syst. Applic. Avignon, France, 1986. Apr.28-30. P.695-712.
3. Dubois D., Prade. Twofold Fuzzy Sets and Rough Sets // Fuzzy Sets and Systems (to appear).
4. Grzymała-Busse J. Rough-Set and Dempster-Shater. Approaches to Knowledge Acquisition under Uncertainty-a Comparison. University of Kansas (manuscript).
5. Hurley R.B. Decision Tables in Software Engineering. N.Y., 1983.
6. Iwinski T. Algebraic Approach to Rough Sets // Bull. Polish Acad. Sci. Math. (to appear).
7. Marek W., Pawlak Z. Information Storage and Retrieval Systems-Mathematical Foundations // Theor. Comput. Sci. 1978. N 1. P.331-354.
8. Montalbano M. Decision Tables Science Research Associates. Chicago, 1974.
9. Mrózek A. Rough Sets and Some Aspects of Expert Systems Realizations // Proc. Intern. Workshop Expert Syst. Applic. Avignon, 1987.
10. Novotny M., Pawlak Z. On a Representation of Rough Sets by means of Information Systems // Fundamenta Informaticae. 1983. Vol.6. N 3-4. P.286-296.
11. Novotny M., Pawlak Z. Black Box Analysis and Rough Top Equality // Bull. Polish Acad. Sci. Math. 1985. Vol. 33, N 1-2. P.105-113.
12. Novotny M., Pawlak Z. Characterization of Rough Top Equalities and Rough Bottom Equalities // Bull. Polish. Acad. Sci. Math. 1985. Vol.33. P.91-97.
13. Novotny M., Pawlak Z. On Rough Equalities // Bull. Polish. Acad. Sci. Math. 1985. Vol.33. N 1-2. P.99-104.
14. Pawlak Z. Mathematical Foundations of Information // Retrival, CCPAS Raport. Warszaw. 1973.
15. Pawlak Z. Information System-Theoretical Foundations // Information Systems. 1981. Vol.6. N 3. P.205-218.
16. Pawlak Z. Rough Sets // Intern. J. Inform. Comput. Sci. 1982. N 11. P.341-356.
17. Pawlak Z. Rough Sets and Fuzzy Sets // Fuzzy Sets and Systems. 1985. Vol.17. P.99-102.
18. Pawlak Z. Rough Sets and Decision Tables // Lecture Notes, 1986. Vol.208. P.186-196.
19. Pawlak Z. On Decision Tables // Bull. Polish Acad. Sci.

- Tech. 1986. Vol.34 (9-10). P.563-572.
20. Pawlak Z., Słowiński K. and Słowiński R. Rough Classification of Patients After Highly Selective Vagotomy for Duodenal Ulcer // Intern. J. Man-Machine Stud. 1986. Vol.24. P.413-433.
 21. Pollack S.L., Hicck H., Harrison W.I. Decision Tables: Theory and Practice Wiley. N.Y., 1971.
 22. Pomykała J. Approximation Operations in Approximation Space // Bull. Ruliw. Aci. Sci. Math. (to apper).
 23. Shafer G. Mathematical Theory of Evidence. Princeton University.
 24. Wong S.K.M., Ziarko W. On Optimal Decision Rules in Decision Tables // Bull. Polish Acad. Sci. Math. 1986. Vol. 33(11-12). P.693-696.
 25. Wong S.K.M., Ziarko W. Comparision of Rough Sets and Statistical Methods in Inductive Learning // Intern. J. Man-Machine Stud. (to apper).
 26. Wong S.K.M., Ziarko W. Comparision of the Probalistic Approximate Classification and the Fuzzy Set Model // Fuzzy Sets and Systems (to apper).
 27. Zadech L.A. Fuzzy Sets // Information and Control. 1965. Vol.8. P.338-353.
 28. Zakowski W. Approximation in the Space (U,M) // Demonstratio Mathematical. 1983. Vol.16. N 3. P.1129-1133.
 29. Zeeman E.O. Topology of the Brain // Fort M.K. Topology on 3-Manifolds. 1962.

ЛОГИЧЕСКИЕ АСПЕКТЫ ИЗУЧЕНИЯ ПОНЯТИЙ*

Абстракт

В статье проводится семантический анализ изучения понятий в рамках теории грубых множеств. Строится логика, предназначенная для того, чтобы сформулировать и доказать утверждения о взаимосвязях между объемами и содержаниями понятий в неполноте определенном универсуме.

1. Введение

Основная задача искусственного интеллекта как научной дисциплины состоит в том, чтобы развивать технику и методики представления знаний, манипулирования и овладения знаниями. В последнее время большое внимание уделялось проектированию, конструированию и производству основанных на базах знаний информационных систем и управлению ими. Акцент при этом делался на организацию усложненных форм информации. Среди различных видов информации понятиям принадлежит роль исходных сущностей. В буквальном смысле слова понятие есть абстракция, созданная разумом в результате ментального процесса в нашем сознании. Понятия являются элементами мысли, они не даны в опыте, а должны быть найдены с помощью анализа, который раскрывает синтаксис понятий, отражающий их структуру, и семантику понятий, раскрывающую их смысл.

В философии науки понятия делятся на четыре группы [1]:

(а) Понятия индивида (например: Ньютон), которые относятся к единичным объектам. Что считается единичным объектом, зависит от уровня анализа. Индивид некоторого данного уровня может быть агрегатом индивидов более низкого уровня.

(б) Понятия класса (например: живой), которые относятся к множествам объектов.

(с) Понятия отношения (например: отношение порядка), которыми выражаются отношения между объектами некоторого вида, например индивидами или множествами.

(д) Понятия функции (например: расстояние), которые относятся к функциям от одного или нескольких аргументов.

Два главных вопроса, касающихся представления знаний и овладения ими в системах искусственного интеллекта, заключаются в следующем: как организовать знание? и как можно наращивать знание? Создание систем искусственного интеллекта включает в себя и развитие процедур, позволяющих не только накапливать факты, но и производить разумный синтез, т.е. объединять прос-

* Пер. с англ. П. И. Быстрова.

тые компоненты знания в более сложные.

Хотя понятия сами по себе не являются наблюдаемыми вещами, можно их произносить, выражать и представлять, определяя их объем, или денотацию, и содержание, или коннотацию. Объем понятия есть множество объектов, являющихся частными примерами понятия, т.е. множество объектов, обладающих свойствами, которые понятие характеризует. Объемы состоят из индивидов, подмножеств и т.д. в зависимости от вида понятия. Содержание понятия есть множество свойств, характеризующих объекты, к которым это понятие относится. В общем случае понятие определяется совместно объемом и содержанием. Например, чтобы определить понятие "организм", нужно перечислить отличительные признаки, типичные особенности организма. В этой статье мы даем точную формулировку и проводим обсуждение следующих двух утверждений: (а) некоторых свойств достаточно для того, чтобы однозначно охарактеризовать множество примеров для данного понятия; (б) некоторые объекты представляют собой частные примеры (representative instances) данного понятия. Пункт (а) гласит, что свойства, о которых идет речь, являются содержанием понятия, пункт (б) - что объем понятия полностью определяется данными объектами.

При анализе процесса овладения понятиями мы учитываем недоступность полной информации об объектах, которые, по нашему предположению, являются частными примерами понятий. Отсутствие информации доказывается существованием граничных примеров понятий. Следовательно, мы не можем охватить понятия как ясно очерченные целостности и воспринимаем их как неопределенные объекты. Как объем, так и содержание неопределенных понятий можно указать достаточно точно. Процесс овладения понятиями должен быть организован так, чтобы мы могли находить множество реальных сущностей, близкое к объему понятия настолько, насколько это возможно, и находить множество семейств, характеризующих частные примеры понятия столь адекватно, насколько это возможно.

Исследование процесса изучения понятий в данной статье основывается на теории грубых множеств З.Павляка [9]. Статья является расширенным вариантом исследования задач, связанных с обучением, предпринятого автором в [5]. В нее включены идеи работ [6] и [10]. Иное формальное рассмотрение концептуального анализа можно найти в работе [11].

2. Неразличимость

Следуя теории реляционных баз данных [2] и теории информационных систем [8], мы расщепляем свойства объектов на пары вида атрибут, значение. Например, свойство "быть зеленым" превращается в пару "цвет, зеленый", дубликатом свойства "быть большим" является пара "величина, большой". В данных примерах

"цвет" и "размер" или "величина" являются атрибутами объектов, а "зеленый" и "большой" соответственно — значениями этих атрибутов. Всякий зеленый объект обладает свойством "цвет, зеленый", а любой маленький объект не обладает свойством "размер, большой". Таким образом, содержания понятий состоят из свойств, образованных из пар "атрибут, значение" с помощью пропозициональных операций "не", "и", "или", для некоторых атрибутов, имеющих смысл применительно к тем объектам, к которым данные понятия относятся.

Рассмотрим универсум рассуждений (см. [8]) вида: $U = (OB, AT, \{VAL_a\}_{a \in AT}, f)$, где OB есть непустое множество объектов, AT есть непустое множество атрибутов, для любого $a \in AT$ множество VAL_a состоит из значения атрибута a , и $f: OB \times AT \rightarrow \bigcup_{a \in AT} VAL_a$ есть информационная функция, которая приписывает объектам значения атрибутов. Если для некоторых объекта o , атрибута a и значения v атрибута a имеет место $f(o, a) = v$, то объект o обладает свойством (a, v) .

Атрибуты объектов служат средствами различения в универсуме рассуждения. Объекты могут быть различными относительно одних атрибутов, но неразличимыми относительно других. Для любого множества $A \subseteq AT$ мы определяем отношение неразличимости $ind(A)$ во множестве объектов OB : $(ind\ 1) (o, o') \in ind(A)$, если и только если $f(o, a) = f(o', a)$ для всех $a \in A$. Для пустого множества атрибутов определяем $(ind\ 2) ind(\emptyset) = OB \times OB$.

Из определения легко получить следующие свойства отношений неразличимости.

Факт 2.1.

- (a) $ind(A)$ рефлексивно, симметрично и транзитивно
- (b) $ind(A \cup B) = ind(A) \cap ind(B)$
- (c) $A \subseteq B$ влечет $ind(B) \subseteq ind(A)$.

Условие (a) гласит, что отношения неразличимости, определяемые пунктами (ind 1) и (ind 2), являются отношениями эквивалентности. Условие (b) показывает, что различающая мощность объединения множеств атрибутов превышает различающую мощность частей этого объединения.

Пусть $\Pi_R(o) = \{o' \in OB : (o, o') \in R\}$ есть класс эквивалентностей отношений неразличимости R , порождаемый объектом o . Каждый класс эквивалентностей вида $\Pi_{ind(A)} o$ для $a \in AT$ соответствует атомарному свойству объекта, а именно свойству (a, v) такому, что $f(o, a) = v$. Для множества $A \subseteq AT$ класс $\Pi_{ind(A)} o$ соответствует конъюнкции всех свойств (a, v) таких, что $a \in A$ и $f(o, a) = v$. Классы эквивалентностей удовлетворяют следующим условиям.

Факт 2.2.

- (a) $\Pi_{ind(A \cup B)}(o) = \Pi_{ind(A)}(o) \cap \Pi_{ind(B)}(o)$
- (b) $R \subseteq S$ влечет $\Pi_R(o) \subseteq \Pi_S(o)$.

Условия 2.1(b) и 2.2(a) гласят, что пересечение отношений неразличимости позволяет образовывать новые свойства из некоторых данных свойств. Свойства, полученные с помощью конъюнк-

ции из некоторых других свойств, обеспечивают более хорошее расчленение множества объектов, нежели те свойства, которые являются составными частями дизъюнкции.

Пример 2.1.

Пусть OB – множество планет: $OB = \{\text{Меркурий (Me)}, \text{Венера (V)}, \text{Земля (E)}, \text{Марс (Ma)}, \text{Юпитер (J)}, \text{Сатурн (S)}, \text{Уран (U)}, \text{Нептун (N)}, \text{Плутон (P)}\}$. Пусть AT состоит из трех атрибутов: D = "расстояние от солнца", S = "величина" и M = "обладание луной". Значения атрибута D есть "близко" и "далеко", значения атрибута S есть "маленькая", "средняя", "большая", и значениями атрибута M являются "да", "нет". Информационная функция задается следующей таблицей.

	S	D	M
Me	маленькая	близко	нет
V	маленькая	близко	нет
E	маленькая	близко	да
Ma	маленькая	близко	да
J	большая	далеко	да
S	большая	далеко	да
U	средняя	далеко	да
N	средняя	далеко	да
P	маленькая	далеко	да

Классы эквивалентностей, определяемые отношениями неразличимости, соответствующими данным атрибутам, таковы:

$$\begin{aligned}
 ind(S): X_1 &= \{Me, V, E, Ma, P\} & X_2 &= \{J, S\} & X_3 &= \{U, N\} \\
 ind(D): Y_1 &= \{Me, V, E, Ma\} & Y_2 &= \{J, S, U, N, P\} \\
 ind(M): Z_1 &= \{Me, V\} & Z_2 &= \{E, Ma, J, S, U, N, P\} \\
 ind(M, D): T_1 &= \{Me, V\} & T_2 &= \{E, Ma\} & T_3 &= \{J, S, U, N, P\} \\
 ind(S, D): W_1 &= \{Me, V, E, Ma\} & W_2 &= \{J, S\} & W_3 &= \{U, N\} & W_4 &= \{P\}.
 \end{aligned}$$

Классы эквивалентностей отношений неразличимости соответствуют свойствам: X_1 : быть маленькой, X_2 : быть большой; X_3 : быть средней; Y_1 : быть близко к Солнцу; Y_2 : быть далеко от Солнца; Z_1 : не иметь луны; Z_2 : иметь луну; $T_2 = Y_1 \cap Z_2$: быть близко к Солнцу и иметь луну; $W_4 = X_1 \cap Y_2$: быть маленькой и быть далеко от Солнца.

Можно также получить новые свойства, осуществив транзитивное замыкание $\cup^*$ объединения отношений неразличимости.

Факт 2.3.

$$(a) \quad R \cup S \subseteq R \cup S^*$$

$$(b) \quad \Pi_{R \cup S}(o) = \cup \{ \Pi_R(o) \cup \Pi_S(o) \cap \Pi_S(o) \neq \emptyset \}.$$

Поскольку $ind(A) \cup ind(B)$ нельзя получить из $ind(A)$ и $ind(B)$ с помощью теоретико-множественных операций, свойства, соответствующие его классам эквивалентностей, не выразимы через пропозициональные комбинации тех свойств, которые представимы с помощью $ind(A)$ и $ind(B)$. Более того, в общем случае $ind(A) \cup ind(B)$ не имеет вид $ind(C)$, для некоторого $C \subseteq AT$. Обсуждение этих проблем можно найти в работе [7].

Пример 2.2.

Предположим, что нам даны семь объектов, состоящих из кружков и крестиков. Мы имеем $OB = \{o1, o2, o3, o4, o5, o6, o7\}$ и $AT = \{\text{число кружков } (o), \text{ число крестиков } (+)\}$. Информационная функция задается следующей таблицей

	o	+
o1	1	1
o2	1	2
o3	2	1
o4	2	2
o5	3	3
o6	3	4
o7	3	4

Классы эквивалентностей отношений неразличимости $ind(o)$ и $ind(+)$ следующие: $ind(o): \{o1, o2\} \{o3, o4\} \{o5, o6, o7\}$; $ind(+): \{o1, o3\} \{o2, o4\} \{o5, o6, o7\}$. Транзитивное замыкание объединения этих отношений дает следующие классы эквивалентностей: $ind(o) \cup ind(+): X1 = \{o1, o2, o3, o4\}$ $X2 = \{o5, o6, o7\}$. Заметим, что имена свойств, соответствующих этим классам эквивалентностей, нельзя получить в виде пропозициональных комбинаций имен свойств, представленных классами эквивалентностей $ind(o)$ и $ind(+)$, потому что нет булевых связей между $ind(A) \cup ind(B)$ и его составными частями. Однако $X1$ соответствует новому свойству "число кружков и число крестиков меньше, чем 3".

Таким образом, осуществляя операции с отношениями неразличимости, мы получаем новые свойства из простых свойств, содержащихся в рассматриваемом универсуме.

3. Относительная определимость множества объектов

Неразличимость влияет на определимость множества объектов через атрибуты из множества AT . В общем случае, если дано множество $A \subseteq AT$, то множество объектов нельзя однозначно определить в терминах свойств, обусловленных $ind(A)$. Согласно теории грубых множеств, для любого подмножества X множества OB определяем нижнюю аппроксимацию RX и верхнюю аппроксимацию подмножества $\bar{R}X$ относительно неразличимости R следующим образом:

RX есть объединение тех классов эквивалентностей R , которые включены в X ; $\bar{R}X$ есть объединение тех классов эквивалентностей R , которые имеют с X общий элемент.

Будем говорить, что множество X R -определимо, если и только если $RX = X = \bar{R}X$ или $X = \emptyset$. Множество X сильно R -определимо, если и только если X есть класс эквивалентностей R .

Пример 3.1.

Рассмотрим универсум из примера 2.1 и множество

$X = \{Me, V, E, Ma, J, S\}$. Его аппроксимации относительно ind (величина) имеют следующий вид: $ind(величина) X = \{J, S\} = X - \{Me, V, E, Ma\}$; $ind(величина) X = X \cup \{P\}$. Следовательно множество X не определимо с помощью атрибута "величина". Действительно, оно определимо посредством всех атрибутов, а именно $o \in X$, если и только если o обладает следующим свойством: «"величина, маленькая" и "расстояние, близко" или "величина, большая" и "расстояние, далеко" и "луна, да"».

Пример 3.2.

Рассмотрим универсум из примера 2.2 и множество $X = \{o1, o2, o3, o4\}$. Оно $ind(o) = \text{определимо}$. Для того чтобы получить сильную определимость, необходимо построить сложное свойство. Легко видеть, что X сильно определимо относительно $ind(o) \cup ind(+)$.

Заметим, что аппроксимации удовлетворяют следующим условиям.

Предложение 3.1.

Если $R \subseteq S$, то для любого $X \subseteq OB$ выполняются следующие условия: (a) $SX \subseteq RX$; (b) $RX \subseteq SX$; (c) Если X S -определимо, то оно R -определимо.

В терминах аппроксимаций мы определяем множества позитивных, негативных и граничных примеров множеств объектов. $POS(R)X = RX$; $NEG(R)X = OB - RX$; $BOR(R)X = RX - RX$. $POS(R)X$ есть множество позитивных примеров из X , относительно неразличимости R . Его элементы, связанные со свойствами, соответствующими R , определенно принадлежат X . $NEG(R)X$ есть множество негативных примеров из X . Его элементы, соответствующие R , определенно не принадлежат X . $BOR(R)X$ есть неопределенная область, ее элементы, возможно, принадлежат X , но мы не можем утверждать это определенно, рассматривая только свойства, соответствующие R . Другими словами, что касается неразличимости R , то ничего нельзя сказать о принадлежности элементов из $BOR(R)X$ множеству X .

Предложение 3.2.

- (a) $POS(R)X, NEG(R)X, BOR(R)X$ попарно не пересекаются
- (b) $POS(R)X \cup NEG(R)X \cup BOR(R)X = OB$
- (c) $POS(R)X, NEG(R)X, BOR(R)X$ R -определимы.

Предложение 3.3.

- (a) Если $A \subseteq B$, то $POS(ind(A))X \subseteq POS(ind(B))X$, $NEG(ind(A))X \subseteq NEG(ind(B))X$, $BOR(ind(A))X \subseteq BOR(ind(B))X$.
- (b) Если $R \subseteq S$, то $POS(S)X \subseteq POS(R)X$, $NEG(S)X \subseteq NEG(R)X$.

Предложение 3.4.

- (a) $POS(R)X \subseteq X$, $NEG(R)X \subseteq -X$

- (b) $POS(R)\emptyset = \emptyset$, $NEG(R)OB = \emptyset$
- (c) $POS(ind(\emptyset))X = \emptyset$ для $X \neq OB$, $POS(ind(\emptyset))OB = OB$
- (d) $NEG(ind(\emptyset))X = \emptyset$ для $X \neq \emptyset$, $NEG(ind(\emptyset))\emptyset = OB$
- (e) Если $X \leq Y$, то $POS(R)X \leq POS(R)Y$, $NEG(R)Y \leq NEG(R)X$.

Предложение 3.5.

- (a) $POS(R)X \cup POS(R)Y \leq POS(R)(X \cup Y)$
- (b) $POS(R)(X \cap Y) = POS(R)X \cap POS(R)Y$
- (c) $POS(R)(-X) = NEG(R)X$.

Предложение 3.6.

- (a) $NEG(R)(X \cup Y) = NEG(R)X \cap NEG(R)Y$
- (b) $NEG(R)X \cup NEG(R)Y = NEG(R)(X \cap Y)$
- (c) $NEG(R)(-X) = POS(R)X$

Предложение 3.7.

- (a) $BOR(R)(X \cup Y) \leq BOR(R)X \cup BOR(R)Y$
- (b) Если $X \cap Y = \emptyset$, то $BOR(R)(X \cup Y) = BOR(R)X \cup BOR(R)Y$
- (c) $BOR(R)(X \cap Y) \leq BOR(R)X \cap BOR(R)Y$
- (d) $BOR(R)(-X) = BOR(R)X$.

Предложение 3.8.

- (a) $POS(ind(A))X \cup POS(ind(B))X \leq POS(ind(A \cup B))X$
- (b) $POS(ind(A \cap B))X \leq POS(ind(A))X \cap POS(ind(B))X$
- (c) $NEG(ind(A))X \cup NEG(ind(B))X \leq NEG(ind(A \cup B))X$
- (d) $NEG(ind(A \cap B))X \leq NEG(ind(A))X \cap NEG(ind(B))X$.

Предложение 3.9.

Следующие условия эквивалентны:

- (a) множество X является R -определимым
- (b) $BOR(R)X = \emptyset$
- (c) $POS(R)X = -NEG(R)X$.

Таким образом, подмножества множества OB , соответствующие объемам понятий, не могут быть однозначно определены в терминах свойств, относящихся к содержаниям этих понятий. Однозначное соответствие между объемом и содержанием отражается в определимости объема по отношению к неразличимости, обусловленной свойствами из содержания. Если объем определим, то все объекты можно классифицировать как позитивные или негативные примеры соответствующего понятия. Если объем не определим относительно неразличимости, обусловленной содержанием, то соответствующее множество граничных примеров не пусто и, следовательно, некоторые объекты не могут быть классифицированы ни как положительные, ни как отрицательные примеры соответствующего понятия. В следующих двух разделах будет обсуждена проблема овладения понятиями. Она делится на две задачи: задачу изучения содержаний и задачу изучения объемов понятий. Тот факт, что объемы определимы относительно неразличимости, обусловленной содержаниями, играет здесь решающую роль.

4. Изучение содержания понятий

Пусть дан универсум $U=(OB, AT, \langle VAL_a \rangle_{a \in AT}, f)$. Допустим, что множество $X \subseteq OB$ есть содержание некоторого понятия. Задача изучения содержания этого понятия может быть сформулирована следующим образом:

Дано: множество $X \subseteq OB$ представляет содержание понятия.

Требуется найти: минимальное множество атрибутов, такое, что X является $ind(A)$ -определимым, или если X не является $ind(A)$ -определимым, то найти минимальное множество $A \subseteq AT$ такое, что для всякого $B \subseteq AT$, $ind(B)X \subseteq ind(A)X$ и $ind(A)X \subseteq ind(B)X$.

Таким образом, содержание понятия, объем которого есть X , состоит из тех свойств, которые определяются $ind(A)$ так, что или A обеспечивает определимость X или, если определимость невозможно получить в данном универсуме, A обеспечивает такую близкую аппроксимацию X , какая только возможна для X (относительно включения).

Пример 4.1.

Приведем пример, который является незначительной модификацией примера из работы [3]. Множество OB состоит из семи животных $A_1, A_2, A_3, A_4, A_5, A_6, A_7$, которые характеризуются с помощью атрибутов "величина" (S), "вид животного" (A), "цвет" (C). Значения атрибута "величина" есть $VAL_S = \{\text{маленький, средний, большой}\}$, значения атрибута "вид животного" есть $VAL_A = \{\text{медведь, собака, кошка, лошадь}\}$, а значениями атрибута "цвет" являются $VAL_C = \{\text{коричневый, черный}\}$. Следующая таблица показывает, что является значениями атрибутов для данных объектов.

	S	A	C
A_1	маленький	медведь	черный
A_2	средний	медведь	черный
A_3	большой	собака	коричневый
A_4	маленький	кошка	черный
A_5	средний	лошадь	черный
A_6	большой	лошадь	черный
A_7	большой	лошадь	коричневый

Предположим, что дан объем $X = \{A_1, A_2, A_3, A_6, A_7\}$ понятия "опасное животное", и мы ищем его содержание. Рассмотрим отношение неразличимости $ind(S, A)$. Его классы эквивалентностей следующие:

$ind(S, A): \{A_1\} \{A_2\} \{A_3\} \{A_4\} \{A_5\} \{A_6, A_7\}$.

Легко видеть, что X является $ind(S, A)$ -определимым и X не определим ни через один отдельный атрибут. Заметим, что свойство "(вид животного, медведь) и (величина, маленький) или (вид животного, медведь) и (величина, средний)" в нашем универсуме эквивалентно свойству "(вид животного, медведь)". Аналогично, свойство "(вид животного, собака) и (величина, большой) или

(вид животного, лошадь) и (величина, большой)" эквивалентно "(величина, большой)". Следовательно, содержание данного понятия состоит из свойства "(вид животного, медведь) или (величина, большой)".

Пример 4.2.

Пусть $OB = \{01, 02, 03, 04, 05, 06, 07\}$ и $AT = \{a, b\}$. Предположим, что атрибуты дают следующие классы эквивалентностей:

$ind(a): \{01, 02, 03\} \{04, 05\} \{06, 07\}$

$ind(b): \{01, 04, 05\} \{02, 03\} \{06, 07\}$

$ind(a, b): \{01\} \{02, 03\} \{04, 05\} \{06, 07\}$

Пусть $X = \{05, 06, 07\}$ есть объем понятия. Аппроксимации множества X таковы:

$\underline{ind(a)}X = \{06, 07\}$ $\overline{ind(a)}X = \{04, 05, 06, 07\}$

$\underline{ind(b)}X = \{06, 07\}$ $\overline{ind(b)}X = \{01, 04, 05, 06, 07\}$

$\underline{ind(a, b)}X = \{06, 07\}$ $\overline{ind(a, b)}X = \{04, 05, 06, 07\}$

Множество X не является $ind(a, b)$ -определимым. Множество $\{a, b\}$ является минимальным множеством атрибутов, обеспечивающим аппроксимацию X .

Множество атрибутов, получаемое в результате анализа содержания, дает свойства, которые позволяют нам отличить настолько точно, насколько это возможно, объекты, являющиеся положительными примерами данного понятия, от объектов, которые являются его отрицательными примерами. Различимость является оптимально возможной в данном универсуме тогда, когда определимость различения является полной или когда определимость не может быть получена. Следовательно, полученные свойства действительно являются характеристическими свойствами частных примеров данного понятия. Более того, число таких свойств настолько мало, насколько это возможно.

5. Изучение объемов понятий

Допустим, что дано содержание понятия, т.е. множество свойств, выраженных в виде пропозициональных комбинаций некоторых пар атрибутов. Чтобы определить объем понятия, мы должны найти такие типичные примеры этого понятия, что принадлежность любого другого объекта к содержанию можно было бы установить путем сравнения этого объекта с такими примерами. Более формально задача изучения объемов формулируется следующим образом.

Дано: множество P свойств, выраженных в терминах атрибутов из множества $A \subseteq AT$.

Нужно найти: минимальное множество $X \subseteq OB$ такое, что $o \in \overline{ind(A)}X$, если и только если o удовлетворяет некоторому свойству из P .

Пример 5.1.

Пусть множество объектов состоит из восьми пациентов госпиталя $OB = \{P_1, P_2, P_3, P_4, P_5, P_6, P_7, P_8\}$, и пусть $AT = \{s_1, s_2\}$ есть множество параметров, чьи значения подтверждают наличие определенной болезни. Например, мы можем иметь параметры "давление крови", и "наличие миелобластов". Пусть $VAL_{s_1} = \{\text{нормальное, низкое, высокое}\}$ и $VAL_{s_2} = \{+, -\}$. Предположим, что соответствующие отношения неразличимости дают следующие классы эквивалентностей и свойства:

$ind(s_1): \{P_1, P_2, P_3\} \quad \{s_1, \text{нормальное}\}$
 $\quad \quad \quad \{P_4, P_5\} \quad \quad \{s_1, \text{низкое}\}$
 $\quad \quad \quad \{P_6, P_7, P_8\} \quad \{s_1, \text{высокое}\}$
 $ind(s_2): \{P_1, P_2, P_3, P_8\} \{s_2, -\}$
 $\quad \quad \quad \{P_4, P_5, P_6, P_7\} \{s_2, +\}.$

Предположим, что содержание понятия "лейкемия" состоит из двух свойств: $p_1 = (s_1, \text{низкое})$ или $(s_1, \text{высокое})$; $P_2 = (s_2, +)$. Заметим, что каждый объект из множества $X = \{P_4, P_5, P_6, P_7\}$ удовлетворяет этим свойствам. Однако чтобы получить типичные примеры содержания рассматриваемого понятия, следует взять только один элемент из классов эквивалентностей $\{P_4, P_5\}$ и $\{P_6, P_7\}$ отношения $ind(s_1, s_2)$. Легко видеть, что множества $Y_1 = \{P_4, P_6\}$, $Y_2 = \{P_4, P_7\}$, $Y_3 = \{P_5, P_6\}$ и $Y_4 = \{P_5, P_7\}$ удовлетворяют условию $ind(s_1, s_2)Y_i = X$, $i = 1, 2, 3, 4$.

Множество объектов, полученное в результате анализа объема, состоит из типичных примеров данного понятия, т.е. дает образец для любого другого частного примера данного понятия. Более того, множество этих примеров велико в точности настолько, насколько это необходимо для того, чтобы представить все остальные примеры.

6. Логика рассуждений о понятиях

В этом разделе мы определим формальный пропозициональный язык для рассуждений о понятиях. В таком языке формулируются аналогии и объемов и содержаний понятий. Содержания представляются посредством отношений неразличимости, обусловленных атрибутами. Для того чтобы выразить точно зависимость неразличимости от атрибутов, вводятся специальные атрибутивные выражения, интерпретируемые как множества атрибутов. Язык содержит модальности, соответствующие аппроксимациям множеств объектов. Модальные операторы определяются через отношения неразличимости. Определение языка осуществляется в два шага. Вначале вводится вспомогательное множество атрибутивных выражений, а затем вводится множество формул. Аtribuтивные выражения строятся из символов, взятых из следующих попарно непересекающихся множеств: $VARAT$ - множество переменных, представляющих множества атрибутов; $\{-, \cup, \cap\}$ - множество теоретико-множественных операций дополнения, объединения и пересечения соответственно.

Множество $EXPRAT$ атрибутивных выражений есть наименьшее

множество, удовлетворяющее следующим условиям: $VARAT \subseteq EXPRAT$; $A, B \in EXPRAT$ влечет $\neg A, A \vee B \in EXPRAT$.

Множество $EXPREL$ выражений отношений, интерпретируемых как отношения неразличимости, есть наименьшее множество, удовлетворяющее таким условиям: $A \in EXPRAT$ влечет $ind(A) \in EXPREL$; $R, S \in EXPREL$ влечет $R \cap S, R \cup S \in EXPREL$.

Формулы языка строятся из символов, принадлежащих следующим двум попарно непересекающимся множествам:

$VARPROP$ – множество пропозициональных переменных, интерпретируемых как множества объектов;

$\{\neg, \vee, \wedge, \rightarrow, \leftrightarrow\}$ – множество классических пропозициональных операций отрицания, дизъюнкции, конъюнкции, импликации и эквиваленции соответственно;

$\{[], \langle \rangle\}$ – множество модальных пропозициональных операций.

Множество формул FOR есть наименьшее множество, удовлетворяющее следующим условиям $VARPROP \subseteq FOR$; $F, G \in FOR$ влечет $\neg F, F \vee G, F \wedge G, F \rightarrow G \in FOR$; $F \in FOR, R \in EXPREL$ влечет $[R]F, \langle R \rangle F \in FOR$.

Семантика языка определяется с помощью понятий модели и выполнимости формул в модели. Если дан универсум $U = (OB, AT, \langle VAL_a \rangle, \alpha \in AT, f)$, то моделью считается система $M = (U, m)$, где m есть функция значения, удовлетворяющая следующим условиям:

$m(p) \subseteq OB$ для $p \in VARPROP$; $m(A) \subseteq AT$ для $A \in VARAT$;
 $m(A \vee B) = m(A) \cup m(B)$, $m(A \wedge B) = m(A) \cap m(B)$, $m(\neg A) = -m(A)$;
 $m(ind(A)) = ind(m(A))$ для $A \in EXPRAT$;
 $m(R \cap S) = m(R) \cap m(S)$, $m(R \cup S) = m(R) \cup m(S)$.

Будем говорить, что формула F выполняется объектом o в модели M , т.е. $(M, o \text{ sat } F)$ тогда, когда удовлетворяются следующие условия:

$M, o \text{ sat } p$ если и только если $o \in m(p)$ для $p \in VARPROP$;
 $M, o \text{ sat } \neg F$ если и только если неверно, что $M, o \text{ sat } F$;
 $M, o \text{ sat } F \vee G$ если и только если $M, o \text{ sat } F$ или $M, o \text{ sat } G$;
 $M, o \text{ sat } F \wedge G$ если и только если $M, o \text{ sat } F$ и $M, o \text{ sat } G$;
 $M, o \text{ sat } F \rightarrow G$ если и только если $M, o \text{ sat } \neg F \vee G$;
 $M, o \text{ sat } F \leftrightarrow G$ если и только если $M, o \text{ sat } (F \rightarrow G) \wedge (G \rightarrow F)$;
 $M, o \text{ sat } [R]F$ если и только если для всех $s \in OB$, если $(o, s) \in m(R)$, то $M, s \text{ sat } F$;
 $M, o \text{ sat } \langle R \rangle F$ если и только если существует $s \in OB$ такое, что $(o, s) \in m(R)$ и $M, s \text{ sat } F$.
Определим значение $val_M F = \{o \in OB : M, o \text{ sat } F\}$.

Предложение 6.1.

(a) $val_M p = m(p)$ для $p \in VARPROP$;
(b) $val_M \neg F = -val_M F$;
(c) $val_M F \vee G = val_M F \cup val_M G$;
(d) $val_M F \wedge G = val_M F \cap val_M G$;
(e) $val_M F \rightarrow G = val_M \neg F \vee G$;
(f) $val_M F \leftrightarrow G = val_M (F \rightarrow G) \cap val_M (G \rightarrow F)$;
(g) $val_M [R]F = m(R) \cap val_M F$;
(h) $val_M \langle R \rangle F = m(R) \cap val_M F$.

$$(h) \text{val}_M \langle R \rangle F = \overline{m(R)} \text{val}_M F;$$

Предложение гласит, что классические пропозициональные операции соответствуют теоретико-множественным операциям, а модальные операции $[]$ и $\langle \rangle$ соответствуют нижней и верхней аппроксимациям.

Формула F выполнима в $M (M \text{ sat } F)$, если есть $o \in OB$ такое, что $M, o \text{ sat } F$. Формула F истинна в $M (\models_M F)$, если $M, o \text{ sat } F$ для всех $o \in OB$. Формула F общезначима ($\models F$), если F истинна во всех моделях.

Перечисленные ниже факты выразимы в сформулированном языке.

Предложение 6.2.

- (a) $\models_M F \rightarrow [R]F \Leftrightarrow \text{val}_M F$ является $m(R)$ -определимым;
- (b) $\models_M [R]F \Leftrightarrow \text{POS}(m(R)) \text{val}_M F = OB$;
- (c) $\models_M \neg [R]F \Leftrightarrow \text{POS}(m(R)) \text{val}_M F = \emptyset$;
- (d) $\models_M \neg \langle R \rangle F \Leftrightarrow \text{NEG}(m(R)) \text{val}_M F = OB$;
- (e) $\models_M \langle R \rangle F \Leftrightarrow \text{NEG}(m(R)) \text{val}_M F = \emptyset$;
- (f) $\models_M \langle R \rangle F \wedge \langle R \rangle \neg F \Leftrightarrow \text{BOR}(m(R)) \text{val}_M F = OB$;
- (g) $\models_M [R]F \vee [R]\neg F \Leftrightarrow \text{BOR}(m(R)) \text{val}_M F = \emptyset$;

Предложение 6.3.

- (a) $M \text{ sat } [R]F \Leftrightarrow \text{POS}(m(R)) \text{val}_M F \neq \emptyset$;
- (b) $M \text{ sat } \neg \langle R \rangle F \Leftrightarrow \text{NEG}(m(R)) \text{val}_M F \neq \emptyset$;
- (c) $M \text{ sat } \langle R \rangle F \wedge \langle R \rangle \neg F \Leftrightarrow \text{BOR}(m(R)) \text{val}_M F \neq \emptyset$;
- (d) $M \text{ sat } \neg [R]F \Leftrightarrow \text{POS}(m(R)) \text{val}_M F \neq OB$;
- (e) $M \text{ sat } \langle R \rangle F \Leftrightarrow \text{NEG}(m(R)) \text{val}_M F \neq OB$;
- (f) $M \text{ sat } [R]F \vee \langle R \rangle \neg F \Leftrightarrow \text{BOR}(m(R)) \text{val}_M F \neq OB$;

Предложение 6.4.

Следующие формулы общезначимы:

- (a) $[R]F \vee [S]F \rightarrow [R \cup S]F$
- (b) $[R]F \wedge [S]F \rightarrow [R \cap S]F$
- (c) $[ind(A)]F \vee [ind(B)]F \rightarrow [ind(A \cup B)]F$
- (d) $[ind(A \cap B)]F \rightarrow [ind(A)]F \wedge [ind(B)]F$.

Поскольку отношения неразличимости, их пересечения и транзитивные замыкания являются отношениями эквивалентности, операции $[R]$ и $\langle R \rangle$ для $R \in \text{EXPRES}$ являются модальностями $S5$. Следовательно, в точности те формулы, которые являются теоремами $S5$, общезначимы и в данной логике.

Предложенной в данной статье модификации синтаксиса и семантики стандартной модальной логики достаточно для того, чтобы выразить отношение между содержаниями и объемами понятий. Содержания представляются с помощью соответствующих отношений неразличимости. Позитивные, негативные и граничные примеры понятий могут выражаться с помощью модальных операций. В данной логике можно также выразить задачи овладения понятиями, которые обсуждались в разделах 4 и 5.

Предложение 6.5.

(a) Если для всякого B имеет место $\models_M \langle \text{ind}(A) \rangle F \leftrightarrow \langle \text{ind}(B) \rangle F$ и $\models_M [\text{ind}(B)] F \rightarrow [\text{ind}(A)] F$, то $m(A)$ есть минимальное множество атрибутов, обеспечивающее адекватную характеристику множества $\text{val}_M F$.

(b) Если $\models_M \langle \text{ind}(A) \rangle F \leftrightarrow G$ и для любой формулы H , если $\models_M \langle \text{ind}(A) \rangle H \leftrightarrow G$ то $\models_M F \leftrightarrow H$, тогда $\text{val}_M F$ есть минимальное множество объектов, обеспечивающее представление объема $\text{val}_M G$ понятия.

Условия (a) и (b) выражают раскрытие содержаний и раскрытие объемов соответственно.

7. Заключительные замечания

В данной статье предложен метод изучения понятий в рамках теории грубых множеств. Был введен язык для выражения и решения задач раскрытия содержаний и объемов понятий, который является расширением модальных языков. Модальные операторы обусловлены отношениями неразличимости, которые генерируются множествами атрибутов. Эти множества атрибутов и отношения неразличимости в явном виде выражаются в формулах языка. Проблема полной аксиоматизации такого языка остается открытой. Разрешимость проблемы выполнимости для фрагмента языка без операций $\cap$ и $\cup^*$ на отношениях неразличимости была решена в работе [4].

ЛИТЕРАТУРА

1. Bunge M. Scientific research I. The search for system. B., 1967.
2. Codd K.F. A relational model for large shared data banks // Communications of ACM, 1970. Vol.13. P.377-387.
3. Hunt E.B., Marin J., Stone P.J. Experiments in induction. N.Y., 1966.
4. Nakamura A. Decidability result for the logic of indiscernibility relations. Manuscript, Hiroshima University, 1986.
5. Orłowska E. Representation of vague information // ICS PAS Reports 503, Warsaw, 1983.
6. Orłowska E. Semantics of vague concepts // Foundations of logic and linguistics. Problems and solutions: Selected contributions to the 7th Intern. Congr. of Log. Meth. and Philos. of Sci. Salzburg, 1983. Salzburg, 1984. P.465-482.
7. Orłowska E. Logic of indiscernibility relations // Lect. Not. Comp. Sci. 1985. Vol.208. P.177-186.
8. Pawlak Z. Information systems-theoretical foundations // Inform. Syst. 1981. Vol.6. P.205-218.
9. Pawlak Z. Rough sets. Intern. J. Comp. Inform. Sci. 1982. Vol.11. P.341-356.

10. Pawlak Z. Rough concept analysis // Bulletin PAS, Mathematics, 1985. Vol.33. P.495-498.
11. Wille R. Liniendiagramme hierarchischer Begriffssysteme. Preprint 812, Technische Hochschule Darmstadt, 1981.

ПЕРВЫЕ ШАГИ К ТЕОРИИ НЕФОРМАЛИЗУЕМЫХ ПОНЯТИЙ

1. Зачем нужна формализация неформализуемых понятий?

На первый взгляд, сама постановка вопроса о формализации неформализуемых понятий кажется парадоксом. Она немедленно вызывает два рода возражений: "физики" говорят, что неформализуемое понятие не является понятием, "лирики" недоумевают, "зачем формализовать то, что явно неформализуемо?" На первое возражение легко ответить хотя бы ссылкой на экспертные системы и на выявившуюся в последнее время в "искусственном интеллекте" необходимость учитывать "нечетко сформулированные" понятия. В ответ на второе возражение перечислим девять задач, вынуждающих нас рассматривать формализации неформализуемых понятий и строить их теорию.

1. Соотношение программной системы и ее социального окружения. Любая программная система является формализацией используемых в ней понятий. Таким образом, все шире внедряющиеся сейчас программные системы, имеющие дело с понятиями человеческого общества, являются формализациями неформализуемых понятий, и закрывать глаза на это нельзя. Игнорирование этого "парадокса" ведет к стремлению переложить решение социальных задач "на плечи" ЭВМ, в том числе и к такому предельному выражению этого самоубийственного стремления, как "стратегическая оборонная инициатива".

2. Диалоговые программные системы. Н.В.Белякин [1] заметил, что при диалоге человека с ЭВМ человек стремится все время подменять формализации используемых понятий. Игнорирование этого свойства человека является одной из попыток заставить его приспособливаться к машинам и, соответственно, одним из факторов загрязнения интеллектуальной среды.

3. Анализ языков программирования. Автором в 1980 г. было замечено (доклад на московском городском семинаре по программированию), что формально непротиворечивые конструкции языков программирования часто содержательно плохо совместимы, и для строгого анализа этого явления необходимо рассматривать конкретную формализацию семантики языка программирования как элемент целого семейства расходящихся между собой формализаций, т.е. опять-таки как формализацию неформализуемых понятий.

4. Понимание сложных формальных определений человеком. Аналогичные соображения о том, что человек склонен даже сложное формальное понятие (как, например, семантику "универсального" языка программирования) понимать как неформализуемое, пытаюсь

найти под отдельными частями этого определения "содержательные идеи" и затем варьировать свою интерпретацию в соответствии с этими идеями, следует из рассмотрения Гэнноном [11] характерных ошибок в языках программирования, провоцируемых их нелогичностью. Заметим, что по-прежнему с чисто формальной точки зрения противоречий в таких определениях нет.

5. Развитие гуманитарных понятий. Н.В.Белякин [3,4] в своих работах, посвященных логическому анализу становления и развития гуманитарных понятий и их связи с нормами, показывает, что любое уточнение гуманитарного понятия (например, понятия "любовь") сразу же вызывает стремление найти прецеденты любви, не подпадающие под это уточнение. Таким образом, при широкой интерпретации формализации как совокупности строго установленных правил, регламентирующих оценку некоторой деятельности либо явления и поддающихся проверке, мы видим, что гуманитарные понятия опять-таки естественно рассматривать как неформализуемые, но в каждый конкретный момент развития общества они могут рассматриваться как в достаточной степени формализованные.

6. Развитие понятий у ребенка. В последние годы выявилась "волнообразная" картина развития ряда понятий у ребенка, которая плохо объясняется с традиционной точки зрения "приближений к истине", но хорошо объясняется, например, взаимодействием между формированием различных формализованных "ипостасей" понятия и механизмов выбора в разных ситуациях разных ипостасей.

7. Экспертные системы. В последнее время стала актуальной задача создания человеко-машинных систем для поддержания решений в областях, где нет общепринятой теории, а разные мнения противоречат друг другу. Естественно, развитие таких систем требует теории, учитывающей противоречивость и несовместимость различных частных формализаций, освещающих разные стороны одного и того же явления.

8. Соотношение сомнения и слепой веры. Известно, что для успешных действий часто необходима формализация, слепая вера и строго определенная система "цен", оценок поступков, явлений, результатов. В то же время такая излишняя определенность взгляда вредна при выборе цели, при пересмотре системы ценностей. Здесь необходимо сомнение. Таким образом, и здесь мы приходим к структуре, состоящей из множества несовместимых между собой формализмов, изменяющихся в зависимости от цели и системы оценок, и неформализуемой системы ценностей, управляющей выбором формализма.

9. Соотношение ценностей и выгод. Жизнь и машина. Экологические проблемы. Эта проблема в известной мере суммирует все сформулированные ранее. Рассматривая соотношение формализации и жизни, можно отталкиваться от достаточно малоизвестного, но знаменательного факта, что попытка оптимизации систем жизнеобеспечения, в частности, космических кораблей по какой-то системе строго определенных, формализованных критериев начина-

ет противоречить их основной функции: поддержанию жизни, особенно на достаточно длительных промежутках времени. Сама жизнь, сами потребности живых организмов оказываются неформализуемы.

Соответственно, прагматический подход, основывающийся на какой-либо системе достаточно точных критериев, может оптимизировать выгоды, получаемые, например, от хозяйства, но, как уже сейчас ясно, разрушает саму среду обитания, сами основы существования общества, потребности которого он призван удовлетворять. При этом безразлично, какова конкретная система "цен", проценты ли это выполнения бюрократически разработанного и "спущенного" плана либо доллары...

Это открывает еще одну сторону проблемы соотношения формализуемости и неформализуемости: соотношение между локальной выгодой и пользой. Локально выгодные действия, как правило, поддаются формализации и оптимизации, но чем более они оптимизированы, тем больший глобальный вред они приносят. Они ведут в глобальный тупик, воспринимаемый людьми, сросшимися с "общепринятой" системой выгод, как конец света.

Итак, иллюзия формализуемости, стремление закрыть глаза на неформализуемость большинства человеческих понятий либо прибегать к обтекаемым формулировкам и эвфемизмам типа: "Человеческое познание, хотя и имеет в каждый отдельный момент дело с относительной истиной, стремится к абсолютной", - являются внешними выражениями подспудного стремления избавиться от сомнений, решать не решая, по прецедентам и по накатанной колее, управлять не управляя, и, соответственно, переложить бремя решений со своих плеч на некий абсолютный закон, идолом которого сейчас служит ЭВМ. Поэтому неудивительно, что у тех, кто имеет мужество додумывать некоторые из следствий такой глобальной установки на несколько шагов вперед, все время возникает идея конца света либо цивилизации машин, поскольку основным фактором, мешающим оптимальному с точки зрения формализованных критериев (но тогда, конечно, уже абсолютно бесцельному) функционированию "машины" является сама жизнь. Формализация - упрощение действительности, и, следовательно, в конце концов убийство всего, что может вызывать сомнения в принятых критериях. Оптимизм заслуживает уважения лишь тогда, когда он имеет мужество не закрывать глаза ни на что.

Это соответствует известному принципу анализа систем и машин. Нужно предполагать, что все блоки машины, все составляющие элементы системы могут работать неправильно, и лишь тогда мы можем создать систему, работоспособную в реальной обстановке и решающую ту задачу, для которой она предназначена. Система же, рассчитанная в "идеальном" случае, в предположении непогрешимости многих элементов, в лучшем случае неработоспособна, а в худшем - решает вовсе не те задачи, для которых она была создана.

II. Задачи теории неформализуемых понятий

Выделим некоторые актуальные задачи нашей математической теории формализации неформализуемых понятий.

1. Построение точных моделей понятий в виде систем изменяющихся – расширяющихся и пересматривающихся – формализаций.

Сейчас уже имеются две такие модели, основанные на разных предпосылках и ориентированные на решение разного круга задач, – автопродуктивные системы Белякина и предложенные мною автопродуктивные системы теорий. Их систематическое сравнение см. в [6].

2. Изучение механизма пересмотра и исполнения формализаций при поступлении в систему новых знаний.

3. Моделирование "квантовой природы" гуманитарных понятий, когда любая попытка уточнения понятия приводит к его изменению, вплоть до того, что даже сама постановка вопроса, скажем, в социологической анкете, может заставить человека задуматься и изменить свое мнение.

Работы Белякина нацелены на решение этих двух задач. Наши работы также затрагивают эти задачи, но основными для них являются другие задачи, возникшие из практической необходимости рассматривать взаимодействия программных систем и их окружения.

4. Формулировка отношений между понятиями на уровне не одной формализации, а целой системы противоречащих друг другу формализаций, с учетом, может быть, хода развития такой системы и нашей системы ценностей.

В частности, необходимы следующие отношения между понятиями.

5. Изучение отношения "прагматического следствия", когда $\mathfrak{B}$, может быть, формально и не следует из $\mathfrak{A}$, но приняв $\mathfrak{A}$ в ходе пересмотра гипотез нашего понятия, мы вынуждены принять и $\mathfrak{B}$.

Заметим, что уже из этого описания прагматического следствия видно, что его адекватные экспликации должны быть недвусмысленными: очевидно, что прагматическое следствие может иметь большую либо меньшую силу.

6. Изучение "концептуальной противоречивости" утверждений либо понятий, когда принятие некоторого утверждения мешает принять другое, хотя формально они и непротиворечивы, либо введение в систему одного понятия мешает введению другого, поскольку каждое из них мешает другому развиваться.

Аналогично, и концептуальная противоречивость является недвусмысленным понятием. Наличие концептуальной противоречивости в языках программирования ведет к появлению так называемых характеристических ошибок, а в системах "научных" понятий – к эклектизму.

7. Построение прагматической логики, формализующей глобаль-

ные отношения между понятиями на уровне всей системы ипостасей. Из предыдущего видно, что прагматическая логика обычно оказывается неклассической.

На решение всех этих задач ориентирована развиваемая в работах автора концепция "автопродуктивных систем теорий" [6,7,8].

8. Изучение логического статуса определений в автопродуктивных системах.

Даже формально-логически консервативное определение при рассмотрении семейств изменяющихся теорий может оказаться фактором, мешающим развитию понятий.

9. Изучение процесса развития систем понятий, пополнения их новыми понятиями и исключения понятий.

10. Изучение отношения "концептуального распада" системы понятий, когда она делится на несколько подсистем, развивающихся в некотором смысле независимо друг от друга.

11. Изучение отношения "концептуального единства" системы понятий, когда она не может оказаться в ходе развития распадающейся.

12. Изучение отношения "концептуальной полноты" системы понятий, когда она является концептуально единой, но перестает быть таковой и даже становится концептуально противоречивой при пополнении новыми понятиями того же уровня.

13. Средства для формализации знаний о незнании и, соответственно, использования незнания как положительного фактора.

14. Рассмотрение традиционных задач логики с точки зрения концепции неформализуемости.

Пока не все названные задачи могут решаться существующими вариантами теорий неформализуемых понятий, которые находятся в самом начале пути.

III. Автопродуктивные системы теорий

В дальнейшем мы сосредоточимся на одном из вариантов теории неформализуемых понятий - автопродуктивных системах теорий (АСТ). Приводимые результаты даются без доказательств; большинство доказательств можно найти в работах [6,7].

Эта теория основана на идее использования всех преимуществ классической логики и в случае неформализуемых понятий. Для этого мы принимаем следующие гипотезы.

Гипотеза 1. Нельзя рассматривать процесс развития одного отдельно взятого понятия. Нужно рассматривать процесс развития целой совокупности взаимосвязанных понятий, описывающих некоторое явление.

Гипотеза 2. Объем понятия является производным от его связей с другими понятиями.

Гипотеза 3. Для гуманитарных понятий эти связи все время меняются, их невозможно фиксировать навсегда.

Следовательно, мы строим формализации для взаимосвязей понятий в данный конкретный момент для данной конкретной цели. А это дает возможность, осознавая неправильность "в общем случае" каждой возможной формализации, смело пользоваться в ней классической логикой, которая предназначена для описания взаимосвязей между объемами статических понятий.

Гипотеза 4. В каждый конкретный момент для каждого конкретного применения взаимосвязи между понятиями одного тезауруса описываются теорией в классическом исчислении предикатов первого порядка.

Гипотеза 5. Имеется теория T_0 , все теоремы которой признаются тождественно истинными для данной системы понятий. Теоремы T_0 будем называть трюизмами.

Гипотеза 6. Подавляющее большинство практически интересных утверждений остаются неразрешимыми в рамках T_0 .

Гипотеза 7. Любое корректное расширение T_j теории T_1 порождает противоречание T_j , корректные расширения T_1 .

Гипотеза 8. Для каждой непротиворечивой теории T_1 нашей системы имеется ее непротиворечивое корректное расширение T_j .

Подробное содержательное обсуждение этих гипотез и сравнение их с гипотезами, лежащими в основании теории Белякина, см. [6].

Теперь перейдем к математическим определениям.

Определение 1. Вычислимое семейство теорий сигнатуры σ с носителем $J \supset N$ - вычисляемая функция f , такая что $f(i, A)$ (т.е. результат применения f к (i, A) определен) для $i \in J$ и замкнутой формулы сигнатуры σA . Если $f(i, A) = 0$, то A называется аксиомой теории T_i . Множество теорем теории T_1 обозначим $\tau(T_1)$.

Определение 2. Автопродуктивная система теорий Σ сигнатуры σ - совокупность

- а) множества $J \subseteq N$, называемого носителем системы; $0 \in J$;
- б) вычислимого семейства теорий f с носителем J ; при всех $i \in J$ выполнено $\tau(T_0) \subseteq \tau(T_i)$;
- в) вычислимой функции $\varphi(i, j)$ (автопродуктивной функции), сопоставляющей каждой паре $i, j \in J$, таких, что $\tau(T_i) \subseteq \tau(T_j)$, пересечимое множество $\varphi(i, j) \subseteq J$, такое, что при каждом $k \in \varphi(i, j)$ теория $T_j \cup T_k$ противоречива, а пересечение $\tau(T_j) \cap_{k \in \varphi(i, j)} \tau(T_k)$ есть $\tau(T_i)$;
- г) функции (не обязательно вычислимой) ξ (функции расширений), сопоставляющей каждому $i \in J$, такому, что T_1 непротиворечива, $\xi(i) \in J$, такое, что $\tau(T_1) \subseteq \tau(T_{\xi(i)})$ и $T_{\xi(i)}$ непротиворечива.

Автопродуктивная система теорий (АСТ) называется сильной, если $\varphi(i, j)$ одноэлементно для любой пары $\tau(T_i) \subseteq \tau(T_j)$, такой, что $\tau(T_i) \subseteq \tau(T_j)$; конечной, если $\varphi(i, j)$ для таких i, j конечно, неархимедовой, если для любой вычислимой функции ψ , такой, что $\tau(T_{\psi(n)}) \subseteq \tau(T_{\psi(n+1)})$, найдется $T_{\Phi(\psi)}$, такая, что для всех n $\tau(T_{\psi(n)}) \subseteq \tau(T_{\Phi(\psi)})$, и если все $T_{\psi(n)}$ непротиворечивы, то и $T_{\Phi(\psi)}$.

непротиворечива; иммунной, если нет такой вычислимой ψ , что $\tau(T_{\psi(n)}) < \tau(T_{\psi(n+1)})$ для бесконечного числа $n \in \mathbb{N}$.

Примеры автопродуктивных систем легко строятся, исходя из теоремы Геделя в формуле Россера [5].

Пример 1. Пусть SR_0 — формальная теория, содержащая арифметику. Построим АСТ, базирующуюся на SR_0 и ее расширениях россеровскими формулами, и обозначим эту систему SR .

Носителем SR является множество кортежей, составленных из 0 и 1. $SR_0 = SR_{\wedge}$, где $\wedge$ — пустой кортеж. Как и обычно, через x^*y обозначаем соединение кортежей, через $[n]$ — одноэлементный кортеж с элементом n , $[n_1, \dots, n_k]$ — кортеж из k членов $n_1, \dots, n_k$ в указанном порядке; $\bar{x}$ — кортеж, получаемый инверсией всех членов кортежа x .

Пусть SR_x уже построена. Тогда $SR_{x^*[0]} = SR_x \cup (\neg R_{SR_x})$, $SR_{x^*[1]} = SR_x \cup (R_{SR_x})$, где R_T — россеровская формула теории T .

Все SR_x непротиворечивы, и $x < y \Leftrightarrow \tau(SR_x) < \tau(SR_y)$. Автопродуктивная функция φ сопоставляет каждой паре кортежей

$$\begin{aligned} &\langle x, x^*[y_1, \dots, y_k] \rangle \text{ множество} \\ &\langle x^*[\bar{y}_1], x^*[y_1]^*[\bar{y}_2], \dots, x^*[y_1, \dots, y_{k-1}]^*[\bar{y}_k] \rangle. \\ &\xi(x) = x^*[1]. \end{aligned}$$

Отметим коренное отличие SR от рассматривавшихся ранее в литературе трансфинитных последовательностей теорий [10]. R_{SR_x} содержательно истинны на натуральном ряду, так что в SR на равных правах входят как теории, согласующиеся с арифметической истинностью, так и теории, противоречащие ей.

Пример 2. Автопродуктивная система всех расширений наследственно неразрешимой теории, включающей арифметику.

Носитель системы RE — множество геделевых номеров рекурсивных функций, перечисляющих замкнутые формулы сигнатуры σ , T_α — теория, образуемая добавлением к T_0 множества аксиом, перечисляемых α , $\varphi(\alpha, \beta)$ — множество теорий вида

$$\langle \alpha(0), \dots, \alpha(k), \neg \beta(0) \vee \dots \vee \neg \beta(\mathbb{N}) \rangle,$$

где $\alpha(0), \dots, \alpha(k)$, $\beta(0), \dots, \beta(\mathbb{N})$ — аксиомы T_α и T_β в порядке их перечисления. Эта система неархимедова и безразлично полна, т.е. если $T_\alpha \not\models \psi$ и $T_\alpha \not\models \neg \psi$, то найдется T_β , $\tau(T_\alpha) \leq \tau(T_\beta)$ и $T_\beta \models \psi$.

Пример 3. Автопродуктивная система всех конечных расширений T_0 , являющаяся иммунной.

Пусть μA есть A , если $\mu=0$, и $\neg A$, если $\mu=1$. Пусть все замкнутые формулы сигнатуры σ , не начинающиеся с отрицания, занумерованы подряд. Кортеж формул $[\mu_1 \tilde{\gamma}_{i_1}, \dots, \mu_n \tilde{\gamma}_{i_n}]$, где $i_1 < i_2 < \dots < i_n$, полон, если ни для одного $k < i_n$, $k \neq i_j$ ни $\tilde{\gamma}_k$, ни $\neg \tilde{\gamma}_k$ не следует из $\mu_1 \tilde{\gamma}_{i_1}, \dots, \mu_n \tilde{\gamma}_{i_n}$ ($\tilde{\gamma}_i$ — формула с номером i). Полная система импликаций для n — набор всех импликаций вида $\mu_1 \tilde{\gamma}_{i_1} \& \dots \& \mu_k \tilde{\gamma}_{i_k} \Rightarrow \mu_j \tilde{\gamma}_{i_j}$, $i_1, \dots, i_k, i < n$ выводимых в T_0 .

Носитель автопродуктивной системы FE — множество пар $\langle x, u \rangle$, где x — геделев номер полного набора $[\mu_1 \tilde{\gamma}_{i_1}, \dots, \mu_n \tilde{\gamma}_{i_n}]$, а u —

геделев номер полной системы импликаций для t_n .

Если $\tau(T_a) < \tau(T_b)$, то в полном наборе b есть формулы, не входящие в полный набор a . Составим кортеж всех этих формул:

$$[\lambda_1 \tilde{\beta}_{z_1}, \dots, \lambda_l \tilde{\beta}_{z_l}].$$

Теперь возьмем кортежи

$$[\mu_1 \tilde{\beta}_{x_1}, \dots, \mu_n \tilde{\beta}_{x_n}, \lambda_1 \tilde{\beta}_{z_1}], \dots, [\mu_1 \tilde{\beta}_{x_1}, \dots, \mu_n \tilde{\beta}_{x_n}, \lambda_l \tilde{\beta}_{z_l}] \quad \text{и}$$

пополним их, пользуясь данными полными системами импликаций. Полученное конечное множество теорий и есть $\varphi(a, b)$.

Функция расширения в данном случае нерекурсивна.

ТЕОРЕМА 1. Если Σ — конечная АСТ, то для каждой T_1 найдется такое $\mathcal{U}_1$, что $\tau(T_1) = \tau(T_0 \cup \{\mathcal{U}_1\})$.

СЛЕДСТВИЕ. Нет конечной АСТ, базирующейся на интуиционистской арифметике.

Таким образом, не всякая логика подходит в качестве внутренней логики теорий и АСТ. Наш выбор классической логики оказывается обоснованным не только прагматическими, но и чисто математическими соображениями.

IV. Прагматическая логика

Отношением, на котором базируется прагматическая логика — глобальная логика автопродуктивной системы, — является отношение (абсолютного) прагматического следствия $\mathcal{U} \Rightarrow \mathcal{B}$.

Определение 3. $\mathcal{U}$ прагматически влечет $\mathcal{B}$ в теории T_1 из системы Σ , если для $j \leq J$, $\tau(T_1) \leq \tau(T_j)$, из $T_j \vdash \mathcal{U}$ следует $T_j \vdash \mathcal{B}$. Система Σ прагматически строга, если для всех замкнутых формул $\mathcal{U}, \mathcal{B}$ $T_1 \models \mathcal{U} \Rightarrow \mathcal{B}$ тогда и только тогда, когда $T_1 \vdash \mathcal{U} \Rightarrow \mathcal{B}$.

Предложение 1. Если $T_1 \vdash \mathcal{U} \Rightarrow \mathcal{B}$, то $T_1 \models \mathcal{U} \Rightarrow \mathcal{B}$.

Предложение 2. Σ прагматически строга тогда и только тогда, когда она безразлично полна.

Пример 4. В системе SR имеет место $T_x \models \mathcal{U} \Rightarrow_{R_{SR_x}} \mathcal{B}$, где $\mathcal{U}$ — формула, невыводимая в T_x , но выводимая в $T_x \cup \{R_{SR_x}\}$, но, конечно, не для всех таких $\mathcal{U} T_x \vdash \mathcal{U} \Rightarrow_{R_{T_x}} \mathcal{B}$.

Теперь введем полную систему прагматической логики. Прагматические связки $\Rightarrow, \&, \vee, \forall, \exists$ соответствуют аналогичным связкам интуиционистской логики, $\sim$ — сильному отрицанию. Чтобы минимизировать трудности, связанные с термами, добавим к языку сигнатуры σ ε -термы Гильберта [4]. Как известно, такое расширение консервативно. Далее, будем рассматривать в любой теории T_1 лишь такие термы t , что для всех входящих в них ε -термов $\varepsilon_x \mathcal{U}(x) T_1 \models \exists x \mathcal{U}(x)$.

Прагматические формулы — формулы, составленные из формул сигнатуры σ при помощи прагматических связок. Формулы сигнатуры σ будем называть внутренними формулами.

Определение 4. Отношение $T_1 \models \mathcal{U}$ "прагматическая формула $\mathcal{U}$

вынуждается теорий T_1 системы Σ :

- а) Если A - внутренняя формула, то $T_1 \models A \Leftrightarrow T_1 \vdash A$, $T_1 \models \sim A \Leftrightarrow T_1 \vdash \neg A$.
- б) Если $U = U_1 \& U_2$, то $T_1 \models U$ тогда и только тогда, когда $T_1 \models U_1$ и $T_1 \models U_2$, $T_1 \models \sim U$ тогда и только тогда, когда $T_1 \models \sim U_1$ или $T_1 \models \sim U_2$.
- в) Если $U = U_1 \vee U_2$, то $T_1 \models U$ тогда и только тогда, когда $T_1 \models U_1$ или $T_1 \models U_2$, $T_1 \models \sim U$ тогда и только тогда, когда $T_1 \models \sim U_1$ и $T_1 \models \sim U_2$.
- г) Если $U = U_1 \Rightarrow U_2$, то $T_1 \models U$ тогда и только тогда, когда для всех $T_j, \tau(T_1) \leq \tau(T_j)$, из $T_j \models U_1$ следует $T_j \models U_2$. $T_1 \models \sim U$ тогда и только тогда, когда $T_1 \models U_1$ и $T_1 \models \sim U_2$.
- е) Если $U = \sim U_1$, то $T_1 \models \sim U_1$ тогда и только тогда, когда $T_1 \models U_1$.
- ж) Если $U = \forall x U_1$, то $T_1 \models U$ тогда и только тогда, когда для всех $\tau(T_1) \leq \tau(T_j)$, для всех t $T_j \models U_1[x|t]$. $T_1 \models \sim U$ тогда и только тогда, когда есть такое t , что $T_1 \models \sim U_1[x|t]$.
- з) Если $U = \exists x U_1$, то $T_1 \models U$ тогда и только тогда, когда есть такое t , что $T_1 \models U_1[x|t]$. $T_1 \models \sim U$ тогда и только тогда, когда для всех $\tau(T_1) \leq \tau(T_j)$, для всех t $T_j \models \sim U_1[x|t]$.

ТЕОРЕМА 2. Прагматическая формула U вынуждается всякой T_1 всякой АСТ Σ с $T_0 = Th$ тогда и только тогда, когда существуют такие формулы $\Phi_1, \dots, \Phi_n$, Φ интуиционистской логики высказываний с сильным отрицанием (ИЛСО), в которых все логические связки помечены точками, такая подстановка ξ внутренних формул вместо пропозициональных букв, что:

- а) все Φ_i имеют вид $\mu_1^1 p_1^1 \& \dots \& \mu_n^1 p_n^1 \Rightarrow p_0^1$, где p_j^1 - пропозициональные буквы, и $Th - \mu_1^1 p_1^1 \& \dots \& \mu_n^1 p_n^1 \xi \Rightarrow p_0^1$;
- б) в ИЛСО $\Phi_1, \dots, \Phi_n \vdash \Phi$;
- в) $U = \Phi \xi$.

Итак, интуиционистская логика с сильным отрицанием, отвергнутая нами как внутренняя логика автопродуктивных систем, оказывается прагматической, глобальной логикой таких систем.

Усилим понятие прагматической строгости системы. Даже в прагматически строгой, т.е. безразлично полной, системе могут быть нетривиальные прагматические зависимости между формулами. Например, если видоизменить систему примера 3 таким образом, чтобы в кортеже $[\mu_1 \tilde{\gamma}_1, \dots, \mu_n \tilde{\gamma}_n]$ содержались все формулы с номерами, меньшими n , то система осталась бы безразлично полной, но имелись бы зависимости $\tilde{\gamma}_1 \Rightarrow \tilde{\gamma}_j \vee \sim \tilde{\gamma}_j$, где $j < i$. Одна из зависимостей более высокого порядка выполнена в любой безразлично полной системе. А именно, пусть, как обычно, слабое интуиционистское отрицание $\neg U$ есть $U \Rightarrow \sim U$.

Предложение 3. $T_1 \vdash \neg A \Rightarrow \sim A$ для любой внутренней формулы A любой безразлично полной Σ .

Импликация вида $\forall \bar{x} (\mu_1 A_1 \& \dots \& \mu_n A_n \Rightarrow \mu A)$, где $A_1, \dots, A_n, A$ - внутренние, назовем элементарными зависимостями, $\forall \bar{x} (\mu_1 A_1 \& \dots \& \mu_n A_n \Rightarrow \mu A)$ - концептуализациями элементарных зависимостей.

Предложение 4. Концептуализация элементарной зависимости

вынуждается T_1 безразлично полной системы Σ тогда и только тогда, когда в T_1 выводима соответствующая элементарная зависимость.

Определение 5. Система Σ автономно полна, если для любой T_1 и любых $A, B_1, \dots, B_n$, таких, что $T_1 \vdash A \Rightarrow B_1, \dots, T_1 \vdash A \Rightarrow B_n$, имеется T_j , $\tau(T_1) \subseteq \tau(T_j)$, $T_j \vdash A$, для всех i $T_j \vdash B_i$.

ТЕОРЕМА 3. Если Σ автономно полна, то $T_1 \models \mathcal{U}$ тогда и только тогда, когда существуют формулы Φ_1, Φ ИЛСО и подстановка внутренних формул вместо предикатных букв ξ такие, что

а) все Φ_i имеют вид $\forall x(\mu_1^1 P_1^1 \& \dots \& \mu_n^1 P_n^1 \Rightarrow \mu_0^1 P_0^1)$, где P_j^1 - предикаты, либо $\forall x(\neg R \Rightarrow \neg R)$, где R - предикат;

б) элементарные зависимости, соответствующие $\Phi_i \xi$, выводимы в T_k ;

с) Φ выводимо в ИЛСО из $\Phi_1, \dots, \Phi_n$;

д) $\mathcal{U} = \Phi \xi$.

V. Применения автопродуктивных систем теорий

С помощью автопродуктивных систем можно определить не только абсолютную прагматическую логику, которой мы занимались в предыдущем параграфе, но и относительные прагматические логики, базирующиеся на системах оценок. Например, в [6] показано, как определить на системе SR неабсолютное прагматическое следствие, которое можно интерпретировать как индуктивный вывод о дальнейшем развитии системы. Приведем использованную в [6] математическую конструкцию, чтобы еще раз подчеркнуть принципиальное различие нашего подхода и модного сейчас подхода так называемых нечетких множеств, где пытаются применять к не до конца определенным понятиям все ту же парадигму всезнания и все оценивать числами.

$\mathcal{J} \subseteq J$ - внутреннее множество, если есть такое $\mathcal{U}$, что $\mathcal{J} = \{i \in J \mid T_1 \vdash \mathcal{U}\}$. Семейство внутренних множеств $J_n(J)$ образует нижнюю полурешетку, наименьшим элементом которой i_0 является множество всех противоречивых T_1 . Отображение Φ некоторого семейства подмножеств J на нижнюю полурешетку $\mathcal{E}$ с минимальным элементом s_0 называется оценкой автопродуктивной системы Σ , если $J_n(J) \subseteq \text{Dom}(\Phi)$, $\Phi(i_0) = s_0$, Φ сохраняет пересечения. « - отношение сильного превосходства на $\mathcal{E}$, если « антирефлексивно и транзитивно, из $a \ll b$ следует $a \leq b$, $s_0 \ll a$ при $s_0 \neq a$, если $a \leq b$ и $b \ll c$, то $a \ll c$.

$\mathcal{U}$ прагматически влечет $\mathcal{B}$ в T_1 при оценке Φ , если

$\{i \in J \mid \tau(T_1) \subseteq \tau(T_j), T_j \vdash \mathcal{U}, T_j \vdash \mathcal{B}\} \ll \{i \in J \mid \tau(T_1) \subseteq \tau(T_j), T_j \vdash \mathcal{U}, T_j \vdash \mathcal{B}\}$.

$\mathcal{U}$ и $\mathcal{B}$ концептуально противоречат друг другу в тех же условиях, если $\{j \mid \tau(T_1) \subseteq \tau(T_j), T_j \vdash \mathcal{U} \& \mathcal{B}\} \ll \{j \mid \tau(T_1) \subseteq \tau(T_j), T_j \vdash \mathcal{U} \text{ или } T_j \vdash \mathcal{B}\}$.

Содержательно это означает, что намного больше возможностей развития тогда, когда мы принимаем либо $\mathcal{U}$, либо $\mathcal{B}$, чем тогда, когда мы их принимаем вместе.

В [6] продемонстрировано, как можно использовать для анализа понятий языков программирования индуцированную АСТ концепцию устойчивости высказывания. Например, рассмотренные нами элементарные зависимости устойчивы, если они не изменяют значения после замены внутренних связей на прагматические, а уже высказывание $\ulcorner \forall \neg \urcorner$ не всегда устойчиво. В [6] показано, что, если формула $\ulcorner \urcorner$ выводима из устойчивых формул выводом в интуиционистской логике, в котором в аксиомы вместо предикатных переменных подставлялись устойчивые формулы, то она также устойчива. Это обосновывает метод установления концептуальной противоречивости, предложенный в [9] и заключающийся в том, что строится конструктивная теория рассматриваемых понятий, и, если в ней выводимо $\ulcorner \forall \neg \urcorner$, то рассматриваемые понятия неустойчивы и, следовательно, плохо совместимы.

Автопродуктивные системы дают возможность анализировать структуру развития научной теории, включающую научные "революции". В частности, иммунные АСТ моделируют структуры, в которых научные революции неизбежны: любое движение по линии пополнения теории через конечное число шагов заходит в тупик, и необходим ее пересмотр.

Еще одной новой возможностью, открываемой автопродуктивными системами, является формализация незнания. В [7] приведена конструкция, базирующаяся на идее соединения полных наборов полных систем импликаций с "инверсно полными наборами", которые наряду с $\mu_1 \tilde{\beta}_1$ включают в себя и все $\mu_j \tilde{\beta}_j$, $j \leq n$, $\mu_j \tilde{\beta}_j \Rightarrow \mu_1 \tilde{\beta}_1$, и введения "предиката незнания", постулирующего при помощи геделевской нумерации, что мы нечто не знаем и при дальнейшем развитии без пересмотра теории и знать не будем.

В связи с этим появляется понятие псевдопроблемы в T_1 системы Σ ; это формула $\ulcorner \urcorner$, такая, что при $\tau(T_1) \subseteq \tau(T_j)$, $T_j \vdash \ulcorner \urcorner$ и $T_j \not\vdash \neg \ulcorner \urcorner$, или, другими словами, $T_1 \vdash \neg(\ulcorner \vee \neg \urcorner)$. А это понятие дает возможность проанализировать "метод критики предпосылок", неоднократно трактовавшийся как логическая ошибка.

Как известно, метод критики предпосылок включает рассуждение типа "Он говорит, что $\ulcorner \urcorner$. Но $\ulcorner \urcorner$ следует из β , а β неприемлемо. Значит, он неправ".

ТЕОРЕМА 4. Если $\ulcorner \urcorner$ - псевдопроблема в T_1 , $T_j \vdash \beta$ и $\tau(T_1) \subseteq \tau(T_j)$, $T_1 \vdash \ulcorner \Rightarrow \beta$, то можно построить такое α , что $T_j \vdash \alpha$, $T_1 \not\vdash \alpha \Rightarrow \beta$ и $T_1 \not\vdash \alpha \Rightarrow \ulcorner \urcorner$, $T_1 \not\vdash \neg \alpha \Rightarrow \neg \ulcorner \urcorner$, $T_1 \not\vdash \alpha \Rightarrow \neg \ulcorner \urcorner$.

Таким образом, корректное применение метода критики предпосылок требует найти в основаниях предложенного утверждения не просто утверждение, кажущееся неприемлемым, а псевдопроблему, и заставляет найти новые основания для β , никак не зависящие от псевдопроблемы $\ulcorner \urcorner$. А вот если β принято в качестве новой аксиомы, то метод критики оснований просто убийственен: он доказывает неприемлемость β в таком качестве, β может быть лишь следствием не затрагивающего псевдопроблему утверждения α .

Но препятствием на пути расширений применения АСТ пока остаются технические трудности, связанные с фиксированностью сигнатуры σ : мы откажемся моделировать процесс пополнения и ограничения системы исходных понятий.

ЛИТЕРАТУРА

1. Белякин Н.В., Жевлакова Е.А. Операция диаголизации и вопросно-ответные системы // Вычислительные системы. 1976. Вып. 67. С.113-126.
2. Белякин Н.В. Как формализовать "неформализуемое"? // Семиотические модели в управлении: Тез. докл. и сообщ. к 5 научно-метод. конф. 1-3 окт. 1984 г. Новосибирск, 1984. С.11-13.
3. Белякин Н.В. О логическом статусе норм // Интеллектуальные системы и имитация: Тез. докл. и сообщ. к 6 научно-метод. конф. 28-30 окт. 1985 г. Новосибирск, 1985. С.66-67.
4. Гильберт Д., Бернайс П. Основания математики: Теория доказательств. М., 1982.
5. Клини С.К. Введение в математику. М., 1957.
6. Непейвода Н.Н. О формализации неформализуемых понятий: автопродуктивные системы теорий // Семиотика и информатика. 1985. Вып.25. С.46-93.
7. Непейвода Н.Н. Автопродуктивные системы теорий как средство описания систем неформализуемых понятий // Неклассические логики. М., 1985. С.96-108.
8. Непейвода Н.Н. Автопродуктивные системы теорий и системы неформализуемых понятий // Интенциональные логики и логическая структура теорий. Тбилиси, 1985. С.100-101.
9. Непейвода Н.Н. Правило неожиданности и структурные goto // Семиотика и информатика. 1984. Вып.23. С.18-46.
10. Феферман С. Трансфинитные рекурсивные последовательности математических теорий. 1971. Т.15, № 5. С.84-139.
11. Gannon J.D. Characteristic error in programming languages // ACM, 1978. N.Y., 1978. Vol.2. P.570-577.

ДВАЖДЫ АЛГЕБРЫ И СИММЕТРИЧЕСКИЕ ЛОГИКИ

В статьях [7],[8] и [12] я развил идею двухуровневых логик. Я различал формулы, которые выражают суждения, утверждения и пропозициональные термы, которые обозначают события, положения дел. Я также различал логические связки, приложимые к термам, и логические связки, с помощью которых из одних утверждений образуются другие. Заметим, что алгебра события не обязательно совпадает с алгеброй утверждений. Идея двух уровней логики - внутренней логики (логики событий) и внешней логики (логики утверждений) - была выдвинута Н.А.Васильевым. Я пытался реализовать ее в терминах современной логики.

В настоящей статье я сосредоточу свое внимание на алгебрах событий и методах их построения. Я рассмотрю их самостоятельно, абстрагируясь от идеи двух уровней логики. Моя конечная цель, выходящая за рамки статьи, реконструировать другую исключительно важную идею Н.А.Васильева, его идею многомерных логик. Хочу сразу подчеркнуть, что идея многомерных логик отлична от идеи многозначных логик, и, к сожалению, до сих пор не разрабатывалась современными логиками. В основном я ограничусь лишь двумерными логиками, поскольку они известны в другой форме, вопросу построения логик более двух измерений посвящена другая статья.

1. Методы конструкции сдвоенных алгебр

Я начну с рассмотрения методов построения сдвоенных алгебр, или, как их чаще называют, дважды алгебр. Начнем с простого случая. Пусть $\langle P, \leq, \cap \rangle$ будет полурешеткой, т.е. P есть непустое множество, $\leq$ - частичный порядок на P ($\leq$ - рефлексивное, антисимметричное и транзитивное отношение) и $\cap$ - двуместная функция, удовлетворяющая условию

$$c \leq a \cap b \Leftrightarrow c \leq a \text{ и } c \leq b.$$

Пусть $\langle P, \geq, \cup \rangle$ будет также полурешеткой, где $\geq$ - частичный порядок и выполняется условие

$$c \geq a \cup b \Leftrightarrow c \geq a \text{ и } c \geq b.$$

Эти системы дуальны, т.е. существует такое отображение h первой системы на вторую, что

$$\begin{aligned} h(a) &= a \\ h(a \cap b) &= h(a) \cup h(b) \\ a \leq b &\Leftrightarrow h(a) \geq h(b) \end{aligned}$$

И отображение q второй системы на первую такое, что

$$\begin{aligned} q(a) &= a \\ q(a \cup b) &= q(a) \cap q(b) \\ a \geq b &= q(a) \leq q(b) \end{aligned}$$

При этом $qh(a)=a$ и $hq(a)=a$.

Однако если мы рассмотрим систему $\langle P, \geq, \leq, \cap, \cup \rangle$, где $\langle P, \leq, \cap \rangle$ и

$\langle P, \geq, \cup \rangle$ суть полурешетки, то мы не получим решетку. Чтобы получить решетку, нам надо постулировать следующее условие сопряженности

$$a \geq b \Leftrightarrow a \leq b.$$

Если полурешетки рассматриваются как универсальные алгебры, то условие сопряженности будет следующим:

$$a \cap b = a \Leftrightarrow a \cup b = b.$$

Если мы хотим иметь эквивалентную систему аксиом для решетки, тогда к аксиомам нижней и верхней полурешеток мы добавляем законы поглощения:

$$(a \cap b) \cup b = b \text{ и } a \cap (a \cup b) = a.$$

Законы поглощения выполняют роль условия сопряженности. Решетка, т.е. сдвоенная полурешетка с условием сопряженности будет самодуальной.

Следующий шаг состоит в построении прямого произведения самодуальной системы. В случае решетки $\langle P, \leq, \cap, \cup \rangle$ мы строим систему $\langle P \times P, \leq, \cap, \cup \rangle$ следующим образом:

$$\begin{aligned} \langle a_1, a_2 \rangle \leq \langle b_1, b_2 \rangle &\Leftrightarrow a_1 \leq b_1 \text{ и } a_2 \leq b_2 \\ \langle a_1, a_2 \rangle \cap \langle b_1, b_2 \rangle &= \langle a_1 \cap b_1, a_2 \cap b_2 \rangle \\ \langle a_1, a_2 \rangle \cup \langle b_1, b_2 \rangle &= \langle a_1 \cup b_1, a_2 \cup b_2 \rangle. \end{aligned}$$

Построенная таким образом система, как легко видеть, будет решеткой. Теперь мы можем ввести отрицание, определенное на парах:

$$\sim \langle a_1, a_2 \rangle = \langle a_2, a_1 \rangle.$$

Введенное отрицание на парах будет отрицанием де Моргана, т.е. выполняются следующие равенства:

$$\begin{aligned} \sim \sim x &= x \\ \sim (x \cap y) &= \sim x \cup \sim y \\ \sim (x \cup y) &= \sim x \cap \sim y \end{aligned}$$

(Здесь $x, y, \dots$ — переменные, пробегающие по парам).

Мы можем построить секвенциальное исчисление, соответствующее решетке и решетке с отрицанием де Моргана.

2. Решеточная логика

Основная секвенция имеет форму:

$$A \rightarrow A$$

Логические фигуры заключения:

$$\begin{array}{c} \frac{\Gamma \rightarrow \theta, A \quad \Gamma \rightarrow \theta, B}{\Gamma \rightarrow \theta, A \& B} \qquad \frac{A, \Gamma \rightarrow \theta \text{ или } B, \Gamma \rightarrow \theta}{A \& B, \Gamma \rightarrow \theta} \\ \frac{\Gamma \rightarrow \theta, A \text{ или } \Gamma \rightarrow \theta, B}{\Gamma \rightarrow \theta, A \vee B} \qquad \frac{A, \Gamma \rightarrow \theta \quad B, \Gamma \rightarrow \theta}{A \vee B, \Gamma \rightarrow \theta} \end{array}$$

Структурные фигуры заключения:

$$\begin{array}{c} \frac{\Gamma \rightarrow \Delta, B, A, \theta}{\Gamma \rightarrow \Delta, A, B, \theta} \qquad \frac{\Gamma, B, A, \Delta \rightarrow \theta}{\Gamma, A, B, \Delta \rightarrow \theta} \qquad \text{перестановка} \\ \frac{\Gamma \rightarrow \theta, A, A}{\Gamma \rightarrow \theta, A} \qquad \frac{A, A, \Gamma \rightarrow \theta}{A, \Gamma \rightarrow \theta} \qquad \text{сокращение} \end{array}$$

Для этой системы не значимы структурные правила добавления (ослабления). Сечение:

$$\frac{\Gamma \rightarrow \theta, M \quad M, \Delta \rightarrow \Psi}{\Gamma, \Delta \rightarrow \theta, \Psi}$$

является допустимой фигурой заключения. (Доказательство устранимости сечения см.: В.А.Смирнов [6]).

3. Симметрическая решеточная логика

Для построения симметрической решеточной логики в форме секвенциального исчисления мы добавляем к описанной выше решеточной логике следующие логические фигуры заключения:

$$\frac{\Gamma \rightarrow \theta, \sim A \quad \text{или} \quad \Gamma \rightarrow \theta, \sim B}{\Gamma \rightarrow \theta, \sim (A \& B)} \quad \frac{\sim A, \Gamma \rightarrow \theta \quad \sim B, \Gamma \rightarrow \theta}{\sim (A \& B), \Gamma \rightarrow \theta}$$

$$\frac{\Gamma \rightarrow \theta, \sim A \quad \Gamma \rightarrow \theta, \sim B}{\Gamma \rightarrow \theta, \sim (A \vee B)} \quad \frac{\sim A, \Gamma \rightarrow \theta \quad \text{или} \quad \sim B, \Gamma \rightarrow \theta}{\sim (A \vee B), \Gamma \rightarrow \theta}$$

$$\frac{\Gamma \rightarrow \theta, A}{\Gamma \rightarrow \theta, \sim \sim A} \quad \frac{A, \Gamma \rightarrow \theta}{\sim \sim A, \Gamma \rightarrow \theta}$$

Структурные фигуры заключения прежние. Таким образом, мы имеем пример простой симметрической логики.

На базе ограниченной решетки мы можем построить ее степень, определив нуль и единицу следующим образом:

$$0 = \langle 0, 1 \rangle \quad 1 = \langle 1, 0 \rangle.$$

Если решетка ограничена, то мы добавляем к языку константы t и f . В качестве основных принимаются также секвенции:

$$\rightarrow t \quad \text{и} \quad f \rightarrow$$

Теперь мы можем сделать следующий шаг. Пусть пары выполняют следующие условия

$$a_1 \cap a_2 = 0 \quad \text{и} \quad a_1 \cup a_2 = 1.$$

Тогда мы получим решетку с ортодополнением.

Таким образом, мы построили sdвоенную систему из некоторой системы и ее дуала и некоторого условия сопряженности. Затем мы проанализировали степень самодуальной системы.

Однако мы можем начать с некоторой самодуальной системы, которая не necessarily получается процедурой, описанной выше. Таков случай с дистрибутивной решеткой. Я не знаю, можно ли построить ее из полурешеток с помощью некоторого условия сопряженности (или других систем с некоторым условием сопряженности). Но мы можем построить степень дистрибутивной решетки и ввести соответствующее де Моргановское отрицание. Ограниченная дистрибутивная решетка с де Моргановским отрицанием есть квазибулева алгебра. Мы можем предложить секвенциальное исчисление для логик, соответствующих дистрибутивной решетке и дистрибутивной решетке с де Моргановским отрицанием. Для этого к описанным выше секвенциальным исчислениям мы добавляем структурные фигуры добавления.

4. Полубулевы алгебры и НВ-логика

Обратимся к полубулевой алгебре. Рассмотрим алгебраическую систему $\langle P, \cap, \cup, \supset, \dot{-} \rangle$, где $\langle P, \cap, \cup, \supset \rangle$ есть псевдобулева алгебра и $\langle P, \cap, \cup, \dot{-} \rangle$ ее дуал (брауэрова алгебра). Эта система была тщательно исследована Цецилией Раушер и названа ею полубулевой алгеброй [11].

Операции этой алгебры на парах определяются мною следующим образом:

$$\begin{aligned}\langle a_1, a_2 \rangle \cap \langle b_1, b_2 \rangle &= \langle a_1 \cap b_1, b_2 \cup a_2 \rangle, \\ \langle a_1, a_2 \rangle \cup \langle b_1, b_2 \rangle &= \langle a_1 \cup b_1, b_2 \cap a_2 \rangle, \\ \langle a_1, a_2 \rangle \supset \langle b_1, b_2 \rangle &= \langle a_1 \supset b_1, b_2 \dot{-} a_2 \rangle, \\ \langle a_1, a_2 \rangle \dot{-} \langle b_1, b_2 \rangle &= \langle a_1 \dot{-} b_1, b_2 \supset a_2 \rangle, \\ \neg \langle a_1, a_2 \rangle &= \langle \neg a_1, \neg a_2 \rangle, \\ \neg \langle a_1, a_2 \rangle &= \langle \neg a_1, \neg a_2 \rangle.\end{aligned}$$

Таким образом, введенные операции на парах дают полубулеву алгебру.

Ц. Раушер предложила следующую систему аксиом для этой алгебры:

$$\begin{array}{ll} (I_1) & a \cup b = b \cup a & a \cap b = b \cap a \\ (I_2) & (a \cup b) \cup c = a \cup (b \cup c) & (a \cap b) \cap c = a \cap (b \cap c) \\ (I_3) & (a \cap b) \cup b = b & (a \cup b) \cap a = a \\ (I_4) & b \cup (a \dot{-} b) = a \cup b & a \cap (a \supset b) = a \cap b \\ (I_5) & (a \dot{-} b) \cup a = a & (a \supset b) \cap b = b \\ (I_6) & (a \dot{-} c) \cup (b \dot{-} c) = (a \cup b) \dot{-} c & (a \supset b) \cap (a \supset c) = a \supset (b \cap c) \\ (I_7) & (a \dot{-} a) \cup b = b & (a \supset a) \cap b = b\end{array}$$

Полубулева алгебра имеет нулевой элемент

$$0 = a \dot{-} a$$

и единичный

$$1 = a \supset a.$$

Естественно, вводятся два дополнения:

$$\neg a = a \supset 0 \quad \neg a = 1 \dot{-} a.$$

Логикой, соответствующей полубулевой алгебре, будет сдвоенная гейтинг-брауэрова логика НВ. Ее аксиоматика предложена Ц. Раушер в 1974 г.

Схемы аксиом НВ:

$$\begin{array}{l}(A_1) \quad (A \supset B) \supset ((B \supset C) \supset (A \supset C)) \\ (A_2) \quad A \supset A \vee B \\ (A_3) \quad B \supset A \vee B \\ (A_4) \quad (A \supset C) \supset ((B \supset C) \supset (A \vee B \supset C)) \\ (A_5) \quad A \& B \supset B \\ (A_6) \quad A \& B \supset A \\ (A_7) \quad (C \supset A) \supset ((C \supset B) \supset (C \supset A \& B)) \\ (A_8) \quad (A \supset (B \supset C)) \supset (A \& B \supset C) \\ (A_9) \quad (A \& B \supset C) \supset (A \supset (B \supset C)) \\ (A_{10}) \quad A \supset B \vee (A \dot{-} B) \\ (A_{11}) \quad (A \supset B) \supset (\neg B \supset \neg A) \\ (A_{12}) \quad (A \dot{-} B) \supset \neg (A \supset B)\end{array}$$

- $(A_{13}) ((A \dot{\rightarrow} B) \dot{\rightarrow} C) \supset (A \dot{\rightarrow} (B \vee C))$
 $(A_{14}) \neg(A \dot{\rightarrow} B) \supset (A \supset B)$
 $(A_{15}) (A \supset (C \dot{\rightarrow} C)) \supset \neg A$
 $(A_{16}) \neg A \supset (A \supset (C \dot{\rightarrow} C))$
 $(A_{17}) ((C \supset C) \dot{\rightarrow} A) \supset \neg A$
 $(A_{18}) \neg A \supset ((C \supset C) \dot{\rightarrow} A)$

Правилами вывода являются

$$\frac{A, A \supset B}{B}$$

и правило

$$\frac{A}{\neg \neg A}$$

Логика НВ может быть описана в достаточно изящной секвенциальной форме (с многосукцедентными секвенциями) - GNB. Для интуиционистских связей - это системы G3 Клини.

Основная секвенция имеет вид:

$$A \rightarrow A.$$

Логические фигуры заключения:

$$\frac{A, \Gamma \rightarrow B}{\Gamma \rightarrow A \supset B}$$

$$\frac{\Gamma \rightarrow \emptyset, A \quad B, \Gamma \rightarrow \emptyset}{A \supset B, \Gamma \rightarrow \emptyset}$$

$$\frac{\Gamma \rightarrow \emptyset, A \quad \Gamma \rightarrow \emptyset, B}{\Gamma \rightarrow \emptyset, A \& B}$$

$$\frac{A, B, \Gamma \rightarrow \emptyset}{A \& B, \Gamma \rightarrow \emptyset}$$

$$\frac{\Gamma \rightarrow \emptyset, A, B}{\Gamma \rightarrow \emptyset, A \vee B}$$

$$\frac{\Gamma \rightarrow \emptyset, A}{\neg A, \Gamma \rightarrow \emptyset}$$

$$\frac{A, \Gamma \rightarrow}{\Gamma \rightarrow \neg A}$$

$$\frac{A, \Gamma \rightarrow \emptyset \quad B, \Gamma \rightarrow \emptyset}{A \vee B, \Gamma \rightarrow \emptyset}$$

$$\frac{\Gamma \rightarrow \emptyset, A \quad B, \Gamma \rightarrow \emptyset}{\Gamma \rightarrow \emptyset, A \dot{\rightarrow} B}$$

$$\frac{A \rightarrow \emptyset, B}{A \dot{\rightarrow} B \rightarrow \emptyset}$$

$$\frac{A, \Gamma \rightarrow \emptyset}{\Gamma \rightarrow \emptyset, \neg \neg A}$$

$$\frac{\rightarrow \emptyset, A}{\neg \neg A \rightarrow \emptyset}$$

В правилах $\rightarrow$ и $\neg \neg$ - $\emptyset$ пусто, в правилах $\dot{\rightarrow}$ и $\neg \rightarrow$ - пусто Γ . Действуют обычные многосукцедентные структурные правила: перестановки, сокращения, добавления. Сечение является допустимой фигурой заключения. Назовем это исчисление GNB.

ТЕОРЕМА. Если формула A доказуема в аксиоматическом исчислении НВ, то секвенция $\rightarrow A$ доказуема в секвенциальном исчислении GNB.

Теорема легко доказывается индукцией по длине доказательства в НВ.

ТЕОРЕМА. Если секвенция $A_1, \dots, A_n \rightarrow B_1, \dots, B_m$ доказуема в GNB, то формула $A_1 \& \dots \& A_n \supset B_1 \vee \dots \vee B_m$ доказуема в НВ; если секвенция $\rightarrow B_1, \dots, B_m$ доказуема в GNB, то формула $B_1 \vee \dots \vee B_m$ доказуема в НВ; если секвенция $A_1, \dots, A_n$ доказуема в НВ, то формула $\neg(A_1 \& \dots \& A_n)$ доказуема в НВ.

Теорема доказывается индукцией по высоте вывода в GNB. Таким образом, GNB эквивалентна НВ в указанном выше смысле.

5. Симметрическая полубулева алгебра и симметрическая гейтингова алгебра

Определение полубулевой алгебры на парах позволяет нам естественным образом ввести де Моргановское отрицание:

$$\sim \langle a_1, a_2 \rangle = \langle a_2, a_1 \rangle.$$

Пусть x, y - переменные, пробегающие по парам. Тогда имеет место:

$$\sim \sim x = x,$$

$$\sim (x \cup y) = \sim x \cap \sim y,$$

$$\sim (x \cap y) = \sim x \cup \sim y,$$

$$\sim (x \supset y) = \sim y \dot{\supset} \sim x,$$

$$\sim (x \dot{\supset} y) = \sim y \supset \sim x.$$

Полубулеву алгебру SB, удовлетворяющую перечисленным выше условиям для $\sim$, будем называть симметрической полубулевой алгеброй SSB. Легко видеть, что псевдоразность в SSB определима через де Моргановское отрицание и относительное псевдодополнение. Поэтому симметрическая полубулева алгебра естественным образом приводит нас к хорошо известной системе симметрической алгебры Гейтинга.

Под симметрической гейтинговой алгеброй SH $\langle P, 0, 1, \cap, \cup, \supset, \sim \rangle$ имеют в виду алгебру, где $\langle P, 0, 1, \cap, \cup, \supset \rangle$ есть гейтингова алгебра и $\langle P, 0, 1, \cap, \cup, \sim \rangle$ - алгебра де Моргана.

ТЕОРЕМА. Симметрическая гейтингова алгебра дефинициально эквивалентна симметрической полубулевой алгебре.

Для доказательства мы добавляем к SH

$$a \dot{\supset} b = \sim (\sim b \supset \sim a),$$

а к SSH - $1 = a \supset a$ и $0 = a \dot{\supset} a$

Теперь легко сформулировать симметрическую гейтинговско-брауэровскую логику SHB и симметрическую гейтинговскую логику в аксиоматической форме. Для этого к аксиомам H добавляем:

$$\sim \sim A \equiv A$$

$$\sim (A \& B) \equiv \sim A \vee \sim B$$

$$\sim (A \vee B) \equiv \sim A \& \sim B,$$

а к аксиомам НВ еще дополнительно:

$$\sim (A \supset B) \equiv \sim B \dot{\supset} \sim A$$

$$\sim (A \dot{\supset} B) \equiv \sim B \supset \sim A.$$

Мы можем также дать секвенциальную формулировку симметрической гейтинговско-брауэровской логики GSHB и симметрической гейтинговой логики GSH.

Для формулировки GSHB к логическим фигурам заключения для GNB добавляем:

$$\frac{\Gamma \rightarrow \theta, \sim B \quad \sim A, \Gamma \rightarrow \theta}{\Gamma \rightarrow \theta, \sim (A \supset B)}$$

$$\frac{\sim B \rightarrow \theta, \sim A}{\sim (A \supset B) \rightarrow \theta}$$

$$\frac{\sim B, \Gamma \rightarrow \sim A}{\Gamma \rightarrow \sim (A \dot{\supset} B)}$$

$$\frac{\Gamma \rightarrow \theta, \sim B \quad \sim A, \Gamma \rightarrow \theta}{\sim (A \dot{\supset} B), \Gamma \rightarrow \theta}$$

$$\frac{\Gamma \rightarrow \theta, \sim A, \sim B}{\Gamma \rightarrow \theta, \sim (A \& B)}$$

$$\frac{\Gamma \rightarrow \theta, \sim A \quad \Gamma \rightarrow \theta, \sim B}{\Gamma \rightarrow \theta, \sim (A \vee B)}$$

$$\frac{\sim A, \Gamma \rightarrow \theta}{\Gamma \rightarrow \theta, \sim \neg A}$$

$$\frac{\sim A, \Gamma \rightarrow}{\Gamma \rightarrow \neg \neg A}$$

$$\frac{\Gamma \rightarrow \theta, A}{\Gamma \rightarrow \theta, \sim \sim A}$$

$$\frac{\sim B, \Gamma \rightarrow \theta \quad \sim A, \Gamma \rightarrow \theta}{\sim (A \& B), \Gamma \rightarrow \theta}$$

$$\frac{\sim A, \sim B, \Gamma \rightarrow \theta}{\sim (A \vee B), \Gamma \rightarrow \theta}$$

$$\frac{\rightarrow \theta, \sim A}{\sim \neg A \rightarrow \theta}$$

$$\frac{\Gamma \rightarrow \theta, \sim A}{\sim \neg A, \Gamma \rightarrow \theta}$$

$$\frac{A, \Gamma \rightarrow \theta}{\sim \sim A, \Gamma \rightarrow \theta}$$

ТЕОРЕМА. Если A доказуема в SHB, то $\rightarrow A$ доказуема в GSHB.

ТЕОРЕМА. Если $A_1, \dots, A_n \rightarrow B_1, \dots, B_m$ доказуема в GSHB, то $A_1 \& \dots \& A_n \rightarrow B_1 \vee \dots \vee B_m$ доказуема в SHB; если $\rightarrow B_1, \dots, B_m$ доказуема в GSHB, то $B_1 \vee \dots \vee B_m$ доказуема в SHB; если $A_1, \dots, A_n \rightarrow$ доказуема в GSHB, то $\neg (A_1 \& \dots \& A_n)$ доказуема в SHB.

Мы получим секвенциальную формулировку симметрической интуиционистской логики GSH, если отбросим правила для $\neg$ и $\neg$.

Легко сформулировать симметрическую гейтингово-брауэрову логику с отрицанием Хао Вана. Для этого в секвенциальной формулировке мы добавляем в качестве основных секвенций секвенции вида

$$A, \sim A \rightarrow$$

Аналогично может быть сформулирована интуиционистская логика с Хао Вановским отрицанием. Не будет ли эта логика эквивалентна интуиционистской логике со строгим отрицанием? Ответ отрицательный.

6. Интуиционистская логика с сильным отрицанием

Идея интуиционистской логики с сильным отрицанием была выдвинута независимо Д.Нельсоном [9] и А.А.Марковым [5]. Они исходили из идей симметричности понятий истинности и ложности. Аксиоматизация в гильбертовской форме была предложена Н.Н.Воробьевым ([1],[2]). Он предложил следующие схемы аксиом:

1. $A \supset (B \supset A)$
2. $(A \supset (B \supset C)) \supset ((A \supset B) \supset (A \supset C))$
3. $A \supset (B \supset A \& B)$
4. $A \& B \supset A$
5. $A \& B \supset B$
6. $(A \supset C) \supset ((B \supset C) \supset (A \vee B \supset C))$
7. $A \supset A \vee B$
8. $B \supset A \vee B$
9. $(A \supset B) \supset ((A \supset \neg B) \supset \neg A)$
10. $\neg A \supset (A \supset B)$
11. $\sim A \supset (A \supset B)$
12. $\sim (A \supset B) \supset A \& \sim B$
13. $A \& \sim B \supset \sim (A \supset B)$

14. $\sim(A \& B) \supset \sim A \vee \sim B$
15. $\sim A \vee \sim B \supset \sim(A \& B)$
16. $\sim(A \vee B) \supset \sim A \& \sim B$
17. $\sim A \& \sim B \supset \sim(A \vee B)$
18. $\sim \neg A \supset A$
19. $A \supset \neg \neg A$
20. $\sim \sim A \supset A$
21. $A \supset \sim \sim A$

Правилом вывода является модус поненс $\frac{A, A \supset B}{B}$.

Сильная импликация может быть введена определением $A \Rightarrow B =_{\text{df}} (A \supset B) \& (\sim B \supset \sim A)$. И. Заславский предложил секвенциальную формулировку интуиционистского исчисления с сильной импликацией и с сильным отрицанием. Однако его формулировка достаточно сложна, так как дается в виде односукцедентного исчисления. Я предлагаю другую формулировку секвенциального многосукцедентного интуиционистского исчисления с сильным отрицанием.

Основными секвенциями являются секвенции вида:

$$A \rightarrow A$$

$$A, \sim A \rightarrow$$

К логическим формулам заключения в клиневской форме G13 добавляем следующие фигуры:

$$\frac{\Gamma \rightarrow \emptyset, A \quad \Gamma \rightarrow \emptyset, \sim B}{\Gamma \rightarrow \emptyset, \sim(A \supset B)}$$

$$\frac{A, \sim B \rightarrow \emptyset}{\sim(A \supset B) \rightarrow \emptyset}$$

$$\frac{\Gamma \rightarrow \emptyset, \sim A, \sim B}{\Gamma \rightarrow \emptyset, \sim(A \& B)}$$

$$\frac{\sim A, \Gamma \rightarrow \emptyset \quad \sim B, \Gamma \rightarrow \emptyset}{\sim(A \& B), \Gamma \rightarrow \emptyset}$$

$$\frac{\Gamma \rightarrow \emptyset, \sim A \quad \Gamma \rightarrow \emptyset, \sim B}{\Gamma \rightarrow \emptyset, \sim(A \vee B)}$$

$$\frac{\sim A, \sim B, \Gamma \rightarrow \emptyset}{\sim(A \vee B), \Gamma \rightarrow \emptyset}$$

$$\frac{\Gamma \rightarrow \emptyset, A}{\Gamma \rightarrow \emptyset, \neg \neg A}$$

$$\frac{A \rightarrow \emptyset}{\neg \neg A \rightarrow \emptyset}$$

$$\frac{\Gamma \rightarrow \emptyset, A}{\Gamma \rightarrow \emptyset, \sim \sim A}$$

$$\frac{A, \Gamma \rightarrow \emptyset}{\sim \sim A, \Gamma \rightarrow \emptyset}$$

Эта система GN1 эквивалентна аксиоматической системе Воробьева [1]. Доказательство просто. Для GN1 имеет место теорема о допустимости сечения. На этой основе могут быть введены правила введения для сильной импликации и ее отрицания.

ЛИТЕРАТУРА

1. Воробьев Н.Н. Конструктивное исчисление высказываний с сильным отрицанием // ДАН СССР, 85, № 3. 1952.
2. Воробьев Н.Н. Конструктивное исчисление высказываний с сильным отрицанием // Труды Мат. инст. им. В.А.Стеклова. LXXXII. 1964.

3. Заславский И.Д. Симметрическая конструктивная логика. Ереван, 1978.
4. Клини С.К. Введение в математику. М., 1957.
5. Марков А.А. Конструктивная логика. // Успехи мат. наук. 1950. Т.5. № 3(37).
6. Смирнов В.А. Формальный вывод и логические исчисления. М., 1973.
7. Смирнов В.А. Утверждение и предикация. Комбинированная логика высказываний и событий // Синтаксические и семантические исследования неэкстенциональных логик. М., 1989.
8. Смирнов В.А. Комбинированные исчисления предложений и событий и логика истины фон Вригта // Исследования по неклассическим логикам. (IV Советско-финский коллоквиум). М., 1989.
9. Nelson D. Constructible Falsiti. JSL, 1949. Vol.14.
10. Rasiowa H. An algebraic approach to non-classical logic. Warszawa, Amsterdam, 1974.
11. Rauszer C. Semi-Boolean algebra and their applications to intuitionistic logic with dual operation // Fundamenta Mathematica, LXXXIII, 1974.
12. Smirnov V.A. Assertion and Predication. Combined Calculus of Propositions and Situations // VIII Intern. Congress of Logic, Methodology and Philosophy of Science. Abstracts, Moscow, 1987.
13. Smirnov V.A. Statement and Presication. A Combined Calculus of Sentences and Events // Intensional Logic, History of Philosophy, and Methodology. Budapest, 1988. PP.101-108.

КОНГРУЭНЦ-ДИСТРИБУТИВНЫЕ МНОГООБРАЗИЯ АЛГЕБР*

В этой статье анализируются некоторые аспекты проблемы конечной аксиоматизируемости конгруэнц-дистрибутивных квазимногообразий алгебр. К.Бейкер [2] доказал, что каждое конечно порожденное конгруэнц-дистрибутивное многообразие конечного типа имеет конечную базу. Наша цель заключается в том, чтобы представить некоторые обобщения этой теоремы, которая распространялась бы также на конгруэнц-дистрибутивные квазимногообразия. Если логику отождествить с финитарной операцией присоединения следствий, определенной на множестве пропозициональных формул, тогда класс всех алгебраических моделей импликативной логики S (в смысле Рассевой) с логической связкой дизъюнкции образует конгруэнц-дистрибутивное квазимногообразие. Другие примеры представлены логическими системами в которых имеет место теорема дедукции ([4,5]).

Пусть K есть квазимногообразие алгебр. $A \in K$ и $a, b \in A$, $\theta_K(a, b)$ обозначает наименьшее отношение конгруэнтности θ на A такое, что $a \equiv b \pmod{\theta}$ и $A/\theta \in K$. Пусть $\text{Con}_K A =_{\text{df}} \{\theta \in \text{Con} A : A/\theta \in K\}$. Легко видеть, что если $A \in K$, тогда $\text{Con}_K A$ образует алгебраическую решетку по включению. Будем говорить, что K конгруэнц-дистрибутивно (для краткости к.д.), если для всех $A \in K$ решетка $\text{Con}_K A$ дистрибутивна. Для класса M подобных алгебр обозначим посредством $Q(M)$ и $V(M)$ наименьшее квазимногообразие и наименьшее многообразие, которые включают M соответственно. Говорят, что квазимногообразие (многообразие) K является конечно порожденным, если $K = Q(M) (K = V(M))$ для некоторого конечного множества M подобных алгебр. $QId(K)$ и $Id(K)$ обозначают множества всех квазитождеств и тождеств, общезначимых в K , соответственно. Пусть K_{FSI} обозначает класс всех конечно подпрямо неразложимых членов квазимногообразия K . Мы принимаем, что тривиальные алгебры принадлежат к K_{FSI} .

Говорят, что в квазимногообразии K алгебр главные конгруэнции эквационально определимы по пересечению (ПЭОП), если существует конечная система $\langle p_i(x, y, z, u), q_i(x, y, z, u) \rangle$, $i < k$, четырехместных термов таких, что для всех $A \in K$ и $a, b, c, d \in A$,

$$\theta_K(a, b) \cap \theta_K(c, d) = \bigvee_{i < k} \theta_K(p_i(a, b, c, d), q_i(a, b, c, d)),$$

где объединение $\vee$ образовано в $\text{Con}_K A$.

ТЕОРЕМА 1. Для квазимногообразия K алгебр следующие условия эквивалентны:

- (1) K имеет ПЭОП,

*Пер. с англ. А.С.Карпенко.

(ii) K имеет к.д. и K_{FSI} образует универсальный класс,

(iii) $K_{FSI} \models \forall x, y, z, u [(\bigwedge_{1 \leq i \leq k} p_i(x, y, z, u) = q_i(x, y, z, u)) \Leftrightarrow (x=y) \text{ или } z=u]$

для некоторых 4-х местных термов $p_i, q_i (i \leq k)$.

Более того, проблема о том, порождает ли данное конечное множество конечных алгебр квазимногообразие (ПЭОП), разрешима.

Эквивалентность (i) и (ii) для многообразий была доказана ранее Блоком и Пигожжи [3].

ТЕОРЕМА 2. Пусть K есть квазимногообразие алгебр конечного типа. Допустим, что K имеет ПЭОП. Следующие условия эквивалентны:

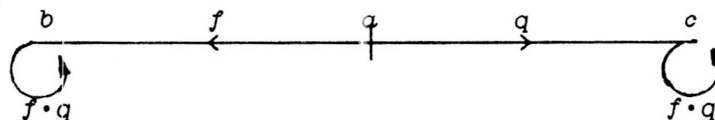
(i) K имеет конечный базис,

(ii) K_{FSI} является строго элементарным классом.

ТЕОРЕМА 3. Пусть K есть конечно порожденное квазимногообразие алгебр конечного типа. Если K имеет ПЭОП, тогда K имеет конечный базис.

Выше приведенный вывод позволяет установить главный результат работы [3], показывающий, что каждое конечное множество конечных и подпрямо неразложимых членов многообразия с ПЭОП порождает квазимногообразие с конечным базисом.

Пример (см. Горбунов [1]). Пусть $A = (\langle a, b, c \rangle, f, g)$ есть алгебра типа (1,1), операции которой заданы посредством следующей диаграммы:



Тогда $Q(A)$ не имеет конечного базиса, в то время как $Q(A)_{FSI}$ есть универсальный класс.

Этот пример, теорема 1 и теорема 3 позволяют поставить следующий вопрос.

Вопрос. Существует ли конечно порожденное квазимногообразие алгебр конечного типа такое, что (i) K есть к.д. и (ii) K не имеет конечного базиса?

Вопрос остается открытым¹. Мы обсудим некоторые частичные ответы на него. Сначала рассмотрим к.д. квазимногообразия, расширенные до к.д. многообразия.

ТЕОРЕМА 4. Пусть K есть к.д. многообразие алгебр. Тогда для любого многообразия $L \leq K$ следующие условия эквивалентны:

L — конгруэнц-дистрибутивно,

$L_{FSI} \leq K_{FSI}$.

Существует конечная алгебра A такая, что $Q(A)$ имеет ПЭОП и, следовательно, $Q(A)$ является к.д., но $V(A)$ нет.

ТЕОРЕМА 5. Пусть K есть конечно-порожденное к.д. квазимногообразие алгебр конечного типа. Допустим, что $V(K)$ есть также к.д. Тогда K имеет конечный базис.

¹Положительный ответ на этот вопрос недавно дан Пироу.

Говорят, что квазимногообразие K имеет ПЭОП в широком смысле, если существует конечная система $\langle p_1(x, y, z, u, x_1, \dots, x_n), q_1(x, y, z, u, x_1, \dots, x_n) \rangle$, $(i < k(n+4))$ - местных термов таких, что для всех $A \in K$ и $a, b, c, d \in A$ $\theta_K(a, b) \cap \theta_K(c, d) = \bigvee_{1 \leq k} \bigvee_{\bar{a} \in A} \theta_K(p_1(a, b, c, d, \bar{a}), q_1(a, b, c, d, \bar{a}))$.

ТЕОРЕМА 6. Для квазимногообразия алгебр следующие условия эквивалентны:

- (i) K имеет ПЭОП в широком смысле,
- (ii) K есть к.д. и K_{FSI} образует элементарный класс,
- (iii) Существуют термы $p_1(x, y, z, u, x_1, \dots, x_n), q_1(x, y, z, u, x_1, \dots, x_n)$ $(i < k)$ такие, что $K_{FSI} = \forall x, y, z, u [(\bigwedge_{1 \leq k} \forall x_1, \dots, x_n p_1(x, y, z, u, x_1, \dots, x_n) = q_1(x, y, z, u, x_1, \dots, x_n)) = (x=y \text{ или } z, u)]$.

Более того, проблема о том, порождает ли данное конечное множество конечных алгебр к.д. квазимногообразие, разрешима.

ТЕОРЕМА 7. Пусть K есть конечно-порожденное к.д. квазимногообразие алгебр конечного типа. Следующие условия эквивалентны:

- (i) K имеет конечный базис.
- (ii) Существует конечное множество $B \subseteq \text{Id}(K) - \text{Id}(K)$ и множество $A \subseteq \text{Id}(K)$ такое, что квазимногообразие $A \cup B$ есть к.д.

Обе теоремы 5 и 7 обобщают Конечную Основную теорему Бейкера (но в различных направлениях).

Квазимногообразие L является эквациональным расширением (конечным эквациональным расширением) квазимногообразия K , если имеется множество (конечное множество) Γ равенств таких, что для любой алгебры A из K , $A \in L$, если и только если $A \models \Gamma$.

ТЕОРЕМА 8. Пусть K есть к.д. квазимногообразие такое, что K_{FSI} является элементарным. Если L есть эквациональное расширение K и L_{FSI} является строго элементарным, тогда L есть конечное эквациональное расширение K .

ЛИТЕРАТУРА

1. Горбунов В.А. Покрyтия в решетках подквазимногообразия и независимая аксоматизируемость // Алгебра и лoгика. 1977. Т.10. С.507-548.
2. Baker K. A finite equational bases for finite algebras in a congruence distributive equational class // Advances in Mathematics. 1977. Vol.24. P.207-243.
3. Blok W.J., Pigozzi D. A finite basis theorem for quasivarieties // Algebra Universalis. 1986. Vol.22. P.1-13.
4. Blok W.J., Pigozzi D. Protoalgebraic logics // Stud. Log. 1986. Vol.45. P.337-368.
5. Czelakowski J. Remarks on finitely based logics // Models and sets. Lecture Notes in Mathematics. 1984. Vol.1103.

СИЛЛОГИСТИЧЕСКИЕ ТЕОРИИ И ИСЧИСЛЕНИЕ ПРЕДИКАТОВ (часть 1)

В настоящей статье будут рассмотрены две тесно связанные между собой проблемы. Во-первых, проблема погружения в классическое одноместное исчисление предикатов различных аксиоматических систем позитивной силлогистики (теории выводов из категорических высказываний, не содержащих сингулярных, отрицательных и сложных терминов). Решая данную проблему, мы сопоставляем каждому силлогистическому исчислению адекватную ему интерпретацию категорических высказываний, выраженную в языке логики предикатов.

Другая проблема, обратная первой в некотором отношении, — это проблема построения аксиоматических систем, адекватно формализующих силлогистические рассуждения при различных содержательных трактовках категорических высказываний. Известно, что как и в истории логики, так и в современной логике имеются различные понимания условий истинности высказываний такого рода. Выразив некоторые из них на языке логики предикатов, мы построим спектр силлогистических систем, погружающихся при указанных переводах в исчисление предикатов и, следовательно, соответствующих различным трактовкам категорических высказываний.

Первой современной аксиоматической системой силлогистики, построенной на основе классического исчисления высказываний, была система Я.Лукасевича. Сформулируем эквивалентное ей силлогистическое исчисление S_4 , предложенное В.А.Смирновым [8].

В алфавите содержатся: бесконечный список терминов (для их обозначения используем буквы $S, P, Q, M, S_1, \dots$), силлогистические константы a, e, i, o , связи $\neg, \&, \vee, \supset, \equiv$, скобки. Элементарными формулами являются SaP ("Всякий S есть P "), SiP ("Некоторый S есть P "), SeP ("Всякий S не есть P "), SoP ("Некоторый S не есть P "). Сложные формулы имеют вид $\neg A$, $(A \& B)$, $(A \vee B)$, $(A \supset B)$, $(A \equiv B)$, где A и B — формулы.

Схемами аксиом системы S_4 являются:

0. Схемы аксиом классического исчисления высказываний,

- | | |
|---------------------------------|----------------------------|
| 1. $(MaP \& SaM) \supset SaP$, | 3. $SaP \supset SiP$, |
| 2. $(MeP \& SaM) \supset SeP$, | 4. $SeP \supset PeS$, |
| 5. $SiP \supset SaS$, | 7. $SeP \equiv \neg SiP$, |
| 6. SiS , | 8. $SoP \equiv \neg SaP$. |

Первая и вторая схемы — аналоги модусов Barbara и Celarent, соответственно, третья схема представляет закон подчинения, четвертая — e -обращения, седьмая и восьмая — законы противоречия e и i , a и o , шестая схема — закон силлогистического тожд-

дества для частноутвердительных высказываний, а пятая - ослабление закона тождества для общеутвердительных высказываний. Сам этот закон - SaS - является теоремой $C4$.

Единственное правило вывода $C4$ - *modus ponens*. Понятия вывода и доказательства в $C4$ обычные.

Естественным образом возникает вопрос, какая трактовка категорических высказываний подразумевается в силлогистических выводах и доказательствах, формализуемых в системе Лукасевича, т.е. в $C4$? Различные переводы силлогистических формул на язык логики предикатов были предложены С.Виеру [11], В.А.Бочаровым [2], М.Н.Бежанишвили и Л.И.Мchedlishvili [1].

Сформулируем операцию перевода из множества формул $C4$ в множество формул исчисления предикатов (ИП), эквивалентную переводу В.А.Бочарова:

$$\begin{aligned} SaP &\rightarrow \forall x (Sx \supset Px) \& (\exists x Sx \vee \exists x Px), \\ SiP &\rightarrow \exists x (Sx \& Px) \vee (\neg \exists x Sx \& \neg \exists x Px), \\ SeP &\rightarrow \forall x (Sx \supset \neg Px) \& (\exists x Sx \vee \exists x Px), \\ SoP &\rightarrow \exists x (Sx \& \neg Px) \vee (\neg \exists x Sx \& \exists x Px). \end{aligned} \quad (I)$$

Перевод формулы $\neg A$ языка $C4$ есть отрицание перевода A , перевод $(A \& B)$ есть конъюнкция перевода A и перевода B , аналогично для других сложных формул. (Переводы сложных формул других систем силлогистики задаются так же, поэтому в дальнейшем данная часть определений переводящих операций будет опускаться.)

Система $C4$ погружается в ИП посредством перевода (I) В.А.Бочарова, т.е. произвольная силлогистическая формула является теоремой $C4$, если и только если ее перевод доказуем в ИП. Данный результат был получен В.А.Смирновым [9] и мною [5] различными способами. Собственный уточненный вариант доказательства данной теоремы будет представлен в этой статье. (В [5] в доказательстве погружаемости различных систем силлогистики (в том числе и $C4$) в ИП имеется неточность. Теоремы погружаемости доказываются изложенным там методом только в том случае, когда формулировки силлогистических систем пополняются правилом эктетического доказательства

$$\frac{\vdash (MaP \& MaS) \supset A}{\vdash SiP \supset A} \quad (\text{где } M \text{ не содержится в заключении)} \text{ или неко-}$$

торой модификацией данного правила. В настоящей статье метод доказательства погружаемости видоизменяется таким образом, что не требуется включать в число основных правил системы какие-либо правила кроме *modus ponens*. Таким образом, попутно доказывается устранимость (допустимость) в рассматриваемых силлогистических исчислениях эктетических правил.)

Ряд исследователей считают, что система Лукасевича не является адекватной реконструкцией аристотелевской силлогистики. В частности, ставится под сомнение принятие Аристотелем законов силлогистического тождества SaS и SiS . В.А.Бочаров в [3] приводит весьма убедительные аргументы в пользу того, что Стагирит считал указанные высказывания истинными только в случае

непустоты термина S . Кроме того, адекватный для $C4$ перевод (I) (как, впрочем, и перевод С.Виеру) не является достаточно естественной интерпретацией категорических высказываний. При данной трактовке, например, частноутвердительное суждение оказывается истинным в случае пустоты обоих терминов, что явно не согласуется с интуицией.

Более естественным и, согласно исследованиям В.А.Бочарова [3], более близким аристотелевской трактовке категорических высказываний является оккамовское понимание их условий истинности. Согласно Оккаму, все утвердительные высказывания с пустым субъектом ложны, а все отрицательные – истинны.

Оккамовская трактовка эксплицируется посредством следующего предложенного В.А.Смирновым [8] перевода силлогистических формул на язык логики предикатов:

$$\begin{aligned} SaP &\rightarrow \forall x(Sx \supset Px) \& \exists xSx, \\ SiP &\rightarrow \exists x(Sx \& Px), \\ SeP &\rightarrow \forall x(Sx \supset \neg Px), \\ SoP &\rightarrow \exists x(Sx \& \neg Px) \vee \neg \exists xSx. \end{aligned} \quad (II)$$

Системой силлогистики, погружающей в ИП посредством функции (II), является исчисление $C2$, предложенное В.А.Смирновым [8]. $C2$ получается из $C4$ отбрасыванием шестой схемы аксиом (SiS). Теорема о погружаемости $C2$ в ИП была доказана различными способами В.А.Смирновым [9], М.Н.Бежанишвили, Л.И.Мchedlishvili [11] и мною [5]. Собственный вариант доказательства представлен ниже.

В [8] В.А.Смирнов сформулировал еще две системы силлогистики, которые являются подсистемами $C4$: система $C3$ получается из $C4$ отбрасыванием пятой схемы аксиом ($SiS \supset SaS$), $C1$ получается из $C4$ отбрасыванием пятой и шестой схем аксиом. В.А.Смирновым были предложены две операции перевода из $C1$ и $C3$ в ИП. Перевод для $C1$:

$$\begin{aligned} SaP &\rightarrow \forall x(Sx \supset Px) \& \exists xSx \& \exists x \neg Px, \\ SiP &\rightarrow \exists x(Sx \& Px), \\ SeP &\rightarrow \forall x(Sx \supset \neg Px), \\ SoP &\rightarrow \exists x(Sx \& \neg Px) \vee \neg \exists xSx \vee \neg \exists x \neg Px. \end{aligned} \quad (III)$$

Перевод для $C3$:

$$\begin{aligned} SaP &\rightarrow \forall x(Sx \supset Px) \& \exists xSx \& \exists x \neg Px, \\ SiP &\rightarrow \exists x(Sx \& Px) \vee \neg \exists xSx \vee \neg \exists xPx, \\ SeP &\rightarrow \forall x(Sx \supset \neg Px) \& \exists xSx \& \exists xPx, \\ SoP &\rightarrow \exists x(Sx \& \neg Px) \vee \neg \exists xSx \vee \neg \exists x \neg Px. \end{aligned} \quad (IV)$$

Легко убедиться в том, что переводы (III) и (IV) любых теорем систем $C1$ и $C3$, соответственно, доказуемы в ИП. Однако данные операции не являются погружающими. На этот факт обратил внимание О.Ф.Серебрянников на координационном совещании по силлогистике в Ленинграде в 1982 г. [4]. Более того, Л.И.Мchedlishvili в [7] показал, что не существует операций, погружающих системы $C1$ и $C3$ в одноместное исчисление предикатов.

Тем не менее встает проблема адекватной формализации силло-

гистических выводов, основанных на принятии указанных интерпретаций категорических высказываний. Другими словами, возникает вопрос, можно ли расширить системы С1 и С3 до систем С1⁺ и С3⁺, которые погружались бы в ИП посредством переводов (III) и (IV) соответственно.

Попытка решения данной проблемы была предпринята, в частности, О.Ф.Серебрянниковым, но не привела к желаемому результату. В [5] мною было сформулировано исчисление (назовем его СЗ.1), которое является расширением С3 посредством добавления новых схем аксиом:

$$9. SaP \rightarrow (SaS \& PaP), \quad 10. SeP \rightarrow SaS.$$

Операция (IV) сопоставляет каждой теореме СЗ.1 теорему ИП, однако не является все же погружающей операцией. В настоящей статье мы покажем, что СЗ.1 погружается в ИП посредством другой операции:

$$\begin{aligned} SaP &\rightarrow \forall x (Sx \supset Px) \& \exists x Sx, \\ SiP &\rightarrow \exists x (Sx \& Px) \vee \neg \exists x Sx \vee \neg \exists x Px, \\ SeP &\rightarrow \forall x (Sx \supset \neg Px) \& \exists x Sx \& \exists x Px, \\ SoP &\rightarrow \exists x (Sx \& \neg Px) \vee \neg \exists x Sx. \end{aligned} \quad (V)$$

Кроме того, мы сформулируем искомые системы С1⁺ и С3⁺, погружающиеся в ИП посредством переводов (III) и (IV) В.А.Смирнова.

Силлогистика Аристотеля не была единственной в истории логики теорией вывода из категорических высказываний. Предлагались и другие теории, причем в них не принимались некоторые аристотелевские силлогистические принципы, что было обусловлено спецификой интерпретаций категорических высказываний в рамках этих теорий.

Например Б.Больцано полагал, что все истинные категорические высказывания (как утвердительные, так и отрицательные) должны содержать непустой субъект. При данной интерпретации отвергаются такие силлогистические принципы, как закон е-обращения, модусы *Camenes* и *Cameno*, некоторые законы логического квадрата. Экспликацией больцановской трактовки является следующий перевод силлогистических формул на язык ИП:

$$\begin{aligned} SaP &\rightarrow \forall x (Sx \supset Px) \& \exists x Sx, \\ SiP &\rightarrow \exists x (Sx \& Px), \\ SeP &\rightarrow \forall x (Sx \supset \neg Px) \& \exists x Sx, \\ SoP &\rightarrow \exists x (Sx \& \neg Px). \end{aligned} \quad (VI)$$

В [5] мною предложена система СБ, которая является аксиоматизацией силлогистической теории, основанной на данной семантике категорических высказываний. Ниже будет приведено доказательство погружаемости СБ в ИП посредством перевода (VI), т.е. показано, что СБ формализует позитивный фрагмент силлогистики Больцано.

Наиболее распространенной является восходящая к Г.Лейбницу стандартная интерпретация категорических высказываний, которая часто встречается в учебниках по логике. Эта интерпретация

может быть выражена посредством операции (обозначим ее $*$), переводящей силлогистические формулы на язык логики предикатов:

$$\begin{aligned} SaP^* &\rightarrow \forall x (Sx \supset Px), \\ SiP^* &\rightarrow \exists x (Sx \& Px), \\ SeP^* &\rightarrow \forall x (Sx \supset \neg Px), \\ SoP^* &\rightarrow \exists x (Sx \& \neg Px), \\ (\neg A)^* &= \neg A^*, \\ (A \nabla B)^* &= A^* \nabla B^*, \text{ где } \nabla \text{ есть } \&, \vee, \supset \text{ или } \equiv. \end{aligned}$$

При данной интерпретации отвергаются законы подчинения, законы α -обращения, модусы с общими посылками и частным заключением. Систему силлогистики, соответствующую лейбницевской трактовке категорических высказываний, называют фундаментальной силлогистикой.

Аксиоматизацией позитивного фрагмента фундаментальной силлогистики является система ΦC , которая содержит следующие схемы аксиом:

$$\begin{aligned} \Phi 0. & \text{Схемы аксиом классического исчисления высказываний,} \\ \Phi 1. & (MaP \& SaM) \supset SaP, & \Phi 5. SiP \supset SiS, \\ \Phi 2. & (MeF \& SaM) \supset SeP, & \Phi 6. SoP \supset SiS, \\ \Phi 3. & SeP \supset PeS, & \Phi 7. SeP \equiv \neg SiP, \\ \Phi 4. & SaS & \Phi 8. SoP \equiv \neg SaP. \end{aligned}$$

Правило вывода ΦC - *modus ponens*¹.

Для того чтобы продемонстрировать адекватность данной системы стандартной интерпретации категорических высказываний, необходимо доказать погружаемость ΦC в ИП посредством $*$ -перевода, т.е. показать, что

$$\Phi C \vdash A, \text{ если и только если (е.т.е.) } ИП \vdash A^*.$$

С этой целью мы построим сначала семантику силлогистического языка и покажем, что класс теорем ΦC совпадает с классом общезначимых в данной семантике формул:

$$1. \Phi C \vdash A, \text{ е.т.е. } \Phi C \models A.$$

Далее будет доказана равносильность ΦC -общезначимости произвольной силлогистической формулы и общезначимости в логике предикатов ее $*$ -перевода:

$$2. \Phi C \models A, \text{ е.т.е. } ИП \models A^*.$$

И, наконец, в силу семантической полноты и непротиворечивости исчисления предикатов имеем:

$$3. ИП \models A^*, \text{ е.т.е. } ИП \vdash A^*.$$

Очевидно, что погружаемость ΦC в ИП посредством $*$ -перевода является следствием из утверждений 1, 2 и 3.

Итак, начнем с построения семантики системы ΦC . Моделью назовем пару $\langle D, \varphi \rangle$, где $D \neq \emptyset$, а $\varphi(S) \subseteq D$. Определим понятие "значение формулы (1 или 0) в модели $\langle D, \varphi \rangle$ ":

¹В [6] мною предложена иная аксиоматизация фундаментальной силлогистики. Преимущество данной формулировки ΦC в том, что она не содержит правила эктетиического доказательства и ее единственным правилом вывода является *modus ponens*.

- И1. $|SaP|=1$, е.т.е. $\varphi(S) \subseteq \varphi(P)$,
 И2. $|SiP|=1$, е.т.е. $\varphi(S) \cap \varphi(P) \neq \emptyset$,
 И3. $|SeP|=1$, е.т.е. $\varphi(S) \cap \varphi(P) = \emptyset$,
 И4. $|SoP|=1$, е.т.е. $\varphi(S) \setminus \varphi(P) \neq \emptyset$.

Условия истинности сложных формул обычные. Формула A истинна в модели $\langle D, \varphi \rangle$, е.т.е. $|A|=1$. Формула называется Φ С-общезначимой, е.т.е. она истинна в каждой модели.

Непротиворечивость системы Φ С относительно предложенной семантики доказывается стандартным образом: сначала показывается, что все аксиомы Φ С являются Φ С-общезначимыми, а затем, что правило *modus ponens* сохраняет свойство "быть Φ С-общезначимой формулой".

Семантическую полноту системы Φ С доказываем методом Хенкина. Назовем множество силлогистических формул Γ Φ С-непротиворечивым, е.т.е. для любых $A_1, A_2, \dots, A_n$ из Γ формула $\neg(A_1 \& A_2 \& \dots \& A_n)$ не доказуема в Φ С. Назовем Φ С-непротиворечивое множество формул Δ Φ С-максимальным, е.т.е. оно удовлетворяет следующим условиям: (а) все теоремы Φ С содержатся в Δ ; (б) $A \supset B \in \Delta$ и $A \in \Delta \Rightarrow B \in \Delta$; (в) $\neg A \in \Delta$, е.т.е. $A \notin \Delta$; (г) $A \& B \in \Delta$, е.т.е. $A \in \Delta$ и $B \in \Delta$; (д) $A \vee B \in \Delta$, е.т.е. $A \in \Delta$ или $B \in \Delta$; (е) $A \supset B \in \Delta$, е.т.е. $A \in \Delta \Rightarrow B \in \Delta$; (ж) $A \equiv B \in \Delta$, е.т.е. $A \in \Delta \Rightarrow B \in \Delta$, и $B \in \Delta \Rightarrow A \in \Delta$.

Нетрудно доказать аналог *леммы Линденбаума*: произвольное Φ С-непротиворечивое множество формул Γ можно расширить до Φ С-непротиворечивого максимального множества Δ .

Процедура насыщения Γ до Δ проста. Пусть $C_1, C_2, \dots$ — пересчет всех формул силлогистического языка. Строим последовательность множеств $\Delta_0, \Delta_1, \Delta_2, \dots$ следующим образом: $\Delta_0 = \Gamma$; $\Delta_{n+1} = \Delta_n$, если $\Delta_n \cup \{C_n\}$ Φ С-противоречиво; в противном случае $\Delta_{n+1} = \Delta_n \cup \{C_n\}$. Пусть $\Delta = \bigcup_{n=0}^{\infty} \Delta_n$. Тривиальным образом показывается Φ С-непротиворечивость множества Δ и наличие у него свойств (а)–(ж).

С произвольным Φ С-максимальным множеством формул свяжем каноническую модель $\langle D_\Delta, \varphi_\Delta \rangle$, где D_Δ — множество всех возможных пар терминов языка Φ С, а $\varphi_\Delta(S) = \{ \langle M_1, M_2 \rangle : M_1 i M_2 \& (M_1 a S \vee M_2 a S) \in \Delta \}$.

Индукцией по длине силлогистической формулы A докажем следующую

ЛЕММА: $|A|=1$ в канонической модели $\langle D_\Delta, \varphi_\Delta \rangle$, е.т.е. $A \in \Delta$.

Базис индукции содержит четыре случая.

1) $A \equiv SaP$. Докажем сначала, что $|SaP|=1 \Rightarrow SaP \in \Delta$.

+1. $|SaP|=1$ допущение

+2. $SaP \notin \Delta$ допущение

3. $\forall M_1 \forall M_2 (M_1 i M_2 \& (M_1 a S \vee M_2 a S) \in \Delta \Rightarrow M_1 i M_2 \& (M_1 a P \vee M_2 a P) \in \Delta)$ 1; И1, опр. φ_Δ и $\subseteq$

4. $\neg SaP \in \Delta$ 2; (в)

5. $\neg SaP \supset SoP \in \Delta$ Φ 8, (а)

6. $SoP \supset SiS \in \Delta$ Φ 6, (а)

7. $SiS \in \Delta$ 4, 5, 6; (б)

8. $SaS \in \Delta$ Φ 4, (а)

9. $S \vdash S \& (SaSVSaS) \in \Delta$	7, 8; (д), (г)
10. $S \vdash S \& (SaSVSaS) \in \Delta \Rightarrow S \vdash S \& (SaPVSaP) \in \Delta$	3; и $\forall$
11. $S \vdash S \& (SaPVSaP) \in \Delta$	9, 10; и $\Rightarrow$
12. $SaPe \Delta$	11; (г)
13. $SaPe \Delta$	Противоречие 2 и 12.
Докажем теперь, что $SaPe \Delta \Rightarrow SaP = 1$.	
+1. $SaPe \Delta$	допущение
+2. $M_1 \vdash M_2 \& (M_1 aSVM_2 aS) \in \Delta$	допущение
3. $M_1 \vdash M_2 \in \Delta$	2; (г)
4. $M_1 aSVM_2 aS \in \Delta$	
+5. $M_1 aS \in \Delta$	допущение
6. $(SaP \& M_1 aS) \supset M_1 aPe \Delta$	$\Phi 1$, (а)
7. $M_1 aPe \Delta$	6, 1, 5; (г), (б)
8. $M_1 aPVM_2 aPe \Delta$	7; (д)
+9. $M_2 aS \in \Delta$	допущение
10. $(SaP \& M_2 aS) \supset M_2 aPe \Delta$	$\Phi 1$, (а)
11. $M_2 aPe \Delta$	10, 1, 9; (г), (б)
12. $M_1 aPVM_2 aPe \Delta$	11, (д)
13. $M_1 aPVM_2 aPe \Delta$	4, 5-8, 9-12
14. $M_1 \vdash M_2 \& (M_1 aPVM_2 aP) \in \Delta$	3, 13; (г)
15. $\forall M_1 \forall M_2 (M_1 \vdash M_2 \& (M_1 aSVM_2 aS) \in \Delta \Rightarrow$ $\Rightarrow M_1 \vdash M_2 \& (M_1 aPVM_2 aP) \in \Delta)$	2-14; $\Rightarrow_B, \forall_B$
16. $ SaP = 1$	15; опр. $\varphi_\Delta, \leq, И1$.
2) $\Delta \vdash S \vdash P$. Покажем сначала, что $ S \vdash P = 1 \Rightarrow S \vdash Pe \Delta$.	
+1. $ S \vdash P = 1$	допущение
+2. $S \vdash P \notin \Delta$	допущение
3. $\exists M_1 \exists M_2 (M_1 \vdash M_2 \& (M_1 aSVM_2 aS) \in \Delta$ и $M_1 \vdash M_2 \& (M_1 aPVM_2 aP) \in \Delta)$	1; И2, опр. φ_Δ
4. $SePe \Delta$	2, $\Phi 7$; (а), (б), (в)
5. $M_1 \vdash M_2 \in \Delta$	
6. $M_1 aSVM_2 aS \in \Delta$	
7. $M_1 aPVM_2 aP \in \Delta$	3; (г)
8. $(M_1 aS \in \Delta$ и $M_1 aPe \Delta)$ или $(M_2 aS \in \Delta$ и $M_2 aPe \Delta)$ или $(M_1 aS \in \Delta$ и $M_2 aPe \Delta)$ или $(M_2 aS \in \Delta$ и $M_1 aPe \Delta)$	6, 7; (д)
+9. $M_1 aS \in \Delta$ и $M_1 aPe \Delta$	допущение
10. $(SeP \& M_1 aS) \supset M_1 ePe \Delta$	$\Phi 2$, (а)
11. $M_1 eP \supset PeM_1 \in \Delta$	$\Phi 3$, (а)
12. $(PeM_1 \& M_1 aP) \supset M_1 eM_1 \in \Delta$	$\Phi 2$, (а)
13. $M_1 eM_1 \supset \neg M_1 \vdash M_1 \in \Delta$	$\Phi 7$, (а)
14. $\neg M_1 \vdash M_1 \supset \neg M_1 \vdash M_2 \in \Delta$	контрапозиция $\Phi 5$, (а)
15. $\neg M_1 \vdash M_2 \in \Delta$	4, 9-14; (б), (г)
+16. $M_2 aS \in \Delta$ и $M_2 aPe \Delta$	допущение
...	
22. $\neg M_1 \vdash M_2 \in \Delta$	подвывод аналогичен 9-15

+23. $M_1 a S \in \Delta$ и $M_2 a P \in \Delta$	допущение
24. $(S \in P \& M_1 a S) \supset M_1 \in P \in \Delta$	$\Phi 2, (a)$
25. $M_1 \in P \supset P \in M_1 \in \Delta$	$\Phi 3, (a)$
26. $(P \in M_1 \& M_2 a P) \supset M_2 \in M_1 \in \Delta$	$\Phi 2, (a)$
27. $M_2 \in M_1 \supset M_1 \in M_2 \in \Delta$	$\Phi 3, (a)$
28. $M_1 \in M_2 \supset \neg M_1 \in M_2 \in \Delta$	$\Phi 7, (a)$
29. $\neg M_1 \in M_2 \in \Delta$	4, 23-28, (б), (г)
+30. $M_2 a S \in \Delta$ и $M_1 a P \in \Delta$	допущение
...	
36. $\neg M_1 \in M_2 \in \Delta$	подвывод аналогичен 23-29
37. $\neg M_1 \in M_2 \in \Delta$	8, 9-15, 16-22, 23-29, 30-36

Противоречие 5 и 37. Следовательно,
38. $S \in P \in \Delta$

Докажем теперь, что $S \vdash P \in \Delta \Rightarrow |S \vdash P| = 1$.

+1. $S \vdash P \in \Delta$	допущение
2. $S a S \in \Delta$	$\Phi 4, (a)$
3. $P a P \in \Delta$	$\Phi 4, (a)$
4. $S \vdash P \& (S a S \vee P a S) \in \Delta$	1, 2; (г), (д)
5. $S \vdash P \& (S a P \vee P a P) \in \Delta$	1, 3; (г), (д)
6. $\exists M_1 \exists M_2 (M_1 \in M_2 \& (M_1 a S \vee M_2 a S) \in \Delta$ и $M_1 \in M_2 \& (M_1 a P \vee M_2 a P) \in \Delta)$	4, 5; $\exists_B$
7. $ S \vdash P = 1$	6; опр. $\varphi_\Delta, И2$

Случаи 3) $A \supset S \in P$ и 4) $A \supset S \in P$ сводятся, соответственно, к случаям 2) и 1) в силу наличия в Δ аксиом $\Phi 7$ и $\Phi 8$, а также того факта, что условия истинности $S \in P$ противоречат условиям истинности $S \vdash P$, а условия для $S \in P$ — условиям для $S a P$.

Индукционный переход доказывается тривиально с использованием условий истинности сложных формул и свойств (в)–(ж) максимального непротиворечивого множества Δ . Таким образом, мы показали, что формула принадлежит Δ в том и только в том случае, если она истинна в канонической модели, связанной с этим множеством.

Теперь легко доказать теорему о полноте системы ΦC относительно построенной семантики. Допустим, что некоторая ΦC -общезначимая формула A недоказуема в ΦC . Тогда и $\neg A$ не является теоремой этой системы, а это означает, что множество $\{A\}$ ΦC -непротиворечиво. Расширим его до максимального ΦC -непротиворечивого множества Δ . Поскольку $\neg A \in \Delta$, постольку (в силу только что доказанной леммы) $|A| = 1$ в канонической модели $\langle D_\Delta, \varphi_\Delta \rangle$. Значит, в этой модели формула A ложна, что противоречит допущению о ее ΦC -общезначимости.

Итак, всякая ΦC -общезначимая формула является теоремой ΦC , и первый этап доказательства погружаемости ΦC в ИП завершен.

Пару $\langle D, \varphi \rangle$ можно рассматривать не только как модель для означивания силлогистических формул, она является также стандартной моделью для оценки формул классического одноместного

исчисления предикатов. Индукцией по длине формулы A силлогистического языка нетрудно доказать, что условия истинности A в $\langle D, \varphi \rangle$ совпадают с условиями истинности в той же модели ее перевода A^* на язык логики предикатов. Отсюда следует, что A является ΦC -общезначимой, е.т.е. A^* общезначима в логике предикатов. Таким образом, цель второго этапа доказательства погружаемости достигнута.

Известно также, что классы общезначимых в логике предикатов и доказуемых в исчислении предикатов формул совпадают. Следовательно, мы доказали справедливость трех сформулированных выше утверждений, позволяющих сделать вывод о том, что операция $*$ погружает систему ΦC в ИП, т.е. что исчисление ΦC является адекватной формализацией позитивного фрагмента фундаментальной силлогистики – теории, в основе которой лежит стандартная интерпретация категорических высказываний. Решение других поставленных выше проблем содержится во второй части данной работы, которая будет опубликована позднее.

ЛИТЕРАТУРА

1. Бежаншвили М.Н., Мchedlishvili Л.И. Позитивная силлогистика и логика предикатов // Логика Аристотеля. Тбилиси, 1985.
2. Бочаров В.А. Алгебраические реконструкции силлогистики // Логико-методологические исследования. М., 1980.
3. Бочаров В.А. Интерпретация ассерторической силлогистики Аристотеля // Логика Аристотеля. Тбилиси, 1985.
4. Бочаров В.А., Маркин В.И. Совещание по проблемам силлогистики // Философ. науки. 1983. № 3.
5. Маркин В.И. Семантическое доказательство погружаемости некоторых систем силлогистики в исчисление предикатов // Логические исследования. М., 1983.
6. Маркин В.И. Аксиоматизация фундаментальной силлогистики Г.Лейбница // Философские проблемы истории логики и методологии науки. М., 1986. Ч.1.
7. Мchedlishvili Л.И. Позитивная ассерторическая силлогистика и логика одноместных предикатов // Логика и системные методы анализа научного знания. М., 1986.
8. Смирнов В.А. Адекватный перевод утверждений силлогистики в исчисление предикатов // Актуальные проблемы логики и методологии науки. Киев, 1980.
9. Смирнов В.А. Погружение систем позитивной силлогистики в одноместное исчисление предикатов // Логические исследования. М., 1983.
10. Смирнов В.А. Логические методы анализа научного знания. М., 1987.
11. Vieri S. Embedding of assertoric syllogistic into the predicate calculus // 4-th International Congress for Logic, Methodology and Philosophy of Science. Bucharest, 1971.

МЕТОДЫ АВТОМАТИЧЕСКОГО ОБРАЗОВАНИЯ ЛОГИЧЕСКИХ БАЗ В СИСТЕМАХ ИСКУССТВЕННОГО ИНТЕЛЛЕКТА

В настоящее время в исследованиях по искусственному интеллекту пик интереса приходится на разработку индуктивных методов приобретения знаний. Связано это с тем, что, например, при создании экспертных систем львиная доля времени уходит на процесс извлечения знаний из эксперта [1]. На это иногда уходит несколько лет. Автоматизация процесса приобретения знаний позволила бы резко ускорить и удешевить работы по созданию таких систем.

В связи с этим мы рассмотрим предложенный А.Д.Закревским метод выявления импликативных закономерностей в булевом пространстве признаков [2,3,4,5] и попробуем распространить его на другие интересные с точки зрения логики и ее приложений случаи.

Пусть нам даны n одноместных предикатов $P_1, \dots, P_n$. Булево пространство M , порождаемое этими предикатами, содержит 2^n различных булевых векторов. Также пусть имеется предметная область M_A , которую удобно считать объемом некоторого понятия A . Каждому элементу множества M_A можно сопоставить точку (вектор) булева пространства $M - \langle B_1, \dots, B_n \rangle$, где B_i есть либо 1, либо 0 в зависимости от того, обладает данный элемент предикатом P_i или не обладает. Если элементы из M_A подчиняются некоторым закономерностям, которые могут быть описаны в терминах предикатов $P_1, \dots, P_n$, то не всякой точке пространства M сопоставлен хотя бы один элемент из M_A .

Нас будут интересовать импликативные закономерности вида

$$\forall x (P_{i_1}(x) \& \dots \& P_{i_n}(x) \rightarrow P_{j_1}(x) \vee \dots \vee P_{j_v}(x)).$$

В эквивалентной форме такие закономерности можно представить следующим образом

$$\neg \exists x (P_{i_1}(x) \& \dots \& P_{i_n}(x) \& \neg P_{j_1}(x) \& \dots \& \neg P_{j_v}(x)).$$

Они говорят о том, что ни один булев вектор, в котором i_1 -я, ..., i_n -я компоненты равны 1, а j_1 -я, ..., j_v -я компоненты равны 0, не представляет какого-либо элемента из M_A . Множество всех таких булевых векторов будем называть областью запрета ранга $k=U+V$, определяемой данной закономерностью. Очевидно, что мощность этой области запрета равна 2^{n-k} .

Будем говорить, что множество булевых векторов $J \subseteq M$ является интервалом ранга k , е.т.е. существуют $b_{i_1}, \dots, b_{i_k} \in \{0, 1\}$, такие, что J равно множеству всех векторов из M , у которых i_1 -я, ..., i_k -я компоненты равны соответственно $b_{i_1}, \dots, b_{i_k}$.

Всякая область запрета ранга k , определяемая некоторой закономерностью, является интервалом ранга k .

С практической точки зрения наибольший интерес представляют случаи, когда множество M_A слишком велико и потому не может быть дано целиком, а представлено лишь относительно небольшой случайной выборкой $M_e \subseteq M_A$. Если эта выборка состоит из m элементов, то она может быть охарактеризована с помощью булевой матрицы размера $m \times n$

$$\begin{array}{c}
 P_1 \quad P_2 \quad . \quad . \quad . \quad P_{n-1} \quad P_n \\
 \begin{array}{c} a_1 \\ a_2 \\ . \\ . \\ a_{m-1} \\ a_m \end{array}
 \begin{array}{|c|c|c|c|c|c|}
 \hline
 b_{11} & b_{12} & . & . & . & b_{1n-1} & b_{1n} \\
 b_{21} & b_{22} & . & . & . & b_{2n-1} & b_{2n} \\
 . & . & . & . & . & . & . \\
 . & . & . & . & . & . & . \\
 b_{m-11} & b_{m-12} & . & . & . & b_{m-1n-1} & b_{m-1n} \\
 b_{m1} & b_{m2} & . & . & . & b_{mn-1} & b_{mn} \\
 \hline
 \end{array}
 \end{array}
 \quad
 \begin{array}{l}
 b_{ij} \in \{0, 1\} \\
 M_e = \{a_1, a_2, \dots, a_{m-1}, a_m\}
 \end{array}$$

Задача поиска импликативных закономерностей сводится к задаче поиска областей запрета в булевом пространстве M . Если они действительно существуют и случайная выборка M_e не слишком мала, то они могут быть обнаружены путем специального анализа построенной булевой матрицы. Прежде всего заметим, что если существует хотя бы одна закономерность, то ни один вектор из определяемой ею области запрета не будет представлен ни одной строкой матрицы. Будем говорить, что соответствующий интервал не пересекается с матрицей. Это подсказывает простой алгоритм поиска импликативных закономерностей. Достаточно организовать перебор всех интервалов в порядке возрастания рангов, в ходе которого проверять их на пересечение с матрицей. Если некоторый интервал не пересекается, то можно выдвинуть гипотезу о существовании соответствующей ему закономерности. Но насколько обоснована будет эта гипотеза? Ведь может оказаться, что в области M_A вообще не существует закономерностей такого ранга, а отсутствие пересечения данного интервала с матрицей просто случайно.

Покажем, как отвечает на этот вопрос А.Д.Закревский.

Так как априорно все булевы матрицы размера $m \times n$ для нас равновероятны, можно попробовать вычислить вероятность $P(m, n, k)$ того, что для случайно выбранной матрицы данного размера существует хотя бы один не пересекающийся с ней интервал ранга k . Если эта вероятность окажется достаточно маленькой, то у нас появятся все основания предположить, что мы обнаружили реальную закономерность в множестве M_A .

В связи с неудобством вычисления вероятности $P(m, n, k)$ можно использовать тот факт, что математическое ожидание $W(m, n, k)$ числа интервалов ранга k , не пересекающихся со случайно выбранной матрицей размера $m \times n$, хорошо аппроксимирует $P(m, n, k)$ при малых ее значениях — $P(m, n, k) \leq W(m, n, k)$.

Математическое ожидание $W(m, n, k)$ можно записать в виде

$$W(m, n, k) = 1 \cdot p_1 + 2 \cdot p_2 + \dots,$$

где p_i — вероятность того, что ровно i интервалов ранга k не пересекаются со случайно выбранной матрицей размера $m \times n$.

Так как априорные вероятности выбора для всех матриц одинаковы, p_i — это просто доля матриц, с которыми не пересекается ровно i интервалов ранга k . Число всех булевых матриц размера $m \times n$ равно 2^{mn} . Если посредством x_i обозначить число матриц, с которыми не пересекается i интервалов ранга k , то p_i можно записать в виде

$$p_i = \frac{x_i}{2^{mn}}.$$

Это позволяет представить математическое ожидание следующим образом

$$W(m, n, k) = \frac{1 \cdot x_1 + 2 \cdot x_2 + \dots}{2^{mn}}.$$

Для каждого i вычислить x_i довольно сложно. Эту трудность можно обойти, если заметить, что значение выражения, стоящего в числителе дроби, арифметически равно сумме по всем интервалам ранга k числа матриц, с которыми они не пересекаются. Число интервалов ранга k равно $C_n^k \cdot 2^k$. Поэтому числитель дроби запишется в виде

$$\sum_{i=1}^{C_n^k \cdot 2^k} y_i,$$

где y_i — число матриц, с которыми не пересекается i -й интервал ранга k . Но так как для всех $i, j \leq C_n^k \cdot 2^k$ имеет место $y_i = y_j$, мы получим

$$\sum_{i=1}^{C_n^k \cdot 2^k} y_i = C_n^k \cdot 2^k \cdot y_1.$$

Остается вычислить y_1 . Эта задача имеет простое решение. Доля матриц, в которых первые k компонент первой строки равны 1, составляет $\frac{2^{n-k}}{2^n} = 2^{-k}$. Доля же матриц, в которых это не имеет места, равна $1 - 2^{-k}$. Доля матриц, ни в одной из m строк которых первые k компонент не равны одновременно 1, составляет $(1 - 2^{-k})^m$, а общее число таких матриц равно $2^{mn} \cdot (1 - 2^{-k})^m$. Но это и есть y_1 . Окончательно после всех преобразований математическое ожидание запишется в виде

$$W(m, n, k) = C_n^k \cdot 2^k \cdot (1 - 2^{-k})^m.$$

Данная формула позволяет судить, закономерности каких рангов при данном числе предикатов $P_1, \dots, P_n$ и данном объеме выборки $|M_e| = m$ имеет смысл искать.

Из совокупности обнаруженных закономерностей можно образовывать базу знаний об области M_A . Методы автоматического доказательства теорем позволяют получать ответы на различные запросы относительно свойств предметов из M_A .

В оставшейся части работы покажем, как распространить описанный метод выявления импликативных закономерностей на случаи:

- 1) многоместных предикатов
- 2) временных закономерностей, которые выразимы в соответствующей временной логике
- 3) многозначных логик специального вида
- 4) логик, атомарные предложения которых членятся на пары типа <атрибут-значение>
- 5) автоматического образования понятий.

1. Пусть у нас имеется s предикатов $P_1^{i_1}, \dots, P_s^{i_s}$ с различным числом аргументных мест и мы интересуемся закономерностями, которые могут быть представлены в виде импликаций

$$\forall x_1 \dots \forall x_w (A_1 \& \dots \& A_n \rightarrow B_1 \vee \dots \vee B_v),$$

где $A_1 \dots A_n, B_1 \dots B_v$ - атомарные формулы.

Булеву матрицу строим по следующим правилам. Сопоставляем столбцам различные атомарные формулы, получаемые различными возможными подстановками индивидуальных переменных из списка $x_1, \dots, x_w$ на аргументные места предикатов $P_1^{i_1}, \dots, P_s^{i_s}$. Всего получим $n = w^{i_1} + \dots + w^{i_s}$ различных атомарных формул. В качестве случайной выборки теперь используем $M'_e \subseteq M_A^w$. Строкам сопоставляем элементы из M'_e . На пересечении данного столбца и данной строки стоит 1, если соответствующая столбцу формула для соответствующего строке кортежа индивидов $\langle c_1, \dots, c_w \rangle$ при сопоставлении $c_1 \rightarrow x_1, \dots, c_w \rightarrow x_w$ принимает значение "истина", в противном случае стоит 0. Математическое ожидание $W'(m, n, k)$ вычисляется по формуле

$$W'(m, n, k) = (C_n^k - Z) \cdot 2^k \cdot (1 - 2^{-k})^m.$$

Необходимо объяснить, чему равно Z . Возьмем k атомарных формул, сопоставленных некоторым столбцам нашей матрицы. По этим формулам определим неориентированный граф, вершинами которого как раз и будут эти формулы. Две вершины графа соединены ребром, е.т.е. имеется хотя бы одна переменная из списка $x_1, \dots, x_w$, которая входит одновременно в обе формулы этих вершин. Будем говорить, что данные k атомарных формул *связны*, если связан сопоставленный им граф. Z равно числу всех несвязанных сочетаний из n по k формул. Искать области запрета для несвязанных сочетаний формул не имеет смысла.

2. Перейдем к случаю выявления временных закономерностей типа причинно-следственных. Рассмотрим случаи дискретного линейного и ветвящегося в будущее времени.

Язык исчисления предикатов первого порядка расширим временным оператором F . Формула FA истинна в момент времени t ,

е.т.е. формула A истинна во все моменты, непосредственно следующие за моментом t . Соответствующие временные логики можно получить, добавив к аксиомам исчисления предикатов три новые аксиомы

$$A.1 \quad F\neg A \leftrightarrow \neg FA$$

$$A.2 \quad F(A \& B) \leftrightarrow (FA \& FB)$$

$$A.3 \quad F\forall xA \leftrightarrow \forall xFA$$

и правило $\frac{\vdash A}{\vdash FA}$.

Это логика линейного времени. Логику ветвящегося времени получим, заменив аксиому $A.1$ на

$$A'.1 \quad FA \rightarrow \neg F\neg A.$$

Нас будут интересовать импликативные закономерности вида

$$\forall x(A_1 \& \dots \& A_n \rightarrow F(B_1 \vee \dots \vee B_v)),$$

где $A_1, \dots, A_n, B_1, \dots, B_v$ – литералы и для ветвящегося времени $U, V \geq 1$, а для линейного $U \geq 1, V = 1$.

Изменяются правила построения булевой матрицы. За каждым из элементов множества M_e производятся два наблюдения в произвольные два соседних момента времени. Язык для характеристики объекта в предшествующий момент времени состоит из предикатов $P_1, \dots, P_{n_1}$, а в последующий момент времени из предикатов $Q_1, \dots, Q_{n_2}$. Матрица имеет вид

	P_1	P_2	$\dots$	P_{n_1}	Q_1	Q_2	$\dots$	Q_{n_2}
a_1	b_{11}	b_{12}	$\dots$	b_{1n_1}	b_{1n_1+2}	b_{1n_1+2}	$\dots$	$b_{1n_1+n_2}$
a_2	b_{21}	b_{22}	$\dots$	b_{2n_1}	b_{2n_1+1}	b_{2n_1+2}	$\dots$	$b_{2n_1+n_2}$
$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$
a_{m-1}	b_{m-11}	b_{m-12}	$\dots$	b_{m-1n_1}	b_{m-1n_1+1}	b_{m-1n_1+2}	$\dots$	$b_{m-1n_1+n_2}$
a_m	b_{m1}	b_{m2}	$\dots$	b_{mn_1}	b_{mn_1+1}	b_{mn_1+2}	$\dots$	$b_{mn_1+n_2}$

При поиске интервала ранга k , который не пересекается с данной матрицей, в случае ветвящегося времени требуется просматривать лишь такие сочетания столбцов, в которых часть столбцов принадлежит левой половине матрицы, а часть – правой.

Математическое ожидание вычисляется по формуле

$$W_T(m, n_1 + n_2, k) = (C_{n_1+n_2}^k - C_{n_1}^k - C_{n_2}^k) \cdot 2^k (1 - 2^{-k})^m.$$

В случае линейного времени просматриваются лишь такие сочетания столбцов, в которых $k-1$ столбцов принадлежат левой половине, а один столбец – правой.

Математическое ожидание вычисляется по формуле

$$W_T(m, n_1 + n_2, k) = (n_2 \cdot C_{n_1}^{k-1}) \cdot 2^k (1 - 2^{-k})^m.$$

3. Чтобы перейти к рассмотрению многозначных логик, нам необходимо предварительно решить следующую задачу.

Пусть нам дано некоторое множество V конечной мощности V .
Образуем семейство L всех его l -элементных подмножеств

$$L = \{u \subseteq V : |u| = l\}.$$

Пусть $S \in V^m$ и $u \in L$. Будем говорить, что последовательность $S = \langle S_1, \dots, S_m \rangle$ покрывает множество u , е.т.е. существует $1 \leq i \leq m$, такое, что $S_i \in u$.

Какова вероятность $P(v, l, m)$ того, что случайно выбранная последовательность $S \in V^m$ покрывает все множества из семейства L ?

Очевидно, что последовательность S покрывает все множества из семейства L , е.т.е. среди элементов множества $\{S_1, \dots, S_m\}$ имеется по крайней мере $v-l+1$ различных. Общее число таких последовательностей равно

$$\sum_{i=v-l+1}^v C_v^i \cdot \phi(m, i) \cdot i!$$

где $\phi(m, i)$ - число Стирлинга 2-го рода - число разбиений множества $\{1, \dots, m\}$ на $(1 \leq i \leq m)$ непустых подмножеств. Поэтому искомая вероятность равна

$$P(v, l, m) = \frac{\sum_{i=v-l+1}^v C_v^i \cdot \phi(m, i) \cdot i!}{v^m}.$$

Язык многозначной логики состоит из

1. $\langle k_1, \dots \rangle = \text{coef}$ - множество коэффициентов
2. $\langle p_1, \dots, p_n \rangle = \text{Prop}$ - множество пропозициональных символов
3. $\&, \vee, +, \neg$ - логические связи

Формулы

1. Если $k \in \text{coef}$, $p \in \text{Prop}$, то $\langle p, k \rangle$ - формула
2. Если A и B - формулы, то и $\neg A, (A \& B), (A \vee B), (A \rightarrow B)$ - формулы
3. Ничто другое формулой не является.

Моделью будем называть тройку $\mathbb{M} = \langle M, \varphi, V \rangle$, где

M - непустое множество индивидов

V - непустое множество мощности V

φ - функция интерпретации, такая, что для $k \in \text{coef}$ и $p \in \text{Prop}$ выполняется $\varphi(k) \in 2^V$ и $\varphi(p) \in V^M$.

Определим отношение $\mathbb{M} \models^a A$, которое читается "в модели $\mathbb{M}$ индивид a выполняет формулу A ".

$$\mathbb{M} \models^a \langle p, k \rangle \text{ е.т.е. } \varphi(p)(a) \in \varphi(k)$$

$$\mathbb{M} \models^a \neg A \text{ е.т.е. } \mathbb{M} \not\models^a A$$

$$\mathbb{M} \models^a (A \& B) \text{ е.т.е. } \mathbb{M} \models^a A \text{ и } \mathbb{M} \models^a B$$

$$\mathbb{M} \models^a (A \vee B) \text{ е.т.е. } \mathbb{M} \models^a A \text{ или } \mathbb{M} \models^a B$$

$$\mathbb{M} \models^a (A \rightarrow B) \text{ е.т.е. } \mathbb{M} \not\models^a A \text{ или } \mathbb{M} \models^a B$$

Формула A общезначима в модели $\mathbb{M}$, е.т.е. $\forall a (\mathbb{M} \models^a A)$.

Каждому индивиду $a \in M$ в модели $\mathbb{M}$ можно сопоставить вектор $d(a) = \langle d_1, \dots, d_n \rangle$, где $d_i = \varphi(p_i)(a)$. Всего может быть V^n различных векторов.

Для фиксированной модели $\mathbb{M}$ нас интересуют выявления существующих в ней импликативных закономерностей вида

$$\langle p_{i_1}, k_{i_1} \rangle \& \dots \& \langle p_{i_t}, k_{i_t} \rangle \rightarrow \langle p_{j_1}, k_{j_1} \rangle \vee \dots \vee \langle p_{j_w}, k_{j_w} \rangle,$$

которые эквивалентным образом можно представить посредством

$$\neg (\langle p_{i_1}, k_{i_1} \rangle \& \dots \& \langle p_{i_t}, k_{i_t} \rangle \& \neg \langle p_{j_1}, k_{j_1} \rangle \& \dots \& \neg \langle p_{j_w}, k_{j_w} \rangle).$$

Если данная закономерность имеет место в модели $\mathbb{M}$, то ни одному индивиду из множества M не сопоставлен вектор, в котором

$$d_{i_1} \in \varphi(k_{i_1}), \dots, d_{i_t} \in \varphi(k_{i_t}), d_{j_1} \in (V \setminus \varphi(k_{j_1})), \dots, d_{j_w} \in (V \setminus \varphi(k_{j_w})).$$

Множество всех таких векторов будем называть областью запрета ранга $k=t+w$ меры

$$\mu = \frac{|\varphi(k_{i_1}) \times \dots \times \varphi(k_{i_t}) \times (V \setminus \varphi(k_{j_1})) \times \dots \times (V \setminus \varphi(k_{j_w}))|}{V^k}.$$

Множество векторов $J \subseteq V^n$ будем называть интервалом ранга k меры μ , е.т.е. существуют $S_{i_1}, \dots, S_{i_k} \subseteq V$, такие, что J равно множеству всех векторов $d = \langle d_1, \dots, d_n \rangle$, у которых

$$d_{i_1} \in S_{i_1}, \dots, d_{i_k} \in S_{i_k} \text{ и } \mu = \frac{|S_{i_1} \times \dots \times S_{i_k}|}{V^k} = \frac{|J|}{|V^n|}.$$

Пусть нам дана случайная выборка $M_e \subseteq M$. Представим ее в виде матрицы

	P_1	P_2	$\dots$	P_n
a_1	d_{11}	d_{12}	$\dots$	d_{1n}
a_2	d_{21}	d_{22}	$\dots$	d_{2n}
$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$
a_m	d_{m1}	d_{m2}	$\dots$	d_{mn}

По ней мы и будем искать интересующие нас закономерности. Поиск опять сводится к обнаружению интервалов, которые не пересекаются с построенной матрицей, но производится не так, как в булевом случае.

Организуем перебор всех сочетаний из n по k столбцов, в ходе которого для каждого сочетания ищем максимальные по мере μ интервалы, не пересекающиеся с матрицей. Пусть некоторый такой интервал найден. Так как априорно все матрицы для нас равновероятны, очевидно, что вероятность обнаружить в данных k столбцах хотя бы один не пересекающийся с матрицей интервал ранга k меры μ не превышает

$$1 - P(V^k, \mu \cdot V^k, m),$$

а математическое ожидание числа сочетаний из n по k столбцов, в которых можно обнаружить такой не пересекающийся с матрицей

интервал, не превышает

$$C_n^k \cdot (1 - P(V^k, \mu \cdot V^k, \pi)).$$

Если математическое ожидание достаточно мало и не превышает 0.01, то у нас есть все основания считать, что мы обнаружили реальную закономерность. Если математическое ожидание недостаточно мало, но не превышает 1, то мы можем устроить дополнительную проверку обнаруженного интервала, увеличив объем выборки.

Если данный интервал не отражает реальной закономерности, то его мера μ может рассматриваться как вероятность того, что случайно выбранный вектор попадет в этот интервал. Число векторов, которые нужно выбрать случайно, чтобы с вероятностью α хотя бы один из них попал в интервал, равно наименьшему натуральному числу, превышающему

$$\frac{\log(1-\alpha)}{\log(1-\mu)}.$$

Именно на столько и нужно увеличить выборку. Если $\alpha \geq 0.99$ и дополнительная выборка не дала ни одного вектора, принадлежащего данному интервалу, то мы принимаем гипотезу о существовании соответствующей закономерности.

4. В системах искусственного интеллекта, так и во многих информационных системах, в которых применяется логика, не всегда оказывается удобным придерживаться классической схемы членения атомарных предложений на предикат и аргументы. Более удобной оказывается схема членения на <атрибут-значение-аргумент>, а для пропозиционального случая на <атрибут-значение> [6]. В некоторых логиках вместо одного значения данного атрибута указывается некоторое множество возможных значений. Именно последний случай мы и рассмотрим.

Язык состоит из

1. SA - множество символов атрибутов
2. CV - множество символов значений атрибутов
3. $\&, \vee, \rightarrow, \neg$ - логические связи

Формулы

1. Если $\bar{a} \in SA$ и $\bar{v} \in CV$, то $\langle \bar{a}, \bar{v} \rangle$ - формула
2. Если A и B - формулы, то и $\neg A$, $(A \& B)$, $(A \vee B)$, $(A \rightarrow B)$ - формулы
3. Ничто другое формулой не является.

Моделью будем называть пятерку $\mathbb{M} = \langle M, A, \{V_a\}_{a \in A}, f, \varphi \rangle$, где

M - непустое множество индивидов

A - непустое множество атрибутов

$\{V_a\}_{a \in A}$ - семейство непустых множеств значений атрибутов

$f: M \times A \rightarrow \bigcup_{a \in A} V_a$ - функция, которая сопоставляет паре из индивида и атрибута значение этого атрибута, такая, что $f(x, a) \in V_a$

φ - функция интерпретации, такая, что $\varphi(\bar{a}) \in A$, $\varphi(\bar{v}) \subseteq \bigcup_{a \in A} V_a$.

Определим отношение $\mathbb{M} \models^x A$ "индивид x выполняет формулу A в модели $\mathbb{M}$ ".

$\mathbb{M} \models^x \langle \bar{a}, \bar{v} \rangle$ е.т.е. $f(x, \varphi(\bar{a})) \in \varphi(\bar{v})$

$\mathbb{M} \models^x \neg A$ е.т.е. $\mathbb{M} \not\models^x A$

$\mathbb{M} \models^x (A \& B)$ е.т.е. $\mathbb{M} \models^x A$ и $\mathbb{M} \models^x B$

$\mathbb{M} \models^x (A \vee B)$ е.т.е. $\mathbb{M} \models^x A$ или $\mathbb{M} \models^x B$

$\mathbb{M} \models^x (A \rightarrow B)$ е.т.е. $\mathbb{M} \models^x A$ или $\mathbb{M} \models^x B$.

Формула A общезначима в модели $\mathbb{M}$, е.т.е. $\forall x (\mathbb{M} \models^x A)$.

Пусть нам дана случайная выборка $M_0 \subseteq M$. Представим ее в виде матрицы

	a_1	a_2	$\dots$	a_n
x_1	C_{11}	C_{12}	$\dots$	C_{1n}
x_2	C_{21}	C_{22}	$\dots$	C_{2n}
$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$
$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$
x_m	C_{m1}	C_{m2}	$\dots$	C_{mn}

где $a_1, \dots, a_n \in A$ и $C_{ji} = f(x_j, a_i)$.

Для простоты предположим, что множества значений всех атрибутов конечны и не упорядочены. Как и при рассмотрении случая многозначной логики, мы можем ввести понятие интервала, его ранга и меры. Определения очевидны. Единственное отличие состоит в том, что у различных атрибутов число значений может быть различным. Посредством V_i будем обозначать число значений i -го атрибута.

Организуем перебор сочетаний из n по k столбцов. Мы хотим, чтобы математическое ожидание числа сочетаний столбцов, в которых успех в обнаружении непересекающихся с матрицей интервалов ранга k меры μ случаен, не превышало $\epsilon \leq 0.01$. Поэтому для конкретного сочетания из k столбцов мы ищем интервалы лишь такой меры μ , для которой выполняется неравенство

$$\epsilon \geq C_n^k \cdot (1 - P(V_{i_1} \cdot \dots \cdot V_{i_k}, V_{i_1} \cdot \dots \cdot V_{i_k} \cdot \mu, m)).$$

Если обнаружен интервал, для которого выполняется это неравенство, то мы принимаем соответствующую гипотезу. Если это неравенство не выполняется, но выполняется неравенство

$$1 \geq C_n^k \cdot (1 - P(V_{i_1} \cdot \dots \cdot V_{i_k}, V_{i_1} \cdot \dots \cdot V_{i_k} \cdot \mu, m)),$$

то мы производим дополнительную выборку, объем которой вычисляется так же, как и в случае многозначной логики.

5. Рассмотрим случай автоматического формирования понятий на примерах. Язык для представления понятий используем тот, который ввели в разделе 4. В языке понятие представляется в виде конъюнкции нескольких атомарных формул. Именно такое представление выбрано в медицинской экспертной системе [6].

Пусть дана случайная выборка предметов, которые принадлежат объему интересующего нас понятия S . Строим характеризующую матрицу. Так же, как и в разделе 4, организуем перебор, но перебираем сочетания лишь по одному столбцу. Допустим, мы нашли всего t закономерностей, которые представлены атомарными

формулами $p_1, \dots, p_t$. Число этих закономерностей не обязательно должно быть равно числу столбцов матрицы. Если в некотором столбце стоял атрибут, который не является существенным для предметов из объема данного понятия, то он не войдет ни в одно предложение $p_1, \dots, p_t$. Процедура отсеивает несущественные атрибуты. Если набор исходных атрибутов был достаточно полон, то мы можем принять гипотезу, что данная совокупность закономерностей как раз и характеризует весь объем понятия S .

В заключение следует сказать, что описанные процедуры достаточно просто реализуются на компьютере и позволяют весьма оперативно обрабатывать разнообразную эмпирию.

ЛИТЕРАТУРА

1. Попов Э.В. Экспертные системы: Решение неформализованных задач в диалоге с ЭВМ. М., 1987.
2. Закревский А.Д. Некоторые комбинаторные задачи искусственного интеллекта // Семиотика и информатика. 1980. Вып. 15.
3. Закревский А.Д. К выбору гипотез при поиске закономерностей в булевом пространстве // Докл. АН БССР. 1981. Т. 25. № 3.
4. Закревский А.Д. Выявление имплицативных закономерностей в булевом пространстве признаков и распознавание образов // Кибернетика. 1982. № 1.
5. Закревский А.Д. Логика распознавания. Минск, 1988.
6. Осипов Г.С. Метод формирования и структурирования модели знаний для одного типа предметных областей // Техническая кибернетика. 1988. № 2.

СИНТАКСИЧЕСКОЕ ИСЧИСЛЕНИЕ ЛАМБЕКА И ЕГО СЕМАНТИКА*

В этой статье представлен обзор важнейших понятий и результатов, касающихся синтаксического исчисления Ламбека [25] и его вариантов; при этом особо рассматривается алгебраическая и лямбда-семантика. Подробное изложение этих вопросов имеется в книге Бушковского [12].

1. Синтаксическое исчисление

1.1. Типы строятся из исходных типов $(p, q, r, \dots)$ с помощью символа правого остатка $/$, символа левого остатка $\backslash$ и символа произведения $\cdot$. TP обозначает множество всех типов, а T_p — множество типов, построенных без произведения. Буквами x, y, z (соответственно X, Y, Z) мы будем обозначать типы (соответственно: цепочки типов).

1.2. ОПРЕДЕЛЕНИЕ. Цепочку $a \in V^+$ будем называть *правонаправленной* (соответственно: *левонаправленной*) функтором из $A \subseteq V^+$ в $B \subseteq V^+$, если $sa \in B$ (соответственно: $as \in B$) для всех $a \in A$. Множество всех правонаправленных (соответственно: левонаправленных) функторов из A в B обозначим B/A (соответственно: $A \backslash B$).

1.3. З а м е ч а н и е. Данное выше определение функтора существенно для понимания ключевого различия между подходом Ламбека к категориальной грамматике и классическим подходом к ней. В классической теории считается, что функторы детерминированы априорно данным функторными структурами (f -структурами) выражений, а теория Ламбека допускает абсолютное и универсальное (т.е. независимое от какого-то конкретного языка) определение функтора. Это определение позволяет приписывать структуры неструктурированным цепочкам, руководствуясь некоторыми объективными критериями. Таким образом, теория Ламбека фактически дает нам своего рода процедуру обнаружения грамматики.

1.4. Припишем исходные типы некоторым цепочкам над V . Тогда в нашем распоряжении имеется рекурсивная процедура приписывания цепочкам производных типов. Именно: тип x/y (соответственно: $y \backslash x$) следует приписать каждому правонаправленному (соответственно: левонаправленному) функтору из множества цепочек типа y в множество цепочек типа x , и тип $x \cdot y$ следует приписать каждой цепочке ab такой, что a — цепочка типа x , а b — цепочка типа y . Наконец, будем говорить, что стрелочное выражение $x_1, \dots, x_n \rightarrow x (x_1, x \in TP)$ L — общезначимо (т.е. общезначимо в смысле Ламбека), если при любом возможном приписывании типов цепочкам (как это описано выше) всякий раз, как выполняется условие, что для любого $i, 1 \leq i \leq n$, a_i есть цепочка типа

*Пер. с англ. А. Л. Блинова.

$x_1, a_1, \dots, a_n$, есть цепочка типа x . Ясно, что L - общезначимые стрелочные выражения представляют собой своего рода синтаксические тавтологии. Синтаксическое исчисление (SC), введенное Ламбеком [25], предназначается для порождения таких тавтологий.

1.5. СПРЕДЕЛЕНИЕ. SC - это формальная система, формулами которой являются стрелочные выражения вида $x \rightarrow y$ (простые стрелочные выражения), а аксиомы и правила которой таковы:

- (A.0) $x \rightarrow x$
- (A.2) $(x \cdot y) \cdot z \rightarrow x \cdot (y \cdot z), x \cdot (y \cdot z) \rightarrow (x \cdot y) \cdot z;$
- (R.1) из $x \cdot y \rightarrow z$ получается $x \rightarrow z/y;$
- (R.2) из $x \rightarrow z/y$ получается $x \cdot y \rightarrow z;$
- (R.3) из $x \cdot y \rightarrow z$ получается $y \rightarrow x \setminus z;$
- (R.4) из $y \rightarrow x \setminus z$ получается $x \cdot y \rightarrow z;$
- (R.5) из $x \rightarrow y$ и $y \rightarrow z$ получается $x \rightarrow z.$

1.6. З а м е ч а н и е. Изложим теперь другую аксиоматизацию исчисления SC, в которой единственное правило - (R.5) (оно само является частным случаем правила (R.0) (см.1.7). Нам нужно принять аксиомы (A.0), (A.2), а также:

$$(x/y) \cdot y \rightarrow x, x \cdot (x \setminus y) \rightarrow y, x \rightarrow (x \cdot y)/y, x \rightarrow y \setminus (y \cdot x) \quad (1)$$

и все прочие аксиомы, получающиеся из (1) в результате (возможно, неоднократного) применения следующего аксиомообразующего правила:

$$\text{из } x \rightarrow y \text{ получается } x \cdot x \rightarrow x \cdot y, x \cdot z \rightarrow y \cdot z, x/z \rightarrow y/z, z \setminus x \rightarrow z \setminus y. \quad (2)$$

Ясно, что в этом варианте системы $x \rightarrow y$ выводимо, е.т.е. существует последовательность $x_1, \dots, x_n$ ($n \geq 1$) такая, что $x_1 = x$, $x_n = y$ и $x_i \rightarrow x_{i+1}$ - аксиома, для всех i ($1 \leq i \leq n$). Итак, мы получили так называемую линейную форму исчисления SC.

1.7. ОПРЕДЕЛЕНИЕ. Очень удобна для исследования выводимости в SC генценовская форма этого исчисления, также описанная Ламбеком [25]. Именем GSC обозначим формальную систему, формулами которой являются стрелочные выражения вида $X \rightarrow x$ ($X \neq e$), единственные аксиомы которого суть (A.0), и правила которой таковы:

- (R.0) из $XYZ \rightarrow x$ и $Y \rightarrow y$ получается $XYZ \rightarrow x;$
- (GR.1) из $XYZ \rightarrow z$ и $Y \rightarrow y$ получается $X(x/y)YZ \rightarrow z;$
- (GR.2) из $XYZ \rightarrow z$ и $X \rightarrow y$ получается $XY(x \setminus y)Z \rightarrow z;$
- (GR.3) из $Xy \rightarrow x$ получается $X \rightarrow x/y, (X \neq e);$
- (GR.4) из $xX \rightarrow y$ получается $X \rightarrow x \setminus y, (X \neq e);$
- (GR.5) из $XxyY \rightarrow z$ получается $X(x \cdot y)Y \rightarrow z;$
- (GR.6) из $X \rightarrow x$ и $Y \rightarrow y$ получается $XY \rightarrow x \cdot y.$

1.8. Ф а к т. $\vdash_{\text{GSC}} x_1 \dots x_n \rightarrow x$, е.т.е. $x_1 \dots x_n \rightarrow x$ для всех $x_1 \dots x_n$, $x \in TP$. Следовательно, для всех $x, y \in TP$, $\vdash_{\text{GSC}} x \rightarrow y$, е.т.е. $\vdash_{\text{SC}} x \rightarrow y$.

1.9. ЛЕММА (лемма об устранении сечений; Ламбек [25]). Если $\vdash_{\text{GSC}} X \rightarrow x$, то имеется GSC-вывод стрелочного выражения $X \rightarrow x$, не использующий (R.0) (правило сечения).

1.10. СЛЕДСТВИЕ. SC и GSC разрешимы.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО: Достаточно доказать разрешимость исчисления

GSC. Под сложностью стрелочного выражения $X \rightarrow x$ будем понимать общее число символов $/, \backslash$ и $\cdot$, входящих в X и x . Заметьте, что для любого из правил (GR.1)–(GR.6) сложность заключения больше, чем сложность любой из посылок. Поэтому для исчисления GSC (в его свободной от сечений форме) применима разрешающая процедура "поиска доказательства".

1.11. СЛЕДСТВИЕ. (Свойство "подтипности"). Если $\vdash_{\text{GSC}} X \rightarrow x$, то имеется такой GSC-вывод стрелочного выражения $X \rightarrow x$, что любое стрелочное выражение, участвующее в этом выводе, построено из некоторых подтипов тех типов, которые входят в $X \rightarrow x$.

1.12. ОПРЕДЕЛЕНИЕ. Свободное от произведений Синтаксическое Исчисление есть подсистема исчисления SC, ограниченная стрелочными выражениями, свободными от произведений, и имеющая в качестве (единственной) аксиомы (A.0), а в качестве правил – (R.0), (GR.1)–(GR.4).

1.13. Ф а к т. Свободное от произведений SC есть консервативная подсистема исчисления SC, т.е. любое свободное от произведений стрелочное выражение выводимо в первом, е.т.е. оно выводимо во втором.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО: Нужно использовать 1.11.

1.14. З а м е ч а н и е. Поскольку имеет место 1.13, нам не нужно никакое специальное обозначение для свободного от произведений SC. Аналогичным образом мы вводим другую консервативную подсистему исчисления SC: правонаправленное свободное от произведений. Эта подсистема не использует ни произведений, ни левого остатка, и, очевидно, может быть аксиоматизируема с помощью (A.0), (R.0), (GR.1), (GR.3).

1.15. П р е д о с т е р е ж е н и е. Свободная от сечений форма исчисления GSC эквивалентна самому GSC только в слабом смысле (ср. Вуйицкий [30]), – это значит, что у двух данных систем совпадает множество теорем, но не совпадает отношение следования. Именно поэтому мы включаем (R.0) в число исходных правил каждой из описанных выше систем.

1.16. ОПРЕДЕЛЕНИЕ. e -включающее Синтаксическое Исчисление (SC_e) отличается от SC тем, что допускает формулы вида $e \rightarrow x$ (которые мы будем обозначать короче: $\rightarrow x$), устраняя ограничение $X \neq e$ в (GR.2) (GR.4) и используя новое правило:

(R_e) из $\rightarrow x \cdot y$ получается $\rightarrow x$ и $\rightarrow y$.

Фактически, статус правила (R_e) аналогичен статусу (R.0): оно нужно для отношения следования (совместимого с естественной семантикой; см. Раздел 2), но не для чистого SC_e . SC_e соответствует, грубо говоря, такому функторному анализу, который рассматривает пустую цепочку в качестве возможного элемента множества категорий. SC_e разрешимо, и мы определим его варианты точно так же, как мы это сделали для SC.

1.17. Ф а к т. SC не является консервативной подсистемой исчисления SC_e .

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО: Для всех $x, y \in TP$, $x/(y/y) \rightarrow x$ выводимо в SC_e .

С другой стороны, $s/(s/s) \rightarrow s$ не выводимо в SC (используйте упомянутую выше разрешающую процедуру для GSC).

1.18. ОПРЕДЕЛЕНИЕ. Коммутативное SC (CSC) получается из SC в результате добавления аксиомы коммутативности

$$x \cdot y \rightarrow y \cdot x \quad (1)$$

Эквивалентная генценовская система (GCSC) получается из GSC в результате введения правила коммутативности:

$$(COM) \text{ из } XxyY \rightarrow z \text{ получается } XyxY \rightarrow z.$$

Свободное от произведений (правонаправленное) CSC и CSC_0 определяются очевидным образом.

1.19. З а м е ч а н и е. CSC (фактически его вариант, свободный от произведений) введено Швартсом [33] и ван Бентемом [1] в качестве системы, подходящей для так называемого ненаправленного функторного анализа естественного языка (т.е. мы пренебрегаем порядком атомарных элементов в сложном выражении). Заметьте, что в CSC типы x/y и $y \backslash x$ эквивалентны (т.е. они взаимозаменяемы в любом выводимом стрелочном выражении), поэтому мы просто отождествляем их друг с другом. Другими словами, CSC равносильно своему правонаправленному фрагменту. И CSC , и CSC_0 , и все его фрагменты упомянутого выше рода разрешимы. Поскольку, скажем, $s \rightarrow s/(s/s)$ выводимо в CSC, но не выводимо в SC, последнее не является консервативной подсистемой первого.

2. Алгебраическая семантика

2.1. ОПРЕДЕЛЕНИЕ. Под *резидуальной полугруппой* (р.полугруппой: см. Фукс [20]) мы понимаем структуру $\underline{M} = (M, \leq, \cdot, /, \backslash)$, такую, что: $(M, \cdot)$ – полугруппа, $\leq$ – отношение частичного порядка на M , а $/, \backslash$ – бинарные операции на M , удовлетворяющие следующим эквивалентностям:

$$\text{для } a, b, c \in M, a \leq c/b, \text{ е.т.е. } a \cdot b \leq c, \text{ е.т.е. } b \leq a \backslash c. \quad (1)$$

Буквами RES обозначим класс всех р.полугрупп.

2.2. Ф а к т. Для любой $\underline{M} \in RES$, $(M, \leq, \cdot)$ есть частично упорядоченная полугруппа, т.е. выполняется следующее условие монотонности:

$$\text{если } a \leq b \text{ и } c \leq d, \text{ то } a \cdot c \leq b \cdot d. \quad (1)$$

2.3. ОПРЕДЕЛЕНИЕ. Под *оценкой* мы понимаем произвольную пару $(\underline{M}, f)$ такую, что $\underline{M} \in RES$ и $f: Pr \rightarrow M$. Естественное расширение f на TP получается следующим образом:

$$f(x \cdot y) = f(x) \cdot f(y), \quad f(x/y) = f(x)/f(y), \quad f(x \backslash y) = f(x) \backslash f(y). \quad (1)$$

Говорят, что стрелочное выражение $x_1 \dots x_n \rightarrow x$ выполняется оценкой $(\underline{M}, f)$, если:

$$f(x_1) \dots f(x_n) \leq f(x) \quad (2)$$

Мы будем использовать стандартную логическую нотацию:

$(\underline{M}, f) \models X \rightarrow x$ ($X \rightarrow x$ выполняется оценкой $(\underline{M}, f)$), $(\underline{M}, f) \models R$ (каждое стрелочное выражение из множества R выполняется оценкой $(\underline{M}, f)$), $R \models X \rightarrow x$ (K – подкласс класса RES, $X \rightarrow x$ выполняются каждой

оценкой $(\underline{M}, f)$ такой, что $\underline{M} \in K$ и $(\underline{M}, f) \models R$ и $\models_K X \rightarrow x$ (т.е. $\emptyset \models_K X \rightarrow x$).

2.4. ТЕОРЕМА. Для всех множеств R и стрелочных выражений $X \rightarrow x$, $R \vdash_{SC} X \rightarrow x$, е.т.е. $R \models_{RES} X \rightarrow x$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО: В направлении "только если" Теорема доказывается рутинной индукцией по GRS-выводам. Мы проведем доказательство в направлении "если". Пусть $A = (TP, \cdot, /, \backslash)$ - абсолютно свободная алгебра типов. Отношение

$$x \sim y \text{ е.т.е. } R \vdash_{SC} x \rightarrow y \text{ и } R \vdash_{SC} y \rightarrow x \quad (1)$$

является конгруэнтностью в A . Пусть $\iota: TP \rightarrow TP/\sim$ - каноническое отображение. Определим $\underline{M} \in RES$, задав $(\underline{M}, \cdot, /, \backslash) = A/\sim$ и постулировав:

$$\iota(x) \leq \iota(y), \text{ е.т.е. } R \vdash_{SC} x \rightarrow y \text{ для } x, y \in TP \quad (2)$$

Тогда для $f = \iota$ получаем:

$$(\underline{M}, f) \models X \rightarrow x, \text{ е.т.е. } R \vdash_{SC} X \rightarrow x \quad (3)$$

Стало быть, если $R \vdash_{SC} X \rightarrow x$ не выполняется, то не выполняется и $(\underline{M}, f) \models X \rightarrow x$ и, следовательно, не может выполняться $R \models_{RES} X \rightarrow x$.

2.5. З а м е ч а н и е. RES - это наиболее широкая (математически естественная) алгебраическая семантика для SC. Некоторые более узкие семантики связаны с лингвистическими приложениями этого исчисления. Ниже мы рассмотрим несколько примеров.

2.6. ОПРЕДЕЛЕНИЕ. Пусть $\underline{M} = (M, \cdot)$ - полугруппа. Под *р.полугруппой над $\underline{M}$* будем понимать структуру $P(\underline{M}) = (P(M), \cdot, /, \backslash, \leq)$, где $P(M)$ - множество всех подмножеств множества M , $\leq$ - отношение включения, а операции заданы следующим образом:

$$A \cdot B = \{a \cdot b : a \in A, b \in B\} \quad (1)$$

$$A/B = \{c \in M : c \cdot b \in A, \text{ для всех } b \in B\} \quad (2)$$

$$A \backslash B = \{c \in M : a \cdot c \in B \text{ для всех } a \in A\} \quad (3)$$

для всех $A, B \in P(M)$. Заметьте, что $P(\underline{M})$ и в самом деле является *р.полугруппой*.

Буквами GS (обобщенная стандартная семантика - generalized standard semantics) обозначим класс всех *р.полугрупп над полугруппами*, а символом S (стандартная семантика) - класс всех *р.полугрупп над свободными полугруппами*.

2.7. З а м е ч а н и е. S в точности соответствует семантике, принятой Ламбеком [25]. На самом деле, если дана свободная полугруппа V^+ и $A, B \subseteq V^+$, то A/B и $A \backslash B$, как они были определены выше, имеют значение, введенное в 2.1.2. С другой стороны, S не покрывает многих интересных моделей функторного анализа. Например, исчисления SC_e , GSC_e и т.д. связаны с семантикой *р.полугрупп над свободными моноидами V^** (будем обозначать эту семантику S_e); символом GS_e обозначим класс *р.полугрупп над произвольными моноидами*. У Бушковского [8,9] можно найти и другие примеры использования в функторном анализе GS, а не S (частичные функторы). У Дошена [18] рассматривается семантика еще более общая, чем GS.

2.8. ТЕОРЕМА. Для всех множеств R и стрелочных выражений $X \rightarrow x$, $R \vdash_{SC} X \rightarrow x$, е.т.е. $R \models_{GS} X \rightarrow x$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО: В направлении "только если" Теорема следует

из 2.4, поскольку $GScRES$. В обратном направлении доказать Теорему гораздо сложнее (ср.: Бушковский [7,10]). Мы дадим троякую схему этого доказательства.

Нам понадобится тот вариант исчисления SC , который связан с натуральным выводом. Определим сначала *термы* с помощью следующей индукции:

- (1) все типы суть термы
- (2) если t - терм, то $(t, x \cdot y, 1)$ и $(t, x \cdot y, 2)$ - тоже термы, для всех $x, y \in TP$,
- (3) если t, u - термы, то tu - терм.

Множество всех термов будем обозначать Tr . Символом $C(t)$ обозначим общее число вхождений исходных типов в $t \in Tr$. Будем говорить, что терм t *простой*, если t не есть конкатенация каких-то термов¹.

Будем называть терм u *подтермом* терма t , если выполняется одно из следующих условий (в этом определении, по существу, применена индукция на $C(t)$):

- (4) $u = t$
- (5) $t = (w, x \cdot y, i)$ и u - подтерм терма w
- (6) $t = t_1 \dots t_n$, t_i - простой терм, и либо u - подтерм одного из t_i ($i \leq n$), либо $u = t_1 t_{i+1} \dots t_j$ для некоторых $1 \leq i \leq j \leq n$.

Любой терм вида $(t, x \cdot y, 1)(t, x \cdot y, 2)$ называется *redex*, а терм t - *contractum* этого *redex*'а. Мы пишем $t \rightarrow u$, если u получается из t заменой некоторого *redex*'а, являющегося подтермом терма t , его *contractum*'а. $\rightarrow^*$ обозначает, как обычно, рефлексивное и транзитивное замыкание отношения $\rightarrow$. Говорят, что терм *несводимый*, если он не содержит ни одного *redex*'а. Нетрудно проверить, что:

- (7) если $t \rightarrow u$, то $C(t) > C(u)$.

Соответственно, для любого $t \in Tr$ имеется некий несводимый $u \in Tr$ такой, что $t \rightarrow^* u$. Для доказательства того, что имеется в точности один такой терм u для данного t , нам нужно следующее свойство Чёрча-Рокера (см.: Карри и др. [16,17]):

- (8) если $t \rightarrow^* u_1$, $t \rightarrow^* u_2$, то $u_1 \rightarrow^* u$, $u_2 \rightarrow^* u$ для некоторого $u \in Tr$, которое можно доказать с помощью рутинной, хотя и утомительной индукции.

Пусть M равно множеству всех несводимых термов. Определим операцию $\cdot$ на M следующим образом: $t \cdot u$ - тот единственный несводимый терм w , для которого выполняется $t \rightarrow^* w$. Ясно, что $(M, \cdot)$ - полугруппа, будем обозначать ее $\underline{M}$. Мы найдем такую оценку $(P(\underline{M}), f)$, которая удовлетворяет условию:

- (9) $(P(\underline{M}), f) \models X \rightarrow x$, е.т.е. $R \vdash_{SC} X \rightarrow x$;

ясно, что такая оценка дает нам то, что нужно. Чтобы задать f , нам нужен вариант исчисления SC , связанный с натуральным выво-

¹Т.е. если в построении терма t не было применено индуктивное условие (3) (см. выше) (примеч. пер.).

дом; будем обозначать этот вариант ND.

Формулы исчисления ND имеют вид $t \in x$, где $t \in Tr$, $x \in TP$. В ND допускаются следующие аксиомы и правила:

(NDA) $x \in x$, для $x \in TP$

(NDR.1) из $t \in x/y$ и $u \in y$ получается $t \in x$

(NDR.2) из $t \in x$ получается $t \in x/y$

(NDR.3) из $t \in x/y$ и $u \in x$ получается $u \in y$

(NDR.4) из $x \in y$ получается $t \in x/y$

(NDR.5) из $t \in x \cdot y$ получается $(t, x \cdot y, 1) \in x$ и $(t, x \cdot y, 2) \in y$

(NDR.6) из $t \in x$ и $u \in y$ получается $t \in x \cdot y$

(NDR.7) из $t \in x$ и $t \in y$ получается $u \in x$.

Каждому стрелочному выражению $x_1 \dots x_n \rightarrow x$ мы приписываем новое правило вывода:

(10) из $t_1 \in x_1 \dots t_n \in x_n$ получается $t \in x$.

Символом $ND(R)$ будем обозначать расширение исчисления ND, получающееся в результате добавления к ND всех правил вида (10), приписываемых стрелочным выражениям из R. Для любого термина t определяем цепочку $T(t) \in TP$ с помощью следующей индукции:

(11) $T(x) = x$, для $x \in TP$

(12) $T((t, x \cdot y, 1) = x, T((t, x \cdot y, 2) = y)$

(13) $T(tu) = T(t)T(u)$.

Имеет место следующее:

(14) если $\vdash_{ND(R)} t \in x$, то $R \vdash_{SC} T(t) \rightarrow x$;

мы опустим здесь довольно сложное доказательство этого утверждения.

Определим $f: Pr \rightarrow P(M)$ следующим образом:

(15) $f(p) = \{t \in M: \vdash_{ND(R)} t \in p\}$ для $p \in Pr$.

Индукцией по $c(x)$ можно проверить, что выполняется:

(16) $f(x) = \{t \in M: \vdash_{ND(R)} t \in x\}$ для $x \in TP$,

а из этого сразу же следует (9).

Ввиду 2.4 и 2.8 SC является сильно полным по отношению как к RES, так и GS.

2.9. Ф а к т. SC не является сильно полным по отношению к S.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО: Имеет место $s \rightarrow s \cdot s \vdash_S s \rightarrow s/s$, но не имеет место $s \rightarrow s \cdot s \vdash_{SC} s \rightarrow s/s$.

Вопрос о том, является ли SC слабо полным по отношению к S, до сих пор остается открытым (см.: Бушковский [10]). Однако имеет место:

2.10. ТЕОРЕМА (Бушковский [5]). Для любого множества R стрелочных выражений, свободных от произведения, и для любого стрелочного выражения $X \rightarrow x$, свободного от произведения, $R \vdash_S X \rightarrow x$, е.т.е. $R \vdash_{SC} X \rightarrow x$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО: Уберем из доказательства теоремы 2.8 типы с произведением и соответствующие правила исчисления ND. Полученная в результате полугруппа $(M, \cdot)$ совпадает со свободной полугруппой $(Tr, \cdot)$.

Совершенно аналогичные результаты имеют место для исчисления SC_e по отношению к семантикам GS_e и S_e . Для случая CSC и

CSC_e нам требуются некоторые подклассы классов $GS(S)$ и $GS_e(S_e)$, соответственно, содержащие лишь такие оценки $(\underline{M}, f)$, что $\underline{M}$ есть р.полугруппа над некоторой (свободной) абелевой полугруппой или над некоторым (свободным) абелевым моноидом.

3. Совместимость

В этом разделе мы обсуждаем некоторые взаимоотношения между категориальными грамматиками и стандартными алгебраическими семантиками S . Каждая категориальная грамматика будет трактоваться как "формальная теория" какой-то одной оценки $(\underline{M}, f)$, а $\underline{M} \in S$ будем называть стандартной моделью этой грамматики. Мы сформулируем подходящие условия совместимости грамматики и ее стандартной модели, которые приведут нас к естественным критериям оценок для категориальных грамматик. Выяснится, что в соответствии с этими критериями грамматики, основанные на SC и его аксиоматических расширениях, представляют собой вид категориальных грамматик, наиболее совместимых с S . Мы исходим из некоторого общего понятия категориальной грамматики (в этом и следующих разделах мы ограничиваемся типами без произведений).

3.1. ОПРЕДЕЛЕНИЕ. Множество R стрелочных выражений, свободных от произведений, называется *категориальным исчислением*, если содержит стрелочные выражения $(A.0), (A.1) (x/y)y \rightarrow x, (A.1') x(x/y) \rightarrow y$ и является замкнутым относительно правила $(R.0)$. Наименьшее категориальное исчисление будем называть исчислением Айдукевича (AC).

3.2. Под *категориальной грамматикой* (CG) мы подразумеваем упорядоченную тройку $G = (V_G, I_G, R_G)$ такую, что V_G - конечный алфавит, I_G - отображение из V_G в семействе конечных множеств типов и R_G - категориальное исчисление. Если дано категориальное исчисление R , любая CGG такая, что $R_G = R$, будет называться R - CG . Для фиксированного R грамматики R - CG образуют так называемый род грамматик CG . Так, грамматики AC - CG и SC - CG представляют собой различные роды грамматик CG (грамматики AC - CG - это классические категориальные грамматики; см. Бушковский [12]). Мы также будем называть грамматики SC - CG, SC_e - CG и другие CG , основанные на тех или иных вариантах исчисления SC , *ламбековыми грамматиками*.

3.3. ОПРЕДЕЛЕНИЕ. Если дана CGG , то *терминальное распределение типов* грамматики G определяется как функция $(\cdot): TP \rightarrow P(V_G^*)$ такая, что: $v_1 \dots v_n \in (x)_G (v_i \in V_G)$, е.т.е. $x_1 \dots x_n \rightarrow x \in R_G$ для некоторых $x_i \in I_G(v_i), 1 \leq i \leq n$.

Множество $(S)_G$ называется *языком*, порождаемым грамматикой G , и обозначается $L(G)$.

3.4. З а м е ч а н и е. Вообще говоря, f -язык, порождаемый грамматикой G , невозможно определить естественным образом, если только R_G не удовлетворяет некоторым дополнительным условиям. Но для ламбековых грамматик это возможно (см. Бушковский [12]).

3.5. ОПРЕДЕЛЕНИЕ. Пусть G - категориальная грамматика. Оценка $(P(V_G^*)cat_G)$, где $cat_G(p) = (p)_G$ для всех $p \in Pr$, называется стандартной моделью грамматики G и обозначается $M(G)$.

3.6. З а м е ч а н и е. Та или иная категориальная грамматика G традиционно используется для описания синтаксических категорий некоторого данного языка Lan , в частности, для детерминации объема базовых категорий. С помощью тех или иных эмпирических тестов устанавливаются категории атомных выражений, что равносильно исходному распределению типов I_G . Выбирается также категориальное исчисление R_G , детерминирующее род грамматики G . Наконец, категории языка Lan следует идентифицировать (хотя бы приблизительно) с множествами $(x)_G$, для $x \in Tr$.

Ясно, что для того чтобы описание, которое дает грамматика G , давало нам действительную информацию о структуре языка Lan , нужно позаботиться по меньшей мере о двух вещах: (1) чтобы I_G было совместимо с действительными категориями слов в Lan , (2) чтобы R_G или по крайней мере какой-то его фрагмент не содержали стрелочных выражений, которые не являются общезначимыми для языка Lan . Если оба эти требования выполнены, то мы получаем достаточно корректное описание. Точнее, если имеет место (1) и Lan выполняет R_G в объеме всех стрелочных выражений $X \rightarrow x$ таких, что $X \in Tr(G)^*$, $x \in Tr(G)$, то каждая цепочка из $(x)_G$, $x \in Tr(G)$, наверняка принадлежит категории типа x в Lan . Чтобы гарантировать (2), традиционная теория предпочитала рассматривать категориальные грамматики, основанные на универсальных категориальных исчислениях, т.е. на исчислениях, содержащих только S -общезначимые стрелочные выражения. В то же время она полностью отказалась от какого бы то ни было формального анализа условия (1) и попросту передала этот вопрос в сферу чисто эмпирических суждений. Фактически, других возможностей и не было, поскольку структура языка Lan оставалась совершенно темной и туманной для исследователя до того, как эта структура становилась эксплицированной с помощью формализма грамматики G (конечно же, эта картина отражает то, что происходит, когда мы пытаемся описать не формальный язык, предварительно модифицированный с помощью строгой грамматики какого бы то ни было вида, а естественный язык).

Суть новизны нашего подхода состоит в допущении, что любая категориальная грамматика G детерминирует некоторый язык, именно: $M(G)$, который достаточно строго определен, чтобы стать предметом формального анализа. Таким образом, вопрос о совместимости G и Lan распадается на две ясно разграниченные части: (а) совместимость G с $M(G)$, (б) совместимость $M(G)$ с Lan . При этом (а) допускает математическую трактовку, в то время как (б) остается областью эмпирических исследований - точно так же, как обстоит дело и в других эмпирических науках.

3.7. Говорят, что $CG\ G$:

(1) адекватна, если для всех $X \in Tr(G)^*$, $x \in Tr(G)$, $M(G) \models X \rightarrow x$ всякий

раз, когда $X \rightarrow x \in R_G$

(2) корректна, если $v \in \text{cat}_G(x)$ всякий раз, когда $x \in I_G(v)$ для всех $x \in \text{Tr}$, $v \in V_G$

(3) T -полна ($T \subseteq \text{Tr}$), если $(x)_G = \text{cat}_G(x)$ для всех $x \in T$.

Говорят, что G — T -полна (соответственно: слабо полна), если она $\text{Tr}(P_G)$ — (соответственно: $\text{Tr}(G)$ -) полна, где P_G состоит из всех исходных типов, имеющих в $\overline{\text{Tr}}(G)$.

3.8. К о м м е н т а р и й. Таким образом, SG адекватна, если ее стандартная модель выполняет соответствующее категориальное исчисление в той мере, в какой речь идет о типах, задействованных в I_G . Ясно, что каждая универсальная SG , т.е. SG G , у которой R_G универсально, адекватна. G корректна, если I_G не противоречит структуре стандартной модели $M(G)$; говоря с интуитивной точки зрения: G сообщает нам правду об $M(G)$, но не обязательно всю правду. Наконец, G T -полна (соответственно: слабо полна, соответственно: полна), если она точно описывает $M(G)$ в той мере, в какой речь идет о типах T (соответственно: из $\overline{\text{Tr}}(G)$, соответственно: из $\text{Tr}(G)$).

3.9. Ф а к т. (1) Каждая полная SG адекватна и слабо полна. (2) Каждая слабо полная SG корректна. (3) Если G адекватна, то следующие условия эквивалентны:

(1) G корректна,

(2) $(x)_G \subseteq \text{cat}_G(x)$, для всех $x \in \overline{\text{Tr}}(G)$.

3.10. З а м е ч а н и е. Ясно, что корректность — это такое требование, которое должно быть выполнено категориальной грамматикой G , если мы хотим на основе G здраво судить о синтаксических структурах выражений языка, описываемого грамматикой G .

3.11. Л Е М М А. Пусть G — корректна, $R_G \subseteq R$, и $M(G) \models R$. Тогда $G' = (V_G, I_G, R)$ адекватна и корректна, и $M(G') = M(G)$.

3.12. У Т В Е Р Ж Д Е Н И Е. Если $R \subseteq SC$, то, для любой корректной R - CG G , существует корректная SC - CG G' такая, что $M(G') = M(G)$; следовательно, G' слабо эквивалентна G .

3.13. Обычно установление слабой эквивалентности грамматик различных видов представляет собой нетривиальную задачу. Изложенное выше утверждение дает особенно простой метод ее решения с помощью семантических понятий. Поэтому это утверждение можно рассматривать как основанную на семантике теорему о слабой эквивалентности.

3.14. Ф а к т. Для любого категориального исчисления $R \subseteq SC$ существуют некорректные R - CG .

Д О К А З А Т Е Л Ъ С Т В О: Ввиду 3.11 достаточно найти некорректные SC - CG . Пусть $V_G = \{v, w\}$, $v \neq w$ и пусть $I_G(v) = s/(s/n)$, $I_G(w) = s/n$. Тогда $(n)_G = \text{cat}_G(n) = \emptyset$ и поэтому $\text{cat}_G(s/n) = V_G^*$. Следовательно, $v \in \text{cat}_G(s/n)$, но $vv \notin (s)_G = \text{cat}_G(s)$. Поэтому $v \notin \text{cat}_G(s/(s/n)) \in I_G(v)$, и стало быть G некорректна.

3.15. Ф а к т. Любая универсальная CG G , у которой $o(G) \leq 1$, корректна.

3.16. ОПРЕДЕЛЕНИЕ. Мы говорим, что G расширяема до $\bar{G}$ (где $\bar{G}$ и G и $G-CG$), если $V_{\bar{G}} \subseteq V_G, I_{\bar{G}}$ совпадает с I_G на V_G и $R_{\bar{G}} = R_G$.

3.17. ТЕОРЕМА. SC – единственное универсальное исчисление R такое, что каждая $R-CG$ расширяема до некоторой слабо полной CG .

3.18. ОПРЕДЕЛЕНИЕ. Говорят, что два категориальных исчисления R, R' почти эквивалентны, если для каждого стрелочного выражения $X \rightarrow p, p \in Pr, X \rightarrow p$ входит в R е.т.е. $X \rightarrow p$ входит в R' .

3.19. ТЕОРЕМА. Для любого универсального категориального исчисления R следующие утверждения эквивалентны:

- (1) R почти эквивалентно исчислению SC ,
- (2) каждая $R-CG$ расширяема до некоторой конкретной CG .

3.20. З а м е ч а н и е. Теоремы 3.17 и 3.19 дают нам еще одну прекрасную семантическую характеристику исчисления SC в терминах совместимости. Хотя среди $SC-CG$ и существуют некорректные SC , любую $SC-CG$ можно преобразовать в слабо полную, а стало быть, в корректную CG путем расширения словаря. Примечательно, что это расширение допускает естественную лингвистическую интерпретацию. Именно: мы вводим синтаксически однозначные копии синтаксически неоднозначных выражений.

3.21. ОПРЕДЕЛЕНИЕ. Говорят, что категориальное исчисление конечно, если оно представляет собой расширение исчисления AC , получающееся из AC в результате пополнения последнего конечным числом схем аксиом.

3.22. П р и м е р ы. AC конечно. Карлгрен [23,24] рассматривает расширение исчисления AC за счет введения следующих схем аксиом:

$$(1) (x/y)(y/z) \rightarrow x/z \\ (x \setminus y)(y \setminus z) \rightarrow x \setminus z,$$

соответствующих функциональной композиции (см. также: Гич [21], Левин [27]). Зелёнка [31] и ван Бентем [3] рассматривают законы:

$$(2) x \rightarrow y / (x \setminus y), \quad x \rightarrow (y/x) \setminus y,$$

которые обычно называют законами, "повышающими тип". Другие виды конечных категориальных исчислений см. в статьях Сидмана, Полларда и других (Эрле и др. [13]).

3.23. ТЕОРЕМА. Ни одно из конечных категориальных исчислений не является почти эквивалентным исчислению SC .

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО: См.: Зелёнка [32], (см. также Раздел 5).

3.24. З а м е ч а н и е. Фактически, единственные категориальные исчисления, обычно рассматриваемые в теории категориальных грамматик, – это SC вместе с конечными категориальными исчислениями. В силу 3.23, SC – единственное среди этих исчислений, которое почти эквивалентно самому себе. А стало быть, ввиду теоремы 3.19, грамматики $SC-CG$ – это единственный вид грамматик (из числа обычно рассматриваемых), обладающих свойством "каждая CG такого рода может быть расширена до корректной CG ".

3.25. Интересным направлением исследований представляется поиск каких-то эффективных критериев корректности, слабой полноты и т.д. В частности, интересно узнать, рекурсивен ли класс корректных SC-CG (слабо полных SC-CG и т.д.); аналогичный вопрос можно поставить и для других родов категориальных грамматик. Ответ на этот вопрос относительно прост для одного довольно своеобразного вида функции I_G .

3.26. ОПРЕДЕЛЕНИЕ. Говорят, что CG G совершенна, если она удовлетворяет следующим условиям:

(1) $Tr(G)$ замкнуто относительно подтипов, (2) для любого $x \in Tr(G)$ имеется некоторое $v \in V_G$ такое, что $I_G(v) = x$.

3.27. Ф а к т. Если G - совершенная и универсальная CG, то следующие утверждения эквивалентны:

(1) G слабо полна (соответственно: корректна),

(2) для всех $X \in Tr(G)^+$, $x \in Tr(G)$ (соответственно: $p \in P_G$), R_G содержит $X \rightarrow x$ (соответственно: $X \rightarrow p$) е.т.е. $\vdash_{SC} X \rightarrow x$ (соответственно: $\vdash_{SC} X \rightarrow p$).

3.28. СЛЕДСТВИЕ. Каждая совершенная AC-CG слабо полна.

3.29. СЛЕДСТВИЕ. Пусть G - совершенная AC-CG такая, что $s/(n/n)$, $(n/n) \in Tr(G)$. Тогда G некорректна.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО: Заметьте, что стрелочное выражение

(1) $(s/(n/n))(n/n)(n/n) \rightarrow s$

выводимо в SC, но невыводимо в AC, и примените 3.27.

3.30. З а м е ч а н и е. Приведенный пример показывает, что некорректность - довольно распространенное явление среди AC-CG и других CG, основанных на неполных (относительно S) категориальных исчислениях.

3.31. Среди нескольких CG, детерминирующих одну и ту же стандартную модель, мы наверняка предпочтем те, у которых большая степень полноты. Как мы сейчас покажем, высшую степень полноты нельзя достичь без применения универсальных CG. Обозначим символом Tr_n множество всех $x \in Tr$ таких, что $o(x) \leq n$ и пусть $Tr_n(P) = Tr_n \cap Tr(P)$.

3.32. ТЕОРЕМА. Никакая универсальная CG G не является $Tr_n(P_G)$ -полной, где $n \geq o(G) + 2$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО: См. Бушковский [5].

3.33. З а м е ч а н и е. В противовес этой теореме каждая оценка из S равняется $M(G)$ для некоторой CG G такой, что R_G - некоторое аксиоматическое расширение исчисления SC. Можно считать, что это расширение конечно, если все базовые категории являются языками с конечным числом состояний. Итак, мы обнаружили примечательное различие в силе между универсальными и неуниверсальными CG; только последние способны давать полное описание синтаксических категорий того или иного языка.

✱

4. Лямбда-семантика

4.1. Крессвел [14] широко использует typed лямбда-термы для

описания логической формы выражений в естественных языках; предвосхищение этого подхода можно найти у Монтегю [28] и даже у Карри [15]. Недавно ван Бентем [2,4] показал, что с помощью снабженных типами лямбда-термов можно определить преобразования типов, выводимые в свободном от произведения CSC. В этом разделе мы поясним основные идеи такого подхода. Следует отметить, что связь между категориальными исчислениями и снабженными типами лямбда-термами близко родственна хорошо известному соответствию между выводами в интуиционистской логике и typed лямбда-исчислению; это последнее обстоятельство отмечено Карри и др. [16,17] и детально разработано Мартин-Лёвом и другими (см.: Стенлунд [29]).

4.2. ОПРЕДЕЛЕНИЕ. Символом Tr будем обозначать множество право-направленных (свободных от произведения) типов. (Ненаправленные) typed лямбда-термы (коротко: термы) строятся из типизированных переменных с помощью двух операций: аппликация и лямбда-абстракция. Говоря точнее, для любого $x \in Ter$, мы фиксируем счетное множество Var_x переменных типа x . Множества Ter_x термов типа Tr определяются посредством следующей рекурсии:

- (1) $Var_x \subseteq Ter_x$
- (2) если $t \in Ter_{x/y}$ и $u \in Ter_y$, то $(tu) \in Ter_x$
- (3) если $v \in Var_y$ и $t \in Ter_x$, то $\lambda v. t \in Ter_{x/y}$.

Множество Ter всех термов определяем как объединение всех множеств Ter_x , $x \in Tr$. В терме $\lambda v. t$ лямбда-абстрактор λv связывает каждое свободное вхождение переменной v в t , а терм t называется сферой действия этого лямбда-абстрактора.

4.3. ОПРЕДЕЛЕНИЕ. Пусть $(U_x)_{x \in Tr}$ - стандартная онтологическая иерархия типов (см.: ван Бентем [2], Стенлунд [29]); пусть U - объединение всех U_x , $x \in Tr$. Под приписыванием мы понимаем семейство $(f_x)_{x \in Tr}$ отображений $f_x: Var_x \rightarrow U_x$. Приписывание $(f_x)_{x \in Tr}$ однозначно расширяется до отображения $\bar{f}: Ter \rightarrow U$ такого, что $\bar{f}: Ter_x \rightarrow U_x$, для всех $x \in Tr$. Отображение $\bar{f}$ определяется следующим образом:

- (1) $\bar{f}(v) = f_x(v)$ для всех $v \in Var_x$
- (2) $\bar{f}((tu)) = \bar{f}(t)(\bar{f}(u))$
- (3) $\bar{f}(\lambda v. t)(v \in Var_y, t \in Ter_x)$

равно функции $g: U_y \rightarrow U_x$, которая для каждого $a \in U_y$ удовлетворяет равенству $g(a) = \bar{f}^a(t)$, где $(f_x^a)_{x \in Tr}$ - приписывание, совпадающее с $(f_x)_{x \in Tr}$, за исключением того, что переменной v оно приписывает a .

4.4. ОПРЕДЕЛЕНИЕ. Пусть $t \in Ter$, и пусть $v_1, \dots, v_n$ - это все свободные переменные в t , упорядоченные слева направо (мы отождествляем переменные с их вхождениями в t). Пусть, далее, $v_i \in Ter_{x_i}$ ($1 \leq i \leq n$) и $t \in Ter_x$. Тогда мы говорим, что t репрезентирует стрелочное выражение $x_1, \dots, x_n \rightarrow x$. Если $t \in Ter_x$ не содержит свободных переменных (t замкнуто), то говорят, что он реп-

репрезентирует стрелочное выражение $\rightarrow x$. Если дан некоторый класс $K \subseteq Ter$, будем писать $K \models X \rightarrow x$ в том случае, если $X \rightarrow x$ репрезентируется некоторым термом из K .

4.5. **З а м е ч а н и е.** Можно считать, что терм $t \in Ter_x$, все свободные переменные которого суть $v_1 \in Ter_{x_1}, \dots, v_n \in Ter_{x_n}$, задает преобразование декартового произведения $U_{x_1} \times \dots \times U_{x_n}$ в U_x . Таким образом, утверждение $K \models x_1 \dots x_n \rightarrow x$ означает, что в K имеется терм, задающий преобразование $U_{x_1} \times \dots \times U_{x_n}$ в U_x . Ясно, что $K \models \rightarrow x$ е.т.е. K содержит некий замкнутый терм $t \in Ter_x$.

4.6. **П р и м е р ы.** Стрелочные выражения

- (1) $x \rightarrow x$
- (2) $(x/y)y \rightarrow x$
- (3) $x/y \rightarrow (x/z)/(y/z)$
- (4) $(x/y)(y/z) \rightarrow x/z$
- (5) $x \rightarrow y/(y/x)$

репрезентируются, например, терминами:

- (1') v , где $v \in Var_x$
- (2') (v_1, v_2) , где $v_1 \in Var_{x/y}$, $v_2 \in Var_y$
- (3') $\lambda v_1. \lambda v_2. (v_3(v_1 v_2))$, где $v_1 \in Var_{y/z}$, $v_2 \in Var_z$ и $v_3 \in Var_{x/y}$
- (4') $\lambda v_2. (v_3(v_1 v_2))$, где v_1, v_2, v_3 те же, что в (3'),
- (5') $\lambda v_1. (v_1 v_2)$, где $v_1 \in Var_{y/x}$, $v_2 \in Var_x$.

4.7. **П р и м е р.** Пусть U_s и U_n обозначают, соответственно, область значений истинности и область индивидов. Рассмотрим язык первопорядковой логики (в польской нотации) с одним символом одноместного предиката (R), одним символом одноместной функции (f) и одной индивидной константой (d). Обычно считается, что эти символы обозначают некоторые объекты $\bar{R} \in U_{s/n}$, $\bar{f} \in U_{n/n}$ и $\bar{d} \in U_n$ соответственно. Таким образом, Rfd является правильно построенным выражением, десигнат которого — некоторое значение истинности (естественным образом получаем f -структуру $(R(fd)_1)_1$). Стрелочное выражение (3) позволяет возвести R к типу $(s/n)/(n/n)$, а соответствующий десигнат символа R можно вычислить из $\bar{R}$ с помощью (3'). Соответственно Rf можно считать правильно построенным выражением типа s/n . Это позволяет нам приписать выражению Rfd еще одну структуру: $((Rf)_1 d)_1$.

4.8. Если не выходить за рамки Tr , исчисление CSC (см. 2.1.18) можно аксиоматизировать с помощью аксиом (A.0) и (A.1) $(x/y)y \rightarrow x$, $y(x/y) \rightarrow x$ и правил (R.0), (RG.3) и (RG.3') из $X \rightarrow x$ получается $X \rightarrow x/y$ ($X \neq e$). На самом деле одно из правил (GR.3), (GR.3') можно элиминировать. Или же можно оставить оба правила, но убрать одну из двух схем (A.1).

4.9. **ОПРЕДЕЛЕНИЕ.** Рассмотрим следующие ограничения на структуру термов:

- (C.1) каждый подтерм содержит свободную переменную,
- (C.2) ни один подтерм не содержит больше одного вхождения одной и той же переменной,
- (C.3) каждый лямбда-абстрактор связывает некоторую свобод-

ную переменную (нет бессодержательных случаев лямбда-абстракции).

Для $D \subseteq \{1, 2, 3\}$ символом Ter_D обозначим множество всех $t \in Ter$ таких, что t удовлетворяет всем ограничениям (с. i) для $i \in D$. Ясно, что $Ter_0 = Ter$ есть класс всех термов.

4.10. ОПРЕДЕЛЕНИЕ. Символом $\bar{y}$ обозначим цепочку типов, каждый элемент которой равен y . Рассмотрим одну общую схему правила:

(R) из $\bar{y}X \rightarrow x$ получается $X \rightarrow x/y$, и следующие ограничения:

(с. 1) $X \neq e$

(с. 2) $l(\bar{y}) = 1$

(с. 3) $\bar{y} \neq e$.

Символом CSC_D ($D \subseteq \{1, 2, 3\}$) обозначим исчисление, детерминированное посредством (A.0), (A.1) (обе — схемы), (R0) и (R), причем последняя удовлетворяет всем ограничениям (с. i), для $i \in D$. Ясно, что $CSC_{1,2,3} = CSC$.

ПРЕДОСТЕРЕЖЕНИЕ: если $1 \notin D$, то предполагается, что CSC_D допускает стрелочные выражения вида $\rightarrow x$.

4.11. ЛЕММА. Для любого $D \subseteq \{1, 2, 3\}$, CSC_D замкнуто относительно правила коммутативности (COM).

4.12. ТЕОРЕМА. Для всех $D \subseteq \{1, 2, 3\}$, $X \in Tpr^*$, $x \in Tpr$, имеет место следующая эквивалентность: $(LC)_{CSC_D} X \rightarrow x$, *е.т.е.*

$Ter_D; X \rightarrow x$.

4.13. З а м е ч а н и е. Теорема 4.12 устанавливает "лямбда-полноту" исчисления CSC и его расширений, определенных выше. Для CSC она была доказана ван Бентемом [2]. Ее расширения для некоторых других исчислений доказал пишущий эти строки (см. Бушковский [11]). Доказательство для этих обобщенных систем связано с некоторыми вариантами исчислений CSC_D , при этом оно строго совместимо с конструкциями лямбда-термов (таким образом мы получаем строгое соответствие между выводами в этих исчислениях и деревьями построения термов).

4.14. Аналогичным образом можно доказать лямбда-полноту многих других исчислений типов (по отношению к некоторым подходящим классам термов). Например, AC (правонаправленное) полно по отношению к классу Ter_0 свободных от лямбда-абстрактора термов. Правонаправленное SC , свободное от произведения, полно по отношению к классу всех термов, удовлетворяющих условиям (С.1), (С.2) и:

(С.3^r) каждый лямбда-абстрактор связывает самое правое в своей области действия вхождение некоторой свободной переменной.

Убрав (С.1), получим адекватную лямбда-семантику для правонаправленного SC , свободного от произведения. Интересно, что заменив в (С.3^r) "самое правое" на "самое левое", получим дуальное ограничение (С.3^e).

При этом оказывается, что класс всех термов, выполняющих условия (С.1), (С.2), (С.3^e), дает в точности те стрелочные вы-

ражения, которые выводимы в CSC. Таким образом, мы нашли лямбда-семантику для CSC, отличную от $Ter_{1,2,3}$ (и на самом деле существенно более узкую, чем эта последняя).

4.15. В последних пунктах мы рассматривали различные классы термов, совместимые с некоторыми правонаправленными (коммутативными или не коммутативными) исчислениями типов. А что происходит в случае бинаправленных систем? Ответ относительно прост. Совершенно аналогичные результаты можно получить, применяя бинаправленные лямбда-термы. Насколько нам известно, такое обобщение лямбда-исчисления еще не исследовалось. Однако оно естественно возникает из проблем такого рода. Мы вводим два лямбда-абстрактора: λ^r (правый) и λ^l (левый) и принимаем следующее определение термов:

(1) $Var_x \subseteq Ter_x$ для всех $x \in Tr$

(2') = (2) (из 4.2),

(2'') если $t \in Ter_x$ и $u \in Ter_{x/y}$, то

(3') = (3) (с λ^r вместо λ),

(3'') если $v \in Var_x$ и $t \in Ter_y$, то $\lambda^l v. t \in Ter_{x/y}$.

Ясно, что бинаправленные лямбда-термы можно интерпретировать так, чтобы они обозначали некие объекты в онтологических иерархиях.

4.16. ОПРЕДЕЛЕНИЕ. Символом Ter_{sc} будем обозначать множество всех бинаправленных термов, удовлетворяющих ограничениям (C.1), (C.2) и:

(C.3') каждый правый лямбда-абстрактор связывает самое правое в своей области действия вхождение свободной переменной;

(C.3'') каждый левый лямбда-абстрактор связывает самое левое в своей области действия вхождение свободной переменной.

4.17. ТЕОРЕМА. Для всех $X \in Tr^+$, $x \in Tr$, $\vdash_{sc} X \rightarrow x$, е.т.е. $Ter_{sc} : X \rightarrow x$.

4.18. В случае систем с произведением опять можно получить аналогичные результаты, применяя некоторые обобщенные варианты лямбда-исчисления. Модели для них можно найти, как правило, среди декартовых замкнутых категорий (см.: Ламбек и Скотт [26]).

4.19. Задача. Найдите общие взаимосвязи между аксиомами и правилами какого-либо исчисления типов, с одной стороны, и классами лямбда-термов, образующими адекватную семантику для этого исчисления. Поищите также какие-либо интуитивные обоснования таких ограничений, как (C.1), (C.2), и т.д.

5. Ламбековы системы vs. Пропозициональные исчисления

5.1. ОПРЕДЕЛЕНИЕ. Любому типу $x \in Tr$ мы приписываем пропозициональную формулу $P(x)$ следующим образом. Во-первых, мы идентифицируем исходные типы с пропозициональными переменными. Затем мы определяем $P(x)$ с помощью следующих рекурсивных пунктов:

- (1) $P(p)=p$ для $p \in Pr$
 (2) $P(x/y)=P(y) \rightarrow P(x)$.

Таким образом, для любого $x \in Tr$, $P(x)$ - чисто импликационная пропозициональная формула.

5.2. ОПРЕДЕЛЕНИЕ. Позитивное импликационное исчисление (PIC) (т.е. чисто импликационное интуиционистское пропозициональное исчисление; ср. Вуйцицкий [30]) можно аксиоматизировать следующим образом:

- (1.1) $A \rightarrow (B \rightarrow A)$
 (1.2) $(A \rightarrow (B \rightarrow C)) \rightarrow ((A \rightarrow B) \rightarrow (A \rightarrow C))$
 (1.3) из $A \rightarrow B$ и A получается B .

5.3. ТЕОРЕМА (сущность ее см. у Карри и др. [16]). Для всякого $x, Ter: \rightarrow x$, е.т.е. $\vdash_{PIC} P(x)$.

5.4. Комментарий. В свете теоремы 2.5.3 типы замкнутых лямбда-термов совпадают (при заданной выше интерпретации) с теоремами исчисления PIC. Нетрудно получить следующее обобщение:

5.5. ТЕОРЕМА. Для всех $x_1, \dots, x_n \in Tr$

$Ter: x_1 \dots x_{n-1} \rightarrow x_n$, е.т.е. $P(x_1), \dots, P(x_{n-1}) \vdash_{PIC} P(x_n)$.

5.6. СЛЕДСТВИЕ. Для всех $x_1, \dots, x_n \in Tr$,

$\vdash_{CSC_0} x_1 \dots x_{n-1} \rightarrow x_n$, е.т.е. $P(x_1), \dots, P(x_{n-1}) \vdash_{PIC} P(x_n)$.

5.7. И т о г. Таким образом, $CSC_0 = (A.0) + (A.1) + (R.0) + (R)$ (ограничения отсутствуют) представляет собой, по существу, исчисление PIC. Соответственно, все рассмотренные выше исчисления, будучи слабее, чем CSC_0 , могут быть идентифицированы с некоторыми подсистемами исчисления PIC. В частности CSC_2 , поскольку оно полно по отношению к Ter_2 , т.е. к классу всех терминов, удовлетворяющих ограничению (с.2), дает в точности те пропозициональные формулы, которые общезначимы во всех ВСК-алгебрах (определение этих алгебр см.: Исеки, Танака [22]).

5.8. Изложенные выше результаты наводят на мысль рассматривать исчисления типов как некоторые слабые пропозициональные исчисления. В частности, стрелочные выражения, выводимые в первых, соответствуют общезначимым схемам вывода во вторых. Заметьте, однако, что только исчисления, использующие (R) без ограничений (с.2) и (с.3), позволяют интерпретировать эти схемы в стандартном смысле, т.е. как приводящие от множества формул (X) к одной формуле (x). В остальных случаях X следует интерпретировать не как множество, а как цепочку, поскольку важны порядок типов в X (если мы не принимаем (COM) и/или число вхождений того или иного типа в x). Это приводит нас к обобщенному понятию отношения следования, которое мы будем называть цепочным следованием (S-следованием), в следующем смысле:

5.9. ОПРЕДЕЛЕНИЕ. Мы отождествляем типы из Tr с импликационными формулами. Под отношением S-следования мы понимаем отношение $C \subseteq Tr * X Tr$ (если $X, x \in C$, будем писать $X \rightarrow_c x$) такое, что

выполняются следующие условия:

(SC.1) $x \rightarrow_c x$, для всех $x \in \text{Tr}$

(SC.2) если $Y \rightarrow y$ и $XYZ \rightarrow_c z$, то $XYZ \rightarrow_c z$.

5.10. К о м м е н т а р и й. Ясно, что (SC.1) соответствует условию $X \subseteq Cn(X)$, а (SC.2) - условию $Cn(Cn(X)) \subseteq Cn(X)$; причем, эти последние суть условия следования, введенные Тарским. Для s -следования не предполагается никакого вида монотонности ($Cn(X) \subseteq Cn(Y)$), если $X \subseteq Y$.

5.11. ОПРЕДЕЛЕНИЕ. Если дано некоторое множество R стрелочных выражений, символом $C(R)$ обозначим наименьшее отношение s -следования, содержащее R . Говорят, что $C(R)$ деривационно, если (A.1) (правое) - единственное неаксиоматическое стрелочное выражение (т.е. имеющее вид $X \rightarrow x$, где $X \neq e$) в R .

5.12. УТВЕРЖДЕНИЕ. Стрелочные выражения, выводимые в AC (правонаправленном), дают наименьшее деривационное отношение s -следования.

5.13. УТВЕРЖДЕНИЕ. Стрелочные выражения, выводимые в $CSC_{2,3}$, дают наименьшее деривационное отношение s -следования, удовлетворяющее следующему варианту теоремы дедукции: (DT) если $XYZ \rightarrow z$, то $XZ \rightarrow (y \rightarrow z)$.

5.14.3 а м е ч а н и е. Изложенный только что результат показывает, что $CSC_{2,3}$ связано с s -следованием точно таким же образом, каким PIC связано со следованием (вспомните известную характеристику исчисления PIC, данную Сушко; ср. Вуйцицкий [30]).

5.15. ТЕОРЕМА. $CSC_{2,3}$ детерминирует наименьшее деривационное отношение s -следования, содержащие стрелочные выражения:

(a.1) $\rightarrow x/x$

(a.2) $\rightarrow x/(x/(y/y))$

(a.3) $\rightarrow (x/(x/y))/y$

(a.4) $\rightarrow ((x/z)/(y/z))/(x/y)$

(a.5) $\rightarrow ((z/z)/(z/y))(y/x)$.

5.16. К о м м е н т а р и й. Эта теорема показывает конечную аксиоматизируемость исчисления $CSC_{2,3}$ на основе AC (единственное правило вывода - (R.0)). Из 3.23 следует, что для SC нельзя отыскать конечной аксиоматизации такого вида. То же самое верно и для $CSC = CSC_{1,2,3}$ (Бушковский [11]). В качестве тривиального следствия получаем:

5.17. ТЕОРЕМА. Ни $\text{Ter}_{1,2,3}$, ни $\text{Ter}_{1,2,3}^*$ не могут быть порождены из какого-либо своего конечного подмножества посредством аппликации (под конечным подмножеством мы понимаем конечное число термов-стем, а не самих термов).

5.18.3 а м е ч а н и е. Благодаря точному соответствию между исчислениями типов и некоторыми пропозициональными логиками, развитую методологию последних можно непосредственно приложить к исследованию первых. Фактически, алгебраические модели из Раздела 2 - это своего рода матрицы (в смысле матричных семантик); это особенно прозрачно для случая e -чувствительных

исчислений. Могут возникнуть естественные вопросы, вытекающие из такой точки зрения. Ниже мы приводим несколько примеров.

5.19. ТЕОРЕМА (по существу, доказана Бушковским [5]). SC имеет конечную модель.

5.20. ТЕОРЕМА. Не существует конечной матрицы, слабо адекватной исчислению SC (то же для CSC, SC_0).

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО: Достаточно заметить, что если бы ассоциативное исчисление типов допускало слабо адекватную конечную матрицу, то категориальные грамматики, соответствующие этому исчислению, могли бы порождать в лучшем случае регулярные языки. С другой стороны, мы покажем в следующей главе, что категориальные грамматики, основанные на SC (а также и на CSC, SC_0), могут порождать нерегулярные языки.

5.21. Д о п о л н е н и е. Выше мы ограничились рассмотрением систем, свободных от произведения. Нетрудно распространить эти результаты на системы с произведением. Например, полное CSC_0 совпадает с импликативно-конъюнктивным интуиционистским пропозициональным исчислением. Более того, некоторые интересные исчисления типов можно расширить до различного рода релевантных логик и других неклассических логик (эти расширения недавно проанализированы Дозеном [19]).

ЛИТЕРАТУРА

1. Benthem van J. A Linguistic Turn: New Directions in Logic // Proc. of the VII Intern. Congr. Log. Meth. Philos. Sci. Salzburg, 1983.
2. Benthem van J. The Semantics of Variety in Categorical Grammar (in [11]).
3. Benthem van J. The Logic of Semantics // Varieties of Formal Semantics. Dordrecht, 1984.
4. Benthem van J. The Lambek Calculus (in [29]).
5. Buszkowski W. Compatibility of a categorical grammar with an associated category system // Zeitschr. f. math. Logik und Grundlagen d. Math. 1982. Bd.28. S.229-238.
6. Buszkowski W. Some decision problems in the theory of syntactic categories // Zeitschr. f. math. Logik und Grundlagen d. Math. 1982. Bd.28. S.539-548.
7. Buszkowski W. Lambek's Categorical Grammars. Adam Mickiewicz University. Poznań, 1982.
8. Buszkowski W. A note on the Lambek-van Benthem calculus // Bull. Sect. Log. 1984. Vol.13. P.31-37.
9. Buszkowski W. Algebraic Models of Categorical Grammars // Foundations of Logic and Linguistics. Problems and Their Solutions. N.Y., 1985.
10. Buszkowski W. Completeness results for Lambek Syntactic Calculus // Zeitschr. f. math. Logik und Grundlagen d. Math. 1986. Bd. 32. H.1.

11. Buszkowski W. The Logic of types // Initiatives in Logic. Amsterdam, 1987.
12. Buszkowski W. Logical Foundations of Categorical Grammars (in Polish). Polish Scientific Publishers, Warszawa, 1989.
13. Categorical Grammar and Natural Language Structures. Dordrecht, 1987.
14. Cresswell M.J. Logics and Languages. L., 1973.
15. Curry H.B. Some logical aspects of grammatical structure // Structure of Language and Its Mathematical Aspects. Providence, 1961.
16. Curry H.B., Feys R. Combinatory Logic. Amsterdam, 1958. Vol. I.
17. Curry H.B., Hindley J.R., Seldin J.P. Combinatory Logic. Amsterdam, 1970. Vol. II.
18. Došen K. A completeness theorem for the Lambek calculus of syntactic categories // Zeitschr. f. math. Logik und Grundlagen d. Math. 1985. Bd. 31. S. 235-241.
19. Došen K. Sequent Systems and Groupoid Models (manuscript). 1985.
20. Fuchs L. Partially Ordered Algebraic Systems. Oxford, 1963.
21. Geach P.T. A program for syntax // Semantics of Natural Language. Dordrecht, 1972.
22. Iséki K., Tanaka S. An introduction to the theory of BCK-algebras // Mathematica Japonica. 1978. Vol. 23. N 1.
23. Karlgren H. Categorical Grammar Calculus // SMIL. 1974.
24. Karlgren H. Categorical grammar: a basis for a natural language calculus? // Stud. Log. 1978. Vol. 37. P. 65-77.
25. Lambek J. The mathematics of sentence structure // American Math. Monthly. 1958. Vol. 65. P. 154-170.
26. Lambek J., Scott P.J. Aspects of higher order categorical logic // Contemp. Math. 1984. Vol. 30. P. 145-174.
27. Levin H. Categorical Grammar and the Logical Form of Quantification. Bibliopolis, Naples, 1982.
28. Montague R. Formal Philosophy. New Haven, 1974.
29. Stenlund S. Combinators, λ -Terms and Proof Theory. Dordrecht, 1972.
30. Wójcicki R. Lectures on Propositional Calculi. Wrocław, 1984.
31. Zielenka W. A direct proof of the equivalence of free categorical grammars and simple phrase structure grammars // Stud. Log. 1978. Vol. 37. P. 14-58.
32. Zielenka W. Axiomatizability of Ajdukiewicz-Lambek calculus und Grundlagen d. Math. 1981. Bd. 27. S. 215-224.
33. Zwarts F. Dissertation (manuscript). 1983.

ПРАНЕПРОТИВОРЕЧИВЫЕ СЕКВЕНЦИАЛЬНЫЕ ИСЧИСЛЕНИЯ

Предлагаемые построения секвенциальных исчислений основаны на идее применения в процессе дедукции правил манипулирования не только с отдельными логическими константами, но и с комплексами таких констант. Использование этой идеи, конечно, не является прерогативой исследований паранепротиворечивых логик. Но в этой области ее использование позволяет дать удобные для поиска доказательств формулировки многих паранепротиворечивых логик. Каждое из рассматриваемых в этой работе паранепротиворечивых секвенциальных исчислений получается в результате соответствующей трансформации исходного исчисления GCL – одной из секвенциальных формулировок классической пропозициональной логики.

Фиксируем некоторый стандартно определяемый пропозициональный язык L , алфавит которого есть $\{P_1, P_2, \dots, \&, \vee, \supset, \neg, \cdot, ()\}$. Буквами A, B, C (с нижними индексами или без них) будем обозначать произвольные L -формулы, а буквами $\Gamma, \Delta, \Sigma, \Theta$ – произвольные конечные (включая пустую) последовательности L -формул. Секвенции во всех формулируемых здесь секвенциальных исчислениях имеют вид $\Gamma \rightarrow \Delta$. Определение доказательства в каждом из этих исчислений стандартно и аналогично соответствующему определению из [1]. Поэтому для задания любого рассматриваемого в этой работе секвенциального исчисления S достаточно указать множество A_S всех основных секвенций S и множество R_S всех правил вывода S . Для формулировки исчислений потребуются следующие фигуры заключения R_1 – R_{25} .

$$\begin{array}{lll}
 \frac{A, \Gamma \rightarrow \Delta}{A \& B, \Gamma \rightarrow \Delta} R_1, & \frac{A, \Gamma \rightarrow \Delta}{B \& A, \Gamma \rightarrow \Delta} R_2, & \frac{\Gamma \rightarrow \Delta, A \quad \Gamma \rightarrow \Delta, B}{\Gamma \rightarrow \Delta, A \& B} R_3, \\
 \frac{A, \Gamma \rightarrow \Delta \quad B, \Gamma \rightarrow \Delta}{A \vee B, \Gamma \rightarrow \Delta} R_4, & \frac{\Gamma \rightarrow \Delta, A}{\Gamma \rightarrow \Delta, A \vee B} R_5, & \frac{\Gamma \rightarrow \Delta, A}{\Gamma \rightarrow \Delta, B \vee A} R_6, \\
 \frac{\Gamma \rightarrow \Delta, A \quad B, \Sigma \rightarrow \Theta}{A \supset B, \Gamma, \Sigma \rightarrow \Delta, \Theta} R_7, & \frac{A, \Gamma \rightarrow \Delta, B}{\Gamma \rightarrow \Delta, A \supset B} R_8, & \\
 \frac{\neg A, \Gamma \rightarrow \Delta \quad \neg B, \Gamma \rightarrow \Delta}{\neg(A \& B), \Gamma \rightarrow \Delta} R_9, & \frac{\Gamma \rightarrow \Delta, \neg A}{\Gamma \rightarrow \Delta, \neg(A \& B)} R_{10}, & \frac{\Gamma \rightarrow \Delta, \neg A}{\Gamma \rightarrow \Delta, \neg(B \& A)} R_{11}, \\
 \frac{\neg A, \Gamma \rightarrow \Delta}{\neg(A \vee B), \Gamma \rightarrow \Delta} R_{12}, & \frac{\neg A, \Gamma \rightarrow \Delta}{\neg(B \vee A), \Gamma \rightarrow \Delta} R_{13}, & \frac{\Gamma \rightarrow \Delta, \neg A \quad \Gamma \rightarrow \Delta, \neg B}{\Gamma \rightarrow \Delta, \neg(A \vee B)} R_{14}, \\
 \frac{A, \neg B, \Gamma \rightarrow \Delta}{\neg(A \supset B), \Gamma \rightarrow \Delta} R_{15}, & \frac{\Gamma \rightarrow \Delta, A \quad \Sigma \rightarrow \Theta, \neg B}{\Gamma, \Sigma \rightarrow \Delta, \Theta, \neg(A \supset B)} R_{16}, & \\
 \frac{A, \Gamma \rightarrow \Delta}{\neg \neg A, \Gamma \rightarrow \Delta} R_{17}, & \frac{\Gamma \rightarrow \Delta, A}{\Gamma \rightarrow \Delta, \neg \neg A} R_{18}, & \frac{A, A, \Gamma \rightarrow \Delta}{A, \Gamma \rightarrow \Delta} R_{19}, & \frac{\Gamma \rightarrow \Delta, A, A}{\Gamma \rightarrow \Delta, A} R_{20}, \\
 \frac{\Gamma, A, B, \Delta \rightarrow \Theta}{\Gamma, B, A, \Delta \rightarrow \Theta} R_{21}, & \frac{\Gamma \rightarrow \Delta, A, B, \Theta}{\Gamma \rightarrow \Delta, B, A, \Theta} R_{22}, & \frac{\Gamma \rightarrow \Delta}{\Gamma \rightarrow \Delta, A} R_{23}, & \frac{\Gamma \rightarrow \Delta}{A, \Gamma \rightarrow \Delta} R_{24}.
 \end{array}$$

$$\frac{\Gamma \rightarrow \Delta, A \quad A, \Sigma \rightarrow \theta}{\Gamma, \Sigma \rightarrow \Delta, \theta} \text{ R25 (сечение).}$$

Условимся, что $(A \rightarrow A)$ есть множество всех секвенций вида $A \rightarrow A$, $(A, \neg A \rightarrow)$ – множество всех секвенций вида $A, \neg A \rightarrow$, $(\rightarrow A, \neg A)$ – множество всех секвенций вида $\rightarrow A, \neg A$.

Интересующие нас секвенциальные исчисления определим с помощью таблицы.

GC1	$A_{GC1} = (A \rightarrow A) \cup (A, \neg A \rightarrow) \cup (\rightarrow A, \neg A)$	$R_{GC1} = \{R1-R25\}$
GPCont	$A_{GPCont} = A_{GC1} \setminus (A, \neg A \rightarrow)$	$R_{GPCont} = R_{GC1}$
GRAO*	$A_{GRAO*} = A_{GC1}$	$R_{GRAO*} = R_{GC1} \setminus \{R23, R24\}$
GIncons	$A_{GIncons} = A_{GC1} \setminus ((A, \neg A \rightarrow) \cup (\rightarrow A, \neg A))$	$R_{GIncons} = R_{GC1}$
GPCont(r)	$A_{GPCont(r)} = A_{GPCont} \setminus (A, \neg A \rightarrow)$	$R_{GPCont(r)} = R_{GPCont} \setminus \{R23, R24\}$
CIncons(r)	$A_{CIncons(r)} = A_{GIncons} \setminus ((A, \neg A \rightarrow) \cup (\rightarrow A, \neg A))$	$R_{CIncons(r)} = R_{GIncons} \setminus \{R23, R24\}$

Секвенциальные исчисления GPCont, GRAO*, GIncons, GPCont(r), CIncons(r) являются паранепротиворечивыми секвенциальными исчислениями: для всякого из этих исчислений S существует множество T L -формул, удовлетворяющее следующим трем условиям:

(1) T есть S -теория (т.е. T есть такое множество L -формул, что $\forall A_1 \dots \forall A_n$ (если $A_1 \dots A_n \rightarrow A$ доказуема в S и $(A_1 \dots A_n) \leq T$, то $A \in T$))

(2) $\exists A (A \in T \text{ и } \neg A \in T)$,

(3) $\exists A (A \notin T)$.

Сформулируем определения формульных образов $|\Gamma \rightarrow \Delta|^{\&\vee}$ и $|\Gamma \rightarrow \Delta|^{\supset}$ секвенции $\Gamma \rightarrow \Delta$.

$$|\Gamma \rightarrow \Delta|^{\&\vee} = \begin{cases} ((\dots (A_1 \& A_2) \& \dots \& A_n) \supset (\dots (B_1 \vee B_2) \vee \dots \vee B_m)), & \text{если} \\ \Gamma \rightarrow \Delta \vdash A_1, A_2, \dots, A_n \rightarrow B_1, B_2, \dots, B_m \quad (n \in \{0, 1, 2, \dots\}, \\ m \in \{1, 2, \dots\}); \neg(\dots (A_1 \& A_2) \& \dots \& A_n), & \text{если } \Gamma \rightarrow \Delta \\ \vdash A_1, A_2, \dots, A_n \rightarrow (n \in \{1, 2, \dots\}); \\ \neg(P_1 \supset P_1), & \text{если } \Gamma \rightarrow \Delta \vdash \rightarrow. \end{cases}$$

$$|\Gamma \rightarrow \Delta|^{\supset} = \begin{cases} (A_1 \supset (A_2 \supset (\dots (A_n \supset (\neg B_1 \supset (\neg B_2 \supset (\dots (\neg B_{m-1} \supset B_m) \dots)) \dots))), & \text{если} \\ \Gamma \rightarrow \Delta \vdash A_1, A_2, \dots, A_n \rightarrow B_1, B_2, \dots, B_m \quad (n \in \{0, 1, 2, \dots\}, \\ m \in \{1, 2, \dots\}); A_1 \supset (A_2 \supset (\dots (A_{n-1} \supset \neg A_n) \dots)), & \text{если } \Gamma \rightarrow \Delta \\ \vdash A_1, A_2, \dots, A_n \rightarrow (n \in \{1, 2, \dots\}); \\ \neg(P_1 \supset P_1), & \text{если } \Gamma \rightarrow \Delta \vdash \rightarrow. \end{cases}$$

ТЕОРЕМА 1. $\Gamma \rightarrow \Delta$ доказуема в GC1 тогда и только тогда, когда $|\Gamma \rightarrow \Delta|^{\&\vee}$ есть классическая тавтология.

Конечно, верно и утверждение, получающееся из теоремы 1 заменой $|\Gamma \rightarrow \Delta|^{\&V}$ на $|\Gamma \rightarrow \Delta|^{\supset}$.

ТЕОРЕМА 2. $\Gamma \rightarrow \Delta$ доказуема в GPCont тогда и только тогда, когда $|\Gamma \rightarrow \Delta|^{\&V}$ доказуема в исчислении PCont из [3].

Заметим, что утверждение, получающееся из теоремы 2 заменой $|\Gamma \rightarrow \Delta|^{\&V}$ на $|\Gamma \rightarrow \Delta|^{\supset}$, не верно.

ТЕОРЕМА 3. $\Gamma \rightarrow \Delta$ доказуема в GRAO^* тогда и только тогда, когда $|\Gamma \rightarrow \Delta|^{\supset}$ доказуема в RAO из [5].

Утверждение, получающееся из теоремы 3, заменой $|\Gamma \rightarrow \Delta|^{\supset}$ на $|\Gamma \rightarrow \Delta|^{\&V}$, не верно.

Опишем исчисления гильбертовского типа, адекватные секвенциальным исчислениям GIncons и $\text{GIncons}(r)$.

Пусть Incons есть наименьшее множество L -формул, замкнутое относительно modus ponens и подстановки, которому принадлежат все не содержащие $\neg$ L -формулы, являющиеся классическими тавтологиями, и все L -формулы следующих десяти видов.

$$\begin{aligned} & \neg \neg A \supset A, A \supset \neg \neg A, \neg(A \vee B) \supset \neg A, \neg(A \vee B) \supset \neg B, \\ & (\neg A \& \neg B) \supset \neg(A \vee B), \neg(A \& B) \supset (\neg A \vee \neg B), \neg A \supset \neg(A \& B), \\ & \neg B \supset \neg(A \& B), (A \supset (\neg B \supset C)) \supset (\neg(A \supset B) \supset C), \\ & ((C \supset A) \& (A_1 \supset \neg B)) \supset (C \supset (A_1 \neg(A \supset B))). \end{aligned}$$

$\text{Incons}(r)$ определим как наименьшее множество L -формул, и замкнутое относительно modus ponens , подстановки и адъюнкции $\frac{A \quad B}{A \& B}$, которому принадлежат все не содержащие $\neg$ L -формулы, доказуемые в RAO , и все L -формулы указанных выше десяти видов.

Фиксируем некоторое стандартно определяемое финитное (с конечным множеством аксиом и конечным множеством конечнопосылочных правил вывода) исчисление гильбертовского типа, удовлетворяющее условию: A доказуема в этом исчислении тогда и только тогда, когда $A \in \text{Incons}$. Назовем это исчисление Incons . Используя $\text{Incons}(r)$ определяем аналогичным образом исчисление $\text{Incons}(r)$.

ТЕОРЕМА 4. $\Gamma \rightarrow \Delta$ доказуема в GIncons тогда и только тогда, когда $|\Gamma \rightarrow \Delta|^{\&V}$ доказуема в Incons .

Результат замены $|\Gamma \rightarrow \Delta|^{\&V}$ на $|\Gamma \rightarrow \Delta|^{\supset}$ в теореме 4 является неверным утверждением.

ТЕОРЕМА 5. $\Gamma \rightarrow \Delta$ доказуема в $\text{GIncons}(r)$ тогда и только тогда, когда $|\Gamma \rightarrow \Delta|^{\supset}$ доказуема в $\text{Incons}(r)$.

Опираясь на результаты работы [4], доказательство теоремы 5 можно получить достаточно просто, если использовать тот факт, что $\text{GIncons}(r)$ доказуемы только односукцедентные секвенции. Заметим, что утверждение, являющееся результатом замены $|\Gamma \rightarrow \Delta|^{\supset}$ на $|\Gamma \rightarrow \Delta|^{\&V}$ в теореме 5, не верно.

Автору не удалось построить стандартно определяемое финитное исчисление гильбертовского типа, адекватное исчислению $\text{GPCont}(r)$.

ТЕОРЕМА 6. Для каждого исчисления GCI , GPCont , GRAO^* ,

$GIncons$, $GPCont(r)$, $GIncons(r)$ верна теорема об устранимости сечения. Соответствующие теоремы об устранимости сечения могут быть доказаны методом, предложенным в [4].

ТЕОРЕМА 7. Исчисления GCl , $GPCont$, $GRAO^*$, $GIncons$, $GPCont(r)$, $GIncons(r)$ разрешимы.

Для любого из этих исчислений построение разрешающего алгоритма можно осуществить (используя соответствующую теорему об устранимости сечения) аналогично построению в [2] разрешающего алгоритма для $GRAO$.

Впрочем, разрешимость GCl очевидна в силу теоремы 1, разрешимость $GPCont$ сводима по теореме 2 к разрешимости $PCont$ (а $PCont$ имеет конечную характеристическую матрицу [3]), а проблема разрешения для $GRAO^*$ сводима по теореме 3 к положительно решенной в [2] проблеме разрешения для RAO .

Имея разрешающие алгоритмы для GCl , $GPCont$, $GRAO^*$, $GIncons$, $GPCont(r)$, $GIncons(r)$, не трудно убедиться, что эти системы упорядочены "по силе" следующим образом:

ЛИТЕРАТУРА

1. Генцен Г. Исследования логических выводов // Математическая теория логического вывода. М., 1967.
2. Попов В.М. О разрешимости релевантной системы RAO // Модальные и интенциональные логики. М., 1978.
3. Розоноэр Л.И. О выявлении противоречий в формальных теориях. 1 // Автоматика и телемеханика. 1983. № 6.
4. Смирнов В.А. Формальный вывод и логические исчисления. М., 1972.
5. Смирнов В.А. Представление логических систем с сильной и релевантной импликациями в секвенциальной форме // Теория логического вывода. М., 1974.

ДВА МЕТОДА ПОСТРОЕНИЯ ЛОГИЧЕСКИХ ИСЧИСЛЕНИЙ: ЛОГИКИ ЗАКЛЮЧЕНИЙ И ЛОГИКИ ФОРМУЛ

Введение. Логическое исчисление в обычном смысле этого слова – это некоторый метод построения множества всех логически истинных формул (тавтологий), в стандартном случае он состоит в определении аксиом этого множества и правил вывода. Употребляя последние, мы порожаем из формул, о которых известно, что они логически истинные, другие. Поскольку существуют разные взгляды на логическую истинность, строятся разные логические исчисления. Причина, по которой определенное выше понятие логического исчисления надо считать слишком узким, проста: логика занимается, и конечно должна заниматься, не только и даже не прежде всего логической истинностью. Центральное понятие логики – это логическое следование. Правда, вопрос о том, следует ли логически формула α из предпосылок X , можно иногда свести к вопросу о логической истинности формулы вида $\Lambda X \rightarrow \alpha$, где ΛX – конъюнкция всех предпосылок X , и $\rightarrow$ – импликация. Но, во-первых, нет такой сводимости, когда X либо пустое множество, либо бесконечное, а, во-вторых, нет никакой общей гарантии, что связка импликации, как и связка конъюнкции, входят в язык исчисления. Примером исчисления, которое было построено без связки импликации, является квантовая логика.

Совсем независимо от упомянутых выше трудностей, прежде чем мы употребим какую-либо двухместную связку $\rightarrow$ как связку "следования", мы должны узнать, годится она для этой цели или нет. Конечно, когда мы знаем, в чем состоит логическое следование, критерии ясны: мы должны проверить все ли формулы вида $\Lambda X \rightarrow \alpha$ логически истинны тогда и только тогда, когда α логически следует из X . Итак, например, в классической логике роль связки следования может играть материальная импликация, хотя, как мы хорошо знаем, такая интерпретация высказывания вида $\alpha \rightarrow \beta$, где $\rightarrow$ материальная импликация, вообще говоря, неверна.

Построение логики формул, как мы будем дальше называть множество всех логически истинных формул, при каком-то фиксированном понятии логической истинности, не порождает само по себе логики заключений. Последнюю можно определить следующим образом.

Заключением называем произвольную фигуру вида X/α , где X – множество формул и α формула определенного языка. Если построение логики формул сводится к описанию метода, с помощью которого мы отличаем логически истинные формулы от всех других, то построение логики заключений сводится к построению метода, с помощью которого разделяем все заключения X/α на такие, для которых α следует из X , и остальные. Самую же логику заключений можно отождествить с оператором следствия S ,

таким, что $\alpha \in C(x)$ тогда и только тогда, когда α логически следует из X .

Опять, поскольку имеются различные понимания логического следования, мы строим разные логики заключений.

Логические исчисления в собственном смысле этого слова должны строиться так, чтобы они определяли и логику формул и логику заключений. Как мы это уже отметили, построение логики формул не влечет само по себе построение логики заключений. На первый взгляд, всегда имеет место обратное. Мы привыкли рассматривать как логически истинные те формулы, которые доказуемы из пустого множества формул. Если бы этот взгляд был правильным, то с каждой логикой заключений S связана была бы логика формул $S(\emptyset)$, и, конечно, тем самым построение исчисления логических заключений влекло бы построение исчисления логически истинных формул.

Все-таки заметим, что нет никаких очевидных оснований, по которым логическая истинность должна определяться через логическое следование указанным выше способом. На самом деле в некоторых логиках, например во всех релевантных логиках, определение логической истинности как следования, или доказуемости, из пустого множества посылок просто неверно.

Хотя в общем из определения логики формул не вытекает определение соответствующей ей логики заключений (под соответствующей мы понимаем логику заключений, основанную на тех же самых интуитивных соображениях), а из определения логики заключений не вытекает определение соответствующей ей логики формул, конечно, эти два вида логик (два способа решения вопроса, в чем состоит задача построения логического исчисления) тесно связаны друг с другом. В настоящей статье мы изучаем некоторые формальные аспекты этого соотношения.

1. Исходные определения и результаты. Языки, которые мы будем рассматривать, это так называемые *пропозициональные языки*, т.е. языки следующего вида:

$$(1) S = (s, \xi_1, \dots, \xi_n, p_0, p_1, \dots),$$

где $\xi_1, \dots, \xi_n$ - логические связки, $p_0, p_1, \dots$ - пропозициональные переменные, наконец, s - множество всех формул S . Как обычно, под S мы понимаем все пропозициональные переменные (простые формулы) и все сложные формулы, построенные обычным образом - применением связок к пропозициональным переменным. Смысл высказывания "обычным образом" сводится к построению грамматических правил языка. Поскольку они будут стандартными, мы будем считать, что читатель с ними знаком.

Вместо (1) лучше писать

$$(1') S = (s, \xi_1, \dots, \xi_n)$$

и отождествлять язык с алгеброй его формул - так называемой *алгеброй Линденбаума-Тарского*. Этот подход удобен тем, что он дает нам возможность сводить многие логические понятия к алгебраическим и вследствие этого применять алгебраические мето-

ды к логическим рассуждениям.

Под оператором следствия в S будем понимать произвольный оператор C , определенный на множествах формул языка $S, C: 2^S \rightarrow 2^S$, который удовлетворяет следующим двум условиям:

$$(T1) \quad X \subseteq C(X)$$

(включение)

$$(T2) \quad \text{Если } Y \subseteq C(X), \text{ то } C(XUY) \subseteq C(X)$$

(ограничение).

Под пропозициональной логикой заключения мы будем понимать произвольную пару (S, C) , где S (пропозициональный) язык и C — оператор следствия в S .

Определение оператора следствия, которое мы здесь приняли, является гораздо более общим, чем известное определение Тарского. Введение этого более общего понятия объясняется тем, что мы хотим рассматривать как монотонные, так и немонотонные логики. В монотонной логике оператор следствия C выполняет условие

$$(T3) \quad C(X) \subseteq C(XUY)$$

(монотонность).

То, что обычно, хотя и не совсем верно, считают оператором следствия в смысле Тарского — это оператор C , который выполняет (T1), (T3) и (T4) $C(C(X)) \subseteq C(X)$ (идемпотентность).

Это определение, как видно, эквивалентно определению, согласно которому C есть оператор следствия в смысле Тарского, тогда и только тогда, когда выполняются (T1) — (T3). На самом деле (T4) выводимо из (T1), (T2), а с другой стороны, (T2) выводимо из (T1) (T3) и (T4).

Наше замечание, что понятие оператора следствия в смысле Тарского не вполне совпадает с тем, которое мы привели выше, оправдывается тем, что Тарский требовал от операторов следствия выполнения условия:

$$(T5) \quad C(X) = \bigcup \{C(Y) : Y \text{ конечное подмножество } X\} \text{ (финитарность)}.$$

Заметим, что свойство финитарности влечет свойство монотонности, оригинальные аксиомы Тарского для оператора следствия суть (T1), (T2) и (T3).

Надо еще добавить, что очень часто, хотя не всегда, к аксиомам оператора следствия присоединяют аксиому

$$(T6) \quad eC(X) \subseteq C(eX)$$

(структурность),

где e произвольный эндоморфизм языка S — с логической точки зрения произвольная подстановка формул вместо пропозициональных переменных. На самом деле структурность можно считать тем свойством, которое отличает логическое следование от широко понятого следования. Этот взгляд кажется существенно верным, хотя и надо заметить, что были построены логики с неструктурными операторами следствия (например, квантовая логика Когена и Шеккера). Независимо от того или иного решения вопроса, является ли структурность характеристическим свойством логического следования или нет, мы хотим здесь иметь понятие логики настолько широкое, насколько возможно, и потому мы решили не включать условие структурности в список аксиом для оператора следствия.

На этом мы закончим обсуждение понятия оператора следствия, и тем самым логики заключений. Переходя к логикам формул, заметим прежде всего, что нет никаких разумных условий, которые можно считать характеристическими для всех логик формул, конечно, кроме того, что логика формул есть множество формул какого-то определенного языка. В дальнейшем под логикой формул мы будем понимать произвольную пару (S, L) , где S - язык и $L \subseteq S$.

На самом деле, однако, не все логики формул будут для нас интересны. Наши дальнейшие рассуждения будут касаться только тех логик формул, которые некоторым стандартным способом определяют оператор следствия и тем самым логику заключений.

1.1. ОПРЕДЕЛЕНИЕ. Будем говорить, что логика формул (S, L) является канонической по отношению к связкам $\rightarrow, \wedge$ тогда и только тогда, когда $\rightarrow, \wedge$ либо связки языка S , либо определимы в S и, кроме того, L замкнуто относительно следующего правила вывода (положим $\alpha_1 \wedge \dots \wedge \alpha_m = \alpha_1 \wedge (\alpha_2 \wedge \dots \wedge \alpha_m)$):

$$\text{Ro. } \frac{(\alpha_1 \wedge \dots \wedge \alpha_m) \rightarrow \beta}{(\alpha'_1 \wedge \dots \wedge \alpha'_n) \rightarrow \beta},$$

где все $\alpha_1, \dots, \alpha_m, \alpha'_1 \wedge \dots \wedge \alpha'_n$ таковы, что $\{\alpha_1, \dots, \alpha_m\} = \{\alpha'_1 \wedge \dots \wedge \alpha'_n\}$.

1.2. УТВЕРЖДЕНИЕ. Пусть (S, L) - каноническая логика формул. Тогда существует оператор C , определенный на множествах формул языка S , который выполняет следующие условия:

(L1) $\alpha \in C(\alpha_1, \dots, \alpha_n)$ тогда и только тогда, когда

$$(\alpha_1 \wedge \dots \wedge \alpha_n) \rightarrow \alpha \in L;$$

(L2) $C(\emptyset) = \bigcap \{C(X) : X \neq \emptyset\}$

(нормализация);

(L3) $\alpha \in C(X)$ тогда и только тогда, когда существует конечное $X_0 \subseteq X$ такое, что для всех конечных $Y \subseteq X$,

$$\alpha \in C(Y \cup X_0)$$

(индуктивность).

Конечно, условия (L1)-(L3) полностью определяют оператор C . Обозначим его символом C_L и назовем оператором, порожденным канонической логикой (S, L) . Заметим сразу, что C_L не всегда оператор следствия; условия (L1)-(L3) не обеспечивают даже того, что $X \subseteq C(X)$. Конечно, в первую очередь нас интересуют канонические логики формул, которые порождают операторы следствия, но прежде чем начнем их изучать, сделаем еще одно замечание.

Пусть (S, L) - произвольная каноническая логика формул.

Определим

$$L^+ = \{\alpha : \beta \rightarrow \alpha \in L, \text{ для всех } \beta \in S\}.$$

1.3. УТВЕРЖДЕНИЕ. Для всякой канонической логики формул (S, L)

$$(i) C_L(\emptyset) = L^+.$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. (i) Пусть $\alpha \in C_L(\emptyset)$. Поскольку оператор C_L

формализованный, то мы получаем $\alpha \in C_L(\beta)$ для всех β . Это влечет $\alpha \in L^+$. Обратно, пусть $\alpha \in L^+$. Тогда для всех $\alpha_1, \dots, \alpha_n$ мы имеем

$$(\alpha_1 \wedge \dots \wedge \alpha_n) \rightarrow \alpha \in L.$$

Но тогда для всех конечных $X \neq \emptyset$ мы имеем $\alpha \in C_L(X)$, но это, в силу индуктивности C_L влечет, что для всех $X \neq \emptyset$, $\alpha \in C_L(X)$, и по условию нормализации получаем $\alpha \in C_L(\emptyset)$.

(II) Очевидно.

1.4. ОПРЕДЕЛЕНИЕ. Пусть (S, L) логика формул. Мы будем говорить, что (S, L) нормальна по отношению к $\rightarrow, \wedge$, тогда и только тогда, когда выполняются следующие условия:

(P1) (S, L) – каноническая по отношению к $\rightarrow, \wedge$.

(P2) C_L – оператор следствия.

(P3) $C_L(L) = L$.

1.5. УТВЕРЖДЕНИЕ. Пусть (S, L) каноническая логика формул. Она нормальна относительно $\rightarrow$ и $\wedge$ тогда и только тогда, когда выполняются следующие два условия:

(i) Для всяких $\alpha, \alpha_1, \dots, \alpha_n$, $n \geq 0$

$$(\alpha \wedge \alpha_1 \wedge \dots \wedge \alpha_n) \rightarrow \alpha \in L.$$

(ii) Множество L замкнуто относительно следующих правил вывода:

$$R1. \frac{(\alpha \wedge \beta) \rightarrow \gamma, \alpha \rightarrow \beta}{\alpha \rightarrow \gamma}$$

$$R2. \frac{\alpha \rightarrow \beta_1, \alpha \rightarrow \beta_2}{\alpha \rightarrow \beta_1 \wedge \beta_2}$$

$$R3. \frac{\alpha, \beta}{\alpha \wedge \beta}$$

$$R4. \frac{\alpha \rightarrow \beta, \alpha}{\beta}$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Пусть (S, L) нормальна и тем самым C_L есть оператор следствия. Условие (i) получается из того, что C_L выполняет (T1). То, что L замкнуто по R1, вытекает из факта, что C_L выполняет (T2). Проверим, что L замкнуто по R2. Пусть $\alpha \rightarrow \beta_1, \alpha \rightarrow \beta_2 \in L$. Тогда $\beta_1, \beta_2 \in C_L(\alpha)$. Применяя (T2), получаем $C(\alpha, \beta_1, \beta_2) \subseteq C(\alpha)$. Поскольку, как мы уже знаем, $(\alpha_1 \wedge \beta_1 \wedge \beta_2) \rightarrow (\beta_1 \wedge \beta_2) \in L$, мы получаем $\beta_1 \wedge \beta_2 \in C(\alpha, \beta_1, \beta_2)$. Но тогда $\beta_1 \wedge \beta_2 \in C(\alpha)$ и тем самым $\alpha \rightarrow \beta_1 \wedge \beta_2 \in L$.

То, что L замкнуто относительно правил R3 и R4, вытекает из требования (P3). Пусть $\alpha, \beta \in L$. Тогда для всех конечных $X \subseteq L$ таких, что $\alpha, \beta \in X$, мы имеем $\alpha, \beta \in C_L(X)$, последнее эквивалентно $\wedge X \rightarrow \alpha, \wedge X \rightarrow \beta \in L$.

Применяя R2, мы заключаем, что $\wedge X \rightarrow \alpha \wedge \beta \in L$, или иначе $\alpha \wedge \beta \in C_L(X)$. Но C_L индуктивно и мы получаем $\alpha \wedge \beta \in C_L(L) = L$.

Пусть $\alpha \rightarrow \beta, \alpha \in L$. Мы тогда имеем $\beta \in C_L(\alpha)$. Но, поскольку C_L выполняет (T2), мы заключаем, что $\beta \in C_L(L, \alpha) = C_L(L)$. Этим завершается доказательство в одну сторону. Для доказательства в другую сторону допустим, что L выполняет (i) и (ii). Нам нужно

проверить, что C_L является оператором следствия и что он удовлетворяет P3.

В силу (i) C_L выполняет (T1).

Из факта, что L замкнуто по R1 и R2, следует, что C_L выполняет (T2), значит C_L на самом деле оператор следствия. Это непосредственно влечет $L \subseteq C_L(L)$. Докажем обратное. Пусть $\alpha \in C_L(L)$. Тогда по индуктивности L мы получаем $\alpha \in C_L(\alpha_1, \dots, \alpha_n)$ для некоторых $\alpha_1, \dots, \alpha_n \in L$. Но тогда $(\alpha_1 \wedge \dots \wedge \alpha_n) \rightarrow \alpha \in L$ и поскольку L замкнуто и по R3 и по R4, $\alpha \in L$.

Пусть (S, L) нормальная логика формул и пусть C произвольный оператор следствия, выполняющий (L1). Поскольку (L1) определяет $C(X)$ только для конечных и непустых X , ясно, что существует бесконечное количество операторов следствия C' , которые совпадают с C на конечных непустых множествах и, более того, выполняют условие дедуктивности (P3).

Условие индуктивности является только одним из бесконечного множества способов, расширяющих оператор C , определенный на конечных множествах, на бесконечные.

Как обстоит дело с расширением определения C на пустое множество? Докажем, что имеет место следующее:

1.6. УТВЕРЖДЕНИЕ. Пусть (S, L) нормальная логика формул, и пусть C оператор следствия такой, что для всех непустых X $C(X) = C_L(X)$. Если $C(\emptyset) \subseteq C(X)$ для всех X , тогда либо $C = C_L$, либо $C(\emptyset) = \emptyset$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Из утверждения 1.3 мы знаем, что $C(\emptyset) = L^+$. Рассмотрим две возможности. Начнем с первой: $L^+ = \emptyset$. Тогда если $C = C_L$, то для некоторого $\alpha \in C(\emptyset)$. В то же самое время мы имеем $\alpha \notin C_L(X)$ для некоторого непустого X , что влечет $\alpha \notin C(X)$. С другой стороны, $\alpha \in C(X, \alpha)$ и поскольку $\alpha \in C(\emptyset) \subseteq C(X)$, применяя (T2), получаем $\alpha \in C(X)$, что невозможно.

Допустим теперь, что $L^+ \neq \emptyset$. Поскольку $C(\emptyset) \subseteq C(X)$ для всех X , то $C \neq C_L$ только тогда, когда для некоторого $\alpha \in L^+$, $\alpha \notin C(\emptyset)$. Но $\alpha \in C(\beta)$ для всякого $\beta \in L^+$. И поскольку $C(\emptyset) \subseteq L^+$ тогда, когда существует какое-либо $\beta \in C(\emptyset)$, с помощью (T2) заключаем, что $\alpha \in C(\emptyset)$, что противоречит сделанному допущению.

Результат, который мы установили, показывает, что в общем случае (L1) само по себе почти не ограничивает возможных решений вопроса, какие формулы входят в $C(\emptyset)$, но когда дополнительно мы требуем, чтобы $C(\emptyset) \subseteq C(X)$ (например, ограничиваем наши рассуждения до монотонных логик следствия), тогда эти возможности уменьшаются до двух: либо $C(\emptyset) = \emptyset$ либо $C(\emptyset) = L^+$.

2. Некоторые общие свойства логик заключений и соответствующие свойства логик формул. Под общим свойством логики заключений мы будем иметь в виду те свойства, которые можно определить для всех языков независимо от того, каковы связи данного языка. Конечно, мы уже определили некоторые свойства этого рода: монотонность, финитарность, идемпотентность, а также формализуемость и индуктивность. Ниже определим некоторые другие.

Мы сначала составим список свойств, которые желаем здесь упомянуть, и только позже коротко обсудим их.

(T7) Если $\gamma \in C(X)$, то $C(X) \subseteq C(XUY)$ (кумулятивность).
Символом $Var(\alpha)$ обозначим множество всех пропозициональных переменных, которые входят в α .

(T8) Если $\alpha \in C(X)$, то для некоторого $\beta \in X$
 $Var(\alpha) \cap Var(\beta) \neq \emptyset$ (релевантность).

(T9) Если $\alpha \in C(\beta)$, то существует формула γ , такая что $Var(\gamma) \subseteq Var(\alpha) \cap Var(\beta)$, $\alpha \in C(\gamma)$ и $\gamma \in C(\beta)$ (интерполяция).

(T10) Если $\alpha \in C(XUY)$ и $Var(X, \alpha) \cap Var(Y) \neq \emptyset$, то либо $\alpha \in C(X)$, либо $C(Y) = S$ (однородность).

Пусть $\gamma(\alpha/p)$ обозначает формулу, которая получается путем подстановки вместо α всех вхождений переменной p в формулу γ ; если p не входит в γ , $\gamma(\alpha/p) = \gamma$.

(T11) Если $C(\alpha) = C(\beta)$, то для всех γ и всех переменных p , $C(\gamma(\alpha/p)) = C(\gamma(\beta/p))$ (автоэкстенциональность).

(T12) Если для всех эндоморфизмов e $eX \subseteq C(\emptyset)$ влечет $e\alpha \in C(\emptyset)$, то $\alpha \in C(X)$ (структурная полнота).

Свойство (T7) было введено Макинсоном при исследовании немонотонных логик; все монотонные логики заключений, как легко это проверить, кумулятивны.

Свойство (T8) — это принцип релевантности Белнапа, в переформулированном нами виде, непосредственно приложимом к оператору следствия. Белнап обсуждал вариант этого принципа, приложимого к логике формул. Заметим, что (T8) вместе с условием нормализации влечет (T13) $C(\emptyset) = \emptyset$ (безаксиомность) (если C выполняет (T8), то нет такой формулы α , что $\alpha \in C(\beta)$ для всех β).

Условие интерполяции связано с теорией определимости. Сразу видно, что и это условие (T9) и следующее (T10) (однородность) интуитивно связаны со свойством релевантности. Довольно интересно, что все эти свойства (T8), (T9), (T10) независимы.

С семантической точки зрения самым интересным является свойство (T10) — оно необходимо для того, чтобы при матричном подходе оператор был определен только одной логической матрицей.

Свойство автоэкстенциональности (T11) интересно не только с интуитивной точки зрения. Оно необходимо, чтобы оператор C был определен с помощью шкал.

Свойство (T12) было введено и исследовано впервые Погорельским. Количество работ, связанных с этим свойством, на сегодняшний день велико.

Напомним еще, что некоторые типично семантические свойства можно также выразить в виде чисто синтаксических условий, наложенных на оператор C . Одним из примеров является свойство многозначности.

2.1. ОПРЕДЕЛЕНИЕ. Пусть (S, L) каноническая логика формул и пусть P некоторое свойство операторов следствия определенных в S . Скажем, что свойство P принадлежит логике (S, L) тогда и

только тогда, когда (S, L) нормальная и C_L обладает свойством P .

Ниже сформулируем ряд утверждений, но их доказательство предоставляем читателю.

2.2. УТВЕРЖДЕНИЕ. Пусть (S, L) нормальная логика формул. Тогда:

a. (S, L) кумулятивна тогда и только тогда, когда L замкнуто по правилу $\alpha \rightarrow \beta, \alpha \rightarrow \gamma$.

$$\frac{(\alpha \wedge \beta) \rightarrow \gamma}{\alpha \rightarrow \beta}$$

b. (S, L) монотонна тогда и только тогда, когда L замкнуто по правилу $\alpha \rightarrow \beta$.

$$\frac{(\alpha \wedge \gamma) \rightarrow \beta}{\alpha \rightarrow \beta}$$

c. (S, L) структурна тогда и только тогда, когда L замкнуто по правилу $\alpha \rightarrow \beta$.

$$\frac{\alpha \rightarrow e\beta}{\alpha \rightarrow \beta}$$

(e – произвольный эндоморфизм).

d. (S, L) автоэкстенциональна тогда и только тогда, когда L замкнуто по правилу $\alpha \rightarrow \beta, \beta \rightarrow \gamma$.

$$\frac{\gamma(\alpha/p) \rightarrow \gamma(\beta/p)}{\alpha \rightarrow \beta}$$

Конечно, не только свойства, рассматриваемые в утверждении 2.3, но и остальные из тех, которые мы ввели, можно для логик формул определить непосредственно, не используя явно оператор следствия. Подобный пример формулируется в нижеследующем утверждении.

2.3. УТВЕРЖДЕНИЕ. Пусть (S, L) нормальная логика формул. Тогда:

a. (S, L) выполняет принцип релевантности тогда и только тогда, когда $\alpha \rightarrow \beta \in L$, только если $\text{Var}(\alpha) \cap \text{Var}(\beta) \neq \emptyset$.

b. (S, L) имеет свойство интерполяции тогда и только тогда, когда для всяких α, β , если $\alpha \rightarrow \beta \in L$, то существует γ такое, что $\text{Var}(\gamma) \subseteq \text{Var}(\alpha) \cap \text{Var}(\beta)$, $\alpha \rightarrow \gamma \in L$ и $\gamma \rightarrow \beta \in L$.

c. (S, L) однородна тогда и только тогда, когда для всяких α, β, γ , если $(\alpha \wedge \beta) \rightarrow \gamma \in L$, $\text{Var}(\alpha, \gamma) \cap \text{Var}(\beta) \neq \emptyset$, то либо $\alpha \rightarrow \gamma \in L$, либо $\beta \rightarrow \delta \in L$ для всех δ .

d. (S, L) структурно полна тогда и только тогда, когда для всяких $\alpha, \beta \in L^+$ если $e(\alpha \rightarrow \beta) \in L^+$ для всяких подстановок e , то $\alpha \rightarrow \beta \in L$.

Как ни странно, два свойства из утверждения 2.3 (релевантность и интерполяция) хорошо известны как свойства логик формул и почти не исследованы как свойства логик заключений. Остальные свойства (однородность и структурная полнота) были исследованы как свойства операторов следствия (логика заключений) и в явном виде не применялись к логикам формул. Это, конечно, указывает на то, что два подхода к логическим исследованиям – тот, при котором логика считается логикой формул, и тот, при котором логика считается логикой заключений, – хотя они и зависимы друг от друга, – ведут к различным вопросам.

Из этого следует, что в какой-то мере они развиваются неза-

висимо друг от друга. Нет никакого сомнения, что это явление не всегда полезно для развития логики и достаточно глубокого понимания ее проблем.

3. Определение дедуктивных свойств некоторых логических связей наложением условий на оператор следования. Напомним некоторые хорошо известные условия, сформулированные еще Тарским. Поскольку они касаются не только операторов следствия, но и некоторых связей, само собой разумеется, что язык, в котором определен оператор, содержит эти связи.

- ($\wedge$) $C(X, \alpha \wedge \beta) = C(X, \alpha, \beta)$ (конъюнктивность)
- ($\vee$) $C(X, \alpha \vee \beta) = C(X, \alpha) \cap C(X, \beta)$ (дизъюнктивность)
- ($\rightarrow$) $\alpha \rightarrow \beta \in C(X)$ тогда и только тогда, когда $\beta \in C(X, \alpha)$ (строгая имплицативность)
- ($\neg$) $\alpha \in C(X)$ тогда и только тогда, когда $C(X, \neg, \alpha) = S$ (строгая негативность).

3.1. УТВЕРЖДЕНИЕ. Определим C_0 нижеследующим образом. Положим, что:

- (i) C_0 - оператор следствия;
- (ii) C_0 выполняет ($\wedge$), ($\vee$), ($\rightarrow$), ($\neg$);
- (iii) Для всех α и всех X $\alpha \in C_0(X)$

тогда и только тогда, когда это имеет место в силу (i) и (ii). Тогда C_0 есть оператор следствия классической логики.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Во-первых, не сразу ясно, что (i), (ii) и (iii) непротиворечивы. Конечно $\alpha \in C_0(X)$ в силу (i) и (ii) тогда и только тогда, когда $\alpha \in C(X)$ для всех C , которые выполняют (i) и (ii). Надо проверить, что определенное таким образом C_0 на самом деле выполняет (i) и (ii). Мы оставим эту проверку читателю.

Во-вторых, напомним, что в случае, когда вместо (i) потребуем, чтобы C_0 был монотонным оператором следствия, 3.1 превращается в хорошо известный факт. Но на самом деле это дополнительное условие лишнее.

Обозначая оператор следствия классической логики через K , примем, что он определен множеством аксиом и правилом "modus ponens": $\alpha \in K(X)$ тогда и только тогда, когда существует доказательство $\alpha \in X$ с помощью этих аксиом и модус поненс. Как хорошо известно, K выполняет (i) и (ii). Из этого следует, что $C_0(X) \subseteq K(X)$ для всех X ; или записывая по-другому $C_0 \leq K$.

С другой стороны, легко проверяемо, что для всех X аксиомы для K принадлежат к $C_0(X)$ и, более того, $C_0(X)$ замкнуто на модус поненс. Это влечет $K \leq C_0$ и завершает доказательство.

3.2. УТВЕРЖДЕНИЕ. Пусть C - произвольный оператор следствия, который выполняет ($\wedge$), ($\vee$), ($\rightarrow$), ($\neg$), тогда C монотонный, по крайней мере в следующем финитном смысле.

$$(T14) \quad C(X) \subseteq C(X, \beta).$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Пусть $\alpha \in C(X)$. Легко проверить, что в силу ($\rightarrow$) мы имеем $\alpha \rightarrow (\beta \rightarrow \alpha) \in C(X)$. Но тогда в силу (T2)

$(\alpha \rightarrow \beta) \in C(X, \beta, \alpha \rightarrow (\beta \rightarrow \alpha)) \leq C(X)$. Употребляя $(\rightarrow)$ еще раз, получаем $\alpha \in C(X, \beta)$.

Конечно, замечание 3.2 сводится к хорошо известному факту, что классическая логика является монотонной. С другой стороны, также очевидно, что и в немонотонных рассуждениях классическая логика играет существенную роль. Эту ситуацию прокомментируем в последней части этой статьи.

Не только классическая логика, но и некоторые другие логики определимы с помощью условий, накладываемых на оператор следствия. Например, следующее утверждение верно:

3.3. УТВЕРЖДЕНИЕ. Пусть:

- (i) C_0 оператор следствия;
- (ii) C_0 выполняет $(\wedge), (\vee), (\rightarrow)$, и кроме того $(\neg)_1$,
 $\neg \alpha \in C(X)$ тогда и только тогда, когда $C(X, \alpha) = S$;
- (iii) Для всех α и всех X , $\alpha \in C_0(X)$ тогда и только тогда, когда это имеет место в силу (i) и (ii).

Тогда C_0 есть оператор следствия интуиционистской логики.

Доказательство утверждения 3.3 похоже на доказательство утверждения 3.1. и мы не будем его здесь приводить.

Некоторые модальные логики также можно определить с помощью простых условий, накладываемых на оператор C . Например, одним из очевидных условий для связки необходимости окажется следующее:

$$(\Box) \Box C(X) \leq C(\Box X),$$

где $\Box X = \{\Box \alpha : \alpha \in X\}$.

Тот факт, что мы в состоянии определить некоторые логики, в том числе классическую и интуиционистскую с помощью довольно простых и интуитивно приемлемых условий, наложенных на оператор следствия, некоторые считают доводом в пользу того, что смысл логических связок можно определить с помощью понятия следствия и что для этой цели нам не нужно понятие истины. Надо добавить, что защищающие эту точку зрения, конечно, не определяют отношение следования как отношение, связанное с понятием истины.

Одним из возможных подходов к проблемам логического анализа смысла, альтернативным подходу, базирующемуся на семантике Тарского, является подход, выдвинутый Робертом Мейером (Robert Meyer). Вместо истинности Мейер предлагает в качестве первичного понятие теории. Конечно, не все множества формул считаются теориями. Теория должна быть замкнута относительно некоторых правил вывода. Каких - это зависит от понятия теории, которое мы имеем в виду. Основная задача логики по Мейеру - пояснить понятие теории. Эту задачу можно также понимать как задачу определения оператора замыкания, связанного с понятием теории следующим образом: множество формул замкнуто на этот оператор тогда и только тогда, когда оно является теорией. Так понятый оператор замыкания соответствует тому, что в семантике, основанной на понятии

истинности, называется оператором следствия.

Поскольку мы здесь не имеем возможности критически проанализировать подход Мейера, ограничимся двумя замечаниями.

Во-первых, это не такой уж абсурдный подход, как могли бы подумать те, для кого предпосылка о первичности понятия истинности для любого семантического анализа является ненарушимой догмой. То, что семантику, основанную на понятии истинности, можно свести к рассуждениям, которые употребляют только синтаксические понятия, видно хотя и неявно, из таких результатов, как результат Линденбаума о существовании для произвольной (структурной) логики формул адекватной логической матрицы, построенной из формул, или хенкинское доказательство полноты логики первого порядка, употребляющее модели, построенные из формул. Напомним также, что в хинтиковской семантике вместо понятия модельной структуры вводится понятие модельного множества формул, как некоторое обобщение карнаповского понятия описания состояния.

В поддержку Мейера можно еще заметить, что ни в какой мере интуитивное понятие истинности не яснее, чем интуитивное понятие теории (логически замкнутой системы уверенности).

Второе замечание по поводу мейеровских взглядов, которое мы хотим сделать, должно снять подозрение, если бы оно возникло, что мы примыкаем к этим взглядам. По нашему мнению, эти взгляды, хотя они логически когерентны, слишком узки, чтобы обосновать с их помощью достаточно общую и достаточно глубокую семантику. С эпистемологической точки зрения предпосылка, лежащая в основе теории истинности Тарского, что кроме высказываний существует еще реальность, к которой они относятся, сводится к тому, что не все наше знание выразимо в языке: мы знаем больше, чем способны выразить с помощью слов. И вот этот факт, независимо от каких-либо онтологических рассуждений, оправдывает сам по себе тот подход, при котором семантика языка строится путем выхода за рамки самого языка, ввода таких понятий, как модельная структура языка, возможный мир, ситуация и другие.

Независимо от наших взглядов на философские обоснования логической семантики, мы, конечно, должны согласиться, что такие условия, как $(\wedge)$, $(\vee)$, $(\rightarrow)$, $(\neg)$, $(\neg)_1$, $(\Box)$, интуитивны в каком-то смысле сами по себе, и это делает интересным вопрос, какие логики заключений они порождают.

Параллельно возникают вопросы совсем другого рода - это вопросы, с которыми мы сталкивались в случае свойств логик заключений общего вида. Напомним, что имея какое-либо свойство P логик заключений, мы спрашивали, как определить логики формул (S, L) , так, чтобы S_L обладало свойством P . Тот же вопрос можно поставить относительно тех свойств логик заключений, которые характеризуют не только сам оператор следствия S , но и некоторые связки.

3.4. ОПРЕДЕЛЕНИЕ. Пусть (S, L) каноническая логика. Тогда она
 а) конъюнктивная, тогда и только тогда, когда C_L конъюнктивно;
 б) дизъюнктивная тогда и только тогда, когда C_L дизъюнктивно;
 в) строго имплективная, тогда и только тогда, когда это свойство принадлежит C_L .

3.5. УТВЕРЖДЕНИЕ. Пусть (S, L) каноническая логика, тогда:

а. (S, L) конъюнктивна;

б. (S, L) дизъюнктивна тогда и только тогда, когда L замкнуто по правилам:

$$\frac{(\alpha \wedge (\beta_1 \vee \beta_2)) \rightarrow \gamma}{(\alpha \wedge \beta_1) \rightarrow \gamma} ; \quad \frac{(\alpha \wedge (\beta_1 \vee \beta_2)) \rightarrow \gamma}{(\alpha \wedge \beta_2) \rightarrow \gamma} ;$$

$$\frac{(\alpha \wedge \beta_1) \rightarrow \gamma, (\alpha \wedge \beta_2) \rightarrow \gamma}{(\alpha \wedge (\beta_1 \vee \beta_2)) \rightarrow \gamma}.$$

с. (S, L) строго имплективна тогда и только тогда, когда L замкнуто по правилам:

$$\frac{\alpha \rightarrow (\beta \rightarrow \gamma)}{(\alpha \wedge \beta) \rightarrow \gamma} ; \quad \frac{(\alpha \wedge \beta) \rightarrow \gamma}{\alpha \rightarrow (\beta \rightarrow \gamma)}.$$

д. (S, L) имеет свойство строгой негативности тогда и только тогда, когда L замкнуто по правилам

$$\frac{\alpha \rightarrow \beta}{(\alpha \wedge \neg \beta) \rightarrow \gamma} ; \quad \frac{(\alpha \wedge \neg \beta) \rightarrow \gamma}{\alpha \rightarrow \beta}.$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Очевидное.

Из утверждений 3.1 и 3.5 следует

3.6. УТВЕРЖДЕНИЕ. Определим (S, K) следующим образом:

(i) (S, K) есть нормальная логика формул;

(ii) (S, K) замкнута на все правила, сформулированные в утверждении 3.5.

(iii) $\alpha \in K$ тогда и только тогда, когда $\alpha \in K$ в силу условий (i), (ii).

Тогда (S, K) есть классическая логика высказываний в виде логики формул.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Принимая какую-либо аксиоматику A для классической логики, надо проверить, что $A \subseteq K$. Поскольку (S, K) нормальная, тем самым K замкнуто на модус поненс. Таким образом мы устанавливаем, что классическая логика включается в K . Чтобы показать, что K включается в классическую логику, надо проверить, что все правила, обеспечивающие выполнение условий (i) и (ii), допустимы в классической логике.

Поскольку классическая логика высказываний хорошо известна, она была для нас очень удобным примером для наших рассуждений, и мы надеемся, что на этом примере мы продемонстрировали, как, исходя из некоторых условий, наложенных на оператор следствия, можно получить другие логики формул. Конечно, нельзя ожидать, что свойства логик заключений отражаются всегда таким простым образом в соответствующих им логиках формул, как это имеет место в случае классической логики. На самом деле мы только коснулись весьма сложного вопроса взаимоотношений логики следствий и логик формул.

В заключение статьи мы должны сделать еще одно замечание. В наших рассуждениях мы нигде не использовали непосредственно факта, что аксиомы оператора следствия у нас слабее, чем у Тарского. Это, конечно, не означает того, что вытекающий из этого более общий подход нам не был нужен. Мы показали, например, что классическая логика (то же самое верно для интуиционистской логики) влечет условие монотонности сама по себе, и тем самым аксиомы оператора следствия классической логики могут не включать аксиомы монотонности в явном виде.

Открытым остается вопрос, можно ли, исходя из факта, что принципа монотонности нет среди общих условий, наложенных на оператор следствия, строить какие-то интересные логики. Кажется, что на самом деле такие возможности существуют. Рассмотрим, например, связку, которая удовлетворяет следующему условию.

(*) $\# \alpha \in C(X)$ тогда и только тогда, когда $\alpha \in C(X)$, и для всех Y , если $\alpha \in C(Y)$, то для всех Z , $\alpha \in C(Y \cup Z)$.

Если C монотонное, мы сразу получаем $\# \alpha \in C(X)$ тогда и только тогда, когда $\alpha \in C(X)$. Но если C немонотонное, связка выделяет те формулы, которые являются устойчивыми в следующем смысле: если $\# \alpha$ принадлежит какой-либо теории X , то $\# \alpha$ принадлежит всем теориям, которые включают в себя X .

Заметим еще, что если C нормализовано, то, конечно, все формулы из $C(\emptyset)$ (если $C(\emptyset)$ непустое) устойчивы.

Легко видеть, что связка устойчивости напоминает в какой-то степени связку необходимости $\Box$, но все-таки кажется не было бы разумным принять, что:

$$\# C(X) \subseteq C(\# X).$$

Следствия устойчивых формул не всегда устойчивы.

На вопрос, могут ли рассуждения, касающиеся связки устойчивости, привести к какой-то интересной логике этой связки, можно ответить, лишь приводя эти рассуждения. Конечно, этот вопрос не включается в тему данной статьи и мы упомянули его только потому, что он дополнительно иллюстрирует, как, исходя из некоторых общих рассуждений, касающихся оператора следствия, можно строить логические исчисления.

Добавим еще одно. Как мы уже заметили, даже при немонотонных рассуждениях мы часто употребляли классическую логику, хотя и в каком-то ограниченном виде. Может быть этот факт можно описать принимая, что монотонная логика применима к устойчивым предпосылкам.

MN-КАТЕГОРИИ ДЛЯ МОДАЛЬНЫХ ЛОГИК

В [4] была предложена переформулировка монадической и полиадической алгебр Халмоша в терминах категории предпорядка. Основной конструкцией при этом была N-категория $\mathcal{E}$, представляющая собой категорию предпорядка, снабженную контравариантным функтором $\mathbb{N}: \mathcal{E} \rightarrow \mathcal{E}$, призванным отразить свойства отрицания. В настоящей статье предлагается снабдить N-категорию еще одним функтором $\mathbb{M}: \mathcal{E} \rightarrow \mathcal{E}$, позволяющим рассматривать модальные алгебры в терминах категории предпорядка. Как и [4], настоящая статья представляет собой не работу по категорной логике, но скорее по алгебраической логике на языке теории категорий.

1. MN-категории

1.1. **ОПРЕДЕЛЕНИЕ.** N-категория $\mathcal{E}$ представляет собой категорию предпорядка, снабженную контравариантным функтором $\mathbb{N}: \mathcal{E} \rightarrow \mathcal{E}$, такую, что:

- (i) $\mathcal{E}$ имеет терминальный объект 1,
- (ii) $\mathcal{E}$ имеет конечные копроизведения $[-, -]$,
- (iii) функтор $\mathbb{N}^2$ естественно эквивалентен единице в $\mathcal{E}$, т.е. $\mathbb{N}^2 a \cong a$ для любого объекта a из $\mathcal{E}$,
- (iv) $a \rightarrow b$ есть стрелка в $\mathcal{E}$ тогда и только тогда, когда $[\mathbb{N}a, b] \cong 1$ для любых двух объектов a, b из $\mathcal{E}$ [4, с. 507].

Скелетом N-категории является булева алгебра.

1.2. $\mathcal{E}$ имеет начальный объект $0 = \mathbb{N}1$.

1.3. $\mathcal{E}$ имеет конечные произведения, $\langle a, b \rangle = \mathbb{N}[\mathbb{N}a, \mathbb{N}b]$ (закон де Моргана).

1.4. $\mathcal{E}$ дистрибутивна, т.е. $\langle [a, b], [a, c] \rangle \cong [a, \langle b, c \rangle]$.

1.5. $\mathcal{E}$ имеет псевдодополнения (с есть псевдодополнение a относительно b , если выполняется следующее свойство: для любого x в $\mathcal{E}$, $x \rightarrow c$ есть стрелка в $\mathcal{E}$ тогда и только тогда, когда $\langle a, x \rangle \rightarrow b$ есть стрелка в $\mathcal{E}$). $[\mathbb{N}a, b]$ является псевдодополнением a относительно b с точностью до изоморфизма.

1.6. **ОПРЕДЕЛЕНИЕ.** MN-категория $\mathcal{E}$ представляет собой N-категорию, снабженную ковариантным функтором $\mathbb{M}: \mathcal{E} \rightarrow \mathcal{E}$, таким, что:

- (i) $\mathbb{M}[a, b] \cong [\mathbb{M}a, \mathbb{M}b]$ (функтор $\mathbb{M}$ сохраняет конечные копроизведения),
- (ii) для любого a из $\mathcal{E}$ существует стрелка $a \rightarrow \mathbb{M}a$ в $\mathcal{E}$,
- (iii) функтор $\mathbb{M}^2$ естественно эквивалентен функтору $\mathbb{M}$, т.е. $\mathbb{M}^2 a \cong \mathbb{M}a$,
- (iv) $\mathbb{M}0 \cong 0$.

Скелетом MN-категории является топологическая булева алгебра [3, с. 112].

Определим ковариантный функтор $\mathbb{L} : \mathcal{C} \rightarrow \mathcal{C}$ как композицию функторов $\mathbb{M}$ и $\mathbb{N}$ следующего вида: $\mathbb{L} = \mathbb{M} \mathbb{N}$ (т.е. $\mathbb{L}a \cong \mathbb{M} \mathbb{N}a$). MN-категории обладают следующим свойством:

$\mathbb{L}\langle a, b \rangle \cong \langle \mathbb{L}a, \mathbb{L}b \rangle$, т.е. $\mathbb{L}$ сохраняет конечные произведения.

2. Интерпретация аксиом модальной логики.

Рассмотрим модальные системы, определенные в терминах следующих схем аксиом и правил вывода:

A1. Аксиомы классической логики.

A2. $\Box(\alpha \rightarrow \beta) \rightarrow (\Box\alpha \rightarrow \Box\beta)$.

A4. $\Box\alpha \rightarrow \alpha$.

A3. $\Box\alpha \rightarrow \Diamond\alpha$.

R1 $\frac{\alpha, \alpha \rightarrow \beta}{\beta}$ (модус поненс)

β

R2. $\frac{\alpha \rightarrow \beta}{\Box\alpha \rightarrow \Box\beta}$

R3. $\frac{\alpha}{\Box\alpha}$

Согласно [1, с. 100], в терминах этих схем аксиом и правил вывода можно определить следующие шесть модальных систем:

C1 = {A1-A2; R1-R2};

D2 = {A1-A3; R1-R2};

E2 = {A1-A2, A4; R1-R2};

T(C) = {A1-A2; R1, R3};

T(D) = {A1-A3; R1-R3};

T = {A1-A2; R1, R3}.

Система E3 [2, с. 131] получается из системы E2 путем добавления следующей схемы аксиом:

A5. $\Box\alpha \rightarrow \Box(\Box\beta \rightarrow \Box\alpha)$.

Система ET [2, с. 134] получается из E2 добавлением аксиомы

A6. $\Box T \rightarrow \Box\Box T$,

где $T = \alpha \rightarrow \alpha$.

Система E4 получается из E2 добавлением схемы аксиомы

A7. $\Box\alpha \rightarrow \Box\Box\alpha$.

Если воспользоваться новым правилом вывода

R4. $\frac{\Box(\alpha \rightarrow \beta)}{\Box(\Box\alpha \rightarrow \Box\beta)}$,

то можно определить еще три системы:

S2 = {A4, $\Box A1 - \Box A2$, $\Box A4$; R1, R4}; S3 = {A4, $\Box A1 - \Box A2$, $\Box A4$, $\Box A5$; R1},

S4 = {A1, A4, A7; R1, R3}.

Здесь $\Box A_i$ ($1 \leq i \leq n$) означает схему, полученную из аксиомы A_i приписыванием слева символа необходимости.

Согласно [4, с. 508] словарь перевода высказываний в N-категорию выглядит следующим образом:

α	β	$\alpha \vee \beta$	$\alpha \wedge \beta$	$\neg \alpha$	$\alpha \rightarrow \beta$
a	b	$[a, b]$	$\langle a, b \rangle$	$\mathbb{N}a$	$[\mathbb{N}a, b]$

Чтобы получить словарь перевода в MN-категории, пополним этот список следующим образом:

$\Diamond \alpha$	$\Box \alpha$
$\mathbb{M}a$	$\mathbb{L}a$ (иначе $\mathbb{M} \mathbb{N}a$).

Псевдодополнение $[\mathbb{N}a, b]$ в [4, с. 509] обозначается как $a \Rightarrow b$, откуда 1.1.(iv) переписывается следующим образом:

(iv') $a \Rightarrow b$ есть стрелка в $\mathcal{C}$ тогда и только тогда, когда $a \Rightarrow b \cong 1$.

Например, интерпретация классической аксиомы

$$(\alpha \rightarrow \beta) \wedge (\beta \rightarrow \gamma) \rightarrow (\alpha \rightarrow \gamma)$$

выглядит согласно словарю перевода как

$$\langle a \Rightarrow b, b \Rightarrow c \rangle \Rightarrow a \Rightarrow c.$$

Однако утверждение о том, что эта формула есть аксиома, равносильно тому, что

$$\langle a \Rightarrow b, b \Rightarrow c \rangle \Rightarrow a \Rightarrow c \cong 1,$$

откуда, согласно (iv'), получаем

$$\langle a \Rightarrow b, b \Rightarrow c \rangle \rightarrow a \Rightarrow c.$$

Отсюда основной прием перевода заключается в том, чтобы переводить аксиомы, содержащие несколько связок импликации, в стрелки $\Rightarrow$, заменяя все импликации на $\Rightarrow$, кроме одной, самой внешней, которая заменяется на $\rightarrow$.

Применяя подобные преобразования к нашему списку аксиом и правил вывода, переводим его в следующий список:

$$A2. \mathbb{Z}(a \Rightarrow b) \rightarrow \mathbb{Z}a \Rightarrow \mathbb{Z}b.$$

$$A3. \mathbb{Z}a \rightarrow \mathbb{M}a$$

$$A4. \mathbb{Z}a \rightarrow a.$$

$$A5. \mathbb{Z}a \rightarrow \mathbb{Z}(\mathbb{Z}b \Rightarrow \mathbb{Z}a).$$

$$A6. \mathbb{Z}[\mathbb{M}a, a] \rightarrow \mathbb{Z}^2[\mathbb{M}a, a] \text{ (или } \mathbb{Z}1 \rightarrow \mathbb{Z}^2 1, \text{ если учесть, что } \alpha \vee \neg \alpha \text{ дает нам } [\mathbb{M}a, a] \cong 1 \text{ в } N\text{-категории).}$$

$$A7. \mathbb{Z}a \rightarrow \mathbb{Z}^2 a.$$

$$R1. \text{ Если } a \cong 1 \text{ и } a \rightarrow b, \text{ то } b \cong 1.$$

$$R2. \text{ Если } a \Rightarrow b \cong 1, \text{ то } \mathbb{Z}a \Rightarrow \mathbb{Z}b \cong 1.$$

$$R3. \text{ Если } a \cong 1, \text{ то } \mathbb{Z}a \cong 1.$$

$$R4. \text{ Если } \mathbb{Z}(a \Rightarrow b) \cong 1, \text{ то } \mathbb{Z}(\mathbb{Z}a \Rightarrow \mathbb{Z}b) \cong 1.$$

PA_1 дают нам переводы вида $\mathbb{Z}(\text{перевод } A_1) \cong 1$ (с заменой $\rightarrow$ на $\Rightarrow$), например, $PA5$ дает нам

$$PA5. \mathbb{Z}(\mathbb{Z}a \Rightarrow \mathbb{Z}(\mathbb{Z}b \Rightarrow \mathbb{Z}a)) \cong 1.$$

3. Алгебраические свойства

3.1. ОПРЕДЕЛЕНИЕ. Пусть $\mathcal{E}_{MN}$ и $\mathcal{E}'_{MN}$ будут MN -категориями (с функторами $\mathbb{M}, \mathbb{M}$ и $\mathbb{M}', \mathbb{M}'$ соответственно). MN -функтор $\mathbb{Z}: \mathcal{E}_{MN} \rightarrow \mathcal{E}'_{MN}$ есть функтор, обладающий следующими свойствами (для $a, b, 1$ в $\mathcal{E}_{MN}$ и $1'$ в $\mathcal{E}'_{MN}$):

$$(i) \quad \mathbb{Z}1 \cong 1'.$$

$$(ii) \quad \mathbb{Z}[a, b] \cong [\mathbb{Z}a, \mathbb{Z}b].$$

$$(iii) \quad \mathbb{Z}\mathbb{M} = \mathbb{M}'\mathbb{Z}.$$

$$(iv) \quad \mathbb{Z}\mathbb{M} = \mathbb{M}'\mathbb{Z}.$$

Из (iii) и (iv) следует:

$$(v) \quad \mathbb{Z}\mathbb{Z} = \mathbb{Z}'\mathbb{Z} \quad (\text{где } \mathbb{Z}' = \mathbb{M}'\mathbb{M}'\mathbb{M}').$$

3.2. ПРЕДЛОЖЕНИЕ. Каждая MN -категория имеет полное расширение (полнота означает здесь существование бесконечных произведений).

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Пусть $\mathcal{U}$ будет MN -категорией и пусть E_p будет множеством:

$$E_p = \{x: \mathbb{M}x \rightarrow p \text{ есть стрелка в } \mathcal{U}\}.$$

$U \subseteq \mathcal{U}$ называется M -сечением, если $U \neq \emptyset$ и $E_p \subseteq U$ для всех $p \in U$.

M -сечение называется регулярным, если для каждого $p \in U$ существует $q \in E_p$, $q \neq 0$, такое, что $E_q \cap U = \{\tilde{0}\}$, где $\tilde{0}$ означает, что учитываются не только 0, но и все изоморфные ему объекты. Таким образом $\{\tilde{0}\}$, $\mathcal{U}$ и E_p являются регулярными M -сечениями и если все элементы в $\langle U_i, i \in I \rangle$ есть регулярные M -сечения, то

$\bigcap (U_i : i \in I)$ есть регулярное M -сечение. Для M -сечения U через $\bar{U}$ обозначим пересечение всех регулярных M -сечений, содержащих U . Перенос на множество B' всех регулярных M -сечений в $\mathcal{U}$ результаты из [4, с. 510] для просто сечений (т.е. когда $E_p = (x : x \rightarrow p$ есть стрелка в $\mathcal{U}$)), получаем, что множество B' вместе со стрелками включений представляет собой категорию предпорядка с $\mathcal{U}$ в качестве терминального объекта и копроизведениями $\bigcup (U_i : i \in I) = \overline{\bigcup (U_i : i \in I)}$. N -функтор определяется на B' с помощью отображения

$$\mathbb{N}^* : U \mapsto \mathbb{N}^* U = \{p : E_p \cap U = \{\emptyset\}\}.$$

M -функтор, в свою очередь, определяется на B' с помощью отображения

$$\mathbb{M}^* : U \mapsto \mathbb{M}^* U = \overline{\{p : U \subseteq E_p\}},$$

для которого, как нетрудно убедиться, выполняются (i)-(iv). Отсюда полное расширение состоит из пар (q, U) , где $q \in U$ и U есть регулярное M -сечение. ■

Здесь и в дальнейшем знак означает конец доказательства.

3.3. ПРЕДЛОЖЕНИЕ. Пусть $\mathcal{U}, \mathcal{B}, \mathcal{E}$ есть MN -категории, где $\mathcal{B}$ является расширением $\mathcal{U}$, и $\mathcal{E}$ является полной. Любой MN -функтор $\mathbb{J} : \mathcal{U} \rightarrow \mathcal{E}$ может быть расширен до MN -функтора $\mathbb{J} : \mathcal{B} \rightarrow \mathcal{E}$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Аргументация та же, что и в [4, с. 510]. Определяем семейство пар $(\mathcal{E}, \mathcal{G})$, где $\mathcal{E}$ есть подкатегория $\mathcal{B}$, а $\mathcal{G}$ есть MN -функтор, расширяющий $\mathbb{J}$. Применяя лемму Цорна, получаем максимальный элемент $(\mathcal{B}', \mathbb{J})$. Если $\mathcal{B} \neq \mathcal{B}'$, возьмем $b \in \mathcal{B} \setminus \mathcal{B}'$, и сконструируем $\mathcal{B}'' = \{ \langle \mathbb{M}b, q \rangle, \langle \mathbb{N}b, p \rangle : q, p \in \mathcal{B}' \}$, которое будет MN -категорией, противореча максимальнойности $\mathcal{B}'$. ■

4. Пропозициональное исчисление

$\mathcal{E}$ в дальнейшем будет обозначать MN -категорию.

4.1. Пусть p есть объект $\mathcal{E}$ и обозначим через $\mathcal{G}_p$ категорию

$$\mathcal{G}_p = (x : \mathbb{M}x \rightarrow p \text{ есть стрелка в } \mathcal{E}),$$

чьи стрелки таковы же, как и в $\mathcal{E}$. Заметим, что при этом $p \approx \mathbb{M}p$ и $x \rightarrow p$ есть стрелка в $\mathcal{E}$ для всех x из $\mathcal{G}_p$. Определив $\mathbb{N}_p : \mathcal{G}_p \rightarrow \mathcal{G}_p$ как $\mathbb{N}_p x = \langle \mathbb{N}x, p \rangle$, получаем, что $\mathbb{N}_p$ есть контравариантный функтор, так что пара $(\mathcal{G}_p, \mathbb{N}_p)$ становится N -категорией с p в качестве терминального объекта и теми же копроизведениями, что и в $\mathcal{E}$. Определив теперь $\mathbb{M}_p : \mathcal{G}_p \rightarrow \mathcal{G}_p$ как $\mathbb{M}_p x = \langle \mathbb{M}x, p \rangle$, получаем ковариантный функтор $\mathbb{M}_p$, так что $(\mathcal{G}_p, \mathbb{N}_p, \mathbb{M}_p)$ становится MN -категорией. Категория $\mathcal{G}_p$ очевидным образом представляет собой обобщение понятия главных идеалов в топологической булевой алгебре.

4.2. Пусть $\mathcal{G}$ будет непустым семейством элементов $\mathcal{E}$. Для $n \geq 2$ определим

$$[\mathcal{G}_n] = \{ [p_1, \dots, p_n] : p_i \in \mathcal{G}, i = 1, 2, 3, \dots, n \}$$

и определим

$$[\mathcal{G}] = \bigcup \{ [\mathcal{G}_n] : n \geq 2 \}, \quad (\mathcal{G}) = \bigcup \{ \mathcal{G}_p : p \in [\mathcal{G}] \}.$$

Как и в [4, с. 511], следующие свойства очевидны:

4.2.1. $\mathcal{C} \subseteq \mathcal{C}$.

4.2.2. Если $\mathcal{C} = \{p\}$, то $\mathcal{C} = \mathcal{C}_p$.

4.2.3. $\mathcal{C} = \mathcal{E}$ тогда и только тогда, когда $1 \in \mathcal{C}$ тогда и только тогда, когда существуют объекты $p_1, \dots, p_n \in \mathcal{C}$, такие, что $[p_1, \dots, p_n] \approx 1$.

4.2.4. Если $p, q \in \mathcal{C}$, то $[p, q] \in \mathcal{C}$.

4.2.5. Если $p \in \mathcal{C}$, то $\mathcal{C}_p \subseteq \mathcal{C}$.

Очевидным образом $\mathcal{C}$ есть MN-категорный перевод понятия идеала в топологической булевой алгебре.

4.3. Отношение $\sim_{\mathcal{C}}$, определенное как

$p \sim_{\mathcal{C}} q$ тогда и только тогда, когда $[<p, \mathbb{A}q>, <\mathbb{A}p, q>] \in \mathcal{C}$ является отношением эквивалентности, по которому мы определяем фактор-множество $\mathcal{E}/(\mathcal{C})$. Если теперь определить в $\mathcal{E}/(\mathcal{C})$, что $\bar{x} \rightarrow \bar{y}$ есть стрелка в $\mathcal{E}/(\mathcal{C})$ тогда и только тогда, когда $\mathbb{A}[\mathbb{A}x, y] \in \mathcal{C}$, то $\mathcal{E}/(\mathcal{C})$ становится категорией предпорядка. Если определить $\mathbb{A}_{\mathcal{C}}: \mathcal{E}/(\mathcal{C}) \rightarrow \mathcal{E}/(\mathcal{C})$ посредством $\mathbb{A}_{\mathcal{C}}\bar{x} = \overline{\mathbb{A}x}$, то $\mathbb{A}_{\mathcal{C}}$ есть контравариантный функтор, откуда пара $(\mathcal{E}/(\mathcal{C}), \mathbb{A}_{\mathcal{C}})$ есть N-категория с 1 в качестве терминального объекта и копроизведениями $[\bar{x}, \bar{y}]_{\mathcal{C}} = \overline{[x, y]}$.

Определим теперь $\mathbb{A}_{\mathcal{C}}: \mathcal{E}/(\mathcal{C}) \rightarrow \mathcal{E}/(\mathcal{C})$ посредством $\mathbb{A}_{\mathcal{C}}\bar{x} = \overline{\mathbb{A}x}$, откуда $\mathbb{A}_{\mathcal{C}}$ есть ковариантный функтор, а тройка $(\mathcal{E}/(\mathcal{C}), \mathbb{A}_{\mathcal{C}}, \mathbb{A}_{\mathcal{C}})$ образует MN-категорию. При этом $\mathbb{A}_{\mathcal{C}}\bar{x} = \overline{\mathbb{A}x}$ очевидным образом.

4.4. ПРЕДЛОЖЕНИЕ. $\mathbb{J}: \mathcal{E} \rightarrow \mathcal{E}/(\mathcal{C})$, определенный посредством $\mathbb{J}x = \bar{x}$, есть MN-функтор.

4.5. ОПРЕДЕЛЕНИЕ. $\mathcal{C}$ является максимальным, если не существует $\mathcal{C}' \subseteq \mathcal{C}$, такого, что $\mathcal{C} \subset (\mathcal{C}') \subset \mathcal{C}$.

Максимальность очевидным образом эквивалентна $\mathcal{E}/(\mathcal{C}) = (0 \rightarrow 1)$.

4.6. Свойства $\mathcal{C}$ означают, что это семейство интерпретируется как множество всех опровержимых высказываний теории. Из элементов $\mathcal{C}$, называемых в [4, с. 511] ко-аксиомами, выводятся опровержимые высказывания. Отношение $\sim_{\mathcal{C}}$ определяет "меру опровержимости", поскольку оно гласит, что

$x \sim_{\mathcal{C}} y$ тогда и только тогда, когда $"(x \wedge y) \vee (y \wedge x)"$ опровержимо.

Точно так же истолковывается определение $\bar{x} \rightarrow \bar{y}$ в $\mathcal{E}/(\mathcal{C})$: если мы хотим, чтобы $\neg x \vee y$ было доказуемым, мы должны требовать, чтобы $\mathbb{A}[\mathbb{A}x, y]$ было опровергаемо.

4.6.1. ОПРЕДЕЛЕНИЕ. MN-категорная интерпретация модальной логики есть пара $(\mathcal{E}, (\mathcal{C}))$, описывающая множество высказываний вместе со множеством опровержимых высказываний.

4.6.2. Логика $(\mathcal{E}, (\mathcal{C}))$ (синтаксически) непротиворечива, если не имеет места ситуация, когда и высказывание и его отрицание одновременно опровержимы, что эквивалентно требованию $\mathcal{C} \neq \mathcal{E}$.

4.6.3. Логика $(\mathcal{E}, (\mathcal{C}))$ (синтаксически) полна, если для любого высказывания p имеет место либо $p \in \mathcal{C}$, либо $\neg p \in \mathcal{C}$, но не одновременно. Это эквивалентно тому факту, что либо $p \sim_{\mathcal{C}} 0$, либо $p \sim_{\mathcal{C}} 1$, что, согласно 4.5, эквивалентно максимальной $\mathcal{C}$. Слу-

чаю конечно аксиоматизируемых теорий (когда вместо множества аксиом можно взять их конъюнкцию) дуально соответствует случай конечно ко-аксиоматизируемых теорий. Таким образом, если $\mathcal{C} = \langle p_1, \dots, p_n \rangle$, то получаем $(\mathcal{C}) = \mathcal{C}_p$, где $p = [p_1, \dots, p_n]$. Отсюда

$(\mathcal{E}, (\mathcal{C}_p))$ непротиворечива, если $p \neq 1$;

$(\mathcal{E}, (\mathcal{C}_p))$ полна тогда и только тогда, когда p является максимальным элементом по упорядочению, индуцированному на $\mathcal{E}$ как категории предпорядка

$(\mathcal{E}, (\mathcal{C}))$ непротиворечива тогда и только тогда, когда $(\mathcal{E}, (\mathcal{C}_p))$ непротиворечива для всех $p \in \mathcal{C}$ (по 4.2.3). Последний результат представляет собой разновидность теоремы компактности.

5. Предикаты с одной переменной

В дальнейшем допускаем, что категория $\mathcal{E}$ полна. Если это не так, то мы всегда можем ее пополнить согласно 3.2.

Пусть X есть произвольное множество. Если элементы X и элементы N -категории $\mathcal{E}$ соответственно определить как константы и высказывания, то функции $\mathcal{E}^X$ будут предикатами одной переменной. $\mathcal{E}^X$ со стрелками, определенными как

$P \rightarrow Q$ в $\mathcal{E}^X$ тогда и только тогда, когда $Px \rightarrow Qx$ для всех x есть категория предпорядка. Эта категория, снабженная функтором $\mathbb{N}^X: \mathcal{E}^X \rightarrow \mathcal{E}^X$, определенными как $\mathbb{N}^X Px = \mathbb{N} Px$, есть N -категория [4, с. 512]. Ее терминальным объектом является функция $1^X \in \mathcal{E}^X$, определенная как $1^X x = 1$; копроизведения определяются как $[P, Q]^X x = [Px, Qx]$. Мы получаем MN -категорию, если снабдим $\mathcal{E}^X$ еще одним функтором $\mathbb{M}^X: \mathcal{E}^X \rightarrow \mathcal{E}^X$, определенным как $\mathbb{M}^X Px = \mathbb{M} Px$. При этом $\mathbb{M}^X [P, Q]^X x = [\mathbb{M} P, \mathbb{M} Q]^X x$, для любого P существует стрелка $Px \rightarrow \mathbb{M}^X Px$, $(\mathbb{M}^X)^2 Px \cong \mathbb{M}^X Px$ и $\mathbb{M}^X 0x \cong 0$.

5.1. Функтор $\exists$.

Пусть $P \in \mathcal{E}^X$, $p = \bigcup rg(P)$, где $rg(P)$ обозначает область значений P . Имеют место следующие свойства:

5.1.1. $rg(\mathbb{M}^X P) \subseteq \mathcal{C}_p$.

5.1.2. $rg(\mathbb{M}^X P) \cap (\mathcal{C}_p) = \mathcal{C}_p$.

Определим функцию $\exists: \mathcal{E}^X \rightarrow \mathcal{E}^X$ как $\exists P = \bigcup rg(P)$, которая определяется функцией $\mathcal{E}^X \rightarrow \mathcal{E}^X$, если рассматривать элементы $\mathcal{E}$ как константные функции в $\mathcal{E}^X$. Очевидна выполнимость следующих свойств [4, с. 512]:

5.1.3. $Px \rightarrow \exists P$ в $\mathcal{E}$ для всех x , т.е. $P \rightarrow \exists P$ в $\mathcal{E}^X$.

5.1.4. Если $P \rightarrow Q$ в $\mathcal{E}^X$, то $\exists P \rightarrow \exists Q$ в $\mathcal{E}$ (и также в $\mathcal{E}^X$), откуда следует функторность $\exists$.

5.1.5. $\exists 0^X \cong 0$.

5.1.6. $\exists \langle P, \exists Q \rangle \cong \langle \exists P, \exists Q \rangle$.

5.1.7. $\exists 1^X \cong 1$.

5.1.8. Если $p \in \mathcal{E}$, то $\exists p \cong p$.

5.1.9. $\exists \exists = \exists$; $\exists \mathbb{M} \exists = \mathbb{M} \exists$.

5.1.10. $\exists [P, Q]^X \cong [\exists P, \exists Q]$.

Сюда еще следует теперь добавить

5.1.11. $\exists \mathbb{M} = \mathbb{M} \exists$ (свойство Баркан).

Если определить $\forall: \mathfrak{E}^X \rightarrow \mathfrak{E} \hookrightarrow \mathfrak{E}^X$ как $\forall = \mathbb{M} \exists \mathbb{M}^X$, то $\forall$ есть функтор, обладающий дуальными к свойствам $\exists$ свойствами. Точно так же определяем $\exists: \mathfrak{E}^X \rightarrow \mathfrak{E} \hookrightarrow \mathfrak{E}^X$ как $\exists = \mathbb{M} \mathbb{M}^X$, причем $\exists$ будет функтором, обладающим дуальными к свойствам $\mathbb{M}$ свойствами.

5.2. Для данного подмножества $\mathfrak{D} \subseteq \mathfrak{E}^X$ мы можем определить множество $(\mathfrak{D})$ аналогично 4.2.

5.2.1. **ОПРЕДЕЛЕНИЕ.** Будем говорить, что $(\mathfrak{D})$ является $\exists$ -замкнутым (и обозначать это как $((\mathfrak{D}))$), если, в добавление к свойствам, описанным в 4.2, $(\mathfrak{D})$ будет обладать еще следующим свойством: если $P \in ((\mathfrak{D}))$, то $\exists P \in ((\mathfrak{D}))$.

По 5.1.3 это означает, что $P \in ((\mathfrak{D}))$ тогда и только тогда, когда, $\exists P \in ((\mathfrak{D}))$. Заметим, что $\mathbb{M} P \in ((\mathfrak{D}))$ согласно определению $((\mathfrak{D}))$.

Подмножество $\mathfrak{G} \subseteq \mathfrak{E}$ может генерировать множество $(\mathfrak{G})$, как было показано выше, либо также множество $(\mathfrak{G})_X$, если определить $\mathfrak{G} \subseteq \mathfrak{E} \hookrightarrow \mathfrak{E}^X$.

Имеют место следующие результаты:

5.2.2. $(\mathfrak{G})$ является тривиально $\exists$ -замкнутым; $(\mathfrak{G})_X$ также $\exists$ -замкнуто.

5.2.3. $((\mathfrak{D})) = (((\mathfrak{D}))) \cap \mathfrak{E}$; $(\mathfrak{G}) = (\mathfrak{G})_X \cap \mathfrak{E}$; $((\mathfrak{D})) \cap \mathfrak{E} = ((\mathfrak{D}))$.

5.2.4. $((\mathfrak{D}))$ является собственным (соответственно максимальным) тогда и только тогда, когда $((\mathfrak{D})) \cap \mathfrak{E}$ является собственным (соответственно максимальным).

5.2.3. Алгебраический перевод логики предикатов с одной переменной теперь будет представлять собой пару $(\mathfrak{E}^X, ((\mathfrak{D})))$, где $((\mathfrak{D}))$ интерпретируется как множество опровержимых предикатных формул. Далее,

$(\mathfrak{E}^X, ((\mathfrak{D}))) \left\{ \begin{array}{l} \text{непротиворечива} \\ \text{полна} \end{array} \right\}$ тогда и только тогда, когда $(\mathfrak{E}, ((\mathfrak{D})) \cap \mathfrak{E}) \left\{ \begin{array}{l} \text{непротиворечива} \\ \text{полна} \end{array} \right\}$.

По 5.2.4, 4.6.2 и 4.6.3 получаем

$(\mathfrak{E}^X, ((\mathfrak{D}))) \left\{ \begin{array}{l} \text{непротиворечива} \\ \text{полна} \end{array} \right\}$ тогда и только тогда, когда $((\mathfrak{D}))$ является $\left\{ \begin{array}{l} \text{собственным} \\ \text{максимальным} \end{array} \right\}$.

Теперь, поскольку $(\mathfrak{G}_P)_X \cap \mathfrak{E} = \mathfrak{G}_P$, то все результаты из [4] можно перенести на эти множества.

6. Предикаты с несколькими переменными

Определим теперь $\mathbb{M}\mathbb{N}$ -категорию $\mathfrak{E}^{X^I}$, где $\mathfrak{E}$ и X определены как и ранее, а I есть множество индексов. Предикатами являются теперь функции $P: X^I \rightarrow \mathfrak{E}$. Например, если $\mathfrak{E}$ и X таковы, как требуется, $i, j \in I$, то P может быть следующим: $f \in X^I \mapsto P(f) = "f(i) \geq f(j)" \in \mathfrak{E}$ [4, с. 513]. Фактически интересующие нас функции — это те, чьи индексы образуют конечное подмножество $J \subseteq I$. Именно

они соответствуют пропозициональным функциям конечного числа переменных, т.е. предикатам.

6.1. **ОПРЕДЕЛЕНИЕ.** Пусть $J \leq I$, $P \in \mathcal{E}^X$. P независимо от J , если выполняется следующее условие: если $f|_{I-J} = g|_{I-J}$ то $P(f) \cong P(g)$. Мы говорим, что J является носителем P , если P независимо от $I-J$, т.е. если $f|_J \cong g|_J$, то $P(f) \cong P(g)$.

6.2. Для $J \leq I$ мы определяем $\exists(J): \mathcal{E}^{X^I} \rightarrow \mathcal{E}^{X^I}$ как

$$\exists(J)P(f) = \coprod \{P(g) : g \in X^I, g|_{I-J} = f|_{I-J}\}.$$

Если $P \rightarrow Q$ есть стрелка в $\mathcal{E}^{X^I}$, то $\exists(J)P \rightarrow \exists(J)Q$ есть стрелка в $\mathcal{E}^{X^I}$ [4, с. 514].

Из принятых определений получаем:

6.2.1. P независима в J тогда и только тогда, когда $\exists(J)P \cong P$.

6.2.2. J является носителем P тогда и только тогда, когда $\exists(I-J)P \cong P$.

6.2.3. Как и в случае одной переменной, определяем семейство функторов:

$$\forall(J): \mathcal{E}^{X^I} \rightarrow \mathcal{E}^{X^I} \text{ как } \forall(J) = \prod \exists(J) \prod X^I.$$

Теперь свойство Баркан имеет вид:

$$\exists(J) \prod X^I = \prod X^I \exists(J).$$

6.3. В случае $J=I$ вместо 6.2 получаем:

$$\exists(J)P(f) = \coprod \{P(g) : g \in X^I\} = \coprod P(g),$$

т.е. получаем совпадение со случаем одной переменной (5.1.2).

6.4. Манипулирование с $\exists$ -замкнутыми множествами подобно предшествующему случаю, имеют место все предыдущие свойства. В заключение приходим к следующей формулировке:

$$\begin{aligned} (\mathcal{E}^{X^I}, ((\exists))) & \left\{ \begin{array}{l} \text{непротиворечива} \\ \text{полна} \end{array} \right\} \text{ тогда и только тогда, когда} \\ (\mathcal{E}, ((\exists))) \cap \mathcal{E} & \left\{ \begin{array}{l} \text{непротиворечива} \\ \text{полна} \end{array} \right\} \text{ тогда и только тогда, когда} \\ ((\exists)) & \left\{ \begin{array}{l} \text{собственное} \\ \text{максимальное} \end{array} \right\}. \end{aligned}$$

7. Семантика

7.1. Пусть у нас определена пара $(\mathcal{E}, (\mathcal{G}))$, представляющая собой алгебраический перевод модальной логики, и пусть $\mathcal{B}$ будет нетривиальной МН-категорией.

7.1.1. **ОПРЕДЕЛЕНИЕ.** $\mathcal{B}$ -оценка есть МН-функтор $v: \mathcal{E} \rightarrow \mathcal{B}$. Объект $p \in \mathcal{E}$ называется ложным при v , если $vp \cong 0$. $(\mathcal{E}, (\mathcal{G}))$ семантически непротиворечива, если существует оценка v , такая, что $p \in \mathcal{G}$ влечет $vp \cong 0$.

Отсюда легко доказать, что $vp \cong 0$ для всех $p \in (\mathcal{G})$, а также, что применение $\bar{v}: \mathcal{E}/(\mathcal{G}) \rightarrow \mathcal{B}$, определенного как $\bar{v}p = vp$, дает нам МН-функтор.

7.1.2. **ОПРЕДЕЛЕНИЕ.** Моделью $(\mathcal{E}, (\mathcal{G}))$ называется $\mathcal{B}$ -оценка v , такая, что $vp \cong 0$ для всех $p \in \mathcal{G}$.

Суммируя 7.1.1 и 7.1.2, получаем, что $(\mathcal{E}, (\mathcal{G}))$ семантически

непротиворечива, если $(\mathcal{E}, (\mathcal{G}))$ имеет модель.

7.1.3. ТЕОРЕМА. $(\mathcal{E}, (\mathcal{G}))$ семантически непротиворечива тогда и только тогда, когда $(\mathcal{G})$ является собственным.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Пусть $(\mathcal{E}, (\mathcal{G}))$ семантически непротиворечива и пусть v есть ее модель. Поскольку $v1 \geq 1$ (по свойству MN-функтора) и поскольку $\neg(1 \geq 0)$ в силу нетривиальности $\mathfrak{B}$, то $1 \notin (\mathcal{G})$ и поэтому $(\mathcal{G})$ является собственным. Наоборот, пусть $(\mathcal{G})$ будет собственным. Мы должны сконструировать модель для $(\mathcal{E}, (\mathcal{G}))$. Покажем, что существует $\mathcal{G}' \subseteq \mathcal{E}$, такое, что $(\mathcal{G}) \subseteq (\mathcal{G}')$, где $(\mathcal{G}')$ является максимальным (собственным). Определим теперь $\mathfrak{H} = \{(\mathcal{D}) : (\mathcal{G}) \subseteq (\mathcal{D}) \neq \mathcal{E}\}$.

$\mathfrak{H}$ непусто, потому что $(\mathcal{G}) \in \mathfrak{H}$. Более того, если $(\mathcal{D}_\alpha)$ есть семейство элементов $\mathfrak{H}$, тотально упорядоченных по включению, тогда $\cup(\mathcal{D}_\alpha) = (\cup(\mathcal{D}_\alpha)) \in \mathfrak{H}$. По лемме Цорна $\mathfrak{H}$ имеет максимальный элемент $(\mathcal{G}')$. Так как $(\mathcal{G}')$ максимально, то мы имеем либо $\mathfrak{M}r \in (\mathcal{G}')$, либо $\neg \mathfrak{M}r \in (\mathcal{G}')$ для всех $r \in \mathcal{E}$. Теперь не составляет труда доказать, что отображение $v: \mathcal{E} \rightarrow \mathfrak{B}$, определяемое как

$$v_r = \begin{cases} 0: & \text{если } \mathfrak{M}r \in (\mathcal{G}') \\ 1: & \text{если } \neg \mathfrak{M}r \in (\mathcal{G}') \end{cases}$$

есть MN-функтор, который является моделью $(\mathcal{E}, (\mathcal{G}))$. ■

7.1.4. ОПРЕДЕЛЕНИЕ. $(\mathcal{E}, (\mathcal{G}))$ семантически полна, если выполняется следующее условие: p является опровержимым (т.е. $p \in (\mathcal{G})$) тогда и только тогда, когда p ложно во всех моделях $(\mathcal{E}, (\mathcal{G}))$.

7.1.5. ТЕОРЕМА. $(\mathcal{E}, (\mathcal{G}))$ семантически полна.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Аргументация та же, что и в [4, с. 515], с учетом изменения понятия $(\mathcal{E}, (\mathcal{G}))$ на случай модальной логики.

Ясно, что если $p \in (\mathcal{G})$, тогда $v_r \geq 0$ для любой оценки v (7.1.1). Наоборот, пусть $p \in \mathcal{E}$ будет ложным для всех моделей $(\mathcal{E}, (\mathcal{G}))$. Рассмотрим множество $(\mathcal{G} \cup \{\neg p\})$. Если $(\mathcal{G} \cup \{\neg p\}) \neq \mathcal{E}$, то логика $(\mathcal{E}, (\mathcal{G} \cup \{\neg p\}))$ будет непротиворечивой, так что должна существовать модель v , которая ввиду $(\mathcal{G}) \subseteq (\mathcal{G} \cup \{\neg p\})$ будет также моделью $(\mathcal{E}, (\mathcal{G}))$. Отсюда получаем противоречие: $v \neg p \geq 0$, потому что $\neg p \in (\mathcal{G} \cup \{\neg p\})$; $v \neg p \geq \neg v p \geq \neg 0 \geq 1$, потому что $v_r \geq 0$, так как p ложно по отношению к v . Поэтому $(\mathcal{G} \cup \{\neg p\}) = \mathcal{E}$, и следовательно $p \in (\mathcal{G} \cup \{\neg p\})$. Отсюда следует, что существует $q \in (\mathcal{G})$, такой, что $p \rightarrow [q, \neg p]$. Но $p \rightarrow [q, \neg p]$ тогда и только тогда, когда $1 \geq [\neg p, [q, \neg p]] \geq [\neg p, q]$ тогда и только тогда, когда $p \rightarrow q$, поэтому $p \in \mathcal{G} \subseteq (\mathcal{G})$. ■

7.2. В случае логики предикатов весь процесс очень похож. Так как случай $(\mathcal{E}^X, ((\mathcal{D})))$ выводится из случая $(\mathcal{E}^{X^I}, ((\mathcal{D})))$ с одноэлементным I , то рассмотрим последний случай. Пусть $\mathfrak{B}$ как и раньше будет нетривиальной категорией.

7.2.1. ОПРЕДЕЛЕНИЕ. $\mathfrak{B}$ -оценка v есть MN-функтор $v: \mathcal{E} \rightarrow \mathfrak{B}$. Заметим, что мы определяем v только лишь для тех элементов $\mathcal{E}$, которые играют роль замкнутых формул. Элемент $p \in \mathcal{E}^{X^I}$ называется ложным при v , если $v \exists p \geq 0$ (напомним, что $\exists = \exists(I)$). $(\mathcal{E}^{X^I}, ((\mathcal{D})))$ семантически непротиворечива, если существует оценка v , такая,

что $\forall r \models 0$ для всех $r \in ((\mathcal{D})) \cap \mathcal{E}$, и подобная оценка называется моделью $(\mathcal{E}^{X^I}, ((\mathcal{D})))$.

7.2.2. ТЕОРЕМА. $(\mathcal{E}^{X^I}, ((\mathcal{D})))$ семантически непротиворечива тогда и только тогда, когда $((\mathcal{D}))$ собственное.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Следует из 7.1.3, 5.2.4 и того факта, что модель $(\mathcal{E}^{X^I}, ((\mathcal{D})))$ устроена так же, как и модель $(\mathcal{E}, ((\mathcal{D}))) \cap \mathcal{E}$. ■

7.2.3. ОПРЕДЕЛЕНИЕ. $(\mathcal{E}^{X^I}, ((\mathcal{D})))$ является семантически полной, если выполняется условие: P опровержимо (т.е. $P \in ((\mathcal{D}))$) тогда и только тогда, когда P ложно во всех моделях $(\mathcal{E}^{X^I}, ((\mathcal{D})))$.

7.2.4. ТЕОРЕМА. $(\mathcal{E}^{X^I}, ((\mathcal{D})))$ семантически полна.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Если $P \in ((\mathcal{D}))$, то $\exists R \in ((\mathcal{D})) \cap \mathcal{E}$. Таким образом для всех моделей $\mathcal{D}$ мы имеем $\forall R \models 0$. Наоборот, пусть $P \in \mathcal{E}^{X^I}$ ложно во всех моделях $(\mathcal{E}^{X^I}, ((\mathcal{D})))$. Положим $A = (((\mathcal{D})) \cap \mathcal{E}) \cup \{P\} \subseteq \mathcal{E}^{X^I}$. Процесс доказательства подобен случаю 7.1.5 (вспомним, что $(\mathcal{U})_{X^I}$ есть множество, порожденное $\mathcal{U}$ в $\mathcal{E}^{X^I}$, а не в $\mathcal{E}$): если $(\mathcal{U})_{X^I} \neq \mathcal{E}^{X^I}$, получаем противоречие; если $(\mathcal{U})_{X^I} = \mathcal{E}^{X^I}$, мы получаем $\exists R \in ((\mathcal{D}))$, и по теореме 5.2.1, $P \in ((\mathcal{D}))$. ■

Литература

1. Леммон Е. Алгебраическая семантика для модальных логик. I. // Семантика модальных и интенциональных логик. М., 1981.
2. Леммон Е. Алгебраическая семантика для модальных логик. II. // Там же.
3. Расева Е., Сикорский Р. Математика метаматематики. М., 1972.
4. Riscos A., Laita L.M. N-categories in logic. // Zeitschr. Math. Logik und Grundl. Math. 1987. Bd. 33. S. 507-516

RN-КАТЕГОРИИ ДЛЯ РЕЛЕВАНТНЫХ ЛОГИК

В работе предложена теоретико-категорная семантика для релевантных логик. Основной категорной конструкцией при этом являются RN-категории, основанные, одной стороны, на понятии N-категории, предложенной А.Рискосом и Л.М.Лайтой [3], а с другой – на понятии резидуала в алгебраических моделях. Анализ семантических аспектов релевантных логик проводится на основе понятий стриплы и стрипланы, предложенных Л.Л.Максимовой [2].

1. Введение

1.1. Понятие N-категории было введено А.Рискосом и Л.М.Лайтой с целью переформулировки монадических и полиадических алгебр Халмша в терминах категорий предпорядка. Интуитивно N-категория $\mathcal{E}$ представляет собой категорию предпорядка, снабженную контравариантным функтором $\mathbb{N}: \mathcal{E} \rightarrow \mathcal{E}$, призванным отразить свойства отрицания. Строгое определение выглядит следующим образом:

1.2. ОПРЕДЕЛЕНИЕ. N-категория $\mathcal{E}$ есть категория предпорядка, снабженная контравариантным функтором $\mathbb{N}: \mathcal{E} \rightarrow \mathcal{E}$, таким, что:

- (i) в $\mathcal{E}$ имеется терминальный объект 1,
- (ii) в $\mathcal{E}$ имеются копроизведения $\{-, -\}$,
- (iii) функтор $\mathbb{N}^2$ естественно эквивалентен единице в $\mathcal{E}$, т.е. $\mathbb{N}^2 a \cong a$ для любого объекта a из $\mathcal{E}$,
- (iv) $a \rightarrow b$ есть стрелка в $\mathcal{E}$ тогда и только тогда, когда $[\mathbb{N}a, b] \cong 1$ для любых двух объектов a, b в $\mathcal{E}$.

1.3. Учитывая, что для большинства известных логик алгебраические модели являются дистрибутивными решетками, а категории предпорядка как раз и являются категорным аналогом этих решеток, можно было бы ожидать, что, отталкиваясь от конструкции N-категории, можно получить подобные категорные модели в терминах категории предпорядка.

Трудности, возникающие на этом пути, связаны с отличием в формулировке понятия импликации в других неклассических логических системах. Чтобы преодолеть эту трудность, прибегают к интерпретации импликации как резидуала относительно некоторой операции. Дело в том, что для большинства логических исчислений справедливо следующее утверждение:

существует бинарная операция $\odot$, такая, что для всех a, b, c

- (a) $a \odot b \leq c$ тогда и только тогда, когда $a \leq b \rightarrow c$.

При этом операция $\odot$ обычно соответствует некоторой логической связке (в частности, в случае классической и интуиционистской логик это конъюнкция), хотя в общем случае это необязательно.

1.4. В N-категориях роль резидуала выполняет относительное псевдодополнение, в случае же релевантной логики ситуация сложнее: операции $\odot$ здесь соответствует связка $\circ$ (совместимость или релевантная конъюнкция), которая хотя и производна, но ее алгебраическая модель – операция группоидного умножения. Поскольку алгебраические модели релевантной логики согласно [3] представляют собой т.н. стримплану, т.е. дистрибутивную решетку с резидуалом (импликацией) и дополнением, то возникает необходимость наделить N-категорию еще и структурой группоида. Как следствие – использование понятия RN-категории, удовлетворяющей всем этим требованиям.

2. RN-категории

2.1. ОПРЕДЕЛЕНИЕ. R-категория $\mathcal{E}$ есть группоидная категория предпорядка, снабженная ковариантным бифунктором $\odot: \mathcal{E} \times \mathcal{E} \rightarrow \mathcal{E}$, таким, что:

- (i) $\mathcal{E}$ имеет конечные произведения $\langle -, - \rangle$ и копроизведения $[-, -]$,
- (ii) если $a \rightarrow b$ есть стрелка в $\mathcal{E}$, то $a \odot x \rightarrow b \odot x$ и $x \odot a \rightarrow x \odot b$ есть стрелки в $\mathcal{E}$ для всех x из $\mathcal{E}$,
- (iii) для любых x, y, z из $\mathcal{E}$ имеют место следующие естественные изоморфизмы:

$$x \odot [y, z] \cong [x \odot y, x \odot z]$$

$$[y, z] \odot x \cong [y \odot x, z \odot x],$$

т.е. бифунктор сохраняет копроизведения,

- (iv) в $\mathcal{E}$ существует объект 1, такой, что $1 \odot x \cong x$ и $x \rightarrow x \odot 1$ есть стрелка в $\mathcal{E}$ для всех x из $\mathcal{E}$,
- (v) в $\mathcal{E}$ существуют резидуалы (с есть резидуал a относительно b , если следующее свойство имеет место: для любого x из $\mathcal{E}$, $x \rightarrow c$ есть стрелка в $\mathcal{E}$ тогда и только тогда, когда $x \odot a \rightarrow b$ есть стрелка в $\mathcal{E}$).

2.2 Будем обозначать наибольший резидуал a относительно b как $a \Rightarrow b$. Нетрудно видеть, что резидуал $\Rightarrow$ отличается от относительного псевдодополнения в N-категориях [3, с. 507] тем, что псевдодополнение есть резидуал относительно произведений $\langle -, - \rangle$ в категориях предпорядка.

2.3. ОПРЕДЕЛЕНИЕ. RN-категория $\mathcal{E}$ есть R-категория, снабженная контравариантным функтором $\mathbb{N}: \mathcal{E} \rightarrow \mathcal{E}$, таким, что

- (i) функтор $\mathbb{N}^2$ естественно эквивалентен тождеству в $\mathcal{E}$, т.е. $\mathbb{N}^2 a \cong a$ для любого объекта a из $\mathcal{E}$,
- (ii) для любых a, b из $\mathcal{E}$ ($a \Rightarrow b$) $\odot b \rightarrow \mathbb{N} a$ и $a \Rightarrow \mathbb{N} a \rightarrow \mathbb{N} a$ есть стрелки в $\mathcal{E}$.

2.4. RN-категория $\mathcal{E}$ обладает следующими свойствами:

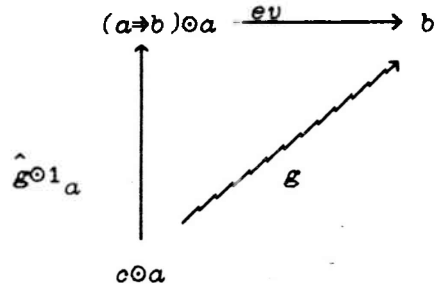
2.4.1. $\mathbb{N} \langle a, b \rangle \cong [\mathbb{N} a, \mathbb{N} b]$.

2.4.2. $\mathbb{N} [a, b] \cong \langle \mathbb{N} a, \mathbb{N} b \rangle$.

2.4.3. $\hat{\epsilon}$ дистрибутивна, т.е. $\langle [a, b], [a, c] \rangle \cong [a, \langle b, c \rangle]$.

2.5. ТЕОРЕМА. RN – категория является декартово замкнутой относительно бифунктора $\odot$ категорией.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Декартова замкнутость относительно бифунктора $\odot$ означает, что в диаграмме экспоненцирования [1, с. 84] вместо произведений фигурирует бифунктор $\odot$, т.е. она выглядит следующим образом:



В качестве экспоненциала здесь фигурирует резидуал. Для стрелки $g: c \odot a \rightarrow b$ стрелку $\hat{g}: c \rightarrow a \Rightarrow b$ мы получаем из определения резидуала, а используя $1_a: a \rightarrow a$ переходим к стрелке $\hat{g} \odot 1_a$. Рассмотрим теперь стрелку $1_{a \Rightarrow b}: a \Rightarrow b \rightarrow a \Rightarrow b$. Из определения резидуала мы получаем стрелку $(a \Rightarrow b) \odot a \rightarrow b$, которая и будет стрелкой ev , замыкая нашу диаграмму. Поскольку конечная полнота следует из 2.1(1), то RN -категория будет декартово замкнутой относительно бифунктора $\odot$. Если бы резидуал $\Rightarrow$ определялся относительно произведений, то тогда бы имели просто декартову замкнутость, а не замкнутость относительно $\odot$. ■

Здесь и в дальнейшем ■ означает конец доказательства.

3. Интерпретация регулярных пропозициональных исчислений

3.1. В работе [2] пропозициональной регулярной логикой называется любое множество $L \subseteq F_n$ (где F_n – множество формул, содержащих конъюнкцию, дизъюнкцию, импликацию и отрицание в качестве логических связок), удовлетворяющее условиям: для любых $\alpha, \beta, \gamma \in F_n$

- Л1. $(\alpha \rightarrow \alpha) \in L$,
- Л2. $(\alpha \rightarrow \beta) \in L$ влечет $((\beta \rightarrow \gamma) \rightarrow (\alpha \rightarrow \gamma)) \in L$,
- Л3. $(\alpha \rightarrow \beta) \in L$ влечет $((\gamma \rightarrow \alpha) \rightarrow (\gamma \rightarrow \beta)) \in L$,
- Л4. $\alpha \in L$ и $(\alpha \rightarrow \beta) \in L$ влечет $\beta \in L$,
- Л5. $\alpha \in L$ влечет $((\alpha \rightarrow \beta) \rightarrow \beta) \in L$,
- Л6. $((\alpha \& \beta) \rightarrow \alpha) \in L$,
- Л7. $((\alpha \& \beta) \rightarrow \beta) \in L$,
- Л8. $((\alpha \rightarrow \beta) \& (\alpha \rightarrow \gamma)) \rightarrow (\alpha \rightarrow (\beta \& \gamma)) \in L$,
- Л9. $\alpha \in L$ и $\beta \in L$ влечет $(\alpha \& \beta) \in L$,
- Л10. $(\alpha \rightarrow (\alpha \vee \beta)) \in L$,

Л11. $(\beta \rightarrow (\alpha \vee \beta)) \in L$,

Л12. $((\alpha \rightarrow \gamma) \& (\beta \rightarrow \gamma)) \rightarrow ((\alpha \vee \beta) \rightarrow \gamma) \in L$,

Л13. $((\alpha \& (\beta \vee \gamma)) \rightarrow ((\alpha \& \beta) \vee (\alpha \& \gamma))) \in L$,

Л14. $((\alpha \rightarrow \neg \beta) \rightarrow (\beta \rightarrow \neg \alpha)) \in L$,

Л15. $(\neg \neg \alpha \rightarrow \alpha) \in L$,

Л16. $((\alpha \& \neg \beta) \rightarrow \neg (\alpha \rightarrow \beta)) \in L$,

Л17. Если $\alpha \in L$ и β есть результат подстановки некоторых формул вместо переменных в формулу α , то $\beta \in L$.

Пропозициональное исчисление называется регулярным пропозициональным исчислением, если множество выводимых в этом исчислении формул составляет регулярную логику. Рассмотрим регулярные пропозициональные исчисления, в которых в качестве аксиом взяты одна или несколько из следующих формул:

A1. $(\alpha \rightarrow (\alpha \rightarrow \beta)) \rightarrow (\alpha \rightarrow \beta)$

A2. $(\alpha \rightarrow \beta) \rightarrow ((\beta \rightarrow \gamma) \rightarrow (\alpha \rightarrow \gamma))$

A3. $(\alpha \rightarrow (\beta \rightarrow \gamma)) \rightarrow (\beta \rightarrow (\alpha \rightarrow \gamma))$

3.2. Регулярное пропозициональное исчисление с аксиомами A1 и A2 представляет собой исчисление E строгой импликации. Добавляя сюда A3, мы получаем исчисление R релевантной импликации.

3.3. Словарь перевода высказываний в RN-категории будет представлять собой следующий список:

α	β	$\alpha \vee \beta$	$\alpha \& \beta$	$\neg \alpha$	$\alpha \rightarrow \beta$
a	b	$[a, b]$	$\langle a, b \rangle$	$\neg a$	$a \Rightarrow b$

Если a есть перевод аксиомы или общезначимой релевантной формулы в RN-категорию $\mathcal{E}$, то это означает, что $1 \rightarrow a$ есть стрелка в $\mathcal{E}$. Однако по определению резидуала 2.2 существование стрелки $1 \rightarrow a \Rightarrow b$ означает, что $1 \otimes a \Rightarrow b$ есть стрелка в $\mathcal{E}$. Поскольку же по 2.1. (iv) $1 \otimes a \cong a$, то отсюда следует, что если, например, перевод аксиомы A1 есть

$$(a \Rightarrow (a \Rightarrow b)) \Rightarrow (a \Rightarrow b),$$

то это эквивалентно

$$a \Rightarrow (a \Rightarrow b) \rightarrow (a \Rightarrow b).$$

3.4. Применяя подобные преобразования к списку аксиом, мы получаем следующий список категорных условий:

C1. $a \Rightarrow (a \Rightarrow b) \rightarrow a \Rightarrow b$

C2. $a \Rightarrow b \rightarrow (b \Rightarrow c) \Rightarrow (a \Rightarrow c)$

C3. $a \Rightarrow (b \Rightarrow c) \rightarrow b \Rightarrow (a \Rightarrow c)$.

Условия C1-C3 в чисто RN-категорном виде переписутся следующим образом:

$$\Gamma 1. \quad a \circ b \rightarrow (a \circ b) \circ b$$

$$\Gamma 2. \quad (a \circ b) \circ c \rightarrow b \circ (a \circ c)$$

$$\Gamma 3. \quad (a \circ b) \circ c \rightarrow (a \circ c) \circ b.$$

Что касается условий Л11-Л17, то их категорный перевод не приводит к каким-либо новым условиям на RN-категории, в чем легко можно убедиться, переводя на категорный язык соответствующие выкладки из [2, с. 452].

4. Алгебраические свойства

4.1. ОПРЕДЕЛЕНИЕ. Пусть $\mathcal{E}_{RN}$ и $\mathcal{E}'_{RN}$ будут RN-категориями (с бифункторами $\circ$ и $\circ'$ и функторами $\mathbb{A}$ и $\mathbb{A}'$ соответственно). RN-функтор $\mathfrak{F}: \mathcal{E}_{RN} \rightarrow \mathcal{E}'_{RN}$ есть функтор, обладающий следующими свойствами (для $a, b, 1$ из $\mathcal{E}_{RN}$ и $1'$ соответственно):

- (i) $\mathfrak{F}1 \cong 1'$,
- (ii) $\mathfrak{F}[a, b] \cong [\mathfrak{F}a, \mathfrak{F}b]$,
- (iii) $\mathfrak{F}\langle a, b \rangle \cong \langle \mathfrak{F}a, \mathfrak{F}b \rangle$,
- (iv) $\mathfrak{F}(a \circ b) \cong \mathfrak{F}a \circ \mathfrak{F}b$,
- (v) $\mathfrak{F}\mathbb{A} = \mathbb{A}'\mathfrak{F}$.

Доказательства следующих двух предложений получаются путем соответственной категорной модификации алгебраических результатов из [2], основанных на понятии стримпланы, RРg-пространства и импликативно-негативного группоида.

4.2. ПРЕДЛОЖЕНИЕ. Каждая RN-категория имеет полное расширение (полнота означает здесь существование бесконечных произведений и копроизведений).

НАБРОСОК ДОКАЗАТЕЛЬСТВА. Пусть $\mathcal{U}$ будет RN-категорией и пусть $\mathcal{G}_1$ будет множеством

$$\mathcal{G}_1 = \{x: 1 \rightarrow x \text{ есть стрелка в } \mathcal{U}\}.$$

Рассмотрим множество $\mathcal{U}_0$ фильтров на $\mathcal{U}$, т.е. таких $\mathcal{U} \subseteq \mathcal{U}$, что

(а) если $x \in \mathcal{U}$ и $x \rightarrow y$ есть стрелка в $\mathcal{U}$, то $y \in \mathcal{U}$:

(б) $\mathcal{U}$ замкнуто относительно произведений, т.е. $x, y \in \mathcal{U}$ влечет $\langle x, y \rangle \in \mathcal{U}$.

Обозначим теперь через $\mathcal{U}_1$ семейство всех простых фильтров на $\mathcal{U}$ (т.е. таких $\mathcal{U} \in \mathcal{U}_0$, что если $[x, y] \in \mathcal{U}$, то $x \in \mathcal{U}$, либо $y \in \mathcal{U}$). Пополняя $\mathcal{U}_1$ до $\mathcal{U}_2 = \mathcal{U}_1 \cup \mathcal{U}$ и определяя на $\mathcal{U}_2$ стрелки как отношение включения, получаем категорию предпорядка $\mathcal{U}'$. При этом множество $\mathcal{U}_2$ будет плотным, что означает, что $(\forall x, y \in \mathcal{U})(\forall w \in \mathcal{U}_2)$ ($w \rightarrow x \circ y$ есть стрелка в $\mathcal{U}$, если $((\exists u \in \mathcal{U}_2)(u \rightarrow x \text{ и } w \rightarrow u \circ y \text{ есть стрелки в } \mathcal{U}))$ и $(\exists v \in \mathcal{U}_2)(v \rightarrow y \text{ и } w \rightarrow x \circ v \text{ есть стрелки в } \mathcal{U})$). Произведения и копроизведения на $\mathcal{U}'$ определяются как пересечения и объединения простых фильтров, а отображение

$$*: \mathcal{U}_1 \times \mathcal{U}_2 \rightarrow \mathcal{U}_1 * \mathcal{U}_2 = \{z: \exists y \in \mathcal{U}_2 (y \rightarrow z \in \mathcal{U}_1)\},$$

представляющее собой ковариантный бифунктор вместе с

$$1_{U'} = \bigcap_{U_1 \subseteq U \subseteq U_2} U$$

приводят к тому, что U' становится RN-категорией. Чтобы превратить ее в RN-катеорию, определяем отображение

$$\mathbb{N}: U \rightarrow \mathbb{N}U = \{x: x \in U \text{ и } \mathbb{N}x \notin U\},$$

которое дает нам контравариантный $\mathbb{N}$ -функтор.

Таким образом приходим к заключению, что полное расширение определяется парами (q, U) , где $q \in U$ и U есть простой ультра-фильтр. ■

4.3. ПРЕДЛОЖЕНИЕ. Пусть $U, \mathfrak{B}, \mathfrak{C}$ будут RN-категориями, где $\mathfrak{B}$ есть расширение U и $\mathfrak{C}$ есть полная категория. Любой RN-функтор $\mathfrak{J}: U \rightarrow \mathfrak{C}$ может быть расширен до RN-функтора $\mathfrak{H}: \mathfrak{B} \rightarrow \mathfrak{C}$.

НАБРОСОК ДОКАЗАТЕЛЬСТВА. Определим семейство пар $(\mathfrak{E}, \mathfrak{G})$, где $\mathfrak{E}$ есть подкатегория $\mathfrak{B}$, а $\mathfrak{G}$ есть RN-функтор, расширяющий $\mathfrak{J}$. Применяя лемму Цорна, получаем максимальный элемент $(\mathfrak{B}', \mathfrak{H})$. Если $\mathfrak{B} \neq \mathfrak{B}'$, то возьмем $b \in \mathfrak{B} \setminus \mathfrak{B}'$ и сконструируем $\mathfrak{B}'' = \{[<b, p>, <\mathbb{N}b, q>]: p, q \in \mathfrak{B}'\}$, которая будет представлять собой RN-катеорию, противореча максимальной $\mathfrak{B}'$ ($[<b, p>, <\mathbb{N}b, q>] = (b \cap q) \cup (\mathbb{N}b \cap q)$, т.е. опять простой ультра-фильтр). ■

5. Пропозициональное исчисление

Далее везде $\mathfrak{E}$ будет означать RN-катеорию.

5.1. Пусть p есть объект $\mathfrak{E}$ и пусть $\mathfrak{G}_p$ обозначает категорию

$$\mathfrak{G}_p = \{x: p \rightarrow x \text{ есть стрелка в } \mathfrak{E}\},$$

чьи стрелки те же, что и в $\mathfrak{E}$. Если определить $\circ_p$ как $\circ_p: \mathfrak{G}_p \times \mathfrak{G}_p \rightarrow \mathfrak{G}_p$ посредством $x \circ_p y = [x \circ y, p]$, то нетрудно видеть, что $\circ_p$ будет представлять собой ковариантный бифунктор, такой, что пара $(\mathfrak{G}_p, \circ_p)$ становится R-категорией с теми же произведениями и копроизведениями, что и в $\mathfrak{E}$. Если же мы теперь определим $\mathbb{N}_p: \mathfrak{G}_p \rightarrow \mathfrak{G}_p$ как $\mathbb{N}_p x = [\mathbb{N}x, p]$, то мы получим контравариантный функтор $\mathbb{N}_p$ и тройка $(\mathfrak{G}_p, \circ_p, \mathbb{N}_p)$ становится RN-категорией.

5.2. Пусть $\mathfrak{G}$ будет непустым семейством элементов $\mathfrak{E}$. Для $n \geq 2$ определяем

$$\langle \mathfrak{G}_n \rangle = \{ \langle p_1, \dots, p_n \rangle: p_i \in \mathfrak{G}, i=1, 2, 3, \dots, n \}$$

и определяем

$$\langle \mathfrak{G} \rangle = \bigcup \{ \langle \mathfrak{G}_n \rangle: n \geq 2 \}, \quad (\mathfrak{G}) = \bigcup \{ \mathfrak{G}_p: p \in \langle \mathfrak{G} \rangle \}.$$

Следующие свойства очевидны:

5.2.1. $\mathfrak{G} \subseteq (\mathfrak{G})$.

5.2.2. Если $\mathfrak{G} = \{p\}$, то $(\mathfrak{G}) = \mathfrak{G}_p$.

5.2.3. $1 \in (\mathfrak{G})$ тогда и только тогда, когда существуют объекты $p_1, \dots, p_n \in \mathfrak{G}$, такие, что $\langle p_1, \dots, p_n \rangle \geq 1$.

5.2.4. Если $p, q \in (\mathfrak{G})$, то $\langle p, q \rangle \in (\mathfrak{G})$.

5.2.4. Если $p \in (\mathcal{G})$, то $\mathcal{G}_p \subseteq (\mathcal{G})$.

Отметим, что $(\mathcal{G})$ здесь не что иное, как RN-категорный перевод простых фильтров в импликативных группоидах из [2].

5.3. Отношение $\sim_{\mathcal{G}}$, определяемое как

$p \sim_{\mathcal{G}} q$ тогда и только тогда, когда $p \Rightarrow q, q \Rightarrow p \in (\mathcal{G})$,
есть отношение конгруэнтности, приводящее нас к фактор-категории $\mathcal{E}/(\mathcal{G})$. Если мы определим в $\mathcal{E}/(\mathcal{G})$

$\bar{x} \rightarrow \bar{y}$ есть стрелка тогда и только тогда, когда $x \rightarrow y \in (\mathcal{G})$,
то $\mathcal{E}/(\mathcal{G})$ становится категорией предпорядка. Если мы теперь определим $\circ_{\mathcal{G}}: \mathcal{E}/(\mathcal{G}) \times \mathcal{E}/(\mathcal{G}) \rightarrow \mathcal{E}/(\mathcal{G})$ посредством $\bar{x} \circ_{\mathcal{G}} \bar{y} = \overline{x \circ y}$ и $\mathbb{I}_{\mathcal{G}}: \mathcal{E}/(\mathcal{G}) \rightarrow \mathcal{E}/(\mathcal{G})$ посредством $\mathbb{I}_{\mathcal{G}} \bar{x} = \overline{\mathbb{I}x}$, то $\circ_{\mathcal{G}}$ и $\mathbb{I}_{\mathcal{G}}$ есть ковариантный бифунктор и контравариантный функтор соответственно, а тройка $(\mathcal{E}/(\mathcal{G}), \circ_{\mathcal{G}}, \mathbb{I}_{\mathcal{G}})$ есть RN-категория с $\bar{1}$ в качестве левой единицы R-категории и произведениями $\langle \bar{x}, \bar{y} \rangle_{\mathcal{G}} = \overline{\langle x, y \rangle}$ и копроизведениями $[\bar{x}, \bar{y}]_{\mathcal{G}} = \overline{[x, y]}$ соответственно.

Справедливо следующее предложение:

5.4. ПРЕДЛОЖЕНИЕ. $\mathbb{J}: \mathcal{E} \rightarrow \mathcal{E}/(\mathcal{G})$, определенный как $\mathbb{J}x = \bar{x}$, есть RN-функтор.

5.5. ОПРЕДЕЛЕНИЕ. $(\mathcal{G})$ является максимальным, если не существует $\mathcal{G}' \subseteq \mathcal{G}$, такого, что $(\mathcal{G}) \subset (\mathcal{G}') \subset \mathcal{E}$.

5.6. Свойства $(\mathcal{G})$ позволяют интерпретировать его как множество доказуемых высказываний теории. Элементы $\mathcal{G}$ получают в этом случае имя RN-аксиом и рассматриваются как образующие множества $(\mathcal{G})$, аналогично тому, как аксиомы генерируют доказуемые высказывания (формулы). В роли правильно построенных формул (ппф) фигурирует множество объектов категории $\mathcal{E}$.

5.6.1. ОПРЕДЕЛЕНИЕ. RN-категорная интерпретация релевантной логики представляет собой пару $(\mathcal{E}, (\mathcal{G}))$, описывающую множество всех ппф и множество доказуемых следствий.

5.6.2. RN-логика $(\mathcal{E}, (\mathcal{G}))$ непротиворечива (синтаксически), если $(\mathcal{G}) \neq \mathcal{E}$.

5.6.3. RN-логика $(\mathcal{E}, (\mathcal{G}))$ полна (синтаксически), если для любого RN-высказывания r либо $r \in (\mathcal{G})$ либо $\mathbb{I}r \in (\mathcal{G})$, но не одновременно. Это эквивалентно тому факту, что либо $r \sim_{\mathcal{G}} 1$ либо $\mathbb{I}r \sim_{\mathcal{G}} 1$.

5.6.4. В случае конечного числа аксиом (которые могут быть сведены к одной, представляющей собой их конъюнкцию) мы имеем $\mathcal{G} = \{p_1, \dots, p_g\}$ и $(\mathcal{G}) = \mathcal{G}_p$ с $p = \langle p_1, \dots, p_n \rangle$ и справедливы следующие утверждения:

$(\mathcal{E}, \mathcal{G}_p)$ непротиворечива, если $1 \rightarrow p$ есть стрелка в $\mathcal{E}$,

$(\mathcal{E}, \mathcal{G}_p)$ полна тогда и только тогда, когда p является минимальным в упорядочении, индуцированном в $\mathcal{E}$ предупорядоченной природой стрелок, и

$(\mathcal{E}, (\mathcal{G}))$ непротиворечива тогда и только тогда, когда $(\mathcal{E}, \mathcal{G}_p)$ непротиворечива для всех $p \in (\mathcal{G})$ (по 5.2.3). Последний результат можно рассматривать как своеобразный вариант теоремы компактности.

6. Семантика

6.1. Пусть пара $(\mathcal{E}, (\mathcal{G}))$ представляет собой перевод релевантной логики, т.е. $(\mathcal{E}, (\mathcal{G}))$ есть RN-логика и пусть $\mathfrak{B}$ будет нетривиальной RN-категорией.

6.1.1. **ОПРЕДЕЛЕНИЕ.** $\mathfrak{B}$ -оценка представляет собой RN-функтор $v: \mathcal{E} \rightarrow \mathfrak{B}$. Элемент $p \in \mathcal{E}$ будет истинным по отношению к v , если $vp \in \mathcal{G}_1^{\mathfrak{B}}$, где $\mathcal{G}_1^{\mathfrak{B}} = \{x: 1 \rightarrow x \text{ есть стрелка в } \mathfrak{B}\}$. RN-логика $(\mathcal{E}, (\mathcal{G}))$ семантически непротиворечива, если существует оценка v , такая, что $p \in \mathcal{G}$ влечет $vp \in \mathcal{G}_1^{\mathfrak{B}}$.

При выполнении этих условий легко доказать, что $vp \in \mathcal{G}_1^{\mathfrak{B}}$ для всех $p \in (\mathcal{G})$, а также, что функтор $\bar{v}: \mathcal{E}/(\mathcal{G}) \rightarrow \mathfrak{B}$, определенный как $\bar{v}p = vp$, будет RN-функтором.

6.1.2. **ОПРЕДЕЛЕНИЕ.** Моделью $(\mathcal{E}, (\mathcal{G}))$ является $\mathfrak{B}$ -оценка v , такая, что $vp \in \mathcal{G}_1^{\mathfrak{B}}$ для всех $p \in \mathcal{G}$.

Таким образом, суммируя 5.1.1 и 5.1.2, получаем, что $(\mathcal{E}, (\mathcal{G}))$ является семантически непротиворечивой тогда и только тогда, когда $(\mathcal{E}, (\mathcal{G}))$ имеет модель.

6.1.3. **ТЕОРЕМА.** $(\mathcal{E}, (\mathcal{G}))$ семантически непротиворечива тогда и только тогда, когда $(\mathcal{G})$ есть собственное множество.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Пусть $(\mathcal{E}, (\mathcal{G}))$ будет семантически непротиворечива и пусть v будет ее моделью. Поскольку $v1 \neq 1'$ (по свойству $\mathbb{N}$ -функтора) и поскольку $\neg(1 \neq 1)$ ввиду того, что $\mathfrak{B}$ нетривиальна, то $1 \notin (\mathcal{G})$ и, следовательно, $(\mathcal{G})$ является собственным. Наоборот, пусть $(\mathcal{G})$ будет собственным. Доказательство проводим как в [2]. Сконструируем модель $(\mathcal{E}, (\mathcal{G}))$. Допустим, что существует $\mathcal{G}' \subseteq \mathcal{E}$, такое, что $(\mathcal{G}) \subseteq (\mathcal{G}')$, где $(\mathcal{G}')$ будет максимальным (собственным). Определим теперь

$$\mathfrak{H} = \{(\mathfrak{D}): (\mathcal{G}) \subseteq (\mathfrak{D}) \neq \mathcal{E}\}.$$

$\mathfrak{H}$ непусто, ибо $(\mathcal{G}) \in \mathfrak{H}$. Более того, если $(\mathfrak{D}_\alpha)$ есть семейство элементов $\mathfrak{H}$, линейно упорядоченное по включению, то тогда $\bigcup (\mathfrak{D}_\alpha) = (\bigcup (\mathfrak{D}_\alpha))$. По лемме Цорна $\mathfrak{H}$ имеет максимальный элемент $(\mathcal{G}')$, что означает, что либо $p \in (\mathcal{G}')$, либо $\mathbb{N}p \in (\mathcal{G}')$ для всех $p \in \mathcal{E}$. Теперь определяем отображение $v: \mathcal{E} \rightarrow \mathfrak{B}$ условием $vp \in \mathcal{G}_1^{\mathfrak{B}}$, если $p \in (\mathcal{G}')$, либо $vp \notin \mathcal{G}_1^{\mathfrak{B}}$, если $\mathbb{N}p \in (\mathcal{G}')$. Это дает нам RN-функтор, который и является моделью $(\mathcal{E}, (\mathcal{G}))$.

6.1.4. **ОПРЕДЕЛЕНИЕ.** $(\mathcal{E}, (\mathcal{G}))$ семантически полна, если выполняется следующее условие: p доказуемо (т.е. $p \in (\mathcal{G})$) тогда и только тогда, когда p истинно во всех моделях $(\mathcal{E}, (\mathcal{G}))$.

6.1.5. **ТЕОРЕМА.** $(\mathcal{E}, (\mathcal{G}))$ семантически полна.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Очевидно, что если $p \in (\mathcal{G})$, то $vp \in \mathcal{G}_1^{(-)}$ для всех оценок v из 6.1.1. Наоборот, пусть $p \in \mathcal{E}$ будет истинным во всех моделях $(\mathcal{E}, (\mathcal{G}))$. Определим множество $(\mathcal{G} \cup \{\mathbb{N}p\})$. Если $(\mathcal{G} \cup \{\mathbb{N}p\}) \neq \mathcal{E}$, то RN-логика $(\mathcal{E}, (\mathcal{G} \cup \{\mathbb{N}p\}))$ будет непротиворечивой и будет иметь модель v , которая ввиду $(\mathcal{G}) \subseteq (\mathcal{G} \cup \{\mathbb{N}p\})$ должна также быть моделью $(\mathcal{E}, (\mathcal{G}))$. Отсюда получаем противоречие: $v\mathbb{N}p \in \mathcal{G}_1^{(-)}$,

поскольку $\mathbb{N}p \in (\mathcal{G} \cup \{\mathbb{N}p\})$: $\forall \mathbb{N}p \cong \mathbb{N}p \in \mathcal{G}_1^{(-)}$ по свойствам RN- и $\mathbb{N}$ -функторов соответственно. Поэтому $(\mathcal{G} \cup \{\mathbb{N}p\}) = \mathcal{G}$, и отсюда $p \in (\mathcal{G} \cup \{\mathbb{N}p\})$. Тогда существует такое $q \in \mathcal{G}$, что $[q, \mathbb{N}p] \rightarrow p$ есть стрелка. Но отсюда ввиду $q \rightarrow [q, \mathbb{N}p]$ получаем стрелку $q \rightarrow p$, следовательно $p \in \mathcal{G}_q \subseteq \mathcal{G}$. ■

Литература

1. Гольдблатт Р. Топосы. Категорный анализ логики. М., 1983.
2. Максимова Л.Л. Структуры с импликацией // Алгебра и логика. 1973. т.12. №.4. С.445-467.
3. Riscos A., Laita L.M. N-categories in logic // Zeitschr. Math. Log. und Grundl. Math. - 1987. Bd.33. №.6. P.507-516.

СЛАБЫЕ СЛЕДСТВИЯ И ПАРАДОКСЫ СЛЕДОВАНИЯ

Принадлежащая автору идея различения сильных и слабых следствий из данных посылок позволяет разбить на два направления все разнообразные подходы к построению непарадоксальных теорий логического следования. Одно из них, сохраняя классические принципы, позволяющие получать слабые следствия, устраняет парадоксы за счет ограничений на использование закона непротиворечия. Другое, обходясь без таких ограничений, достигает того же результата путем отказа от указанных принципов.

В данной работе я продолжаю исследовать те эвристические возможности, которые представляет различение сильных и слабых логических следствий из данных посылок [см.2-4]. На этот раз речь пойдет о связи слабых следствий с парадоксами следования. Точное определение сильных и слабых следствий будет приведено ниже, а пока сделаем несколько необходимых замечаний о парадоксах следования.

Достаточным условием, при котором некоторая логическая теория T будет считаться парадоксальной относительно выводимости (следования), является верность в T таких утверждений вида $A \supset B$, в которых, сохраняя их верность, A или B можно заменить любым произвольным предложением.

Заметим, что речь идет именно об утверждениях вида $A \supset B$, а не о $A \equiv B$. Последние понимаются как утверждения о том, что (в рамках принятой для T истинностной семантики) невозможна ситуация, когда A - истинно, а B - нет. При этом отнюдь не каждому верному в указанном смысле утверждению $A \supset B$ в теории T должно соответствовать утверждение $A \supset B$. Иными словами, возможно такое построение теории (как это делается, например, в релевантной логике), когда при логически противоречивом A или тавтологическом B утверждение $A \supset B$ будет истинным, а $A \supset B$ не является верным. Это означает, в частности, что логическое следование в T понимается иначе, чем классическое.

Подчеркнем еще раз, что достаточным условием парадоксальности теории T мы считаем наличие верных в силу ее утверждений $A \supset B$, которые сохраняют свою верность при замене A или B на произвольное предложение C . Мы не станем сейчас обсуждать вопрос, будет ли считаться парадоксальной относительно выводимости теория, в которой отсутствуют утверждения указанного типа. Отметим только, что этот вопрос представляет интерес в том случае, когда семантика такова, что имеют место утверждения $A \supset B$, верные для произвольных A или B . И тогда ответ зависит от того, за счет чего достигнуто отвержение в T явно парадоксальных утверждений $A \supset B$ обсуждаемого здесь вида. В данном случае я хочу обсудить причины возникновения явных парадоксов. Точнее,

причины, в силу которых принятие некоторого класса утверждений о выводимости, в корректности каждого из которых по отдельности трудно усомниться хотя бы в силу их оправданного и широкого практического использования, приводит к вынужденному принятию явно парадоксальных принципов следования.

Исследователь, желающий избежать в своей логической теории явных парадоксов, может добиться этого множеством способов. Однако каждый из них вынужденно связан с отказом от тех или иных логических принципов, существенно ослабляющим дедуктивную силу теории. За избежание парадоксов приходится платить. Каждый исследователь, жертвуя тем или иным принципом, подводит, по крайней мере стремится подвести, под это некоторое уместное обоснование, которое, как правило, редко убеждает других исследователей.

Чтобы сделать дальнейшее обсуждение более строгим, определим, что мы будем называть логическим выводом и логическими следствиями из данных посылок.

D1. Конечная последовательность предложений

$B_1, \dots, B_m$ ($m \geq 1$) называется выводом предложения B из посылок $\Gamma = \{A_1, \dots, A_n\}$ ($n \geq 1$) в некоторой теории T , если и только если выполняются два следующих условия:

(1) Предложение B совпадает с B_m , и каждое B_i ($i \leq m$) есть или одна из посылок A_j ($j \leq n$), или одна из теорем теории T , или получается из двух предшествующих предложений последовательности по правилу MP (модус поненс) или по правилу адъюнкции, позволяющему соединить два предшествующих предложения последовательности знаком конъюнкции (союзом "и").

(2) Предложение B_m может быть отмечено звездочкой в результате исключительно следующей процедуры: (а) если B_i ($i \leq m$) есть одна из посылок, то B_i отмечается звездочкой; (б) если B_i получено из двух предшествующих предложений по правилу MP , то B_i отмечается звездочкой; (в) если B_i получено по правилу адъюнкции, то B_i отмечается звездочкой только когда оба предложения, к которым было применено данное правило, отмечены звездочкой.

Тот факт, что существует вывод B из Γ в теории T , символически записывается как $\Gamma \vdash_T B$ (знак T , когда это не ведет к недоразумениям, обычно опускается). Предложение B называется в этом случае (логическим) следствием из Γ в теории T .

Легко видеть, что от стандартного определения вывода приведенное отличается дополнительным пунктом (2). Принятие последнего обусловлено попыткой обеспечить связь между выводимым предложением и посылками. По идее пункт (2) должен исключать возможность поставить на место выводимого предложения B произвольную теорему из T . Оказывается, однако, что в том случае, когда в язык теории входит материальная импликация и для нее считается верным правило MP , принятие пункта (2) становится бесполезным. Он, этот пункт, просто напросто не работает, ибо в силу верного для материальной импликации принципа $B \supset A \supset B$ мы

всегда имеем $A \supset B$, где A — одна из посылок Γ , а B — произвольная теорема из T . А это дает возможность в соответствии с (2) отметить B звездочкой.

Таким образом, в рамках теорий, базирующихся на, скажем, классической логике, пункт (2) становится тривиально выполняемым, и определение $D1$ дает тот же класс утверждений о выводимости, что и стандартное определение, правда, с одним исключением. В соответствии с $D1$ не является верным никакое утверждение вида $\Gamma \vdash B$ с пустым Γ . Иными словами, утверждение вида $\vdash B$ ни в какой теории получить нельзя, так как при пустом списке посылок мы лишены возможности отметить B звездочкой. Таким образом, никаких следствий из пустого списка посылок получить невозможно.

Чтобы сохранить за выражением $\vdash B$ осмысленность, будем рассматривать его как сокращение для утверждения $\Gamma \vdash B$, где Γ состоит исключительно из теорем соответствующей теории, и интерпретировать как утверждение о том, что B есть теорема этой теории. Заметим, что верность $\vdash B$ в общем случае не означает верности $\Gamma \vdash B$, где Γ — непусто. Вместе с тем при непустом Γ при верности $\Gamma \vdash B$ всегда верно любое $\Gamma, A \vdash B$. И еще одно замечание. Верность $\Gamma, A \vdash B$ в общем случае не влечет верности $\Gamma \vdash B$, даже если A — теорема.

Вообразим некоторый вывод, в котором одна из посылок является заведомо ложной. Пусть, скажем, это есть отрицание одной из теорем теории. К таким выводам обращаются, например, когда хотят доказать теорему от противного. Представьте теперь, что в процессе вывода вы будете опираться на самую указанную теорему или даже на другую теорему, но предполагающую верность первой. Формально никаких нарушений $D1$ при этом сделано не будет. Вместе с тем обоснованность такого вывода будет весьма сомнительной, так как, допустив неверность некоторого положения, вы теряете право на это положение опираться. Казалось бы, такое требование весьма банально, и нет необходимости его подчеркивать. В логике, однако, это требование, как бы ни казалось такое обстоятельство странным, в одном случае безотчетно нарушается. Об этом сейчас и пойдет речь.

Одним из фундаментальных для логики является закон, или, лучше говорить, принцип непротиворечия, в соответствии с которым не могут быть признаны верными одновременно предложение A и его отрицание $\sim A$. На этом принципе базируются многие законы логики. Так, например, именно на принципе непротиворечия основано умозаключение от $(A \vee B) \sim A$ к B . Продемонстрируем теперь, как, используя указанное умозаключение, можно вывести из противоречия все, что угодно. Пусть в качестве единственной посылки берется противоречие $A \cdot \sim A$. Тогда в классической логике имеет силу следующий вывод:

1. $A \cdot \sim A$ (посылки)
2. A (из 1)

- 3. $A \vee B$ (из 2)
- 4. $\sim A$ (из 1)
- 5. $(A \vee B) \sim A$ (из 3 и 4)
- 6. B (из 5).

Заметим, что именно такой вывод использовал Псевдо-Скотт (XIV в.), чтобы показать, что из конъюнкции противоречивых предложений: "Сократ существует" (A) и "Сократ не существует" ($\sim A$) следует любое предложение B , например, "Человек - осел" [6].

Авторы, отвергающие правомерность указанного вывода, стоят перед необходимостью указать, в чем он некорректен. И надо сказать, что нет ни одного шага вывода, который не подвергался бы сомнению тем или иным автором. Есть отвергающие уже первый шаг вывода на том основании, что из противоречия выводы делать вообще не имеет смысла. Есть авторы, для которых неприемлем переход от конъюнкции к ее составляющим и которые отвергают поэтому шаги 2 и 4. Для кого-то неправильным выглядит переход от 2 к 3, ибо переход от A к менее определенной ситуации A -или- B кажется им бессмысленным. Наконец, в релевантной логике не признается правомерность перехода от 5 к 6, так как такого рода умозаключение считается уместным только для естественно-языкового союза "или", но не для истинностно-функциональной дизъюнкции.

На самом деле этот вывод демонстрирует ту непоследовательность, о которой я говорил выше: он допускает в качестве посылки противоречие $A \cdot \sim A$ и одновременно включает умозаключение, которое само базируется на недопущении противоречия, причем в данном случае именно $A \cdot \sim A$, что и дает нам возможность осуществить переход от 5 к 6.

Мы предоставляем читателю убедиться, что любой вывод, демонстрирующий, что из противоречия можно получить все, что угодно, всегда на том или ином шаге опирается на принцип непротиворечия. Таким образом, использование этого принципа является необходимым условием получения произвольных следствий из противоречивых посылок.

Нам предстоит теперь обсудить вопрос о том, какие еще условия являются необходимыми для получения парадоксальных следствий. Для этого нам потребуется выделить среди всех возможных следствий из данных посылок те, которые мы будем называть слабыми.

С содержательной точки зрения под слабыми мы имеем в виду следствия, в которых извлеченная из посылок информация некоторым образом разбавляется, становится менее определенной.

С наиболее тривиальными случаями слабых следствий мы имеем дело, когда от более определенного утверждения A переходим к заведомо менее определенному A -или- B . Со слабыми следствиями мы имеем дело также, когда добавляем к антецеденту импликации некоторое дополнительное условие (т.е. умозаключаем от $A \rightarrow B$ к

$AC \rightarrow B$) или когда вместо выводимого из посылок общего утверждения берем более слабое частное, и т.п. Именно слабые следствия не дают, в частности, возможности привести никакого примера двух предложений, которые не имели бы общих логических следствий, так как одним из таких следствий всегда является дизъюнкция этих предложений, если даже в одном из них говорится о бодливой козе, а в другом об уравнении Шредингера.

Для простоты будем говорить в дальнейшем о предложениях, записанных в некотором символическом языке, т.е. о формулах. Все сказанное, однако, может быть легко адаптировано к предложениям обычного языка и обычным содержательным способам рассуждений. Начнем с введения одного чисто технического понятия.

D2. Будем называть формулу B нормальным логическим ослаблением формулы A в теории T , если и только если в этой теории имеет место $A \vdash B$, но не верно обратное $B \vdash A$, и при этом в B не входит никакая подформула C такая, что результат ее замены в B произвольной формулой всегда остается следствием из A (иначе говоря, B не содержит вхождений несущественных относительно A подформул).

Например, формулы $A(x)$, $\exists x A(x)$ являются нормальными логическими ослаблениями формулы $\forall x A(x)$, а формулы $A(x) \vee B$, $\forall x A(x) \vee \exists x A(x)$ таковыми не являются, так как один из дизъюнктивных членов в них может быть заменен произвольной формулой и они останутся при этом следствиями исходной формулы $\forall x A(x)$. Мы можем теперь ввести строгое различие сильных и слабых следствий из данных посылок.

D3. Пусть в некоторой теории T формула B есть следствие из посылок Γ , конъюнкция которых логически эквивалентна формуле A . Тогда B является слабым логическим следствием из Γ , если и только если существуют формулы C и D , являющиеся нормальными логическими ослаблениями формулы $\sim B$, ни одна из которых не эквивалентна их конъюнкции CD , и при этом в T имеет силу $C \vdash \sim A$. В противном случае B является сильным логическим следствием из Γ .

В чем состоит идея определения D3? Как уже говорилось, в слабых следствиях из данных посылок информация более неопределенна, более альтернативна, чем в сильных. Это означает, что отрицание слабого следствия (в отличие от отрицания сильного) должно, напротив, содержать в явном виде некоторую излишнюю постороннюю информацию. Убедиться в наличии такой информации позволяет существование у отрицания следствия двух нормальных ослаблений, уже только одно из которых противоречит посылкам, т.е. достаточно для их отвержения. Второе ослабление как раз и свидетельствует об излишней информации в отрицании следствия, что мы и стремимся выявить. Это второе ослабление может как влечь, так и не влечь отрицание посылок. Это в данном случае не имеет значения. Формально мы имеем следующее. Поскольку $A \vdash B$, то имеет место $\sim B \vdash \sim A$. Мы устанавливаем, что существует

$\sim B \vdash C \vee D$, где не имеют силы $C \vdash \sim B$, $D \vdash \sim B$, $C \vdash C \vee D$, $D \vdash C \vee D$. И при этом верно $C \vdash \sim A$. На этом основании мы приходим к выводу, что $\sim B$ содержит излишнюю по отношению к $\sim A$ информацию и поэтому B является слабым следствием из A , а стало быть и из Γ .

Объясним, почему мы требуем, чтобы C и D были нормальными ослаблениями формулы $\sim B$. Это требование связано с необходимостью исключить из числа допустимых ослаблений формул вида $\sim B \vee \sim E$, где E — следствие из Γ . Такое допущение не позволило бы нам сохранить в числе сильных следствий никакое следствие, более слабое, чем сами посылки.

И наконец скажем, почему нельзя ограничиться одним только указанием на то, что у $\sim B$ есть нормальное ослабление C , для которого $C \vdash \sim A$.

Дело в том, что определение не исключает возможности, что на месте C будет находиться непосредственно $\sim A$. Однако не во всех таких случаях B будет слабым следствием. Поэтому мы обязательно должны убедиться, что в $\sim B$ есть излишняя информация, на что указывает существование D .

Рассмотрим простейшие примеры. Возьмем посылку $\forall x P(x)$ и убедимся, что в классическом исчислении предикатов формула $\exists x P(x)$ в отличие от $P(y)$ является ее слабым следствием. Действительно, мы можем указать два нормальных ослабления отрицания формулы с квантором существования, а именно $\sim P(y)$ и $\sim P(x)$, и первое из них (как, впрочем, и второе, и это не важно) влечет отрицание исходной посылки. Что и требовалось показать. Для следствия $P(y)$, точнее, для его отрицания двух нормальных ослаблений, удовлетворяющих определению, найти нельзя.

Единственным таким ослаблением (если, конечно, не считать ему эквивалентных) будет отрицание самой посылки, но этого недостаточно, чтобы признать следствие слабым.

Тем же способом можно действовать в рамках содержательных рассуждений. Например, предложение "а есть родитель" будет слабым следствием из "а есть отец", так как у отрицания предложения-следствия есть два нормальных ослабления: "а не есть отец" и "а не есть мать", первое из которых противоречит посылке, а второе демонстрирует излишнюю информацию в отрицании следствия, позволяя считать его слабым. Легко убедиться в том важном обстоятельстве, что если вместо посылки "а есть отец" взять две эквивалентные ей посылки "а есть родитель" и "а есть мужчина", то результат будет тем же: предложение "а есть родитель" остается слабым следствием и из этих посылок, хотя и входит в их число.

Сформулируем некоторые общие положения, касающиеся свойств сильных и слабых следствий. Заметим, что в рамках релевантной логики приводимые утверждения имеют силу для любых посылок и следствий. Что же касается логик с экстенциональным пониманием следования (классическая логика и другие, содержащие парадоксальные принципы вывода), то для них нижеследующие положения

имеют силу при условии, что посылки непротиворечивы, а следствия тавтологичны.

(1) Если следствие логически эквивалентно конъюнкции посылок, из которых оно получено, то это следствие всегда является сильным.

(2) Если B есть сильное следствие из A , и C есть сильное следствие из B , то C есть сильное следствие из A . Таким образом, отношение "быть сильным следствием" транзитивно.

(3) Конъюнкция сильных следствий из некоторых посылок всегда есть сильное следствие из этих посылок.

(4) Если B есть слабое следствие из посылок Γ , то оно будет слабым из любых посылок $\langle \Gamma, \Delta \rangle$, включая $\langle \Gamma, B \rangle$.

(5) Существуют дедуктивно замкнутые классы посылок Γ и Δ , которые не имеют общих сильных следствий, т.е. никакое сильное следствие из Γ не является сильным следствием из Δ , и наоборот.

(6) В пропозициональной логике класс неэквивалентных сильных следствий из данных посылок всегда конечен.

Интересно заметить, что в классической логике любой список противоречивых посылок имеет в качестве своих сильных следствий только такие предложения, которые эквивалентны некоторому элементарному высказыванию или конъюнкции таких высказываний. Все другие следствия будут слабыми. Иными словами, противоречие выступает в данном случае в точности как конъюнкция всех элементарных высказываний. С другой стороны, тавтологичные следствия в классической логике являются слабыми из любых нетавтологичных посылок.

Сейчас, когда мы охарактеризовали слабые следствия, можно вернуться к проблеме появления парадоксов следования.

Вряд ли можно усомниться в корректности рассуждения, позволяющего из высказываний " α является родителем" и " α не является отцом" сделать вывод, что " α является матерью". Вместе с тем сами эти высказывания являются следствием из посылок " α есть отец" и " α не есть отец". Таким образом, мы вынуждены признать, что из противоречивых посылок " α есть отец" и " α не есть отец" следует, что " α есть мать". Следствие, конечно, выглядит нелепым. По своей структуре приведенное рассуждение аналогично тому, с помощью которого Псевдо-Скот осуществлял вывод предложения "Человек - осел" из противоречивых посылок о Сократе. В нашем рассуждении не было, правда, перехода от - "Сократ существует" к "Сократ существует, или Человек - осел". Вместо этого мы осуществили несомненно содержательно оправданный переход от " α - отец" к " α - родитель". Тем не менее по своей нелепости рассуждения весьма похожи. Общим в них является применение принципа непротиворечия к слабым следствиям из посылок. Понять, почему такое положение приводит к абсурдным последствиям, несложно. Слабое следствие из некоторой посылки, как это видно из определения D3, всегда представляет собой

альтернативное ослабление посылки. Если при этом среди посылок имеется отрицание ослабляемой посылки, то в силу принципа непротиворечия оказывается возможным исключить ослабленную посылку из числа альтернатив. При этом мы получим в качестве следствия то утверждение, за счет альтернативного присоединения которого посылка и была ослаблена. Чтобы стало более понятным, представим процедуру получения произвольных следствий из противоречий более грубо. Фактически она состоит в том, что к противоречию добавляется произвольная альтернатива, а потом это противоречие отбрасывается на основании принципа непротиворечия, оставляя в качестве "законного" следствия ту самую произвольно добавляемую альтернативу.

Представим теперь некоторую формальную теорию следования, вынуждающую признать, что из противоречия следует все, что угодно. Неудовлетворенность такого рода логическими теориями вызывается самыми различными соображениями, и мы не будем их здесь обсуждать. Тем более, что на этот счет многое сказано сторонниками релевантной и так называемой паранепротиворечивой логики. Поставим вопрос, какими могут быть пути перестройки теории следования, чтобы избежать парадоксальных утверждений?

Существование весьма большого числа теорий следования, альтернативных классической, как-будто бы говорит, что таких путей изрядное множество. Однако понимание реальных причин появления парадоксов дает возможность предположить, что исследователи вынуждены принять один из двух следующих подходов.

Первый связан с устранением из теории принципов, ответственных за появление слабых следствий, например, такого, как $A \rightarrow A \vee B$. Второй — с тем или иным ограничением на использование принципа непротиворечия.

Анализ существующих непарадоксальных систем следования или теорий импликации, какими бы соображениями и критериями (релевантности, уместности, непарадоксальности, существенности и т.п.) ни руководствовались их авторы, показывает, что они при построении своих систем всегда оказываются в русле первого или второго из названных подходов.

Причины такого положения я, надеюсь, сумел объяснить. Конечно же, в принципе возможны и другие подходы, но они неизбежно связаны с потерей тех или иных обоснованных принципов рассуждений. И все же второй подход, связанный с ограничением на принцип непротиворечия, с логической точки зрения является более оправданным. Дело в том, что здесь происходит отказ только от таких средств рассуждения, которые не являются универсальными в том смысле, что не являются правомерными в силу непоследовательности при выводах из противоречивых посылок. А это обстоятельство открывает возможность использовать эти отброшенные средства рассуждения в процессе вывода из непротиворечивых посылок. Тем самым дедуктивные средства теории могут быть в максимальной степени восстановлены. Как это сделать,

это уже вопрос техники. Возможно, удобнее всего использовать в рассуждениях закон непротиворечия как металогический принцип, каковым, я думаю, он на самом деле и является.

Мы можем тогда, получив на некотором шаге вывода из посылок, например, формулу $(A \vee B) \cdot \sim A$, перейти к B , не имея в теории, в рамках которой осуществлялся вывод, соответствующего принципа $(A \vee B) \cdot \sim A \rightarrow B$. Надо только делать указанный переход, связанный с использованием принципа непротиворечия, лишь при условии непротиворечивости посылок. Причем достаточно будет требовать не просто непротиворечивости посылок, но их противоречивости только относительно A и $\sim A$. Это даст возможность, с одной стороны, сохранить в теории вывода хорошо известное дизъюнктивное умозаключение, а, с другой — избежать каких бы то ни было неприятных последствий.

Я сосредоточил внимание на анализе парадоксов, связанных с выводимостью произвольных следствий из противоречия. Теперь несколько слов о парадоксах другого типа, утверждающих, что логически истинные предложения следуют из чего угодно. Причины их появления, по моему мнению, не требуют особого анализа, так как они есть просто результат применения принципа контрпозиции к парадоксам первого типа. Таким образом, задача их устранения, если удастся избежать первых, не требует каких-либо дополнительных усилий.

В заключение несколько замечаний о семантическом способе устранения парадоксов из теории следования. Речь идет о подборе такой семантики соответствующего языка, при которой в число верных утверждений вида $A \models B$ попадают только те, которым соответствуют непарадоксальные утверждения $A \rightarrow B$. Так, ряд авторов, например Е.К.Войшвилло [1], строят так называемую обобщенную семантику возможных миров для языка классической пропозициональной логики, допускающую существование противоречивых и неполных описаний состояний. Такой подход позволяет верифицировать и фальсифицировать любую формулу. Мы имеем поэтому мир, в котором можно приписать значение "истинно" противоречию, и значение "ложно" его отрицанию, и тем самым исключить утверждения о том, что противоречие семантически влечет любое высказывание, а тавтология влечется любым высказыванием. Достигается это фактически за счет того, что предлагаемая семантика вообще исключает существование логически истинных и логически ложных высказываний.

Нетрудно понять, что мы имеем дело в этом случае не с чем иным, как с определенным способом отказа от принципа непротиворечия, т.е. встаем на второй из указанных нами путей устранения парадоксов.

Заметим, что совершенно тот же результат дает предложенный мной семантический подход [5], который специально ориентирован на то, чтобы выделить из числа верных в силу обычной классической семантики утверждений вида $A \models B$ те, которые не опираются

на тот факт, что конъюнкция двух противоречивых высказываний всегда ложна, а дизъюнкция всегда истинна. Сохраняя классическую семантику, я выделяю класс истинных утверждений вида $A \equiv B$ для таких формул A и B , которые не содержат позитивных и негативных вхождений одинаковых переменных. При замыкании указанного класса относительно подстановки получится тот же класс истинных утверждений, что и в семантике обобщенных описаний состояний. При этом удастся обойтись без искусственного введения "невозможных возможных миров" и понять подлинные причины парадоксов. В частности, ту решающую роль, которую играет в парадоксальности формализованных теорий вывода универсальное использование принципа непротиворечия.

ЛИТЕРАТУРА

1. Войшвилло Е.К. Философско-методологические аспекты релевантной логики. М., 1988.
2. Сидоренко Е.А. О различных понятиях вывода из гипотез // Модальные и релевантные логики. М., 1982.
3. Сидоренко Е.А. Логическое следование и условные высказывания. М., 1983.
4. Сидоренко Е.А. О различии между доказательствами и выводами из истинных посылок // Неклассические логики и пропозициональные установки. М., 1987.
5. Сидоренко Е.А. Семантики релевантного следования без невозможных возможных миров // Неклассические логики. М., 1985.
6. Стяжкин Н.И. Формирование математической логики. М., 1967.

РЕЛЕВАНТНАЯ ЛОГИКА КАК ЭТАП РАЗВИТИЯ ЛОГИКИ, ЕЕ ФИЛОСОФСКОЕ И МЕТОДОЛОГИЧЕСКОЕ ЗНАЧЕНИЕ

Большинство авторов работ по релевантной логике рассматривают релевантную логику как некоторую ветвь или раздел современной логики подобно, например, модальной, нормативной, эпистемической и др. теориям. Специфика этого раздела, при такой его трактовке, состоит в построении дедуктивных систем, содержащих импликацию и лишенных парадоксов как материальной, так и строгой импликации. В настоящее время имеется уже довольно широкое множество таких систем, что явно указывает на отсутствие какого-либо единого понятия релевантности.

Предложено несколько критериев релевантности, не эквивалентных между собой и в некоторых случаях не соответствующих даже - исходному при возникновении релевантной логики - пониманию импликативной связи $A \rightarrow B$, как связи между A и B по содержанию.

Стоит обратить внимание и на другое обстоятельство, связанное непосредственно с только что отмеченным. При построении "релевантных" систем логики обычно удовлетворяются их обоснованием посредством формальных семантик. Смысловые содержания утверждений соответствующих языков при этом не выясняются. А значит и сами системы не могут характеризоваться по существу как логические. Они представляют собой чисто формальные логистические построения. Систему такого рода, строго говоря, нельзя рассматривать как некоторый аппарат дедукции, поскольку для построения исчисления в качестве такого аппарата нужно именно знание смыслов выражений его языка для осуществления переводов с естественного языка на данный формализованный и обратно. Если исходить из обычного понимания логики (по крайней мере символической логики), как теории дедукции, то при построении логических систем необходимо выяснение, по крайней мере, основных понятий такой теории - понятия логического следования и соответственной ему импликации как языкового аналога отношения следования. При этом, поскольку речь идет о релевантной логике, следование в системе должно быть именно релевантным. Однако среди логиков широко распространено мнение о том, что не существует никакого единого следования этого типа, что возможно чуть ли неограниченное множество таких отношений.

Мы исходим из того, что есть определенное отношение логического следования, для которого подходит название релевантного следования. Это отношение, судя по всему, имеется в виду в практике научного познания, когда говорят о выведении следствий из тех или иных посылок.

Отношение этого типа может быть, очевидно, определено для различных логических систем с "парадоксальным" понятием следования (каковым, например, кроме классической логики являются

интуиционистская, известные модальные системы и др.) с учетом, конечно, специфических смыслов высказываний соответствующих языков. Это значит, что задачу релевантной логики естественно видеть в "релевантизации" систем указанных типов. Как нам представляется, результатом именно такой "релевантизации" в данном случае классической логики, является известная система E (of Entailment). Ее можно представить как результат замены "парадоксального" классического следования, определенного для формул языка классической логики релевантным и далее расширением этого языка и соответственно форм дедукции за счет введения соответствующей релевантному следованию интенциональной импликации. При таком понимании задач релевантной логики ее естественнее трактовать не как некоторую ветвь современной логики, а как определенный новый этап в развитии логики как теории дедукции.

В дальнейшем мы сосредоточим внимание именно на описании перехода от классической логики к ее релевантной модификации¹, ограничиваясь, однако, в данной работе анализом следования лишь для формул классической логики (следования первого порядка или первой степени). Интересующее нас понятие релевантного следования для формул классической логики мы можем получить, исходя из известного и, по-видимому, даже общепринятого понятия следования.

Во-первых, является общепринятой характеристика этого отношения между высказываниями как не зависящего от значения дескриптивных терминов высказываний. Иначе говоря, речь идет об отношении между высказываниями, зависящем лишь от их логических форм, или, точнее, об отношении между логическими содержаниями высказываний. Во-вторых, важная и всеми логиками признаваемая характеристика отношения $A \Rightarrow B$ состоит в том, что при любых значениях дескриптивных терминов в логических формах A и B , B истинно всегда, когда истинно A . Естественно поставить вопрос, что именно обуславливает сохранение истинности от посылок к следствию? Выяснение его приводит к выявлению третьего существенного момента в характеристике рассматриваемого отношения: оно имеет место, если и только если логическое содержание B составляет часть логического содержания A . Именно из этой характеристики следования исходил В. Аккерман, являющийся по существу основоположником релевантной логики, а вслед за ним А. Андерсон и Н. Белнап. Задача состоит в том, чтобы выяснить само понятие логического содержания и критерий наличия указанного отношения между логическими содержаниями высказываний.

Ниже предлагаются решения этих вопросов, исходя из естест-

¹Подобная работа для интуиционистской логики осуществлена аспирантом кафедры логики философского факультета МГУ Я. Шрамко в его кандидатской диссертации 1990 г.

венного истолкования логического содержания как семантической информации, которую представляет логическая форма высказывания. Определяя отношение логического следования как отношение между высказываниями по информации, мы приходим сразу к обобщению понятия этого отношения за счет обобщения самого понятия информации. В результате возможно выделение ряда видов отношений логического следования (имеющих действительно место в некоторых известных логических системах). В качестве основного вида выделяется при этом отношение релевантного следования. Одним из видов, естественно, оказывается и отношение классической логики, причем выясняется источник парадоксальности этого понятия логического следования. В связи с выяснением источников парадоксов выявляется также неточность подразумеваемого в классической логике понимания логического содержания высказываний, и главное, неправильной представляется имеющая в ней место трактовка высказываний, выражающих законы логики, как тавтологических и универсально общезначимых. Кстати, как нам представляется, эта трактовка законов логики породила серьезные трудности в решении известной сформулированной Аристотелем проблемы будущих случайных событий. Изменение указанных представлений само по себе уже очевидно имеет важное философско-методологическое значение. К этому надо добавить выявление нового, неизвестного в классической логике типа законов логики, возникновение нового логического языка, пригодного для адекватного выражения законов науки. Наконец, немаловажно и то, что система Е, представляющая собой формальную экспликацию понятия релевантного следования, является естественной системой паранепротиворечивой логики. Будучи примененной в качестве логического аппарата при построении формализованных теорий она не ведет к их тривиализации при возникновении в них противоречий, и не приводит к тому же к выведению из специальных аксиом теорий логически истинных утверждений, не имеющих к ним отношения по содержанию.

Перейдем теперь к конкретному рассмотрению упомянутых вопросов. Начнем с рассмотрения классического понятия следования, которое также можно определить как отношение высказывания по информации. Отличие его от релевантного состоит лишь в трактовке самой этой информации. Будем исходить из обычного представления об информации высказывания как мере, обусловленного принятием этого высказывания за истину, ограничения некоторого исходного множества возможностей M . Эта трактовка находит отражение в оценке меры информации высказывания A — $i(A)$ — как величины: $-k \ln P(A)$. Последнее же тем меньше, чем уже множество M_A случаев M , в которых истинно A среди M — множества всех возможных случаев. Однако для логических целей, в частности для определения логического следования, знание меры информации высказывания не является обязательным. Здесь задача состоит лишь в умении устанавливать для высказываний A и B , составляет

ли информация одного часть информации другого. При этом имеется в виду "однородная", если можно так выразиться, информация этих высказываний, т.е. их информативность относительно некоторого (одного и того же) множества возможностей M . Учитывая это, можно использовать качественное понятие информации высказывания $A - J(A, M)$, характеризуя ее просто как пару $\langle M_A, M \rangle$. Эта пара как раз и указывает на то, каким образом ограничивается M при принятии A за истину. Чем больше информация высказывания A , тем уже M_A . Отсюда ясно, что утверждение "информация высказывания B составляет часть информации A относительно одного и того же множества возможностей M " равносильна $M_A \subseteq M_B$.

Поскольку нас интересует логическое содержание высказываний, и мы ограничиваемся пропозициональным языком, то при определении информации $J(A, M)$ в качестве M должно быть взято множество возможных миров или соответствующего ему множества описаний состояний, которые могут быть образованы из множества пропозициональных переменных $p_1, \dots, p_m$, входящих в A . Как известно, в классической логике описанием состояния (о.с.) называется конъюнкция $\tilde{p}_1 \& \tilde{p}_2 \& \dots \tilde{p}_m$ или множество $\langle \tilde{p}_1, \tilde{p}_2, \dots, \tilde{p}_m \rangle$, где $\tilde{p}_i (1 \leq i \leq m)$ есть p_i , или $\bar{p}_i$; при этом в любое о.с. входит каждое элементарное высказывание рассматриваемого языка без отрицания или с отрицанием, но не то и другое вместе. Нам удобнее будет трактовать о.с. α именно как множество $\langle \tilde{p}_1, \tilde{p}_2, \dots, \tilde{p}_m \rangle$. Каждое такое α есть описание некоторого возможного мира.

Нетрудно убедиться, что оценка информативности высказывания не изменяется при расширении M за счет добавления новых пропозициональных переменных, поскольку не изменяется отношение между M_A и M . Учитывая это, а также то, что при сравнении меры информации нескольких высказываний она должна определяться относительно одного и того же M (множество описаний состояний, составленных из совокупности пропозициональных переменных всех этих высказываний), полезно ввести понятие бесконечного описания состояния $\langle \tilde{p}_1, \tilde{p}_2, \dots, \tilde{p}_m, \dots \rangle$, имея в виду бесконечный перечень переменных в пропозициональном языке. В таком случае M остается одним и тем же при определении информации любых высказываний. Это позволяет вместо $J(A, M)$ писать $J(A)$.

Прежде чем перейти к точным определениям упомянутых выше понятий, заметим еще, что отношение логического следования $A_0 \models B_0$ для некоторых конкретных высказываний A_0 и B_0 имеет место, если и только если $A \models B$, где A и B — логические формы высказываний A_0 и B_0 . Это позволяет в дальнейшем рассматривать отношения логического следования лишь для логических форм высказываний, в качестве которых имеются в виду формулы языка пропозициональной логики. Итак, приходим к следующим определениям:

Df1. $A \models B \Leftrightarrow J(B, M)$ есть часть $J(A, M)$

Df2. $J(A, M) = \langle M_A, M \rangle$

Df3. $J(B, M)$ есть часть $J(A, M) \Leftrightarrow M_A \subseteq M_B$

Df4. $M_A = \{\alpha : \text{истинно } A \text{ в } \alpha\}$.

Будем далее употреблять обозначения " TA/α " и " FA/α " соответственно вместо " A истинно в о.с. α " и " A ложно в о.с. α ". Тогда истинность формул определяется условием Df5:

- | | |
|--|---|
| 1. $Tr_1/\alpha \Leftrightarrow P_1 \in \alpha$ | 1'. $Fp_1/\alpha \Leftrightarrow \bar{P}_1 \in \alpha$ |
| для любой p_1 . | |
| 2. $T(A \& B)/\alpha \Leftrightarrow TA/\alpha \& TB/\alpha$ | 2'. $F(A \& B)/\alpha \Leftrightarrow FA/\alpha \dot{\vee} FB/\alpha$ |
| 3. $T(A \vee B)/\alpha \Leftrightarrow TA/\alpha \dot{\vee} TB/\alpha$ | 3'. $F(A \vee B)/\alpha \Leftrightarrow FA/\alpha \& FB/\alpha$ |
| 4. $T\bar{A}/\alpha \Leftrightarrow FA/\alpha$ | 4'. $F\bar{A}/\alpha \Leftrightarrow TA/\alpha$ |

где $\&$, $\dot{\vee}$ — знаки метаязыка, заменяющие "и", "или". Нетрудно усмотреть, что Df5 есть описание известной табличной процедуры вычисления истинностных значений формул пропозициональной классической логики.

Согласно Df1–Df4 имеем: $A \models B \Leftrightarrow M_A \subseteq M_B \Leftrightarrow \forall_{\alpha \in M} (TA/\alpha \dot{\supset} TB/\alpha)$. При учете Df5 и определения о.с., это обычное классическое определение логического следования с его парадоксами: "из противоречия следует все, что угодно", так как $J(A)$ для противоречивого A есть $\langle \emptyset, M \rangle$ и "логически истинное высказывание есть следствие любого высказывания", поскольку $J(A)$ для логически истинного A есть $\langle M, M \rangle$.

Чтобы подойти к понятию релевантного или интенционального следования, надо выяснить источники парадоксальности следования в классической логике. Они — в классическом понятии о.с., так как мы принимаем определенные предпосылки онтологического характера относительно возможных миров, а именно: считаем, что для любого p_1 и для любого мира α не может быть p_1 и $\bar{p}_1$ одновременно и обязательно имеет место p_1 или $\bar{p}_1$. Иначе говоря, к условиям истинности Df5 фактически добавляются положения

$$(a) \dot{\neg}(p_1 \in \alpha) \dot{\vee} \dot{\neg}(\bar{p}_1 \in \alpha)$$

$$(б) p_1 \in \alpha \dot{\vee} \bar{p}_1 \in \alpha,$$

где $\dot{\neg}$ — метазнак, заменяющий "неверно, что".

Нетрудно усмотреть, что (a) есть так называемый онтологический закон противоречия, а (б) — онтологический закон исключенного третьего. В силу первого всякий возможный мир α непротиворечив, а в силу второго — он также является определенным, или полным, относительно любой пропозициональной переменной.

При строгом построении семантики пропозициональной логики эти положения должны быть особо выделены, поскольку в самих определениях условий истинности в терминах возможных миров не предполагаются какие-либо характеристики этих миров, кроме того, что при употреблении понятий Tr_1/α и Fp_1/α осмысленными являются утверждения п.1–1' Df5. Иначе говоря, что миры представляют некоторые множества, элементами которых могут быть p_1 и $\bar{p}_1$.

Нетрудно доказать (индукцией по числу вхождений логических связок в формулы), что указанные предпосылки (a) и (б) равносильны соответственно следующим предпосылкам гносеологического характера:

$$(a') \neg TA/\alpha \nabla \neg FA/\alpha \quad (b') TA/\alpha \nabla FA/\alpha.$$

Добавление предпосылок (а) и (б) к определениям логических связей означает, что определяя информацию высказывания, мы имеем в виду не логические их содержания, которые требуются для определения понятия логического следования, а содержание, обусловленное также указанными предпосылками. Это значит, что вместо информации $J(A)$ высказывания A мы имеем $J(A/\Gamma)$ – информацию A при наличии множества данных Γ , где Γ – совокупность указанных предпосылок. Более детально, $J(A/\Gamma)$ – это $J((A, M)/\Gamma)$, или, что то же, $J(A, M_\Gamma)$, и наконец $\langle M_\Gamma, A, M_\Gamma \rangle$, где M – множество всех подмножеств $\{p_1, \bar{p}_1, p_2, \bar{p}_2, \dots, p_n, \bar{p}_n, \dots\}$, а Γ , как уже сказано, – $\langle A, B \rangle$. Это так называемая привнесенная информация, информация, которую A добавляет к информации Γ . Если Γ явно или неявно содержит информацию A , то $J(A/\Gamma)$ является нулевой. Так именно и обстоит дело с законами классической логики. Они не несут никакой информации именно потому, что все то, что они выражают, содержится уже в Γ , т.е. в понятии классического о.с., именно в силу этого возникает представление об их тавтологичности. Очевидно, что (б), следствием которого они являются, как и (а), не представляют собой аналитические истины. Они – интуитивно очевидны. Но эта их очевидность имеет, по-видимому, эмпирическое происхождение.

Определяя логическое следование как отношение между высказываниями по информации, мы должны выявить информацию высказываний самих по себе, без каких-либо предпосылок относительно возможных миров. Необходимо отвлечься от всех наших знаний о возможных мирах. Это означает (в этом как раз и состоит переход к релевантной логике): мы не должны теперь *a priori* принимать, что в действительности невозможно p_1 и $\bar{p}_1$, и в любом случае имеется p_1 или $\bar{p}_1$. Иначе говоря, необходимо исключить из определений условий истинности высказываний предпосылки (а) и (б) относительно миров.

В таком случае возможные миры – это элементы M , это обобщенные миры или обобщенные о.с. Таким образом, допускаются неполные (и даже пустые) и противоречивые о.с., например, $\{p_1\}$, $\{p_2\}$, $\{p_1, p_2\}$, $\{p_1, \bar{p}_1\}$ и т.п. Тем самым для каждого высказывания A допускаются возможности – TA/α и $T\bar{A}/\alpha$, $\neg TA/\alpha$ и $\neg T\bar{A}/\alpha$ и конечно нормальные состояния TA/α и $\neg T\bar{A}/\alpha$ или $\neg TA/\alpha$ и $T\bar{A}/\alpha$. Логическое содержание высказывания A теперь это – $J(A, M) = \langle M_A, M \rangle$.

Сохраняя формально все прежние определения, но заменяя в приведенных выше определениях M на M мы получаем понятие следования как отношения между логическими содержаниями высказываний. Это именно то релевантное следование, которое мы старались получить. Таким образом, имеем

$$A \models_{rel} B \Leftrightarrow M_A \subseteq M_B \Leftrightarrow \forall \alpha \in M (TA/\alpha \supset TB/\alpha).$$

Это понятие является непарадоксальным, поскольку для любого высказывания A , M_A не равно M и не является пустым множеством.

Последнее означает, что каждое высказывание A_Q (точнее его высказывательная форма A) теперь имеет какую-то ненулевую информацию и ни одно высказывание не содержит всю возможную (выразимую в данном языке) информацию. Информационными при этом оказываются и выражения законов логики. Каждая формула классической пропозициональной логики A , представляющая собой логический закон, выделяет некоторое собственное подмножество M_A множества M , т.е. содержит определенную информацию относительно M . Конечно, законы могут различаться по информации. Так, закон $(p \vee \bar{p})$ менее информативен, чем $(p \vee \bar{p}) \& (q \vee \bar{q})$. Высказывания, выражающие логические законы, перестают быть универсально истинными. Как и все высказывания, представляющие собой законы науки, законы логики истинны лишь в тех мирах, в которых имеют место отражаемые ими ситуации или отношения. Что касается законов классической логики, то их можно определить теперь как высказывания, истинные во всех возможных мирах, удовлетворяющих условию (б).

Как и в классической логике, наряду с понятием следования некоторого высказывания B из A , может быть определено отношение релевантного следования некоторого высказывания B из какого-то множества высказываний Γ . Содержательно наличие такого отношения означает, что информация B составляет часть совокупной информации высказываний Γ . Ясно при этом, что если B следует из какого-то множества высказываний, то оно следует из более широкого множества высказываний. Наконец, если B следует из конъюнкции некоторых высказываний, то B следует и из множества членов этой конъюнкции. Эти соображения приводят к следующему определению:

Def: $\Gamma \models B$ е.т.е. в Γ имеются высказывания $A_1, \dots, A_m$, $m \geq 1$ такие, что $(A_1 \& \dots \& A_m) \models B$ (для какой-нибудь m расстановки скобок в конъюнкции). Ясно, что $(A_1 \& \dots \& A_m) \models B \Leftrightarrow \bigcap_{i=1}^m M_{A_i} \subseteq M_B$. Указанное пересечение $\bigcap_{i=1}^m M_{A_i}$ ни в каких случаях не является пустым.

Говорят иногда, что связанное с обобщением о.с. допущение неопределенных и, в особенности, противоречивых миров, которые Я.Хинтиikka, например, называет "возможными невозможными мирами", страдает искусственностью и порождает "представления о некоей экстравагантности релевантной логики по сравнению с логикой классической" (см. [4]). Однако не обязательно считать такие миры реально возможными положениями дел. Это некоторые абстрактные возможности, связанные с абстрагирующей деятельностью мышления. Допущение "ненормальных" миров, как мы видим, является следствием отвлечения от предпосылок (а) и (б), необходимого для выявления собственного содержания высказывания, а отнюдь не их отрицания.

Что касается противоречивых миров, то они по существу допускаются и в рассуждениях в рамках классической логики, когда в качестве посылок в выводе допускают противоречие. Очевидно,

что принятие некоторого утверждения в качестве посылки рассуждения означает именно допущение того, что оно истинно. Однако здесь (в классической логике), как отметил Е.А.Сидоренко, имеет место явная непоследовательность в рассуждениях. Она проявляется, например, в выводе закона "из противоречия следует все, что угодно" - $(A \& \bar{A}), A, \bar{A}, (A \vee B), B$. Заключение B на последнем шаге получается по правилу разделительного силлогизма: "из $\bar{A}, (A \vee B)$ следует B ". Но, применяя это правило, исходят из того, что из двух имплицитно содержащихся в его посылках возможных случаев - " $\bar{A}$ и A " и " $\bar{A}$ и B " - первый невозможен в силу принципа непротиворечия. Таким образом, принимая " A и $\bar{A}$ " за истину, считают также, что это невозможно. Релевантная логика устраняет такую непоследовательность, запрещая применять правило разделительного силлогизма как раз в силу наличия в его посылках обеих указанных возможностей. И естественно, что допуская " A и $\bar{A}$ ", она допускает также и миры, в которых может реализоваться эта возможность. Таким образом, от классической логики релевантная логика отличается не "экстравагантностью", а требованием последовательности в рассуждениях: она исходит из того, что при допущении рассуждения с противоречивыми посылками необходимо также допускать и миры, в которых могут быть истинны эти посылки. Следствием этого и является запрещение применения правила разделительного силлогизма.

Однако исключение этого правила вообще из рассуждений не является обязательным. Необходимо исключать лишь те случаи его применения, где проявляется упомянутая непоследовательность. Это случаи, когда в процессе рассуждения из некоторого A выводится $A \vee B$, т.е. применяется правило введения дизъюнкции, а затем происходит исключение этой дизъюнкции по указанному правилу разделительного силлогизма с использованием посылки $\bar{A}$. Локализация и исключение таких случаев могут быть осуществлены в системах натурального вывода. Речь идет, по существу, о некоторой нормализации выводов, о запрещении циклических ходов мысли. Конечно, вывод по правилу дизъюнктивного силлогизма является релевантным лишь при учете того, что в дополнение к его посылкам используется металогический принцип непротиворечия, т.е. предпосылка $=(a)$ о непротиворечивости миров. Кстати, здесь еще раз подтверждается мысль о том, что допущение противоречивых миров - при анализе отношения логического следования в рамках релевантной логики - не означает отрицания принципа непротиворечия и даже ограничения его. Таким образом становится возможной разумная реабилитация правила разделительного силлогизма и тем самым снимаются упреки, которые часто адресуются релевантной логике за то, что она отвергает правила, широко применяемые в естественных рассуждениях.

Некоторые авторы (см. А.Андерсон и Н.Белнап [6], Р.Роутли и В.Роутли [8], Дж.Данн [7]) не считают правомерным называть противоречивые и неполные о.с. описаниями состояний, поскольку

ситуации, которые должны были бы им соответствовать, невозможны, и для них предпочитают термин "set up" (структуры, конструкции). Мы же стремимся показать, что они могут быть естественным образом введены как результаты обобщения понятия классических о.с., т.е. что допущение противоречивых о.с. и соответствующих возможных миров не просто технический прием; они представляют собой именно миры, к которым могут относиться высказывания.

Впрочем, известно, что некоторые философы-диалектики допускают возможность одновременного существования в действительности ситуаций, которые представляют некоторые противоречивые высказывания A и $\bar{A}$, хотя мы не разделяем, конечно, этого мнения и рассматриваем противоречивые миры как абстрактные допущения контрфактического характера. Что же касается миров, не удовлетворяющих условию (б), то они и соответственно о.с. даже реально возможны при наличии в языке (в терминах которого формируются о.с.) неопределенно-истинностных или бессмысленных высказываний; например высказываний типа гегелевского "дух зелен" или "дух не зелен", (когда некоторый предикат - в данном случае "зелен" применяется к предметам, не относящимся к области его определения) или "эфир является средой распространения света" (при употреблении имени без денотата) и, наконец, высказываний о случайных будущих событиях, не являющихся ни истинными ни ложными - как показал Аристотель, - в сегодняшнем мире. Ситуации p и $\neg p$, соответствующие первым трем только что указанным высказываниям, отсутствуют во всех возможных реальных мирах, а для четвертого из этих высказываний они отсутствуют по крайней мере в сегодняшнем мире, а возможно и во всех временных состояниях α_t реального мира во время t при $t < t_1$ - времени, которым датировано будущее событие.

Не вполне ясен также смысл характеристики противоречивых миров как невозможных. Что именно определяет их невозможность? Считается, что они невозможны в силу закона непротиворечия ($A \& \bar{A}$). Однако этот закон интенционально эквивалентен, т.е. эквивалентен в релевантном смысле (несет ту же информацию), закону исключенного третьего ($A \vee \bar{A}$). Действительно, согласно

Df5: $T(A \& \bar{A})/\alpha \Leftrightarrow F(A \& \bar{A})/\alpha \Leftrightarrow FA/\alpha \vee F\bar{A}/\alpha \Leftrightarrow TA/\alpha \vee T\bar{A}/\alpha \Leftrightarrow T(A \vee \bar{A})/\alpha$. В языке классической логики нет средств для выражения условий о непротиворечивости миров. Противоречивые миры исключаются в классической логике лишь с принятием правила *modus ponens* "из A и $A \supset B$ выводимо B ". При допущении противоречивых миров это правило неправомерно, ибо согласно обычному определению материальной импликации $T(A \supset B)/\alpha \Leftrightarrow (FA/\alpha \vee TB/\alpha)$. При наличии TA/α это гарантирует TB/α только в случае, когда α непротиворечив, т.е. исключается TA и FA в α одновременно.

С введением понятия релевантного следования выявляется класс логических законов нового типа. Введем для них запись

класс логических законов нового типа. Введем для них запись $\models_{rel}(A \rightarrow B)$ A - релевантно, логически истинно, т.е. истинна в системе релевантного следования E и примем определение:

$Df7: \models_{rel}(A \rightarrow B) \Leftrightarrow A \models_{rel} B$ (множество законов этого типа для формул классической пропозициональной логики описывает система E_{fde} - первопорядковом фрагменте E [2,3], тоже, что системе де-Моргана [5]).

Мы выделили два понятия логического следования - классическое и релевантное. Возможны, однако, и другие при сохранении определений логических связок классической логики. К релевантному следованию мы пришли из классического, изменив понятие о.с. за счет исключения условий (а) и (б).

Возможно исключить только (б), сохранив (а), т.е. допускать неопределенные, но непротиворечивые о.с. Соответствующее отношение следования " $\models$ " получим, заменив M в $Df1-Df4$ на $M_{(a)}$ - множество обобщенных о.с., удовлетворяющих условию (а). Очевидно, что отношение следования этого типа есть отношение между информацией высказываний относительно $M_{(a)}$. Соответствующую логически истинную импликацию $A \rightarrow B$ получим из $Df7$. Аксиоматизацией следования этого рода является система Хао-Вана [5,3]. В отличие от классического следования здесь из числа парадоксальных его отношений исключается $B \models (A \vee \bar{A})$, поскольку $A \vee \bar{A}$ содержит теперь некоторую информацию, но сохраняется $(A \& \bar{A}) \models B$.

Исключая, наоборот, (а), но сохраняя (б), т.е. допуская, таким образом, лишь полные - относительно каждого p_i о.с., множество которых есть $M_{(b)}$, получаем отношение следования $\models$ такое, что из парадоксальных отношений классической логики сохраняется $A \models (B \vee \bar{B})$, но исключается $(A \& \bar{A}) \models B$. Аксиоматизацией соответствующего понятия логического следования является система, двойственная логике Хао-Вана [1,2].

Если (а) и (б) заменить на (d):

$$\forall \alpha (\exists p (p \in \alpha \& \bar{p} \in \alpha) \supset \forall p (p \in \alpha \vee \bar{p} \in \alpha))$$

(если в о.с. α содержится какая-нибудь пропозициональная переменная p_i и ее отрицание $\bar{p}_i$, то это о.с. полно относительно любой пропозициональной переменной), то получим следование " $\models$ " такое, что вместо классических парадоксальных $(A \& \bar{A}) \models B$ и $A \models (B \vee \bar{B})$, имеем $A \& \bar{A} \models B \vee \bar{B}$.

Аксиоматизацию соответствующего понятия следования представляет первопорядковый фрагмент трехзначной логики Лукасевича [1,2]. В последнем случае предпосылка относительно миров уже не кажется естественной, и можно, очевидно, придумать ряд других подобных предпосылок.

Т.о. мы пришли по существу к общему понятию логического следования, которое получается из $Df1$ заменой $J(A, M)$ на $J(A, M_\Gamma)$, где Γ - произвольное, возможно пустое множество условий относительно возможных миров. Это понятие информации очевидно является также общим. Определенное так понятие следова-

ния может быть принято не только для формул языка классической логики. Все перечисленные понятия следования для формул классической логики получаются за счет вариаций Γ , а значит и понятия информации и связанного с ним понятия о.с.

Итак, мы имеем по крайней мере пять типов отношений между высказываниями, которые можно назвать отношениями логического следования. Каждое из них характеризуется, как отношение высказываний по информации, каждое из этих отношений отличается от других своим понятием информации. Однако только в релевантном варианте имеется в виду собственная информация высказывания $J(A, M)$ — информация A относительно множества абстрактных возможностей (обобщенных о.с.) M . Для всех других типов, кроме релевантного, есть парадоксальные случаи следования, когда находящиеся в данном отношении A и B не связаны по содержанию. Гарантируется лишь истинность B при истинности A . Это значит, что соответствующее отношение следования представляет собой по существу лишь связь между истинностными значениями высказываний. По-видимому, каждое из этих отношений может быть использовано в связи с теми или иными задачами, но соответствующим интуитивному представлению об отношении логического следования в научном познании является, очевидно, лишь релевантное следование.

Наряду с существенным (для теории и практики научного познания) уточнением понятий логического следования релевантная логика приводит и к некоторым важным изменениям понимания природы логического знания. К их числу относятся прежде всего, выяснение информативности законов логики и расширения самого понятия закона логики. Далее, она указывает на возможность и даже необходимость освобождения логики от некоторых предпосылок нелогического характера, таких, как онтологические принципы непротиворечия и исключенного третьего и связанные с ними гносеологические принципы, определяющие отношения между понятиями истины и лжи. Последние лежат в основе определений фундаментальных понятий классической логики, и можно показать, что аналогичные предпосылки подразумеваются и в других системах логики, в том числе интуиционистской. Отвлекаясь от этих предпосылок в понимании возможных миров, релевантная логика обеспечивает возможность оперирования противоречивыми и неопределенными знаниями (в том числе с высказываниями о случайных будущих событиях, не исключая при этом из логической системы законов исключенного третьего и противоречия, а также закона бивалентности, как это имело место в трехзначной логике Лукасевича)². Это, очевидно, имеет немаловажное значение в практи-

²При этом здесь нет необходимости принимать специальные и в ряде случаев необоснованные приемы для "спасения" законов исключенного третьего и противоречия, которые характерны для известных систем — Решера (система "квази-истинностно-функциональной логики") Ван дер Фраассена (система "с истинно-значными провалами"), предназначенных для рассуждений, включающих высказывания о

ке научного познания. И, наконец, возникает необходимость уточнения сложившихся в логической семантике представлений о содержании высказываний. Согласно этим представлениям, в содержании некоторого высказывания A_0 выделяются два уровня, или, если можно так выразиться, два "слоя": первый - содержание высказывания в целом, называемое иногда конкретным содержанием, и второй - содержание, выявляемое в результате отвращения от значений дескриптивных терминов, а именно: содержание логической формы этого высказывания. В первом случае содержание высказывания обусловлено значениями имеющихся в нем дескриптивных терминов - знаков предметов, свойств, отношений, - а также значениями логических констант и некоторых элементарных структур, таких, например, как $p^n(t_1, \dots, t_n)$ для атомарных формул языка исчисления предикатов. Во втором случае содержание высказывания, как представляется, обусловлено только значениями логических констант и указанными элементарными структурами. Из предыдущего ясно, что фактически содержание высказывания в целом обусловлено не двумя, а тремя компонентами. Наряду со значениями дескриптивных терминов и логических констант, оно зависит также от принимаемых предпосылок относительно "возможных миров", областей, состояния действительности, к которым могут относиться высказывания. В результате отвращения от значений дескриптивных терминов выявляется не логическое содержание высказывания, а то его содержание, которое обусловлено значениями логических констант и указанными предпосылками относительно возможных миров. В связи с этим изменением естественно должен быть выделен и третий "слой", содержащийся в A_0 информации, а именно то его содержание, которое обусловлено только значениями его логических констант и, возможно, какими-то его структурными особенностями. Последнее и есть логическое содержание A_0 в точном смысле этого слова. Выделение его необходимо, как было сказано, для точного определения логического следования, понимаемого как отношение между высказываниями по содержанию.

ЛИТЕРАТУРА

1. Войшвилло Е.К. Философско-методологические аспекты релевантной логики. М., 1988.
2. Ермолаева А.М., Мучник А.А. Модальные расширения логических исчислений типа Хао Вана // Исследования по формализованным языкам и неклассическим логикам. М., 1974.

случайных будущих событиях [3]. В основе построения двух последних систем лежит неправомерное, с нашей точки зрения, предположение о том, что неопределенно-истинностное значение для высказываний о будущих случайных событиях представляет собой фактически "истина" или "ложь". Это предположение приводит по существу к тому же логическому фатализму, указанному Аристотелем, преодолеть который стремятся авторы упомянутых систем.

3. Карпенко А.С. Фатализм и случайность будущего: логический анализ. М., 1990.
4. Сидоренко Е.А. Релевантная логика и теория следования: Автореф. дис. д-ра филос. наук. М., 1985.
5. Ackermann W. Begründung einer Strengen Implikation // J.Symbol. Log. 1956. Vol.21.
6. Anderson A.R., Belnap N.D. The pure calculus of entailment // J.Symbol. Log. 1967. Vol.27.
7. Dunn J.M. Intuitive Semantics for First-Degree entailment and "coupled-Trees" // Philos. Stud. 1976. Vol.29. N 3.
8. Routley R., Routley V. Semantics of First Degree Entailment // Nous. 1972. Vol.6.

НЕСТАНДАРТНЫЙ МЕТОД ТАБЛИЧНЫХ КОНСТРУКЦИЙ ДЛЯ МОДАЛЬНЫХ И РЕЛЕВАНТНЫХ ЛОГИК

0. Предлагается метод построения табличных систем с индексированными формулами. Данный метод используется для формулировки табличных вариантов ряда модальных исчислений, являющихся расширениями S_4 , а также релевантных систем, близких к пропозициональным системам RM и R .

1. Табличные построения обладают рядом свойств, выгодно отличающих их от эквивалентных аксиоматических систем (см. [3]). Наиболее важным свойством этих построений, имеющим в некотором смысле эвристическое значение для исследования формально-логических систем вообще, является то, что в них очевидным образом выражается взаимосвязь семантики и синтаксиса той или иной логики. Выводы в виде табличных конструкций полностью согласуются с семантической интерпретацией рассматриваемого исчисления. Кроме того, принципы построения табличных выводов весьма близки к принципам натуральной дедукции и, следовательно, более непосредственно отражают структуру обычных содержательных рассуждений. Эти выводы обладают свойством подформульности (в том смысле, как оно определено Г.Генценом), что в большинстве случаев позволяет решить проблему разрешимости. Вообще говоря, метод табличных конструкций представляет собой удобную во многих отношениях замену генценовских методов и открывает хорошие перспективы исследования как важных теоретических, так и прикладных аспектов логических исчислений.

Следует отметить, что применение табличных методов в модальной, релевантной и других интенциональных логиках связано с достаточно серьезными трудностями. Лишь для незначительного числа интересных модальных систем сформулированы табличные варианты. Что же касается, например, релевантной или паранепротиворечивой логики, то здесь вообще дело ограничивается пока только аксиоматическими построениями или секвенциальными формулировками, большинство из которых неудовлетворительны в том смысле, что сечение не является в них допустимым правилом. Соответственно, не нашла еще успешного применения в области интенциональной логики и "техника" построения систем естественного вывода. Этот факт, по-видимому, обусловлен определенными "неудобными" свойствами неклассических логик. Поэтому нет ничего странного в том, что он зачастую рассматривается как своего рода подтверждение "неестественного" характера упомянутых логик; но так ли это на самом деле - это проблема, требующая отдельного рассмотрения. Ограничимся здесь следующими замечаниями.

Вопрос о возможности альтернативных представлений (аксиоматических, секвенциальных, табличных) одной и той же логической

системы не является вопросом о соответствии или несоответствии этой системы некоторой интуиции о корректности и строгости логических рассуждений. Тем не менее он не является и вопросом о "синтаксической эlegantности" формального исчисления, а связан с глубинными свойствами логического языка и принципами, на основе которых данное исчисление строится. В частности, наличие такой возможности, по-видимому, непосредственно зависит от характера семантических конструкций, определяющих смысл логических констант и понятие вывода. Например, наличие весьма естественной семантики крипкевского типа для нормальных модальных систем способствует успешной формулировке их альтернативных вариантов, удобных в различных отношениях. В то же время распространение техники табличных построений на релевантные, эпистемические, паранепротиворечивые системы требует решения ряда проблем. Один из возможных путей их решения - разработка модификаций табличных методов Бета-Крипке.

В данной статье излагается метод построения табличных вариантов пропозициональных модальных ($S4.1, S4.2, S4.3, S4.4$) и релевантных (R^*, E^*) систем. При этом используются известная техника построения табличных систем Бета и метод индексации формул в секвенциальных исчислениях, идейно восходящий к работам С. Кангера (см. [4]).

2. Аксиоматическое представление рассматриваемых систем

Пусть система $S4$ задана обычным образом с помощью схем аксиом и двух правил вывода.

Схемы аксиом:

A.0 Схемы аксиом классической пропозициональной логики;

A.1 $\Box A \supset A$

A.2 $\Box(A \supset B) \supset (\Box A \supset \Box B)$

A.3 $\Box A \supset \Box \Box A$

Правила вывода: $\frac{A \quad A \supset B}{B}$; $\frac{A}{\Box A}$.

Введем в рассмотрение расширения этой системы, такие, что каждое из них получается за счет добавления к $S4$ одной-единственной схемы аксиом из следующего списка:

A.4 $\Box(\Box(A \supset \Box A) \supset A) \supset (\Diamond \Box A \supset A)$

A.5 $\Diamond \Box A \supset \Box \Diamond A$

A.6 $\Box(\Box A \supset B) \vee \Box(\Box B \supset A)$

A.7 $A \supset (\Diamond \Box A \supset \Box A)$.

Правила вывода остаются прежние. Таким образом, добавляя к $S4$ одну из схем A.4, A.5, A.6 или A.7, получаем новые модальные системы, известные в логической литературе под обозначением $S4.1, S4.2, S4.3, S4.4$. Все они являются нормальными (в смысле Крипке [2]), а также известно, что каждая из них является подсистемой $S5$, первые три из них являются подсистемами $S4.4$, $S4.2$ является подсистемой $S4.3$, а $S4.1$, будучи подсистемой $S4.3$ и $S4.4$, в то же время не является подсистемой $S4.2$.

Релевантная система RM^* формулируется с помощью следующих постулатов:

Схемы аксиом:

- E1. $A \supset A$
- E2. $(A \supset B) \supset ((B \supset C) \supset (A \supset C))$
- E3. $(A \supset (A \supset B)) \supset (A \supset B)$
- E4. $(A \supset (B \supset C)) \supset (B \supset (A \supset C))$
- E5. $A \supset (A \vee B)$
- E6. $B \supset (A \vee B)$
- E7. $(A \& B) \supset A$
- E8. $(A \& B) \supset B$
- E9. $((A \supset B) \& (A \supset C)) \supset (A \supset (B \& C))$
- E10. $((A \supset C) \& (B \supset C)) \supset ((A \vee B) \supset C)$
- E11. $(A \& (B \vee C)) \supset ((A \& B) \vee C)$
- E12. $(A \supset \sim B) \supset (B \supset \sim A)$
- E13. $\sim \sim A \supset A$
- E14. $(A \supset B) \supset ((A \supset B) \supset (A \supset B))$

Правила вывода: $\frac{A \supset B \quad A}{B}$; $\frac{A \quad B}{A \& B}$.

Система R получается из системы RM^* отбрасыванием последней схемы аксиом E14.

Здесь и всюду ниже понятия правильно построенной формулы, вывода в аксиоматической системе, доказуемой формулы обычные, знак $\supset$ используется для материальной импликации, знак $\supset$ - для релевантной (поскольку стрелку $\rightarrow$ удобнее оставить как знак секвенции); $\&$, $\vee$, $\sim$ - знаки конъюнкции, дизъюнкции и отрицания соответственно. В формулировках модальных систем знак $\diamond$ используется как сокращение записи выражения $\sim \Box \sim$.

3. Табличные варианты модальных систем

Для описания табличных конструкций, представляющих собой альтернативные формулировки приведенных в предыдущем разделе систем S4, S4.1, S4.2, S4.3, S4.4, введем следующие понятия.

Пусть индекс есть непустая последовательность попарно различных натуральных чисел, начинающаяся с нуля. Обозначим индексы буквами $w, w', w'', \dots, u, u', \dots$, а натуральные числа $k, l, m, n, \dots$ и примем следующее индуктивное определение индексированной формулы.

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 3.1.

1) $\overset{w}{A}$ есть индексированная формула, если A есть пропозициональная переменная (в обычном смысле);

2) если A есть правильно построенная формула, то $\overset{w}{\sim A}$ и $\overset{w}{\Box A}$ есть индексированные формулы;

3) если A и B есть правильно построенные формулы, то $\overset{w}{A \& B}$, $\overset{w}{A \supset B}$ и $\overset{w}{A \supset B}$ есть индексированные формулы.

Рангом индекса w r_w назовем количество чисел в индексе w , отличных от нуля. Индекс, ранг которого $r < 1$, назовем нулевым или пустым индексом и будем полагать, что индексированная формула, которой приписан пустой индекс, есть просто формула в обычном смысле.

На множестве индексов I_n определим бинарное отношение R следующим образом:

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 3.2.

1) Пусть $w \in I_n$ и $w \in I_n$, тогда wRu , если и только если $u = w, k$ или $w = u$, где k — любое натуральное число.

2) Для любых индексов w, w', u , если wRw' и $w'Ru$, тогда wRu .

Из определения ясно, что отношение R (которое можно понимать как отношение приписывания натурального числа индексу) обладает свойствами рефлексивности и транзитивности.

Ниже индекс w ранга r_w будем считать подындексом индекса u ранга r_u , если и только если $r_w \leq r_u$. Очевидно, что w есть подындекс u в том и только в том случае, когда имеет место wRu .

Табличные системы T_4 , $T_{4.1}$, $T_{4.2}$, $T_{4.3}$, $T_{4.4}$ (то есть альтернативные формулировки систем S_4 , $S_{4.1}$, $S_{4.2}$, $S_{4.3}$ и $S_{4.4}$ соответственно) задаются правилами построения и замыкания таблиц и определениями T -вывода и T -выводимой формулы. Заметим, что понятие таблицы вполне традиционно: таблица есть формальная конструкция, состоящая из правого и левого столбцов и предназначенная для проверки испытываемой формулы на выводимость в той или иной системе. Отличие рассматриваемых ниже табличных конструкций от обычных таблиц Бета состоит лишь в том, что они содержат индексированные формулы.

Правила построения табличных конструкций:

(BR) Множество правил заполнения таблиц для логических констант, в которое входят правила для $>, \&, \vee, \sim$, отличающиеся от известных правил заполнения таблиц Бета тем, что индекс формулы, к которой применяется правило, переносится без изменения с главного знака этой формулы на подформулы, связанные этим знаком (главные знаки подформул, связанных этим знаком). Например, правила для формул с отрицанием (в качестве главного знака):

($\sim_L$) Если формула $\sim A$ встречается в левом столбце (под)таблицы, то формула A пишется в правом столбце этой же (под)таблицы;

($\sim_P$) Если формула $\sim A$ встречается в правом столбце (под)таблицы, то формула A пишется в левом столбце этой же (под)таблицы.

Правила для импликативных формул:

($>_L$) Если формула $A > B$ встречается в левом столбце (под)таб-

лицы, то расщепляем данную (под)таблицу на две подтаблицы и вписываем формулу A в правый столбец одной из них, а формулу B - в левый столбец другой.

($\supset_p$). Если формула $A \supset B$ встречается в правом столбце (под)таблицы, то формула A пишется в левом, а B в правом столбце этой же (под)таблицы.

Правила для формул, начинающихся модальными операторами:

($\Box_p$) Если формула $\Box A$ встречается в правом столбце (под)таблицы, то в правом столбце этой же (под)таблицы пишется формула A , где k - число, не встречающееся в индексах, приписанных формулам, входящим в эту (под)таблицу.

($\Box$)_{4.1} Если формула $\Box A$ встречается в левом столбце (под)таблицы, то в левом столбце этой же (под)таблицы пишется формула A , где (a) wRw' или (b) $w=u, k$, а $w'=u, m, n$, если в левом столбце этой (под)таблицы встречается формула A .

($\Box$)_{4.2} получается из формулировки правила ($\Box$)_{4.1} заменой пункта (b) на (c) $w=u, n$, а $w'=u, m, n$, причем индекс $w'=u, n$ является подындексом хотя бы одного из индексов, приписанных формулам, входящим в данную (под)таблицу.

($\Box$)_{4.3} получается из формулировки правила ($\Box$)_{4.1} заменой пункта (b) на (d) $w'=w''$, где w'' - индекс, ранг которого больше нуля, если в левом столбце этой (под)таблицы имеется формула $\Box B$, а в правом - формула B .

($\Box$)_{4.4} получается из формулировки правила ($\Box$)_{4.1} заменой пункта (b) на (e) если $w=u, k$ и формула A встречается в левом столбце этой (под)таблицы, то w' - любой индекс, ранг которого больше нуля.

Правило замыкания:

(CR) Если одна и та же формула с одним и тем же индексом встречается в обоих столбцах одной и той же (под)таблицы, то эта (под)таблица замкнута. (Под)таблица замкнута, если замкнуты все ее подтаблицы.

Система T4 задается правилами (CR), (BR), ($\Box_p$) и ($\Box$)_{4.1} без пункта (b).

Система T4.1 задается правилами (CR), (BR), ($\Box_p$) и ($\Box$)_{4.1}. Системы T4.2, T4.3, T4.4 получаются из T4.1 заменой правила ($\Box$)_{4.1} на ($\Box$)_{4.2}, ($\Box$)_{4.3}, ($\Box$)_{4.4} соответственно.

Доказательство эквивалентности SM и TM (где вместо M может быть поставлен номер любой из рассматриваемых систем: 4.1, 4.2, и т.д.), можно провести семантическим, в стиле Крипке, методом, используя понятие эквивалентности таблиц и соответствующих моделей для SM. Ниже излагается другой, более конструктивный метод, с использованием аппарата индексированных секвенций.

Назовем индексированной секвенцией (I -секвенцией) выражение вида $\Gamma \rightarrow \theta$, где Γ, θ – списки, возможно пустые, индексированных формул. $\Gamma \rightarrow \theta$ считается чистой секвенцией (т.е. секвенцией в обычном смысле), если всем формулам в Γ и θ приписан нулевой индекс.

Исчисление G^I содержит основную секвенцию вида $\Gamma_1, A, \Gamma_2 \rightarrow \theta_1, A, \theta$, логические правила введения знаков $\&, \vee, \supset, \sim$ в антецедент и сукцедент с сохранением главной формулы в посылках и без изменения индексов, например:

$$\frac{\Gamma_1, A, \Gamma_2 \rightarrow \theta_1, A, \theta}{\Gamma \rightarrow \theta, A \supset B}, \quad \frac{A \supset B, \Gamma \rightarrow \theta, A, B, A \supset B, \Gamma \rightarrow \theta}{A \supset B, \Gamma \rightarrow \theta}, \quad \frac{\Gamma_1, A, \Gamma_2 \rightarrow \theta_1, A, \theta}{\sim A, \Gamma \rightarrow \theta, A}, \quad \frac{\Gamma_1, A, \Gamma_2 \rightarrow \theta_1, A, \theta}{\Gamma \rightarrow \theta, \sim A},$$

и структурные правила:

$$\frac{\Gamma_1, A, B, \Gamma_2 \rightarrow \theta}{\Gamma_1, B, A, \Gamma_2 \rightarrow \theta}, \quad \frac{\Gamma \rightarrow \theta_1, A, B, \theta}{\Gamma \rightarrow \theta_1, B, A, \theta}, \quad \frac{\Gamma \rightarrow \theta, A, A, \Delta \rightarrow Z}{\Gamma, \Delta \rightarrow \theta, Z}.$$

Исчисление G^{I4} получается из G^I добавлением правил:

$$\frac{\Gamma \rightarrow \theta, \Box A, A}{\Box \rightarrow \Gamma \rightarrow \theta, \Box A}, \quad \frac{\Gamma \rightarrow \theta, \Box A, A}{\Box \rightarrow \Gamma \rightarrow \theta, \Box A}, \quad \text{где } k - \text{число, не встречающееся}$$

в индексах, приписанных формулам в секвенции заключения и $(\Box^I)wRw'$.

Исчисления $G^{I4.1}, G^{I4.2}, G^{I4.3}, G^{I4.4}$ получаются из G^{I4} , если условие $(\Box^I)$ индексации главной и боковой формул правила $\Box \rightarrow$ заменяется соответственно на одно из следующих условий:

$(\Box^I)_1$ где wRw' или $w'=u, m, n$, а $w=u, k$, если формула A входит в Γ ;

$(\Box^I)_2$ где wRw' или $w'=u, m, n$, а $w=u, n$, причем $w'=u, m$ является подындексом хотя бы одного из индексов, приписанных формулам из секвенции заключения;

$(\Box^I)_3$ где wRw' или $w'=w''$ ($w'' > 0$), если в Γ входит формула вида $\Box B$, а в θ входит формула вида B ;

$(\Box^I)_4$ где wRw' или w' – любой индекс, ранг которого больше нуля, если $w=u, k$ и в Γ входит формула A .

Понятие G^{IM} -доказательства обычное: G^{IM} -доказательство (G^{IM} -вывод) I -секвенции $\Gamma \rightarrow \theta$ есть дерево I -секвенций, построенное согласно схемам правил заключения, вершиной (вершинами) которого является (являются) основная секвенция (основные секвенции).

В исчислении G^{IM} правила утончения

$$\frac{\Gamma \rightarrow \theta}{\Gamma \rightarrow \theta, A}, \quad \frac{\Gamma \rightarrow \theta}{A, \Gamma \rightarrow \theta}$$

являются производными правилами. Используя это обстоятельство, можно показать, что для $G^I M$ имеет место аналог элиминационной теоремы:

Если в $G^I M$ выводимы чистые секвенции $A, \Delta \rightarrow Z$ и $\Gamma \rightarrow \Theta, A$, то выводима и чистая секвенция $\Gamma, \Delta \rightarrow \Theta, Z$.

Этого достаточно для установления дедуктивной эквивалентности $G^I M$ аксиоматическим модальным системам.

Для исчисления $G^I M$ и соответствующих систем GM справедливо следующее предложение.

Предложение 1. В SM доказуема формула α , если и только если чистая секвенция $\rightarrow \alpha$ выводима в $G^I M$.

Определив надлежащим образом понятие представляющей формулы α I -секвенции $\Gamma \rightarrow \Theta$, можно показать, что представляющая формула основной секвенции $G^I M$ выводима в SM и правила вывода производны в следующем смысле: если в SM выводима представляющая формула посылки (представляющие формулы посылок) данного правила, то в SM выводима и представляющая формула заключения этого правила. С другой стороны, если формула α доказуема в SM , то чистая I -секвенция $\rightarrow \alpha$ выводима в $G^I M$, поскольку в $G^I M$ выводима секвенция $\rightarrow \alpha$, если α — аксиома SM , и правила системы SM производны в $G^I M$ (см. [1]).

Назовем набором I -секвенций выражение вида $S_1; S_2; \dots; S_m$, где для любого i ($i=1, 2, \dots, m$) S_i есть I -секвенция. Тогда исчисление наборов I -секвенций $B^I M$, отвечающее исчислению $G^I M$, получается добавлением к аксиоме $S_1; S_2; \dots; S_m$, где $i \neq 0$, а для любого i ($i=1, 2, \dots, m$) S_i есть основная секвенция $G^I M$, двух следующих правил:

$$\frac{U; S'; W}{U; S; W} ; \frac{U; S'; W; U; S''; W}{U; S; W} ,$$

где U, W — наборы I -секвенций, возможно пустые, $S' (S', S'')$ — посылка (посылки), а S — заключение правила $G^I M$.

Предложение 2. Исчисления $G^I M$ и $B^I M$ дедуктивно эквивалентны.

Доказательство данного предложения очевидно — с помощью простых преобразований выводы в исчислении $G^I M$ могут быть переписаны в выводы в исчислении $B^I M$, и обратно.

В свою очередь, выводы в исчислении $B^I M$ могут быть записаны в виде замкнутых табличных построений соответствующей системы TM . Этим мотивируется

Предложение 3. Исчисления $G^I M$ эквивалентны системам TM .

Из предложения 1 и предложения 3 немедленно следует, что относительно TM и аксиоматических систем SM справедливо следующее

Предложение 4. Исчисления TM эквивалентны системам SM .

4. Релевантные табличные системы TRM* и TR*

Рассмотрим два варианта применения описанного выше метода для построения релевантных табличных систем. Первый из них заключается в использовании понятия существенного вхождения простой подформулы в данную формулу, второй требует введения дополнительного понятия ограниченного индекса. И в том и в другом случае необходима модификация не только правил построения таблиц, но и правила замыкания табличных конструкций.

Полагая известным стандартное понятие вхождения подформулы в формулу, сформулируем следующие определения.

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 4.1.

Подформула α некоторой формулы β называется простой подформулой, если и только если α есть пропозициональная переменная или имеет вид $\sim A, A \vee B, A \& B$ или $A \supset B$, где A и B являются пропозициональными переменными.

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 4.2.

Вхождение простой подформулы α в формулу β называется несущественным тогда и только тогда, когда α графически совпадает с α_1 , а β графически совпадает с формулой вида $(\alpha_1 \& (\alpha_2) \supset \alpha_2)$ или с формулой вида $\alpha_2 \supset (\alpha_1 \vee \alpha_2)$.

Любое вхождение простой подформулы в формулу, не являющееся несущественным согласно определению 4.2, считается существенным.

Пусть, как обычно, построение табличной конструкции для некоторой испытуемой (на выводимость) формулы β начинается вписыванием β в правый столбец таблицы, (но при этом β приписывается нулевой индекс).

Правила построения и замыкания релевантных табличных конструкций будут теперь иметь следующий вид.

Правила построения табличных конструкций:

(BR)' Множество правил заполнения таблиц для логических констант $\&, \vee$ и $\sim$ такое же, как и в (BR), и два правила для импликации

($\supset_l$) Если формула $A \supset B$ встречается в левом столбце (под)таблицы, то расщепляем данную (под)таблицу на две подтаблицы и вписываем формулу A в правый столбец одной из них, а формулу B - в левый столбец другой; причем Rw, w' и Rw, w'' ;

($\supset_p$) Если формула $A \supset B$ встречается в правом столбце (под)таблицы, то в левом столбце этой (под)таблицы пишется формула A , а в правом - формула B , где k - число, не встречающееся в индексах, приписанных формулам, входящим в данную (под)таблицу.

Правило замыкания:

(CR)' 1. Если некоторая формула α встречается и в правом, и в левом столбцах одной и той же (под)таблицы, то эта (под)таблица замкнута, и замыкание имеет место относительно формулы α .

2. (Под)таблица замкнута, если и только если все ее подтаблицы замкнуты в смысле пункта 1.

3. Табличная конструкция для испытываемой формулы β замкнута, если и только если имеет место замыкание относительно всех существенных вхождений простых подформул в формулу β .

Табличная релевантная система TRM* задается правилами (BR)' и (CR)'. Стандартным образом, в системе TRM* корректными выводами считаются замкнутые согласно (CR)' табличные конструкции, построение которых осуществляется по правилам (BR)'.

Легко проверить, что в TRM* невозможно построить выводы таких "парадоксальных" формул, как $A \supset (B \supset A)$, $(A \supset B) \vee (B \supset A)$, $(A \& \sim A) \supset A$, $B \supset (A \vee \sim A)$.

Например:

		$\overset{0}{A \supset (B \supset A)}$
01		$\overset{01}{B \supset A}$
A	B	
012	012	
B	A	

Данная таблица не замкнута - не выполняются пункты 1 и 3 правила (CR)'.

		$\overset{0}{(A \supset B) \vee (B \supset A)}$
		$\overset{0}{A \supset B}$
		$\overset{0}{B \supset A}$
01	01	
A	B	
02	02	
B	A	

Таблица не замкнута, поскольку в этом случае не выполняется пункт 1 правила (CR)'.

		$\overset{0}{(A \& \sim A) \supset B}$
01	01	
$A \& \sim A$	B	
01		
A		
01	01	
$\sim A$	A	

И в этом случае мы не имеем корректного вывода испытываемой формулы, поскольку ни одно правило из множества $(BR)'$ больше не применимо, и не выполняется пункт 3 правила $(CR)'$.

В TRM^* не выводима также и классическая формула Пирса

$$\begin{array}{c}
 ((A \supset B) \supset A) \supset A \\
 \hline
 \begin{array}{c|c}
 (A \supset B) \supset A & A \\
 \hline
 \begin{array}{c}
 \begin{array}{c|c}
 A & A \supset B \\
 \hline
 A & B \\
 \hline
 \end{array}
 \end{array}
 \end{array}
 \end{array}$$

Здесь табличная конструкция не замкнута, так как не выполняются пункты 1 и 3 правила $(CR)'$.

Не анализируя подробно другие релевантные свойства системы TRM^* , отметим одну ее характерную особенность. Известно, что система RM получается добавлением к R "мингловой" аксиомы $A \supset (A \supset A)$, и в этой системе выводима формула "линейности" $(A \supset B) \vee (B \supset A)$. В системе же TRM^* , как показано выше, эта формула не является выводимой. Невозможно в общем случае построить в TRM^* и замкнутую конструкцию для "мингловой" аксиомы:

$$\begin{array}{c|c}
 A \supset (A \supset A) \\
 \hline
 \begin{array}{c|c}
 A & A \supset A \\
 \hline
 A & A
 \end{array}
 \end{array}$$

здесь не выполняется пункт 3 правила $(CR)'$.

Однако это можно сделать для формулы $(A \supset B) \supset ((A \supset B) \supset (A \supset B))$, т.е. аксиомы E14 системы RM^*

$$\begin{array}{c|c}
 (A \supset B) \supset ((A \supset B) \supset (A \supset B)) \\
 \hline
 \begin{array}{c|c}
 A \supset B & (A \supset B) \supset (A \supset B) \\
 \hline
 A \supset B & B
 \end{array}
 \end{array}$$

Заметим, что на данном шаге построения мы еще не получаем замкнутой конструкции, но имеем возможность применять правила $(BR)'$

$\begin{array}{c c} \hline & \begin{array}{c} 01 \\ A \supset B \end{array} \\ \hline \end{array}$		$\begin{array}{c c} \hline & \begin{array}{c} \cdot \cdot \cdot \\ \cdot \cdot \cdot \end{array} \\ \hline \end{array}$	
$\begin{array}{c c} \hline & \begin{array}{c} 012 \\ A \supset B \end{array} \\ \hline \end{array}$		$\begin{array}{c c} \hline & \begin{array}{c} 012 \\ A \supset B \end{array} \\ \hline \end{array}$	
$\begin{array}{c c} \hline & \begin{array}{c} 0123 \\ A \end{array} \\ \hline \end{array}$		$\begin{array}{c c} \hline & \begin{array}{c} 0123 \\ B \end{array} \\ \hline \end{array}$	
$\begin{array}{c c} \hline & \begin{array}{c} 0123 \\ B \end{array} \\ \hline \end{array}$		$\begin{array}{c c} \hline & \begin{array}{c} \dots \\ \dots \end{array} \\ \hline \end{array}$	
		$\begin{array}{c c} \hline & \begin{array}{c} \dots \\ \dots \end{array} \\ \hline \end{array}$	
		$\begin{array}{c c} \hline & \begin{array}{c} 0123 \\ A \end{array} \\ \hline \end{array}$	

и в результате получаем конструкцию, полностью удовлетворяющую правилу (CR)'.

Кроме того, для TRM* характерно следующее. Будем рассматривать E14 как частный случай подстановки вместо каждого вхождения A в "мингловую" аксиому такой формулы, главным знаком которой является релевантная импликация. Тогда можно показать, что результат подобной подстановки в "мингловую" аксиому произвольной (сколь угодно сложной) правильно построенной формулы с любым другим главным логическим знаком (то есть $\&$, $\vee$ или $\sim$) будет выводимой формулой в системе TRM*. Выводимыми будут, например, формулы вида $(A \& B) \supset ((A \& B) \supset (A \& B))$, $(A \vee B) \supset ((A \vee B) \supset (A \vee B))$ и т. п.

И наконец, можно говорить, что система TRM* не является релевантной в некотором строгом смысле в силу того обстоятельства, что в TRM* выводима формула $(\sim A \& (A \vee B)) \supset B$, а также формула $(A \& (\sim A \vee B)) \supset B$, что считается, как правило, неприемлемым с точки зрения релевантной логики.

Варьируя понятие существенного вхождения (простой) подформулы в данную формулу и внося соответствующие изменения в правило (CR)', можно получить различные варианты релевантных табличных систем. Следует отметить, что это понятие является необходимым для формулировки табличной системы только в том случае, когда применяются определенные критерии релевантности в стиле систем релевантного следования RM или R. Например, исключив понятие существенности вхождения подформулы в формулу из правила (CR)', мы тем самым усилим его и в результате получим вместо TRM* такую релевантную систему, в которой формулы $A \supset (A \vee B)$ и $(A \& B) \supset A$ будут невыводимыми. Кстати, первая из них действительно не выдерживает критики с точки зрения различных критериев релевантности.

Предположим, что требование, сформулированное в пунктах 2 и 3 правила (CR)' в силу каких-то причин неприемлемо. В этом случае можно сформулировать релевантное табличное исчисление с индексированными формулами так, чтобы формулировка не зависела от понятия вхождения подформулы в испытываемую формулу. Но при этом требуется другое "техническое ухищрение" - дифференциация индексов.

Используя введенное выше понятие индекса без всяких изменений, будем различать теперь три сорта индексов: обычные индек-

сы (они уже определены выше), $(+)$ -индексы и $(*)$ -индексы. Последние два сорта индексов будем называть ограниченными ($(+)$ -ограниченными и $(*)$ -ограниченными соответственно). Формальное определение ограниченных индексов весьма просто:

(1) Если w есть обычный индекс, то $(+w)$ есть $(+)$ -ограниченный индекс.

(2) Если w есть обычный индекс, то $(*w)$ есть $(*)$ -ограниченный индекс.

Определения отношения R , понятий ранга индекса и подындкса остаются для ограниченных индексов такими же, как и для обычных. Значение ограниченных индексов (и их отличие от обычных) раскрывается в следующих формулировках правил построения и замыкания таблиц.

$(BR)^*$ Множество правил для формул с главными логическими знаками $\&$, $\vee$ и $\sim$ остается таким же, как в $(BR)'$, независимо от того, какой, обычный или ограниченный, индекс приписан формуле, к которой применяется данное правило.

Правила для импликативных формул с обычными индексами такие же, как в $(BR)'$, за исключением того, что в формулировке $(\supset_L)$ w' заменяется на $(+w)$, w'' заменяется на $(*w)$, а в формулировке $(\supset_P)$ A заменяется на A , а B заменяется на B .

Правила для импликативных формул с ограниченными индексами:

$(\supset_L)^+$ Если формула $A \supset B$ встречается в левом столбце (под)таблицы, то расщепляем эту (под)таблицу на две (под)таблицы и пишем A в правом столбце одной из них, а B - в левом столбце другой; причем имеет место $R(+w), (+w')$.

$(\supset_P)^+$ Если формула $A \supset B$ встречается в правом столбце (под)таблицы, то пишем формулу A в левом, а формулу B в правом столбце этой (под)таблицы, где k - число, не встречающееся в любых индексах, приписанных формулам, входящим в данную (под)таблицу.

$(\supset_L)^*$ Если формула $A \supset B$ встречается в левом столбце (под)таблицы, то расщепляем эту (под)таблицу на две (под)таблицы и пишем формулу A в правом столбце одной из них, а B - в левом столбце другой; причем имеет место $R(*w), (*w')$.

$(\supset_P)^*$ Если формула $A \supset B$ встречается в правом столбце (под)таблицы, то пишем формулу A в левом, а формулу B в правом столбце этой (под)таблицы, где k - число, не встречающееся в любых индексах, приписанных формулам, входящим в данную (под)таблицу.

Правила для негативных формул с ограниченными индексами:

$(\sim_L)^+$ Если формула $\sim A$ встречается в левом столбце (под)-

таблицы, то в правом столбце этой же (под)таблицы пишем формулу $\overset{(+w)}{A}$.

$(\sim_p)^+$ Если формула $\sim \overset{(+w)}{A}$ встречается в правом столбце (под)таблицы, то в левом столбце этой же (под)таблицы пишем формулу $\overset{(+w)}{A}$.

Правила для негативных формул с $(*)$ -ограниченными индексами получаются из последних двух правил просто заменой $\sim \overset{(+w)}{A}$ на $\overset{(*w)}{\sim A}$ и $\overset{(+w)}{A}$ на $\overset{(*w)}{A}$.

Правила замыкания $(CR)^*$:

1. (Под)таблица замкнута, если (а) в одном ее столбце встречается формула $\overset{(+w)}{\alpha}$, а в другом - формула $\overset{(*w)}{\alpha}$; или (б) в обоих столбцах данной (под)таблицы встречается формула $\overset{0}{\alpha}$ или $\overset{(*w)}{\alpha}$, где $w > 0$; в обоих случаях данная таблица замкнута формулой α .

2. Таблица замкнута, если и только если замкнуты все ее (под)таблицы, причем по крайней мере одна из этих (под)таблиц замкнута формулой, которой приписан ограниченный индекс, имеющий максимальный ранг среди всех индексов, приписанных формулам, входящим в данную таблицу.

Табличная система TR^* задается правилами $(BR)^*$ и $(CR)^*$.

Как и прежде, коррективными выводами в системе TR^* будем считать замкнутые согласно правилу $(CR)^*$ таблицы.

Такие выводы невозможно построить для "мингловой" аксиомы и для формулы $(\sim A \& (A \vee B)) \supset B$.

Например:

$\overset{(+01)}{\sim A \& (A \vee B)}$		$\overset{(+01)}{(\sim A \& (A \vee B)) \supset B}$	
$\overset{(+01)}{\sim A}$	$\overset{(+01)}{A \vee B}$	$\overset{(*01)}{B}$	$\overset{(+01)}{A}$
(2)		(1)	
$\overset{(+01)}{A}$		$\overset{(+01)}{B}$	

В случае (2) таблица не замкнута - не выполняется первый пункт правила $(CR)^*$.

5. Дедуктивная эквивалентность табличных и аксиоматических систем

Во всех приведенных выше формулировках табличных систем ключевую роль играют индексы, обычные или ограниченные, а также определенные требования, предъявляемые к замкнутой табличной конструкции в целом, например: чтобы в ней имело место замыкание по всем вхождениям простых подформул в испытываемую на

выводимость формулу. В данном случае индексы являются особыми синтаксическими отметками, регламентирующими построение табличных выводов. Однако им может быть придан и семантический смысл. Индексы можно рассматривать как отметки, приписываемые элементам множеств возможных миров, и строить соответствующие модели, предназначенные для установления общезначимости формул. Установив полноту рассматриваемого аксиоматического исчисления относительно таких моделей и показав эквивалентность моделей и таблиц, можно получить доказательство эквивалентности аксиоматических и табличных систем. Именно в таком случае говорят, что для исчисления построены семантические таблицы.

Оставаясь на синтаксическом уровне, можно показать дедуктивную эквивалентность аксиоматических и табличных систем, используя метод, предложенный выше, в третьем разделе данной статьи, т.е. с помощью исчислений индексированных секвенций и исчислений наборов индексированных секвенций.

Возьмем, например, системы TRM^* и RM^* . Их дедуктивная эквивалентность устанавливается следующим образом.

Используя без пояснений все введенные выше понятия, построим секвенциальное исчисление G^{IRM^*} .

Основная секвенция, логические правила для отрицания и структурные правила такие же, как и для G^I . К ним добавляем правила для конъюнкции, дизъюнкции и импликации:

$$\begin{array}{c}
 \frac{w \quad w}{A, A \& B, \Gamma \rightarrow \Theta} \quad ; \quad \frac{w \quad w}{B, A \& B, \Gamma \rightarrow \Theta} \quad ; \quad \frac{\Gamma \rightarrow \Theta, A \& B, A \quad \rightarrow \Theta, A \& B, B}{\Gamma \rightarrow \Theta, A \& B} \\
 \\
 \frac{w \quad w}{A, A \vee B, \Gamma \rightarrow \Theta} \quad ; \quad \frac{w \quad w}{B, A \vee B, \Gamma \rightarrow \Theta} \quad ; \quad \frac{\Gamma \rightarrow \Theta, A \vee B, A}{\Gamma \rightarrow \Theta, A \vee B} \quad ; \quad \frac{\Gamma \rightarrow \Theta, A \vee B, B}{\Gamma \rightarrow \Theta, A \vee B} \\
 \\
 \frac{w, k}{A, \Gamma \rightarrow \Theta, A \supset B, B} \quad ; \quad \frac{w \quad w' \quad w'' \quad w}{A \supset B, \Gamma \rightarrow \Theta, A \quad B \quad , A \supset B, \Delta \rightarrow Z} \\
 \Gamma \rightarrow \Theta, A \supset B \quad ; \quad A \supset B, \Gamma, \Delta \rightarrow \Theta, Z
 \end{array}$$

Определение G^{IRM^*} -вывода:

G^{IRM^*} -вывод есть дерево I -секвенций Σ , удовлетворяющее следующим условиям:

- (1) Конечной секвенцией Σ является чистая секвенция;
- (2) Каждому существенному вхождению простой подформулы в любую формулу конечной секвенции соответствует формула, являющаяся членом контрарной пары, входящей в основную секвенцию, являющуюся одной из вершин дерева Σ .

Здесь контрарной парой называются два явно выделенных вхождения формулы A в антецеденте и сукцеденте основной секвенции $\Gamma_1, A, \Gamma_2 \rightarrow \Theta_1, A, \Theta_2$.

Можно показать, что если вывод чистой секвенции $\rightarrow\alpha$ удовлетворяет определению $G^I RM^*$ -вывода, то формула α выводима в RM^* тогда и только тогда, когда секвенция $\rightarrow\alpha$ выводима в исчислении $G^I RM^*$.

Далее, так же, как и в случае с $G^I M$, исчисление $G^I RM^*$ может быть преобразовано в исчисление наборов индексированных секвенций $B^I RM^*$, естественно с ограничением на $B^I RM^*$ -выводы, соответствующим определению $G^I RM^*$ -вывода. Такие исчисления будут эквивалентными. $B^I RM^*$, в свою очередь, оказывается лишь иной формой записи табличного исчисления TRM^* : выводы $B^I RM^*$ легко переводимы в замкнутые таблицы TRM^* , и обратно.

Из сказанного следует, что формула α выводима в системе RM^* тогда и только тогда, когда можно построить вывод в табличной системе TRM^* .

Аналогичным методом устанавливается и дедуктивная взаимосвязь систем TR^* и R . Однако в этом случае требуется более сложная формулировка секвенциального исчисления с индексированными формулами, включающая основные секвенции и логические правила отдельно для случаев, когда формулам приписываются ограниченные индексы. Подробное рассмотрение этого вопроса выходит за рамки данной статьи.

ЛИТЕРАТУРА

1. Быстров П.И. Синтаксический анализ некоторых расширений $S4$ // Синтаксические и семантические исследования неэкстенциональных логик. М., 1939.
2. Крипке С. Семантический анализ модальной логики // Фейс Р. Модальная логика. М., 1974.
3. Beth E.W. The Foundations of Mathematics. Amsterdam, 1959.
4. Kanger G. Provability in Logic. Stockholm, 1957.

РАСПРЕДЕЛЕННЫЕ СИСТЕМЫ С ТОЧКИ ЗРЕНИЯ ЭПИСТЕМИЧЕСКОЙ ЛОГИКИ

Настоящая работа посвящена интерпретации вычислительных систем, представляющих собой композиции подсистем процессов, непрерывно действующих и взаимодействующих друг с другом и с общим внешним окружением, в терминах эпистемической логики. Речь пойдет об особом классе вычислительных систем – распределенных систем (*distributed systems*), в которых каждый процесс отвечает за выполнение своей конкретной задачи, а реализация последней может зависеть от условий протекания других процессов. В результате взаимодействия последних происходит постоянный обмен информацией между процессами. Если так можно выразиться, процесс должен "знать" о своем собственном состоянии и о состояниях других процессов. Рассмотрение процессов в качестве субъектов и позволило осуществить формализацию рассуждений о знании в распределенных системах с помощью эпистемической логики. Впервые в этих целях используется аппарат системы BEL, разработанной автором [1]. В свою очередь, обращение к проблемам компьютерных систем позволило автору уточнить методологические принципы построения эпистемических систем и сконструировать комбинированную модель, воплотив в ней идеи интерпретации эпистемических логик по типу модальной системы S5 (подход, восходящий к ранним работам Хинтички [3]) и идеи построения двууровневых логик типа BEL.

1. Машина и знание (введение)

Как логическая дисциплина эпистемическая логика развивалась с целью изучения человеческих рассуждений о знании и описания корректных форм выводов на основании знаний и представлений. В каком смысле может что-то "знать" машина? Разумеется, информация, которую выдает машина, не есть выражение ее мнения в том смысле, как мы говорим об этом применительно к человеку. Знание или незнание представляют собой оценки, которые дает наблюдатель определенным состояниям машины. Будем говорить, что процесс знает, что A, если состояние процесса таково, что имеет место A. В каждой конкретной системе то, что известно процессу, зависит от задач исследования. Например, знание может быть информацией, хранящейся в базе данных и доступной процессу. В другом случае знание может пополняться за счет информации, которую процесс может вывести, исходя из известного. В третьем случае информация может поступать от других процессов и от внешнего окружения.

Для того чтобы постичь, что знает другой человек, можно действовать двумя различными способами. Мы часто приписываем

другому человеку полагания, мнения и знания для того, чтобы понять и объяснить его поведение. Этот подход является как бы взглядом "извне", отражая позицию внешнего наблюдателя. Иная ситуация складывается при попытке выразить мнение другого человека, когда мы вынуждены попытаться встать на его точку зрения, вникнуть в суть его проблем. Такая позиция является как бы взглядом "изнутри". На первой позиции основаны бихевиористские методы в психологии, а на второй — методы интроспекции. Проводя параллель между рассуждениями о знаниях человека и знаниях машины, можно сказать, что в последнем случае мы имеем дело с подходом внешнего наблюдателя. Анализируются рассуждения программиста, конструирующего сложную систему взаимодействующих процессов. Программист и рассматривается как наблюдатель за всевозможными проявлениями поведения вычислительной системы.

При внешнем подходе к знанию, тот факт, что процесс знает, что A , вовсе не означает, что A является неким утверждением о состоянии знания самого процесса. A может являться неким фактом, имеющим место в системе в данное время при определенной конфигурации процессов (или при определенном состоянии процесса или группы процессов). Например, A может быть следующим предложением: "переменная x имеет значение 1".

Следует иметь в виду, что есть еще одно существенное различие в стратегии исследования знаний другого человека и стратегии исследования знаний машины. Человеческие познания существуют как данность, которая постоянно изучается, а знание машины берется как данность, которая создается и изучается, причем создается с желанием реализовать намечаемые характеристики. Отсюда, например, будет рассматриваться не только всевозможное поведение, но и поведение процесса в соответствии с заранее заданной программой для всей системы в целом. Другими словами, конструктивный момент играет решающее значение при описании знания процессов.

Имея в виду указанные предварительные соображения, перейдем к логико-эпистемологическому анализу распределенных систем.

2. Интерпретация систем взаимодействующих процессов в семантиках возможных миров (горизонтальный взгляд)

Семантику языка описания распределенных систем можно рассматривать как конкретизацию семантик возможных миров. Понятие возможного мира при этом заменяется понятием состояния системы. Это становится возможным благодаря тому, что поведение процесса можно представить в виде последовательности его действий. Для внешнего наблюдателя последовательность действий может выглядеть как последовательность событий, в которых процесс участвовал до некоторого момента времени, или другими словами, последовательность состояний, в которых процесс нахо-

дился в фиксированный период времени. Последовательность событий (или состояний) часто называют *протоколом поведения процесса*.

По аналогии с динамической логикой мы будем различать состояния и действия. Как и в динамической логике, с семантической точки зрения высказывание (proposition) будет отождествляться с множеством состояний (возможных миров), где оно имеет место; а действие - с последовательностью состояний (возможных миров) совершения данного действия.

В центре нашего исследования - описание того, что видит наблюдатель, т.е. язык описания протоколов процессов как последовательностей состояний. Поскольку нас будут интересовать не сами по себе локальные процессы, а процессы как составные единицы сложного процесса, то под протоколом в дальнейшем будем иметь в виду описание всевозможных наблюдений поведения *глобального процесса*. При этом протоколы входящих в него процессов будем просто называть локальными историями данного процесса. Пусть A обозначает совокупность n -процессов. Последовательность состояний некоторого процесса α из A в фиксированное время и есть *локальная история процесса α* . Полное описание композиции локальных историй процессов будем называть *глобальной историей n -процессов*. Индивидуальную глобальную историю в распределенной системе можно свести к минимальной в смысле реализации поставленной задачи и рассматривать как точку соотнесения или возможный мир. Множество всевозможных глобальных историй (точек) и есть протокол совокупного процесса.

Обязательным условием построения моделей для распределенных систем является замкнутость относительно приставки или префикса. *Префикс* есть отношение частичного порядка, заданное на глобальных историях. Если глобальная история w_0 есть начало некоторой глобальной истории w , то найдется такое продолжение w' истории w_0 , что в итоге получим историю w . Формально: $w_0 \leq w$, т.е. $\exists w' (w_0 \hat{~} w' = w)$, где " $\hat{~}$ " есть операция конкатенации или сочленения. С точки зрения теории логических моделей, протокол можно рассматривать как модель, если даны значения переменных и описаны все необходимые условия функционирования системы.

Для начала рассмотрим один из самых простейших языков описания системы, состоящей из нескольких процессов. Пусть L_0 есть язык, на котором дается описание поведения процессов в индивидуальных глобальных историях. Множество базисных фактов Bas пропозиционального языка L_0 может содержать, например, следующие утверждения: "локальная переменная y имеет значение 0", "процесс α успешно завершил работу", "процесс α считывает значение переменной x " и т.д. Пусть a, b, c есть пропозициональные буквы, обозначающие базисные факты.

Модальный язык L содержит обычные булевы связки и оператор K_α , где α - некий процесс из A . $K_\alpha A$ можно прочитать как "процесс α знает, что A " или "процесс α имеет достаточно информа-

ции, чтобы вывести A ". Множество правильно построенных формул $Form$ языка L определяется обычным образом:

- 1) если $a \in L_0$, то $a \in L$;
- 2) если $A, B \in L$, то $\neg A, (A \& B) \in L$;
- 3) если $A \in L$, то $K_\alpha A \in L$.

Под моделью языка L будем понимать следующую упорядоченную пятерку $\mathbb{M} = \langle W, V, \Phi, =, \varphi \rangle$, где W есть множество индивидуальных глобальных историй, замкнутых относительно префикса;

$V = \{V_\alpha : \alpha \in A\}$ – семейство множеств локальных историй для каждого процесса α из A ;

$\Phi = \{\Phi_\alpha : \alpha \in A\}$ – семейство функций выбора, которые по каждой глобальной истории выдают локальную историю процесса α : для любого α из A $\Phi_\alpha : W \rightarrow V_\alpha$.

"=" – есть отношение типа эквивалентности (рефлексивно, симметрично, транзитивно), заданное на историях.

Если в системе есть общие часы и учитывается время событий, то говорят, что две локальные истории эквивалентны ($\Phi_\alpha(w) = \Phi_\alpha(w')$), если та же самая последовательность событий достигается при стирании отметок часов. Запись $\Phi_\alpha(w) = \Phi_\alpha(w')$ будет означать тот факт, что две глобальные истории w и w' оказываются неразличимыми для процесса α , поскольку его локальные истории в данных глобальных историях совпадают. Две глобальные истории эквивалентны ($w = w'$), е.т.е. одна и та же последовательность совокупных событий имеет место.

φ – есть функция, приписывающая значения пропозициональным выражениям из базового множества Bas :

Определим понятие истины в точке модели $\mathbb{M}$ ($\mathbb{M}, w \models A$)

- 1) $\mathbb{M}, w \models a$ е.т.е. $a \in \varphi(w)$;
- 2) $\mathbb{M}, w \models K_\alpha A$ е.т.е. $w' \models A$ для всех w' таких, что $\Phi_\alpha(w) = \Phi_\alpha(w')$;
- 3) $\mathbb{M}, w \models \neg A$ е.т.е. неверно, что $w' \models A$;
- 4) $\mathbb{M}, w \models (A \& B)$ е.т.е. $\mathbb{M}, w \models A$ и $\mathbb{M}, w \models B$.

Очевидно, что приведенная модель является моделью для S5-подобной системы. Отсюда следует, что характеристики знания могут быть описаны аксиомами и теоремами системы S5. Например, схема $(K_\alpha A \& K_\alpha (A \supset B)) \supset K_\alpha B$ утверждает, что знание субъекта замкнуто относительно импликации (выводимости). $(K_\alpha A \supset A)$ отражает методологическое требование, предъявляемое к рациональному познанию: "настоящее" знание в отличие от мнения должно содержать истину. Согласно схеме $(K_\alpha A \supset A)$, субъект знает лишь то, что истинно. Схемы $(K_\alpha A \supset K_\alpha K_\alpha A)$ и $(\neg K_\alpha A \supset K_\alpha \neg K_\alpha A)$ обращают внимание на рефлексивный характер знания: субъект осознает свое знание или незнание и может раскрыть основания своего знания (незнания). Конечно, все эти характеристики рассматривались применительно к человеческому знанию. Однако нечто подобное может быть приписано и субъектам-процессам, особенно если иметь в виду конструктивный характер такого приписывания. На-

пример, для наблюдателя было бы желательно иметь истинными оба утверждения $K_{\alpha}A$ и A , или другими словами, A истинно всегда, когда истинно $K_{\alpha}A$ при нахождении процесса α в одном и том же состоянии ($K_{\alpha}A \supset A$).

S5-подобная система может быть использована также для описания группового знания. Расширим язык L , введя оператор группового знания K_J , где J есть группа процессов из множества A . Смысл выражения $K_J A$ может быть следующим: процессы из группы J имеют достаточно информации для того, чтобы вывести A . Расширим функцию выбора до функции типа Φ_J для $J \subseteq A$. По каждой глобальной истории w функция Φ_J выдает семейство последовательностей - все локальные истории процессов из группы J : $\langle \Phi_{\alpha}(w) : \alpha \in J \rangle$. Для $J=A$ $\Phi_J(w)$ есть $\Phi_A(w)$ - полный перечень локальных историй в глобальной истории w . Пункт 2 в определении понятия истины заменится на 2':

2') $w \models K_J A$ в.т.е. $w' \models A$ для всех w' таких, что $\Phi_J(w) = \Phi_J(w')$.

В формализации рассуждений о знании с помощью S5-подобной системы реализуется, если так можно сказать, *горизонтальный взгляд*: как бы просматривается ход исполнения протокола, находятся совпадающие последовательности событий для ряда процессов, устанавливается отношение эквивалентности между ними и отмечается, что данная группа процессов имеет информацию ("знает") об определенных свойствах системы в целом, если они имеют место каждый раз, когда данные локальные истории повторяются.

В большинстве работ, связанных с интерпретацией знания в системах взаимодействующих процессов, нашел развитие именно горизонтальный взгляд (см., напр. [2,4]). Мне представляется, что было бы полезно рассмотреть систему и в вертикальном срезе. Другими словами, обратить внимание на рассуждения о знании процессов в некоторое фиксированное время решения определенной задачи, а не во время исполнения всего протокола. Рассмотрению вопроса о том, что может "знать" процесс в индивидуальной глобальной истории, посвящен следующий параграф.

3. BEL-подобные системы (вертикальный подход)

Следует заметить, что имеется много способов описания того, что может происходить в индивидуальных глобальных историях (точках) из множества W . В исследованиях вычислительных систем используются операции разных видов: операции над программами, операции с пропозициональными выражениями, операции над протоколами, над процессами и т.д. Эпистемическая логика в этом плане представляет собой формализацию рассуждений, которые ведутся на метауровне, по отношению к которому описание поведения объектов знания предполагается заданным, или другими словами, остается вне поля рассмотрения. Поэтому в дальнейшем, если нами и будут рассматриваться те или иные понятия теорети-

ческого программирования, то это будет делаться без раскрытия их математического смысла.

В этом параграфе мы несколько изменим тактику и будем говорить не о состояниях, в которых находится система, а о событиях, в которых участвуют процессы. Разумеется, как и в индивидуальных глобальных историях, так и в локальных, происходят разные события. Одни из них — независимые, а другие — общие, т.е. такие, в которых принимают участие сразу несколько процессов. Нами будут различаться события и высказывания, которые вовсе не обязательно являются высказываниями о событиях. Важно, что те или иные высказывания могут иметь (или не иметь) место при участии процессов в тех или иных событиях. Другими словами, рассматриваются высказывания, принадлежащие языку внешнего наблюдателя.

Будем различать информацию, которая представляется доступной процессам, и информацию, которую имеет наблюдатель. Пусть буквы A , B и C обозначают пропозициональные выражения некоторого немодального языка L , описывающего ту информацию, которую могут иметь процессы. Язык наблюдателя L , как и прежде, представляет собой надстройку над языком L_0 . Язык L , кроме булевых связок, содержит ряд эпистемических операторов. Операторы " $_$ " и " $_$ " образуют новые формулы из выражений для формул и выражений для процессов. Выражение " $_A$ " можно прочесть как "процессу α известно, что имеет место A ". Знание здесь понимается в слабом смысле как претензия на знание. $_$ скорее означает, что α полагает, что знает, что имеет место A . Для знания в сильном смысле будет использоваться оператор " $_$ ". Выражение $_A$ можно понимать в следующем смысле: процесс α имеет достаточно информации, чтобы получить утверждение A и A действительно имеет место (или " α имеет истинное знание об A "). Нами будет рассмотрено также выражение типа " $_B A$ ", которое можно прочесть как " α знает, что β знает, что A " или "процессу α известна информация о том, что процесс β имеет информацию об A ". В данном случае " $_ _$ " не есть простая итерация оператора " $_$ ", а представляет собой новое операторное выражение. Оператор " $_ _$ " по формуле и двум процессам образует новую формулу.

Пусть W , как и прежде, есть множество индивидуальных глобальных историй. T есть множество моментов времени (натуральных чисел). Состояние глобальной истории w в момент t есть глобальное событие, в котором принимают участие процессы из заданного набора процессов A . Глобальное событие (w, t) можно представить как совокупность, состоящую из локальных событий локальных процессов. Индивидуальное глобальное событие (w, t) будет рассматриваться как точка соотнесения в семантике (возможный мир). Для любого процесса α из A через $E\alpha$ обозначим множество событий, в которых процесс α *в принципе* может участвовать. Заметим, что множество V , рассмотренное в параграфе 2, есть объединение множеств $E\alpha$. Те события, в которых процесс

действительно может участвовать, если потребуется, задаются протоколом. В нашем случае это означает, что последовательности пар из множества $\{W \times T\}$ или индивидуальные глобальные истории задаются протоколом. Предполагается, что $\{W \times T\}$ замкнуто относительно префикса.

Функции из семейства функций $\{\Phi_\alpha: \alpha \in A\}$ являются отображениями из множества точек $\{W \times T\}$ в множества событий Ev_α :

$$\Phi_\alpha: \{W \times T\} \rightarrow Ev_\alpha \text{ для любого } \alpha \in A.$$

Функция выбора Φ_α является частичной. Будем говорить, что функция Φ_α в (w, t) равна нулевому событию, если в глобальном событии (w, t) не происходит никакого события из множества Ev_α , в событиях из которого процесс α может принимать участие. Функция Φ_α является одно-однозначной. Причем, если в системе есть встроенные часы, то соответствующее событие помечается отметкой часов. Функция Φ_α может быть расширена до функции выбора групп событий Φ_J , где $J \subseteq A$. $\Phi_J(w, t)$ есть множество событий, в которых участвуют члены группы J .

Отношение типа эквивалентности имеет место не только между историями, но и между событиями. Будем говорить, что два глобальных события (w, t) и (w', t') неразличимы (эквивалентны) для процесса α ($\Phi_\alpha(w, t) = \Phi_\alpha(w', t')$) е.т.е. процесс α участвует в том же самом событии в этих историях. Для $J = A$ запись $\Phi_A(w, t) = \Phi_A(w', t')$ означает эквивалентность двух глобальных событий для всех процессов.

Будем рассматривать отношение достижимости R . Мы будем называть его *перекрестным*, поскольку с его помощью устанавливается достижимость между событиями различных процессов (другими словами, между событиями, в которых участвуют различные процессы). Пусть A состоит из двух процессов α и β . Будем говорить, что точка (w', t') достижима из точки (w, t) по отношению $R_{\alpha\beta}$ для процессов α и β , е.т.е. найдется такая последовательность точек $\langle z_0, z_1, z_2 \rangle$, где $(w', t') = z_0$, а $(w, t) = z_2$, что $\Phi_\beta(z_0) = \Phi_\beta(z_1)$ и $\Phi_\alpha(z_1) = \Phi_\alpha(z_2)$. Неформально, отношение $(w, t) R_{\alpha\beta} (w', t')$ означает, что существует канал связи между процессами α и β , по которому они обмениваются информацией. При $R_{\alpha\beta}$ α получает информацию от β , а при $R_{\beta\alpha}$ β получает информацию от α .

φ есть функция, приписывающая значения пропозициональным выражениям. Для каждого выражения базового языка L_0 и для каждого процесса α из A функция φ есть одна из функций φ_T или φ_F . Имеет место $\varphi_T(A, \alpha) \subseteq Ev_\alpha$ и $\varphi_F(A, \alpha) \subseteq Ev_\alpha$. $\varphi_T(A, \alpha)$ есть множество локальных событий процесса α , во время участия в которых имеет место A . $\varphi_F(A, \alpha)$ есть множество локальных событий, во время участия в которых процесса α не имеет место A . В семантике допускается, что имеются локальные события, где процессу может быть ничего неизвестно относительно A , т.е. события, не принадлежащие ни множеству $\varphi_T(A, \alpha)$, ни множеству $\varphi_F(A, \alpha)$. Кроме того, для каждого базисного выражения D модального языка L , в

том числе и базисных выражений встроеного языка L_0 , функция φ сводится к функции φ_0 : $\varphi_0(A) \subseteq W$. $\varphi_0(A)$ есть множество индивидуальных глобальных событий, во время которых имеет место A .

Нам остается определить понятие истины в точке модели при данном приписывании: $(w, t) \models^{\varphi} A$. Для этого сначала определим понятия истинности и ложности формул при участии процессов в локальных событиях. Для любого α из A имеет место:

$$\Phi_{\alpha}(w, t) \models A \text{ в.т.е. } \Phi_{\alpha}(w, t) \in \varphi_T(A, \alpha);$$

$$\Phi_{\alpha}(w, t) \not\models A \text{ в.т.е. } \Phi_{\alpha}(w, t) \in \varphi_F(A, \alpha).$$

Для глобальных событий имеем:

$$(w, t) \models A \text{ в.т.е. } (w, t) \in \varphi_0(A).$$

Для булевых связок определение стандартно. Для эпистемических операторов имеют место следующие условия:

$$(w, t) \models \alpha A \text{ в.т.е. } \Phi_{\alpha}(w, t) \models A;$$

$$(w, t) \models \bar{\alpha} A \text{ в.т.е. } (w, t) \models \alpha A \text{ и } (w, t) \not\models A.$$

Введенные операторы знания " $_$ " и " $\bar{_}$ " могут быть описаны аксиомными схемами системы типа BEL, которая полна и непротиворечива относительно рассмотренной выше семантики [1]. Пусть A и B — немодальные пропозициональные формулы языка L_0 , C и D — формулы эпистемического языка L . α — произвольный процесс из A . Система BEL определяется следующими схемами и правилами:

PL. C , если C — пропозициональная тавтология;

$$A1. \underline{\alpha}(A \& B) \equiv (\underline{\alpha}A \& \underline{\alpha}B);$$

$$A2. \underline{\alpha}\neg(A \& B) \equiv \underline{\alpha}\neg A \vee \underline{\alpha}\neg B;$$

$$A3. \underline{\alpha}\neg\neg A \equiv \underline{\alpha}A;$$

$$A4. \underline{\alpha}A \equiv \neg(\underline{\alpha}\neg A);$$

$$MP.C, C \supset D / D.$$

Оператор " $\bar{_}$ " вводится по определению: $\bar{\alpha}A =_{Df} \underline{\alpha}A \& A$. Система BEL представляет собой простейший пример двухуровневой системы: на первом уровне рассматривается пропозициональный язык-объект, а на втором уровне — модальный метаязык.

Формализация рассуждений о знании средствами систем типа BEL отражает точку зрения на системы реализующихся во времени процессов по вертикали: анализируются все события, в которых участвуют процессы за фиксированный промежуток времени. Данный подход можно соединить с горизонтальным рассмотрением знания процессов по мере исполнения протокола в целом. Будем говорить, что процесс α знает, что имеет место A в индивидуальной глобальной истории w в следующем случае:

$w \models \bar{\alpha}A$ в.т.е. $(w, t) \models \bar{\alpha}A$ для всех t , в течение которых реализуется w .

Будем говорить, что процесс α знает, что имеет место A в протоколе при условии:

$$w \models K_{\alpha}A \text{ в.т.е. для всех } \Phi_{\alpha}(w') = \Phi_{\alpha}(w) \text{ имеет место } w \models \bar{\alpha}A.$$

Нетрудно видеть, что оператор знания-в-протоколе K_{α} может быть определен в S5-подобной системе. В результате образуется новая полимодальная эпистемическая логика, представляющая собой сплав систем типа S5 и BEL, которые строятся на принци-

пиально различных основаниях и за которыми стоят два альтернативных подхода к анализу знания.

В предложенной выше семантике можно определить ряд других полезных операторов, относящихся к различным характеристикам знания. Например, рассмотреть знание одного процесса о другом, т.е. оператор " ". Он определяется следующим условием:

$(w, t) \models \alpha \beta A$ в.т.е. для любой точки (w', t') , такой, что (w', t') есть префикс (w, t) , если имеет место $(w, t) R_{\alpha\beta} (w', t')$, то $\Phi_{\alpha}(w', t') \models A$. Если мы имеем дело с утверждениями о постоянных событиях, для которых верно утверждение: если наступает A , то всегда будет A , то имеет место более сильное утверждение $\bar{\alpha}\beta A$. Оно также имеет место при $\Phi_{\beta}(w', t') = \Phi_{\beta}(w, t)$. Заметим, что отношение $R_{\alpha\beta}$ не есть отношение типа эквивалентности, оно иррефлексивно и связно. Кроме того, $R_{\alpha\beta} \neq R_{\beta\alpha}$, что означает, что из $\alpha\beta A$ вовсе не следует $\beta\alpha A$. Если процесс α получил сообщение от процесса β о том, что имеет место A , то отсюда не следует, что процесс β имеет информацию о том, что процессу α известно о том, что имеет место A . Для этого нужно, чтобы процесс α послал сообщение процессу β о том, что он получил сообщение об A от β .

В семантике можно определить понятие неявного знания для группы процессов. Запись $\alpha\beta A$ можно прочесть как "группа процессов α и β неявно знает, что имеет место A ". Оператор " " образует из формульного выражения и двух выражений для процессов новое формульное выражение. Условия для оператора неявного знания следующие:

$(w, t) \models \alpha\beta A$ в.т.е. $(w, t) \models \alpha A$ и $(w, t) \models \beta(A \supset B)$.

Последнее условие означает, что если процессу α доступна информация об A , а процесс β может вывести B из A , то наблюдатель сможет сделать вывод о том, что группа процессов α и β знает неявно, что B имеет место.

Неявное знание в другой интерпретации можно понимать как *потенциальное* знание, а явное знание — как то, что данный процесс может вывести по заданному алгоритму. Для того чтобы ввести новые операторы, соответствующие данной трактовке, воспользуемся операцией "после", формальные свойства которой исследованы Сегербергом в динамической логике [5]. Запись $[\alpha]A$ означает, что после выполнения процессом α любого вычисления из заданной программы, имеет место A . Введем оператор явного знания " ".

αA можно прочесть как " α явно знает, что A " или " α имеет достаточно информации, чтобы вывести A ".

$(w, t) \models \alpha A$ в.т.е. $(w, t) \models [\alpha]A$.

Во всех остальных случаях при $\Phi_{\alpha}(w, t) \models A$ можно утверждать, что процесс неявно (или потенциально) может вывести A .

ЛИТЕРАТУРА

1. Герасимова И.А. Логический анализ рассуждений на основании личностных знаний // Синтаксические и семантические исследования неэкстенциональных логик. М., 1989.
2. Halpern J.Y. Reasoning about knowledge. An overview // Proceeding of the 1 Conference on Theoretical Aspects of Reasoning about Knowledge. San-Francisco, 1986.
3. Hintikka J. Knowledge and Belief. Ithaca, 1962.
4. Parikh R., Ramanujam R. Distributed processing and the logic of knowledge // Lecture notes in Computer Science. 1985. Vol.193.
5. Segerberg K. Applying Modal Logic to Programming // Stud. Log. 1980. N 2/3.

МАТРИЧНАЯ ЛОГИКА БЕЗ НЕПОДВИЖНЫХ ТОЧЕК

В статье рассматривается вопрос о взаимоотношении многозначных логик Лукасевича и Геделя. Результатом, с одной стороны, является построение логической бесконечнозначной матрицы без неподвижных точек относительно инволюции, а с другой — образование структур (типа MV -алгебры Чэна с псевдодополнением), обобщающих алгебраические свойства бесконечнозначной логики Лукасевича и интуиционистской логики.

Как хорошо известно, при обсуждении оснований математики в связи с возникшими в ней парадоксами в центре дискуссии оказался, благодаря голландскому математику Л.^Э.Я.Брауэру, "скандальный тезис о недействительности принципа *tertium non datur* для математики и вообще для бесконечных областей" [6]. Первой работой в этой области стала диссертация Брауэра, опубликованная в 1907 г. В итоге, исходя из интуиционистской концепции математики, на первом этапе построения интуиционистской логики появилась трехзначная матричная логика Гейтинга G_3 [19].

Почти в это же время, а именно начиная с 1910 г., предпринимаются попытки польским логиком Яном Лукасевичем опровергнуть логическими средствами фаталистический аргумент Аристотеля [1], в котором устанавливается логическая связь между принципом двузначности и предопределенностью будущего¹. В итоге Лукасевич пришел к выводу, что "индетерминистская философия является метафизическим субстратом новой логики" [13]. В этой работе сконструирована трехзначная матричная логика L_3 . Интересно, что в обоих случаях, т.е. в G_3 и L_3 не имеет места закон исключенного третьего, точно так же, как и в их n -значных обобщениях G_n [11] и L_n [14], к формулировкам которых мы перейдем.

Заметим, что логическая матрица есть не что иное, как алгебра с некоторым множеством выделенных элементов. Относительно этого выделенного множества элементов и определяется класс общезначимых формул. Однако нас будут интересовать алгебро-функциональные взаимоотношения между L_n и G_n .

Пусть $\mathbb{M}_n^L$ и $\mathbb{M}_n^G$ есть логические матрицы следующего вида ($n \geq 2$, $n \in \mathbb{N}$):

$$\mathbb{M}_n^L = \langle M_n, \sim, \rightarrow, \{1\} \rangle \quad \text{и} \quad \mathbb{M}_n^G = \langle M_n, \neg, \Rightarrow, \vee, \wedge, \{1\} \rangle, \quad \text{где}$$

$$M_n = \{0, 1/n-1, \dots, n-2/n-1, 1\},$$

$\{1\}$ — множество выделенных элементов,

$$\sim x = 1 - x,$$

$$x \rightarrow y = \min(1, 1 - x + y).$$

¹Подробно об этом в [4].

$$\neg x = \begin{cases} 1, & \text{если } x=0 \\ 0, & \text{в остальных случаях,} \end{cases}$$

$$x \Rightarrow y = \begin{cases} 1, & \text{если } x \leq y \\ y, & \text{если } x > y, \end{cases}$$

$$x \vee y = \max(x, y) = (x \Rightarrow y) \Rightarrow y,$$

$$x \wedge y = \min(x, y) = \sim(\sim x \vee \sim y).$$

Г.Моисил [15] показал в 1963 г., что трехзначная алгебра Лукасевича есть алгебра Гейтинга, т.е. операции $\neg$ и $\Rightarrow$ из $\mathfrak{M}_n^G$ определимы посредством операций $\sim$ и $\rightarrow$ из $\mathfrak{M}_n^L$, но не наоборот.

Теперь рассмотрим случай $2 < n < \omega$. Пусть

$$J_1(x) = \begin{cases} 1, & \text{если } x=t \\ 0, & \text{если } x \neq t \end{cases} \quad (0 \leq t \leq 1)$$

Заметим, что $\neg x = J_0(x)$. Дж.Россер и А.Тюркетт показали, что все операторы $J_1(x)$ могут быть определены посредством $\sim$ и $\rightarrow$ из $\mathfrak{M}_n^L$ [20]. А Р.Чайноли показал [9], что

$$x \Rightarrow y = J_1(x \Rightarrow y) \vee y,$$

где $J_1(x) = J_0(\sim x)$. В итоге получаем, что операции из $\mathfrak{M}_n^G$ определимы в $\mathfrak{M}_n^L$.

Теперь обратимся к последнему случаю, когда $n=\omega$. Пусть M_ω есть множество всех рациональных чисел из $[0,1]$. Из критерия Р.Мак-Нотона об определимости функций в $\mathfrak{M}_\omega^L$ [5] следует, что ни операция $\neg x$, ни операция $x \Rightarrow y$ не определимы в ней.

Тогда вопрос поставим следующим образом: можно ли "расширить" свойства операции $\rightarrow$ так, чтобы посредством этой новой операции и $\sim$ определить операции $\neg$ и $\Rightarrow$.

Рассмотрим матрицу $\mathfrak{M}_\omega^* = \langle [0,1]^*, \sim, \rightarrow, \{1\} \rangle$, где множество $[0,1]^*$ есть множество $[0,1]$, из которого элиминированы все числа с четными знаменателями, и

$$x \rightarrow y = \begin{cases} x, & \text{если } 0 < x = y < 1 \\ x \vee y, & \text{в остальных случаях.} \end{cases}$$

ЛЕММА I. Операции $\rightarrow$ и $\neg$ определимы в $\mathfrak{M}_\omega^*$. Это можно сделать следующим образом:

$$A = \sim((y \rightarrow x) \rightarrow (y \rightarrow x)) \rightarrow (x \rightarrow y) = x \rightarrow y^2.$$

$$B = \sim((x \rightarrow x) \rightarrow x) = \neg x.$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО (A).

1. $x < y$. Тогда $x \rightarrow y = 1$ и, следовательно, $A = 1 = x \rightarrow y$.

2. $x = y$.

2.1. $x=0$ или $x=1$. Тогда $x \rightarrow y = 1$ и, следовательно, $A = 1 = x \rightarrow y$.

2.2. $0 < x < 1$. Тогда $A = \sim((x \rightarrow x) \rightarrow x)$. Имеем два подслучая.

2.2.1. $x < 1/2$. Тогда $A = \sim((x \rightarrow x) \rightarrow x) = 0 \rightarrow x = 1 = x \rightarrow y$.

2.2.2. $x > 1/2$. Тогда $A = \sim((x \rightarrow x) \rightarrow x) = (1 - (1 - x + 1 - x)) \rightarrow x = (2x - 1) \rightarrow x$.

Поскольку $(2x - 1) < x$, то $(2x - 1) \rightarrow x = 1$. Следовательно $A = 1 = x \rightarrow y$.

3. $x > y$. Тогда $y \rightarrow x = 1$. Следовательно $A = \sim(1 \rightarrow 0) \rightarrow (x \rightarrow y) = x \rightarrow y = 1 - x + y = x \rightarrow y$.

²Заметим, что формула A есть в точности аналог формулы A в [2].

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО (B).

1. $0 < x < 1$. Тогда $x \rightarrow x = x$, но $x \rightarrow x = 1$. Следовательно, $B = \sim 1 = 0 = \neg x$.

2. $x = 0$. Тогда $B = \sim(1 \rightarrow 0) = 1 = \neg x$.

3. $x = 1$. Тогда $B = \sim(1 \rightarrow 1) = 0 = \neg x$.

Следствие из леммы 1:

$$x \rightarrow y = J_1(x \rightarrow y) \vee y,$$

где $J_1(x) = \neg(\sim x)$ и $x \vee y = (x \rightarrow y) \rightarrow y$.

Обратим внимание на весьма существенное свойство матрицы, которое заключается в том, что она не содержит неподвижных точек относительно $\sim$, т.е. $\sim x \neq x$.

Представляется интересным охарактеризовать операцию $\rightarrow$ в терминах уже хорошо известных операций. Это можно сделать следующим образом:

ЛЕММА 2. $C = ((J_1(x \equiv y) \rightarrow x) \wedge (x \rightarrow y)) \vee \neg x = x \rightarrow y$, где $x \equiv y = (x \rightarrow y) \wedge (y \rightarrow x)$. Заметим, что $x \equiv y = 1$, только если $x = y$. В этом случае значение формулы $J_1(x \equiv y)$ есть 1. В остальных случаях значение есть 0.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО (C).

1. $x < y$. Тогда $C = ((0 \rightarrow x) \wedge 1) \vee \neg x = 1 \vee \neg 1 = x \rightarrow y$.

2. $x = y$. Тогда $C = ((1 \rightarrow x) \wedge 1) \vee \neg x = x \vee \neg x$. Имеем два подслучая.

2.1. $x \neq 0$. Тогда $\neg x = 0$ и, следовательно, $C = x \vee 0 = x = x \rightarrow y$.

2.2. $x = 0$. Тогда $\neg x = 1$ и, следовательно, $C = 0 \vee 1 = 1 = x \rightarrow y$.

3. $x > y$. Тогда $C = ((0 \rightarrow x) \wedge (x \rightarrow y)) \vee \neg x = (x \rightarrow y) \vee 0 = x \rightarrow y = x \rightarrow y$.

Таким образом, имеет место следующая

ТЕОРЕМА 1. Пусть Z_1 обозначает множество всех матричных функций из $\mathcal{F}_{\omega}^* = \langle \{0, 1\}^*, \sim, \rightarrow, \{1\} \rangle$ и Z_2 обозначает множество всех функций из $\mathcal{F}_{\omega}^* = \langle \{0, 1\}^*, \sim, \neg, \rightarrow, \{1\} \rangle$. Тогда $Z_1 = Z_2$.

Доказательство непосредственно следует из леммы (1) и (2).

В заключение отметим, что не меньший интерес представляет рассмотрение сигнатуры $\langle \rightarrow, \sim, \neg \rangle$ с алгебраической точки зрения. Ранее в той сигнатуре были уже определены операции $\vee, \wedge$ и $\Rightarrow$. Добавим к ним операции $x \dot{\rightarrow} y = \sim(\sim y \Rightarrow \sim x)$, $x + y = \sim x \rightarrow y$, $x \cdot y = \sim(\sim x + \sim y)$ и $x * y = x \cdot (\sim y)$. Тогда

$\langle A, \vee, \wedge, \sim, 0, 1 \rangle$ - алгебра де Моргана, или квази-булева алгебра [17] (Заметим, что решетка де Моргана $\langle A, \vee, \wedge, \sim \rangle$, которая не содержит неподвижных точек, является интенциональной решеткой. См. об этом [7]);

$\langle A, \vee, \wedge, \Rightarrow, \neg, 0, 1 \rangle$ - алгебра Гейтинга, или псевдо-булева алгебра [17], где $\neg x = x \Rightarrow 0$;

$\langle A, \vee, \wedge, \Rightarrow, \sim, 0, 1 \rangle$ - симметрическая алгебра Гейтинга [12];

$\langle A, \vee, \wedge, \Rightarrow, \dot{\rightarrow}, 0, 1 \rangle$ - Н-В-алгебра, или двойственная (double) алгебра Гейтинга (Брауэра), или полубулева алгебра [18];

$\langle A, \Rightarrow, \sim, 1 \rangle$ - алгебра Вайсберга [10], которая эквивалентна MV-алгебре Чэна $\langle A, +, \cdot, \sim, 0, 1 \rangle$ [8], которая эквивалентна ограниченной коммутативной ВСК-алгебре $\langle A, *, 0, 1 \rangle$ [16].

Заметим, что алгебра Вайсберга представляет собою алгебраи-

ческую модель для бесконечнозначной логики Лукасевича. Отсюда алгебра $\langle A, \rightarrow, \sim, \neg, 0, 1 \rangle$ и соответственно $\langle A, +, \cdot, \sim, \neg, 0, 1 \rangle$, и $\langle A, *, \neg, 0, 1 \rangle$ есть обобщение алгебраических свойств, как бесконечнозначной логики Лукасевича, так и интуиционистской логики. Таким образом, проблема взаимоотношения между многозначными логиками Лукасевича и Гёделя [3] привела, с одной стороны, к построению матричной логики без неподвижных точек, а с другой стороны, к структурам, обобщающим алгебраические свойства указанных логик.

ЛИТЕРАТУРА

1. Аристотель. Об истолковании // Аристотель. Соч. Т.2. М., 1978.
2. Карпенко А.С. Конечнозначные логики Лукасевича: алгебрологические свойства простых чисел // Синтаксические и семантические исследования неэкстенциональных логик. М., 1989. С.170-205.
3. Карпенко А.С. Взаимоотношение между n -значными логиками Лукасевича L_n и Гёделя G_n // X Всесоюзная конференция по логике, методологии и философии науки: Тез. докл. и выступлений. Секции 1-5. Минск, 1990. С.68-69.
4. Карпенко А.С. Фатализм и случайность будущего: Логический анализ. М., 1990.
5. Мак-Нотон Р. Теорема о бесконечнозначной логике высказываний // Кибернетический сборник. 1961. № 3.
6. Френкель А., Бар-Хиллел И. Основания теории множеств. М., 1966.
7. Anderson A.R., Belnap N.D. Entailment. Princeton, 1975. Vol.1.
8. Chang C.C. Algebraic analysis of many-valued logic // Trans. Amer. Math. Soc. 1958. Vol.88. P.487-490.
9. Cignoli R. Proper n -valued Lukasiewicz algebras as S -algebras of Lukasiewicz n -valued propositional calculi // Stud. Log. 1982. Vol.41. N 1. P.3-18.
10. Font J.M., Rodrigues A.J., Torrens A. Wajsberg algebras // Stochastica. 1984. Vol.3, N 1. P.5-31.
11. Gödel K. Zum intuitionistischen Aussagenkalkül // Ergebnisse eines mathematischen Kolloquiums. 1931/2. Bd.4.
12. Iturrioz L. Symmetrical Heyting algebras with operators // Zeitschr. für Math. Logik und Grundlagen der Mathematik. 1983. Bd.29, H.1. S.33-70.
13. Łukasiewicz J. On three-valued logic // Łukasiewicz J. Selected works. W-wa, 1970. P.87-88.
14. Łukasiewicz J., Tarski A. Investigations into the sentential calculus // Ibid. P.131-152.
15. Moisil Gr. Les Logiques non chrysippiennes et leurs applications // Acta Philos. Fennica. 1963. Vol.16. P.137-152.

16. Mundici D. MV-algebras are categorically equivalent to bound commutative BCK-algebras // *Mathematica Japonica*. 1986. Vol.31, N 6. P.886-894.
17. Rasiowa H. An algebraic approach to non-classical logic. W-wa, 1974.
18. Rauszer C. Semi-Boolean algebras and this applications to intuitionistic logic with dual operations. // *Fundamenta Mathematicae*. 1974. Vol.83. P.219-249.
19. Rescher N. Many-valued Logic. N.Y., 1969.
20. Rosser J.B., Turquette A.R. Many-valued logics. Amsterdam, 1952.

КВАЗИФУНКЦИОНАЛЬНЫЕ СЕМАНТИКИ И СЕМАНТИКИ ОГРАНИЧЕННЫХ МНОЖЕСТВ ОПИСАНИЙ СОСТОЯНИЙ

Существующие семантики модальной логики (алгебраические, реляционные, окрестностные и др.) не являются удовлетворительными с содержательной точки зрения, так как не ясно, какие понятия необходимости, возможности и т.д. ими определяются. Вследствие этого не ясно, могут ли логические системы, задаваемые этими семантиками, находить применение в практике научного познания. Такая ситуация беспокоит многих исследователей, работающих в области модальной логики. В связи с этим предпринимаются многочисленные попытки содержательной интерпретации основных понятий названных (формальных) семантик. До сих пор эти попытки, кроме, может быть, исследований Е.К.Войшвилло [17], не принесли существенных результатов.

Нами предложен иной выход из сложившейся ситуации [1-16].

Наш подход к анализу модальностей заключается, во-первых, в выделении основных модальных понятий, используемых в научном познании, и, во-вторых, в описании их логических свойств путем построения содержательных семантик, базирующихся на принципах, являющихся обобщением принципов, лежащих в основе классической логики:

В качестве принципов классической логики мы выделяем следующие: (1) принцип двузначности (высказывания принимают значения из области $\{t, f\}$); (2) принцип непротиворечия (высказывание не может иметь оба эти значения); (3) принцип исключенного третьего (высказывание обязательно имеет какое-то из этих значений); (4) принцип тождества (в сложном высказывании, системе высказываний, рассуждении одно и то же высказывание имеет одно и то же значение); (5) принцип обусловленности истинностного значения сложного высказывания истинностными значениями составляющих его простых высказываний (в логике высказываний этот принцип выступает в качестве принципа матричности - логические связи определяются посредством матриц, в логике предикатов он проявляется в истолковании логических терминов в качестве функций истинности).

Результатом обобщения перечисленных принципов являются следующие принципы: (1) принцип четырехзначности - высказывание принимает значение из области $\{t, f\}$, и если оно принимает значение t , то оно принимает также значение из области $\{n, c\}$ (если исследуются фактические модальности, n и c - значения "фактически необходимо" и "фактически случайно" соответственно) или из области $\{N, C\}$ (если исследуются логические модальности, N и C - значения "логически необходимо" и "логически случайно" соответственно), а если оно принимает значение f , то оно при-

нимает также значение из области $\langle c, i \rangle$ (если исследуются фактические модальности, i - значение "фактически невозможно") или из области $\langle C, I \rangle$ (если исследуются логические модальности, I - значение "логически невозможно"), т.е., согласно первому принципу, высказывание принимает значение из области $\langle t^n, t^c, f^i, f^c \rangle$ или из области $\langle t^N, t^C, f^I, f^C \rangle$; (2) принцип непротиворечия - высказывание не может иметь оба значения из области $\langle t, f \rangle$ и, кроме того, не может иметь более одного значения из области $\langle t^n, t^c, f^i, f^c \rangle$ (или из области $\langle t^N, t^C, f^I, f^C \rangle$); (3) принцип исключенного пятого - высказывание обязательно имеет какое-то значение из области $\langle t^n, t^c, f^i, f^c \rangle$ (или из области $\langle t^N, t^C, f^I, f^C \rangle$); (4) принцип тождества - в сложном высказывании, системе высказываний, рассуждении одно и то же высказывание имеет одно и то же значение (из области $\langle t^n, t^c, f^i, f^c \rangle$ или из области $\langle t^N, t^C, f^I, f^C \rangle$); (5) принцип обусловленности значений сложного высказывания значениями составляющих его простых высказываний - при построении семантики фактических модальностей логические термины истолковываются в качестве квазифункций, а при построении семантики логических модальностей логические термины определяются посредством ограниченных множеств описаний состояний.

Квазифункциональные семантики

Минимальная модальная логика. К обычным таблицам истинности для логических терминов $\neg$, $\wedge$, $\vee$, $\supset$ и $\equiv$ добавим таблицы для фактической необходимости ($\Box$) и фактической возможности ($\Diamond$):

$\frac{A}{\Box A}$	$\begin{array}{c c} t & f \\ \hline t & f \end{array}$	$\frac{A}{\Diamond A}$	$\begin{array}{c c} t & f \\ \hline t & f \end{array}$
--------------------	--	------------------------	--

Значение $\frac{t}{f}$ имеет следующий смысл: то ли истинно, то ли ложно. При построении таблицы нужно рассмотреть обе возможности. Выделенным значением является t . Пример построения таблицы:

$\Box A \supset A;$
$\frac{t}{f} \quad t \quad t$

$f \quad f \quad f \quad f$
первая строка таблицы расщепляется на две $\Box A \supset A, \Box A \supset A.$
 $t \quad t \quad t \quad t \quad f \quad t \quad t \quad t$
Формула является общезначимой.

Модальные термины $\Box$ и $\Diamond$ истолковываются здесь в качестве квазифункций. Если функцией является соответствие, в силу которого объект из некоторой области (области определения функции) соотносится с определенным объектом (из области значений функции), то квазифункция - это соответствие, в силу которого объект из некоторой области соотносится с некоторым объектом из определенного подмножества некоторого множества. Частными случаями последних подмножеств являются множество, состоящее из одного элемента, а также все множество значений квазифункции. Заметим, что истолкование модальных терминов в качестве

квазифункций позволяет опровергнуть общеизвестное утверждение Я. Лукасевича о невозможности определения необходимости и возможности в терминах истины и лжи.

Формализацией модальной логики является исчисление S_{min} , получаемое путем расширения классического исчисления высказываний (КИВ) за счет введения двух новых схем аксиом: $\Box A \supset A$; $A \supset \Diamond A$.

Для доказательства метатеоремы о семантической полноте введено понятие альтернативной интерпретации, под которой понимается функция, приписывающая "недробное" значение формуле при любом наборе значений входящих в нее переменных. Доказательство осуществлено разработанным нами методом, представляющим собой обобщение метода Хенкина. Ниже этот метод будет изложен.

Логика на основе значений t^n, t^c, f^1 и f^c . Значение f^t возникает, в частности, при приписывании значения формуле $\Box A$ при значении t подформулы A . При этом мы рассуждаем следующим образом: положение дел, описываемое высказыванием A , имеет место по необходимости или случайно; допущение того, что оно имеет место по необходимости, позволяет приписать формуле $\Box A$ значение t , допущение другой возможности позволяет приписать этой формуле значение f . То есть высказывание, имеющее значение t , может оцениваться дополнительно как необходимое (фактически) и случайное (фактически). Это и аналогичные рассуждения приводят к необходимости приписывать элементарным формулам значения из области $\{t^n, t^c, f^1, f^c\}$. На основе этих значений можно по-разному определять логические термины, что зависит от типов анализируемых высказываний. Сами же типы высказываний обуславливаются особенностями областей действительности, утверждениями о положениях дел которых эти высказывания являются.

Исследование итерированных (повторяющихся) модальностей позволяет сделать вывод о том, что существует несколько понятий фактической необходимости (и соответствующих им понятий фактической случайности и фактической возможности). Специфика этих понятий проявляется лишь в случае их итерации.

Рассмотрим высказывание $\Box p^0$. Пусть оно является истинным, если положение дел, описываемое высказыванием p^0 , обусловлено внутренними существенными связями предмета. В каком случае высказывание $\Box p^0$ можно оценить как необходимо истинное? В том случае, когда внутренние существенные связи предмета или явления, в свою очередь, детерминированы внутренними существенными связями, т.е. более глубокой сущностью. Внутренние существенные связи, детерминирующие какое-либо положение дел, могут быть сами детерминированы как (более глубокими) внутренними существенными связями, так и внутренними несущественными связями или внешними обстоятельствами. Имеется еще одна возможность. Положения дел детерминируются внутренними существенными связями, которые, в свою очередь, детерминируются только внутренними несущественными связями или внешними обстоятельствами.

При значении t^c высказывания p^0 формуле pr^0 можно приписывать значения тоже тремя способами, каждый из которых является содержательно оправданным.

Приведем три из возможных девяти способов определения операторов $\Box$ и $\Diamond$:

а) A	$t^n t^c f^i f^c$	б) A	$t^n t^c f^i f^c$	в) A	$t^n t^c f^i f^c$
$\Box A$	$t f f f$	$\Box A$	$t^c f^c f^c f^c$	$\Box A$	$t^n f^i f^i f^i$
$\Diamond A$	$t t f t$	$\Diamond A$	$t^c t^c f^c t^c$	$\Diamond A$	$t^n t^n f^i t^n$

Символы t и f понимаются как сокращения для значений t^n (t^c) и f^i (f^c) соответственно. Определением отрицания служит следующая таблица:

A	$t^n t^c f^i f^c$
$\neg A$	$f^i f^c t^n t^c$

Далее, логическая система может не учитывать высказывания, которые описывают положения дел, являющиеся порознь случайными, но определенные сочетания которых необходимы или невозможны (первый способ определения логических связей), может учитывать их частично (второй способ), может учитывать их полностью - (третий способ). Приведем таблицу, описывающую второй способ определения импликации:

A	$t^n t^n t^n t^n t^c t^c t^c t^c f^i f^i f^i f^i f^c f^c f^c f^c$
B	$t^n t^c f^i f^c t^n t^c f^i f^c t^n t^c f^i f^c t^n t^c f^i f^i$
$A \supset B$	$t^n t^c f^i f^c t^n t^c f^c t^n t^n t^n t^n t^c t^c t^n$

Таблица, описывающая первый способ определения логических связей, получается заменой дробных значений формулы $A \supset B$ значением t^c , а таблица, описывающая третий способ, - заменой значения t^c формулы $A \supset B$ при значениях f^c и t^c формул A и B , соответственно, значением $\frac{t^n}{t^c}$.

Три способа определения модальных операторов и три способа определения связей позволяют построить девять логических систем, в которых выделенными значениями являются t^n и t^c (и t как сокращение для значения $\frac{t^n}{t^c}$). Буква в обозначении системы указывает на способ определения модальных операторов (определение посредством таблицы а, или б, или в), а наличие знака "-" или "+" соответственно на первый или третий способ определения связей, отсутствие этих знаков - на второй способ определения связей. Формализациями указанных систем являются исчисления (обозначаемые так же, как и семантически построенные системы), содержащие кроме схем аксиом КИВ следующие схемы (в языке имеются только логические термины $\Box, \Diamond, \neg$ и $\supset$):

- ($S\bar{a}$) 1) $\Box A \supset A$, 2) $A \supset \Diamond A$, 3) $\neg \Box \neg A \supset \Diamond A$, 4) $\Diamond A \supset \neg \Box \neg A$, 5) $\neg \Diamond A \supset \Box (A \supset B)$, 6) $\Box B \supset \Box (A \supset B)$, 7) $\Box (A \supset B) \supset (\Box A \supset \Box B)$, 8) $\Box (A \supset B) \supset (\Diamond A \supset \Diamond B)$, 9) $\Diamond (A \supset B) \supset (\Box A \supset \Diamond B)$, 10) $\Diamond B \supset \Diamond (A \supset B)$, 11) $\Diamond \neg A \supset \Diamond (A \supset B)$;

$(\Box A \supset \Diamond B), 10) \Diamond B \supset \Diamond(A \supset B), 11) \Diamond A \supset \Diamond(A \supset B);$

(Sa) схема 8 исчисления $S\bar{a}$ заменяется двумя схемами:
 $\Box(A \supset B) \supset (\Diamond A \supset (\Diamond B \supset (\neg A \supset \neg B))), \Box(A \supset B) \supset (\Diamond A \supset \Diamond B);$

(S $\bar{a}$) схема 8 исчисления $S\bar{a}$ заменяется схемой $\Box(A \supset B) \supset (\Diamond A \supset \Diamond B);$

(S $\bar{b}$) к схемам аксиом исчисления $S\bar{a}$ добавляются схемы
 12) $\Box A \supset \Box \Box A, 13) \Diamond \Box A \supset \Diamond A, 14) \Diamond A \supset \Diamond \Box A, 15) \Box A \supset \Box \Diamond A, 16) \Box \Diamond A \supset \Box A,$
 17) $\Diamond \Diamond A \supset \Diamond A.$

(S $\bar{b}$) схема 8 исчисления $S\bar{b}$ заменяется двумя схемами
 $\Box(A \supset B) \supset (\Diamond A \supset (\Diamond B \supset (\neg A \supset \neg B))), \Box(A \supset B) \supset (\Diamond A \supset \Diamond B);$

(S $\bar{b}$) схема 8 исчисления $S\bar{b}$ заменяется схемой $\Box(A \supset B) \supset (\Diamond A \supset \Diamond B);$

(S $\bar{b}$) к схемам исчисления $S\bar{a}$ добавляются схемы 12) $\Box A \supset \Box \Box A,$
 13) $\Diamond \Box A \supset \Diamond A, 14) \Diamond A \supset \Diamond \Box A, 15) \Diamond \Diamond A \supset \Diamond A;$

(S $\bar{b}$) образуется из (S $\bar{b}$) заменой схемы 8 схемами
 $\Box(A \supset B) \supset (\Diamond A \supset (\Diamond B \supset (\neg A \supset \neg B))), \Box(A \supset B) \supset (\Diamond A \supset \Diamond B);$

(S $\bar{b}$) образуется из (S $\bar{b}$) заменой схемы 8 схемой
 $\Box(A \supset B) \supset (\Diamond A \supset \Diamond B).$

Семантики исчислений $S\bar{b}$ и $S\bar{b}$ являются матричными. Для доказательства семантической полноты для каждого из этих двух исчислений доказана следующая

ЛЕММА: пусть $a_1, \dots, a_n$ - все различные переменные, входящие в формулу D , а $b_1, \dots, b_n$ - значения этих переменных. Пусть A_1 есть $\{\Box a_1\}, \{a_1, \Diamond a_1\}, \{\neg \Diamond a_1\}$ или $\{\neg a_1, \Diamond a_1\}$ в зависимости от того, есть ли b_1, t^n, t^c, f^i и f^c . Пусть D' есть $\{\Box D\}, \{D, \Diamond D\}, \{\neg \Diamond D\}$ или $\{\neg D, \Diamond D\}$ в зависимости от того, принимает ли D значение t^n, t^c, f^i или f^c при значениях $b_1, \dots, b_n$ переменных $a_1, \dots, a_n$. Тогда $A_1 \cup \dots \cup A_n \vdash D'$ (из множества гипотез Γ следует множество формул D' , если и только если из Γ следует каждая формула из D').

Лемма доказывается индукцией по числу вхождений символов $\Box, \Diamond, \neg$ и $\supset$ в D .

Если формула D принимает выделенное значение при наборе значений $b_1, \dots, b_n$ переменных $a_1, \dots, a_n$, то очевидно, что $A_1 \cup \dots \cup A_n \vdash D$. Пусть формула D является общезначимой. Тогда для любой последовательности множеств $A_1, \dots, A_n$ верно, что $A_1 \cup \dots \cup A_n \vdash D$. Имеем:

- | | |
|---|--|
| 1. $A_1, \dots, A_{n-1}, a_n, \neg \Diamond a_n \vdash D;$ | 5. $A_1, \dots, A_{n-1}, a_n \vdash D$ из 1, 2; |
| 2. $A_1, \dots, A_{n-1}, a_n, \Diamond a_n \vdash D;$ | 6. $A_1, \dots, A_{n-1}, \neg a_n \vdash D$ из 3, 4; |
| 3. $A_1, \dots, A_{n-1}, \neg a_n, \neg \Diamond a_n \vdash D;$ | 7. $A_1, \dots, A_{n-1} \vdash D$ из 5, 6; |
| 4. $A_1, \dots, A_{n-1}, \neg a_n, \Diamond a_n \vdash D;$ | и т.д. |

Для доказательства семантической полноты исчислений $S\bar{a}, S\bar{a}, S\bar{a}, S\bar{b}, S\bar{b}, S\bar{b}, S\bar{b}$ вводится понятие альтернативной интерпретации. Альтернативная интерпретация - это функция $\llbracket \cdot \rrbracket$, приписывающая "недробные" значения формулам. Дадим индуктивное определение альтернативной интерпретации семантики исчисления $S\bar{a}$.

Если P -пропозициональная переменная, то $\llbracket P \rrbracket \in \{t^n, t^c, f^i, f^c\}$.
 $\llbracket \neg A \rrbracket = t^n$, е.т.е. $\llbracket A \rrbracket = f^i$; $\llbracket \neg A \rrbracket = t^c$, е.т.е. $\llbracket A \rrbracket = f^c$;
 $\llbracket \neg A \rrbracket = f^i$, е.т.е. $\llbracket A \rrbracket = t^n$; $\llbracket \neg A \rrbracket = f^c$, е.т.е. $\llbracket A \rrbracket = t^c$;

$\|A \supset B\| = f^c$, в.т.е. или $\|A\| = t^n$ и $\|B\| = f^c$, или $\|A\| = t^c$ и $\|B\| = f^1$, или $\|A\| = t^c$ и $\|B\| = f^c$;

$\|A \supset B\| = f^1$, в.т.е. $\|A\| = t^n$ и $\|B\| = f^1$;

если или $\|A\| = t^n$ и $\|B\| = t^c$, или $\|A\| = f^c$ и $\|B\| = f^1$, то $\|A \supset B\| = t^c$;

если $\|A\| = f^c$ или $\|B\| = t^n$, то $\|A \supset B\| = t^n$;

если или $\|A\| = \|B\| = t^c$, или $\|A\| = f^c$ и $\|B\| = t^c$, или $\|A\| = \|B\| = f^c$, то $\|A \supset B\| \in \{t^n, t^c\}$;

если $\|A\| = t^n$, то $\|\Box A\| \in \{t^n, t^c\}$; если или $\|A\| = t^c$, или $\|A\| = f^1$, или $\|A\| = f^c$, то $\|\Box A\| \in \{f^1, f^c\}$;

если или $\|A\| = t^n$, или $\|A\| = t^c$, или $\|A\| = f^c$, то $\|\Diamond A\| \in \{t^n, t^c\}$; если $\|A\| = f^1$, то $\|\Diamond A\| \in \{f^1, f^c\}$.

Для доказательства метатеоремы семантической полноты указанных исчислений доказывается следующее утверждение: совместимое с соответствующим исчислением множество формул можно расширить до максимального непротиворечивого множества. Затем доказывается

ЛЕММА. Пусть T — максимальное непротиворечивое множество формул. Тогда существует альтернативная интерпретация, приписывающая выделенное значение каждой формуле из T .

Для доказательства леммы вводится функция $\|\cdot\|_T$, обладающая следующим свойством: "Для произвольной формулы A верно: $\|A\|_T = t^n$, в.т.е. $A \in T$ и $\Box A \in T$; $\|A\|_T = t^c$, в.т.е. $A \in T$ и $\Diamond A \in T$; $\|A\|_T = f^1$, в.т.е. $\neg A \in T$ и $\neg \Box A \in T$; $\|A\|_T = f^c$, в.т.е. $\neg A \in T$ и $\Diamond A \in T$ ".

Индукцией по числу вхождений логических терминов в формулу A доказывается, что функция $\|\cdot\|_T$ обладает всеми свойствами альтернативной интерпретации, т.е. является альтернативной интерпретацией.

Приведем доказательство подслучая одного случая индукционного шага. Пусть $n+1$ вхождением логических терминов в формулу A является вхождение знака возможности, т.е. формула A имеет вид $\Diamond B$. В этом случае требуется доказать, что (1) если или $\|B\|_T = t^n$ или $\|B\|_T = t^c$, или $\|B\|_T = f^c$, то $\|\Diamond B\|_T \in \{t^n, t^c\}$; (2) если $\|B\|_T = f^1$, то $\|\Diamond B\|_T \in \{f^1, f^c\}$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО ПЕРВОГО ПОДСЛУЧАЯ. Пусть $\|B\|_T = t^n$. Тогда, по определению $\|\cdot\|_T$, $B \in T$ и $\Box B \in T$. Отсюда, в силу насыщенности T , $\Diamond B \in T$. В силу максимальной T $\Box \Diamond B \in T$ или $\neg \Box \Diamond B \in T$. Если $\neg \Box \Diamond B \in T$, то $\Diamond \neg \Box \Diamond B \in T$, так как формула $\neg \Box \Diamond B \supset \Diamond \neg \Box \Diamond B$ — теорема. То есть $\Diamond B \in T$ и $\Box \Diamond B \in T$ или же $\Diamond B \in T$ и $\Diamond \neg \Box \Diamond B \in T$. Следовательно, по определению $\|\cdot\|_T$, $\|\Diamond B\|_T \in \{t^n, t^c\}$. Пусть $\|B\|_T = t^c$. Тогда $B \in T$ и $\Diamond B \in T$. Значит $\Diamond B \in T$. В силу насыщенности T $\Box \Diamond B \in T$ или $\neg \Box \Diamond B \in T$. Следовательно, $\|\Diamond B\|_T \in \{t^n, t^c\}$. Пусть $\|B\|_T = f^c$. Тогда $\neg B \in T$ и $\Diamond B \in T$. В этом случае тоже $\|\Diamond B\|_T \in \{t^n, t^c\}$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО ВТОРОГО ПОДСЛУЧАЯ. Пусть $\|B\|_T = f^1$. Тогда $\neg B \in T$ и $\neg \Box B \in T$. Если $\neg \Diamond B \in T$, то, в силу насыщенности T , $\Diamond \neg B \in T$ или $\neg \Diamond \neg B \in T$. Следовательно, $\|\Diamond B\|_T \in \{f^1, f^c\}$.

Нами доказана семантическая полнота всех названных выше исчислений.

Логика предикатов. Рассмотрим лишь предикатное расширение системы S^*_β - систему PS^*_β . Пусть язык включает следующие символы: 1) $P^k_1, Q^k_1, R^k_1, S^k_1, P^k_2, \dots$ - k -местные предикатные символы; 2) $x_1, x_2, \dots$ - индивидуальные переменные; 3) $a_1, a_2, \dots$ - индивидуальные константы; 4) $\neg, \supset, \sqcup, \phi, \forall$ - логические термины (другие логические термины вводятся на основе обычных определений, играющих роль синтаксических сокращений). Определения термина и формулы обычные.

Семантика PS^*_β включает функции S^D и $\| \cdot \|_S^D$. Первая из них является функцией приписывания значений свободным индивидуальным переменным из непустой области D . Вторая - функцией приписывания значений индивидуальным константам, предикатным символам и сложным выражениям. Если x - индивидуальная переменная, свободно входящая в формулу A , $S^D(x) \in D$. Если a - индивидуальная константа, то $\|a\|_S^D \in D$. Если A^k k -местный предикатный символ, то $\|A^k\|_S^D = \langle D^k_n, D^k_c, D^k_1, D^k_c \rangle$. D^k_n - множество k -ок предметов, находящихся в отношении A^k по необходимости; D^k_c - множество k -ок предметов, находящихся в отношении A^k случайно, D^k_1 - множество k -ок предметов, по необходимости не находящихся в указанном отношении; D^k_c - множество k -ок предметов, не находящихся в этом отношении случайно, $D^k_n \subseteq D^k$; $D^k_c \subseteq D^k$; $D^k_1 \subseteq D^k$; $D^k_c \subseteq D^k$; $D^k_n \cap D^k_c \cap D^k_1 \cap D^k_c = \emptyset$; $D^k_n \cup D^k_c \cup D^k_1 \cup D^k_c = D^k$. Вместо $\|S^D(A)\|_S^D$ будем писать $\|A\|_S^D$. Тогда $\|A^k(t_1, \dots, t_k)\|_S^D = t^n$, е.т.е. $\langle \|t_1\|_S^D, \dots, \|t_k\|_S^D \rangle \in D^k_n$, где $t_1, \dots, t_k$ - термы, а A^k k -местный предикатный символ, а $D^k_n \in \|A\|_S^D$. Отрицание и импликация определяются так же, как в системе S^*_β . $\|\neg A\|_S^D = t^n$, е.т.е. $\|A\|_S^D = t^n$; $\|\neg A\|_S^D = f^1$, е.т.е. $\|A\|_S^D = t^c$, или $\|A\|_S^D = f^c$, или $\|A\|_S^D = f^1$; $\|\phi A\|_S^D = t^n$, е.т.е. или $\|A\|_S^D = t^n$, или $\|A\|_S^D = t^c$, или $\|A\|_S^D = f^c$; $\|\phi A\|_S^D = f^1$, е.т.е. $\|A\|_S^D = f^1$.

$\|\forall x A(x)\|_S^D = t^n$, е.т.е. для любого S' , приписывающего свободным переменным формулы $A(x)$ те же значения, что и S , и кроме того приписывающего некоторое значение переменной x , верно, что $\|A(x)\|_{S'}^D = t^n$; $\|\forall x A(x)\|_S^D = t^c$, е.т.е. для всякого S' $\|A(x)\|_{S'}^D = t^n$ или t^c , и существует S' такое, при котором $\|A(x)\|_{S'}^D = t^c$; если существует S' такое, при котором $\|A(x)\|_{S'}^D = f^1$, то $\|\forall x A(x)\|_S^D = f^1$; если существует единственное S' такое, при котором $\|A(x)\|_{S'}^D = f^c$, а при всех остальных S' , если они имеются, $\|A(x)\|_{S'}^D = t^n$, то $\|\forall x A(x)\|_S^D = f^c$; если существует S' такое, при котором $\|A(x)\|_{S'}^D = f^c$, и существует другое S' такое, при котором $\|A(x)\|_{S'}^D = f^c$ и не существует S' такого, при котором $\|A(x)\|_{S'}^D = f^1$, то $\|\forall x A(x)\|_S^D \in \{f^1, f^c\}$. Причем, в этом случае $\|\forall x A(x)\|_S^D = f^1$, е.т.е. для некоторого конечного множества D' ($D' \subseteq D$) верно: $\|\forall x (\|A(x)\|_S^D = f^1)\|_S^D = f^1$, где S - распределение значений по свободным переменным, входящим лишь в формулу $\forall x A(x)$.

Функция $\| \cdot \|_S^D$ называется также альтернативной интерпретацией.

Формула является логически выполнимой, е.т.е. существует альтернативная интерпретация и существует распределение значений по ее свободным переменным, при которых формула принимает

значение из области $\{t^n, t^c\}$.

Формализацией описанной семантики является исчисление PS_{δ}^+ со следующими схемами аксиом: схемы аксиом исчисления S_{δ}^+ ; $(A_1) \forall x A(x) \supset A(t)$, терм t свободен для x в $A(x)$; $(A_2) \forall x (A \supset B) \supset (A \supset \forall x B)$, если A не содержит свободных вхождений x ; $(A_3) \Box \forall x A(x) \supset \forall x \Box A(x)$; $(A_4) \forall x \Box A(x) \supset \Box \forall x A(x)$; $(A_5) \Diamond \forall x A(x) \supset \forall x \Diamond A(x)$; $(A_6) \neg \Diamond \forall x A(x) \supset \neg \Diamond (A(c_1) \wedge \dots \wedge A(c_n))$, где n — некоторое конечное число, большее или равное 1, а $c_1, \dots, c_n$ — некоторые индивидуальные константы (множество $\{c_1, \dots, c_n\}$ может быть единственным). Правилами вывода являются правила вывода исчисления S_{δ}^+ , а также правило обобщения.

Нами доказана адекватность семантики исчислению PS_{δ}^+ .

Доказательство включает в себя доказательство утверждения о существовании максимального непротиворечивого расширения исчисления PS_{δ}^+ в языке, содержащем счетное множество новых индивидуальных констант. Это расширение обозначается буквой I .

Вводится функция $\| \cdot \|_I$, обладающая следующими свойствами: произвольной замкнутой формуле A исчисления I эта функция приписывает значение t^n , е.т.е. A и $\Box A$ — аксиомы I ; значение t^c , е.т.е. A и $\Diamond A$ — аксиомы I ; f^1 , е.т.е. $\neg A$ и $\neg \Diamond A$ — аксиомы I ; f^c , е.т.е. $\neg A$ и $\Diamond A$ — аксиомы I . Областью, из которой функция $\| \cdot \|_I$ приписывает значения индивидуальным константам, является множество индивидуальных констант. Эта функция приписывает индивидуальной константе в качестве значения ее саму. Предикатному символу A^k эта функция приписывает упорядоченное множество $\langle D_n^k, D_c^k, D_1^k, D_c^k \rangle$, где D_n^k есть множество таких k -ток $(\alpha_1, \dots, \alpha_k)$ индивидуальных констант, для каждой из которых имеет место: $A^k(\alpha_1, \dots, \alpha_k)$ — аксиома I и $\Box A^k(\alpha_1, \dots, \alpha_k)$ — аксиома I ; D_c^k есть множество таких k -ток $(\alpha_1, \dots, \alpha_k)$ индивидуальных констант, для каждой из которых имеет место: $A^k(\alpha_1, \dots, \alpha_k)$ аксиома I и $\Diamond \neg A^k(\alpha_1, \dots, \alpha_k)$ — аксиома I ; D_1^k есть множество таких k -ток $(\alpha_1, \dots, \alpha_k)$ индивидуальных констант, для каждой из которых имеет место: $\neg A^k(\alpha_1, \dots, \alpha_k)$ — аксиома I и $\neg \Diamond A^k(\alpha_1, \dots, \alpha_k)$ — аксиома I ; D_c^k есть множество таких k -ток $(\alpha_1, \dots, \alpha_k)$ индивидуальных констант, для каждой из которых имеет место: $\neg A^k(\alpha_1, \dots, \alpha_k)$ — аксиома I и $\Diamond A^k(\alpha_1, \dots, \alpha_k)$ — аксиома I . Очевидно, что функция $\| \cdot \|_I$ обладает всеми свойствами альтернативной интерпретации при приписывании значений замкнутым атомарным формулам.

В качестве индукционного предположения допускается, что функция $\| \cdot \|_I$ обладает всеми свойствами альтернативной интерпретации при приписывании значений замкнутым формулам, имеющим не более n вхождений логических терминов. Далее доказывается, что эта функция обладает всеми свойствами альтернативной интерпретации при приписывании значений замкнутым формулам, имеющим $n+1$ вхождение логических терминов.

Функция S приписывает значения индивидуальным переменным из счетной области индивидуальных констант исчисления I , причем, если $S(x) = \alpha$, где $\alpha \in D$, то $\| A(x) \|_I^S$ есть $\| A(\alpha) \|_I$.

Функция $\Pi \Pi_i$ является альтернативной интерпретацией, приписывающей выделенные значения всем аксиомам исчисления И. (В случае незамкнутых формул, являющихся аксиомами И, в качестве Σ берем любое приписывание из области индивидуальных констант).

Пусть, далее, формула A является общезначимой, но не является теоремой PS_8^+ . Если в PS_8^+ не доказуема формула A , то не доказуема и формула $\neg A$. Расширим PS_8^+ в языке, содержащем счетное множество новых индивидуальных констант, путем добавления в качестве новой аксиомы формулы $\neg A$. Полученное исчисление расширим до максимального непротиворечивого исчисления И. Все замкнутые аксиомы, в том числе и $\neg A$, исчисления И принимают выделенное значение в альтернативной интерпретации $\Pi \Pi_i$. Следовательно, формула $\neg A$ является выполнимой. Тогда формула A не является общезначимой, что противоречит условию. Следовательно, каждая замкнутая, а значит и любая, общезначимая формула является теоремой PS_8^+ .

Логика на основе значений n, c , и i . Для исследования рассуждений, в которых из необходимых суждений (например, из утверждений, выражающих законы природы или общественной жизни) должны выводиться необходимые суждения, применима построенная нами трехзначная квазиматричная логика S_T . Язык логики S_T включает символы $\neg, \wedge, \vee, \supset, \Box$ и $\Diamond$, которые определяются посредством следующих таблиц:

A	n	c	i
$\neg A$	i	c	n
$\Box A$	n	i	i
$\Diamond A$	n	n	i

A	n	n	n	c	c	i	i	i
B	n	c	i	n	c	i	n	c
$A \wedge B$	n	c	i	c	i	i	i	i
$A \vee B$	n	n	n	n	c	c	n	c
$A \supset B$	n	c	i	n	c	c	n	n

Выделенным значением является n . Исчисление S_T , формализующее описанную семантику, содержит схемы аксиом, совпадающие со схемами аксиом КИБ. В этих схемах аксиом метаварьируемые обозначают модализированные формулы. (Определение модализированной формулы: если A — формула КИБ, то $\Box A$ и $\Diamond A$ — модализированные формулы; если B и C — модализированные формулы, то $\neg B$, $\Box B$, $\Diamond B$, $B \wedge C$, $B \vee C$, $B \supset C$ — модализированные формулы; ничто иное не является модализированной формулой.) Кроме этих схем имеются еще 25 схем аксиом, в которых метаварьируемые обозначают любые формулы системы: схемы аксиом, совпадающие с дополнительными схемами аксиом исчисления S_8^+ , а также $\Box A \wedge \Box B \supset \Box (A \wedge B)$, $\Diamond A \wedge \Box B \supset \Diamond (A \wedge B)$, $\Box (A \wedge B) \supset \Box (\Box A \wedge \Box B)$, $\Diamond (A \wedge B) \supset \Diamond (\Diamond A \wedge \Diamond B)$, $\Box A \vee \Diamond A \supset \Box A \vee \Diamond A$, $\Box A \vee \Box B \supset \Box (A \vee B)$, $\Diamond A \vee \Diamond B \supset \Diamond (A \vee B)$, $\Box (A \vee B) \supset \Box (\Box A \vee \Box B)$, $\Diamond (A \vee B) \supset \Diamond (\Diamond A \vee \Diamond B)$.

Правилами вывода являются: *modus ponens*; правило замены произвольного числа вхождений формулы $\neg A$ на A , и наоборот; правило Гёделя $\frac{A}{\Box A}$. Определение доказательства обычное. Выводом называется непустая конечная последовательность формул, в которой каждая формула есть или гипотеза из некоторого мно-

жества гипотез Γ , или теорема, или формула, полученная из предшествующих формул последовательности по одному из правил вывода, в том числе и по правилу Гёделя. Вывод является выводом конечной формулы последовательности из множества гипотез Γ .

Все правила вывода КИВ являются правилами вывода данного исчисления со следующим ограничением: они применимы лишь к модализированным формулам. Некоторые, по крайней мере некоторые, прямые правила вывода натурального исчисления высказываний применимы и к немодализированным формулам, например, пра-

вило $\frac{\Delta \vee B, \neg A}{B}$. Такие не прямые правила, как правило дедукции $\frac{\Gamma, A \vdash B; \Gamma, A \vdash \neg B}{\Gamma \vdash \neg A}$ и приведение к абсурду $\frac{\Gamma \vdash \neg A}{\Gamma \vdash \neg A}$, не применимы к немодализированным формулам в выводе. Однако производным в S_T является так называемое ослабленное правило приведения к абсурду: $\frac{\Gamma, A \vdash B; \Gamma, A \vdash \neg B}{\Gamma \vdash \neg A}$.

Для доказательства метатеоремы о семантической полноте вводится понятие альтернативной интерпретации. Альтернативная интерпретация - это функция $\| \cdot \|$, приписывающая формуле "недробное" значение. Из индуктивного определения этой функции приведем лишь один случай индукционного шага: если $\|A\|=n$ и $\|B\|=c$ или $\|A\|=c$ и $\|B\|=n$, то $\|A \wedge B\|=c$; если $\|A\|=t$ или $\|B\|=t$, то $\|A \wedge B\|=t$; если $\|A\|=\|B\|=c$, то $\|A \wedge B\| \in \{t, c\}$. Доказательство осуществляется способом, сходным со способом, которым доказана семантическая полнота исчисления $S_{\frac{1}{2}}$. Этот и другие упоминаемые в статье методы разработаны нами.

При построении семантики для предикатного расширения исчисления S_T предикатным символам приписываются значения следующим образом: если D - непустая индивидная область, а A^k k -местный предикатный символ, то $\|A^k\|^D = (D_n^k, D_c^k, D_1^k)$. $D_n^k \subseteq D^k$, $D_c^k \subseteq D^k$; $D_1^k \subseteq D^k$; $D_n^k \cap D_c^k \cap D_1^k = \emptyset$; $D_n^k \cup D_c^k \cup D_1^k = D^k$.

Семантики ограниченных множеств описания состояний

При построении семантическим методом систем, выражающих свойства логических модальностей, мы последовательно истолковываем каждое элементарное (или атомарное, если речь идет о логике предикатов) высказывание в качестве логически истинного, логически недетерминированного и логически ложного. Каждую конъюнкцию логически недетерминированных элементарных (или атомарных) высказываний в свою очередь истолковываем в качестве логически недетерминированного или логически ложного высказывания, и т.д. В результате таких истолкований из множества возможных описаний состояний для формулы могут исключаться некоторые описания состояний. Если при определенном истолковании элементарных (или атомарных) высказываний, входящих в формулу A , эта формула принимает значение t при всех возможных, допустимых этим истолкованием, то формула LA , где L -

оператор логической необходимости, является истинной при данном истолковании.

Создаваемые таким методом семантики имеют преимущество перед семантиками возможных миров, так как в них не используются требующие пояснения понятия "возможный мир" и "модельная структура". Кроме того, в случае пропозициональной логики и логики предикатов с конечной предметной областью можно перечислить все возможные истолкования (интерпретации) элементарных или атомарных высказываний для данной формулы или данного конечного множества формул, а следовательно, перечислить все конструкции, называемые ограниченными множествами описаний состояний (омосами) и относительно ограниченными множествами описаний состояний (огосами) и выполняющие роль модельных структур семантик возможных миров.

Семантика исчисления S5 Льюиса. Будем употреблять символы L , M (логически возможно), $\neg$, $\supset$. Связки $\wedge$, $\vee$, $=$ введем на основе обычных определений. Оператор C (логически случайно) определим так: $CA =_{df} MA \wedge M \neg A$. Для удобства записи в описаниях состояний вместо символа $\neg$ будем употреблять символ $-$. При построении семантики будем использовать содержательные соображения, которые поясним на примере.

Пусть дана формула $L(p \supset q) \supset (Lp \supset Lq)$ и все конечные описания состояний для этой формулы: $\alpha_1 = \langle p, q \rangle$; $\alpha_2 = \langle p, \bar{q} \rangle$; $\alpha_3 = \langle \bar{p}, q \rangle$; $\alpha_4 = \langle \bar{p}, \bar{q} \rangle$. В описаниях состояний α_3 и α_4 является ложной формула p , а следовательно, является ложной и формула Lp , так как отсутствующее положение дел не является логически необходимым. В описании состояния α является ложной формула $p \supset q$, а поэтому является ложной и формула $L(p \supset q)$. Таким образом, в описаниях состояний $\alpha_2, \alpha_3, \alpha_4$ исходная формула является истинной. В описании состояния α_1 истинными являются формулы $p \supset q$, p и q . Что в этом случае можно сказать об истинности формул $L(p \supset q)$, Lp и Lq , а в конечном счете об истинности исходной формулы? Естественно рассмотреть следующие возможности: (1) в качестве p и q мыслятся высказывания, которые не могут быть ложными в силу особенностей их логических форм, т.е. высказывания, являющиеся логически истинными; (2) в качестве p и q мыслятся логически недетерминированные высказывания; (3) в качестве p мыслится логически недетерминированное высказывание, а в качестве q — логически истинное; (4) в качестве p мыслится логически истинное высказывание, а в качестве q — логически недетерминированное. То есть рассматриваем подстановки вместо пропозициональных переменных высказываний различных логических форм, а тем самым вводим ограничения на возможные значения истинности элементарных высказываний.

При первой из описанных выше возможностей в результате ограничения, накладываемого на возможные значения истинности высказываний p и q , остается одно описание состояния — α_1 . Описания состояний $\alpha_2, \alpha_3, \alpha_4$ оказываются невозможными. При вто-

рой возможности, наряду с исходным описанием состояния α_1 , возможными относительно α_1 оказываются описания состояний $\alpha_2, \alpha_3, \alpha_4$ и т.д.

Обозначим буквой W множество всех описаний состояний для формулы. Введем понятие ограниченного множества описаний состояний для формулы (сокращенно — ОМОС, или омос). Омос — это множество описаний состояний W' ($W' \subseteq W$), полученное из W в результате истолкования каждой переменной, входящей в формулу, в качестве логически истинного, логически недетерминированного или логически ложного высказываний и (возможного) исключения на этой основе из W описаний состояний, противоречащих такому истолкованию. Так, если высказывание p истолковывается как логически истинное, то из W исключаются все описания состояний, содержащие $\bar{p}$. Факт интерпретации переменной в качестве логически истинного высказывания будем обозначать формулой $\gamma M \gamma A$, в качестве логически недетерминированного высказывания — формулой $M A M \gamma A$, в качестве логически ложного — формулой $\gamma M A$, где A — пропозициональная переменная. Множество формул, соответствующих такому истолкованию переменных некоторой формулы, обозначим буквами ОГ. Если, например, формула содержит одну пропозициональную переменную A , то возможны три ОГ для этой формулы: первое — $\gamma M A$; второе — $\gamma M \gamma A$; третье — $M A M \gamma A$ (или $M A, M \gamma A$). В общем случае ОГ для формулы, содержащей n пропозициональных переменных, равно 3^n . По этой же формуле определяется число ОМОС для формулы.

Омос W' можно также задать указанием пары $\langle \text{ОГ}; W' \rangle$, где ОГ — ограничение, накладываемое на возможные логические формы элементарных высказываний, а W' — множество описаний состояний, получаемое из W в результате ограничения.

Описанные ограничения не полностью характеризуют логические формы элементарных высказываний. Для более полного учета особенностей логических форм элементарных высказываний введем понятие подомоса некоторого омоса. Если ограничение омоса содержит менее двух формул вида Sa (т.е. вида $M A M \gamma A$), то подомосом этого омоса является он сам. Если ограничение омоса содержит более одной формулы вида Sa , то на основе этого омоса образуем подомосы путем добавления к ОГ для каждого множества формул $\{S a_1, \dots, S a_n\}$, где $n > 1$, одной из формул $M(\tilde{a}_1 \wedge \dots \wedge \tilde{a}_n)$, $\gamma M(\tilde{a}_1 \wedge \dots \wedge \tilde{a}_n)$, где $\tilde{a}_i$ есть a_i или $\bar{a}_i$ для каждого описания состояния $\langle \tilde{a}_1, \dots, \tilde{a}_n \rangle$, входящего в W' и включающего, естественно, все формулы из $\{a_1, \dots, a_n\}$. Основание для дополнительного ограничения множества описания состояний таково. Пусть $S p$ и $S q$ входят в ОГ. Что можно сказать об истинности формулы $M(p \wedge q)$? Нужно рассмотреть два случая. В качестве p и q можно мыслить логически недетерминированные высказывания, конъюнкция которых логически непротиворечива, а также высказывания, конъюнкция которых логически противоречива. В первом случае к ОГ следует добавить формулу $M(p \wedge q)$, а во втором — $\gamma M(p \wedge q)$. В последнем

случае из W' удаляется описание состояний $\{p, q\}$.

Ограничение, получаемое в результате расширения ОГ, обозначим $ОГ'$. Множество описаний состояний W' , ограниченное посредством $ОГ$, может ограничиваться дополнительно в результате расширения $ОГ$. Дополнительно ограниченное множество описаний состояний обозначим W'' ($W' \subseteq W''$).

В произвольном описании состояния $\alpha/\alpha \in W''$ подомоса $\langle ОГ'; W'' \rangle$ формулам приписываются значения так: переменная — обычным образом принимает значение t или f в α в зависимости от того, входит ли в α эта переменная без отрицания или с отрицанием; термины $\neg$ и $>$ определяются обычным образом; формула LB принимает значение t в α , е.т.е. формула B принимает значение t в каждом $\beta (\beta \in W'')$; формула MB принимает значение t в α , е.т.е. существует такое описание состояния $\beta (\beta \in W'')$, в котором формула B принимает значение t .

Формула D общезначима в подомосе, е.т.е. она принимает значение t в каждом $\alpha (\alpha \in W'')$ этого подомоса. Формула D выполнима в подомосе, е.т.е. она принимает значение t в некотором $\alpha (\alpha \in W'')$ этого подомоса. Формула D общезначима, е.т.е. она общезначима в каждом подомосе каждого омоса. Формула D логически выполнима, е.т.е. существует подомос некоторого омоса, в котором D выполнима.

Доказательству метатеоремы о полноте предшествует доказательство следующей леммы: пусть D — формула, $\langle ОГ'; W'' \rangle$ — подомос, $a_1, \dots, a_n$ — все различные переменные, входящие в D , $b_1^\alpha, \dots, b_n^\alpha$ — истинностные значения этих переменных в описании состояния α , таком, что $\alpha \in W''$, A_1^α есть a_1 , если b_1^α есть t , и есть $\neg a_1$, если b_1^α есть f ; пусть D^α есть D или $\neg D$ в зависимости от того, принимает ли D значение t или f в α . Тогда, $ОГ' \cup \{A_1^\alpha, \dots, A_n^\alpha\} \vdash D^\alpha$.

Доказательство осуществлено возвратной математической индукцией по числу вхождений логических терминов в формулу D .

Из-за ограниченности объема статьи заменим доказательство метатеоремы о полноте доказательством формулы D , являющейся общезначимой и содержащей лишь одну переменную p .

1. $Мр, М\neg p, p \vdash D$ — в силу леммы;
2. $М, М\neg p, \neg p \vdash D$ — в силу леммы;
3. $\neg M\neg p, p \vdash D$ — в силу леммы;
4. $\neg M\neg p, \neg p \vdash D$ — в силу леммы;
5. $Мр, М\neg p \vdash D$ — из 1, 2;
6. $Мр, \neg M\neg p, p \vdash D$ — из 3 ($p > M\neg p$ — теорема S5);
7. $Мр, \neg M\neg p \vdash D$ — из 6 ($\neg M\neg p > p$ — теорема S5);
8. $М\vdash D$ — из 5, 7;
9. $\neg M\vdash D$ — из 4 ($\neg M\vdash \neg p$ — теорема S5);
10. $\vdash D$ — из 8, 9.

Семантика предикатного расширения исчисления S5 (исчисления PS5). Язык исчисления PS5 содержит n -местные предикатные символы $P_1^n, Q_1^n, R_1^n, P_2^n, \dots$; индивидуальные переменные $x_1, x_2, \dots$; инди-

видные константы $a_1, a_2, \dots$; логические термины $\neg, \supset, \wedge, \vee$; скобки.

Пусть A - формула (множество формул); D - непустая область интерпретации; S^D - распределение значений из D по свободным переменным формулы A ; T^D - функция приписывания значений индивидуальным константам, $T^D(a) \in D$, где a - индивидуальная константа; φ^D - функция приписывания значений предикатным символам, $\varphi^D(P^k) \subseteq D^k$, где P^k - k -местный предикатный символ. $| \cdot |$ - функция истолкования сложных выражений: $|\varphi^D(T^D(S^D(P^k(t_1, \dots, t_k))))| = t$ е.т.е. $\langle \varphi^D(T^D(S^D(t_1))) \dots, \varphi^D(T^D(S^D(t_n))) \rangle \in \varphi^D(P^k)$. Вместо $|\varphi^D(T^D(S^D(A)))|$ будем писать $|A|_{\varphi^D}^{S^D, T^D}$; если из контекста ясно, какая область D имеется в виду, - $|A|_{\varphi}^{S, T}$; если формула A не имеет свободных вхождений индивидуальных переменных - $|A|_{\varphi}^T$; если A не содержит индивидуальных констант - $|A|_{\varphi}^S$; если не содержит ни тех ни других - $|A|_{\varphi}$.

Огосом для формы (множества формул) является упорядоченное множество из трех элементов $\langle O\Gamma'; W''; D \rangle$, где D - непустая область интерпретации; $O\Gamma'$ - полное ограничение, накладываемое на логические формы предикатных символов, т.е. $O\Gamma'$ - это истолкование каждого n -местного предиката в качестве логически необходимого по отношению к заданной n -ке предметов, логически невозможного или логически случайного (каждое высказывание тем самым истолковывается в качестве логически истинного, логически ложного и логически случайного) и каждой k -тки логических случайных n -местных предикатов (системы n -местных предикатов) в свою очередь в качестве логически возможной или логически невозможной по отношению к данной n -ке предметов, и т.д.; $W'' (W'' \subseteq W)$ - множество функций φ^D , допускаемых ограничением.

Пример огоса для формулы $P_1^1(a_1)$. $D = \{1, 2\}$. $\varphi_1^D(P_1^1) = \emptyset$, $\varphi_2^D(P_1^1) = \{1, 2\}$, $\varphi_3^D(P_1^1) = \{1\}$, $\varphi_4^D(P_1^1) = \{2\}$. В терминах описаний состояний: $\varphi_1^D(P_1^1) = \{\overline{P_1^1(1)}, \overline{P_1^1(2)}\}$; $\varphi_2^D(P_1^1) = \{P_1^1(1), P_1^1(2)\}$; $\varphi_3^D(P_1^1) = \{P_1^1(1), \overline{P_1^1(2)}\}$; $\varphi_4^D(P_1^1) = \{\overline{P_1^1(1)}, P_1^1(2)\}$ $W = \{\varphi_1^D, \varphi_2^D, \varphi_3^D, \varphi_4^D\}$. Истолковываем P_1 от 1 в качестве логически необходимого предиката, а P_1 от 2 в качестве логически случайного. Тогда $O\Gamma' = \{LP_1^1(1), SP_1^1(2)\}$, W'' есть $\{\varphi_2^D, \varphi_3^D\}$.

Продолжим определение функции $| \cdot |$.

$|\neg A|_{\varphi}^{S, T} = t$, е.т.е. $|A|_{\varphi}^{S, T} = f$;

$|A \supset B|_{\varphi}^{S, T} = t$, е.т.е. $|A|_{\varphi}^{S, T} = f$ или $|B|_{\varphi}^{S, T} = t$;

$|\forall x A(x)|_{\varphi}^{S, T} = t$, е.т.е. для любого распределения S' , приписывающего всем свободным переменным формулы $A(x)$ то же значение, что и S , но кроме того приписывающего некоторое значение свободно входящей переменной x , верно: $|A(x)|_{\varphi}^{S', T} = t$;

$|LA|_{\varphi}^{S, T} = t$, е.т.е. для любой функции $\varphi (\varphi \in W'')$ рассматриваемого огоса $\langle O\Gamma'; W''; D \rangle$ имеет место: $|A|_{\varphi}^{S, T} = t$.

Формула A является логически выполнимой, е.т.е. существует

огос $\langle O\Gamma'; W''; D \rangle$, функции T^D, S^D и $\varphi^D(\varphi^D \in W'')$ такие, что $|A|_{\varphi}^{S, T} = t$. Формула A является общезначимой, е.т.е. для любого огоса $\langle O\Gamma'; W''; D \rangle$ и для любых функций T^D, S^D и $\varphi^D(\varphi^D \in W'')$ имеет место $|A|_{\varphi}^{S, T} = t$.

Несложно доказать, что каждая теорема исчисления PS5 является общезначимой формулой в построенной семантике.

Для доказательства метатеоремы о полноте доказывается утверждение о том, что множество замкнутых формул Δ можно расширить в языке, содержащем счетное множество новых индивидуальных констант, до максимального непротиворечивого множества замкнутых формул Θ , причем, формулы из Θ не содержат иных предикатных символов, кроме тех, которые входят в формулу их Δ . (Последнее ограничение можно, конечно, не принимать.)

Множество Θ обладает следующими свойствами: (1) если $\Gamma \vdash A$ и $\Gamma \subseteq \Theta$, то $A \in \Theta$; (2) если $A \supset B \in \Theta$, то $\neg A \in \Theta$ или $B \in \Theta$; (3) для замкнутой формулы A , содержащей лишь предикатные символы, входящие в Δ , верно, что или $LA \in \Theta$, или $\neg LA \in \Theta$, или $\neg LA \in \Theta$ и $\neg \neg LA \in \Theta$; (4) если $\forall x A(x) \in \Theta$, то для любой индивидуальной константы a верно, что $A(a) \in \Theta$.

Доказывается также следующее утверждение: максимальное непротиворечивое множество формул Θ , включающее множество Δ , является выполнимым в некотором огосе $\langle O\Gamma'; W''; D \rangle$ со счетной областью D при приписывании значений индивидуальным константам T^D .

Указанный огос строится следующим образом. В качестве D берется (счетное) множество индивидуальных констант, функция T^D приписывает индивидуальной константе в качестве значения ее саму. В качестве $O\Gamma'$ выступает множество формул, включающее для произвольной атомарной формулы $P^n(c_1, \dots, c_n)$ без свободных переменных формулу $LP^n(c_1, \dots, c_n)$, $\neg LP^n(c_1, \dots, c_n)$ или $SP^n(c_1, \dots, c_n)$ в зависимости от того, какая из этих формул является элементом Θ , а также для каждой k -тки "случайных" атомарных формул $A_1, \dots, A_k$ формулу $\neg L\neg(A_1 \wedge \dots \wedge A_k)$ или формулу $L\neg(A_1 \wedge \dots \wedge A_k)$, и т.д. Множество W есть множество всех максимальных непротиворечивых множество формул, содержащих лишь предикатные символы, входящие в формулы из Δ . W'' есть множество всех максимальных непротиворечивых расширений множества формул, составляющих $O\Gamma'$.

Каждому множеству K из W'' ставится в соответствие некоторая функция φ_K , приписывающая значения предикатным символам. $\varphi_K(P^n)$ есть $\{(c_1, \dots, c_n) | P^n(c_1, \dots, c_n) \in K\}$.

Индукцией по числу вхождений логических терминов в формулу A доказывается, что $|A|_{\varphi_K}^T = t$, е.т.е. $A \in K$.

Семантика исчисления S4 Льюиса. Пусть A - формула, не содержащая итерированных модальностей, а W - множество всех описаний состояний для этой формулы. Пусть $\alpha \in W$, а $O\Gamma'$ - множество формул, соответствующих истолкованию каждого элементарного высказывания из α в качестве логически истинного, логически ложного или логически случайного, а n -ки "случайных" высказы-

ваний в качестве логически возможной или логически невозможной. (Если пропозициональная переменная a входит в α без отрицания, то соответствующее ей высказывание может быть истолковано как логически истинное или логически случайное, если эта переменная входит с отрицанием, то соответствующее ей высказывание может быть истолковано в качестве логически ложного или логически случайного.) В результате указанного истолкования пропозициональных переменных множество W ограничивается до множества W'' ($W'' \subseteq W$). Очевидно, что $\alpha \in W''$. Упорядоченное множество $\langle O\Gamma'; \alpha; W'' \rangle$ называется относительно ограниченным множеством описаний состояний (огосом). Можно перечислить все возможные огосы для формулы, не содержащей итерированных модальностей.

Чтобы приписывать значения формулам, содержащим любое конечное число итерированных модальностей, понятие огоса следует обобщить. Огосы для формул, не содержащих итерированных модальностей, называются огосами первой степени. По каждому огосу первой степени строится конечное множество огосов второй, третьей и т.д. степеней, в зависимости от степени модальной формулы. (Формулы $p \supset q$ и $Lp \supset q$ имеют степень 1, а формулы $LMp \supset Lq$ и $L(Mp \supset LMq)$ — соответственно степени 2 и 3). Для получения огосов 2-ой степени на основе данного огоса 1-ой степени следует в свою очередь проинтерпретировать ограничение, выражаемое формулой LA , в качестве ограничения, выражаемого формулой LLA , а ограничение, выражаемое формулой CA в качестве выражаемого формулой LCA или формулой CCA , так как если установлено, что A является логически необходимым (или логически невозможным), то этот факт сохраняется и при более полном выявлении логической формы высказывания A , если же установлено, что A является логически случайным, то при более полном выявлении логической формы высказывания A может оказаться, что A является логически необходимым. В тех случаях, когда возникают интерпретации двух и более переменных как "вторично случайных" и т.д., следует рассмотреть все случаи совместной возможности и невозможности ограничений таких высказываний. Для получения огосов 2-ой степени производятся ограничения "вторичных" ограничений переменных и т.д. Огос степени n представляет собой дерево, стволом которого является первый (по построению) подогос (огос, входящий в огос степени n). Первым подогосом огоса степени 1 является он сам. На основе каждого α ($\alpha \in W'$ первого подогоса) строятся вторые подогосы. На основе каждого α из W каждого второго подогоса строятся третьи подогосы и т.д.

Подформулам модальной формулы степени n следующим образом приписываются значения в огосе n -ой степени. Если подформула имеет степень 1 и не находится в области действия модальных операторов, то ее значение определяется в первом подогосе, рассматриваемом безотносительно к подогосам больших степеней. Если подформула B формулы D имеет степень k и вид LA или MA и

не находится в области действия модальных операторов, то рассматривается огос, начиная с первого подогоса до k -х подогосов. Подформуле формулы B степени 1, имеющей вид LK или MK и находящейся в области действия модального оператора, приписываются значения в k -х подогосах. Формулам, не содержащим модальных операторов, обычным образом приписываются значения в описаниях состояний. На основе значений формул A и B обычным образом приписываются значения формулам $A \supset B$ и $\neg A$ в описаниях состояний. Формула LA является истинной в описании состояния α , е.т.е. формула A истинна во всех описаниях состояний, возможных относительно α , т.е. является истинной в каждом $\beta/\beta \in W''$. Формула MA истинна в описании состояния α , е.т.е. найдется такое описание состояния $\beta (\beta \in W'')$, в котором A истинна. Формула A истинна в огосе, е.т.е. она истинна в исходном описании состояния этого огоса. Формула является логически общезначимой, е.т.е. она истинна в каждом огосе. Формула является логически выполнимой, е.т.е. найдется огос, в котором она истинна.

Доказательству метатеоремы о семантической полноте предшествует доказательство следующей леммы. Пусть $\langle \mathcal{U}G'; \alpha; W'' \rangle$ – огос k -той степени для формулы D степени k , где $\mathcal{U}G'$ – полное ограничение (т.е. не только "первичное" ограничение переменных из α , но и ограничение ограничений и т.д.) накладываемое на переменные из α , а W'' есть W' , если $k=1$, и есть множество огосов, вытекающих из W' , если $k>1$. Пусть $\langle A_1, \dots, A_n \rangle$ есть α , где A_i есть a_i или $\neg a_i$ в зависимости от того, входит ли в α a_i или $\bar{a}$. Пусть D' есть D или $\neg D$, в зависимости от того, истинна или ложна формула D в огосе. Тогда $\mathcal{U}G', A_1, \dots, A_n \vdash D'$.

Семантика исчисления М Фейса-Вригта. В семантике исчисления огосы первой степени не отличаются от огос первой степени семантики исчисления $S4$. Для образования огосов второй степени ограничение огоса первой степени, выражаемой формулой LA , в свою очередь истолковывается как LLA или CLA , а ограничение, выражаемое формулой CA , истолковывается так же, как и в семантике для $S4$. Семантическая полнота доказывается сходным образом. Итерированные модальности истолковываются в качестве фактических, а не логических.

Смешанные семантики

Исчисление PLS_8^+ . Язык содержит символы $\neg, \supset, \Box, \Diamond, L$ и квантор общности. Схемами аксиом и правилами вывода являются: а) схемы аксиом и правила вывода исчислений PS_8 и $PS5$; б) $L\Box A \equiv \Box LA$; $L\Diamond A \equiv \Diamond LA$ (символы $\wedge$ и $\equiv$ используются в качестве синтаксических сокращений).

Семантика исчисления PLS_8^+ : (1) множество функций распределения значений по свободным переменным S^D , (2) множество функций приписывания значений индивидуальным константам T^D , (3) множество функций приписывания значений предикатным символам

$\varphi^D, \varphi^D(A^k) = (D_n^k, D_c^k, D_1^k, D_c^k)$, где A^k — k -местный предикатный символ, а $D_n^k, D_c^k, D_1^k, D_c^k$ — то же, что и в семантике для исчисления PS_B^+ , (4) множество омосов. Омос — это упорядоченное множество из трех элементов — $\langle O\Gamma'; W''; D \rangle$, где D — непустая область интерпретации; $W'' \subseteq W$, W'' — множество всех возможных интерпретаций предикатных символов. $O\Gamma'$ — ограничение, накладываемое на возможные логические формы предикатных символов, а в конечном счете — атомарных высказываний, т.е. истолкование каждого атомарного высказывания в качестве логически необходимого, логически случайного или логически невозможного, $O\Gamma'$ — это функция, применяемая к множеству интерпретаций предикатных символов, т.е. к W , и имеющая в качестве значения некоторое подмножество W , т.е. W'' . Если $O\Gamma'$ истолковывает атомарную формулу как выражающую логически необходимое высказывание, то из W исключаются интерпретации, при которых формула получает значение f (т.е. f^c или f^1), если — как выражающую логически случайное высказывание, то из W не исключается никакая интерпретация, если — как выражающую логически невозможное высказывание, то из W исключаются интерпретации, при которых формула получает значение t (t^n и t^c). Так интерпретируется каждое атомарное высказывание. Далее, пара, тройка и т.д. атомарных формул, истолкованных в качестве случайных высказываний, в свою очередь истолковывается как логически возможное или логически невозможное сочетание высказываний (конъюнкция высказываний) и т.д. для сочетания сочетаний высказываний, истолкованных в качестве случайных.

В семантике содержится также квазифункция истолкования сложных выражений $\| \cdot \|$. Вместо $\|\varphi^{D,T,S^D}(A)\|$ будем писать $\|A\|_{\varphi^D}^{S^D, T^D}$ или $\|A\|$. Эти функции называются альтернативными интерпретациями (сложных выражений).

$$\|A^k(t_1, \dots, t_k)\| = t^n, \text{ е.т.е. } \langle \|t_1\|, \dots, \|t_k\| \rangle \in D_n^k;$$

$$\|A^k(t_1, \dots, t_k)\| = t^c, \text{ е.т.е. } \langle \|t_1\|, \dots, \|t_k\| \rangle \in D_c^k;$$

$$\|A^k(t_1, \dots, t_k)\| = f^1, \text{ е.т.е. } \langle \|t_1\|, \dots, \|t_k\| \rangle \in D_1^k;$$

$$\|A^k(t_1, \dots, t_k)\| = f^c, \text{ е.т.е. } \langle \|t_1\|, \dots, \|t_k\| \rangle \in D_c^k;$$

где A^k — k -местный предикатный символ, а $\{D_n^k, D_c^k, D_1^k, D_c^k\}$ есть $\varphi^D(A^k)$. Символы $\neg, >, \square, \diamond, \forall$ определяются так же, как и в семантике для PS_B^+ . $\|LA\|$ равно наименьшему из значений, получаемых формулой A при данных S^D и T^D при различных интерпретациях предикатных символов из W'' и различных альтернативных интерпретациях. По силе значения располагаются в порядке убывания так: t^n, t^c, f^c, f^1 .

Выделенными значениями являются t^n и t^c . Формула является выполнимой в омосе $\langle O\Gamma'; W''; D \rangle$ при распределении S^D , приписывании T^D , е.т.е. она принимает выделенное значение при этих S^D и T^D при некотором приписывании значений предикатным символам из W'' при некоторой альтернативной интерпретации. Формула

является общезначимой в омосе при данных S^D и T^D , е.т.е. она принимает выделенное значение при этих S^D и T^D при любом приписывании из W'' при любой альтернативной интерпретации. Формула является логически общезначимой, е.т.е. она общезначима при любых S^D и T^D в любом омосе.

Семантическая полнота исчисления $PLS_{\frac{1}{2}}$ доказывается методом, представляющим собой синтез методов, использованных при доказательстве семантической полноты исчислений $PS_{\frac{1}{2}}$ и $PS5$.

Основные нерешенные проблемы квазифункциональных семантик и семантик ограниченных множеств описаний состояний

Основные нерешенные проблемы квазифункциональных семантик.

(1) Остается открытой проблема построения общей теории квазифункций. При построении этой теории следует исходить из понимания квазифункции как соответствия, в силу которого некоторый объект из определенного подмножества некоторого множества соотносится с некоторым объектом из определенного подмножества того же самого или другого множества.

(2) Требуется решения задача перестройки основных разделов математики на основе понятия квазифункции. Взамен математического анализа следует создать математический квазианализ, взамен алгебры – квазиалгебру, взамен теории алгори́фмов – теорию квазиалгори́фмов и т.д. для всех разделов математики. В случае решения этой задачи традиционные разделы математики окажутся частными случаями вновь создаваемых. Новая математика найдет более широкое применение при моделировании природных и социальных явлений, поскольку связи в природе, а особенно в обществе, большей частью являются квазифункциональными, а не функциональными.

В [12, с.21-23, 29-33, 68-71] и др. изложен метод доказательства метатеорем о семантической полноте модальных исчислений высказываний, имеющих квазифункциональные семантики. Этот метод представляет собой модернизацию метода, которым доказана семантическая полнота исчислений $S_{\bar{g}}$ и $S_{\bar{g}}$. В качестве проблемы мы формулируем задачу

(3) завершить незаконченное в [12] доказательство этим методом семантической полноты исчислений $S_{\bar{a}}$, S_a , $S_{\bar{a}}$, $S_{\bar{o}}$, $S_{\bar{g}}$, $S_{\bar{g}}$, $S_{\bar{g}}$, $S_{\bar{r}}$.

Метод, которым доказана семантическая полнота исчислений $S_{\bar{g}}$ и $S_{\bar{g}}$, применим для доказательства семантической полноты любых исчислений, имеющих в качестве характеристических любые конечные матрицы. В обобщенном виде суть этого метода можно изложить так. Пусть формулы принимают значения из области $\{1, 2, \dots, n\}$. Если логика функционально полна, то для любой пропозициональной переменной a и любого значения i можно найти формулу, содержащую только эту переменную и принимающую некоторое выделенное значение, если и только если значением a яв-

ляется t , т.е. некоторую формулу $f_1(a)$. Тогда сформулированная выше лемма преобразуется в следующую лемму: пусть $a_1, \dots, a_m$ — все пропозициональные переменные, входящие в формулу B , а $b_1, \dots, b_m$ — их значения; пусть A_s есть $f_s(a_s)$, если b_s есть k ; пусть B' есть $b_r(B)$, где $b_r(B)$ — формула, образованная из B и принимающая выделенное значение при значениях $b_1, \dots, b_m$ переменных $a_1, \dots, a_m$; тогда, $A_1, \dots, A_m \vdash B'$.

Например, в трехзначной логике Лукасевича (модальной) значениями являются $1, 1/2, 0$. $f_1(a)$ есть $\Box a$, $f_2^1(a)$ есть $\Diamond a \Diamond a$, $f_0(a)$ есть $\neg a$. Если формула B принимает, например, значение 1 при рассматриваемом наборе значений входящих в нее переменных, то $f_r(B)$ есть $\Box B$ и т.д. Гипотезы $A_1, \dots, A_m$ устраняются аналогично тому, как это описано выше. Предложенный метод позволяет не только доказывать теоремы о семантической полноте исчислений, но и для произвольной системы многозначной логики, заданной семантически, находить адекватное исчисление. Для этого достаточно проводить доказательство семантической полноты и выписывать аксиомы и правила вывода, необходимые для доказательства, а затем их минимизировать. В связи с изложенным встает

(4) задача доказать семантическую полноту всех известных исчислений, имеющих многозначную интерпретацию, и аксиоматизировать системы, заданные только семантически.

Нерешенными остаются также

(5) проблема представления квазифункций, заданных семантически, посредством формул;

(6) проблема построения систем модальной логики, в которых модальные операторы определяются способами, отличными от приведенных выше трех способов (оставшимися не рассмотренными шестью возможными способами);

(7) проблема построения квазифункциональной релевантной модальной логики (некоторые результаты в решении этой проблемы получил мой ученик Б.Камаев).

Переход от нерелевантной логики фактических модальностей к релевантной осуществляется за счет отказа от второго, третьего и четвертого принципов, приведенных выше. В результате этого описание состояния для произвольной атомарной или элементарной формулы a может содержать любое, в том числе и пустое, подмножество множеств

$\{\Box a, \neg \Diamond a, a \Diamond a, \neg a \Diamond a\}$.

Требуют решения

(8) задача построения логики фактических модальностей методом семантических таблиц, а также методом аналитических таблиц;

(9) проблема построения логики предикатов (в том числе с равенством) на базе каждой из описанных выше пропозициональных систем (предикатное расширение исчисления S_T построено моей ученицей О.Ляшенко).

(10) Представляет интерес построение пятизначной квазифункциональной деонтической логики с операторами On (обязательно), Om (одобряемо), Rn (разрешимо нормативно), Rm (разрешимо морально) по типу изложенной в [12, с. 72-82] трехзначной деонтической логики.

Язык пятизначной логики кроме указанных операторов содержит символы для деяний, логические термины $\cdot, \cup, -$ и обычные связки. Если A и B - субформулы (символы для деяний являются субформулами), то $\bar{A}, (B \cdot B), (A \cup B)$ - субформулы. Если A - субформула, то OnA, OmA, RnA, RmA - формулы. Если C и D - формулы, то $\neg C, (CAD)$ и т.д. - формулы. Выражение $(A \cdot B)$ обозначает деяние, заключающееся в выполнении A , а затем B . $(A \cup B)$ - деяние, заключающееся в выполнении A или B , или в выполнении A , а затем B . Значения o, o', ϕ, z', z соответственно читаются: обязательно, одобряемо, безразлично, порицаемо, запрещено. Они расположены по силе в порядке убывания.

A	o	o'	ϕ	z'	z
$\bar{A}$	z	z'	ϕ	o'	o

 $\|A \cdot B\| = \min(\|A\|, \|B\|)$, кроме случая, когда $\|A\| = \|B\| = \phi$. В этом случае $\|A \cdot B\| = \frac{\phi}{3}$ (то ли ϕ , то ли z' , то ли z). $\|A \cup B\| = \max(\|A\|, \|B\|)$, кроме случая, когда $\|A\| = \|B\| = \phi$. В этом случае $\|A \cup B\| = \frac{\phi}{3}$.

A	OnA	OmA	RnA	RmA
o	t	t	t	t
o'	f	t	t	t
ϕ	f	f	t	t
z'	f	f	t	f
z	f	f	f	f

Выделенным значением является t . Связки определяются обычным образом.

(11) На основе принципа квазифункциональности может быть построена логика пропозициональных установок.

Пусть π_k и ϕ_k соответственно символы для выражений " k уверен, что...", " k допускает, что...". (Символ k можно опускать, если ясно, о каком субъекте идет речь). Субформула A может принимать значения π_k, i_k, c_k , которые соответственно означают " k уверен, что A истинно", " k уверен, что A ложно", " k допускает, что A истинно, и допускает, что A ложно". Язык кроме обычных связок содержит специальные связки $-, \cdot, +, \rightarrow$ (соответственно отрицание, конъюнкция, дизъюнкция, импликация), обычные пропозициональные переменные, специальные пропозициональные переменные $a, b, \delta, a_1, \dots$, скобки и указанные выше операторы. Специальная переменная является субформулой. Если A и B - субформулы, то $\bar{A}, (A \cdot B), (A + B), (A \rightarrow B)$ - субформулы. Если A субформула, то $\odot_{i_1} \dots \odot_{i_r} A$ - формула ($\odot_{i_s}$ есть π_{i_s} или ϕ_{i_s} и $i_s \neq i_m$). Пропозициональная переменная является формулой. Если C и D - формулы, то $\neg C, (CAD)$ и т.д. - формулы. Определения:

A	$\bar{A}$	$\square_k A$	$\diamond_k A$
n_k	t_k	t	t
c_k	c_k	f	t
i_k	n_k	f	f

A	B	$(A \cdot B)$	$(A + B)$	$(A \rightarrow B)$
n	n	n	n	n
n	c	c	n	c
n	i	i	n	i
c	n	c	n	n
c	c	i/c	n/c	n/c
c	i	i	c	c
i	n	i	n	n
i	c	i	c	n
i	i	i	i	n

Выделенным значением является t .

Пусть дана формула $\square_1 \square_2 \diamond_3 \diamond_4 (a + b)$. В одной строке таблицы переменной приписываются четыре значения. Пусть это значения n_1, c_2, i_3, i_4 для a и значения n_1, c_2, n_3, i_4 для b . Получаем:

$$\square_1 \square_2 \diamond_3 \diamond_4 (a + b)$$

$$1. \begin{matrix} t \\ t \end{matrix} \begin{matrix} f \\ f \end{matrix} \begin{matrix} t \\ t \end{matrix} \begin{matrix} f \\ f \end{matrix} \begin{matrix} n_1 & n_1 & n_1 \\ c_2 & n_2 & c_2 \\ & c_2 & \\ i_3 & n_3 & n_3 \\ i_4 & i_4 & i_4 \end{matrix}$$

Строка таблицы расщепляется на две подстроки:

$$\square_1 \square_2 \diamond_3 \diamond_4 (a + b)$$

$$\begin{matrix} 1' : & t & t & t & f \\ 1'' : & t & f & t & f \end{matrix}$$

$\|\square_1 \square_2 \diamond_3 \diamond_4 (a + b)\| = t$, е.т.е. $\forall i \|\phi_i(a + b)\| = t$. И так далее.

Логика S_8 применена (В.Шалаком) для описания баз данных ЭВМ. Остается нерешенной

(12) проблема использования квазифункциональной логики при проектировании и применении ЭВМ.

(13) На основе понятия квазифункции может быть построена логика квантовой механики. Высказывания квантовой механики могут быть высказываниями о сопряженных величинах (оценка s) и о несопряженных величинах (оценка s'). Если высказывание имеет оценку s' , то оно истинно (t) или ложно (f). Если оно имеет оценку s , то оно истинно (t), или ложно (f), или неопределенно (непознаваемо - u). Таким образом, произвольное высказывание квантовой механики имеет одну из следующих пар оценок: $s', t; s', f; s, t; s, f; s, u$. Введем соответственно, следующие сокращения для этих пар оценок: t, f, t', f', u . Определения:

A	tt t t t t t' t' t' t' t' u u u u u f' f' f' f' f' f' f' f' f' f' f'
B	tt' u f' f' t t' u f' f' t t' u f' f' t t' u f' f' t t' u f' f'
AB	tt' u f' f' t t' u f' f' u u u f' f' f' f' f' f' f' f' f' f' f' f' f'
AVB	tt' t' t' t' t' t' t' t' t' t' t' t' u u u t' t' u f' f' t t' u f' f'
ABV	ff' f'

A	t	t'	u	f'	f
$\neg A$	f	f'	u	t'	t

Символ "Δ" читается "дополнительно". Выделенные значения - t и t'. Неопределенность $\frac{t}{f}$ при определении дополнительности объясняется тем, что высказывания A и B могут быть высказываниями о сопряженных величинах, но сопряженных не друг с другом. Возможно введение материальной и релевантной импликаций.

(14) Возможна разработка теории абстрактных квазиавтоматов на базе квазифункциональных логик.

(15) В аспекте принципа квазифункциональности целесообразно перестроить классическую логику предикатов, в частности, вместо знаков предметных функций ввести знаки предметных квазифункций, вместо предикатных символов, выражающих предметно-истинностные функции, ввести символы для квазипредикатов, выражающие предметно-истинностные квазифункции.

(16) Стоит задача разработки теории квазипонятий. Если понятие является особым общим именем для определенных предметов определенного класса, то квазипонятие является особым общим именем неопределенных предметов из определенных подмножеств некоторого множества.

Интересным, на наш взгляд, является исследование возможности

(17) построения семантик возможных миров (или доказательство отсутствия такой возможности) для исчислений, формализующих квазифункциональные семантики, а также

(18) построения семантик ограниченных множеств описаний состояний для этих исчислений.

(19) Проблемой является вопрос о применении теории квазиалгоритмов при создании и использовании вычислительной техники.

Основные нерешенные проблемы семантик ограниченных множеств описаний состояний.

(20) Не построен релевантный вариант теории логических модальностей. При построении релевантного варианта теории логических модальностей необходимо заменить описания состояний, входящие в огосы (или омосы), обобщенными описаниями состояний.

Нерешенными остаются проблемы построения логических систем, в которых элементарные (или атомарные) формулы истолковываются

(21) только как случайные высказывания,

(22) только как невозможные,

(23) только как необходимые,

(24) как необходимые и случайные,

(25) необходимые и невозможные,

(26) случайные и невозможные.

(27) Требуется дальнейшего исследования связь логических и фактических модальностей.

ЛИТЕРАТУРА

1. Ивлев Ю.В. Модальная логика. М., 1991.
2. Ивлев Ю.В. Таблицы истинности для модальной логики // Вестн. Моск. ун-та. Сер. философия. 1973. № 6.
3. Ивлев Ю.В. Табличное построение пропозициональной модальной логики // Логика и методология. М., 1973.
4. Ивлев Ю.В. О содержательной семантике модальной логики // Тезисы VII Всесоюзного симпозиума по логике и методологии науки. Киев, 1976.
5. Ивлев Ю.В. О содержательной семантике модальной логики // Модальные и интенциональные логики. М., 1978.
6. Ивлев Ю.В. О логической семантике для системы S5 Льюиса // Модальные и временные логики. М., 1979.
7. Ивлев Ю.В. Содержательная семантика модальной логики. // Логико-методологические исследования. М., 1980.
8. Ивлев Ю.В. Семантика модальной логики на основе значений t^n, t^c, f^i, f^c // Модальные и интенциональные логики. М., 1982.
9. Ивлев Ю.В. Семантический анализ модальных высказываний // Вестн. Моск. ун-та. Сер. Философия. 1982. № 5.
10. Ивлев Ю.В. Логические модальности // Филос. науки. 1983. № 3.
11. Ивлев Ю.В. Интерпретация модальных исчислений // Логические исследования. М., 1983.
12. Ивлев Ю.В. Содержательная семантика модальной логики. М., 1985.
13. Ивлев Ю.В. Содержательный и формальный подходы в модальной логике // Вестн. Моск. ун-та. Сер. философия. 1985. № 5.
14. Ивлев Ю.В. Четырехзначная логика предикатов // Нестандартные семантики неклассических логик. М., 1986.
15. Ивлев Ю.В. Содержательное построение систем модальной логики // Логика научного познания. М., 1987.
16. Ивлев Ю.В. Новые семантики модальной логики // Современная логика и методология науки. М., 1987.
17. Войшвилло Е.К. Содержательный анализ модальностей S4 и S5 // Филос. науки. 1983. № 3.

МОЖЕТ ЛИ ПРОСТРАНСТВО БЫТЬ НЕПРЕРЫВНЫМ. А ВРЕМЯ - ДИСКРЕТНЫМ?

В свое время Аристотель дал отрицательный ответ на поставленный вопрос. Более того, по мнению Аристотеля, вообще не может быть так, чтобы пространство и время не были либо оба дискретными, либо оба непрерывными. В "Физике" им приводятся соответствующие аргументы, совокупность которых призвана доказать, говоря современным языком, теорему о том, что пространство непрерывно $\leftrightarrow$ время непрерывно, и, аналогичным образом, пространство дискретно $\leftrightarrow$ время дискретно. Мы пытаемся изложить основную идею аристотелевского доказательства, не претендуя при этом на полную аутентичность, ибо используемый Аристотелем язык таков, что, возможно, допускает различные способы прочтения и понимания текста. Последнее обстоятельство плохо совместимо с современными требованиями, предъявляемыми к доказательствам. Кроме того (и это самое важное), к настоящему моменту наука со времен Аристотеля далеко продвинулась в понимании природы непрерывного и дискретного, так что сейчас мы располагаем методами результатами, позволяющими поставить проблему и решать ее при помощи точных методов.

Может возникнуть вопрос, так ли уж важно, что писал по этому поводу древнегреческий мыслитель, если современное состояние исследований проблемы непрерывного и дискретного ушло далеко вперед по сравнению с теми представлениями, которыми располагал Аристотель? У нас имеются два соображения, заставляющие обратиться к тексту "Физики" Стагирита. Во-первых, некоторым современным ученым аргументы Аристотеля кажутся вполне убедительными. Так, А.Н.Вяльцев, ссылаясь на рассуждения Аристотеля, которые нам еще предстоит разобрать, утверждает, что дискретность пространства влечет дискретность времени и наоборот, поэтому "...или оба они непрерывны, или оба дискретны. Третьего быть не может" [3. С.16].

Во-вторых, как мы надеемся показать, пространство может быть непрерывным, а время дискретным (равно как и наоборот, но мы сосредоточим внимание на первой ситуации, поскольку она важнее в философском смысле и поскольку положительный ответ на вопрос с тем, может ли пространство быть непрерывным, а время дискретным, влечет за собой обратное утверждение, т.е. утверждение, что время может быть непрерывным, а пространство дискретным). Важно подчеркнуть, что мы не собираемся настаивать на том, что Аристотель ошибался. Мы утверждаем, что ошибаются те, кто думает, что он был прав. Мощный понятийный аппарат, которым располагают современные исследователи и которого просто не было две тысячи лет назад, оправдывает "неравноправие" в отношении оценок утверждений древних и утверждений, отстаиваемых в наши дни.

Прежде чем обратиться к сути дела, предотвратим возможное недоразумение, связанное с тривиализацией проблемы. Одним из способов тривиализации является принятие дискретного механизма движения точечной частицы в непрерывном пространстве, который А.Н.Вяльцев назвал принципом возобновления или *реновации* частицы. Согласно этому принципу "...движение частицы происходит таким образом, что в некоторый начальный момент времени частица находится в начале пути, а по истечении элементарного промежутка времени оказывается в конце элементарного пути, причем не появляясь в промежуточных точках. Подобный способ движения, когда собственно перемещения-то и нет, а есть только результат перемещения, можно, очевидно, охарактеризовать как ряд последовательных исчезновений и рождений частицы..." [3. С.46-47].

Механизм "реновации" движущейся частицы не является решением проблемы, поскольку в этом случае движение хотя и осуществляется по непрерывному пространству, но сам процесс движения тела приводит в результате к *дискретному* множеству точек, так что, строго говоря, особой нужды в непрерывном пространстве здесь нет и его можно заменить соответствующим дискретным представлением.

Адекватная модель дискретного времени и непрерывного пространства должна, как нам представляется, удовлетворять, как минимум, следующим двум требованиям:

1. Результатом движения по непрерывному пространству в дискретные моменты времени должна быть непрерывная траектория. В противном случае свойство непрерывности пространства является избыточным.

2. Движущаяся точка не должна "размазываться" по непрерывному пространству. В любой момент дискретного времени координаты движущейся точки необходимо определять однозначно. В противном случае в процессе движения точка перестает быть точкой. Мы же, в соответствии с традицией, должны иметь возможность говорить именно о движении точки.

Второе требование прямо-таки напрашивается на возражение, связанное с квантово-механическими эффектами, в частности, с принципиальной невозможностью измерять с любой точностью координаты движущегося тела. Тем самым, если тело (рассматриваемое как математический объект) есть множество точек, то не придется спрашивать о точных координатах той или иной точки из данной совокупности точек в данный момент времени. Это возражение, безусловно, было бы правомерным, если бы не одно обстоятельство, связанное с учетом традиции. Все-таки обсуждается проблема, имеющая более чем двухтысячелетнюю историю, и решать ее за счет отказа от самой постановки вопроса о том, где находится движущееся тело A в момент времени t , имея в виду *точное* местоположение тела A , значит порывать с традицией, не прибегавшей к формулировкам теоретико-вероятностного толка.

Более того, как следует из самого развития квантово-механических представлений, понятие непрерывного пространства не является необходимым атрибутом той картины мира, которую рисует нам квантовая механика. Отказ от понятия траектории движущегося тела делает свойство непрерывности пространства хотя и удобной в силу привычности, но все-таки не столь уж обязательной абстракцией.

После этих предварительных замечаний перейдем непосредственно к анализу позиции Аристотеля. Начнем с его тезиса о том, что непрерывность пространства влечет непрерывность времени. Прежде коснемся того, как Аристотель понимал непрерывность. В текстах Стагирита под термином "непрерывность" скрываются, фактически, несколько разных понятий. Но мы будем иметь дело только с тем из них, которое используется в рассуждениях о соотношении непрерывности и дискретности пространства и времени. "Я разумею под непрерывным то, - писал Аристотель, - что делимо на всегда делимые части [2. С.127]. По современной терминологии, это вообще не непрерывность, а более слабое требование, хотя и необходимое, но недостаточное для установления непрерывности в современном смысле этого понятия.

В теории множеств делимость целого на всегда делимые части обычно называют плотностью. Точнее, частично упорядоченное множество M называется *плотным*, если выполнено следующее условие:

$$\forall x \forall y ((x < y) \rightarrow \exists z (x < z \& z < y)).$$

(Подразумевается, что множество M наделено отношением строгого порядка, т.е. из $x < y$ следует $x \neq y$, и область действия кванторов ограничена множеством M .) С неформальной точки зрения это и есть условие, гарантирующее бесконечную делимость целого и его частей.

Следует отметить, что термин "непрерывный" многолик не только в текстах Аристотеля. Современная наука также использует его с различными вариациями, из которых мы выберем только одну, сопоставимую с понятием плотности в плане использования и в том, и в другом случае отношения упорядоченности.

Пусть множество P линейно упорядочено отношением $<$. Назовем сечением множества P пару множеств (X, Y) , компоненты которой удовлетворяют следующим условиям:

$$X \cup Y = P,$$

$$X \cap Y = \emptyset,$$

$$\forall x \forall y (x \in X \& y \in Y \rightarrow x < y).$$

Если (X, Y) - сечение, то X называют левым классом, а Y - правым классом данного сечения. Сечение (X, Y) называется *собственным*, если $X \neq \emptyset \& Y \neq \emptyset$.

Выделяют следующие четыре вида сечений:

1. В левом классе X есть наибольший элемент x , а в правом классе Y есть наименьший элемент y ; тогда сечение (X, Y) называют *скачком*.

2. В левом классе X есть наибольший элемент x , но в правом классе Y нет наименьшего элемента.

3. В левом классе X нет наибольшего элемента, но в правом классе Y существует наименьший элемент y .

4. В левом классе X нет наибольшего элемента, а в правом классе Y нет наименьшего элемента; тогда сечение (X, Y) называют щелью.

Линейно упорядоченное множество P называется *непрерывным*, если любое его собственное сечение не является ни скачком, ни щелью (иными словами, все собственные сечения множества P относятся к виду 2 или 3) [1].

Каким образом можно связать определенные выше понятия с интуитивными представлениями о дискретности и непрерывности? Обратимся к хорошо известным примерам линейно упорядоченных множеств¹. Рассмотрим множество целых чисел Z . Очевидно, любое собственное сечение этого множества является скачком. С интуитивной точки зрения, множество целых чисел образует классический пример дискретного множества, так что наличие скачков однозначно указывает на проявление дискретности объекта. И наоборот, если мы захотим выразить интуитивную идею дискретности, то в случае линейно упорядоченных множеств без сечений-скачков не обойтись.

Сложнее обстоит дело с множеством рациональных чисел Q . Как известно, данное линейно упорядоченное множество является плотным и, таким образом, с точки зрения Аристотеля должно быть отнесено к непрерывным образованиям. Однако отсутствие скачков в Q с позиции современных представлений свидетельствует лишь о том, что множество Q не может считаться дискретным. С другой стороны, и непрерывным его считать трудно, поскольку множество Q имеет щели. Последний факт также широко известен², и мы не будем на нем останавливаться.

Сами термины "скачок", "щель" в их обычном значении указывают на отсутствие свойства непрерывности, чем и объясняется выбор этих терминов в качестве названий соответствующих видов сечений. Но если ликвидировать все скачки и заклеить все щели, то тогда действительно можно получить непрерывный объект. При этом только скачки напрямую связаны с интуитивным представлением о дискретных образованиях, тогда как наличие щелей ассоциируется со своего рода промежуточной ситуацией, когда ни о дискретности, ни о непрерывности в собственном смысле речи не идет.

Примером множества, в котором все отклонения от непрерывности в виде скачков и щелей устранены, может служить множест-

¹Всюду в этих примерах подразумевается, что рассматриваемые множества наделены соответствующими стандартными отношениями линейного порядка.

²Подробности можно найти в учебниках по математическому анализу.

во действительных чисел R . Отметим, что данное множество непрерывно и в аристотелевском смысле, поскольку оно плотно и, таким образом, делимо на всегда делимые части³. Вообще, всякое более чем одноэлементное непрерывное множество P плотно. (Кстати говоря, все такие непрерывные множества бесконечны.)

В самом деле, в противном случае существуют $a, b \in P$, удовлетворяющие условиям $a \neq b$ и $\forall z (\neg(a < z < b))$. Тогда пара множеств (X, Y) , где

$$X = \{x : x \in P \& (x < a \vee x = a)\},$$

$$Y = \{y : y \in P \& (b < y \vee y = b)\},$$

образует сечение линейно упорядоченного множества P . Нетрудно убедиться, что сечение (X, Y) является скачком, в противоречии с исходным допущением о непрерывности P .

Чтобы обеспечить должное согласование с терминологией Аристотеля и тех исследователей, которым его аргументация кажется убедительной, будем использовать тот факт, что непрерывное в выше введенном смысле является непрерывным и по Аристотелю. Обратное, однако, неверно: не все непрерывное в аристотелевском смысле будет удовлетворять введенному определению непрерывности.

Аристотель рассматривает следующую ситуацию. Допустим, маршрут, или как его называет Аристотель, путь A — это некоторый промежуток между местом M и городом Фивы⁴. Если кто-то в момент времени t находится в точке M , то его нет в Фивах в момент t , поскольку, как справедливо замечает Аристотель, "...невозможно сразу идти в Фивы и прийти в Фивы" [2.С.125]. Из этого следует, что момент времени прихода в Фивы t' неравен моменту начала движения t . Мы имеем дело с различными моментами времени, относящимися к началу движения и к его концу. На утверждении $t \neq t'$ строится все дальнейшее рассуждение. Отметим при этом, что сама мысль о том, что тело может находиться в один и тот же момент времени в различных местах, отвергается с самого начала. Тем самым соблюдено требование 2.

Допустим теперь, что время непрерывно. Следовательно, найдется момент времени t'' , предшествующий моменту t' и наступивший позже момента t . Если путь $M\Phi$ неделим (утверждение о не непрерывности пространства), то, спрашивается, где находится движущееся по пути $M\Phi$ тело? Если в момент t'' тело находится в M , то момент t не является началом движения, что противоречитсылке. Если же в момент t'' тело находится в Фивах, то t' не является концом движения, что также противоречитсылке. Так где же находится движущееся по пути $M\Phi$ тело? Ясно, что в какой-то точке этого пути. Но эта точка не совпадает ни с точкой M , ни с точкой Φ . Остается единственная возможность — тело в

³Вновь за более подробной информацией мы отсылаем читателя к курсам математического анализа.

⁴Мы не всегда буквально следуем тексту самого Аристотеля в целях большей ясности изложения.

момент t'' находится между точками M и Φ и тем самым путь $M\Phi$ делим в противоречии с допущением о его неделимости. Итак, делимость времени влечет делимость пути, т.е. непрерывность времени влечет непрерывность пространства.

Рассмотрим противоположный случай. Допустим, путь $M\Phi$ непрерывен, а интервал времени (t, t') , за который преодолевается путь $M\Phi$, неделим. Из непрерывности маршрута $M\Phi$ следует его делимость. Рассмотрим отрезки $[M, A]$ и $[A, \Phi]$, составляющие в сумме путь $M\Phi$. В силу требования 1, неявно разделяемого Аристотелем, движущееся по маршруту $M\Phi$ тело не может не побывать в точке A этого маршрута. В противном случае непрерывность движения по непрерывному пространству была бы нарушена появлением разрыва в точке A пути $M\Phi$. Так как, по Аристотелю, "...всякое движение происходит во времени и во всякое время может происходить движение..." [2.С.127], в точке A пути $M\Phi$ тело появилось в некоторый момент времени t'' . Рассуждая как и в предыдущем случае, получаем, что $t \neq t''$ и $t'' \neq t'$. Действительно, попасть в точку A тело могло лишь двигаясь из точки M , но - "всякое движение происходит во времени", т.е. не мгновенно. Следовательно, $t \neq t''$. Аналогичным образом, преодоление пути $A\Phi$ вновь потребует некоторого времени, так что $t'' \neq t'$, что и требовалось. Итак, непрерывность пространства влечет непрерывность времени. Соединяя оба результата, получаем, что время непрерывно $\leftrightarrow$ пространство непрерывно. Такова, на наш взгляд, главная линия аргументации Аристотеля.

В дальнейшем изложении мы будем заниматься только той частью проблемы, которая касается дискретности времени и непрерывности пространства. Но, как уже отмечалось, применяемые нами методы позволяют в принципе строить и модели универсума, в котором пространство дискретно, а время непрерывно.

Обратим внимание на одно обстоятельство: Аристотель при обосновании сформулированной выше эквивалентности нигде не говорит о том, что в последующие моменты времени движущееся тело проходит последующие точки пути. Может быть, он так и думал, или считал это предположение само собой разумеющимся - во всяком случае, явно он на него не ссылается. Между тем, в наших построениях это обстоятельство будет одним из ключевых.

До сих пор основное внимание уделялось разъяснениям, относящимся к понятию непрерывности, а понятие дискретности оставалось в стороне. Пора восполнить этот пробел. Рассмотрим произвольное множество L , на котором определено отношение $<$, удовлетворяющее следующим условиям:

1. $\forall x \neg (x < x)$
2. $\forall x \forall y \forall z (x < y \& y < z \rightarrow x < z)$
3. $\forall x \forall y (x < y \vee y < x \vee x = y)$
4. $\forall x (\exists y (y < x) \rightarrow \exists z (z < x \& \forall u \neg (z < u < x)))$
5. $\forall x (\exists y (x < y) \rightarrow \exists z (x < z \& \forall u \neg (x < u < z)))$

Тогда упорядоченная пара $(L, <)$ называется *линейным дискретным множеством*.

Первые три аксиомы хорошо известны и составляют условия частичной упорядоченности (аксиомы 1 и 2) и линейности (аксиома 3). Аксиомы 4 и 5 показывают, какими свойствами должен обладать линейный порядок на произвольном множестве элементов, чтобы его можно было считать дискретным. С интуитивной точки зрения предложенный формальный подход к описанию явления дискретности является удачным. Ведь содержательный смысл аксиом 4 и 5 заключается в том, что если элемент линейно упорядоченного множества имеет предшественников (в смысле данного порядка), то он имеет и непосредственного предшественника или соседа такого, что между ним и его предшественником нет никаких других элементов. Таково содержание аксиомы 4. Соответствующим образом, и для любого элемента, имеющего последователя, найдется элемент, являющийся непосредственным последователем или соседом данного (так что соседний элемент — это либо непосредственный предшественник, либо непосредственный последователь данного элемента). Существование непосредственного последователя среди последователей рассматриваемого элемента, если таковые последователи вообще найдутся, гарантируется аксиомой 5.

Легко убедиться в том, что любое собственное сечение линейного дискретного множества является скачком. Тем самым только что введенное понятие дискретности согласуется с разобранными выше соображениями о связи явления дискретности и существования сечений-скачков.

Почему в определении дискретности речь идет о линейно упорядоченных множествах? По той простой причине, что время принято рассматривать как структуру, наделенную линейным порядком. Для любого момента времени t и любого момента времени t' считается, что либо t раньше, чем t' , либо t' раньше t , либо $t=t'$. Напротив, пространство наделяется обычно большим, чем одно, измерением.

Тем не менее, для того чтобы не затемнять основную идею дополнительными техническими усложнениями, ограничимся в дальнейшем рассмотрением одномерного непрерывного пространства. При этом не произойдет существенной потери общности рассуждений: предлагаемый метод без особого труда может быть перенесен на случай пространств различных типов и размерностей, если есть основания считать эти пространства непрерывными.

Более того, предлагаемый метод сопряжения непрерывных пространств и дискретного времени позволит варьировать понятие непрерывности в очень широких пределах, оставляя, однако, понятие дискретности, которое было сформулировано выше, в полной неприкосновенности. Короче говоря, время в наших построениях будет гораздо более стабильным образованием, чем пространство.

Последнее замечание в действительности имеет программный характер. Как показывает анализ современной научной литературы по проблеме пространства и времени, без труда и раньше удавшее-

еся умножение числа всевозможных пространств терпит явный провал при попытках умножить число времен. Зачастую этот факт завуалирован тем не всегда очевидным обстоятельством, что вместо времени, по существу, рассматривают какие-либо разновидности пространств. При таком обороте дела задача увеличить число рассматриваемых типов времен решается без особых хлопот. К сожалению, обсуждение этой стороны вопроса в данной работе приходится оставить в стороне.

Вернемся к идее о том, что движущийся объект в последующие моменты времени проходит последующие точки пути. Мы предлагаем отказаться от этой идеи. Пусть, например, кто-либо движется из точки M в Фивы и в некий момент времени t оказался в точке A этого пути. Пусть также точка B расположена ближе точки A к пункту назначения Φ и путник оказался в B в момент времени t' . Так вот, мы не требуем, чтобы t' наступило позже момента t . Допускается, что хотя A дальше от города Фивы, чем B , но в A путник окажется раньше, чем в B .

Кажется, что само по себе это предположение абсурдно. На самом деле это не так, если рассматривать очень мелкие участки пути. Но даже и в сфере повседневной жизни на пути к цели, если для достижения этой цели требуется переместиться из пункта M в пункт Φ , очень часто приходится временно отступать: то ли сделать шаг назад, чтобы открыть заклинившую дверь, то ли подниматься кругами вместе с самолетом над аэродромом, оказываясь то ближе, то дальше от цели, то ли сдавать назад при попытке взять с разгона трудный участок дороги, то ли что-нибудь еще в этом роде. В конце концов, все живые существа, имеющие ноги, раскачиваются при ходьбе.

Неизвестно, насколько убедительны предыдущие не вполне серьезные соображения. Поэтому обратимся к формальному аспекту рассматриваемой ситуации. Возьмем какой-либо отрезок $M\Phi$ одномерного пространства, которым для определенности будет множество, обычным образом упорядоченных действительных чисел R вместе с функцией расстояний (метрикой) p , определенной на R и удовлетворяющей условию

$$\forall x \forall y (p(x, y) = |x - y|).$$

Тогда пара $\langle R, p \rangle$ превращается в метрическое пространство, которое можно считать непрерывным на том основании, что функция p каждому непрерывному подмножеству S из R сопоставляет непрерывное множество значений расстояний между точками из S . Обозначим это пространство через R^1 .

Можно ли описать движение на отрезке $M\Phi$ при помощи времени, множество моментов которого упорядочено линейным дискретным образом? Если мы хотим, чтобы какому моменту t такого времени T соответствовала точка на $M\Phi$, каждой точке на $M\Phi$ соответствовал момент времени из T и при этом для любых t, t' при $t < t'$ расстояние между точкой pt , которая сопоставлена моменту t , и точкой Φ было больше, чем между точкой pt' , сопоставленной

моменту t' , и точкой Φ , то ответ будет отрицательным. Действительно, установить между $M\Phi$ и T отношение взаимно однозначного соответствия, сохраняющего порядок на этих множествах, невозможно. Убедимся в сказанном.

Допустим, существует функция f , взаимно однозначно отображающая T на $M\Phi$ и удовлетворяющая условию

$$(\forall t, t' \in T)(t < t' \rightarrow f(t) < f(t')). \quad (*)$$

(В антецеденте и консеквенте импликации $(*)$ употреблен один и тот же значок " $<$ " для обозначения отношений упорядоченности, тогда как в действительности слева и справа от стрелки " $\rightarrow$ " действуют разные отношения порядка; если помнить об этом, то никакой путаницы не произойдет.)

Так как T должно быть бесконечным линейным дискретным множеством (поскольку отрезок $M\Phi$ пространства R^1 бесконечен), найдутся моменты времени t_1 и t_2 такие, что $t_1 < t_2$ и $\forall t(\neg(t_1 < t < t_2))$. Тогда из допущения $(*)$ следует, что $f(t_1) < f(t_2)$, а из непрерывности отрезка $M\Phi$ вытекает

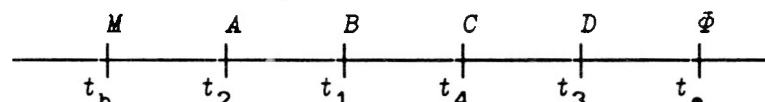
$$(f(t_1) < a < f(t_2)) \quad (**)$$

для некоторого $a \in M\Phi$.

Используя свойство взаимной однозначности функций f , получаем для обратной функции f^{-1} равенство $f^{-1}(a) = t$ для некоторого $t \in T$. Так как $\neg(t_1 < t < t_2)$, имеем четыре возможности: либо $t_1 = t$, либо $t_2 = t$, либо $t < t_1, t_2$, либо $t_1, t_2 < t$. Если $t_1 = t$, то $f(t_1) = f(t) = a$, что противоречит $(**)$. При $t_2 = t$ получаем $f(t_2) = f(t) = a$, что вновь противоречит $(**)$.

Оставшиеся два случая аналогичны. Из $t < t_1, t_2$ с использованием $(*)$ следует, что $a = f(t) < f(t_1), f(t_2)$ в противоречии с $(**)$; из $t_1, t_2 < t$ вытекает $f(t_1), f(t_2) < f(t) = a$ и снова противоречие с $(**)$.

Таким образом, приходится оставить надежды найти такой способ передвижения по непрерывному пространству R^1 в дискретные моменты времени, чтобы с каждым дискретным мгновением приближаться все ближе и ближе к концу пути. Но полученный отрицательный результат оставляет открытым вопрос о существовании не сохраняющих порядок взаимно однозначных отображений из подходящего линейного дискретного множества T на непрерывные отрезки или интервалы пространства R^1 . Для наглядности обратимся к следующему рисунку.



На рисунке схематически изображена часть дискретного механизма движения по непрерывному отрезку $M\Phi$. В начальный момент дискретного времени t_b движущейся точечный объект ε находится в точке M отрезка $M\Phi$. Затем, в следующий за t_b момент времени t_1 ε оказывается в точке B . Однако следующий шаг отбрасывает ε назад: в момент t_2 ε оказывается в точке A отрезка $M\Phi$. Далее ε в моменты t_3 и t_4 последовательно посещает точки D и C .

Казалось бы, в непоказанный на рисунке момент времени t_5 частица ε могла бы завершить движение, очутившись в точке Φ (так что было бы $t_5 = t_e$). В таком случае перед нами была бы изображена картина реновации частицы ε , дополнительно усложненная, так сказать, попятными реновациями. Как мы помним, реновация в качестве принципа решения проблемы соотношения дискретного времени и непрерывного пространства была исключена с самого начала. Поэтому в момент t_5 частица ε окажется где-то между точками M и Φ , но не в точке Φ (т.е. $t_5 \neq t_e$).

Более того, полное устранение идеи реновации возможно лишь в том случае, если будет реализован принцип запрета незавершенного движения, который вытекает из сформулированного в начале требования 1: след движущейся дискретным образом частицы должен в итоге образовать непрерывную траекторию; в противном случае движение не завершено.

Следовательно, отправившись в путь из пункта M , частица ε должна побывать во всех точках интервала (M, Φ) и лишь на последнем шаге оказаться в пункте Φ . Так как интервал (M, Φ) пространства R^1 имеет мощность континуума, реализация запрета незавершенного движения означает, что множество моментов дискретного времени, находящихся между моментами t_b и t_e , также должно иметь мощность континуума.

Итак, проблема сводится к вопросу о существовании линейных дискретных множеств несчетных мощностей (в том числе и мощности континуума). Хотя поставленный вопрос явно имеет теоретико-множественный характер, ответ на него мы получим при помощи одной из теорем математической логики – теоремы Левенгейма – Сколема – Тарского. Согласно этой теореме, если первопорядковая теория T_h имеет бесконечную модель, то она имеет бесконечные модели произвольной мощности [4].

Понятие линейного дискретного множества было задано при помощи средств, не выходящих за рамки первопорядковой логики предикатов. Поэтому, если взять приведенные выше пять аксиом, описывающих свойство линейной дискретности, в качестве аксиом теории TL , то к TL будет применима теорема Левенгейма – Сколема – Тарского. Необходимо только убедиться, что TL имеет бесконечную модель. Сделать это несложно: достаточно проверить, что, например, множество целых чисел Z является линейным дискретным множеством. В силу этого Z может рассматриваться как модель первопорядковой теории TL . Поскольку Z бесконечна, TL по теореме Левенгейма – Сколема – Тарского обладает моделями произвольной бесконечной мощности, в том числе и мощности континуума.

Пусть теперь множество T является моделью теории TL и имеет мощность континуума. Так как любая модель теории TL является линейным дискретным множеством, T – линейное дискретное множество мощности континуума, что и требовалось.

Остается преодолеть небольшое техническое затруднение, свя-

занное с необходимостью начать движение в момент t_b в точке M отрезка $[M, \Phi]$ и закончить его в момент t_e в точке Φ того же отрезка. Казалось бы, раз непрерывный отрезок $[M, \Phi]$ пространства R^1 имеет одинаковую мощность с дискретным множеством T , существует взаимно однозначное отображение f из T на $[M, \Phi]$, которое может быть взято в качестве формального описания движения частицы s по отрезку $[M, \Phi]$. Но если множество T , подобно множеству Z , не имеет начального и конечного элемента, с содержательной точки зрения оно не в состоянии выполнить эту роль.

Поступим следующим образом. Добавим к теории TL две новые аксиомы, утверждающие существование начального и конечного элемента, сузив таким образом класс линейных дискретных множеств:

$$6. \exists x \forall y (x \neq y \rightarrow x < y)$$

$$7. \exists x \forall y (x \neq y \rightarrow y < x).$$

Полученная теория TL' также имеет бесконечные модели. В качестве модели, например, может быть взято любое множество, упорядоченное по типу $\omega + \omega^*$. Этот порядковый тип можно представлять себе как множество положительных целых чисел, к "концу" которого добавлено множество отрицательных целых чисел. Такая совокупность является линейным дискретным множеством, обладающим начальным и конечным элементом и имеющим бесконечную мощность.

Вновь применяя теорему Левенгейма - Сколема - Тарского, получаем линейное дискретное множество T' с первым и последним элементом, имеющее мощность континуума и являющееся моделью теории TL' .

Если отбросить из множества T' первый и последний элементы (обозначим их через t_b и t_e соответственно), остаток T'' по-прежнему будет линейным дискретным множеством и будет иметь мощность континуума. Следовательно, существует взаимно однозначное отображение f'' из T'' на непрерывный интервал (M, Φ) . Расширим функцию f'' до функции f' , определенной на T' и удовлетворяющей условиям

$$f'(t) = f''(t), \text{ если } t \in T'',$$

$$f'(t_b) = M,$$

$$f'(t_e) = \Phi.$$

Определенная таким образом функция f' является взаимно однозначным отображением множества T' на отрезок $[M, \Phi]$ и удовлетворяет всем требованиям описания движения по непрерывному пространству в дискретные моменты времени. Это означает, что получен утвердительный ответ, на вопрос о том, может ли пространство быть непрерывным, а время - дискретным.

Описанный механизм движения можно наглядно вообразить, представив себе, что мы рисуем линию карандашом настолько тонко заточенным, что на его острие помещается лишь одна математическая точка. След от движения такого карандаша должен образовать искомую линию - скажем, линию $M\Phi$. Мы не в состоянии

гладко и плавно осуществить этот процесс. Действительно, первый шаг, очевидно в том, что острый карандаш помещается в точку M . Но каков будет следующий шаг? Начертить всю линию за одно мгновение не удастся. Изобразить какую-то ее непрерывную часть тоже – ведь если допустить, что можно мгновенно рисовать небольшие непрерывные кусочки линии, то непонятно, что мешает изобразить ее сразу целиком.

Выход состоит в том, чтобы не пытаться поздавать всю линию или ее часть, также являющуюся линией, за один шаг. Вместо этого мгновенно перенесем карандаш из точки M в любую другую точку интервала (M, Φ) . Повторив эту операцию трансфинитное число раз, мы увидим, как из дискретного множества точек постепенно возникает непрерывная линия. На последнем шаге, естественно, карандаш оказывается в точке Φ , завершая процесс рисования. Таким образом, линия возникает в результате серии мгновенных скачков. Получается, что континуум мало напоминает гладкую дорогу. Движение по нему скорее похоже на движение по сильно пересеченной местности.

Остается сказать несколько слов о соотношении описанного механизма движения и реальности. Не является ли этот механизм всего лишь забавной игрушкой, заведомо не имеющей аналогов в объективной действительности? Как ни удивительно на первый взгляд, не существует способа опровергнуть предложенное описание движения посредством эксперимента, если допускается непрерывность пространства, поскольку при этом всегда остается возможность дальнейшего уменьшения пространственных интервалов, в которых происходят дискретные скачки в ходе движения. Эти интервалы могут быть настолько малы, что разрешающая способность физических приборов окажется недостаточной. С другой стороны, вполне возможно, что дискретное описание механизма движения найдет экспериментальное подтверждение.

ЛИТЕРАТУРА

1. Александров П.С. Введение в теорию множеств и общую топологию. М., 1977.
2. Аристотель. Физика. М., 1937. С.127.
3. Вальцев А.Н. Дискретное пространство – время. М., 1965. С.16.
4. Кейслер Г., Чэн Ч.Ч. Теория моделей. М., 1977.

ОБ АКСИОМАТИЗИРУЕМОСТИ МНОГОЗНАЧНЫХ ЛОГИК, СВЯЗАННЫХ С ФОРМАЛИЗАЦИЕЙ ПРАВДОПОДОБНЫХ РАССУЖДЕНИЙ

В [9,2] предложена система правдоподобных рассуждений некоторого типа, основанных на формализации так называемых индуктивных методов Дж.С.Милля (методов сходства и методов различия). Эта формализация использует многозначные многосортные логики предикатов с кванторами по кортежам переменной длины (о языках с такими кванторами см. [6]). Программная реализация процедур правдоподобного вывода [9,2] используется в экспертных системах типа ДСМ [4,5].

При формализации правдоподобных рассуждений в [9,2] возникают бесконечнозначные предикатные логики с конечным числом типов истинностных значений (4-мя в [9] и 6-ю в [2], а именно: +1 - "фактическая истина", -1 - "фактическая ложь", 0 - "фактическое противоречие", τ - "недоопределенность", t - "логическая истина", f - "логическая ложь"). Истинностные значения этих типов (точнее, некоторых из них, а именно типов $\epsilon = +1, -1, 0$) в процессе правдоподобного вывода приписываются атомарным формулам. Такое приписывание производится конструктивно, шаг за шагом, в соответствии с определенными правилами. В результате этого каждый из указанных типов ϵ "расщепляется" в счетную цепочку истинностных значений $\langle \epsilon, n \rangle$, где натуральное $n \geq 0$ выражает число предшествующих применений правдоподобных правил (которое отражает "степень недоверности" гипотезы, полученной в процессе правдоподобного вывода).

В этой статье устанавливаются условия аксиоматизируемости для класса подобных бесконечнозначных предикатных логик с произвольным конечным числом типов истинностных значений. Тем самым обобщаются результаты [3,10] об аксиоматизации многозначных логик, возникающих при формализации правдоподобных рассуждений.

1. Условия аксиоматизируемости многозначных логик

1.1. Пусть многозначная (предикатная) логика V задана своим множеством истинностных значений V , множеством выделенных значений $V_d \subset V$, множеством связей S и кванторов Q , понимаемых естественным образом: всякой k -местной (где $k \geq 0$) связке σ из S отвечает функция $\bar{\sigma}: V^k \rightarrow V$ (при $k=0$: константа - элемент V), а квантору κ из Q - функция $\bar{\kappa}: 2^V \rightarrow V$ (где 2^V - множество подмножеств V). Предполагаем, что V содержит подмножество $V_e = \{T, F\}$, где $T \in V_d$, $F \notin V_d$ (T - "истина", F - "ложь"). Пусть в S выделено множество (возможно, пустое) S_0 всех 0-арных связей (констант из V) и множество S_1 (обязательно непустое) унарных V_e -значных

связок, т.е. для $J \in C_1$, $\alpha \in V$: $\bar{J}(\alpha) = \begin{cases} T, & \alpha \in V_J \\ F, & \alpha \notin V_J \end{cases}$ для некоторого $V_J \subseteq V$ (так называемый J -оператор Россера-Тюркетта [12], определяющий множество V_J). Пусть $C_2 = C \setminus (C_0 \cup C_1)$ (C_2 может содержать унарные связки, не являющиеся J -операторами).

Предикатный язык содержит индивидуальные переменные $x, y, \dots$ (с индексами или без)¹ и два типа предикатных символов: V -значные $P_1^{(m)}$ и V_e -значные (или 2-значные) $\theta_1^{(m)}$ (где $m \geq 0$ -арность символа)². Формулы строятся из атомарных (вида $P_1^{(m)}(x_1, \dots, x_m)$ и $\theta_1^{(m)}(x_1, \dots, x_m)$) при помощи связок и кванторов естественным образом (т.е. имеют вид $\sigma(\Phi_1, \dots, \Phi_k)$ и $(\kappa x)\Phi$, где $\sigma \in C$, $\kappa \in Q$). Свободные и связанные вхождения индивидуальных переменных в формулу определяются как обычно; параметры формулы — это переменные, имеющие в нее свободные вхождения; предложение — формула без параметров. Иногда, при необходимости, запись $\Phi(P_1^{(k_1)}, \dots, P_m^{(k_m)}; \theta_1^{(k'_1)}, \dots, \theta_m^{(k'_m)}; x_1, \dots, x_n)$ будет обозначать, что Φ есть формула с предикатами $P_i^{(k_i)}$, $\theta_j^{(k'_j)}$ и параметрами x_k (т.е. без иных символов, кроме перечисленных); запись $\Phi(x_1, \dots, x_n)$ понимается аналогично (когда предикатные символы не оговариваются).

Модель $\mathbb{M}$ логики V на области (непустом множестве) D сопоставляет всякому предикатному символу $P^{(m)}$ функцию $\bar{P}_{\mathbb{M}}^{(m)}: D^m \rightarrow V$, а символу $\theta^{(m)}$ — функцию $\bar{\theta}_{\mathbb{M}}^{(m)}: D^m \rightarrow V_e$. Оцененной формулой назовем выражение вида $\Phi(A_1, \dots, A_n)$, где $\Phi(x_1, \dots, x_n)$ — формула, $A_1, \dots, A_n$ — элементы D ; ей отвечает значение $\bar{\Phi}_{\mathbb{M}}(A_1, \dots, A_n)$ в модели $\mathbb{M}$ (элемент V)³, определяемое естественным образом: $\bar{P}^{(m)}(A_1, \dots, A_m) = \bar{P}_{\mathbb{M}}^{(m)}(A_1, \dots, A_m)$ (и аналогично для $\theta^{(m)}(A_1, \dots, A_n)$); $\overline{\sigma(\Phi_1, \dots, \Phi_k)} = \bar{\sigma}(\bar{\Phi}_1, \dots, \bar{\Phi}_k)$; $\overline{(\kappa x)\Phi(x)} = \bar{\kappa}(\overline{\Phi(A)}: A \in D)$ (значение $\bar{\kappa}(\emptyset)$ здесь несущественно: ведь $D \neq \emptyset$).

Формула $\Phi(x_1, \dots, x_n)$ истинна в модели $\mathbb{M}$ (или: $\mathbb{M}$ есть модель Φ — $\mathbb{M} \models \Phi$), если $\bar{\Phi}_{\mathbb{M}}(A_1, \dots, A_n) \in V_d$ при всех $A_1, \dots, A_n \in D$. Отношение семантического следования в логике V определяется обычным образом: $\Gamma \models_V \Phi$, если формула Φ истинна во всякой модели $\mathbb{M}$ множества формул Γ . Формула Φ общезначима в логике V , если Φ истинна во всякой модели $\mathbb{M}$ логики V (т.е. если $\models_V \Phi$). Скажем, что отношение семантического следования компактно, если выполнено: $(\Gamma \models_V \Phi) \Rightarrow (\Gamma' \models_V \Phi \text{ для некоторого конечного } \Gamma' \subseteq \Gamma)$.

Аксиоматическое исчисление I (для логики V) задается мно-

¹Во избежание громоздких обозначений мы рассматриваем здесь односортовый язык, обобщение на многосортный случай тривиально и трудностей не вызывает.

²Возможность введения функциональных символов, представимых 2-значными предикатами, тривиальна и специально обсуждаться не будет.

³Когда из контекста ясно, о какой модели идет речь, индекс в выражении $\bar{\Phi}_{\mathbb{M}}(A_1, \dots, A_n)$ будем опускать.

жеством аксиом и правил вывода (с конечным числом посылок). Определение выводимости в исчислении I традиционно: $\Gamma \vdash_I \Phi$, если Φ может быть получена из элементов Γ и аксиом I конечным числом применений правил исчисления I . Формула Φ есть теорема исчисления I , если $\vdash_I \Phi$. Если множества аксиом и правил исчисления I рекурсивно перечислимы, то таково же и множество теорем. Скажем, что исчисление I слабо аксиоматизирует логику V , если $\vdash_I \Phi \Leftrightarrow \vdash_V \Phi$ (для всякой формулы Φ); I сильно аксиоматизирует V , если $\Gamma \vdash_I \Phi \Leftrightarrow \Gamma \vdash_V \Phi$ (для всех Γ и Φ), т.е. выполняется так называемая "сильная теорема о полноте" (в последнем случае отношение $\Gamma \vdash_V \Phi$ компактно).

Рассмотрим условия слабой и сильной аксиоматизируемости для некоторого семейства многозначных предикатных логик.

1.2. Предложение $\Phi(P_1^{(0)}, \dots, P_k^{(0)})$ представляет связку $\bar{\sigma}_\Phi(\alpha_1, \dots, \alpha_k) = \Phi(\alpha_1, \dots, \alpha_k)$ (значение $\bar{\sigma}_\Phi$ в модели $\mathfrak{M}$ с $\overline{P_i^{(0)}} = \alpha_i, i=1, \dots, k$) для $\alpha_1, \dots, \alpha_k \in V$. Предложение $\Phi(P^{(1)})$ представляет квантор $\bar{\kappa}_\Phi(W) = \Phi(W)$ (значение $\bar{\kappa}_\Phi$ в модели $\mathfrak{M}$ с $\langle \bar{P}_\mathfrak{M}^{(1)}(A) : A \in D \rangle = W$) для $W \subseteq V, W \neq \emptyset$ (это определение корректно, так как индукцией по построению легко показать, что для всякой формулы $\Phi'(P^{(1)}; X_1, \dots, X_n)$ и $A_1, \dots, A_n \in D$ значение $\bar{\Phi}_\mathfrak{M}(\overline{A_1, \dots, A_n})$ может зависеть только от $\bar{P}_\mathfrak{M}^{(1)}(A_1), \dots, \bar{P}_\mathfrak{M}^{(1)}(A_n)$ и $\langle \bar{P}_\mathfrak{M}^{(1)}(A) : A \in D \rangle$).

Скажем, что логика V классически корректна (короче: просто корректна), если она содержит (или в ней представимы) связки $\neg, \vee$ и квантор $\exists$, совпадающие с классическими на множестве V_c (т.е. $\neg T = F, \neg F = T, T \vee T = T \vee F = F \vee T = T, F \vee F = F, \exists(\langle T \rangle) = \exists(\langle T, F \rangle) = T, \exists(\langle F \rangle) = F$); при этом, как обычно, легко представить в V связки $\&, \rightarrow, \leftrightarrow$ и квантор $\forall$, совпадающие с классическими на V_c . Мы будем рассматривать только корректные логики. Такие логики, в частности, содержат все формулы классической логики предикатов (их будем кратко называть классическими формулами) – формулы, построенные из 2-значных предикатов посредством $\neg, \vee, \exists$ (для таких формул семантика из п.1.1 совпадает с традиционной классической). Положим $T \neq J_0 \psi_0 \vee \neg J_0 \psi_0$ и $1 \neq \neg T$ (где ψ_0 и J_0 – произвольно фиксированные предложение и J -оператор) – формулы с постоянным значением T и F соответственно. Для формулы $\Phi(X_1, \dots, X_n)$ положим $(\forall \Phi) \neq (\forall X_1) \dots (\forall X_n) \Phi(X_1, \dots, X_n)$ ("замыкание всеобщности" для Φ).

J -формулой назовем формулу вида $J\Phi$, где $J \in C_1$, Φ – произвольная формула; она J -атомарна, если Φ – атомарная формула. J -пример классической формулы ψ' – результат подстановки в нее J -формул вместо некоторых (возможно, не всех) 2-значных предикатных символов. Это есть J -атомарный пример, если все подставляемые в ψ' формулы J -атомарны. Формулу ψ назовем внешней (нормальной), если она является J -примером (соответственно,

J -атомарным примером) некоторой классической формулы ψ' , иначе говоря, если ψ построена при помощи $\neg, \vee, \exists$ из J -формулы (соответственно, из J -атомарных формул) и 2-значных атомарных формул. Ясно, что всякая внешняя формула $\psi(X_1, \dots, X_n)$ "двузначна": ее значение $\overline{\psi}_{\mathbb{M}}(A_1, \dots, A_n)$ (в любой модели $\mathbb{M}$ и при любых $A_1, \dots, A_n \in D$) принадлежит V_e .

Нормальная формула $\Psi(P_1^{(0)}, \dots, P_k^{(0)})$ (без параметров) определяет k -местное отношение (на V) $R_\Psi = \{ \langle \alpha_1, \dots, \alpha_k \rangle \in V^k : \Psi(\alpha_1, \dots, \alpha_k) = T \}$ (так, например, J -атомарная формула $J P_1^{(0)}$ определяет множество V_J). Аналогично, нормальная формула $\Psi(P^{(1)})$ определяет семейство $S_\Psi = \{ W \subseteq V : \Psi(W) = T \}$. Отношение $R_\Psi \subseteq V^k$ (где $k > 0$) или семейство $S_\Psi \subseteq 2^V$ назовем J -определимым, если они определяются некоторой нормальной формулой.

Связка σ из C_2 (арности $k > 0$) J -определима, если для всякого $J \in C_1$ отношение $R_{\sigma, J} = \{ \langle \alpha_1, \dots, \alpha_k \rangle \in V^k : \bar{\sigma}(\alpha_1, \dots, \alpha_k) \in V_J \}$ J -определимо: иначе говоря, если существует нормальная формула $\Psi_{\sigma, J}(P_1^{(0)}, \dots, P_k^{(0)})$, представляющая связку $J\sigma(P_1^{(0)}, \dots, P_k^{(0)})$,

$$\text{т.е. } \overline{\Psi_{\sigma, J}(P_1^{(0)}, \dots, P_k^{(0)})} = \begin{cases} T, & \text{если } \bar{\sigma}(\bar{P}_1^{(0)}, \dots, \bar{P}_k^{(0)}) \in V_J, \\ F, & \text{иначе.} \end{cases}$$

(Это - аналог нормальных форм из [12].)

Аналогично, квантор κ из Q J -определим, если для всякого $J \in C_1$ семейство $S_{\kappa, J} = \{ W \subseteq V : \kappa(W) \in V_J \}$ J -определимо, т.е. если существует нормальная формула $\Psi_{\kappa, J}(P^{(1)})$, представляющая квантор $J(\kappa X)P^{(1)}(X)$,

$$\text{т.е. } \overline{\Psi_{\kappa, J}(P^{(1)})} = \begin{cases} T, & \text{если } \bar{\kappa}(\{ \bar{P}^{(1)}(A) : A \in D \}) \in V_J, \\ F, & \text{иначе.} \end{cases}$$

Корректную логику V назовем J -определимой, если выполнено:

- (а) все связи σ из C_2 и кванторы κ из Q J -определимы⁴;
- (б) множество выделенных значений V_d J -определимо, т.е. существует нормальная формула $\Psi_d(P^{(0)})$, выражающая связку

$$J_d(\alpha) = \begin{cases} T, & \alpha \in V_d \\ F, & \alpha \notin V_d. \end{cases}$$

1.3. Для J -определимой логики V введем исчисление $I(V)$ со следующими аксиомами и правилами вывода:

А: J -примеры всех аксиом классического исчисления предикатов (т.е. формулы вида $\Psi \rightarrow (\Psi' \rightarrow \Psi)$, $(\forall X)\Psi(X) \rightarrow \Psi(Y)$ и т.п., где Ψ, Ψ' - внешние формулы);

⁴Несколько более явное описание J -определимости будет приведено в § 2: см. замечание к теореме 2 в конце п.2.2.

$B: [(\bigwedge_{J \in B'} J\Phi) \rightarrow (\bigvee_{J \in B''} J\Phi)]$ для произвольной (на самом деле достаточно: атомарной) формулы Φ и для всех конечных $B', B'' \subseteq C_1$, удовлетворяющих условию $(\bigcap_{J \in B'} V_J) \subseteq (\bigcup_{J \in B''} V_J)$ (здесь допускается $B' = \emptyset$ или $B'' = \emptyset$: при этом, как обычно, пустое пересечение понимается как V , а пустое объединение — как $\emptyset$; соответственно, пустая конъюнкция есть T , а пустая дизъюнкция — $\perp$; иначе говоря, мы имеем аксиомы $\neg(\bigwedge_{J \in B'} J\Phi)$ для $B \subseteq C_1$ с $(\bigcap_{J \in B} V_J) = \emptyset$, и аксиомы $(\bigvee_{J \in B} J\Phi)$ для $B \subseteq C_1$ с $(\bigcup_{J \in B} V_J) = V$)⁵.

$C: [J(\sigma(\Phi_1, \dots, \Phi_k)) \leftrightarrow \Psi_{\sigma, J}(\Phi_1, \dots, \Phi_k)]$ и $[J((\kappa X)\Phi) \leftrightarrow \Psi_{\kappa, J}(\Phi)]$ для всех $J \in C_1$, $\sigma \in C_2$, $\kappa \in Q$ (и произвольных формул $\Phi_1, \dots, \Phi_k, \Phi$);
 $D: [J\sigma \leftrightarrow \Psi_{\sigma, J}], [JJ'\Phi \leftrightarrow \Phi_J(J'\Phi)], [J\theta^{(m)}(X_1, \dots, X_m) \leftrightarrow \Psi_J(\theta^{(m)}(X_1, \dots, X_m))]$ для всех $\sigma \in C_2, J, J' \in C_1$, 2-значных предикатов $\theta^{(m)}$ (и произвольной формулы Φ), где

$$\Psi_{\sigma, J} = \begin{cases} T, & \text{если } \bar{\sigma} \in V_J \\ \perp, & \text{если } \bar{\sigma} \notin V_J \end{cases} \quad \text{и } \Psi_J(\theta) = (\bigvee_{\alpha \in (V_e \cap V_J)} \theta^\alpha)$$

(здесь $\theta^\alpha = \begin{cases} \theta, & \alpha = T \\ \neg\theta, & \alpha = F \end{cases}$, а при $(V_e \cap V_J) = \emptyset$ пустая дизъюнкция есть $\perp$);

E : правила modus ponens $\frac{\Psi, \Psi \rightarrow \Psi'}{\Psi'}$ и обобщение⁶ $\frac{\Psi}{(\forall X)\Psi}$ для внешних формул Ψ, Ψ' и α -правила $\frac{\Psi}{\Psi_\alpha(\Phi)}, \frac{\Psi_\alpha(\Phi)}{\Phi}$ для произвольной формулы Φ .

ЛЕММА 1. ("корректность"). Пусть логика V J -определима. Тогда $\Gamma \vdash_I (V)\Phi \Rightarrow \Gamma \models_V \Phi$ (для всяких Γ, Φ).

Логику V назовем J -компактной, если выполнено:

(C): если $B', B'' \subseteq C_1$ и $(\bigcap_{J \in B'} V_J) \subseteq (\bigcup_{J \in B''} V_J)$, то существуют такие конечные $\tilde{B} \subseteq B', \tilde{B}'' \subseteq B''$, что $(\bigcap_{J \in \tilde{B}} V_J) \subseteq (\bigcup_{J \in \tilde{B}''} V_J)$

(здесь, как и в B , допускаются $B' = \emptyset$ или $B'' = \emptyset$, т.е. включаются требования:

$[((\bigcap_{J \in B} V_J) = \emptyset) \Rightarrow ((\bigcap_{J \in \tilde{B}} V_J) = \emptyset \text{ для некоторого конечного } \tilde{B} \subseteq B)]$ и $[((\bigcup_{J \in B} V_J) = V) \Rightarrow ((\bigcup_{J \in \tilde{B}} V_J) = V \text{ для некоторого конечного } \tilde{B} \subseteq B)]$.

ТЕОРЕМА 1 ("полнота"). Пусть логика V J -определима. Тогда:

⁵Разумеется, среди аксиом группы B много избыточных, которые можно отбросить, оставляя по возможности лишь аксиомы с минимальными (по включению) B', B'' .

⁶При определении выводимости из гипотез в этом исчислении никаких ограничений на применение правила обобщения не накладывается (в соответствии с тем, что в п.1.1 истинность внешней формулы понимается фактически как истинность ее замыкания всеобщности).

- 1) исчисление $I(V)$ слабо аксиоматизирует логику V ;
 2) если V J -компактна, то $I(V)$ сильно аксиоматизирует V .

Доказательство приведем в п.1.4. А пока сформулируем

СЛЕДСТВИЕ. Пусть логика V J -определима. Тогда следующие условия эквивалентны: 1) V J -компактна; 2) отношение $\Gamma \models_V \Phi$ компактно; 3) исчисление $I(V)$ сильно аксиоматизирует V .

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. 1) $\Rightarrow$ 3): по теореме 1. 3) $\Rightarrow$ 2) очевидно. 2) $\Rightarrow$ 1). Пусть V не J -компактна, т.е. имеем такие $B', B'' \subseteq C_1$, что

$$(\bar{C}): \left(\bigcap_{J \in B'} V_J \subseteq \bigcup_{J \in B''} V_J \right), \text{ но } \left(\bigcap_{J \in \bar{B}'} V_J \not\subseteq \bigcup_{J \in \bar{B}''} V_J \right) \text{ для всех}$$

конечных $B' \subseteq B, B'' \subseteq B$. Возьмем $\Gamma = (\forall (JP^{(n)}(X_1, \dots, X_n)) | J \in B') \cup \cup (\forall \neg (JP^{(n)}(X_1, \dots, X_n)) | J \in B'')$. Так как $(\bigcap_{J \in B'} V_J) \cap (\bigcap_{J \in B''} (V \setminus V_J)) = \emptyset$, то Γ не имеет моделей, т.е. $\Gamma \models_V \perp$. А всякое конечное $\Gamma \subseteq \Gamma$ имеет модель (так как $(\bigcap_{J \in B'} V_J) \cap (\bigcap_{J \in B''} (V \setminus V_J)) \neq \emptyset$ для конечных $B' \subseteq B, B'' \subseteq B$), т.е. $\Gamma \not\models_V \perp$.

Замечание. Для некомпактности отношения $\Gamma \models_V \Phi$ достаточно иметь в логике V удовлетворяющую $(\bar{C})$ систему представимых J -операторов: не обязательно, чтобы все они явно присутствовали в C_1 .

1.4. ДОКАЗАТЕЛЬСТВО теоремы 1 опирается на ряд лемм.

Пусть I^0 - обычное классическое исчисление предикатов: в нем выводимы в точности все общезначимые классические формулы - точнее, выполняется сильная теорема о полноте: $(\Gamma \vdash_{I^0} \Phi \Leftrightarrow \Gamma \models_V \Phi)$ для классических формул).

ЛЕММА 2. Все J -примеры теорем исчисления I^0 являются теоремами исчисления $I(V)$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО: из аксиом A (индукция по выводу в I^0).

СЛЕДСТВИЕ. Если Ψ_0 и Ψ'_0 - внешние формулы, и Ψ' есть результат замены во внешней формуле Ψ некоторого вхождения Ψ_0 на Ψ'_0 , то $(\Psi_0 \leftrightarrow \Psi'_0) \vdash_{I(V)} (\Psi \leftrightarrow \Psi')$ (предполагается, что заменяемое вхождение Ψ_0 не находится в области действия J -операторов внешней формулы Ψ).

ЛЕММА 3. 1) Для всякой формулы Φ и J -оператора J (из C_1) существует такая нормальная формула Ψ , что $\vdash_{I(V)} (J\Phi \leftrightarrow \Psi)$. 2) Для всякой внешней формулы Φ существует такая нормальная формула Ψ , что $\vdash_{I(V)} (\Phi \leftrightarrow \Psi)$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО: из аксиом C и D (индукция по Φ).

СЛЕДСТВИЕ ("нормализация"). Для всякой формулы Φ существует такая нормальная формула Ψ , что $\Phi \vdash_{I(V)} \Psi$ и $\Psi \vdash_{I(V)} \Phi$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО: по лемме 3, п.2) для внешней формулы $\Psi_a(\Phi)$ (и α -правилу).

Пусть Δ - некоторое множество нормальных формул, $\mathcal{P}(\Delta)$ и $C'_1(\Delta)$ - множество всех входящих в формулы из Δ V -значных предикатных символов и J -операторов соответственно. Пусть $\mathcal{P}^*(\Delta) = \{ \langle \theta_{P^{(m)}}^{(m)}, J \rangle | P^{(m)} \in \mathcal{P}(\Delta), J \in C'_1(\Delta) \}$ есть множество различных

2-значных предикатных символов, не входящих в формулы из Δ . Всякой формуле Ψ из Δ сопоставим классическую формулу Ψ^* - результат замены в Ψ всякой подформулы $J P^{(m)}(X_1, \dots, X_m)$ на $\theta_{P^{(m)}, J}^{(m)}(X_1, \dots, X_m)$ (Ψ есть J -пример формулы Ψ^*). Всякой модели

$\mathfrak{M}$ сопоставим модель $\mathfrak{M}^*$ (на той же области D), где $\overline{(\theta_{P^{(m)}, J}^{(m)})_{\mathfrak{M}^*}}$

$(A_1, \dots, A_m) = \overline{J((P^{(m)})_{\mathfrak{M}}(A_1, \dots, A_m))}$ для $\theta_{P^{(m)}, J}^{(m)} \in \mathfrak{P}^*(\Delta)$, $A_1, \dots, A_m \in D$ (значения 2-значных предикатов, входящих в формулы из Δ , сохраняются в $\mathfrak{M}^*$ из $\mathfrak{M}$). При этом $\mathfrak{M}^* \models \Psi^* \Leftrightarrow \mathfrak{M} \models \Psi$ (для формул Ψ из Δ). Положим

$$\Delta_0^* = \{ ((\bigwedge_{J \in B'} \theta_{P^{(m)}, J}^{(m)}(X_1, \dots, X_m)) \rightarrow (\bigvee_{J \in B''} \theta_{P^{(m)}, J}^{(m)}(X_1, \dots, X_m))) \};$$

$$P^{(m)} \in \mathfrak{P}(\Delta), B', B'' \subseteq C_1'(\Delta), B', B'' \text{ конечны, } (\bigcap_{J \in B'} V_J) \subseteq (\bigcup_{J \in B''} V_J).$$

ЛЕММА 4. Пусть Δ , $\mathfrak{P}(\Delta)$, $C_1'(\Delta)$, $\mathfrak{P}^*(\Delta)$, Δ_0^* определены как выше, и выполнено условие: Δ бесконечно $\Rightarrow \forall J$ -компактна. Тогда для всякой модели $\mathfrak{M}'$ множества формул Δ_0^* существует такая модель $\mathfrak{M}$, что $\mathfrak{M}^* = \mathfrak{M}'$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Пусть $\mathfrak{M}'$ - модель Δ_0^* . Фиксируем произвольные $P^{(m)} \in \mathfrak{P}(\Delta)$ и $A_1, \dots, A_m \in D$. Положим

$$B' = \{ J \in C_1'(\Delta) : (\theta_{P^{(m)}, J}^{(m)})_{\mathfrak{M}'}(A_1, \dots, A_m) = \mathbf{T} \}, \quad B'' = (C_1'(\Delta) \setminus B') =$$

$$\{ J \in C_1'(\Delta) : (\theta_{P^{(m)}, J}^{(m)})_{\mathfrak{M}'}(A_1, \dots, A_m) = \mathbf{F} \}. \text{ Покажем, что } (\bigcap_{J \in B'} V_J) \not\subseteq (\bigcup_{J \in B''} V_J) \text{ (т.е. что в } V \text{ существует элемент } \alpha_{P^{(m)}}(A_1, \dots, A_m),$$

принадлежащий $((\bigcap_{J \in B'} V_J) \setminus (\bigcup_{J \in B''} V_J))$.

Действительно, допустим противное. Если Δ конечно, то формула $((\bigwedge_{J \in B'} \theta_{P^{(m)}, J}^{(m)}(X_1, \dots, X_m)) \rightarrow (\bigvee_{J \in B''} \theta_{P^{(m)}, J}^{(m)}(X_1, \dots, X_m)))$ принадлежит Δ_0^* , т.е. истинна в $\mathfrak{M}'$ - в противоречие с определением B', B'' . Если же Δ бесконечно, то логика $\forall J$ -компактна, а значит, имеем такие конечные $B' \subseteq B', B'' \subseteq B''$, что $(\bigcap_{J \in B'} V_J) \subseteq (\bigcup_{J \in B''} V_J)$ - и противоречие аналогично предыдущему.

Теперь определим модель $\mathfrak{M}$, где $\overline{P_{\mathfrak{M}}^{(m)}(A_1, \dots, A_m)} = \alpha_{P^{(m)}}(A_1, \dots, A_m)$ (для всех $P^{(m)} \in \mathfrak{P}(\Delta)$ и $A_1, \dots, A_m \in D$) - она

искомая, так как $\overline{J(P_{\mathfrak{M}}^{(m)}(A_1, \dots, A_m))} = \overline{(\theta_{P^{(m)}, J}^{(m)})_{\mathfrak{M}}(A_1, \dots, A_m)}$.

ЛЕММА 5. Пусть $\Delta = (\Gamma \cup \{\Phi\})$ и $\mathfrak{P}(\Delta)$, $C_1'(\Delta)$, $\mathfrak{P}^*(\Delta)$, Δ_0^* определены как выше. Пусть $(\Gamma^* \cup \Delta_0^*) \vdash_{I^0} \Phi^*$ (где $\Gamma^* = (\Psi^* : \Psi \in \Gamma)$). Тогда $\Gamma \vdash_I (\forall) \Phi$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. По теореме дедукции для I^0 , $\vdash_{I^0} [\bigwedge_{i=1}^r (\forall \Psi_i^*) \& \bigwedge_{j=1}^s (\forall \Psi_j') \rightarrow \Phi^*]$, где $\Psi_1, \dots, \Psi_r \in \Gamma$, $\Psi_1', \dots, \Psi_s' \in \Delta_0^*$. По лемме 2,

$\vdash_{I(V)} [\bigwedge_{i=1}^r (\forall \Psi_i) \ \& \ \bigwedge_{j=1}^s (\forall \Psi'_j) \rightarrow \Phi]$, где Ψ'_j (для $j=1, \dots, s$) есть результат замены в Ψ_j всех $\theta_{p(m),j}^{(m)}(X_1, \dots, X_m)$ на $Jp^{(m)}(X_1, \dots, X_m)$, т.е. аксиома В исчисления $I(V)$.

СЛЕДСТВИЕ. Пусть $\Delta = (\Gamma \cup \{\Phi\})$ есть множество нормальных формул, и выполнено условие: Γ бесконечно $\rightarrow V$ J -компактна. Тогда: $\Gamma \models_V \Phi \rightarrow \vdash_{I(V)} \Phi$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Пусть $\Gamma \models_{I(V)} \Phi$. По лемме 5, $(\Gamma^* \cup \Delta_0^*) \models_{I_0} \Phi^*$, и имеем модель $\mathfrak{M}'$ множества $(\Gamma^* \cup \Delta_0^*)$, в которой не истинна Φ^* . По лемме 4, имеем модель $\mathfrak{M}$ с $\mathfrak{M}^* = \mathfrak{M}'$. Значит, $\mathfrak{M}$ — модель Γ и $\mathfrak{M} \models \Phi$, т.е. $\Gamma \models_V \Phi$.

Отсюда, используя Следствие о нормализации, получаем утверждение теоремы 1, п.1 (при $\Gamma = \emptyset$) и п.2 (при J -компактной V и произвольном Γ).

1.5. Несколько замечаний.

Если множество истинностных значений V конечно, и корректная логика V содержит J -операторы, определяющие все подмножества V (или, например, все одноэлементные подмножества V), то логика V J -определима (и J -компактна), поэтому исчисление $I(V)$ сильно аксиоматизирует V (при этом рекурсивное множество аксиом $I(V)$ легко упростить, отбросив избыточные в группе В — фактически, см. [1]).

В § 2 мы рассмотрим несколько более общий (чем конечнозначные) класс многозначных логик: таких, которые имеют конечное число "типов" истинностных значений, но некоторые из этих "типов" "расщепляются" в счетную последовательность значений (и вводятся соответствующие J -операторы). В таких бесконечнозначных логиках, вообще говоря, не все связки и кванторы J -определимы, и в § 2 решается задача описания условий J -определимости (более "явных", чем само определение из п.1.2), т.е. задача указания границ применимости описанного в § 1 метода аксиоматизации (для логик из рассматриваемого в § 2 класса).

Отметим, что J -определимость — достаточное, но заведомо не необходимое условие аксиоматизируемости⁷. При чересчур буквальном понимании это совсем тривиально: разумеется, существуют аксиоматизируемые (например, конечнозначные) логики, содержащие слишком мало J -операторов, чтобы быть J -определимыми. Несколько более содержательно существование бесконечнозначных аксиоматизируемых логик со связками, которые не становятся J -определимыми при добавлении любого числа J -операторов. В качестве простого примера приведем следующую логику V_c , получаемую несложной модификацией предикатного варианта цепной

⁷Ясно, что существуют разные, не сводящиеся один к другому, методы аксиоматизации — и нет смысла серьезно рассчитывать на универсальный.

логики Даммета. Множество истинностных значений V_C - множество всех действительных чисел отрезка $[0,1]$ с $T=1$, $F=0$ и единственным выделенным значением $\bar{1}$ (т.е. $V_C=\{1\}$). Связки и кванторы - обычные интуиционистские $\&, \vee, \rightarrow, \neg, \forall, \exists$ (с $(\alpha_1 \& \alpha_2) = \min(\alpha_1, \alpha_2)$, $(\alpha_1 \vee \alpha_2) = \max(\alpha_1, \alpha_2)$; $(\neg \alpha_1) = (\alpha_1 \rightarrow 0) = \begin{cases} 1 & \text{если } \alpha_1 = 0 \\ 0 & \text{если } \alpha_1 \neq 0 \end{cases}$ для $\alpha_1, \alpha_2 \in V_C$, и $\bar{V}(W) = \inf(W)$, $\exists(W) = \sup(W)$ для $W \subseteq V_C$), а также S5-модальность $\Box$ (с $\Box \alpha = \begin{cases} 1 & \text{если } \alpha = 1 \\ 0 & \text{если } \alpha \neq 1 \end{cases}$, для $\alpha \in V_C$ - т.е. $\Box = J_d$). Связка $\rightarrow$ (точнее, отношение $R_{\rightarrow, \Box} = \{ \langle \alpha_1, \alpha_2 \rangle \in V_C^2 : (\alpha_1 \rightarrow \alpha_2) = 1 \} = \{ \langle \alpha_1, \alpha_2 \rangle \in V_C^2 : \alpha_1 \leq \alpha_2 \}$) остается не J -определимой даже при добавлении J -операторов, определяющих все подмножества V_C (в этом легко убедиться, используя описание J -определимости, приводимое далее в замечании в конце п.2.2).

Исчисление I_C содержит обычные схемы аксиом и правила вывода интуиционистского исчисления предикатов (в языке с $\Box$), правило $\left[\frac{\Phi}{\neg \Phi} \right]$ и следующие схемы аксиом (где Φ, Φ' - произвольные формулы): $(\forall X)(\Phi' \vee \Phi) \rightarrow \Phi' \vee (\forall X)\Phi$ (где X - не параметр Φ'); $\Box(\Phi \rightarrow \Phi') \rightarrow (\Box \Phi \rightarrow \Box \Phi')$; $(\Box \Phi \rightarrow \Phi) \rightarrow \Box \Phi$; $\Box(\Phi \rightarrow \Phi') \vee \Box(\Phi' \rightarrow \Phi)$; $(\Box \Phi \vee \Box \Phi')$; $\theta_1^{(m)}(X_1, \dots, X_m) \vee \neg \theta_1^{(m)}(X_1, \dots, X_m)$ (где $\theta_1^{(m)}$ - 2-значный предикат). Доказательство полноты (в сильном смысле) исчисления I_C для логики V_C (в стиле Генкина, как обычно для интуиционистских предикатных систем) наметим очень кратко, опуская технические детали.

Пусть D - счетное множество, F_D - множество всех оцененных (в D) формул. Множество $\Delta \subseteq F_D$ полно, если: (i) если $\vdash_C (\bigwedge_{i=1}^r \Phi_i \rightarrow \bigvee_{j=1}^s \Phi_j)$ и $\Phi_i \in \Delta$ для всех $i \in \{1, \dots, r\}$, то $\Phi_j \in \Delta$ для некоторого $j \in \{1, \dots, s\}$ (здесь $r, s \geq 0$); (ii) если $\Phi(A) \in \Delta$ для всех $A \in D$, то $(\forall X)\Phi(X) \in \Delta$. Полное Δ $\exists$ -полно, если: (3) если $(\exists X)\Phi(X) \in \Delta$, то $\Phi(A) \in \Delta$ для некоторого $A \in D$; полное Δ $\Box$ -полно, если: (4) если $\Phi \in \Delta$, то $\Box \Phi \in \Delta$ ($\Box$ -полнота не влечет $\exists$ -полноту, и наоборот).

ЛЕММА 6. Пусть D -счетное множество. 1) Если $\Gamma \vdash_C \Phi$ (где $(\Gamma \cup \{\Phi\})$ - множество предложений), то существует $\Box$ -полное $\Delta \subseteq F_D$, что $\Gamma \subseteq \Delta$, $\Phi \notin \Delta$. 2) Если Δ полно, и $(\Phi \rightarrow \Phi') \notin \Delta$, то существует $\exists$ -полное $\Delta' \supseteq (\Delta \cup \{\Phi\})$, $\Phi' \notin \Delta'$. 3) Пусть $\Delta \subseteq F_D$ $\Box$ -полно. Положим $K = \{ \Delta' \subseteq F_D : \Delta \subseteq \Delta', \Delta' \text{ } \exists\text{-полно} \}$, $V = \{ K' \subseteq K : (\forall \Delta' \in K') (\forall \Delta'' \supseteq \Delta') (\Delta'' \in K') \}$ и $\bar{\Phi} = \{ \Delta' \in K : \Phi \in \Delta' \}$ ($\in V$) для всякой $\Phi \in F_D$. Тогда: i) K и V линейно упорядочены по включению; ii) $\bar{\Phi} = K \iff \Phi \in \Delta$; iii) $(\Box \Phi) = \begin{cases} K, & \text{если } \bar{\Phi} = K, \\ \emptyset, & \text{если } \bar{\Phi} \neq K, \end{cases}$ iv) $(\Phi \& \Phi') = \bar{\Phi} \cap \bar{\Phi}'$, $(\Phi \vee \Phi') = \bar{\Phi} \cup \bar{\Phi}'$, $(\Phi \rightarrow \Phi') = \begin{cases} K, & \text{если } \bar{\Phi} \subseteq \bar{\Phi}', \\ \bar{\Phi}', & \text{если } \bar{\Phi} \not\subseteq \bar{\Phi}', \end{cases}$

$$\overline{(\neg\Phi)} = \begin{cases} K, & \text{если } \overline{\Phi} = \emptyset, \\ \emptyset, & \text{если } \overline{\Phi} \neq \emptyset, \end{cases} \quad \overline{(\forall X)\Phi(X)} = \bigcap (\overline{\Phi(A)} : A \in D), \quad \overline{(\exists X)\Phi(X)} = \bigcup (\overline{\Phi(A)} : A \in D);$$

v) $\theta^{(m)}(A_1, \dots, A_m) \in \{K, \emptyset\}$ для 2-значных предикатов $\theta^{(m)}$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО традиционно (сравн. [11, §3]): в п 1) для обеспечения Π -полноты используем то, что $\vdash_{\Pi} (\Box(\Phi \& \Phi') \leftrightarrow \Box\Phi \& \Box\Phi')$ и $\vdash_{\Pi} (\Box(\Phi \vee \Phi') \leftrightarrow \Box\Phi \vee \Box\Phi')$; п 2) аналогичен лемме 3.6 в [9]; в п.3) i) вытекает из 2), т.к. $\Phi \in \Delta \Rightarrow (T \rightarrow \Phi) \in \Delta$, а i) вытекает из i), т.к. $\Phi \in \Delta \Rightarrow (\Box\Phi) \in \Delta \Rightarrow (\neg\Box\Phi) \in \Delta$.

ЛЕММА 7. Для всякого счетного линейно упорядоченного множества V с наибольшим и наименьшим элементами 1 и 0 существует изоморфное (по $\leq$) вложение V в V_c , сохраняющее 1, 0 и все (имеющиеся в V) $\sup$ и $\inf$ (для подмножеств $W \subseteq V$).

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО: пусть $V = \{v_n : n \in \mathbb{N}\}$ (где $\mathbb{N} = \{0, 1, 2, \dots\}$), $v_n = 1$ для $n=0, 1$; полагаем $h(v_n) = v_n$ для $n=0, 1$, а для $n \geq 2$:

$$h(v_n) = \frac{h(v_r) + h(v_s)}{2}, \quad \text{где } v_r - \text{наибольший элемент в } \{v_1 < v_n : i < n\},$$

$$v_s - \text{наименьший в } \{v_1 > v_n : i < n\}.$$

ЛЕММА 8. Пусть D счетное множество, V линейно упорядоченное множество с наибольшим и наименьшим элементами K и $\emptyset$, и заданы $\overline{\Phi} \in V$ для всех Φ из F с выполнением условий i)–v) леммы 6, п.3. Тогда существует модель $\mathfrak{M}$ логики V_c на D , где $\overline{\Phi}_{\mathfrak{M}} = 1 \Leftrightarrow \overline{\Phi} = K$ (для всякой $\Phi \in F_D$).

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО: полагаем $P_{\mathfrak{M}}^{(m)}(A_1, \dots, A_m) = h(P^{(m)}(A_1, \dots, A_m))$ (и аналогично для $\theta^{(m)}$), где h – изоморфное вложение $(\overline{\Phi} : \Phi \in F_D) (\subseteq V)$ в V_c из леммы 7; тогда $\overline{\Phi}_{\mathfrak{M}} = h(\overline{\Phi})$ для всех $\Phi \in F_D$.

СЛЕДСТВИЕ ("полнота"). $\Gamma \vdash_{\Pi} \Phi \Leftrightarrow \Gamma \models_V \Phi$.

2. Логика с конечным числом типов истинностных значений

2.1. Пусть задана четверка конечных множеств $E = \langle E_0, E_1, E_d, E_e \rangle$, где $E_0 \cap E_1 = \emptyset$, $E_d \subseteq \overline{E} = (E_0 \cup E_1)$, $E_e = \{t, f\}$, $t \in E_d$, $f \in (\overline{E} \setminus E_d)$. Обозначим $\mathbb{N} = (\mathbb{N}(\omega))$, где $\mathbb{N} = \{0, 1, 2, \dots\}$ – множество натуральных чисел, а $\omega \in \mathbb{N}$; линейно упорядочим $\mathbb{N}$ естественным

образом: $0 < 1 < 2 < \dots < \omega$. Для $\varepsilon \in \overline{E}$ положим $\mathbb{N}_{\varepsilon} = \begin{cases} \mathbb{N}, & \varepsilon \in E_1, \\ \{0\}, & \varepsilon \in E_0. \end{cases}$

$V_{\varepsilon} = \{(\varepsilon, n) : n \in \mathbb{N}_{\varepsilon}\}$, $\Lambda_{\varepsilon} = \{(\varepsilon, m) : m \in \mathbb{N}_{\varepsilon}\}$ (здесь элементы V_{ε} будут истинностными значениями логики V_E , а элементы Λ_{ε} – индексами для обозначения ее J -операторов). Для $\lambda = (\varepsilon, m) \in \Lambda_{\varepsilon}$ положим

$$V_{\lambda} = \{(\varepsilon, n) : n \leq m\} \subseteq V_{\varepsilon}. \quad \text{Ясно, что } V_{\varepsilon} = V_{\tilde{\varepsilon}} \text{ для } \tilde{\varepsilon} = \begin{cases} (\varepsilon, \omega), & \varepsilon \in E_1 \\ (\varepsilon, 0), & \varepsilon \in E_0 \end{cases} \quad (\text{т.е.}$$

$\tilde{\varepsilon} = (\varepsilon, n_{\varepsilon})$, где n_{ε} – наибольший по $\leq$ элемент $\mathbb{N}_{\varepsilon}$).

Рассмотрим многозначную логику V_E со множеством истинностных значений $V_E = (\bigcup_{\varepsilon \in \overline{E}} V_{\varepsilon})$, множеством выделенных значений $V_d = (\bigcup_{\varepsilon \in E_d} V_{\varepsilon})$, с $V_e = \{T, F\}$, где $T = \{t, 0\}$, $F = \{f, 0\}$ и с множеством

J -операторов $C_1 = \{J_\lambda : \lambda \in \Lambda_E\}$, где $\Lambda_E = (\bigcup_{\varepsilon \in \bar{E}} \Lambda_\varepsilon)$ и для $\lambda = (\varepsilon, \pi) \in \Lambda_E$, $\alpha \in V_E : \bar{J}_\lambda(\alpha) = \begin{cases} T, \alpha \in V_\lambda \\ F, \alpha \notin V_\lambda \end{cases}$; множества остальных связок C_0, C_2 и кванторов Q логики V_E задаются произвольно (предполагаем только, что логика V_E корректна, т.е. в ней представимы классические $\neg, \vee, \exists$).

С содержательной точки зрения, $\bar{E}$ есть конечное множество "типов" истинностных значений (среди которых: тип "истины" t , тип "лжи" f и др.), а E_d - множество типов выделенных значений; каждый из типов представлен в логике V_E или одним значением $\langle \varepsilon, 0 \rangle$ для $\varepsilon \in E_0$ ("нерасщепленные" типы), или счетной цепочкой значений $\langle \varepsilon, n \rangle : n \in \mathbb{N}$ для $\varepsilon \in E_1$ ("расщепленные", точнее, "счетно-расщепленные" типы) - иначе говоря, V_ε (для $\varepsilon \in \bar{E}$) есть множество всех значений данного типа, а множество всех истинностных значений V_E есть $(\bigcup_{\varepsilon \in \bar{E}} V_\varepsilon)$ (разные типы значений, разумеется, не пересекаются). Описанную конструкцию легко обобщить, допуская, например, "расщепление" типа не обязательно на счетное, а на конечное число значений (т.е. допуская в качестве $\mathbb{N}_\varepsilon$, кроме $\mathbb{N}$, любые конечные подмножества $\mathbb{N}$) - подобные изменения не влияют на существо результатов § 2, приводя только к более громоздким формулировкам. Отметим также, что всякая конечнозначная логика V с J -операторами, определяющими все одноэлементные подмножества V , (см. п.1.5) совпадает с V_E для $E_1 = \emptyset, E_0 = V$.

В логике V_E представимы J -операторы J_ε с $\bar{J}_\varepsilon(\alpha) = \begin{cases} T, \alpha \in V_\varepsilon \\ F, \alpha \notin V_\varepsilon \end{cases}$ и

$$J_{\langle \varepsilon, n \rangle}, J_{\langle \varepsilon, n \rangle}^* \text{ с } \bar{J}_{\langle \varepsilon, n \rangle}(\alpha) = \begin{cases} T, \alpha = \langle \varepsilon, n \rangle \\ F, \alpha \neq \langle \varepsilon, n \rangle \end{cases}, \quad J_{\varepsilon, n}^*(\alpha) = \begin{cases} T, \alpha \in (V_\varepsilon \setminus V_{\langle \varepsilon, n \rangle}) \\ F, \text{ иначе,} \end{cases}$$

$$\text{для } \varepsilon \in \bar{E}, n \in \mathbb{N}_\varepsilon = \begin{cases} \mathbb{N}, \varepsilon \in E_1 \\ \{0\}, \varepsilon \in E_0 \end{cases} \quad \begin{matrix} \text{(элементы } \langle \varepsilon, \omega \rangle \text{ для } \varepsilon \in E_1, \text{ как мы скоро} \\ \text{увидим, тут играют особую роль)} \end{matrix} \quad \begin{matrix} (0) & (0) \end{matrix}$$

ро увидим, тут играют особую роль) - а именно $J_{\varepsilon P} = J_{\tilde{\varepsilon}} P$

$$\text{(где } \tilde{\varepsilon} = \begin{cases} (\varepsilon, \omega), \varepsilon \in E_1 \\ (\varepsilon, 0), \varepsilon \in E_0 \end{cases},$$

$$J_{\langle \varepsilon, n \rangle} P^{(0)} = \begin{cases} J_{\langle \varepsilon, n \rangle} P^{(0)} \& J_{\langle \varepsilon, n-1 \rangle} P^{(0)} \\ J_{\langle \varepsilon, n \rangle} P^{(0)} \text{ при } n=0, \end{cases} \quad \text{при } n \in (\mathbb{N}_\varepsilon \setminus \{0\}),$$

$J_{\langle \varepsilon, n \rangle}^* P^{(0)} = J_\varepsilon P^{(0)} \& J_{\langle \varepsilon, n \rangle} P^{(0)}$. Представим также J -оператор J_d

$$\text{с } \bar{J}_d(\alpha) = \begin{cases} T, \alpha \in V_d \\ F, \alpha \notin V_d \end{cases}; \quad \text{формулой } J_d P^{(0)} = \bigvee_{\varepsilon \in E_d} J_\varepsilon P^{(0)}. \quad \text{Таким образом,}$$

для логики V_E выполнено условие (b) из п.1.2, и значит, ее J -определимость сводится к J -определимости всех связок из C_2 и кванторов из Q .

Замечание: J -операторы $J_{\langle \varepsilon, n \rangle} : \varepsilon \in E_1, n \in \mathbb{N}$, вместе с $J_\varepsilon : \varepsilon \in \bar{E}$ образуют систему J -операторов, эквивалентную исходной системе $J_{(\varepsilon, m)} : \varepsilon \in \bar{E}, m \in \mathbb{N}$: так как $J_{(\varepsilon, m)}$ для $\varepsilon \in E_1, m \in \mathbb{N}$ представимы через них формулами $(\bigvee_{n \leq m} J_{\langle \varepsilon, n \rangle} P^{(0)})$.

ЛЕММА 9. Пусть $(\mathcal{V}_E \text{ логики } V_E) \Lambda', \Lambda'' \leq \Lambda_E$. Тогда:

$$(\bigcap_{\lambda \in \Lambda'} V_\lambda) \leq (\bigcup_{\lambda \in \Lambda''} V_\lambda) \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow i) (\exists \varepsilon \in \bar{E}) \Lambda'' \leq \Lambda', \text{ или}$$

$$ii) (\exists \varepsilon_1, \varepsilon_2 \in \bar{E}) (\varepsilon_1 \neq \varepsilon_2, \Lambda' \cap \Lambda_{\varepsilon_1} \neq \emptyset, \Lambda' \cap \Lambda_{\varepsilon_2} \neq \emptyset), \text{ или}$$

$$iii) (\exists \varepsilon \in \bar{E}) (\exists n', n'' \in \mathbb{N}) (n' \leq n'', (\varepsilon, n') \in \Lambda', (\varepsilon, n'') \in \Lambda'').$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. (*): выполнение условий i), ii) или iii) влечет, соответственно: $(\bigcup_{\lambda \in \Lambda'} V_\lambda) = V_E$, $(\bigcap_{\lambda \in \Lambda'} V_\lambda) = \emptyset$, $(V_\lambda \leq V_{\lambda'})$ для $\lambda' = (\varepsilon, n') \in \Lambda', \lambda'' = (\varepsilon, n'') \in \Lambda''$.

($\Rightarrow$): если условия i), ii), iii) не выполнены, то $\Lambda' \leq \{(\varepsilon, m) : m \in \mathbb{N}_\varepsilon, m \geq n\}$, $(\Lambda' \cap \Lambda_\varepsilon) \leq \{(\varepsilon, m) : m \in \mathbb{N}_\varepsilon, m < n\}$ для некоторых $\varepsilon \in \bar{E}, n \in \mathbb{N}_\varepsilon$, и значит, $\langle \varepsilon, n \rangle \in ((\bigcap_{\lambda \in \Lambda'} V_\lambda) \setminus (\bigcup_{\lambda \in \Lambda''} V_\lambda))$.

СЛЕДСТВИЕ. Логика V_E J -компактна.

Замечание: если допустить рассмотрение V_E с бесконечным $\bar{E} = (E_0 \cup E_1)$, то логика V_E была бы не J -компактной (так как тогда $(\bigcup_{\varepsilon \in \bar{E}} V_\varepsilon) = V_E$, но $(\bigcup_{\varepsilon \in E'} V_\varepsilon) \neq V_E$ для конечных $E' \subseteq \bar{E}$).

Таким образом, если логика V_E J -определима, то исчисление $I(V_E)$ сильно аксиоматизирует ее (по теореме 1, п.2). При этом аксиомы групп B и D исчисления $I(V_E)$ после устранения избыточных принимают вид:

$$B_E: i) (\bigvee_{\varepsilon \in \bar{E}} J_\varepsilon \Phi);$$

$$ii) \neg(J_{\varepsilon_1} \Phi \& J_{\varepsilon_2} \Phi) \text{ для } \varepsilon_1, \varepsilon_2 \in \bar{E}, \varepsilon_1 \neq \varepsilon_2;$$

$$iii) (J_{(\varepsilon, n')} \Phi \leftrightarrow J_{(\varepsilon, n'')} \Phi) \text{ для } \varepsilon \in \bar{E}_1, n', n'' \in \mathbb{N}, n' < n'';$$

$$D_E: J_\lambda \sigma, \text{ для } \lambda \in \Lambda_E, \sigma \in C_0, \bar{\sigma} \in V_\lambda;$$

$$\neg J_\lambda \sigma, \text{ для } \lambda \in \Lambda_E, \sigma \in C_0, \bar{\sigma} \notin V_\lambda;$$

$$J_{(t, n)} J_\lambda \Phi \leftrightarrow J_\lambda \Phi \text{ для } \lambda \in \Lambda_E, n \in \mathbb{N}_t;$$

$$J_{(f, n)} J_\lambda \Phi \leftrightarrow \neg J_\lambda \Phi \text{ для } \lambda \in \Lambda_E, n \in \mathbb{N}_f;$$

$$\neg J_\varepsilon J_\lambda \Phi \text{ для } \lambda \in \Lambda_E, \varepsilon \in (\bar{E} \setminus E_e)$$

(и аналогично с заменой $J_\lambda \Phi$ на $\theta^{(m)}(X_1, \dots, X_m)$ для 2-значных предикатов); аксиомы групп A и C по сравнению с п.1.3 не упрощаются (сравн. [3]).

Таким образом, если (для J -определимой V_E) формулы $\Psi_{\sigma, J}, \Psi_{\kappa, J}$ (для $J \in C_1, \sigma \in C_2, \kappa \in Q$) строятся эффективно (и $\langle \langle \lambda, \sigma \rangle : \lambda \in \Lambda_E, \sigma \in C_0, \bar{\sigma} \in V_\lambda \rangle$ разрешимо), то множество аксиом $I(V_E)$ рекурсивно, т.е. логика V_E рекурсивно аксиоматизируема.

Замечание. Если к числу J -операторов логики V_E добавить $J_{\langle \varepsilon, \omega \rangle}$ ($\text{с } \bar{J}_{\langle \varepsilon, \omega \rangle}(\alpha) = \begin{cases} T, \alpha = \langle \varepsilon, \omega \rangle \\ F, \alpha \neq \langle \varepsilon, \omega \rangle \end{cases}$) для $\varepsilon \in E_1$ (для всех, или хотя

бы для одного), то в полученной логике V_E' отношение $\Gamma \models_{V_E'} \Phi$ окажется некомпактным (так как $\Gamma = \{J_{(\varepsilon, n)}^{(0)} : n \in \mathbb{N}\} \models_{V_E'} J_{(\varepsilon, \omega)}^{(0)}$, но $\Gamma \not\models_{V_E'} J_{(\varepsilon, \omega)}^{(0)}$ для конечных $\Gamma \subseteq \Gamma$). Поэтому такая логика V_E' не будет сильно аксиоматизируемой (хотя слабая аксиоматизируемость, при условии J -определимости, обеспечена по теореме 1, п.1). Значит, если логика V_E J -определима, то J -операторы $J_{(\varepsilon, \omega)}$ (для $\varepsilon \in E_1$) в ней не представимы (см. замечание к следствию из теоремы 1 в п.1.3).

2.2. Приведем теперь более явное описание понятия J -определимости связок и кванторов в логике V_E .

Множество $Z \subseteq \mathbb{N}$ ($= \mathbb{N}_\varepsilon$ для $\varepsilon \in E_1$) назовем *регулярным*, если Z или $(\mathbb{N} \setminus Z)$ есть конечное подмножество $\mathbb{N}$; в $\{0\}$ ($= \mathbb{N}_\varepsilon$ для $\varepsilon \in E_0$) всякое подмножество Z регулярно. Множество $W \subseteq V_E$ регулярно, если регулярны его ε -сечения $W_\varepsilon = \{n \in \mathbb{N}_\varepsilon : \langle \varepsilon, n \rangle \in W\}$ для всех $\varepsilon \in \bar{E}$. Отношение $R \subseteq V_E^k$ (где $k > 0$) регулярно, если $R = \bigcup_{i=1}^r (W_{i1} \times \dots \times W_{ik})$ для регулярных $W_{ij} \subseteq V_E$, $i=1, \dots, r$, $j=1, \dots, k$ (или, что приводит к равносильному определению: для $W_{ij} = \{\langle \varepsilon_{ij}, n \rangle : n \in Z_{ij}\}$ с $\varepsilon_{ij} \in \bar{E}$ и с регулярными $Z_{ij} \subseteq \mathbb{N}_{\varepsilon_{ij}}$). При $k=1$ это определение эквивалентно регулярности для множеств $\subseteq V_E$.

Положим $G = \{g = \langle Z'_g, Z''_g \rangle : (Z'_g \text{ конечное подмножество } \mathbb{N}), (Z''_g = \{n \in \mathbb{N} : n < m\} \text{ для некоторого } m \in \mathbb{N}), ((Z'_g \cap Z''_g) = \emptyset)\}$. Паре $g = \langle Z'_g, Z''_g \rangle$ из G сопоставим семейство подмножеств $H_g = \{Z \subseteq \mathbb{N} : (Z'_g \subseteq Z \subseteq (Z'_g \cup Z''_g)) \text{ и } (Z''_g \neq \emptyset \Rightarrow (Z \cap Z''_g) \neq \emptyset)\}$ (например, $H_{\langle \emptyset, \mathbb{N} \rangle} = \{Z \subseteq \mathbb{N} : Z \neq \emptyset\}$, $H_{\langle Z, \emptyset \rangle} = \{Z\}$ для конечного $Z \subseteq \mathbb{N}$). Положим $\Omega = \{\Theta = \langle E_\Theta, F_\Theta \rangle : E_\Theta \subseteq E_0, F_\Theta \text{ есть функция из } E_1 \text{ в } G\}$; паре $\Theta = \langle E_\Theta, F_\Theta \rangle$ из Ω сопоставим семейство $S_\Theta = \{W \subseteq V_E : (\forall \varepsilon \in E_0) (\langle \varepsilon, 0 \rangle \in W \Leftrightarrow \varepsilon \in E_\Theta) \text{ и } (\forall \varepsilon \in E_1) (\{n \in \mathbb{N} : \langle \varepsilon, n \rangle \in W\} \in H_{F_\Theta(\varepsilon)})\}$. Семейство $S \subseteq 2^{V_E}$ регулярно, если $S = (\bigcup_{i=1}^s S_{\Theta_i})$ для некоторых $\Theta_i \in \Omega$, $i=1, \dots, s$.

ТЕОРЕМА 2. 1) Связка σ (арности $k > 0$) из C_2 J -определима в логике $V_E \Leftrightarrow$ для всякого $\lambda \in \Lambda_E$ отношение $R_{\sigma, \lambda} = \{\langle \lambda_1, \dots, \lambda_k \rangle \in V_E^k : \bar{\sigma}(\alpha_1, \dots, \alpha_k) \in V_\lambda\}$ регулярно. 2) Квантор κ из Q J -определим в логике $V_E \Leftrightarrow$ для всякого $\lambda \in \Lambda_E$ семейство $S_{\kappa, \lambda} = \{W \subseteq V_E : \bar{\kappa}(W) \in V_\lambda\}$ регулярно.

Замечание. Здесь вместо $R_{\sigma, \lambda} : \lambda \in \Lambda$ можно говорить об отношениях $R_{\sigma, \varepsilon} = \{\langle \alpha_1, \dots, \alpha_k \rangle \in V_E^k : \bar{\sigma}(\alpha_1, \dots, \alpha_k) \in V_\varepsilon\} : \varepsilon \in \bar{E}$, $R_{\sigma, \langle \varepsilon, n \rangle} = \{\langle \alpha_1, \dots, \alpha_k \rangle \in V_E^k : \bar{\sigma}(\alpha_1, \dots, \alpha_k) = \langle \varepsilon, n \rangle\} : \varepsilon \in E_1, n \in \mathbb{N}$ (и аналогично для квантора κ) - это связано с эквивалентностью соответствующих систем J -операторов (см. замечание в п.2.1 перед леммой 9).

Теорема вытекает из следующей леммы.

ЛЕММА 10. 1) Отношение $R \subseteq V_E^k$ (где $k > 0$) J -определимо $\Leftrightarrow$ регулярно. 2) Семейство $S \subseteq 2^{V_E}$ J -определимо $\Leftrightarrow$ регулярно.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. ($\Leftarrow$). Регулярное множество $W \subseteq V_E$ определимо формулой $\Psi_W(P^{(0)}) = \bigvee_{\varepsilon \in E} \Psi_{W, \varepsilon}(P^{(0)})$, где

$$\Psi_{W, \varepsilon}(P^{(0)}) = \begin{cases} (\bigvee_{\langle \varepsilon, n \rangle \in W} J_{\langle \varepsilon, n \rangle} P^{(0)}), & \text{если } (W \cap V_E) \text{ конечно,} \\ (J_{\varepsilon} P^{(0)} \& (\bigwedge_{\langle \varepsilon, n \rangle \notin W} \neg J_{\varepsilon, n} P^{(0)})), & \text{если } (V_E \setminus W) \text{ конечно.} \end{cases}$$

Поэтому регулярное отношение $R = (\bigcup_{i=1}^r (W_{i1} \times \dots \times W_{ik}))$ (где W_{ij} регулярны) определимо формулой $\Psi_R(P_1^{(0)}, \dots, P_k^{(0)}) = (\bigvee_{i=1}^r \bigwedge_{j=1}^k \Psi_{W_{ij}}(P_j^{(0)}))$. Аналогично, регулярное $S = (\bigcup_{i=1}^s S_{\theta_i}) \subseteq 2^{V_E}$ определимо формулой $\Psi_S(P^{(1)}) = (\bigvee_{i=1}^s \Psi_{\theta_i}(P^{(1)}))$, где

для $\theta = \langle E_\theta, F_\theta \rangle \in \Omega$ с $F_\theta(\varepsilon) = \langle Z'_{\theta, \varepsilon}, Z''_{\theta, \varepsilon} \rangle$, (Θ)

$W'_{\theta, \varepsilon} = \{ \langle \varepsilon, n \rangle : n \in Z'_{\theta, \varepsilon} \}$, $W_{\theta, \varepsilon} = \{ \langle \varepsilon, n \rangle : n \in (Z'_{\theta, \varepsilon} \cup Z''_{\theta, \varepsilon}) \}$ для $\varepsilon \in E_1$:

$$\Psi_\theta(P^{(1)}) = (\bigwedge_{\varepsilon \in E_\theta} (\exists X) J_{\varepsilon} P^{(1)}(X) \& (\bigwedge_{\varepsilon \in (E_0 \setminus E_\theta)} \neg (\exists X) J_{\varepsilon} P^{(1)}(X)) \&$$

$$\& (\bigwedge_{\varepsilon \in E_1} ((\bigwedge_{n \in Z'_{\theta, \varepsilon}} (\exists X) J_{\langle \varepsilon, n \rangle} P^{(1)}(X)) \& (\forall X) \Psi_{W'_{\theta, \varepsilon}}(P^{(1)}(X)))$$

$(\& (\exists X) \Psi_{W_{\theta, \varepsilon}}(P^{(1)}(X))))$ (здесь часть, заключенная в квадратные

скобки, при $Z'_{\theta, \varepsilon} = \emptyset$ опускается).

($\Rightarrow$). Доказательство использует следующую лемму, которую легко получить традиционной техникой элиминации кванторов и приведения к дизъюнктивной нормальной форме (д.н.ф.):

ЛЕММА II ("элиминация"). 1) Для всякой классической формулы $\Psi(\theta_1^{(0)}, \dots, \theta_m^{(0)})$ существует такая классическая формула

$\Psi^* = (\bigvee_{i=1}^r \bigwedge_{j=1}^{p_i} \Psi_{ij})$ с Ψ_{ij} вида $\theta_q^{(0)}$ или $\neg \theta_q^{(0)}$, $q \in \{1, \dots, m\}$ (I)

($r, p_1, \dots, p_r \geq 0$),

что $\vdash^0 (\Psi \leftrightarrow \Psi^*)$.

2) Для всякой классической формулы $\Psi(\theta_q^{(1)}, \dots, \theta_m^{(1)}, X_1, \dots, X_n)$ существует такая классическая формула

$$\left. \begin{aligned} \Psi^* = & (\bigvee_{i=1}^s \bigwedge_{j=1}^{p_i} \Psi_{ij}) \text{ с } \Psi_{ij} \text{ вида } \theta_q^{(1)}(X_q), \neg \theta_q^{(1)}(X_q), \\ & (q \in \{1, \dots, m\}, q' \in \{1, \dots, n\}) \text{ или вида} \\ & (\exists X) (\bigwedge_{k=1}^{p_i} \Psi_{ijk}) \text{ или } \neg (\exists X) (\bigwedge_{k=1}^{p_i} \Psi_{ijk}) \\ & \text{с } \Psi_{ijk} \text{ вида } \theta_q^{(1)}(X), \neg \theta_q^{(1)}(X) (q \in \{1, \dots, m\}), \end{aligned} \right\} \quad (\Sigma) \quad (II)$$

что $\vdash^0 (\Psi \leftrightarrow \Psi^*)$.

1) Пусть $R = \langle \alpha_1, \dots, \alpha_k \rangle \in V_E^k : \Psi(\alpha_1, \dots, \alpha_k) = \top \rangle$ для нормальной формулы $\Psi(P_1^{(0)}, \dots, P_k^{(0)})$. Так как Ψ есть J -атомарный пример классической формулы, то, применяя лемму 11 и очевидные

соотношения между J -операторами логики V_E , легко привести ее к виду:

$$\Psi^* = (\bigvee_{i=1}^r \bigwedge_{j=1}^k J_{ij} P_j^{(0)}),$$

где $r \geq 0$, а J_{ij} есть операторы $J_\varepsilon (\varepsilon \in E)$ или $J_{\langle \varepsilon, n \rangle}$, $J_{\langle \varepsilon, n \rangle}^+$ ($\varepsilon \in E_1$, $n \in \mathbb{N}$) - и значит, $\{\alpha \in V_E: \bar{J}_{ij}(\alpha) = T\}$ регулярно.

2) Аналогично, $S = \{W \subseteq V_E: \Psi(W) = T\}$ для нормальной формулы $\Psi(P^{(1)})$, приводимой к виду:

$$\Psi^* = (\bigvee_{i=1}^s \bigwedge_{j=1}^{p'_i} \Psi_{ij}),$$

где $s', p'_1, \dots, p'_s \geq 0$, а каждая Ψ_{ij} имеет вид

$$(\exists X) J_{ij} P^{(1)}(X) \text{ или } \neg (\exists X) J_{ij} P^{(1)}(X) \text{ для}$$

$$J_{ij} \in ((J_\varepsilon: \varepsilon \in \bar{E}) \cup (J_{\langle \varepsilon, n \rangle}, J_{\langle \varepsilon, n \rangle}^+ : \varepsilon \in E_1, n \in \mathbb{N})).$$

Далее, обычными средствами обращения с д.н.ф., формулу Ψ^* легко привести к виду

$$\Psi^{**} = (\bigvee_{i=1}^s \bigwedge_{\varepsilon \in \bar{E}} \Psi_{i\varepsilon}),$$

где $s \geq 0$, а $\Psi_{i\varepsilon}$ есть $((\exists X) J_\varepsilon P^{(1)}(X))^{\alpha_{i\varepsilon}}$ для $\varepsilon \in E_0$ и

$$[(\exists X) J_{\langle \varepsilon, n_{i\varepsilon} \rangle}^+ P^{(1)}(X))^{\alpha_{i\varepsilon}} \& \bigwedge_{m \leq n_{i\varepsilon}} ((\exists X) J_{\langle \varepsilon, m \rangle} P^{(1)}(X))^{\alpha_{i\varepsilon m}}] \text{ для}$$

$$\varepsilon \in E_1 \text{ (здесь } n_{i\varepsilon} \in \mathbb{N}, \text{ а } \alpha_{i\varepsilon}, \alpha_{i\varepsilon m} \in V_E = \{T, F\} \text{ и } \theta^{\alpha} = \begin{cases} \theta, \alpha = T \\ \neg \theta, \alpha = F \end{cases}). \text{ При этом}$$

семейства $S_i = \{W \subseteq V_E: (\bigwedge_{\varepsilon \in \bar{E}} \Psi_{i\varepsilon}(W)) = T\}$ имеют вид S_{θ_i} для

надлежащих $\theta_i \in \Omega$ - и значит, семейство $S = (\bigcup_{i=1}^s S_i)$ регулярно.

Замечание. Теорему 2 (точнее, лемму 10) легко распространить на произвольную логику V (из § 1). А именно, отношение $R \subseteq V^k$ (где $k > 0$) J -определимо $\Leftrightarrow R = \bigcup_{i=1}^r (W_{i1} \times \dots \times W_{ik})$, где $W_{ij} \subseteq V$ есть пересечение конечного числа множеств вида V_j или $(V \setminus V_j)$ для $J \in C_1$. Семейство $S \subseteq 2^V$ J -определимо $\Leftrightarrow S = (\bigcap_{i=1}^r S_{ij})$, где S_{ij} имеют вид $\{W \subseteq V: (W \cap W_{ij}) = \emptyset\}$ или $\{W \subseteq V: (W \cap W_{ij}) \neq \emptyset\}$ (для таких же W_{ij}). (Видно, что описание в общем случае более тривиально и менее информативно, чем в теореме 2.)

Теперь применим доказанную теорему, чтобы установить критерии J -определимости (в логике V_E) для некоторых классов достаточно естественных связок и кванторов. При этом, во избежание громоздких обозначений, ограничимся рассмотрением только бинарных связок - распространение на случай произвольной ариности $k > 0$ (там, где оно осмысленно и интересно), как правило, тривиально, и останавливаться на этом не будем.

2.3. Произвольному квантору κ (логики V_E) сопоставим бинарную связку σ_κ , положив $\bar{\sigma}_\kappa(\alpha_1, \alpha_2) = \bar{\kappa}(\langle \alpha_1, \alpha_2 \rangle)$ для $\alpha_1, \alpha_2 \in V_E$.

ЛЕММА 12. Если семейство $S \subseteq 2^{V_E}$ регулярно, то отношение $R_S = \{\langle \alpha_1, \alpha_2 \rangle \in V_E^2: \langle \alpha_1, \alpha_2 \rangle \in S\}$ регулярно.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Достаточно рассмотреть случай $S=S_\Theta$ для $\Theta=\langle E_\Theta, F_\Theta \rangle \in \Omega$. При этом R_S определимо формулой $\Psi(P_1^{(0)}, P_2^{(0)}) =$
 $= (\&_{\epsilon \in E_\Theta} (J_{\epsilon} P_1^{(0)} \vee J_{\epsilon} P_2^{(0)})) \& (\&_{\epsilon \in (E_0 \setminus E_\Theta)} \neg (J_{\epsilon} P_1^{(0)} \vee J_{\epsilon} P_2^{(0)})) \&$
 $\&_{\epsilon \in E_1} (\&_{n \in Z'_{\Theta, \epsilon}} (J_{\langle \epsilon, n \rangle} P_1^{(0)} \vee J_{\langle \epsilon, n \rangle} P_2^{(0)}) \& \Psi_{W_{\Theta, \epsilon}}(P_1^{(0)}) \& \Psi_{W_{\Theta, \epsilon}}(P_2^{(0)}))$
 $[\& (\Psi_{W'_{\Theta, \epsilon}}(P_1^{(0)}) \vee \Psi_{W'_{\Theta, \epsilon}}(P_2^{(0)}))]$
(здесь $Z'_{\Theta, \epsilon}$, $Z''_{\Theta, \epsilon}$, $W'_{\Theta, \epsilon}$ и $W_{\Theta, \epsilon}$ определяются как в (Θ) , а часть, заключенная в квадратные скобки, при $Z'_{\Theta, \epsilon} = \emptyset$ опускается).

СЛЕДСТВИЕ. Если квантор κ J -определим (в логике V_E), то соответствующая связка σ_κ также J -определима.

Замечание. Предыдущее замечание (в конце п.2.2) позволяет легко распространить это утверждение для произвольной логики V (из § 1).

2.4. Определим на V_E отношение эквивалентности $(\alpha' \sim_E \alpha'') \Leftrightarrow (\exists \epsilon \in \bar{E})(\alpha', \alpha'' \in V_\epsilon)$ (т.е. α' и α'' - "значения одного типа"). Для $W', W'' \subseteq V_E$ положим: $(W' \sim_E W'') \Leftrightarrow (\forall \epsilon \in \bar{E})((W' \cap V_\epsilon) \neq \emptyset \Leftrightarrow (W'' \cap V_\epsilon) \neq \emptyset)$ (т.е. $(W' \sim_E W'') \Leftrightarrow (W'_E = W''_E)$, где $W_E = \{\epsilon \in \bar{E} : (W \cap V_\epsilon) \neq \emptyset\}$ есть множество типов представленных в $W \subseteq V_E$). Связку (бинарную) σ (логики V_E) назовем $\bar{E}$ -инвариантной, если $(\forall \alpha'_1, \alpha'_2, \alpha''_1, \alpha''_2 \in E)((\alpha'_1 \sim_E \alpha'_2) \& (\alpha''_1 \sim_E \alpha''_2) \Rightarrow (\bar{\sigma}(\alpha'_1, \alpha'_2) \sim_E \bar{\sigma}(\alpha''_1, \alpha''_2)))$; иначе говоря, $\bar{E}$ -инвариантная связка σ задается по набору функций $\langle \bar{\sigma}_E : \tau_{\epsilon', \epsilon''} : \epsilon', \epsilon'' \in \bar{E} \rangle$ (где $\bar{\sigma}_E : \bar{E} \times \bar{E} \rightarrow \bar{E}$ и $\tau_{\epsilon', \epsilon''} : N_{\epsilon'} \times N_{\epsilon''} \rightarrow N_{\epsilon}$ для $\epsilon', \epsilon'' \in \bar{E}$, $\epsilon = \bar{\sigma}_E(\epsilon', \epsilon'')$) соотношением $\bar{\sigma}(\langle \epsilon', n' \rangle, \langle \epsilon'', n'' \rangle) = \langle \bar{\sigma}_E(\epsilon', \epsilon''), \tau_{\epsilon', \epsilon''}(n', n'') \rangle$. Квантор κ (логики V_E) $\bar{E}$ -инвариантен, если $(\forall W', W'' \subseteq V_E)(W' \sim_E W'' \Rightarrow (W') \sim_E \kappa(W''))$, т.е.

если корректно определена такая функция $\bar{\kappa}_E : 2^{\bar{E}} \rightarrow \bar{E}$, что $(\forall W \subseteq V_E)(\bar{\kappa}(W) \in V_{\bar{\kappa}_E(W_E)})$. С содержательной точки зрения, связки и кванторы $\bar{E}$ -инвариантны, если они "корректно определены" на типах истинностных значений (из $\bar{E}$); и если понимать V_E как логику конечного числа типов истинностных значений, то именно такие (т.е. $\bar{E}$ -инвариантные) связки и кванторы представляют интерес и заслуживают рассмотрения. Если квантор κ $\bar{E}$ -инвариантен, то такова же и связка σ_κ .

Скажем, что функция $\tau : N_{\epsilon'} \times N_{\epsilon''} \rightarrow N_{\epsilon}$ монотонна, если она возрастает (т.е. $(\forall n'_1 \leq n'_2 \in N_{\epsilon'}) (\forall n''_1 \leq n''_2 \in N_{\epsilon''}) (\tau(n'_1, n''_1) \leq \tau(n'_2, n''_2))$) или убывает (определение аналогично). Функция $\tau : N_{\epsilon'} \times N_{\epsilon''} \rightarrow N_{\epsilon}$ непрерывна, если она удовлетворяет следующим условиям:

- 1: если $\epsilon, \epsilon' \in E_1$ (т.е. $N_\epsilon = N_{\epsilon'} = N$), то для всех $n'' \in N_{\epsilon''}$:
 - 1.1: $(\tau(\omega, n'') = \omega) \Rightarrow (\forall n \in N)(\exists n_0 \in N)(\forall n' \geq n_0)(\tau(n', n'') > n)$,
 - 1.2: $(\tau(\omega, n'') = n \in N) \Rightarrow (\exists n_0 \in N)(\forall n' \geq n_0)(\tau(n', n'') = n)$;
- 2: аналогично по второму аргументу (при $\epsilon, \epsilon' \in E_1$, т.е. $N_\epsilon = N_{\epsilon'} = N$).

Если $(\epsilon \in E_0)$ или $(\epsilon', \epsilon'' \in E_0)$, то функция (константа) $\tau : N_{\epsilon'}$

$\times \mathbb{N}_{\varepsilon}, \rightarrow \mathbb{N}_{\varepsilon}$ автоматически непрерывна (и монотонна).

$\bar{E}$ -инвариантную связку σ (логики V_E) назовем *монотонной*, если все функции $\tau_{\varepsilon', \varepsilon''}$ (для $\varepsilon', \varepsilon'' \in \bar{E}$) монотонны (допускается, чтобы они возрастали при одних $\langle \varepsilon', \varepsilon'' \rangle$ и убывали при других). Аналогично, $\bar{E}$ -инвариантная связка σ *непрерывна*, если все функции $\tau_{\varepsilon', \varepsilon''}$ непрерывны.

Для $W', W'' \subseteq V_E$ положим $(W' \leq W'') \leftrightarrow (\forall \varepsilon \in \bar{E}) (\forall n' \in \mathbb{N}_{\varepsilon}) ((\langle \varepsilon, n' \rangle \in W') \Rightarrow (\exists n'' \in \mathbb{N}_{\varepsilon}) (n' \leq n'', \langle \varepsilon, n'' \rangle \in W''))$. Скажем, что $\bar{E}$ -инвариантный квантор κ (логики V_E) E' -монотонен (где $E' \subseteq \bar{E}$), если он E' -возрастает:

$(\forall W', W'' \subseteq V_E)$ (если $W' \leq W''$, $W'_E = W''_E = E'$, $\bar{\kappa}_{\bar{E}}(E') = \varepsilon$, $\bar{\kappa}(W') = \langle \varepsilon, n' \rangle$, $\bar{\kappa}(W'') = \langle \varepsilon, n'' \rangle$, то $n' \leq n''$)

-или же E' -убывает (определение аналогично: $n' \leq n''$ заменяется на $n' \geq n''$). $\bar{E}$ - инвариантный квантор κ E' -непрерывен⁸, если для всех $W \subseteq V_E$ с $W_E = E'$, $\bar{\kappa}_{\bar{E}}(E') = \varepsilon \in E_1$ и всех $\varepsilon' \in (E_1 \cap E')$ выполняется:

1: $(\bar{\kappa}(W \cup \{\langle \varepsilon', \omega \rangle\}) = \langle \varepsilon, \omega \rangle) \Rightarrow (\forall n \in \mathbb{N}) (\exists n_0 \in \mathbb{N}) (\forall n' \geq n_0) (\bar{\kappa}(W \cup \{\langle \varepsilon', n' \rangle\}) = \langle \varepsilon, n' \rangle \text{ для } n' > n)$,

2: $(\bar{\kappa}(W \cup \{\langle \varepsilon', \omega \rangle\}) = \langle \varepsilon, n \rangle, n \in \mathbb{N}) \Rightarrow (\exists n_0 \in \mathbb{N}) (\forall n' \geq n_0) (\bar{\kappa}(W \cup \{\langle \varepsilon', n' \rangle\}) = \langle \varepsilon, n \rangle)$.

$\bar{E}$ -инвариантный квантор κ монотонен (и непрерывен), если он E' -монотонен (соответственно, E' -непрерывен) при всяком $E' \subseteq \bar{E}$. Если квантор κ монотонен или непрерывен, то такова же и связка σ_{κ} .

ТЕОРЕМА 3. $\bar{E}$ -инвариантные и монотонные связка σ и квантор κ (логики V_E) J -определимы $\Leftrightarrow$ непрерывны.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО теоремы 3 ($\Leftarrow$).

Для $\lambda = \varepsilon$ (при $\varepsilon \in \bar{E}$) отношение $R_{\sigma, \lambda} = \{ \langle \alpha_1, \alpha_2 \rangle \in V_E^2 : \bar{\sigma}(\alpha_1, \alpha_2) \in V_{\lambda} = V_{\varepsilon} \} = \bigcup_{\bar{\sigma}_{\bar{E}}(\varepsilon', \varepsilon'') = \varepsilon} (V_{\varepsilon}, X V_{\varepsilon}, \dots)$ и семейство $S_{\kappa, \lambda} = \{ W \subseteq V_E : \bar{\kappa}(W) \in V_{\lambda} = V_{\varepsilon} \} = \bigcup_{\bar{\kappa}_{\bar{E}}(E') = \varepsilon} \{ W_E : W_E = E' \}$ регулярны. Теперь докажем регулярность для $\lambda = (\varepsilon, m)$ при $\varepsilon \in E_1$, $m \in \mathbb{N}$.

ЛЕММА 13. В частично упорядоченном множестве $\langle \mathbb{N}^k, \leq_k \rangle$, где $(\langle \alpha'_1, \dots, \alpha'_k \rangle \leq_k \langle \alpha''_1, \dots, \alpha''_k \rangle) \Leftrightarrow \bigwedge_{i=1}^k (\alpha'_i \leq \alpha''_i)$, всякая антицепь конечна.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО очевидно: достаточно убедиться (индукцией по k), что из всякой счетной последовательности элементов $\mathbb{N}^k$ можно извлечь $\leq_k$ -возрастающую подпоследовательность.

ЛЕММА 14. Пусть σ и κ $\bar{E}$ -инвариантны, монотонны и непрерывны. Пусть $\lambda = (\varepsilon, m)$ для $\varepsilon \in E_1$, $m \in \mathbb{N}$. Тогда:

1) если $\varepsilon', \varepsilon'' \in E$ и $\varepsilon = \bar{\sigma}_{\bar{E}}(\varepsilon', \varepsilon'')$, то отношение $R_{\lambda, \varepsilon', \varepsilon''} = \{ \langle \alpha_1, \alpha_2 \rangle \in (V_{\varepsilon}, X V_{\varepsilon}, \dots) : \bar{\sigma}(\alpha_1, \alpha_2) \in V_{\lambda} \}$ регулярно;

⁸Предлагаемое условие выражает непрерывность для E' -монотонного квантора; формулировка непрерывности, естественная для общего случая, была бы излишне громоздкой.

2) если $E' \subseteq \bar{E}$ и $\varepsilon = \bar{\kappa}_{\bar{E}}(E')$, то семейство $S_{\lambda, E'} = \{W \subseteq V_E : W_E = E', \bar{\kappa}(W) \in V_{\lambda}\}$ регулярно.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. 1) Пусть функция $\tau_{\varepsilon', \varepsilon''}$ убывает. Тогда $R^* = \{\langle n', n'' \rangle \in N_E, \times N_{\varepsilon'} : \tau_{\varepsilon', \varepsilon''}(\langle n', n'' \rangle) \leq m\}$ есть $\bigcup_{j=1}^r \{\langle n', n'' \rangle : n'_j \leq n', n''_j \leq n''\}$ для антицепи его $\leq_2$ -минимальных элементов $\{\langle n'_j, n''_j \rangle : j=1, \dots, r\}$ (конечной в силу леммы 13). Здесь, ввиду непрерывности $\tau_{\varepsilon', \varepsilon''}$, все n'_j и n''_j принадлежат $N_{\varepsilon'}$ и $N_{\varepsilon''}$ (т.е. $\neq \omega$), а значит, R^* имеет вид $\bigcup_{j=1}^r (Z'_j \times Z''_j)$ для регулярных $Z'_j \subseteq N_{\varepsilon'}$, $Z''_j \subseteq N_{\varepsilon''}$ ($j=1, \dots, r$) - и значит $R_{\lambda, \varepsilon', \varepsilon''} = \{\langle \langle \varepsilon', n' \rangle, \langle \varepsilon'', n'' \rangle \rangle : \langle n', n'' \rangle \in R^*\}$ регулярно. Если же функция $\tau_{\varepsilon', \varepsilon''}$ возрастает, то вместо R^* следует рассмотреть $\bar{R}^* = \{\langle n', n'' \rangle \in N_E, \times N_{\varepsilon'} : \tau_{\varepsilon', \varepsilon''}(\langle n', n'' \rangle) > m\}$.

2) Аналогично предыдущему, пусть κ E' -убывает, и пусть $S^* = \{\langle n^{\varepsilon} : \varepsilon \in E' \rangle \in (\prod_{\varepsilon \in E'} N_{\varepsilon}) : \kappa(\langle \varepsilon, n^{\varepsilon} \rangle : \varepsilon \in E') \in V_{(\varepsilon, m)}\}$. Используя лемму 13 (которая непосредственно переносится на $(\prod_{\varepsilon \in E'} N_{\varepsilon})$)

получаем, что $S^* = \bigcup_{j=1}^r \{\langle n^{\varepsilon} : \varepsilon \in E' \rangle : \bigwedge_{\varepsilon \in E'} (n^{\varepsilon}_j \leq n^{\varepsilon})\}$ для конечной антицепи $\{\langle n^{\varepsilon}_j : \varepsilon \in E' \rangle : j=1, \dots, r\}$ - причем, в силу непрерывности, все $n^{\varepsilon}_j \in N_{\varepsilon}$ (т.е. $\neq \omega$ при $\varepsilon \in (E_1 \cap E')$). Теперь, ввиду монотонности, $S_{\lambda, E'} = \{W \subseteq V_E : (W_E = E') \& (\exists \langle n^{\varepsilon} : \varepsilon \in E' \rangle \in S^*) (\bigwedge_{\varepsilon \in E'} (\langle \varepsilon, n^{\varepsilon} \rangle \in W))\} =$

$\bigcup_{j=1}^r \{W \subseteq V_E : (W_E = E') \& \bigwedge_{\varepsilon \in E'} (\exists n^{\varepsilon} \in N_{\varepsilon}) (n^{\varepsilon}_j \leq n^{\varepsilon}, \langle \varepsilon, n^{\varepsilon} \rangle \in W)\}$ регулярно.

Лемма 14 обеспечивает регулярность отношения $R_{\sigma, \lambda} = (\bigcup_{\bar{\sigma}_E(\varepsilon', \varepsilon'') = \varepsilon} R_{\lambda, \varepsilon', \varepsilon''})$ и семейства $S_{\kappa, \lambda} = (\bigcup_{\bar{\kappa}_E(E') = \varepsilon} S_{\lambda, E'})$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО теоремы 3 ($\Rightarrow$).

ЛЕММА 15. 1) Для всякого регулярного $R \subseteq V_E^2$, $\alpha \in V_E$ и $\varepsilon \in E_1$ множества $\{n \in N : \langle \langle \varepsilon, n \rangle, \alpha \rangle \in R\}$ и $\{n \in N : \langle \alpha, \langle \varepsilon, n \rangle \rangle \in R\}$ регулярны.

2) Для всякого регулярного $S \subseteq V_E^2$, $W \subseteq V_E$ и $\varepsilon \in E_1$ $\{n \in N : W \cup \{\langle \varepsilon, n \rangle\} \in S\}$ регулярно.

СЛЕДСТВИЕ. Если $\bar{E}$ -инвариантные связка σ или квантор κ (логики V_E) J -определимы, то они непрерывны.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО: от противного. Пусть не является непрерывной $\bar{E}$ -инвариантная связка σ , т.е. некоторая функция $\tau_{\varepsilon', \varepsilon''}$ - скажем, по первому аргументу, и при значении второго равном n'' ; положим $\alpha = \langle \varepsilon'', n'' \rangle$. Тогда, если $\tau_{\varepsilon', \varepsilon''}(\omega, n'') = \omega$ (т.е. нарушено условие 1.1), то не регулярно множество $Z = \{n' \in N : \sigma(\langle \varepsilon', n' \rangle, \alpha) \leq n\}$ при некотором $n \in N$, а если $\tau_{\varepsilon', \varepsilon''}(\omega, n'') = n \in N$ (т.е. нарушено условие 1.2), то не регулярно $Z = \{n' \in N : \sigma(\langle \varepsilon', n' \rangle, \alpha) \neq n\}$ (так как в обоих случаях Z есть бесконечное подмножество N) - противоречие с леммой 15, п.1). Аналогично, если не является непрерывным квантор κ , то для некоторых $W \subseteq V_E$ и $\varepsilon, \varepsilon' \in E_1$ множество $\{n' \in N : \kappa(W \cup \{\langle \varepsilon', n' \rangle\}) \in V_{(\varepsilon, n)}\}$ или $\{n' \in N : \kappa(W \cup \{\langle \varepsilon', n' \rangle\}) \neq \langle \varepsilon, n \rangle\}$ (для некоторого $n \in N$) не является регулярным - в противоречие с леммой 15, п.2).

Замечание. Рассуждения, аналогичные приведенным, позволяют

распространить теорему 3 на *покоординатно-монотонные* связки σ — такие $\bar{E}$ -инвариантные связки, у которых функции $\tau_{\varepsilon}, \varepsilon'$, могут быть не только монотонными, но и "двойко-монотонными": возрастающими по одному аргументу и убывающими по другому. Опуская детали, укажем лишь узловой момент доказательства: для "двойко-монотонной" функции $\tau: \mathbb{N} \times \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{N}$ и $m \in \mathbb{N}$ множество $\{ \langle n', n'' \rangle : \tau(n', n'') \leq m \}$ или $\{ \langle n', n'' \rangle : \tau(n', n'') > m \}$ вместе с парой $\langle \omega, \omega \rangle$ содержит, по непрерывности, целиком множество $\{ \langle n', n'' \rangle : n' \geq n \}$ или $\{ \langle n', n'' \rangle : (n'' \geq m) \}$ для некоторого $n \in \mathbb{N}$, что обеспечивает его представление в виде $\bigcup_{j=1}^r (Z_j \times Z_j')$ для регулярных $Z_j, Z_j' \subseteq \mathbb{N}$.

2.5. Пусть задано отношение частичного упорядочения (ч.у.) $\leq$ на множестве V_E , превращающее его в полную верхнюю полурешетку: т.е. для всякого непустого $W \subseteq V_E$ определена точная верхняя грань $\sup_{\leq}(W)$ (наличие $\sup_{\leq}(\emptyset)$, т.е. $\leq$ -наименьшего элемента в V_E , не предполагается). Как обычно, положим $\sup_{\leq}(\alpha_1, \alpha_2) = \sup_{\leq}(\{\alpha_1, \alpha_2\})$. Рассмотрим полурешеточную связку $\sigma_{\leq}$ с $\sigma_{\leq}(\alpha_1, \alpha_2) = \sup_{\leq}(\alpha_1, \alpha_2)$ и квантор $\kappa_{\leq}$ с $\bar{\kappa}_{\leq}(W) = \sup_{\leq}(W)$ для $W \subseteq V_E, W \neq \emptyset$ (как известно, операция $\bar{\sigma}_{\leq}$ коммутативна, ассоциативна и идемпотентна). Отметим, что $\sigma_{\leq} = \kappa_{\leq}$ (в смысле п.2.3).

Теперь, подобно теореме 3, мы установим критерий J -определимости полурешеточных связки $\sigma_{\leq}$ и квантора $\kappa_{\leq}$ для случая, когда они $\bar{E}$ -инвариантны. Это потребует некоторых вспомогательных понятий.

Скажем, что ч.у. $\leq$ (на V_E) *предынвариантно*, если оно удовлетворяет условию:

$$(0) \quad (\forall \alpha, \alpha', \beta \in V_E) ((\beta \sim_{\bar{E}} \alpha \leq \alpha') \Rightarrow (\exists \beta' \in V_E) (\beta \leq \beta' \sim_{\bar{E}} \alpha'))$$

(иначе говоря: если $\alpha = \langle \varepsilon, n \rangle \in V_E$, $\alpha' = \langle \varepsilon', n' \rangle \in V_E$, (где $\varepsilon, \varepsilon' \in \bar{E}$) и $\alpha \leq \alpha'$, то для всякого $\beta = \langle \varepsilon, m \rangle \in V_E$ найдется такой $\beta' = \langle \varepsilon', m' \rangle \in V_E$, что $\beta \leq \beta'$).

Предынвариантное ч.у. $\leq$ задает отношение $\leq_{\bar{E}}$ на $\bar{E}$ так: $(\varepsilon \leq_{\bar{E}} \varepsilon') \Leftrightarrow (\exists \alpha \in V_E) (\exists \alpha' \in V_E) (\alpha \leq \alpha') \Leftrightarrow (\forall \alpha \in V_E) (\exists \alpha' \in V_E) (\alpha \leq \alpha')$ (оно рефлексивно и транзитивно, но не обязательно антисимметрично).

Предынвариантное ч.у. $\leq$ (на V_E) *σ -инвариантно*, если каждое из V_E для $\varepsilon \in \bar{E}$ образует направленный интервал в V_E (относительно $\leq$), т.е. выполнены два условия:

$$(1) \quad (\forall \varepsilon \in \bar{E}) (\forall \alpha, \alpha' \in V_E) (\forall \beta \in V_E) ((\alpha \leq \beta \leq \alpha' \Rightarrow (\beta \in V_E)))$$

(или, что равносильно в присутствии (0): $(\forall \varepsilon, \varepsilon' \in \bar{E}) ((\varepsilon \leq_{\bar{E}} \varepsilon' \Rightarrow \varepsilon \leq \varepsilon'))$ — отношение $\leq_{\bar{E}}$ антисимметрично);

$$(2) \quad (\forall \varepsilon \in \bar{E}) (\forall \alpha, \alpha' \in V_E) (\exists \beta \in V_E) ((\alpha \leq \beta, \alpha' \leq \beta))$$

(или, что равносильно в присутствии (1):

$$(\forall \varepsilon \in \bar{E}) (\forall \alpha, \alpha' \in V_E) (\sup_{\leq}(\alpha, \alpha') \in V_E)).$$

Ясно, что в (1), (2) достаточно ограничить квантор до $(\forall \varepsilon \in E_1)$.

Предынвариантное ч.у. $\leq$ (на V_E) *κ -инвариантно*, если:

$$(3) \quad (\forall \varepsilon \in \bar{E}) \text{ (множество } V_E \text{ содержит } \leq\text{-наибольший элемент } \varepsilon_{\leq}^-).$$

ЛЕММА 16. 1) Пусть ч.у. $\leq$ (на V_E) κ -инвариантно. Тогда: а) ч.у. $\leq$ σ -инвариантно; б) $(\forall \varepsilon \in \bar{E}) (\forall W \subseteq V_E, W \neq \emptyset) (\sup_{\leq}(W) \in V_E)$.

2) а) Если ч.у. $\leq$ σ -инвариантно, то $\leq_{\bar{E}}$ частично

упорядочивает $\bar{E}$, образуя верхнюю полурешетку (заведомо полную, ввиду конечности $\bar{E}$), причем $(\forall \varepsilon_1, \varepsilon_2 \in \bar{E}) (\forall \alpha_1 \in V_{\varepsilon_1}) (\forall \alpha_2 \in V_{\varepsilon_2})$
 $(\text{sup}_{\leq}(\alpha_1, \alpha_2) \in V_{\varepsilon} \text{ для } \varepsilon = \text{sup}_{\leq \bar{E}}(\varepsilon_1, \varepsilon_2))$. б) Если ч.у. $\leq$
 κ -инвариантно, то $(\forall W \subseteq V_E)(\text{sup}_{\leq}(W) \in V_{\varepsilon} \text{ для } \varepsilon = \text{sup}_{\leq \bar{E}}(W_{\bar{E}}))$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. 1а) Пусть $\leq$ κ -инвариантно. Условие (2) следует из (3); докажем (1). Пусть $\varepsilon \leq \varepsilon' \leq \bar{\varepsilon}$, т.е. имеем такие $\alpha \in V_{\varepsilon}$, $\alpha' \in V_{\varepsilon'}$, что $\bar{\varepsilon} \leq \alpha' \leq \alpha$. А так как $\alpha \leq \bar{\varepsilon}$, то антисимметричность $\leq$ влечет $\alpha = \alpha'$, и значит, $\varepsilon = \varepsilon'$.

1б) Немедленно из (1): если $\alpha \in W \subseteq V_{\varepsilon}$, то $\alpha \leq \text{sup}_{\leq}(W) \leq \bar{\varepsilon}$.

2а) Пусть ч.у. $\leq$ σ -инвариантно (и значит, в силу (1), $\leq_{\bar{E}}$ есть ч.у. на $\bar{E}$). Пусть $\alpha_1 \in V_{\varepsilon_1}$, $\alpha_2 \in V_{\varepsilon_2}$ (где $\varepsilon_1, \varepsilon_2 \in \bar{E}$) и $\alpha = \text{sup}_{\leq}(\alpha_1, \alpha_2) \in V_{\varepsilon}$, покажем, что ε есть точная верхняя грань ε_1 и ε_2 относительно ч.у. $\leq_{\bar{E}}$. Так как $\alpha_1 \leq \alpha$ и $\alpha_2 \leq \alpha$, то $\varepsilon_1 \leq_{\bar{E}} \varepsilon$ и $\varepsilon_2 \leq_{\bar{E}} \varepsilon$. Пусть теперь дан такой $\varepsilon' \in \bar{E}$, что $\varepsilon_1 \leq_{\bar{E}} \varepsilon'$ и $\varepsilon_2 \leq_{\bar{E}} \varepsilon'$, т.е. $\alpha_1 \leq \alpha_1'$ и $\alpha_2 \leq \alpha_2'$ для некоторых $\alpha_1', \alpha_2' \in V_{\varepsilon'}$. Тогда $\alpha \leq \alpha'$ для $\alpha' = \text{sup}_{\leq}(\alpha_1', \alpha_2')$, где $\alpha' \in V_{\varepsilon'}$, ввиду (2), и значит, $\varepsilon \leq_{\bar{E}} \varepsilon'$.

2б) Так как $W = \bigcup_{\varepsilon \in W_{\bar{E}}} (W \cap V_{\varepsilon})$, то $\text{sup}_{\leq}(W) = \text{sup}_{\leq}(\alpha_{\varepsilon} : \varepsilon \in W_{\bar{E}})$, где $\alpha_{\varepsilon} = \text{sup}_{\leq}(W \cap V_{\varepsilon}) \in V_{\varepsilon}$, и $\text{sup}_{\leq}(W) \in V_{\varepsilon}$ для $\varepsilon = \text{sup}_{\leq \bar{E}}(W_{\bar{E}})$.

СЛЕДСТВИЕ. 1) Ч.у. $\leq$ (на V_E) σ -инвариантно $\Leftrightarrow$ связка $\sigma_{\leq}$ $\bar{E}$ -инвариантна. 2) Ч.у. $\leq$ (на V_E) κ -инвариантно $\Leftrightarrow$ квантор $\kappa_{\leq}$ $\bar{E}$ -инвариантен.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО ($\Rightarrow$) из леммы 16 п.2).

($\Leftarrow$). 1) Пусть $\sigma_{\leq}$ $\bar{E}$ -инвариантна. (0): если $\alpha, \beta \in V_{\varepsilon}$, $\alpha' \in V_{\varepsilon'}$, и $\alpha \leq \alpha'$, т.е. $\text{sup}_{\leq}(\alpha, \alpha') = \alpha' \in V_{\varepsilon'}$, то $\beta' = \text{sup}_{\leq}(\beta, \alpha') \in V_{\varepsilon'}$, и $\beta \leq \beta'$. (1): если $\alpha, \alpha' \in V_{\varepsilon}$, $\beta \in V_{\varepsilon'}$, и $\alpha \leq \beta \leq \alpha'$, то $\text{sup}_{\leq}(\alpha, \beta) = \beta \in V_{\varepsilon'}$, $\text{sup}_{\leq}(\alpha', \beta) = \alpha' \in V_{\varepsilon}$, и значит, $\varepsilon = \varepsilon'$. (2): пусть $\alpha_1, \alpha_2 \in V_{\varepsilon}$, тогда $\text{sup}_{\leq}(\alpha_1, \alpha_2) = \alpha_1 \in V_{\varepsilon}$ влечет $\text{sup}_{\leq}(\alpha_1, \alpha_2) \in V_{\varepsilon}$.

2) Пусть $\kappa_{\leq}$ $\bar{E}$ -инвариантен. Тогда $\sigma_{\leq} = \sigma_{\kappa_{\leq}}$ $\bar{E}$ -инвариантна, и условие (0) обеспечено. А (3) проверяется подобно (2): так как $(V_E)_{\bar{E}} = (\{\alpha\})_{\bar{E}}$ для произвольного $\alpha \in V_E$, то $\text{sup}_{\leq}(\{\alpha\}) = \alpha \in V_E$ влечет $\text{sup}_{\leq}(V_E) \in V_E$, и значит, $\bar{\varepsilon}_{\leq} = \text{sup}_{\leq}(V_E)$ есть $\leq$ -наибольший элемент V_E .

Для $\alpha, \alpha' \in V_E$ положим: $(\alpha' < \alpha) \Leftrightarrow (\alpha' \leq \alpha) \& (\alpha' \neq \alpha)$, $(\alpha' \geq \alpha) \Leftrightarrow (\alpha' \leq \alpha) \& \neg(\alpha' < \alpha)$. Элемент $\alpha \in V_E$ назовем $\leq$ -регулярным, если $(\beta \in V_E : \beta \leq \alpha)$ регулярно (иначе говоря, если для всякого $\varepsilon \in E_1$ регулярно множество $Z_{\alpha, \varepsilon} = \{n \in \mathbb{N} : \langle \varepsilon, n \rangle \leq \alpha\}$). Элемент $\alpha \in V_E$ $\leq$ -нормален, если $\leq$ -регулярны сам α и все $\alpha' \geq \alpha$. Ч.у. $\leq$ (на V_E) назовем нормальным, если $\leq$ -нормальны все элементы V_E вида $\langle \varepsilon, n \rangle$ для $\varepsilon \in E_1, n \in \mathbb{N}$. Элемент $\alpha \in V_E$ назовем $\leq$ -правильным, если $\{\alpha' \in V_E : \alpha' \geq \alpha\}$ конечно и $(\forall \beta < \alpha)(\exists \alpha' \geq \alpha)(\beta \leq \alpha')$.

ЛЕММА 17. Пусть ч.у. $\leq$ (на V_E) нормально. Тогда:

1) все элементы V_E вида $\langle \varepsilon, n \rangle$ для $\varepsilon \in E_1, n \in \mathbb{N}$ $\leq$ -правильны;

2) ч.у. $\leq$ σ -инвариантно $\Leftrightarrow \kappa$ -инвариантно.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. 1) Допустим противное: пусть элемент $\alpha^* = \langle \varepsilon^*, n^* \rangle$ (для $\varepsilon^* \in E_1, n^* \in \mathbb{N}$) не является $\leq$ -правильным. Ввиду

конечности $\bar{E}$, имеем счетное множество $W = \{\alpha_i = \langle \varepsilon', n_i \rangle : i \in \mathbb{N}\}$, где $\varepsilon' \in E_1$, $n_i \in \mathbb{N}$ для всех $i \in \mathbb{N}$, и выполняется $[(\forall i \in \mathbb{N}) (\alpha_i \not\leq \alpha^*)] \vee \vee [(\alpha_0 < \alpha_1 < \alpha_2 < \dots < \sup_{\leq} (\{\alpha_i : i \in \mathbb{N}\}) = \alpha^*)]$. Так как множество $\{n' \in \mathbb{N} : \langle \varepsilon', n' \rangle \leq \alpha^*\}$ регулярно и бесконечно, то $\langle \varepsilon', \omega \rangle < \alpha^*$. Положим $W' = \{\alpha' \in V_E : \langle \varepsilon', \omega \rangle \leq \alpha' < \alpha^*\}$. Это множество не содержит $\leq$ -регулярных элементов (действительно, если $\langle \varepsilon', \omega \rangle \leq \alpha'$ и $Z_{\alpha', \varepsilon'} = \{n' \in \mathbb{N} : \langle \varepsilon', n' \rangle \leq \alpha'\}$ регулярно, то $\alpha_i \leq \alpha'$ для бесконечно многих $i \in \mathbb{N}$ — и значит, $\alpha^* \leq \alpha'$). Но так как все элементы V_E , кроме конечного числа, $\leq$ -регулярны (таковы все $\langle \varepsilon, n \rangle$ для $\varepsilon \in E_1, n \in \mathbb{N}$), то множество W' конечно, и значит, содержит элемент $\alpha' \not\leq \alpha^*$, в противоречие с $\leq$ -нормальностью α^* .

2) Пусть $\leq$ σ -инвариантно, и пусть $\langle \varepsilon, \omega \rangle$ не является $\leq$ -наибольшим в V_E (для некоторого $\varepsilon \in E_1$). Возьмем такой $n_0 \in \mathbb{N}$, что $\neg(\langle \varepsilon, n_0 \rangle \leq \langle \varepsilon, \omega \rangle)$, и пусть $\alpha = \langle \varepsilon, n \rangle = \sup_{\leq} (\langle \varepsilon, n_0 \rangle, \langle \varepsilon, \omega \rangle)$. Значит, $n \in \mathbb{N}$ и α $\leq$ -регулярен. Поэтому $Z_{\alpha, \varepsilon} = \{n' \in \mathbb{N} : \langle \varepsilon, n' \rangle \leq \alpha\}$ регулярно, и так как $\omega \in Z_{\alpha, \varepsilon}$, то $(\mathbb{N} \setminus Z_{\alpha, \varepsilon})$ конечно, и $\bar{\varepsilon}_{\leq} = \sup_{\leq} (\{\alpha\} \cup \{\langle \varepsilon, n' \rangle : n' \notin Z_{\alpha, \varepsilon}\})$ есть $\leq$ -наибольший элемент V_E .

Замечание (несколько контрпримеров). 1) а) $\leq$ -регулярность всех элементов V_E вида $\langle \varepsilon, n \rangle, \varepsilon \in E_1, n \in \mathbb{N}$, вообще говоря, недостаточна для нормальности ч.у. $\leq$ (пример см. на рис. 1а); в) $\leq$ -регулярность элементов вида $\langle \varepsilon, \omega \rangle, \varepsilon \in E_1$, для нормального ч.у. $\leq$, вообще говоря, не гарантируется (пример см. на рис. 1в), 2) а) без условия нормальности ч.у. $\leq$, σ -инвариантность, вообще говоря, не влечет κ -инвариантность (пример см. на рис. 2а); в) прединвариантность, вообще говоря, не влечет σ -инвариантность, даже для нормального ч.у. $\leq$ (пример см. на рис. 2в). (Все примеры — на V_E с $E_0 = \emptyset$, $E_1 = \{t, f\}$).

ТЕОРЕМА 4. Пусть ч.у. $\leq$ (на V_E) σ -инвариантно. Тогда следующие условия эквивалентны:

- 1) связь $\sigma_{\leq}$ J -определима;
- 2) квантор $\kappa_{\leq}$ J -определим;
- 3) ч.у. $\leq$ нормально.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. 2) $\Rightarrow$ 1): из следствия леммы 12.

3) $\Rightarrow$ 2). Так как ч.у. $\leq$ κ -инвариантно (по лемме 17, п. 2), т.е. квантор $\kappa_{\leq}$ $\bar{E}$ -инвариантен, то для $\varepsilon \in \bar{E}$ семейство $S_{\kappa, \varepsilon} = \{W \subseteq V_E : \bar{\kappa}_{\leq}(W) \in V_E\} = (\bigcup_{(\bar{\kappa}_{\leq})_{\bar{E}}(E') = \varepsilon} \{W \subseteq V_E : W_{\bar{E}} = E'\})$ регулярно. А регулярность семейства $S_{\kappa, \langle \varepsilon, n \rangle} = \{W \subseteq V_E : \bar{\kappa}_{\leq}(W) = \langle \varepsilon, n \rangle\}$ для $\varepsilon \in E_1, n \in \mathbb{N}$ вытекает (ввиду леммы 17, п. 1)) из следующей леммы:

ЛЕММА 18. Если элемент $\alpha_0 \in V_E$ $\leq$ -нормален и $\leq$ -правилен, то семейство $S_{\kappa, \alpha_0} = \{W \subseteq V_E : \sup_{\leq}(W) = \alpha_0\}$ регулярно.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Пусть $\{\alpha \in V_E : \alpha \not\leq \alpha_0\} = \{\alpha_1, \dots, \alpha_k\}$ (где $k \geq 0$), и пусть нормальные формулы $\Psi_i(P_1^{(0)})$ определяют множества $W_i = \{\alpha \in V_E : \alpha \leq \alpha_i\}$ для $i = 0, 1, \dots, k$. Тогда формула $\Psi(P^{(1)}) = [(\forall X) \Psi_0^{(1)}(P^{(1)}(X)) \& \bigwedge_{i=1}^k \neg(\forall X) \Psi_i^{(1)}(P^{(1)}(X))]$ определяет семейство S_{κ, α_0} (так как $(\sup_{\leq}(W) = \alpha_0) \Leftrightarrow (W \subseteq W_0) \& \bigwedge_{i=1}^k (W \not\subseteq W_i)$ ввиду $\leq$ -пра-

вильности α_0).

1) $\Rightarrow$ 3):

ЛЕММА 19. Если (бинарная) связка σ (логики V_E) J -определима и множество $W \subseteq V_E$ регулярно, то отношение $R = \{ \langle \alpha_1, \alpha_2 \rangle \in V_E^2 : \bar{\sigma}(\alpha_1, \alpha_2) \in W \}$ регулярно.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Достаточно рассмотреть случай $W = \{ \langle \varepsilon, n \rangle : n \in \mathbb{Z} \}$ для $\varepsilon \in E_1$ и регулярного $Z \subseteq \mathbb{N}$. Если Z конечно (и $\leq \mathbb{N}$), то $R = \bigcup_{n \in \mathbb{Z}} \{ \langle \alpha_1, \alpha_2 \rangle : \bar{\sigma}(\alpha_1, \alpha_2) = \langle \varepsilon, n \rangle \}$, а если $(\mathbb{N} \setminus Z)$ конечно (и $\leq \mathbb{N}$), то $R = (\{ \langle \alpha_1, \alpha_2 \rangle : \bar{\sigma}(\alpha_1, \alpha_2) \in V_E \} \setminus (\bigcup_{n \notin Z} \{ \langle \alpha_1, \alpha_2 \rangle : \bar{\sigma}(\alpha_1, \alpha_2) = \langle \varepsilon, n \rangle \}))$.

СЛЕДСТВИЕ. 1) Если связка $\sigma_{\leq}$ J -определима и отношение $R_0 = \{ \langle \alpha, \alpha' \rangle \in V_E^2 : \sup_{\leq}(\alpha, \alpha') = \alpha_0 \}$ регулярно (где $\alpha_0 \in V_E$), то элемент α_0 $\leq$ -нормален. 2) Если связка $\sigma_{\leq}$ J -определима, то ч.у. $\leq$ нормально.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. 2): немедленно из 1).

1) Пусть $\alpha_1 \hat{<} \alpha_0$; докажем регулярность множеств $W_i = \{ \alpha \in V_E : \alpha \leq \alpha_i \}$ для $i=0,1$. Воспользуемся тем, что если отношение $R \subseteq V_E^2$ регулярно, то регулярны множества $\{ \alpha' \in V_E : \langle \alpha, \alpha' \rangle \in R \}$ для всех $\alpha \in V_E$ (сравн. лемму 15). Поэтому, так как $W_0 = \{ \alpha' \in V_E : \sup_{\leq}(\alpha_0, \alpha') = \alpha_0 \}$, то регулярность отношения $R_0 = \{ \langle \alpha, \alpha' \rangle \in V_E^2 : \sup_{\leq}(\alpha, \alpha') = \alpha_0 \}$ влечет регулярность множества W_0 . Тогда, ввиду леммы 19, регулярны отношения $R' = \{ \langle \alpha, \alpha' \rangle \in V_E^2 : \sup_{\leq}(\alpha, \alpha') \leq \alpha_0 \}$ и $R = (R' \setminus R_0) = \{ \langle \alpha, \alpha' \rangle \in V_E^2 : \sup_{\leq}(\alpha, \alpha') \hat{<} \alpha_0 \}$, а значит, множество $W_1 = \{ \alpha' \in V_E : \sup_{\leq}(\alpha_1, \alpha') \hat{<} \alpha_0 \}$.

2.6. Теперь приведем более простой критерий J -определимости $\sigma_{\leq}$ и $\kappa_{\leq}$ для одного частного случая.

Ч.у. $\leq$ (на V_E) назовем $\bar{E}$ -монотонным, если для всякого $\varepsilon \in E_1$ отношение $\leq$ на V_E есть линейный порядок, индуцированный $\leq$ или $\geq$ на $\mathbb{N}$ (т.е. если каждое V_E есть или $\leq$ -возрастающая цепь $\langle \varepsilon, 0 \rangle < \langle \varepsilon, 1 \rangle < \langle \varepsilon, 2 \rangle < \dots < \langle \varepsilon, \omega \rangle$ или $\leq$ -убывающая цепь $\langle \varepsilon, 0 \rangle > \langle \varepsilon, 1 \rangle > \langle \varepsilon, 2 \rangle > \dots > \langle \varepsilon, \omega \rangle$). $\bar{E}$ -монотонное ч.у. $\leq$ заведомо удовлетворяет условию (3) из п.2.5, поэтому для него предынвариантность влечет κ -инвариантность (а значит, и σ -инвариантность). Если цепь V_E (в $\bar{E}$ -монотонном и предынвариантном ч.у. $\leq$) $\leq$ -возрастающая, то $\sup_{\leq}(\{ \langle \varepsilon, n \rangle : n \in \mathbb{N} \}) = \langle \varepsilon, \omega \rangle$ (так как $\sup_{\leq}(\{ \langle \varepsilon, n \rangle : n \in \mathbb{N} \}) \in V_E$ по лемме 16).

ЛЕММА 20. $\bar{E}$ -монотонное и предынвариантное ч.у. $\leq$ (на V_E) нормально $\Leftrightarrow$ выполняется условие:

(*) : если $\langle \varepsilon', \omega \rangle \leq \langle \varepsilon, n \rangle$ (где $\varepsilon, \varepsilon' \in E_1, n \in \mathbb{N}$), то $(\exists n' \in \mathbb{N})(\langle \varepsilon', n' \rangle \leq \langle \varepsilon, n \rangle)$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. ($\Rightarrow$) очевидно: множество $\langle \omega \rangle$ не регулярно. ($\Leftarrow$). Допустим противное: пусть $Z = \{ n' \in \mathbb{N} : \langle \varepsilon', n' \rangle \leq \alpha \}$ не регулярно, где $\alpha = \langle \varepsilon, n \rangle$ или $\alpha \hat{<} \langle \varepsilon, n \rangle$ для некоторых $\varepsilon, \varepsilon' \in E_1, n \in \mathbb{N}$. Тогда, в силу $\bar{E}$ -монотонности, $Z = \mathbb{N}$ (если цепь V_E , $\leq$ -возрастает) или $Z = \langle \omega \rangle$ (если цепь V_E , $\leq$ -убывает). Случай $Z = \mathbb{N}$ невозможен, так как $\sup(\{ \langle \varepsilon', n \rangle : n \in \mathbb{N} \}) = \langle \varepsilon', \omega \rangle$. Случай $Z = \langle \omega \rangle$ при $\alpha = \langle \varepsilon, n \rangle$ невозможен в силу (*). Остается рассмотреть случай, когда $W = \langle \omega \rangle$, $\alpha \hat{<} \langle \varepsilon, n \rangle$ и для некоторого $\varepsilon' \in \bar{E} : \alpha = \bar{\varepsilon}' = \langle \varepsilon', n' \rangle$, где

$n'' = \begin{cases} \omega & \text{при } \varepsilon'' \in E_1 \\ 0 & \text{при } \varepsilon'' \in E_0 \end{cases}$ Так как $\langle \varepsilon', \omega \rangle \leq \alpha = \bar{\varepsilon}'$, то $\varepsilon' \leq \bar{\varepsilon}'$ и, в силу предынвариантности, $\langle \varepsilon', 0 \rangle \leq \alpha'$ для некоторого $\alpha' \in V_{\varepsilon'}$. А так как $\neg(\langle \varepsilon', 0 \rangle \leq \alpha)$, то $\varepsilon'' \in E_1$, $\alpha = \langle \varepsilon'', \omega \rangle$ и цепь $V_{\varepsilon'}$ $\leq$ -убывает. Теперь, так как $\langle \varepsilon'', \omega \rangle = \alpha < \langle \varepsilon'', n \rangle$, то, по условию (*), имеем $n'' \in N$, для которого $\alpha = \langle \varepsilon'', \omega \rangle < \langle \varepsilon'', n'' \rangle < \langle \varepsilon'', n \rangle$ - в противоречие с тем, что $\alpha \nless \langle \varepsilon'', n \rangle$.

СЛЕДСТВИЕ. 1) Если ч.у. $\leq$ $\bar{E}$ -монотонно, то: (связка $\sigma_{\leq}$ $\bar{E}$ -инвариантна) $\Leftrightarrow$ (квантор $\kappa_{\leq}$ $\bar{E}$ -инвариантен) $\Leftrightarrow$ (ч.у. $\leq$ предынвариантно, т.е. удовлетворяет условию (0)).

2) Если ч.у. $\leq$ $\bar{E}$ -монотонно и предынвариантно, то: (связка $\sigma_{\leq}$ J -определима) $\Leftrightarrow$ (квантор $\kappa_{\leq}$ J -определим) $\Leftrightarrow$ (ч.у. $\leq$ удовлетворяет условию (*))⁹.

Замечание: последнее утверждение для связки $\sigma_{\leq}$ можно извлечь также из замечания к теореме 3 (в конце п.2.4), так как для $\bar{E}$ -монотонного ч.у. $\leq$ связка $\sigma_{\leq}$ покоординатно-монотонна.

3. Некоторые примеры

В заключение кратко проиллюстрируем связь логик с конечным числом типов истинностных значений (вида V_E из § 2) и формализации ДСМ-системы правдоподобных рассуждений. Главная идея состоит в порождении гипотез о зависимостях причинно-следственного типа, представленном как доопределение частично определенных отношений, выражающих, скажем, связи некоторых объектов и их свойств и т.п. Для простоты далее будем предполагать, что доопределяется один бинарный предикат $P^{(2)}$ (на конечном множестве D), значения которого изображает матрица $\check{P}$ (пример см. на рис.3). В ней содержится как положительная информация о наличии связи ("фактическая истина": +1) или отрицательная, о том, что связи нет ("фактическая ложь": -1), так и случаи отсутствия информации ("недоопределенность": τ). Начальные данные (результаты экспериментов, информация экспертов и т.п.) содержит матрица $\check{P}_0$ (рис. 3а). Затем выполняется пошаговый процесс доопределения этой матрицы с использованием специальных правил правдоподобного вывода: на очередном шаге некоторые значения $P(A_i, A_j) = \tau$ заменяются на +1, или -1, если выполняется "порождающее условие" (формула) $M^+(A_i, A_j)$ или $M^-(A_i, A_j)$ соответственно. Эти формулы содержат предикат $P^{(2)}$, и значения их на первом шаге вычисляются в модели, где значение $P^{(2)}$ есть $\check{P}_0$. В результате такого вычисления (для всех $A_i, A_j \in D$ с $P_0(A_i, A_j) = \tau$) получаем матрицу $\check{P}_1$ (см. рис. 3в: индексы 0 и 1 показывают, на каком шаге "появилось" значение ± 1). На втором шаге доопределяем "оставшиеся" τ , вычисляя $M^{\pm}(A_i, A_j)$ в модели, где $P^{(2)}$ есть $\check{P}_1$, (а значит, возможно выполнение $M^{\pm}(A_i, A_j)$ для новых A_i, A_j) - и т.д. до "стабилизации"

⁹Сравн. теор.2 в [3].

(которая заведомо наступит при конечном D). Значения ± 1 , порождаемые на шаге n , удобно изображать в виде $\langle \pm 1, n \rangle$: значения типа $\epsilon = \pm 1$ в смысле § 2 (здесь "индекс" n отвечает "числу предшествующих применений" правил и выражает степень правдоподобия порождаемой гипотезы: чем n больше, тем степень правдоподобия меньше)¹⁰. Кроме того, на шаге $n > 0$ возможно одновременное выполнение условий $M^+(A_1, A_j)$ и $M^-(A_1, A_j)$ - в этом случае мы полагаем $P^{(2)}(A_1, A_j) = \langle 0, n \rangle$ (значения типа 0: "фактическое противоречие"; см. рис. 3с.)¹¹

Рис. 3: 3а)

				ЗВ)							
				A_1	A_2	A_3		A_1	A_2	A_3	
A_1	$+1_0$	-1_0	τ	A_1	$+1_0$	-1_0	τ	A_1	$+1_0$	-1_0	0_2
A_2	τ	τ	-1_0	A_2	$+1_1$	τ	-1_0	A_2	$+1_1$	τ	-1_0
A_3	τ	$+1_0$	τ	A_3	τ	$+1_0$	-1_1	A_3	-1_2	$+1_0$	-1_1

Описанную схему ДСМ-рассуждений [э, 2] формализует логика V_E с 6 типами истинностных значений: $E_1 = \{+1, -1, 0\}$, $E_0 = \{\tau, t, f\}$ (здесь t и f - типы "логической истины" и "логической лжи" из § 2; значение τ также не нуждается в "расщеплении", т.к. "недоопределенность на шаге n " означает просто отсутствие "определенных" значений $\langle \pm 1, m \rangle$, $\langle 0, m \rangle$ для $m \leq n$, т.е. соответствующий J -оператор $J_{(\tau, n)}$ представим формулой $[(\bigvee_{\epsilon \in E_1} J_{(\epsilon, n)}^+ P^{(0)}) \vee J_{\tau} P^{(0)}]$, где J_{τ} задает "предельное" значение τ , остающееся недоопределенным вплоть до стабилизации). Соответствующие правила порождения гипотез имеют вид (где M^+ и M^- - внешние формулы логики V_E):

$$\frac{J_{(\tau, n)} P(X_1, X_2), M^+(X_1, X_2), \neg M^-(X_1, X_2)}{J_{\langle +1, n+1 \rangle} P(X, X)}$$

$$\frac{J_{(\tau, n)} P(X_1, X_2), \neg M^+(X_1, X_2), M^-(X_1, X_2)}{J_{\langle -1, n+1 \rangle} P(X, X)}$$

$$\frac{J_{(\tau, n)} P(X_1, X_2), M^+(X_1, X_2), M^-(X_1, X_2)}{J_{\langle 0, n+1 \rangle} P(X_1, X_2)}$$

$$\frac{J_{(\tau, n)} P(X_1, X_2), \neg M^+(X_1, X_2), \neg M^-(X_1, X_2)}{J_{\langle \tau, n+1 \rangle} P(X_1, X_2)}$$

¹⁰Хотя множество D конечно, но мощность его произвольна, поэтому априорно ограничить величину n (из N) невозможно.

¹¹Значения типа 0 возможны и на шаге 0: скажем, если данные разных экспертов противоречат друг другу.

Ситуация, где могут возникать иные типы значений из E_0 , указана в [7]: если предикат $P^{(2)}$ выражает возможность химических реакций, то скажем, для какой-нибудь реакции, состоящей в замещении гидроксила, и для соединения, не содержащего гидроксильной группы, такая реакция заведомо невозможна - однако выражать это "расщепляемым" значением -1 нецелесообразно: более подходящим кажется значение бессмыслицы δ , которое расщеплению не подлежит (доопределять гипотезы тут явно не требуется), т.е. $\delta \in E_0$.

Иной вариант ДСМ-системы, требующий менее тривиального изменения множества типов истинностных значений, описан в [8]. Суть дела - в наличии не одной формулы $M^\pm$, а многих (точнее, одной базисной, и ряда различных "добавок"). Пусть задано конечное частично упорядоченное множество H с наименьшим элементом h_0 , и пусть $F = \{G \subseteq H : (\forall h \in G)(\forall h' \leq h)(h' \in G)\}$ (F образует решетку по $\subseteq$). Рассмотрим логику V_E с $E_0 = \{\tau, t, f\}$, $E_1 = \{0\} \cup \{G^+, G^- : \emptyset \neq G \in F\}$. Пусть для всех $h \in H$ заданы внешние формулы (логики V_E) $M_h^+(X_1, X_2)$ и $M_h^-(X_1, X_2)$, причем $\models_{V_E} (M_h^\delta \rightarrow M_{h'}^\delta)$ при $h' \leq h$, $\delta \in \{+, -\}$ (если угодно, $M_h^\delta = M_{h_0}^\delta \& M_h^\delta$ для $h \neq h_0$). Для $G \in F$ положим $M_G^\delta = (\&_{h \in G} M_h^\delta)$ (здесь $M_{\emptyset}^\delta = T$ и для всякого $h' \leq h$ имеем: $(\&_{h \in h'} M_h^\delta) = M_G^\delta$ для $G = \{h' \in H : (\exists h \in h') (h' \leq h)\}$) и $M_G^\delta = M_G^\delta \& (\&_{h \notin G} \neg M_h^\delta)$ (ясно, что $\models_{V_E} (\vee_{G \in F} M_G^\delta)$ и $\models_{V_E} \neg (M_G^\delta \& M_{G'}^\delta)$ при $G \neq G'$). Здесь F есть решетка имен порождающих $\pm$ -условий, а $M_G^\pm$ - сами эти условия. Соответствующие правила порождения гипотез можно записать в виде:

$$\frac{J_{(\tau, n)} P(X_1, X_2), M_{G_1}^+(X_1, X_2), M_{G_2}^-(X_1, X_2)}{J_\lambda P(X_1, X_2)},$$

$$\text{где } \lambda = \begin{cases} \langle G_1^+, n+1 \rangle, & \text{если } G_2 \leq G_1, \\ \langle G_2^-, n+1 \rangle, & \text{если } G_1 \leq G_2, \\ \langle 0, n+1 \rangle, & \text{если } G_1 = G_2 \neq \emptyset, \\ \langle \tau, n+1 \rangle, & \text{если } [(G_1 \not\leq G_2, G_2 \not\leq G_1) \vee (G_1 = G_2 = \emptyset)]. \end{cases}$$

ЛИТЕРАТУРА

1. Аншаков О.М., Рычков С.В. О многозначных логических исчислениях // Семиотика и информатика. 1982. № 19. С. 90-117.
2. Аншаков О.М., Скворцов Д.П., Финн В.К. Логические средства экспертных систем типа ДСМ // Там же. 1986. № 28. С. 65-101.
3. Аншаков О.М., Скворцов Д.П., Финн В.К. Об аксиоматизации бесконечнозначных логик, соответствующих ДСМ-методу

- порождения гипотез // IV Всес. конференция "Применение методов математической логики". Таллин, 1986. С.24-26.
4. Забежайло М.И., Финн В.К., Авидон В.В. и др. Об экспериментах с базой данных с неполной информацией посредством ДСМ-метода порождения гипотез // НТИ. Сер.2. 1983. №2. С.28-32.
 5. Митеенкова М.А., Авидон В.В., Суханова С.А. О программной реализации ДСМ-метода автоматического порождения гипотез с неоднóэлементным множеством признаков // Там же. 1984. №11. С.18-22.
 6. Скворцов Д.П. О некоторых способах построения логических языков с кванторами по кортежам // Семиотика и информатика. 1982. № 20. С.102-126.
 7. Фабрикантова Е.Ф. Метаболизм ксенобиотиков как задача искусственного интеллекта. // Тез. докл. II Всесоюзн. конф. по искусств. интеллекту. Минск, 1990. С.175-179.
 8. Финн В.К. ДСМ-метод автоматического порождения гипотез с отношением порядка. // Семиотика и информатика. 1990. № 3. С.69-103.
 9. Финн В.К. О машинно-ориентированной формализации правдоподобных рассуждений в стиле Ф.Бэкона - Д.С.Милля // Там же. 1982. № 20. С.35-101.
 10. Anschakov O.M., Finn V.K., Skvortsov D.P. On logical means of formalization of plausible inferences // VIII International congress of logic, methodology and philosophy of science. Abstracts. Moscow, 1987. PP.212-215.
 11. Ono H. Model extension theorem and Craig's interpolation theorem for intermediate predicate logics. // Reports on mathematical logic. 1983. V.15. PP.41-58.
 12. Rosser J.B., Turquette A.R. Many-valued logics. Amsterdam. 1952.

Содержание

От редколлегии	5
Павляк З. Приближенные множества - основные понятия	6
Орловская Е. Логические аспекты изучения понятий	20
Нелейвода Н.Н. Первые шаги к теории неформализуемых понятий ...	34
Смирнов В.А. Дважды алгебры и симметрические логики	46
Дзебьяк В., Челаковский Я. Конгруэнц-дистрибутивные многообразия алгебр	55
Маркин В.И. Силлогистические теории и исчисление предикатов	58
Шалак В.И. Методы автоматического образования логических баз в системах искусственного интеллекта	67
Бушковский В. Синтаксическое исчисление Ламбека и его семантика	77
Попов В.М. Паранепротиворечивые секвенциальные исчисления	97
Вуйцицкий Р. Два метода построения логических исчислений: логика заключений и логика формул	101
Васюков В.Л. MN - категории для релевантных логик	114
Васюков В.Л. RN - категории для модальных логик	124
Сидоренко Е.А. Слабые следствия и парадоксы следования	133
Войшвилло Е.К. Релевантная логика как этап развития логики, ее философское и методологическое значение	143
Быстров П.И. Нестандартный метод табличных конструкций для модальных и релевантных логик	156
Герасимова И.А. Распределенные системы с точки зрения эпистемической логики	171
Карпенко А.С. Матричная логика без неподвижных точек	181
Ивлев Ю.В. Квазифункциональные семантики и семантики ограниченных множеств описаний состояний	186
Анисов А.М. Может ли пространство быть непрерывным, а время - дискретным?	210
Аншаков О.М., Скворцов Д.П., Финн В.К. Об аксиоматизируемости многозначных логик, связанных с формализацией правдоподобных рассуждений	222

Научное издание

Логические исследования. Вып. 1

Утверждено к печати Институтом философии РАН

Издательская фирма "Наука -

философия, право, социология и психология"

Руководитель фирмы М.М. Беляев. Редактор Е.А. Жукова

Художник Б.М. Рябышев. Художественный редактор М.Л. Храмцов

ИБ № 47436

Подписано к печати 22.04.93. Формат 60 × 90 1/16. Печать офсетная.
Усл.печ.л. 15,5. Усл.кр.отт. 15,8. Уч.-изд.л. 17,22. Тираж 820 экз. Тип. зак. 235.

Ордена Трудового Красного Знамени издательство "Наука"

117864 ГСП-7, Москва, В-485, Профсоюзная ул., 90

3-я типография издательства "Наука"

107143, Москва, Открытое ш., 28