РОССИЙСКАЯ АКАДЕМИЯ НАУК

ИНСТИТУТ ФИЛОСОФИИ

LOGICAL INVESTIGATIONS

Vol. 10

MOSCOW NAUKA 2003

ЛОГИЧЕСКИЕ ИССЛЕДОВАНИЯ

Выпуск 10

МОСКВА НАУКА 2003

УДК 16
ББК 87.4
Л69

Логические исследования. Вып. 10. – М.: Наука 2003. – 311 с.
ISBN 5-02-006257-X

В юбилейном 10-м выпуске «Логических исследований» опубликованы статьи, в которых изложены новые результаты, полученные в различных областях современной логики, а также статьи, подготовленные по пленарным докладам, прочитанным на 4 Международной конференции «Смирновские чтения» (Москва, май 2003). Здесь же опубликован библиографический указатель (на русском и английском языках) работ, изданных с 1993 по 2003 г. включительно.

Сборник предназначен для всех интересующихся логикой и ее приложениями в различных научных дисциплинах.

Logical Investigations. Vol. 10. – M.: Nauka, 2003. – 311 p.
ISBN 5-02-006257-X

In the anniversary 10th issue of "Logical Investigations" there are published papers where were presented new results obtained in different fields of contemporary logic, and also papers which were prepared by plenary talks of the 4th International Conference "Smirnov's Readings" (Moscow, May 2003). Then, the Russian-English bibliographical index of papers printed between 1993 and 2003 inclusively is published.

The edition is addressed to everyone who is interested in logic and its applications in various scientific disciplines.

ТП-2003-II-9
ISBN 5-02-006257-X

ОТ РЕДКОЛЛЕГИИ

Вышел юбилейный 10-й выпуск «Логических исследований» как *продолжающееся* издание Российской академии наук (издательство «Наука»). Начало было совсем не легким, но при неуемной энергии В.А. Смирнова (первый отв. редактор), при активной поддержке директора Института философии РАН В.С. Стёпина, а также Л.С. Давыдовой, преодолевая всевозможные трудности, пришли к этому юбилею.

Каждый выпуск имеет свою историю, порой драматическую. В 1993 г. вышло сразу два первых выпуска, следующий появился только в 1995 г., затем в 1997 г. и с этого времени уже регулярно, но 6-ой выпуск 1999 г. был опубликован в издательстве «РОССПЭН».

«Логические исследования» в настоящее время являются вообще *единственным* в России специализированным изданием по логике, включающим работы как по символической, так и по философской логике, в котором публикуются как отечественные, так и зарубежные авторы. Издание приобрело широкую известность за рубежом и всегда отмечается в центральных реферативных журналах мира «Mathematical Review» и «Zentralblatt MATH».

В юбилейном выпуске «Логических исследований» опубликован библиографический указатель (на русском и английском языках) работ, изданных с 1993 по 2003 г. включительно. Как следует даже из беглого рассмотрения данного указателя, целый ряд работ вносит важный вклад в отечественную и мировую логику.

EDITORS' NOTE

The anniversary 10^{th} issue of «Logical Investigations» is come out as a continuing publication of Russian Academy of Sciences (by Nauka Publishers). It was quite uneasy to launch this series, but due to the irrepressible energy of V.A.Smirnov (the first editor-in-chief), with the active support of the director of Institute of Philosophy RAS (Russian Academy of Science) academician V.S. Stepin, and also L.S. Davydova we have overcome all the difficulties and now we arrive to this anniversary.

Each issue has its own – sometimes dramatical – history. In 1993 there were published two earliest issues; the next issue was published only in 1995; after that there was another one in 1997, and regularly since then; but the 6^{th} issue (1999) was published by ROSSPEN publishing company.

Nowadays «Logical Investigations» as a matter of fact is *the single* in Russia specialized edition in logic which contains works on symbolic logic as well as works on philosophical logic, and where authors from our country as well as foreign authors publish their papers. The edition became wide-famed abroad; and it is cited by the main bulletins «Mathematical Review» and «Zentralblatt MATH».

In the anniversary 10^{th} issue of «Logical Investigations» the Russian-English bibliographical index of papers printed between 1993 and 2003 inclusively is published. As appears just from a cursory reading of this index, a number of works makes a valuable contribution to logic in our country, and in the world.

А.М.Анисов

ОПРЕДЕЛЕННОСТИ В КЛАССИЧЕСКОЙ ЛОГИКЕ*

Abstract. *The article discusses the problem of argumentation modelling in the context of uncertainty by means of the classical first-order logics of predicates. It shows the existence of formulae that exclude the appearance of uncertainty situation.*

В работах [1] и [2] в рамках классической логики был введен оператор неопределенности «н». Кратко воспроизведем формальный ход рассуждений из этих работ. Пусть T – аксиоматическая теория в языке L классического исчисления предикатов первого порядка. Сопоставим каждому n-местному атомарному предикатному символу $P(x_1, ..., x_n)$ языка L n-местный атомарный предикатный символ $P^*(x_1, ..., x_n)$, а каждому n-местному функциональному символу $t(x_1, ..., x_n)$ – n-местный функциональный символ $t^*(x_1, ..., x_n)$. Индивидные константы (если они вообще имеются) оставим без изменений. Получим язык L*. Теперь заменим в аксиомах и правилах вывода теории T каждое вхождение предикатных и функциональных символов на соответствующие символы со звездочкой. Результат описанной замены для аксиомы A обозначим через A*. В итоге получим теорию T* в языке L*, содержащую в качестве аксиом только формулы вида A*.

Объединим полученные теории в одну. Получим теорию $T \cup T^*$ в языке $L \cup L^*$. Теория $T \cup T^*$ вряд ли может кого-то заинтересовать. Просто она содержит два параллельных ряда аксиом, отличающихся лишь наличием или отсутствием звездочек в их формулировках. Однако понятие формулы претерпело существенное изменение. Формулами теории $T \cup T^*$ отныне являются не только формулы языка L и формулы языка L* по отдельности, но и *смешанные* формулы, содержащие как символы без звездочек, так и символы со звездочками. Пусть A – какая-либо формула языка $L \cup L^*$. *Через* A* *обозначим результат одновременной замены в* A *каждого предикатного или функционального символа без звездочки на соответствующий символ со звездочкой, а каждого предикатного или функционального символа со звездочкой на соответствующий символ без звездочки.*

---

* Работа выполнена при поддержке РГНФ, проект № 01-03-00300а.

Произвольные формулы A и A* будем называть ***сходными*** в теории $T \cup T^*$. Так определенная операция * на формулах обладает следующим очевидным свойством.

Предложение 1. Любая формула A графически совпадает с A**, но ни одна формула A не совпадает с A*.

Положим $L\text{н} = L \cup L^* \cup \{\text{н}\}$, где «н» – символ новой унарной логической связки.

Добавим к $T \cup T^*$ важное определение. Точнее, схему определений. Для *любой* формулы A языка Lн аксиомой является следующая формула:

$$\text{н}A \leftrightarrow ((A \,\&\, \neg A^*) \vee (\neg A \,\&\, A^*)). \qquad (\text{н})$$

Содержательный смысл данной схемы аксиом состоит в утверждении неопределенности A. В частности, если A – формула языка $L \cup L^*$ (это означает, что в A нет вхождений оператора «н»), то A неопределенна тогда и только тогда, когда она выполнена в модели теории $T \cup T^*$, а сходная с ней формула A* не выполнена в той же модели, или, наоборот, A не выполнена, но A* выполнена.

Теорию $T \cup T^*$ с присоединенной схемой определений $\text{н}A \leftrightarrow ((A \,\&\, \neg A^*) \vee (\neg A \,\&\, A^*))$ в качестве новой аксиомной схемы назовем *минимальной теорией с неопределенностью* Tн в языке Lн. Короче, минимальная

$T\text{н} = T \cup T^* \cup \{\text{н}A \leftrightarrow ((A \,\&\, \neg A^*) \vee (\neg A \,\&\, A^*))\}$.

Дальнейшее изложение развивает идеи из [1] и [2]. Нам понадобится также следующая система натурального вывода классической логики предикатов первого порядка из [3]: $A \Rightarrow A$ (р); $A, B \Rightarrow A\&B$ (&в); $A\&B \Rightarrow A$ (&у1); $A\&B \Rightarrow B$ (&у2); $A \Rightarrow A \vee B$ ($\vee$в1); $B \Rightarrow A \vee B$ ($\vee$в2); $\Gamma, A \vdash C$ и $\Gamma, B \vdash C \Rightarrow \Gamma, (A \vee B) \vdash C$ ($\vee$у); $\Gamma, A \vdash B \Rightarrow \Gamma \vdash (A \rightarrow B)$ ($\rightarrow$в); $A, (A \rightarrow B) \vdash B$ ($\rightarrow$у); $\Gamma, A \vdash B$ и $\Gamma, A \vdash \neg B \Rightarrow \Gamma \vdash \neg A$ ($\neg$в); $\neg\neg A \vdash A$ ($\neg$у); $A_1, \ldots, A_n, \Psi_{n+1}, \ldots, \Psi_m$, A вывод $\Rightarrow A_1, \ldots, A_n \vdash A$ (введение знака выводимости $\vdash$в); $\vdash A \Rightarrow A$ (удаление знака выводимости $\vdash$у); $\Gamma \vdash A(v) \Rightarrow \Gamma \vdash \forall v A(v)$ ($\forall$в); $\forall v A(v) \Rightarrow A(t)$ ($\forall$у); $A(t) \Rightarrow \exists v A(v)$; $\exists v A(v) \Rightarrow A(\alpha)$ ($\exists$у) (в правилах для кванторов v – индивидная переменная языка логики предикатов, t – терм, α – какое-либо новое имя, не входящее в исходный перечень имен языка).

Если T – пустая теория (не содержащая прикладных аксиом), то Tн есть множество формул в языке Lн, доказуемых в классической логике предикатов, плюс расширение, полученное за счет присоединения схемы $\text{н}A \leftrightarrow ((A \,\&\, \neg A^*) \vee (\neg A \,\&\, A^*))$. Символ «$\vdash$» означает доказуемость в такой теории Tн, т.е. для доказуемой в Tн формулы A используется запись $\vdash A$. Если T расширение Тн, то пишем Т $\vdash$ А для формулы А, доказуемой в Т. Отметим, что расширения минимальной теории с неопределенностью Тн могут быть произвольными. Но в контексте проблемы неопределенности важно соблюдать *принцип дублирования*:

Если к аксиоматической теории Т добавлена формула А в качестве новой аксиомы, то к Т в качестве аксиомы добавляется и формула А*.

Формулы, добавляемые к минимальной теории с неопределенностью Тн в качестве аксиом, могут иметь смешанный характер, т.е. содержать и символы без звездочки, и символы со звездочкой. В любом случае при соблюдении принципа дублирования требуется добавление смешанной формулы А сопровождать добавлением сходной формулы А*.

Назовем формулу А *абсолютно определенной*, если $\vdash \neg$нА. Если Т – расширение теории Тн, то формулу А, для которой Т $\vdash \neg$нА, назовем *абсолютно определенной в теории* Т. По аналогии можно было бы ввести понятие абсолютной неопределенности формул, для которых $\vdash$ нА, однако такое понятие было бы пустым, как показывает следующее утверждение.

Предложение 2. Не существует формулы А, для которой верно $\vdash$ нА.

Если бы было $\vdash$ нА, то было бы $\vdash ((A \& \neg A^*) \vee (\neg A \& A^*))$. Устраним из $((A \& \neg A^*) \vee (\neg A \& A^*))$ все вхождения оператора «н» (если таковые имеются), используя схему (н). Получим вместо А формулу В, а вместо А* формулу В*, причем В и В* – формулы классической логики предикатов. Ясно, что $\vdash ((B \& \neg B^*) \vee (\neg B \& B^*))$, т.е. эта формула доказуема в классическом исчислении предикатов первого порядка. По теореме полноты она логически общезначима: $\models ((B \& \neg B^*) \vee (\neg B \& B^*))$. Возьмем произвольную модель $M = \langle U, J\rangle$ (где U – непустое множество, а J – функция интерпретации) формулы $((B \& \neg B^*) \vee (\neg B \& B^*))$. Определим функцию интерпретации J′. Для каждого предикатного символа Р или функционального символа f без звездочки оставим прежнее значение $J'(P) = J(P)$, $J'(f) = J(f)$, а для каждого предикатного символа Р* или функционального символа f* положим $J'(P^*) = J(P)$, $J'(f^*) = J(f)$. Получим структуру $M' = \langle U, J'\rangle$, которая является моделью формулы $((B \& \neg B^*) \vee (\neg B \& B^*))$ (поскольку она общезначима) и в которой символы без звездочек и соответствующие символы со звездочками интерпретируются одинаково. Следовательно, формула В выполнена в M′ при приписывании v тогда и только тогда, когда В* выполнена в M′ при приписывании v.

Допустим, B выполнена в M′ при приписывании v. Тогда выполнена и B*, но ¬B* не выполнена и конъюнкция (B & ¬B*) не выполнена. Формула ¬B не выполнена, так что конъюнкция (¬B & B*) также не выполнена. Значит, дизъюнкция этих конъюнкций ((B & ¬B*) ∨ (¬B & B*)) не выполнена в M′ при приписывании v в противоречии с предположением о ее общезначимости. Допустим теперь, что B не выполнена в M′ при приписывании v. Тогда (B & ¬B*) не выполнена и, так как B* не выполнена, (¬B & B*) также не выполнена, что вновь противоречит предположению об общезначимости ((B & ¬B*) ∨ (¬B & B*)).

Таким образом, структура M′ не является моделью формулы ((B & ¬B*) ∨ (¬B & B*)), и эта формула не является логически общезначимой. Значит, она не доказуема в классическом исчислении предикатов. Отсюда не доказуема и формула ((A & ¬A*) ∨ (¬A & A*)), т.е. формула нA, что и требовалось доказать.

Разумеется, полученный только что результат не отменяет возможности выводить в прикладных теориях (расширяющих исчисление предикатов принятием логически не общезначимых формул в качестве аксиом) формулы вида нA в качестве теорем.

Легко доказывается следующее утверждение.

Предложение 3. $\vdash$ (нA ↔ нA*) и $\vdash$ (нA ↔ н¬A).

В самом деле, нA ↔ ((A & ¬A*) ∨ (¬A & A*)), а нA* ↔ ((A* & ¬A**) ∨ (¬A* & A**)). Поскольку, в силу предложения 1, A** есть A, ((A* & ¬A**) ∨ (¬A* & A**)) есть ((A* & ¬A) ∨ (¬A* & A)). Классическая логика высказываний дает $\vdash$ ((A & ¬A*) ∨ (¬A & A*)) ↔ ((A* & ¬A) ∨ (¬A* & A)), т.е. $\vdash$ (нA ↔ нA*).

Вновь используя нA ↔ ((A & ¬A*) ∨ (¬A & A*)), распишем н¬A: н¬A ↔ ((¬A & ¬¬A*) ∨ (¬¬A & ¬A*)) ↔ ((¬A & A*) ∨ (A & ¬A*)) ↔ нA.

В общем случае эквивалентность вида (A ↔ A*) не доказуема. Более того, даже если A теорема теории T, т.е. T $\vdash$ A, то A* не обязательно теорема этой теории. Однако в случае логически общезначимых формул имеет место следующий факт.

Предложение 4. $\vdash$ A ⇔ $\vdash$ A*.

Доказательство основано на построении не имеющей прикладных аксиом минимальной теории с неопределенностью Tн. Это просто заданное в произвольном языке L ∪ L* ∪ {н} исчисление предикатов, дополненное схемой (н). Например, можно взять приведенную выше систему натурального вывода и пополнить ее аксиомной схемой (н). Применению прямого правила вывода вида (в линейной записи) $B_1, \ldots, B_n \Rightarrow C$ в доказательстве A преобразуется в шаг $B^*_1, \ldots, B^*_n \Rightarrow C^*$ в доказательстве A*, поскольку правила вывода сформулированы для *любых* формул – в нашем случае, для *любых* формул языка $L \cup L^* \cup \{н\}$. Аналогичным образом преобразуются шаги применения правил косвенного вывода. Так же действуем и в случае применения схемы (н): схема формул $нA^* \leftrightarrow ((A^* \ \& \ \neg A^{**}) \vee (\neg A^* \ \& \ A^{**}))$ есть просто частный случай схемы $нA \leftrightarrow ((A \ \& \ \neg A^*) \vee (\neg A \ \& \ A^*))$, которой вместо формулы A (которая, заметим, может содержать символы со звездочкой) взята формула A^* (которая может символов со звездочкой и не содержать – так будет в том случае, если все предикатные и функциональные символы, входящие в A, помечены звездочкой).

Впрочем, если аксиоматическое расширение T минимальной теории с неопределенностью Tн удовлетворяет принципу дублирования, то предложение 4 можно усилить.

Предложение 5. Если T дублированное расширение минимальной теории с неопределенностью Tн, то

$$T \vdash A \Leftrightarrow T \vdash A^*.$$

Предложение 6. Если A доказуема, то как A, так и $\neg A$ являются абсолютно определенными:

$$\vdash A \Rightarrow \ \vdash \neg нA \text{ и } \vdash \neg н\neg A.$$

Допустим, $\vdash A$ и нA. Из A получаем $\neg(\neg A \ \& \ A^*)$. Так как $нA \leftrightarrow ((A \ \& \ \neg A^*) \vee (\neg A \ \& \ A^*))$, логика высказываний дает $(A \ \& \ \neg A^*)$ и затем $\neg A^*$. Но по предложению 4 из $\vdash A$ вытекает $\vdash A^*$. Получили противоречие. Следовательно, $\vdash A \Rightarrow \ \vdash \neg нA$. Аналогично доказывается $\vdash A \Rightarrow \ \vdash \neg н\neg A$.

В системе натурального вывода из [3] доказательство последнего утверждения (при пропуске рутинных деталей) выглядит следующим образом.

1.	$\vdash A$	док.
2.	$н\neg A$	доп.
3.	$н\neg A \leftrightarrow ((\neg A \ \& \ \neg\neg A^*) \vee (\neg\neg A \ \& \ \neg A^*))$	акс. (н).
4.	$((\neg A \ \& \ A^*) \vee (A \ \& \ \neg A^*))$	2, 3 лог.выск.
5.	A	1, $\vdash$у.
6.	$\neg(\neg A \ \& \ A^*)$	5, лог. выск.
7.	$(A \ \& \ \neg A^*)$	4, 6, лог. выск.
8.	$\neg A^*$	7, &у2.
9.	$\vdash A^*$	1, предл. 4.
10.	A^*	9, $\vdash$у.
11.	$н\neg A \vdash A^*$	1,2,9,10, $\vdash$в.
12.	$н\neg A \vdash \neg A^*$	1 – 8, $\vdash$в.
13.	$\vdash \neg н\neg A$	11, 12, $\neg$в.

Следствие. $\vdash \neg A \Rightarrow \ \vdash \neg нA$.

С учетом предложения 6 и его следствия получается, что *логически общезначимые и противоречивые формулы являются абсолютно определенными*. Но так и должно быть! Какая неопределенность может возникать в отношении такого рода формул?

И снова результат предложения 6 можно распространить на дублированные расширения.

Предложение 7. Если T дублированное расширение минимальной теории с неопределенностью Tн и T $\vdash$ A, то как A, так и ¬A являются абсолютно определенными в теории T:

T $\vdash$ A $\Rightarrow$ T $\vdash$ ¬нA и T $\vdash$ ¬н¬A.

Доказательство повторяет с очевидными модификациями доказательство предложения 6.

Рассмотрим понятие равенства. Как известно, исчисление предикатов с равенством первого порядка получается добавлением к чистому исчислению предикатов следующих аксиом.

A1 $\forall x(x = x)$

A2 $\forall x_1\forall x_2...\forall x_n\forall y_1\forall y_2...\forall y_n((x_1 = y_1 \ \& \ x_2 = y_2 \ \& \ ... \ \& \ x_n = y_n) \to (A(x_1, x_2, ..., x_n) \to A(y_1, y_2, ..., y_n))$

Соблюдая принцип дублирования, получаем еще одну пару аксиом.

A1* $\forall x(x =^* x)$

A2* $\forall x_1\forall x_2...\forall x_n\forall y_1\forall y_2...\forall y_n((x_1 =^* y_1 \ \& \ x_2 =^* y_2 \ \& \ ... \ \& \ x_n =^* y_n) \to (A^*(x_1, x_2, ..., x_n) \to A^*(y_1, y_2, ..., y_n))$

Пусть $ИП_=$ есть исчисление предикатов с равенством. Положим $Тн_= = ИП_= \cup ИП_=^* \cup \{нA \leftrightarrow ((A \ \& \ \neg A^*) \vee (\neg A \ \& \ A^*))\}$. Любопытным представляется следующий факт.

Предложение 8. Понятие равенства является абсолютно определенным в теории $Тн_=$, т.е. $Тн_= \vdash \neg н(x = y)$.

Приведем (опять пропуская очевидные шаги) формальное доказательство сделанного утверждения.

1. н(x = y) доп.
2. $н(x = y) \leftrightarrow ((x = y \ \& \ x \neq^* y) \vee (x \neq y \ \& \ x =^* y))$ (н).
3. $((x = y \ \& \ x \neq^* y) \vee (x \neq y \ \& \ x =^* y))$ 1, 2, лог. выск.
4. $(x = y \ \& \ x \neq^* y)$ доп.
5. $x = y$ 4, &у1.
6. $x \neq^* y$ 4, &у2.
7. $x = y \to (x =^* x \to x =^* y)$ A2 (здесь в качестве A взята схема формул $x =^* t$).
8. $(x =^* x \to x =^* y)$ 5, 7, →у.
9. $x =^* x$ из A1*.
10. $x =^* y$ 9, 8, →у.
11. $н(x = y), (x = y \ \& \ x \neq^* y) \vdash x \neq^* y$ 1 - 6, $\vdash$в.

12. $н(x = y), (x = y \mathbin{\&} x \neq^* y) \vdash x =^* y$ 1 - 10, $\vdash$в.
13. $н(x = y) \vdash \neg(x = y \mathbin{\&} x \neq^* y)$ 11, 12, $\neg$в.
14. $(x \neq y \mathbin{\&} x =^* y)$ доп.
15. $x \neq y$ 14, &у1.
16. $x =^* y$ 14, &у2.
17. $x =^* y \rightarrow (x = x \rightarrow x = y)$ A2* (здесь в качестве A вновь взята схема формул $x =^* t$, так что A* из аксиомы A2* есть $x = t$ в силу совпадения A и A** по предложению 1).
18. $(x = x \rightarrow x = y)$ 16, 17, $\rightarrow$у.
19. $x = x$ A1.
20. $x = y$ 19, 18, $\rightarrow$у.
21. $н(x = y), (x \neq y \mathbin{\&} x =^* y) \vdash x \neq y$ 1-3,14-16, $\vdash$в.
22. $н(x = y), (x \neq y \mathbin{\&} x =^* y) \vdash x = y$ 1-3,14-20, $\vdash$в.
23. $н(x = y) \vdash \neg(x \neq y \mathbin{\&} x =^* y)$ 21, 22, $\neg$в.
24. $н(x = y) \vdash \neg(x = y \mathbin{\&} x \neq^* y) \mathbin{\&} \neg(x \neq y \mathbin{\&} x =^* y)$ 13, 23, лог. выск.
25. $н(x = y) \vdash \neg((x = y \mathbin{\&} x \neq^* y) \vee (x \neq y \mathbin{\&} x =^* y))$ 24, лог. выск.
26. $н(x = y) \vdash \neg\, н(x = y)$ 25, (н).
27. $н(x = y) \vdash н(x = y)$ лог. выск.
28. $\vdash \neg н(x = y)$ 27, 26, $\neg$в.

Аналогично доказывается утверждение $Тн_= \vdash \neg н(x =^* y)$, так что все равно, о каком равенстве (= или =*) идет речь – в любом случае понятие равенства остается абсолютно определенным.

Разумеется, не любое понятие будет абсолютно определенным. Например, в теории множеств $ZFн = ZF \cup ZF^* \cup \{н\}$ не удастся доказать $\vdash \neg н(x \in y)$, так что понятие принадлежности не является абсолютно определенным. В частности, аксиома существования пустого множества $\exists x \forall y(y \notin x)$ будет продублирована аксиомой $\exists x \forall y(y \notin^* x)$. Обычным образом можно доказать, что пустое множество единственно, но единственность будет относиться к предикату $\in$ и к предикату $\in^*$ *по отдельности*. Намереваясь ввести индивидную константу $\varnothing$, обозначающую пустое множество, мы не обязаны считать это множество определенным. Ничто не мешает принять аксиому $н\forall x(x \notin \varnothing)$. По предложению 3 отсюда моментально последует $ZFн \cup \{ н\forall x(x \notin \varnothing)\} \vdash н\forall x(x \notin^* \varnothing)$, так что принцип дублирования будет выполнен автоматически. Поскольку $н\forall x(x \notin \varnothing) \leftrightarrow ((\forall x(x \notin \varnothing) \mathbin{\&} \neg\forall x(x \notin^* \varnothing)) \vee (\neg\forall x(x \notin \varnothing) \mathbin{\&} \forall x(x \notin^* \varnothing))$, либо в смысле отношения $\in$, либо в смысле отношения $\in^*$ (но не того и другого вместе) множество $\varnothing$ окажется непустым.

Помимо рассмотренной выше абсолютной определенности существует и другая разновидность определенности. Некоторые формулы могут быть проинтерпретированы лишь единственным образом. Например, формула $\forall xP(x)$ в каждом непустом универсуме U должна получить интерпретацию $J(P) = U$, чтобы быть истинной, тогда как формула $\exists xP(x)$ в более чем одноэлементном универсуме может быть истинной при разных интерпретациях.

Эти соображения приводят к следующему определению. Назовем формулу A языка L классического исчисления предикатов первого порядка *абсолютно категоричной*, если A имеет модель и для любых двух структур $M_1 = <U, J_1>$, $M_2 = <U, J_2>$ языка L из условия $M_1 \neq M_2$ следует, что либо A истинна в точности в одной из структур M_1 или M_2, либо A ложна и в M_1, и в M_2. Можно выразиться короче (но менее точно), сказав, что во-первых, абсолютно категоричные формулы выполнимы и, во-вторых, в каждом универсуме они имеют не более одной интерпретации. Примерами абсолютно категоричных формул будут следующие предложения: $\forall xP(x)$, $\neg\exists xP(x)$, $\forall x\forall y\neg R(x, y)$, $\forall x\forall y(x = y)\ \&\ \forall xP(x)$. Первые три формулы имеют единственные обеспечивающие их истинность интерпретации в каждом универсуме, а последняя формула единственным способом выполнима только в одноэлементном универсуме.

Пусть язык L классического исчисления предикатов первого порядка содержит двухместную предикатную константу R и не содержит никаких других предикатных, функциональных или индивидных констант.

Предложение 9. Множество W абсолютно категоричных замкнутых формул языка L неразрешимо.

Рассмотрим множество $W' = \{A \mid A \in W$ и A имеет вид $(\forall x\forall y\neg R(x, y) \vee B)\}$. Любая формула вида $(\forall x\forall y\neg R(x, y) \vee B)$ принадлежит W' тогда и только тогда, когда либо B истинна если и только если $\forall x\forall y\neg R(x, y)$ истинна, либо $B \in \Pi$, где Π – множество замкнутых противоречивых формул языка L. Действительно, если ни один из этих двух случаев не имеет места, то $B \notin \Pi$ и, следовательно, класс моделей предложения B не пуст. Более того, существует модель M, в которой формула B истинна, а формула $\forall x\forall y\neg R(x, y)$ ложна. Иначе выполнялась бы метаимпликация $M \models B \Rightarrow M \models \forall x\forall y\neg R(x, y)$. Но формула $\forall x\forall y\neg R(x, y)$ ложна в любой структуре $M' = <U, J'>$, где $J'(R) = \varnothing$, откуда получилось бы, что B ложна в таких M'. Следовательно, всякий раз, когда структура $<U, J>$ является моделью B, имеем $J(R) = \varnothing$. Это означает, что для любой структуры M $(M \models B \Leftrightarrow M \models \forall x\forall y\neg R(x, y))$ противоречит предположению. Итак, существует структура $M = <U, J>$ такая, что $M \models B$ и неверно $M \models \forall x\forall y\neg R(x, y)$. Ясно, что

$J(R) \neq \varnothing$. Пусть $J'(R) = \varnothing$. Тогда $M \models \forall x \forall y \neg R(x, y) \vee B$, $M' \models \forall x \forall y \neg R(x, y) \vee B$, где $M' = <U, J'>$, т.е. $\forall x \forall y \neg R(x, y) \vee B \notin W'$.

Пусть теперь для любой структуры M языка L выполнено условие $M \models B \Leftrightarrow M \models \forall x \forall y \neg R(x, y)$. Очевидно, что для каждой структуры M ($M \models \forall x \forall y \neg R(x, y) \Leftrightarrow M \models \forall x \forall y \neg R(x, y) \vee B$). Поскольку $\forall x \forall y \neg R(x, y)$ принадлежит W, эквивалентная ей формула $\forall x \forall y \neg R(x, y) \vee B$ также принадлежит W. В случае $B \in \Pi$ вновь для всякой структуры M языка L имеем $M \models \forall x \forall y \neg R(x, y) \Leftrightarrow M \models \forall x \forall y \neg R(x, y) \vee B$, откуда $\forall x \forall y \neg R(x, y) \vee B \in W$.

Допустим, что W′ разрешимо. Всякий раз, когда применение разрешающей процедуры к произвольной замкнутой формуле языка L вида $\forall x \forall y \neg R(x, y) \vee B$ дает утвердительный ответ о принадлежности данной формулы множеству W′, будем рассматривать предложение B. Согласно только что полученному результату, либо B эквивалентно формуле $\forall x \forall y \neg R(x, y)$, либо $B \in \Pi$. Мы можем эффективно установить, какой именно из этих двух возможных вариантов реализован. Поступим следующим образом. Сотрем в формуле B все кванторы и каждой атомарной подформуле формулы B вида R(x, y) присвоим истинностное значение 0 («ложь»). Так как других атомарных подформул в формуле B нет, эффективно вычислимо значение получившейся формулы B′ по правилам классической логики высказываний. Если значение B′ окажется равным 1 («истина»), то B имеет модель и, тем самым, B эквивалентна $\forall x \forall y \neg R(x, y)$. Если же истинностное значение B′ равно 0, то $B \in \Pi$. Чтобы убедиться в сказанном, осталось получить следующий результат.

Для любой формулы A и структуры $M = <U, J>$ языка L, в которой $J(R) = \varnothing$, A′ (здесь A′ получается из A посредством описанного на примере предложения B преобразования) принимает значение 1 в том и только в том случае, когда $M \models A$.

Докажем это утверждение индукцией по длине формулы A. Если A – атомарная формула $R(x_i, y_j)$, то A совпадает с A′. По определению, значение $R(x_i, y_j)$ равно 0. Поскольку $J(R) = \varnothing$, при любой оценке свободных переменных x_i и y_j формула $R(x_i, y_j)$ не выполнена в M. Отсюда $R(x_i, y_j)$ ложна в M, т.е. неверно, что $M \models R(x_i, y_j)$.

Разбор вариантов с пропозициональными связками очевиден, поэтому сразу перейдем к случаю совпадения A с формулой вида $\forall x C(x)$. По предположению индукции, $C(x)'$ имеет значение $1 \Leftrightarrow M \models C(x)$. Допустим, значение $C(x)'$ равно 1. Тогда значение $\forall x C(x)'$ также равно 1, поскольку $\forall x C(x)'$ совпадает с формулой $C(x)'$. Так как $M \models C(x)$, будет выполнено $M \models \forall x C(x)$. Пусть теперь $M \models C(x)$. Снова получаем $M \models \forall x C(x)$. Но $\forall x C(x)'$ совпадает с формулой $C(x)'$, откуда значение $\forall x C(x)'$ оказывается равным 1.

Таким образом, если имеется разрешающая процедура для W', по каждой формуле $\forall x \forall y \neg R(x, y) \vee B \in W'$ можно эффективно определить, выполнено $B \in \Pi$ или $B \notin \Pi$. А так как для всякого предложения $B \in \Pi$ существует формула $\forall x \forall y \neg R(x, y) \vee B \in W'$, множество Π оказывается разрешимым, что в силу известного результата о нерекурсивности Π и тезиса Черча ведет к противоречию. Следовательно, W' неразрешимо. Очевидным образом, если W разрешимо, то и W' разрешимо. Из этого факта и неразрешимости W' вытекает неразрешимость W.

ЛИТЕРАТУРА

1. *Анисов А.М.* Логика неопределенности и неопределенности во времени // Логические исследования. Вып. 9. М.: Наука, 2002.
2. *Анисов А.М.* Неопределенности в классической логике // Труды научно-исследовательского семинара Логического центра Института философии РАН. Вып. XVI. М., 2002.
3. *Анисов А.М.* Современная логика. М.: ИФ РАН, 2002.

П.И.Быстров

СУБСТРУКТУРНЫЙ ВАРИАНТ ИМПЛИКАТИВНО-НЕГАТИВНОГО ФРАГМЕНТА МОДАЛЬНОЙ СИСТЕМЫ S5*

Abstract. *Substructural version of the implicative-negative part of propositional modal system* ***S5*** *is considered. It is represented in the form of analytic tableaux as certain modification of analytic tableaux elaborated by Beth, Hintikka, Smullyan and Fitting and in the form of Gentzen-style sequent calculus with "global" rule of inference for modal operator.*

Обычно модальные системы строятся путем добавления специальных аксиом для модальных операторов к системе аксиом классической или интуиционистской логики. В методологическом и прикладном аспектах интересно построение модальных систем как расширений так называемых субструктурных логик, в которых отсутствуют те или иные структурные правила вывода (в секвенциальных вариантах) или аксиомы, соответствующие таким правилам. Для иллюстрации этой идеи в данной статье предлагается вариант импликативно-негативного фрагмента известной системы S5, построенный на базе пропозициональной логики с релевантной импликацией в форме системы табличного вывода и секвенциального исчисления генценовского типа.

В дальнейшем при построении аналитических таблиц без пояснений используются стандартные язык пропозициональной логики, определения формулы и подформулы, а также исходные понятия, введенные в главах I-II работы [1], за исключением тех случаев, когда требуются специальные определения.

Пусть $\supset$ означает релевантную импликацию (поскольку $\rightarrow$ применяется для записи секвенций), а $\Box$ – модальный оператор необходимости. Элементарной формулой (подформулой) называется формула (подформула), не содержащая логических знаков, т.е. пропозициональная переменная. Используя обычные понятия положительной и отрицательной подформулы импликативной формулы, применим следующий способ последовательной индексации отрицательных *вхождений* элементарных подформул в импликативную формулу α. Всем отрицательным вхождениям любой *элементарной* подформулы A в α приписывается нижний

* Работа выполнена при поддержке РГНФ, грант № 01-03-00403.

индекс в виде целого положительного числа 1, 2, ... Индексация производится слева направо. Первому (слева) вхождению A в α не приписывается никакого индекса, второму вхождению A в α приписывается индекс 1, третьему вхождению A в α приписывается индекс 2 и т. д. формула называется *индексированной*, если все отрицательные вхождения ее элементарных подформул индексированы. Далее речь пойдет только об индексированных формулах, которые будут обозначаться буквами α, β,... Очевидно, что индексы в явном виде появляются в формуле тогда и только тогда, когда в ней имеется n отрицательных вхождений (n>1) какой-либо элементарной подформулы.

Кроме того, мы будем оперировать только *означенными* формулами, т. е. индексированными формулами, которым приписан префикс T или F. Семантический смысл этих префиксов в данном случае не уточняется (можно считать, например, что $T(\alpha)$ означает "α выполнимо", а $F(\alpha)$– "α невыполнимо".

Система **TRS5**$_{\supset\neg}$ строится с помощью следующих правил вывода и определений. Принимаются следующие схемы правил построения аналитических таблиц для означенных формул:

$$\text{TI}\ \frac{T(\alpha\supset\beta)}{F(\alpha)\mid T(\beta)} \qquad \text{FI}\ \frac{F(\alpha\supset\beta)}{\begin{array}{c}T(\alpha)\\ F(\beta)\end{array}}$$

$$\text{TN}\ \frac{T(\neg\alpha)}{F(\alpha)} \qquad \text{FN}\ \frac{F(\neg\alpha)}{T(\alpha)}$$

$$\text{T}\Box\ \frac{\mathrm{S},T(\Box\alpha)}{S,T(\alpha)} \qquad \text{F}\Box{*}\ \frac{S,F(\Box\alpha)}{S,(F\alpha)}$$

где S – множество формул, содержащееся в выводе, заканчивающемся посылками двух последних модальных правил, и правило F□* применимо, если и только если S содержит по крайней мере одну формулу с префиксом $T\Box$ или $F\Box$.

Определение 1. Аналитическая таблица для означенной формулы α – это упорядоченное диадическое дерево, точками которого являются формулы (вхождения формул). Построение дерева начинается с формулы α. Далее предполагается, что T - уже построенная для α таблица, а β – ее конечная точка. Тогда можно расширить T , применяя к β одно из правил вывода.Точка дерева, идентичная α, называется *начальной точкой*, или началом, данного дерева. Точки, которыми завершаются ветви дерева, называются *конечными точками* данного дерева (соответственно и его ветвей).

Кроме того, построение таблицы выполняется строго систематически, т.е. правило сначала применяется к неэлементарной точке, которая непосредственно следует за начальной точкой, затем к следующей неэлементарной точке и т.д.

Определение 2. Ветвь θ таблицы T *завершена*, если ни к одной ее точке не применимо ни одно из правил построения таблиц. Ветвь θ таблицы T, начинающейся формулой α, считается *замкнутой по элементарной формуле* β_i (по вхождению элементарной формулы β_i), если и только если в θ входят элементарные формулы $T\beta_i$ и $F\beta_i$ (где i – индекс или пустой знак), являющиеся подформулами α.

Поскольку любая формула α имеет конечное число подформул, очевидно, что каждая ветвь таблицы, начинающейся с $F(\alpha)$, может быть завершена и при этом может оказаться замкнутой или незамкнутой по какому-то вхождению элементарной подформулы формулы α. Если все ветви таблицы завершены, будем говорить, что данная таблица завершена. Понятно, что конечными точками завершенной таблицы T для формулы α являются вхождения элементарных подформул формулы α.

Определение 3. Множество всех элементарных отрицательных подформул S формулы α *исчерпано*, если по каждому существенному элементу S замкнута хотя бы одна из завершенных ветвей таблицы T, начинающейся с α.

Определение 4. Таблица T, начинающаяся формулой α, *замкнута*, если и только если (a) замкнута каждая завершенная ветвь этой таблицы; (b) множество элементарных отрицательных подформул формулы α исчерпано.

Формула α называется *выводимой* в $\mathbf{TRS5}_{\supset\neg}$, если в данной системе для нее можно построить замкнутую таблицу T, начинающуюся с $F(\alpha)$. Если каждая ветвь таблицы T, начинающейся с $F(\alpha)$, завершена, но T содержит по крайней мере одну незамкнутую ветвь, формула α *не выводима* в $\mathbf{TRS5}_{\supset\neg}$.

Ясно, что это пропозициональное исчисление разрешимо. Для проверки формулы α на выводимость достаточно построить завершенную таблицу, начинающуюся с $F(\alpha)$. Любую построенную в рассматриваемом языке формулу можно эффективно проверить на выводимость в исчислении $\mathbf{TRS5}_{\supset\neg}$.

Секвенциальное исчисление **SRS5**$_{\supset\neg}$ формулируется с помощью основной секвенции

$$\alpha \to \alpha,$$

где α – элементарная формула, следующего множества схем правил заключения и стандартного определения секвенциального вывода

$$\frac{\Gamma \to \alpha \quad \alpha, \Delta \to \Theta}{\Gamma, \Delta \to \Theta}\ \text{cut}.$$

Схемы правил заключения для логических связок:

$$\frac{\alpha, \Gamma \to \beta}{\Gamma \to \alpha \supset \beta} \to \supset; \qquad \frac{\Gamma \to \alpha \quad \beta, \Delta \to \Theta}{\alpha \supset \beta, \Gamma, \Delta \to \Theta} \supset \to;$$

$$\frac{\alpha, \Gamma \to \Theta}{\Gamma \to \Theta, \neg\alpha} \to \neg; \qquad \frac{\Gamma \to \Theta, \alpha}{\neg\alpha, \Gamma \to \Theta} \neg\to;$$

$$\frac{\alpha, \Gamma \to \Theta}{\Box\alpha, \Gamma \to \Theta} \Box \to; \qquad \frac{\Gamma \to \Theta, \alpha}{\Gamma \to \Theta, \Box\alpha} \to \Box;$$

Схемы структурных правил заключения

$$\frac{\Gamma \to \alpha, \alpha}{\Gamma \to \alpha} \to C; \qquad \frac{\alpha, \alpha, \Gamma \to \Theta}{\alpha, \Gamma \to \Theta}\ C\to.$$

$$\frac{\Gamma \to \beta, \alpha}{\Gamma \to \alpha, \beta} \to P; \qquad \frac{\Delta, \alpha, \beta, \Gamma \to \Theta}{\Delta, \beta, \alpha, \Gamma \to \Theta}\ P\to.$$

Во всех схемах Θ – формула или пустая последовательность формул, и правило $\to \Box$ применимо, если и только если формула является S5-ограниченной. (Точное определение S5-ограниченной формулы см. в работе [2].)

Для этого исчисления верна теорема об устранении сечения. Ее можно доказать, в частности, методом, предложенным в [2]. Предполагается также, что формулу, являющуюся членом любой секвенции, можно проиндексировать упомянутым ранее способом.

Можно показать, что формула α доказуема в $\mathbf{TRS5}_{\supset\neg}$, если и только если секвенция $\rightarrow \alpha$ доказуема в исчислении $\mathbf{SRS5}_{\supset\neg}$. Для этого достаточно использовать предложенные Р.Смаллианом *модифицированные* аналитические таблицы (см. [1]), позволяющие элементарным образом преобразовывать выводы в генценовских исчислениях в замкнутые табличные конструкции и обратно. В общем случае верно, что любой (свободный от сечения) секвенциальный вывод в $\mathbf{SRS5}_{\supset\neg}$ можно преобразовать в замкнутую модифицированную аналитическую таблицу в системе $\mathbf{TRS5}_{\supset\neg}$ (учитывая пункт (b) определения 4); и обратно, любую замкнутую модифицированную аналитическую таблицу, построенную в системе $\mathbf{TRS5}_{\supset\neg}$, можно преобразовать в секвенциальный вывод в $\mathbf{SRS5}_{\supset\neg}$. Точнее говоря, верно следующее утверждение.

Секвенция $\rightarrow\alpha$ доказуема в исчислении $\boldsymbol{SRS5}_{\supset\neg}$, *если и только если в* $\boldsymbol{TRS5}_{\supset\neg}$ *можно построить замкнутую модифицированную аналитическую таблицу, начинающуюся с* $F\{\alpha\}$.

Это значит, что системы $\mathbf{SRS5}_{\supset\neg}$ и $\mathbf{TRS5}_{\supset\neg}$ дедуктивно эквивалентны.

Далее, можно доказать дедуктивную эквивалентность исчисления $\mathbf{SRS5}_{\supset\neg}$ и аксиоматической системы $\mathbf{MR}_{\supset\neg}$, которая получается добавлением модальных аксиом системы **S5** к импликативно-негативному фрагменту релевантной системы **R**. (Для этого достаточно показать, что формула α доказуема в $\mathbf{MR}_{\supset\neg}$, если и только если секвенция $\rightarrow\alpha$ доказуема в $\mathbf{SRS5}_{\supset\neg}$. Подробное доказательство этого утверждения выходит за рамки данной статьи.) Таким образом доказывается, что системы $\mathbf{TRS5}_{\supset\neg}$ и $\mathbf{MR}_{\supset\neg}$ дедуктивно эквивалентны, откуда следует, что система $\mathbf{MR}_{\supset\neg}$ разрешима. Решение вопроса о выводимости любой формулы α в $\mathbf{MR}_{\supset\neg}$ сводится к механическому построению завершенной таблицы для $F(\alpha)$ в $\mathbf{TRS5}_{\supset\neg}$.

Такой способ обоснования разрешимости $\mathbf{MR}_{\supset\neg}$ является косвенным в том смысле, что в нем используется секвенциальное исчисление $\mathbf{SRS5}_{\supset\neg}$. Существует “прямой” путь получения такого же результата: нужно непосредственно доказать, что формула α выводима в $\mathbf{MR}_{\supset\neg}$, если и только если в $\mathbf{TRS5}_{\supset\neg}$ можно построить замкнутую таблицу, начинающуюся с $F(\alpha)$. Несложно доказать, что если формула α выводима в $\mathbf{MR}_{\supset\neg}$, то в $\mathbf{TRS5}_{\supset\neg}$ можно построить замкнутую таблицу, начинающуюся с $F(\alpha)$. Однако в силу специфики правил построения и замыкания аналитических таблиц в **TRS5**$_{\supset\neg}$ общий прямой метод их преобразования в выводы в системе гильбертовского типа требует применения новых технических средств. Такая ситуация, на мой взгляд, иллюстрирует случай, в котором "прямое" доказательство эквивалентности логических исчислений не оправдывает себя.

ЛИТЕРАТУРА

1. *Smullyan R.M.*. First-Order Logic. Dover Publications, Inc., New York, 1995.
2. *Bystrov P.I.* Non-Standard Sequent Calculi for Modal and Relevant Logics / Philosophical Logic and Logical Philosophy. Peter I. Bystrov and Vadim N. Sadovsky (eds.). Kluwer Academic Publishers, 1996. P. 135-155.

В.Л.Васюков

ПОСЛЕДСТВИЯ ЛОГИЧЕСКОГО ПЛЮРАЛИЗМА: ГЛОБАЛЬНЫЙ И ЛОКАЛЬНЫЙ АСПЕКТЫ*

1. От логического плюрализма к плюрализму универсумов

Верно ли то, что существует только одна подлинная, истинная логика? Ныне в современной философии логики получила широкое распространение точка зрения, что существует не одна, но множество истинных логик. Эта точка зрения получила известность под именем логического плюрализма.

В XX веке становление неклассической логики на раннем этапе часто приводило к мирному сосуществованию логического плюрализма и логического монизма в рамках одного и того же философского сообщества. Характерным примером в этом отношении может считаться Львовско-Варшавская логико-философская школа, два выдающихся представителя которой – Станислав Лесьневский и Ян Лукасевич – занимали полярные позиции по вопросу поиска единого основания логики. Лесьневский еще в 1927 году отмечал, что различные технические инновации в логике "...способствуют стиранию различия между математическими науками, понимаемыми как дедуктивные теории, служащие для охватывания в максимально сжатых законах многообразной действительности мира, и такими непротиворечивыми системами, которые обеспечивают действительную возможность получения на их основе в изобилии все новых и новых утверждений, отличаясь одновременно отсутствием каких-либо связывающих ее с действительностью интуитивно-научных оценок" [5, p.177-178]. Это отличие математических систем от произвольных дедуктивных систем, по мнению Лесьневского, вызвано тем, что математические системы не противоречат "логическим интуициям", которые, в свою очередь, не могут произвольно описывать мир. Они в состоянии это делать лишь подчиняясь единой логике – истинной собственной логике мира. Лучше всего, утверждал Лесьневский, точнее, единственным возможным образом, эту логику можно охарактеризовать как классическую логику – двузначную и экстенсиональную. По этой причине, например, он не проявлял ни

* Работа выполнена при поддержке РГНФ, грант № 01-03-00371а.

малейшего интереса к многозначным логикам (впрочем и вообще к другим неклассическим логикам).

Иную позицию занимал Лукасевич. Если в 1936 году он писал, что "...одна и только одна из... логических систем реализована в действительном мире, другими словами, реальна так же как реальна одна и только одна система геометрии" [6, S.206-207], то уже через год он высказывается не столь категорически: "...все логические системы, создаваемые нами, являются при тех допущениях, при которых мы их создаем, необходимо истинными. Речь может идти только лишь о подтверждении онтологических допущений, скрытых где-то в основании логики, если мы хотим следствия данных допущений проверить как-то на фактах..." [6, S.218]. Наконец, в 1952 году он приходит к заключению, разительно отличающемуся от его предыдущей точки зрения. Теперь он уже высказывается следующим образом: "не существует способа распознать, какая из n-значных систем логики, $n \geq 2$, истинна... Классическое исчисление высказываний, истинностная матрица которого двузначна, является самой старой и самой простой логической системой и поэтому оно наиболее известно и наиболее широко применяемо. Но для определенных целей, например, в модальной логике, n-значная система ($n \geq 2$) может быть более уместной и применяемой. Чем более применима и богата логическая система, тем более она имеет истинностных значений [6, S.267].

Таким образом, нетрудно прийти к выводу, что эволюция точки зрения Лукасевича привела его к некоторой разновидности логического плюрализма, в то время как позиция Лесьневского осталась строго классической (монистической). Ирония судьбы заключается в том, что системы Лесьневского ныне часто рассматриваются как неклассические, как некоторый параллельный проект оснований математики, как экзотический формализм (о чем свидетельствуют попытки погружения его систем в классические).

В наше время, несмотря на то что современная ситуация характеризуется пролиферацией логических систем, дебаты по поводу логического плюрализма не утихают. И главную проблему в связи с этим составляет вопрос о том, являются ли эти логики соперничающими, или же они образуют одно огромное дружное семейство. Грэм Прист пишет: "Так или иначе, любая из нестандартных логик... [интуиционистская, многозначная и квантовая, релевантная и паранепротиворечивая, условная и свободная] корректна, их наличие служит нам напоминанием о том, что логика не является множеством принятых истин, но дисциплиной, в которой претендующие на значимость теории соперничают друг с другом" [7].

Возникает вопрос: существуют ли какие-нибудь последствия логического плюрализма, вызванные не просто выбором единственной логической системы, но логическим плюрализмом в целом, принятием его концепции как не подлежащей дальнейшему обсуждению?

Первопорядковая классическая логика обычно интерпретируется с помощью моделей (так называемых моделей Тарского) таким образом, что утверждение значимо тогда и только тогда, когда в любой модели из истинности посылок следует истинность заключения. Совокупность всех множеств, называемая *универсумом* множеств, снабжает нас всевозможными разновидностями моделей, требуемых для интерпретации нашей логики. Отсюда, в некотором смысле, первопорядковая логика детерминируется универсумом множеств (моделей). Действительно, пишет Кит Девлин, «...если наша функциональная иерархия должна снабжать нас "теорией множеств" некоторого типа, то тогда значения функций должны вести себя как истинностные значения. Но какие разновидности множеств действительно ведут себя как истинностные значения? Ответ хорошо известен: булевы алгебры! ... В том случае, если $\mathbf{B}$ является булевой алгеброй, мы получаем приемлемый "**универсум множеств**" с помощью следующих определений:

$$V^{\mathbf{B}}{}_0 = \varnothing,$$

$$V^{\mathbf{B}}{}_{\alpha+1} = \{f\colon f\colon V^{\mathbf{B}}{}_\alpha \to \mathbf{B}\},$$

$$V^{\mathbf{B}}{}_\lambda = \bigcup\nolimits_{\alpha<\lambda} V^{\mathbf{B}}{}_\alpha \text{, если } \lambda \text{ есть предельный ординал,}$$

$$V^{\mathbf{B}} = \bigcup\nolimits_\alpha V^{\mathbf{B}}{}_\alpha\,.$$

Элемент $V^{\mathbf{B}}$ называется *булевозначным множеством*, или, более точно, $\mathbf{B}$-значным множеством, или, более точно, $V^{\mathbf{B}}$ является булевозначным универсумом, или, точнее, $\mathbf{B}$-значным универсумом» [4, p.132-133].

Справедливо ли это в случае неклассической логики? На первый взгляд кажется, что ответ положителен. Но в таком случае мы получаем плюрализм универсумов в качестве первого следствия логического плюрализма. Тем или иным образом, каждая разновидность неклассической логики нуждается в своей разновидности универсума множеств, обеспечивающего поведение значений функций как значений истинности.

2. Способы получения универсумов

Являются ли булевы алгебры единственным видом множеств, ведущих себя как истинностные значения? Следующая цитата подсказывает нам иной пример (S4-значный универсум): "Пусть $\mathbf{G}$ будет некоторой совокупностью сущностей (называемых возможными мирами или условиями форсинга, что более подходяще), и пусть $\mathbf{R}$ будет отношением на $\mathbf{G}$, рефлексивным и транзитивным. Тогда $\langle \mathbf{G}, \mathbf{R} \rangle$ есть S4-фрейм… $\langle \mathbf{G}, \mathbf{R} \rangle$ предположительно будет членом $\boldsymbol{M}$, как мы будем иногда говорить, $\boldsymbol{M}$-множеством…

Определение 1.1. *Для каждого ординала* α *(в* $\boldsymbol{M}$*) определим множество* $R^{\mathbf{G}}{}_{\alpha}$ *следующим образом:*

(1) $R^{\mathbf{G}}{}_{0} = \varnothing$,

(2) $R^{\mathbf{G}}{}_{\alpha+1}$ *есть множество всех подмножеств (в* $\boldsymbol{M}$*)* $\mathbf{G} \times R^{\mathbf{G}}{}_{\alpha}$,

(3) *Для всех предельных ординалов* λ,

$$R^{\mathbf{G}}{}_{\lambda} = \bigcup\nolimits_{\alpha<\lambda} R^{\mathbf{G}}{}_{\alpha}.$$

Теперь пусть

$$D^{\mathbf{G}} = \bigcup\nolimits_{\alpha} R^{\mathbf{G}}{}_{\alpha},$$

где объединение берется по ординалам $\boldsymbol{M}$. $(\mathbf{G}, R, D^{\mathbf{G}})$ *представляет собой расширенный фрейм*" [13, p.203-204].

Еще одним примером является гейтингозначный универсум, поскольку известно, что для каждой полной алгебры Гейтинга Ω мы можем построить Ω–значный универсум V^{Ω}, представляющий собой модель интуиционистской теории множеств (см. [14, p.1]). Подобным образом может быть получен и квантовый универсум: "Определим $V^{(\mathbf{Q})}{}_{\alpha}$ по трансфинитной индукции над α и $V^{(\mathbf{Q})} = \bigcup_{\alpha \in On} V^{(\mathbf{Q})}{}_{\alpha}$, где On есть класс всех ординалов.

(1) $V^{(\mathbf{Q})}{}_{0} = \varnothing$.

(2) $V^{(\mathbf{Q})}{}_{\alpha+1} = \{u\colon u{:}D(u) \to \mathbf{Q}$ и $D(u) \subseteq V^{(\mathbf{Q})}{}_{\alpha}\}$, где $D(u)$ обозначает область определения u.

(3) Если α является предельным ординалом, то $V^{(\mathbf{Q})}{}_{\alpha} = \bigcup_{\beta<\alpha} V^{(\mathbf{Q})}{}_{\beta}$" [15, p.310].

Суммируя, получаем, что если принять во внимание возможность переформулировки конструкции S4-значного универсума более алгебраическим образом (с помощью перехода от совокупности возможных миров $\mathbf{G}$ к соответствующей S4-алгебре), то, по-видимому, можно выдвинуть концепцию "алгебрознначного" универсума, когда в качестве алгебры подразумевается алгебраический эквивалент соответствующей логики.

Но это не единственный способ получения универсумов. Поскольку с формальной точки зрения теория множеств есть не что иное как элементарная логическая теория, то, изменяя логическую часть, получаем конструкцию теории множеств, основанной на неклассической логике. Тогда в рамках подобной теории можно построить кумулятивную иерархию множеств или даже соответствующий алгеброзначный универсум. Имеются многочисленные примеры реализации подобного подхода, однако мы ограничимся лишь следующим: “Нечеткая теория множеств представляет собой теорию множеств, подчиняющуюся нечеткой логике *FL*, для которой мы постулируем лемму Цорна и аксиому двойного дополнения, так что мы можем интерпретировать классическую *ZFC* теорию множеств в *FZF*. Предикатными символами *FZF* являются $\in$ и = …

2.1. Нелогические аксиомы FZF

А1. *Аксиомы равенства*: $\forall u\,\Box(u = u)$; $\forall u.v(u = v \Rightarrow v = u)$,

$\forall u,v,w(u = v \wedge v = w \Rightarrow u = w)$;

$\forall u,v.w(u = v \wedge u\in w \Rightarrow v \in w)$; $\forall u,v,w(u = v \wedge w\in u \Rightarrow w\in v)$.

А2. *Экстенсиональность*: $\forall u,v(\forall z(z\in w\leftrightarrow z\in v) \Rightarrow u = v)$.

А3. *Аксиома пары*: $\forall u,v\exists x\forall z(z\in x\Leftrightarrow z = u \vee z = v)$.

А4. *Объединение*: $\forall u\exists x\forall z(z\in x \Leftrightarrow \exists y\in u(z\in y)$.

А5. *Степень*: $\forall u\exists x\forall z(z\in x\Leftrightarrow \forall y\in z(y\in u)$.

А6. *Индукция*: $\mathrm{Ext}\varphi(x) \wedge \forall x(\forall y\in x\varphi(y) \rightarrow\varphi(x)) \Rightarrow \forall x\varphi(x)$.

А6. *Отделение*: $\forall x\exists y\forall z(z\in y \Rightarrow z\in x \wedge \exists z'(z = z' \wedge \varphi(z')))$.

А7. *Аксиома выделения*: $\forall u[\forall y\mathrm{Ext}\varphi(x,y) \rightarrow \exists v(\forall x\in u\exists y\varphi(x,y) \Rightarrow \forall x\in u\exists y(\Box(y\in v)\wedge\varphi(x,y)))]$.

А8. *Бесконечность*: $\exists x\Box(\exists y(y\in x \wedge \forall y\in x(\exists z(y\in z))$.

А8. *Двойное дополнение*: $\forall u\exists x\forall z(z\in x\Leftrightarrow \neg\neg(z\in u))$.

А7. *Лемма Цорна*: $\forall y(\mathrm{Chain}(y,x) \rightarrow \cup\forall y\in x \Rightarrow \exists z\mathrm{Max}(z,x)$, где

$\mathrm{Chain}(y,x)$: $\exists t(t\in y \wedge (y\subset x) \wedge \forall t,u\in y(t\subset u \vee u\subset t)$,

$\mathrm{Max}(z,x)$: $z\in x \wedge \forall t\in x(z\subset t \rightarrow z = t)$” (здесь $w \Rightarrow u$ означает $\Box(w \rightarrow u)$, а $x\Leftrightarrow z$ означает $\Box(x\leftrightarrow z)$) [14, p.17-18].

В [15] даже доказано, что квантовая теория множеств (сконструированная *mutatis mutandis* таким же образом, что и *FZF*) выполняется в квантовозначном универсуме. Однако возникающая проблема заключается в том, что “…математика, основанная на квантовой логике, имеет очень богатое математическое содержание. Это ясно демонстрируется тем фактом, что имеется много полных булевых алгебр внутри квантовой логики. Для каждой полной булевой алгебры **B** математика, основанная на **B**, как показано… имеет богатое математическое значение. Поскольку математика, основанная на **B**, может рассматриваться как подтеория математики, основанной на квантовой логике, нет никаких сомнений относительно того факта, что математика, основанная на квантовой логике, очень богата. Ситуация, по-видимому, выглядит следующим образом. Математика, основанная на квантовой логике, чересчур огромна, чтобы довести ее до конца" [15, p.303].

Подобными результатами снабжает нас и теория категорий, а именно, теория топосов. Р.Гольдблатт в [2] использовал конструкцию топоса функторов из малой категории в категорию множеств **Set** для построения категорной семантики интуиционистской логики, в которой алгебра Гейтинга играет роль малой категории. В [16] рассматривается категория $\mathbf{Set}^A$ функторов из так называемой *CN*-категории (теоретико-категорный эквивалент алгебры да Косты) в категорию **Set**. Эта категория также представляет собой топос и полнота паранепротиворечивой системы логики да Косты C_1 доказывается именно по отношению к подобной разновидности топосов. Аналогичный подход был реализован и для случая релевантной логики R в [17].

Наряду с этим существует еще и довольно простой аргумент в пользу того, почему логический плюрализм несет ответственность за плюрализм универсумов. Если рассматривать обычные определения операций на множествах

$x \cup y =_{\text{def}} \{a\colon a \in x \vee a \in y\}$,
$x \cap y =_{\text{def}} \{a\colon a \in x \wedge a \in y\}$,
$x - y =_{\text{def}} \{a\colon a \in x \wedge \neg(a \in y)\}$,

то плюралист всегда не преминет задать вопрос: какого типа связки $\vee$, $\wedge$, $\neg$ используются в этих определениях? Если это классические связки, то алгебра подмножеств любого множества будет булевой алгеброй и другой (Гейтинга, релевантной, да Косты и т.д.) в противном случае.

3. Глобальность и локальность

Тем фактом, что алгебра подмножеств является булевой алгеброй, мы обязаны лежащей в основании классической логике: если мы изменим логику, то, как следствие, рассматриваемая алгебра с необходимостью будет другой. Но что случится, если мы изменим только наши определения операций на множествах, притом таким образом, что они будут основываться на неклассических логических связках $\vee$, $\wedge$, $\neg$, и рассмотрим алгебру с полученными новыми операциями? В сущности, поскольку в модели теоретико-множественные операции ответственны за истинностные значения формул, то это может привести к возможности интерпретации соответствующей неклассической логики в данном множестве. Следовательно, мы получим ситуацию, когда в классическом универсуме у нас существует интерпретация неклассической логики.

Но в этом нет ничего необычного: подобного рода процедура как раз типична для неклассической логики. Мы можем освоить в нашем классическом универсуме столько неклассических логик, сколько нам нужно.

Ситуация изменится, если мы возьмем неклассический универсум, а затем введем в нем классические теоретико-множественные операции. В этом случае мы получим интерпретацию классической логики в неклассическом универсуме. Более того, можно продолжить подобное умножение операций путем повторного использования иных неклассических связок, получая новые интерпретации неклассических систем. Но в этом случае мы сталкиваемся с ситуацией, когда в рамках неклассического универсума существует интерпретация классической логики наряду с другими логическими системами.

Имеются ли в нашем распоряжении какие-нибудь способы проверить классичен или неклассичен наш универсум? С точки зрения логического плюрализма ответ будет отрицательным. Мы можем утверждать самое большее только то, что имеется одна лежащая в основании (глобальная) логика, определяющая и определенная нашим универсумом, в то время как существует множество (локальных) логик, населяющих универсум, не определяемый ими. Разумеется, глобальность и локальность в подобном контексте являются просто метафорическими маркерами, фиксирующими состояние дел.

3. Глобальность и локальность в формальной топологии

Если в топологии само понятие топологии обычно задается с помощью постулирования множества открытых множеств и их замкнутости относительно теоретико-множественного пересечения, то, модифицируя пересечение, мы получим различные топологии в тех же самых исходных рамках (см. [1]). И вновь можно задаться вопросом, будет ли классическая топология глобальной или локальной в плюралистическом смысле. Остановимся более подробно на этом вопросе.

Согласно Дж.Самбину [9] формальная топология может быть определена следующим образом: $\boldsymbol{A} = (S,\cdot,1,\lhd,Pos)$ является формальной топологией тогда и только тогда, когда $(S,\cdot,1)$ есть коммутативный моноид, $\lhd$ (формальное покрытие) удовлетворяет следующим условиям:

$$\frac{a \in U}{a \lhd U} \quad \textit{(рефлексивность)}$$

$$\frac{a \lhd U \quad (\forall b \in U)(b \lhd V)}{a \lhd V} \ (\textit{транзитивность})$$

$$\frac{a \lhd U}{a \cdot b \lhd U} \ (\cdot\text{ - }\textit{слева})$$

$$\frac{a \lhd U \quad a \lhd V}{a \lhd \{b \cdot c : b \in U, c \in V\}} \ (\cdot\text{ - }\textit{справа})$$

а *Pos* (предикат позитивности) удовлетворяет условиям

$$\frac{Pos(a) \quad a \lhd U}{(\exists b \in U) Pos(b)} \ (\textit{монотонность})$$

$$\frac{Pos(a) \to a \lhd U}{a \lhd U} \ (\textit{позитивность})$$

Бинарная операция $\cdot$ называется формальным пересечением и удовлетворяет условию

(1) $x \models a \cdot b$ тогда и только тогда, когда $x \models a$ и $x \models b$,

где бинарное отношение $\models$ для $x \in X$ и $a \in S$ означает, что a является формальной окрестностью x.

В более ранней версии определения формальной топологии Дж.Самбин [10] использовал полурешетку $(S, \wedge, 1)$ вместо коммутативного моноида $(S, \cdot, 1)$. Таким образом, формальное пересечение действительно формально, поскольку нет никакой необходимости в интуитивном понимании операции $\cdot$ как пересечения в универсуме S конкретно полученных объектов или кусков информации.

Известно, что определение формальной топологии может быть обобщено до определения формальной предтопологии путем отбрасывания предиката позитивности, а в этом случае (формальное) покрытие $\lhd$ становится в точности предпокрытием, выполняющим условия, соответствующие структурным правилам ослабления и сокращения. Доказано, что предтопологии образуют полную семантику базисной линейной логики и ее расширений (см. [11]), когда истинностным значением формулы A является F-насыщенное подмножество $V^\sigma(A)$ (подмножество вида $FU = \{a \in S: a \lhd U\}$ для некоторого U называется F-насыщенным). В частности, $V^\sigma(A \otimes B) = F(V^\sigma(A) \cdot V^\sigma(B))$ и $V^\sigma(A \& B) = V^\sigma(A) \cap V^\sigma(B)$.

Следующим напрашивающимся шагом было бы расширение подобной интерпретации на другие неклассические логики. Например, в случае релевантной системы R подходящим определением было бы $V^\sigma(A \circ B) = F(V^\sigma(A) \cdot V^\sigma(B))$ и $V^\sigma(A \wedge B) = V^\sigma(A) \cap V^\sigma(B)$. На первый взгляд, здесь нет никакого отличия от случая линейной логики (по крайней мере, с точки зрения формальной предтопологии). Но дело в том, что операция $\cdot$ здесь может быть определена как $H \cdot G = \{c: \exists a,b(a \in H,\ b \in G$ и $Rabc)\}$, где R представляет собой тернарное отношение, определенное на S. И тогда возникает интересная возможность, связанная с понятием формальной границы в формальной топологии.

Для данной формальной предтопологии $\boldsymbol{A} = (S,\cdot,1,\triangleleft)$ и множества $A \subseteq S$ мы называем $x \in A$ граничным элементом A, если все предпокрытия x пересекаются как с A, так и с его дополнением $S \backslash A$. Граница ∂A множества A представляет собой совокупность всех граничных элементов A, т.е.

$$\partial A = \{x \in S: \forall U(x \triangleleft U \Rightarrow U \cap A \neq \varnothing \text{ и } U \cap (S \backslash A) \neq \varnothing)\}.$$

Подходя к этому определению более формально (т.е. обобщая его), мы можем определить *формальную* границу ∂A как

$$\partial A = \{x \in S: \forall U(x \triangleleft U \Rightarrow U \cap A \neq \varnothing \text{ и } U \cap \overline{A} \neq \varnothing)\},$$

где $\overline{A} = \{x \in S: -x \in A\}$ и $-$ есть унарная операция на S, например, заимствованная из моноида де Моргана $\boldsymbol{D} = \langle S, \circ, \vee, -, 1\rangle$ определенного на S (см. [8]).

В случае паранепротиворечивой алгебры множеств $\boldsymbol{C} = \langle S,\varnothing,I,\leq,\cap,\cup,\rightarrow,'\rangle$, где $\cap$ и $\cup$ являются теоретико-множественными операциями пересечения и объединения, $\leq$ есть предпорядок и $S \subseteq \mathcal{P}(I)$ (см. [3, с.84]), наше определение формальной границы трансформируется в

$$\partial A = \{x \in S: \forall U(x \triangleleft U \Rightarrow U \cap A \neq \varnothing \text{ и } U \cap A' \neq \varnothing)\},$$

где $'$ есть унарная операция на S (паранепротиворечивое дополнение). Идея становится более понятной, если использовать собственную алгебру множеств из [3, с.84]. В такой алгебре $x \leq y$ тогда и только тогда, когда $x \subseteq y \cup \{b\}$ (где $b \in S$), $x' = x^c$, если $x \notin S$, и $x' = x^c \cup \tau$, если $x \in S_0$, принимая $S_0 = \{x \in S$: существует $\tau = \{a,b\}$, такое, что $x \cap \tau \neq \varnothing$, $x^c \cap \tau \neq \varnothing$ и $x \not\subset \{a,b\}\} \neq \varnothing$, а x^c будет теоретико-множественным дополнением x. Принимая во внимание, что каждая булева алгебра множеств является несобственной паранепротиворечивой алгеброй множеств (т.е. в которой $S_0 = \varnothing$), можно легко прийти к заключению, что последнее определение формальной границы будет действительно более общим, чем обычное.

Для алгебры Нельсона $\boldsymbol{N} = \langle S,\cap,\cup,\rightarrow,\sim,\neg,0,1\rangle$ [12] можно рассматривать две границы

$$\partial^1 A = \{x \in S: \forall U(x \triangleleft U \Rightarrow U \cap A \neq \varnothing \text{ и } U \cap {\sim}A \neq \varnothing)\}$$
$$\partial^2 A = \{x \in S: \forall U(x \triangleleft U \Rightarrow U \cap A \neq \varnothing \text{ и } U \cap \neg A \neq \varnothing)\},$$

поскольку в такой алгебре имеются две разновидности отрицания. Первое из них можно определить как ${\sim}A = \{x \in S: {\sim}x \in A\}$, а второе согласно [11] определяется как $\neg A = A \rightarrow_F 0$, где $U \rightarrow_F V = \{x \in S: x \in U \triangleleft V\}$. Таким образом, две границы в рамках одной и той же формальной топологии позволяют охарактеризовать контекст топологической структуры, представляющий для нас интерес.

Все эти конструкции кажутся чересчур искусственными, чтобы принимать их в расчет (по крайней мере, с методологической точки зрения). Но ситуация изменяется, если мы будем иметь дело с неклассическими теориями множеств в классическом универсуме. Если, например, с самого начала все построения выполняются в рамках теории множеств, основывающейся на интуиционистской пропозициональной логике с сильным отрицанием – логике с двумя отрицаниями, чьим алгебраическим эквивалентом является алгебра Нельсона, то присутствие двух границ в нашей топологии будет естественной особенностью рассмотрения. Следовательно, если допускать множественность логических оснований (становясь на позицию логического плюрализма), то стоит принимать во внимание возможные топологические особенности рассматриваемой формальной топологии.

4. Некоторые философские замечания

Рассматриваемая ситуация в некотором отношении явно похожа на оппозицию евклидовой и неевклидовой геометрий, когда необходимо ответить на вопрос: является ли наше пространство глобально евклидовым, а локально неевклидовым, или наоборот: оно глобально неевклидово, будучи в то же время локально евклидовым. Эта аналогия вынуждает нас искать какие-то пути получения определенного решения проблемы, имеем ли мы дело всегда с глобально классическим универсумом, который локально неклассичен, или же на самом деле наши универсумы глобально неклассичны, но локально классичны. Но существуют ли в принципе какие-либо методы решения такой проблемы? Возникает ощущение, что эта проблема имеет под собой достаточно глубокое философское основание.

В свое время во Львовско-Варшавской школе была популярной точка зрения по вопросу о различии между метафизикой и онтологией, сводящаяся к тому, что первая из них является теорией существующего, в то время как вторая есть теория того, что возможно, и возможности возможного. Попытка выяснить, что представляет собой логика, лежащая в основании универсума (глобальность), и что за логики могут населять универсум (локальность), до некоторой степени подобна принятию или отказу от упомянутой точки зрения на различие между онтологией и метафизикой. Развивая эту аналогию, можно сказать, что глобальная логика лежит в основании метафизики, тогда как локальная логика является фундаментом онтологии наших универсумов. Вспомним в связи с этим, что говорил Л.Витгенштейн: “Философия состоит из логики и метафизики: логика является ее основанием” [18, p.106]. Но это означает, в некотором смысле, что принятие логического плюрализма ведет к необходимости рассмотрения и прояснения метафизических и онтологических проблем онтологических обязательств формальных языков.

ЛИТЕРАТУРА

1. *Васюков В.Л.* Квантовая граница квантовых систем с точки зрения формальной топологии // 100 лет квантовой теории. Труды международной конференции. М., 2002. С.199-203.
2. *Гольдблатт Р.* Топосы. Категорный анализ логики. М., 1983.
3. *Carnielli W.A., de Alcantara L.P.* Paraconsistent Algebras // Studia Logica. XLIII. No 1/2. 1984. P.79-87.
4. *Devlin K.* The Joy of Sets. Fundamentals of Contemporary Set Theory. Second Edition. Springer-Verlag. New York; Berlin, 1993.
5. *Leśniewski S.* Collected Works. PWN-Kluwer. Warszawa; Dordrecht, 1992.
6. *Łukasiewicz J.* Z zagadnień logiki i filozofii. Pisma wybrane. Warszawa: PWN, 1961.
7. *Priest G.* Logic, Nonstandard // Donald M. Borchert (ed.). The Encyclopedia of Philosophy. P.307-310. Macmillan Reference, 1996. Supplement to a reprint of the volumes originally published in 1967.
8. *Routley R., Meyer R.* The Semantics of Entailment // Truth, Syntax and Modality. H. Leblanc (ed.). Amsterdam; London. 1973. P.199-243.
9. *Sambin G., Gebelatto S.* Preview of the Basic Picture: A New Perspective on Formal Topology // Types for Proofs and Programs, International Workshop TYPES '98. Altenkirch T., Naraschewski W., Reus B. (eds.). Kloster Irsee, Germany, March 27-31, 1998. Selected Papers. Lect. Notes Comput. Sci. 1657. Springer. 1999. P.194-207.
10. *Sambin G.* Intuitionistic formal spaces - a first communication // D.Skordev (ed.). Mathematical Logic and its Applications. New York: Plenum. 1987. P.187-204.
11. *Sambin G.* Pretopologies and completeness proofs // Journal of Symbolic Logic. Vol.60. 1995. P.861-878.
12. *Sendlewski A.* Nelson Algebras through Heyting Ones: I. // Studia Logica. XLIX. No 1. 1990. P.105- 126.
13. *Smullyan R.M and Fitting M.* Set Theory and the Continuum Problem. Oxford: Clarendon Press, 1996.
14. *Takeuti G. and Titani S.* Fuzzy Logic and fuzzy set theory //Arch. Math. Log. (1992) P.1-18.
15. *Takeuti G.* Quantum Set Theory //Current Issues on quantum logic / Beltrametti S., Fraassen B. Van (eds.). New York; London: Plenum, 1981. P.303-322.

16. *Vasyukov V.* Paraconsistency in Categories // D.Batens, C.Mortensen, G.Priest and J.-P. van Bendegem (eds.). Frontiers of Paraconsistent Logic. Research Studies Press Ltd., Baldock, Hartfordshire (England), 2000. P.263-278.
17. *Vasyukov V.* Paraconsistency in categories: case of relevance logic // Abstracts of the Workshop on Paraconsistent Logic. Trento, 2002.
18. *Wittgenstein L.* Notebooks 1914-1916. Trans. N.K.Smith. London: Macmillan, 1961.

Л.И.Волгин

АМ-АЛГЕБРА И АЛГЕБРА СОВЕСТИ ЛЕФЕВРА-ШРЕЙДЕРА

Abstract. *It is shown that the basic operations of the Lefebvre – Schreiders conseience algebra are binary logical operation "implication α_1 into $\neg\alpha_2$" and unary "invertion $\neg\alpha_2=1-\alpha_2$" of the continual additively-multiplicative (AM) algebra, where $\alpha_1,\alpha_2\in[0,1]$ are the quantitative measures of guality and situation estimate. The verbal interpreteation of four limiting variants for $\alpha_1,\alpha_2\in\{0,1\}$ is given.*

Автором разработан логико-алгебраический аппарат – континуальная аддитивно-мультипликативная (АМ) алгебра, входящая в состав метасистемы алгебраических логик [1], свойства и законы которой изложены в работах [1,2,3]. Базовыми операциями в АМ-алгебре являются булева (аддитивная) инверсия $\neg\alpha_i=1-\alpha_i$, арифметическое умножение (АМ-конъюнкция Λ) и вероятностное сложение (АМ-дизъюнкция V)

$$\Lambda(\alpha_1,\alpha_2)=\alpha_1\cdot\alpha_2, \tag{1}$$

$$V(\alpha_1,\alpha_2)=\alpha_1\oplus\alpha_2=\alpha_1+\alpha_2-\alpha_1\cdot\alpha_2, \tag{2}$$

связанные между собой преобразованиями (законами) де Моргана $\neg(\alpha_1\oplus\alpha_2)=\neg\alpha_1\cdot\neg\alpha_2$, $\neg(\alpha_1\cdot\alpha_2)=\neg\alpha_1\oplus\neg\alpha_2$.

Здесь переменные α_i в общем случае являются действительными и (или) комплексными числами, $\oplus$ - символ операции вероятностного сложения.

Расширение класса АМ-функций и повышение их значимости осуществляется через операцию суперпозиции. Если переменные α_i принадлежат двухэлементному множеству $\{0,1\}$, то АМ-алгебра вырождается в двоичную алгебру логики Дж. Буля.

АМ-алгебра имеет многочисленные применения в науке и технике [2,3]. В частности, на единичном интервале [0,1] АМ-алгебра является алгеброй исчисления надежности технических объектов и используется для вычисления вероятности безотказной работы изделий [4].

В алгебре совести Лефевра-Шрейдера [5-7] в качестве базовой используется функция АМ-алгебры, определенная на интервале [0,1]:

$$Z=\alpha_1\oplus\neg\alpha_2=\alpha_1+\neg\alpha-\alpha_1\neg\alpha=1-\alpha+\alpha\alpha_1, \tag{3}$$

где $\alpha_1\oplus\neg\alpha_2$ есть АМ-функция «континуальная импликация α_1 в $\neg\alpha_2=1-\neg\alpha$», $\alpha=\alpha_2$.

Здесь α_1 есть количественная мера качества ситуации. Дурная ситуация – это ситуация, толкающая субъекта на плохой (не этичный) поступок. В хорошей ситуации (α_1=1) соблазн совершить дурной (не этичный) поступок отсутствует. Совесть $\alpha\in[0,1]$ работает как предупреждение, как моральная интуиция, сигнализирующая о моральности (аморальности, неэтичности) поступка.

Для предельных оценок ($\alpha,\alpha_1\in\{0,1\}$) возможны четыре варианта. При α_1=0, α=0 совесть предупреждает субъекта о плохой ситуации α и его моральный статус оценивается высоко (z=1). При α_1=0, α=1 совесть оказывается нечувствительной к соблазну, т.е. моральный статус субъекта предельно низок (z=0). При α_1=1, α=0 в хорошей ситуации совесть предупреждает об опасности, что свидетельствует о высокой моральной чувствительности субъекта, т.е. z=1. В четвертом варианте нет соблазна α_1=1, совесть спокойна α=1, соответственно и нет дурного поступка z=1.

Человек может послушаться α_3=1 или не послушаться α_3=0 голоса собственной совести. Для оценки морального статуса субъекта с учетом такого «скорректированного» голоса совести в (3) необходимо провести суперпозиционную подстановку, т.е. вместо α подставить $\alpha = \alpha_2 \oplus \neg\alpha_3$:

$$Z = \alpha_1 + (1-\alpha_1)(1-\alpha_2)\,\alpha_3 = \neg\alpha_1\neg\alpha_2\alpha_3 + \alpha_1. \qquad (4)$$

Здесь $\alpha_1\in[0,1]$ есть мера качества ситуации, $\alpha_2\in[0,1]$, как и α в (3), есть «голос внутренней совести», α_3 – вес (оценка), который присваивает субъект голосу своей совести. При α_3=1 выражение (4) приводится к (3), т.е. субъект готов поступить, как подсказывает ему совесть. При α_3=0, согласно (4), моральный статус субъекта z=α_1, т.е. субъект полностью отвергает голос собственной совести. В этом случае моральный статус субъекта полностью определяется качеством ситуации α_1.

Часто ситуация, в которой оказывается субъект, может быть комбинацией двух ситуаций. Встает вопрос, как оценить комбинацию двух противоположных по оценке ситуаций. Здесь возможны два подхода – крайнего пессимизма (ложка дегтя портит бочку меда) с оценкой $\alpha_1 = \alpha_{11}\alpha_{12}$ и крайнего оптимизма (хорошее плохим не испортишь) с оценкой $\alpha_1 = \alpha_{11} \oplus \alpha_{12}$, где α_{11}, $\alpha_{12}\in[0,1]$ являются оценками при первом и втором подходах. Как видим, оценки пессимиста и оптимиста качества сложной ситуации определяются соответственно АМ-конъюнкцией (1) и АМ-дизъюнкцией (2) – базовыми операциями АМ-алгебры.

Континуальные логико-алгебраические модели (3) и (4) определяют моральный (этический) статус человека и относятся к области теоретической психологии (психологическая рефлексия человека).

Автором обнаружена дуально-сигнатурная взаимосвязь

$$(-, \cdot, +)_{AM} \leftrightarrow (/, +, \cdot) \text{ и } \vdash (\cdot, \oplus, \neg)_{AM} \leftrightarrow (+, \|, \square) \qquad (5)$$

континуальной АМ-алгебры с логикой исчисления иммитансов W (ЛИ) В.И. Шестакова (здесь W есть либо сопротивления R, либо их проводимости Y=1/R). Действительно, если в аддитивной инверсии $\neg\alpha = 1 - \alpha$ и в бинарных операциях $\alpha_1 \cdot \alpha_2$ (1), $\alpha_1 + \alpha_2 - \alpha_1 \cdot \alpha_2$ (2), представленных в арифметическом (А) базисе, вычитание «-», умножение «·» и сложение «+», заменить соответственно на А-операции деления «/», сложения «+» и умножения «·», то приходим к базовым операциям логики иммитансов [8,9]: мультипликативная инверсия W=1/W,

$$V(W_1,W_2)=W_1+W_2,$$

$$\Lambda(W_1,W_2)=W_1\|W_2=(W_1^{-1}+W_2^{-1})^{-1} = W_1W_2/(W_1+W_2)$$

(обозначения α_i заменены на W_i).

Здесь при $W_i=R_i$ символы А-сложения «+» и конкатенации «||» одновременно являются обозначениями топологических операций соответственно последовательного и параллельного соединений сопротивлений $W_1=R_1$ и $W_2=R_2$.

Алгебра совести, как и АМ-алгебра, относится к классу алгебраических логик (специальные алгебры и общие логики) [3].

В основу построения алгебры совести положены результаты когнитивной психологии: «..."Мы выносим за скобки" факт существования у человека мозга. Мы строим не модель функционирования мозга, а модель человеческой психики, и стремимся установить связь между психическими процессами и наблюдаемыми актами поведения человека, полностью отвлекаясь от физиологических аспектов» [10].

Заметим, что согласно Б. Расселу (1872-1970), «не существует пункта, где можно было бы провести резкую границу, по одну сторону которой находилась бы логика, а по другую математика», и как отмечает А.С. Карпенко [11], «...возникает фундаментальный вопрос о существовании конструкций под названием **логика**, ...такой конструкции нет, и не может быть, а вопрос на самом деле стоит о **металогике**, под которой понимаются общие методы и средства для изучения целых классов логик».

ЛИТЕРАТУРА

1. *Волгин Л.И.* Метасистема взаимоотношений алгебраических логик и сопутствующих исчислений, порождаемых функцией-аксиомой взве-

шенных степенных средних // Информационные технологии. 2002, №7. С. 20-26.
2. *Волгин Л.И.* АМ-алгебра и ее применения // Автоматика и вычислительная техника. Рига, 1996. №1. С.19-23.
3. *Волгин Л.И.* Алгебраические логики: Взаимоотношения, законы и свойства // Приложения – вкладыш к журналу «Информационные технологии». 2003. № 6.
4. *Волгин Л.И.* Логические основы математической теории надежности. Ульяновск: УлГТУ, 1997.
5. *Лефевр В.А.* Формула человека. Контуры фундаментальной психологии. М.: Прогресс, 1991.
6. *Шрейдер Ю.А.* Инстинкт совести или алгебра совести? // Химия и жизнь. 1994. №1. С. 6-12.
7. *Шрейдер Ю.А.* Этика. Введение в предмет. М.: Текст, 1998.
8. *Волгин Л.И.* Субдистрибутивный и супрадистрибутивный законы логики исчисления иммитансов электрических двухполюсников // Электричество. 2001. № 2. С. 66-67.
9. *Волгин Л.И.* Логика иммитансов с обобщенно мультипликативной инверсией // Проблемы и решения современной технологии: Сб. научных трудов Поволжского технологического института сервиса. Тольятти: Изд-во ПТИС. 2001. Вып. 10. С.4-12.
10. *Лефевр В.* Алгебра совести / Пер. со 2-го англ. изд. М., 2003.
11. *Карпенко А.С.* Логика: Феномены XX века // Современная логика: Проблемы теории и применения в науке. Материалы VI Общероссийской научной конференции. СПб: Изд-во С.-Петербургского ун-та, 2000. С. 461-465.

П.В.Голубцов, В.А.Любецкий

ИНФОРМАЦИОННАЯ СТРУКТУРА ДИНАМИЧЕСКИХ ИГР И ОБЪЕМ ДОСТУПНОЙ ИГРОКАМ ИНФОРМАЦИИ

Abstract. *Here the dynamic game with discrete time is generalized to a stochastic environment, in order to examine the implications of incomplete and asymmetric information. In this game the next state of a system and players' payoffs depend not only on its current state and players controls, but also on Markov stochastic elements. At each step of the game, the players both know current state of the system, and also have some (generally incomplete or delayed, and even asymmetric) knowledge of the current values of stochastic elements. The knowledge structure of each specific game version is held in common by the competitors. In the dynamic game each player sets its strategy, with the objective of maximizing the expected discounted sum of seasonal payoffs, and conditional on the extent of its current knowledge, and of the anticipated policy of its competitor. The implications of alternative knowledge structures are explored, through dynamic programming and simulation. Both information structures and various game parameters are varied continuously, to explore their interplay. Particular focus is on demonstrating the often unexpected, and sometimes counter-intuitive, effects that knowledge enrichment may have, in these incomplete information games.*

Ключевые слова: динамическая игра, оптимальная стратегия, равновесие по Нэшу, информационная структура игры, алгоритм, зависимость от информации.

1. Постановка задачи

Можно привести много примеров сложных информационных взаимодействий в различных системах – экономических, социальных, политических, технических, биологических. Последние, например, подробно обсуждаются в [1]. Информационное взаимодействие в системах может описываться разными математическими средствами и, в частности, такими, как стохастические динамические игры с равновесием по Нэшу. Выбор игроком на каждом шаге игры управляющего решения основан, прежде всего, на информации, доступной ему на тот момент. Характер и объем этой информации для каждого из участников игры называется *информационной структурой игры.*

Авторы предложили новые алгоритмы для нахождения равновесия по Нэшу. *На примере* хорошо известной *задачи морского* *рыболовства* [2,3] авторы приводят имеющие общее значение и, как кажется, неожиданные выводы о зависимости результатов игры от доступной игрокам информации.

По необходимости мы начнем с краткого описания самой этой частной задачи, а затем перейдем к упомянутым выводам. В общей форме они будут представлены в другой публикации авторов.

Общий ресурс R (в этом примере – рыбы) в соответствии со значениями θ^{α} и θ^{β} случайного фактора θ делится на две части R^{α} и R^{β}, доступные для лова соответственно игроками α и β. После лова каждым из игроков в пределах его части ресурса остатки S^{α} и S^{β} рыбы соединяются в общий остаток $S = S^{\alpha} + S^{\beta}$ для воспроизводства из него на следующий год нового значения общего ресурса $R_{+} = F(S)$. Решения игроков состоят в определении размера той части ресурса, которая не будет ими выловлена (в текущем году), т.е. $S^{\alpha} = p^{\alpha} \cdot R^{\alpha}$, $S^{\beta} = p^{\beta} \cdot R^{\beta}$. Тогда *уловы игроков* в текущем году соответственно равны $H^{\alpha} = (1 - p^{\alpha}) \cdot R^{\alpha}$ и $H^{\beta} = (1-p^{\beta}) \cdot R^{\beta}$. В нашей модели учитывается зависимость себестоимости лова от объема доступного игроку ресурса а именно себестоимость лова у игрока α при данном объеме x ресурса в его части обратно пропорциональна этому объему и равна c^{α}/x, где c^{α} – *коэффициент стоимости лова*. Этот коэффициент можно представить себе как некоторую интегральную оценку качества и характеристики обслуживания рыболовного флота игрока α; если не указано иное, то принимается $c = 0.2$. Таким образом, *себестоимость лова* (за один год) игрока α равна $cost_{\alpha} = -c_{\alpha} \cdot log(p^{\alpha})$. Тогда его выигрыш (*годовой доход*) равен $v^{\alpha} = H^{\alpha} - cost_{\alpha}$. При величине H^{α} подразумевается коэффициент, переводящий объем улова в стоимость (у нас он равен 1). Аналогично для второго игрока β. Используется функция воспроизводства ресурса, которая учитывает возможность его полного уничтожения, если его объем упадет ниже некоторого критического уровня, т.е. должно выполняться $F(S)<S$ при достаточно малых S. После некоторых обоснований естественно выбрать $F(S) = 0.6 \cdot S + 1.8 \cdot S^2 - 1.6 \cdot S^3$. Кроме того, у нас значения случайного фактора θ равны $\theta_1 = 0.1$ или $\theta_2 = 0.9$, они независимы по времени, одинаково распределены и наступают с равными вероятностями 0.5; все коэффициенты, понижающие со временем годовые доходы, равны 0.9 (для обоих игроков); коэффициенты кооперации игроков составляют единичную матрицу (для чистого соперничества) и равны все 0.5 (для полной кооперации); выбирался достаточно длинный промежуток усреднения, равный 2000 лет. Чтобы плавно менять точность поступающей к игрокам информации о случайном параметре θ,

использовались так называемые неточные измерения и менялся параметр точности измерения π, который определяет матрицу M переходного распределения наблюдаемой величины ξ для различных значений θ, следующим образом: по главной и вспомогательной диагоналям находится соответственно $(1 + \pi) / 2$ и $(1 - \pi) / 2$. Таким образом, если $\pi = 1$ (максимальная точность), то M - единичная матрица, что отвечает тождественному измерению. Если $\pi = 0$ (минимальная точность), то M - матрица из чисел 0.5, что отвечает независимости результатов измерения от состояния θ. Детали, относящиеся к этой модели, в части задачи рыболовства можно найти в [2,3], а в математической части – в [4]. Но все эти подробности мало существенны для выводов, которые составляют основное содержание настоящей статьи и приводятся ниже в параграфе 2.

Нами были выделены и рассматривались в компьютерных экспериментах, в частности, *следующие информационные структуры игры* (в скобках приводится название структуры и ее обозначение).

1. Игроки в равной мере имеют в каждый текущий момент t времени (как и во все предыдущие моменты) реализацию случайного фактора θ («текущая информация», обозначаемая Cur).
2. Игроки в равной мере знают только само вероятностное распределение случайного дискретного фактора θ («минимальная информация», обозначаемая Min).
3. Игроки имеют асимметричную информацию: первый имеет текущую информацию по пункту 1, а второй – лишь минимальную по пункту 2 («асимметричная информация», обозначаемая Cur-Min). Здесь определяется понятие точности поступающей игрокам информации.
4. Игроки имеют в равной мере неполную информацию: они получают реализацию случайной величины ξ измерения случайного фактора θ («неполная информация, полученная из измерений», обозначаемая Meas).
5. Игроки имеют асимметричную информацию: первый получает неполную информацию по пункту 4, а второй – лишь минимальную по пункту 2 («асимметричная неполная информация», обозначаемая Meas-Min).
6. Игроки ведут себя кооперативно в условиях одной из симметричных информационных структур 1, 2 или 4 (так как при кооперативном поведении представляется естественным, что игроки полностью обмениваются всей доступной им информацией).

Структуры из пунктов 1-5 соответствуют соперничеству игроков, а структуры из пункта 6 соответствуют их сотрудничеству.

2. Результаты компьютерного моделирования

1. *Влияние коэффициента стоимости лова для различных информационных структур.* Для простоты представления наших результатов *будем считать* здесь, что $c_\alpha = c_\beta$, обозначая далее этот *общий коэффициент стоимости* лова как c. Графики на рис.1 показывают *средние* (по всем годам лова) *доходы* в зависимости от коэффициента стоимости c лова для указанных там пяти информационных структур игры. Наиболее интересным в случаях, когда игроки соперничают, является резкое сокращение среднего дохода при снижении коэффициента стоимости c лова. Это связано с тем, что при низком значении c конкуренция носит весьма острый характер, что приводит к резкому снижению объема ресурса. Такой эффект не наблюдается, когда игроки сотрудничают и, таким образом, оказываются в состоянии поддерживать объем рыбы на достаточно высоком уровне. Кроме того, на рис. 1 видно, что информационное преимущество в случае информационно-асимметричной игры чрезвычайно выгодно первому игроку (Cur-Min 1). Более того, ему не выгодно делиться информацией с соперником и, таким образом, перейти к игре с полной симметричной информацией (Cur). Что касается второго игрока в асимметричном случае (Cur-Min 2), то он, как правило, предпочел бы получить дополнительную информацию, но не для низкого значения c коэффициента стоимости лова (<0.3), когда односторонний недостаток информации более выгоден даже для него, чем полная симметричная информация (Cur). Заметим, что при достаточно низких значениях коэффициента стоимости c лова (<0.35) симметричная минимальная информация (Min) становится предпочтительнее полной информации (Cur). Это, по-видимому, связано с тем, что при недостатке информации возрастает риск случайного уничтожения ресурса и, как следствие этого, поведение игроков становится более «осторожным». Как отмечалось, соперничество становится особенно разрушительным при низком коэффициенте стоимости c лова, когда можно легко уничтожить ресурс. Однако если игроки сотрудничают, то их доход становится заметно выше, особенно когда себестоимость лова мала. При этом они в состоянии поддерживать объем возобновляемого ресурса на довольно высоком уровне.

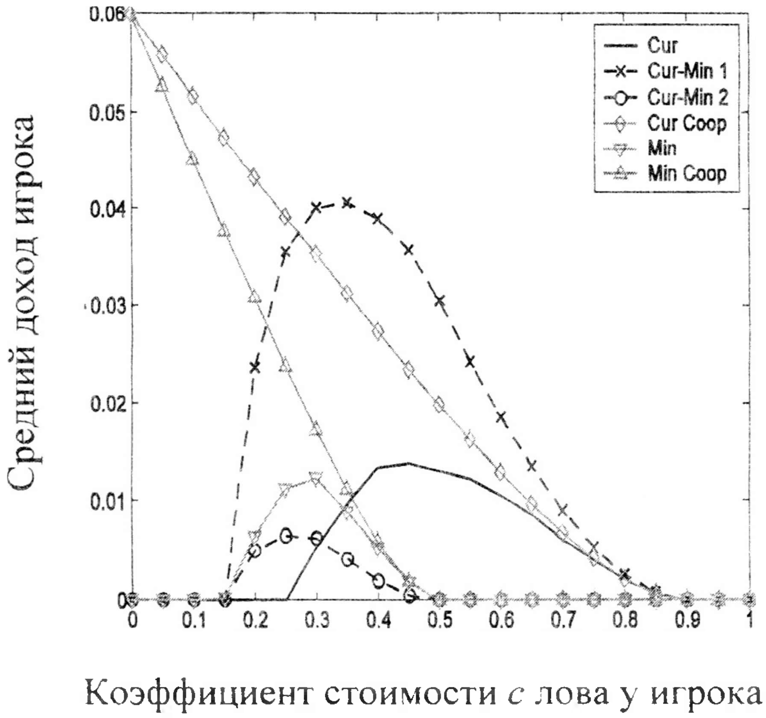


Рис. 1. Используются сокращения: Cur – оба игрока имеют одну и ту же текущую информацию (включая все предшествующие моменты времени), и показан выигрыш 1-го игрока, 2-й игрок имеет такой же выигрыш; Cur-Min i – игроки имеют асимметричную информацию: игрок 1 обладает текущей информацией, а игрок 2 минимальной (i=1 или i=2, показаны выигрыши обоих игроков); Cur-Coop – совместная текущая информация и кооперативное поведение игроков; Min – оба игрока имеют в равной мере минимальную информацию; Min-Coop – совместная минимальная информация и кооперативное поведение игроков.

2. *Информация доступна игрокам с некоторой точностью*. В этом наборе численных экспериментов (рис. 2) информация о текущем значении θ получается из неточных измерений случайного параметра θ. Точность измерения (точность информации) является параметром, изменяющимся от 0 (отсутствие информации) до 1 (полная информация). Когда игроки сотрудничают (Meas-Coop), ситуация вполне естественная: чем точнее информация, тем выше доход. Суммарный доход в такой кооперативной игре всегда выше, чем суммарные доходы в некооперативных играх. Как видно на рис. 2, в некооперативных играх с симметричной (Meas) и асимметричной (Meas-Min) информационными структурами, повышение точности информации до определенного уровня выгодно обоим игрокам и даже игроку, которому вовсе не доступны результаты измерений (Meas-Min 2). Однако дальнейшее повышение точности информации приводит к значительному снижению доходов. По-видимому, это объясняется тем, что стратегии игроков становятся более агрессивными. При низкой

точности измерений ситуация, когда второй игрок также имеет доступ к результатам измерений (Meas), более выгодна для него, чем одностороннее полное отсутствие у него этой информации (Meas-Min 2). Однако начиная с определенного уровня точности измерений (>0.38), такая дополнительная информация становится невыгодной для него.

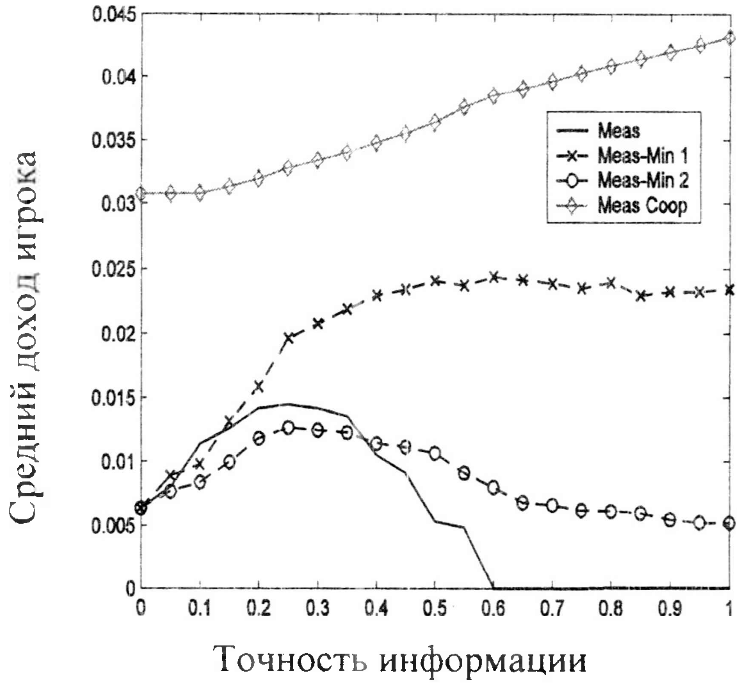


Рис. 2. Влияние точности поступающей информации. Здесь Meas означает, что оба игрока имеют одинаковую неполную информацию; Meas-Min i -- первый игрок получает неполную информацию, а второй лишь минимальную, i=1 или i=2; Meas-Coop – кооперация в случае одинаковой неполной информации у игроков.

3. *Информационная асимметрия при наличии асимметрии в природных условиях.* В этом эксперименте (рис. 3) природные условия несколько благоприятствуют второму игроку. А именно θ принимает значения 0.1 и 0.8 с равными вероятностями (так что доступный ресурс первого игрока составляет 0.1 или 0.8 от общего ресурса, в то время как второй игрок получает, соответственно 0.9 или 0.2 от всего ресурса). Таким образом, в среднем ресурс у первого игрока ниже, чем у второго. Как и следовало ожидать, если игроки обладают одинаковой информацией, доход второго игрока (Meas 2) всегда будет выше дохода первого игрока (Meas 1). Однако когда первый игрок (Meas-Min 1) обладает серьезным информационным преимуществом и точность информации >0.3,

то это перевесит природное преимущество второго игрока (Meas-Min 2). С другой стороны, сумма доходов игроков будет максимальной при условии кооперации, когда игроки обмениваются информацией и максимизируют их суммарный доход. Но и в этом случае вследствие природной асимметрии их непосредственные доходы не будут равны (Coop 1 и Coop 2). Такого рода сотрудничество можно рассматривать как «проявление доброй воли». Конечно, игроки могут договориться о перераспределении их суммарного дохода, что приведет к «побочным платежам» одного игрока другому. Случай равного распределения доходов также показан на рис. 3 (Coop).

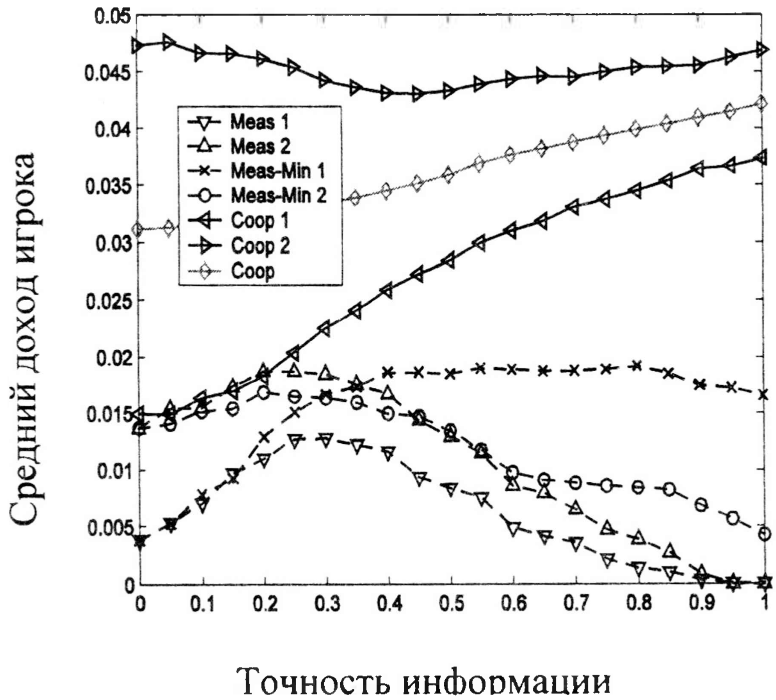


Рис. 3. Влияние точности поступающей информации при асимметричных природных условиях. Здесь Meas i означает, что оба игрока получают одинаковую неполную информацию; Meas-Min i – первый игрок получает неполную информацию, а второй лишь минимальную; Coop i – кооперация при наличии одинаковой неполной информации (кроме реальных доходов игроков в Coop 1 и Coop 2 указан и их усредненный доход Coop); i=1 или i=2.

4. *Влияние самой природной изменчивости.* Теперь (рис. 4) мы меняем степень природной изменчивости $<\theta_1, \theta_2>$ коэффициента θ. Точнее, θ принимает одно из двух значений: θ_1 или $\theta_2 = 1 - \theta_1$, где θ_1 может быть любым числом от 0 до 0.5. При θ_1=0.5 изменчивость отсутствует (θ=0.5 и постоянно), при θ_1=0 изменчивость

максимальна (θ принимает значения 0 или 1). Возрастание дохода в кооперативной игре с полной информацией (Cur-Coop), а также при возрастании изменчивости θ (и убывании θ_l) вполне естественно. Действительно, при высокой вариабельности θ практически весь ресурс направляется в один из двух потоков, и это приводит к снижению средней себестоимости лова. Поскольку эта кооперативная игра полностью симметрична, средние годовые доходы игроков одинаковы. Похоже, что возрастание дохода в некооперативной игре при уменьшении θ_l от 0.5 до 0.4 может иметь такое же объяснение. Однако при малых θ_l роль соперничества (особенно при полной информации Cur) становится доминирующей. Действительно, если весь ресурс попадает в один поток, то соответствующий флот может практически полностью выловить его при сравнительно низких затратах.

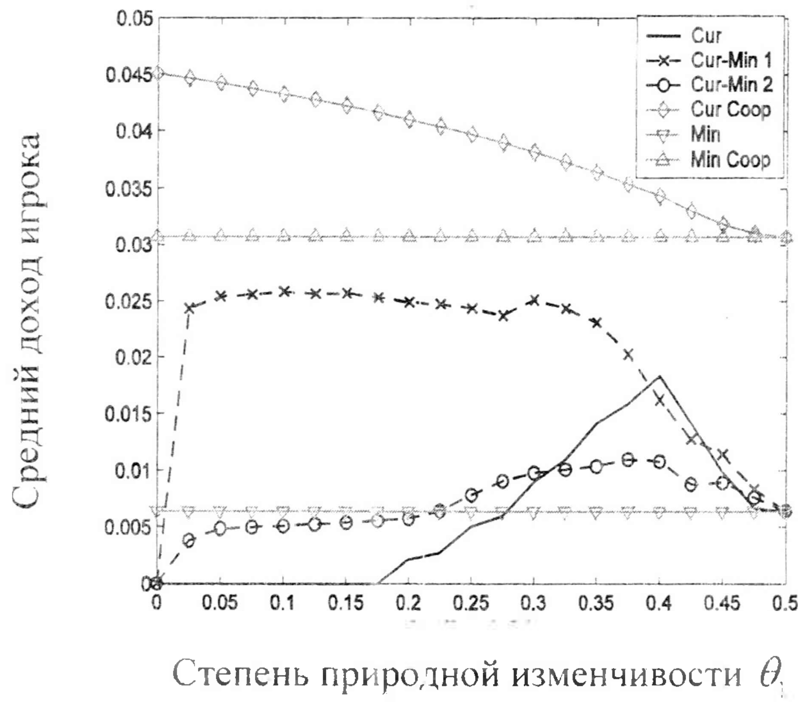


Рис. 4. Cur означает текущую информацию; Cur-Min i – асимметричную информацию, когда игрок 1 обладает текущей информацией, а игрок 2 минимальной, i=1 или i=2; Cur-Coop – кооперацию с текущей информацией; Min – минимальную информацию; Min-Coop – кооперацию с минимальной информацией.

5. *Переход игроков от соперничества к сотрудничеству.* Наконец, опишем простой способ включения «кооперации» в модель игры. На рис. 5 представлена зависимость среднего дохода игрока от

«степени сотрудничества» игроков для случаев текущей или минимальной информации. Нулевая степень кооперации *d* игроков соответствует поведению чистого соперничества, когда каждый игрок максимизирует только свой доход, в то время как степень кооперации *1* означает, что оба игрока максимизируют полный доход. При промежуточных степенях кооперации каждый игрок максимизирует выпуклую комбинацию своего дохода и дохода соперника. Точнее, коэффициенты кооперации определяются через степень кооперации, обозначаемую *d*, следующим образом: по главной и вспомогательной диагоналям находятся соответственно значения $1 - (d/2)$ и $d/2$. Таким образом, когда *d* меняется от 0 до 1, коэффициенты кооперации меняются от «отсутствия кооперации» до «полной кооперации». На рис. 5 хорошо видно, что дополнительная информация выгодна для игроков только в том случае, когда уровень их кооперации достаточно высок. При низком уровне их кооперации и особенно в ситуации соперничества дополнительная информация приводит к критическому сокращению ресурса и нулевому доходу.

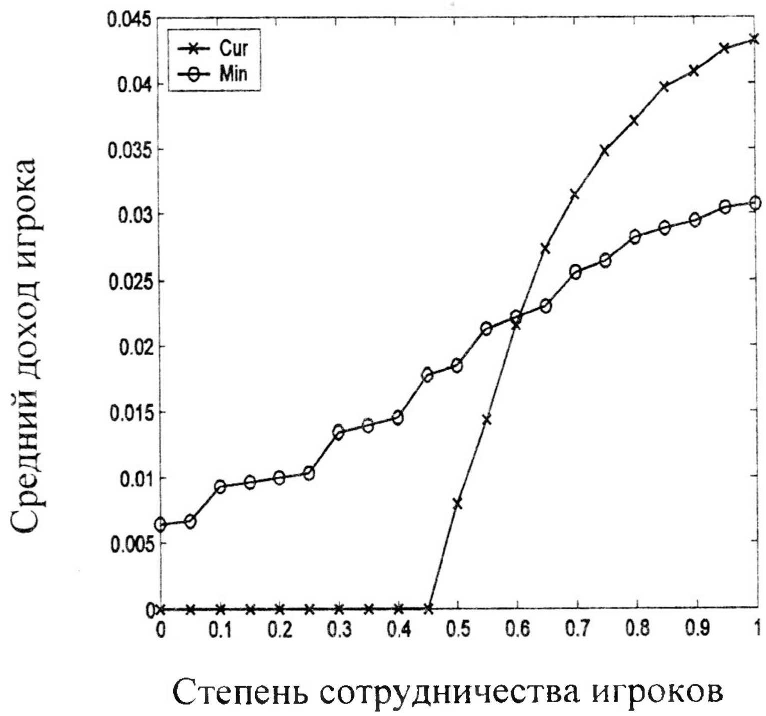


Рис. 5. Влияние степени сотрудничества при текущей и минимальной информациях. Cur – текущая, Min – минимальная информации.

3. Описание идеи алгоритмов. Здесь используются некоторые стандартные обозначения из теории дискретных марковских процессов управления (см., например, [4]). Для случая Cur авторы предлагают по аналогии с динамическим программированием ввести функцию

$$V^{\#} = V^{\alpha}_{t}(R_t, v_t, < P^{\alpha}_{t}, Q^{\alpha}_{t+1} >, < P^{\beta}_{t}, Q^{\beta}_{t+1}>),$$

описывающую выигрыш игрока α, который соответствует произвольным стратегиям P^{α}_{t} и P^{β}_{t} в момент t и оптимальным «хвостовым» последовательностям Q^{α}_{t} и Q^{β}_{t}. А также аналогичную функцию для игрока β. Тогда оптимальные стратегии в момент t могут быть получены путем нахождения точек равновесия по Нэшу при всех возможных значениях R_t и v_t для функций $V^{\#}$ игроков α и β относительно переменных $<p^{\alpha}_{t}, p^{\beta}_{t}>$. Таким образом, равновесные по Нэшу стратегии могут быть построены рекурсивно.

В случае неточной информации авторы предлагают следующую поточечную конструкцию для получения стратегий, обеспечивающих равновесие по Нэшу в функциональных пространствах. Иными словами, авторы предлагают способ перехода от задачи построения равновесия по Нэшу в функциональном пространстве к такой же задаче в конечномерном арифметическом пространстве. Определим

$$W^{\alpha}_{t} = v^{\alpha}_{t}(R, v, P^{\alpha}(R, \xi), P^{\beta}(R, \xi)) + \gamma_{\alpha} U^{\wedge\alpha}_{t+1}(\rho_t(R, v, P^{\alpha}(R, \xi), P^{\beta}(R, \xi)))$$

и аналогичную функцию для игрока β. Предположим, что для некоторого фиксированного ξ стратегии $P^{\wedge\alpha}$ и $P^{\wedge\beta}$ обеспечивают равновесие по Нэшу для функций

$$V^{\sim\alpha}(R, \xi, P^{\alpha}, P^{\beta}) = E_{(v|\xi)} W^{\alpha}_{t}(R, v, \xi, P^{\alpha}, P^{\beta})$$

и аналогично для β. Это означает, что для всех R и ξ и произвольных стратегий P^{α} и P^{β} выполняется

$$V^{\sim\alpha}(R, \xi, P^{\wedge\alpha}, P^{\wedge\beta}) \geq V^{\sim\alpha}(R, \xi, P^{\alpha}, P^{\wedge\beta})$$

и аналогично для β. Отсюда получаем

$$U^{\sim\alpha}(R, P^{\wedge\alpha}, P^{\wedge\beta}) = E_{\xi} V^{\sim\alpha}(R, \xi, P^{\wedge\alpha}, P^{\wedge\beta}) \geq E_{\xi} V^{\sim\alpha}(R, \xi, P^{\alpha}, P^{\wedge\beta}) = U^{\sim\alpha}(R, P^{\alpha}, P^{\wedge\beta})$$

и аналогично для β. Таким образом, исходная задача построения стратегий, обеспечивающих равновесие по Нэшу, сводится к аналогичной задаче для функций $V^{\sim\alpha}$ и $V^{\sim\beta}$, а для этой второй задачи стратегии, обеспечивающие равновесие по Нэшу, вычисляются «поточечно». Подробно наши алгоритмы изложены в [5].

ЛИТЕРАТУРА

1. *Кузнецов Н.А., Любецкий В.А., Чернавский А.В.* Информационные взаимодействия, 1: допсихический уровень // Информационные процессы. 2003. №1 (Электронная версия: http://www.jip.ru/).
2. *Clark C.W.* Restricted access to common-property fishery resources: a game-theoretic analysis // Dynamic Optimization and Mathematical Economics. New York: Plenum, 1980. P. 117-132.
3. *Levhari, D., Mirman L.J.* The great fish war: an example using a dynamic Cournot-Nash solution // Bell Journal of Economics, 1980. V. 11, P. 322-344.
4. *Hernandez-Lerma O., Lasserre J.B.* Discrete-Time Markov Control Processes. Basic Optimality Criteria. New York: Springer, 1996.
5. *Голубцов П.В., Любецкий В.А.* Стохастические динамические игры с информацией различного типа // Проблемы передачи информации. РАН. 2003. Т. 39. Вып. 3. С. 40-71.

Ю.В.Ивлев

ОСНОВЫ ЛОГИЧЕСКОЙ ТЕОРИИ АРГУМЕНТАЦИИ*

Утверждения могут обосновываться, во-первых, посредством уже известных положений (аргументов) и средств логики, во-вторых, путем непосредственного обращения к действительности (посредством наблюдения и различных видов практической деятельности). Обоснование посредством наблюдения и практической деятельности можно свести, с определенной степенью адекватности, к обоснованию посредством суждений. Обоснование первого рода называется аргументацией. То есть **аргументация** – *это обоснование какого-либо положения (суждения, системы суждений, концепции) посредством других положений и средств логики.*

В настоящее время учение об аргументации активно разрабатывается как за рубежом, так и в нашей стране. За последние годы в России изданы книги: Алексеев А.П. Аргументация. Познание. Общение. М., 1991; Герасимова И.А. Аргументация и виды знания. М., 1994; Ивин А.А. Основы теории аргументации. М., 1997; Ивин А.А. Риторика: искусство убеждать. М., 2002; Курбатов В.И. Социально-политическая аргументация: логико-методологический анализ. Ростов-на-Дону, 1991; Павлова Л.Г. Спор, дискуссия, полемика. М., 1991; Рузавин Г.И. Логика и аргументация. М., 1997; и др.

Возникают вопросы: «На какой стадии находятся исследования по этой проблеме? Разработана ли теория аргументации?»

Для ответа на эти вопросы нужно выяснить, что понимается под теорией. Слово "теория", как и многие другие слова естественного языка, употребляется в разных смыслах; в частности, говорят о теории в широком и узком смысле слова. Когда хотят разграничить мыслительную и предметно-практическую деятельность, говорят о теории и практике. В этих случаях теорией (в широком смысле) называют мышление вообще, любую мыслительную деятельность. Если так понимать теорию, то, конечно, теория аргументации существует как учение об аргументации.

Что понимают под теорией в узком смысле, т.е. под научной теорией? Есть много определений теории. Например, теорию определяют как множество предложений, связанных отношением

---

* Работа выполнена при поддержке РГНФ, грант № 03-03-00246 а/Б.

выводимости. Это определение и неточно, и неполно. Почему неточно? Не все предложения теории связаны этим отношением. Почему неполно? Здесь выделяется лишь один аспект теории – формально-логический. Другое определение: теория – это множество предложений, замкнутых относительно выводимости. Т.е. теорию образует некоторое множество предложений и множество следствий из этих предложений. Это определение не выделяет многих существенных свойств теории. Иногда просто приводят примеры теорий (теория – это, например, теория относительности, учение о происхождении видов Дарвина и т.д.). Примеры не позволяют указать отличительные признаки теории.

В некоторых случаях при определении теории исходят из фактического положения дел, т.е. из того, что те или иные авторы мыслительных конструкций называют теориями, и пытаются обобщить эти понимания теории. В конечном счете получается, что общим для всех авторов является признак теории «быть непустым множеством предложений», а поскольку множество может состоять из одного элемента, то и любое предложение является теорией.

Характеризуя теорию в узком смысле, т.е. научную теорию, будем исходить из того, что в научном познании есть два уровня – *эмпирический* и *теоретический*. На первом уровне производится сбор фактов (накопление информации об исследуемых объектах) и осуществляется первичная их систематизация в форме таблиц, схем, графиков и т.д. На эмпирическом уровне могут даже формулироваться законы, которые носят гипотетический характер, т.е. требуют объяснения и логического обоснования.

На втором уровне действительность отражается в форме теорий.

Введем понятие теории (в узком смысле слова) посредством приема, называемого характеристикой.

Теория – это система понятий и утверждений об определенной области действительности, обладающая следующими свойствами.

Во-первых, теория является ***особой моделью*** объективной или субъективной реальности. Как и любая модель, теория (1) в каком-то отношении сходна с моделируемой реальностью, (2) является ее упрощением и (3) служит целям познания этой реальности. Моделями здесь служат системы так называемых теоретических объектов. Эти объекты противопоставляются объектам наблюдения, поскольку вводятся в науку посредством определенной мыслительной деятельности. Объекты наблюдения, называемые также эмпирическими объектами, существуют в действительности. Если вести речь о естественнонаучных теориях, то эмпирические объекты этих теорий существуют реально в качестве физических объектов.

Можно выделить следующие виды теоретических объектов на основе способов их введения в науку.

Первый. Это так называемые **гипотетические** объекты. Они вводятся для объяснения явлений. Например, для объяснения химических и физических явлений введены электроны, ядра, энергетические уровни и т. д. Гипотетические объекты мыслятся как реально существующие, но их правомерно отнести к теоретическим, поскольку они введены в теорию на основе мыслительной деятельности и может оказаться, что в природе они не существуют, как не существует, например, флогистон. С мировым эфиром до сих пор ситуация не ясна.

Второй. **Идеализированные** объекты. Эти объекты образуются при помощи особого приема познания, называемого *идеализацией*. В процессе идеализации на основе знания о существующих объектах создаются понятия об объектах, которые в действительности не существуют, да и не могут существовать, но которые в то же время в определенных отношениях сходны со своими прообразами. В процессе идеализации происходит отвлечение от некоторых признаков предметов и приписывание им признаков, которые им в действительности не могут принадлежать. В основе идеализации чаще всего лежит способность некоторых признаков изменяться по степеням. Так, тело может изменять размеры, интенсивность цвета и т.д. На основе мысленного изменения таких свойств до некоторых, невозможных в действительности, пределов образуются понятия тел, не имеющих размеров, тел, являющихся, например, абсолютно черными, и т.д.

Примеры идеализированных объектов: точка в геометрии (в реальном мире нет объектов, которые не имеют ни длины, ни высоты, ни ширины); точка в механике. Н.Е. Жуковский так поясняет последнее понятие: ”Это – как бы шарик, наполненный материей, радиус которого уменьшился до бесконечно малой величины, а масса сохранилась та же. Хотя это представление – чисто фиктивное, так как беспредельное сжатие не согласно с непроницаемостью материи, но в механическом смысле существуют точки, имеющие тождественное значение с материальной точкой конечной массы. Такой точкой, например, является центр тяжести твердого тела” [3, с. 12].

Идеализированные объекты широко используются в общественных науках, например в политической экономии.

«В физике как полезнейшие орудия познания природы применяются абстракции идеального газа и идеальной жидкости. Реальные газы и жидкости не ведут себя "идеально" или ведут себя так лишь при некоторых определенных условиях. Однако имеет большой смысл абстрагироваться от этих нарушений, чтобы изучать явления "в чистом виде". Нечто подобное представляет собой в политической экономии абстракция "экономического человека" и свободной (совершенной) конкуренции. Реальный человек не может быть сведен к своекорыстному интересу. Точно так же при капитализме никогда не было и не может быть абсолютно свободной конкуренции. Однако наука не смогла бы изучать массовидные экономические явления и процессы, если бы она не делала известных допущений, которые упрощают, моделируют бесконечно сложную и разнообразную действительность, выделяют в ней важнейшие черты» [1, с. 174].

Примерами идеализированных объектов в логике являются материальная импликация, неопределенная конъюнкция, дизъюнкция (при образовании двух последних объектов отвлекаются от временных параметров событий), классическое следование, стратегии аргументации и др.

Третий. **Абстрактные** объекты. Они образуются посредством операции, которая называется *абстрагированием*. Эту операцию можно пояснить посредством приема, называемого «разъяснением посредством примеров». Наблюдая предметы, имеющие красный цвет, можно образовать объект, который является как бы эссенцией красного цвета. Для этого объекта вводится название «краснота». Этот объект и называется абстрактным. Как таковая краснота не существует, это некоторое мысленное образование. Однако для его создания есть некоторое объективное основание. Второй пример: есть судимые люди. Образуем абстрактный объект «судимость». Т.е. налицо два типа абстрактных объектов. Языковыми выражениями этих объектов являются знаки предметных функций. Краснота предмета имеет место или не имеет места. В то же время существуют типы судимости. Судимость Петрова – объект, т.е. определенные общеправовые и уголовно-правовые ограничения, а судимость Серова – другой объект, другие ограничения. Можно говорить о видах судимости. Другие примеры абстрактных объектов первого типа – белизна, транзитивность; а второго – масса, длина, скорость.

Четвертый. **Идеальные** объекты. Для этих объектов нет прообразов в реальной действительности. Они выступают в качестве особого инструмента познания. Это меридианы, параллели, координаты, ось вращения небесной сферы.

Итак, *эмпирические объекты* являются фрагментами действительности, рассматриваемыми, возможно, с тех или иных сторон. *Теоретические объекты* в действительности не существуют.

Во-вторых (второе свойство теории), теория – ***достоверное*** знание (в диалектическом смысле). Хотя теория и не является полной и окончательной истиной о какой-то области действительности, она все же в своей основной части обоснована, доказана. В ней есть содержание, которое в дальнейшем не будет опровергнуто. По крайней мере к этому стремятся. То есть теория – это единство абсолютной и относительной истины. В ней есть неопровержимое знание и элементы неполноты и заблуждения. Достоверность теории обусловлена свойством модели соответствовать моделируемой реальности, а элементы недостоверности теории вызваны, в частности, тем, что теория упрощает моделируемую реальность, а следовательно, искажает.

Принимая достоверность (в указанном выше смысле) за отличительную черту теории, мы стремимся отграничить этот вид знания от гипотезы, а также от философско-умозрительного объяснения тех или иных явлений.

В-третьих, теория, ***обладает предсказательной силой***. В теории имеется множество исходных утверждений, из которых логическими средствами выводятся другие утверждения, т.е. в теории возможно получение одних знаний из других без непосредственного обращения к действительности.

В-четвертых, теория не только описывает определенный круг явлений, но и ***дает объяснение*** этим явлениям.

В-пятых, теория ***является средством дедуктивной и индуктивной систематизации эмпирических фактов***.

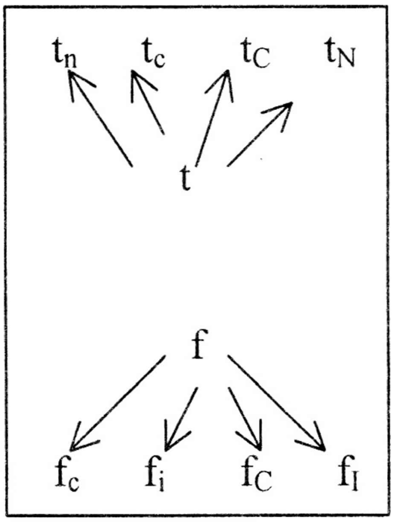
Посредством теории устанавливают определенные отношения между высказываниями о фактах, законах и т.д. в тех случаях, когда вне рамок теории такие отношения не наблюдаются. Частными случаями таких отношений являются отношения логического следования и подтверждения. Теория "...объединяет и обобщает эмпирические законы и гипотезы. Такая систематизация формально сводится к тому, что известные эмпирические законы, так же как и многие новые законы, выводятся в качестве логических следствий из более общих теоретических законов, принципов и допущений" [6, с. 23].

Что представляет собой теория аргументации? Мы считаем, что общей теории аргументации не существует. Разработаны только основы логической теория аргументации, которые излагаются ниже.

В учении об аргументации автор выделяет ***аспекты***, или части. Прежде всего – это аспект, который можно назвать объективистским (объективным), а также прагматический аспект. Объективистский аспект – та часть учения об аргументации, в которой не принимаются во внимание личностные и групповые факторы. В эту часть включается логическая теория аргументации. Прагматический (субъективный, как в плане субъекта – личности, так и в плане субъекта – социальной группы) аспект – та часть учения об аргументации, в которой рассматриваются заинтересованности, как корыстные, так и бескорыстные, отдельных личностей и групп людей в необходимости обоснования или опровержения тех или иных положений, а также мировоззренческие и иные предпосылки, из которых личность исходит при обосновании тех или иных положений. Указанные части учения об аргументации так же различимы, как человеческая личность и имидж (видимость личности, или искусственно созданное представление о личности).

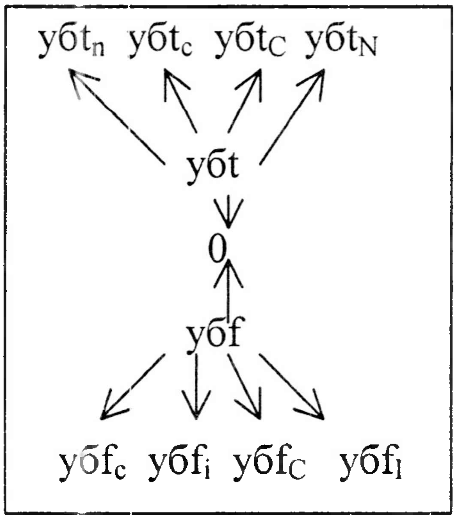
В первой части учения об аргументации изучаются способы обоснования истинности утверждений, а во второй – способы убеждения в истинности утверждений. Основными понятиями при первом и втором подходах соответственно являются понятия истины и понятие убеждения.

Оценки суждений первой части могут быть структурированы следующим образом:



Значения t_n, t_c, t_C, t_N, t, f, f_c, f_i, f_C, f_I читаются: t_n – необходимая онтологическая истина (положение дел, описываемое оцениваемым высказыванием, имеет место и оно однозначно детерминировано внешними или внутренними обстоятельствами); t_c – случайная онтологическая истина (положение дел имеет место и оно ничем не детерминировано, или же детерминировано, но не однозначно); t_C – случайная логическая истина (положение дел, описываемое высказыванием, имеет место, а само высказывание является логически недетерминированным, т.е. не являющимся истинным в силу логической формы); t_N – необходимая логическая истина (положение дел, описываемое высказыванием, имеет место, а само высказывание является логически истинным); t – истина; f – ложь; f_c – случайная онтологическая ложь (положение дел отсутствует, но его отсутствие не детерминировано однозначно); f_i – необходимая онтологическая ложь (положение дел отсутствует и его отсутствие однозначно детерминировано); f_C – случайная логическая ложь (положение дел отсутствует и описывающее его высказывание не является противоречивым); f_I – логическая необходимая ложь (положение дел отсутствует и описывающее его высказывание является противоречивым). Стрелки направлены от слабых значений к значениям более сильным, промежуточные значения на месте стрелок отсутствуют. Логика этой части аргументации может быть двухзначной.

При прагматическом подходе используются следующие оценки:



Значения убt$_n$, убt$_c$, убt$_N$, убt$_C$, убt, 0, убf, убf$_c$, убf$_i$, убf$_C$, убf$_I$ соответственно читаются: убежден в необходимой онтологической истинности, убежден в случайной онтологической истинности и т. д. 0 обозначает отсутствие мнения о значении высказывания. От начала стрелки к концу степень убеждения в истинности или ложности возрастает, при этом на месте стрелок могут быть промежуточные значения. Т.е. логика прагматической части аргументации должна быть, самое малое, трехзначной (значения убt, 0, убf), а в общем случае – вероятностной.

В аргументации выделяют следующие основные части: тезис, аргументы и форму. *Тезисом аргументации* называется то положение, которое обосновывается. Тезис обозначается буквой Т. *Аргументами, или основаниями, или доводами* называются утверждения, используемые при обосновании тезиса. Аргументы будем обозначать так: $A_1, ..., A_n$, где $n \geq 1$. Логическую структуру аргументации, т.е. логическое отношение между аргументами и тезисом, называют *формой аргументации*. Для обозначения формы аргументации введем символы $\bullet\!\!\Rightarrow$. Другим обозначением формы является штриховая линия. Частным случаем формы является классическое отношение логического следования (обозначается линией или стрелкой – $\Rightarrow$). Заметим, что различные понятия следования, являющиеся моделями различных типов отношений между суждениями, позволяющих из истинных суждений получать новые истинные суждения, приводят к различным логическим теориям аргументации (или различным частям общей логической теории аргументации).

Аргументацию можно представить так: $\{A_1, ..., A_n\} \bullet\!\!\Rightarrow T$.

Или так:

$$\boxed{\begin{array}{c} \{A_1, ..., A_n\} \\ \text{- - - - - - - - - - - - - - - -} \\ T \end{array}}$$

(Множество аргументов $\{A_1, ..., A_n\}$ подтверждает тезис Т или тезис Т логически следует из указанных аргументов. Фигурные скобки часто опускают.)

Особым видом аргументации является *доказательство.*

Доказательство – *это установление истинности какого-либо положения с использованием логических средств и утверждений, истинность которых уже установлена.*

Таким образом, доказательство (доказательная аргументация) – это аргументация, в которой аргументы являются утверждениями, истинность которых установлена, а формой является рассуждение, которое обеспечивает получение истинного заключения при истинных посылках.

Аргументация является *недоказательной*, когда аргументы, по крайней мере некоторые из них, являются не достоверными, а лишь правдоподобными утверждениями, или/и когда формой является рассуждение, которое не обеспечивает получения истинного заключения при истинных посылках.

Чаще всего приводят два способа построения аргументации. Это прямая и косвенная аргументации.

В ***прямой*** аргументации рассуждение идет от аргументов к тезису. Например, в случае прямого доказательства тезис выводится из аргументов по правилам логики.

Косвенная аргументация, в свою очередь, бывает двух видов: аргументация от противного, или апагогическая, и разделительная.

Аргументация от противного. Пусть требуется обосновать некоторое утверждение (тезис). Выдвигается утверждение, являющееся отрицанием тезиса, т.е. антитезис (допущение[1] косвенной аргументации). Из имеющихся аргументов и антитезиса выводят противоречие (некоторое утверждение и отрицание этого утверждения или конъюнкцию утверждения и его отрицания). В результате делается вывод об обоснованности тезиса.

Схема косвенной аргументации от противного:

$$\frac{\Gamma, \neg T \;\bullet\!\!\Rightarrow B \,\&\, \neg B}{\Gamma \;\bullet\!\!\Rightarrow T}$$

(Буквой Г обозначено множество аргументов).

Оставим пока вне рассмотрения аргументации, в которых встречаются не ассерторические, а, например, модальные суждения (таковыми можно считать и суждения интуиционистской логики). Даже в этом случае рассуждение от противного

$$\frac{\Gamma, \neg A \;\Rightarrow B \,\&\, \neg B}{\Gamma \Rightarrow A}$$

требует уточнения.

В самом деле, если при выведении противоречия не использовано высказывание А, то на каком основании мы утверждаем, что оно следует из Г. Очевидна необходимость основывать аргументацию на релевантной логике. Для этой цели может использоваться первоуровневая релевантная логика (система *Efde*), для содержательного обоснования которой помимо семантики обобщенных описаний состояний Е.К. Войшвилло достаточно использовать доказательство того, что релевантное следование сохраняет неложность, осуществленное Я.В. Шрамко [7], и следующие теоретико-множественные свойства обобщенных описаний состояний:

Если $M_A \subseteq M_B$, $M_B \subseteq M_C$, то $M_A \subseteq M_C$,

Если $M_A \subseteq M_C$, $M_B \subseteq M_C$, то $M_A \cap M_B \subseteq M_C$,

Если $M_A \subseteq M_C$, $M_A \subseteq M_B$, то $M_A \subseteq M_C \cup M_B$.

---

[1] Рекомендуется обратить внимание на то, что в некоторых аргументациях кроме тезиса и аргументов имеются утверждения, называемые *допущениями*.

Разделительная аргументация. Тезис обосновывается путем исключения всех членов разделительного суждения, кроме одного члена. Схема разделительной аргументации:

$$\frac{\dfrac{\dfrac{A_1 \vee A_2 \vee \ldots \vee A_n \quad \neg A_1}{A_2 \vee \ldots \vee A_n} \quad \neg A_2}{\vdots} \quad \neg A_{n-1}}{A_n}$$

Этот вид аргументации тоже требует обсуждения.

Разновидностью аргументации является установление ложности или малой степени правдоподобия утверждения. В этом случае аргументация называется контраргументацией, а критикуемое положение тоже называется тезисом (обозначение – Т). В контраргументации естественно выделить аргументы и форму (обозначаются, соответственно, A, ..., A_n и $\bullet\!\!\Rightarrow$). Частным случаем контраргументации является опровержение.

Опровержение – *это обоснование ложности какого-либо положения с использованием логических средств и полностью обоснованных аргументов.*

В неопровергающей контраргументации аргументы (по крайней мере некоторые из них) являются не полностью обоснованными суждениями или/и форма является недемонстративным рассуждением.

По направленности рассуждения различают *контраргументацию путем обоснования антитезиса (прямая контраргументация)* и *контраргументацию, которая называется сведением к абсурду (reductio ad absurdum).*

Схема прямой контраргументации:

$$A, \ldots, A_n \bullet\!\!\Rightarrow \neg T.$$

Второй вид контраргументации, сведение к абсурду, заключается в следующем. Из имеющихся аргументов и тезиса выводится противоречие. Отсюда делается вывод о ложности или малой степени правдоподобия тезиса. Схема:

$$\frac{A_1, \ldots, A_n, T \bullet\!\!\Rightarrow B\&\neg B}{A_1, \ldots, A_n \bullet\!\!\Rightarrow \neg T}$$

Если в процессе аргументации высказываются лишь модальные суждения (не ассерторические), то изменяются формы аргументаций. Известны способы рассуждений в интуиционистской математике. Построенная нами логика $S_г$ [см. 4] не допускает рассуждений от противного и сведения к абсурду. В ней правомерны лишь соответствующие ослабленные рассуждения:

$$\frac{\Gamma, \neg A \Rightarrow B \& \neg B}{\Gamma \Rightarrow \Diamond A}$$

$$\frac{\Gamma, A \Rightarrow B \& \neg B}{\Gamma \Rightarrow \Diamond \neg A},$$

где $\Diamond$ -- знак возможности.

ЛИТЕРАТУРА

1. *Аникин А.В.* Юность науки. М., 1979.
2. *Войшвилло Е.К., Дегтярев М.Г.* Логика. М., 2001.
3. *Жуковский Н.Е.* Теоретическая механика. М.;Л., 1952.
4. *Ивлев Ю.В.* Квазиматричная логика – основа теории фактических (физических) модальностей // Логические исследования. Вып. 8. М., 2001.
5. *Ивлев Ю.В.* Учебник логики. Семестровый курс. М., 2003.
6. *Рузавин Г.И.* Научная теория: Логико-методологический анализ. М., 1978.
7. *Шрамко Я.В.* Релевантное следование сохраняет не-ложность (чисто семантическое доказательство) // Вестн. Моск. Ун-та. Сер. 7. Философия. 1994. № 1.

А.С.Карпенко

СОВРЕМЕННОЕ СОСТОЯНИЕ ИССЛЕДОВАНИЙ В ФИЛОСОФСКОЙ ЛОГИКЕ*

Abstract. *In this paper is shown a number of tendencies which are essential to the contemporary development of the philosophical logic PL. Firstly, it is the fact that it contains almost all non-classical logic. Secondly, though it sounds strange, now we have the algebraization of PL going on. The third tendency, the most important one, is the approximation of different ways of human reasoning by means of deductive methods in computer programs. The reader's attention is attracted to a currently discussed problem: could it be that logic would ground of Artificial Intelligence? At last, we should pay attention to the general tendency of the development of logic at the end of XX-the beginning of XXI centuries. A hundred years ago there was posed a problem of the foundations of mathematics. And nowadays we have a problem with the same role, namely the problem of the foundations of logic itself. The following topics correspond to it:*

(i) *What is a logical consequence?*
(ii) *What are logical conceptions (operations)?*
(iii) *What is a logical system?*
(iv) *What is a logic?*

1. Введение

Современное развитие логики и сравнение двух логических журналов: «*The Journal of Symbolic Logic*» и «*Journal of Philosophical Logic*», издаваемых под эгидой Международной Ассоциации Символической Логики, созданной в 1936 году, показывает сближение тем, методов и результатов в публикуемых работах. На IX Международном конгрессе по логике, методологии и философии науки (Упсала, Швеция, 1991) Г. фон Вригт справедливо констатировал: «С логикой случилось то, что она расплавилась в разнообразных исследованиях математики...» [1992, с. 89]. Тем не менее современные исследования в логике (о тенденциях развития логики в конце XX в. см. в работе [Карпенко, 2000]) можно четко разбить на три основных раздела:

I. Математическая (символическая) логика.
II. Философская логика.
III. Неклассические (нестандартные) логики.

Сразу оговоримся, что третий раздел, в особенности в таких своих направлениях, как:

---

* Работа выполнена при поддержке РФФИ, грант № 02-06-07009.

1. Интуиционистская и суперинтуиционистские логики[1],
2. Модальные и временные логики,
3. Многозначные и нечеткие логики,
4. Релевантные и паранепротиворечивые логики, –

безоговорочно относится к философской логике в силу тех сугубо философских предпосылок, из которых возникли эти направления. Тем не менее, мы все-таки выделим развитие неклассических логик в отдельный раздел, который все более становится похожим на первый раздел. Стоит отметить, что как раз в области неклассических логик российскими логиками были достигнуты результаты высочайшего мирового уровня. И именно здесь в конце XX века со всей остротой был поставлен вопрос «Что такое логическая система?» и вообще «Что такое логика?»

В данной работе мы ограничимся в основном рассмотрением второго раздела, но заметим, что предполагается издание гораздо более полной работы, охватывающей все три раздела, под названием «Современное состояние исследований по логике: ретроспективы и перспективы».

Перед тем как перейти непосредственно к «Философской логике», дадим краткую характеризацию того, что понимается под «Математической логикой». В предисловии к «Справочнику по математической логике», изданному в 1977 г. (см. русский перевод с многочисленными добавлениями [Барвайс (ред.), 1982]), Дж. Барвайс пишет: «Математическая логика традиционно подразделяется на четыре раздела: теория моделей, теория множеств, теория рекурсии и теория доказательств». Однако за истекшие четверть века положение дел несколько изменилось, благодаря той огромной роли, которую играет логика в компьютерных науках. Отсюда усиление значимости теории доказательств, а в теории рекурсии на первое место выходят проблемы вычислимости и сложности. Это учитывалось на очередном ежегодном собрании Ассоциации Символической Логики в Urbana-Champaign в июне 2000 г. при проведении специальной дискуссии на тему «Перспективы математической логики в двадцать первом столетии». По итогам дискуссии под таким же названием опубликована работа четырех авторов С.Р. Басса, А.С. Кечриса, А. Риллэя и Р.А. Шора [Buss *et al.*, 2001].

Причем, в указанной работе ни одно из направлений неклассических логик даже не упоминается, а ссылки на российских логиков крайне редки (что характерно для *всех* западных обзоров по логике). Однако имеется обзор В.А. Успенского «Математическая логика в бывшем Советском Союзе: Краткая история и текущие тенденции» [Uspensky, 1997], который посвящен, в основном, отечественным логикам.

---

[1] Сюда же относится и *марковский конструктивизм*, получивший широкое признание за рубежом.

Остается сделать еще одно, но весьма существенное замечание, в какой-то степени объясняющее довольно-таки низкий уровень исследований в нашей стране, относящихся непосредственно ко второму разделу (II).

Уникальная история России XX века предопределила и уникальное развитие логики в ней, во многом непонятное для западного историка науки. В жестко тоталитарной системе *истина* становится предметом чисто идеологических манипуляций, а ложь и террор становятся самоцелью. Одной из особенностей развития логики в бывшем Советском Союзе был часто выдвигаемый тезис о союзе логиков-математиков и логиков-философов. Это и не удивительно: в сложившейся системе логики-философы искали поддержки у логиков-математиков, у которых еще оставалась возможность для научных публикаций и даже в зарубежных изданиях, в то время когда в единственном советском философском журнале, выходившем в 20-е и 30-е годы («Под знаменем марксизма»), был опубликован ряд статей, где формальная логика сопоставлялась с диалектикой и диалектической логикой. Первая объявлялась буржуазной, а вторая пролетарской, и формальная логика предавалась анафеме. Гибельная атмосфера этих лет для философии и логики описана в книге В.А. Бажанова [1995], которая недвусмысленно называется «Прерванный полет» (см. также [Карпенко, 2001]). Даже когда в 1947 г. формальная логика была возвращена в систему среднего и высшего образования, ее положение не было независимым. Уже в начале 50-х годов в ходе навязанной дискуссии было зафиксировано, что высшей ступенью мышления является диалектическая логика, низшей – формальная. На этом фоне все 50-е и даже 60-е годы прошли в обоюдной полемике.

Все это надо учитывать, если мы хотим провести сравнительный анализ развития логики у нас в стране и за рубежом. *Логика террора такова, что места для логики не остается.*

2. Философия логики или философская логика

Философская логика является исключительно широкой областью логических исследований, требующих философского осмысления основных понятий, применяемых в современной логике, и результатов, полученных средствами математической логики. Однако термин «философская логика» весьма неопределенен, разноречив и единого употребления не имеет. Различными специалистами в современной логике и самой философии он понимается по-разному, а скорее, каждым по-своему. Даже если философская логика понимается как особая научная дисциплина, определить ее предмет, границы применения и методы однозначно не удается. Более того, не удается строго разделить казалось бы два разных направления исследований: *философскую логику* и *философию* *логики*. Зачастую одно подменяется другим, а порой их вообще не считают нужным различать.

Термин «философская логика» появился в англоязычной логико-философской литературе и получил широкое применение в 50–60-е годы XX в. (когда в СССР логики-философы ожесточенно выясняли, к какой ступени мышления они принадлежат). С одной стороны, кризис в основаниях математики (обнаружение парадоксов в теории множеств и ограничительные теоремы А. Тарского и К. Гёделя) потребовал глубокого осмысления самого концептуального аппарата логики. С другой стороны, появление и бурное развитие неклассических логик, в первую очередь модальной логики, привлекло широкое внимание логиков с философской ориентацией.

2.1. Философия логики

Сначала обозначим ту область исследований, которая получила название «философия логики». Для логиков-математиков философией логики является развитие теории множеств и соответствующие вопросы о способе образования множеств и о природе числа. Обнаружение парадоксов в теории множеств и, в особенности, парадокса Рассела поставил вопрос о природе самой математики. *Логицизм* пытался определить основные понятия математики в логических терминах (Г. Фреге в 1884 г. и Б. Рассел в 1903 г.) Это уже не только техническая, но и философская проблема: можно ли всю математику вывести из нескольких (или одного) логических терминов? В этом смысле грандиозное построение, предпринятое А.Н. Уайтхедом и Б. Расселом в «Principia Mathematica», оказалось неуспешным. И хотя в их логико-математической теории не обнаружено парадоксов, но из чисто логических аксиом оказалось невозможным, например, вывести существование бесконечных множеств. В § 3 нами будет рассмотрена по сути дела концепция *нового логицизма*, инспирированного А. Тарским в 1966 г.[2] *Интуиционизм* как еще один ответ на обнаружение парадоксов поставил принципиальные вопросы о различии конечного и бесконечного, отличии потенциальной бесконечности от актуальной. Возникла проблема существования и обоснования доказательств, и самое главное, проблема статуса классических логических законов. Все

[2] И тут уж никак нельзя не упомянуть концепцию *неологицизма*, которая принадлежит А.С. Есенину-Вольпину и разработана им в 1970 г., но впервые опубликована (в силу его правозащитной деятельности) лишь в 1993 г. См.: [Есенин-Вольпин, 1993]. В.К. Финн [1996 а] характеризует неологицизм как философию обоснованного знания, где под обоснованием понимается применение различных приемов рассуждений (в том числе включающих дедукцию и индукцию). Отметим, что сущностью неологицизма является расширение прерогатив логики не только на естественнонаучное знание, но и на гуманитарное знание.

это является философской проблематикой. *Формалистическая программа* Д.Гильберта тоже вызвала оживленную философскую дискуссию, в особенности – проблема *финитизма*. Еще одним способом избежать парадоксов в математике является *аксиоматическая теория множеств*. Все эти четыре подхода к ***обоснованию математики*** требуют глубочайшего философского осмысления (см. [Klibansky (ed.), 1968], [Fraenkel *et al*., 1973], [Chaitin, 2000], а также книгу Перминова [2001], в которой критикуютя философские основы классических программ обоснования математики). Программе Гильберта в контексте результатов Гёделя о неполноте посвящена гл. 7 в книге [Гончаров, Ершов и Самохвалов, 1994].

На самом деле выше сказанное относится больше к философии математики, чем к философии логики, но задача философского осмысления применения логики к решению различных проблем математики остается. Убедительным примером здесь являются ограничительные теоремы К. Гёделя о неполноте достаточно богатых теорий (1931), которые говорят о том, что нет и в принципе не может быть адекватного формализма, охватывающего всю математику. Философские следствия этих результатов обсуждаются по сей день и привлекли к себе огромное внимание не только логиков профессионалов, но и философов, и методологов. Однако сошлемся на работы специалистов: на философскую статью М. Даммета [Dammett, 1963] и прекрасные книги К. Подниекса [1992] и Р. Смульяна [Smullyan, 1992]. К этому следует добавить также философскую дискуссию по поводу тезиса Чёрча-Тьюринга, утверждающих, что все вычислительные устройства эквивалентны между собой. Если считать человеческий мозг вычислительным устройством, то в таком случае нет препятствий для компьютеризации человеческой логики. (См. об этом в конце обзора.)

Интересно, что философией логики занялись математики, получившие в ней глубокие результаты (Г. Фреге, Б. Рассел, Л. Брауэр, К. Гёдель, У. Куайн, Р. Карнап и др.). Куайн в 1940 г. опубликовал книгу под названием «Математическая логика», а в 1970 г. – под названием «Философия логики» [Quine, 1970] (переиздана в 1986), в которой под логикой понимает систематическое изучение логических истин, а философия логики становится инструментом для анализа естественного языка. Куайн обсуждает в этой книге следующие темы, которые он относит к философии логики: «Значение и истина» (проблема высказываний и предложений, высказывания как информация, теория смысла языковых выражений, истина и семантическое согласие); «Грамматика» (рекурсивное задание грамматики, категории, пересмотр цели грамматики, имена и функторы, критерий лексики; время, события и глаголы, пропозициональные установки и модальность); «Истина» (определеление истины по Тарскому, парадоксы в объектном языке, связь между семантическими и логическими парадоксами); «Логическая истина» (в терминах структуры, в терминах модели, в терминах подстановки, в терминах доказательства, в терминах грамматики); «Сфера (scope) логики» (проблема тождества, теория множеств, квантификация); «Девиант (deviant) логики» (под этим понимаются *неклассические логики*, в первую очередь, многозначная логика, интуиционистская логика, ветвящиеся кванторы); «Основания логической истины» (место логики, логика и другие науки).

Таким образом, Куайн сконцентрировал свое исследование вокруг главной проблемы философии логики: *что есть истина*? Однако впервые семантическое определение понятия истины для большой группы формализованных языков было дано А.Тарским в работе 1933 г.[3], притом одновременно указаны границы такого определения. Продолжению этой тематики посвящен специальный выпуск журнала «Synthese» 126, № 1-2 (2001). В контексте философии логики проблемы истинности рассмотрены в монографии [Engel, 1992]. Значительная часть книги [Soames, 1998] посвящена теории истины Тарского и теории истины Крипке и вообще охватывает широкий круг проблем современного интереса к понятию *истины*.

Из недавних монографий по философии логики отметим книги С.Хаак, получившую широкую изестность: [Haack, 1978] (переведенную на ряд языков) и [Haack, 1996], а также монографию [Read, 1995].

Через тридцать лет после выхода книги Куайна на сайте «Философия: философия логики»[4] появились следующие разделы: «Кондиционалы и следование», «Противоречие и противоречивость», «Тождество», «Неформальная логика», «Логика и знание», «Логика и онтология», «Парадоксы», «Проблемы индукции», «Семантика логики», «Определения истины», «Неопределенность». Обратим также внимание на сайт “Factasia” [Jones, 2002], созданный в 1994 г., где можно найти всеобъемлющий философский подход к пониманию логики, ее значению и применениям.

Как отмечается в электронной “Encyclopedia Britannica” (1994-1999): «Многообразие логических семантик стало центральной областью исследований в философии логики». Вопросы логической семантики рассматриваются в книгах [Van Benthem, 1986] и [Смирнова 1986], первая из которых стала классической. Однако главным вопросом, и уже давно, является не вопрос о том, что такое семантика, а разработка единого семантического подхода, охватывающего совершенно различные логические системы, срав-

---

[3] Русский перевод этой основополагающей работы был сделан только в 1999 г. См.: [Тарский, 1999].

[4] http://dirt.netscape.com/Society/Philosophy/Philosophy_of_Logic/. Здесь можно найти много других сайтов, имеющих отношение к философии логики. Также постоянно развивается WWW-сервер сектора логики Института философии РАН (http://iph.ras.ru/~logic/).

нение различных семантических концепций и распространение их на целые классы логик. Именно этому посвящена монография Р.Эпштейна [Epstein 1990] (2-е издание в 1995 г.), в которой развивается названная им «семантика приписывания множеств» (set assignment semantics). Такой же фундаментальный труд [Epstein 1994] посвящен первопорядковым логикам[5]. Наличие бесконечных классов логик совершенно по-иному ставит вопрос о семантических основаниях логики. Исследование классов семантик, для которых различные неклассические логики являются полными, становится ныне одной из наиболее популярных тем. Точно так же трансформируется и *теория моделей*. Если изначально она имела дело с взаимоотношением между формальным языком и его интерпретацией в математических структурах, то сейчас логика становится инструментом для изучения самых различных структур и их классификации (см. [Barwise and Feferman (eds.), 1985]).

Конечно, сфера философии логики значительно шире. К проблематике последней относится теория пропозициональной формы как высказывания о некоторых положениях дел (вещей) в мире, и вообще учение о логической форме (см. монографию [Sainsbury, 1991]), учение о логических и семантических категориях, теория референции и предикации, идентификация объектов, проблема существования, учение о пресуппозициях, отношение между аналитическими и синтетическими суждениями, проблема научного закона, информативность логических законов, онтологические допущения в логике и многое другое. И даже такие, казалось бы чисто логические вопросы, также относятся к области философии логики: сущность и общая природа отношения следования, или логической выводимости между любыми высказываниями или множествами высказываний, смысл логических связок, значение фундаментальных теорем, полученных в математической логике, и в связи с этим тщательный анализ таких понятий, как «индукция», «вычислимость», «разрешимость», «доказуемость», «сложность» и опять же «истина».

2.2. Философская логика

В отличие от философии логики первоначально философской логикой называлась *модальная логика*, т.е. логический анализ таких философских понятий, как «возможность» и «необходимость». Исторически эти два понятия, особенно начиная с Аристотеля, постоянно привлекали к себе внимание философов, а с развитием символической логики появилась уникальная возможность проанализировать указанные модальности и их взаимоотношения точными методами. То же самое случилось и с такими философ-

[5] Имеется сайт, посвященный логической семантике с персоналиями, начиная от Г.Фреге (http://www.phil.muni.cz/fil/logika/til/inks).

скими понятиями, как «будущее» и «прошлое». С развитием модальной логики в сферу логических исследований стали попадать все новые виды модальностей: временные, модально-временные (не механическое соединение, а синтез модальных и временных операторов), физические или причинные, деонтические, эпистемические и др. В вышедшем в 80-е годы «Справочнике по философской логике» в 4-х томах [Gabbay and Guenthner, 1983-1989] (в дальнейшем HPL) подведен некоторый итог развития философской логики. Так, во 2-м томе рассматриваются расширения классической логики C_2, например, такие, как модальная, временная, деонтическая логика и др., а в 3-м томе – альтернативы классической логике, например, такие, как многозначная, интуиционистская, релевантная логика и др. Заметим, что такое деление неклассических логик не является убедительным. И дело не в том, что есть логики, которые не относятся ни к одному из этих подразделений, например, силлогистика, логические системы Лесневского, комбинаторная логика, инфинитарные логики и т.д. Несколько неожиданным оказалось то, что логики, которые первоначально строились как ограничение некоторых классических законов и принципов, на самом деле являются расширением классической логики: например, ряд многозначных логик точно так же является расширением $\mathbf{C}_2$, как и модальные логики. Вопрос о том, что считать неклассической логикой, стал предметом оживленного обсуждения. Поэтому не удивительно, что в последнее время стал употребляться более нейтральный термин, а именно *нестандартные логики*. Имеется сайт с кратким описанием 29 нестандартных логик и краткой библиографией работ к каждой из них [Suber, 2000].

Обратим внимание, что в каждой из этих логик возникает своя философия логики, а значит все те философские проблемы, которые были перечислены выше, потому что определение истинности формулы, логического следования, понятие высказывания и смысл логических операций в большинстве логик различные. Кроме этого, в каждой философской логике возникает своя дополнительная философская проблематика. Например, в модальных логиках такой являются проблемы референции, кросс-идентификации, т.е идентификации объектов в различных возможных мирах, и в связи с этим возникает проблема квантификации. В многозначных логиках стоит сложнейшая философская проблема интерпретации множества истинностных значений, обычно выраженного числами: рациональными, натуральными, целыми, действительными. Много философских проблем ставит интуиционистская логика, например, наличие у нее двух разнородных и не сводимых друг к другу классов семантик: реализуемостной и моделей Крипке.

Языковой и технический аппараты философской логики намного богаче и, главное, более гибкие, чем в символической логике, что позволило приступить к анализу и реконструкции чисто философских проблем, и даже таких фундаментальных, как проблема логического и теологического фатализма, детерминизма и случайности, асимметрии времени и т.д. (см. в связи с этим [Карпенко, 1990]). *Введению* в философскую логику посвящены монографии [Wolfram, 1989] и [Grayling, 1997]. Отметим единственную монографию на русском языке с названием «Философская логика», под которой понимается «общая семантика различных логических исчислений» [Шуман, 2001].

То, что сейчас понимается под философской логикой, полнее всего отражает большой сборник статей, в основном представляющих обзоры по наиболее важным направлениям в современной философской логике [Jacquette (ed.), 2002]. Сборник содержит 46 статей, разбитых на 14 разделов: I. «Историческое развитие логики»; II. «Символическая логика и обычный язык»; III. «Философские измерения логических парадоксов»; IV. «Истина и определенная дескрипция в семантическом анализе»; V. «Понятия логического следования»; VI. «Логика, существование и онтология»; VII. «Метатеория и сфера и границы логики»; VIII. «Логические основания теории множеств и математики»; IX. «Модальные логики и семантика»; X. «Интуиционистская, свободная и многозначные логики»; XI. «Индуктивная, нечеткая и квантово-вероятностная логики»; XII. «Релевантные и паранепротиворечивые логики»; XIII. «Логика, машинизация и когнитивная наука»; XIV. «Механизация логического вывода и обнаружение доказательств». Отметим, что последний раздел особенно показателен и не случайно он отнесен к философской логике (см. заключительную часть данного обзора).

Обратим внимание, что на исследование нестандартных логик претендуют и философия логики (см. монографии В.Куайна и С.Хаак) и философская логика. В последнем случае это становится явной тенденцией, проявившейся уже в книге Н.Решера [Rescher, 1968] и четко обозначенная уже в первом издании HPL. Эта тенденция еще больше усиливается в новом 18-томном издании «Справочника по философской логике» [Gabbay and Guenthner, 2001-?]. Здесь уже отказались от разделения неклассических логик на расширяющие C_2 и альтернативные к ней. Другая тенденция заключается в том, что к философской логике присоединяют чуть ли не все, что напрямую не относится к выше рассмотренным четырем разделам математической логики. Поэтому не удивительно, что во 2-й том нового HPL включена статья под названием «Алгебраическая логика» [Andréka, Németi and Sain, 2001]. Важнейшей областью исследований в алгебраической логике является определение необходимых и достаточных условий для построения алгебраической семантики, т.е. для построений алгебры Линденбаума (алгебры формул). Работой здесь, уже ставшей классической, является [Blok and Pigozzi, 1989]. То, что не по всякому логическому исчислению можно построить алгебру Линденбаума (как, например, для знаменитых паранепротиворечивых логик Н. да Косты C_n), стало дополнительным стимулом для развития новых семантических методов. Еще ранее, а именно в начале 70-х годов (Н. да Коста, Д. Скотт, Р. Сушко) появилась так называемая *семантика оценок* (valuation semantics) или *бивалентная* (bivalence) *семантика* (см. [da Costa, Béziau and Otávio, 1996]). Если обычно функцией оценки является алгебраическая оценка, т.е. гомоморфизм алгебры формул в однотипную алгебру, то теперь это ограничение снимается и оценкой является просто функция, которая ассоциирует одно из двух бивалентных значений с каждой формулой, т.е. двузначные оценки рассматриваются как характеристические функции множеств формул. Имеется несколько способов доказательства того, что любая пропозициональная логика имеет бивалентную семантику.

Возвращаясь к проблематике алгебраической логики, подчеркнем, что ее аппарат является хорошим инструментом для выяснения такого сложного вопроса, как взаимоотношение между различными логическими системами, и вообще для уточнения статуса логики. О последнем говорит название книги П. Халмоша и С. Гиванта «Логика как алгебра» [Halmos and Givant 1998], где показывается, что стандартные результаты в логике хорошо соотносятся с известными алгебраическими теоремами. Такой всеобъемлющий охват логики алгебраическими методами предсказывал еще выдающийся российский логик А.В. Кузнецов в блестящей статье «Алгебра логики» для Философской Энциклопедии [Кузнецов, 1960], но даже он не мог предвидеть необычайно широкую сферу деятельности алгебраической логики. В монографии «Алгебраические методы в философской логике» [Dunn and Hardegree, 2001] основное внимание сконцентрировано на теоремах представления как инструменте для доказательства теорем о полноте. Этот же самый инструмент является основным при изучении формальной феноменологии (!) в монографии В.Л.Васюкова [1999].

Основной вывод на сегодня таков: *законы логики есть не что иное как законы алгебры*. Все это происходит на фоне непомерного возрождения психологизма в логике в нашей стране. За последнее десятилетие издано большое число учебников и учебных пособий по логике, а также справочников по философии и даже энциклопедических изданий, содержащих статьи по логике, где утверждается (за редчайшим исключением)[6], что логика изучает *законы мышления*. Однако не только математическое развитие логики, но и в некоторой степени философское развитие логики показывает, что нет больше законов мышления, отличных от законов алгебры (см. [Da Costa, Béziau and Otávio, 1995, p. 121]). И с этим трудно не согласиться.

---

[6] Этими исключениями, например, являются следующие учебные пособия по современной логике для гуманитариев: [Гладкий, 2001] и [Анисов, 2002].

Вообще, понятие философской логики противоречиво. С одной стороны, сюда относятся, как уже говорилось, все те логические исследования, которые не являются чисто математическими и как бы не имеют отношения к символической логике, понимаемой многими логиками-философами как «игра в символы». С другой стороны, современное развитие модальной логики, временной, интуиционистской и особенно многозначной, есть не что иное, как разделы символической логики: те же методы символизации и аксиоматизации и, главное, во многом те же чисто технические задачи и проблемы. Показательным здесь является построение новых теорий множеств на основе неклассических логик, являющихся по своему происхождению чисто философскими, а именно многозначные, модальные, релевантные, паранепротиворечивые теории множеств, при построении которых пытаются избежать следствий, вытекающих из теорем Гёделя. Особый интерес в связи с этим представляют паранепротиворечивые теории множеств (см., например, [Priest, 1979] и недавнюю работу [Daynes, 2000], где рассмотрена система Цермело–Френкеля с аксиомой выбора, но без аксиомы фундирования).

3. Основания логики

Теперь мы должны обратить внимание на главную тенденцию развития логики в конце XX и начале XXI века. Как сто лет назад остро встал вопрос об основаниях математики, так сейчас стоит вопрос об основаниях самой логики, в связи с чем обсуждаются следующие проблемы:

(i) Что есть логическое следование?
(ii) Что есть логические понятия (операции)?
(iii) Что есть логическая система?
(iv) Что есть логика?

Если обратиться к одному авторитетному изданию по истории и развитию логики [Kneale and Kneale, 1962, p. 1] (9-е издание в 1985 г.), то в нем можно найти следующее традиционное определение предмета логики: «Наука, которая исследует принципы правильных или приемлемых рассуждений». Однако такое определение оставляет полностью открытым вопрос о точной сфере данного предмета, т.е. о сфере действия логики. Для традиционной логики – это *силлогистические* рассуждения, и существует ровно 24 правильных силлогизма. В свою очередь, математическая логика исследует *математические* рассуждения: «Если… его исследования посвящены в первую очередь изучению математических рассуждений, то предмет его занятий может быть назван математической логикой» [Мендельсон, 1984, с. 7] (книга выдержала четыре издания на английском и три на русском языке). Неформальная логика изучает *неформальные* рассуждения, а философская логика, выходит, изучает *философские* рассуждения.

Чтобы избежать подобной бессмысленности, нужно выделить то ядро или те базовые понятия, с которыми данная наука имеет дело. Таким ядром несомненно является понятие *логического следования*.

Именно А. Тарский еще в 1936 г., как один из создателей современной логики, выделяет ее суть в работе с характерным названием «О понятии логического следования» (см. [Tarski, 1983]). Однако возникают чисто методологические проблемы: в каких терминах, или, как бы мы сейчас сказали, какова парадигма возможного ответа. Ответы на вопрос о сфере логики, о ее базисных понятиях, которыми оперирует и которые использует концепция логического следования, могут быть совершенно различными: теоретико-модельными, семантически теоретико-множественными, или теоретико-доказательными, или конструктивными, или комбинаторными, и т.д. Как мы увидим, ответ самого А. Тарского находится всецело в рамках семантического подхода: «Предложение *X* логически следует из предложений класса *K*, если и только если каждая модель класса ***K*** есть также модель предложения *X*» [Tarski, 1983, p. 417].

В последнее время концепция логического следования Тарского вызывает повышенный интерес, точнее, вокруг нее идет бурная дискуссия. Сама работа Тарского носит скорее философский, нетехнический характер и оставляет много места для различных конфликтующих интерпретаций. Некоторые считают определение Тарского с точки зрения современной математической логики неудовлетворительным [Corcoran, 1972], другие вообще его отвергают, как, например, Дж. Этчеменд сначала в статье [Etchemendy, 1988], а затем в специально посвященной этой теме монографии [Etchemendy, 1990]. Интересный анализ работы Тарского предложен [Sagüillo, 1997], который выделяет три основных концепции логического следования, каждое их которых охватывает важную сторону аргумента. Интересно заключение автора, что Тарский не говорит о том, что́ есть логическое следование, а скорее о том, на что логическое следование похоже. В защиту Тарского выступил Г.Рэй [Ray, 1996] (см. ответ ему в [Hanson, 1999]), а также М.Гомез-Торренте [Gómez-Torrente, 1996] (см. также [Gómez-Torrente, 2000]). Особый интерес представляет первая статья М.Гомеза-Торренте, где идеи Тарского анализируются в историческом логико-философском контексте, в котором они и были предложены.

Основные возражения против определения понятия логического следования Тарским следующие. Он нигде в данной работе не оговаривает, что предметная область должна варьироваться, как принято в современной логике (на это уже обращается внимание в [Corcoran, 1972, p. 43]; кстати, он же является редактором второго издания избранных трудов А.Тарского [Tarski, 1983]). Логические свойства, в частности общезначимость самого аргумента логического следования, должны быть независимы от отдельно выбранного универсума рассуждений, в котором язык оказывается интерпретируемым. Иначе получается, что многие утверждения о мощности предметной области при преднамеренной интерпретации языка, которые могут быть выражены с помощью только логических констант, оказываются логическими истинами. Однако из более ранних и более поздних работ видно, что Тарский осознает термин «логика» так, что он исключает из логических истин любые утверждения о мощности индивидной области, пусть даже «логической». Другое возражение направлено против принятия Тарским ω-правила (правило бесконечной индукции) при формализации первопорядковой арифметики. Однако на самом деле имеется в виду лишь некоторая версия этого правила в простой теории типов в ее собственном виде. В связи с этими возражениями стоит сделать несколько общих замечаний.

Тарскому были хорошо известны работы Гёделя, как о полноте, где теорема доказывается исходя из истинности утверждений при всех возможных интерпретациях, так и о неполноте (ω-неполноте) первопорядковой арифметики. В первом случае устанавливается совпадение логического следования в первопорядковой классической логике (в дальнейшем **PC**) с синтаксическим следованием, во втором – нет. Из работ Тарского ясно следует, что он рассматривает логическое следование и дедуцируемость как различные понятия и первое значительно шире второго. Основной замысел Тарского состоял в том, чтобы дать определение логического следования, применимого для очень широкого класса языков, настолько широкого, что, как мы увидим далее, возникают проблемы уже другого уровня, относящиеся к вопросу о том, что есть логика?

А пока отметим, что понятие логического следования заняло центральное место в логике и потому все больший смысл приобретает следующий вопрос: *Что значит для заключения A следовать из посылок Σ?* Следующий критерий считается общепринятым: *A* следует из посылок Σ, если и только если *любой случай*, в котором каждая посылка в Σ является истинной, есть *случай*, в котором *A* истинна. Обратим внимание, что выдающийся российский логик А.А.Марков связывает этот принцип с определением того, что есть логика: «Логику можно определить как науку о хороших способах рассуждения. Под "хорошими" способами рассуждения при этом можно понимать такие, при которых из верных исходных положений получаются верные результаты» [Марков, 1984, с. 5]. В итоге сутью логического следования является сохранение истины во *всех случаях*. Имеется много путей, когда, используя понятие логического следования, данного Тарским, можно представить общезначимыми все законы **PC**. При этом мы получаем стандартное определение самой классической логики вкупе со всеми ее логическими операциями. Например, конъюнкция двух формул $A \wedge B$

истинна при ситуации (в возможном мире) w, если и только если A истинна в w и B истинна в w.

Но тут возникает еще больше вопросов. На каком основании полученную логику мы называем классической и что это значит? К этому вопросу мы еще вернемся. Что означает стандартное задание истинностных условий для логических связок? И, наконец, что считать логическими операциями? Понятие истины напрямую связано с пониманием логического следования, данного Тарским, а это, в свою очередь, приводит к объектам, которые мы называем «логическими законами»: последние суть *сохраняющие истину выводы*. Но как мы можем дать определение логического закона, не определившись с тем, что считать логическими константами (операциями), – и это при естественной изменчивости и нестабильности самих нелогических объектов действительности. Если все считать логическими терминами: переменные, числа, кактусы и т.д., – тогда теоретико-модельная интерпретация каждого термина зафиксирована и, следовательно, существует только одна модель. Это сделало бы понятие логической истины бессодержательным.

В работе «О понятии логического следования» Тарский оставляет открытым вопрос о том, что́ считать логическими понятиям (операциями), а что экстра-логическими. Здесь он сообщает, что никакого объективного основания ему не известно для строгого разграничения этих двух групп терминов (см. [Tarski, 1983, p. 418]). Очевидно, что эта проблема не давала покоя Тарскому, и через тридцать лет он возвращается к ней в лекции «Что есть логические понятия?», прочитанной в 1966 г. в Лондонском Bedford College, затем в том же году на Юбилейной сессии в Тбилисском государственном университете, а позже, в 1973 г., в SUNY Buffalo (США). Доклад опубликован уже после смерти Тарского в 1983 г. (см. [Tarski, 1986]). Основная идея заключается в том, что логические понятия (операции) должны быть инвариантны относительно подходящей группы преобразований области рассуждений. Тарский расширяет сферу применения Эрлангерской программы Ф.Клейна, где предложена классификация различных геометрий соответственно трансформациям пространства, относительно которых геометрические понятия инвариантны. Например, понятия метрической геометрии Эвклида инвариантны относительно изометрических трансформаций. Также алгебра может рассматриваться как изучение понятий, инвариантных относительно автоморфизмов таких структур, как кольца, поля и т.д. Тогда, по Тарскому, логическими понятиями являются те, которые инвариантны относительно любых *взаимнооднозначных* преобразований универсума на себя, т.е. относительно любых перестановок универсума рассуждений (предметной области). В неявном или почти явном виде идея инвариантной перестановочности уже содержалась в различных работах: логико-математических (впервые

[Mostowski, 1957]), лингвистических (см. [Keenan and Stavi, 1986] и [Van Benthem, 1989], философских (см. [Peacocke, 1976], [McCarthy, 1981] и [Simons, 1988]), а также в ряде статей в сборнике с весьма актуальным названием «Границы логики» [Shapiro (ed.), 1996]. Тезис Тарского явился основой с некоторой естественной модификацией для определения логичности, данного в книге Г.Шер [Sher, 1991, p. 53] опять же о границах логики: операция является логической, если она инвариантна относительно каждой биекции между областями.

Наконец в работе [McGee, 1986] показано, что если тезис Тарского принимается, то логическими операциями являются в точности те, которые определяются в полном (full) инфинитарном языке $L_{\infty,\infty}$ (в этой же работе рассматривается и обобщение Шер, т.е. дается характеризация логических операций относительной изоморфной инвариантности). Напомним, что язык $L_{\infty,\infty}$ есть язык обычной первопорядковой логики с равенством (язык Фреге), но допускает конъюнкции и дизъюнкции произвольной длины, а также произвольной длины последовательности кванторов всеобщности и существования. Язык этот очень богат – в него погружается вся второпорядковая логика. Последняя разрешает квантификацию по произвольным функциям, определенным на области рассуждения, точно так же как обычную квантификацию по элементам из этой области. Поскольку множества и отношения могут быть представлены их характеристическими функциями, то второпорядковая логика охватывает также квантификацию по произвольным множествам и отношениям. Не только арифметика, но и теория множеств становится *частью* второпорядковой логики (натуральные числа, множества, функции и т.д. являются логическими понятиями), а значит и вся (или почти вся) теоретико-множественная проблематика, включая континуум-гипотезу и много других важных математических утверждений, погружается во второпорядковую логику (см. монографию [Manzano, 1996]). Таким образом, *математика есть часть логики.* В зависимости от выразительных средств новой логики мы приходим к логике натуральных чисел, логике действительных чисел, логике топологических пространств и т.д. Все это мы назвали бы *новым логицизмом*.

В связи с этими вопросами особый интерес представляет статья С. Фефермана [Feferman, 1999a], в которой он критикует тезис Тарского-Шер, выдвигая в качестве возражения то, что происходит ассимиляция математики логикой. Однако главное его возражение заключается в том, что тезис Тарского-Шер не дает никакого естественного объяснения тому, как логические операции ведут себя на предметных областях различного размера. Поэтому Феферман вводит понятие операций, которые *гомоморфно инварианты* на функционально-типовых (functional-type) структурах. Именно такие операции, по Феферману, являются логическими и, самое примечательное, они в точности совпадают с операциями первопорядковой логики без равенства. Правда, здесь опять возникает проблема, считать или нет равенство логической операцией? Обсуждение этого вопроса можно найти у Куайна [Quine, 1986, pp. 61 ff.]. Он склоняется к положительному ответу, в качестве довода (кроме всего прочего) приводя дедуктивную полноту первопорядковой логики с равенством. Достоинством своего подхода Феферман считает то, что операции **PC** определимы в терминах гомоморфно инвариантных операций одноместного типа. При этом он ссылается на обзор [Keenan and Westerståhl, 1997], где показана центральная роль одноместных предикатов в человеческом мышлении на примере естественного языка.

Было бы странным, если бы только в 1999 г. дали точную характеризацию **PC** в терминах ее операций. На самом деле уже в 60-е годы А.В. Кузнецовым была обобщена теорема о функциональной полноте логики высказываний на предикатный случай. К сожалению, это доказательство не опубликовано по сей день. Значительно позже эта теорема была доказана Дж.Цукером (см. [Zucker, 1978]), т.е. показано, что определенное множество логических операций адекватно как для **PC**, так и для **PC**(=). Причем предпочтение отдается **PC**(=). Автор исходит из основного допущения, что для того чтобы считаться логической операцией, ее «значение» должно полностью содержаться в аксиомах и правилах вывода. Таким образом, в отличие от семантического подхода Тарского-Шер-Фефермана для характеризации логических операций использован теоретико-доказательный подход.

Характеризация логических операций ведет к характеризации *самой логики*. Однако характеризацию **PC** можно дать в терминах фундаментальных теоретико-модельных свойств теории T в первопорядковом языке. Этими свойствами являются:

Теорема компактности (для счетных языков). *Если каждое конечное множество предложений в T имеет модель, то T имеет модель.*

Компактность имеет место, поскольку во всех выводах используется только конечное множество посылок. Это свойство было выявлено уже К. Гёделем в работе о полноте **PC** (1930 г.). Ранее были доказаны еще два свойства первопорядковой логики.

Теорема Лёвенгейма–Скулема о спуске. *Если T имеет какую-нибудь модель, то T имеет и счетную модель.*

Теорема Лёвенгейма–Скулема о подъеме. *Если T имеет бесконечную модель, то T имеет и несчетную модель.*

Понадобилось довольно-таки продолжительное время, пока П.Линдстрём [Lindström, 1969] установил, что эти свойства являются характеристическими для **PC** в следующем смысле:

Теорема Линдстрёма. *Логика первого порядка является единственной логикой, замкнутой относительно* $\wedge$, $\neg$, $\exists$ *и удовлетворяющей теоремам компактности и Лёвенгейма–Скулема.*

Эта работа стала парадигмальной для важнейших исследований в логике последней четверти XX века. По существу теорема Линдстрёма дает определение первопорядковой логики, на самом деле **PC**(=), в терминах ее глобальных свойств. Но из этих свойств следует серьезное ограничение на выразительные средства первопорядковой логики. Наиболее простой бесконечной математической структурой являются натуральные числа и наиболее фундаментальным математическим понятием является понятие *конечности*. Однако из теоремы компактности следует, что такие центральные понятия, как конечность, счетность, вполне-упорядоченность и т.д., не могут быть определены в первопорядковой логике. На самом деле, конечное не различимо от бесконечного. В свою очередь, из теоремы Лёвенгейма–Скулема следует, что первопорядковая логика не различает счетность и несчетность и отсюда никакая бесконечная структура не может быть охарактеризована с точностью до изоморфизма. Более того, многие лингвистические понятия, дистинкции и конструкции выходят далеко за сферу применения **PC** (см. [Muskens, 1995], [Lönning, 1996]).

Имеется много интересных логик, которые богаче первопорядковой логики, такие, *как слабая логика второго порядка*, которая пытается построить понятие *конечного* в логике некоторым естественным образом (разрешается квантификация по конечным множествам); логики с различными *экстра-кванторами* типа «существует конечно много», «существует бесконечно много», «большинство» и т.д.; логики с формулами бесконечной длины; логики высших порядков[7]. Однако не имеет значения, как мы будем расширять первопорядковую логику – в любом случае теряются или свойство компактности, или свойство Лёвенгейма–Скулема, или оба вместе, а также интерполяционное свойство и в большинстве случаев дедуктивная полнота. Но вот Г. Булос [Boolos 1975], защищая второпорядковую логику, спрашивает: почему логика обязательно должна обладать свойством компактности? Интересно, что в 1994 году на страницах «The New Encyclopedia Britannica» спрашивается, почему свойство Лёвенгейма–Скулема должно соответствовать внутренней природе логики? (Vol. 23, p. 250).

---

[7] Интересно, что статья о логике высшего порядка [Van Benthem and Doets 1983] попала не в «Справочник по математической логике» [Барвайс (ред.) 1982], а в первый том «Справочника по философской логике». Интерес к логике высших порядков, объясняют авторы, в основном исходит из (логистической) проблемы оснований математики и из разработки формальной семантики естественного языка (Р.Монтегю).

Построение различных расширений **PC**, особенно логик с обобщенными кванторами, в последние десятилетия привлекло к себе большое внимание лингвистов, математиков, философов, когнитологов. Некоторым итогом развития этого направления является фундаментальный труд «Модельно-теоретические логики» [Barwise and Feferman (eds.) 1985], где Дж.Барвайс приходит к следующему выводу: «Нет обратной дороги к точке зрения, что логика является первопорядковой». Этого же мнения придерживаются С. Шапиро и Г. Шер (см. [Shapiro, 1991] и [Sher, 1991]).

Однако второпорядковая логика являетя слишком сложной и порой с ней трудно справляться. Второпорядковые логики не являются рекурсивно перечислимыми дедуктивными системами. Основные проблемы в них возникают с логическими истинами. Например, появляются утверждения, которые логически истинны тогда и только тогда, когда имеет место обобщенная континуум гипотеза. Все эти трудности и многие другие являются неизбежным следствием огромной мощности выразительных средств второпорядковых языков. Поэтому неудивительно, что появились и появляются ослабления второпорядковой логики, а в новом HPL опубликована статья «Системы между первопорядковой и второпорядковой логикой» [Shapiro, 2001]. Ослабления могут достигаться за счет ограничительных версий понимания схем (Σ_1^1 формулы и Π_1^1 формулы), ограничения на аксиому выбора и ограничения на принцип индукции для арифметики и т.д. Также хорошо известна монадическая второпорядковая логика. Как правило, большинство из этих новых языков характеризует понятие «конечности» и разрешает категоричную характеризацию натуральных чисел. Таким образом, дедуктивная неполнота является характеристическим свойством этих систем.

Видимо, одной из наиболее интересных работ в этой области является статья Я.Хинтикки [Hintikka 1994], а также статья с громким названием «Революция в логике?» [Hintikka & Sandu 1996], и вообще целый комплекс работ Хинтикки, связанный с применением созданной им *IF-логики* (Independence Friendly – дружественной к независимости). Основная идея Хинтикки состоит в осознании того, что кванторы обычной первопорядковой логики являются *зависимыми*. Последнее означает, что если мы имеем дело с выражениями типа «для всех x имеются некоторые y, такие, что $R(x,y)$», то выбор подобных y не независим, а детерминирован выбором x-ов, иначе говоря, между x и y существует некоторая функциональная зависимость. Особенностью **IF**-логики является ее неполнота, что означает невозможность дать список аксиом, из которых все значимые формулы первопорядковой **IF**-логики могут быть выведены по чисто формальным правилам. Но в то же время она удовлетворяет свойствам компактности и Лёвенгейма–Скулема (о свойствах **IF**-логики, а также ее достоинствах и недостатках см. также [Sandu, 1998], [Eklund and Kolak, 2002]).

Видимо, стоит согласиться с Дж. ван Бентемом и К.Дэтсом [Van Benthem and Doets, 1983, p. 326], что никакая специфическая логическая теория не является *священной*. Это можно считать ответом на статью А.Царпа «Какая логика является верной логикой?» [Tharp, 1975].

Однако тематика абстрактной логики и общетеоретические проблемы обоснования математики несколько отступают перед новыми тенденциями в развитии логики конца XX века. Логика становится все более насущной в компьютерных науках, искусственном интеллекте и программировании. Подобное приложение логики порождает большое число новых логических систем, но уже нацеленных непосредственно на их практическое применение. Именно этим и обусловлен выход сборника статей (в Англии и через год в США) под названием «Что есть логическая система?» [Gabbay (ed.), 1994].

Вообще-то говоря, вопрос стоит так: существует ли одна «истинная» логика, а если нет, то как ограничить наше понимание логики или, более конкретно, логической системы? Возникают и другие вопросы: существует ли реальное различие между синтаксисом и семантикой с точки зрения приложений? И, конечно, стоит вопрос о традиционных свойствах логических систем: полноте, устранении сечения, интерполяционном свойстве и др.

Еще больше проблем возникает с расширением или сужением классической пропозициональной логики. Оказывается, логик (логических систем) не просто много, а *континуально* много. Первый результат подобного рода принадлежит российскому логику В.А. Янкову [1968] и касается мощности класса расширений интуиционистской логики. В свое время этот факт даже не был сразу осознан со всеми вытекающими отсюда последствиями. Сейчас открытие континуального класса логик – самое заурядное дело.

Необычайное многообразие логических систем, порождаемое, с одной стороны, серьезной критикой «основных» и не только основных законов логики высказываний, с другой стороны, почти неограниченным расширением понятия логической истины (по существу процесса обратного первому), а также различными спецификациями понятия логического следования и развитием компьютерных наук, – все это подводит нас к самому главному вопросу: ***Что есть логика?***

Интересно замечание Р.Джефферы в книге с весьма примечательным названием «Формальная логика: ее сфера и ее границы» [Jeffery, 1991], что данное Тарским определение логического следования не позволяет нам выяснить, что такое логика, поскольку должны приниматься во внимание *случаи*, включенные в определение логического следования. Мы можем специализировать случаи как «возможные миры», но тогда возникает сложнейший круг проблем, связанный с выяснением вопроса, что это за сущности такие «возможные миры» (см. интересную монографию [Bradley and Swartz, 1978]). Более того, наши *случаи* могут рассматриваться как ситуации в смысле Дж. Барвайса и Дж. Перри [Barwise and Perry, 1983]. Ситуации могут рассматриваться не только как *неполные* части мира, но как противоречивые, а также одновременно как неполные и противоречивые. И тогда в результате получаем совершенно новые логики, принципиально отличные от классической, такие как интуиционистская, релевантная, паранепротиворечивая, параполная и т.д.

Если сутью логики является сохранение истины во всех случаях, то различные *логики* получаются различными экспликациями этих случаев. Отсюда появился подход в логике, названный «логическим плюрализмом» (см. [Beall and Restall, 2000])[8]. На самом деле, логический плюрализм в логике появился задолго до того, как обратились к серьезному анализу того понимания логического следования, которое было предложено А.Тарским, а именно с критики основных законов логики, предпринятой в начале XX века Л.Брауэром, Н.А.Васильевым и Я. Лукасевичем. К тому же понимание логики имело и совсем другую традицию, весьма отличную от Тарского и идущую от Г.Фреге и Б.Рассела.

Определение логики, данное Фреге, необычайно красиво: «Логика есть наука о наиболее общих законах бытия истины» (см. [Фреге, 2000, с. 307][9]. Может показаться удивительным, что такое понимание логики продержалось почти сто лет и с некоторой модификацией вошло в основание уже упоминавшейся книги У. Куайна «Философская логика», где предметом логики, напомним, является «систематическое изучение логических истин». Этот почти столетний период подобного осознания задачи логики был назван М.Дамметтом «логицистическим засильем». И есть весьма веские основания в смене парадигмы, ставшей, в первую очередь, результатом развития компьютерных наук.

Стоит заметить, что традиционный подход к пониманию логики весьма подкупает тем, что логику в нем можно попытаться определить посредством совокупности логических законов, ее задающих. С современной точки зрения «логический закон» – это «теорема формальной системы». Не вдаваясь в детали того, что такое формальная система и доказательство в ней, ограничимся тем пониманием, которое уже было дано: законы логики *с необходимостью* сохраняют истинность. Такое понимание законов логики восходит еще к Аристотелю, но тут мы сталкиваемся с вопросом необычайной сложности: что есть истина? В конечном счете мы можем попытаться договориться, что толковать под логическими законами относительно того или иного понимания

---

[8] Создан интернетовский проект «Логический плюрализм» с участием Г.Ресталла (http://pluralism.pitas.com/).

[9] При этом Фреге ссылается на свою неуклюжесть и беспомощность языка.

истины. Различные концепции истины, например, корреспондентная, когерентная или прагматическая не диктуют специфичности той или иной логики. Но уже случай с интуиционистским пониманием того, что́ есть истина, говорит о непримиримости позиций. В первых интерпретациях интуиционистской логики (до появления крипковской семантики) понятие истины вообще не возникает. К тому же мы опять сталкиваемся с проблемой определения логического закона, не определившись с тем, что считать логическими константами (операциями). Как мы видели, расширение классической первопорядковой логики приводит к тому, что множество логических истин в лучшем случае не является конечно аксиоматизируемым.

Ровно через сто лет после выхода в свет знаменитой работы Г.Фреге «Исчисление понятий» (1879) (см. [Фреге, 2000]), в которой вводятся предикаты, отрицание, условная связь (the conditional) и кванторы как основа логики, а также идея формальной системы, в которой демонстрации должны осуществляться посредством явно сформулированных синтаксических правил, – после ста лет триумфального развития логики как самостоятельной науки, вызывающей поклонение, удивление, а порой горькое отрешение и даже мщение у ее бывших адептов и мистический страх у большинства остальных, вдруг появляется статья Я. Хэкинга под названием «Что есть логика?» [Hacking, 1979]. Хэкинг высоко оценивает введение Г.Генценом структурных правил, работа с которыми позволяет выражать те аспекты логических систем, которые не имеют непосредственного отношения к логическим константам[10]. Именно представление и развитие логики в виде секвенциального исчисления, где принципы дедукции задаются правилами, позволяющими переходить от одних утверждений о выводимости к другим, позволило Хэкингу определить логику как науку о дедукции[11]. Не случайно статьей Хэкинга открывается уже упоминавшийся нами сборник работ под названием «Что есть логическая система?» [Gabbay (ed.), 1994]. В этом же сборнике публикуется статья Дж.Ламбека под названием «Что есть дедуктивная система?» [Lambek, 1994], в которой выделяются *пять* стилей дедуктивных систем: (1) гильбертовский (дедукция вида $f: \to B$, для формулы B; (2) стиль Ловера ($f: A \to B$, для формул A и B); (3) генценовский интуиционистский стиль ($f: A_1 \cdots A_m \to B$); (4) генценовский классический стиль ($f: A_1 \cdots A_m \to B_1 \cdots B_n$), и (5) стиль Шютте (Schütte) ($f: \to B_1 \cdots B_n$). Сам Ламбек отдает предпочтение генценовским стилям в силу введения структурных правил. Отметим, что Ламбек уделяет особое внимание равенствам между выводами. В связи с этим обратим внимание на работу

[10] Это важное открытие сделано Г.Генценом в 1935 г. См. [Генцен, 1967].

[11] Заметим, что именно такому пониманию логики посвящена вся книга В.А.Смирнова [1972] (переиздана в 1999 г.)

Г.Минца [Минц 1977], где строится дедуктивная система **НСС** гильбертовского типа, в которой определяется отношение эквивалентности для выводов. Это превращает **НСС** в замкнутую категорию: объектами являются формулы, а морфизмами – классы эквивалентности выводов. Подобный подход к теории доказательств стал особенно актуальным под влиянием теории категорий и компьютерных наук.

4. Компьютеризация логики

В.Карниэлли в рецензии на [Gabbay (ed.) 1994] выдвигает *основное* предположение: «Нет доказательств, нет логики» [Carnielli, 1996, p. 6417]. Именно теория доказательств в последнее время все больще привлекает к себе внимание (см., например, двухтомник [Schwichtenberg and Troelstra, 2000]). В это же время появляется сайт «Теория доказательств накануне 2000 г.», созданный С.Феферманом [Feferman, 1999b], где сформулировано 10 проблем, на которые поступают ответы ведущих логиков, работающих в данной области.

Однако в последней четверти XX в. теория доказательств претерпела значительные изменения и напрямую стала применяться в компьютерных науках. Мы имеем здесь в виду *автоматический поиск доказательств*. В нашей стране исследования в этой области с 60-х годов проводились группой Ю.М.Маслова. Классической монографией по автоматическому доказательству, переведенной на русский язык, стала книга [Chang and Lee, 1973], в которой развивается *метод резолюций* для первопорядковой логики (см. также монографию [Gallier, 1986]).

В течение двух последних десятилетий многие теоретические идеи автоматического доказательства были воплощены в компьютерных программах, так называемых *пруверах*. Эти программы осуществляют поиск выводов в различных логических исчислениях. Так, в середине 80-х годов в Аргоннской Национальной Лаборатории в США был создан резолютивный прувер OTTER для первопорядковой логики, его описание находится в [McCune, 1994]. И по сей день его создатели работают над развитием программы и увеличением быстродействия ее отдельных участков. В 90-х годах появился SCOTT (см. отчет [Slaney, 1992]) – программа австралийского Проекта Автоматического Доказательства, надмножество OTTER, позволяющая использовать в процессе построения выводов семантические ограничения и тем самым существенно сократить время работы программы.

Отечественные логики, сотрудники философского факультета МГУ и Института философии РАН, создали свой интерактивный прувер DEDUCTIO, который подробно изложен в [Смирнов и др., 1996]. Отличительным достоинством DEDUCTIO является широкая область его возможного использования: аксиоматический вывод, натуральный, аналитико-табличный. Имеется сайт с библиографией по пруверам, созданный в Канаде (1997-2001), содержащий более 3000 ссылок[12].

Применение логики в компьютерных науках стало настолько широким, что можно говорить о главном феномене развития логики конца XX в. Уже в 70-е годы появился термин «Вычислительная логика», а затем и «Компьютерная логика».

Особая тема – создание искусственного интеллекта[13]. В книгах [Turner, 1984] и [Dix, Del Cerro and Furbach, 1998] предлагаются различные нестандартные логики для искусственного интеллекта. Логическому подходу к искусственному интеллекту посвящено две книги (но с разными подзаголовками) на французском языке в 1988 г. и 1989 г. (см. соответственно переводы на рус. язык: [Тейз, Грибомон, Луи и др., 1990] и [Тейз, Грибомон, Юлен и др., 1998]. О логико-философском подходе к искусственному интеллекту см. сборник статей [Thomason (ed.), 1989]. Обратим внимание на многотомные справочники (укажем только последние тома: [Abramsky, Gabbay and Maibaum (eds.), 1995] и [Gabbay, Hogger and Robinson (eds.), 1998]).

Создание искусственного интеллекта (в дальнейшем ИИ) от навязчивой идеи перешло в плоскость серьезного обсуждения и фундаментальной проблемой, дискутируемой сейчас, является следующая: может ли реально логика стать основанием ИИ? Здесь надо иметь в виду, что логическая дедукция является дискретным процессом, чего нельзя однозначно сказать о человеческом мышлении. Имеются сторонники *сильной* концепции ИИ (механисты), утверждающие, что человеческий мозг (разум) может быть точно смоделирован цифровым компьютером или машиной Тьюринга. С наиболее известной критикой против механистов выступил Дж. Лукас [Lucas, 1961] в философской статье, неоднократно переизданной. Лукас в основном опирается на теоремы Гёделя о неполноте, утверждающих существование абсолютно неразрешимых арифметических предложений, т.е. таких, которые нельзя ни доказать, ни опровергнуть. Этим, по Лукасу, существенно ограничивается вычислительная сфера деятельности машин. Дж. Вебб в своей книге [Webb, 1980] апеллирует к эффективности результата Гёделя, заключая, что Гёдель «впервые установил … что из высказывания "Я могу найти ограничения в любой машине" несомненно следует, что Я не машина». К ним также присоединился известный физик и космолог Р.Пенроуз [Penrose, 1989] (книга переведена на русский язык в 2003 г.), который, кроме всего прочего, включая и

[12] http://www.ora.on.ca/biblio/biblio-prover-html.

[13] В 1979 г. основана Американская Ассоциация по Искусственному Интеллекту, издающая свой журнал "Artificial Intelligence" и проводящая ежегодные международные конференции, симпозиумы и школы-семинары (http://www.aaai.org/).

физические аргументы, опирается также на неразрешимость проблемы разрешимости для массовых проблем, т.е. на отсутствие в принципе единого алгоритма для решения математических задач (доказано А.Тьюрингом в 1937 г., а затем А.Чёрчем в 1941 г.) Лукас и Пенроуз аргументируют, что есть человеческие процедуры (методы вычисления), которые не могут быть смоделированы машиной Тьюринга. Но если сила человеческого разума превосходит любую машину, тогда он каким-то образом постигает истину, не доступную машине. Так считает и Гёдель в своих неопубликованных работах (см. [Wang, 1974, pp. 324-326] и [Wang, 1996], а также третий том работ самого Гёделя [Gödel, 1995]). Однако проблема заключается в том, чтобы представить в явном виде примеры подобных вычислительных процессов.

Существует большая литература содержащая критику позиции Лукаса–Пенроуза (см., например, [Minsky, 1968], а также книгу Д. Хофштадтера [Hofstadter, 1979], привлекшую большое внимание и переведенную на рус. язык в 2001 г.). Через три с лишним десятилетия Лукас [Lucas, 1996] усиливает, или пытается усилить, свою позицию, а Пенроуз в новой книге [Penrose, 1994] посвящает более 200 стр. ответам своим критикам и изобретению весьма интригующих аргументов. Интересно, что как механисты, так и антимеханисты понимают и принимают силу и универсальность ограничительных теорем Гёделя. Но создается несколько парадоксальное впечатление, что для первых это означает ограниченность человеческих вычислительных способностей, а для вторых наоборот: вычислительные способности человека намного «сложнее» машины и, главное, человек оперирует с абстрактными объектами (см. [Kreisel, 1972]). Особо обратим внимание на недавнюю работу профессионального логика С. Шапиро [Shapiro, 1998], где обстоятельно анализируются аргументы противоборствующих сторон. Здесь отмечается, что расширение вычислительных возможностей человека ведет к тому, что он становится не только *непогрешимым*, но и *всеведущим*. Если вспомнить, какая ожесточенная дискуссия шла в Средние века (и продолжается сейчас на Западе) относительно совместимости догматов о всеведении Бога и свободы воли человека, то понятно, какой тяжкий груз проблем придется решать. Наконец, приведем интересное рассуждение П. Бенакеррафа в статье «Бог, дьявол и Гёдель» [Benacerraf, 1967]. Если идеализированные версии человеческих существ есть машины Тьюринга, тогда они не в состоянии выполнить сократовский призыв: «Познай самого себя». Если идеальный человек есть машина Тьюринга, то он не сможет знать, которой из машин Тьюринга он является (в силу тезиса Чёрча–Тьюринга все машины Тьюринга тем более эквивалентны). Отсюда возникает классическая проблема о границах человеческого познания и, конечно, опять же о границах логики.

Между рассуждениями искусственного интеллекта и рассуждениями человеческого интеллекта лежит целая пропасть. По всей видимости, преодолеть эту пропасть невозможно, но именно на этом бесконечном пути преодоления лежит магистральное развитие логики, основная функция которой – *аппроксимация* различных способов человеческих рассуждений. Предельным случаем аппроксимации, и пока наиболее эффективным и плодотворным, как раз и является формализованный дедуктивный метод, доведенный до степени компьютерных программ.

Существуют, конечно, и развиваются другие методы аппроксимации: гипотетико-дедуктивный, индукция и абдукция, формализация правдоподобных рассуждений (см. [Финн, 1988]). В последнее время бурно развиваются *немонотонные логики*[14] и различные теории *аргументации* (отметим только работу [Финн, 1996b] как наиболее приближенную к формально-логическому моделированию).

Однако все-таки будущее за компьютеризацией логики и ее применением в компьютерных науках и информатике. Тем более что мы еще не знаем полностью, чего можно ждать от принципиально новых компьютеров: квантовых, нейронных и др. Обратим внимание на весьма примечательный факт. В 1960 г. нобелевский лауреат Е.П. Вигнер написал статью о труднообъяснимой эффективности математики в естественных науках, как бы подтверждая слова Галилея о том, что «книга природы написана на языке математики». Нечто подобное справедливо для отношения логики к computer science. В настоящее время концепции и методы логики занимают одно из центральных мест здесь и она может быть даже названа исчислением computer science. Как раз статья шести американских логиков [Halpern *et al.*, 2001], вышедшая в начале нового века, посвящена этой теме.

В предисловии Д. Габбая к каждому тому нового HPL справедливо отмечается, что предыдущий «Справочник по философской логике» стал библией для логического сообщества. Основная интенция нового издания состоит в том, чтобы в наиболее полной мере отразить исключительное значение логики в компьютерных науках, в разработке формализованных (вычислительных) языков типа комбинаторной логики и λ-исчислений и в искусственном интеллекте. Габбай предсказывает, что недалек тот день, когда ученый в области компьютерных наук проснется с осознанием

---

[14] Немонотонные рассуждения, в отличие от классических, интуиционистских, классически-модальных и т.д., позволяют адекватно оперировать с не полной и изменяющейся информацией. С 1994 г. проводится Международная школа-семинар по немонотонным рассуждениям (http://www.medg.lcs.mit.edu/nm/). Отметим большой обзор [Brewka, Dix and Konolige, 1995] и монографии [Antoniou and Williams, 1997] и [Bochman, 2001].

того, что его профессиональный род деятельности принадлежит формальной философии.

ЛИТЕРАТУРА[15]

[Анисов, 2002] А. М. Анисов. *Современная логика.* М.: ИФ РАН, 2002.

[Бажанов 1995]. В. А. Бажанов. *Прерванный полёт. История «университетской» философии и логики в России.* М.: МГУ, 1995.

[Барвайс (ред.), 1982] Под ред. Д. Барвайса. *Справочная книга по математической логике.* В 4-х частях. М.: Наука, 1982.

[Васюков, 1999] В. Л. Васюков. *Формальная феноменология.* М.: Наука, 1999.

[фон Вригт, 1992] Г. Х. фон Вригт. Логика и философия в XX веке // *Вопр. философии*, 8: 80-91, 1992.

[Генцен, 1967] Г. Генцен. Исследование логических выводов // Г. Генцен. *Математическая теория логического вывода.* М.: Наука, 1967.

[Герасимова (ред.), 2003] Под ред. И. А. Герасимовой. *Мысль и искусство аргументации.* М.: Прогресс-Традиция, 2003.

[Гладкий, 2001] А. В. Гладкий. *Введение в современную логику.* М.: МЦНМО, 2001.

[Гончаров, Ершов и Самохвалов, 1994] С. С. Гончаров, Ю. Л. Ершов и К. Ф. Самохвалов. *Введение в логику и методологию науки.* М.: ИНТЕРПРАКС, 1994.

[Есенин-Вольпин, 1993] А. С. Есенин-Вольпин. Об антитрадиционной (ультраинтуиционистской) программе оснований математики и естественнонаучном мышлении. *Семиотика и информатика,* 33: 13-67, 1993. (Переиздано в: А. С. Есенин-Вольпин. *Философия. Логика. Поэзия. Защита прав человека: Избранное* / Сост.: А. Ю. Даниэль, С. М. Лукашевский, В. К. Финн; Под общ. ред. В. К. Финна и А. Ю. Даниэля. М.: РГГУ, 1999).

[Зиновьев, 2003] А. А. Зиновьев. Комплексная логика // *Вопр. философии,* 1: 29-37, 2003.

[Карпенко, 1990] А. С. Карпенко. *Фатализм и случайность будущего. Логический анализ.* М.: Наука, 1990.

[Карпенко, 2000] А. С. Карпенко. Логика на рубеже тысячелетий // *Логические исследования,* 7: 7-60. М.: Наука, 2000.

[Карпенко, 2001] А. С. Карпенко. Логика в России // *Новая Философская Энциклопедия.* Т. 2. С. 409-414. М.: Мысль, 2001.

[Кузнецов, 1960] А. В. Кузнецов. Алгебра логики. *Философская Энциклопедия.* Т. 1. С. 33-38. М.: Мысль, 1960.

[Марков, 1984] А.А. Марков. *Элементы математической логики.* М.: МГУ, 1984.

[Мендельсон, 1984] Э. Мендельсон. *Введение в математическую логику.* М.: Наука, 1984.

---

[15] За образец составления использованной литературы (ссылки) взято новое издание "*Handbook of Philosophical Logic*".

[Минц, 1977] Г. Е. Минц Замкнутые категории и теория доказательств // Г. Е. Минц и В. П. Оревков (ред.) *Теоретическое применение методов математической логики*. II. С. 83-114. Ленинград, Наука, 1977. (Англ. пер.: Closed categories and the theory of proofs // G. Mints. *Selected Papers in Proof Theory*. P. 183-212. Bibliopolis and North-Holland, 1992).

[Перминов, 2001] В. Я. Перминов. *Философия и основания математики*. М.: Прогресс-Традиция, 2001.

[Подниекс, 1992] К. М. Подниекс. *Вокруг теоремы Гёделя*. Рига: Зинатне, 1992. (Расширенный перевод книги на англ. языке имеется на сайте http://www.ltn.lv/~podnieks/gt.html).

[Смирнов, 1972] В. А. Смирнов. *Формальный вывод и логические исчисления*. М.: Наука, 1972. (Переиздано с комментариями: В. А. Смирнов *Теория логического вывода*. С. 16-233. М.: РОССПЭН, 1999).

[Смирнов и др., 1996] В. А. Смирнов, В. И. Маркин, А. Е. Новодворский и А. В. Смирнов. *Доказательство и его поиск*. В сер. «Логика и компьютер». Вып. 3. М.: Наука, 1996.

[Смирнова 1986] Е. Д. Смирнова. *Логическая семантика и философские основания логики*. М.: МГУ, 1986.

[Тарский, 1999] А. Тарский. Понятие истины в языках дедуктивных наук // *Философия и логика Львовско-Варшавской школы*. С. 19-155. М.: РОССПЭН, 1999.

[Тейз, Грибомон, Луи и др., 1990] А. Тейз, П. Грибомон, Ж. Луи и др. *Логический подход к искусственному интеллекту: от классической логики к логическому программированию*. М.: Мир, 1990.

[Тейз, Грибомон, Юлен и др., 1998] А. Тейз, П. Грибомон, Г. Юлен и др. *Логический подход к искусственному интеллекту: От модальной логики к логике баз* данных. М.: Мир, 1998.

[Финн, 1988] В. К. Финн. Правдоподобные выводы и правдоподобные рассуждения // *Итоги науки и техники. Сер. Теория вероятностей. Математическая статистика*, 28: 3-84. М.: ВИНИТИ, 1988.

[Финн, 1996a] В. К. Финн. Неологицизм – философия обоснованного знания // *Вопр. философии*, 8: 89-99, 1996. (Переиздано в [Финн, 200. С. 22-37]).

[Финн, 1996b] В. К. Финн. Об одном варианте логики аргументации // *Научно-техническая информация*. Сер. 2, N 5-6: 3-19, 1996. (Переиздано в [Финн, 2001. С. 206-251]).

[Финн, 2001] В. К. Финн. *Интеллектуальные системы и общество*. Сборник статей. М.: РГГУ, 2001.

[Фреге, 2000] Г. Фреге. *Логика и логическая семантика*. М.: АСПЕКТ ПРЕСС, 2000.

[Шуман, 2001] А. Н. Шуман. *Философская логика: Истоки и эволюция*. Минск : ЭКОНОМПРЕСС, 2001.

[Янков, 1968] В. А. Янков. Построение последовательности сильно независимых суперинтуиционистских пропозициональных исчислений // *Доклады Академии Наук СССР*, 181: 33-34, 1968.

[Abramsky, Gabbay and Maibaum (eds.), 1995] S. Abramsky, D. M. Gabbay and T. S. E. Maibaum (eds). *Handbook of Logic in Computer Science*. Vol. IV. *Semantic Modelling*. Oxford: Oxford Science Publications, 1995.

[Andréka, Németi, and Sain, 2001] H. Andréka, I. Németi and I. Sain. Algebraic logic. In D. Gabbay and F. Guenthner (eds.) *Handbook of Philosophical Logic*. Vol. 2. Dordrecht: Kluwer Academic Publishers, 2001.

[Antoniou and Williams, 1997] G. Antoniou and M. A. Williams. *Nonmonotonic Reasoning*. Cambridge: The MIT Press, 1997.

[Barwise and Feferman (eds.), 1985] J. Burwise and S. Feferman (eds.) *Model-Theoretic Logics*. Berlin: Springer-Verlag, 1985.

[Barwise and Perry, 1983] J. Barwise and J. Perry. *Situations and Attitudes*. Cambridge, MA: MIT Press, 1983.

[Beall and Restall, 2000] J. Beall and G. Restall. Logical pluralism // *Australian Journal of Philosophy*, 78: 475-493, 2000.

[Benacerraf, 1967] P. Benacerraf. God, the devil, and Gödel // *The Monist*, 5: 9-32, 1967.

[Blok and Pigozzi, 1989] W. J. Blok and D. Pigozzi. *Algebraizable logics* (monograph). *Memoirs of the American Mathematical Society*, 1989, № 396.

[Bochman, 2001] A. Bochman. *Logical Theory of Nonmonotonic Inference and Belief Change*. Berlin: Springer, 2001.

[Boolos, 1975] G. Boolos. On second-order logic // *Journal of Philosophy*, 72: 509-527, 1975.

[Bradley and Swartz, 1978] R. Bradley and N. Swartz. *Possible Worlds: An Introduction to Logic and its Philosophy*. Oxford: Blackwell, 1978.

[Brewka, Dix and Konolige, 1995] G. Brewka, J. Dix and K. Konolige. *Nonmonotonic Reasoning: An Overview*. Stanford: CSLI Publications, 1995.

[Buss *et al.*, 2001] S. R. Buss, A. S. Kechris, A. Rillay and A. Shore. The prospects for mathematical logic in the twenty-first century // *The Bulletin of Symbolic Logic*, 7: 169-196, 2001.

[Carnielli, 1996] W. A. Carnielli. Review of [Gabbay (ed.) 1994] // *Mathematical Review*, 96k: 03008, 1996.

[Chaitin, 2000] G. J. Chaitin. A century of controversy over the foundations of mathematics // C. Calude and G. Paun (eds.) *Finite versus infinite*. London: Springer-Verlag, 2000. P. 75-100. (Статья доступна в электронном виде: http://www.umcs.maine.edu/~chaitin/lowell.html).

[Chang and Lee, 1973] C. Chang and R. C. T. Lee. *Symbolic Logic and Mechanical Theorem Proving*. New York: Academic Press, 1973.

[Corcoran, 1972] J. Corcoran. Conceptual structure of classical logic // *Philosophy and Phenomenological Research*, 33: 25-47, 1972.

[Da Costa, Béziau and Otávio, 1995] Paraconsistent logic in a historical perspective // *Logique et Analyse*, 150-151-152: 111-125, 1995.

[Da Costa, Béziau and Otávio, 1996] N. C. A. da Costa, J-Y. Béziau and O. A. S. Otávio. Malinowski and Suszko on many-valued logics: On the reduction of many-valuedness to two-valuednes // *Modern Logic*, 6, N 3: 272-299, 1996.

[Daynes, 2000] A strictly finitary non-triviality proof for a paraconsistent system of set theory deductively equivalent to classical *ZFC* minus foundation // *Archive for Mathematical Logic*, 39: 581-598, 2000.

[Dix, Del Cerro and Furbach (eds.), 1998] J. Dix, F. L. Del Cerro and U. Furbach (eds.) *Logics in Artificial Intelligence*, Lecture Notes in Computer Science. Vol. 1489. Berlin: Springer, 1998.

[Dummett, 1963] M. Dummett. The philosophical significance of Gödel's theorem // *Ratio*, 5: 140-155.

[Dunn and Hardegree, 2001] J. M. Dunn and G. Hardegree. *Algebraic methods in philosophical logic*. Oxford: Oxford University Pres, 2001.

[Eklund and Kolak, 2002] M. Eklund and D. Kolak. Is Hintikka's logic first-order? // *Synthese*, 131, N 3: 371-388, 2002.

[Engel, 1992] P. Engel. *Norm of truth: An introduction to the philosophy of logic*. University of Toronto Press, 1992.

[Epstein, 1990] R. L Epstein. *The semantic foundations of logic. Vol. 1: Propositional logic.* Dordrecht: Kluwer, 1990 (2nd ed., 1995).

[Epstein, 1994] R. L Epstein. *The semantic foundations of logic. Vol. 2: First-order logic*. Dordrecht: Kluwer, 1994.

[Etchemendy, 1990] J. Etchemendy. Tarski on truth and logical consequence // *The Journal of Symbolic Logic*, 53: 51-79, 1988.

[Etchemendy, 1990] J. Etchemendy. *The Concept of Logical Consequence*. Cambridge, Mass: Harvard University Press, 1990.

[Feferman, 1999a] S. Feferman. Logic, logics, and logicism // *Notre Dame Journal of Formal Logic*, 40, N 1: 31-54, 1999.

[Feferman, 1999b] S. Feferman. *Proof Theory on the Eve of the Year 2000*. http://www-logic.stanford.edu/proofsurvey.html.

[Fraenkel *et al.*, 1973] A. Fraenkel, Y. Bar-Hillel, A. Levy and D. van Dalen. *Foundations of Set Theory*. Amsteram: North-Holland, 1973. (Имеется перевод на рус. яз. с первоначальной версии: А.Френкель и И.Бар-Хиллел. *Основания теории множеств*. М.: Мир, 1966).

[Gabbay, Hogger and Robinson (eds.), 1998] D. M. Gabbay, C. J. Hogger and J. A. Robinson (eds.) *Handbook of Logics in Artificial Intelligence and Logic Programming. Vol. V. Logic Programming*. Oxford: Oxford Science Publications, 1998.

[Gabbay and Guenthner (eds.), 1983 – 1989] D. Gabbay and F. Guenthner (eds.) *Handbook of philosophical logic*. Vols. I – IV. Dordrecht: Reidel, 1983 – 1989.

[Gabbay and Guenthner (eds.), 2001 – ?] D. Gabbay and F. Guenthner. (eds.) *Handbook of philosophical logic*. Vols. 1 – 18. 2nd Edition. Dordrecht: Kluwer Academic Publishers, 2001 – ?

[Gabbay (ed.) 1994] D. M. Gabbay. *What is a logical system?* Oxford: Clarendon Press, 1994 (and New York, 1995).

[Gallier, 1986] J. H. Gallier. *Logic for Computer Science: Foundations of Automatic Theorem Proving*. Harper & Row, 1986.

[Gödel, 1995] K. Gödel. *Collected Works III*, editor in chief S. Feferman. Oxford: Oxford University Press, 1995.

[Gómez-Torrente, 1996] M. Gómez-Torrente. Tarski on logical consequence // *Notre Dame Journal of Formal Logic*, 37, N 1: 125-151, 1996.

[Gómez-Torrente, 2000] M. Gómez-Torrente. Note on formality and logical consequence // *Journal of Philosophical Logic*, 29, N 5: 529-533, 2000.

[Grayling, 1997] A.C. Grayling. *Introduction to philosophical logic*. Blackwell Publishers, 1997 (2nd ed).

[Haack, 1978] S. Haack. *Philosophy of Logics*. Cambridge: Cambridge University Press, 1978.

[Haack, 1996] S. Haack. *Deviant Logic, Fuzzy Logic: Beyond the Formalism*. Chicago: University of Chicago Press, 1996.

[Hacking, 1975] I. Hacking What is logic? // *The Journal of Philosophy*, 76, N 6, 1979. (Переиздано в [D. M. Gabbay, (ed.) 1994. P. 1-33]).

[Halmos and Givant, 1998] P. Halmos and S. Givant. *Logic as Algebra*. Washington, 1998.

[Halpern *et al.*, 2001] Y. Halpern, R. Harper, N. Immerman, P. G. Kolaitis, M. Y. Vardi and V. Vianu. On the unusual effectiveness of logic in computer science // *The Bulletin of Symbolic Logic*, 7, N 2: 213-236, 2001.

[Hanson, 1999] Ray on Tarski on logical consequence // *Journal of Philosophical Logic*, 28, № 6: 605-616, 1999.

[Hintikka J. 1994] J. Hintikka. What is true elementary logic? // K. Gavroglu., J. Stachel and M. Wartofsky. (eds.) *Physics, Philosophy and the Scientific Community*. P. 301-326. Dordrecht: Kluwer, 1994.

[Hintikka and Sandu, 1996] J. Hintikka and G. Sandu A revolution in logic? // *Nordic Journal of Philosophical Logic*, 1, N 2: 169-183, 1996.

[Hofstadter, 1979] D. R. Hofstadter. *Gödel, Escher, Bach: an Eternal Golden Braid*. Hassocks, Sussex: Harvester Press. (Русский перевод: Д. Хофштавтер. *Гёдель, Эшер, Бах: эта бесконечная гирлянда*. Самара: Издательский дом «Бахрах-М», 2001).

[Jacquette, 2002] D. Jacquette. *A Companion to philosophical logic*. Blackwell: Blackwell Companions to Philosophy, 2002.

[Jeffery, 1991] R. Jeffery. *Formal Logic: its Scope and its Limits*. McGraw Hill. 3d edition, 1991.

[Jones, 2002] R. B. Jones. *Factasia* (http://www.rbjones.com/rbjpub/).

[Keenan and Stavi, 1986] E. L. Keenan and J. Stavi. A semantic characterization of natural language determiners, *Linguistic and Philosophy*, 9: 253-326, 1986.

[Keenan and Westerståhl, 1997] E. L. Keenan and D. Westerståhl. Generralized quantifiers in linguistics and logic // J. van Benthem and A. ter Meulen (eds.) *Handbook of Logic and Language*. P. 837-893. Amsterdam: Elsevier, 1997.

[Klibansky, 1968] R. Klibansky. *Contemporary philosophy. A Survey. Vol. 1. Logic and Foundation Mathematics*. La Nuova Italia, Firenze 1968.

[Kneale and Kneale, 1962] W. Kneale and M. Kneale. *The Development of Logic*. Oxford: Oxford University Press, 1962.

[Kreisel, 1972] G. Kreisel. Which number theoretic problems can be solved in recursive progressions on Π^1_1 path through 0? // *The Journal of Symbolic Logic*, 37: 311-334.

[Lambek, 1994] J. Lambek. What is a deductive system? // [Gabbay D. M. (ed.), 1994. P. 141-159].

[Lindström, 1969] P. Lindström. On extensions of elementary logic // *Theoria*, 35: 1-11, 1969.

[Lönning, 1997] U. Lönning. Plurals and collectivity // J. van Benthem and A. ter Meulen (eds.) *Handbook of Logic and Language*. Amsterdam: Elsevier Science Publishers, 1997.

[Lucas, 1961] J. R. Lucas. Minds, machines, and Gödel // *Philosophy*, 36: 112-137, 1961.

[Lucas, 1996] J. R. Lucas. Minds, machines, and Gödel: A retrospect // P. J. R. Millican and A. Clark (eds.) *Machines and thought: The Legacy of Alan Turing, Vol. 1*. Oxford: Oxford University Press, 1996.

[Manzano, 1996] M. Manzano. *Extensions of first order logic*. Cambridge, Cambridge University Press, 1996.

[McCarthy, 1981] T. McCarthy. The idea of a logical constant // *Journal of Philosophy*, 78: 499-523, 1981.

[McCune, 1994] W. W. McCune. *Otter 3.0 Reference Manual and Guide. Technical Report* ANL-94/6. Aragonne National Laboratoty (www-unix.mcs.anl.gov/otter/).

[McGee, 1996] V. McGee. Logical operations // *Journal of Philosophical Logic*, 78: 499-523.

[Minski, 1968] M. L. Minski. Matter, mind and models // M. L. Minski (ed.) *Semantic Information Processing*. Cambridge: The MIT Press, 1968.

[Mostowski, 1957] A. Mostowski. On a generalization of quantifiers // *Fundamenta Mathematicae*, 44: 12-36, 1957.

[Muskens, 1995] R. Muskens. *Meaning and Partiality*. Studies in Logic, Language and Information. Stanford: CSLI Publications, 1995.

[Peacocke, 1976] C. Peacocke. What is a logical constant? // *Journal of Philosophy*, 73: 221-241, 1976.

[Penrose, 1989] R. Penrose. *The Emperor's New Mind: Concerning Computers, Minds and the Laws Physics*. Oxford: Oxford University Press, 1989. (Русский перевод: Р. Пенроуз. *Новый ум короля. О компьютерах, мышлении и законах физики*. М.: УРСС, 2003).

[Penrose, 1994] R. Penrose. *Shadows of the Mind: A Search for the Missing Science of Consciousness*. Oxford: Oxford University Press, 1994.

[Priest, 1979] G. Priest. Logic of paradox // *Journal of Philosophical Logic*, 8: 219-224, 1979.

[Quine, 1970] W. V. Quine. *Philosophy of Logic*. N.Y.: Englewood Cliffs, 1970 (Reprinted in 1986).

[Ray, 1966] Logical consequence: A defense of Tarski // *Journal of Philosophical Logic*, 25, N 6: 617-677, 1966.

[Read, 1995] S. Read. *Thinking About Logic: An Introduction to the Philosophy of Logic*. Oxford: Oxford University Press, 1995.

[Rescher, 1968] N. Rescher. *Topics in philosophical logic*. Dordrecht: Reidel, 1968.

[Sagüillo, 1997] J. Sagüillo. Logical consequence revisited // *The Bulletin of Symbolic Logic*, 3, N 2: 216-241, 1997.

[Sainsbury, 1991] M. Sainsbury. *Logical Forms: An Introduction to Philosophical Logic.* Blackwell Publishers, 1991.

[Sandu, 1998] G. Sandu. If-logic and truth definition // *Journal of Philosophical* Logic, 27, N 2: 143-164, 1998.

[Schwichtenberg and Troelstra, 2000] H. Schwichtenberg and A. S. Troelstra. *Basic Proof Theory.* Cambridge: Cambridge University Press, 2000.

[Searle, 1987] J. R. Searle. Minds and brains without programs // C. Blakemore and S. Greenfield, editors. *Mindwaves.* Oxford: Basil Blackwell, 1987.

[Shapiro, 1991] S. Shapiro. *Foundations without Foundationalism: A Case for Second-order Logic.* Oxford: Oxford University Press, 1991.

[Shapiro (ed.), 1996] S. Shapiro. *The limits of Logic.* Aldershot: Dartmouth, 1996.

[Shapiro, 1998] S. Shapiro. Incompleteness, mechanism, and optimism // *The Bulletin of Symbolic Logic*, 4, N 3: 273-302, 1998.

[Shapiro, 2001] S. Shapiro. Systems between first-order and second-order logics // D. Gabbay and F. Guenthner (eds.) *Handbook of philosophical logic. Vol. 1.* P. 127-179. 2nd Edition. Dordrecht: Kluwer Academic Publishers, 2001.

[Sher, 1991] G.Y. Sher. *The Bounds of Logic. A Generalized Viewpont.* Cambridge: The MIT Press, 1991.

[Simons, 1988] P. M. Simons. Bolzano, Tarski, and the limits of logic // *Philosophia Naturalis*, 24: 378-405, 1988.

[Slaney, 1992] J. Slaney, *FINDER (Finite Domain Enumerator): Notes and Guide. Technical Report* TR-ARP-1/92. Canberra: Australian National University, 1992.

[Smullyan, 1992] R. M. Smullyan. *Gödel's Incompleteness Theorems.* Oxford: Oxford University Press, 1992.

[Soames, 1998] S. Soames. *Understanding Truth.* New York: Oxford University Press, 1998.

[Suber, 2000] P. Suber. *A Bibliography of non-standard logics* (http://www.earlham.edu/).

[Tarski, 1986] A. Tarski. On the concept of logical consequence // A. Tarski. *Logic, Semantics, Metamatematics*, second edition. P. 409-420. Indianapolis: Hacket, 1983.

[Tarski, 1986] A. Tarski. What are logical notions? // *History and Philosophy of Logic*, 7: 143-154, 1986.

[Tharp, 1975] L. Tharp. Which logic is the right logic? // *Synthese*, 31: 1-21.

[Thomason (ed.), 1989]. R. H. Thomason (ed.) *Philosophical Logic and Artifical Intelligence.* Dordrecht: Kluwer, 1989.

[Turner, 1984] R. Turner. *Logics for Artificial Intelligence.* Chichester: Ellis-Horwood, 1984. (2nd ed. 1985).

[Uspensky, 1997] V. A. Uspensky. Mathematical logic in the former Soviet Union: Brief history and current trends // M. L. Dalla Chiara *et al.* (eds.) *Logic and Scientific methods.* P. 457-483. Dordrecht: Kluwer, 1997.

[Van Benthem and Doets, 1983] J. Van Benthem and K.Doets. Higher-order logic // [Gabbay and Guenthner (eds.), 1983 – 1989]. Vol. I. P. 275-329.

[Van Benthem, 1986] J. van Benthem. *Essays in Logical Semantics.* Dordrecht: Kluwer, 1986.

[Van Benthem, 1989] J. van Benthem. Logical constants across varying types // *Notre Dame Journal of Formal Logic*, 30: 315-342.

[Wang, 1996] H. Wang. *From Mathematics to Phijosophy.* London: Routledge and Kegan Paul, 1974.

[Wang, 1996] H. Wang. *Logical journey from Gödel to philosophy.* Cambridge: The MIT Press, 1996.

[Webb, 1980] J. Webb. *Mechanism, Mentalism and Metamathematics: An Essay on Finitism*. Dordrecht: Reidel, 1980.

[Wolfram, 1989] S. Wolfram. *Philosophical logic. An Introduction.* L.-N.Y.: Routledge, 1989.

[Zucker, 1978] J. I. Zucker. The adequacy problem for classical logic // *Journal of Philosophical Logic*, 7: 517-535, 1978.

И.А.Карпенко, В.М.Попов

ПОГРУЖЕНИЕ ИСЧИСЛЕНИЯ RM В ЕГО ПОЗИТИВНЫЙ ФРАГМЕНТ*

Abstract. *A translation from the calculus* RM [1] *to the positive fragment of* RM *is constructed.*

Исчисление RM [1] погружается в его позитивный фрагмент, т.е. во множество всех таких доказуемых в RM формул, ни в одну из которых не входит негация $\neg$. Далее позитивный фрагмент исчисления RM обозначается посредством RM_+.

Языки $L_{\wedge\vee\supset\neg f}$ и $L_{\wedge\vee\supset\neg}$ являются стандартно определяемыми пропозициональными языками с алфавитами $<P,\wedge,\vee,\supset,\neg,f,),(>$ и $<P,\wedge,\vee,\supset,\neg,),(>$ соответственно. Здесь P есть множество $\{p_1,p_2,p_3,\ldots\}$ всех пропозициональных переменных языка каждого из этих языков, $\wedge,\vee,\supset$ есть двухместные логические связки каждого из этих языков, $\neg$ есть одноместная логическая связка каждого из этих языков, f есть нольместная логическая связка языка $L_{\wedge\vee\supset\neg f}$, а) и (есть технические символы (скобки) каждого из этих языков. Формулы языка L ($L\in\{L_{\wedge\vee\supset\neg f}, L_{\wedge\vee\supset\neg}\}$), называемые L-формулами, строятся обычным образом.

Исчисление RM_f есть исчисление гильбертовского типа над $L_{\wedge\vee\supset\neg f}$, а исчисление RM есть исчисление гильбертовского типа над $L_{\wedge\vee\supset\neg}$. Для всяких $L_{\wedge\vee\supset\neg f}$-формул A, B и C аксиомами исчисления RM_f являются $L_{\wedge\vee\supset\neg f}$-формулы:

A1. $(A\supset A)$,

A2. $(A\supset((A\supset B)\supset B))$,

A3. $((A\supset B)\supset((B\supset C)\supset(A\supset C)))$,

A4. $((A\supset(A\supset B))\supset(A\supset B)$,

A5. $((A\wedge B)\supset A)$,

A6. $((A\wedge B)\supset B)$,

A7. $(((A\supset B)\wedge(A\supset C))\supset(A\supset(B\wedge C)))$,

A8. $(A\supset(A\vee B))$,

A9. $(B\supset(A\vee B))$,

---

* Работа выполнена при поддержке грантов РГНФ № 02-03-18196 и № 01-03-00403.

A10. $(((A\supset C)\wedge(B\supset C))\supset((A\vee B)\supset C))$,

A11. $((A\wedge(B\vee C))\supset((A\wedge B)\vee(A\wedge C)))$,

A12. $(A\supset(A\supset A))$,

A13. $((A\supset(\neg B))\supset(B\supset(\neg A)))$,

A14. $((\neg(\neg A))\supset A)$,

A15. $((\neg A)\supset(A\supset f))$,

A16. $((A\supset f)\supset(\neg A))$.

Ничто другое аксиомой исчисления RM_f не является. Аксиомами исчисления RM являются в точности те $L_{\wedge\vee\supset\neg}$-формулы, каждая из которых есть аксиома исчисления RM_f. Правилами исчисления RM_f являются только модус поненс для $L_{\wedge\vee\supset\neg f}$-формул и адьюнкция для $L_{\wedge\vee\supset\neg f}$-формул, т.е. соответственно только правила $\alpha,(\alpha\supset\beta)/\beta$ и $\alpha,\beta/(\alpha\wedge\beta)$, где α и β есть переменные по $L_{\wedge\vee\supset\neg f}$-формулам, а правилами исчисления RM являются только модус поненс для $L_{\wedge\vee\supset\neg}$-формул и адьюнкция для $L_{\wedge\vee\supset\neg}$-формул, т.е. соответственно только правила $\alpha,(\alpha\supset\beta)/\beta$ и $\alpha,\beta/(\alpha\wedge\beta)$, где α и β есть переменные по $L_{\wedge\vee\supset\neg}$-формулам.

Доказательства в исчислениях RM_f и RM строятся обычным для исчислений гильбертовского типа способом. Условимся, как это принято, о том, что (a) доказательством в RM_f (соответственно в RM) $L_{\wedge\vee\supset\neg f}$-формулы A (соответственно $L_{\wedge\vee\supset\neg}$-формулы A) является доказательство в RM_f (соответственно в RM), последняя $L_{\wedge\vee\supset\neg f}$-формула (соответственно $L_{\wedge\vee\supset\neg}$-формула) которого есть A, (b) запись "$RM_f \vdash A$" (соответственно "$RM \vdash A$") используется в качестве сокращения для записи "существует доказательство в RM_f $L_{\wedge\vee\supset\neg f}$-формулы A", (соответственно "существует доказательство в RM $L_{\wedge\vee\supset\neg}$-формулы A"), (c) синонимом "доказательство в RM_f" является "RM_f-доказательство", а синонимом "доказательство в RM" является "RM-доказательство".

Определение отображения Сд множества F всех $L_{\wedge\vee\supset\neg f}$-формул в F:

Сд(f) = f,

Сд(p_i) = p_{i+1} (где i принадлежит множеству N всех натуральных чисел),

Сд((A•B)) = Сд(A)•Сд(B) (где A и B есть $L_{\wedge\vee\supset\neg f}$-формулы, а $\bullet\in\{\wedge\vee\supset\}$),

Сд(($\neg$A)) = ($\neg$Сд(A)) (где A есть $L_{\wedge\vee\supset\neg f}$-формула).

Определение отображения $S_{p1/f}$ множества F в F:

$S_{p1/f}(f) = f$,

$S_{p1/f}(p_1) = f$,

$S_{p1/f}(p_i) = p_i$ (где $i \in N$, и $i \neq 1$),

$S_{p1/f}((A \bullet B)) = (S_{p1/f}(A) \bullet S_{p1/f}(B)$ (где A и B есть $L_{\wedge\vee\supset\neg f}$-формулы, а $\bullet \in \{\wedge\vee\supset\}$),

$S_{p1/f}((\neg A)) = (\neg S_{p1/f}(A))$ (где A есть $L_{\wedge\vee\supset\neg f}$-формула).

Определение отображения $S_{f/p1}$ множества F в F:

$S_{f/p1}(f) = p_1$,

$S_{f/p1}(p_i) = p_i$ (где $i \in N$),

$S_{f/p1}((A \bullet B)) = (S_{f/p1}(A) \bullet S_{f/p1}(B))$ (где A и B есть $L_{\wedge\vee\supset\neg f}$-формулы, а $\bullet \in \{\wedge\vee\supset\}$),

$S_{f/p1}((\neg A)) = (\neg S_{f/p1}(A))$ (где A есть $L_{\wedge\vee\supset\neg f}$-формула).

Определение отображения $S_{p1/\neg}$ множества F\` в F\`:

$S_{p1/\neg}(p_i) = p_i$ (где $i \in N$),

$S_{p1/\neg}((A * B)) = (S_{p1/\neg}(A) * S_{p1/\neg}(B))$ (где A и B есть $L_{\wedge\vee\supset\neg}$-формулы, а $* \in \{\wedge\vee\}$),

$S_{p1/\neg}((A \supset p_1)) = (\neg S_{p1/\neg}(A))$ (где A есть $L_{\wedge\vee\supset\neg}$-формула),

$S_{p1/\neg}((A \supset B)) = (S_{p1/\neg}(A) \supset S_{p1/\neg}(B))$ (где A и B есть $L_{\wedge\vee\supset\neg}$-формулы, а B не есть p_1),

$S_{p1/\neg}((\neg A)) = (\neg S_{p1/\neg}(A))$ (где A есть $L_{\wedge\vee\supset\neg}$-формула).

Определение отображения $S_{\neg/p1}$ множества F\` всех $L_{\wedge\vee\supset\neg}$-формул в F\`:

$S_{\neg/p1}(p_i) = ((p_i \supset p_1) \supset p_1)$ (где $i \in N$),

$S_{\neg/p1}((A \bullet B)) = (((S_{\neg/p1}(A) \bullet S_{\neg/p1}(B)) \supset p_1) \supset p_1)$ (где A и B есть $L_{\wedge\vee\supset\neg}$-формулы, а $\bullet \in \{\wedge\vee\supset\}$),

$S_{\neg/p1}((\neg A)) = (((S_{\neg/p1}(A) \supset p_1) \supset p_1) \supset p_1)$ (где A есть $L_{\wedge\vee\supset\neg}$-формула).

Лемма 1: пусть $A_1, \ldots, A_n$, где $n \in N$, есть $L_{\wedge\vee\supset\neg f}$-формулы и упорядоченная n-ка $\langle A_1, \ldots, A_n \rangle$ есть RM_f-доказательство. Тогда $S_{\neg/p1}(S_{f/p1}(Cд(A_i))) \in RM_+$.

Лемма 1 доказана возвратной индукцией по n.

Следствие леммы 1: для всякой $L_{\wedge\vee\supset\neg f}$-формулы A верно, что если $RM_f \vdash A$, то $S_{\neg/p1}(S_{f/p1}(Cд(A))) \in RM_+$.

Лемма 2: пусть A есть $L_{\wedge\vee\supset\neg f}$-формула. Тогда

a) $RM_f \vdash (Cд(A) \supset S_{p1/f}(S_{\neg/p1}(S_{f/p1}(Cд(A)))))$ и

b) $RM_f \vdash (S_{p1/f}(S_{\neg/p1}(S_{f/p1}(Cд(A))))\supset(Cд(A))$.

Лемма 2 доказана индукцией по построению $L_{\wedge\vee\supset\neg f}$-формулы A.

Следствие леммы 2: пусть A есть $L_{\wedge\vee\supset\neg f}$-формула. Если $RM_f \vdash (S_{p1/f}(S_{\neg/p1}(S_{f/p1}(Cд(A))))$, то $RM_f \vdash Cд(A)$.

Нижеследующие леммы 3 и 4 являются следствиями того, что множество всех $L_{\wedge\vee\supset\neg f}$-формул, доказуемых в RM_f, замкнуто относительно подстановки $L_{\wedge\vee\supset\neg f}$-формулы вместо пропозициональной переменной в $L_{\wedge\vee\supset\neg f}$-формулу.

Лемма 3: для всякой $L_{\wedge\vee\supset\neg f}$-формулы A верно, что если $RM_f \vdash A$, то $RM_f \vdash S_{p1/f}(A)$.

Лемма4: для всякой $L_{\wedge\vee\supset\neg f}$-формулы A верно, что если $RM_f \vdash$ Сд(A), то $RM_f \vdash A$.

Лемма 5: для всякой $L_{\wedge\vee\supset\neg f}$-формулы A верно, что если $S_{\neg/p1}(S_{f/p1}(\text{Сд}(A))) \in RM_+$, то $RM_f \vdash A$.

Доказательство:

Пусть (1) A есть $L_{\wedge\vee\supset\neg f}$-формула и (2) $S_{\neg/p1}(S_{f/p1}(\text{Сд}(A)))$ принадлежит позитивному фрагменту исчисления RM. Из (2) по определению позитивного фрагмента исчисления RM получаем, что (3) $RM \vdash S_{\neg/p1}(S_{f/p1}(\text{Сд}(A)))$. Из (3) по определению RM_f получаем, что (4) $RM_f \vdash S_{\neg/p1}(S_{f/p1}(\text{Сд}(A)))$. Используя (4) и лемму 3, получаем (5) $RM_f \vdash S_{p1/f}(S_{\neg/p1}(S_{f/p1}(\text{Сд}(A))))$. Из (1), (5) и следствия леммы 2 вытекает (6) $RM_f \vdash$ Сд(A). Из (1) и (6) по лемме 4 получаем, что $RM_f \vdash A$.

Лемма 5 доказана.

Лемма 6: для всякой $L_{\wedge\vee\supset\neg f}$-формулы A верно, что $RM_f \vdash A$ т.т.т. $S_{\neg/p1}(S_{f/p1}(\text{Сд}(A))) \in RM_+$.

Лемма 6 вытекает из леммы 5 и следствия леммы 1.

Определение p_1-регулярной $L_{\wedge\vee\supset\neg}$-формулы:
$L_{\wedge\vee\supset\neg}$-формула A называется p_1-регулярной $L_{\wedge\vee\supset\neg}$-формулой, если A не есть p_1 и не существует такой $L_{\wedge\vee\supset\neg}$-формулы B, что хотя бы одна из $L_{\wedge\vee\supset\neg}$-формул $(p_1\supset B)$, $(p_1\wedge B)$, $(B\wedge p_1)$, $(p_1\vee B)$, $(B\vee p_1)$, $(\neg p_1)$ есть $L_{\wedge\vee\supset\neg}$-подформула $L_{\wedge\vee\supset\neg}$-формулы A.

Лемма 7: пусть A есть $L_{\wedge\vee\supset\neg}$-формула. Тогда $S_{\neg/p1}(\text{Сд}(A))$ есть p_1-регулярная $L_{\wedge\vee\supset\neg}$-формула.

Лемма 7 доказана индукцией по построению $L_{\wedge\vee\supset\neg f}$-формулы A.

Лемма 8: пусть A есть p_1-регулярная $L_{\wedge\vee\supset\neg}$-формула и $RM \vdash A$. Тогда $RM \vdash S_{p1/\neg}(A)$.

Лемма 8 доказана с использованием матриц Сугихары [2].

Лемма 9: пусть A есть $L_{\wedge\vee\supset\neg}$-формула. Тогда (a)$RM \vdash (S_{p1/\neg}(S_{\neg/p1}(\text{Сд}(A)))\supset\text{Сд}(A))$ и (b) $RM \vdash (\text{Сд}(A)\supset S_{p1/\neg}(S_{\neg/p1}(\text{Сд}(A))))$.

Лемма 9 доказана индукцией по построению $L_{\wedge\vee\supset\neg}$-формулы A.

Лемма 10: для всякой $L_{\wedge\vee\supset\neg}$-формулы A верно, что если $RM \vdash$ Сд(A), то $RM \vdash A$.

Лемма 10 есть следствие того, что множество всех $L_{\wedge\vee\supset\neg}$-формул, доказуемых в RM, замкнуто относительно подстановки $L_{\wedge\vee\supset\neg}$-формулы вместо пропозициональной переменной в $L_{\wedge\vee\supset\neg}$-формулу.

Лемма 11: пусть A есть $L_{\wedge\vee\supset\neg}$-формула. Тогда верно следующее: $RM_f \vdash A$ т.т.т. $RM \vdash A$.

Доказательство:

(1) A есть $L_{\wedge\vee\supset\neg}$-формула (условие).

Очевидно, что для доказательства леммы 11 достаточно доказать следующие два утверждения У1 и У2.

У1: если $RM \vdash A$, то $RM_f \vdash A$.

У2: если $RM_f \vdash A$, то $RM \vdash A$.

Утверждение У1 легко доказывается индукцией по длине RM-доказательства $L_{\wedge\vee\supset\neg}$-формулы A.

Докажем У2.

Допустим, что (2) $RM_f \vdash A$.

(3) A есть $L_{\wedge\vee\supset\neg f}$-формула (из (1) и того, что всякая $L_{\wedge\vee\supset\neg}$-формула есть $L_{\wedge\vee\supset\neg f}$-формула).

(4) $S_{\neg/p1}(S_{f/p1}(Сд(A)))\in RM_+$ (из (2) и (3) по лемме 6).

(5) $S_{f/p1}(Сд(A)) = Сд(A)$ (легко доказывается индукцией по построению $L_{\wedge\vee\supset\neg}$-формулы A).

(6) $S_{\neg/p1}(Сд(A))\in RM_+$ (из (4) и (5)).

(7) $RM \vdash S_{\neg/p1}(Сд(A))$ (из (6) по определению RM_+).

(8) $S_{\neg/p1}(Сд(A))$ есть p_1-регулярная $L_{\wedge\vee\supset\neg}$-формула (из (1) по лемме 7).

(9) $RM \vdash S_{p1/\neg}(S_{\neg/p1}(Сд(A)))$ (из (7) и (8) по лемме 8).

(10) $RM \vdash Сд(A)$ (из (9) и (1) по лемме 9 (пункт (a))).

(11) $RM \vdash A$ (из (10) и (1) по лемме 10).

Утверждение У2 доказано.

Лемма 11 доказана.

Теорема: для всякой $L_{\wedge\vee\supset\neg}$-формулы A верно следующее: $RM \vdash A$ т.т.т. $S_{\neg/p1}(Сд(A))\in RM_+$.

Доказательство:

Пусть (1) A есть $L_{\wedge\vee\supset\neg}$-формула.

(2) $RM_f \vdash A$ т.т.т. $RM \vdash A$ (из (1) по лемме 11).

(3) A есть $L_{\wedge\vee\supset\neg f}$-формула (из (1) и того, что всякая $L_{\wedge\vee\supset\neg}$-формула есть $L_{\wedge\vee\supset\neg f}$-формула).

(4) $RM_f \vdash A$ т.т.т. $S_{\neg/p1}(S_{f/p1}(Сд(A)))\in RM_+$.

(5) $RM \vdash A$ т.т.т. $S_{\neg/p1}(S_{f/p1}(Сд(A)))\in RM_+$.

(6) $S_{f/p1}(Сд(A)) = Сд(A)$ (см. анализ пятого шага в доказательстве утверждения У2 в рамках леммы 11).

(7) RM $\vdash$ A т.т.т. $S_{\neg/p1}$(Сд(A))$\in$$RM_{+}$.

Теорема доказана.

Таким образом, композиция Сд$\bullet$$S_{\neg/p1}$ отображений Сд и $S_{\neg/p1}$ есть операция, погружающая исчисление RM в его позитивный фрагмент.

ЛИТЕРАТУРА

1. *Anderson A. R., Belnap N. D., jr.* Entailment: The Logic of Relevance and Necessity. Vol. 1. Princeton, 1975. P. 339-341.
2. *Sugihara T.* Strict implication free from implicational paradoxes // Memoirs of the Faculty of Liberal Arts. Fukui University. Series I, 1955. P. 55-59.

И.А.Карпенко

ПОГРУЖЕНИЕ КЛАССИЧЕСКОЙ ПРОПОЗИЦИОНАЛЬНОЙ ЛОГИКИ В НЕКОТОРЫЕ ПАРАЛОГИКИ

Abstract. *The classic propositional calculus PC is embedded into several paralogics by different embedding operations, which are constructed.*

Посредством описываемых ниже операций классическое пропозициональное исчисление из [1, с.49], обозначаемое PC, погружается в исчисления I_0, I_1, I_2, I_3 из [2], MAP из [3] и LAP из [4]. При этом погружение исчисления PC в исчисления I_0, I_1, I_2 и I_3 осуществляется посредством двух различных операций.

Язык L этих исчислений есть стандартно определяемый пропозициональный язык с алфавитом $\langle S, \&, \vee, \supset, \neg,), (\rangle$, где S есть множество $\{s_1, s_2, s_3, \ldots\}$ всех пропозициональных переменных языка λ, $\supset$, $\wedge$, $\vee$ есть бинарные логические связки, $\neg$ есть унарная логическая связка,) и (есть технические символы (скобки). При записи формул в языке L принимаются обычные соглашения об опускании скобок, вместо "формула в языке L" будем писать "формула". Далее буквы A, B, C и D используются для обозначения формул.

Все упомянутые выше исчисления являются исчислениями гильбертовского типа со стандартно определяемым понятием доказательства. Множеству всех правил вывода каждого из этих исчислениий принадлежит только одно правило: A, A$\supset$B/B. Поэтому для задания любого из этих исчислений достаточно определить множество всех его аксиом.

Исчисление PC. Множество всех аксиом исчисления PC есть множество всех формул, каждая из которых имеет хотя бы один из следующих видов:

1. $A\supset(B\supset A)$,
2. $(A\supset(B\supset C))\supset((A\supset B)\supset(A\supset C))$,
3. $(A\wedge B)\supset A$,
4. $(A\wedge B)\supset B$,
5. $A\supset(B\supset(A\wedge B))$,
6. $A\supset(A\vee B)$,
7. $B\supset(A\vee B)$,

8. $(A \supset C) \supset ((B \supset C) \supset ((A \vee B) \supset C))$,

9. $(A \supset B) \supset ((A \supset (\neg B)) \supset (\neg A))$,

10. $(\neg(\neg A)) \supset A$.

Исчисления I_0, I_1, I_2 и I_3. Множество всех аксиом исчисления I_0 есть объединение множества всех акисом исчисления PC, не содержащих $\neg$, с множеством всех формул, каждая из которых имеет хотя бы один из следующих видов:

1\`. $(\neg(D \supset D)) \supset B$,

2\`. $(A \supset (\neg(B \supset B))) \supset (\neg A)$,

3\`. $(A \supset B) \supset ((B \supset (\neg A)) \supset (\neg A))$,

4\`. $A \supset ((\neg A) \supset (\neg(B \supset B)))$,

5\`. $((B \supset A) \supset A) \supset ((\neg A) \supset B)$, где A не является пропозициональной переменной.

Множество всех аксиом исчисления I_1 получаем из множества всех аксиом исчисления I_0 за счет замены схем 2\` и 3\` на схемы

2\`\`. $(D \supset (\neg(B \supset B))) \supset (\neg D)$ и

3\`\`. $(D \supset B) \supset ((B \supset (\neg D)) \supset (\neg D))$ соответственно.

Множество всех аксиом исчисления I_2 получаем из множества всех аксиом исчисления I_0 за счет замены схем 4\` и 5\` на схемы

4\`\`. $D \supset ((\neg D) \supset (\neg(B \supset B)))$ и

5\`\`. $((B \supset D) \supset D) \supset ((\neg D) \supset B))$ соответственно.

Множество всех аксиом исчисления I_3 есть объеденение множества всех аксиом исчисления I_0 с множеством всех формул вида:

6\`. $A \supset ((\neg A) \supset ((B \supset (\neg B)) \supset (\neg B)))$.

Исчисление MAP. Множество всех аксиом исчисления MAP есть объединение множества всех акисом исчисления PC, не содержащих $\neg$, с множеством всех формул, каждая из которых имеет хотя бы один из следующих видов:

M1. $(\neg(A \supset A)) \supset B$,

M2. $(A \supset (\neg(B \supset B))) \supset (\neg A)$,

M3. $(A \supset B) \supset ((B \supset (\neg A)) \supset (\neg A))$,

M4. $A \supset ((\neg A) \supset (\neg(B \supset B)))$,

M5. $((B \supset A) \supset A) \supset ((\neg A) \supset B)$;

M6. $(\neg(\neg A)) \supset A$, M7.$A \supset (\neg(\neg A))$, при этом в схемах M4 и M5 A не является квазиэлементарной формулой[1].

[1] Квазиэлементарной формулой называется формула, которая не имеет вхождений ни одной из логических связок $\wedge, \vee, \supset$.

Исчисление LAP. Множество всех аксиом исчисления MAP есть объединение множества всех акисом исчисления PC, не содержащих $\neg$, с множеством всех формул, каждая из которых имеет хотя бы один из следующих видов:

L1. $(\neg(A\supset A))\supset B$,

L2. $(A\supset(\neg(B\supset B)))\supset(\neg A)$,

L3. $(A\supset B)\supset((B\supset(\neg A))\supset(\neg A))$,

L4. $A\supset((\neg A)\supset(\neg(B\supset B)))$,

L5. $((B\supset A)\supset A)\supset((\neg A)\supset B)$;

L6. $(\neg(\neg A))\supset A$, M7.$A\supset(\neg(\neg A))$, при этом в схемах M2 и M3 A не является квазиэлементарной формулой.

Используя тот факт, что все рассматриваемые здесь логики[2], соответствующие исчислениям I_0, I_1, I_2, I_3, MAP и LAP, являются конечнозначными, нетрудно доказать, что они являются паралогиками в том смысле, что каждая из них паранепротиворечива[3] или параполна[4]. Например, подробное доказательство того, что логика I_2 является параполной, дано в [5, с.61-62]. Можно доказать, что логика I_0 является паранепротиворечивой и параполной; логика I_1 является паранепротиворечивой, не не является параполной; логика I_2 является параполной, но не является паранепротиворечивой; логика I_3 является паранепротиворечивой и параполной; логика MAP является паранепротиворечивой, но не является параполной; логика LAP является параполной, не не является паранепротиворечивой.

Определим унарные операции h_φ (см. [3, с.496]), ψ и χ на множестве всех формул.

Определение операции h_φ:

Пусть φ – эффективное отображение множества всех пропозициональных переменных во множество всех формул, удовлетворяющее следующим условиям:

(1) $\varphi(s_i)$ не есть квазиэлементарная формула ни для какой пропозициональной переменной s_i,

(2) для всякой пропозициональной переменной s_i формулы $s_i\supset\varphi(s_i)$ и $\varphi(s_i)\supset s_i$ принадлежат логике PC.

---

[2] Логикой, соответствующей данному исчислению, называется множество всех теорем этого исчисления.

[3] Логика L называется паранепротиворечивой, если существует противоречивая L-теория, которая не равна множеству всех формул.

[4] Логика L называется параполной, если существует такая L-теория T, что T не является полной L-теорией и всякая полная теория, включающая T, равна множеству всех формул.

Тогда

$h_\varphi(s_i)=\varphi(s_i)$ для всякой пропозициональной переменной s_i,

$h_\varphi(A\bullet B)=h_\varphi(A)\bullet h_\varphi(B)$, где $\bullet \in \{\&, \vee, \supset\}$, а A и B произвольные формулы,

$h_\varphi(\neg A)=\neg h_\varphi(A)$, где A произвольная формула.

Определение операции ψ:

$\psi(s_i) = \neg s_i$ для всякой пропозициональной переменной s_i,

$\psi(A\bullet B) = \psi(A)\bullet\psi(B)$, где $\bullet\in\{\wedge, \vee, \supset\}$, а A и B произвольные формулы,

$\psi(\neg A) = \neg\psi(A)$, где A произвольная формула.

Определение операции χ:

$\chi(s_i) = s_i$ для всякой пропозициональной переменной s_i,

$\chi(A\bullet B) = \chi(A)\bullet\chi(B)$, где $\bullet\in\{\wedge, \vee, \supset\}$, а A и B произвольные формулы,

$\chi(\neg A) = \chi(A)\supset(\neg(s_1\supset s_1))$, где A произвольная формула.

Теорема 1 (о погружении исчисления PC в исчисления I_0, I_1, I_2, I_3, MAP и LAP): для всякого исчисления E из $\{I_0, I_1, I_2, I_3$, MAP и LAP$\}$, всякой формулы α и всякого эффективного отображения φ, удовлетворяющего условиям (1) и (2) из определения операции h_φ, верно, что PC $\vdash \alpha$ т.т.т. E $\vdash h_\varphi(\alpha)$.

Теорема 2 (о погружении исчисления PC в исчисление I_i ($i \in \{0,1,2,3\}$): для всякого i из $\{0,1,2,3\}$ и всякой формулы α верно, что PC $\vdash \alpha$ т.т.т. $I_i \vdash \psi(\alpha)$.

Теорема 3 (о погружении исчисления PC в исчисления I_0, I_1, I_2, I_3, MAP и LAP): для всякого исчисления E из $\{I_0, I_1, I_2, I_3$, MAP и LAP$\}$ и всякой формулы α верно, что PC $\vdash \alpha$ т.т.т. E $\vdash \chi(\alpha)$.

Для доказательства теоремы 1 достаточно доказать следующие утверждение 1 и утверждение 2.

Утверждение 1: для всякого исчисления E из $\{I_0, I_1, I_2, I_3$, MAP и LAP$\}$, всякой формулы α и всякого эффективного отображения φ, удовлетворяющего условиям (1) и (2) из определения операции h_φ, верно, что если PC $\vdash \alpha$, то E $\vdash h_\varphi(\alpha)$.

Утверждение 2: для всякого исчисления E из $\{I_0, I_1, I_2, I_3$, MAP и LAP$\}$, всякой формулы α и всякого эффективного отображения φ, удовлетворяющего условиям (1) и (2) из определения операции h_φ, верно, что если E $\vdash h_\varphi(\alpha)$, то PC $\vdash \alpha$.

Доказательство утверждения 1 проводится возвратной индукцией по длине PC-доказательства формулы α.

Доказательству утверждения 2 предпосылается следующая лемма 1.

Лемма 1: для всякой формулы α и всякого эффективного отображения φ, удовлетворяющего условиям (1) и (2) из определения операции h_φ, верно, что PC $\vdash \alpha \supset h_\varphi(\alpha)$ и PC $\vdash h_\varphi(\alpha) \supset \alpha$.

Доказательство проводится индукцией по построению формулы α.

Докажем утверждение 2.

(1) E $\vdash h_\varphi(\alpha)$ (условие),

(2) PC $\vdash h_\varphi(\alpha)$ (из (1) по лемме 1),

(3) PC $\vdash \alpha$ (из (2) и леммы 1 по определению доказательства в PC).

Утверждение 2 доказано.

Из утверждений 1 и 2 получаем теорему 1. Таким образом теорема 1 доказана.

Для доказательства теоремы 2 достаточно доказать следующие утверждение 3 и утверждение 4.

Утверждение 3: для всякого i из $\{0,1,2,3\}$ и всякой формулы α верно, что если PC $\vdash \alpha$, то $I_i \vdash \psi(\alpha)$.

Утверждение 4: для всякого i из $\{0,1,2,3\}$ и всякой формулы α верно, что если $I_i \vdash \psi(\alpha)$, то PC $\vdash \alpha$.

Доказательство утверждения 3 проводится возвратной индукцией по длине PC-доказательства формулы α.

Доказательству утверждения 4 предпосылаются лемма 2, лемма 3 и лемма 4.

Лемма 2: для всякого i из $\{0,1,2,3\}$ и всякой формулы α верно, что если $I_i \vdash \alpha$, то PC $\vdash \alpha$.

Доказательство леммы 2 проводится возвратной индукцией по длине доказательства в исчислении I_i ($i \in \{0,1,2,3\}$) формулы α.

Доказательство нижеследующей леммы 3 имеет семантический характер, поэтому нам потребуются определения некоторых семантических понятий. Оценкой назовем любое отображение множества $\{s_1, s_2, s_3, \ldots\}$ всех пропозициональных переменных в $\{0, 1\}$. Оценку $\nu`$ назовем обратной к оценке ν, если для всякой пропозициональной переменной s_i верно, что

$$\nu`(s_i) = \begin{cases} 1, \text{ если } \nu(s_i) = 0, \\ 0, \text{ если } \nu(s_i) = 1. \end{cases}$$

Означиванием при оценке ν назовем отображение $|\ |\nu$ множества всех формул в $\{0, 1\}$, удовлетворяющее следующим условиям для всякой пропозициональной переменной s_i и всяких формул A и B:

1) $|s_i|\nu = \nu(s_i)$,
2) $|A \supset B|\nu = 1$ т.т.т. $|A|\nu = 0$ или $|B|\nu = 1$,

3) $|A \wedge B|\nu = 1$ т.т.т. $|A|\nu = 1$ и $|B|\nu = 1$,
4) $|A \vee B|\nu = 1$ т.т.т. $|A|\nu = 1$ или $|B|\nu = 1$,
5) $|\neg A|\nu = 1$ т.т.т. $|A|\nu = 0$.

Лемма 3: для всякой оценки ν и всякой формулы α верно, что $|\alpha|\nu = |\psi(\alpha)|\nu`$.

Доказательство леммы 3 проводится индукцией по построению формулы α.

Лемма 4: для всякой формулы α верно, что если PC $\vdash \psi(\alpha)$, то PC $\vdash \alpha$.

Доказательство легко проводится методом от противного:

(1) PC $\vdash \psi(\alpha)$ (условие),
(2) PC $\vdash \alpha$ (допущение),
(3) $|\alpha|\nu = 0$ (из (2) по теореме о полноте для PC),
(4) $|\psi(\alpha)|\nu` = 0$ (из (3) по лемме 3),
(5) PC $\vdash \psi(\alpha)$ (из (4) по теореме о непротиворечивости PC),
(6) PC $\vdash \alpha$ (противоречие (1) и (5)).

Лемма 4 доказана.

Докажем утверждение 4.

(1) $I_i \vdash \psi(\alpha)$ (условие),
(2) PC $\vdash \psi(\alpha)$ (из (1) и леммы 2),
(3) PC $\vdash \alpha$ (из (2) и леммы 4).

Утверждение 4 доказано.

Из утверждений 3 и 4 получаем теорему 2. Таким образом, теорема 2 доказана.

Для доказательства теоремы 3 достаточно доказать следующие утверждение 5 и утверждение 6.

Утверждение 5: для всякого исчисления E из $\{I_0, I_1, I_2, I_3$, MAP и LAP$\}$ и всякой формулы α верно, что если PC $\vdash \alpha$, то E $\vdash \chi(\alpha)$.

Утверждение 6: для всякого исчисления E из $\{I_0, I_1, I_2, I_3$, MAP и LAP$\}$ и всякой формулы α верно, что если E $\vdash \chi(\alpha)$, то PC $\vdash \alpha$.

Доказательство утверждения 5 проводится возвратной индукцией по длине PC-доказательства формулы α.

Доказательству утверждения 6 предпосылаются леммы 5 и 6.

Лемма 5: для всякого исчисления E из $\{I_0, I_1, I_2, I_3$, MAP и LAP$\}$ и для всякой формулы α верно, что если E $\vdash \alpha$, то PC $\vdash \alpha$.

Доказательство леммы 5 проводится возвратной индукцией по длине доказательства в исчислении E (E $\in \{I_0, I_1, I_2, I_3$, MAP и LAP$\}$) формулы α.

Лемма 6: для всякой формулы α верно, что PC $\vdash \alpha \supset \chi(\alpha)$ и PC $\vdash \chi(\alpha) \supset \alpha$.

Доказательство проводится возвратной индукцией по построению формулы α.

Но основе леммы 5 и леммы 6 доказывается утверждение 6:

(1) $E \vdash \chi(\alpha)$ (условие),

(2) $PC \vdash \chi(\alpha)$ (из (1) по лемме 5),

(3) $PC \vdash \alpha$ (из (2) и леммы 6 по определению доказательства в PC).

Утверждение 6 доказано.

Из утверждений 5 и 6 получаем теорему 3. Таким образом, теорема 3 доказана.

Посредством описываемых ниже операций классическая пропозициональная логика высказываний погружается в коньюнктивно-негативный, дизьюнктивно-негативный и импликативно-негативный фрагменты рассмотренных выше паралогик.

Для всякого исчисления E из $\{I_0, I_1, I_2, I_3$, MAP и LAP$\}$ обозначим посредством $E_{\wedge\neg}$ коньюнктивно-негативный фрагмент исчисления E, посредством $E_{\vee\neg}$ – дизьюнктивно-негативный фрагмент исчисления E, посредством $E_{\supset\neg}$ – импликативно-негативный. Таким образом, $E_{\wedge\neg}$ является множеством всех таких формул, каждая из которых доказуема в E ($E \in \{I_0, I_1, I_2, I_3$, MAP и LAP$\}$) и ни одна из которых не содержит вхождений логических связок $\vee$ и $\supset$, $E_{\vee\neg}$ является множеством всех таких формул, каждая из которых доказуема в E ($E \in \{I_0, I_1, I_2, I_3$, MAP и LAP$\}$) и ни одна из которых не содержит вхождений логических связок $\wedge$ и $\supset$, а $E_{\supset\neg}$ является множеством всех таких формул, каждая из которых доказуема в E ($E \in \{I_0, I_1, I_2, I_3$, MAP и LAP$\}$) и ни одна из которых не содержит вхождений логических связок $\wedge$ и $\vee$.

Определение операции c_φ:

Пусть φ – эффективное отображение множества всех пропозициональных переменных во множество всех формул, удовлетворяющее следующим условиям:

(3) $\varphi(s_i)$ не есть квазиэлементарная формула ни для какой пропозициональной переменной s_i,

(4) для всякой пропозициональной переменной s_i формулы $s_i \supset \varphi(s_i)$ и $\varphi(s_i) \supset s_i$ принадлежат логике PC.

Тогда

$c_\varphi(s_i) = \varphi(s_i)$ для всякой пропозициональной переменной s_i,

$c_\varphi(A \wedge B) = c_\varphi(A) \wedge c_\varphi(B)$, где A и B произвольные формулы,

$c_\varphi(A \vee B) = \neg((\neg c_\varphi(A)) \wedge (\neg c_\varphi(B)))$, где A и B произвольные формулы,

$c_\varphi(A \supset B) = \neg(c_\varphi(A) \wedge (\neg c_\varphi(B)))$, где A и B произвольные формулы,

$c_\varphi(\neg A) = \neg c_\varphi(A)$, где A произвольная формула.

Определение операции d_φ:

Пусть φ – эффективное отображение множества всех пропозициональных переменных во множество всех формул, удовлетворяющее следующим условиям:

(5) $\varphi(s_i)$ не есть квазиэлементарная формула ни для какой пропозициональной переменной s_i,

(6) для всякой пропозициональной переменной s_i формулы $s_i\supset\varphi(s_i)$ и $\varphi(s_i)\supset s_i$ принадлежат логике PC.

Тогда

$d_\varphi(s_i)=\varphi(s_i)$ для всякой пропозициональной переменной s_i,

$d_\varphi(A\wedge B)=\neg((\neg d_\varphi(A))\vee(\neg d_\varphi(B)))$, где A и B произвольные формулы,

$d_\varphi(A\vee B)=d_\varphi(A)\vee d_\varphi(B)$, где A и B произвольные формулы,

$d_\varphi(A\supset B)=(\neg d_\varphi(A))\vee d_\varphi(B)$, где A и B произвольные формулы,

$d_\varphi(\neg A)=\neg d_\varphi(A)$, где A произвольная формула.

Определение операции i_φ:

Пусть φ – эффективное отображение множества всех пропозициональных переменных во множество всех формул, удовлетворяющее следующим условиям:

(7) $\varphi(s_i)$ не есть квазиэлементарная формула ни для какой пропозициональной переменной s_i,

(8) для всякой пропозициональной переменной s_i формулы $s_i\supset\varphi(s_i)$ и $\varphi(s_i)\supset s_i$ принадлежат логике PC.

Тогда

$i_\varphi(s_i)=\varphi(s_i)$ для всякой пропозициональной переменной s_i,

$i_\varphi(A\wedge B)=\neg(i_\varphi(A)\supset(\neg i_\varphi(B)))$, где A и B произвольные формулы,

$i_\varphi(A\vee B)=(\neg i_\varphi(A))\supset i_\varphi(B)$, где A и B произвольные формулы,

$i_\varphi(A\supset B)=i_\varphi(A)\supset i_\varphi(B)$, где A и B произвольные формулы,

$i_\varphi(\neg A)=\neg i_\varphi(A)$, где A произвольная формула.

Теорема 4: для всякого исчисления $E_{\wedge\neg}$ из $\{I_{0\wedge\neg}, I_{1\wedge\neg}, I_{2\wedge\neg}, I_{3\wedge\neg}$, $MAP_{\wedge\neg}$ и $LAP_{\wedge\neg}\}$, всякой формулы α и всякого эффективного отображения φ, удовлетворяющего условиям (1) и (2) из определения операции c_φ, верно, что PC $\vdash\alpha$ т.т.т. $c_\varphi(\alpha)\in E_{\wedge\neg}$.

Теорема 5: для всякого исчисления $E_{\vee\neg}$ из $\{I_{0\vee\neg}, I_{1\vee\neg}, I_{2\vee\neg}, I_{3\vee\neg}$, $MAP_{\vee\neg}$ и $LAP_{\vee\neg}\}$, всякой формулы α и всякого эффективного отображения φ, удовлетворяющего условиям (1) и (2) из определения операции d_φ, верно, что PC $\vdash\alpha$ т.т.т. $d_\varphi(\alpha)\in E_{\vee\neg}$.

Теорема 6: для всякого исчисления $E_{\supset\neg}$ из $\{I_{0\supset\neg}, I_{1\supset\neg}, I_{2\supset\neg}, I_{3\supset\neg}$, $MAP_{\supset\neg}$ и $LAP_{\supset\neg}\}$, всякой формулы α и всякого эффективного отображения φ, удовлетворяющего условиям (1) и (2) из определения операции i_φ, верно, что PC $\vdash\alpha$ т.т.т. $i_\varphi(\alpha)\in E_{\supset\neg}$.

Теоремы 4, 5 и 6 легко получить из теоремы 1, используя известные бинарные тождества классической логики, позволяющие взаимовыражать связки.

ЛИТЕРАТУРА

1. *Мендельсон Э.* Введение в математическую логику. М.: Наука, 1976.
2. *Popov V.M.* On the Logics Related to A.Arruda's System V1 // Logic and Logical Philosophy. 1999. Vol.7. P. 87-90.
3. *Попов В.М.* Об одной трехзначной паранепротиворечивой логике // Современная логика: проблемы теории, истории и применения в науке. СПб., 2002.
4. *Попов В.М.* Об одной трехзначной параполной логике // Логические исследования. Вып.9. М.: Наука, 2002.
5. *Попов В.М.* Об одной параполной логике // Смирновские чтения. 3 международная конференция. М.: ИФРАН, 2001.

В.Е.Комендантский

ТЕОРЕМА ПРЕДСТАВЛЕНИЯ ПРИСТЛИ И МЕТОД РЕЗОЛЮЦИЙ В МНОГОЗНАЧНЫХ ЛОГИКАХ

Abstract. *In this paper we study proof theory of many-valued logics from the algebraic point of view. We solve the problem posed in [7] and formulate a criterion of correctness of the many-valued resolution based on the Priestley representation theorem with respect to an arbitrary many-valued logic.*

Введение

В этой статье мы исследуем теорию вывода многозначных логик с алгебраической точки зрения. Нашей целью является формулировка критерия применимости к произвольной многозначной логике предложенного в [9] метода резолюций на основе теоремы представления Пристли для дистрибутивных решеток с операторами. Данный метод резолюций, как и все существующие методы резолюций, симулирует разрешающую процедуру первопорядковой логики предикатов, по причине чего любой резолютивный вывод может быть эквивалентным образом представлен, например, в гильбертовском исчислении соответствующей логики. Отличительной особенностью данного метода, благодаря которой он в ряде случаев более эффективен, чем гильбертовский, является использование специальных меток, которые ограничивают область оценки многозначной формулы некоторым подмножеством множества истинностных значений.

Правило бинарной резолюции на основе дуальности Пристли выглядит следующим образом (ср. [9, следствия 5 и 6]):

Из посылок $(\{\alpha\}:L^t)\vee C_1$ и $(\{\beta\}:L^f)\vee C_2$ выводится $C_1\vee C_2$ при условии, что $\alpha,\beta\in D(A)$ и $\alpha\leq\beta$,

где запись $\{\alpha\}:L^t$ (или $\{\alpha\}:L^f$) обозначает, что многозначный литерал L общезначим (соответственно, опровержим) на множестве истинностных значений α; C_1 и C_2 суть дизъюнкции литералов с метками указанного вида; D(A) есть множество всех главных фильтров на алгебре истинностных значений A рассматриваемой логики, упорядоченное по включению. Для краткости изложения мы предполагаем, что L, C_1 и C_2 уже унифицированы. Заметим, что упомянутое правило резолюции по сути своей остается классическим, изменения касаются только структуры литералов.

Основные определения метода резолюций для классической логики предикатов первого порядка остаются неизменными, происходит только структурная трансформация многозначных литералов в многосортные классические, поэтому в этой статье не приводятся подробные определения понятий метода резолюций. Вместо этого мы указываем на основополагающую монографию по методу резолюций и автоматическому доказательству теорем в классической первопорядковой логике предикатов [3].

MV-алгебры, исследуемые в этой статье, не определяются. Определение MV-алгебр см., например, работу [5].

Отметим некоторые работы, близкие по тематике к данной статье. Оригинальные теоремы представления для конечнозначных логик были установлены в [4], где в отличие от [9] и данной работы рассматривались квазимногообразия алгебр истинностных значений, а не многообразия. Также в связи с логиками Лукасевича и соответствующей теоремой представления для дистрибутивных решеток с оператором резидуации (см. [9]) следует упомянуть статью [10], где была доказана полнота бесконечнозначной логики Лукасевича относительно реляционной семантики с тернарным отношением достижимости на множестве миров. В свою очередь, в [10] были использованы результаты статьи [1].

В более ранней работе [2] мы уже рассматривали методы резолюций с отмеченными формулами (т.е. с формулами, имеющими метки) для многозначных логик, однако предложенный нами подход был иным, требующим осуществления трудоемких рутинных операций по преобразованию формул к виду, пригодному для подстановки в правило. Поэтому мы считаем, что подход, исследуемый в данной статье, более ценен в случае, когда вывод осуществляет человек, а не машина.

Матрицы и реляционные структуры

Так называемые *натуральные теоремы представления* (см. [9]), к которым относится и теорема Пристли, мотивированы следующими соображениями. Пусть L – это некоторая логика. Если L полна и непротиворечива относительно класса **M** матриц, и этот класс матриц может быть представлен как множество подмножеств реляционных структур в классе **R**, тогда реляционные структуры в **R** являются возможными кандидатами для определения класса $\mathbf{K}_{\mathbf{M},\mathbf{R}}$ моделей Крипке для L. В частности, при определенных условиях полнота и непротиворечивость логики L относительно класса $\mathbf{K}_{\mathbf{M},\mathbf{R}}$ есть прямое следствие полноты и непротиворечивости L относительно **M**.

Пусть **M** – это класс матриц. В ряде случаев можно показать (см. [9, теоремы 13 и 14]), что существует класс **R** реляционных структур таких, что выполняется следующее условие:

Существуют отображения D: $\mathbf{M} \to \mathbf{R}$ и O: $\mathbf{R} \to \mathbf{M}$ такие, что

(i) для каждой структуры $K \in \mathbf{R}$ верно $O(K) = (A_K, V_K) \in \mathbf{M}$, где A_K – это алгебра подмножеств множества возможных миров структуры K, а V_K – множество выделенных миров структуры K;

(ii) для каждой матрицы $M = (A, V) \in \mathbf{M}$, если $O(D(M)) = (A_{D(M)}, V_{D(M)})$, то существует инъективный гомоморфизм i: $A \to A_{D(M)}$ такой, что $i^{-1}(V_{D(M)}) \subseteq V$.

Теорема представления Пристли

Ниже мы приведем основные понятия, необходимые для формулировки базовой теоремы (см. [9]).

Непустое подмножество F решетки L называется *фильтром*, если для любых $x,y \in F$ $x \wedge y \in F$, и для любых $x,y \in L$, если $x \in F$ и $x \leq y$, тогда $y \in F$. Фильтр F, максимальный относительно свойства $0 \notin F$, называется *ультрафильтром*. Фильтр F называется *главным*, если $F \neq L$ и для всех $x,y \in L$, если $x \vee y \in F$, тогда $x \in F$ или $y \in F$. Далее, назовем *порядковым фильтром* множество $F_x = \{y: y \geq x\}$, где $x,y \in L$.

Обозначим операцию замыкания произвольного множества как **C**. Множество A называется *замкнутым*, если оно совпадает со своим замыканием **C**(A), и *открытым* – если его дополнение замкнуто.

Класс B открытых подмножеств пространства X называется *базисом* X, если каждое открытое подмножество X есть объединение некоторых множеств, принадлежащих B. Класс B_0 открытых подмножеств пространства X называется *подбазисом* X, если класс B, состоящий из пустого множества $\varnothing$, самого пространства X и всех конечных пересечений вида $B_1 \cap \ldots \cap B_n$, где $B_1, \ldots, B_n \in B_0$, есть базис пространства X.

Пусть X и Y – пространства. Взаимно однозначное отображение f: $X \to Y$, сохраняющее операцию замыкания, т.е. удовлетворяющее $f(\mathbf{C}(A)) = \mathbf{C}(f(A))$, для каждого множества $A \subseteq X$, и $f^{-1}(\mathbf{C}(B)) = \mathbf{C}(f^{-1}(B))$, для каждого $B \subseteq Y$, называется *гомеоморфизмом* X на Y.

Определим *дуал Пристли* для ограниченной дистрибутивной решетки L как частично упорядоченное *топологическое пространство* $D(L) = (FP(L), \subseteq, \tau)$, где FP(L) – это множество главных фильтров на L, а τ – это *топология*, т.е. система замкнутых подмножеств, порожденная подбазисом, состоящим из множеств вида $X_a=\{F\in FP(L): a\in F\}$, для всех $a\in L$, а также из их дополнений.

Пусть A – это ограниченная дистрибутивная решетка. *Гомоморфизмом* (*антиморфизмом*) на A называется функция $k:A\to A$, сохраняющая (обращающая) порядок. *Гемиморфизмом относительно дизъюнкции* на A называется функция $f: A^n \to A$, принимающая значение 0, если любой ее аргумент принимает значение 0, и, если ее i-тый аргумент равен $a_1\vee a_2$, равная дизъюнкции двух функций f, у которых на i-тых аргументных местах находятся a_1 и a_2 соответственно. *Гемиморфизм относительно конъюнкции* определяется двойственным образом: в предыдущем определении 0 заменяется на 1, а дизъюнкция – на конъюнкцию. *Гемиантиморфизмом относительно дизъюнкции* на A называется функция $g: A^n \to A$, принимающая значение 0, если любой ее аргумент принимает значение 1, и, если ее i-тый аргумент равен $a_1\wedge a_2$, равная дизъюнкции двух функций g, у которых на i-тых аргументных местах находятся a_1 и a_2 соответственно. *Гемиантиморфизм относительно конъюнкции* также определяется двойственным образом.

Обозначим как Σ класс всех гомоморфизмов, антиморфизмов, геми(анти)морфизмов относительно дизъюнкции и геми(анти)-морфизмов относительно конъюнкции на произвольной ограниченной дистрибутивной решетке A.

Следующая теорема (см. [9, теорема 14]) устанавливает эквивалентную форму представления для ограниченных дистрибутивных решеток с операторами.

Теорема 1 (теорема представления Пристли). *Каждая ограниченная дистрибутивная решетка* L *с операторами из множества* Σ *изоморфна решетке* O(D(L)) *открыто-замкнутых порядковых фильтров на* D(L). *Изоморфизм* $f: L\to O(D(L))$ *задается как* $f(x)=\{F: F\in FP(L)$ *и* $x\in F\}$.

Канонические расширения

Для анализа свойств операторов дистрибутивных решеток в [8] применялся аппарат канонических расширений, позаимствованный в свою очередь из модальных логик. Для формулировки критерия применимости метода резолюций на основе дуальности Пристли нам необходимо дать некоторые определения и привести основные результаты, касающиеся многозначных логик и канонических расширений (см. [8], [9], [6]).

В [8] *каноническим расширением* дистрибутивной решетки A с операторами из Σ названа решетка O(D(A)). Имея это в виду, допустим, что V – это многообразие (т.е. класс алгебр, удовлетворяющих одной и той же системе тождеств) ограниченных дистрибутивных решеток с операторами в классе Σ. Тогда многообразие V *замкнуто относительно канонических расширений*, если оно имеет свойство $O(D(A)) \in V$ для любой решетки $A \in V$. (В [6] используется более общее понятие канонического расширения.)

Пусть J – это множество индексов, а $U \subseteq P(J)$ – ультрафильтр, где P(J) обозначает множество всех подмножеств J. Пусть $\{X_j: j \in J\}$ – это семейство реляционных структур одного и того же типа **R**, где $X_j = (X_j, \{R_j\}_{R \in \mathbf{R}})$ для каждого j. Зададим отношение эквивалентности $\approx_U$, определенное для всех $x, y \in \Pi_{i \in J} X_j$ как $x \approx_U y$, е.т.е. $\{j \in J: x_j = y_j\} \in U$.

Для каждого семейства реляционных пространств $\{X_j: j \in J\}$ (где $X_j = (X_j, \{R_j\}_{R \in \mathbf{R}})$ для каждого j) и для каждого ультрафильтра $U \subseteq P(J)$ факторструктура $((\Pi_{i \in J} X_j)/ \approx_U, \{R_U\}_{R \in \mathbf{R}})$ называется *ультрапроизведением* семейства $\{X_j: j \in J\}$ относительно U, где R_U обозначает факторотношение по $\approx_U$, т.е. $R_U(|x^1|_U, \ldots, |x^n|_U)$, е.т.е. $\{j \in J: R_j(x^1_j, \ldots, x^n_j)\} \in U$.

Теорема 2 ([8, Следствие 22]). *Пусть* K *– это класс упорядоченных Σ-структур, замкнутых относительно ультрапроизведений, и пусть* $K^+ = \{O(X): X \in K\}$. *Тогда замыкание* K^+ *относительно гомоморфных образов, подалгебр и прямых произведений, т.е. многообразие, порожденное* K^+, *замкнуто относительно канонических расширений.*

Следующие теоремы были доказаны в более общей форме в [9] как теоремы 9 и 11 соответственно. В нашей более узкой формулировке они устанавливают тот факт, что, благодаря изоморфизму по теореме представления для ограниченных дистрибутивных решеток с операторами, любая алгебра A истинностных значений одной из соответствующих многозначных логик может быть запечатлена в более экономной форме как дуал Пристли D(A). Этот факт существенен для эффективного метода резолюций.

Теорема 3. *Пусть* A *– ограниченная дистрибутивная решетка. Тогда отображения и отношения на* D(A) *могут быть определены каноническим образом.*

Теорема 4. *Пусть* X = D(A) *– конечное частично упорядоченное множество. Тогда операторы на* O(X) *могут быть определены каноническим образом.*

Пусть $\mathbf{Z}^+$ и $\mathbf{Z}^-$ – это соответственно множества всех неотрицательных и неположительных целых чисел. *Алгебра Чена* C (см. [5, стр. 474]) определяется как $(C, \oplus, \neg, 0)$, где C – это решетка вида $C = \{(0, a): a \in \mathbf{Z}^+\} \cup \{(1, b): b \in \mathbf{Z}^-\}$.

Нулем данной решетки является элемент (0, 0), а единицей – (0, 1). На решетке задается лексикографический порядок. Операция сложения определяется как

$$(i,a)\oplus(j,b) = \begin{cases} (0,a+b), \text{ если } i+j=0 \\ (1,0\wedge(a+b)), \text{ если } i+j=1 \\ (1,0), \text{ если } i+j=2, \end{cases}$$

а операция отрицания определяется как $\neg(i,a) = (i+_2 1, -a)$, где $+_2$ обозначает операцию сложения по модулю 2.

Пусть f – алгебраическая операция. Определим f^σ как нижний предел sup inf f, а f^π – как верхний предел inf sup f (более точное определение см. [6]). Тогда каноническим расширением алгебры A будет алгебра, полученная из A в результате применения σ или π ко всем ее операциям и вложения A в полную решетку.

Лемма 1 ([6]). *Пусть* $C=(C, \oplus, \neg, 0)$ *– это алгебра Чена и пусть* $f=\oplus$*. Тогда* $f^\sigma \neq f^\pi$.

В силу лемм 2 и 3, аксиома MV-алгебры (MV6) $\neg(\neg x\oplus y)\oplus y = \neg(\neg y\oplus x)\oplus x$ не является канонической, поэтому аксиома бесконечнозначной логики Лукасевича $((P\to Q)\to Q) \to ((Q\to P)\to P)$ невыводима методом резолюции на основе теоремы представления Пристли (см. правило во введении).

Лемма 2 ([6]). *Тождество* (MV6) *не выполняется в* $C^\sigma=(C^\sigma,\oplus^\sigma,\neg^\sigma,0)$.

Лемма 3 ([6]). *Тождество* (MV6) *не выполняется в* $C^\pi=(C^\pi,\oplus^\pi,\neg^\pi,0)$.

Теорема 5. *Пусть* **L** *– это произвольная логика Лукасевича, тогда метод резолюций на основе дуальности Пристли корректен относительно* **L**, *т.т.е.* **L** *конечнозначна.*

Доказательство. (⇒) Так как любое многообразие MV-алгебр, порожденное бесконечным классом MV-алгебр, содержит алгебру Чена C (см. [5, стр. 474]), то в силу лемм 2 и 3 не существует бесконечно порожденных канонических многообразий MV-алгебр. Этот факт по контрапозиции доказывает данную часть теоремы.

(⇐) В силу теорем 3 и 4 мы можем задать операторы на O(D(A)) каноническим образом. По определению отображений σ и π операторы на O(D(A)) будут сохранять аксиомы MV-алгебры. Это доказывает корректность правила резолюции. □

В следующей теореме дано решение проблемы, поставленной в [7], т.е. основной проблемы настоящей статьи.

Теорема 6 (Критерий применимости метода резолюций). *Метод резолюций на основе теоремы представления Пристли* *корректен относительно произвольной многозначной логики, если и только если многообразие* V, *порожденное ее алгеброй* A *истинностных значений, замкнуто относительно канонических расширений, т.е. для всех* $A' \in V$ *верно, что* $O(D(A')) \in V$.

Доказательство. ($\Rightarrow$) Вследствие теоремы 2, многообразие, порождённое алгеброй классов эквивалентности произвольной многозначной логики, замкнуто относительно канонических расширений, если эта алгебра находится в классе ограниченных дистрибутивных решёток с операторами в классе Σ.

($\Leftarrow$) Предположим теперь, что многообразие V, порождённое алгеброй A, незамкнуто относительно канонических расширений, т.е. существует $A' \in V$ такая, что $O(D(A')) \notin V$. Следовательно, в V существует алгебра, каноническое расширение которой не удовлетворяет тождествам алгебры A. Отсюда, алгебра A порождает многообразие V такое, что метод резолюций некорректен относительно логики, для которой данное многообразие является характеристическим. □

Отметим, что, согласно данной теореме, алгебра истинностных значений рассматриваемой логики не обязана быть конечной. Следовательно, метод резолюций может быть применим и к некоторым бесконечнозначным логикам.

Заключение

В теореме 6 нами был сформулирован критерий применимости метода резолюций на основе теоремы представления Пристли к многозначным логикам с произвольными алгебрами истинностных значений.

В [9] было показано, что существует общая схема теорем представления как для решеток с операторми из класса Σ, так и для полурешеток с операторами из этого класса. По этой схеме, в частности, можно получить теорему представления для дистрибутивных решеток с оператором резидуации ([9, теорема 17]), к которым принадлежат и MV-алгебры – семантические аналоги логики Лукасевича. Но так как представление решеток с резидуацией осуществляется там посредством топологических дуалов, имеющих принципиально иную структуру (в частности, с тернарными отношениями на топологических пространствах), чем дуалы Пристли, то использованное нами в статье определение канонических расширений не может быть применено для создания метода резолюций в случае логик, основанных на дистрибутивных решетках с оператором резидуации. В силу этого представляет теоретический интерес понятие канонического расширения для таких логик. В случае нахождения подходящей формулировки, можно было бы эффективно решить вопрос о замкнутости соответствующих многообразий относительно представлений, и тогда появилось бы основание для построения метода резолюций для многозначных логик (например, логик Геделя и логик Лукасевича) и релевантных логик по аналогии с методом резолюций для многозначных логик на основе теоремы представления Пристли.

ЛИТЕРАТУРА

1. *Карпенко А.С.* Фактор-семантика для бесконечнозначной логики Лукасевича // Неклассические логики. М.: ИФАН, 1985. С. 20-26,.
2. *Комендантский В.Е.* Метод резолюций в смешанной логике Поста // Труды XVI научно-исследовательского семинара логического центра ИФРАН. М.: ИФРАН, 2002. С. 64-74.
3. *Чень Ч., Ли Р.* Математическая логика и автоматическое доказательство теорем. М.: Мир, 1983.
4. *Anshakov O., Rychkov S.* On Finite-Valued Propositional Logical Calculi // Notre Dame Journal of Formal Logic. 1994. Vol. 36, № 4. P. 606-629.
5. *Chang C.C.* Algebraic analysis of many valued logics // Trans. Amer. Math. Soc. 1958. Vol. 88. P. 467-490.
6. *Gehrke M., Priestley H.A.* Non-canonicity of MV-algebras // Houston Jounal of Mathematics, 2002.
7. *Komendantsky V.* On automated theorem proving by means of representation theory in Lukasiewicz logics // Smirnov's Readings. 4 international conference. Moscow: IPhRAS, 2003. P. 78-79.
8. *Sofronie-Stokkermans V.* Duality and canonical extensions of bounded distributive lattices with operators, and applications to the semantics of non-classical logics I. // Studia Logica. 2000. Vol 64, № 1. P. 151-172.
9. *Sofronie-Stokkermans V.* Representation Theorems and the Semantics of Non-classical Logics, and Applications to Automated Theorem Proving // Beyond Two: Theory and Applications of Multiple Valued Logic. Springer, 2003. P. 59-100.
10. *Vasyukov V.L.* The Completeness of the Factor Semantics for Lukasiewicz's Infinite-valued Logics // Studia Logica. 1993. Vol. 52. P. 143-167.

Е.Е.Ледников

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО «ЭПИСТЕМИЧЕСКОГО АНАЛОГА» ДЛЯ ТЕОРЕМЫ *14.3. ИЗ «PRINCIPIA MATHEMATICA»*

Abstract. *In the paper «epistemic analogue» of the theorem *14.3. of A.Whitehead and B.Russell «Principia Mathematica» (PM) is proved for epistemic logic EpS4*$^{=}$. Contextual definitions *14.01. and *14.02. from (PM) are changed into «epistemic analogues» of them – into (EA)*14.01 and into (EA)*14.02. respectively. Using such definitions the theorem *14.3. from (PM) is changed into the theorem (EA) *14.3. that is proved by M.Fitting's tableau method.*

В работах [1] и [2] указывалось на важность возможного доказательства «эпистемического аналога» теоремы *14.3. расселовской теории индивидных дескрипций при построении аналогичной теории для эпистемических контекстов. При этом контекстуальные определения из 14-й главы *«Principia Mathematica» (PM)* Б.Рассела и А.Уайтхеда [4, p.173-174]:

*14.01 $[(\iota x)A]B(\iota x)A =_{df} (\exists y)[(\forall z)(A \equiv z{=}y) \& B(y)]$ и

*14.02. $E!(\iota x)A =_{df} (\exists y)[(\forall z)(A \equiv z{=}y)]$

следует заменить определениями:

(EA) *14.01. $[(\iota x)A]B(\iota x)A =_{df} (\exists y)[K^n(\forall z)(A \equiv z{=}y) \& B(y)]$ и

(EA) *14.02. $E_n!(\iota x)A =_{df} (\exists y)[K^n(\forall z)(A \equiv z{=}y)]$,

где (EA) означает «эпистемический аналог» соответствующего расселовского определения, $E_n!$ – контекстуально элиминируемый предикат эпистемического существования и единственности индивидной дескрипции $(\iota x)A$ (где A – формула, которая может и не содержать свободных вхождений переменной оператора дескрипции), K – оператор эпистемической необходимости «известно, что», K^n – «модальный профиль» формулы $B(\iota x)A$ относительно дескрипции $(\iota x)A$. Область действия дескрипции (одд) $(\iota x)A$ в формуле $B(\iota x)A$ указывается помещением дескрипции, заключенной в квадратные скобки, перед той частью формулы, которая зависит от дескрипции как от параметра.

Нетрудно увидеть, что в экстенсиональных контекстах, когда n=0, определения (EA) переходят в расселовские. В частности,

* Работа выполнена при поддержке РГНФ, грант № 02-03-18290.

если в формуле KB(ιx)A одд является модально свободная подформула B(ιx)A, мы имеем случай обычного расселовского вторичного вхождения дескрипции, и формула K[(ιx)A]B(ιx)A должна пониматься как K(∃y)[(∀z)(A≡z=y)&B(y)]. Таким образом, контекстуальное определение (EA) *14.01 задает не только контекст, но и форму элиминации.

В формулировке из PM [3, p.185] теорема*14.3. выглядит так:

*14.3. ⊢ E!(ιx)A ⊃.[(ιx)A]fB(ιx)A ≡ f[(ιx)A]B(ιx)A,

где f – экстенсиональный контекст, создаваемый функциями истинности классической логики, то есть такой, что если p ≡ q, то f(p) ≡ f(q). Соответственно, (EA) *14.3. будет выглядеть следующим образом:

(EA) *14.3. ⊢ E_n!(ιx)A ⊃.[(ιx)A]χB(ιx)A ≡ χ[(ιx)A]B(ιx)A,

где χ - эпистемический, неэкстенсиональный контекст.

Доказательство теоремы осуществим для эпистемической кванторной логики с тождеством EpS4*$^=$, пропозициональная часть которой изоморфна алетической модальной пропозициональной логике S4, если в качестве аналога алетической необходимости использовать эпистемический оператор K, а алетической возможности – выражение (~K~). Но прежде чем приступить к доказательству, предложим аналитико-табличную формулировку логики EpC2*$^=$. Из работы М.Фиттинга [5] легко извлечь соответствующую теорему о существовании модели для EpC2*$^=$, внеся некоторые изменения и дополнения в его рассуждения.

Пусть L_{ep} – первопорядковый язык, содержащий счетное множество индивидных и предикатных переменных, в котором в качестве исходных используются символы {~, &, ∨, ⊃, ∀, ∃, =, K}. Пусть L^*_{ep} – расширение языка L_{ep} за счет добавления счетного множества новых индивидных переменных. К правилам редукции α, β, γ, δ, ν, π - типов формул добавляется ε-правило, выражающее подставимость тождественного:

ε	ε_0
A(x, y)	A(x, x)

Множество $\mathcal{U}$ непустых подмножеств формул S_1, S_2,…S_n языка L^*_{ep} образует EpS4*$^=$-свойство непротиворечивости, если для каждого S∈$\mathcal{U}$, в дополнение к правилам (1) – (3) М.Фиттинга [4, p.614], выполняются правила:

(4) $\gamma \in S \Rightarrow S \cup \{\gamma(y)\} \in \mathcal{U}$ для произвольной индивидной переменной y языка L^*_{ep},

(5) $\delta \in S \Rightarrow S \cup \{\delta(y)\} \in \mathcal{U}$ для новой индивидной переменной y языка L^*_{ep},

(6) $\nu \in S \Rightarrow S \cup \{\nu_0\} \in \mathcal{U}$,

(7) $\pi \in S \Rightarrow S_\nu^{=} \cup \{\pi_0\} \in \mathcal{U}$, где $S_\nu = \{\nu | \nu \in S\}$, а $S_\nu^{=} = S_\nu \cup \{(x=y) | (x=y) \in S\}$,

(8) $\varepsilon \in S, (x=y) \in S \Rightarrow S \cup \{\varepsilon_0\} \in \mathcal{U}$.

Сделаем неформальные пояснения к правилам (7) и (8). Согласно правилу (7), к формуле вида π можно приписать в столбце аналитической таблицы соответствующую формулу вида π_0, но при этом следует сначала вычеркнуть из столбца все формулы, кроме ν-формул и формул тождества. Согласно правилу (8), если в столбце имеется формула вида A(x,y) и формула (x=y), то в столбец можно поместить формулу вида A(x,x).

Теорема о существовании модели для $EpS4^{*=}$ легко доказывается по аналогии с рассуждениями М.Фиттинга [5, p.616-618]. Теперь можно непосредственно приступить к доказательству теоремы (EA) *14.3. для эпистемической логики $EpS4^{*=}$. Для этой логики «модальный профиль» дескрипции $(\iota x)A$ в формуле $B(\iota x)A$ во всех случаях может быть выражен единственным (неитерированным) оператором эпистемической необходимости K. Поскольку условие эпистемического существования и единственности имплицирует расселовское условие существования и единственности, сформулированное им для экстенсиональных контекстов, то последние рассматривать не будем, а ограничимся при доказательстве четырьмя характерными видами эпистемических контекстов.

Случай (1). $\vdash E_n!(\iota x)A \supset .[(\iota x)A]KB(\iota x)A \equiv K[(\iota x)A]B(\iota x)A$,

где $B(\iota x)A$ – модально свободная формула. Требуемая замкнутая аналитическая таблица будет начинаться так:

$\sim\{E_n!(\iota x)A \supset .[(\iota x)A]KB(\iota x)A \equiv K[(\iota x)A]B(\iota x)A\}$

$E_n!(\iota x)A$

$\sim\{[(\iota x)A]KB(\iota x)A \equiv K[(\iota x)A]B(\iota x)A\}$

(α-правило редукции для отрицания импликации).

$\sim[(\iota x)A]KB(\iota x)A$	$[(\iota x)A]KB(\iota x)A$
$K[(\iota x)A]B(\iota x)A$	$\sim K[(\iota x)A]B(\iota x)A$

(β-правило редукции для отрицания эквивалентности).

Рассмотрим далее левый и правый столбцы таблицы по отдельности. Левый столбец будет выглядеть так[1]:

(1) $E_n!(\iota x)A$

(2) $\sim[(\iota x)A]KB(\iota x)A$

(3) $K[(\iota x)A]B(\iota x)A$

(4) $(\exists y)[K(\forall z)(A\equiv z=y)]$ ((1), опр. (EA) *14.02.)

(5) $K(\forall z)(A\equiv z=u)$ ((4), δ-правило редукции для квантора существования, u – новая индивидная переменная)

(6) $\sim(\exists y)[K(\forall z)(A\equiv z=y)\&B(y)]$ ((2), опр. (EA) *14.01.)

(7) $K(\exists y)[(\forall z)(A\equiv z=y)\&B(y)]$ ((3), опр. (EA) *14.01.)

(8) $\sim[K(\forall z)(A\equiv z=u)\&B(u)]$ ((6), γ-правило редукции для отрицания квантора существования, u – произв. индивидная переменная)

(9а) $\sim K(\forall z)(A\equiv z=u)$ ((8), β-правило редукции для отрицания конъюнкции, противоречит (5)) (*)	(9в) $\sim KB(u)$ ((8), β-правило редукции для отрицания конъюнкции) (10в) $\sim B(u)$ ((9в), π-правило редукции, в столбце сохраняются формулы (5), (7)) (11в) $(\forall z)(A\equiv z=u)$ ((5), ν-правило редукции) (12в) $(\exists y)[(\forall z)(A\equiv z=y)\&B(y)]$ ((7), ν-правило редукции)

(13в) $[(\forall z)(A\equiv z=v)\&B(v)]$ ((12в), δ-правило редукции для квантора существования, v – новая индивидная переменная)

(14в) $(\forall z)(A\equiv z=v)$ ((13в), α-правило редукции для конъюнкции)

(15в) $B(v)$ ((13в), α-правило редукции для конъюнкции)

(16в), $A\equiv u=u$ ((11в), γ-правило редукции для квантора общности, u – произвольная индивидная переменная)

(17в) $A\equiv u=v$ ((14в), γ-правило редукции для квантора общности, u – произвольная индивидная переменная)

(18с) A ((17в), β-правило редукции для эквивалентности) (19с) $(u=v)$ ((17в), β-правило редукции для эквивалентности) (20с) $B(u)$ ((15в), (19с), ε-правило редукции, противоречит (10в)) (*)	(18d) $\sim A$ ((17в), β-правило редукции для эквивалентности) (19d) $\sim(u=v)$ ((17в), β-правило редукции для эквивалентности)

[1] В варианте табличного метода, предложенного М.Фиттингом, столбец замыкается, если в нем встречается пара формул вида A и ~A или формула вида ~(x=x). Замыкание столбца будем отмечать звездочкой в круглых скобках: (*).

(20e) $(u=u)$ ((16в), β-правило редукции для эквивалентности)	(20f) $\sim A$ ((17в), β-правило редукции для эквивалентности)
(21e) A ((16в), β-правило редукции для эквивалентности, противоречит (18d)) (*)	(21f) $\sim(u=u)$ ((16в), β-правило редукции для эквивалентности, противоречие) (*)

Правый столбец таблицы будет выглядеть так:

(1) $E_n!(\iota x)A$
(2) $[(\iota x)A]KB(\iota x)A$
(3) $\sim K[(\iota x)A]B(\iota x)A$
(4) $(\exists y)[K(\forall z)(A\equiv z=y)]$ ((1), опр. (EA) *14.02.)
(5) $(\exists y)[K(\forall z)(A\equiv z=y)\&KB(y)]$ ((2), опр. (EA) *14.01.)
(6) $\sim K(\exists y)[(\forall z)(A\equiv z=y)\&B(y)]$ ((3), опр. (EA) *14.01.)
(7) $K(\forall z)(A\equiv z=v)\&KB(v)$ ((5), δ-правило редукции для квантора существования, v – новая индивидная переменная)
(8) $K(\forall z)(A\equiv z=v)$ ((7), α-правило редукции для конъюнкции)
(9) $KB(v)$ ((7), α-правило редукции для конъюнкции)
(10) $\sim(\exists y)[(\forall z)(A\equiv z=y)\&B(y)]$ ((6), π-правило редукции, в столбце остаются формулы (7), (8), (9))
(11) $\sim[(\forall z)(A\equiv z=v)\&B(v)]$ ((10), γ-правило редукции для отрицания квантора существования, v – произвольная индивидная переменная)
(12) $K(\forall z)(A\equiv z=v)$ ((7), α-правило редукции для конъюнкции)
(13) $KB(v)$ ((7), α-правило редукции для конъюнкции)
(14) $(\forall z)(A\equiv z=v)$ ((12), ν-правило редукции)
(15) $B(v)$ ((13), ν-правило редукции)

(16a) $\sim(\forall z)(A\equiv z=v)$ ((11), β-правило редукции для отрицания конъюнкции, противоречит (14)) (*)	(16в) $\sim B(v)$ ((11), β-правило редукции для отрицания конъюнкции, противоречит (15)) (*)

Случай (2). $\vdash E_n!(\iota x)A \supset.[(\iota x)A]\sim K\sim B(\iota x)A \equiv \sim K\sim[(\iota x)A]B(\iota x)A$, где $B(\iota x)A$ – модально свободная формула. Требуемая замкнутая аналитическая таблица будет начинаться так:

$\sim\{E_n!(\iota x)A \supset.[(\iota x)A]\sim K\sim B(\iota x)A \equiv \sim K\sim[(\iota x)A]B(\iota x)A\}$

$E_n!\,(\iota x)A$

$\sim\{[(\iota x)A]\sim K\sim B(\iota x)A \equiv \sim K\sim[(\iota x)A]B(\iota x)A\}$

(α-правило редукции для отрицания импликации).

$[(\iota x)A]\sim K\sim B(\iota x)A$ $K\sim[(\iota x)A]B(\iota x)A$	$\sim[(\iota x)A]\sim K\sim B(\iota x)A$ $\sim K\sim[(\iota x)A]B(\iota x)A$

(β–правило редукции для отрицания эквивалентности).

Рассмотрим далее левый и правый столбцы таблицы по отдельности. Левый столбец таблицы будет выглядеть так:

(1) $E_n!(\iota x)A$

(2) $[(\iota x)A]\sim K\sim B(\iota x)A$

(3) $K\sim[(\iota x)A]B(\iota x)A$

(4) $(\exists y)[K(\forall z)(A\equiv z=y)]$ ((1), опр. (EA) *14.02.)

(5) $(\exists y)[K(\forall z)(A\equiv z=y)\&\sim K\sim B(y)]$ ((2), опр. (EA) *14.01.)

(6) $K\sim(\exists y)[(\forall z)(A\equiv z=y)\&B(y)]$ ((3), опр. (EA) *14.01.)

(7) $[K(\forall z)(A\equiv z=v)\&\sim K\sim B(v)]$ ((5), δ-правило редукции для квантора существования, v – новая индивидная переменная)

(8) $K(\forall z)(A\equiv z=v)$ ((7), α-правило редукции для конъюнкции)

(9) $\sim K\sim B(v)$ ((7), α-правило редукции для конъюнкции)

(10) $B(v)$ ((9), π -правило редукции, в столбце остаются (6), (8))

(11) $(\forall z)(A\equiv z=v)$ ((8), ν-правило редукции)

(12) $\sim(\exists y)[(\forall z)(A\equiv z=y)\&B(y)]$ ((6), ν-правило редукции)

(13) $\sim[(\forall z)(A\equiv z=v)\&B(v)]$ ((12), γ-правило редукции для отрицания квантора существования, v – произвольная индивидная переменная)

(14а) $\sim(\forall z)(A\equiv z=v)$ ((13), β-правило редукции для отрицания конъюнкции, противоречит (11)) (*)	(14в) $\sim B(v)$ ((13), β-правило редукции для отрицания конъюнкции, противоречит (10)) (*)

Правый столбец таблицы будет выглядеть так:

(1) $E_n!(\iota x)A$

(2) $\sim[(\iota x)A]\sim K\sim B(\iota x)A$

(3) $\sim K\sim[(\iota x)A]B(\iota x)A$

(4) $(\exists y)[K(\forall z)(A\equiv z=y)]$ ((1), опр. (EA) *14.02.)

(5) $\sim(\exists y)[K(\forall z)(A\equiv z=y)\&\sim K\sim B(y)]$ ((2), опр. (EA) *14.01.)

(6) $\sim K\sim(\exists y)[(\forall z)(A\equiv z=y)\&B(y)]$ ((3), опр. (EA) *14.01.)

(7) $K(\forall z)(A\equiv z=v)$ ((4), δ-правило редукции для удаления квантора существования, v – новая индивидная переменная)

(8) $\sim[K(\forall z)(A\equiv z=v)\&\sim K\sim B(v)]$ ((5), γ-правило редукции для отрицания квантора существования, v – произвольная индивидная переменная)

9а) ~K(∀z)(A≡z=v) ((8), β-правило редукции для отрицания конъюнкции, противоречит (7)) (*)	(9в) ~~K~B(v) ((8), β-правило редукции для отрицания конъюнкции) (10в) K~B(v) ((9в), α-правило редукции для двойного отрицания) (11в) (∃y)[(∀z)(A≡z=y)&B(y)] ((6), π-правило редукции, в столбце остаются формулы (7), (10в)) (12в) ~B(v) ((10в), ν-правило редукции)

(13в) (∀z)(A≡z=u)&B(u) ((11в), δ-правило редукции для квантора существования, u – новая индивидная переменная)
(14в) (∀z)(A≡z=u) ((13в), α–правило редукции для конъюнкции)
(15в) B(u) ((13в), α–правило редукции для конъюнкции)
(16в) (A≡v=u) ((14в), γ-правило редукции для квантора общности, v – произвольная индивидная переменная)

(17с) A((16в), β-правило редукции для эквивалентности)	(17d) ~A ((16в), β-правило редукции для эквивалентности)
(18с) (v=u) ((16в), β-правило редукции для эквивалентности)	(18d) ~(v=u) ((16в), β-правило редукции для эквивалентности)
(19с) B(v) ((15в), (18с), ε-правило редукции, противоречит (12в)) (*)	(19d) (∀z)(A≡z=v) ((7), ν-правило редукции) (20d) (A≡v=v) ((19d), γ-правило редукции для квантора общности, v -произвольная индивидная переменная)

(21e) (v = v) ((20d), β-правило редукции для эквивалентности) (22e) A ((20d), β-правило редукции для эквивалентности, противоречит (17d)) (*)	(21f) ~A ((20d), β-правило редукции для эквивалентности) (22f) ~(v=v) ((20d), β-правило редукции для эквивалентности, противоречие) (*)

Случай (3). ⊢K[(ιx)A]B(ιx)A ≡ [(ιx)A]KB(ιx)A,
где B(ιx)A является ν-формулой. В этом случае не требуется посылка E_n!(ιx)A, поскольку, по аналогии с расселовской теорией [4, p.186], эпистемическое существование и единственность деск-

рипции $(\iota x)A$ следует из формулы с меньшим одд, т.е. из формулы $K[(\iota x)A]B(\iota x)A$. Требуемая замкнутая таблица будет начинаться так:

$$\sim\{K[(\iota x)A]B(\iota x)A \equiv [(\iota x)A]KB(\iota x)A\}$$

$\sim K[(\iota x)A]B(\iota x)A$	$K[(\iota x)A]B(\iota x)A$
$[(\iota x)A]KB(\iota x)A$	$\sim[(\iota x)A]KB(\iota x)A$

(β-правило редукции для отрицания эквивалентности).

Рассмотрим далее левый и правый столбцы таблицы по отдельности. Левый столбец будет выглядеть так:

(1) $\sim K[(\iota x)A]B(\iota x)A$

(2) $[(\iota x)A]KB(\iota x)A$

(3) $\sim K(\exists y)[K(\forall z)(A\equiv z=y)\&B(y)]$ ((1), опред. (EA) *14.01.)

(4) $(\exists y)[K(\forall z)(A\equiv z=y)\&KB(y)]$ ((2), опред. (EA) *14.01.)

(5) $K(\forall z)(A\equiv z=v)\&KB(v)$ ((4), δ-правило редукции для квантора существования, v – новая индивидная переменная)

(6) $K(\forall z)(A\equiv z=v)$ ((5), α-правило редукции для конъюнкции)

(7) $KB(v)$ ((5), α-правило редукции для конъюнкции)

(8) $B(v)$ ((7), ν-правило редукции)

(9) $\sim(\exists y)[K(\forall z)(A\equiv z=y)\&B(y)]$ ((3), π-правило редукции, в столбце остаются формулы (5), (6), (7), (8))

(10) $\sim[K(\forall z)(A\equiv z=v)\&B(v)]$ ((9), γ-правило редукции для отрицания квантора существования, v – произвольная индивидная переменная)

(11а) $\sim K(\forall z)(A\equiv z=v)$ ((10), β-правило редукции для отрицания конъюнкции, противоречит (6)) (*)	(11в) $\sim B(v)$ ((10), β-правило редукции для отрицания конъюнкции, противоречит (8)) (*)

Правый столбец таблицы будет выглядеть так:

(1) $K[(\iota x)A]B(\iota x)A$

(2) $\sim[(\iota x)A]KB(\iota x)A$

(3) $K(\exists y)[K(\forall z)(A\equiv z=y)\&B(y)]$ ((1), опред. (EA) *14.01.)

(4) $(\exists y)[K(\forall z)(A\equiv z=y)\&B(y)]$ ((3), ν-правило редукции)

(5) $\sim(\exists y)[K(\forall z)(A\equiv z=y)\&KB(y)]$ ((2), опред. (EA) *14.01.)

(6) $[K(\forall z)(A\equiv z=v)\&B(v)]$ ((4), δ-правило редукции для квантора существования, v – новая индивидная переменная)

(7) $K(\forall z)(A\equiv z=v)$ ((6), α-правило редукции для конъюнкции)

(8) $B(v)$ ((6), α-правило редукции для конъюнкции)

(9) $\sim[K(\forall z)(A\equiv z=v)\&KB(v)]$ ((5), γ-правило редукции для отрицания квантора существования, v – произвольная индивидная переменная)

(10а) $\sim K(\forall z)(A \equiv z{=}v)$ ((9), β-правило редукции для отрицания конъюнкции, противоречит (7))

(*)

(10в) $\sim KB(v)$ ((9), β-правило редукции для отрицания конъюнкции)

(11в) $\sim B(v)$ ((10в), π-правило редукции, в столбце остаются формулы (3), (7), (8), противоречит (8))

(*)

Случай (4). $\vdash E_n!(\iota x)A \supset . \sim K\sim[(\iota x)A]B(\iota x)A \equiv [(\iota x)A]\sim K\sim B(\iota x)A$, где $B(\iota x)A$ является π-формулой. Требуемая замкнутая аналитическая таблица будет начинаться так:

$\sim\{E_n!(\iota x)A \supset . \sim K\sim[(\iota x)A]B(\iota x)A \equiv [(\iota x)A]\sim K\sim B(\iota x)A\}$

$E_n!(\iota x)A$

$\sim\{\sim K\sim[(\iota x)A]B(\iota x)A \equiv [(\iota x)A]\sim K\sim B(\iota x)A\}$

(α-правило редукции для отрицания импликации).

$K\sim[(\iota x)A]B(\iota x)A$	$\sim K\sim[(\iota x)A]B(\iota x)A$
$[(\iota x)A]\sim K\sim B(\iota x)A$	$\sim[(\iota x)A]\sim K\sim B(\iota x)A$

(β-правило редукции для отрицания эквивалентности).

Рассмотрим далее левый и правый столбцы таблицы по отдельности. Левый столбец будет выглядеть так:

(1) $E_n!(\iota x)A$

(2) $K\sim[(\iota x)A]B(\iota x)A$

(3) $[(\iota x)A]\sim K\sim B(\iota x)A$

(4) $(\exists y)[K(\forall z)(A \equiv z{=}y)]$ ((1), опр. (EA) *14.02.)

(5) $K\sim(\exists y)[K(\forall z)(A \equiv z{=}y)\&B(y)]$ ((2), опр. (EA) *14.01.)

(6) $(\exists y)[K(\forall z)(A \equiv z{=}y)\&\sim K\sim B(y)]$ ((3), опр. (EA) *14.01.)

(7) $K(\forall z)(A \equiv z{=}u)\&\sim K\sim B(u)$ ((6), δ-правило редукции для квантора существования, u – новая индивидная переменная)

(8) $K(\forall z)(A \equiv z{=}u)$ ((7), α-правило редукции для конъюнкции)

(9) $\sim K\sim B(u)$ ((7), α-правило редукции для конъюнкции)

(10) $\sim(\exists y)[K(\forall z)(A \equiv z{=}y)\&B(y)]$ ((5), ν-правило редукции)

(11)) $\sim[K(\forall z)(A \equiv z{=}u)\&B(u)]$ ((10), γ-правило редукции для отрицания квантора существования, u – произвольная индивидная переменная)

(12а) $\sim K(\forall z)(A \equiv z{=}u)$ ((11), β-правило редукции для отрицания конъюнкции, противоречит (8))

(*)

(12в) $\sim B(u)$ ((11), β-правило редукции для отрицания конъюнкции)

(13в) $B(u)$ ((9), π-правило редукции, в столбце остается формула (12в), которой формула (13в) противоречит)

(*)

Правый столбец таблицы будет выглядеть так:

(1) $E_n!(\iota x)A$

(2) $\sim K\sim[(\iota x)A]B(\iota x)A$

(3) $\sim[(\iota x)A]\sim K\sim B(\iota x)A$

(4) $(\exists y)K(\forall z)(A\equiv z=y)$ ((1), опр. (EA) *14.02.)

(5) $\sim K\sim(\exists y)[K(\forall z)(A\equiv z=y)\&B(y)]$ ((2), опр. (EA) *14.01.)

(6) $\sim(\exists y)[K(\forall z)(A\equiv z=y)\&\sim K\sim B(y)]$ ((3), опр. (EA) *14.01.)

(7) $K(\forall z)(A\equiv z=u)$ ((4), δ-правило редукции для квантора существования, u – новая индивидная переменная)

(8) $\sim[K(\forall z)(A\equiv z=u)\&\sim K\sim B(u)]$ ((6), γ-правило редукции для отрицания квантора существования, u – произвольная индивидная переменная)

(9а) $\sim K(\forall z)(A\equiv z=u)$ ((8), β-правило для отрицания конъюнкции, противоречит (7)) (*)	(9в) $\sim\sim K\sim B(u)$ ((8), β-правило редукции для отрицания конъюнкции) (10в) $K\sim B(u)$ ((9в), α-правило для двойного отрицания)

(11в) $(\exists y)[K(\forall z)(A\equiv z=y)\&B(y)$ ((5), π-правило редукции, в столбце остаются формулы (7), (10в))

(12в) $K(\forall z)(A\equiv z=v)\&B(v)$ ((11в), δ-правило редукции для квантора существования, v – новая индивидная переменная)

(13в) $K(\forall z)(A\equiv z=v)$ ((12в), α-правило редукции для конъюнкции)

(14в), $B(v)$ ((11в), α-правило редукции для конъюнкции)

(15в) $(\forall z)(A\equiv z=v)$ ((13в), ν-правило редукции)

(16в) $(\forall z)(A\equiv z=u)$ ((7), ν-правило редукции)

(17в) $(A\equiv u=v)$ ((15в), γ-правило редукции для квантора общности, u – произвольная индивидная переменная)

(18в) $(A\equiv u=u)$ ((16в), γ-правило редукции для квантора общности, u – произвольная индивидная переменная)

(19c) A ((17в), β-правило редукции для эквивалентности) (20c) $(u=v)$ ((17в), β-правило редукции для эквивалентности) (21c) $\sim B(u)$ ((10в), ν-правило редукции) (22c) $B(u)$ ((14в),(20c), ε-правило, противоречит (21c)) (*)	(19d) $\sim A$ ((17в), β-правило редукции для эквивалентности) (20d) $\sim(u=v)$ ((17в), β-правило редукции для эквивалентности)

(21e) (u=u) ((18в), β-правило редукции для эквивалентности)	(21f) ~A ((18в), β-правило редукции для эквивалентности)
(22e) A ((18в), β-правило редукции для эквивалентности, противоречит (19d)) (*)	(22f) ~(u=u) ((18в), β-правило редукции для эквивалентности, противоречие) (*)

(Все более сложные допустимые контексты $EpS4^{*=}$ строятся из рассмотренных контекстов с использованием, если необходимо, функционально-истинностных связок классической логики.)

В логике $EpS4^{*=}$ не доказуемы ни эпистемические аналоги формулы Баркан (т.е. формулы $(\forall x)KP(x) \supset K(\forall x)P(x)$, $\sim K\sim(\exists x)P(x) \supset (\exists x)\sim K\sim P(x)$), ни интуитивно парадоксальная формула $K(\exists x)P(x) \supset (\exists x)KP(x)$. Частным случаем последней будет следующее условное суждение: «Если известно, что существует в чемпионате по футболу какой-либо победитель, то существует команда, о которой известно, что именно она является победителем», что несовместимо с честным чемпионатом. Тем не менее, логика $EpS4^{*=}$ не свободна от ряда достаточно хорошо описанных в литературе парадоксов «логического всеведения», даже в том случае, если использовать, как это сделано в данной работе, оператор безличного знания. Поэтому все еще остается актуальной задача построения эпистемической логики, в большей степени соответствующей нашим интуитивным представлениям о знании, чем логика $EpS4^{*=}$. Один из путей решения данной задачи – использование в эпистемической логике понятий «явного» и «неявного» знания, семантика для которых предложена нами в [3].

ЛИТЕРАТУРА

1. *Ледников Е.Е.* Существование и индивидные дескрипции // Логические исследования. Вып.9. М., 2002. С.113-118.
2. *Ледников Е.Е.* Индивидные дескрипции в эпистемических контекстах // Смирновские чтения. 4 Международная конференция. М., 2003. С.148-150.
3. *Ледников Е.Е.* О семантике «явного» и «неявного» знания // Труды научно-исследовательского семинара Логического центра института философии РАН. Вып. XVI. М., 2002. С.75-78.
4. *Whitehead A.N., Russell B.* Principia Mathematica. Cambridge, 1962. P.173-186.
5. *Fitting Melvin.* Model existence theorems for modal and intuitionistic logics // The journal of symbolic logic. V. 36, n. 4, Dec., 1973. P.613-627.

Н.М.Нагорный

ОТ КАНТОРА К МАРКОВУ: ВОСХОЖДЕНИЕ К КОНСТРУКТИВНОСТИ (к 100-летию со дня рождения А.А.Маркова)[*]

Abstract. *The evolution of philosophical stand points in the foundations of mathematics on ways from Cantor to Markov is considered.*

С тех пор как в математической науке сформировался ее самостоятельный раздел – основания математики – со своей тематикой и рабочим аппаратом, в ней был провозглашен ряд выдающихся математико-философских *платформ*, в которых излагались точки зрения их авторов на *природу* математического знания. На основе некоторых из них был предложен ряд "архитектурных *программ*" устройства математики. Четыре самые эффективные из них, разработанные крупнейшими математиками-мыслителями своего времени, заняли достойное место в науке и, оказав серьезное влияние на всю последующую математику, с большим или меньшим успехом продолжают развиваться и в наши дни. Именно эти программы и имел в виду А.Н. Колмогоров, выступая 4-го апреля 1979 г. на праздновании 20-летнего юбилея кафедры математической логики МГУ, учрежденной А.А. Марковым (1903–1979) и бессменно возглавлявшейся им до последних дней его жизни. Говоря о Маркове – его сверстнике и неизменном оппоненте в вопросах оснований математики, Колмогоров поставил его имя в одном ряду с именами Г. Кантора (1845–1918), Л.Э.Я. Брауэра (1881–1966) и Д. Гильберта (1862–1943), охарактеризовав всех четверых как «...ученых, ощущавших на себе бремя ответственности за общее состояние дел в математике в целом».

Первой из упомянутых по времени была провозглашена так называемая *теоретико-множественная* программа Кантора, основанная на предварительно разработанном им *учении*[1] о множествах (Mengen*lehre*). «Множествами» Кантор называл нечто в высшей степени неопределенное – *произвольные* совокупности

---

[*] Работа выполнена при поддержке РФФИ, грант № 03-06 80166.

[1] Кантор употреблял именно *этот* термин, и сейчас трудно выяснить, кто первым ввел "в обращение" термин «теория». Теория, по смыслу, обязана иметь "работающее" *определение* своего основного понятия. В "теории" же множеств от него всячески уклонятся. Но кто бы всерьез принял, например, *теорию* чисел без определения «натурального числа»?

элементов *произвольной* природы. В рамках его программы любые *математические объекты* надлежало определять как *множества,* удовлетворяющие таким-то и таким-то условиям.

Поясним сказанное на достаточно типичном примере понятия «натурального числа». Введем понятие «натурального ряда», обозначив его буквой N. В качестве такого N можно будет взять произвольное *множество*, удовлетворяющее аксиомам Пеано. А после этого уже можно будет определить и «натуральные числа» как одноэлементные *множества*, единственными *элементами* которых являются *элементы*[2] уже определенного ранее множества N.

Рассуждать о математических объектах у Кантора полагалось по правилам традиционной аристотелевской логики, в число которых входили, в частности, «закон исключенного третьего и разрешение доказывать экзистенциальные утверждения косвенно, методом «от противного», что делало канторовскую математику чрезвычайно *неконструктивной.* Некоторые сомнения вызывала и ее *статичность*: в ее формальных языках имелись "существительные" (*объекты*), "местоимения" (*переменные*), "прилагательные" (*предикаты*), но в них не было "глаголов" с их *временами*, и в дальнейшем это сыграло свою роль.

И тем не менее, с первого взгляда, перспективы этой программы выглядели заманчивыми[3]. Однако вскоре в программе стали обнаруживаться "подводные камни", постепенно сделавшие ее в теоретическом плане абсолютно *несостоятельной.* Ряд ее трудностей мы затронем в будущем, но об одной из них, самой убийственной[4], мы скажем уже сейчас, ввиду мифов, "полуправд", а то и *прямых неправд,* встречающихся в литературе по данному вопросу (в том числе и в *серьезной*). Речь пойдет о *противоречиях,* имеющихся в самом «канторовском учении». Об одном из них писал Б. Рассел в 1902 г. в своем письме к Г. Фреге. Рассел сообщал в нем, что обнаружил его в книге Фреге, вышедшей в свет еще в 1892 г. Но ни Фреге, ни сам Кантор этого в свое время *не заметили.* Рассел привел в письме *конкретный пример* множества M, такого, что в рамках канторовского учения одновременно *доказуемы* (!) *две теоремы*: одна о том, что $M \in M$, *и* другая о том, что

---

2 Сами по себе элементы N могут и не быть множествами.

3 Хотя, например, Пуанкаре, Кронекер и другие видные математики встретили ее "в штыки".

4 В литературе этот феномен обычно называют не *теоремой* Рассела, хотя он этого вполне заслуживал бы, а лишь его *парадоксом.* В нем "повинна" как раз *статичность* канторовского учения. См. по этому поводу мою вступительную статью к первому тому Избранных трудов А.А.Маркова: М., МЦНМО, 2002 с. XX-XXII.

$\neg(M \in M)$. Разумеется, после этого – в полном соответствии с правилами логики – в канторовском учении может быть доказано *любое* утверждение. Сказанное будет касаться и *математики* в том случае, если она в своем построении будет опираться на канторовское учение (т.е., попросту говоря, на теорию множеств). Канторовская программа нуждалась в неотложном "ремонте". К сожалению, попытки "отремонтировать" ее до сих пор ни к какому успеху не привели.

В связи с этим, а также и с другими сходными фактами вошло в обычай говорить о кризисе, "разразившемся в основаниях математики" в конце XIX в. Важно четко понять, кризис чего имел место на самом деле. Нам представляется правильным говорить о кризисе в *канторовском учении* (или, чтобы не отходить от общепринятой терминологии, в *теории множеств*). Математику же он затрагивает лишь в той мере, в какой она в своем построении опирается на теорию множеств.

Первым с программой построения математики, радикально *контроверсной* по отношению к программе Кантора, выступил в самом начале XX в. совсем еще молодой тогда Брауэр, провозгласивший борьбу за *полное* освобождение математики от канторовского учения.

В его программе, названной им «интуиционистской», роль *математических объектов* вместо канторовских множеств стали играть *умственные построения*, от которых Брауэр требовал, чтобы они были *понятно описанными* и *интуитивно ясными*. С суждениями об этих построениях Брауэр – на основании неких естественных и достаточно четко сформулированных им (интуиционистских) принципов их понимания – связал некоторые «задачи на построение», решив которые, мы получаем возможность объявлять их (интуиционистски) *истинными*.

Так, обосновать *экзистенциальное* суждение по Брауэру означало построить (причем, *напрямую*, а не методом "от противного") объект, существование которого в нем утверждается. Аналогично, обосновать *дизъюнкцию* суждений по Брауэру означало указать (с теми же самыми оговорками) истинный ее член. Обосновать *отрицание* какого-либо суждения по Брауэру означало обосновать *неразрешимость* задачи, требующейся для обоснования самого суждения, и т. п. Так что обосновать истинность суждения $P \vee \neg P$ означало *решить* задачу, связанную с P, или же обосновать ее *неразрешимость*. А это, ввиду *наличия* трудных и не решенных до сих пор проблем, означало, что «закон исключенного третьего» в интуиционистской математике "не работает".

Обратим внимание на то, что этот факт стал важнейшим со времен Аристотеля открытием в логике[5]. Он, наряду с *ограничением* на тип объектов (в частности, объектов *незавершенных*), допускаемых Брауэром к рассмотрению стал одним из важнейших шагов, сделанных интуиционистской математикой *по пути к конструктивизму*.

К сожалению, исторически ситуация сложилась так, что это удивительно тонкое и красивое течение в основном сосредоточило свое внимание в математике на философской ее проблематике.

В противовес contra-канторовской программе Брауэра, чисто *структуралистская* «теория доказательств» («метаматематика») Гильберта, окончательно сложившаяся к середине 20-х годов XX в., была pro-канторовской. Между тем, *объекты* его программы *автоматически* оказывались *конструктивными*, и потому Марков в одной из своих работ назвал Гильберта – наравне с Брауэром – «одним из провозвестников конструктивной математики». По замыслу метаматематика Гильберта восходила к идее курса «Оснований геометрии», прочитанного им еще в 1898/99 уч. году в Гёттингене. В этом курсе Гильберт впервые продемонстрировал свою точную версию аксиоматического метода. По Гильберту, обоснование любой *математической теории* (в том числе и *теории множеств*) должно было состоять в ее аксиоматизации (*непротиворечивой*, а по возможности, и *полной*). Дедуктивным аппаратом своей концепции Гильберт сделал (1925 г.) аристотелевскую логику, особо при этом подчеркнув ту выдающуюся роль, которую, по его мнению, в ней играет «закон исключенного третьего».

Идея Гильберта – превратить аксиоматизированную математику в своего рода “манипулирование формулами” – задолго до наступления “эры машинной математики” предвосхитила *основной*, как нам представляется, идеологический постулат этой эры: а именно мысль о том, что нечто может стать *общепонятным*, т.е. “понятным” в том числе и компьютеру, лишь тогда, когда оно вообще не требует *никакого* понимания.

К сожалению, гениальный замысел Гильберта: обосновывать математику путем установления *непротиворечивости* аксиоматик всех ее теорий тоже “не сработал”. Причем, это случилось именно там, где его творец видел основное поле применений этого плана:

---

[5] Брауэр, в отличие от близкого ему “по духу” Маркова, придерживался той точки зрения, что интуиционистская логика не должна (да и не может) быть формализована.

непротиворечивость теории множеств, – и даже математического анализа, – по-прежнему остается недоказанной.

Теперь обратимся к программе А.А.Маркова-младшего – к его «математическому конструктивизму»[6].

Юноша Марков по своему происхождению имел все основания стать "потомственным" математиком[7]. Однако, увлеченный репетитором, готовившим его к переводным экзаменам в гимназии[8], он в 1919 г. поступает в университет на химическое отделение. В неполные семнадцать лет он пишет первую работу (по экспериментальной химии). Университет он оканчивает в 1924 г. уже физиком-теоретиком, и впоследствии им было написано несколько замечательных работ по квантовой теории и теории относительности. Потом были написаны работы по прикладной геофизике, небесной механике, теории динамических систем и т. п. В 1935 г. он уже становится доктором физико-математических наук, а в 1936 г. – профессором Ленинградского университета. К середине 40-х годов он уже был математиком (по приобретенному опыту работы) с мировой известностью. Однако многое в математике его не удовлетворяло, и в частности, – безраздельно господствовавший тогда теоретико-множественный стиль математического мышления. Ему был присущ *естествоиспытательский* подход к математике, его влекли к себе те ее разделы, в которых абстрактная их сторона не заводила туда, «откуда нет возврата "на землю"». Его увлекала философская сторона науки. В одной из работ, написанных еще в самом начале 30-х годов он роняет фразу: «Главная же цель всякой теории – сведение сложного к простому, *а не наоборот»*.

Глубокий и постоянный интерес к основаниям математики, к только что возникшей тогда (в середине 30-х годов) теории алгорифмов привел Маркова к беспрецедентному решению: он порывает со своим научным прошлым и начинает жизнь в математике заново[9]. На базе теории алгорифмов и разработанной им «конструктивной логики» им было создано новое направление в "архитектуре математики". Вокруг него сплотилась замечательная

---

[6] Немало сведений на эту тему содержится в уже упоминавшейся вступительной статье к первому тому Избранных трудов А.А.Маркова.

[7] Его отец – знаменитый математик академик А.А.Марков (1856-1922) занимался с сыном математикой лично. Одаренным математиком был и рано умерший его дядя – В.А.Марков.

[8] У него было слабое здоровье, и занятий в гимназии он не посещал.

[9] Это произошло в годы тяжелейшей реакции, когда неосторожное философское высказывание могло стоить не только свободы, но и жизни. Когда я однажды, желая предостеречь его, заговорил с ним о "возможных трудностях", он ответил мне: «Я давно махнул рукой на трудности, и про себя решил: всё, что касается меня, меня не касается».

научная школа (сначала в Ленинграде, а потом и в Москве). В ней им самим и его учениками решен ряд знаменитых проблем, таких как проблема Туэ, проблема гомеоморфии и 10-я проблема Гильберта. В текущем году в его родном городе – Санкт-Петербурге, в Нью-Йорке и в других городах будет отмечаться 100-летие со дня его рождения. К этому дню в России завершено фактически полное издание собрания его трудов.

Н.Н.Непейвода

ЛОГИКИ И СТИЛИ ПРОГРАММИРОВАНИЯ*

> Доказательством варварства русских является то, что они буквально помешаны на мытье: они, по слухам, чуть не каждую неделю ходят в баню!
>
> (Немецкий путешественник XVII века)
>
> Нецивилизованность русских доказывается тем, что они не верят рекламе: чем больше рекламируется товар, тем хуже они его покупают!
>
> (Американский социолог рубежа XX–XXI веков)

Abstract. *Programming style is a notion corresponding to scientific paradigm. It is often logical in essence because programming is activity which is nearest to God's (or Demiurg) creation.*

In book [1] programming is analysed practically but from the point of view of advanced logic and analytical philosophy. Some relations between logic and programming styles are summarized here.

Furthermore there are some methodological principles which can be substantiated analyzing so complex and often obviously erroneous activity. Some of them are summarized here. We can stress e.g. that 'positive thinking' is the least in creativity. Thus Russian 'negative' mentality is in essence more progressive than Western one.

Современная логика и философия накопила громадный потенциал высокоуровневых понятий, концепций и результатов. Этот потенциал просится в дело. Здесь показано, как он был применен при создании книги [1] к анализу сложнейшей области – современного программирования. Задача анализа в данном случае была затруднена большим объемом информации, изложенной таким образом, что на первый план выступают случайные внешние особенности аппарата. Она облегчалась, во-первых, тем, что в программировании создаются настоящие искусственные объекты (см. [2]), *в принципе* подчиняющиеся лишь законам классической первоуровневой логики (в первую очередь закону противоречия), и во-вторых, тем, что теория, которая используется для обоснования принятых решений, очевидно и грубо неадекватна[1], а принципи-

---

* Работа частично поддержана грантом РГНФ № 02-03-18307а.

[1] Это не означает, что теория, на которую ссылаются, сама по себе плоха. Но часто хорошую теорию используют как заклинание для обоснования решений, никакого отношения к ней не имеющих. Масса примеров таких случаев приведена в книге [2].

альное методологическое невежество создателей заставляет их допускать очевидные концептуальные ошибки.

В книге [2] введено понятие стиля программирования.

Под стилем программирования понимается внутренне согласованная совокупность базовых конструкций программ и способов их композиции, обладающая общими фундаментальными особенностями, как логическими, так и алгоритмическими. Стиль включает также совокупность базовых концепций, связанных с этими программами.

Стиль программирования реализуется через методологии программирования, заключающиеся в совокупности соглашений о том, какие базовые концепции языков программирования и какие их сочетания считаются приемлемыми или неприемлемыми для данного стиля. Методология включает в себя, в частности, модель вычислителя для данного стиля.

Методология реализуется через методики, которые состоят из следующих компонент:

1. Поощрение (или прямое предписание) использования некоторых базовых концепций программирования.
2. Запрещение (или ограничение) применения некоторых других базовых концепций. Иногда запрещение либо ограничение может быть неявным, через исключение нежелательных концепций из предписываемого языка или его диалекта.
3. Требования и рекомендации по оформлению и документированию программ.
4. Совокупность инструментальных и организационных средств, поддерживающих все вышеперечисленные требования и рекомендации.

Заметим, что в программировании происходит систематическая ‘возгонка' понятий. То, что в других местах называется орудием, здесь называется методом; то, что называется методом или методикой, называется методологией; то, что называется методологией, возводится в ранг парадигмы, и т. д. Здесь мы придерживаемся выражений, более адекватно передающих смысл используемых понятий.

Можно выделить, в частности, следующие стили программирования.

Пять стилей первого уровня:

1. Программирование от состояний;
2. Структурное программирование;
3. Сентенциальное программирование;
4. Программирование от событий;
5. Программирование от процессов и приоритетов.

С программистской точки зрения эти стили различаются по следующим характеристикам.

В программировании от состояний процесс представляется как смена состояний системы. Новое состояние возникает в результате действия, изменяющего старое состояние, а выбор этого действия зависит от проверки условий. Математической моделью программы служит конечный автомат. Инвариантом применимости данного стиля является следующая характеристика задачи: *действия глобальны, условия локальны*.

Естественным способом программирования такой задачи на современных языках программирования является использование операторов **goto** либо объектов, обменивающихся информацией через общее поле памяти.

В структурном программировании, которому сейчас учат как монопольному первоуровневому стилю, *действия и условия локальны*. Управляющие действия образуют иерархическую структуру, а потоки передачи данных *в принципе* должны согласовываться с данной структурой. Этот стиль поддерживается структурами современных традиционных языков программирования (например, Pascal, C). Математической моделью программ являются здесь вычислимые функции.

В сентенциальном стиле (Рефал, Пролог[2]) *действия и условия глобальны*. Каждый шаг программы проверяет все поле зрения на соответствие образцу, находит тем самым применимое правило преобразования, и, согласно найденному правилу, преобразует все поле памяти.

В программировании от событий и от приоритетов *действия локальны, условия глобальны*. Условие состоит в том, что в системе произошло некоторое событие, лучшим обработчиком которого оказалось данное действие. Но в программировании от событий такое событие (например, щелчок мыши) снабжает процесс-обработчик важной информацией (например, о месте щелчка). А при программировании от приоритетов событие состоит в том, что все более приоритетные процессы ничего не могут сделать, и никакой позитивной информации активизируемому процессу не дает.

Большинство этих стилей с точки зрения управления соответствуют разным вариантам пропозициональных конструктивных логик. Программирование от состояний соответствует нильпо-

---

[2] Программирование на Прологе традиционно называют логическим. От логики здесь ничего не осталось, и термин вводит в заблуждение (и даже если бы осталось, логика здесь была лишь инструментом, и ставить конкретный инструмент впереди концепции то же самое, что телегу впереди лошади).

тентной логике. Структурное программирование в первом приближении соответствует фрагменту линейной логики с одной линейной импликацией в формуле. Сентенциальное программирование соответствует интуиционистской логике, ограниченной одной импликацией. Программирование от событий соответствует фрагменту линейной логики, в котором формулы содержат две импликации: внешняя из них интуиционистская, внутренняя находится в заключении внешней импликации и является линейной. Программирование от процессов и приоритетов пока что адекватного логического описания не имеет. Видимо, релевантные логики могут оказаться здесь полезными.

С точки зрения передачи данных программирование от состояний и структурное программирование соответствуют классической логике предикатов, описывающей взаимоотношения между входными и выходными данными. Сентенциальное программирование соответствует исчислениям общего типа, поскольку данные до и после преобразования описываются как результат применения правила с метапеременными. В программировании от событий описание данных является открытой формулой классической логики предикатов, свободные переменные которой соответствуют передаваемой информации. В программировании от приоритетов глобальные данные описываются замкнутой формулой, удостоверяющей лишь факт истинности достаточно сложного условия (отсутствие более приоритетных процессов, годящихся для данной задачи).

Ни один стиль программирования не описывается чисто логически. Это связано прежде всего с наличием в языках программирования фиксированных типов данных, например, чисел. Наличие хотя бы одного фиксированного типа данных вызывает к жизни все затруднения теоремы Геделя о неполноте и парадокса изобретателя.

Итак, первый нетривиальный вывод: нужно четко разделить композицию понятий и их конструирование. Работу с исходными типами данных нужно помещать в среду суровых ограничений на правила композиции, а там, где требуется создавать сложные структуры понятий, конкретные данные нужно полностью отбросить, имея лишь косвенные ссылки на них через используемые модули низшего уровня. Таким образом, вычисления и рассуждения концептуально противоречат друг другу.

Из этого следует и педагогический вывод: математика, преподаваемая на базе монополии анализа, годится для описания физических, но не годится для описания информационных процессов. Для информатиков намного важнее логика, алгебра, топология, лингвистика и философия. Для них важнее преобразовывать понятия, а не формулы.

На базе понятий более высокого уровня возникают другие стили.

Функциональный стиль программирования, когда программа представляет собой функционал высокого уровня, преобразующий функции, представлен языками ЛИСП и ML. Если функции типизированы, то этот подход, сохраняя возможности понятий высших уровней исключительно компактно выразить сложную структуру, вдобавок крайне эффективен по использованию ресурсов. Но нынешние реализации функционального программирования не могут удержаться от использования рекурсий и нетипизируемых конструкций типа оператора вычисления произвольного выражения или оператора неподвижной точки. Это создало функциональному программированию репутацию крайне неэффективного стиля, подходящего лишь для прототипов программ. Функциональному стилю соответствуют интуиционистская логика предикатов (типизированный вариант) и комбинаторная логика (нетипизированный вариант).

Рассмотрение функционального стиля приводит к выводу о губительном влиянии на современную высокоуровневую практику двух факторов. Во-первых, это *иллюзия универсальности*. Пора рассматривать слова «универсальная система» как нечто подобное философскому камню (как рениксу). Иллюзия универсальности заставляет вводить в систему возможности, губительным образом расширяющие ее. Во-вторых, это игнорирование отрицательных результатов, или, в более общем виде, *позитивное мышление и квазирелигия прогресса*. Закрывание глаз на теоретические предупреждения никогда ни к чему хорошему не приводит, а их систематическое изгнание из учебных курсов в угоду душевному комфорту и «позитивности» вредно сказывается на способностях к творческому мышлению, один из приемов которого: превратить минус в плюс[3].

Объектно-ориентированный стиль является четверть-шагом к функциональному с точки зрения теории. Объекты показали даже достаточно необразованным людям, что для сложных систем

---

[3] Так, в США принята социологическая программа по мягкому лишению вундеркиндов их способностей. Конечно же, при этом говорится масса хороших слов о том, что стремятся к их счастью, но одна фрейдистская оговорка подчеркивает ее суть: гении подрывают ценности потребительского общества, поскольку получают от творчества гораздо большее наслаждение, чем обычный человек от секса. Более того, это наслаждение недоступно большинству, и тем самым его не купишь за деньги!

работа с действиями эффективнее работы с данными. С точки зрения практики, это несколько разных стилей, один из которых берет начало скорее в психологии и искусственном интеллекте, и успешно применяется для массового производства программ, таких, где внешняя упаковка важнее сути. Здесь объекты в разных контекстах могут вести себя совершенно по-разному, так что они соответствуют ролям людей. В данном случае четко видно, как ссылка на неадекватную сути подхода теорию абстрактных типов данных заставляет выпячивать слабейшие стороны подхода и мешает развитию действительно сильнейших. Программистам бы здесь к психологам обратиться, а не к математикам!

Далее, этот стиль великолепно иллюстрирует, как применяется в современной практике принцип Оруэлла "Невежество – сила". Даже там, где известны хорошие решения, принимаются случайные, а влияние монополистов мешает развитию альтернатив.

Вообще, наблюдение за состоянием дел в современном "искусственном интеллекте" и информатике приводит к следующему закону экологии искусственных систем: *первая система, декларировавшая успех*[4] *в данной экологической нише, захватывает ее и изгаживает таким образом, чтобы никакая другая в ней не могла выжить.*

Далее, общая беда всех стилей и методологий программирования – практическое игнорирование того, что программу не опишешь понятиями, которые заданы внутри ее самой. Давно уже известно, что для полного описания свойств программы необходимы призраки – понятия, в программу не входящие и зачастую просто вредные для вычислений и непредставимые в машине (например, ординалы), но необходимые для корректного описания системы. Типичным примером призрака является число шагов цикла общего вида. Масса примеров возникновения и использования призраков приведена в [1].

Несколько слов о роли глобализации. Глобализация усиливает монополизацию, в том числе и в интеллектуальной схеме. В связи с этим исключительно интересен пример сентенциального программирования. Этот стиль возник независимо в СССР и на Западе, и созданные его конкретизации оказались ортогональными. При множестве общих черт Рефал и Пролог несовместимы по механизму сопоставления поля зрения с образцом и механизму управления. Если Рефал великолепно приспособлен для &-параллелизма, когда параллельно запускается несколько процессов и

[4] Насколько этот успех реален, обычно второй вопрос, которым не задаются (по причине позитивного мышления), пока не станет слишком поздно.

результат получается обобщением всех полученных частных результатов, то Пролог столь же великолепно приспособлен к V-параллелизму, когда несколько процессов соревнуются в том, кто быстрее достигнет цели. Ввиду «железного занавеса» обе концепции выжили, встали на ноги, актуальны до сих пор.

Если же рассмотреть, скажем, структурное программирование, то ввиду свободного обмена идеями и единого информационного пространства одна из его разновидностей прочно монополизировала экологическую нишу. В результате развитие параллельных компьютеров сдерживается прежде всего тем, что студентов с самого начала приучают программировать последовательно[5]. Более того, структурное программирование практически задавило совершенно другой, применимый в других условиях, стиль: программирование от состояний. **Goto** было объявлено вредным оператором. А оно просто плохо совместимо с оператором присваивания.

В последние годы программирование от состояний было возрождено и стало секретным оружием команды петербургских программистов, дважды ставших чемпионами мира (см. [3]).

Сейчас видно, что, так же как абсурдно ставить задачу доказательства правильности программы после того, как программа написана, абсурдно решать задачу распараллеливания написанной на обычном языке программы. Очевидно, что логические системы, соответствующие структурному программированию, после некоторой модификации великолепно описывают модификацию этого стиля, параллельную с самого начала. Но по закону экологической ниши такая модификация уже не могла появиться, тем более что успехи структурного программирования отнюдь не были мнимыми, и теория, на которую оно опирается, является (редчайшее исключение!) релевантной[6]. Тем самым глобализация сыграла

---

[5] Интересно, что первая «программа», вдохновившая Беббиджа на создание первой вычислительной машины, была параллельной. Во время Великой французской революции французские математики организовали работу по пересчету артиллерийских, навигационных, астрономических и геодезических таблиц, запрограммировав с помощью конечных разностей их приближенные вычисления таким образом, что их могла параллельно выполнять рота солдат, каждый из которых делал сложение либо вычитание и передавал результат следующим.

[6] Это подчеркивает еще одну опасность точных методов. Точный метод можно применить неточно и неадекватно, что, конечно, плохо. Его можно применить точно и адекватно, лишь ограничив область теми случаями, которые подходят под данную формализацию. После такого применения, как правило, сделанные ограничения забываются и все, что не подходит под формализм, оказывается якобы несуществующим.

здесь отрицательную роль. А сколько еще подобных случаев, невидимых невооруженным глазом[7]!

Наконец, заметим, что переход к следующему уровню понятий невозможен без запрещения многих методов, действовавших на предыдущем уровне. Но в программировании этому препятствует иллюзия универсальности, конкретизирующаяся в предрассудок совместимости, который заставляет при развитии системы тянуть за собой шлейф концептуально несовместимых устаревших понятий. Случаи, когда от этого предрассудка отказались, считанны.

И ко всему этому я присовокупляю, что пора логике перестать быть разделом математики либо философии, и встать и в педагогике, и в практике на свое место самостоятельной науки высшего порядка, связывающей точное и гуманитарное знание.

ЛИТЕРАТУРА

1. *Непейвода Н.Н., Скопин И.Н.* Основания программирования. Ижевск; Москва: РХД, 2003.
2. *Непейвода Н.Н.* Квазиискусственные объекты // Современная логика-2002. СПб., 2002. С. 28-30.
3. *Шалыто А.А.* SWITCH-технология. СПб.: Наука, 1998.

---

[7] Автор не против свободы. Но ничто человеческое не является абсолютной ценностью. Скажем, чтобы добиться лучшего выражения своих чувств и мыслей, человек отказывается от свободы выражения, переходя от прозы к стихам. Так что пусть будет и обмен идеями, и трудности в этом обмене!

Ю.В.Нечитайлов

ПАРАЛЛЕЛЬНАЯ КОМПОЗИЦИЯ В ДИНАМИЧЕСКОЙ ЛОГИКЕ ИГР С ОГРАНИЧЕННОЙ РАЦИОНАЛЬНОСТЬЮ[1]

Abstract. *Linear game form is introduced to represent the games with bounded rationality for Dynamic Game Logic. Special attention is paid for the operation of consequential composition. Similarly to the parallel operations it describes interconnected games. The properties of the consequential composition significantly deviate in case of the game model with bounded rationality. E.g. the reduction* $\langle\alpha;\beta\rangle\varphi = \langle\alpha\rangle\langle\beta\rangle\varphi$ *is impossible in both directions. Finally, the representation of information streams and information update in Dynamic Game Logic is discussed.*

Введение

Динамическая логика игр была представлена Париком [4]. С тех пор она претерпела множество модификаций (см., например, [1, 2, 3, 5, 6]). Каждая из модификаций имела собственную мотивацию. Причиной разработки модели, предложенной в данной работе, является поиск средства представления параллельных операторов в Динамической логике игр.

Главной особенностью параллельных игр является то, что они должны быть взаимосвязаны. Эта особенность присуща и для игр, связанных оператором последовательной композиции, свойства которого для модели игр с ограниченной рациональностью подробно рассматриваются в данной работе.

Можно предложить множество способов для выражения взаимосвязанности игр: опосредованное взаимодействие (использование играми общих ресурсов, решение проблем с помощью распределенных систем), непосредственная коммуникация между играми (взаимодействия внутри сети как вариант перестройки готовых игр, достраивание решения в процессе игры). Рассматриваемая модель описывает игры с непосредственной коммуникацией. Ограниченная рациональность была введена для обоснования недостатка знаний у игроков. Их знания восполняются благодаря коммуникации.

---

[1] Работа выполнена при поддержке РГНФ, грант № 03-03-00455а

1. Представление ограниченной рациональности в Динамической логике игр

1.1. Линейная форма игры

То, что называется игрой в логике игр и теории игр, является абстрактным математическим объектом. Причиной создания таких объектов стала потребность моделирования процессов, ход выполнения которых не однозначен и зависит от внешнего, алгоритмически не заданного вмешательства. Подобное вмешательство не требует участия человека, хотя оно и не исключается.

В теории игр известно несколько форм представления игр. Наиболее распространенными являются экстенсивная форма и стратегическая. В первом случае в игре выделяются все промежуточные позиции, описывается структура действий и указываются результаты различных вариантов развития игры. Экстенсивная форма обычно представляется в виде размеченного дерева. Во втором случае в игре явно не прописывается внутренняя структура действий и не выделяются промежуточные позиции. Вместо этого в ней перечисляются стратегии игроков (наборы действий), содержащие по одному действию из каждого состояния, в котором рассматриваемый игрок делает выбор. В результате стратегия предписывает конкретное поведение игрока в игре. В зависимости от выбора соперника одна и та же стратегия может давать различные результаты, которые также указываются в стратегической форме игры. Для данной формы соотношение стратегий игроков и результатов их применения обычно представляется в виде таблицы.

Экстенсивная форма игры дает возможность провести полную трассировку игры, т.е. выявить ее внутреннюю структуру. Стратегическая форма, не предоставляя внутренней структуры, позволяет оперировать лишь стратегиями, т.е. взглянуть на игру снаружи. Для целей данной работы первое описание является избыточным, подходящим скорее для семантики Логики действий. Второе описание, наоборот, является недостаточным, хотя и отвечает требованиям семантики традиционной Динамической логики игр. В моей предыдущей работе (см. [3]) было показано, что при добавлении в язык Динамической логики игр параллельных операторов мы вынуждены апеллировать к более тонкой, чем стратегия, структуре. При этом в процессе переопределения семантики все же удается удержаться от перехода к использованию действий. Оказалось, что достаточно добавить в описание только нити игры. Назовем полученную в результате этого форму линейной формой игры.

Определение 1.1. *Линейная форма игры* G это кортеж (N, A, H, P, S), в котором

- $N = \{1, 2 \ldots k\}$ непустое конечное множество игроков
- $A = \{a_1, a_2 \ldots a_m\}$ непустое конечное множество действий
- $H = \{H_1, H_2 \ldots\}$ множество нитей игры, где $H_i = \langle a_{i1}, a_{i2} \ldots a_{in}\rangle$, для $i \in \{1, 2\ldots\}$, упорядоченные конечные последовательности действий
- $P = \{P_1, P_2 \ldots\}$ множество диспетчера действий, в котором каждый $P_i = \langle p_{i1}, p_{i2} \ldots p_{in}\rangle$, где $p_{iz} \in \{1, 2\ldots k\}$ номер игрока ($z \in \{1, 2\ldots n\}$) ставится в соответствие с H_i для одного и того же $i \in \{1, 2\ldots\}$
- $S = \{S_0, S_1, S_2 \ldots\}$ непустое множество, содержащее начальное состояние игры S_0 и финальные состояния, в котором каждый S_i ставится в соответствие с H_i для одного и того же $i \in \{1, 2\ldots\}$

Экстенсивная форма игры может иметь внешне похожее представление. Однако, в отличие от нее, в линейной форме нити игры (истории) не упорядочены в виде дерева. Для относительно сложных игр при условии ограниченной рациональности данный факт является существенным. Ограничение рациональности может означать, например, незнание игроком алгоритма Цермело, или ограниченность вычислительных ресурсов. Важным следствием оказывается то, что даже если число финальных состояний и нитей игры будет конечным, вхождений нитей в стратегии может остаться непроверяемым.

Как и в случае с экстенсивной формой игры, в линейной форме стратегии не задаются отдельно. При условии неограниченной рациональности считается, что их можно немедленно вывести. Однако даже в этом случае определить стратегии для линейной формы можно, только опираясь на соответствующие промежуточные состояния экстенсивной формы и ее древовидную структуру.

Определение 1.2. Набор нитей игры α, очерчивающий поддерево этой игры, будем называть *стратегией игрока в игре* α тогда и только тогда, когда состояния этого поддерева, в которых оппоненты принимают решения, содержат точно такие же, как и в дереве игры α, наборы выходящих непосредственно из них действий.

Если мы введем ограничение на рациональность, то вывод стратегий станет также ограничен. Для экстенсивной формы игры будет неизвестно, каким образом действия образуют стратегии, в то время как для линейной формы – как это делают нити.

В результате получается, что при представлении игры в линейной форме игрок может определить для любой нити ее финальное состояние. Однако при этом данный игрок не способен заранее определить, сможет ли он форсировать отмеченное состояние, т.е. достичь его вне зависимости от действий соперника. Такое положение дел можно проиллюстрировать на примере шахмат, к слову, являющихся хорошим экземпляром конечной игры, для которой у человечества пока не нашлось ресурсов определения выигрышной стратегии. Переставляя фигуры самостоятельно за обе стороны, мы можем определить результат для любой цепочки ходов. В принципе, кажется весьма правдоподобным, что можно построить алгоритм, порождающий все такие цепочки. При этом знание всех цепочек ходов не поможет нам без привлечения дополнительных ресурсов определить ни одной стратегии, а значит, и предопределить поведение в реальной игре. Действительно, для этого сначала нам нужно будет упорядочить имеющиеся цепочки ходов в виде дерева. Иначе мы не можем приступить к использованию алгоритма Цермело, так как нам дано не дерево игры, а лишь ее нити.

Заметим, что линейная форма игры может служить адекватным средством представления игр, в которых игрок произвольным образом использует цепочки ходов с успешными финальными состояниями, не зная того, принадлежат ли эти цепочки успешным стратегиям. Похожей схемы придерживаются шахматисты при розыгрыше дебютных композиций.

1.2. Модель Динамической логики игр

Динамическая логика игр позволяет проводить рассуждения о ходе выполнения не изолированных игр, а их комбинаций. В результате в используемой семантике Крипке теоретико-игровые состояния различных игр сводятся воедино при переходе к мирам логической модели. Для каждого из миров модели может выполняться свой набор высказываний, описывающий ситуацию рассматриваемого игрового пространства.

Предметом рассуждений Динамической логики игр является наличие у игроков стратегий или их аналогов отношений вынуждения, приводящих к интересующему результату. Отношение вынуждения традиционной Динамической логики игр может быть монотонно расширено. Это связано с тем, что в ней подразумевается неограниченная рациональность. Как результат, при добавлении нити или соответствующего ей в линейной форме финального состояния игрок может выделить данную нить и не использовать, если она не принадлежит успешной стратегии, даже если при этом и имеет успешное финальное состояние. В условиях ограниченной рациональности и линейной формы представления игры игрок сможет отличить добавляемую нить, если только она оканчивается неуспешным состоянием. Если же добавляемая нить оканчивается успешным состоянием, то игрок с ограниченной рациональностью может воспользоваться этой цепочкой во время игры, даже если она не принадлежит к его успешным стратегиям. Естественно, это может привести к его поражению. А значит, для игр с ограниченной рациональностью нельзя монотонно расширять отношение вынуждения. Данный факт отражен в следующем определении.

Определение 1.3. *Ограниченное отношение вынуждения* $\rho_i(\alpha)(w, F)$ выражает то, что игрок i в игре α, начавшейся в мире w, имеет стратегию, нити которой заканчиваются финальными мирами, формирующими множество F. Обозначение $(w, F) \in \rho_i(\alpha)$ используется как равносильное.

В соответствии с определением то, что ограниченное отношение вынуждения не является монотонно расширяемым, записывается в виде: из $(w, X) \in \rho'_i(\alpha)$ и $X \subseteq Y$ не следует, что $(w, Y) \in \rho'_i(\alpha)$.

Переходя к представлению языка Динамической логики игр с ограниченными ресурсами, для данного множества атомарных высказываний Φ_0 и атомарных игр Γ_0 определим множество *формул* Φ и *игр* Γ по индукции. Для того чтобы представить ограниченность ресурсов в Динамической логике игр, будем подразделять множество формул Φ на подмножества: *явных* формул Θ, и *неявных* формул Ξ. Эти подмножества различаются своей алгоритмической сложностью. Предположим, что $g \in \Gamma_0$; $\alpha, \beta \in \Gamma$; $p \in \Phi_0$; $\varphi, \psi \in \Theta$; и $\lambda, \mu \in \Xi$. Тогда $\gamma \in \Gamma$, $\theta \in \Theta$, и $\sigma \in \Xi$, если они имеют одну из следующих синтаксических форм

$\gamma ::= g \mid \varphi? \mid \alpha;\beta \mid \alpha \cup \beta \mid \alpha^d$

$\theta ::= \bot \mid p \mid \neg\varphi \mid \varphi \vee \psi$

$\sigma ::= \varphi \mid \neg\lambda \mid \lambda \vee \mu \mid \langle\alpha\rangle\lambda \mid [\alpha]\lambda$

Определение 1.4. *Модель Динамической логики игр* I для игр с ограниченной рациональностью, в которых принимают участие два игрока, это кортеж $(W, \rho_i(\alpha), V)$, где

1. $W = \{w_1, w_2 \ldots w_k\}$ непустое конечное множество возможных миров
2. $\rho_i(g)$: $W \to 2^W$ отношения вынуждения для игроков $i \in \{1, 2\}$, и атомарных игр $g \in \Gamma_0$
3. $V : \Phi_0 \to 2^W$ функция означивания, присваивающая одно из значений истинности 0 или 1 всем атомарным высказываниям, для каждого мира $w \in$ W, такая что

   a) $I, w \not\models \bot$

b) $I, w \models p$ ттт $p \in \Phi_0$ и $w \in V(p)$

c) $I, w \models \neg\varphi$ ттт $I, w \not\models \varphi$

d) $I, w \models \varphi \vee \psi$ ттт $I, w \models \varphi$ или $I, w \models \psi$

e) $I, w \models \langle\alpha\rangle\varphi$ ттт $\exists X \subseteq W\, ((w, X) \in \rho_1(\alpha) \wedge \forall w' \in X\, \forall w'' \notin X\, (I, w' \models \varphi \wedge I, w'' \models \neg\varphi))$

f) $I, w \models [\alpha]\varphi$ ттт $\exists X \subseteq W\, ((w, X) \in \rho_2(\alpha) \wedge \forall w' \in X\, \forall w'' \notin X\, (I, w' \models \varphi \wedge I, w'' \models \neg\varphi))$

4. Для $X \subseteq W$ и $w \in W$, операции с играми понимаются следующим образом

a) $(w, X) \in \rho_1(\varphi?)$ ттт $w = X \wedge I, w \models \varphi$

b) $(w, X) \in \rho_2(\varphi?)$ ттт $w = X \wedge I, w \models \neg\varphi$

c) $(w, X) \in \rho_1(\alpha \cup \beta)$ ттт $(w, X) \in \rho_1(\alpha) \vee (w, X) \in \rho_1(\beta)$

d) $(w, X) \in \rho_2(\alpha \cup \beta)$ ттт $\exists\, Y, Z \subseteq W\, ((w, Y) \in \rho_2(\alpha) \wedge \wedge\, (w, Z) \in \rho_2(\beta) \wedge X = Y \cup Z)$

e) $(w, X) \in \rho_1(\alpha;\beta)$ ттт $\exists Y \subseteq W((w, Y) \in \rho_1(\alpha) \wedge \exists \psi \in \Theta\ \forall w^* \in Y\ \forall w^{**} \notin Y\ \exists\, Z \subseteq X\ \exists \chi \in \Theta\ (I, w^* \models \psi \wedge I, w^{**} \models \neg\psi \wedge \wedge\, (w^*, X) \in \rho_1(\beta) \wedge \forall w^+ \in Z\ \forall w^{++} \notin Z\ (I, w^+ \models \chi \wedge I, w^{++} \models \neg\chi)))$

f) $(w, X) \in \rho_2(\alpha;\beta)$ ттт $\exists Y \subseteq W((w, Y) \in \rho_2(\alpha) \wedge \exists \psi \in \Theta\ \forall w^* \in Y\ \forall w^{**} \notin Y\ \exists\, Z \subseteq X\ \exists \chi \in \Theta\ (I, w^* \models \psi \wedge I, w^{**} \models \neg\psi \wedge \wedge\, (w^*, X) \in \rho_2(\beta) \wedge \forall w^+ \in Z\ \forall w^{++} \notin Z\ (I, w^+ \models \chi \wedge I, w^{++} \models \neg\chi)))$

g) $(w, X) \in \rho_1(\alpha^d)$ ттт $(w, X) \in \rho_2(\alpha)$

h) $(w, X) \in \rho_2(\alpha^d)$ ттт $(w, X) \in \rho_1(\alpha)$

Теорема 1.5. Данная модель Динамической логики игр с ограниченной рациональностью исключает возможность использования редукции $\langle\alpha;\beta\rangle\varphi = \langle\alpha\rangle\langle\beta\rangle\varphi$ в обе стороны.

Доказательство очевидно.

С точки зрения семантики это означает, что мы не можем определить цели игры $\langle\alpha\rangle$ через неявную формулу $\langle\beta\rangle\varphi$, соответствующую несыгранной игре. Это важно, так как, к примеру, в шахматной партии совершенно бесполезно описывать целевые формулы промежуточного этапа α (скажем, дебюта) через целевые формулы последующего этапа β (скажем, миттельшпиля).

Из данной модели видно, что для построения последовательной композиции требуется обязательное задание среднего терма. Этим подчеркивается то, что для достижения успеха в первой игре

α нужно явное целевое указание именно для первой игры. Комбинация двух игр посредством последовательной композиции приводит не к сложению алгоритмической сложности, как это имеет место в случае с объединением и пересечением. Последовательная композиция несет в себе дополнительные сложности вдобавок к тому, что дает разбиение на явные и неявные формулы. Во-первых, можно заметить, что формула $\langle\beta\rangle\varphi$ требует многократного вычисления для определения множества Y. Во-вторых, для того чтобы эта формула стала определением множества Y в $\langle\alpha;\beta\rangle\varphi$, необходимо еще, чтобы $\forall w \notin Y$: I, $w \not\models \langle\beta\rangle\varphi$.

2. Информационные потоки в параллельных и последовательных играх

2.1. Коммуникация в играх с ограниченной рациональностью

Ограниченная рациональность в играх, как правило, приводит к тому, что игрокам не хватает информации, знаний для успешного завершения игры. В результате становится актуальной проблема коммуникации между играми для восполнения недостающей информации.

О передаче информации можно говорить только для последовательно или параллельно связанных игр. Иначе, если игры не зависят друг от друга, как это, например, описывается операциями объединения и пересечения, передача информации невозможна. В таких случаях игры полны, т.е. их выполнение не зависит от внешних факторов.

Передача информации, как правило, переводит игру в новое состояние. То есть если изолированное выполнение игры не позволяет достигнуть некоторого множества миров, то совместное с другой игрой выполнение, возможно, это позволит. Но для Логики игр важно то, чтобы эта информация позволяла получать новые стратегии. Выше, при описании линейной формы игры, была задана связь финальных состояний со стратегиями. В результате, воздействуя на финальные состояния игры, можно влиять на стратегии. Воздействовать же на них можно посредством параллельно или последовательно связанных игр.

2.2. Динамическое изменение информации

Процесс изменения информации должен быть отражен в модели. То, что мы используем Динамическую логику игр, а не, скажем, Эпистемическую, влияет на то, как мы можем описать данный процесс. Мы не можем переопределять функцию означивания или отношение достижимости (вынуждения) для миров, так как это не даст консервативного расширения Динамической логики.

В качестве выхода можно предложить сдвигать (направлять) результат исходной игры относительно ее состояний, либо относительно ее действий, используя параллельную или последовательную ей игру. Для приведенной выше модели можно сказать, что последовательная композиция сдвигает состояния последующей игры относительно состояний предшествующей. Сдвиг относительно действий формирует новые стратегии, возможно совместные для двух игр. Подобный сдвиг был использован для определения параллельных операторов (см. [3]).

Заключение

Предложенная линейная форма игры может использоваться для представления игр с ограниченной рациональностью. На ее основе построена модель Динамической логики игр с ограниченной рациональностью. Рассмотрены варианты представления информационных потоков в Динамической логике игр. В качестве дальнейшей работы интересно попытаться расширить данную модель Динамической логики игр на параллельную композицию.

ЛИТЕРАТУРА

1. *van Benthem, J.* Games and Strategies inside Elementary Logic // Proceedings of 7th Asian Logic Conference, Taiwan, June 1999; http://www.turing.wins.uva.nl/~johan/
2. *van Benthem, J.* Intensional Logic // Electronic course notes for Philosophy 169, 2000; http://www.turing.wins.uva.nl/~johan/Teaching/
3. *Netchitailov, Yu.V.* An Extension of Game Logic with Parallel Operators // ILLC Scientific Publications, MoL-2001-02, University of Amsterdam, The Netherlands, 2001.
4. *Parikh, R.* The Logic of Games and its Applications // Annals of Discrete Mathematics, 24, Elsevier, 1985, 111-139.
5. *Pauly, M.* Some Game Theory for Logicians // Notes for the course Logic and Games, University of Amsterdam, The Netherlands, 2001.
6. *Pauly, M.* Logic for Social Software // ILLC Dissertation Series 2001-10, University of Amsterdam, The Netherlands, 2001.

С.А.Павлов

НОВЫЙ ПОДХОД К ПОСТРОЕНИЮ И ОБОБЩЕНИЮ КЛАССИЧЕСКОЙ ЛОГИКИ*

Abstract. *New formulation of the classical logic with truth and falsehood predicates is proposed. The generalization of this logic on the domain of symbolic expressions is realized.*

Целью этой работы является построение языка, в котором можно выражать как синтаксис, так и семантику и онтологию классической пропозициональной логики. Совместное рассмотрение синтаксиса и семантики может быть интересно и полезно для явного и формального выражения их соотношений и связей между их положениями. Также интересно выявить положения как варьируемые, так и инвариантные, в процессе обобщения классической логики.

1. Стандартная формулировка и интерпретация классической логики

Приведем одну из стандартных формулировок и интерпретаций классической пропозициональной логики.

Язык логики CL

Алфавит CL:

$s, s_1, s_2, \ldots$ пропозициональные переменные;

$\sim, \supset$ логические константы;

(,) технические символы.

Правила образования ппф

(i) Всякая пропозициональная переменная есть правильно построенная формула (ппф).

(ii) Если A, B есть ппф, то $(\sim A)$, $(A \supset B)$, есть ппф.

(iii) Ничто иное не является правильно построенной формулой.

Метапеременные: A, B, C, ... для ппф.

Схемы аксиом

A1.1 $(P_1 \supset (P_2 \supset P_1))$

A1.2 $(P_1 \supset (P_2 \supset P_3)) \supset ((P_1 \supset P_2) \supset (P_1 \supset P_3))$

A1.3 $((\sim P_1 \supset \sim P_2) \supset (P_2 \supset P_1))$

---

* Работа выполнена при поддержке РГНФ, грант № 02-03-18287.

Правило вывода $\dfrac{P_1, (P_1 \supset P_2)}{P_2}$

Интерпретация

Пусть M есть непустое множество пропозициональных переменных. Оценкой множества M называется любое отображение M в $\{1, 0\}$.

Если A есть формула, W(A) есть множество всех пропозициональных переменных, входящих в A, M есть множество пропозициональных переменных такое, что $W(A) \subseteq M$ и v есть оценка множества M, то значение формулы A при v (символически $|A|_v$) определяется индуктивно следующим образом:

1) если A есть пропозициональная переменная q,
   то $|A|_v = v(q)$, где $v(q)$ есть значение q при отображении v.

2) если A есть (~B),

$$|{\sim}B|_v = \begin{cases} 0 \text{ если } |B|_v = 1, \\ 1 \text{ если } |B|_v = 0. \end{cases}$$

3) если A есть (B → C), то

$$|B \supset C|_v = \begin{cases} 1 \text{ если } |B|_v = 1 \text{ и } |C|_v = 1, \\ 0 \text{ если } |B|_v = 1 \text{ и } |C|_v = 0, \\ 1 \text{ если } |B|_v = 0 \text{ и } |C|_v = 1, \\ 1 \text{ если } |B|_v = 0 \text{ и } |C|_v = 0. \end{cases}$$

Формулу A назовем общезначимой (символически $\models A$), если для всякого множества пропозициональных переменных M такого, что $W(A) \subseteq M$, и всякой оценки v множества M $|A|_v = 1$.

Другими словами, мы сопоставляем формулы языка пропозиционального исчисления формулам булевой алгебры.

Пусть соответствующая алгебра будет $<\{0, 1\}, -, \leq>$.

2. Формулировка классической логики, обогащенной семантическими терминами «истинно» и «ложно»

Сформулируем логику, обогащенную семантическими предикатами «истинно» и «ложно», которая эквивалентна классической пропозициональной логике. Мотивацией для такой новой формулировки классической пропозициональной логики является желательность одновременного формулирования и различения как семантических законов противоречия и исключенного третьего, так и родственных им законов противоречия и исключенного третьего, не включающих в себя термин «истинно».

Отметим, что на необходимость такого различения обращали внимание еще Н.А.Васильев [1], А.Тарский [5], и Я.Лукасевич [2].

Так Н.А.Васильев в своих работах рассматривал металогику и эмпирическую логику и различал две формулировки закона противоречия.

На различие принципа исключенного третьего и принципа двузначности указывал Я.Лукасевич. Принцип двузначности символически записывается как (TA $\veebar$ FA), а закон исключенного третьего как (A $\vee$ ~A).

Чтобы рассматривать эти законы, как в семантической, так и в несемантической формулировках, введем (с необходимыми предосторожностями) в объектный язык логики символы, соответствующие семантическим предикатам «истинно» и «ложно».

Такое рассмотрение с терминами «истинно» и «ложно» в качестве логических операторов было проведено в работах [3, 4] для случая неклассической логики. В них приведены основные содержательные положения логики с операторами истинности и ложности.

Перейдем к формулировке классической логики с предикатами истинности и ложности, обогащенной также связкой полной эквивалентности $\cong$, которую будем обозначать как FC2($\cong$). Предикаты истинности и ложности будем обозначать символами T, F, операторы истинности и ложности будем обозначать символами |, – соответственно, исходную импликацию $\rightarrow$.

Формулировка классической логики с предикатом ложности, обогащенная связкой полной эквивалентности

Утверждения об истинности и ложности предложений A и B, будем обозначать как F(q(A)), F(q(B)), где q есть оператор цитирования, а q(A), q(B) имена предложений A и B соответственно.

Язык исчисления FC2($\cong$)

Алфавит FC2($\cong$):

$s, s_1, s_2, \ldots$	пропозициональные переменные;
$\rightarrow, \cong$	логические константы;
F	символ предиката ложности;
q	термообразующий оператор цитирования;
(,)	технические символы.

Правила образования ппф

(i) Всякая пропозициональная переменная есть правильно построенная формула (ппф).

(ii) Если A , B есть ппф, то F(q(A)), (A $\rightarrow$ B), (A $\cong$ B) есть ппф.

(iii) Ничто иное не является правильно построенной формулой.

Метапеременные: A, B, C, ... для ппф.

Принимаем стандартные соглашения относительно опускания скобок.

Введем следующие сокращения для формул.

Определим оператор ложности

D1.1 $\quad -A =_{df} F(q(A))$

Определим формулу 0, являющуюся тождественно ложной, которая будет играть роль константы "ложь".

D1.2.1 $0 =_{df} -(-s \to -s)$ (константа "ложь")

Определим отрицание ~.

D1.2.2 $\sim A =_{df} (A \to 0)$ (отрицание)

Для высказывания об истинности предложения A

D1.2.3.1 $\quad T(q(A)) =_{df} F(q(\sim A))$

('|' содержательно означает 'истинно '):

D1.2.3.2 $\quad |A =_{df} -\sim A$

Высказывание об истинности предложения A рассматривается как сокращение для высказывания о ложности отрицания предложения A.

Для высказывания о строгой истинности предложения A:

'$\ulcorner$' содержательно означает 'есть истинно и неложно'.

D1.2.4 $\ulcorner A =_{df} -(|A \to -A)$

Определим импликацию $\supset$, которая фигурирует в правиле вывода.

D1.2.5 $(A \supset B) =_{df} (\ulcorner A \to \ulcorner B)$

Определим конъюнкцию, дизъюнкцию и эквиваленцию $\leftrightarrow$.

D1.3.1 $(A \,\&\, B) =_{df} \sim(A \to \sim B)$.

D1.3.2 $(A \vee B) =_{df} (\sim A \to B)$.

D1.3.3 $(A \leftrightarrow B) =_{df} (A \to B) \,\&\, (B \to A)$

Из всего класса ппф выделим подкласс формул, которые образованы из префиксированных операторами истинности или ложности формул (называемых далее T.F.-формулами (T.F.-ф.)).

(iv) Если A есть ппф, то $(-A)$ есть T.F.-ф.

(v) Если P_1, P_2 есть T.F.-ф., то $(P_1 \to P_2)$, есть T.F.-ф.

Пусть P, P_1, P_2, ... есть метапеременные для T.F.-ф.

D1.4.1 $(P_1 \wedge P_2) =_{df} -(P_1 \supset -P_2)$

D1.4.2 $(P_1 \vee P_2) =_{df} (-P_1 \supset P_2)$

D1.4.3 $(P_1 \equiv P_2) =_{df} (P_1 \supset P_2) \wedge (P_2 \supset P_1)$

D1.4.4 $(P_1 \veebar P_2) =_{df} -(P_1 \equiv P_2)$

Схемы аксиом

Имеем следующие группы аксиом:

1) аксиомы классической логики для T.F.-формул:

К схемам аксиом **CL** A1.1 - A1.2 (см. выше) добавляем следующую

A1.3* $((-P_1 \supset -P_2) \supset (P_2 \supset P_1))$

и также

A1.4 $|P \equiv P$

2) аксиомы, выражающие условия истинности для импликации:

A2.1 $|(A \to B) \equiv (-A \vee |B)$,

A2.2 $-(A \to B) \equiv (|A \wedge -B)$.

3) аксиома, выражающая принцип двузначности:

A3 $(|A \veebar - A)$.

А также добавим аксиому, задающую свойства связки полной эквивалентности $\cong$:

A4 $(A \cong B) \equiv (|A \leftrightarrow |B) \wedge (-A \leftrightarrow -B)$.

Правило вывода $\dfrac{A, (A \supset B)}{B}$

Имеем теоремы **FC2(**$\cong$**)**, выражающие семантические законы противоречия и исключенного третьего в слабой формулировке.

T1.1 $\vdash -(|A \wedge -A)$,

T1.2 $\vdash (|A \vee - A)$.

Обратим внимание на то, что, что в аксиомных схемах присутствуют префиксированные операторами истинности или ложности формулы.

Представляет интерес привести теорему о неподвижной точке для предиката истинности и оператора истинности, устанавливающую эквивалентность между префиксированными оператором истинности ппф и не префиксированными ппф, подобную по форме схеме Тарского.

Теорема о неподвижной точке.

T2.1 $\vdash T(q(A)) \leftrightarrow A$.

T2.2 $\vdash |A \leftrightarrow A$.

Из этой теоремы следует возможность элиминации оператора истинности | из языка **FC2(**$\cong$**)**.

Имеем также теоремы, выражающие законы противоречия и исключенного третьего.

T3.1 $\vdash$ ~ (A & ~A).

T3.2 $\vdash$ (A V ~A).

Имеется утверждение А.Тарского, о том, что из определения истины следуют семантические законы противоречия и исключенного третьего.

Аналогом схемы Тарского в языке **FC2($\cong$)** является формула ($|A \leftrightarrow A$). Заменим аксиому A3, выражающую принцип бивалентности, аксиомой A3′, являющуюся аналогом схемы Тарского.

A3′ ($|A \leftrightarrow A$)

В новой формулировке исчисления **FC2($\cong$)** имеем теорему, выражающую принцип бивалентности

T4′ $\vdash$ ($|A \veebar - A$)

и, конечно, теоремы T1.1, T1.2.

Таким образом в предложенной формулировке классической логики, обогащенной семантическими предикатами «истинно» и «ложно», выражаются и имеют место семантические законы противоречия и исключенного третьего наряду с их несемантическими формулировками.

Интерпретация исходных связок и производных логических операторов следующая:

$\rightarrow$	0	1
0	1	1
1	0	1

$\cong$	0	1
0	1	0
1	0	1

A	|A	–A
0	0	1
1	1	0

Доказуемы метатеоремы непротиворечивости и семантической полноты.

3. Расширение логики FC2($\cong$) на область нестандартных формул

Обычно неправильно построенные формулы в логике не рассматриваются. Относительно них можно утверждать две вещи: 1) что они бессмысленны и 2) что они ни истинны, ни ложны. В стандартном языке пропозициональной логики невыразим тот факт, что они ни истинны и ни ложны. Однако в предложенном выше языке утверждения о неистинности и неложности формул, являющихся неправильно построенными, можно выразить следующим образом:

(~*T*(Nonsense & ~*F*(Nonsense),

где словом «Nonsense» обозначено имя некоторой неправильно построенной формулы.

В качестве исходных неправильно построенных формул возьмем символы $\rightarrow$, $\cong$ логических констант. Это ограничение не снизит общности рассмотрения. В этом частном случае будем называть их для определенности нестандартными формулами (нф).

В дополнение к метапеременным A, B, C для ппф введем новую метапеременную N, соответствующую нестандартным формулам, зададим дополнительные правила образования и сформулируем дополнительную аксиому для нф, которая будет аналогична вышеприведенному положению.

(iii)* Символы логических констант $\rightarrow$, $\cong$ есть нестандартные формулы.

(iv)* Если A, B есть нф, то $(A \rightarrow B)$ есть нф.

(v)* Если A, B есть нф, то $(-A)$, $(A \cong B)$ есть ппф.

(vi)* Если A, B есть нф, то $(-A)$, $(A \cong B)$ есть T.F.-ф.

A5 $(-|N \wedge --N)$

При этом ни одни из ранее принятых аксиом и правил вывода не изменятся.

На следующем шаге обобщения введем новые метапеременные E, E_1, E_2, … для любых формул, как правильно построенных, так и нестандартных, то есть для ппф и нф одновременно. При этом правила (v)* и (vi)* обобщаем до правил (v)** и (vi)** следующим образом.

(v)** Если A, B есть формула, то $(-A)$, $(A \cong B)$ есть ппф.

(vi)** Если A, B есть формула, то $(-A)$, $(A \cong B)$ есть T.F.-ф.

В этом случае, обобщая схемы аксиом A2.1, A2.2, A3.2 на весь универсум формул (как правильно построенных, так и нестандартных), необходимо будет ослабить только аксиому A3, отбросив только формулу $(|E \vee -E)$, соответствующую принципу двузначности в слабой форме.

A3** $-(|E \wedge -E)$.

Назовем полученное исчисление **FC3N($\cong$)**.

Обобщенные таблицы истинности ниже.

$\rightarrow$	0	½	1
0	1	1	1
½	½	½	1
1	0	½	1

$\cong$	0	½	1
0	1	0	0
½	0	1	0
1	0	0	1

A	|A	–A
0	0	1
½	0	0
1	1	0

Исчисление **FC3N(≅)** эквивалентно сильной логике Клини, обогащенной клиниевской же связкой полной эквивалентности, а также трехзначной логике Лукасевича. Последнее может быть понято при учете того, что при построении этого исчисления ослаблялся именно принцип двузначности, что являлось для Лукасевича отправной точкой в построении им трехзначной логики.

В полученной логике необходимые и достаточные условия для утверждения о неподвижной точке $(|A \leftrightarrow A)$ усматриваются из следующих теорем.

T5 $\vdash \quad (|A \veebar - A) \supset (|A \leftrightarrow A)$

T5 $\vdash \quad (|A \leftrightarrow A) \supset (|A \veebar - A)$

Имеем также следующие теоремы, имеющие несколько непривычный вид.

T6.1 $\quad \nvdash (\to \to \to)$.

T7.1 $\quad \vdash (\to \cong \to)$.

T7.2 $\quad \vdash (\cong \cong \cong)$.

Последние теоремы становятся понятнее, если учесть, что из схемы аксиом A4 подстановкой $\cong$ получается

$$(\cong \cong \cong) \equiv (|\cong \to |\cong) \wedge (-\cong \to -\cong)$$

и из A5 имеем $(-|\cong \wedge -- \cong)$ и $(-T(q(\cong)) \wedge - F(q(\cong))$, т.е. нестандартные формулы ни истинны, ни ложны, но утверждения об их истинности или ложности $T(q(\cong))$ или $F(q(\cong))$ (конечно, ложны) являются двузначными и для них применима классическая логика.

Обратим внимание, что при построении логики **FC3N**(≅) мы не выходили за рамки языка классической логики **FC2**(≅).

ЛИТЕРАТУРА

1. *Васильев Н.А.* Воображаемая логика (конспект лекции) // Васильев Н.А. Воображаемая логика. Избранные труды. М., 1989.
2. *Лукасевич Я.* О детерминизме // Логические исследования. Вып. 2. М., 1993. С. 190-205.
3. *Павлов С.А.* Формулировка классической логики, обогащенной семантическими терминами «истинно» и «ложно» // Труды научно-исслед. семинара Логического центра Института философии РАН. Вып. XV. М., 2001. С. 74-78.
4. *Павлов С.А.* Секвенциальная формулировка логики с операторами истинности и ложности // Труды научно-исследовательского семинара Логического центра Института философии РАН. Вып. XVI. М., 2002. С. 79-85.
5. *Тарский А.* Семантическая концепция истины и основания семантики // Аналитическая философия: становление и развитие. М., 1998.

М.Н.Рыбаков

СЛОЖНОСТЬ ПРОБЛЕМЫ РАЗРЕШЕНИЯ БАЗИСНОЙ И ФОРМАЛЬНОЙ ЛОГИК*

Abstract. *The complexity of decision problem for basic proposition logic* **BPL** *and formal proposition logic* **FPL** *is considered. It is proved that decision problem for positive fragments of both* **BPL** *and* **FPL** *is* PSPACE-*complete. The main result is that decision problem for variable-free fragment of* **BPL** *and one-variable fragment of* **FPL** *is PSPACE-complete.*

1. Введение

Базисная пропозициональная логика **BPL** и формальная пропозициональная логика **FPL** введены А. Виссером в [12] в виде секвенциальных исчислений. Формулы логик **BPL** и **FPL** строятся из (счетного множества) пропозициональных переменных и константы «ложь» с помощью конъюнкции, дизъюнкции и импликации. Из [12] следует, что логику **BPL** можно рассматривать как «суперинтуиционистский фрагмент» модальной логики **K4**, а логику **FPL** – как «суперинтуиционистский фрагмент» модальной логики **GL**, где под «суперинтуиционистским фрагментом» модальной логики понимается множество формул этой логики, которые являются результатами следующего T-перевода:

$$\begin{array}{rcl} \mathsf{T}(\bot) & = & \Box\bot; \\ \mathsf{T}(p) & = & \Box p; \\ \mathsf{T}(\varphi\wedge\psi) & = & \mathsf{T}(\varphi)\wedge\mathsf{T}(\psi); \\ \mathsf{T}(\varphi\vee\psi) & = & \mathsf{T}(\varphi)\vee\mathsf{T}(\psi); \\ \mathsf{T}(\varphi\to\psi) & = & \Box\,(\mathsf{T}(\varphi)\to\mathsf{T}(\psi)). \end{array}$$

(Таким образом, посредством T-перевода **BPL** связана с **K4**, а **FPL** с **GL** также же, как интуиционистская логика **Int** с **S4**.) В [12] для **BPL** и **FPL** строится реляционная семантика, близкая семантике Крипке для **Int**: разница состоит лишь в том, что при определении шкал и моделей Крипке нет требования рефлексивности миров (о семантике Крипке см., например, [4], [5]). В такой семантике **BPL** может быть определена как множество формул, истинных во всех шкалах Крипке с транзитивным отношением достижимости, а **FPL** – как множество формул, истинных во всех конечных шкалах

* Работа выполнена при поддержке РФФИ, грант № 03–06–80115.

Крипке с иррефлексивным транзитивным отношением достижимости [12].

Мы рассмотрим алгоритмические аспекты базисной и формальной логик. Прежде всего заметим, что обе эти логики разрешимы. Действительно, для того чтобы выяснить, принадлежит ли формула φ логике **BPL** или логике **FPL**, достаточно проверить, принадлежит ли $\mathsf{T}(\varphi)$ логике **K4** или, соответственно, логике **GL**, а проверка принадлежности логикам **K4** и **GL** может быть осуществлена эффективно в силу их разрешимости, см., например, [5].

Обратим внимание на тот факт, что разрешимость означает лишь принципиальную возможность уметь выяснять по формулам их принадлежность данным логикам, но реальные алгоритмы, решающие этот вопрос, могут оказаться довольно сложными. Так, например, проблема разрешения логик **K4** и **GL** является PSPACE-полной: она решается некоторым алгоритмом, затрачивающим полиномиальный объем памяти от длины тестируемой формулы, и к этой проблеме полиномиально сводится любая проблема из класса PSPACE (что следует, например, из конструкции, описанной в [8][1]), то же относится и к **Int** [10], а PSPACE-полные задачи считаются реально не решаемыми[2] (точные определения класса PSPACE, понятия PSPACE-полноты и т.п. можно найти в [6] и [11]).

Наша задача будет состоять как раз в том, чтобы описать сложность алгоритмов, разрешающих **BPL** и **FPL**. Мы покажем, что (*i*) проблема разрешения логик **BPL** и **FPL** PSPACE-полна (теорема 2), при этом из доказательства этого факта будет следовать, что (*ii*) проблема разрешения позитивных фрагментов **BPL** и **FPL** PSPACE-полна (теорема 3); затем мы построим погружение позитивного фрагмента логики **BPL** в ее фрагмент, состоящий из константных формул, и погружение позитивного фрагмента логики **FPL** в ее фрагмент, состоящий из формул от одной переменной, в результате чего сможем доказать, что (*iii*) проблема разрешения константного фрагмента **BPL** и проблема разрешения фрагмента **FPL**, состоящего из формул от одной переменной, являются PSPACE-полными (теорема 5).

---

[1] В [8] рассматриваются логики **K**, **T** и **S4**, но доказательство PSPACE-полноты проблемы разрешения этих логик легко переносится на случай **K4** и **GL**.

[2] На данный момент известны только так называемые переборные алгоритмы, решающие PSPACE-полные задачи, время работы которых не ограничено ни одним полиномом от длины тестируемой формулы, при этом вопрос о существовании (даже недетерминированных!) алгоритмов, решающих PSPACE-полные задачи за полиномиальное время, открыт.

2. Сложность проблемы разрешения BPL и FPL

Мы будем пользоваться тем фактом, что проблема выполнимости булевых формул с кванторами является PSPACE-полной, при этом без ограничений общности можем рассматривать только формулы вида

$$\varphi \;=\; Q_1 p_1 \ldots Q_n p_n \bigwedge_{k=1}^{m} \Big(\bigvee_{i \in I_k}^{n+1} p_i \;\vee\; \bigvee_{i \in J_k}^{n+1} \neg p_i \Big), \qquad (*)$$

где $Q_1, \ldots , Q_n \in \{\forall, \exists\}$, $I_k, J_k \in \{1, \ldots , n\}$, $I_k \cap J_k = \varnothing$, см. [6], [11]. Опишем, как булевой формуле с кванторами φ сопоставить формулу φ^*, которая эффективно строится по φ за время, ограниченное некоторым полиномом от длины φ, и такую, что

$$\begin{aligned} \varphi \text{ истинна } &\Leftrightarrow \varphi^* \notin \mathbf{BPL} \\ &\Leftrightarrow \varphi^* \notin \mathbf{FPL}. \end{aligned}$$

Формула φ^* в определенном смысле будет описывать условие истинности формулы φ[3].

Начнем построение φ^* с того, что опишем «раскрытие» кванторов; для этого нам понадобятся формулы

$$A(s_1,s_2,s_3,s_4,s_5) \;=\; (s_1\wedge s_2\to s_3)\wedge(s_1\wedge s_2\to s_4)\wedge(s_1\to s_5)\wedge(s_2\to s_5)\to(\top\to s_5),$$
$$E(s_1,s_2,s_3,s_4,s_5) \;=\; (s_1\wedge s_2\to s_3)\wedge(s_1\wedge s_2\to s_4)\wedge(s_1\wedge s_2\to s_5)\to(\top\to s_5),$$

где $\top = p \to p$ для некоторой фиксированной переменной p. Каждую переменную p_i мы промоделируем с помощью двух формул: $t_i = q_i \to r_i$ и $f_i = r_i \to q_i$. Подразумеваемое значение этих формул следующее: если переменная q_i истинна, а r_i опровергается, то переменная p_i принимает значение «истина», а если наоборот, то p_i принимает значение «ложь».

Предположим теперь, что формула $A(t_i, f_i, t_{i+1}, f_{i+1}, s)$ опровергается в некотором мире a модели Крипке логики **BPL** или логики **FPL**. Тогда из a должен быть достижим мир b, из которого должен быть достижим мир c, в котором опровергается s, при этом в мире b должны быть истинны формулы $(t_i \to s)$ и $(f_i \to s)$. Следовательно, из c должны быть достижимы два (различных!) мира, скажем, d_1 и d_2, в первом из которых истинна переменная q_i и опровергается переменная r_i, а во втором – истинна r_i и опровергается q_i, что, согласно подразумеваемому смыслу формул t_i и f_i, вынуждает нас рассматривать обе возможные оценки для переменной p_i. При этом первый и второй конъюнктивные члены формулы $A(t_i, f_i, t_{i+1}, f_{i+1}, s)$ обеспечивают сохранение оценки q_i и r_i в мирах,

---

[3] Идея построения φ^* взята из [5].

достижимых из d_1 и d_2. Если же в некотором мире a опровергается формула $E(t_i, f_i, t_{i+1}, f_{i+1}, s)$, то возникает аналогичная ситуация с той разницей, что вместо миров d_1 и d_2 должен существовать некоторый мир d, в котором либо q_i истинно и r_i опровергается, либо r_i истинно и q_i опровергается.

Каждой кванторной приставке $Q_1p_1\ldots Q_kp_k$ сопоставим формулу ψ_k следующим образом (ниже s – некоторая пропозициональная переменная, отличная от q_i и r_i):

если $Q_1 = \forall$, то $\psi_1 = A(t_1, f_1, t_2, f_2, s)$;

если $Q_1 = \exists$, то $\psi_1 = E(t_1, f_1, t_2, f_2, s)$;

если $Q_k = \forall$, то

$$\begin{aligned}\psi_k \ &= \ [A(t_k, f_k, t_{k+1}, f_{k+1}, t_{k-1}) \to (\top \to t_{k-1})] \wedge \\ &\wedge [A(t_k, f_k, t_{k+1}, f_{k+1}, f_{k-1}) \to (\top \to f_{k-1})] \to \psi_{k-1};\end{aligned}$$

если $Q_k = \exists$, то

$$\begin{aligned}\psi_k \ &= \ [E(t_k, f_k, t_{k+1}, f_{k+1}, t_{k-1}) \to (\top \to t_{k-1})] \wedge \\ &\wedge [E(t_k, f_k, t_{k+1}, f_{k+1}, f_{k-1}) \to (\top \to f_{k-1})] \to \psi_{k-1}.\end{aligned}$$

Теперь положим

$$\varphi^* \ = \ \Big(\bigvee_{k=1}^{m} \Big(\bigwedge_{i\in I_k}^{n+1} t_i \vee \bigwedge_{i\in J_k}^{n+1} f_i\Big) \to t_n \wedge f_n\Big) \to \psi_n.$$

Нетрудно видеть, что длина формулы φ^* может быть ограничена линейной функцией от длины формулы φ, а поэтому и на выписывание формулы φ^* по формуле φ потребуется время, ограниченное полиномом от длины φ, кроме того, опровержимость формулы φ^* в некотором мире некоторой модели логики **BPL** или логики **FPL** означает следующее: если последовательно «раскрыть» кванторы формулы φ, то выражение, стоящее в φ за кванторной приставкой, истинно. Более точно, верно следующее утверждение.

Лемма 1. *Для всякой булевой формулы с кванторами φ вида* (*) *имеют место следующие эквивалентности:*

$$\begin{aligned}\varphi \text{ истинна} \ &\Leftrightarrow \ \varphi^* \notin \mathbf{BPL} \\ &\Leftrightarrow \ \varphi^* \notin \mathbf{FPL},\end{aligned}$$

при этом формула φ^* эффективно строится по φ за полиномиальное время от длины φ.

Теорема 2. *Проблема разрешения логик* **BPL** *и* **FPL** *является* PSPACE-*полной.*

Доказательство. Проблема разрешения логик **BPL** и **FPL** находится в классе PSPACE, поскольку с помощью T-перевода она полиномиально сводится к проблеме разрешения логик **K4** и **GL** соответственно, а как отмечалось выше, проблема разрешения **K4**

и **GL** является PSPACE-полной, в частности, находится в классе PSPACE. Кроме того, любая проблема из класса PSPACE полиномиально сводима к проблеме выполнимости булевых формул с кванторами (в силу PSPACE-полноты последней), а проблема выполнимости булевых формул с кванторами в силу леммы 1 полиномиально сводима к проблеме разрешения **BPL** и **FPL**, что и завершает доказательство.

Обозначим через $\mathbf{BPL}^+$ и $\mathbf{FPL}^+$ позитивные фрагменты логик **BPL** и **FPL** соответственно, т.е. множества формул этих логик, построенных без использования константы «ложь». Поскольку при выписывании формулы φ^* константа «ложь» не использовалась, то мы на самом деле доказали более сильное утверждение, чем теорема 2.

Теорема 3. *Проблема разрешения фрагментов* $\mathbf{BPL}^+$ *и* $\mathbf{FPL}^+$ *является* PSPACE-*полной.*

Теперь обратимся к вопросу о сложности разрешения фрагментов **BPL** и **FPL**, состоящим из формул, построенных в языке с конечным числом переменных. В [1] была высказана гипотеза о том, что проблема разрешения фрагмента **BPL** является PSPACE-полной уже в том случае, когда в языке имеются всего две пропозициональные переменные. Как было сказано во введении, мы докажем даже более сильное утверждение. Но для этого нам потребуется некоторый технический факт, который, кстати, представляется интересным сам по себе.

Введем следующее обозначение. Для всякого множества формул L через $L(n)$ обозначим множество тех формул из L, в построении которых помимо связок участвуют только константа «ложь» и переменные $p_1, \ldots, p_n$.

3. Погружение $\mathbf{BPL}^+$ в $\mathbf{BPL}(0)$ и $\mathbf{FPL}^+$ в $\mathbf{FPL}(1)$

Идея погружения, которое будет описано ниже, взята из [7] и уже использовалась автором в совместных работах с А.В. Чагровым при доказательстве близких результатов для модальных логик: см. [1], [2], [3]. При получении аналогичных результатов для **BPL** и **FPL** придется, конечно, учитывать специфику «интуиционистского»[4] случая.

Идея, собственно, состоит в том, чтобы заменить все переменные в рассматриваемой формуле формулами (константными в

[4] С одной стороны, семантика рассматриваемых логик близка к семантике **Int**, но с другой стороны, логика **FPL** не является ни подлогикой, ни расширением **Int** (хотя **BPL** как множество формул включается в **Int**).

случае **BPL** и зависящими от одной переменной в случае **FPL**), которые могут рассматриваться как переменные: каждую из них можно, определенным образом изменив модель, опровергнуть или сделать истинной в рассматриваемом мире независимо от истинности в этом мире остальных построенных формул.

Введем следующее сокращение. Для всякой формулы ψ обозначим через $\Box\psi$ формулу $\top \to \psi$. Для всякого $n \geqslant 1$ положим

$$\begin{aligned} \alpha_n &= (\Box^{n+2}\bot \to \Box^{n+1}\bot) \to (\Box^{n+1}\bot \to \Box^{n}\bot) \vee \Box^{n+2}\bot; \\ \beta_n &= \Box^2 p \to (\Box^{n+1}\bot \to \Box^{n}\bot \vee p). \end{aligned}$$

Пусть φ – произвольная формула, не содержащая константы «ложь», и пусть $p_1, \ldots, p_n$ – все переменные, входящие в φ. Обозначим через φ_α формулу, получающуюся из φ заменой каждого вхождения переменной p_i на α_i, а через φ_β – формулу, получающуюся из φ заменой каждого вхождения переменной p_i на β_i.

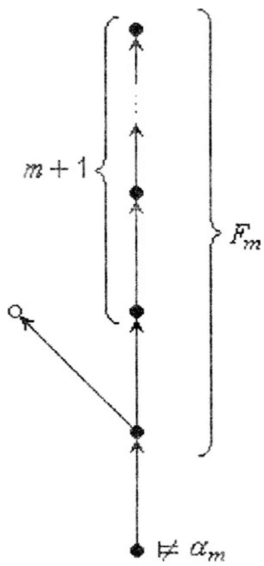


Рис. 1

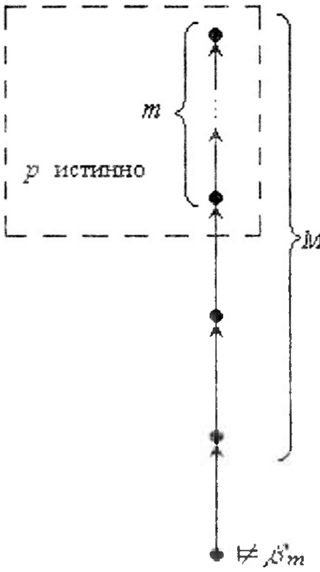


Рис. 2

Заметим, что для того чтобы в некотором мире опровергалась формула α_m, достаточно, чтобы из него была достижима шкала F_m (т.е. нижний мир F_m), изображенная на рис. 1, а для того чтобы в некотором мире опровергалась формула β_m, достаточно, чтобы из него была достижима модель M_m, изображенная на рис. 2 (черные кружки соответствуют иррефлексивным мирам, а светлые – рефлексивным). При этом несложно убедиться, что истинность формул α_k и β_k, где $k \neq m$, не зависит от того, достижимы ли из данного мира модели указанного вида, опровергающие α_m и β_m соответственно. Это наблюдение позволяет обосновать следующее утверждение.

Лемма 4. *Пусть φ – формула, не содержащая константы «ложь». Тогда имеют место следующие эквивалентности:*

$$\varphi \in \mathbf{BPL}^{+} \quad \Leftrightarrow \quad \varphi_{\alpha} \in \mathbf{BPL}(0);$$
$$\varphi \in \mathbf{FPL}^{+} \quad \Leftrightarrow \quad \varphi_{\beta} \in \mathbf{FPL}(1).$$

4. Сложность разрешения BPL(m) и FPL(m)

Заметим, что длина формул α_k и β_k, где $k \geqslant n$, ограничена некоторой линейной функцией от n, а n в свою очередь не превосходит длины φ. Следовательно, длина формул φ_{α} и φ_{β} может быть ограничена квадратичным полиномом от длины φ, из чего легко заключить, что φ_{α} и φ_{β} эффективно строятся по φ с помощью алгоритма, время работы которого ограничено некоторым полиномом от длины φ. Таким образом, проблема разрешения $\mathbf{BPL}^{+}$ и $\mathbf{FPL}^{+}$ полиномиально сводится к проблеме разрешения **BPL**(0) и **FPL**(1) соответственно, и тем самым нами доказана

Теорема 5. *Для всякого $m \geqslant 0$ проблема разрешения* **BPL**(m) *и* **FPL**(m + 1) *является* PSPACE-*полной.*

Остается вопрос о сложности проблемы разрешения **FPL**(0), но ответ на него почти очевиден. В [1] доказано, что фрагмент **GL**(0) разрешим полиномиально по времени, а **FPL**(0) погружается в **GL**(0) с помощью T-перевода, причем T(φ) вычисляется по φ за полиномиальное время от длины φ. Поэтому имеет место

Теорема 6. *Фрагмент* **FPL**(0) *разрешим с помощью алгоритма, время работы которого ограничено полиномом от длины проверяемой формулы.*

5. Сложность разрешения Int(m)

Получив оценки сложности проблемы разрешения **BPL**(m) и **FPL**(m), трудно ничего не сказать о сложности проблемы разрешения **Int**(m). Как уже было сказано выше, проблема разрешения **Int** является PSPACE-полной [10]. Тем не менее, имеется алгоритм, основанный на «лестнице» И. Нишимуры [9], разрешающий **Int**(1) за полиномиальное время. Что касается **Int**(m) для $m > 1$, то имеют место следующие факты.

Лемма 7. *Для всякой булевой формулы с кванторами φ вида* (*) *имеют место следующие эквивалентности:*

$$\varphi \textit{ истинна} \quad \Leftrightarrow \quad \varphi^{*} \notin \mathbf{Int}.$$

Обозначим через **Int**$^+$ позитивный фрагмент логики **Int**. Из леммы 7 вытекает

Теорема 8 [10]. *Проблема разрешения* **Int**$^+$ *является* PSPACE-*полной.*

Лемма 9. *Существует погружение* **Int**$^+$ *в* **Int**(2), *которое вычислимо с помощью некоторого алгоритма, время работы которого ограничено полиномом от длины подаваемой на вход формулы.*

Построение такого погружения **Int**$^+$ в **Int**(2) основано на той же идее, что и построение погружения **BPL**$^+$ в **BPL**(0), а также **FPL**$^+$ в **FPL**(1), но требует значительно больше технических выкладок, что, к сожалению, не позволяет привести его в рамках данной работы.

Из леммы 9 и PSPACE-полноты проблемы разрешимости **Int** и **Int**$^+$ вытекает

Теорема 10. *Для всякого* $m \geqslant 2$ *проблема разрешения* **Int**(m) *является* PSPACE-*полной.*

ЛИТЕРАТУРА

1. *Рыбаков М.Н., Чагров А.В.* Константные формулы в модальных логиках: проблема разрешения // Логические исследования. Вып.9. М.: Наука, 2003.
2. *Рыбаков М.Н., Чагров А.В.* Модальные формулы без переменных и PSPACE-полнота // Современная логика: Проблемы теории, истории и применения в науке. Материалы VII Международной научной конференции. СПб: Издательство Санкт-Петербургского университета. 2002. С. 498–500.
3. *Рыбаков М.Н., Чагров А.В.* О сложности модальных логик, имеющих доказуемостную интерпретацию, с ограничениями на число переменных // Колмогоров и современная математика. Международная конференция. М.: Издательство МГУ, 2003. С. 707–708.
4. Семантика модальных и интенсиональных логик // Пер. с англ., сост., общ. ред. и вступит. статья В.А. Смирнова. М.: Прогресс, 1981.
5. *Chagrov A., Zakharyaschev M.* Modal Logic. Oxford University Press, 1997.
6. *Garey M.R.., Johnson D.S.* Computers and Intractability: A Guide to the Theory of NP-completeness. San Francisco, 1979. (Русский перевод: *Гэри М., Джонсон Д.* Вычислительные машины и труднорешаемые задачи. М.: Мир, 1982).
7. *Halpern J.Y.* The Effect of Bounding the Number of Primitive Propositions and the Depth of Nesting on the Complexity of Modal Logic // Artificial Intelligence. Vol. 75. 1995. P. 361–372.
8. *Ladner R.E.* The computational complexity of provability in systems of modal logic // SIAM Journal on Computing. Vol. 6. 1977. P. 467–480.

9. *Nishimura I.* On formulas of the one variable in intuitionistic propositional calculus // The Journal of Symbolic Logic. Vol. 25. N. 1. 1960. P. 327–331.
10. *Statman R.*. Intuitionistic propositional logic is polynomial-space complete // Theoret. Comput. Sci. Vol. 9. N. 1. 1979. P. 67–72.
11. *Stockmeyer L.* Classifying the Computational complexity of Problems // The Journal of Symbolic Logic. Vol. 52. N.1. 1987. P. 1–43. (Русский перевод: *Стокмейер Л.* Классификация вычислительной сложности проблем // Кибернетический сборник, вып. 26. М.: Мир, 1989. С. 20–83.)
12. *Visser A.* A Propositional Logic with Explicit Fixed Points // Studia Logica. Vol. 40. 1981. P. 155–175.

Е.Д.Смирнова

ЛОГИКО-СЕМАНТИЧЕСКИЕ АСПЕКТЫ АНАЛИЗА ПОНЯТИЯ ИСТИННОСТИ*

Abstract. *The types of non-standard semantics with partially-defined predicates are described. The main point of consideration is stipulation of adequateness conditions for concepts of truth introduced in these semantics. Corresponding reconstruction of well-known Tarski's scheme are elaborated, and the place and role of the scheme in these semantics are clarified.*

Возникновение в современной логике логических систем самого разного типа остро ставит проблему истолкования природы логического знания, логических форм и законов. Одной из важных предпосылок обоснования логических систем является исследование понятия истинности и условий истинностных оценок высказываний. Необходимо эксплицировать, выявить смысл используемого в логике понятия истинности.

Построение теоретической семантики предполагает введение семантических понятий точным и строгим образом. Однако этого недостаточно. Необходимо установить адекватность введенных понятий некоторым исходным содержательным понятиям. Так, в основе семантик систем классической логики лежит понятие истинности, отвечающее требованиям известной схемы Тарского. Схема Тарского предназначена для экспликации классического, аристотелевского понятия истинности – истинности как соответствия действительности. Именно схема устанавливает связь введенного в семантике строгим образом понятия истинности с определенным содержательным, философским понятием. Возникает вопрос, сохраняет ли схема Тарского свое значение в случае иного типа семантик – в случае семантик модальных и интенсиональных контекстов, высказываний об идеальных элементах или в семантиках с не всюду определенными предикатами.

Уже в классической семантике в связи со схемой Тарского возникает ряд вопросов. Во-первых, вопрос трактовки предложения *p* схемы, фиксирующего то положение дел, которое верифицирует рассматриваемое предложение и задает его интерпретацию. Вопрос этот особенно существенен в случае модальных и интен-

* Работа выполнена при поддержке РГНФ, грант № 03-03-00071а.

сиональных контекстов или высказываний о в принципе не реализуемых объектах, фикциях. В случае семантик модальных и особенно интенсиональных контекстов интерпретация предложения *p* предполагает обращение к понятию возможных миров. В семантике вводятся такие сущности, как пропозициональные и индивидные концепты, интенсионалы, семейства возможных миров, отношения и функции, задаваемые на такого рода семействах, и т.д., см. [4, с. 164–165].

Возникает расхождение между корреспондентской концепцией истинности, лежащей в основе схемы *T*, и тем, что называют философским реализмом. Возникает онтология, которую, говоря словами Куайна, можно назвать интенсиональной онтологией [1, § 44].

Во-вторых, возникает вопрос о связи условий истинностных оценок высказываний с их осмысленностью. Всякое ли осмысленное высказывание может получать истинностную оценку и каковы в таком случае критерии осмысленности? В соответствии со схемой Тарского, понимать высказывание – значит знать условия его истинности. И, наоборот, понимание условий истинности предложения задает его смысл. Однако уже Буридан отмечал, что существуют высказывания, вполне осмысленные, но которые не могут оцениваться как истинные или ложные. Например, самоприменимое предложение в случае парадокса Лжеца. Мы понимаем это высказывание, более того, имеет место то, что оно утверждает, однако попытка оценивать его как истинное или ложное приводит к противоречию. Высказывания об идеальных объектах-фикциях («идеальные элементы» в терминологии Д.Гильберта) являются осмысленными утверждениями математики, но они не могут оцениваться как истинные или ложные. Свое значение эти высказывание получают в контексте всей теории. Соответственно условия истинности такого рода высказываний не могут задаваться предложениями, фиксирующими определенные положения дел. В этом случае мы имеем дело скорее с когерентной концепцией истинности. У Гильберта «идеальные высказывания» – в отличие от действительных предложений математики – не получают истинностных оценок. Принятие такого рода положений означает по существу *пересмотр схемы Тарского*.

Согласно Б.Расселу, высказывания типа, например, высказываний обо всех высказываниях («Все высказывания истинны или ложны»), лишены истинностной оценки, но они и трактуются Расселом как *лишенные смысла*. Встает в целом проблема соотношения осмысленности и условий истинности высказываний.

Критерии осмысленности и возможность истинностной оценки высказываний в ряде случаев связаны с уточнением области действия предикатов («Цезарь – простое число», «Веселая, гулкая рань»). Нарушение категориальности, правил языка, связанных со значениями выражений, дает высказывания, не имеющие истинностных оценок. Высказывания о несуществующих объектах – типа «Гамлет черноволос», «Нынешний король Франции лыс», «Мир в целом бесконечен» или «Круглый квадрат кругл» – рассматриваются обычно как осмысленные, но их истинностная оценка приводит к нарушению логических законов. Опять-таки требуется уточнение условий истинностных оценок высказываний.

Особый интерес представляет уточнение понятия истинности в случае семантики с не всюду определенными предикатами. Разработка теории рекурсивных функций неизбежно приводит к идее не всюду определенной (частичной) рекурсивной функции. Рекурсивной функции сопоставляется алгорифм, вычисляющий по аргументам функции ее значение. Но алгорифм может не закончить работу, то есть соответствующая ему функция может оказаться не всюду определенной. В общем случае мы не имеем метода распознавания, будет ли функция, создаваемая алгорифмом, всюду определенной или нет. Идея частичной рекурсивной функции является более фундаментальной, чем идея всюду определенной рекурсивной функции. Если характеристическая функция n-местного предиката является не всюду определенной, то мы имеем не всюду определенные предикаты. В целом это соответствует нашей интуиции и правилам языка. Еще Г.Гегель отмечал, что о духе нельзя сказать, что он зеленый, как и нельзя сказать, что он незеленый. Такой подход к анализу предикатов приводит к идее, что и понятие истинности может быть определенным не на всем множестве высказываний.

Рассмотрим пути уточнения схемы Тарского в семантиках, имеющих дело с не всюду определенными предикатами. Мы выделяем следующие виды таких семантик:

(1) Как стандартные, то есть несемантические, так и семантические предикаты могут быть не всюду определенными.

(2) Несемантические предикаты могут быть не всюду определенными, но семантические предикаты всюду определены.

(3) Стандартные предикаты являются всюду определенными, семантические предикаты могут быть не всюду определенными.

Если как стандартные, так и семантические предикаты всюду определены, мы имеем дело с ортодоксальным, классическим вариантом семантики. Семантически замкнутые языки с всюду определенными стандартными и семантическими предикатами, как известно, противоречивы.

Начнем с анализа семантик первого вида[1]. Схема, определяющая условия адекватности предиката «быть истинным высказыванием», в этом случае меняет свой смысл. Меняет свой смысл эквивалентность, выступающая в классической схеме Тарского.

С нашей точки зрения, анализ семантик первого вида приводит к сильной трехзначной логике С.Клини [2]. В качестве экспликации эквивалентности в схеме Тарского можно ввести клиниевскую эквиваленцию $\cong$, ее можно задать таблично:

$\cong$	t	f	u
t	t	f	f
f	f	t	f
u	f	f	t

Отметим, что и Клини не рассматривал u как значение истинности того же ранга, что t или f[2].

Аналогично можно ввести импликацию $\to^{K}$, такую, что $A \cong B$ тогда и только тогда, когда $A \to^{K} B$ и $B \to^{K} A$. Она определяется следующей трехзначной матрицей:

$\to^{K}$	t	f	u
t	t	f	f
f	t	t	t
u	t	f	t

то есть получается из матрицы для импликации трехзначной логики Лукасевича заменой u на f в значениях таблицы.

Возможна формализация отношений логического следования, имеющих место в такого типа семантиках, расширенных введением эквиваленции $\cong$. Так, формализацией отношения следования типа [a] $\varphi_T(A) \to^{K} \varphi_T(B)$ в логике с истинностными провалами является логика Хао Вана, в секвенциальной форме (вместе с клиниевской импликацией) – система $\mathbf{G}_1$ [4, с. 181–182]. Можно расширить систему $\mathbf{G}_1$, обогатив ее правилами для $\to^{K}$ и $\cong$.

[1] При этом предполагается, что объемы и антиобъемы предикатных знаков не пересекаются.

[2] «Но может не существовать алгоритм для решения, определено или нет $Q(x)$ при данном x... Поэтому только классически, но не интуиционистски можно утверждать закон исключенного четвертого (утверждающий, что для каждого x значение $Q(x)$ есть t, f или u). Таким образом, третье "значение истинности" u в нашей теории выступает не наравне с двумя другими t и f». «u означает только отсутствие информации, заключающейся в том, что $Q(x)$ есть t или f» [2, с. 297].

Обозначим эту систему вместе с правилами для клиниевской импликации $\mathbf{GKl}_1$.

Для интересующей нас эквивалентности $\cong$ правила введения будут следующими (опять-таки в системе с истинностными провалами!):

$$\frac{A, \Gamma \vdash \Theta, B \quad {\sim}B, \Gamma \vdash \Theta, {\sim}A \quad B, \Gamma \vdash \Theta, A \quad {\sim}A, \Gamma \vdash \Theta, B}{\Gamma \vdash \Theta, A \cong B}$$

$$\frac{{\sim}A, {\sim}B, \Gamma \vdash \Theta \quad A, B, \Gamma \mathrm{A}\, \Theta \quad \Gamma \vdash \Theta, A, {\sim}A, B, {\sim}B}{A \cong B, \Gamma \vdash \Theta}$$

Мы не формулируем здесь правил для введения отрицания эквиваленции $\cong$ справа и слева. При желании эти правила можно извлечь из семантических условий. Безусловно, детальное исследование обобщенного исчисления $\mathbf{GKl}_1$ с дополнительной связкой $\cong$ является интересной и важной задачей.

Нас интересует схема, которой должен удовлетворять предикат «истинное высказывание». Можно показать, что в логике с истинностными провалами, обогащенной правилами для $\cong$, т.е. $\mathbf{GKl}_1$, из $A \cong {\sim}A$ *не следует* $A \,\&\, {\sim}A$.

Таким образом, в системе с не всюду определенными предикатами, в том числе и с не всюду определенным предикатом «быть истинным высказыванием», формулировка предложения, говорящего о своей собственной неистинности, не приводит к противоречиям.

Можно ввести понятие *K*-определимости не всюду определенных отношений и свойств (классов) [4, с. 112]. Не всюду определенное n-местное отношение R K-определимо, если и только если существует такая формула $A(x_1, \ldots , x_n)$, что выполняются следующие условия: для любой n-ки объектов $a_1, \ldots , a_n$, где их имена $\hat{a}_1, \ldots , \hat{a}_n$,

$R(a_1, \ldots , a_n) \Rightarrow A(\hat{a}_1, \ldots , \hat{a}_n) \in K$;

$\urcorner R(a_1, \ldots , a_n) \Rightarrow {\sim}A(\hat{a}_1, \ldots , \hat{a}_n) \in K$.

R не определено на $<a_1, \ldots , a_n> \Rightarrow \mathrm{A}(\hat{a}_1, \ldots , \hat{a}_n) \notin \mathrm{K}\ \Lambda\ {\sim}\mathrm{A}(\hat{a}_1, \ldots , \hat{a}_n) \notin \mathrm{K}$.

Интересно, что в случае с не всюду определенными предикатами теорема о *K*-неопределимости класса *K* не имеет места.

В следующем варианте рассматриваемых семантик несемантические предикаты могут быть не всюду определены, но семантические являются всюду определенными. В этом случае, на наш взгляд, может быть применен подход Д.А.Бочвара.

Д.А.Бочвар различает внутренние и внешние связки. Внутренние связки – это связки, которые С.Клини позже назвал слабыми трехзначными связками.

Помимо внутренних связок в логике Бочвара имеется внешняя связка. Д.А.Бочвар обозначает ее знаком $\vdash$. Но поскольку этот знак «занят», вслед за Херцбергером будем обозначать ее буквой *h* (от слова horisontal). Херцбергер называет эту связку бочваровско-фрегевской [6]. Семантические условия для *h* следующие:

$\varphi_T(hA)= \varphi_T(A)$;

$\varphi_F (hA)= \varphi_T(A)'$,

где $\varphi_T(A)$ и $\varphi_F(A)$ – область и антиобласть высказывания *A*, соответственно.

Отметим, что введенная нами выше импликация $\subset$ может быть определена через *h* и импликацию Лукасевича $\to^Ł$. $A \subset B$ тогда и только тогда, когда $h(A$ ` $B)$. В этом случае предикат истинности аналогичен операции внешнего утверждения Д.А.Бочвара. Его смысл следующий: *A* истинно тогда и только тогда, когда *A* определено и имеет место *A*:

$\varphi_T(Tr(\ulcorner A \urcorner) = \varphi_T(A)$;

$\varphi_F(Tr(\ulcorner A \urcorner) = \varphi_T(A)'$,

где $\ulcorner A \urcorner$ – имя высказывания *A*.

При предыдущем подходе $\varphi_F(Tr(\ulcorner A \urcorner) = \varphi_F(A)$.

Схема, которой должен удовлетворять всюду определенный предикат «быть истинным высказыванием», должна быть видоизменена, например, следующим образом:

если *X* определено, то *X* истинно, если и только если *p*;

если *X* не определено, то *X* не истинно.

Вместо «*p*» мы подставляем высказывание, а вместо «*X*» – его имя.

Представляет интерес видоизменить условие адекватности Тарского следующим образом:

X истинно, если и только если *h*(*p*).

В этом случае семантическое понятие *Tr* будет аналогом объектной связки *h*.

В третьем варианте несемантические предикаты являются всюду определенными, а семантические – не всюду определенными. Для анализа условий истинности высказываний в такого рода семантиках и, соответственно, характера и роли схемы Тарского особый интерес, с нашей точки зрения, представляет подход, при котором расширяется обычный, стандартный объектный язык *L* за счет введения особого предиката **T**-предиката истинности.

В свое время А.Тарский показал, что стандартное понятие истинности можно сформулировать в теоретико-типовой системе уровня $n+1$ для языка уровня n. Целый ряд авторов в 50-е и 60-е годы исследовали эту проблему (Дж.Кемени, Хао Ван, В.Куайн)[3].

При рассмотрении семантически замкнутых языков все авторы исходят из требования, чтобы было единое понятие истинности, а не особые для каждого уровня. При итерации **T** может оказаться, что самоприменимое предложение формулируется не на конечном уровне, а на достаточно высоком трансфинитном уровне. Идеи итерации выдвигались уже в конце 60-х годов, однако, новый стимул к их исследованию был дан работами К.Крипке, Р.А.Мартина и П.В.Вудруффа.

Остановимся несколько подробнее на подходе С.Крипке [3]. Все несемантические предикаты интерпретируются обычным образом. Предикат же истинности **T**, введенный в объектный язык, в отличие от остальных предикатов объектного языка, не всюду определен. Ему приписываются объем S_1 и антиобъем S_2, при этом пересечение объема и антиобъема пусто, то есть $S_1 \cap S_2 = \phi$; в то же время объединение S_1 и S_2 не равно универсуму.

Поскольку рассматриваемый язык содержит не всюду определенный предикат, в качестве логических связок естественно рассматривать сильные клиневские связки и кванторы. Приписывание значений сложным выражениям, в том числе содержащим предикат **T**, осуществляется индуктивно.

Выражение вида **T**(**A**), где **A** – геделев номер формулы A, принадлежит объектному языку. Важно отметить, что различаются предикат истинности объектного языка **T** и истинностная оценка высказывания в метаязыке, например Tr(**A**) или Tr(**T**(**A**)). Соответственно, конвенция Тарского может быть сформулирована как в объектном языке, так и в метаязыке. Поскольку **T** не всюду определен, схема в объектном языке формулируется в виде:

$$(1)\ \mathbf{T}(\ulcorner A \urcorner) \cong A^4,$$

и при этом, как отмечалось, из $A \cong {\sim}A$ не следует $A \& {\sim}A$.

С.Крипке строит семантику индуктивным методом[5]. $\alpha \Vdash A$ – в нашей терминологии – означает, что формула A истинна на уровне α. Индуктивный уровень, на котором истинна эквивалентность T(**A**) $\cong A$ (уровень, на котором выполняется условие (1)), будем называть *фиксированной точкой* (неподвижной точкой).

Введенная семантика позволяет *выделить различные типы*

---

[3] См. обзор этой проблемы в [5].

[4] Напомним, что $A \cong B$ истинна, если A и B истинны, или A и B ложны, или A и B не определены, и ложна во всех остальных случаях.

[5] Репрезентацию и реконструкцию этой семантики см. [4, с. 205–209].

предложений, содержащих предикат истинности T. Предложение *A* является *обоснованным* (grounded), если и только если оно имеет истинностное значение в наименьшей фиксированной точке; в противном случае *A* не обосновано. К числу необоснованных предложений относятся, например, такие самоприменимые предложения, которые говорят о своей собственной неистинности – «я не истинно» и о своей собственной истинности – «я истинно».

На базе проведенных семантических конструкций можно уточнить понятие парадоксального предложения, выявить его отличие от других самоприменимых предложений, включающих предикат истинности. Предложение *A парадоксально*, если оно не имеет истинностного значения ни в одной фиксированной точке. Всякое парадоксальное предложение необоснованно, но не наоборот.

Можно ввести и другие характеристики предложений, позволяющие провести важные разграничения в исследовании предложений, содержащих предикаты истинности и ложности. Так, вводятся понятия внутренней фиксированной точки и внутреннего истинностного значения [4, с. 209]. На их основе проводятся более тонкие различия самоприменимых предложений с предикатом «истинно». Предложение, утверждающее, что оно само или его отрицание истинно, является примером необоснованного, непарадоксального предложения, имеющего внутреннее истинностное значение. Предложение «Я истинно или ложно» необоснованно, но внутренне истинно; предложение «Я не истинно и не ложно» необоснованно, но внутренне ложно.

Язык, казалось бы, становится *семантически замкнутым*, возможно построение самоприменимых высказываний, утверждающих собственную истинность или неистинность, однако *парадокс не возникает*. Это достигается за счет того, что *предикат истинности не является всюду определенным*.

ЛИТЕРАТУРА

1. *Карнап Р.* Значение и необходимость. М., 1959.
2. *Клини С.* Введение в метаматематику. М., 1957.
3. *Kripke S.* Outline of a theory of truth // The Journal of Philosophy. 1975. Vol. 92. P. 690–715.
4. *Смирнова Е. Д.* Логика и философия. М.: РОССПЭН, 1996.
5. *Смирнова Е.Д., Таванец П.В.* Семантика в логике // Логическая семантика и модальная логика. М., 1967.
6. *Herzberger H. G.* Truth and Modality in semantically closed languages // Martin R. M. (ed.). The Paradox of the Liar. Yale, 1990. P. 29.

Б.И.Федоров

ОБРАЗЕЦ ИСТОРИЧЕСКИ-ЛОГИЧЕСКОЙ РЕКОНСТРУКЦИИ

Abstract. *In the paper the author describes his method of comparative historical analysis of logical conceptions, theories and concrete fundamental results in history of logic. The method is used in analyzing of the deductive conception of B. Bolzano (1781-1848). On the grounds of this application the author finds some results, which can be perspective for the research in history of logic.*

Реконструкция, как правило, содержательно излагаемых логических идей или теорий прошлого предполагает, на наш взгляд, три основных этапа. На первом этапе выявляются специфические особенности толкования и научно-практического использования фундаментальных логических категорий, таких, как понятие, представление, высказывание (суждение), субъект, предикат, рассуждение, вывод, доказательство, логическая форма, модель, выполнимость, логическая истинность, модальность, отношение логического следования и других логических отношений. На этом же этапе происходит уточнение смысла основных логических положений теории, выясняется зависимость вывода или доказательства от выбора тех или иных логических средств, от всякого рода явных или скрытых допущений. Здесь же прослеживается влияние философско-методологической позиции изучаемого автора на трактовку основных логических проблем. Второй этап реконструкции связан с так называемой «промежуточной» формализацией исследуемой содержательной теории. Главным моментом на этом этапе является обнаружение и/или создание таких выразительных средств, например, искусственного языка, синтаксис которого позволяет максимально учесть и адекватно отобразить все те уточнения реконструируемой логической теории, которые были обнаружены и сформулированы содержательно на первом этапе. Третий этап или собственно реконструкция прошлых идей или теорий состоит в «погружении» предварительно формализованного материала в выразительные средства языка современной логики таким образом, чтобы полученные результаты позволяли увидеть реальные перспективы использования прошлых идей в развитии современной логики и методологии научного познания.

Предполагая осуществить поэтапную реконструкцию логических идей прошлого на примере дедуктивной теории Б.Больцано (1781-1848), проведем вначале сравнительный анализ его понимания главных логических категорий в контексте идей традиционной логики.

Основное содержание дедуктивной теории Больцано мы находим в специальном разделе «О выводах» во 2-ом томе его «Наукоучения» – Wissenschaftslehere. Versuch einer ausführlichen und grösstenteil neuen Darstellung der Logik mit steter Rücksicht auf deren bisherige Bearbeiter. Sulzbach, 1837. In 4 Bände (далее WL), § 223-268, а также в некоторых его математических сочинениях. Она связана с его философско-методологическими идеями и без глубокого понимания этой связи, без учета того, что саму логику Больцано трактует как теорию изложения науки, без учета особенностей использования им логико-семантических средств естественного (немецкого) языка нельзя рассчитывать на адекватное представление и современную реконструкцию дедуктивной теории Больцано.

Всякое высказывание состоит из понятий или представлений. Представление связано с субъективным чувственным образом, но с точки зрения логики, как считает Больцано, предмет представления и понятия один и тот же. Под понятием или представлением он понимает «те составные части предложения, которые сами, однако, целого предложения не составляют». (WL I, 216).

Структуру любого повествовательного предложения Больцано предлагает выражать с помощью так называемой «стандартной формы», то есть в виде выражений «...имеет...» или «неверно (ложно), что... имеет...» Вместо многоточия слева от слова «имеет» помещается та часть предложения, в которой говорится о предмете (мысли) всего предложения. Эту часть предложения Больцано называет «субъектным представлением». Справа от слова «имеет» помещается та часть предложения, которую он называет «предикатным представлением» и которая говорит что-то о предмете предложения. Таким образом, Больцано стремится любое повествовательное предложение выразить в субъектно-предикатной форме, используя, однако, вместо традиционной связки «есть» («суть») связку «иметь».

При сведении повествовательных предложений к стандартному виду в логике Больцано большую роль играют понятия предметности *(Gegenständlichkeit)* и беспредметности представлений, а также особое употребление конкретных представлений – «конкрет» и абстрактных представлений – «абстракт». Утверждение беспредметности (пустоты, противоречивости) некоторого представления всегда равнозначно отрицанию его предметности (WL II, 401). Предметность и беспредметность являются такими характеристиками представлений или понятий, которые относятся к их логическому объему. Для того чтобы можно было судить о предметности или беспредметности некоторого представления, необходимо, чтобы оно было выражено в форме так называемой «конкреты», было конкретным представлением, то есть выражалось с помощью слов, которые обозначают предметы, но не признаки или свойства, или отношения предметов. Если взять предложение стандартной формы «А имеет b», то здесь обнаруживаются три вида представлений, исчерпывающие все составные части предложения. Прописные буквы латинского алфавита Больцано использует в этом случае для обозначения субъектных представлений предложения, для представлений об отдельном или нескольких предметах, о которых идет речь в предложении. Именно такие представления, которые обозначают реальные или мыслимые предметы, он и называет *конкретами* (WL I, 259). Относительно любой конкреты предполагается, что всегда можно решить, имеет ли она определенный объем или ее объем пуст. Строчные буквы латинского алфавита Больцано использует для обозначения предикатных представлений в предложениях. Предикатные представления приписываются в предложении субъектным или, иначе говоря, последние обладают первыми. Предикатные представления как представления о признаках реальных или мыслимых предметов он называет *абстрактами* (WL I, 260). Согласно Больцано, в отличие от конкрет установить объемы абстракт не предполагается возможным. Так, например, нельзя указать логического объема представлений «мудрый», «человечный», «красный» и т.п. Но любая абстракта может быть превращена в соответствующую ей конкрету, и наоборот. Поэтому можно установить практически объем любого представления.

Для превращения абстракт в конкреты и обратно Больцано пользуется в «Наукоучении» особенностью немецкого языка. Он образует существительные (которым в немецком языке соответствуют его конкреты) из любой знаменательной части речи с помощью суффиксов *keit* или *heit*, а также определенного артикля *das*. Исключение образуют местоимения, которые в предложении сами могут заменять существительные. Например, из абстракт «сильный», «мудрый», «бежать» он образует соответствующие конкреты: «сила», «мудрость», «бег». Вновь образованные конкреты обладают объемом и уже можно судить об их предметности или беспредметности.

Особыми абстрактами в логической теории Больцано выступают сами предметность и беспредметность как свойства любых конкрет. Они не должны, согласно Больцано, превращаться в соответствующие конкреты (например: в «предмет» и в «пустое»).

Больцано считает, что объем понятия «предмет вообще» или «пустота» не имеет каких-либо границ и практически не может быть указан. Предметность или беспредметность, употребляемые им как особые абстракты, всегда, появляясь в предложении, занимают место предикатного представления.

Метод превращения абстракт в конкреты позволяет Больцано провести отождествление понятий, входящих в субъекто-предикатную структуру предложения с их объемами, то есть с классами объектов. В этом нельзя не видеть влияния его математических исследований, предшествующих созданию теории множеств.

Третью составную часть предложения стандартного вида – представление «иметь» Больцано называет представлением об отношении. Оно само не говорит ни о предметах, ни о признаках, но «как бы принадлежит и к тем и к другим в предложении», соединяет субъектное и предикатное представление в предложении, определяет форму самого предложения и «относится целиком к логике» (WL I, 383). Вопрос о предметности или беспредметности относительно представления «иметь» является с точки зрения Больцано неправомерным.

И все же чисто лингвистический способ превращения абстракт в конкреты и обратно не вполне устраивает Больцано, так как им затруднительно пользоваться при выделении логической формы предложений. Поэтому он вводит в употребление особый термин «нечто», играющий важную роль как в преобразованиях абстракт в конкреты, так и в сведении повествовательных форм предложений к стандартному виду. Слово «нечто» как особая конкрета имеет, согласно Больцано, неопределенный (безграничный) объем. Под этим словом следует понимать универсум – мир предметов вообще или предметную область вообще, или любой (неопределенный, не конкретный) предмет вообще из этого мира. Конкрета «нечто» всегда обладает предметностью. Противоположной конкрете «нечто» является у Больцано конкрета «ничто» как отрицание первой. Конкрета «ничто» не имеет никакого объема, всегда беспредметна, имеет пустой объем.

Для того чтобы конкрета «нечто» имела определенный объем, необходимо, по мнению Больцано, научиться ограничивать эту предметную область вообще. «Задание границ» Больцано предлагает осуществлять путем выделения среди «предметов вообще» лишь тех, которые обладают некоторым определенным свойством или совокупностью их. Так, например, если из «нечто» выделить такое «нечто, которое (есть. – *Б.Ф.*) живое существо, живущее в Греции», или «нечто, которое (есть. – *Б.Ф.*) честный человек», то мы, согласно Больцано, уже имеем дело с вполне определенным объемом конкреты «нечто» (WL I, 459). Напротив, относительно конкреты «ничто» выделение какого-либо определенного непустого объема оказывается невозможным потому, что сама эта конкрета беспредметна.

Таким образом, ограничение объема «нечто» происходит за счет абстракт и относительного местоимения «который», в результате чего сама абстракта становится уже конкретой с определенным объемом. Этот же способ использования «нечто» позволяет Больцано в дальнейшем решать проблему сведения любых повествовательных предложений к стандартному виду. Добавление абстракты как некоего характеристического признака к «нечто» ограничивает объем «предмета вообще» рамками той области, на которую распространяется признак прибавляемой абстракты. При образовании конкрет из абстракт Больцано часто использует такую форму записи:

$$[\text{нечто}]\ (a + в + c + \ldots),$$

где на месте $a, в, c$, ... могут стоять различные абстракты (свойства), а заключенная в круглые скобки «сумма абстракт» означает, что из области «нечто» («предметов вообще») выделяется некоторая область, обладающая одновременно свойствами $a, в, c$, ... Таким образом, выражение [нечто] $(a + в + c + \ldots)$ превращается в «сложную» (составную) конкрету, содержание которой (как содержание представления) определяется частями $a, в, c, \ldots$, из которых она составлена. Примером подобного образования будет, например, выражение: «нечто, которое благоразумное, осторожное и нравственное». Отсюда можно образовать также равнозначное выражение, превратив, например, абстракту «благоразумное» с помощью уже отмеченного лингвистического метода в существительное – конкрету «благоразумность, которая осторожна и нравственна». Объемы обоих представлений совпадают! (см.: WL I, 441-442). Последнее представление выразилось бы следующим образом:

$$[A]\ (в + c + \ldots),$$

где A – «благоразумность», $в$ – «осторожное», c – «нравственное».

Теперь при превращении абстракт в конкреты и наоборот нет необходимости всякий раз переходить от прописных букв к строчным и наоборот, или снимать и навешивать суффиксы *keit* и *heit* на слова. Для решения этой задачи достаточно использовать представление «нечто» в качестве единственной конкреты. Все другие конкреты можно получить путем приписывания справа к представлению «нечто» соответствующей абстракты. Больцано сам в большинстве случаев использует подобный способ преобразования абстракт в конкреты.

Метод превращения абстракт в конкреты и обратно позволяет Больцано по существу двояким образом использовать предикаты (в виде собственно предикатов-абстракт и в виде конкрет как индивидных переменных). Этот метод можно сопоставить с современной проблемой, состоящей в преодолении различий между структурой предложений обычного языка и структурой их аналогов – формул в логических исчислениях.

Сам Больцано довольно часто заменяет субъектные представления, обозначаемые прописными буквами латинского алфавита *A,B,C,…*, на выражения: [нечто] *а*, [нечто] *в*, [нечто] *с*,…, считая употребление обычных предметных переменных равнозначным со специфицированной формой их употребления. Лишь записанная отдельно (без абстракт) конкрета «нечто» выступает в указанном выше смысле в роли так называемой чистой предметной переменной. Подобное употребление «нечто» Больцано использует, когда хочет сказать об универсальности некоторого предиката: «[нечто] имеет (*а* + *в* + …)» или что для него одно и то же, «всякое [нечто] имеет (*а* + *в* + …)». Приписывая к «нечто» абстракты, можно образовывать подлежащие (субъекты) суждений, а употребляя абстракты отдельно, мы получаем собственно предикаты. Обычная структура суждения получает у Больцано две основные формы выражения. Например: «[нечто] (*а* + *в* + …) имеет (*c* + *d* +…)». Здесь «чистые» абстракты, стоящие на месте предиката (после слова «иметь») образуют единый предикат как конъюнкцию свойств *а*,*в*,*c*,*d*,… Второе выражение образуется в том случае, когда место предиката занимает особая абстракта – предметность, которую можно понимать также как особый предикат – «существует». В роли же субъекта выступает аналог специфицированной переменной. Например: «[нечто] (*а* + *в* + не-*с* +…) имеет предметность». Могут употребляться также отрицания указанных выражений.

Проведем теперь «промежуточную» формализацию для представления высказываний по методу Больцано.

Формальная система Б1

N– знак конкреты «нечто»

G– знак абстракты «предметность»

a,b,c,… – знаки простых абстракт

$\in$ – знак отношения «имеет»

$\sim$ – знак внутреннего отрицания

$\urcorner$ – знак внешнего отрицания

(,) – технические знаки

Определение абстракты

1. Простая абстракта есть абстракта.
2. Если x – абстракта, то ~ x – абстракта.

Определение термина

1. Конкрета «нечто» есть термин.
2. Если $x_1, x_2, \ldots, x_k$ (где $k > 0$) – абстракты, то выражение $Nx_1, \ldots, x_k$ – термин.

Определение элементарной формулы

1. Если T – термин, $x_1, x_2, \ldots, x_k$ - абстракты, то выражение $(T \in x_1, \ldots, x_k)$ – элементарная формула.
2. Если T – термин, то выражение $(T \in G)$ – элементарная формула.

Основными объектами логики Больцано считает термины (абстракты и конкреты) и предложения (высказывания), образуемые из терминов с помощью логических констант (например, «иметь»). Стремясь к обобщению различных способов выражения суждений в естественном языке и к преодолению ограничений на «количество» субъектов и предикатов, Больцано ставит своей задачей нормализацию их путем сведения к стандартному виду, перед тем как перейти к использованию их в качестве логических форм в учении о выводе. При этом, согласно Больцано, «неправомерно отождествлять форму "Ложно, что *A* имеет *в*" с формой "*A* имеет не-*в*", поскольку при ложности "*A* имеет *в*" или *A* не является предметным представлением (т.е. пусто – *Б.Ф.*), или хотя бы одному *A* не присуще свойство *в*» (WL II, 420).

Обобщенно стандартный вид предложений имеет следующее написание:

(1) «…имеет…»

(2) «Ложно, что …имеет…»

Поскольку, за исключением предметности и беспредметности, любая абстракта может быть превращена в соответствующую конкрету, и наоборот, Больцано считает удобным использовать вместо (1) и (2) также формы:

$(1)'$ «то, что … имеет, имеет…»

$(2)'$ «Ложно, что то, что … имеет, имеет….».

В предложении стандартного вида «*A* имеет *в*», согласно Больцано, субъектное представление *A* всегда берется во всем своем объеме. Поэтому полная запись указанного предложения имеет следующий вид:

«каждое *A* имеет *в*».

Однако Больцано не употребляет всякий раз такую форму записи, а пишет просто «*А* имеет *в*».

Случаи же, когда в предложении берется лишь определенная часть конкреты, Больцано отмечает особо. Когда объем *А* точно не определен (как, например, в предложении формы: «Некоторые *А* имеют *в*»), используется выражение: «*А*, которое (есть. – *Б.Ф.*) *в*, имеет предметность», что позволяет Больцано сохранять стандартный вид:

«…имеет…»

Редукция повествовательных предложений к стандартному виду осуществляется им без формулирования каких-либо правил. В любом предложении Больцано старается выделить субъект и предикат, которые соединялись бы связкой «иметь». Когда же предикат в явном виде не обнаруживается, то его место занимает особая абстракта – предметность. Например, предложение «Если *А* есть *В*, то *С*» Больцано редуцирует в предложение «Представление о свойствах *А*, в отношении которого утверждается, что наряду со свойством *в* оно должно обладать еще и свойством *с*, имеет предметность». К стандартному виду, согласно Больцано, сводимы, например, предложения: «*А* должен», «*А* желает», «*А* существует» и т.п., которые принимают вид: «*А* имеет долженствование», «*А* имеет желание», «[нечто] *а* имеет предметность» и т.п. (WL II, 226).

Сводя различные типы повествовательных предложений к стандартному виду, Больцано считает необходимым особо выделить среди них те, которые он называет «важнейшими формами» предложений. Именно такие предложения используются им в разделе «Учение о выводах».

«К важнейшим формам предложений, – говорит Больцано, – по моему убеждению, принадлежат те, в которых выступают высказывания о самих представлениях, предложениях и об отношениях между ними. Причем представления или предложения в таких высказываниях должны рассматриваться в качестве переменных» (WL II, 393). Не приводя более конкретной причины и критерия выделения «важнейших форм» предложений стандартного вида, он предлагает учитывать в своем учении о выводах лишь следующие.

I. «*А* имеет *в*».
II. «Ложно, что *А* имеет *в*».
III. «Представление [нечто] (*а* + *в* + *с* + …) имеет предметность».
IV. «Представление о единственном представлении *А* имеет предметность».

V. «Представление о нескольких представлениях *A* имеет предметность».

VI. «Представление об *n* представлениях *A* имеет предметность».

VII. «Представления *A,B,C,...* имеют свойство находиться в отношении... (совместимости, несовместимости, подчинения и т.д.)».

VIII. «Предложения *A,B,C,...* имеют свойство быть в отношении совместимости» (или – *A,B,C,...* – совместимы)».

IX. «Предложения *A,B,C,...* имеют свойство быть выводимыми из предложений *M,N,O,...*»

X. «Предложения *A,B,C*, и *M,N,O,...* находятся в отношении равнозначности».

XI. «Предложения *A,B,C,...* находятся в отношении противоречия».

XII. «Представление об истинных (ложных) предложениях среди предложений *A,B,C,...* имеет предметность».

XIII. «Предложение *M* имеет свойство с вероятностью *n* выводиться из предложений *A,B,C,...*».

Больцано считает, что можно использовать также отрицание каждой из указанных форм. В этом случае отрицание формы II, согласно ему, совпадает с формой I.

Рассмотрим, например, основные свойства форм: (I) – «*A* имеет *в*», (II) – «Ложно, что *A* имеет *в*» и (III) – «Представление [нечто] (*a* + *в* + *c* +...) имеет предметность», в которых, как частный случай, выразимы все силлогистические выводы «прежней» логики. Субъектные представления в (I) и (II) берутся во всем своем объеме, то есть субъект здесь всегда распределен. Объем предложения, согласно Больцано, полностью определяется объемом субъектного представления и «если последний есть беспредметное представление, то и предложение не имеет никакого предмета, о котором в нем идет речь» (WL II, 25). Таким образом, суждения вида (I) и (II) предполагают экзистенциальную трактовку, так как требуют для своей истинности непустоты или предметности субъекта. Он считает, что по сравнению с «прежней» логикой его способ редукции предложений к стандартному виду позволяет преодолеть неопределенность в объеме субъекта частных суждений. Например, суждение «некоторые люди смертны» Больцано записывает в соответствии с (III): «(каждое) представление о людях, которые смертны, имеет предметность».

В отличие от субъекта, предикат в (I) и (II) не распределен. Представление, стоящее на месте предиката, никогда не берется во всем своем объеме. Так как отрицание Больцано относит не к связке «иметь», а к предикату, то общеотрицательное суждение «прежней» логики «Все *S* не суть *P*» он интерпретирует как «Всякое S суть не-P». Но в таком случае предикат «не-P» нельзя считать распределенным.

Рассмотрим зависимость между «предметностью» терминов и истинностью предложения. Предложение вида (I) истинно только тогда, когда предметному субъектному представлению A присуще свойство, обозначаемое предикатным представлением *в*. Ложным предложение вида (I) оказывается в том случае, когда субъектное представление оказывается беспредметным, то есть пустым, или когда предметному представлению A не присуще свойство, обозначаемое предикатным представлением *в*. Легко видеть, что когда предложение вида (I) истинно, тогда ложно предложение вида (II), и наоборот. Если предложение вида (I) истинно, то его субъектное представление A имеет предметность (не является пустым по своему объему). Очевидно, предложение вида (III) истинно, когда никакое сочетание (*а* + *в* + *с* +...) с «нечто» не дает беспредметную конкрету. В противном случае (III) – ложно. «Если истинно предложение "A имеет *в*", то истинным будет и предложение "A, которое *в*, имеет предметность" или "представление об A, которое обладает свойством *в*, имеет предметность" (WL II, 400). Указанная зависимость между предложениями, которым можно поставить в соответствие общеутвердительную и частноутвердительную формы суждений «прежней», по выражению Больцано, логики («Все S суть P», «Некоторые S суть P»), выступает «экзистенциальной предпосылкой» логической теории Больцано. В интерпретированной Я.Лукасевичем аристотелевской силлогистике выражение «некоторые S суть S» выступает в качестве аксиомы лишь при условии, что на место S следует подставлять непустые термины. Указанная аксиома выражает «экзистенциальную предпосылку» логики Аристотеля и позволяет получать вывод суждения «некоторые S суть P» из суждения «все S суть P».

У Больцано же общезначимой следует считать не форму «некоторые S суть S», но «если все S суть P, то некоторые S суть P», поскольку он допускает в своей логической системе беспредметные представления (пустые термины). Если в выражении «некоторые S суть S» вместо переменной S подставить беспредметное представление (что допустимо в логике Больцано), то в соответствии с рассмотренными условиями истинности, образуется ложное предложение. Но, с другой стороны, из этих условий истинности вытекает, что всякое истинное предложение не включает в свой состав пустых, беспредметных представлений. Поэтому выражение «все S суть P» истинно в том случае, когда на месте S стоит предметное представление, то есть когда имеется по крайней мере один предмет «S», который одновременно есть «P», поскольку все S суть P. В этом случае, если истинно предложение «все S суть P», истинным будет и предложение «некоторые S суть P». Отличие экзистенциальных предпосылок и способа выражения общеотрицательного суждения у Больцано и Аристотеля приводит к тому, что из 24 модусов аристотелевской силлогистики в логике Больцано оказываются «правильными» только 22.

Истинное суждение, согласно Больцано, не должно включать в свой состав беспредметных представлений «Обе части *А* и *в* в истинном предложении всегда должны быть предметными представлениями» (WL II, 17). Очевидно, здесь достаточно уже лишь требования непустоты субъекта. Если предикат – беспредметное представление, то по экзистенциальной предпосылке образуется противоречивое, а следовательно беспредметное, согласно Больцано, субъектное представление. Например, из выражения «человек имеет всемогущность» образуется ложное предложение «представление о человеке, который всемогущ, имеет предметность», поскольку у Больцано предикат «всемогущность» может приписываться только «богу» и субъект оказывается беспредметным. Таким образом, общие суждения получают у Больцано экзистенциальную трактовку.

Используя формальную систему Б1, введем определение формулы, чтобы выразить с его помощью первые три «важнейшие формы» предложений логики Больцано.

Определение формулы

1. Элементарная формула есть формула.
2. Если А – формула, то $\urcorner$А – формула.

Предложения формы: I, II, III логики Больцано получают следующую запись в Б1.

$$\text{I} - (\text{T} \in x_1 \ldots x_k)$$
$$\text{II} - \urcorner(\text{T} \in x_1 \ldots x_k)$$
$$\text{III} - (\text{N}\ x_1 \ldots x_k \in \text{G}).$$

Остановим теперь внимание на правилах вывода, которые использует Больцано в своей дедуктивной теории. Понятие вывода и доказательства можно встретить в различных его сочинениях. Общим в них является положенное в основу отношение выводимости (Ableitbarkeit).

Если рассмотрение в аспекте отношения выводимости предложений *A*,*B*,... и некоторого предложения *C*, согласно Больцано, приводит к тому, что из истинности *A*,*B*,... усматривается истинность *C*, а истинность *D*,*E*,... приводит к истинности *F* и так далее; затем, если рассмотрение предложений *C*, *E*,... приводит к истинности предложения *H*, а рассмотрение предложений *F*, *J*, ... приводит к суждению K и так далее; наконец, если рассмотрение предложений $H,K,L,\ldots$ должно привести к суждению M, к которому мы стремимся при построении доказательства, то мы можем назвать доказательством суждения M не только совокупность всех предложений $A,B,C,\ D,E,\ldots\ K,L,\ldots$, но также отдельно взятые предложения $A,B,\ldots$ доказательством суждения C; предложения $D,E,\ldots$ доказательством суждения F и так далее. Такое доказательство, которое содержит в себе другие доказательства в качестве своей части, Больцано называет *составным*, а в противном случае *простым*. Предложения $A,B,\ D,E,G,\ldots$, которые выше рассматривались (сами) без доказательства, он считает правильным называть *началами, предпосылками, посылками* или *допущениями* данного доказательства. Остальные предложения, например, такие как $C,F,\ldots$ Больцано называет *промежуточными*, а само предложение M *заключением* данного доказательства (см.: WL, IV, 458).

В любом доказательстве Больцано считает необходимым, во-первых, ясно осознать те предположения, из которых должно строиться доказательство, и, во-вторых, все типы (правила) выводов, по которым оно строится. «Никакие заключения не могут быть получены из своих посылок без предварительного знания самих правил, по которым образуется каждый конкретный вывод. Поэтому еще недостаточно указать истинные суждения $A,\ B,\ C,\ D,\ldots$, чтобы достичь знания об истинности некоторого суждения M» (WL III, 128). Таким образом, правила, в которых должны описываться зависимости в аспекте отношения выводимости между доказываемым утверждением и допущениями, составляют у Больцано основу доказательства.

Слово «вывод» выступает у него в двух значениях. С одной стороны, он часто использует это слово для обозначения самого перехода от опосредующих суждений к опосредованному суждению. «Если причина появления суждения M лежит в появлении суждений $A,B,C,\ldots$, то я назову суждение M обусловленным, а последние обусловливающими суждение M… Часто действия, которые приводят к получению суждения M из суждений $A,B,C,\ldots$ называют *заключением* или *выводом*; наконец, если в принятии за истинные $A,B,C,\ldots$ лежит причина принятия за истинное суждение M, то этот переход мы называем *выводной способностью*» (WL III, 123).

С другой стороны, слово «вывод» Больцано употребляет для высказываний об отношении выводимости в собственном смысле. «*Выводом* мы назовем всякое выражение, подчиненное форме: "Каждая совокупность представлений, которая на месте $i,j,\ldots$, включенных в качестве варьируемых (переменных. – *Б.Ф.*) в предложения *A,B,C,...*, *M,N,O,...*, делает истинными предложения *A,B,C,...*, делает истинными и предложения *M,N,O,...*"» (WL II, 540). Но принятие посылок за истинные, согласно Больцано, еще не гарантирует с необходимостью получения истинного заключения. Нужно, чтобы заключение находилось к посылкам действительно в отношении *выводимости* или *точной выводимости*[1]. А для этого, как считает Больцано, «зависимость между ними должна подпадать под одно из правил вывода, которое само есть выражение отношения выводимости и не касается ничего другого, как только *формы* участвующих в выводе предложений» (WL III, 127).

Как же образуются сами правила вывода, составляющие, как можно было заметить, основу дедуктивной теории Больцано? Беря различные сочетания из одной, двух, трех и более важнейших форм I–XIII или отрицания этих форм и используя понятия логической или точной выводимости, Больцано получает с их помощью ту или иную из указанных выше форм или их отрицаний в качестве заключения. Таким образом, он получает в своем учении о выводе огромное количество правил. «В этом случае, – говорит Больцано, – речь уже будет идти не о конкретных выводах, но о формах вывода (о правилах, по которым уже должен образоваться конкретный вывод» (WL II, 394).

Обоснование «правильности» выбираемой комбинации важнейших форм в качестве посылок или заключений в правилах вывода Больцано проводит чаще всего путем разбора соответствующих содержательных примеров. В то же время он использует и «логические критерии» отбора – это требование *совместимости* посылок в правиле как следствие из определения отношения выводимости. В отдельных случаях он использует также требование независимости посылок, когда между посылками и заключениями можно обнаружить отношение точной выводимости. Однако правила для точной выводимости он специально не рассматривает.

В разделе «О выводах» Больцано не рассматривает *все* (хотя бы только «правильные») выводы, которые можно получить из комбинаций одной, двух, трех и т.д. важнейших форм. И все же число проанализированных им правил достаточно велико – 437! Очевидно, Больцано не ставил своей целью обсудить в «Наукоучении» все правила, но лишь стремился изложить детально сам метод образования таких правил, основывая его на использовании отношения выводимости относительно сочетаний важнейших

---

[1] См.: *Федоров Б.И.* Логика Бернарда Больцано. С. 78-81.

форм предложений стандартного вида I–XIII. Анализ данного метода показывает, что в логико-дедуктивной теории Больцано легко конструируются «новые» правила вывода, о которых не упоминается в «Наукоучении». Среди большого числа рассматриваемых правил вывода Больцано иногда обращает внимание читателя на правила, с помощью которых могут обосновываться другие правила. Обнаруживается, таким образом, как бы подразделение правил вывода на *основные* и *производные*, хотя сам Больцано не говорит о таком подразделении. Во всяком случае, оно не проводится в «Наукоучении» систематически. Отсутствие формализованного языка в его логической теории затрудняет обзор всей системы правил в целом и осложняет решение проблемы их строгого разделения на основные и производные.

В своей дедуктивной теории Больцано впервые в общем виде определил зависимость правил вывода от логических констант, входящих в предложения стандартной формы I–XIII, или их отрицания. Здесь же он выясняет точный смысл ряда констант, таких, например, как «иметь», «равно», «больше», «меньше», и других.

На основе развиваемой в «Наукоучении» дедуктивной теории Больцано пересматривает представления о выводе в «прежней» логике. Так, например, он считает излишним деление выводов на непосредственные и опосредованные. «Теперь любое число предложений *A,B,C,…*, совместимых между собой, можно рассматривать в качестве посылок, а любое число предложений M,N,O,…, становящихся истинными всякий раз, как только истинными становятся первые, можно рассматривать в качестве заключений» (WL II, 540). Нельзя признать правильной, согласно Больцано, и точку зрения традиционной логики, согласно которой выводы в сложных умозаключениях, содержащих более двух посылок, можно получать лишь многократным применением силлогизма. Возражает он и против того положения, что «заключения должны иметь всегда только два термина, полученных из посылок». В соответствии с его пониманием отношения выводимости, посылки и заключения могут иметь любое число терминов. Больцано не делит выводы на категорические, гипотетические, дизъюнктивные и т.п. Он глубоко убежден, что силлогистикой не исчерпываются типы дедуктивных выводов. Он ставит перед собой задачу создать такую дедуктивную теорию, которая не только включала бы в себя прежнюю силлогистику, но и другие выходящие за ее рамки дедуктивные умозаключения. Система правил вывода у Больцано, как будет показано дальше, уже при использовании лишь двух «важнейших форм» I и III действительно позволяет рассматривать силлогистические умозаключения в качестве частных случаев его логико-дедуктивной теории.

В предлагаемой нами реконструкции (формальная система Б1) основные правила вывода для «важнейших форм» I-III дедуктивной теории Больцано получают следующее выражение.

Основные правила Б1

α,β,γ – обозначают списки абстракт (возможно пустые) δ,ε – непустые списки абстракт. Указанные списки не содержат специальной абстракты G– «предметность».

П1. $\begin{array}{c} (N\alpha \in \beta x_1, x_2\gamma) \\ \hline\hline (N\alpha \in \beta x_2, x_1\gamma) \end{array}$ П2. $\begin{array}{c} (N\alpha \in \delta)\,(N\delta \in \varepsilon) \\ \hline (N\alpha \in \varepsilon) \end{array}$

П3. $\begin{array}{c} (N\beta \in \delta) \\ \hline (N\alpha\beta\delta \in G) \end{array}$ П4. $\begin{array}{c} (N\alpha\delta\beta \in G) \\ \hline (N\alpha\beta \in G) \end{array}$ П5. $\begin{array}{c} (N\alpha\delta\beta \in G) \\ \hline (N\alpha\delta\beta \in \delta) \end{array}$

П6. $\begin{array}{c} (Nx_1 \in x_{k+1})\ldots(Nx_k \in x_{r+k})\,(Nx_1\ldots x_k \in G) \\ \hline (Nx_1\ldots x_r \in x_{r+1}\ldots x_{r+k}) \end{array}$

П7. $\begin{array}{c} (N\alpha \in \beta x_1\delta) \\ \hline\hline (N\alpha \in \beta \sim\sim x_1\delta) \end{array}$ П8. $\begin{array}{c} (N\alpha \in \delta\beta) \\ \hline (N\alpha \in \beta\,) \end{array}$

П9. $\begin{array}{c} (N\alpha\beta \in x_1) \\ \hline \urcorner(N\alpha \sim x_1\beta \in G) \end{array}$ П10. $\begin{array}{c} \urcorner(N\alpha x_1\beta \in G)\,(N\alpha\beta \in G) \\ \hline (N\alpha\beta \in x_1) \end{array}$

Все правила вывода в своей логико-дедуктивной теории Больцано формулирует как правила прямого вывода заключения из посылок. Именно этими правилами он предлагает пользоваться при построении доказательств в «учебниках» науки в первую очередь. Вряд ли можно думать, что такой крупный математик и логик, каким был Больцано, не понимал определенных преимуществ от использования непрямых (косвенных) методов доказательства.

Очевидно, ориентацию Больцано на прямые методы доказательства в науке можно объяснить лишь его общим философско-методологическим замыслом представления логики как наукоучения. Интересно заметить, что сам Больцано ни в одной своей работе так и не дал примера построения науки с использованием только прямых выводов.

Указанные мысли Больцано можно воплотить в добавлении к формальной системе Б1 двух основных правил

П11. $\dfrac{\neg\neg A}{A}$

П12. $\begin{array}{c} A_k \\ \vdots \\ B \\ \vdots \\ \neg B \\ \hline \neg A_k \end{array}$

Правила вывода, построенные на основе использования «важнейших форм» I–XIII, составляют практическую основу (инструмент) для образования конкретных выводов и доказательств, с которыми, по мнению Больцано, мы постоянно сталкиваемся при написании научных учебников, при обосновании главных и вспомогательных научных положений. Но, все же, составляя основу некоторого конкретного вывода, каждое правило в отдельности не может характеризовать полностью логический вывод вообще. Иначе говоря, само правило не заменяет понятия логического вывода, в котором для Больцано должно раскрываться отношение выводимости. Отношение выводимости в каждом конкретном правиле из форм I–XIII носит ограниченный характер, так как зависит от конкретного сочетания посылок и заключений указанных форм. Лишь высказывания об отношении выводимости между совокупностями предложений (между посылками и заключениями) независимо от формы этих предложений, учитывающие лишь их истинностные значения, позволяют, согласно Больцано, раскрыть сущность логического вывода вообще. Эти высказывания, как отмечалось выше, Больцано часто называет словом «вывод». К числу их следует отнести все те содержательные описания свойств выводимости, которые рассматриваются в «Наукоучении». Из числа этих свойств Больцано выделяет главное, которому должен подчиняться любой логический вывод. Свойство это составляет самую суть отношения выводимости и должно лежать в основе любого доказательного вывода. Речь идет о своеобразном содержательном аналоге «дедукционной теоремы». «Если посылки *A,B,C,…* рассматриваются вместе с предложениями *M,N,O,…* и из этой совокупности выводимы *P,Q,R,…*, то мы можем сказать, что предложения *P,Q,R,…*, становятся истинными всякий раз, как только истинными становятся все *A,B,C,…* и все *M,N,O,…* Мы можем, следовательно, утверждать гипотетическое суждение в качестве заключения из предложений *A,B,C,…*: если есть истинные *M,N,O,…*, то истинны и *P,Q,R,…* Каждая совокупность представлений, которая делает истинными (при замене переменных на постоянные. – *Б.Ф.*) все *A,B,C,…*, делает истинным и предложение о том, что каждая совокупность представлений, которая делает истинными все $M,N,O,\ldots$, делает истинными и все $P,Q,R,\ldots$ Таким образом, из любого вывода с n посылками можно образовать другой вывод с (n-1), (n-2) и даже с одной посылкой. Так, например, из посылок "A есть B" и "B есть C" выводимо заключение "A есть C". Но было бы справедливым также из одной посылки "A есть B" получить заключение ""Если "B есть C", то "A есть C"". И даже если вывод $P,Q,R,\ldots$ из совокупности $A,B,C,\ldots$, $M,N,O,\ldots$ был бы *точным*, то таковым был бы и другой» (WL II, 397).

Воспользуемся теперь выразительными средствами языка современной логики для интерпретации, уточнения и окончательной формальной реконструкции дедуктивной теории Больцано.

Построение **формальной системы B_0** будет опираться на первопорядковую логику предикатов.

Исходный базис B_0

$A, в, c, \ldots$	– индивидные или предметные константы;
$X, y, z, \ldots$	– индивидные или предметные переменные;
$P^n, Q^n, R^n, \ldots$	– n-местные предикаторные константы;
$S, S_1, \ldots, T, T_1, \ldots$	– символы пропозициональных переменных;
$\forall, \exists$	– кванторные символы;
V	– символ универсума рассуждений;
$\varnothing$	– символ пустого множества;
$\rceil, \&, \vee, \supset, \equiv, \#$	– символы пропозициональных связок;
$\vdash$	– символ отношения выводимости;
И, Л	– символы значений: «истина», «ложь»;
$=, \neq, >, \subseteq, \in, \cap, \cup$	– символы математических отношений.

***Определение терма*:**

1. Произвольная предметная (индивидная) константа есть терм.
2. Произвольная индивидная переменная есть терм.
3. Никаких иных термов нет.

***Определение элементарной формулы*:**

1. Если Φ – n-местная предикаторная константа, а $t_1 \ldots t_n$ – термы (где n>O), то выражение $\Phi^n(t_1 \ldots t_n)$ – элементарная формула.

2. Если $\rceil\Phi$ – n-местная предикаторная константа, то выражение $\rceil\Phi^n(t_1 \ldots t_n)$ – элементарная формула.

3. Если Φ_i и Φj различные n-местные предикаторные константы, то выражения: $(\Phi_i{=}\Phi j)$, $(\Phi_i{\neq}\Phi j)$, $(\Phi_i > \Phi j)$, $(\Phi_i \cap \Phi j)$, $(\Phi_i \cup \Phi j)$ – элементарные формулы.

4. Если Φ – n-местная предикаторная константа, а V – универсум (непустое множество) рассуждений, то выражения: $(\Phi \in V)$,

$(V \in \Phi)$, $(\Phi = V)$, $(\Phi \subseteq V)$, $(\Phi \cap V)$, $(\Phi \cup V)$ – элементарные формулы.

5. Произвольная пропозициональная переменная есть элементарная формула.

***Определение формулы*:**

1. Элементарная формула есть формула.

2. Если A – формула, то $\rceil A$ – формула.

3. Если A, B – формулы, то выражения: $(A \,\&\, B)$, $(A \vee B)$, $(A \supset B)$, $(A \equiv B)$ – формулы.

4. Если α – универсальная переменная, то выражения $\forall \alpha\, A$ и $\exists\, \alpha A$ – формулы.

***Определение числовых кванторов*:**

1. $\exists_1 xP(x)$ = опр.$\exists\, xP(x)$ означает: существует *не меньше, чем* один x такой, что $P(x)$.

2. $\exists^1 xP(x)$= опр.$\rceil\, \exists_1\, x\, (P(x)\ \&\ \exists_1\, y(P(y)\ \&\ (y \neq x)))$ означает: существует *не больше, чем* один x такой, что $P(x)$.

3. $\exists^1{}_1\ xP(x)$ = опр.$\exists_1\, x\ P(x)\ \&\ \exists^1\ x\ P(x)$ означает: существует *точно один* x такой, что $P(x)$.

4. $\exists^n{}_n\ xP(x)$ = опр.$\exists^1{}_1\, x\ (P(x)\ \&\ \exists^{n-1}{}_{n-1}\, y\ (P(y)\ \&\ (y \neq x)))$ означает: существует *точно n* объектов x таких, что $P(x)$.

***Выражение важнейших форм* I–VI *предложений стандартного вида в языке* B_0.**

I – «*A* имеет *в*» = опр.$\forall\ x(P(x) \supset Q(x))$.

II – «Ложно, что *A* имеет *в*» = опр. $\forall\ x \rceil (P(x) \supset Q(x))$.

III – «Представление [нечто] (*а* + *в* + *с* +...) имеет предметность» = опр. $\exists x\ (P(x)\ \&\ Q(x)\ \&\ldots\&\ R(x))$.

IV – «Представление о единственном представлении *A* имеет предметность = опр. $\exists^1{}_1\ x\ P(x)$.

V – «Представление о нескольких представлениях *A* имеет предметность» = опр. $\exists_1\ x\ P(x)$.

VI – «Представление об *n* представлениях *A* имеет предметность» = опр.$\exists^n{}_n\ xP(x)$.

Анализ «правильных» правил вывода, полученных Больцано в разделе «О выводах», показывает, что некоторые из них оказываются такими, что могут быть использованы при обосновании правильности других (производных).

Выделяя в разделе «О выводах» те комбинации «важнейших» стандартных форм, которые могут играть роль *основных* по отношению к другим комбинациям, мы предлагаем следующее их обобщенное выражение в формальной системе $\boldsymbol{B_0}$.

Основные правила вывода B_0[2]

P1 (ср.: WL II, 401)

$$\frac{\forall\alpha(\Phi(\alpha) \supset (\Phi_i(\alpha) \ \& \ \Phi_j(\alpha))}{\forall\alpha(\Phi(\alpha) \supset (\Phi_j(\alpha) \ \& \ \Phi_i(\alpha))}$$

P2 (ср.: WL II, 412-419)

$$\frac{\forall\alpha(\Phi(\alpha) \supset (\Phi_1(\alpha) \& \ldots \& \Phi_m(\alpha))), \forall\alpha((\Phi_1(\alpha) \& \ldots \& (\Phi_m(\alpha)) \supset (\Phi_{m+1}(\alpha) \& \ldots \&_n \Phi_n(\alpha))}{\forall\alpha(\Phi(\alpha) \supset (\Phi_{m+1}(\alpha) \& \ldots \& \Phi_n(\alpha)))}$$

P3 (ср.: WL II, 399)

$$\frac{\forall\alpha(\Phi(\alpha) \supset (\Phi_1(\alpha) \& \ldots \& \Phi_m(\alpha)))}{\exists\alpha(\Phi(\alpha) \& (\Phi_1(\alpha)) \& \ldots \& (\Phi_m(\alpha)))}$$

P4 (ср.: WL II, 428; 452)

$$\frac{\exists\alpha(\Phi_1(\alpha) \& \ldots \& \Phi_m(\alpha))}{\exists\alpha(\Phi_1(\alpha) \& \ldots \& \Phi_{m-1}(\alpha))}$$

P5 (ср[illegible]WL II, 430)

$$\frac{\exists [illegible] \alpha) \& \ldots \& (\Phi_i(\alpha)) \& \ldots \& \Phi_m(\alpha))}{[illegible]_1(\alpha) \& \ldots \& (\Phi_i(\alpha) \& \ldots \& \Phi_m(\alpha) \supset \Phi_i(\alpha))}$$

[illegible]6 (ср.: WL II, 411; 416; 418; 440)

$$\frac{\forall\alpha((\Phi_1(\alpha) \supset \Phi_{m+1}(\alpha)) \ldots (\Phi_m(\alpha) \supset \Phi_{m+n}(\alpha))), \exists\alpha(\Phi_1(\alpha) \& \ldots \& \Phi_m(\alpha))}{\forall\alpha((\Phi_1(\alpha) \& \ldots \& \Phi_m(\alpha)) \supset (\Phi_{m+1}(\alpha) \& \ldots \& \Phi_{m+n}(\alpha)))}$$

P7 (ср.: WL II, 398)

$$\begin{array}{l} \forall\alpha(\Phi(\alpha) \supset (\Phi(\alpha)) \\ \hline\hline \forall\alpha(\Phi(\alpha) \supset \neg\neg\Phi_i(\alpha)) \end{array}$$

P8 (ср.: WL II, 453)

$$\frac{\forall\alpha(\Phi(\alpha) \supset \Phi_1(\alpha) \& \ldots \& \Phi_{i-1}(\alpha) \& \Phi_i(\alpha) \& \Phi_{i+1}(\alpha) \& \ldots \& \Phi_m(\alpha)))}{\forall\alpha(\Phi(\alpha) \supset (\Phi_1(\alpha) \& \ldots \& \Phi_{i-1}(\alpha) \& \Phi_{i+1}(\alpha) \& \ldots \& \Phi_m(\alpha)))}$$

P9 (ср.: WL II, 399)

$$\frac{\forall\alpha(\Phi(\alpha) \supset \Phi_i(\alpha))}{\neg\exists\alpha(\Phi(\alpha) \& \neg\Phi_i(\alpha))}$$

P10 (ср.: WL II, 453)

$$\frac{\neg\exists\alpha(\Phi(\alpha) \& \Phi_i(\alpha)), \exists\alpha\Phi(\alpha)}{\forall\alpha(\Phi(\alpha) \supset \neg\Phi_i(\alpha))}$$

P11 (ср.: WL II, 406-407)

$$\begin{array}{c} \forall\alpha(\Phi_i(\alpha) \supset \Phi_j(\alpha)), \forall\alpha(\Phi_j(\alpha) \supset \Phi_i(\alpha)) \\ \hline\hline \Phi_i = \Phi_j \end{array}$$

---

[2] Двойная черта в правиле вывода означает возможность перехода как от формул, записанных над ней, к формулам, записанным под ней, так и наоборот.

P11 (ср.: WL II, 406-407)

$$\frac{\forall\alpha(\Phi_i(\alpha)\supset\Phi_j(\alpha)),\ \forall\alpha(\Phi_j(\alpha)\supset\Phi_i(\alpha))}{\Phi_i=\Phi_j}$$

P12 (ср.: WL II, 423)

$$\frac{\forall\alpha(\Phi_i(\alpha)\supset\Phi_j(\alpha)),\ \forall\alpha\urcorner(\Phi_j(\alpha)\supset\Phi_i(\alpha))}{\Phi_i<\Phi_j}$$

P13 (ср.: WL II, 459)

$$\frac{\exists^1{}_1\alpha(\Phi_1(\alpha)\ \&\ldots\&\ \Phi_m(\alpha))}{\exists\alpha(\urcorner\Phi_1(\alpha)\ \&\ldots\&\urcorner\Phi_m(\alpha))}$$

P14 (ср.: WL II, 460)

$$\frac{\forall\alpha((\Phi_1(\alpha)\&\ldots\&\Phi_m(\alpha)\supset\Phi_{m+1}(\alpha)),\exists^1{}_1\Phi_{m+1}(\alpha)}{\exists^1{}_1\alpha(\Phi_1(\alpha)\ \&\ldots\&\ \Phi_m(\alpha))}$$

P15 (ср.: WL II, 461)

$$\frac{\exists^n{}_n\alpha\,\Phi(\alpha),\ \forall\alpha\urcorner(\Phi(\alpha)\supset\Phi_i(\alpha))}{\forall\alpha\ (\Phi(\alpha)\supset\urcorner\Phi_i(\alpha))}$$

P16 (ср.: WL II, 466)

$$\frac{\exists^n{}_n\alpha(\Phi_1(\alpha)\ \&\ldots\&\ \Phi_{m+1}(\alpha)\ \&\ \Phi_{m+1}(\alpha))\forall\alpha((\Phi_1(\alpha)\&\ldots\&\Phi_m(\alpha))\supset\Phi_{m+1}(\alpha))}{\exists^n{}_n\alpha(\Phi_1(\alpha)\ \&\ldots\&\ \Phi_m(\alpha))}$$

P17 (ср.: WL II, 128; 398)

$$\frac{\urcorner\urcorner A}{A}$$

P18 (ср.: WL II, 277)

$$\begin{array}{c} A_i \\ \vdots \\ B \\ \vdots \\ \urcorner B \\ \vdots \\ \urcorner B \\ \hline \urcorner A_i \end{array}$$

Нетрудно заметить, что первые десять основных правил вывода P1-P10 формальной системы $\boldsymbol{B_0}$ обобщают «промежуточный» формализм Б1 в виде правил вывода П1-П10, а правила П11 и П12 совпадают соответственно с правилами P17 и P18.

Определение вывода из допущений в B_0

Пусть $A_1...A_n$ не содержащий повторений список формул. Тогда последовательность формул $B_1...B_m$ называется *выводом из допущений* $A_1...A_n$, если каждая формула B_i ($i \leq m$) либо принадлежит списку $A_1...A_n$, либо получена из предшествующих формул по одному из основных правил $\boldsymbol{B_0}$ и в правиле P18 выражение A_i есть одна из формул $A_1...A_n$.

Будем считать, что в выводе $B_1...B_m$ из допущений $A_1...A_n$ формула B_j ($j \leq m$) *зависит от допущения* A_l ($l \leq n$), если B_j есть A_l или если B_i($i < j$) зависит от A_l и B_j получена из B_i (или из B_i и некоторой B_{i1} в любом порядке) по одному из правил P1–P17.

Правило P18, выражающее метод «приведения к абсурду», применяется следующим образом: если в ходе построения вывода из допущений $A_1...A_n$ в уже построенной его части, содержащей допущение A_i, имеются формулы B и $\rceil B$, из которых по крайней мере *одна зависит* от A_i, то построенную часть вывода можно продолжить, присоединив к ней в качестве следующей строки формулу $\rceil A_i$.

Определение ограниченного вывода

Последовательность формул $B_1...B_m$ *называется ограниченным выводом* из допущений $A_1...A_n$, если она есть вывод из допущений, в котором правило P18 применяется к формулам A_i($i \leq n$), B и $\rceil B$ лишь при условии, что B или $\rceil B$ *зависит от* A_i.

Определение заключения из посылок

Формула B называется *заключением* (следствием) из посылок $A_1...A_k$, если можно построить такой ограниченный вывод из допущений $A_1...A_n$ ($k \leq n$), что в списке формул $A_1...A_n$ наряду с $A_1...A_k$ содержатся все формулы, отрицания которых включены в вывод как результат применения правила P18, и B есть последняя формула этого ограниченного вывода.

Относительно предлагаемой формальной системы $\boldsymbol{B_0}$ доказуема ее полнота и непротиворечивость.

Для доказательства *полноты* и *непротиворечивости* системы $\boldsymbol{B_0}$ дадим интерпретацию ее основных элементов в алгебре множеств.

$\Phi, \Phi_1, ..., \Phi_m$ сопоставим $\Phi', \Phi'_1, ..., \Phi'_m$ – подмножества V.

$\alpha, \alpha_1, \alpha_2, ...$ сопоставим $\alpha', \alpha'_1, \alpha'_2$ – переменные с областью значений $\Phi', \Phi'_1, ..., \Phi'_m, ... \rceil \Phi', \rceil \Phi'_1, ..., \rceil \Phi'_m$, где $\rceil \Phi'_i = V - \Phi'_i$ то есть множество таких элементов V, которые не принадлежат Φ'_i.

$(\Phi_1(\alpha) \& ... \& \Phi_m(\alpha))$ сопоставим $V \cap \Phi'_i \cap ... \cap \Phi'_m$

$(\Phi(\alpha) \supset \Phi_1(\alpha) \& ... \& \Phi_m(\alpha))$ сопоставим $\varnothing \neq V \cap \Phi' \subseteq \Phi'_i \cap ... \cap \Phi'_m$

$\exists \alpha \, \Phi(\alpha)$ сопоставим $\Phi' \neq \varnothing$, $\forall \alpha \, \Phi(\alpha)$ сопоставим $\Phi' = V$.

Предложенная интерпретация позволяет перевести основные правила P1–P16 формальной системы $\boldsymbol{B_0}$ в форму алгебры множеств. Доказательства правильности переводов тривиальны. Покажем это на примере P6.

$$\frac{(V\cap\Phi'_1\subseteq\Phi'_{m+1})\ldots(V\cap\Phi'_m\subseteq\Phi'_{m+n})((V\cap\Phi'_1\cap\ldots\cap\Phi'_m)\neq\varnothing)}{(V\cap\Phi'_1\cap\ldots\cap\Phi'_m)\subseteq(\Phi'_{m+1}\cap\ldots\cap\Phi'_{m+n})}$$

В алгебре множеств известно, что $\Phi'_1\cap\ldots\cap\Phi'_m\subseteq\Phi'_i$ (где $1\leq i\leq m$). Тогда из $\Phi'_1\cap\ldots\cap\Phi'_m\neq\varnothing$ и $\varnothing\neq\Phi'_i\subseteq\Phi'_{m+n}$ следует $\varnothing\neq\Phi'_1\cap\ldots\cap\Phi'_m\subseteq\Phi'_{m+n}$ для всех i. Следовательно, $\varnothing\neq\Phi'_1{}_1\cap\ldots\cap\Phi'_m\subseteq\Phi'_{m+1}\cap\ldots\cap\Phi'_{m+n}$.

Интерпретируя $\rceil$ для основных правил P17 и РП18 как пропозициональное отрицание в классическом исчислении высказываний, можем считать их доказуемыми в исчислении высказываний правилами вывода.

Проведенная интерпретация позволяет каждому правилу вывода в $\boldsymbol{B_0}$ сопоставить вывод в алгебре множеств, предполагая классическое исчисление высказываний в качестве ее логической базы.

Как показатель непротиворечивости в алгебре множеств недоказуемо правило

$$\frac{\Phi'_1\cap\Phi'_2\neq\varnothing}{\varnothing\neq\Phi'_1\subseteq\Phi'_2},$$

которому в B_0 соответствует правило:

$$\frac{\exists\,\alpha\,(\Phi_1\,(\alpha)\;\&\;\Phi_2\,(\alpha)),}{\forall\,\alpha\,(\Phi_1\,(\alpha)\supset\Phi_2\,(\alpha))}$$

Если недоказуемо первое (а это так!), то недоказуемо и второе.

В формальной системе $\boldsymbol{B_0}$ могут быть адекватным образом представлены и доказаны в качестве производных 395 содержательных правил вывода, которые Больцано образует из комбинации важнейших форм I–VI предложений стандартного вида.

Количество правил вывода, которые Больцано сформулировал содержательным языком и проанализировал в разделе «О выводах», используя комбинации важнейших форм I–XIII предложений стандартного вида и их отрицаний, весьма велико. В связи с этим возникает естественный вопрос, почему для построения своей дедуктивной теории он не ограничился отношением логического следования, дедукционной теоремой и основными правилами вывода, которые легко можно выделить из 437 правил? Ответ очевидным образом связан с пониманием главной функции его логики

— «изображением и убедительным изложением содержания наук в собственных учебниках» (WL I, 7). Логика, понимаемая им как наукоучение или теория науки, должна способствовать достижению шести основных целей при изложении наук: легкому и ясному восприятию учений; созданию убежденности читателей в истинности учений; доказательности истин; быстрому нахождению нужных истин; созданию предпосылок для отыскания последних оснований учения; целесообразному употреблению учебника данной науки (WL IV, §§ 398; 401; 403; 406; 598). Логика, по мнению Больцано, должна выступать в качестве «фундамента нашего мышления в деле отыскания и познания последних оснований каждой отдельной науки»[3] «Логика, по-моему, должна быть наукоучением, учением о том, как общая область известных людям истин должна целесообразным образом раскладываться на отдельные части или на отдельные науки в своих учебниках, обрабатываться и изображаться в них» (WL I, 21).

Из понимания функций логики как наукоучения можно естественным образом предположить, что дедуктивная теория должна выполнять прикладную функцию: способствовать правильному изложению наук в учебниках. Отсюда понятно, почему Больцано формулирует такое огромное количество правильных форм (правил) вывода, которыми можно воспользоваться непосредственно при изложении конкретного содержания той или иной науки. Приведение любых высказываний к единой форме «...имеет...» также можно рассматривать в качестве искусственного ограничения самой теории дедукции. Но в логике Больцано «важнейшие формы» способствуют строгости и единообразию изложения научного содержания знаний в учебниках и потому также оправданы его логикой как наукоучением.

---

[3] *Bolzano B.* Was ist Philosophie? Wien, 1849. S. 19.

В.Х.Хаханян

ФУНКЦИОНАЛЬНАЯ АЛГЕБРАИЧЕСКАЯ МОДЕЛЬ, СООТВЕТСТВУЮЩАЯ ШТРИХ-РЕАЛИЗУЕМОСТИ КЛИНИ

Abstract. *We describe A.Dragalin's method of construction of models for HA as functional algebraic models and we prove that there does not exist such a model for slash-realizability of Kleene.*

В одной из своих работ А.Г.Драгалин предложил очень общий подход к построению моделей для нестандартных логик, в частности, для интуиционистской логики, в стиле равномерных алгебр, см.[1]. Приводимое изложение (достаточно ясное, но без очевидных деталей) сопровождается примерами для арифметики (см. там же). Однако в последнем из примеров, рассматривая модель для штрих-реализуемости Клини (см. [3, столбец С]), автор приводит «...модель, соответствующую штрих-реализуемости Клини...» ([1, стр. 194]). Но связь между приводимой моделью и реализуемостью Клини такова: «... $\| \varphi \| = T \Leftrightarrow ((| \varphi) \wedge HA \vdash \varphi)$»; см. также [1, стр.195]; сравни с [2]. Конечно, с помощью приведенной модели (соответствующей как раз формульной реализуемости из [2]) можно доказать свойства дизъюнктивности и экзистенциальности для арифметики НА (именно этот результат и стремится получить автор, используя подходящую равномерную алгебру). Однако штрих-реализуемость Клини (да и другие модели типа равномерной алгебры для НА) не совпадают с выводимостью в интуиционистской арифметике.

Как отмечалось выше, в [1] дается ряд примеров, в которых для той или иной модели НА (в первую очередь для моделей типа реализуемости) приводится соответствующая этой модели функциональная алгебраическая модель (ФАМ). Сейчас мы достаточно кратко опишем и охарактеризуем общую схему построения ФАМ для арифметики. Известно, что при исследовании НА употреблялось большое количество моделей типа реализуемости. Естественно попытаться рассмотреть эти модели с некоторой единой точки зрения. Алгебраическое исследование таких моделей приводит к рассмотрению существенно неполных псевдобулевых алгебр (ПБА), в которых верхние и нижние грани существуют лишь для некоторых семейств, которые задаются структурой языка. Ниже мы опишем один из вариантов такого рассмотрения, предложенный А.Г.Драгалиным (см. [1], [2]).

Функциональная псевдобулева алгебра (ФПБА) задаётся набором < B,D,F >, где B – ПБА, это алгебра истинностных значений, D – непустое множество (объектная область), а F – семейство функций (или семейство форм) ФПБА. Всякий элемент из F есть функция нескольких аргументов (может быть нульместных), всюду определенная на элементах из D и со значениями в ПБА. На F накладываются следующие ограничения:

1. F замкнуто относительно операций: а) добавления фиктивного аргумента; б) перестановки аргументов; в) отождествления аргументов.
2. F содержит ноль и единицу ПБА в качестве нульместных функций.
3. F замкнуто относительно псевдобулевых операций $\wedge$, $\vee$, $\supset$.

Последнее означает следующее. Если f, g есть две формы из F с одним и тем же количеством аргументных мест, то найдётся функция h из семейства форм такая, что для любых элементов a_1, ..., a_n из D (далее D – это множество объектов) $h(a_1,...,a_n)=f(a_1,...,a_n)\wedge g(a_1,...,a_n)$ или кратко $h=f\wedge g$. Аналогично, требуется существование форм $f\vee g$ и $f \supset g$.

4. Наше множество форм должно быть замкнуто относительно операций взятия верхних и нижних граней. Это означает следующее. Пусть фиксировано некоторое аргументное место, например x_1. Если f из семейства форм, то требуется, чтобы существовали формы g и h от аргументов $x_2,...,x_n$ такие, чтобы для любых объектов a, $a_2,...,a_n$ было выполнено
$g(a_2,...,a_n)=\wedge\{f(a,a_2,...,a_n) \mid a\in D\}$, $h(a_2,...,a_n)=\vee\{f(a,a_2,...,a_n) \mid a\in D\}$, т.е. требуется существование соответствующих пересечений и объединений в ПБА. Будем записывать это так: $g(x_2,...,x_n)=\forall x f(x,x_2,...,x_n)$, $h(x_2,...,x_n)=\exists x f(x,x_2,...,x_n)$. Определение ФПБА на этом завершено. Заметим, что совершенно не требуется, чтобы ПБА была полной, т.е. чтобы содержала все нижние и верхние грани своих подмножеств.

Далее рассматриваются логико-математические языки без выделенного равенства и функциональных символов, т.е. каждый язык задается набором <Cnst, Pr> – констант и предикатных символов. Функциональная алгебраическая модель (ФАМ) для языка <Cnst, Pr> определяется набором A=<B, D, F, *Cnst*, *Pr*>, где <B, D, F> есть ФПБА, функция *Cnst* сопоставляет каждой константе c нашего языка объект *c* =*Cnst*(c), а каждому предикатному символу P нашего языка сопоставляется элемент $\|P\|$ =*Pr*(P) из семейства форм F. Дополнительно предполагается, что семейство форм нашей модели A удовлетворяет и такому условию: это семейство замкнуто относительно операции фиксации аргумента объектной области *c*, где c есть константа нашего языка, что означает следующее: если $f \in F$, $f = f(x_1,\dots,x_i,\dots,x_n)$, $c \in Cnst$, тогда найдется функция $g \in F$ такая, что для всех объектов $a_1,\dots,a_n$ $g(a_1,\dots,a_{i-1},a_{i+1},\dots,a_n) = f(a_1,\dots,c,\dots,a_n)$.

Если задана ФАМ A языка Q, то можно определить значение в модели для всякой формулы языка Q. Значением $\|\varphi\|$ формулы φ будет при этом некоторая форма ФПБА $\|\varphi\| \in F$. Заметим, что, в отличие от обычных алгебраических моделей (см. *Расёва Е., Сикорский Р.* Математика метаматематики, М., Наука, 1972), значение приписывается не формулам, оцененным объектами модели, а просто формулам языка Q, в том числе и формулам с параметрами.

Для определения значения формулы в модели будем помечать аргументные места форм переменными языка Q. С этой целью линейно упорядочим все переменные языка Q каким-либо фиксированным способом. Если дана формула φ, то все ее параметры выпишем в список $x_1,\dots,x_n$ в упомянутом выше линейном порядке. В качестве значения формуле φ будет сопоставляться форма $f \in F$ от аргументов $x_1,\dots,x_n$.

Теперь определим значение $\|\varphi\|$ индукцией по построению формулы φ.

1) Если φ – атомарная формула вида $P(u_1, \dots, u_n)$, где u_i –переменные или константы, а $x_1,\dots,x_n$ – стандартный список параметров φ, то $\|P(u_1, \dots, u_n)\|$ есть форма от аргументов $x_1,\dots,x_n$, получающаяся из $\|P\|$ с помощью фиксации аргументов соответствующими константами.
2) Значение $\|\bot\|$ есть нуль алгебры B.
3) Если φ имеет вид $(\psi\wedge\eta)$, $(\psi\vee\eta)$, $(\psi\supset\eta)$, то форму $\|\varphi\|$ вычисляем следующим образом. Сначала найдем $\|\psi\|$ и $\|\eta\|$. Затем с помощью тривиальных операций перестановки и добавления фиктивных аргументов получим из $\|\psi\|$ и $\|\eta\|$ формы $f_1(x_1, \dots, x_n)$ и $f_2(x_1, \dots, x_n)$ от параметров формулы φ и, наконец, вычислим $\|\varphi\|$ как форму $f_1\wedge f_2$, $f_1\vee f_2$ или $f_1\supset f_2$.
4) Если φ имеет вид $\forall x\psi(x)$ или $\exists x\eta(x)$, то определим $\|\varphi\| = \forall x\|\psi(x)\|$ или, соответственно, $\|\varphi\| = \exists x\|\eta(x)\|$. Разумеется, если у формулы нет параметра x, то никаких изменений при определении формы $\|\varphi\|$ не происходит. Если φ – предложение нашего языка, то соответствующая форма оказывается нульмерной и принадлежит ПБА. Предложение φ истинно в модели A, если $\|\varphi\| = T$ – единица нашей ПБА. A есть модель для теории H, если все нелогические аксиомы H

будут истинны в A. Теорема о корректности для нашего класса моделей имеет следующий вид.

Теорема. *Если A – ФАМ для языка Q, φ – предложение языка Q, выводимое в интуиционистской логике предикатов, то* $\|\varphi\|$=T *(единица ПБА).*

Доказательство теоремы проводится индукцией по длине вывода формулы φ.

Теперь рассмотрим некоторые виды реализуемости в языке арифметики. Сам язык арифметики HA при этом следует модифицировать так, чтобы избежать употребления функциональных символов. Это делается с помощью стандартной процедуры: каждому n-местному функциональному символу $f(x_1, ..., x_n)$ сопоставляется (n + 1)-местный предикатный символ $y = f(x_1,..., x_n)$ и все аксиомы, относящиеся к этому функциональному символу, естественным образом заменяются на аксиомы, относящиеся к предикатному символу. Соответственно, несколько изменяются и другие аксиомы. Например, принцип арифметической индукции приобретает вид $\varphi(0) \wedge \forall xy (\varphi(x) \wedge (y = Sx) \supset \varphi(y)) \supset \forall x\varphi(x)$. Мы считаем, что наш язык (мы его по-прежнему будем обозначать через HA) имеет один сорт переменных x, y, z,.. и семейство констант 0, 1, 2,.... для каждого натурального числа.

Все функциональные алгебраические модели для языка HA, которые мы рассмотрим ниже, будут иметь одну и ту же объектную область, т.е. в моделях A = <B, D, F, *Cnst, Pr*> область D будет одной и той же. А именно объектная область D состоит, во-первых, из всех констант 0, 1, 2,... для натуральных чисел и, во-вторых, из счетного семейства символов [x], [y], [z],..., которые мы будем называть каналами. Канал изображает константу – натуральное число, «о котором ничего не известно».

Функция *Cnst* во всех моделях ниже определяется тривиальным образом: константе n языка сопоставляется объект $n \in D$. Таким образом, в рассматриваемых примерах модель задается определением B, F и *Pr* Оцененная формула – это, по определению, формула φ, в которой все вхождения параметров замещены объектами из D (константами или каналами).

Приведем теперь две наиболее простых ФАМ. Каждую формальную теорию, например HA, можно рассматривать как функциональную алгебраическую модель. По существу это известная алгебра Линденбаума–Тарского. В качестве алгебры B истинностных значений следует взять просто множество всех оцененных формул, а в качестве множества F форм – множество всех формул.

Каждая формула задает форму относительно операции замещения параметров.

Основное отношение на B определяется очевидным образом: $a \leq b \Leftrightarrow HA \vdash a' \supset b'$, где a', b' получены из a, b путем согласованного превращения каналов в переменные. Псевдобулевы операции над формами при этом будут совпадать с синтаксическими операциями над соответствующими формулами. Если определить $\| \varphi \| = \varphi$ для атомарных формул, то для всякого предложения φ будем иметь $\| \varphi \| = T \Leftrightarrow HA \vdash \varphi$.

Однако можно определить и более интересную и неожиданную модель HA, где в качестве форм будут фигурировать формулы. Для всякой арифметической формулы φ через Pr (φ) обозначим формулу с теми же параметрами, что и у φ, содержательный смысл которой таков: Pr (φ) утверждает, что в исчислении HA выводится замкнутая формула, полученная из φ замещением ее параметров натуральными числами из некоторого списка *y*, который есть полный список всех параметров φ. Формула Pr (φ) строится стандартным образом по формуле φ, с подробностями можно ознакомиться, например, в статье: *Feferman S.* Arithmetization of metamathematics in general setting // Fundamenta Math., 1960. N. 49, P.35-92. Для всякой формулы φ через $\Box\varphi$ обозначим формулу $\varphi \wedge Pr(\varphi)$.

В качестве алгебры B возьмем вновь множество всех оцененных формул, а в качестве множества F форм – множество всех формул, но теперь основное отношение определим иначе: $a \leq b \Leftrightarrow HA \vdash \Box\, a' \supset b'$. Для атомарных формул положим $\| \varphi \| = \varphi$.

Псевдобулевы операции в этой модели определяются следующим образом (здесь слева стоит знак операции в нашей модели, а справа – формула, являющаяся значением):

$(\varphi) \wedge (\psi) = (\varphi \wedge \psi)$; $(\varphi) \vee (\psi) = (\Box\varphi \vee \Box\psi)$; $(\varphi) \supset (\psi) = (\Box\varphi \supset \psi)$; $\neg(\varphi) = (\neg \Box\varphi)$; $\forall x(\varphi) = (\forall x \varphi)$; $\exists x\,(\varphi) = (\exists x\, \Box\varphi)$; $\perp = (0=1)$

Реализуемость, соответствующая этой модели, была использована Бизоном (*Beeson M.* The nonderivability in intuitionistic formal system of theorems on the continuity of effective operations // J. of Symbolic Logic, 1975. N. 40, P. 321-346). Связь с реализуемостью Бизона можно теперь выразить следующей эквивалентностью: $\| \varphi \| = T \Leftrightarrow HA \vdash \varphi^{p}$.

Далее в работах [1] и [2] рассматривается отмеченная во введении штрих-реализуемость Клини и для нее строится подходящая ФАМ, однако нетрудно видеть, что, доказывая свойства эффективности логических связок, эта ФАМ совпадает с выводимостью в интуиционистской арифметике. Мы докажем, что не существует модели ФАМ для штрих-реализуемости Клини (и тем не менее существует модель типа ФАМ для формализованной и содержательной реализуемостей Клини: см. [1] или [2]).

Предположим, что некоторая ФАМ A есть модель для штрих-реализуемости Клини. Тогда (по определению) имеется такое отображение формул языка арифметики в множество форм F, что для всякой формулы φ: $|$-реализуема φ тогда и только тогда, когда $F_\varphi \in 1$ (F_φ – форма из ФПБА модели ФАМ A, соответствующая формуле арифметики φ, а 1 есть единица ПБА, использованной при построении ФАМ). Рассмотрим два различных, неразрешимых в HA утверждения φ и η (т.е. в HA не выводимы утверждения φ, $\neg\varphi$, η и $\neg\eta$). Так как в HA не выводятся формулы φ и η, то формулы $\neg\varphi$ и $\neg\eta$ являются невыводимыми, $|$-реализуемыми формулами языка арифметики. Если в ФАМ A им соответствуют формы $F_{\neg\varphi}$ и $F_{\neg\eta}$ соответственно, то эти формы принадлежат единице ПБА, а тогда форма $F_{\neg\varphi} \vee F_{\neg\eta} = F_{\neg\varphi\vee\neg\eta}$ (последняя соответствует в ФПБА из модели A формуле $\neg\varphi\vee\neg\eta$) также принадлежит единице нашей ПБА и, следовательно, формула $\neg\varphi\vee\neg\eta$ является $|$-реализуемой. Но это влечет, что в HA выводима формула $\neg\varphi$ или в HA выводима формула $\neg\eta$, что невозможно в силу выбора φ и η. Таким образом, доказана

Теорема. *Не существует ФАМ, соответствующей штрих-реализуемости Клини.*

ЛИТЕРАТУРА

1. *Драгалин А.Г.* Функциональные алгебраические модели // Семиотика и информатика. М.: ВИНИТИ, 1979. Вып. XIII, С. 184-195
2. *Драгалин А.Г.* Математический интуиционизм. Введение в теорию доказательств М.: Наука, 1979. С. 60-61.
3. *Kleene S.C.* Realizability: a retrospective survey // Lecture Notes in Math.1973. N. 337. P.96.

А.В.Чагров

ФОРМАЛЬНАЯ ПРОПОЗИЦИОНАЛЬНАЯ ЛОГИКА А.ВИССЕРА И ЕЕ РАСШИРЕНИЯ*

Abstract. *Extensions of formal propositional logic by A.Visser (1980) are discused. There is a continuum of such logics which are axiomatized by one-variables formulas. There is an extension of formal propositional logic which is closed under modus ponens, is of width 2, but is not Kripke-complete.*

Одним из главных источников возникновения неклассических логик было и по сей день остается «недовольство» свойствами связок классической логики. Подчеркнем, что именно пропозициональных связок, а не, скажем, кванторов или иных конструкций, используемых при построении формальных логических языков. Даже различие свойств кванторов, к примеру, у интуиционистской и классической логик связано с тем, что в классической логике кванторы всеобщности и существования взаимосвязаны посредством отрицания, но именно классического отрицания, отсутствующего в логике интуиционистской.

Попытки задавать стандартные пропозициональные связки иначе, нежели с помощью классических таблиц истинности или иными эквивалентными способами, с целью уловить их конструктивное осмысление, привели к аксиоматическому определению логических систем типа интуиционистской (конструктивной) логики, модальных логик, истолковывающих интуиционистскую логику, и тому подобные. В частности, при этих подходах предлагается понимать пропозициональные связки «в сильном духе», как в интуиционистской логике, или в виде усиления классических связок посредством навешивания дополнительных логических операторов типа модальностей «необходимо», «установимо», «доказуемо» и тому подобное, как это делается погружением в модальные логики. При этом два подхода – непосредственное описание сильных пропозициональных связок семантическим определением или заданием их свойств аксиоматическим путем, с одной стороны, и наложение ограничений на использование классических вариантов навешиванием дополнительных операторов – часто сочетаются, хотя не всегда видно как получить желаемое

---

* Работа выполнена при поддержке гранта РФФИ № 03-06-80115.

описание при одном подходе, если уже есть соответствующее описание при другом.

В качестве примера такой ситуации напомним, что имеются так называемые логики реализуемости, дающие некоторые варианты конструктивной логики (то есть некоторые из так называемых суперинтуиционистских логик), но до сих пор не предложено какой-либо разумной семантики типа реализуемости для модальных логик, являющихся модальными напарниками логики реализуемости. Другими словами, о логике реализуемости пока разумнее говорить в терминах именно суперинтуиционистских логик, нежели в терминах модальных логик на классической основе, о чем можно сожалеть, так как погружения суперинтуиционистских логик в модальные иногда дает техническое преимущество при решении проблем, связанных с самими суперинтуиционистскими логиками.

Однако и обратная проблематика – непосредственное описание логических систем с сильными пропозициональными связками без того, чтобы считать их фрагментами систем с более богатым по выразительным свойствам языком – достойна внимания. Здесь уместно вспомнить параллельную, но в определенном смысле крайнюю ситуацию, выраженную где-то встречавшимися автору словами вроде «Да, натуральные числа выразимы в теории множеств, но вряд ли исследователя свойств натуральных чисел может это порадовать, поскольку теория множеств нисколько не помогает изучать свойства натуральных чисел»; более того, можно добавить, что погружение теории натуральных чисел в теорию множеств отчасти и вредно, поскольку создает опасную иллюзию, что для натуральных чисел есть по крайней мере стандартная (естественная!) модель (верить или нет в непротиворечивость представлений о ней – важный, но другой вопрос), в то время как для теории множеств до сих пор не предъявлено какой-либо убедительной естественной модели (и вопрос о непротиворечивости здесь существенно более труден).

Здесь мы обратимся к не так давно созданной А.Виссером [2] логической системе, названной им **FPL** (от formal propositional logic, что ввиду неинформативности не вполне удачно, но можно было бы считать эту аббревиатуру сокращением названия fixed point logic, что, кстати, соответствовало бы и названию статьи А.Виссера – A propositional logic with explicit fixed points). Эта система была сформулирована им в виде исчисления натурального вывода. По сути она получается ослаблением интуиционистской системы путем удаления правила modus ponens (в результате получается система, названная А.Виссером **BPL** от basic propositional logic), а затем усилением путем включения в систему нового, ни классически, ни интуиционистски не приемлемого правила, позволяющего переходить от формулы вида $((\bot \to \bot) \to A) \to A$ к формуле $(\bot \to \bot) \to A$. Это последнее правило очень похоже на правило Леба в модальной логике доказуемости **GL**, поэтому и мы вслед за А.Виссером будем так его называть.

Хотя вопросы построения исчислений непосредственно не входят в круг интересующих нас здесь задач, отметим, что оба исчисления – и **BPL**, и **FPL** – обладают весьма необычными свойствами по отношению к столь привычному логикам правилу modus ponens. Если добавить modus ponens к **BPL**, получится исчисление, аксиоматизирующее интуиционистскую пропозициональную логику, а если к **FPL** – получится противоречивое исчисление, то есть исчисление, в котором выводимы все формулы. Это отчасти связано с тем, что в обоих исчислениях есть правило введения импликации («теорема о дедукции»), но не выводима формула, формально выражающая modus ponens – $A \mathbin{\&} (A \to B) \to B$. С другой стороны, обе логики как множества формул, выводимых в исчислениях **BPL** и **FPL**, замкнуты относительно правила modus ponens. Это необычное свойство приводит нас к вопросу: какое множество формул называть расширением логики **BPL** и/или **FPL**. Скажем, в случае интуиционистской логики ответ дается обычно так: расширением ее является всякое множество формул, содержащее все интуиционистски выводимые формулы и замкнутое относительно правил подстановки и modus ponens. Но ведь в случае интуиционистской логики таких необычных свойств правило modus ponens не имеет.

Мы не будем здесь окончательно решать вопрос, что называть расширением логики **FPL**, а о расширениях **BPL** не будем говорить вовсе. Однако те множества формул, о которых будет идти речь, по нашему мнению, расширениями **FPL** являются.

Для наших целей будет удобно использовать семантическое описание множества формул, выводимых в **FPL**. Ввиду сходства этого описания с привычным семантическим заданием интуиционистской логики, это можно сделать довольно коротко, указав необходимые изменения. При этом постараемся обойтись словесным описанием нужных нам конструкций.

Напомним, что интуиционистская логика может быть задана как множество формул истинных в конечных шкалах Крипке, являющихся частичными порядками (то есть отношение достижимости в них является транзитивным, рефлексивным и антисимметричным). Формулы в шкале оцениваются с помощью оценок (означиваний), сопоставляющих каждой пропозициональной переменной множество элементов шкалы (миров, иными словами), являющееся наследственным, то есть если в такое множество попал некоторый мир, то и все достижимые из него также попадают. Значение формулы в мире (отношение «в мире α истинна формула φ») при данной оценке задается индукцией по построению формулы: константа $\perp$ («ложь») не является истинной ни в одном мире; в мире α истинна пропозициональная переменная p, если оценкой переменной p сопоставляется множество, содержащее мир α; конъюнкция истинна в мире α, если в этом мире истинны оба конъюнктивных члена; дизъюнкция истинна в мире α, если в этом мире истинен хотя бы один из дизъюнктивных членов; импликация истинна в мире α, если для всякого мира β, достижимого из α, из того, что в β истинна посылка импликации, следует, что в β истинно и заключение этой импликации. (Отметим, что специфика шкалы здесь проявляется только в пункте об импликации.) Наконец, формула считается истинной в шкале, если она истинна в каждой точке этой шкалы при любой оценке.

Если в определениях предыдущего абзаца внести ровно одно изменение – в наших конечных шкалах вместо частичного порядка постулируем строгий частичный порядок (то есть отношение достижимости в них является транзитивным, иррефлексивным и антисимметричным), то множество формул, истинных во всех получившихся шкалах, и будет множеством формул, выводимых в **FPL**. Хотя нас интересует именно эта логика, для полноты картины отметим, что если мы отменим при последнем изменении требование конечности шкал и/или отменим какие-либо упоминания о рефлексивности и иррефлексивности (в этом случае отношение достижимости окажется предпорядком), то множество формул, истинных в так получившихся шкалах, будет множеством формул, выводимых в **BPL**.

Вернемся к вопросу, что считать расширением **FPL**. Один из возможных ответов состоит в том, что мы задаем расширение как множество формул, истинных в некотором классе семантических структур самой **FPL**, ну и быть может, наложим требование замкнутости этого множества относительно каких-либо правил вывода. Одним из таких правил представляется несомненным подстановка, а что касается других, то здесь мы будем говорить только о modus ponens. Следует, конечно, иметь в виду, что конечными строго упорядоченными шкалами не исчерпываются возможности описания **FPL**, она имеет и алгебраическую семантику, и ее реляционный эквивалент – семантику обобщенных шкал.

Обобщенной шкалой назовем строго упорядоченную (не обязательно конечную!) шкалу с некоторым фиксированным семейством наследственных множеств, которое замкнуто относительно следующей операции: если в качестве оценки выбирать сопоставление переменным множеств этого семейства, то для всякой формулы множество миров, в которых эта формула истинна, будет элементом этого семейства. Истинность в обобщенных шкалах определяется так же, как и выше, за одним исключением: оценки всегда выбираются так, что переменным сопоставляются множества миров из фиксированного для этой шкалы семейства. Легко видеть, что если в обобщенной шкале нет бесконечных возрастающих цепей миров, то в ней истинны все формулы из **FPL**, что, впрочем, не исчерпывает всех обобщенных шкал, в которых истинны все формулы из **FPL**. Если обобщенная шкала такова, что фиксированное семейство наследственных множеств состоит из всех ее наследственных множеств, то эту шкалу будем называть шкалой Крипке. В случае шкал Крипке фиксированное семейство наследственных множеств можно не упоминать, поскольку берутся все такие множества.

Теперь в данной статье определяем расширение **FPL** (другими словами, логикой, расширяющей **FPL**) как множество формул, истинных в некотором классе обобщенных шкал, не содержащих бесконечных возрастающих цепей, замкнутое относительно modus ponens. Несложно понять, что если такое расширение непротиворечиво (то есть не есть множество всех формул), то задающий его класс обобщенных шкал бесконечен или содержит бесконечные шкалы. Всякое расширение **FPL** можно «аксиоматизировать» следующим образом: если Г – некоторое множество формул, то **FPL** + Г – минимальное по включению расширение, содержащее Г (множество дополнительных аксиом).

Для сравнения заметим, что если в предыдущем абзаце мы используем обобщенные интуиционистские шкалы, которые получатся наложением требования рефлексивности вместо иррефлексивности, то замкнутости относительно modus ponens можно будет не требовать, поскольку она будет выполняться автоматически, причем заданными окажутся в точности все суперинтуиционистские логики. Это отчасти оправдывает принятое нами здесь определение расширение **FPL**.

Отметим два хорошо известных свойства суперинтуиционистских логик. Первое: существует лишь счетное множество суперинтуиционистских логик, аксиоматизируемых добавлением к интуиционистской логике аксиом от одной переменной. Второе: если суперинтуиционистская логика задается некоторым классом обобщенных шкал конечной ширины, ограниченной некоторым числом, скажем m (такие логики называются логиками ширины m), то эта логика задается шкалами Крипке, то есть полна по Крипке. (Напомним, что ширина шкалы – это максимальная мощность множеств, состоящих из попарно несравнимых миров.)

С расширениями **FPL** ситуация иная.

Теорема 1. *Существует континуум расширений* **FPL** *формулами от одной переменной.*

Для доказательства можно взять формулы
$\phi_n = ((\bot\to\bot)^{n+1}\bot \,\&\, p \;\to (\bot\to\bot)^n\bot) \vee ((\bot\to\bot)^{n+1}\bot \;\to (\bot\to\bot)^n\bot \vee p)$,
где формулы $(\bot\to\bot)^m\bot$ определяются индукцией по m:

$$(\bot \to \bot)^0\bot = \bot,\quad (\bot \to \bot)^{m+1}\bot = (\bot \to \bot) \to (\bot \to \bot)^m\bot.$$

Несложно показать, что если I и J – различные подмножества множества натуральных чисел, то **FPL** + $\{\phi_n : n$ из $I\}$ и **FPL** + $\{\phi_n : n$ из $J\}$ различны. Это доказывается с помощью шкал Крипке F_n логики **FPL** следующего вида: в качестве миров берутся натуральные числа, причем число n имеет двойника, обозначим который n' (считаем, что n и n' не отличаются ничем, кроме обозначений), а отношение достижимости – из большего числа достижимо меньшее (таким образом, n и n' не сравнимы). Легко видеть, что при всяком m отличном от n формула ϕ_m истинна в шкале F_n, в то время как ϕ_n в шкале F_n опровергается в мире $n + 1$ при выборе в качестве оценки переменной p множества миров $\{n, n - 1,\ldots, 1, 0\}$.

Небольшой модификацией приведенного доказательства – нужно брать логики, определяемые классами шкал вида $\{F_n : n$ из $I\}$, а с помощь формул ϕ_n обосновывать их различие при различных индексных множествах I – доказывается

Теорема 2. *Существует континуум расширений* **FPL** *ширины не более 2.*

В этом, в общем-то, нет ничего удивительного. В суперинтуиционистских логиках справедлив аналог теоремы 2. Однако семейство суперинтуиционистских логик ширины 1 (логики ширины 1 называют линейными, а в случае суперинтуиционистских логик еще и цепными) счетно, в то время как для расширений **FPL** справедлива

Теорема 3. *Существует ровно одно непротиворечивое линейное расширение* **FPL**.

Этим расширением является логика, задаваемая шкалой, получаемой из любой шкалы F_n удалением двойника мира n.

Теперь обратимся к проблеме полноты по Крипке. Как уже было сказано, всякая суперинтуиционистская логика конечной ширины обладает полнотой по Крипке. Однако для расширений **FPL** оказывается верной

Теорема 4. *Существуют неполные по Крипке расширения* **FPL** *ширины* 2.

Доказательство основано на примере, обнаруженном авторами [1]: оказалось, что существуют <u>табличные</u> расширения, которые не полны по Крипке. Это выглядит довольно удивительно ввиду того, что в изучавшихся до сих пор классах неклассических логик, будь то суперинтуиционистские, модальные, многомодальные, всякая табличная логика полна по Крипке. Конечно, в силу отмеченного выше обстоятельства логика [1] не замкнута относительно правила modus ponens, однако с помощью нехитрого приема, по сути использованного в доказательстве теорем 1 и 2, этого обстоятельства удается избежать (потеряв, конечно, табличность). Прием этот состоит в том, что, скажем, для доказательства теоремы 2 нам было бы достаточно рассматривать варианты шкал вида F_n, в которых отсутствуют миры $n + 2$, $n + 3$, $n + 4$ и т.д.; их введение и обеспечивает замкнутость определяемых в том доказательстве логик относительно modus ponens.

Обратимся, однако, к примеру неполной логики. Он задается следующей обобщенной шкалой: в шкале F_0 в качестве фиксированного семейства наследственных множеств берутся все, кроме множества $\{0'\}$ (то есть множества, состоящего из двойника нуля); То, что это обобщенная шкала, проверятся рутинными вычислениями. Пусть L – логика, задаваемая этой шкалой. Теперь обратим внимание, что в этой обобщенной шкале опровергается формула ϕ_0 (а потому ϕ_0 не принадлежит L), для опровержения которой в обобщенной шкале и, в частности, в шкале Крипке необходимо наличие мира, из которого достижимы два различных мира, из которых ничего не достижимо, однако формулу $(p \to q) \vee (q \to p)$, как легко убедиться, опровергнуть невозможно, а значит логике L она принадлежит. Теперь допустим, что логика L полна по Крипке. Тогда, чтобы опровергать не принадлежащую ей формулу ϕ_0, класс ее шкал Крипке должен содержать шкалу, в которой есть мир, из которого достижимы два разных мира, из которых ничего не достижимо. Назовем эти три мира соответственно a, b, c. Теперь взяв в качестве оценки переменной p множество $\{b\}$, а в качестве оценки q – множество $\{c\}$, мы получаем, что формула $(p \to q) \vee (q \to p)$ опровергается в мире a. Получили противоречие, которое показывает, что допущенное нами неверно, то есть на самом деле логика L полной по Крипке не является.

Мы привели один пример. Совместив его конструкцию с доказательством теоремы 2, можно получить континуум таких примеров. Обратим внимание, что хотя **FPL** была в [2] выбрана так, что она погружается логику доказуемости **GL** переводом, при котором модальность навешивается на все атомарные подформулы и все подформулы, у которых главная связка – импликация, и мы, вводя определение расширения **FPL**, пытались имитировать определение суперинтуиционистских логик, логики, о которых идет речь в теореме 4, не погружаются указанным переводом ни в одно (!) расширение логики **GL**. Такого эффекта не наблюдается для суперинтуиционистских логик. Образно говоря, **FPL**, являющаяся фрагментом **GL**, имеет больше расширений, чем сама **GL**. Впрочем, такого рода эффекты известны: импликативный фрагмент интуиционистской логики имеет расширения, не являющиеся импликативными фрагментами никаких суперинтуиционистских логик.

ЛИТЕРАТУРА

1. *Suzuki Y., Wolter F., and Zakharyaschev M.* Speaking about transitive frames in propositional languages // Journal of Logic, Language, and Information. 1998. Vol. 7. P. 317–339.
2. *Visser A.* A propositional logic with explicit fixed points // Studia Logica. 1981. Vol. 40. P. 155–175.

В.И.Шалак

МНОГОЗНАЧНАЯ СЛАБАЯ РЕЛЕВАНТНАЯ ЛОГИКА RS (relevant scaled)*

Abstract. *In this article we define semantics for many-valued propositional logic. Distinctive feature of this semantics is interpretation of implication connective as arithmetic subtraction.*

Рассмотрим двузначную интерпретацию классической логики высказываний, взяв в качестве истинностных значений не {0,1}, а {-1,1}. Конъюнкцию и дизъюнкцию интерпретируем обычным образом посредством функций минимума и максимума, а отрицание посредством обычного арифметического отрицания.

Истинностная таблица для импликации будет выглядеть следующим образом:

p	q	p⊃q
1	1	1
-1	1	1
1	-1	-1
-1	-1	1

Имликации приписывается выделенное истинностное значение 1 лишь в том случае, если истинностное значение, сопоставленное консеквенту больше или равно значения, сопоставленного антецеденту. Выражая условные суждения посредством импликативных формул, мы гарантируем, что переход от условия к заключению не приведет к уменьшению истинностного значения. Некоторым недостатком данного определения импликации является определенная потеря информации о соотношении истинностных значений антецедента и консеквента. Было бы неплохо, если бы в определении имликации эта информация сохранялась. Например, следующим образом:

p	q	p⊃q
1	1	0
-1	1	2
1	-1	-2
-1	-1	0

---

* Работа выполнена при поддержке РГНФ, грант № 01-03-00403.

В первой и последней строках таблицы импликации сопоставлен 0, так как не было ни прироста, ни понижения истинностного значения консеквента относительно антецедента. Во второй строке импликации сопоставлено значение 2, так как именно на столько отличается значение консеквента относительно антецедента, а в третьей строке по аналогичным основаниям импликации сопоставлено значение –2. Выделенными значениями будем считать $\{0,1,2\}$. Однако, как мы видим, сохранение информации о соотношении значений антецедента и консеквента привело к выходу за пределы исходного множества истинностных значений. Если мы возьмем истинностную матрицу, состоящую из $\{-2,-1,0,1,2\}$, и по аналогичным правилам построим таблицу для импликации, то опять выйдем за пределы исходного множества значений. Единственная возможность сохранить данное определение импликации – перейти к бесконечному множеству значений, взяв в качестве его множество всех целых чисел, а в качестве выделенных значений – все неотрицательные числа.

Def 1. **Язык RS**

1. p, q, r... $\in$ Var - множество пропозициональных переменных;
2. $\&, \vee, \rightarrow, \neg$ - логические связки;
3. (,) - скобки.

Def 2. **Формулы RS**

1. $Var \subseteq Frm$;
2. Если $A, B \in Frm$, то $\neg A, (A \& B), (A \vee B), (A \rightarrow B) \in Frm$;
3. Ничто другое формулой не является.

Пусть **Z** – множество целых чисел, а $Val=\mathbf{Z}^{Var}$ - множество всех приписываний значений пропозициональным переменным.

Распространим Val на множество всех формул.

Def 3. Пусть $v \in Val$

4. $v(\neg A) = -v(A)$;
5. $v(A \& B) = \min(v(A), v(B))$;
3. $v(A \vee B) = \max(v(A), v(B))$;
6. $v(A \rightarrow B) = v(B) - v(A)$.

Def 4. Формула A **RS-общезначима** ($\models A$) е.т.е. для всех $v \in Val$ имеет место $v(A) \geq 0$.

Примеры общезначимых формул.

$\models A \rightarrow A$

$\models (A \rightarrow B) \rightarrow ((B \rightarrow C) \rightarrow (A \rightarrow C))$

$|=(A\to(B\to C))\to(B\to(A\to C))$
$|=A\to\neg\neg A$
$|=\neg\neg A\to A$
$|=(A\to B)\to(\neg B\to\neg A)$
$|=A\&B\to A$
$|=(A\to B)\&(A\to C)\to(A\to B\&C)$
$|=A\to A\vee B$
$|=(A\to C)\&(B\to C)\to(A\vee B\to C)$
$|=A\&(B\vee C)\leftrightarrow(A\&B)\vee(A\&C)$
$|=A\vee(B\&C)\leftrightarrow(A\vee B)\&(A\vee C)$
$|=(A\to B)\vee(B\to A)$
$|=(A\to((A\to B)\to B)$
$|=\neg(A\&\neg A)$
$|=(A\vee\neg A)$

$|=A,\ |=A\to B\Rightarrow|=B$
$|=A,\ |=B\Rightarrow|=A\&B$
$|=B\Rightarrow|=(A\&\neg A)\to B$

Аномальные общезначимые формулы.

$|=\neg(A\to A)\&(A\to A)$ – переход от А к А не увеличивает и не уменьшает имеющейся у нас информации.

Формулы, не являющиеся общезначимыми.

$|\neq A\&\neg A$
$|\neq(A\&\neg A)\to B$
$|\neq(A\to(A\to B))\to(A\to B)$
$|\neq(A\to B)\&(B\to C)\to(A\to C)$
$|\neq(A\to B)\to((A\to C)\to(A\to B\&C))$
$|\neq(A\to C)\to((B\to C)\to(A\vee B\to C))$
$|\neq(A\to(B\to C))\to(A\&B\to C)$

Def 5. **Арифметический образ формулы.**

Определим функцию α, отображающую формулы логики **RS** в термы стандартной арифметики целых чисел. $\alpha(A)$ будем называть арифметическим образом формулы А.

1. Если $p\in Var$, то $\alpha(p) = p$;
2. $\alpha(\neg A) = -\alpha(A)$;
3. $\alpha(A\&B) = \min(\alpha(A),\alpha(B))$;
4. $\alpha(A\vee B) = \max(\alpha(A),\alpha(B))$;
5. $\alpha(A\to B) = \alpha(B)+(-\alpha(A))$.

Def 6. Терм t называется **элементарным**, если он имеет вид $P_1+\ldots+P_g$, где $P_i=\in\{p,-p\}$ для некоторого $p\in Var$.

В арифметике имеют место следующие тождества.

Id1. $--x = x$
Id2. $-(x+y) = (-x)+(-y)$
Id3. $-\min(x,y) = \max(-x, -y)$
Id4. $-\max(x, y) = \min(-x,-y)$
Id5. $x+\min(y,z) = \min(x+y,x+z)$
Id6. $x+\max(y, z) = \max(x+y,x+z)$
Id7. $\min(x,\max(y, z)) = \max(\min(x,y),\min(x,z))$
Id8. $\max(x,\min(y,z)) = \min(\max(x, y),\max(x,z))$
Id9. $x+y = y+x$
Id10. $x+(y+z) = (x+y)+z$
Id11. $\min(x,y) = \min(y,x)$
Id12. $\min(x,\min(y,z)) = \min(\min(x,y),z)$
Id13. $\max(x,y) = \max(y,x)$
Id14. $\max(x,\max(y,z)) = \max(\max(x,y),z)$

В дальнейшем мы будем отождествлять термы, отличающиеся лишь в силу свойств коммутативности и ассоциативности Id9-Id14 для +, min, max.

Def 7. Определим на арифметических образах формул частичные функции β, γ, δ и κ.

1. $\beta(p) = p$;
2. $\beta(-p) = -p$;
3. $\beta(--A) = \beta(A)$;
4. $\beta(-(A+B)) = \beta(-A)+ \beta(-B)$;
5. $\beta(-\min(A,B)) = \max(\beta(-A), \beta(-B))$;
6. $\beta(-\max(A,B)) = \min(\beta(-A), \beta(-B))$;
7. $\beta(\min(A,B)) = \min(\beta(A), \beta(B))$;
8. $\beta(\max(A,B)) = \max(\beta(A), \beta(B))$.

1. $\gamma(\min(A,B)) = \min(\gamma(A), \gamma(B))$;
2. $\gamma(\max(A,B)) = \max(\gamma(A), \gamma(B))$;
3. $\gamma(A+\min(B,C)) = \min(\gamma(A+B), \gamma(A+C))$;
4. $\gamma(A+\max(B,C)) = \max(\gamma(A+B), \gamma(A+C))$;
5. $\gamma(t)=t$, если t – элементарный терм.

1. $\delta(\min(A,\max(B,C)) = \max(\delta(\min(A,B)),\delta(\min(A,C)))$;
2. $\delta(t) = t$, если t - элементарный терм.

1. $\kappa(\max(A,\min(B,C)) = \min(\kappa(\max(A,B)),\kappa(\max(A,C)))$;
2. $\kappa(t) = t$, если t - элементарный терм.

Def 8. Арифметические конъюнктивные **АКНО** и арифметические дизъюнктивные **АДНО** нормальные образы формул логики **RS**.

Для произвольной формулы A логики **RS** будем называть терм $\kappa\gamma\beta\alpha(A)$ арифметическим конъюнктивным нормальным образом **АКНО** этой формулы.

Для произвольной формулы A логики **RS** будем называть терм $\delta\gamma\beta\alpha(A)$ арифметическим дизъюнктивным нормальным образом **АДНО** этой формулы.

Очевидно, что **АКНО** имеет вид $\min(K_1,\ldots,K_n)$ где $n\geq 1$ и $K_i=\max(D_{i1},\ldots,D_{ik})$, где $k\geq 1$ и $D_j=L_1+\ldots+L_g$ где $g\geq 1$ и $L_s=\in\{p,-p\}$ для некоторого $p\in Var$.

Очевидно, что **АДНО** имеет вид $\max(D_1,\ldots,D_n)$, где $n\geq 1$ и $D_i=\min(K_{i1},\ldots,K_{ik})$, где $k\geq 1$ и $K_j=L_1+\ldots+L_g$ где $g\geq 1$ и $L_s=\in\{p,-p\}$ для некоторого $p\in Var$.

Распространим Val на множество арифметических образов формул.

Def 9. Пусть $v\in Val$

1. $v(-A) = -v(A)$;
2. $v(A+B) = v(A)+v(B)$;
3. $v(\min(A,B)) = \min(v(A), v(B))$;
4. $v(\max(A,B)) = \max(v(A), v(B))$.

Лемма 1. Для $v\in Val$, $A\in Frm$.

1. $v(A) = v(\alpha(A))$;
2. $v(A) = v(\kappa\gamma\beta\alpha(A))$;
3. $v(A) = v(\delta\gamma\beta\alpha(A))$.

Доказательство очевидно и следует из определений *Def 3* - *Def 9* и тождеств Id1.-Id14.

Теорема 1. Булева формула A общезначима в **RS** е.т.е. A общезначима в классической логике высказываний.

С использованием Леммы 1.

Теорема 2. Формула A логики **RS** общезначима е.т.е. общезначимы арифметические неравенства $\kappa\gamma\beta\alpha(A)\geq 0$ и $\delta\gamma\beta\alpha(A)\geq 0$.

С использованием Леммы 1.

Лемма 2.

1. Для всякой $A\in Frm$ и для всякого $v\in Val$, если $v(A)<0$, то существует такое $u\in Val$, что $u(A)<v(A)$.
2. Для всякой $A\in Frm$ и для всякого $v\in Val$, если $v(A)>0$, то существует такое $u\in Val$, что $u(A)>v(A)$.

В качестве искомого $u \in Val$ достаточно взять приписывание, отличное от $v \in Val$ лишь тем, что для всякой переменной $p \in Var$, имеющей вхождение в формулу A, $u(p)=v(p)*2$. Доказательство следует из Леммы 1 и свойств **АДНО** и **АКНО**.

Теорема 3.

1. Если $|=A$ и не содержит связок &, $\vee$, то при любом $v \in Val$ имеет место $v(A)=0$.
2. Если $|=A$ и не содержит связок &, $\vee$, то для любой $|=B$ имеет место $|=A \to B$.
3. Если $|=A$, то для любой $|=B$ имеет место $|=\neg A \to B$.
4. Если $|=A \to B$, но $|\neq A$ и $|\neq B$, то существует хотя бы одна пропозициональная переменная $p \in Var$, которая одновременно является подформулой формулы A и подформулой формулы B.

Доказательство легко следует из Лемм 1 и 2. Для пункта 4, рассуждая от противного, достаточно показать, что если $|\neq A$ и $|\neq B$, то существует и может быть построено такое приписывание $v \in Val$, что $v(A)>v(B)$, т.е. $|\neq A \to B$.

Заключительные замечания

Очевидно, что ограничение в семантике множеством целых чисел не является существенным. С равным успехом мы можем интерпретировать формулы на множестве всех рациональных или действительных чисел.

Дальнейшие обобщения построенной логики могут быть произведены по пути интерпретации формул на множестве кортежей значений.

Jean-Yves Béziau

NEW LIGHT ON THE SQUARE OF OPPOSITIONS AND ITS NAMELESS CORNER

Abstract. *It has been pointed out that there is no primitive name in natural and formal languages for one corner of the famous square of oppositions. We have all, some and no, but no primitive name for not all. It is true also in the modal version of the square, we have necessary, possible and impossible, but no primitive name for not necessary.*

I shed here a new light on this mysterious non-lexicalisation of the south-east corner of the square of oppositions, the so-called O-corner, by establishing some connections between negations and modalities. The E-corner, *impossible*, is a paracomplete negation (*intuitionistic negation* if the underlying modal logic is S4) and the O-corner, *not necessary*, is a *paraconsistent negation*.

I argue that the three notions of opposition of the square of oppositions (contradiction, contrariety, subcontrariety) correspond to three notions of negation (classical, paracomplete, paraconsistent).

We get a better understanding of these relations of opposition in the perspective of Blanché's hexagon and furthermore in the perspective of a three dimensional object, a stellar dodecahedron of oppositions that I present at the end of the paper.

1. The non lexicalization of the O-corner of the Square of Oppositions

The famous Square of Oppositions[1] of Boethius and Apuleius with the four corners A E I O is built using the three Aristotelian notions of opposition: contradiction, contrariety and subcontrariety.

Contradiction is expressed in red, contrariety in blue, subcontrariety in green and subalternation[2] in black.

---

[1] Most of the time people use the singular, i.e. the expression "Square of Opposition". But I think it is important to emphasize the plurality of oppositions, that is why I will use the plural, as in French: "Le Carré des Oppositions".

[2] I represent subalternation, but I don't consider this relation as a relation of opposition, this topic will be discussed in section 3.

All men are white — No man is white

A — E

I — O

Some men are white — Not all men are white

Figure 1. The traditional square of opposition

It has been pointed out that there is no primitive name in natural and formal languages for the O-corner of this square. We have *all*, *some* and *no*, but no primitive name for *not all*:

> ... striking ... is the observation in [Horn 1989, p.259] that natural languages systematically refuse to lexicalize the O-quantifier, here identified with "not all". There are no known cases of natural languages with determiners like "nall"; meaning "not all". Even in cases that look very promising (like Old English, which has an item *nalles*, derived from *alles*, "all"; by adding the negative prefix *ne-* the same that is used in words like *never*, *naught*, *nor*, *neither*), we end up empty-handed. *Nalles* does not actually mean "not all" or "not everything", but "not at all" [Horn 1989, p.261]. Jespersen [1917] suggested that natural language quantifiers form a Triangle, rather than a Square (Hoeksema 1999, p.2).

In fact it seems reasonable to sustain that on the one hand there are only three main quantifiers in natural languages and that on the other hand the quantifier *some* of natural language is not correctly represented by the I-corner, because *some* implies *not all*: if someone says "Some cats are black" he doesn't want to say "All cats are black". This point was already made by Hamilton and Venn in the XIXth century and has been more systematically developed by Robert Blanché (1953, 57, 66). According to him, *some* has to be considered as the conjunction Y of the I and the O corners. The A E Y (*all, no, some*) vertices form a Triangle of Contrariety. But Blanché is not, like Vasiliev (1910) or Jespersen (1917), arguing for this Triangle against the traditional Square, he is instead supporting the idea of a Hexagon made of two triangles, the Triangle of Contrariety just described and a Triangle of Subcontrariety of which the O-corner is a vertex:

A or E
U

All men are white — No man is white
A — E

I — O
Some men are white — Not all men are white

Y
I and O

Figure 2. Blanche's hexagon

In the modal version of the Square of Oppositions, the O-corner is also not lexicalized: we have *necessary*, *possible* and *impossible*, but no primitive name for *not necessary*. Some similar remarks made about the quantificational version applied here. It seems that in natural language *possible* corresponds rather to the conjunction of the I and the O corners: when someone says "It is possible that it will rain", he also means that "It is possible that it will not rain" i.e. that "It is not necessary that it will rain". However nowadays people call *contingent* by contrast with *possible* this conjunction Y of I and O. But during several centuries people didn't make a distinction between possible and contingent and were rather considering a Triangle of Modalities corresponding in fact to the Triangle of Contrariety of Quantifiers (see Gardies 1979)[3]. A typical example, at the dawn of modern logic, is Wittgenstein in the *Tractatus* (4.464): he calls a proposition (*Satz*) something that can be true and can be false by contrast with a tautology and a contradiction and he says that for this reason the truth of the proposition is possible[4].

---

3 We find a Triangle rather than a Square also in the case of temporal modalities (always, sometimes, never) and spatial modalities (everywhere, somewhere, nowhere). In the case of deontic modalities, this is not so clear, see e.g. (Chisholm 1963).

4 We see here a correspondence between modalities and quantifiers, since for Wittgenstein possible means for *some* bivaluations we have truth *but not for all*. An

We can also construct a Hexagon of Modalities applying here the ideas of Blanché:

Non-Contingency[5]
A or E
U

Necessity
A

Impossibility
E

I
Possibility

O
???

Y
I and O
Contingency

Figure 3. The hexagon of modalities

Now in the context of the modal version of the Square of Oppositions, we have some other interpretations of the corners: the E-corner, *impossible*, can be considered as a *negation*, it is in fact *intuitionistic negation* if the underlying modal logic is S4, as shown by Gödel (1933). I have shown recently that the O-corner, *not necessary* (or *possible not*) is a *paraconsistent negation*, for example in S5 (Béziau 2002). The modal logic S5 can be in fact reconstructed taking this paraconsistent negation as the only primitive modality[6].

The fact that the corner corresponding to paraconsistent negation is not lexicalized is interesting. In some sense this could be used against the notion of paraconsistent negation, saying that it is not natural at all.

---

exact correspondence between the Square of Oppositions and the Square of Modalities is established by Wajsberg's theorem (1933).

[5] There is also no primitive name for the contradictory of contingency, which is usually called "non-contingency".

[6] The axiomatization of modal logics in terms of contingency and non-contingency was first examined by Montgomery and Routley (1966). For later works on this line, see for example (Cresswell 1988) and (Humberstone 1995).

But what is also interesting is that, even without name, this notion appears explicitly in the Square of Oppositions. What I want to show here is that paraconsistent negation seems quite natural in the context of the Square and vice-versa: the Square seems more natural if we observe that the O-corner can be interpreted as a paraconsistent negation. From this point of view, I will not argue for a Triangle instead of a Square. I will consider Triangles only in the broader context of a Hexagon. This paraconsistent view of the O-corner fits well in Blanché's Hexagon and we can even construct a more sophisticated geometrical object which explains quite well the relations between modalities and negations. This will be described in the last section.

2. Three oppositions and three negations

According to Aristotle's definitions two propositions P and Q are:

- *contradictories* iff they cannot both be true and cannot both be false.
- *contraries* iff they can both be false, but cannot both be true.
- *subcontraries* iff they can both be true, but cannot both be false.

Let us introduce some related definitions. A logical operator # is a

- contradictory forming operator, or *contradictory operator* for short, iff for every proposition P, P and $\#P$ are contradictories,
- *contrary operator* iff there is a proposition P, such that P and $\#P$ are false and for every proposition Q, Q and $\#Q$ cannot both be true.
- *subcontrary operator* iff there is a proposition P, such that P and $\#P$ are true and for every proposition Q, Q and $\#Q$ cannot both be false.

The Peruvian philosopher Francisco Miró Quesada has introduced the terminology "paraconsistent negation" and also the terminology "paracomplete negation"[7]. According to him, a negation $\sim$ is *paraconsistent* iff there is a proposition P such that P and $\sim P$ can both be true and a negation $\sim$ is *paracomplete* iff there is a proposition P such that P and $\sim P$ can both be false.

[7] This terminology was introduced by Quesada in 1975 in a letter to Newton da Costa and became known through the work of the latter, see e.g. (Loparic and da Costa 1984) and (Grana 1990).

We can establish a clear one-to-one correspondence between logical operators defined from the three Aristotelian notions of opposition and three kinds of negation: classical negation corresponding to the notion of contradictory operator, paracomplete negation to contrary operator and paraconsistent negation to subcontrary operator.

This correspondence is not perfect since a paraconsistent negation, according to Quesada's definitions, can also be a paracomplete one, but following our above definitions a subcontrary operator cannot be at the same time a contrary one. In fact Quesada also introduced the notion of *non-alethic negation*, it is a negation that is both paraconsistent and paracomplete. Let us say that a negation is a *proper paraconsistent* negation iff it is paraconsistent but not non-alethic and we introduce in a similar way the notion of *proper paracomplete* negation. This time we have a nice one-to-one correspondence between three kinds of negations and the three Aristotelian notions of oppositions via the three related notions of logical operators.

One may be against this kind of correspondence claiming that there is only one kind of negation, classical negation, and that proper paraconsistent and paracomplete negations are not negations. In fact Hartley Slater (1995) claimed that paraconsistent negations are not negations *because* they are only subcontrary operators. I think that, funnily enough, we can also claim exactly the contrary: paraconsistent negations are negations *because* they are subcontrary operators. This last claim is based on the idea that it is difficult to dissociate negation from opposition, that the background of negation is opposition and therefore if there are three kinds of oppositions there must also be three kinds of negations.

I don't think that we can really claim that paraconsistent and paracomplete negations (even non-alethic ones) are *in general* too weak to be called negations. Maybe it will be better to say that *some of them* are too weak. But in this case we loose the interesting connection between the Aristotelian notions of oppositions and negation. This connection is not only interesting from an historical point of view but also because this is a way of founding a theory of negation which allows paraconsistent and paracomplete negations to be considered as negations. At the present time we don't have any basis for such a pluralist theory of negation, there is no general definition of negation which includes classical, paracomplete and paraconsistent negations.

It seems to me that the connection between Aristotelian notions of oppositions and negation should not be broken anyway. If we claim that only some of the proper paraconsistent negations and proper paracomplete negations are negations, we should also consider that only some of the contrary operators and subcontrary operators are operators of oppositions, in other words, that contrariety and subcontrariety do not always express oppositions.

This is sound and not necessarily against Aristotle who was considering only some specific relations of contrariety and subcontrariety, since his theory was based only on some special propositions (universal affirmatives, universal negatives, particular affirmatives and particular negatives). Nevertheless Aristotle's theory itself presents several drawbacks.

3. Some controversies about the theory of oppositions

Aristotle's theory of oppositions is not very clear. Let us recall that Aristotle does not introduce explicitly the notion of "subcontraries", but refers to them only indirectly as "contradictories of contraries"; moreover he does not really consider them as opposed:

> Verbally four kinds of opposition are possible, viz. universal affirmative to universal negative, universal affirmative to particular negative, particular affirmative to universal negative and particular affirmative to particular negative: but really there are only three: for the particular affirmative is only verbally opposed to the particular negative. Of the genuine opposites I call those which are universal *contraries*, e.g. 'every science is good', 'no science is good'; the others I call *contradictories*. (Aristotle, *Prior Analytics*, 63b21-30)

One may think that the reason why Aristotle considers "contraries" as opposites and not "subcontraries" is related to the fact that "contraries" are incompatible, they respect the principle of contradiction, although they do not respect the principle of excluded middle. It seems that Aristotle defends an asymmetrical view, privileging the principle of contradiction over the principle of excluded middle.

However from the point of view of modern formal logic, everything is symmetrical, or better, dual, in such a way that it makes no sense to say that contraries are opposed and subcontraries are not.

Aristotle's theory bears also some small incoherencies from the modern viewpoint. For example, as pointed out by Sanford (1968), a universal affirmative A is not necessarily contrary of a universal negative E: if we consider a universal affirmative which is a logical truth, it can never be false, so there are no propositions which are contraries of A[8].

Also Aristotle mixes these two notions of oppositions (contradiction and contrariety) based on truth and falsity with some other kinds of oppositions. For example in the *Categories* (11b17), he considers four species of oppositions:

- correlation, e.g. *double* vs. *half*
- contrariety, e.g. *good* vs. *bad*
- privation, e.g. *blind* vs. *sighted*
- contradiction, e.g. *He sits* vs. *He does not sit*

Let us try to limit ourselves to a theory of oppositions based on truth and falsity. Can we say that another relation which appears through the doctrine of the Square (but not in Aristotle), subalternation, is a relation of opposition? Let us recall that a proposition P is *subaltern* to a proposition Q iff Q implies P. Q is sometimes called *superaltern* of P. I think that neither subalternation nor superalternation can be considered as relations of opposition. For example P is subaltern of $P \wedge Q$, and it does not really make sense to consider them as opposed.

Note that according to the definition of subcontrariety, P and $P \wedge Q$ are subcontraries, and also two tautologies are subcontraries. Similar problems happen with contrariety. So I think we have to improve the definitions by excluding subalterns and superalterns from subcontraries and contraries.

If we do not consider subalternation and superlaternation as oppositions, Blanché's Hexagon seems a better representation of the relations of oppositions than the traditional Square, at least if we see it rather as a Star made of one Triangle of Contrariety and one Triangle of Subcontrariety. The sides of Blanché's Hexagon are relations of subalternation or superalternation, but that is not what is important, we can erase these sides and just stay with the Star, which represents only oppositions.

From this point of view I don't agree with the revised theory of oppositions presented by Avi Sion. He says that:

> By the 'opposition' of two propositions, is meant: the exact logical relation existing between them – whether the truth or falsehood of either affects, or not, the truth or falsehood of the other.
>
> In this context, note, the expression 'opposition' is a technical term not necessarily connoting conflict. We commonly say of two statements that they are 'opposite',

[8] There are other problems with the Square of Oppositions, such that as what happens if the extension of the subject is void, etc. See e.g. (Parsons, 1999).

> in the sense of incompatible. But there, the meaning is wider; it refers to any mental confrontation, any logical face-off, between distinguishable propositions. In this sense, even forms which imply each other may be viewed as 'opposed' by virtue of their contradistinction, though to a much lesser degree than contradictories. Thus, the various relations of opposition make up a continuum (Sion 1996).

According to Sion, there are six relations of opposition: contradiction, contrariety, subcontrariety, subalternation, impliance and unconnectedeness. Here is his definition of this last concept:

> Unconnectedeness (or neutrality): two propositions are 'opposed' in this way, if neither formally implies the other, and they are not incompatible, and they are not exhaustive (Sion 1996).

In fact, according to this definition, two atomic propositions are unconnected, and must be considered as opposites, like "Snow is white" and "The sky is blue", or "John likes cheese" and "John likes wine". Obviously we are going too far and confusing here negation with distinction, maybe coming back to Plato's theory in the *Sophist* where negation is identified with otherness.

The standard definition of *opposite* runs as follows:

> A person or thing that is *as different as possible* from someone or something else: The colors 'black' and 'white' are opposites" (Longman dictionary of contemporary English. Italics are mine. – *J.-Y.B.*).

According to this definition, opposition is based on difference, but on *strong* difference. As we have here a matter of degree, we may be led to a kind of sorites paradox. So maybe it will be better to avoid such kind of degrees of difference.

Let us restrict ourselves anyway to the three main notions of oppositions: contradiction, contrariety and subcontrariety. Already here we have some problems, since some of these oppositions may appear too weak, even excluding subalternation and superalternation.

For example, in classical logic, P and P?Q are subcontraries: obviously they cannot be false together, but they can be true together, when P is true and Q is true. So "God exists" and "If God exists, Satan exists" are subcontraries. Another example of subcontaries are P and $\neg P \vee \neg Q$: "God exists" and "God does not exist or Satan does not exist".

Examples of contraries are P and $\neg P \wedge Q$: “God exists” and “God does not exist and Satan exists”; or P and $\neg P \wedge \neg Q$: “God exists” and “God does not exist and Satan does not exist”.

I think that we can say that contrariety and subcontrariety express sometimes some notions of opposition which are quite weak but it seems that we may still argue that they express a kind of opposition and we can also argue that there are correlated paraconsistent and paracomplete negations corresponding to them. In particular there are such negations within classical logic, as shown by the above examples[9].

4. The O-corner within the Octagonal and the Stellar Dodecahedron of Oppositions

The notions of opposition presented in the traditional Square of Oppositions are oppositions between quantified propositions. In the Square of Modalities they express oppositions between modal propositions. The oppositions between a proposition and its negations (whether classical, paraconsistent and paracomplete) do not appear in the Square. In the Square of Modalities, if we see the E-corner as a paracomplete negation, intuitionistic negation in the case of S4, this negation (i.e. the negation $\sim P$ of a proposition P) appears as contrary to necessity (i.e. the necessitation $\Box P$ of the proposition P). But what we want to express is the opposition between $\sim P$ and P. However P does not appear in the Square of Oppositions. One possibility would be to add P and $\neg P$, the classical negation, to the Square in the following way:

Figure 4.

See below.

However this figure does not look very nice. To get a better result, we consider three Hexagons constructed with the same idea underlying Blanché’s Hexagon, i.e. with one Triangle of Contrariety and one Triangle of Subcontariety. Since we are not directly interested in subalternation, we will rather consider them as Stars. The first Star is in fact the one that can be found in Blanché’s Hexagon:

Figure 5.

See below.

[9] The notions of opposition from the Square have been used to explain the relations between binary connectives of classical logic, see e.g. (Blanché 1957b).

Non-Contingency
$\Box P \vee \neg\Diamond P$

Paracomplete negation

Necessity
$\Box P$

Impossibility
$\neg\Diamond P$

P

$\neg P$

$\Diamond P$
Possibility
Paraconsistent negation

$\neg\Box P$
???

$\Diamond P \wedge \neg\Box P$
Contingency

Figure 4. The octagon of modalities

$\Box P \vee \neg\Diamond P$

$\Box P$

$\neg\Diamond P$

$\Diamond P$

$\neg\Box P$

$\Diamond P \wedge \neg\Box P$

Figure 5. Blanche star of oppositions

The two following Stars are, on the one hand the Star establishing the connections between P, the classical negation $\neg P$ and the paracomplete negation $\neg\Diamond P$, and on the other hand the Star establishing the connections between P, the classical negation $\neg P$, and the paraconsistent negation $\neg\Box P$:

$P \vee \neg\Diamond P$

P $\qquad\qquad$ $\neg\Diamond P$

$\Diamond P$ $\qquad\qquad$ $\neg P$

$\Diamond P \wedge \neg P$

Figure 6. Paracomplete star of oppositions

$\Box P \vee \neg P$

$\Box P$ $\qquad\qquad$ $\neg P$

P $\qquad\qquad$ $\neg\Box P$

$P \wedge \neg\Box P$

Figure 7. Paraconsistent star of oppositions

Among the 18 vertices of these three Stars, 6 appear two times. So if we link these three Stars together in a three-dimensional way by putting together the vertices appearing two times we get an object with 12 vertices. The three Stars are tied together by 6 relations of contradiction. The corresponding polyhedron is a Stellar Dodecahedron (the first stellation of the rhombic dodecahedron precisely).

This Stellar Dodecahedron of Oppositions permits to have a better understanding of the concept of negation in its plurality and of its relation with possibility and necessity, by presenting the full oppositions between 12 basic unary connectives.

5. Conclusions

Let us summarize the main conclusions of this investigation:

i) The nameless corner of the Square of Oppositions is a paraconsistent negation.

ii) The oppositions either at the level of quantifiers or modalities are better represented by Blanché's Hexagon of Oppositions.

iii) The full relations of oppositions between modalities and negations are better represented by a Stellar Dodecahedron of Oppositions.

iv) The three notions of oppositions which appear in the Square, the Hexagon and the Dodecahedron, namely contradiction, contrariety and subcontrariety, correspond to three notions of negations, respectively, classical negation, paracomplete negation and paraconsistent negation.

v) It makes no sense to argue that contrariety is a relation of opposition, but that subcontrariety is not.

vi) Subalternation and supalternation are not relations of opposition.

REFERENCES

A.I. Arruda. *N.A.Vasiliev e a lógica paraconsistente.* Center of Logic of the University of Campinas, Campinas, 1990.

J.-Y.Béziau. «What is paraconsistent logic?» // *Frontiers of paraconsistent logic*, D.Batens et al. (eds). Research Studies Press, Badlock, 2000, pp.95-112.

J.-Y.Béziau. «Are paraconsistent negations negations?» in *Paraconsistency, the logical way to the inconsistent.* W.Carnielli et al. (eds). Marcel Dekker, New York, 2002.

J.-Y.Béziau. «S5 is a paraconsistent logic and so is first-order classical logic» // *Logical Investigations.* 9 (2002). P.23-31.

J.-Y.Béziau. «Paraconsistent logic from a modal viewpoint»: Talk presented at the ESSLI 2002. Trento, August 2002, www.cle.unicamp.br/e-prints/abstract_16.html. To appear in the *Journal of Applied Logic.*

J.-Y.Béziau. «Paraconsistent logic! (A reply to Slater)», submitted.

R.Blanché. «Sur l'opposition des concepts» // *Theoria*, 19 (1953). P.89-130.

R.Blanché. «Opposition et négation» // *Revue Philosophique*, 167 (1957). P.187-216.
R.Blanché. «Sur la structuration du tableau des connectifs interpropositionnels binaires» // *Journal of Symbolic Logic*, 22 (1957). P.17-18.
R.Blanché.*ructures intellectuelles. Essai sur l'organisation systématique des concepts.* Vrin, Paris, 1966.
W.Carnielli and C.Pizzi. *Modalità e multimodalità.* Franco Angeli, Milan, 2001.
R.M.Chisholm. «Supererogation and offence: a conceptual scheme for ethics» // *Ratio* 5 (1963). P.1-14.
M.J.Cresswell. «Necessity and contingency», *Studia Logica*, 47 (1988), pp.145-149.
K.Dosen. «Negation and impossibility»: in *Essays on philosophy and logic*, J.Perzanowski (ed), Jagellonian University Press, Cracow, 1987. P.85-91.
K.Dosen. «Negation in the light of modal logic»: in *What is negation?*, D.Gabbay and H.Wansing (eds). Kluwer, Dordrecht, 1999. P.77-86.
J.-L.Gardies. *Essai sur la logique des modalités*, PUF, Paris, 1979.
K.Gödel. «Eine Interpretation des intuitionistischen Aussagenkalküls» // *Ergebnisse eines mathematischen Kolloquiums,* 4 (1933). P.34-40.
N.Grana. *Contradizzione e incompletezza*, Liguori, Naples, 1990.
J.-B.Grize. «Des carrés qui ne tournent pas rond et de quelques autres» // *Travaux du centre de recherches sémiologiques*, 56 (1988). P.139-152.
J.Hoeksema. «Blocking Effects and Polarity Sensitivity»: in: *JFAK. Essays dedicated to Johan van Benthem on the Occasion of his 50th Birthday.* Vossiuspers/Amsterdam University Press, 1999.
L.R.Horn. *A natural history of negation*, UCP, Chicago, 1989.
I.L.Humberstone. «The logic of non-contingency» // *Notre Dame Journal of Formal Logic*, 36 (1995). P.214-229.
I.L.Humberstone. «Modality»: in *Handbook of Analytical Philosophy*, F.Jackson and M.Smith, Oxford University Press, forthcoming.
O.Jespersen. «Negation in English and other languages» // *Historiskfilologiske Meddeleser*, 1 (1917). P.1-151.
A.Loparic and N.C.A. da Costa. «Paraconsistency, paracompleteness and valuations» // *Logique et Analyse*, 106 (1984). P.119-139.
I.Lucchese and N.Grana. *Attraverso lo specchio*, L'Orientale Editrice, Naples, 2000.
J.Lukasiewicz. 1953, «A system of modal logic» // *Journal of Computing Systems*, 1, P.111-149.
H.Montgomery and R.Routley. «Contingency and non-contingency bases for normal modal logics» // *Logique et Analyse,* 9 (1966). P.341-344.
T.Parsons. «The traditional square of opposition» // *Stanford Encyclopedia of Philosophy*, 1999.
D.H.Sanford. «Contraries and subcontraries» // *Nous*, 2 (1968). P.95-96.
A.Sion. *Future logic.* Geneva, 1996.
B.H.Slater, «Paraconsistent logics?» // *Journal of Philosophical Logic*, 24 (1995). P.451-454.

N.Vasiliev. *On particular judgments, the triangle of oppositions and the law of the excluded fourth* (Russian)[10]. Kazan University Press, 1910.
M.Wajsberg. «Ein erweiteter Klassenkalkül» // *Monatschefte für Mathematik und Physik*, 40 (1933). P.113-126.

Aknowledgements

This work was supported by a grant of the Swiss National Science Foundation. The author is member of the LOCIA project (CPNq – Brazil).

Thank you to Johan van Benthem, Newton C.A. da Costa, Nicola Grana, Jean-Blaise Grize, Lloyd Humberstone, Joao Marcos, Claudio Pizzi, Hartley Slater and Patrick Suppes for comments and discussions.

Special thanks to Alessio Moretti and Hans Smessaert. Both made important remarks and noticed that it was possible to construct other stars and other polyhedra, these constructions will be presented in a forthcoming joint work.

Institute of Logic and Semiological Research Center
University of Neuchâtel, Espace Louis Agassiz 1
CH - 2000 Neuchâtel, Switzerland
jean-yves.beziau@unine.ch

---

[10] His booklet has been (partially) translated in Portuguese in (Arruda 1990) and is discussed in (Lucchese and Grana 2000).

A. Blinov[1]

RATIONALITIES IN CONFLICT: COMPENSATORY LOGICO-COGNITIVE IRRATIONALITY IN INTERACTIVE CONTEXTS

The aim of the article is to make a couple of steps toward a theory of conflicts between two different varieties of rationality, - namely: (i) logico-cognitive, or *epistemic* rationality[2] and (ii) rationality, all things considered, or *aggregative* rationality.

The main interest of such a theory, as I perceive it, may be that, when applied to interactive contexts, it provides a basis for plausible explanations of some kinds of empirically observed irrationalities in human thought and behaviour.

1) I will begin with a brief exposition of a theory of the two rationalities. (2) Then I will construct and discuss a paradigmatic interactive situation in which for all the participants it is rational, all things considered, to jointly indulge in an epistemic irrationality, because such a choice restores Pareto-efficiency of the initially Pareto-inefficient situation. (3) Finally, I will discuss the significance and scope of possible applications of the paradigmatic model. In particular, I will argue that the paradigmatic model can provide explanations for the persistence of at least some sorts of ideologies.

1. Epistemic vs aggregative rationality

I borrow from Richard Foley his characterisation of the distinction between epistemic and aggregative rationality[3]. The characterisation is this:

All judgments of rationality are judgments about how effectively an individual is pursuing some goal. However, such judgments are commonly elliptical. For one thing, they commonly fail to make

---

[1] University of New England, NSW, Australia.

[2] For an enlightening discussion of reasons for assimilating a person's logical principles with his or her cognitive [= epistemic] rationality, see, e.g., Korner (1984), pp.42-62. One pivotal point of the discussion is this: "The principles which determine a person's conception of logical consistency, i.e., the principles of his logic, and the cognitively supreme principles which determine his categorial framework, including his logic, are his standards of cognitive rationality." (p.44)

[3] Foley (1987)

explicit what goals are in question.[4] To avoid confusion one should strive, when pronouncing a judgment of rationality, explicitly to relativise it to a goal. When the goal in question is epistemic, then the judgment is one of *epistemic* rationality.

What goals are epistemic? Foley takes it that there is only one *purely* epistemic goal, namely, that of *now believing true beliefs and now not believing false beliefs*. I think that I am not prepared to agree with the 'only one' part of Foley's claim, but it does not matter for my purposes here. What matters is that we all seem to have more or less clear intuitions about which goals are epistemic and which not. For example, two further goals are unmistakably epistemic, though not necessarily purely so: (ii) *acquiring as much knowledge as possible*; (iii) *developing one's reasoning ability (or more generally: cognitive abilities at large) as high as possible*.

On the other hand, one can have more than one goal simultaneously. Then judgments about how effectively she is pursuing the whole constellation of her several (weighted) goals are judgments of *rationality, all things considered*, or, to have a regular adjective, *aggregative rationality*.

It should be clear that the two notions of rationality - epistemic and aggregative - are distinct. More than that, it is *prima facie* possible that on some occasions the two clash with one another: say, a belief which is aggregatively rational for an individual on a specific occasion to maintain may not be epistemically rational for him, on the same occasion, to maintain.

2. The game of the Good Jailer: An epistemic dilemma for the prisoners

It is relatively safe to ignore the distinction between the two rationalities when treating one-agent contexts. Actually, there is a decision-theoretic result, namely, Savage-Good theorem that guarantees impossibility of a conflict between aggregative rationality and one variety of epistemic rationality under some well-specified conditions: In a situation where a single utility-maximiser is to take a decision, new information can never be harmful for her, given that the information is correct and costless.

Admittedly, even remaining within the domain of one-agent contexts, one can think of a situation like that of Pascal's Wager where it is rational, all things considered, for the individual to come to maintain a belief which is epistemically irrational for her to maintain. But

[4] One further thing, by Foley's lights, is the perspective of the judgment, but for my purposes here we can forget about it, - at least at the first stages.

what makes this possible is the unusual assumption that there exists a being who (i) is endowed with the supernatural ability of having immediate access to the agent's mind, and (ii) who can reward or punish the agent for having this or that belief.

The picture changes dramatically when we move from one-agent to many-agent [= interactive] situations, that is, to the domain of Game Theory. The fact that the value of knowledge can be negative in an interactive context is well-documented in the literature.[5]

Let me come up with a situation that is quite paradigmatic in this respect, but which, to my knowledge, was never discussed in the literature. The situation is a variation on the famous Prisoners' Dilemma. The Prisoners' Dilemma is this: On suspicion of having jointly committed a crime, two persons, say Ann and Peter, have been detained and put into separate cells so that they are unable to communicate. Common knowledge for both is at least this: If one confesses while the other does not, he who has confessed will be immediately set free for helping the investigator. The other will be put away for ten years. If both confess, both will be put away for nine years. If both keep silence, both will be locked up for a year for a misdemeanour, since there is not enough evidence to support the more serious suspicion.

The names of the two strategies on Table 1 are abbreviations for 'cooperate' and 'defect', respectively. As is well known, the unique Nash equilibrium for this game is that both players should defect. This implies that it is rational for each player to defect, which is also supported by the fact that, for each player, D strictly dominates C. So if they are rational, they will both defect and spend in jail nine years each.

		Peter	
		C	D
Ann	C	-1, -1	-10, 0
	D	0, -10	-9, -9

Table 1.

Such is the standard Prisoners' Dilemma. My variation is this: Suppose that Ann and Peter are members of a gang which is governed

[5] See, among others, Hirshleifer (1971), Kamien a.o. (1990: 1), Kamien a.o. (1990: 2), Neyman (1991), Bassan and Scarsini (1995), Gossner (1997), Korilis a.o. (1999).

in a democratic fashion. In particular, a couple of days after Ann and Peter's arrest there took place a general meeting of the gang. The only item of the agenda was a proposal to consider collaboration of a jailed member of the gang with the investigator as a capital offence which is to be punished by death. If the proposal has been adopted by the meeting, and this has become common knowledge between the two players, then of course this knowledge should result in a drastic change of their strategic situation. Suppose, for the sake of smooth calculation, that each of the two players assesses the negative utility of their own death as equal to 50 years in jail. Then the new situation is represented by Table 2:

		Peter C	Peter D
Ann	C	-1, -1	-10, -50
	D	-50, -10	-59, -59

Table 2.

Now both the logic of Nash equilibrium and that of strict dominance recommend that each should cooperate. So if they are rational they will both cooperate (that is, keep silence) and spend in jail one year each.

Unfortunately, the players do not know the poll's result, but being old-standing members of the gang as they are, they know the mentality of their fellow gangsters, so that they share the belief that is represented by subjective probability of .5 that the meeting has adopted the proposal and subjective probability of .5 that the proposal was not adopted. The fact that they share this belief is common knowledge between them. As can be easily calculated, this still leaves them, *qua* maximisers of expected utility, with recommendation that each should cooperate.

Let us dub the resulting game 'The PD/CP under the Veil of Ignorance', where 'PD' stand for 'Prisoners' Dilemma' and 'CD' for 'Capital Punishment'. Of course, the PD/CP under the Veil of Ignorance is a typical game with incomplete information in Harsanyi's sense.

So far so good. But this is not the end of the story. Suppose now that the two prisoners are offered one more option. It happens that one of their jailers, out of sheer sympathy with the two hapless creatures, comes up with a suggestion. He can inquire and report to them about the meeting's result. To handle the issue with perfect equity, though, he will report either to both - if each opts to learn, or to neither - if at least one of the two opts to remain ignorant. The offer and the fact that both detainees completely trust the jailer's information are common knowledge between them.

Call the resulting game 'The Kind Jailer'. To grasp its formal structure, consider first the game 'PD/CP without the Veil of Ignorance' which is exactly like 'PD/CP with the Veil of Ignorance' except that the veil of ignorance [= the two-member information set] is removed: whichever option (that is, the PD or the CP) the Nature chooses, the two prisoners will learn the choice. Now, the Kind Jailer is the game in which the two prisoners start with having a choice between playing the PD/CP with, or without, the Veil of Ignorance. Their initial (simultaneous) move is voicing their preferences between the two options. After that move, they proceed to play the PD/CP without the Veil of Ignorance iff both preferred to do so at the initial move. Otherwise, they play the PD/CP with the Veil of Ignorance.

Now, as to the Kind Jailer, the main question is 'What is it rational for each prisoner to do: accept the jailer's offer or refuse it?' The question is elliptical, which cannot be tolerated given the situation at issue. We should make the goal explicit, and this will result in at least two different complete (non-elliptical) questions:

Q1 What is it rational for each prisoner - say, for Ann, - to do relative to the epistemic goal of acquiring as much knowledge as possible?

Q2 What is it rational for each prisoner - say, for Ann, - to do relative to the whole constellation of her goals, that is, what is it rational for her to do, all things considered?

If each values knowledge positively, but sufficiently lower than freedom and/or life, and this is common knowledge between the two, then the answers to the two questions differ, the answer to Q1 being 'Accept the offer', and the answer to Q2, 'Refuse it'. This is so because under ignorance, aggregative rationality recommends each to cooperate, which results in one year in jail for each. On the other hand, given their subjective probabilities, the offer brings the 50-out-of-100 risk that they will come to common knowledge that the meeting failed to introduce capital punishment, and then it will be aggregatively rational for each to defect, which will keep each in jail for nine years. The risk being too high, aggregative rationality recommends each to remain ignorant.[6] Thus, shared ignorance, and even shared epistemic irrationality, can easily be a boon rather than a bane, all things considered, in an interactive situation.

3. The game of the Good Jailer: Possible generalisations and applications

The paradigmatic situation of the Good Jailer derives its significance from the fact that it seems to be generalisable along no fewer dimensions than the original Prisoners' Dilemma. Let me cite some crucial dimensions:

(1) It generalises to other epistemic goals, that is, to other *varieties of epistemic rationality*. For example, there is a result[7] to the effect that if, in a finitely repeated Prisoners' Dilemma, there are bounds (possibly very large) to the complexity of the strategies that the players may use, then there is a Nash equilibrium that yields a payoff close to the cooperative one. Now, if we try and put a real-life interpretation on this mathematical result, then one realistic reason why the players' strategies should be of limited complexity may be that the players have the epistemic imperfection of being of low intelligence: they are just not intelligent enough to think of and implement very complex strategies. Under this interpretation of the result at issue, simple-mindedness is on a par with incompleteness of knowledge in the sense that it is an epistemic imperfection that, when shared by all the participants, can be beneficial in Pareto-inefficient interactive contexts. Consequently, it may occur, under suitable interactive circumstances, that it is aggregatively rational for all the participants to jointly indulge in a corresponding variety of epistemic irrationality, e.g., that of refraining from developing one's intelligence as high as possible.

(2) Secondly, exactly in the same way in which its core component, the Prisoners' Dilemma, does, the Good Jailer generalises to the situations with *more than two players*, which makes it relevant for the whole range of problems of collective action.

(3) Thirdly, the *precise pattern of the situation* can vary, the only invariant required being *Pareto-inefficiency* of the core situation. It is a straightforward observation that for every Pareto-inefficient interactive situation, there exists a way of augmenting it with a stage of epistemic preplay such that the augmented situation is Pareto-effi-

[6] Technically, it means that opting for the PD/CP with the Veil of Ignorance at the initial move is part of the unique Nash equilibrium of the Kind Jailer. This unique Nash equilibrium is the strategy profile in which each player's complete strategy is 'First, reject the jailer's offer; then, cooperate under the veil of ignorance'.

[7] See Neyman (1985).

cient, but the cost of restoration of Pareto-efficiency is that part of the Pareto-efficient Nash-equilibrium path of the augmented game is for all the participants to jointly commit an epistemic irrationality of some sort or other[8].

As to possible applications, my contention is that, given all possible generalisations of the Good Jailer, the formal models of its kind can provide a clue for explaining some important sorts of empirically observable irrationalities in human thought and reasoning – in the same way in which the formal model of the Prisoners' Dilemma provides a clue for explaining some important kinds of real-life strategic situations.

Given the limitations of this paper, I will cite just one, but important, area of possible application. There is a problem in current economic theorising which is highly relevant both to cognitive science and to the theory of rationalities in conflict I am discussing here. The problem is that, more often than not, real-life markets are imperfect in that sense of perfection that has been ascribed to them by neoclassical theory. One implication is that the agents' beliefs begin to matter, whereas they were irrelevant under the assumption of perfection. Now, the question is 'Why is it that very often belief systems that determine the choices of real-life market agents happen to be less than rational epistemically, being myths, taboos, prejudices and other such theories that can be grouped under the umbrella term of *ideologies*?'[9]

I think that an interesting answer can be found along the lines of the theory of rationalities in conflict, the rough outline of the answer being this: Imperfect markets fail to guarantee Pareto-efficiency. But as we have seen, if an interactive situation is Pareto-inefficient, then a jointly committed epistemic irrationality of the right sort can be a remedy. Ideologies may happen to be exactly such sort of epistemically irrational belief systems that, when maintained by all or most of the participants, compensate for the Pareto-inefficiency of the initial market situation.

In other words, some sorts of empirically observed epistemic irrationality may happen to have an impeccable rationale: they render services to aggregative rationality. And there seems to be no reason why this format of explaining irrationality could not be transferred from imperfect markets to further areas of collective action and even to coordination problems with several equilibria.

---

[8] For some formal aspects of the issue, see Blinov (2001).

[9] For an enlightening discussion of this question, see North (1998), pp.713-721. North seeks an answer along different lines than mine, though.

REFERENCES

1. Bassan, B, and Scarsini, M., 'On the value of information in multi-agent decision theory', *Journal of Mathematical Economics* 24, 557-576, 1995.
2. Blinov, A. 'Games with common belief on payoff function', *Logical Investigations*, Moscow: Nauka, 2001, pp.278-281.
3. Foley, R., *The Theory of Epistemic Rationality*, Harvard University Press, 1987.
4. Gossner, O., 'Comparison of information structures', *Games and Economic Behavior*, 1997.
5. Hirshleifer, J., 'The private and social value of information and the reward to inventive activity', *American Economic Review* 61, 561-574, 1971.
6. Kamien, M. I., Tauman, Y., and Zamir, S., 'On the value of information in a strategic conflict', *Games and Economic Behavior* 2, 129-153, 1990.
7. Kamien, M. I., Tauman, Y., and Zamir, S., 'Information transmission', in Ichiishi, T., Neyman, A., and Tauman, Y. (eds.), *Game Theory and Applications*, Academic Press, 273-281, 1990.
9. Korilis, Y. A., Lazar, A. A. and Orda, A., 'Avoiding the Braess paradox in non-cooperative networks', *Journal of Applied Probability* 36, 211-222, 1999.
10. Korner, S., *Metaphysics: Its Structure and Function*, Cambridge University Press, 1984.
11. Neyman, A. 'Bounded complexity justifies cooperation in the finitely repeated Prisoners' Dilemma', *Economic Letters*, 19 (1985).
12. Neyman, A., 'The positive value of information', *Games and Economic Behavior* 3, 350-355, 1991.
13. North, D. C., 'Institutions and economics', in *Blackwell Companion to Cognitive Science*, W. Bechtel and G. Graham, eds., Blackwell Publishers, 1998

V.L.Vasyukov

EFFECTS IN QUANTUM LOGIC OF OBSERVABLES*

Abstract. *In the paper a modal and bimodal extension of quantum logic of observables QLO is proposed. The former allows to obtain the syntactic counterpart of D.Mundici's result on embedding of C*-algebra into an MV-algebra while the latter has as its algebraic counterpart quantum MV-algebra of R.Giumtini. The soundness and completeness of both extensions is proved in respect to the set-theoretical semantics developed early for QLO.*

1. Introduction

In [4] D.Mundici shown that every approximately dimensional C^*-algebra with lattice dimensional group can be embedded into a countable MV algebra. Since such an MV algebra is also a Lindenbaum algebra of Łukasiewicz infinite-valued calculus Ł_∞ (the notion of MV algebra was introduced by C.C.Chang in order to provide an algebraic proof of the completeness theorem for Ł_∞) then this result would be treated as a tool for considering properties of quantum systems in the framework of Ł_∞. Needless to say that from the physical point of view in this case we ought to consider an elements of MV algebra as a class of operators whose spectrum is contained in the real interval [0,1].

But the lack of developed interpretation of such operators forces us to approach those as so-called *effects* of a Hilbert space which are bounded linear operators such that for an every effect E and for all density operators D, $0 \leq \mathrm{Tr}(DE) \leq 1$ (Born probability). It was shown by R.Giuntini [2] that the class of all effects of any Hilbert space turns out to be an instance of an algebraic structure called *quantum MV algebras*. Those retain some important properties of MV algebras, while violating the crucial axiom of MV algebras: the so-called Łukasiewicz axiom. Quantum MV algebras represent non-idempotent extension of orthomodular lattices just as MV algebras represent non-idempotent extensions of Boolean algebras.

Thus, in case of transferring Mundici's method onto quantum MV algebra of effects we can interpret those as determining a kind of Born probabilities for quantum observables represented by operators in Hilbert space. In fact, those probabilities would be considered as probabilities for observables to have as the result of measurement a certain

* The work is supported by RFBR grant No 01-06-80006.

magnitude contained in the real line of numbers (as projectors in Hilbert space would be regarding as "yes-no" answering the same question).

2. Quantum Logic of Observables

We obtain the syntactic version of Mundici's result if we have recourse to the so-called quantum logic of observables QLO [5]. QLO is axiomatized by means of the following axiom schemes and the rules:

Ax1. $A \Rightarrow A$;

Ax2. $A \Leftrightarrow \neg\neg A$;

Ax3. $A\wedge(B\wedge C) \Leftrightarrow (A\wedge B)\wedge C$;
Ax4. $A\vee(B\vee C) \Leftrightarrow (A\vee B)\vee C$;
Ax5. $A\wedge(B\vee C) \Leftrightarrow (A\wedge B)\vee(A\wedge C)$;
Ax6. $\neg(A\vee\neg A) \Rightarrow B\wedge B$;
Ax7. $A\wedge\neg A \Rightarrow \neg(B\vee\neg B)$;
Ax8. $1\wedge A \Leftrightarrow A$
Ax9. $J_0 A \Leftrightarrow \neg(B\vee\neg B)$;
Ax10. $J_1 A \Leftrightarrow A$;
Ax11. $J_\alpha(A\wedge B) \Leftrightarrow J_\alpha B\wedge A$;
Ax12. $J_\alpha(A\vee B) \Leftrightarrow J_\alpha B\vee J_\alpha A$;
Ax13. $\neg J_\alpha A \Leftrightarrow J_\alpha \neg A$
Ax14. $J_{\alpha+\beta} A \Leftrightarrow J_\alpha A\vee J_\beta A$;
Ax15. $J_{\alpha\beta} A \Leftrightarrow J_\alpha J_\beta A$
Ax16. $\neg[(A\wedge B)\vee\neg(B\wedge A)]^2 \Leftrightarrow (A\vee\neg A)^2\wedge(B\vee\neg B)^2$ (A^2 means $A\wedge A$).

Rx1. $\dfrac{A \Rightarrow B}{\neg B \Rightarrow \neg A}$

Rx2. $\dfrac{A \Rightarrow B}{J_{|\alpha|} A \Rightarrow J_{|\alpha|} B}$

Rx3. $\dfrac{A \Rightarrow B \quad B \Rightarrow C}{A \Rightarrow C}$

Rx4. $\dfrac{A \Rightarrow B \quad C\Rightarrow D}{A\vee C \Rightarrow B\vee D}$

Rx5. $\dfrac{A\wedge A \Rightarrow B \quad C\wedge C \Rightarrow D}{(A\wedge A) \wedge (C\wedge C) \Rightarrow B\wedge D}$

Here $A \Rightarrow B$ means $\langle A,B\rangle \in$ L, where L is some logics, truth-value of $J_\alpha A$ is calculated as the result of multiplying truth-value of A on α being a real number.

Let Γ be a non-empty set of wff. A wff A is said to be QLO-*derivable* from Γ, $\Gamma\Rightarrow A$, if there exist $B_1,\ldots,B_n \in \Gamma$ such that

(a) either $B_1 \vee \ldots \vee B_n \Rightarrow A$;

(b) or $(B_1 \wedge \ldots \wedge B_n) \wedge (B_n \wedge \ldots \wedge B_1) \Rightarrow A$;

(c) or $J_{|\alpha_i|} B_i \Rightarrow A$, $i = 1,2,\ldots,n$.

If A is QLO-derivable from $\neg(A \vee \neg A)$ then A is QLO-*derivable* or is a QLO–*theorem* which writes $\Rightarrow A$. Γ is QLO–*consistent* if there is at least one wff not QLO–derivable from Γ, and QLO–*inconsistent* otherwise (it can be shown that Γ is QLO-consistent iff for no A do we have both $\Gamma \Rightarrow A$ and $\Gamma \Rightarrow \neg A$). Γ is QLO–*full* iff it is QLO–consistent and closed under $\vee$, $\wedge$, J and QLO–derivability, i.e. iff

(1) for some wff A, not $\Gamma \Rightarrow A$;

(2) if $A \in \Gamma$ and $A \Rightarrow B$, then $B \in \Gamma$:

(3) $A, B \in \Gamma$ implies $A \wedge B$, $A \vee B \in \Gamma$;

(4) $A \in \Gamma$ implies $J_{|\alpha|} A \in \Gamma$.

If $x \subseteq \Phi$ (where Φ is a set of wff) is QLO–full then

(i) $x \Rightarrow A$ iff $A \in x$;

(ii) $\neg(A \vee \neg A) \in x$, for all wff A.

QLO-full sets and QLO-derivability are linking with the following version of Lindenbaum's Lemma:

$\Gamma \Rightarrow A$ iff A belongs to QLO-full extension of Γ.

It is proved that if x is QLO-full and $\neg A \notin x$, then there exists a *QLO*-full set y such that $A \in y$, and for all B, either $\neg B \notin x$ or $B \notin y$.

QLO have some peculiarities featuring quantum orthologic. Both in QLO and quantum orthologic the proof of Lindenbaum's Lemma does not require such power tools as, for example, Zorn's Lemma, which was in case of orthologic regarded as unprecedented for logical systems. As to the QLO-full sets, then from topological point of view they are, in fact, proper filters and not the ultrafilters. This, in turn, leads that for both quantum orthologic and QLO there is not need in some version of an axiom of choice which is required to prove an existence of ultrafilters.

It is easy to see that an algebra corresponding to QLO be an algebra of observables satisfying the axioms of algebraic approach in [1]. If we define an equivalency of formulas A and B, $A \sim B$ as $+ A \Leftrightarrow B$ then denoting the set $A/_{\sim}$ as $[A]$ we obtain

$[A]+[B] = [A \vee B]$,

$[A]\circ[B] = [A \wedge B]$,

$-[A] = [\neg A]$, $0 = [\neg(A \vee \neg A)]$,

$1 = [1]$, $\alpha[A] = [J_{|\alpha|} A]$.

A structure $\boldsymbol{F} = \langle F,+,\circ,-,\alpha,0,1 \rangle$ (where $F = \{P/_{\sim}: P \text{ is a formula}\}$, $\alpha \in \mathbf{R}$) is an algebra (of observables) while $\boldsymbol{E} = \langle F,+,-,\alpha,0 \rangle$ be a vector (linear) space, 0 is a unit relative to $+$, and 1 is a unit relative to $\circ$.

3. Modal Quantum Logic of Effects

Let us modify our formulation of QLO by replacing Ax1 with

Ax1′. $\neg(A\vee B) \Leftrightarrow \neg A\vee\neg B$

The following theorems of QLO will be used in the sequel:

Bx1. $\neg(A\vee\neg A) \vee B \Leftrightarrow B$

It is easy to see that this modification does not lead to any change of QLO. As to the Ax1 then $A \Rightarrow A$ can be proved from Ax2 by means of Rx3. Bx1 is proved by means of Ax9, Ax10, Ax14.

To introduce effects into QLO we enrich the language of QLO with a unary operator Q and axiomatics of QLO with the following axiom schemes and the rule:

Ax17. $QA \Leftrightarrow QQA$
Ax18. $Q\neg A \Leftrightarrow 1\vee\neg QA$
Ax19. $Q1 \Leftrightarrow 1$
Ax20. $Q(A\vee B) \Leftrightarrow (QA\vee QB)$
Ax21. $\neg(B\vee\neg B) \Rightarrow QA \Rightarrow 1$
Ax22. $1 \Leftrightarrow 1\vee QA$

Rx6. $\dfrac{A \Rightarrow B}{QA \Rightarrow QB}$

Let us denote the system QLO + {Ax17-Ax23, Rx6} as QLO-MV (with Ax1′). In order to prove that QLO-MV really describes the effects let us firstly recall the algebraic structure responsible for those. According to P.Mangani [3] MV algebras can be defined in the following way:

$(MV1)$ $(a\oplus b) \oplus c = a\oplus(b \oplus c)$
$(MV2)$ $a\oplus 0 = a$
$(MV3)$ $a\oplus b = b\oplus a$
$(MV4)$ $a\oplus 1 = 1$
$(MV5)$ $(a^*)^* = a$
$(MV6)$ $0^* = 1$
$(MV7)$ $a\oplus a^* = 1$
$(MV8)$ $(a^*\oplus b)^*\oplus b = (a\oplus b^*)^*\oplus a$ *(Łukasiewicz axiom)*

As in QLO we define $[A] \oplus [B] = [QA\vee QB]$ and $[A]^* = [\neg QA]$.

Theorem 3.1. *A structure* $\mathcal{F} = \langle F, \oplus,^*,0,1\rangle$ *where* $F = \{P/_\sim$: *P is a formula prefixed with Q}.* $0 = [\neg(A\vee\neg A)]$, $1 = [1]$ *is an MV algebra.*

Proof. Associativity of $\oplus$ for $(MV1)$ follows from the definition of $\oplus$ and associativity of $\vee$ in QLO as well as commutativity for $(MV3)$. $(MV2)$ is fulfilled since $[A]\oplus 0$ is defined by $QA\vee Q\neg(A\vee\neg A) \Leftrightarrow Q(A\vee\neg(A\vee\neg A))$ and then by Bx1 it will be equivalent to QA which under the definition of P gives us $[A]$. In case of $(MV4)$ we have $QA\vee Q1 \Leftrightarrow QA\vee 1$ by Ax19. As to $(MV5)$ then $[A]^{**}$ is determined by $Q\neg Q\neg A$ and by Ax18, Ax17 it gives us $Q\neg Q\neg A \Leftrightarrow 1\vee\neg Q\neg A \Leftrightarrow 1\vee\neg(Q\neg A) \Leftrightarrow 1\vee\neg 1\vee QA$. But we obtain $1\vee\neg 1 \Leftrightarrow \neg\neg 1\vee\neg\neg\neg 1 \Leftrightarrow \neg(\neg 1\vee\neg\neg 1) \Leftrightarrow \neg(1\vee\neg 1)$ with the help of Ax2, Ax1'. So, by Bx1 we obtain $(1\vee\neg 1)\vee QA \Leftrightarrow QA$. $(MV6)$ follows from $Q\neg\neg(A\vee\neg A) \Leftrightarrow Q(A\vee\neg A) \Leftrightarrow QA\vee Q\neg A \Leftrightarrow QA\vee 1\vee\neg QA \Leftrightarrow 1$.

In order to obtain $(MV7)$ we have $QA\vee Q\neg A$ by the definition and Ax17. Then like in case of $(MV6)$ we get $QA\vee Q\neg A \Leftrightarrow 1$.

In case of Łukasiewicz axiom for the left part we have $Q\neg(Q\neg A\vee QB)\vee QB$ by the definitions and Ax17. Now by Ax18 and Ax17 we obtain $Q\neg(Q\neg A\vee QB)\vee QB \Leftrightarrow Q\neg Q\neg A\vee Q\neg QB\vee QB \Leftrightarrow 1\vee\neg Q\neg A\vee Q\neg QB\vee QB \Leftrightarrow 1\vee\neg(1\vee\neg QA)\vee 1\vee\neg QB\vee QB$. By Ax1', Ax2, Ax1' we have $1\vee\neg(1\vee\neg QA)\vee 1\vee\neg QB\vee QB \Leftrightarrow QA\vee 1 \Leftrightarrow 1$. For the right part we likewise obtain $Q\neg(Q\neg B\vee QA)\vee QA \Leftrightarrow QB\vee 1 \Leftrightarrow 1$ and this determines that Łukasiewicz axiom will be satisfied. □

In the sequel under wff we always mean a wff prefixed with Q.

Definition 3.2. Let Γ be a non-empty set of wff. A wff A is said to be QLO-MV-*derivable* from Γ, $\Gamma\Rightarrow A$, if there exist $B_1,\ldots,B_n\in\Gamma$ such that

(a) either $B_1\vee\ldots\vee B_n\Rightarrow A$;

(b) or $(B_1\wedge\ldots\wedge B_n)\wedge(B_n\wedge\ldots\wedge B_1)\Rightarrow A$;

(c) or $J_{|\alpha|}B_i\Rightarrow A$, $i = 1,2,\ldots,n$;

(d) or $QB_i\Rightarrow A$, $i = 1,2,\ldots,n$.

If A is QLO-MV-derivable from 1 then A is QLO-MV-*derivable* or is a QLO-MV-*theorem* which writes $\Rightarrow A$. Γ is QLO-MV-*consistent* if there is at least one wff not QLO-MV-derivable from Γ, and QLO-MV-*inconsistent* otherwise (it can be shown that Γ is QLO-MV-consistent iff for no A do we have both $\Gamma\Rightarrow A$ and $\Gamma\Rightarrow Q\neg A$). Γ is QLO-MV-*full* iff it is QLO-MV-consistent and closed under $\vee$, $\wedge$, J, Q and QLO-MV-derivability, i.e. iff

(1) for some wff A, not $\Gamma\Rightarrow A$;

(2) if $A\in\Gamma$ and $A\Rightarrow B$, then $B\in\Gamma$;

(3) $A,B\in\Gamma$ implies $A\wedge B$, $A\vee B\in\Gamma$;

(4) $A\in\Gamma$ implies $J_{|\alpha|}A\in\Gamma$;

(5) $A\in\Gamma$ implies $QA\in\Gamma$.

Lemma 3.3. *If $x\subseteq\Phi$ (where Φ is a set of wff) is QLO-MV-full, then*

(i) $x\Rightarrow A$ *iff* $A\in x$;

(ii) $Q\neg(A\vee\neg A)\in x$, *for all wffs A prefixed with* Q.

Proof. (i) Since in QLO-MV $A\Rightarrow A$, sufficiency follows from the definition of QLO-MV-deivability. Necessity follows from 3.2(2), (3), (4), (5).

(ii) By definition x is non-empty, thus there exists $B\in x$. But by 3.2(4) $J_0B\in x$, so by Ax9and 3.2(2) we have $\neg(A\vee\neg A)\in x$. The result follows under Ax8 and 3.2(2). □

QLO-MV-full sets and QLO-MV-derivability are connected with the following version of Lindenbaum's Lemma :

Theorem 3.4. *$\Gamma\Rightarrow A$ iff A belongs to every QLO-MV-full extension of Γ.*

Proof. If $\Gamma\Rightarrow A$ then there are $B_1,\ldots,B_n\in\Gamma$ such that either $B_1\vee\ldots\vee B_n\Rightarrow A$ or $(B_1\wedge\ldots\wedge B_n)\wedge(B_n\wedge\ldots\wedge B_1)\Rightarrow A$, or $J_{|\alpha_i|}B_i\Rightarrow A$ or $QB_i\Rightarrow A$ $(1\leq i\leq n)$. If x is QLO-MV-full and $\Gamma\subseteq x$, then $B_1,\ldots,B_n\in x$. Applying 3.2(3),(4),(5) and then 3.2(2), we obtain $A\in x$.

The other way round, suppose A is not QLO-MV-derivable from Γ. We put $x=\{B\colon \Gamma\Rightarrow B\}$. By Ax1 we have $\Gamma\subseteq x$, and by hypothesis $A\notin x$. The proof will be accomplished if we can show that x is QLO-MV-full. Suppose $B\in x$ and $B\Rightarrow C$, then there exist $B_1,\ldots,B_n\in\Gamma$ such that either $B_1\vee\ldots\vee B_n\Rightarrow B$, or $(B_1\wedge\ldots\wedge B_n)\wedge(B_n\wedge\ldots\wedge B_1)\Rightarrow B$, or $J_{|\alpha_i|}B_i\Rightarrow B$, or $QB_i\Rightarrow A$ $(1\leq i\leq n)$. So by Rx3 we obtain either $B_1\vee\ldots\vee B_n\Rightarrow C$, or $(B_1\wedge\ldots\wedge B_n)\wedge(B_n\wedge\ldots\wedge B_1)\Rightarrow C$, or $J_{|\alpha_i|}B_i\Rightarrow C$, or $QB_i\Rightarrow A$, hence, $\Gamma\Rightarrow C$, i.e. $C\in x$.

On the other side, if $B,C\in x$, then there exist $B_1,\ldots,B_n,C_1,\ldots,C_n\in\Gamma$, such that $B_1\vee\ldots\vee B_n\Rightarrow B$ and $C_1\vee\ldots\vee C_n\Rightarrow C$. Then by Rx4 we obtain $B_1\vee\ldots\vee B_n\vee C_1\vee\ldots\vee C_n\Rightarrow B\vee C$. So we have $\Gamma\Rightarrow B\vee C$ and thus $B\vee C\in x$.

Furthermore, if $B\in x$, then there exists $B'\in\Gamma$ such that $J_{|\alpha'|}B'\Rightarrow B$. But by Rx2 $J_{|\beta|}J_{|\alpha'|}B'\Rightarrow J_{|\beta|}B$ and by Ax15 we obtain $J_{|\beta\alpha'|}B'\Rightarrow J_{|\beta|}B$, thus, $\Gamma\Rightarrow J_{|\beta|}B\in x$.

Again, let $B,C\in x$. Then there exist $B_1,\ldots,B_n,\ C_1,\ldots,C_n\in\Gamma$ such that $(B_1\wedge\ldots\wedge B_n)\wedge(B_n\wedge\ldots\wedge B_1)\Rightarrow B$ and $(C_1\wedge\ldots\wedge C_n)\wedge(C_n\wedge\ldots\wedge C_1)\Rightarrow C$. But then by Rx5 we obtain $(B_1\wedge\ldots\wedge B_n\wedge C_1\wedge\ldots\wedge C_n)\wedge(C_n\wedge\ldots\wedge C_1\wedge B_n\wedge\ldots\wedge B_1)\Rightarrow B\wedge C$. Hence, $\Gamma\Rightarrow B\wedge C$ and $B\wedge C\in x$.

If $B\in x$, then there exists $B'\in\Gamma$ such that $QB'\Rightarrow B$. Since by Rx6 $QQB'\Rightarrow QB$ then under Ax17 we have $QB'\Rightarrow QB$. Thus, $\Gamma\Rightarrow QB\in x$.

This shows that x is closed under QLO-MV-derivability, conjunction, disjunction, J- and Q-operators. Since $A\notin x$ then A is not QLO-MV-derivable from x, therefore x is QLO-MV-consistent. □

Theorem 3.5. *If x is QLO-MV-full and $Q\neg A\notin x$, then there exists QLO-MV-full set y such that $A\in y$, and for all B, either $Q\neg B\notin x$ or $B\notin y$.*

Proof. Let $y=\{B\colon A\Rightarrow B\}$. By Ax1 $A\in y$. Now let $\neg B\in x$. Then $B\notin y$, or else $A\Rightarrow B$, whence $\neg B\Rightarrow\neg A$ by Rx1, and so, in turn, by Rx6 and by 3.2(2), $Q\neg A\in x$ contrary to hypothesis. By 3.2(ii) we have $Q\neg(A\vee\neg A)\in x$. According to what we just proved, it follows that $A\vee\neg A\notin y$. Proceeding in a similar manner to 3.4 we can show that y is closed under $\vee,\wedge;J,$Q and QLO-MV-derivability. Then since $A\vee\neg A$ is not QLO-MV-derivable from y, i.e. y is QLO-MV-consistent, y be QLO-MV-full as required. □

Thus, in turn, for QLO-MV there is also not need in some version of an axiom of choice which is required to prove an existence of ultrafilters.

4. Semantics of QLO-MV

Since our logic is an extension of QLO then we adduce main definitions of QLO-semantics modifying them as may be necessary for QLO-MV.

Definition 4.1. QLO-MV-model is a 4-tuple $M = \langle X,\perp,\xi,v\rangle$, where

(a) X is a non-empty set;

(b) $\perp$ is an orthogonality relation on X;

(c) ξ is a non-empty collection of $\perp$-closed subsets of X closed under set-theoretic intersection and the operation * (Y^* is defined as $\{x: x\perp y\}$);

(d) v is a function assigning to each propositional variable and formula of QLO-MV recursively in every point (every element) of X a real number, i.e. v: $(S\cup\Phi) \times X \rightarrow \mathbf{R}$ where S is a set of propositional variables and Φ is a set of wffs.

Denoting the set $\{x\in X: v(A,x) = a\}$ as $\|A\|_a$ we define recursively the value of a wff in a QLO-MV-model as follows:

(1) $\|p_i\|_a = \{x\in X: v(p_i,x) = a\}\in\xi$;
(2) $\|A\vee B\|_a = \{x\in X: x\in\|A\|_b\cap\|B\|_c \ \&\ a = b + c\}$;
(3) $\|A\wedge B\|_a = \{x\in X: x\in\|A\|_b\cap\|B\|_c \ \&\ a = bc\}$;
(4) $\|\neg A\|_a = \{x\in X: x\perp\|A\|_{-a} \ \&\ v(\neg A,x) = a\}$;
(5) $\|J_{|\alpha|}A\|_a = \{x\in X: x\in\|A\|_b \ \&\ a = \alpha b\}$;
(6) $\|1\|_1 = X$ т.е. $v(1,x) = 1$ for all $x\in X$;
(7) $\|QA\|_a = \{x\in X: x\in\|A\|_b \ \&\ a = q(b)\}$ where q: $v \rightarrow [0,1]$ such that
    (i) $q(q(v(A))) = q(v(A))$;
    (ii) $q(v(\neg A)) = 1 - q(v(A))$;
    (iii) $q(v(1)) = 1$ and $q(v(\neg(A\vee\neg A)) = 0$;
    (iv) $q(v(Q(A\vee B))) = \max\{q(v(QA)) + q(v(QB)),1\}$.

If Γ is a non-empty set of wffs then we say that Γ *implies* A at x in M, M: $\Gamma \models_x A$ iff $\forall B\in\Gamma(v(B,x) \leq v(A,x))$, Γ M-implies A, M: $\Gamma \models A$ iff either $\exists B\in\Gamma(x\notin\|B\|_{(-)})$, i.e. when B is not verified at x (verification but not truthfulness since we deal with many-valued logical matrix), or Γ implies A at all x in M. If we define $\mathfrak{I} = \langle X,\perp,\xi\rangle$ be QLO-MV-frame then Γ $\mathfrak{I}$-implies A iff $\mathfrak{I}$: $\Gamma \models A$ for all QLO-MV-models M on $\mathfrak{I}$. If $\wp$ is a class of QLO-MV-frames then Γ $\wp$-implies A, $\wp$: $\mathfrak{I}$:$\Gamma \models A$ iff $\mathfrak{I}$:

$\Gamma \models A$ for all $\Im \in \wp$. A class $\wp$ is said to *determine* QLO iff for all $A, B \in \Phi$, $A \Rightarrow B$ iff $\wp: A \models B$. $\wp$ *strongly determines* QLO iff for all Γ, A, $\Gamma \Rightarrow A$ iff $\wp: \Gamma \models A$.

If we define a range of values of a formula A as $\|A\| = \bigcup_{a\in R} \|A\|_a$ then extending this definition on 4.1(1)-(7) hereafter we denote as $\|p_i\|$, $\|A\vee B\|$, $\|A\wedge B\|$, $\|\neg A\|$, $\|J_{\alpha}A\|$, $\|1\|$, $\|QA\|$ the ranges of respective formulas while $\|A\|_{(\text{-})}$ means an arbitrary value of respective formula.

Lemma 4.2. *For any QLO-MV-model M and any* $A\in\Phi$, $\|A\|_{(\text{-})}\in\xi$.

***Proof*.** By induction on the length of A, exploiting 4.1. □

Theorem 4.3. (*Soundness of QLO-MV*). $\Gamma\Rightarrow A$ *if* Θ: $\Gamma \models A$, *where* Θ *is a class of all QLO-MV-frames.*

***Proof*.** The proof, by induction on QLO-MV-derivability, proceeds by showing that the result holds for all Ax1-Ax22 and is preserved by application of Rx1-Rx6. We consider only the less obvious cases.

Ax2. Let $x\in\|A\|_a$. Then if $y\in\|\neg A\|_{-a}$, by 4.1(4) $y\perp x$ and hence (symmetry) $x\perp y$. 4.1(4) again gives $x\in\|\neg\neg A\|_a$.

Now let $x\in\|\neg\neg A\|_a$. Then $y\in\|\neg A\|_{-a}$ only if $x\perp y$, i.e. $y\perp\|A\|_a$ only if $x\perp y$. But $\|A\|_a$ is $\perp$-closed by 4.2 and thus $x\in\|A\|_a$.

Ax6. It is easy to make sure that $v(\neg(A\vee\neg A),x) = 0$ at any point $x\in X$ and likewise $v(A\vee\neg A,x) = 0$. But if $x\in\|\neg(A\vee\neg A)\|_0$, then $y\in\|A\vee\neg A\|_0$ just in case of $x\perp y$. By 4.1(2) $y\in\|A\|_b\cap\|\neg A\|_c$ and $b + c = 0$, i.e. $c = -b$. But then by 4.1(4) $y\perp y$ contrary to the irreflexivity of $\perp$. Hence, there is no y in any M for which we have $y\perp\|A\vee\neg A\|_0$, whence it follows by the definition that $x\in\|\neg(A\vee\neg A)\|_0$ for any x. Besides, for all B, by 4.1(3), $v(B\wedge B,x)\geq 0$.

Ax7. Let $x\in\|1\wedge A\|_a$. Then $y\in\|1\|_1\cap\|A\|_a$ by 4.1(3) and $v(1\wedge A,x) = v(1,x)\circ v(A,x)$. But $v(1,x) = 1$ at any point $x\in X$ in virtue of the definition of (see 4.1(6)). So $v(1\wedge A,x) = v(A,x)$ and thus M: $1\wedge A \models A$ and M: $A \models 1\wedge A$ for any A.

Ax11. Let $x\in\|J_\alpha(A\wedge B)\|_a$. Then by 4.1(5) $x\in\|A\wedge B\|_b$ and $a=\alpha b$. By 4.1(5) $x\in\|A\|_c\cap\|B\|_d$ and $b = cd$. Hence, $a = \alpha dc$. But by 4.1(5) $x\in\|J_\alpha A\|_{\alpha c}\cap\|B\|_d$ and by 5.3.3(3) $x\in\|J_\alpha A\wedge B\|_{\alpha cd=a}$.

Ax13. Let $x\in\|A\|_a$. Then by 4.1(5) $x\in\|J_\alpha A\|_{\alpha a}$ and by 4.1(4) $y\in\|\neg J_\alpha A\|_{-\alpha a}$ just in case of $x\perp y$. But then $y\in\|\neg A\|_{-a}$ because of $x\perp y$, and by 4.1(5) $y\in\|J_\alpha A\|_{-\alpha a}$.

Ax17. Let $x\in\|QQA\|_a$. Then by 4.1(7) $x\in\|QA\|_b$ and $a = q(b)$. Again, by 4.1(7) this implies $x\in\|A\|_c$ and $b = q(c)$. We have $q(b) = q(q(c)) = q(c)$ by the property of q and thus $a = q(c)$.

Ax18. Let $x\in\|A\|_b$. Then by 4.1(4) $y\in\|\neg A\|_{-b}$ only if $x\perp y$, i.e. $y\perp\|A\|_b$ only if $x\perp y$.Furthemore, by 4.1(7) $y\in\|Q\neg A\|_a$ and $a = 1 - q(b)$ according to the properties of q. But it is easy to check that the result will be the same for the right side of Ax18, i.e. $y\in\|1\vee\neg QA\|_a$ and $a = 1\text{-}q(b)$.

Rx1. Suppose M: $A \models B$ and let $x \in \|\neg B\|_{-a}$. Then $y \in \|A\|_b$ only if $y \in \|B\|_a$ (by inductive hypothesis), only if $x \perp y$. This shows that $x \in \|\neg A\|_{-b}$.

The rest is obvious. □

Definition 4.4. Let L be a modal quantum logic of effects. The canonical QLO-MV-model of L is the structure $M_L = \langle X_L, \perp_L, \xi_L, v_L \rangle$, where:

(1) $X_L = \{x \subseteq \Phi$: x is a QLO-MV-full set$\}$;

(2) $x \perp_L y$ iff there is a wff A such that $Q\neg A \in x$, $A \in y$;

(3) $\xi_L = \{|A|^L: A \in \Phi\}$, where $|A|^L = \{x \in X_L: A \in x\}$;

(4) v_L: $(S \cup \Phi) \times X_L \to \mathbf{R}$.

Denoting $\{x \in X_L: v(A,x) = a\}$ as $\|A\|^L_a$ we come to the definition of the value of formula and ranges of valuation in canonical model M_L analogously to 4.1(1)-(7).

Lemma 4.5. $\Im_L = \langle X_L, \perp_L, \xi_L, v_L \rangle$ *is a QLO-MV-frame.*

Proof. Let $x \in X_L$. Then for any A neither $Q\neg A, A \in x$ nor x is QLO-MV-inconsistent (by Ax7). Hence, $x \perp_L x$ does not take place. If $x \perp_L y$, then for some wff A we have $Q\neg A \in x$, $A \in y$. By means of Ax2 we come to the conclusion that $Q\neg B \in y$, $B \in x$, where $B = Q\neg A$. Thus $x \perp_L y$ and $\perp_L$ is an orthogonality relation. To check whether $\|A\|^L$ be $\perp_L$-closed suppose that $x \notin \|A\|^L$, i.e. $A \notin x$. By Ax2 $\neg\neg A \notin x$ and so by 3.5 there is $y \in X_L$ such that $x \perp_L y$ fails and $\neg A \in y$. Meanwhile if $z \in \|A\|^L$ then $A \in z$ and, hence, $y \perp_L z$. Thus, $y \perp_L \|A\|^L$ as it was required. Clearly, ξ_L will be closed under intersection (by virtue of properties QLO-MV-derivability and QLO-MV-fullness). □

Theorem 4.6. (***Fundamental theorem for QLO-MV***). *For all A and all $x \in X$, $x \in \|A\|^L$ iff $A \in x$.*

Proof. By induction on the length of A. In case of $A = B \vee C$, $A = B \wedge C$, $A = J_\alpha B$ and $A = QB$ it is easy to see that $B, C \in x$ follows from $B \vee C$, $B \wedge C$, $J_\alpha B$, $QA \in x$. It will suffice to use 4.1(2),(3),(5),(7). Conversion follows from 3.2(3),(4),(5).

Suppose that $A = \neg B$ and for B the theorem is true. Let $Q\neg B \in x$. If $y \in \|B\|^L_{(-)}$ then by inductive hypothesis $B \in y$ and hence $x \perp_L y$. By 4.1(4) it follows that $x \in \|B\|^L_{(-)}$. Again, if $Q\neg B \notin x$, then according to 3.5 there is $y \in X_L$ such that $B \in y$ and thus by inductive hypothesis $y \in \|B\|^L_{(-)}$ but $x \perp_L y$ fails. By 4.1(4) we come to the conclusion that $x \notin \|B\|^L_{(-)}$. □

Corollary 4.7. $\Gamma \Rightarrow A$ *iff* $\boldsymbol{M}_L$:$\Gamma \models A$.

Proof. If $\Gamma \Rightarrow A$ then there are $B_1, \ldots, B_n \in \Gamma$ such that either $B_1 \vee \ldots \vee B_n \Rightarrow A$ or $(B_1 \wedge \ldots \wedge B_n) \wedge (B_n \wedge \ldots \wedge B_1) \Rightarrow A$, or $J_{\alpha_i} B_i \Rightarrow A$, or $QB_i \Rightarrow A$

($1 \leq i \leq n$). If $x \in \|B\|^{L}_{(-)}$ for all $B \in \Gamma$, then by 4.6 $B_1,\ldots,B_n \in x$. By 4.1(2)-(5) it follows that $A \in x$ and thus $x \in \|A\|^{L}_{(-)}$.

The other way round, if A is not QLO-MV-derivable from Γ, then by 3.4 there exists $x \in X_L$ such that $\Gamma \subseteq x$ and $A \notin x$. Then by 4.6 $x \in \|B\|^{L}_{(-)}$ for all $B \in \Gamma$, but $x \notin \|A\|^{L}_{(-)}$. □

Theorem 4.8. $\Gamma \Rightarrow A$ *iff* $\mathfrak{I}_L : \Gamma \models A$.

Proof. Let $\boldsymbol{M}$ be an arbitrary QLO-MV-model on $\mathfrak{I}_L$. For every $i<\omega$, $\|p_i\|^{\boldsymbol{M}} \in \xi_L$ there is B_i such that $\|p_i\|^{\boldsymbol{M}}_{(-)} = |B_i|^{L}_{(-)}$ ($|B_i|^{L}_{(-)}$ is defined as in 4.4) and $|B_i|^{L}_{(-)} = \|B_i\|^{L}_{(-)}$. For any wff C let C' is the result of uniformly replacing each p_i, occurring in C, with B_i. Clearly, there are in Γ such $A_1,\ldots,A_n$ that either $A_1 \vee \ldots \vee A_n \Rightarrow A$ or $(A_1 \wedge \ldots \wedge A_n) \wedge (A_n \wedge \ldots \wedge A_1) \Rightarrow A$, or $J_{|\alpha_i|} A_i \Rightarrow A$, or $QB_i \Rightarrow A$ ($1 \leq i \leq n$) and so we have $A'_1 \vee \ldots \vee A'_n \Rightarrow A'$ etc. Then by 4.7 either $\boldsymbol{M}_L$: $A'_1 \vee \ldots \vee A'_n \models A'$, or $\boldsymbol{M}$: $(A'_1 \wedge \ldots \wedge A'_n) \wedge (A'_n \wedge \ldots \wedge A'_1) \models A'$, or $\boldsymbol{M}_L$: $J_{|\alpha_i|} A'_i \models A'$, or $\boldsymbol{M}_L$: $QA'_i \models A'$. But a simple induction shows that $\|C\|^{\boldsymbol{M}} = \|C'\|^{\boldsymbol{M}_L}$ and so either $\boldsymbol{M}_L$: $A_1 \vee \ldots \vee A_n \models A$, or $\boldsymbol{M}_L$: $(A_1 \wedge \ldots \wedge A_n) \wedge (A_n \wedge \ldots \wedge A_1) \models A$, or $\boldsymbol{M}_L$: $J_{|\alpha_i|} A_i \models A$, or $\boldsymbol{M}_L$: $QA_i \models A$ whence it follows that $\boldsymbol{M}$: $\Gamma \models A$. Since this holds for all models $\boldsymbol{M}$ on $\mathfrak{I}_L$, we conclude $\mathfrak{I}_L$: $\Gamma \models A$. □

Corollary 4.9. ***(Strong completeness for QLO-MV).*** Θ: $\Gamma \models A$ *only if* $\Gamma \Rightarrow A$.

Proof. Since by 4.5 $\mathfrak{I}_L$ is QLO-MV-frame, then Θ contains $\mathfrak{I}_L$ as its element. The rest is obvious. □

Thus corollary 4.9 shows that QLO-MV is strongly determined by the class of all QLO-MV-frames.

5. Bimodal Quantum Logic of Effects

Regarding effects of a Hilbert space as bounded linear operators E such that for all density operators D, $0 \leq \mathrm{Tr}(DE) \leq 1$, we can define over the class $\boldsymbol{E(H)}$ of all effects a partial ordering relation $\leq$ in the following way [2, p.397]. For any $E, H \in \boldsymbol{E(H)}$:

$E \leq H$ iff for all density operators D: $\mathrm{Tr}(DE) \leq \mathrm{Tr}(DF)$.

The class of all effects coincides with the class of all bounded linear operators between 0 and 1. Clearly, $\boldsymbol{E(H)}$ contains the class of all $\lambda 1$ (with $\lambda \in [0,1]$) where for any state vector $\varphi \in \boldsymbol{H}$ $(\lambda 1)\varphi := \lambda\varphi$. Now we define for any $E, H \in \boldsymbol{E(H)}$:

$$E \oplus F := \begin{cases} E + F & \text{if } E + F \in \boldsymbol{E(H)} \\ 1, & \text{otherwise} \end{cases}$$

where + the usual operator-sum,

$E^* := 1 - E$.

It is easy to see that

$E \oplus F = E + F$ iff $E + F \leq 1$.

Likewise one can easily check that the structure $\boldsymbol{E(H)} = \langle \boldsymbol{E(H)}, \oplus, *, 1, 0\rangle$ violates Łukasiewicz axiom of MV-algebra. Actually, let us consider two non-trivial effects E,F such that it's not the case that $E \leq F$ and it's not the case that $F \leq E$. Then, by definition of $\oplus$ we have $E \oplus F^* = 1$ and $F \oplus E^* = 1$. Hence, $(E^* \oplus F)^* \oplus F = 0 \oplus F = F \neq E = 0 \oplus E = (E \oplus F^*)^* \oplus E$. Thus, Łukasiewicz axiom is violated in the structure $\boldsymbol{E(H)}$.

As it was mentioned above R.Giuntini [2] showed that the class of all effects (determines by Born probability) of any Hilbert space turns out to be an instance of an algebraic structure called *quantum MV algebra* (QMV algebra). The latter is a structure $\boldsymbol{M} = \langle M, \oplus, *, 1, 0\rangle$ where M is non-empty set, 0 and 1 are constant elements of M, $\oplus$ is a binary operation and * is a unary operation satisfying the following axioms (where $a \otimes b := (a^* \oplus b^*)^*$, $a \sqcap b := (a \oplus b^*) \otimes b$ and $a \sqcup b := (a \otimes b^*) \oplus b$):

(*QMV*1) $(a \oplus b) \oplus c = a \oplus (b \oplus c)$

(*QMV*2) $a \oplus 0 = a$

(*QMV*3) $a \oplus b = b \oplus a$

(*QMV*4) $a \oplus 1 = 1$

(*QMV*5) $(a^*)^* = a$

(*QMV*6) $0^* = 1$

(*QMV*7) $a \oplus a^* = 1$

(*QMV*8) $a \sqcup (b \sqcap a) = a$

(*QMV*9) $(a \sqcap b) \sqcap c = (a \sqcap b) \sqcap (b \sqcap c)$

(*QMV*10) $a \oplus (b \sqcap (a \oplus c)^*) = (a \oplus b) \sqcap (a \oplus (a \oplus c)^*)$

(*QMV*11) $a \oplus (a^* \sqcap b) = a \oplus b$

(*QMV*12) $a \oplus (a^* \oplus b) \sqcup (b^* \oplus a) = 1$

It seems possible to yield logic of effects in QLO framework corresponding quantum MV algebra. To this end we will enrich the language of QLO with the help of a binary modal operator $\oplus$ and unary modal operator * and enlarge the list of QLO axiom with the following inference rules:

Rx7. $$\frac{\neg(C \vee \neg C) \Rightarrow A \Rightarrow 1 \quad \neg(C \vee \neg C) \Rightarrow B \Rightarrow 1 \quad A \vee B \Rightarrow 1}{A \oplus B \Leftrightarrow A \vee B}$$

Rx8. $$\frac{1 \Rightarrow A \oplus B}{1 \Leftrightarrow A \oplus B}$$

Rx9. $$\frac{\neg(A \vee \neg A) \Rightarrow A \Rightarrow 1}{1 \vee \neg A \Leftrightarrow A^*}$$

(the double line means an inference in both directions).

Let us denote a system QLO + {Rx7-Rx9} as QLO-QMV (with Ax1′). As in QLO we define $[A] \oplus [B] = [A \oplus B]$ and $[A]^* = [A^*]$.

Theorem 5.1. *A structure* $\mathbf{F} = \langle F, \oplus, ^*, 0, 1\rangle$ *where* $F = \{P/_\sim : P$ *is a formula and* $\neg(A \vee \neg A) \Rightarrow P \Rightarrow 1\}$, $0 = [\neg(A \vee \neg A)]$, $1 = [1]$, *представляет собой QMV алгебру.*

Proof. It is easy to see that satisfiability of (*QMV*1) and (*QMV*3) is a consequence of associativity and commutativity of $\vee$. (*QMV*2) will take place in virtue of Bx2. We have (*QMV*4) because from $\neg(A \vee \neg A) \Rightarrow B$ (by Rx7) one get $\neg(A \vee \neg A) \oplus 1 \Rightarrow B \oplus 1$ (by Rx4), and since by Bx1 $\neg(A \vee \neg A) \oplus 1 \Leftrightarrow 1$ then by Rx8 $1 \Leftrightarrow B \oplus 1$. In case of (*QMV*5) by Rx11 we have $1 \vee \neg A \Leftrightarrow A^*$, then again implementing Rx9 we obtain $1 \vee \neg(1 \vee \neg A) \Leftrightarrow A^{**}$. But by Bx2 this reduces to $1 \vee \neg 1 \vee \neg\neg A) \Leftrightarrow A^{**}$, which in view of $1 \vee \neg 1 \Leftrightarrow \neg\neg 1 \vee \neg\neg\neg 1 \Leftrightarrow \neg(\neg 1 \vee \neg\neg 1) \Leftrightarrow \neg(1 \vee \neg 1)$ (by Ax2, Ax1′) and Ax2, Ax1′ reduces, in turn, to $A \Leftrightarrow A^{**}$. Analogous manipulations allow to ascertain the satisfiability of (*QMV*6) and (*QMV*7).

In order to check the satisfiability of the remainder axioms we define $A \otimes B \Leftrightarrow (A^* \oplus B^*)^* \Leftrightarrow A \vee B \vee \neg 1$,

$A \otimes B \Leftrightarrow (A^* \oplus B^*)^*$,

$A \sqcap B \Leftrightarrow (A \oplus B^*) \otimes B$ and $A \sqcup B \Leftrightarrow (A \otimes B^*) \oplus B$.

Moreover, we obtain that

$$A \sqcap B \Leftrightarrow \begin{cases} A, & \text{if } A \Rightarrow B \\ B, & \text{otherwise} \end{cases} \qquad A \sqcup B \Leftrightarrow \begin{cases} A, & \text{if } B \Rightarrow A \\ B, & \text{otherwise} \end{cases}$$

Actually, by the definition $A \sqcap B \Leftrightarrow (A \oplus B^*) \otimes B \Leftrightarrow (A \oplus B^*) \vee B \vee \neg 1$. If $A \Rightarrow B$ then $A \oplus B^* \Rightarrow B \oplus B^* \Leftrightarrow 1$ and by virtue of Rx7 and Rx9 $A \oplus B^* \Leftrightarrow A \vee \neg B \vee 1$, and thus $A \sqcap B \Leftrightarrow A$. Otherwise by Rx11 $A \oplus B^* \Leftrightarrow 1$ and $A \sqcap B \Leftrightarrow B$.

Further, by the definition we have $A \sqcup B \Leftrightarrow (A \otimes B^*) \oplus B$. If $B \Rightarrow A$, then $B \otimes B^* \Rightarrow A \otimes B^*$, which leads to $\neg(B \vee \neg B) \Rightarrow A \otimes B^*$. This gives us an opportunity to exploit Rx7 for calculating $(A \otimes B^*) \oplus B$, which gives $(A \otimes B^*) \oplus B \Leftrightarrow (A \otimes B^*) \vee B \Leftrightarrow A \vee B^* \vee B \vee \neg 1 \Leftrightarrow A \vee 1 \vee \neg B \vee B \vee \neg 1 \Leftrightarrow A$. Otherwise we get $A \otimes B^* \Rightarrow \neg(B \vee \neg B)$. But by Rx7 we obtain that from $A \oplus B \Rightarrow \neg(B \vee \neg B)$ it follows $A \oplus B \Leftrightarrow \neg(B \vee \neg B)$, and thus $A \otimes B^* \Leftrightarrow \neg(B \vee \neg B)$ and $(A \otimes B^*) \oplus B \Leftrightarrow B$.

In case of (*QMV8*) if $A \Rightarrow B$ then $A \sqcup (B \sqcap A) \Leftrightarrow A \sqcup B \Leftrightarrow A$. If it is not the case that $A \Rightarrow B$, then $A \sqcup (B \sqcap A) \Leftrightarrow A \sqcup A \Leftrightarrow A$.

For (*QMV9*) we need that $(A \sqcap B) \sqcap C \Leftrightarrow (A \sqcap B) \sqcap (B \sqcap C)$. Two cases are possible:

1) $B \Rightarrow C$,

2) it is not the case that $B \Rightarrow C$.

Case 1). If $A \Rightarrow B$ then by virtue Rx3 $A \Rightarrow C$. Then $(A \sqcap B) \sqcap C \Leftrightarrow A \sqcap C \Leftrightarrow A \Leftrightarrow A \sqcap B \Leftrightarrow (A \sqcap B) \sqcap (B \sqcap C)$. If it is not the case that $A \Rightarrow B$, then $(A \sqcap B) \sqcap (B \sqcap C) \Leftrightarrow B \sqcap B \Leftrightarrow B \Leftrightarrow B \sqcap C \Leftrightarrow (A \sqcap B) \sqcap C$.

Case 2). Since it is not the case that $B \Rightarrow C$, then we get $B \sqcap C \Leftrightarrow C$. Hence, $(A \sqcap B) \sqcap (B \sqcap C) \Leftrightarrow (A \sqcap B) \sqcap C$.

In order that (*QMV10*) is satisfied we need $A \oplus (B \sqcap (A \oplus C)^*) \Leftrightarrow (A \oplus B) \sqcap (A \oplus (A \oplus C)^*)$. Two cases are possible:

1) $A \oplus C \Leftrightarrow 1$,

2) it is not the case that $A \oplus C \Leftrightarrow 1$.

Case 1). $A \oplus (B \sqcap (A \oplus C)^*) \Leftrightarrow A \oplus (B \sqcap \neg(A \vee \neg A)) \Leftrightarrow A$ and $(A \oplus B) \sqcap (A \oplus (A \oplus C)^*) \Leftrightarrow (A \oplus B) \sqcap (A \oplus -(A \vee \neg A)) \Leftrightarrow ((A \oplus B) \oplus A^*) \otimes A \Leftrightarrow ((B \oplus (A \oplus B^*)) \otimes A \Leftrightarrow (B \oplus 1)) \otimes A \Leftrightarrow A$.

Case 2) has two subcases:

a) $B \Rightarrow (A \oplus C)^*$,

b) it is not the case that $B \Rightarrow (A \oplus C)^*$.

Subcase a). By hypothesis, $A \oplus (B \sqcap (A \oplus C)^*) \Leftrightarrow A \oplus B$ and $(A \oplus B) \sqcap (A \oplus (A \oplus C)^*) \Leftrightarrow (A \oplus B) \sqcap (A \oplus (A \vee C)^*)$. If $(A \oplus (A \vee C)^*) \Leftrightarrow 1$ then we succeed. Therefore we can suppose that $(A \oplus (A \vee C)^*) \Leftrightarrow 1$ is not the case. Then $(A \oplus (A \vee C)^*) \Leftrightarrow (A \vee (A \vee C)^*) \Leftrightarrow C^*$. Thus $(A \oplus B) \sqcap (A \oplus (A \vee C)^*) \Leftrightarrow (A \oplus B) \sqcap C^*$. By hypothesis, $B \Rightarrow (A \oplus C)^* \Leftrightarrow 1 \vee \neg A \vee \neg C$, hence, $A \vee B \Rightarrow C^*$. Finally, $(A \oplus B) \sqcap C^* \Leftrightarrow A \oplus B$.

Subcase b). By hypothesis, we have that $A \oplus (B \sqcap (A \oplus C)^*) \Leftrightarrow A \oplus (B \sqcap (A \vee C)^*) \Leftrightarrow A \oplus (A \vee C)^* \Leftrightarrow A \vee (A \vee C)^* \Leftrightarrow C^*$. Now, $(A \oplus B) \sqcap (A \oplus (A \oplus C)^*) \Leftrightarrow (A \oplus B) \sqcap C^*$. By hypothesis, it is not the case that $B \Rightarrow (A \oplus C)^*$. Then it is not the case that $C \Rightarrow (A \oplus B)^*$, hence it is not the case that $(A \oplus B) \Rightarrow C^*$. Thus, $(A \oplus B) \sqcap C^* \Leftrightarrow C^*$.

Cases of (*QMV11*) and (*QMV12*) are easily verified. □

In the sequel under wff we always mean wff P, for which $\neg(A \vee \neg A) \Rightarrow P \Rightarrow 1$ is true.

Definition 5.2. Let Γ be a non-empty set of wffs. A wff A is said to be QLO-QMV-*derivable* from Γ, $\Gamma \Rightarrow A$, if A is QLO-*derivable* from Γ and there exist $B_1, \ldots, B_n \in \Gamma$, such that

(a) $B_1 \oplus \ldots \oplus B_n \Rightarrow A$.

The notions of QLO-QMV-derivability, QLO-QMV-consistency etc. are defined in the same way as in case of QLO-MV (it can be shown that Γ is QLO-QMV-consistent iff for no A do we have both $\Gamma \Rightarrow A$ and $\Gamma \Rightarrow A^*$). Γ is QLO-QMV-*full* iff it is QLO-full and $A, B \in \Gamma$ implies $A \oplus B \in \Gamma$.

Lemma 5.3. *If $x \subseteq \Phi$ (where Φ is a set of wff) is QLO-QMV-full, then*

(1) $x \Rightarrow A$ *iff* $A \in x$;

(2) $1 \in x$ *for all wff* A.

Proof. (ii) By definition x is non-empty, thus there exists $B\in x$. But by 5.2 $J_0B\in x$, so by Ax9 and 3.2(2) we have $\neg(A\vee\neg A)\in x$. But since for wff P always will be true that $\neg(A\vee\neg A) \Rightarrow P \Rightarrow 1$, then by 5.2 we obtain the desired result. □

QLO-QMV-full sets and QLO-QMV-derivability are connected with the following version of Lindenbaum's Lemma :

Theorem 5.4. $\Gamma\Rightarrow A$ *iff* A *belongs to every QLO-QMV-full extension of* Γ.

Proof. We need verify only the cases of $B_1\oplus\ldots\oplus B_n\Rightarrow A$ and $B\oplus C\in x$. □

Theorem 5.5. *If* x *is QLO-QMV-full and* $A^*\notin x$, *then there exists QLO-QMV-full set* y *such that* $A\in y$ *and for all* B, *either* $B^*\notin x$ *or* $B\notin y$.

Proof. Let $y = \{B: A\Rightarrow B\}$. By Ax1 $A\in y$. Now let $B^*\in x$, that implies $\neg B\in x$ by Rx9. Then $B\notin y$, or else $A\Rightarrow B$ and $\neg B \Rightarrow \neg A$ by Rx1, $\neg A\in x$ and then $A^*\in x$ contrary to hypothesis. Further, by 5.3 we have $1\in x$. According to what we just proved, by Rx9 we obtain that $1\vee\neg 1\notin y$. Proceeding in a similar manner to 5.4 we can show that y is closed under QLO- and QLO-QMV-derivability. Then since $1\vee\neg 1$ is not QLO-QMV-derivable from y, i.e. y is QLO-QMV-consistent, y be QLO-QMV-full as required. □

6. Semantics of QLO-QMV

Since our system is an extension of QLO then for its description we will exploit the definitions of QLO-semantics modifying them as required to convey specificity of QLO-QMV.

Definition 6.1. QLO-QMV-models are QLO-models enriched with the following two points in recursive definition of the value of wff:

(1) $\|A\oplus B\|_a = \{x\in X: x\in\|A\|_b\cap\|B\|_c \ \&\ a = \min(1,b + c)\}$;

(2) $\|A^*\|_a = \{x\in X: x\perp\|A\|_{1-a} \ \&\ v(A^*,x) = 1-a\}$.

Lemma 6.2. *For any QLO-QMV-model* $\boldsymbol{M}$ *and any* $A\in\Phi$, $\|A\|_{(\cdot)}\in\xi$.

Proof. By induction on the length of A, exploiting 6.1. □

Theorem 6.3. (***Soundness of QLO-MV***). $\Gamma\Rightarrow A$ *if* Θ: $\Gamma\models A$, *where* Θ *is a class of all QLO-QMV-frames.*

Proof. The proof, by induction on QLO-QMV-derivability, proceeds by showing that the result holds for all Ax1-Ax16 and is preserved by application of Rx1-Rx5, Rx7-Rx9. We consider only the cases of Rx7-Rx9 (accounting of the proof for QLO).

Rx7. By hypothesis, $\boldsymbol{M}$:$\neg(C\vee\neg C)\models A$, $\boldsymbol{M}$:$A\models 1$, $\boldsymbol{M}$:$\neg(C\vee\neg C)\models B$, $\boldsymbol{M}$:$B\models 1$, $\boldsymbol{M}$:$A\vee B\models 1$. According to the definition $\boldsymbol{M}$:$\neg(C\vee\neg C) \models_x A$ iff $v(\neg(C\vee\neg C),x) \leq v(A,x)$, i.e. $0 \leq v(A,x)$, and $\boldsymbol{M}$:$A\models_x 1$ iff $v(A,x) \leq v(1,x)$, i.e. $v(A,x) \leq 1$. The same is true for B. Besides, we have $v(A \vee B,x) \leq v(1,x)$. Then by 4.1(2), 6.2(1) we obtain $(A \vee B,x) = v(A,x) + v(B,x) = v(A \oplus B,x)$. In the reverse direction the proof is obvious.

Rx8. By hypothesis, $\boldsymbol{M}{:}1 \models A \oplus B$. Then we have $\boldsymbol{M}{:}1 \models_x A \oplus B$ iff $1 \leq v(A \oplus B,x)$. But since $v(A \oplus B,x) = \min(1,v(A,x) + v(B,x))$, then, clearly, $1 = v(A \oplus B,x)$.

Rx9. Let $\boldsymbol{M}{:}\neg(C \vee \neg C) \models A$, $\boldsymbol{M}{:}A \models 1$. Then $\boldsymbol{M}{:}\neg(C \vee \neg C) \models_x A$ iff $0 \leq v(A,x)$, and $\boldsymbol{M}{:}A \models_x 1$ iff $a = v(A,x) \leq 1$. Further, $y \in \|\neg A\|_{-a}$ only if $x \perp y$. By 4.1(2) we get $y \in \|1 \vee \neg A\|_c$ iff $y \in \|1\|_1 \cap \|\neg A\|_{-a}$ and $c = 1 - a$. But by 6.2(2) we have $y \in \|A^*\|_c$. □

Definition 6.4. The canonical QLO-QMV-model of L (bimodal quantum logic of effects) is the structure $M_L = \langle X_L, \perp_L, \xi_L, v_L \rangle$ where:

(1) $X_L = \{x \subseteq \Phi$: x is a QLO-QMV-full set$\}$;

(2) $x \perp_L y$ iff there is a wff A such that $A^* \in x$, $A \in y$;

(3) $\xi_L = \{|A|^L : A \in \Phi\}$, where $|A|^L = \{x \in X_L : A \in x\}$;

(4) v_L: $(S \cup \Phi) \times X_L \to \mathbf{R}$.

Lemma 6.5. *$\Im_L = \langle X_L, \perp_L, \xi_L, v_L \rangle$ is a QLO-QMV-frame.*

Proof. Argumentation is similar to the case of QLO-MV-frame. □

Theorem 6.6. (***Fundamental theorem for QLO-QMV***). *For all A and all $x \in X$, $x \in \|A\|^L$ iff $A \in x$.*

Proof. By induction on the length of A. In case of $A = B \oplus C$ it is easy to see that $B, C \in x$ follows from $B \oplus C \in x$. Suffice to use 6.1(1). □

***Corollary* 6.7.** *$\Gamma \Rightarrow A$ iff $\boldsymbol{M}_L{:}\Gamma \models A$.*

Proof. If $\Gamma \Rightarrow A$ then we need to consider an additional case of $B_1 \oplus \ldots \oplus B_n \Rightarrow A$. If $x \in \|B\|^L_{(-)}$ for all $B \in \Gamma$, then by 6.6 $B_1, \ldots, B_n \in x$. By 6.1(1) it follows that $A \in x$ and thus $x \in \|A\|^L_{(-)}$.

The other way round, if A is not QLO-QMV-derivable from Γ, then by 5.4 there exists $x \in X_L$ such that $\Gamma \subseteq x$ and $A \notin x$. Then by 6.6 $x \in \|B\|^L_{(-)}$ for all $B \in \Gamma$, but $x \notin \|A\|^L_{(-)}$. □

Theorem 6.8. *$\Gamma \Rightarrow A$ iff $\Im_L{:}\Gamma \models A$.*

Proof. We need to consider an additional case of $A_1 \oplus \ldots \oplus A_n \Rightarrow A$ for Γ. □

Corollary* 6.9.** (Strong completeness for QLO-QMV***). *Θ: $\Gamma \models A$ only if $\Gamma \Rightarrow A$.*

Proof. Since by 6.5 $\Im_L$ is QLO-QMV-frame, then Θ contains $\Im_L$ as its element. The rest is obvious. □

Thus corollary 6.9 shows that QLO-MV is strongly determined by the class of all QLO-MV-frames.

REFERENCES

1. *Emch G.G.* Algebraic Methods in Statistical Mechanics and Quantum Field Theory. N.-Y., 1972.
2. *Giuntini R.* Quantum MV Algebras // Studia Logica. Vol. 56. 1996. P.393-417.
3. *Mangani P.* Su certe algebra connesse con logiche a più valore // Bollettino dell'Unione Matematica Italiana. Vol. 8. 1973. P.68-78.
4. *Mundici D.* Interpretation of AF C^*-Algebras in Łukasiewicz Sentential Calculus // Journal of Functional Analysis. Vol. 65. 1986. P.15-63.
5. *Vasyukov V.L.* Quantum Logic of Observables // V.A.Smirnov (ed.). Syntactic and Semantic Studies of Non-Extensional Logics. Moscow, 1989. P.120-169 (in Russian).

Paul Weingartner

ON THE COGNITION OF LAWS OF NATURE

In this paper I shall discuss the problem of cognition of laws of nature on the following different levels of understanding:

(i) First level of understanding of laws of nature: the Greek Ideal of Science
(ii) Second level: Space Time Invariance
(iii)Third level: Dynamical Laws
(iv)Fourth level: Statistical Laws
(v) Fifth level: Laws and Causality
(vi)Sixth level: Chaotic Motion
(vii) Seventh level: Initial conditions and Constants of Nature

Before I shall begin with the first level of cognition or understanding a short clarification of different meanings of the expression 'law of nature' will be given:

L1 the "law" as it "is" in the thought of the inventor or discoverer

L2 The "law" as it "is" in the things which are ordered or described by it

L3 The "law" as a law statement formulated in some scientific language

L4 The "law" as an ideal true law, w.r.t. which laws known at present in the sense of L3 are approximations

L5 The "law" as ideal conceptual entity more or less independent and separated from law statements.

L3 is preferable to L1, since what an author like Newton thought (for example about his law of gravitation) is open to speculations, even if historians of science may find out something about it; but then also from written documents. The existence of L2 expresses a modest realism: What corresponds to a true law of nature is a structure of things (natural objects) with their properties and relations among them (without assuming a naive picture theory). Observe however that there are important differences between L2 and L3: Law statements are true or false, can be tested, confirmed, refuted, they can be nearer to the truth than other law statements, they can contain negations... etc. Nothing of these features can hold for structures of real objects. Concerning L4 one may say that a law statement L3 is usually an approximation to the true law L4 in Popper's sense: a law L is a better approximation to L4 than another law L' iff L has more true relevant and informative consequences and less false ones than L'.[1] Sense L5 of law comes close to Bolzano's and Frege's view about laws of logic and mathematics and Popper's interpretation of them by abstracting from the knowing subject and with the help of his theory of the 3rd world. It seems, however, that L5 is more suitable for laws of logic and mathematics than for laws of nature. In conclusion I want to say that the expression 'law of nature' is used in this essay – if not otherwise indicated – in the sense of L3.

Laws in the sense of L3 can still be used in different ways: as laws about natural objects or systems (for example physical systems) and as (meta)laws about laws. Especially the second type can be used in a descriptive or normative way. Thus the principle of Special Relativity can be expressed first as a law about physical systems or physical reference frames: all inertial systems are equivalent; secondly as a metalaw about laws: all laws of nature are invariant under changes (transformations) of inertial reference frames; thirdly as a methodological norm about laws: all laws of nature should be invariant under changes of inertial reference frames.

First Level: the Greek Ideal of Science

In order to be able to describe and explain movement we need to distinguish something which changes relative to something which does not change. This important distinction is pointed out by Aristotle[2] also as a criticism of Parmenides' theory of the universe which assumes only one being and nothing else.[3] That what changes, moves was thought to be contingent (not necessary) in respect to the not changing (or even not changeable) necessary principle or law. In general this idea belongs to the Greek Ideal of Science which was more or less manifest in several Greek thinkers from Thales on but was elaborated in detail by Plato and Aristotle:

To describe and explain the visible (observable), concrete, particular, changing, material contingent world by non-visible (non-observable) abstract, universal, non changing immaterial and necessary principles.

This first level of cognition of laws of nature which is manifest in the Greek Ideal of Science teaches us that our understanding of any

---

[1] That this concept of approximation to truth (Verisimilitude) can be made precise (and freed from the objections by Tychy and Miller) was shown in Schurz-Weingartner (1987) and Weingartner (2000) ch. 9.

[2] Aristotle (Phys) 190a17f.

[3] Aristotle (Met) 986b15f. and (Phys) 186a24f.

kind of genuine law is such that a law is something which does not change, i.e. is invariant (symmetric) relative to something else which changes:

"In fact it may be argued that laws of nature could not have been recognized if they did not satisfy some elementary invariance principles – such as translation in Euclidean space and translation in time – if they changed from place to place, or if they were also different at different times"[4].

"Physicists as a rule hold that physical laws are eternal... It is indeed difficult to think otherwise, since what we call the laws of physics are the results of our search for invariants. Thus even if a supposed law of physics should turn out to be variable, so that (say) one of the apparently fundamental physical constants should turn out to change in time, we should try to replace it by a new invariant law that specifies the rate of change"[5].

As it will be clear from the above considerations and from the two quotations a first level of understanding of a genuine law is that it expresses an invariance.

Second Level: Space Time Invariance

Whereas the first level of understanding a law is concerned with invariance in general the second level of understanding is concerned with finding out a specific kind of invariance. Among these the oldest and most famous one is the invariance w.r.t. space and time. Or in other words: the invariance under changes of place and time.

"The paradigm for symmetries of nature is of course the group of symmetries of space and time. These are symmetries that tell you that the laws of nature don't care about how you orient your laboratory, or where you locate your laboratory, or how you set your clocks or how fast your laboratory is moving"[6].

In this quotation Weinberg describes roughly the four important kinds of space time invariance or invariance w.r.t. continuous change of space time. These four kinds can be described in more detail as follows: The first three are not concerned with real (permanent) movement but only with changing place, orientation and delay of time. The last is more complicated and we have to split it also into three different types.

(i) Location of Laboratory: Laws are invariant w.r.t. the place of the laboratory. This is called translation symmetry (invariance) in

[4] Wigner (1967) p. 43

[5] Popper-Eccles (1981) p. 14

[6] Weinberg (1987) p. 73

space. It yields three conservation laws of momentum. And since every new invariance (symmetry) implies a new unobservable, what becomes unobservable here is absolute place. That means that the laws of nature do not designate a certain place. They abstract from *hic* (here) and *nunc* (now) as Thomas Aquinas pointed out already[7].

(ii) Orientation of laboratory: Laws are invariant w.r.t. the orientation of the laboratory. This is called rotation symmetry in space. Observe however that the laboratory is not rotating it is just reorientated (turned on an angle). This yields three conservation laws of angular momentum. Unobservable: absolute direction.

(iii) Clock setting in laboratory: Laws are invariant w.r.t. to time delay; i.e. it does not matter how you set your clocks in the laboratory. This yields the conservation law of energy. Unobservable: absolute point of time. Concerning the movement of the laboratory (you may always insert 'reference frame' instead of 'laboratory') three different kinds have to be distinguished:

(iv) Inertial movement I: Inertial movement is force free movement of particles (mass points) with uniform velocity along straight lines. For inertial movement I there are three further assumptions: (i) a uniform time scale (or equal time measurement) everywhere (ii) Euclidean Space (iii) with velocity much smaller than the velocity of light. The invariance defined by (1)-(4) is called Galilean Invariance. All laws of Classical Mechanics are Galilei invariant (or: invariant under Galilei transformations). But Maxwell's laws are not.

(v) Inertial movement II: for inertial movement II there is only the assumption that $v = c$, i.e. that the velocity v is smaller than or equal to the light velocity c. Observe however that conditions (i) and (ii) are dropped. That means that (i) it is permitted that the time measurement may be different w.r.t. to inertial reference frames (laboratories) which move with different velocity; and (ii) that Euclidean space is replaced by Minkowski space. The invariance defined by (1)-(3) and (5) is called Lorentz Invariance or invariance of Special Relativity. Maxwell's laws are Lorentz invariant. The laws of Classical Mechanics are not, but they can be revised by Einstein's (and Lorentz's) corrections in order to become Lorentz invariant. The great idea of Einstein (1905) w.r.t. understanding of what genuine laws of nature are was this: One can keep all laws of Classical Mechanics and of Maxwell's Theory invariant under inertial transformations II (i.e. without taking into account gravita-

[7] Cf. (STh) I, 46,2.

tion or strong forces) by giving up assumptions (i)-(iii) of (4) and assuming the constancy of light velocity (that the propagation of light with velocity c is independent of the movement of the source). A consequence is then that the magnitudes m, l, and t are not invariant under movement II, - i.e. if v comes close to c – and have to be corrected by the factor defined in the Lorentz transformation. This idea was however not just a mathematical advice for reformulation, because the consequences (the respective changes of the magnitudes: growing mass, length contraction, time dilatation) could be confirmed by experiment.

(vi) Arbitrary movement or arbitrary space time transformations. This kind of invariance of laws under arbitrary space time transformations is the invariance of general Relativity. It is the most general invariance of laws of nature we know today. In order to understand it more accurately, we have to notice that it transcends Lorentz Invariance in a threefold way: (i) first in the sense that it drops the restriction to inertial reference frames, (ii) secondly in the sense that it drops the restriction to straight Galilean coordinates, and (iii) third in the sense that it extends to gravitation.

Laws of nature which are invariant in that sense are Einstein's field equations.

Third Level: Dynamical Laws

From the time of Newton on one had a better and better understanding of one important type of law: the dynamical law. This understanding was connected with conditions satisfied by those physical systems the behaviour of which was successfully described by these dynamical laws; i.e. in such a way that the laws were confirmed by the application:

D1 the state of the physical system S at any given time t_i is a definite function of its state at an earlier time t_{i-1}. A unique earlier state (corresponding to a unique solution of the differential equation) leads under the time evolution to a unique final state (again corresponding to an unique solution of the equation).

D2 condition D1 is also satisfied for every part of the physical system, especially for every individual body (object) as part of the system even if the individual objects may differ in the classical or in the quantum mechanical sense.

D3 the physical system S is periodic, that is the state of S repeats itself after a finite period of time and continues to do so in the absence of external disturbing forces.

D4 the physical system S has a certain type of stability which obeys the following condition: Very small changes in the initial states, say within a neighbourhood distance of ϵ lead to proportionally small (no more than in accordance of linearly increasing function of time) changes $h(\epsilon)$ in the final state. This kind of stability which survives small perturbations and leads to relaxation afterwards is called *perturbative stability* and holds in many linear systems[8].

D1 is the main condition for dynamical laws although D3 and D4 were underestimated and D4 was only understood more deeply after the discovery of chaotic motion (see Sixth Level). D1 is manifest in Laplace's view that the dynamical laws are *the* laws governing our universe: "We ought to regard the present state of the universe as the effect of its anterior state and as the cause of the one which is to follow"[9]. In this sense Laplace thought that all the states of the universe could be calculated i.e. predicted and retrodicted from one single state with the help of the (dynamical) laws. Along this line of reasoning D1 is usually taken as the defining condition for determinism; where determinism is thought to imply predictability and conservation of information. But this is not correct because D1 does not guarantee predictability or conservation of information if D4 is not satisfied (see below).

D2 states that the dynamical law describes also the time development of the individual particle or object as a part of the time development of the whole physical system. This presupposes a concept of 'individual object' which is re-identifiable through time as understood in Classical Mechanics. Such kinds of objects are not available in this straightforward way (but only with special constraints) in Quantum Mechanics.

D3 is not a necessary condition for the application of dynamical laws obeying D1 and D2 though D3 is satisfied in most cases where dynamical laws are applied. The main point is that according to D3 there is recurrence of the state of the physical system after some finite period of time.

Are there important cases of physical system which satisfy D1 but not D3? The answer to this question is Yes. The systems in question are systems which show chaotic behaviour (or systems in chaotic motion). Chaotic behaviour is non-periodic. And this holds also without any external disturbance. A consequence of that is a further characteristic of chaotic motion: The Poincaré map shows space-filling points. This is a method introduced by Poincaré about 100 years ago

---

[8] Cf. the discussion of the conditions D1,D3 and D4 in Holt-Holt (1993).

[9] Laplace (1814) ch. 2

which considers the points in which the trajectory cuts a certain plane. If the motion is chaotic there will be no immediate recurrence that is the plane will always be cut at new points and as time goes on will be filled with points. But if the phase space is small – chaotic motion is bounded motion – there will be recurrance of the trajectory after some finite period of time.

D4 was a hidden assumption of Classical Mechanics (CM) until the end of the 20^{th} century. In other words the laws of CM were understood in such a way that D4 is always satisfied. The neglect is expressed by Lighthill as follows:

"Here I have to pause, and to speak once again on behalf of the broad global fraternity of practitioners of mechanics. We are all deeply conscious today that the enthusiasm of our forebears for the marvellous achievements of Newtonian mechanics led them to make generalizations in this area of predictability which, indeed, we may have generally tended to believe before 1960, but which we now recognize were false. We collectively wish to apologize for having misled the general educated public by spreading ideas about the determinism of systems satisfying Newton's laws of motion that, after 1960 were to be proved incorrect"[10]. On the other hand, that there are cases which violate D4, i.e. cases where small initial deviations lead to un-proportional (exponentionally increasing) effects was known by experienced people from antiquity (see below, level 6: chaotic motion).

Fourth Level: Statistical Laws

After the discovery of statistical laws in thermodynamics and later in other areas there was a general doubt with respect to the mechanistic and deterministic interpretation of the world with the help of dynamical laws. That there are physical truths which are statistical in character was clear for Boltzmann and Poincaré who both underline the importance of Maxwell's, Clausius', Gibbs' and Carnot's discoveries[11].

The question was now: Could it not be the case that all laws are statistical and the deterministic outlook is only on the surface of macroscopic phenomena? That is all complex systems of the world are in fact, in its inmost structure, i.e. on the atomic level, like gases or swarms of mosquitos or clouds. And how can a law then emerge from such a random behaviour of milliards of gas molecules? Schrödinger gave the following answer in his inaugural lecture in Zürich (1922):

"In a very large number of cases of totally different types, we have now succeeded in explaining the observed regularity as completely due

[10] Lighthill (1986) p. 38.

[11] Cf. Boltzmann (1896) p 567 and Poincaré (1958) p. 97

to the tremendously large number of molecular processes that are co-operating. The individual process may, or may not, have its own strict regularity. In the observed regularity of the mass phenomenon the individual regularity (if any) need not be considered as a factor. On the contrary, it is completely effaced by averaging millions of single processes, the average values being the only things that are observable to us. The average values manifest their own purely statistical regularity…"[12].

The main points in which statistical laws differ from dynamical laws can be expressed by the following four conditions S1-S4 which refer to D1-D4 respectively:

S1 the state of the physical system at t_i is not a definite function of an earlier state at t_{i-1}. The same initial state may lead to different successor states (branching);

S2 statistical laws describe and predict the states of the whole physical system but they do not describe or predict the individual parts (objects) of this system;

S3 statistical laws describe only physical systems which are non-periodic, i.e. systems with extremely un-probable recurrence of the whole state of the system;

S4 the loss of information (and consequently the difficulty of prediction) about the state of an individual object (or a small part) of the whole system increases exponentially with the complexity of the system. On the other hand: the (accuracy of the) information about the average values of magnitudes (parameters) of the state of an individual object (or small part) increases also with the complexity of the system.

There were two main questions concerning both types of laws:

(vii) Is one type of law reducible to the other?

(viii) Are statistical laws compatible with dynamical laws?

4.1 Statistical Laws are not reducible to dynamical laws

The answer to the first question is certainly: No. This can be shown from a comparison of the conditions D1-D4 to S1-S4.

a. It is easy to see that there is an essential difference between the conditions D1 and S1. Like D1 is necessary for dynamical laws, S1 is necessary for statistical laws. This presupposes however that we interpret S1 (and by it statistical laws) realistically. That is we assume there is real branching in reality. An epistemic (or idealis-

---

[12] Schrödinger (1961) p. 11. Schrödinger's lecture which had the title „Was ist ein Naturgesetz" was later published in the book "Was ist ein Naturgesetz?" which is a collection of essays by Schrödinger.

tic) interpretation according to which branching is only a sign for our lack of knowledge whereas in the underlying reality everything is determined (by hidden parameters and dynamical laws of which we are ignorant) we do not find justified. This can be substantiated by the fact that the following types of processes do not satisfy D1 (but satisfy S1) as is evident by all the sophisticated knowledge we possess today about these processes: Thermodynamical processes, processes of friction, of diffusion, of radiation, of electric transport, processes of Quantum Mechanics, processes of biology, of cosmology and of psychology[13].

b. Similarly D2 and S2 differ in an important point. Statistical laws are bound to huge ensembles they describe physical systems consisting of a huge number of objects. The greater the number of objects the more strict is the law about the whole ensemble. Though there is indeterminacy for every individual system, there is a strict law for the whole system if the ensemble is large enough. To some extent such laws "emerge" from the "lawless" behaviour of a large number of individual systems. In this sense Wheeler spoke of "law without law"[14]. This description fits very well to the statistical laws in Thermodynamics. Concerning the statistical laws in QM there is an additional problem: though it is clear also here that the theory refers to big ensembles of prepared systems the question is whether this is the only reference; i.e. whether it also refers to individual quantum systems like singular photons or electrons. This question arises especially in connection with series of new experiments[15].

Despite of this complication in QM, it holds for all important statistical laws that the individual system is not definitely described by the law but has its degrees of freedom which are not restricted by the law. This shows unambiguously the difference between D2 and S2. And it shows again that w.r.t. D2 and S2 neither type of law is reducible to the other.

(iii) The difference between dynamical and statistical laws which is usually viewed as the striking difference is that which is expressed in D3 and S3: Dynamical laws are invariant under time-reversal, statistical laws are not. The former describe processes which are

---

13 This is however not the place to enter a discussion about the ontological status of statistical laws.

14 Wheeler (1980) p. 363. Cf. The quotation of Schrődinger above.

15 These are mainly so-called Split-beam experiments with photons and other particles and experiments which hold particles in a „cave". For the emergence of statistical laws in QM see Mittelstaedt (1997).

time (reversal) symmetric, the latter describe processes which are irreversible;

But this difference has been weakened within the last years to a considerable extent. First indirect violations of time-reversibility have been found, recently also direct ones. Concerning the indirect violations it is known already since decades that CP (charge-parity) is violated in weak interaction with neutral K-mesons. Since CPT (the combined symmetry of charge parity and time) – one of the most important symmetries of Quantum Field Theory – seem to be universally satisfied T has to outbalance the difference and therefore T-reversibility cannot hold unrestrictedly. Concerning the direct violation there have been two different series of experiments independently made in CERN and FERMILAB which proof the violation: The time dependent rates for the strangeness-oscillation process from K^0 to $\bar{K}^0$ and its inverse from $\bar{K}^0$ to K^0 (neutral kaons) are different (CERN)[16]. If time-reversal symmetry were strictly preserved we should have identical rates. Since T, unlike P, reverses also the spin of the particle an angular variable ϕ was measured for each decay. Time reversal symmetry would require that the ϕ (and sin 2 ϕ) distributions are symmetrical about zero. The observed asymmetry is about 14 % which agrees with the theoretical expectation (FERMILAB)[17].

Concerning D4 and S4 it holds that there is a considerable difference if D4 is satisfied. Then the system governed by dynamical laws relaxes if it is disturbed in a modest way. In this case the predictability also of singular parts of the system (singular objects) does not decrease. If however D4 is not or only partially satisfied then we have (stronger or weaker) chaotic motion. In this case there is no predictability – although the system is governed by dynamical laws – and loss of information about the diverging parts of the system according to the Kolmogorov entropy (see level six below). In this case there is a certain similarity to S4 w.r.t. the individual objects or small parts of the system: in both cases there is an exponentially growing loss of information about the individual parts of the system. But this similarity should not mislead: In the disturbed case of a dynamical system its chaotic behaviour does not even satisfy statistical laws[18], or satisfies only partially statistical laws in the following sense: In some cases one can take into account ensembles of trajectories instead of single trajectories; since single

[16] Angelopoulos et al. (1998).
[17] Cf. Schwarzschild (1999)
[18] An example is the chaotic pendulum. For a description see Lighthill (1986).

trajectories which differ very little w.r.t. their initial conditions (their starts) diverge exponentially in the course of time. Whether such a description is possible depends on the degree of how chaotic a motion is[19].

4.2 Statistical laws are compatible with dynamical laws

(i) Concerning D1 and S1 both are easily compatible w.r.t. to huge ensembles of individual objects. In this case also the statistical law can make definite statements about the future state. The individual state however is not determined by the earlier state in processes of thermodynamics, radiation, friction etc. (provided we accept a realistic interpretation of statistical laws, i.e. assuming real degrees of freedom of the individual object in such phenomena).

(ii) Zermelo thought that he had proved that dynamical laws and statistical laws (like Boltzmann's law of entropy) are incompatible. He used Poincaré's recurrence theorem to show that Boltzmann's statistical mechanics cannot be correct[20]. However, as the replies of Boltmann show[21] Zermelo partially neglected and partially misunderstood important conditions in connection of Poincaré's recurrence theorem. Zermelo did not realize under which physical conditions this theorem is not applicable and that the recurrence depends very much on the complexity of the system; such that with increasing complexity the probability of the recurrence of the state of the system becomes extremely low[22].

(iii) At the time of Zermelo there was of course a strong belief that dynamical laws describe processes which are time-reversible. As it was said in 4.1(iii) time reversal symmetry does not strictly hold on the micro level. On the other hand Boltzmann was always very modest concerning claims of "irreversibility". Although he used this term he immediately added that it means that the probability of the recurrence of the whole system is very low and decreases expo-

[19] Chirikov (1991)

[20] Zermelo (1896a,b)

[21] Boltzmann (1896) and (1897).

[22] Zermelo was at that time assistant to Max Planck who didn't go so far in his views as his assistant. For that see a letter from Planck to Graetz, cited in Kuhn (1978) p. 27. Cf. also Weingartner (1999) After Boltzmann's criticism of Zermelo's alleged proof, Zermelo left physics and worked on the foundations of mathematics (Set theory) where he became very successful. However, he still behaved stubborn w.r.t. to new discoveries or proofs. In October 1931 he wrote to a friend that Gödel's proof (of the incompleteness and undecidability of arithmetic) is nonsense. See the letter published in Weingartner-Schmetterer (1987) p. 45 f.

nentially with the complexity of the system. Taken in this interpretation there is no incompatability.

(iv) The compatibility of dynamical and statistical laws even within one physical system is illustrated in a lucid way by a *Gedankenexperiment* of Lee[23]:

Assume a number of airports with flight connections in such a way that between any two of these airports the number of flights going both ways along any route is the same. This property will stand for microscopic reversibility. Some of the airports may have more than one air connection (they are connected with more than one other airport) whereas other airports have a connection only to one airport (let's call such airports dead end airports). A passenger starting from a dead end airport (or starting from any other airport) can reach any other airport and can also get back to his starting airport with the same ease. This property stands for macroscopic reversibility. In this case we have both mircroscopic and macroscopic reversibility.

But suppose now we were to remove in every airport all the signs and flight informations, while maintaining exactly the same number of flights. A passenger starting from a dead end airport A will certainly reach the next airport B since that is the only airport connected with A. But then especially when assuming that B has many flight connections – it will be very difficult to get further to his final destination, in fact it will be a matter of chance. Moreover his chance to find back to his dead end airport A will be very small indeed. Thus in this case we have microscopic reversibility maintained but macroscopic irreversibility or very improbable recurrence – especially if we think of millions of passengers flying around randomly - and both are not in conflict.

Fifth Level: Laws and Causality

One level or kind of understanding of laws of nature which has been of great importance in the whole history of philosophy and of science is connected with causality. And after the more accurate interpretation of dynamical law with the help of differential equations (from Newton's time on) this type of causal relation got a very definite interpretation: In the time development of a physical system its state S_1 (which corresponds to a solution of the differential equation) is the cause of its later state S_2 (which corresponds again to a solution of the equation) where the causal relation between cause S_1 and effect S_2 is

[23] Lee (1988) p. 16 f.

represented by the law of nature formulated by the differential equation. This was an exact interpretation of one type of cause of the four traditional causes described by Aristotle in his metaphysics[24]. The corresponding understanding of laws of nature was such that every law of nature represents a causal relation or describes a causal connection which is such that the following conditions are satisfied:

(i) It satisfies D1 and D2, i.e. the causal relation takes place not only between the earlier and later states of the system but also between all its sub-systems, ultimately between the individual objects or particles. This condition, i.e. a causal relation according to D1 and D2 is often expressed in the following way:

CD The same initial state leads – under the same conditions – to the same series of successor states.

(ii) Every causal relation represented by laws of nature and describing causal processes is spacio temporal continuous.

(iii) It satisfies D4, i.e. it presupposes physical systems with a high degree of stability such that perturbations will not destroy definite predictability of the effects.

Processes like those of thermodynamics didn't satisfy (i), those of Quantum Mechanics (QM) didn't satisfy (ii) and those of chaotic motion didn't satisfy (iii). Therefore the natural question was whether such processes are causal.

The first question is whether there is some kind of causality represented by statistical laws. Such a kind of causality cannot satisfy D1 and D2. Also condition (ii) should not be a necessary condition for such a kind of causality. A causal relation for statistical laws which is in accordance with S1-S4 was proposed by March:[25]

CS The same initial state may lead to different successor states. But those successor states which belong to the same initial state obey the same statistics.

The second question is whether there is some kind of causality which can be accepted in quantum mechanical processes. As is known Heisenberg thought that the uncertainty relations prove that there cannot be "Since all experiments have to obey the equation $\Delta p \cdot \Delta q \geq h$ viz. $\Delta W \cdot \Delta t \geq h$ QM establishes finally the invalidity of the causal law"[26]. Concerning this second question one should not forget first that D1 plus D4 are valid not only for objects which can be treated classically (described by Hamilton equations) but also for those QM-objects to

[24] Aristotle (Met) book V, ch. 2. This type of cause fits probably best to the so called causa efficiens.

[25] March (1957) p. 14

[26] Heisenberg (1927) p. 197

which definite properties can be attributed by the Schrödinger equation. Secondly one should notice that the constraints of the uncertainty relations do not forbid every causal relation but only those which presuppose a principle (FS) which was indeed a hidden assumption in classical physics and also in the philosophical tradition:

FS Any two quantities (out) of all observables can be measured instantaneously to a suitable degree of exactness; or more accurately in such a way that the values of measuring are free of dispersion and determined by hidden parameters which are themselves not observable.

The principle FS is not satisfied in QM. However, QM is not the only area where this or analogous principles are not satisfied. There is a more general principle which belongs to the formation rules underlying classical logic. It says that every proposition can be combined with any other one to form a new proposition and every predicate can be combined with any other one to form a new (complex) predicate. One can easily see that these principles have to be taken with care when logic (presupposing them) is applied to certain fields: Since p, q...etc. are variables they can be instantiated by any statement about empirical events. Thus if p represents the occurrence of human action h_1 and q represents the occurrence of human action

h_2 then it is not always the case that $p \wedge q$ represents also a complex action h_3. Thus the events described cannot be combined like the describing propositions. The following example form zoology is concerned with incompatible predicates: Sexual excitement and fear cannot be observed (or measured) at the same time in male animals but it can in female animals while sexual excitement and aggression cannot be observed a the same time in female ones but in male animals. These examples show that the invalidity of such or similar principles like FS is not a speciality of QM but is rather general and is distributed among different fields of reality which are investigated by scientific research. The conclusion of all that is simply that any concept of causality which implies (or presupposes as a necessary condition) the principle FS is not suitable for QM and also not for other areas of natural science.

The third question is whether there is some kind of causality which can be accepted in processes of chaotic motion. To this one may answer that in the case of dynamical (or deterministic) chaos the underlying laws are dynamical laws and therefore nothing hinders to apply here a concept of causality which is that of dynamical laws i.e. satisfies D1, D2, (i) and (ii) though does not satisfy D4. That it does not satisfy D4 means that causality should not be confused with predictability. Thus though D1 and D2 are satisfied (i.e. there are dynamical or deterministic laws) chaotic motion is not predicable except for extremely short time intervals.

Sixth Level: Chaotic Motion

The discovery of chaotic motion showed something new which was not understood in connection with laws of nature so far. It showed that initial conditions, boundary conditions or mathematical proportions are not necessarily accidental but can play an important role w.r.t. several properties of the laws. The new discovery was that even within the area of relatively simple physical systems which perfectly obey dynamical laws of Classical Mechanics, like the spherical pendulum, such systems can change radically its behaviour. Thus a dynamical system obeying Newton's laws with strict predictability can become chaotic in its behaviour and practically unpredictable just by changing slightly some initial conditions. Experiments which prove such a behaviour of dynamical systems have been made since the seventies. A special kind of very simple arrangements are experiments with the so-called forced pendulum or with the kicked rotator. Such systems satisfy normally conditions D1 to D4 (cf. chapter 3 above). But a small change in the initial conditions force the system to violate D3 and D4. Concerning the spherical pendulum the important new discovery is now that this simple physical system becomes chaotic if the top end is forced to move back and fort (maximal displacement Δ) with a slightly different period T greater than T_0, provided that Δ is about 1/64 of l and not more than about a tenth of the energy of motion is dissipated by damping (air resistance etc.). Miles (1984) showed experimentally that the system is chaotic for values of $T = 1{,}00234T_0$. It has to be emphasized however that this does not just mean that the system becomes unstable in the sense of simple bifurcation. In this case – and this was known for a long time – the pendulum will relax after a certain time. But for the values above the pendulum is breaking out of the plane, the bifurcations are increasing the dependence on the initial conditions is completely random and there is no predictability. Nobody knows why this happens exactly at $T = 1{,}00234T_0$. And this shows that there is still a lot of ignorance concerning special values of initial conditions and in general concerning their role w.r.t. to the laws. The important necessary condition for chaotic behaviour is the sensitive dependence on the initial condition; or the fact that small changes in the initial states lead to exponentially increasing changes in the course of the time development.

Historically it is interesting that already Aristotle had some understanding of such an exponential growth:

"...the least initial deviation from the truth is multiplied later a thousandfold"[27].

A modern interpretation of Aristotle's observation of increasing error is given by the so-called Hénon-attractor[28]. The error increases exponentially with a factor a^t , where $a \sim 1{,}52$ and t is a time unit. A deeper understanding is shown by Maxwell in the following quotation:

"There is another maxim which must not be confounded with that quoted at the beginning of this article[29], which asserts 'That like causes produce like effects'. This is only true when small variations in the initial circumstances produce only small variations in the final state of the system. In a great many physical phenomena this condition is satisfied; but there are other cases in which a small initial variation may produce a very great change in the final state of the system, as when the displacement of the "points" causes a railway train to run into another instead of keeping its proper course"[30]. The example of Maxwell shows that the sensitive dependence on initial conditions is not a defining condition (necessary and sufficient) for chaotic motion but only a necessary, though very important one: The unproportional effect need not to be chaotic (as the running of the train into a different direction); however the crash may be partially a chaotic phenomenon. On the other hand Newton though considering weak perturbation didn't pay much attention to such initial conditions as for example the distances of the planets and their mathematical proportions. In contradistinction Kepler was convinced that these proportions (which he calculated to be approximate to the golden cut) are necessary for the harmony (in today's terms: stability) of the planetary system. This is not the place to go into details about chaotic motion. Elsewhere I have given eight necessary conditions for dynamical chaos[31]. The new message however is, w.r.t. the question of understanding what a law (of nature) is, that initial conditions, boundary conditions and mathematical proportions are much more important than they seemed to be until the second half of the last century.

Seventh Level: Initial Conditions and Constants of Nature

The understanding of what a law is depends on the distinction between laws and initial conditions. This goes back to the Greeks (see

[27] Aristotle (Heav) 271b8

[28] Hénon (1976)

[29] The one to which Maxwell refers is „The same causes will always produce the same effects" which he discusses earlier.

[30] Maxwell (1992) p.13

[31] Weingartner (1996) p. 52 f.

first level of understanding). The deeper problems of such a distinction are very well described by the following quotations of Wigner and Wheeler:

"The world is very complicated and it is clearly impossible for the human mind to understand it completely. Man has therefore devised an artifice which permits the complicated nature of the world to be blamed on something which is called accidental and thus permits him to abstract a domain in which simple laws can be found. The complications are called initial conditions; the domains of regularities, laws of nature. ... The artificial nature of the division of information into "initial conditions" and "laws of nature" is perhaps most evident in the realm of cosmology. Equations of motion which purport to be able to predict the future of a universe form an arbitrary present state clearly cannot have an empirical basis. It is, in fact, impossible to adduce reasons against the assumption that the laws of nature would be different even in small domains if the universe had a radically different structure. One cannot help agreeing to a certain degree with E.A. Milne, who reminds us that, according to Mach, the laws of nature are a consequence of the contents of the universe. The remarkable fact is that this point of view could be so successfully disregarded and that the distinction between initial conditions and laws of nature has proved so fruitful[32].

The question what fixes the initial conditions was already discussed in the 13th century at this very university (Sorbonne, Paris) where I am giving my talk now: The question about which Thomas Aquinas and Bonaventura had a fight was that of the initial conditions of the universe. Can it be proved rigorously (i.e. in the sense of a *demonstratio* which is based on laws) that the world had a beginning (and has a finite age)? Bonaventura thought he can prove that by showing that so far not infinitely many states of the universe could have been past. Thomas Aquinas defended the view that this cannot be proved with the help of laws about this world (universe). And his argument was very simple: genuine laws abstract from hic (here, place) and nunc (now, point of time). Therefore we cannot derive any singularity (initial condition) form a law[33]. This points to a certain incompleteness of all genuine laws and of all laws of nature. They do not fix certain initial conditions. Form this it follows that initial conditions can be changed without changing laws. Thus our laws must be valid also in other possible universes which differ from ours only with respect to initial conditions. This way of thought was used by Popper

[32] Wigner (1967) p. 3. Milne (1948) p. 4.

[33] Cf. Thomas Aquinas (STh) I, 46,2.

to define the kind of necessity which pertains to laws of nature, natural or physical necessity: "A statement may be said to be naturally or physically necessary iff it is deducible from a statement function which is satisfied in all worlds that differ from our world (if at all) only with respect initial conditions"[34]. But the question what kinds of initial conditions can change without changing the laws of nature is a very difficult one. It leads to the general question of the set of all those changes which do not change laws (of nature). This set Weinberg called the symmetry group of nature about which he wrote:

"It is increasingly clear that the symmetry group of nature is the deepest thing that we understand about nature today...Specifying the symmetry group of nature may be all we need to say about the physical world beyond the principles of quantum mechanics"[35]. That the laws of nature are valid not just in our universe but also in others which differ from ours only w.r.t. some special initial conditions I have defended elsewhere[36]. There are two main reasons for that: (1) not all laws of nature are deterministic dynamical laws but some are statistical laws which allow branching and degrees of freedom for the individual particle. (2) It is impossible that all initial conditions (for example micro-states) which are compatible with all the laws of nature occur as states (are played through) during the life time of our universe, provided this life time is finite.

Concerning constants there is the difficult question whether the constants of nature are really constant. The important constants for non-relativistic Quantum Mechanics (QM) are h (Plancks constant), m_e (mass of electron) and e (elementary charge). For relativistic QM the three main constants are h, c (light velocity) and G (gravitational constant). In addition there are the dimenson-less constants α (Fine structure constant)and the proportion of proton mass to electron mass (1836). If at least one of these constants would change the fundamental laws (in which they occur) would not be time(translation)invariant. Though there is intensive research done in order to be able to rigorously test whether some of these constants change (slowly) with time, there is not a clear experimental evidence for it so far. Another question connected with this one is the explanation or the deeper reason for these magnitudes. With this question Dirac was concerned from 1937 on. In his last paper on that in 1973 he writes.

"At present, we do not know why they should have the values they have, but still one feels that there must be some explanation for them

[34] Popper (1959) p. 433.
[35] Weinberg (1987) p. 73
[36] Cf. Weingartner (1996) ch. 7.2

and when our science is developed sufficiently, we shall be able to calculate them"[37]. There he formulates also his *Large Numbers Hypothesis.* This hypothesis states that very large numbers cannot occur without reason in the basic laws of physics.

"It involves the fundamental assumption that these enormous numbers are connected with each other. The assumption should be extended to assert that, whenever we have an enormous number turning up in nature, it should be connected to the epoch and should, therefore, vary as t varies. I will call this the Large Numbers hypothesis[38]. One of Dirac's examples for an equation satisfying his *Large Numbers Hypothesis* was: e^2/G ? $m_e \cdot m_p = T/t_e$ (where the left part is the ratio of electric force and the gravitational force of electron and proton and the right part is the ratio of the age of the universe and the time the light needs for the diameter of the electron). Both magnitudes are dimensonless and of the order 10^{40}. If this equation is true then the laws of nature are not time(translation)symmetric since G would decrease with time. Applied to the Big Bang Theory the *Large Numbers Hypothesis* implies continuous creation of matter which would violate the law of conservation of energy. However, there is not enough experimental evidence for a decision concerning these questions. But independently of that we may say that even if the laws of nature would change very slowly in accordance with very slow changes of the fundamental constants due to the development of the universe such laws of nature would be invariant (symmetric) enough to both (i) justify the distinction between initial conditions and constants on one hand and laws on the other and (ii) explain contingent facts with the help of these laws.

REFERENCES

Weingartner, P. (2000) *Basic Questions on Truth.* Kluwer, Dordrecht.

Schurz G. – Weingartner P (1987) "Verisimilitude Defined by Relevant Consequence-Elements. A New Reconstruction of Popper's Original Idea." In: Kuipers, Th. (ed.) What is Closer-to-the-Truth? Rodopi, Amsterdam, p.47-77.

Aristotle (Phys) *Physics.* In: The Complete works of Aristotle, ed. By J. Barnes. Princeton Univ. Press, Princeton 1985. Vol II.

Aristotle (Met) *Metaphysics.* In: the Complete works of Aristotle, ed. By J. Barnes. Princeton Univ. Press, Princeton 1985. Vol.I.

Wigner E.P. (1967) *Symmetry and Reflections.* Scientific Essays of Eugene P. Wigner, ed. by Moore W.J. and Scriven M. Indiana Univ. Press, Bloomington.

Popper K.R.-Eccles J. (1981) *The Self and its Brain.* Springer Berlin.

[37] Dirac (1973) P. 45

[38] Ibid. P. 46

Weinberg St. (1987) *Towards the Final Laws of Physics.* In: Elementary Particles and the Laws of Physics; Cambridge Univ. Press, Part II p. 61-110.

Thomas Aquinas (STh) *Summa Theologica.* Christian Classics. Westminster Maryland, 1981.

Holt D.L., Holt R.G. (1993) "Regularity in Nonlinear Dynamical Systems." In: Brit. J. for the Philosophy of Science 44, p. 711-727.

Laplace (1814) *Essai philosophique sur les probabilités.* Courcier, Paris.

Lighthill J. (1986) "The Recently Recognized Failure of Predictability in Newtonian Dynamics." Proceedings of the Royal Society London A 407, p. 35-50.

Boltzmann L. (1896) „Entgegnung auf die wдrmetheoretischen Betrachtungen des Herrn E. Zermelo." In: Boltzmann, *Wissenschaftliche Abhandlungen* Vol. III, § 119.

Poincaré H. (1958) *Science and hypothesis.* Dover.

Schrodinger E. (1961) *Was ist ein Naturgesetz?* Olms Hildesheim, Engl. Transl. in: E. Schrödinger, *Science and the Human Temperament.* Allen & Unwin, London.

Mittelstaedt P. (1997) "The Emergence of Statistical Laws in Quantum Mechanics." In: Ferrero-Meruwe (eds.) *New Developments on Fundamental Problems in Quantum Physics.* Dordrecht, Kluwer p. 265-274.

Angelopoulos A. et al. (1998) Phys. Lett. B 444, 43.

Schwarzschild B. (1999) "Two Experiments Observe Explicit Violation of Time-Reversal Symmetry." In: Physics Today, February 1999, p. 19-20.

Chirikov B. (1991) "Patterns in Chaos." In: Chaos, Solitons and Fractals 1(1) p. 79-103.

Zermelo E. (1896a) „Über einen Satz der Dynamik und die mechanische Wдrmetheorie." In: Wiedemanns Annalen 57.

Zermelo E. (1896b) „Über die mechanische Erklдrung irreversibler Vorgдnge." In: Wiedemanns Annalen 59.

Boltzmann L. (1897) „Zu Herrn Zermelos Abhandlung ‚Ьber die mechanische Erklдrung irreversibler Vorgдnge'". In: Boltzmann (1968) Vol. II, § 120.

Boltzmann L. (1968) *Wissenschaftliche Abhandlungen.* Chelsea Publ. Comp. New York

Kuhn Th. (1978) *Black Body Theory and the Quantum Theory* 1894-1912. Oxford Univ. Press Oxford

Weingartner P. – Schmetterer L. (1987) *Gödel Remembered.* Bibliopolis, Napoli.

Lee T.D. (1988) *Symmetries, Asymmetries and the World of Particles.* Univ. of Washington Press, Seattle.

March A. (1957) *Das neue Denken der modernen Physik.* Rowohlt, Hamburg.

Heisenberg W. (1927) „Über den anschaulichen Inhalt der quantentheoretischen Kinematik und Mechanik." In: Zeitschrift fьr Physik 43, p. 172-198.

Aristotle (Heav) "On the Heavens." In: *The Complete Works of Aristotle*, ed. By J. Barnes. Princeton Univ. Press, Princeton 1985.

Hénon M. (1976) "A Two Dimensional Map with a Strange Attractor." Commun. Math. Phys. 50, p. 69-77.

Maxwell J. C. (1992) *Matter and Motion.* Dover New York.
Weingartner P. (1996) "Under What Transformations Are Laws Invariant?" In: Weingartner-Schurz (eds.) *Law and Prediction in the Light of Chaos Research.* Berlin, Springer.
Milne E.A. (1948) *Kinematic Relativity.* Oxford Univ. Press, Oxford.
Wheeler J.A. (1980) "Beyond the Black Hole." In: *Some Strangeness in the Proportion.* Ed. by Harry Woolf. Addison-Wesley Publ. Comp., Reading, Mass. P. 341-375.
Popper K.R. (1959) *The Logic of Scientific Discovery.* Hutchinson, New York.
Dirac P.A.M. (1973) "Fundamental Constants and Their Development in Time." In: Mehra J.(ed.) *The Physicist's Conception of Nature.* Reidel, Dordrecht, p.45-54.

БИБЛИОГРАФИЯ СБОРНИКОВ «ЛОГИЧЕСКИЕ ИССЛЕДОВАНИЯ»

Логические исследования. Вып. 1. М.: Наука, 1993.
Логические исследования. Вып. 2. М.: Наука, 1993.
Логические исследования. Вып. 3. М.: Наука, 1995.
Логические исследования. Вып. 4. М.: Наука, 1997.
Логические исследования. Вып. 5. М.: Наука, 1998.
Логические исследования. Вып. 6. М.: Наука, 1999.
Логические исследования. Вып. 7. М: Наука, 2000.
Логические исследования. Вып. 8. М.: Наука, 2001.
Логические исследования. Вып. 9. М.: Наука, 2002.
Логические исследования. Вып. 10. М.: Наука, 2003.

Авторский указатель 1-10 выпусков сборника «Логические исследования»[1]

[1] Составитель Шиян Т.А.

BIBLIOGRAPHY
OF «LOGICAL INVESTIGATIONS»

Logical Investigations. Vol. 1. Nauka, Moscow, 1993.
Logical Investigations. Vol. 2. Nauka, Moscow, 1993.
Logical Investigations. Vol. 3. Nauka, Moscow, 1995.
Logical Investigations. Vol. 4. Nauka, Moscow, 1997.
Logical Investigations. Vol. 5. Nauka, Moscow, 1998.
Logical Investigations. Vol. 6. Nauka, Moscow, 1999.
Logical Investigations. Vol. 7. Nauka, Moscow, 2000.
Logical Investigations. Vol. 8. Nauka, Moscow, 2001.
Logical Investigations. Vol. 9. Nauka, Moscow, 2002.
Logical Investigations. Vol. 10. Nauka, Moscow, 2003.

Author's Index of vol. 1-10 of «Logical Investigations»[1]

[1] Const. by Shiyan T.A. (Шиян Т.А.).

СОДЕРЖАНИЕ

CONTENTS

Научное издание

Логические исследования
Вып. 10

Утверждено к печати
Институтом философии РАН

Зав. редакцией *Г.И. Чертова*

Редактор *Е.А. Жукова*
Художественный редактор *Т.В. Болотина*

Компьютерный набор выполнен
в Институте философии РАН

Компьютерная верстка
С.А. Павлов

Подписано к печати 04.11.2003. Формат 60 × 90 $^{1}/_{16}$
Гарнитура Таймс. Печать офсетная
Усл.печ.л. 19,5. Усл.кр.-отт. 19,8. Уч.-изд.л. 21,1
Тираж 430 экз. Тип. зак. 4718

Издательство "Наука"
117997, Москва, Профсоюзная ул., 90

E-mail: secret@naukaran.ru
Internet: www.naukaran.ru

Санкт-Петербургская типография "Наука"
199034, Санкт-Петербург, 9-я линия, 12