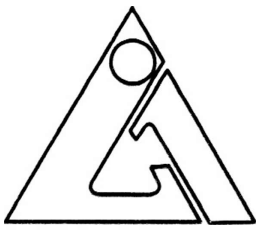
РОССИЙСКАЯ АКАДЕМИЯ НАУК

ИНСТИТУТ ФИЛОСОФИИ



LOGICAL INVESTIGATIONS

Volume 11

MOSCOW NAUKA 2004

ЛОГИЧЕСКИЕ ИССЛЕДОВАНИЯ

Выпуск 11

МОСКВА НАУКА 2004

УДК 16
ББК 87.4
Л69

Редколлегия:

Карпенко А.С. (отв. редактор),
Анисов А.М., Бежанишвили М.Н., Быстров П.И.,
Васюков В.Л., Ивлев Ю.В., Маркин В.И., Непейвода Н.Н.,
Павлов С.А. (отв. секретарь),
Попов В.М., Смирнова Е.Д., Успенский В.А., Финн В.К., Чагров А.В.

Editor-in-Chief:

Alexander S. Karpenko,
Institute of Philosophy, Russian Academy of Sciences, Moscow

Логические исследования. Вып. 11. – М.: Наука 2004. – 314 с.

ISBN 5-02-033542-8

В 11 выпуске «Логических исследований» опубликованы статьи, в которых изложены новые результаты, полученные в различных областях современной логики. Особое внимание уделено неклассическим логикам. Обсуждается сложнейший вопрос о предмете логики в свете современных тенденций ее развития.

Сборник предназначен для всех интересующихся логикой и ее приложениями в различных научных дисциплинах.

Logical Investigation. Vol. 11. – M.: Nauka 2004. – 314 p.

The anniversary «Logical Investigations. Vol. 11» contains papers with a new results obtained in different fields of modern logic. Special attention is paid to non-classical logics. The most difficult question of the subject of logic in the light of its modern trends of development is discussed in this volume.

The edition is addressed to everyone who is interested in logic and its applications in various scientific disciplines.

АК

ISBN 5-02-033542-8

© Коллектив авторов, 2004
© Российская академия наук и издательство «Наука», продолжающееся издание «Логические исследования» (разработка, оформление), 1993 (год основания), 2004

А.М.Анисов

ОПРЕДЕЛЕНИЕ ПОНЯТИЯ РЕАЛЬНОЙ ИСТИНЫ В ТЕОРИИ МНОЖЕСТВ С АТОМАМИ*

Abstract. *Offered in this paper is a definition of a notion of real truth founded on a semantic theory of truth and a set theory with atoms. The definition allows of a more precise display of a concept of "correspondence" presented in a classical concept of truth.*

Суть классической или корреспондентской концепции истины заключается в идее соответствия высказываний и реальности. Ее первую четкую формулировку мы находим у Платона: «тот, кто говорит о вещах в соответствии с тем, каковы они есть, говорит истину, тот же, кто говорит о них иначе, лжет»[1]. Основоположник семантической теории истины А.Тарский неизменно считал, что его теория истины является уточнением идей классической концепции истины. Тем не менее Тарский вынужден был признать, что «Большинство авторов, обсуждавших мою работу о понятии истины, придерживаются мнения, что мое определение не соответствует классическому истолкованию этого понятия»[2]. Кто же прав – Тарский или его критики? Рассмотрим семантическую теорию истины. В этой теории «истина» рассматривается как предикат предложений или, что то же самое по определению, высказываний. Высказывания формулируются в точно определенных языках – формализованных языках. Пусть это будут языки классического первопорядкового исчисления предикатов. В силу тезиса Гильберта, все, что можно сказать, можно сказать в подходящем первопорядковом языке, так что ограничение первопорядковыми языками по сути не является ограничением и общность подхода поэтому не будет потеряна.

Возьмем какое-либо высказывание *A*. Будет это высказывание истинным или нет? Пусть *A* есть 'Снег бел'. Тогда *Истинно*, что 'Снег бел' тогда и только тогда, когда Снег бел. Это пример самого А.Тарского и, прямо скажем, весьма неудачный. Скольких людей он заставил пойти по неправильному пути! Несмотря на все последующие разъяснения самого создателя семантической теории

* Работа выполнена при поддержке РГНФ, грант № 04-03-00344.

1 *Платон.* Кратил. 385b // Собр. соч. в 4 т.: Т. 1. М., 1990.

2 *Тарский А.* Семантическая концепция истины и основания семантики // Аналитическая философия: Становление и развитие (антология). М., 1998. С. 116.

истины, что это не определение истины, а лишь следствие из него и т.д., многие пребывают в убеждении, что суть семантической теории в том, что кавычковое имя высказывания в левой части эквиваленции заменяется самим высказыванием в правой ее части. Но тогда ничего, кроме самих предложений и их имен для определения предиката истинности не нужно! Где уж тут вести речь об истине как каком-то соответствии внелингвистической реальности.

Еще одна неудачная особенность данного, так сказать, канонического примера состоит в том, что высказывание 'Снег бел' не является высказыванием языка первого порядка. Это высказывание естественного языка. Оно требует перевода на логический язык. Для этого требуется сообразить, что термин 'Снег' – не имя собственное. Лишь обладающий необычайно раскованным воображением человек может думать, что термин 'Снег' является именем некоторого индивида, которому предицируется свойство 'Бел'. На самом деле оба эти термина являются сингулярными предикатами, так что адекватный перевод с естественного языка на язык первопорядковой логики выглядит так:

$$\forall x(\text{Снег}(x) \rightarrow \text{Бел}(x)).$$

Уже по причине сложности логической структуры данного высказывания оно не подходит на роль адекватного исходного примера.

Но все же. Что должно стоять в правой части эквиваленции после перевода? Может быть, для кого-то итоговая эквиваленция будет выглядеть так:

Истинно ('$\forall x(\text{Снег}(x) \rightarrow \text{Бел}(x))$') $\Leftrightarrow \forall x(\text{Снег}(x) \rightarrow \text{Бел}(x))$.

Но это не соответствует подходу А.Тарского. Согласно его подходу, во-первых, требуется найти некоторое *непустое множество объектов* U, которое, вообще говоря, совершенно не обязано быть множеством лингвистических объектов; напротив, и само это множество, и принадлежащие ему объекты, как правило, не являются объектами языка. В общем случае это *внелингвистические* сущности. Во-вторых, надо ввести *функцию интерпретации* J, которая сопоставит сингулярным терминам 'Снег' и 'Бел' некоторые подмножества множества U. Наконец, в-третьих, необходимо убедиться, что наличествует теоретико-множественное включение $J(\text{Снег}) \subset J(\text{Бел})$. В итоге имеем:

Истинно ('$\forall x(\text{Снег}(x) \rightarrow \text{Бел}(x))$') $\Leftrightarrow J(\text{Снег}) \subset J(\text{Бел})$.

А если неверно, что $J(\text{Снег}) \subset J(\text{Бел})$? Тогда можно воспользоваться предикатом ложности и записать:

Ложно ('$\forall x(\text{Снег}(x) \rightarrow \text{Бел}(x))$') $\Leftrightarrow (J(\text{Снег}) \not\subset J(\text{Бел}))$.

Таким образом, в левой части эквиваленции $\Leftrightarrow$ стоит имя высказывания, а в правой – перевод высказывания во *внелингвис-*

тическую (семантическую) структуру. Возразят, что нередко эти структуры строятся из лингвистических объектов, например, из индивидных констант языка. Но даже в таких случаях для достаточно богатых языков структуры для них окажутся принципиально более сложными и потому выходящими за рамки исходного объектного языка семантическими образованиями. В этом смысле подобные структуры все равно будут внелингвистическими по сути. Но дело вовсе не в этих нюансах, а в том, что функции интерпретации дескриптивных констант языка всегда можно вводить так, чтобы значения этих функций оказывались в области внелингвистических объектов. В том числе речь может идти о реальных физических объектах. Возможно, именно подобные аргументы имел в виду А.Тарский, когда настаивал на «классическом» происхождении своей теории истины.

Итак, несомненно, что семантическая теория истины определяет истину через соотношение лингвистических и внелингвистических структур. Но достаточно ли этого обстоятельства, чтобы признать рассматриваемую теорию уточненным вариантом корреспондентской концепции истины? А.Тарский, обсуждая возражения против своей теории, приводит следующий контраргумент. Один из критиков считал, что схема эквиваленции требует дополнения. Вместо недопустимо краткого

'p' истинно тогда и только тогда, когда p

следует говорить

'p' истинно тогда и только тогда, когда p истинно

или

'p' истинно тогда и только тогда, когда p имеет место.

Со своей стороны, А.Тарский считает такой подход недопустимо длинным и, более того, бессмысленным[3].

Согласны, что критическая идея выражена весьма неудачно. Но вот вопрос: такого рода критика вызвана лишь непониманием, или имеет в виду нечто большее? Что, собственно, хотят получить, когда неуклюже требуют истинности самого высказывания *p*, тогда как по теории Тарского предикат истинности применяется к именам высказываний, а не к самим высказываниям? Думается, мы не ошибемся, если предположим, что одним из источников критики в подобных ситуациях является явно или неявно идея истины как результата соотнесения высказывания именно с реальностью, как она существует сама по себе. Предварительная постановка проблемы в связи с этим может быть сформулирована так.

---

[3] Там же. С. 112-114.

Следует ли отождествлять два утверждения:

1) *Истина состоит в соответствии высказывания с внелингвистическим положением дел*

и

2) *Истина состоит в соответствии высказывания с внешней реальностью*?

По Тарскому выходит, что 1) и 2) выражают (к тому же крайне неточно) одно и то же.

Для нас это далеко не одно и то же. Вернемся к примеру со снегом. Бел он все-таки или не бел, имеет место включение J(Снег) $\subset$ J(Бел) или верно J(Снег) $\not\subset$ J(Бел)? Совершенно очевидно, что ответ на поставленный вопрос зависит как от исходного универсума рассуждений U, так и от функции интерпретации J. А обе эти компоненты можно выбирать в поистине неограниченном диапазоне. Короче говоря, истинность или ложность некоторого высказывания *A* определяется в общем случае не тем, обладает оно или не обладает свойством «Быть истинным», а тем, на какой области объектов и как именно мы его интерпретируем, короче, зависит от структуры S вида <U, J>. Это означает, что «Быть истинным» является сингулярным предикатом или свойством лишь в том случае, когда структура S фиксирована. В общей ситуации в семантической теории истины имеем не свойство, а бинарное отношение «Быть истинным»:

Высказывание A ***истинно*** *в структуре S.*

Таким образом, вопреки широко распространенному заблуждению, предикат истины является не свойством предложений, а *бинарным отношением* между высказываниями и внелингвистическими структурами, которое можно записать еще в одной форме как *Истинно (A, S)*.

В теории истины, да и на практике, если мы захотим эту теорию применить, мы должны не только уметь строить первопорядковые высказывания, но и располагать методами получения структур для этих высказываний. А эти методы оказываются методами теории множеств. Как известно, основательное развитие получил такой раздел логики, как теория моделей, систематически изучающая отношения между высказываниями и множествами высказываний, с одной стороны, и структурами – с другой. Если согласиться с тем, что теоретико-множественные структуры по отношению к языкам являются внелингвистическими, то отсюда никак не вытекает, что эти структуры и есть внешняя реальность.

Основания для такого вывода следующие. Прежде всего, структуры в семантической теории истины определены так, что любое *непротиворечивое* высказывание *A*, не являющееся теоре-

мой логики, в некоторой структуре истинно, а в некоторой другой структуре ложно. Между тем, если *A* соотносят с реальностью, то такого быть не может. В реальности либо снег бел, либо нет, и не должно существовать способа найти две реальные структуры, в одной из которых высказывание *A* истинно, а в другой *A* ложно. Правда, это так лишь при условии, что мы не меняем смысл терминов, например, не называем уголь снегом. Иными словами, если мы зафиксировали смысл имен и понятий, а затем соотнесли их с чем-то реальным, то вопрос об истинности или ложности высказываний по отношению к реальности должен решаться однозначно.

Могут возразить: давайте возьмем некоторую конкретную достаточно сложную структуру SR для некоторого богатого языка L, объявим ее реальной, и тогда вопрос об истинности или ложности высказываний из L в SR будет решаться однозначно. Это решение аналогично позиции, принятой в семантике для модальных логик. Один из постулируемых возможных миров объявляется действительным миром, и далее нет проблем с тем, чтобы отличить истинность в действительном мире от истинности в иных возможных мирах. Скорее всего, как явствует из работ А.Тарского, он также не видел здесь проблемы, и на вопрос о применимости семантической теории истины к эмпирическим наукам отвечал безусловно утвердительно.

С нашей позиции, проблема тут есть, и она не столь проста. Суть ее в следующем. Если любую структуру можно выбрать в качестве реальной, то отнесение к реальности окажется чистым произволом. Если же не любая структура может быть названа реальностью, то возникает вопрос, каков критерий демаркации между теми структурами, которые могут быть объявлены реальными, и теми, которые таковыми объявлены быть не могут. В стандартных семантиках модальных логик любой из возможных миров можно взять в качестве действительного. В нестандартных семантиках с «невозможными» возможными мирами область выбора претендента на реальность суживается до «нормальных» возможных миров. Но это только видимость выбора, поскольку, например, в «ненормальных» возможных мирах высказывание *A* и его отрицание $\neg A$ могут оказаться вместе истинными, что исключает их применимость в семантической теории истины А.Тарского, которая подобные ситуации запрещает. Один из аспектов проблемы реальности в том и состоит, что реальный мир надо выбрать из множества «нормальных» возможных миров на каком-то основании, а не по произволу.

Следующее возражение против использования одной из обычных математических теоретико-множественных структур в качестве аналога реальности состоит в том, что с точки зрения математики желательно, чтобы все такие структуры возникали закономерным образом. В идеале построение теории множеств начинается с постулирования существования пустого и бесконечного множеств, из которых с помощью разрешенных операций получаются все другие множества. Правда, в жизни идеал оказался неосуществимым по причине независимости ряда утверждений теории множеств от исходных аксиом. Так, существование недостижимых кардиналов доказать в этой теории нельзя, однако предположение об их существовании (или не существовании) к противоречию не ведет. В любом случае множества, существование которых не удается доказать из «естественных» аксиом, слишком экзотичны даже для математики, не говоря уже о том, чтобы использовать их для моделирования реальности. А если ограничиться только закономерно возникающими множествами, то они слишком регулярны и предсказуемы в своем поведении, что отнюдь не улучшает их шансы выступить в качестве модели реальности. На них явно лежит печать искусственности, поскольку они контролируемое произведение человеческого ума. Претендент на звание реального должен быть более естественным. И, в первую очередь, в отношении того, что проблема определения его свойств (по крайней мере, в значительной части) не должна быть чисто математической задачей. Например, мы можем быть уверены, что существует множество разумных животных. Однако это вовсе не означает, что мы должны быть готовы моделировать такое множество посредством некоторого построения, начинающегося с пустой совокупности. Натуральные числа, допустим, мы так и строим: объявляем, что $0 =_{Df} \varnothing$, $1 =_{Df} \{\varnothing\}$, $2 =_{Df} \{\varnothing, \{\varnothing\}\}$ и т.д. Поведение получаемых объектов регулярно, закономерно и предсказуемо. Но не будет ли бессмысленным предположение, что подобным путем можно получить множество разумных животных? Нам представляется, что будет. Абсурдно полагать, что множество разумных животных возникнет по правилам теории множеств на каком-то этапе порождения множеств из пустой совокупности.

Не означает ли сказанное выше, что похоронена надежда на использование логики и математики в построении структур, которые можно было бы обоснованно считать способными выступать в роли реальных? Ведь логика и математика (если отвлечься от экзотических объектов вроде «ненормальных» возможных миров или недостижимых кардиналов, явно не годящихся на эту роль) имеет

дело с регулярными, закономерными и предсказуемыми структурами. Или это все-таки не всегда так?

Подведем промежуточный итог. Проблема реальности в семантической теории истины имеет, по крайней мере, два аспекта. Во-первых, вопрос об истинности или ложности высказываний в этой теории решается не однозначно (за исключением высказываний, которые истинны или которые ложны в любой структуре), тогда как высказывание, которое удалось соотнести с реальностью, должно однозначно оказаться либо истинным, либо ложным. Во-вторых, абсурдно пытаться моделировать реальность при помощи регулярных математических структур, что заставляет искать структуры иррегулярные.

Вытекает ли отсюда, что независимо от возможности решения поставленной проблемы реальности следует отказаться от семантической теории истины, в которой эта проблема заведомо не решается? Обычно от раскритикованной теории отказываются, предлагая вместо нее другую. Но есть иной путь. Вместо отказа от теории, в которой не решается некоторая проблема, можно попытаться построить консервативное расширение исходной теории, обеспечивающее решение. Такой путь принципиально закрыт для адептов пресловутого тезиса о несоизмеримости научных теорий, ибо консервативное расширение теории и сама теория сравнимы тривиальным образом. При этом они могут значительно отличаться друг от друга. Например, исчисление предикатов можно представить как консервативное расширение исчисления высказываний, но обе эти теории принципиально отличаются по дедуктивным возможностям. Аналогичным образом, мы собираемся решать проблему реальности в подходящем консервативном расширении семантической теории истины А.Тарского. Поскольку наше расширение предполагает прямую корреляцию с классической концепцией истины, это будет означать следующее: исходная теория А.Тарского не является вариантом корреспондентской концепции, но допускает (за счет добавления понятия реальности) расширение до корреспондентской теории.

Начнем построение требуемого консервативного расширения с решения второго аспекта проблемы реальности. На роль иррегулярных объектов теории множеств мы предлагаем *праэлементы* или *атомы*. Атомы являются праэлементами потому, что они исходные объекты в том смысле, что не получены из каких-то ранее построенных множеств. Праэлементы являются атомами (неделимыми) потому, что им, как и пустому множеству $\varnothing$, ничего не принадлежит в качестве элемента. Тем не менее, они не равны пустому множеству. Атом привлекателен тем, что с чисто матема-

тической точки зрения он почти ничего из себя не представляет. В этом плане он совсем не похож, например, на недостижимый кардинал, про который очень много можно сказать нетривиального в математическом смысле. Короче, атомы настолько свободны от математических свойств, насколько это вообще представляется возможным. Именно это обстоятельство дает нам шанс не перепутать математическую структуру с реальной структурой, представленной праэлементами.

Рассмотрим аксиоматическую теорию множеств с атомами ZFA, которая строится на базе теории множеств Цермело – Френкеля ZF.

Добавим к языку первопорядкового исчисления предикатов с равенством символ бинарного отношения $\in$ и две индивидных константы $\varnothing$ и A. Условимся вместо формул вида $\neg(x \in y)$ писать $x \notin y$. Аксиомами ZFA будут следующие утверждения.

1. *Аксиома пустого множества*:
$$\forall x(x \notin \varnothing).$$
2. *Аксиома множества атомов*:
$$\forall x(x \in A \leftrightarrow x \neq \varnothing \;\&\; \forall y(y \notin x)).$$

Будем называть элементы из A *атомами*, а *множествами* – объекты, не являющиеся атомами, то есть x – атом, если и только если $x \in A$, и x – множество, если и только если $x \notin A$.

3. *Аксиома экстенсиональности для множеств*:
$$(\forall x \notin A)(\forall y \notin A)(x = y \leftrightarrow \forall z(z \in x \leftrightarrow z \in y)).$$
4. *Аксиома пары*:
$$\forall x \forall y \exists z \forall u(u \in z \leftrightarrow u = x \vee u = y).$$

Для любых x и y, множество, существование которого утверждает эта аксиома, обозначается через $\{x, y\}$. Для данных x и y оно единственно в силу аксиомы экстенсиональности.

5. *Аксиома суммы или объединения*:
$$\forall x(\exists y \notin A)\forall z(z \in y \leftrightarrow \exists u(u \in x \;\&\; z \in u)).$$

Вновь множество, существование которого утверждается, единственно. Его обозначением является $\cup x$. В частности, $\cup\varnothing = \varnothing$ и если x – атом, то $\cup x = \varnothing$. Если в формулировке аксиомы опустить требование $y \notin A$, то единственность уже не гарантирована: ничто не мешает для атома a положить $\cup\varnothing = a$ и $\cup a = a$.

6. *Аксиома степени*:
$$\forall x \exists y \forall z(z \in y \leftrightarrow z \subseteq x),$$
где $z \subseteq x \leftrightarrow_{Df} z \notin A \;\&\; \forall u(u \in z \rightarrow u \in x)$. Условие, что всякое подмножество z является множеством, обеспечивает верность предложения $\forall x(\varnothing \subseteq x)$, однако предотвращает $a \subseteq x$ для любого x в том случае, если a – атом. Например, $\neg(a \subseteq a)$, но $x \subseteq x$, если x –

множество. Единственность множества-степени для всякого x следует из аксиомы экстенсиональности, что позволяет ввести для него обозначение S(x). По аксиоме степени $S(\varnothing) = \{\varnothing\}$ и $S(a) = \{\varnothing\}$, если a – атом, то есть единственным подмножеством пустого множества и атомов является пустое множество.

7. *Аксиома бесконечности*:

$$\exists x(\varnothing \in x \,\&\, \forall y(y \in x \to y \cup \{y\} \in x)),$$

где результат операции $x \cup y$, по определению, удовлетворяет условию $\forall z(z \in x \cup y \leftrightarrow z \in x \vee z \in y)$. Существование множества $x \cup y$ гарантируется аксиомой пары и аксиомой суммы: $x \cup y =_{Df} \cup\{x, y\}$, а его единственность – аксиомой экстенсиональности.

8. *Схема аксиом подстановки*:

$$\forall x(\forall u(u \in x \to \exists! z F(u, z)) \to$$
$$(\exists y \notin A)\forall z(z \in y \leftrightarrow \exists u(u \in x \,\&\, F(u, z)))),$$

где $\exists!$ означает «существует и единственный», а F(u, z) – любая формула, не содержащая переменную y свободно. Условие $y \notin A$ позволяет предотвратить появление атомов в качестве результатов применения схемы подстановки при ложности $\exists u(u \in x \,\&\, F(u, z))$.

8′. *Схема аксиом выделения подмножества* (значок ′ указывает, что данная схема аксиом выводится из остальных):

$$\forall x(\exists y \notin A)\forall z(z \in y \leftrightarrow z \in x \,\&\, F(z)),$$

где F(z) – произвольная формула, в которую y не входит свободно. Как обычно, обозначим множество, являющееся результатом выделения, через $\{z \in x \mid F(z)\}$. Вновь условие $y \notin A$ позволяет предотвратить появление атомов в качестве результатов применения схемы выделения в тех случаях, когда нет таких z, что $z \in x \,\&\, F(z)$, так что будет выполнено $\{z \in x \mid F(z)\} \subseteq x$ для любого x.

9. *Аксиома регулярности*:

$$\forall x(\exists z(z \in x) \to \exists y(y \in x \,\&\, y \cap x = \varnothing)),$$

где результат операции $y \cap x$ при помощи схемы выделения определен следующим образом: $y \cap x =_{Df} \{z \in x \cup y \mid z \in x \,\&\, z \in y\}$. Теперь можно показать, что A – действительно множество, а не атом, то есть что $A \notin A$. В противном случае предположим $A \in A$ и возьмем синглетон $\{A\}$ (существующий в силу аксиомы пары: $\{A, A\} =_{Df} \{A\}$). Этот синглетон содержит единственный элемент A и поэтому по аксиоме регулярности должно быть выполнено $\{A\} \cap A = \varnothing$. Однако $A \in \{A\}$ и $A \in A$ по предположению, что влечет $A \in \{A\} \cap A \neq \varnothing$. Получили противоречие.

На этом список аксиом теории ZFA завершен[4]. Отметим, что ни в одной из аксиом не требовалась непустота множества атомов A. Поэтому, добавив к ZFA формулу $A = \varnothing$, мы получим обычную теорию ZF, что вовсе не входит в наши планы. Но не приведет ли к противоречию непустота множества A? Оказывается, нет. Более того, было показано, что система аксиом (ZFA + «A – бесконечное множество») непротиворечива относительно ZF и останется непротиворечивой после добавления аксиомы выбора[5].

Нам сейчас не понадобится аксиома выбора. Тем не менее, ее приходится упоминать, поэтому сформулируем эту аксиому в явном виде. Чтобы избежать излишних технических деталей, воспользуемся тем известным фактом, что отношение «у есть функция с областью определения х» выразимо на языке теории множеств ZF.

10. *Аксиома выбора*:

$(\forall x \notin A)\exists y$(у есть функция с областью определения x &
$\forall z(z \in x \;\&\; \exists u(u \in z) \rightarrow y(z) \in z))$.

Вернемся к вопросу о пустоте или непустоте множества A. С философской точки зрения пустота этого множества означает, что объективной реальности как таковой не существует. Данная ситуация воспроизводит позицию субъективного идеализма беркли анского типа. Если же принимается аксиома вида $\exists x(x \in A)$, но при этом больше никакой иной информации о свойствах A и его элементов нет, то перед нами аналог кантовской непознаваемой вещи самой по себе, которая, несомненно существует, но ничего определенного о ней нельзя сказать в принципе. Как первый, так и второй вариант, ясное дело, интереса не представляют. Рискуя навлечь на себя негодующие голоса критиков, добавим, что формальная тривиальность этих вариантов отражает их философскую несостоятельность. Считать субъект познания настолько автономным, что он либо вовсе не нуждается в объективной (т.е. как раз независящей от существования субъекта) реальности, либо нуждается в ней только в качестве пускового механизма проявления своей собственной активности – значит игнорировать тот установленный наукой факт, что человек вместе с его познавательным аппаратом является частью природы и результатом эволюционного приспособления к окружающей среде. Работы эволюционных эпистемологов не оставили на сей счет никаких сомнений. Таким образом, не субъект заключает в себе мир, а мир включает в себя

---

[4] Он несколько отличается от списка, приведенного в книге Т.Йеха 1973 г., однако эти отличия несущественны.

[5] *Йех Т.* Теория множеств и метод форсинга. М., 1973. С.125.

субъекта как к тому же ничтожную свою часть. Мир без субъекта существовал и сможет при исчезновении последнего существовать и дальше, а вот субъект без внешнего мира превратится в ничто.

Поэтому проблема для современной эпистемологии вовсе не в том, существует ли внешний мир, а в том, как репрезентировать его в эпистемологических концепциях. Ведь если ограничиться тезисом о существовании объективной реальности, без каких-либо уточнений о ее устройстве, то мы будем отброшены на позиции кантианства (любопытно, что И.Кант, первым взглянувший на космос как на результат эволюции, не пожелал или не сумел распространить этот взгляд на познание). А если дать детализированную картину реальности, то она неизбежно окажется «нагруженной» теми историческими ограничениями, которые свойственны любому этапу познавательного процесса. Ясно ведь, что наше время отнюдь не сказало последнего слова в познании реальности, и что-то из принятого сейчас в будущем будет пересмотрено или отброшено вовсе. Так что мы должны пройти между Сциллой агностицизма кантианства, отказывающегося обсуждать структуру реальности, и Харибдой наивного реализма, отождествляющего реальность с наличным уровнем знания.

Мы не найдем ответа на вопрос о структуре реальности ни в биологии, ни в социологии, ни в химии, ни даже в физике. Часто именно в физике видят науку, дающую ответы на последние вопросы о внешнем мире. Однако это не так. Взгляды физиков на мир непрерывно меняются, уровень философской рефлексии в большинстве случаев невысок и потому их концепции реальности весьма неустойчивы и, более того, неопределенны. Чего стоят, например, заявления маститых физических авторитетов о единстве современной физики и восточных мистических учений о мире[6]. К счастью, есть наука, по степени общности превосходящая любые позитивные дисциплины (в том числе и физику), а по степени строгости не уступающая математике. Имеется в виду современная логика, лежащая в основаниях не только всех наук, но и любого рационального познания как такового. Именно логика формулирует те предельные онтологические предпосылки, которые оказываются на деле наиболее общими схемами членения универсума. В ряду этих предпосылок кратко сформулируем две: 1) реальность состоит из объектов, 2) объекты обладают свойствами и вступают между собой в отношения.

---

[6] Чтобы убедиться в сказанном, достаточно заглянуть в книгу: *Ф.Капра* Дао физики. СПб., 1994.

Реализуем приведенные онтологические схемы. Расширим язык теории ZFA, добавив к нему индивидные константы П и О, а также одноместный функциональный символ f. Построим в этом языке теорию ZFAI, аксиомами которой являются выше сформулированные аксиомы 1–9 и следующие аксиомы 11--14, которые, в отличие от предыдущих, не будут иметь специальных названий (в результате теория ZFA будет подтеорией теории ZFAI).

11.$П \cup О = A$.

12.$П \cap О = \varnothing$.

13.$\exists x \exists y(x \in П \;\&\; y \in О)$.

Нижеследующие построения стандартны и могут быть проведены средствами теории ZF без привлечения аксиомы выбора, так что существование описываемых множеств не вызывает сомнений. По аксиоме бесконечности, $\exists x(\varnothing \in x \;\&\; \forall y(y \in x \rightarrow y \cup \{y\} \in x))$. Определим множество ω следующим образом: $(\varnothing \in \omega \;\&\; \forall y(y \in \omega \rightarrow y \cup \{y\} \in \omega)) \;\&\; \forall x[(\varnothing \in x \;\&\; \forall y(y \in x \rightarrow y \cup \{y\} \in x)) \rightarrow \omega \subseteq x]$, то есть ω – наименьшее по включению множество x, содержащее $\varnothing$ и замкнутое относительно условия $y \in x \rightarrow y \cup \{y\} \in x$. Элементы ω будем считать натуральными числами. Исключив из ω пустое множество $\varnothing$, получим множество положительных натуральных чисел ω^+.

Если f – функция, то ее областью определения будет множество $dom(f) =_{Df} \{x \mid \exists y(f(x) = y\}$, а областью значений $rng(f) =_{Df} \{y \mid \exists x(f(x) = y\}$. Для любого натурального $n \in \omega^+$ и для всякого непустого[7] x существует функция f, для которой $dom(f) = n \;\&\; rng(f) \subseteq x$. Такое f назовем *конечной последовательностью* длины n элементов из x. Для каждого непустого x существует множество всех конечных последовательностей длины n элементов из x, а также множество всех таких множеств. Вообще, множество функций с областью определения Y и множеством значений X называется *декартовой степенью* множества X и обозначается посредством X^Y. В нашем случае речь идет о декартовых степенях вида x^n и множестве $D_x =_{Df} \{x^n \mid n \in \omega^+\}$. При x = О получим множество $D_О =_{Df} \{О^n \mid n \in \omega^+\}$.

14.$(\forall x \notin П)(f(x) = \varnothing) \;\&\; (\forall x \in П)(\exists n \in \omega^+)(f(x) \subseteq О^n)$.

Ясно, что поскольку $О^n \cap О^m = \varnothing$ при $n \neq m$ (множества конечных последовательностей разной длины не могут иметь общих элементов), число n, существование которого утверждается в аксиоме 14, единственно, если только множество $f(x)$ непусто.

---

[7] «X непуст» означает не $X \neq \varnothing$ (атомы тоже не равны $\varnothing$), а $\exists y(y \in X)$, что, конечно, влечет $X \neq \varnothing$.

Само отображение f ведет себя как функция выбора подмножеств на бесконечном семействе D_O непустых непересекающихся множеств. Однако нетрудно показать, что такое отображение можно определить без привлечения аксиомы выбора. Достаточно для всякого $x \in \Pi$ положить $f(x) = \varnothing$, чтобы тривиально обеспечить выполнение последнего конъюнктивного члена в аксиоме 14. Это же рассуждение показывает, что утверждение «$rng(f)$ – множество» также непротиворечиво: в данном случае получим $rng(f) = \{\varnothing\}$.

Факт 1. Теория ZFAI непротиворечива относительно ZF.

Доказательство этого факта было нами опубликовано ранее[8].

Факт 2. Теория ZFAI не является консервативным расширением ZF.

В самом деле, предложение $\exists x \forall y(y \notin x \ \& \ x \neq \varnothing)$ сформулировано на языке ZF, но в ZF оно недоказуемо. Однако оно доказуемо в ZFAI в силу непустоты множества атомов (аксиома 13).

Не противоречит ли только что полученный результат обещанию консервативного расширения теории А.Тарского? Нет, поскольку эта теория имеет неформальный характер. Применительно к ней идея консервативного расширения является лишь идеей, вектором движения вперед, а не формальным утверждением. Мы всего лишь намереваемся дополнить теорию Тарского рядом новых понятий без того, чтобы ввести какие бы то ни было новые утверждения в системе исходных понятий этой теории. В частности, неформальный характер исходной семантической теории виден и из того, что в ней отнюдь не фиксирована конкретная теория множеств, в которой будут строиться семантические структуры. Почему бы в качестве такой теории не взять ZFAI? Мы как раз намереваемся это сделать. Более того, ZFAI мы будем в дальнейшем использовать как неформальную, содержательную теорию.

Неформальная интерпретация введенных в язык новых символов состоит в следующем. Множество Π – это множество реальных предикатов (свойств и отношений), а множество O – множество реальных объектов. Обычно n-местные ($n \geq 1$) предикаты трактуются как подмножества множества объектов (при $n = 1$) или как подмножества n-местного декартова произведения множества объектов (при $n > 1$). Вместо этого можно было бы говорить о множествах конечных последовательностей объектов длины n, например, для двухместного предиката R вместо $R \subseteq O \times O$ писать

---

[8] *Анисов А.М.* Представление интенсиональных отношений в теории множеств с атомами // Труды научно-исследовательского семинара Логического центра Института философии РАН 1997. М., 1998.

$R \subseteq O^2$, то есть вместо множества упорядоченных пар рассматривать множества двухчленных последовательностей. При этом каждой упорядоченной паре <a, b> взаимно однозначно сопоставляется последовательность (a_0, b_1).

Однако препятствием к реализации этого плана является то, что в теории ZFAI предикаты, будучи элементами множества П, то есть атомами, не могут содержать каких-либо объектов в смысле отношения принадлежности $\in$. Функция f позволяет обойти это препятствие. Она каждому предикату-атому из П либо сопоставляет некоторое подмножество множества O^n конечных последовательностей длины n из множества объектов О, либо (что пока неважно) сопоставляет некоторый элемент О. Теперь все готово для введения важного определения *интенсиональной принадлежности* ε.

$$x \varepsilon y \leftrightarrow_{Df} x \in f(y).$$

Будем говорить, что совокупность y *интенсионально (экстенсионально) непуста*, если и только если $\exists x(x \varepsilon y)$ ($\exists x(x \in y)$). В противном случае совокупность y *интенсионально (экстенсионально) пуста*. Как ясно из определения функции f, если $\exists x(x \varepsilon y)$, то это означает, что $y \in П$ и $\exists x(x \in f(y))$. Отсюда следует, что все множества интенсионально пусты, зато все атомы экстенсионально пусты. Наряду с экстенсионально непустыми множествами есть одно-единственное экстенсионально пустое множество $\varnothing$, в то время как может быть сколько угодно интенсионально пустых и интенсионально непустых атомов.

Вернемся теперь к проблеме определения истины. Мы оставляем все конструкции, имеющиеся в семантической теории истины. Проверка конструкции «Высказывание А истинно в структуре S» остается прежней, с учетом того, что S строится в универсуме теории ZFAI. Последнее замечание означает, что в $S = <U, J>$ совокупность U по-прежнему должна быть непустым множеством, т.е., в новой терминологии, должна быть экстенсионально непустой, хотя ничто не препятствует тому, что U может содержать атомы. Отсюда заключаем, что U не может быть ни пустым множеством, ни атомом, даже если этот атом интенсионально непуст. Точно так же теория ZFAI ничего по существу не меняет в понятии интерпретации J.

Принципиальная новизна нашего подхода состоит в том, что бинарный предикат *Истинно (A, S)* будет расширен (именно расширен, а не просто заменен) тернарным предикатом *Истинно (A, S, R)*, в котором третья компонента представляет реальность. Идея в том, что схема *язык – семантика* дополняется схемой *язык – семантика – онтология*. За счет этого будет осуществлен прорыв к

реальности. И помимо старого *семантического* определения истины появиться новое *онтологическое* определение истины.

В языках первого порядка к символам, требующим приписывания значения из универсума U, относятся индивидные константы (короче, имена), индивидные переменные и предикатные константы[9]. Начнем с индивидных констант. В каком случае функция интерпретации J может обрести онтологическую компоненту в отношении имени α? Очевидно, что только в том случае, когда $J(\alpha) \in O$, т.е. когда интерпретация указывает на реальный индивид. Если же $J(\alpha) \notin O$, то имени приписан, если позволите так выразиться, виртуальный, а не реальный индивид. В этом втором случае мы вынуждены ограничиться парой $<\alpha, a>$, где $J(\alpha) = a$. Зато в первом случае ситуация позволяет вести речь о реальности в форме принятия тройки $<\alpha, a, a>$, где вновь $J(\alpha) = a$, но теперь $a \in O$. Фактически та же самая ситуация имеет место в отношении функции оценки значения индивидных переменных v. Либо $v(x) \notin O$, и тогда ограничиваемся парой $<x, a>$, где $v(x) = a$; либо $v(x) \in O$, и тогда берем тройку вида $<x, a, a>$.

Перейдем к описанию интерпретации предикатных символов языка. Для n-арного предиката R^n функция интерпретации J дает, как и обычно, $J(R^n) \subset U^n$. Получаем пару $<R^n, R>$, где $R \subset U^n$. При каком условии можно приписать R реальность? Здесь мы подходим к ключевому пункту нашей теории. Если найдется такой реальный предикат $\Pi \in \Pi$, что $\forall x_1 \forall x_2 \ldots \forall x_n(<x_1, x_2, \ldots, x_n> \in R \Leftrightarrow (x_1, x_2, \ldots, x_n)\ \varepsilon\ \Pi)$, то это и есть некоторый род *совпадения* семантического предиката R и реального предиката Π. Именно совпадения в отношении того, что семантический и реальный предикат состоят из *одних и тех же реальных объектов*, только семантический предикат состоит из них *экстенсионально*, а реальный – *интенсионально*. Формально, разумеется, $R \neq \Pi$.

Осталось учесть, что поскольку все наши высказывания относятся к некоторому универсуму, семантический универсум U также должен быть соотнесен с неким реальным универсумом $W \in \Pi$, если мы хотим нечто утверждать о реальности. Помня о том, что универсум – это универсальное свойство (которое, однако, не обязано быть представлено в языке), по аналогии с предыдущим получим эквиваленцию $\forall x(x \in U \Leftrightarrow x\ \varepsilon\ W)$. Поскольку та часть эквиваленции, которая содержит знак $\in$, всегда отсылает к виртуальному универсуму, в дальнейшем вместо U будем использовать

[9] Процедуру добавления онтологической компоненты легко сформулировать и для функциональных констант, однако функциональные константы местности n сводимы к n+1-местным предикатным символам, так что можно обойтись без них.

V: $\forall x(x \in V \Leftrightarrow x \varepsilon W)$. Если указанная эквиваленция имеет место, то дать имя в виртуальном универсуме и в реальном универсуме – это почти одно и то же: поскольку $J(\alpha) \in V$, постольку $J(\alpha) \varepsilon W$. То же самое касается приписываний значений индивидным переменным. Это позволит не упоминать имена и индивидные переменные в итоговом определении реальной истины.

Завершающие построения теперь почти очевидны. Что означают выражения типа «*A* реально истинно», или «*A* действительно истинно», «*A* истинно в реальности» и т.п.? Это означает, что *A истинно* по А.Тарскому и притом *соотносимо с реальностью* в указанном выше смысле. Формально это выглядит следующим образом.

Первопорядковое высказывание *A* **реально истинно** $\leftrightarrow_{Df}$ 1) существует структура $S = \langle V, J\rangle$ такая, что *A истинно* в S; 2) существует реальный унарный предикат $W \in \Pi$, для которого $\forall x(x \in V \Leftrightarrow x \varepsilon W)$; 3) для всякой n-местной предикатной константы R^n из *A* найдется реальный n-местный предикат $\Pi \in \Pi$ такой, что $\forall x_1 \forall x_2 \ldots \forall x_n(\langle x_1, x_2, \ldots, x_n\rangle \in J(R^n) \Leftrightarrow (x_1, x_2, \ldots, x_n) \varepsilon \Pi)$.

Весьма интригующим выглядит вопрос, как определить реальную ложь. Здесь не подойдет определение через простое отсутствие реальной истинности. Скажем мы, что русалки на ветвях сидят, скажем, что не сидят, объявим нынешнего короля Франции лысым или не лысым – какое отношение все эти высказывания и их отрицания имеют к реальности? Ясно, что никакого. На наш взгляд, титул реальной ложности могут иметь лишь те высказывания, которые соотнесены с реальными объектами и предикатами. Мы имеем основание считать высказывание «Сократ – мужчина» не только истинным, но и реально истинным, в то время как высказывания «Сократ – русалка» и «Неверно, что Сократ – русалка» с полным правом можем отлучить от реальности. Зато высказывание «Сократ – женщина» не просто ложно, но и реально ложно, поскольку реален не только исторический Сократ, но и женщины. Этими соображениями мотивируется принятие следующего определения реальной ложности.

Первопорядковое высказывание *A* **реально ложно** $\leftrightarrow_{Df}$ 1) существует структура $S = \langle V, J\rangle$ такая, что *A ложно* в S; 2) существует реальный унарный предикат $W \in \Pi$, для которого $\forall x(x \in V \Leftrightarrow x \varepsilon W)$; 3) для всякой n-местной предикатной константы R^n из *A* найдется реальный n-местный предикат $\Pi \in \Pi$ такой, что $\forall x_1 \forall x_2 \ldots \forall x_n(\langle x_1, x_2, \ldots, x_n\rangle \in J(R^n) \Leftrightarrow (x_1, x_2, \ldots, x_n) \varepsilon \Pi)$.

Как видно, определение реальной истинности от определения реальной ложности отличается только в первом пункте. Реальная ложность появляется тогда, когда мы верно соотнесли исходные

предикаты и имена с реальностью, но напутали в утверждениях о соотношении предикатов и имен или о соотношении предикатов между собой. Для иллюстрации последнего случая опять вернемся к примеру со снегом. Можно быть в состоянии правильно идентифицировать вещество как снег, и можно прекрасно знать реальное значение слова «белый». Но при этом утверждать, что «Снег не бел». Я действительно встретил отрицание белизны снега в одной из философских статей. Не думаю, что я снегом и белым называю не то, что автор этой статьи. Просто в реальности снег может содержать примеси, меняющие его цвет, но он остается снегом! Упоминание о примесях объясняет принятие ложного высказывания «Снег не бел», но отнюдь не делает его не реальным. Стало быть, это высказывание реально ложно.

Если некоторое высказывание A оказалось реально истинным (реально ложным), то существует конечное непустое подмножество $R \subset П$ тех праэлементов, которые обеспечивали его истинность (ложность) в аспекте реальности. В этом плане реальная истина (ложь) оказывается тернарным предикатом: *Реально истинно (ложно)* (A, S, R).

Назовем вторую компоненту S из тройки (A, S, R) *смыслом* высказывания A. В исходной теории мы фиксировали A, но варьировали S, получая за счет этого истинностный релятивизм, когда одно и то же высказывание оказывалось в зависимости от выбора S то истинным, то ложным. Если же нас интересует реальная истинность высказывания A, то теперь надо зафиксировать не только A, но и его смысл, т.е. S. При этих условиях реальная истинность A определяется однозначно, к чему мы и стремились. То же самое верно относительно реальной ложности. Уточним сказанное.

Факт 3. Для любого высказывания A и любой структуры S, если существует R такое, что *Реально истинно* (A, S, R), то не существует Q такого, что *Реально ложно* (A, S, Q), и наоборот, если существует R такое, что *Реально ложно* (A, S, R), то не существует Q такого, что *Реально истинно* (A, S, Q).

Данный факт вытекает из того, что в силу принятых определений структуры S и R по сути изоморфны. Но так и должно быть. Истинное познание и состоит в установлении изоморфизма между смыслом высказывания и реальностью. И если бы Q существовало, имели бы еще, что S изоморфно Q, а отсюда Q изоморфно S и по транзитивности получается, что R изоморфно Q, что невозможно.

Принятые определения реальной истинности и реальной ложности требуют развернутого обсуждения, для которого в рамках данной статьи нет места. Поэтому в заключение ограничимся лишь

одним комментарием к построенным конструкциям. Понятие реальной истинности заведомо уже понятия истинности, но, быть может, все еще слишком широко с философской точки зрения, по крайней мере, в следующем аспекте. Спросим, могут ли в реальности существовать интенсионально пустые свойства и отношения? Аксиома 14 не препятствует их появлению. Например, для некоторого свойства $\pi \varepsilon \Pi$ может оказаться, что $\forall x \neg(x \varepsilon \pi)$. Возьмем теперь язык, в котором есть свойство *Круглый_квадрат*(x). Логично потребовать, чтобы функция интерпретации J приписала этому свойству пустое множество: $J(Круглый_квадрат) = \varnothing$. В силу пустоты, свойство *Круглый_квадрат*(x) не будет выполнено ни при каком приписывании значений индивидным переменным, так что высказывание $\exists x$*Круглый_квадрат*(x) окажется ложным в структуре $S = \langle V, J \rangle$. Предположим, удалось найти $W \in \Pi$ такое, что $\forall x(x \in V \Leftrightarrow x \varepsilon W)$. Тогда в силу наличия интенсионально пустого $\pi \varepsilon \Pi$ утверждение $\exists x$*Круглый_квадрат*(x) будет реально ложным, ибо $\forall x\ (x \in J(Круглый_квадрат) \Leftrightarrow x \varepsilon \pi)$. Аналогичным образом, при этих же предположениях высказывание $\neg\exists x$*Круглый квадрат*(x) окажется реально истинным. Следуя по указанному пути, можно прийти к реальной истинности утверждений о не существовании в реальности квадратных кругов, русалок, химер, флогистона, теплорода и т.д. Короче, любое измышленное нами фантомное образование окажется соотносимым с реальностью. Может быть, кого-то это устраивает, и так и надо делать. Но есть и другой путь. Устранив саму возможность появления интенсионально пустых свойств и отношений (с помощью новой аксиомы или модифицировав соответствующим образом аксиому 14), можно будет вообще отлучить высказывания, подобные вышеприведенным, от реальности. Причем как в смысле их реальной ложности, так и в смысле их реальной истинности. Тогда глубокомысленное утверждение традиционных логиков о том, что русалки реально не существуют, получит статус не реальной истинности или ложности, а менее почетный статус обычной семантической истинности или ложности в зависимости от выбранного универсума рассуждений и соответствующей функции интерпретации.

В.А.Бажанов

П.С. ПОРЕЦКИЙ. ЖИЗНЬ И НАУЧНАЯ ДЕЯТЕЛЬНОСТЬ ПИОНЕРА ИССЛЕДОВАНИЙ В ОБЛАСТИ МАТЕМАТИЧЕСКОЙ ЛОГИКИ В РОССИИ*

Abstract. *Due to the search in the Kazan archives new materials relating to the life and work of outstanding Russian logician P.S. Poretsky (1846 – 1907) were found. These materials enable to be more precise in dealing with biographical data, concerning P.S. Poretsky.*

Ученые России и СССР внесли значительный вклад в развитие математической логики – как классических, так и неклассических ее разделов. Стоит вспомнить, например, имена И.И. Жегалкина, М.И. Шейнфинкеля, В.И. Шестакова, П.С. Новикова, А.Н. Колмогорова, А.И. Мальцева, Ю.В. Матиясевича и др. – если говорить о ее классических разделах, Н.А. Васильева, И.Е. Орлова, В.И. Гливенко, А.А. Маркова, Д.А. Бочвара, и др. – если иметь в виду ее неклассические разделы. Конечно, разделение логиков на «классиков» и «неклассиков» достаточно условно. Так, А.Н. Колмогоров оставил выдающиеся результаты и в классических, и в неклассических разделах современной логики.

Но кто же в когорте российских (советских) логиков был первым? Кто в России явился первооткрывателем этого – принципиального для судеб развития современной математики – направления?

В анналах истории четко зафиксировано это имя – Платон Сергеевич Порецкий. Он первый в России не только занялся исследованиями в области математической логики и первым прочитал (в Казанском университете) курс математической логики, но и достиг – благодаря глубокому пониманию предмета и выработке оригинальных методов – мировой известности и признания.

Логические идеи П.С. Порецкого уже являлись предметом анализа [см.: Стяжкин, 1967], но мало было известно о его жизни, о чтении им впервые в истории России курса математической логики, о нелогических интересах ученого. Найденные в архивах Казани новые материалы позволяют уточнить ряд фактов из биографии П.С. Порецкого, проливают новый свет на некоторые

* Работа выполнена при поддержке РГНФ, грант № 03-03-00350.

события его жизни и обогащают наши представления о его нелогической научной деятельности (прежде всего в области астрономии).

Отец П.С. Порецкого С.М. Порецкий родился в 1815 г. на Украине, в Лохвице. Он служил военным лекарем и, в частности, участвовал в обороне Севастополя. Дед П.С. Порецкого был дьяком.

П.С. Порецкий родился 3 октября 1846 года в Елисаветграде Херсонской губернии. После окончания Полтавской гимназии поступил на физико-математический факультет Харьковского университета, который закончил в 1870 году со степенью кандидата и после сдачи магистерского экзамена, по предложению профессора астрономии И.И. Федоренко, был оставлен при кафедре профессорским стипендиатом (1871 – 1874 гг.). Затем он был командирован в обсерваторию Пулково для приготовления экспедиции в Астрахань для наблюдения Венеры, и, наконец, с мая 1876 года в Казани [Дубяго, 1908, с. 5].

25 мая 1886 г. П.С. Порецкий на физико-математическом факультете Казанского университета защищает диссертацию на степень магистра астрономии. Тема его диссертации «К вопросу о решении некоторых нормальных систем, встречающихся в сферической астрономии, с применением к определению погрешностей деления меридианного круга Казанской обсерватории». Д.И. Дубяго в своем отзыве очень высоко оценивал диссертацию. Участники дискуссии также отмечали ее высочайший уровень и совет факультета «ввиду выдающихся достоинств» работы ходатайствовал о присуждении ему степени доктора астрономии [НА РТ, ф. 977, оп. Физмат, дело 1059, л. 6]. В этой работе Порецкий анализировал проблему понижения числа уравнений и неизвестных в системах циклических уравнений и предлагал методы вычисления ошибок деления Казанского меридианного круга. Документы свидетельствуют, что научная деятельность Порецкого в области астрономии была весьма значительна, требовала громадных вычислений и, таким образом, предполагала большие затраты времени и сил. Им производились наблюдения на меридианном круге и только Казанские наблюдения были изданы в двух томах. Он наблюдал Венеру, Марс, кометы Коджия 1881 года, солнечные затмения (последняя экспедиция для наблюдения солнечного затмения была на Вятку в 1887 году).

31 мая это решение было утверждено Советом Казанского университета, а диплом доктора был выписан только 12 марта 1889 года, а получил его П.С. Порецкий 5 апреля 1889 года, уже после прошения об отставке, которое он подал 4 марта 1889 года на имя

ректора. В дипломе доктора, подписанном ректором университета, деканом и секретарем физико-математического факультета, указывалось, что «Доктору Порецкому предоставляются все права и преимущества, законами Российской империи со степенью доктора соединяемые» [НА РТ, ф. 977, оп. Физмат, дело 7696, л. 9].

31 декабря 1886 года П.С. Порецкий получил (или как выражались ранее, был габилитирован на) звание приват-доцента.

Если судить по дарственным надписям на оттисках статей, П.С. Порецкий активно общался с казанскими математиками – А. В. Васильевым, В.П. Максимовичем (до переезда его в Киев и скорой кончины), Э.П. Янишевским. Академик В.Г. Имшенецкий, как отмечал сам П.С. Порецкий, высоко ценил его труды по математической логике [подробнее см.: Стяжкин, 1967, с. 367].

Интерес П.С. Порецкого к математической логике пробудил А.В. Васильев [Бажанов, 2002], о чем пишет сам П.С. Порецкий, отмечая, что от А.В. Васильева он узнал о существовании математической логики, который познакомил его с трудами Дж. Буля, обратил внимание на существование «парадоксальных формул a+a = a и aa=a, лежащих в ее основании», и предоставил ему возможность пользоваться редким (в России) сочинением Дж. Буля [Порецкий, 1984, с. XXIV]. А.В. Васильев же дал положительный отзыв о чтении Порецким курса математической логики, указав, что чтение этого курса «очень полезно» [НА РТ, ф. 977, оп. Физмат, дело 1099, л. 43 - 45].

"Что нового вносит математическая логика в логику умозрительную?" – задает вопрос П.С. Порецкий. И отвечает: "Прежде всего, конечно... *новый метод, неизмеримо более совершенный*, чем простое *умозрение*" [Порецкий, 1884, с. XX].

Порецкий в основном занимался проблемами логических равенств (неравенств) и применением методов математической логики к теории вероятностей.

Он считал, что решить нетождественное логическое равенство (тождества, по его мнению, не могут быть решаемы) – это значит вывести из него все или некоторые определенные следствия. Решение равенства может быть полное или частное, в зависимости от того, все или некоторые следствия из него найдены. Если же найдено полное решение и оно представлено также в виде равенства, то оно будет новой формой первоначального равенства, и их логические значения тождественны. Равенства тождественны между собой, если первое есть следствие второго, и наоборот. Аналогично и системы равенств будут тождественными, если равенства первой системы могут быть выведены из равенств второй системы (и обратно) посредством логических операций

сложения, умножения и отрицания [Порецкий, 1886а, с. 7 - 12].

Для достижения своих целей П.С. Порецкий разработал особый метод, более универсальный по оценке его современников [см.: Кутюра, 1909, с. 80], чем методы С. Джевонса и Дж. Венна.

Понятно, что Дж. Буль и его последователи (прежде всего, Э. Шредер) преувеличивали аналогии между алгеброй и алгеброй логики, процессом умозаключения, характерного для Аристотелевой логики и логики Буля. Так, сам Дж. Буль был склонен трактовать дедукцию как средство исключения средних терминов (силлогизма). Видимо, П.С. Порецкий это понимал и поэтому строил свой метод как метод получения одних (новых) отношений из других отношений. Суть этого метода можно, по мнению Л. Кутюры, выразить через законы форм, следствий и причин [Кутюра, 1909, с. 68 - 79].

Закон форм определяет, как из некоторого равенства найти для того или иного термина (класса) определение, равносильное данному равенству. Для получения равенств, эквивалентных данному, достаточно, согласно П.С. Порецкому, показать, что любой термин содержит "логический нуль" (N) этого равенства и содержится в его "логической единице" (N').

Пусть U будет какой-либо термин; тогда U=N'U+NU' эквивалентно данному равенству, поскольку (NU + NU' = 0). U=N'U+NU' означает, что U содержится в N' и содержит N (N = 0, N'=1).

Закон форм, по Порецкому, обобщает мысль Буля о дедукции как исключении средних терминов. Он состоит у Порецкого в исключении "сведений". Каждое логическое равенство может быть представлено через элементарные конституэнты, включающие наиболее простые термины. Для перехода от равенства к его следствиям достаточно отбросить те конституэнты, которые отвечают элементарным равенствам. Число следствий при этом равно числу комбинаций, получающихся посредством сложения, которые соответствуют количеству конституэнт (скажем, их k), т.е. 2^k .

Закон следствий относится к переходу от равенства к одному из его следствий (путем отбрасывания, например, некоторых конституэнт, отвечающих элементарным равенствам – эту процедуру Порецкий называет "исключением сведений").

Закон причин выявляет те предложения, следствием которых выступают данные равенства. Поскольку от причины, согласно Порецкому, мы переходим к следствиям, исключая сведения (отбрасывая конституэнты), то возможен обратный процесс, когда от следствий переходят к причинам, присоединяя следствия (прибавляя конституэнты). Если назвать подклассом каждый класс, входящий в другой, а надклассом – каждый класс, содержащий в себе

другой, то, в терминологии Порецкого, для получения всех следствий некоторого равенства достаточно заменить логическую единицу ее надклассами, а логический нуль его подклассами. Для получения причин равенства необходим обратный процесс.

Еще весной 1887 г. приват-доцент Порецкий объявил о намерении читать математическую логику для студентов всех курсов математического разряда Казанского университета. Этот предмет объявлялся им в течение трех семестров, но в реальности он читал его лишь *один семестр* – осенью и зимой 1888 года по три часа по понедельникам [НА РТ, ф. 977, оп. Физмат, д. 1119, л. 27].

Подробная программа, составленная Порецким, включает в основном проблемы операций с логическими классами, функциями, теорию логических равенств, вопросы приложения математической логики к вычислению вероятностей. Порецкий советовал студентам пользоваться трудами Дж. Буля [Boole, 1854], С. Джевонса [Джевонс, 1881], Э. Шредера [Schroeder, 1877] и свою работу «О способах решения логических равенств и обратном способе математической логики» (Казань, 1884). При этом он отмечает, что труд Дж. Буля отличается «запутанностью основных понятий» и «несовершенством обозначений». Порецкий, отдавая должное заслугам Э. Шредера в деле развития математической логики, также обвинял его в ошибках, но, как оказалось, необоснованно. Э. Шредер разъяснял во втором томе «Алгебры логики», что Порецкий не понял некоторых моментов в предложенных им методах. В частности, Порецкий и Шредер поразному понимали суть решения логического равенства (если в двух словах выразить предмет разногласий, то можно сказать, что Шредер допускал решения с неопределенными классами, а Порецкий не допускал)[1].

Кроме того, П.С. Порецкий упоминал труды Пеано, Г. Грассмана, Дж. Венна и А. Макферлайна как весьма полезные источники по математической логике.

---

[1] П.С. Порецкий весьма едко раскритиковал и книгу М.С. Волкова «Логическое исчисление» (СПб., 1888), который являлся преподавателем второго Петербургского реального училища и Института гражданских инженеров. Он писал, что «г. Волков не только крайне поверхностно понимает истины Математ. Логики, но и не владеет даже ее алгорифмом...» [1888д, с. 8]. Более того, он фактически обвинил Волкова в плагиате и неспособности правильно изложить мысли из трудов других исследователей. М.С. Волков также оставил работы по «рациональной геометрии» (к которой он также относил и неевклидову геометрию) и аналитической теории тригонометрических функций.

Программа курса по математической логике

О логических классах и их отрицаниях. О сложении и умножении классов. О взаимной обратности этих двух действий. Об отрицании логических сумм и произведений.

О логических функциях и их разложениях на суммы и множители.

О посылках, или логических равенствах. О приведении равенства к единичной и нулевой формам. О тождественном замещении всякой системы (зачеркнуто «посылок». – *В.Б.*). равенств одним равенством (зачеркнуто «посылкой». – *В.Б.*); о нахождении этого последнего.

Об определении простого класса из данной системы равенств (далее идет вставка. – *В.Б.*) *посредством всех прочих классов* (зачеркнуто – «на основании данного равенства». – *В.Б.*) по различным способам. (Далее идет вставка, выделенная курсивом. – *В.Б.*) *О полном и точном определении простого класса.* О приведении каждого равенства к форме полного определения любого простого класса или его отрицания.

Об исключении простых классов из логических равенств (зачеркнуто «посылок». – *В.Б.*) и об определении, соединенном с исключением.

Об определении (зачеркнуто «из посылок». – *В.Б.*) сложных классов, или функций.

О всевозможных формах логического равенства. О замещении (зачеркнуто «совмещении». – *В.Б.*) всякой системы посылок одной (зачеркнуто «в одну». – *В.Б.*) посылкою во всевозможных формах.

О логической машине Джевонса (зачеркнуто «и ее недостатках». – *В.Б.*).

О разложении каждой посылки и каждой системы посылок на посылки элементарные. О нахождении этих последних в четырех основных формах. О замещении нескольких элементарных посылок одной, двумя и пр. Общий путь для перехода от каждого данного умозаключения (вставка «логического равенства». – *В.Б.*) ко всевозможным системам посылок, из которых оно могло бы быть получено.

О превращении всякой системы посылок в другие системы, ей равнозначные.

О парах логически-противоположных задач.

Правила составления сложных логических задач.

О существовании для каждого логического равенства отвечающего ему равенства числового (зачеркнуто «алгебраического». – *В.Б.*). О нумеризации логических равенств и функций.

О вероятностях логических классов. Об определении вероятностей событий при помощи математической логики.

Приват-доцент П. Порецкий
[НА РТ, ф. 977, оп. Физмат, дело 1099, л. 9-10].

Значительная заслуга П.С. Порецкого состоит в том, что математическая логика стала развиваться не в направлении решения уравнений и удаления неизвестных, а в направлении получения всевозможных следствий из данных посылок.

Порецкий также читал сферическую тригонометрию в течение двух семестров. По этому курсу он рекомендовал книги А.М. Лежандра [Legendre, 1844], Э.П. Янишевского [Янишевский, 1859] и др.

В период пребывания в Казанском университете П.С. Порецкий являлся секретарем и казначеем секции физико-математических наук при Казанском обществе естествоиспытателей.

Просьба Порецкого об увольнении из Казанского университета (2 февраля 1889 г.; официальное прошение было подано 4 марта) была вызвана резким ухудшением его здоровья (обострение ревматизма). Неоднократные посещения Кавказских минеральных вод не приносили облегчения. Статский советник Порецкий просил о выдаче ему пенсии в г. Городне Черниговской губернии, где он собирался поселиться. К прошению были приложены результаты освидетельствований врачей (И.В. Гордеева и С.А. Смирнова), состоявшийся в августе и октябре 1888 года. П.С. Порецкий просит о выдаче аттестата и просит указать в нем, что он состоял «при Казанском университете приват-доцентом и преподавал в этом звании два семестра сферическую тригонометрию и один семестр математическую логику».

Впрочем, уже 6 сентября 1888 года Совет Казанского университета ходатайствует о полной пенсии для П.С. Порецкого [НА РТ, ф. 977, оп. Совет, дело 7994, л. 22].

Поскольку с 1889 по 1896 годы П.С. Порецкий не публикуется, то можно заключить, что состояние его здоровья не позволяло заниматься научной деятельностью и он смог вернуться к занятиям наукой только в 1895 – 1896 гг.

Несмотря на увольнение Порецкого из университета и его отъезд из Казани, он продолжал логические исследования и активно сотрудничал с Казанским физико-математическим обществом, членом которого состоял, снова с 1889 г. стал активно публиковаться в Известиях Казанского физико-математического общества.

Интересы Порецкого в области математики не ограничивались

математической логикой. Он также, например, исследовал простые числа [Порецкий, 1888б].

Д.И. Дубяго, известный астроном, отмечал, что П.С. Порецкий «был всесторонне образованным человеком, обладал недюжинными литературными талантами и поэтическим даром» [Дубяго, 1908, с. 5], переводил Беранже и «состоял редактором газеты "Казанский телеграф"». В действительности же П.С. Порецкий некоторое время в 1884 году являлся редактором газеты «Казанский биржевой листок». Эта неточность повторяется и в книге Н.И. Стяжкина [Стяжкин, 1967, с. 364].

Архивные материалы позволяют воссоздать некоторые моменты пребывания Порецкого в Казани: его высокий авторитет как астронома-наблюдателя среди преподавателей университета и коллег, круг его внелогических интересов и активности. Была обнаружена фотография Порецкого, которая относится к молодому возрасту (до сих пор была известна только та, которая относилась к уже достаточно пожилому возрасту).

Скончался П.С. Порецкий 9 августа 1907 года.

И как астроном, и как логик Порецкий пользовался большим авторитетом еще при жизни. Его кончина была отмечена рядом некрологов, опубликованных в Казани и Одессе [Дубяго, 1908; Дубяго, 1909].

Как астроном П.С. Порецкий малоизвестен. Он увековечил свое имя не благодаря своей специальности, а благодаря своему научному «увлечению» – как родоначальник исследований в области математической логики в России.

Список сокращений:

НА РТ – Национальный архив республики Татарстан (Казань).

ЛИТЕРАТУРА

Бажанов В.А. Профессор А.В. Васильев. Ученый, организатор науки, общественный деятель // Историко-математические исследования. 2002. Вып. 7 (42). С. 120 – 148.

Дубяго Д.И. П.С. Порецкий (некролог) // Известия физико-математического общества при имп. Казанском университе, вторая серия, Т. 16, № 1, 1908. С. 3-7 (отдельный оттиск).

Дубяго Д.И. Памяти Платона Сергеевича Порецкого (некролог). Предисловие И. Слешинского. Одесса, 1909[2].

Кутюра Л. Алгебра логики. Одесса: Mathesis, 1909. XIII, 107 С.

Стяжкин Н.И. Формирование математической логики. М.: Наука, 1967. 508 С.

[2] Данную работу найти не удалось.

Янишевский Э.П. Сферическая тригонометрия. Казань, 1859.
Джевонс С. Основы науки. СПб., 1881.
Bazhanov V.A. New Archival Materials, Concerning P.S. Poretsky // Modern Logic, 1992. Vol. 3, N 1. P. 80-81.
Boole J. An investigation of the laws of thought. L., 1854.
Legendre A.M. Elements de geometrie. Bruxelles, 1844.
Schroeder E. Der Operationkreis des Logikkalkuls. Leipzig, 1877.

Список научных работ П.С. Порецкого[3]

1873

Определение географической широты Астрономической башни Харьковского университета. Харьков, 1873. – 57 С.

1881

Изложение основных начал математической логики в возможно более наглядной и общедоступной форме. Сообщение, читанное в 3 заседании секции физико-математических наук общества естествоиспытателей при Казанском университете // Собрание протоколов заседаний секции физико-математических наук общества естествоиспытателей при Казанском университете. Казань, 1881. Т.1. – С. 2-31.

1884

О способах решения логических равенств и об обратном способе математической логики // Собрание протоколов заседаний секции физико-математических наук общества естествоиспытателей при Казанском университете. Казань, 1884. Т. 2. – XXIV, 170 С. (отдельный оттиск).

1886

а) К вопросу о решении некоторых нормальных систем, встречающихся в сферической астрономии, с применением к определению погрешностей деления меридианного круга Казанской обсерватории (4 сообщения, сделанные в 1885 году). Казань, 1886. – 144 С. (отдельный оттиск).

б) О связи между днями года и днями недели. Казань // Собрание протоколов заседаний секции физико-математических наук общества естествоиспытателей при Казанском университете. Казань, 1886. Т. 4. – 12 С. (отдельный оттиск).

1887

а) Исторический очерк развития сферической тригонометрии // Собрание протоколов заседаний секции физико-математических наук Казанского общества естествоиспытателей. Казань, Т.5. 1887. – 16 С. (отдельный оттиск).

б) Решение общей задачи теории вероятностей при помощи математической логики// Собрание протоколов заседаний секции физико-мате-

---

[3] Автор признателен Ю.А. Альпину и А.Ю. Цофнасу за уточнение некоторых деталей библиографии работ П.С. Порецкого.

матических наук общества естествоиспытателей при Казанском университете. Казань, 1887. Т. 5. – С. 83 – 116. Переведена на немецкий язык.

в) Вычисление оппозиции Марса // Astron. Nachrichten, 1887.

г) Четыре наблюдения 1) Mars opposition, 1877 2) Mars opposition, 1879 3) Mars opposition, 1886 4) Beobachtungen der Cometen, 1881 // Astron. Nachrichten, 1887.

1888

а) Определение географической широты Астрономической башни Харьковского университета // Собрание протоколов заседаний секции физико-математических наук Казанского общества естествоиспытателей. Казань, 1888. Т.6. – 58 С. (отдельный оттиск).

б) К учению о простых числах // Собрание протоколов заседаний секции физико-математических наук общества естествоиспытателей при Казанском университете. Казань, 1888. Т. 6. – III, 89 С. (отдельный оттиск).

в) По поводу сообщения П.В. Преображенского «Особого вида тригонометрические ряды». Доклад в 76 заседании секции физико-математических наук общества естествоиспытателей при Казанском университете // Собрание протоколов заседаний секции физико-математических наук общества естествоиспытателей при Казанском университете. Казань, 1888. Т. 7. – С. 330 – 334.

г) По поводу сочинения г-на Цераского «Астрометрическая фотометрия» // Собрание протоколов заседаний секции физико-математических наук общества естествоиспытателей при Казанском университете. Казань, 1888. Т. 7. – С. 334 – 339.

д) По поводу брошюры г-на Волкова «Логическое исчисление». Сообщение, читанное 12 ноября в 81 заседании секции физико-математических наук общества естествоиспытателей при Казанском университете // Собрание протоколов заседаний секции физико-математических наук общества естествоиспытателей при Казанском университете. Казань, Т. 7, 1888. – 9 С. (отдельный оттиск).

1896

а) Закон корней в логике // Научное обозрение. 1896, № 19, – С. 538 – 593.

б) Новая наука и академик Имшенецкий (с приложением трех писем Имшенецкого) // Северный вестник, декабрь, 1896. – С. 103 – 112.

1899

Sept lois fondamentales de la theorie de egalites logiques // Известия Физико-математического общества при императорском Казанском университете. Вторая серия, Т.8, ¹2-3, 1898; ¹4, 1899; Имеется отдельное издание: Sept lois fondamentales de la theorie de egalites logiques. Казань, Типо-литография имп. ун-та, 1899. – II, 157 С .

Некоторые дополнительные законы теории логических равенств // Известия Физико-математического общества при императорском Казанском университете. Вторая серия, Т. 9, № 1, 1899.

1900

Expose elementaire de la theorie des egalites logiques a deux termes *a* et *b* // Revue de Metaphysique et de Morale. 1900, T. 8.

1902

а) Quelques lois ulteuieures de la theorie des egalites logiques // Известия Физико-математического общества при императорском Казанском университете. Вторая серия, Т. 10, ¹ 1, С.50-84; Т.10, ¹ 2, С. 132-180; Т.10, ¹ 3, С. 191 – 230; Т. 11, ¹ 2, 1900-1901, С. 17 – 63; Имеется отдельное издание: Quelques lois ulteuieures de la theorie des egalites logiques. Казань, Типо-литография имп. ун-та, 1902. – V, 163 С.

б) Из области математической логики // Физико-математический ежегодник, посвященный вопросам математики, физики, химии и астрономии в элементарном изложении. Год второй. М.: Изд-во кружка авторов "Сборники в помощь самообразованию", 1902, № 2. – 482 С.

1904

а) Theorie des non-egalites logiques // Известия Физико-математического общества при императорском Казанском университете. Вторая серия. Казань, Т. 13, № 3. – С. 80 – 119; № 4. – С. 127 – 184; Имеется отдельное издание: Theorie des non-egalites logiques. Казань, Типо-литография имп. ун-та, 1904. – III, 112 С.

Сочинения П.С. Порецкого [Порецкий,1899, 1902а, 1904а] *имеют общую нумерацию глав.*

б) Appendice. Sur mon nouvel travail “Theorie des non-egalites logiques” // Известия Физико-математического общества при императорском Казанском университете. Вторая серия, Т. 14, № 2, 1904. – С. 118 – 131.

1909

Theorie conjointe des egalites et des non-egalites logiques // Известия Физико-математического общества при императорском Казанском университете. Вторая серия, Т. 16, № 1-2, 1908. – С. 9 – 41; Имеется отдельное издание: Theorie conjointe des egalites et des non-egalites logiques. Казань, Типо-литография имп. ун-та, 1909. – III, 109 С.

М.Н.Бежанишвили

ЛОГИЧЕСКОЕ ВСЕВЕДЕНИЕ И ЭПИСТЕМИЧЕСКОЕ ТАБЛИЧНОЕ ИСЧИСЛЕНИЕ ПРЕДИКАТОВ

Abstract. *In the article a predicate version of epistemic tableaux cal-culus Ep4 based on semantics of partial possible worlds is constructed and investigated. In particular, it is shown that Ep4 is sound and com-plete. This non-normal and non-monotonic tableaux calculus enables us to avoid the so-called paradox of logical omniscience.*

Введение. Как известно, многие логики не считают стандартную семантику возможных миров удовлетворительным средством для адекватного анализа эпистемической логики (см. [3], [8], [7], [1], [4], [9]) ввиду того, что она предполагает так называемое логическое всеведение. Пусть эпистемический оператор □ означает: «некое лицо знает, что...». На наш взгляд, предпочтительнее □ интерпретировать следующим образом: «на данном этапе развития знания известно, что...». Тогда логическое всеведение можно выразить утверждениями:

1) Если иимпликация $A \supset B$ классически общезначима и формула □A истинна в возможном мире w, то □B также истинна в возможном мире w.

2) Если формула A классически общезначима, то □A истинна в возможном мире w.

Мы покажем, что в нижеописанном эпистемическом табличном исчислении предикатов логическое всеведение не возникнет ни в одном из вышеуказанных видов.

Табличное исчисление Ep4

Формальный язык. Алфавит языка Ep4 содержит неограниченный запас индивидных переменных (Ind), n-арных ($n \geq 0$) предикатных букв (Prl), логические связки $\neg$, $\vee$ для отрицания и дизъюнкции, квантор существования $\exists$ и эпистемический модальный оператор □. Остальные связки и квантор всеобщности вводятся обычными определениями. Понятия формулы (Frm), атомарной формулы (Atm), а также свободных и связанных вхождений индивидных переменных в формулу определяются обычно. Пусть A – формула, а $x_1,\ldots,x_n$ – все ее различные свободные индивидные переменные. Если $n>0$, будем называть A открытой формулой и

писать $A(x_1,\ldots,x_n)$, а если n=0, – замкнутой формулой. Замкнутую формулу вида $\forall x_1 \ldots \forall x_n A$ называют замыканием всеобщности формулы A и сокращенно обозначают через $\forall A$. Будем говорить, что формула A полностью модализирована, если каждая атомарная формула, входящая в A, находится в области действия некоторого эпистемического модального оператора формулы A.

Семантика. Ep4-фреймом назовем упорядоченную четверку $Fr=\langle H,W,R,D\rangle$, где H – множество (частичных возможных миров), содержащее непустое подмножество W (тотальных возможных миров); R – бинарное отношение достижимости между мирами, рефлексивное и транзитивное в H; D – функция областей, определенная на H, такая, что $D(v)\neq\varnothing$, для всякого $v\in H$ и если $\langle w,v\rangle\in R$, то $D(w)\subseteq D(v)$; $w,v\in H$.

Ep4-моделью является пара $\langle Fr,V\rangle$, где Fr есть Ep4-фрейм, а V – бинарная частичная функция, определенная на множестве $Prl\times H$, такая, что если n=0, то $V(P^n,v)=T$ или $\perp$ или же $non!V(P^n,v)$, а если n>0, то $V(P^n,v)$ есть пара $\langle\alpha,\psi\rangle$, такая, что $\alpha,\psi\subseteq[D(v)]^n$ и если $v\in W$, то $\alpha\cap\psi=\varnothing$ и $\alpha\cup\psi=[D(v)]^n$, а если $v\in H-W$, то $\alpha\cap\psi=\varnothing$, где $[D(v)]^n$ является n-кратным декартовым произведением множества D(v) на себя ($v\in H$).

В случае, когда $v\in W$, функция V определена для всех P^n и v. Когда же $v\in H-W$, то при n=0 V может быть неопределенной для некоторых или ни для каких P^n и v, а при n>0 $V(P^n,v)=\langle\alpha,\psi\rangle$, причем $\alpha\cup\psi\neq[D(v)]^n$ для некоторых или ни для каких P^n и v.

Пусть, далее, $U=\cup_{v\in H} D(v)$.

Если A – атомарная формула, она является пропозициональной переменной P^0 или имеет вид $P^n(x_1,\ldots,x_n)$ (n>0).

При n=0 $V(P^n,v)$ уже задана моделью. Пусть поэтому n>0, индивидным переменным $x_1,\ldots,x_n$ сопоставлены элементы $a_1,\ldots,a_n$ из U и пусть $V(P^n,v)$ есть пара $\langle\alpha,\psi\rangle$.При данном сопоставлении $V(P^n(x_1,\ldots,x_n),v)=T$ тогда и только тогда, когда $\langle a_1,\ldots,a_n\rangle\in\alpha$; $V(P^n(x_1,\ldots,x_n),v)=\perp$ тогда и только тогда, когда $\langle a_1,\ldots,a_n\rangle\in\psi$; в противном случае $non!V(P^n(x_1,\ldots,x_n),v)$.

Для любого v из H при фиксированном сопоставлении элементов U свободным индивидным переменным A и B:

$V(\neg A,v)=T$ тогда и только тогда, когда $V(A,v)=\perp$; $V(\neg A,v)=\perp$ тогда и только тогда, когда $V(A,v)=T$ и $non!V(A,v)$, в противном случае.

$V(A\vee B,v)=T$ тогда и только тогда, когда $V(A,v)=T$ или $V(A,v)=T$; $V(A\vee B,v)=\perp$ тогда и только тогда, когда $V(A,v)=V(B,v)=\perp$; в противном случае, $non!V(A,v)$.

V(□A,v)=T тогда и только тогда, когда V(A,u)=T (и, следовательно, !V(□A,v)) для всякого u из H, такого, что (v,u)∈R; V(□A, v)=⊥, в противном случае (т.е. тогда и только тогда, когда non!V(A, v) или V(A,v)=⊥ для некоторого u из H, такого, что (v,u)∈R).

Наконец, пусть $x_1,\ldots,x_n$ – все свободные переменные, входящие в формулу $\exists yA(x_1,\ldots,x_n,y)$, и пусть им соответственно сопоставлены элементы $a_1,\ldots,a_n$ из U. В таком случае, $V(\exists yA(x_1,\ldots,x_n,y), v)=T$ тогда и только тогда, когда существует элемент b из D(v), такой, что $V(A(x_1,\ldots,x_n,y), v)=T$, если переменной y сопоставляется b; $V(\exists yA(x_1,\ldots,x_n,y), v)=\bot$ тогда и только тогда, когда $V(A(x_1,\ldots,x_n,y), v)=\bot$, если переменной y сопоставляется любой элемент из D(v); в противном случае $non!V(\exists yA(x_1,\ldots,x_n,y), v)$.

Формула A истинна в модели M, если A истинна для всякого v из W. A истинна в Ep4-фрейме Fr, если она истинна во всех моделях, базирующихся на Fr. Наконец, A общезначима в классе Ep4-фреймов, если она истинна в каждом Ep4-фрейме.

Теория доказательств. Пусть ~Frm – множество всех меченых знаком «~» формул из Frm. Таблицей будем называть подмножество множества Frm∪~Frm, составленное с помощью нижеследующих правил. Альтернативной системой таблиц назовем упорядоченное в виде дерева множество таблиц, а диаграммой – множество альтернативных систем таблиц. В каждой такой системе *S* одна из таблиц (а именно, начало дерева) является главной. Остальные таблицы *S* вспомогательны. Как главная, так и вспомогательная таблицы из *S* могут быть альтернативными напарницами таблиц, принадлежащих другим альтернативным системам.

Составление диаграммы для испытуемой формулы A, в случае, когда A замкнута, мы начинаем включением ¬A в главную таблицу, а если A открыта, тогда в главную таблицу помещаем ¬∀A (ср. [6]). Затем продолжаем построение согласно следующим пропозициональным и кванторным правилам:

$$NN\ \frac{\Gamma, \neg\neg A}{\Gamma, \neg\neg A, A};\qquad \sim NN\ \frac{\Gamma, \sim\neg\neg A}{\Gamma, \sim\neg\neg A, \sim A};$$

$$ND\ \frac{\Gamma, \neg(A\vee B)}{\Gamma, \neg(A\vee B), \neg A, \neg B};\qquad \sim D\ \frac{\Gamma, \sim(A\vee B)}{\Gamma, \sim(A\vee B), \sim A, \sim B};$$

$$D\ \frac{\Gamma, (A\vee B)}{\Gamma, (A\vee B), A \mid \Gamma, (A\vee B), B};$$

$$\sim ND\ \frac{\Gamma, \sim\neg(A\vee B)}{\Gamma, \sim\neg(A\vee B), \sim\neg A \mid \Gamma, \sim\neg(A\vee B), \sim\neg B};$$

$$K\ \frac{\Gamma, \Box A}{\Gamma, \Box A, A};\quad NK\ \frac{\Gamma, \neg\Box A}{\Gamma_{\Box}, \sim A};\quad \sim K\ \frac{\Gamma, \sim\Box A}{\Gamma, \neg\Box A};\quad \sim NK\ \frac{\Gamma, \sim\neg\Box A}{\Gamma, \neg\neg\Box A};$$

$$E\ \frac{\Gamma, \exists xA(x)}{\Gamma, \exists xA(x), A(y)};\qquad \sim NE\ \frac{\Gamma, \sim\neg\exists xA(x)}{\Gamma, \sim\neg\exists xA(x), \sim\neg A(y)};$$

$$NE\ \frac{\Gamma, \neg\exists xA(x)}{\Gamma, \neg\exists xA(x), \neg A(z)};\qquad \sim E\ \frac{\Gamma, \sim\exists xA(x)}{\Gamma, \sim\exists xA(x), \sim A(z)},$$

где $\Gamma\subseteq Frm\cup\sim Frm$, $\Gamma_{\Box}=\{\Box B: \Box B\in\Gamma\}$, $x,y,z\in Ind$, причем y – новая, еще не встречающаяся ни в одной таблице индивидная переменная, z – каждая уже использованная переменная, а $A,B,A(x)\in Frm$. Вместо $\Gamma\cup\{A\}$ мы будем писать Г, А. Элементы множества ~Frm в дальнейшем будем называть выражениями.

Выражение ~С назовем несущественно меченой, если формула С полностью модализирована, а таблицу будем называть немеченой, если среди ее меченых формул находятся только несущественно меченые формулы.

Следующие пропозициональные правила: NN, ~NN ND, ~D,K, ~K ,~NK, а также все кванторные правила: E, ~NE, NE, ~E предписывают заменить в таблице t множество выражений, находящееся выше горизонтальной черты правила, множеством выражений находящимся ниже его черты. А правило NK предписывает из таблицы t, содержащей множество выражений, находящихся выше горизонтальной черты правила, открыть новую вспомогательную таблицу t′, такую, что $(t, t')\in R$, и поместить в t′ множество выражений, находящихся ниже горизонтальной черты правила. Наконец, правила D и ~ND предписывают, исходя из таблицы $t\in S$, содержащей множество выражений, находящихся выше горизонтальной черты правила, составить новую альтернативную систему таблиц $S'=(S-\{t\})\cup\{t'\}$, где множество выражений, находящихся выше горизонтальной черты правила, заменено в t множеством

выражений, находящихся ниже горизонтальной черты с левой стороны, а в t′ (напарнице таблицы t) – множеством выражений, находящихся ниже горизонтальной черты правила с правой стороны.

Таблица тривиально замкнута, если она содержит некоторую формулу B вместе с ¬B или вместе с ~B. Таблица замкнута, если она тривиально замкнута или находится в отношении *R* хотя бы с одной замкнутой таблицей. Альтернативная система таблиц замкнута, если замкнута ее главная таблица. Ep4-диаграмой для A будем называть множество всех альтернативных систем таблиц с главной таблицей, содержащей исходную формулу ¬A (в контрмодели, если последняя существует, это будет означать, что A не истинна, т.е. ложна или неопределенна). Ep4-диаграмма для A замкнута, если замкнуты все ее альтернативные системы таблиц. Замкнутую Ep4-диаграмму, следуя Фиттингу, будем называть доказательством A (см. [2]). В случае, когда существует замкнутая Ep4-диаграмма для A, будем говорить, что A является доказуемой в таб-личном исчислении Ep4 или теоремой Ep4 и писать |– A.

Корректность. Подмножество t множества Frm∪~Frm будем называть выполнимым, если существует Ep4-модель ⟨H,W,R,D,V⟩ и v∈H, такие, что при некотором сопоставлении элементов U всем свободным индивидным переменным каждой немеченой или меченой формулы B, входящей в t, V(B,v)=T, если B∈Frm, и V(B,v)≠T, если B∈~Frm. Предполагается, что на данном этапе развития знания истинность меченых формул не известна, кроме случаев, когда выражение B имеет вид ~□C или ~¬□C, так как в этих случаях правила ~K и ~NK предписывают соответственно заменить такие выражения на формулы ¬□C или ¬¬□C, которые принадлежат множеству Frm (из-за того, что формула вида □C всегда определена).

Очевидно, что ни одна тривиально замкнутая и, следовательно, замкнутая таблица не может быть выполнимой, потому что одна и та же формула в одно и то же время не может быть истинной и неистинной (т.е. ложной или неопределенной).

Нетрудно также проверить, что все наши правила построения таблиц сохраняют выполнимость. Другими словами, всякий раз когда выполнимы множества немеченых и меченых формул, находящиеся выше горизонтальной черты правил построения таблиц, выполнимы и множества немеченых и меченых формул, находящиеся ниже горизонтальной черты этих правил.

Рассмотрим, например, правило NK и предположим, что выполнимо множество немеченых и меченых формул {Γ, ¬□A}. Тогда существуют Ep4-модель ⟨H,W,R,D,V⟩ и v∈H, такие, что при не-

котором сопоставлении элементов U всем свободным индивидным переменным формул, входящих в {Γ,¬□A}, для каждой немеченой формулы B из Γ, V(B,v)=T, а для каждой меченой формулы B из Γ, V(B,v)≠T. V(¬□A,v)=T означает, что существует u из H, такой, что (v,u)∈R и V(A,v)≠T при том же сопоставлении элементов U свободным индивидным переменным меченой формулы A. Но поскольку все формулы $\Gamma_{\Box}$ немечены, D(v)⊆D(u) и $\Gamma_{\Box}\subseteq\Gamma$, ввиду транзитивности *R* все формулы из $\Gamma_{\Box}$ будут также истинными при том же сопоставлении элементов U свободным индивидным переменным формул $\Gamma_{\Box}$. Таким образом, Ep4-модель ⟨H,W,R,D,V⟩ гарантирует выполнимость множества формул {$\Gamma_{\Box}$, ~A}, откуда прямо следует, что правило NK сохраняет выполнимость.

Теперь рассмотрим правило ~E и убедимся, что и оно сохраняет выполнимость. Пусть множество немеченых и меченых формул {Γ, ~∃xA(x)} выполнимо при некотором приписывании элементов U всем свободным индивидным переменным формул множества {Γ, ~∃xA(x)}. Тогда существуют Ep4-модель ⟨H,W,R,D,V⟩ и v∈H такие, что при том же приписывании значений всем свободным индивидным переменным формул из {Γ, ~∃xA(x)}, V(B,v) = T, если B – немеченая формула, и V(B,v)≠T, если B – меченая формула из {Γ, ~∃xA(x)}. В частности, V(∃xA(x),v)≠T при том же приписывании значений всем свободным индивидным переменным меченой формулы ∃xA(x). Но V(∃xA(x),v)≠T означает, что в D(v) не существует такой элемент b, для которого V(A(z),v) = T, при том же сопоставлении элементов U, когда индивидной переменной z сопоставляется b, т.е. когда V(A(z),v)≠T для любого элемента D(v), взятого в качестве значения z.

Аналогично можно убедиться, что остальные правила также сохраняют выполнимость.

Теорема 1. *Если* |– A *в* Ep4, *то* A *общезначима в классе фреймов* Ep4, *для любой замкнутой формулы* A (теорема корректности).

Доказательство. Мы установим контрапозицию утверждения теоремы. Предположим, что замкнутая формула A необщезначима в классе фреймов Ep4. Тогда существуют Ep4-модель ⟨H,W,R,D,V⟩ и v∈H, такие, что V(A,v)=⊥. Но тогда выполнима главная таблица Ep4-диаграммы с исходной формулой ¬A. С другой стороны, мы убедились, что наши правила построения Ep4-диаграммы сохраняют выполнимость и в тех случаях, когда они порождают формулы со свободными индивидными переменными. Поэтому такая Ep4-диаграмма с указанной исходной формулой ¬A никогда не замкнется. Следовательно, A не будет доказуемой в табличном исчислении Ep4. →

Семантическая полнота. Покажем, что если замкнутая формула A не доказуема в Ep4, то существует опровергающая Ep4-модель для нее. Отсюда в силу контрапозиции прямо следует семантическая полнота Ep4. В самом деле, если A не доказуема в Ep4, тогда Ep4-диаграмма для A не замкнута. В таком случае мы будем иметь две возможности. В первом случае, процесс построения Ep4-диаграммы для A завершится в конечное число шагов, а во втором, построение Ep4-диаграммы для A не завершится, так как одно из наших правил всякий раз окажется применимым. В последнем случае будем говорить, что Ep4-диаграмма для A бесконечна.

Мы рассмотрим только случай, когда построение Ep4-диаграммы завершается в конечное число шагов, а для получения опровергающей Ep4-модели, когда Ep4-диаграмма бесконечна, следует построить псевдотаблицы и воспользоваться леммой Кёнига аналогично методу Крипке, использованному им для построения опровергающей модели для незамкнутой бесконечной S4-диаграммы (см. [5]).

Предположим теперь, что Ep4-диаграмма для замкнутой формулы A не замыкается. Тогда существует незамкнутая альтернативная система таблиц S_0 с главной таблицей t, содержащей исходную формулу $\neg$A. Не замкнуты и все вспомогательные таблицы S_0, среди которых могут встречаться альтернативные напарницы других альтернативных систем. Система S_0 упорядочена рефлексивным и транзитивным отношением R_0 между таблицами S_0.

Определим Ep4-фрейм $Fr_0=\langle H_0,W_0,R_0,D_0\rangle$ следующим образом: пусть θ – функция, преобразующая таблицы S_0 в элементы H_0, т.е. θ является взаимно однозначным отображением S_0 на H_0. Тогда W_0 можно определить как подмножество H_0, содержащее все такие элементы $\theta(t)$ из H_0 ($t\in S_0$), для которых t является немеченой таблицей. Множество W_0 не пусто, так как S_0 содержит по крайней мере одну немеченую таблицу – главную. Элементы H_0 упорядочены отношением R_0, соответствующим отношению R_0 между таблицами, причем, если $t', t''\in S_0$, $v_1=\theta(t')$ и $v_2=\theta(t'')$, то $\langle v_1, v_2\rangle\in R_0$ тогда и только тогда, когда $\langle t', t''\rangle\in R_0$.

Остается определить функцию областей D_0 для Fr_0. Каждой таблице t из S_0 сопоставим неограниченное множество $Y_t\subseteq$Ind таким образом, чтобы множества, сопоставленные различным таблицам не пересекались, и при каждом применении правил E и ~NE к формулам из t новые индивидные переменные вводились в формулы t только из Y_t. Если t – главная таблица системы S_0 и $v=\theta(t)$, тогда, так как исходная формула $\neg$A, соответственно $\neg\forall$A, не содержит вхождений свободных переменных, $D_0(v)$ есть непустое

подмножество X_t множества Y_t, содержащее те элементы Y_t, которые появляются в формулах, входящих в t в результате применения правил E и ~NE, а если эти правила не применяются, тогда $D_0(v)$ есть любое непустое подмножество X_t множества Y_t. Пусть, далее, $t', t'' \in S_0$, $v_1 = \theta(t')$, $v_2 = \theta(t'')$ и $\langle v_1, v_2 \rangle \in R_0$; предположим также, что мы уже определили $D_0(v_1)$, тогда $D_0(v_2) = D_0(v_1) \cup X_{t''}$, где $X_{t''} \subseteq Y_{t''}$.

Очевидно также, что условие (d) функции областей D_0 всегда будет выполняться, поскольку из $\langle v_1, v_2 \rangle \in R_0$ следует $D_0(v_1) \subseteq D_0(v_1) \cup X_{t''} = D_0(v_2)$.

Теперь определим Ep4-модель M_0 как пару $\langle Fr_0, V_0 \rangle$, где Fr_0 – вышеописанный фрейм, а V_0 – частичная функция, определенная следующим образом.

Пусть n=0 и v=θ(t), тогда $V_0(P^n, v)=T$, если t содержит P^n; $V_0(P^n, v)=\perp$, если t содержит $\neg P^n$ и non!V_0 (P^n, v) в противном случае, т.е. если t содержит одно из выражений $\sim P^n$ или $\sim\neg P^n$, причем, в первом случае $\neg P^n$, не входит в t, а во втором P^n не входит в t (в частности, non!$V_0(P^n, v)$, если t содержит оба выражения $\sim P^n$ и $\sim\neg P^n$). Кроме того, для всякой пропозициональной переменной P^0, такой, что t не содержит ни P^0, ни $\neg P^0$ и в t не входит та же меченая переменная, мы будем полагать,что V_0 (P^n, v) принимает любое из значений T или $\perp$. Это гарантирует определенность V_0 для любой пропозициональной переменной и любого элемента W_0.

Если же n>0, то V_0 (P^n, v) есть пара $\langle \alpha, \psi \rangle$, такая, что $\alpha = \{\langle x_1, \ldots, x_n \rangle \mid P^n(x_1, \ldots, x_n)$ входит в t$\}$, а $\psi = \{\langle x_1, \ldots, x_n \rangle \mid \neg P^n(x_1, \ldots, x_n)$ входит в t$\}$. Очевидно, что $\alpha, \psi \subseteq [D(v)]^n$ и $\alpha \cap \psi \neq \varnothing$, поскольку t не замыкается.

Далее, $\langle x_1, \ldots, x_n \rangle \notin \alpha$ и $\langle x_1, \ldots, x_n \rangle \notin \psi$, если M_0 содержит одно из выражений $\sim P^n(x_1, \ldots, x_n)$ или $\sim\neg P^n(x_1, \ldots, x_n)$, причем, в первом случае, в t не входит $\neg P^n(x_1, \ldots, x_n)$, а во втором случае в t не входит $P^n(x_1, \ldots, x_n)$; в частности, $\langle x_1, \ldots, x_n \rangle \notin \alpha$ и $\langle x_1, \ldots, x_n \rangle \notin \psi$, если t содержит оба выражения $\sim P^n(x_1, \ldots, x_n)$ и $\sim\neg P^n(x_1, \ldots, x_n)$.

Точно так же определяется M_0 модель для псевдотаблиц (см. [5]).

Рассмотрим объединение $U_0 = \cup_{v \in H0} D(v)$, где $v=\theta(t)$, $t \in S_0$ и каждую формулу B из любой таблицы S_0 будем оценивать для сопоставления, при котором всякой индивидной переменной, входящей свободно в B, сопоставляется одноименная переменная из U_0, рассматриваемая как типографический объект.

При указанном сопоставлении значений свободным индивидным переменным $V_0(P^n(x_1, \ldots, x_n), v)=T$, если $\langle x_1, \ldots, x_n \rangle \in \alpha$; $V_0(P^n(x_1, \ldots, x_n), v)=\perp$, если $\langle x_1, \ldots, x_n \rangle \in \psi$ и non!$V_0(P^n(x_1, \ldots, x_n), v)$, если $\langle x_1, \ldots, x_n \rangle \notin \alpha$ и $\langle x_1, \ldots, x_n \rangle \notin \psi$.

Теперь мы сможем показать, что если Ep4-диаграмма для формулы A не замыкается, но ее построение завершается в конечное число шагов, то M_0 является опровергающей моделью для A (аналогично рассматривается случай, когда Ep4-диаграмма не замыкается, однако ее построение не завершается в конечное число шагов, только вместо таблиц надо рассматривать псевдотаблицы; ср. [5]).

Лемма 1. *Пусть* M_0 – *вышезаданная модель. Тогда для всякой формулы* B *и всякой незамкнутой таблицы (псевдотаблицы)* t, *такой, что* $v=\theta(t)$, *из незамкнутой альтернативной системы таблиц (псевдотаблиц), при тождественном сопоставлении элементов* U_0 *всем свободным индивидным переменным формулы* B, M_0 *удовлетворяет следующим условиям:*

(1) *если* B *входит в* t, *то* $V_0(B,v)=T$;

(2) *если* $\neg B$ *входит в* t, *то* $V_0(B,v)=\bot$;

(3) *если* $\sim\neg B$ *входит в* t, *то* $non!V_0(B,v)$ *или* $V_0(B,v)=T$;

(4) *если* $\sim B$ *входит в* t, *то* $non!V_0(B,v)$ *или* $V_0(B,v)=\bot$ (основная лемма).

Доказательство проводится одновременной индукцией по логической длине формулы B. Если $B\in Atm$, справедливость условий (1) – (4) непосредственно следует из определения V_0.

Предположим поэтому, что $B\notin Atm$, тогда B имеет один из следующих видов: $\neg C$, $C_1\vee C_2$, $\Box C$ или $\exists xC(x)$. В каждом из этих случаев предположим, что всем свободным индивидным переменным формулы B сопоставляются одноименные индивидные переменные из U_0, рассматриваемые в качестве типографических объектов.

Пусть B имеет вид $\neg C$. Покажем, что условие (1) нашей леммы будет выполняться. Опять воспользуемся индукцией по логической длине формулы C, которая может быть атомарной или иметь один из следующих видов: $\neg F$, $F_1\vee F_2$, $\Box F$ или $\exists xF(x)$.

В случае, когда $C\in Atm$, B имеет вид $\neg C$ и выполнимость условия (1) следует из определения V_0.

Если C имеет вид $\neg F$, тогда B есть формула $\neg\neg F$ и поскольку последняя формула входит в незамкнутую таблицу t, к ней применимо правило NN, согласно которому в t также включается формула F, имеющая меньшую логическую длину, чем B. Поэтому в силу индуктивного предположения для условия (1), $V_0(F,v)=T$, а согласно правилу оценки для $\neg$, $V_0(B,v)=V_0(\neg\neg F,v)=T$.

Если C имеет вид $F_1\vee F_2$, тогда B есть формула $\neg(F_1\vee F_2)$ и в незамкнутой таблице t к ней применимо правило ND, согласно которому в t включаются формулы $\neg F_1$, $\neg F_2$. В силу индуктивного

предположения для условия (2), $V_0(\neg F_1,v)=V_0(\neg F_2,v)=\bot$, откуда согласно правилам оценки для $\vee$ и $\neg$ следует, что $V_0(B,v) = V_0(\neg(F_1\vee F_2),v)=T$.

Если C имеет вид $\Box F$, то B есть формула $\neg\Box F$ и к ней применимо правило NK, согласно которому составляется новая таблица t′, такая, что $\langle t, t'\rangle\in R_0$ и в нее помещается выражение ~F. В силу индуктивного предположения для условия (4), non!$V_0(F,u)$ или же $V_0(F,u)=\bot$, где $u=\theta(t')$, а по правилу оценки для $\Box$, $V_0(\Box F,v)=\bot$, где $v=\theta(t)$. Следовательно, $V_0(B,v)=V_0(\neg\Box F,v)=T$.

Наконец, если C имеет вид $\exists xF(x)$, тогда B будет иметь вид $\neg\exists xF(x)$, и поскольку таблица t не замкнута, к B применимо правило NE, согласно которому для каждой индивидной переменной $z\in D(v)$, $v=\theta(t)$, в t включается формула вида $\neg F(z)$. К ней применимо индуктивное предположение для условия (2), в силу которого $V_0(F(z),v)=\bot$ при тождественном сопоставлении индивидных переменных из U_0 всем отличным от z свободным индивидным переменным, входящим в F(z), когда переменной z сопоставляется любая переменная из U_0. Отсюда согласно правилу оценки для $\exists$ получаем, что $V_0(\exists xF(x),v)=\bot$, а из последнего прямо следует, что $V_0(B,v)=V_0(\neg\exists x\, F(x),v)=T$.

Мы показали, что условие (1) выполняется, если B имеет вид $\neg C$. Остается рассмотреть случаи, когда B имеет один из следующих видов $C_1\vee C_2$, $\Box C$ или $\exists xC(x)$.

Если B имеет вид $C_1\vee C_2$, то к таблице t применяется правило D и составляется новая альтернативная система таблиц с напарницей t′ таблицы t. При этом, в t включается C_1, а в t′ – C_2. Согласно индуктивному предположению $V_0(C_1,v)=T$ или $V_0(C_1,u)=T$, где $v=\theta(t)$, а $u=\theta(t')$. Из чего, в силу правила оценки для $\vee$, заключаем, что $V_0(C_1\vee C_2,v)=T$.

Если B имеет вид $\Box C$, то к ней применимо правило K и в каждую таблицу t′, такую, что $\langle t,t'\rangle\in R_0$ помещается формула C. В силу индуктивного предположения, для всякого u, такого, что $(v,u)\in R_0$, где $v=\theta(t)$, а $u=\theta(t')$, $V_0(C,u)=T$. Но тогда, согласно правилу оценки для $\Box$, $V_0(B,v)=V_0(\Box C,v)=T$.

Наконец, если B имеет вид $\exists xC(x)$, к ней применимо правило E, согласно которому в t включается формула C(y) с ранее не встречающейся ни в одной таблице индивидной переменной $y\in X_t \subseteq Y_t$. В силу индуктивного предположения $V_0(C(y),v)=T$ при тождественном сопоставлении элементов U_0 всем отличным от y свободным переменным, входящим в C(y), когда переменной y сопоставляется $y\in X_t \subseteq D(v)$, где $v=\theta(t)$. Но тогда, согласно правилу оценки для $\exists$, $V_0(B,v)=V_0(\exists xC(x),v)=T$.

Итак, мы установили, что условие (1) нашей леммы выполняется. Точно так же можно установить выполнимость условий (2) – (4) леммы 1.

Рассмотрим, к примеру, два случая условия (3). Пусть B имеет вид $\Box C$. Так как таблица t не замкнута и содержит выражение вида $\sim\neg\Box C$, к последнему применимо правило ~NK и в t включается формула $\neg\neg\Box C$, а затем согласно правилу NN – формула $\Box C$. В силу индуктивного предположения для условия (1),$V_0(\Box C,v)=T$. Поэтому согласно правилу оценки для ¬, $V_0(B,v)=V_0(\neg\neg\Box C,v)=T$ и, следовательно, non!$V_0(B,v)$ или $V_0(B,v)=T$.

Теперь предположим, что B имеет вид $\exists xC(x)$. Так как таблица t не замкнута и содержит выражение $\sim\neg\exists xC(x)$, к нему применимо правило ~NE, согласно которому в t включается выражение $\sim\neg C(y)$ с ранее не встречающейся ни в одной таблице индивидной переменной $y\in X_t \subseteq Y_t$. В силу индуктивного предположения для условия (3), non!$V_0(C(y),v)$ или $V_0(C(y),v)=T$ при тождественном сопоставлении элементов U_0 всем отличным от y свободным индивидным переменным, входящим в C(y), когда переменной y сопоставляется $y\in X_t \subseteq D(v)$, где $v=\theta(t)$. Но в таком случае non!V_0(B, v)=non!$V_0(\exists xC(x),v)$ или $V_0(B,v)=V_0(\exists xC(x),v)=T$. →

Лемма 2. *Если диаграмма для замкнутой формулы* A *не замы-кается, то* A *не общезначима в классе фреймов* Ep4.

Доказательство. По условию леммы диаграмма для A не замыкается, поэтому не замкнута по крайней мере одна из ее альтернативных систем таблиц (псевдотаблиц). Следовательно, не замыкается и главная таблица (главная псевдотаблица) этой системы с исходной замкнутой формулой ¬A. Но в таком случае, согласно условию (2) леммы 1, существует опровергающая модель M_0 для A. Поэтому A не общезначима в классе фреймов Ep4. →

Теорема 2. *Если* A *общезначима в классе фреймов* Ep4, *то* |– A *в* Ep4 (теорема полноты).

Доказательство прямо следует из определения доказуемости в табличном исчислении и контрапозиции леммы 2. →

Устранение логического всеведения. Классически общезначимой является формула $\exists xP(x)\supset\exists x(Q(x)\vee\neg Q(x))$, однако нетрудно проверить, что Ep4-диаграмма для формулы $\Box\exists xP(x)\supset \Box\exists x(Q(x)\vee \neg Q(x))$ не замыкается. Этим устраняется парадокс логического всеведения в форме 1). С другой стороны, классически общезначимой является также формула $\exists x(Q(x)\vee\neg Q(x))$, но легко можно убедиться, что Ep4-диаграмма не замыкается и для формулы $\Box\exists x(Q(x) \vee\neg Q(x))$ и, таким образом, устраняется пара-

докс логического все-ведения в форме 2). Из последнего факта следует, что табличное исчисление Ep4 является ненормальной (ввиду того, что в нем допустимым не является правило вывода: из A следует □A, для всякой формулы A), а из устранимости парадокса логического всеведения в форме 1), следует, что табличное исчисление Ep4 немонотонно (так как в нем не является допустимым правило вывода: из A⊃B следует □A⊃□B, для всяких A и B).

ЛИТЕРАТУРА

1. *Fagin R.F. and Halpern J.Y.* Belief, awareness, and limited reasoning // Artificial Intelligence. 1988. Vol. 34. P. 277-295.
2. *Fitting M.* Intuitionistic Logoc, Model Theory and Forcing, Amsterdam, North-Holland Publishing Co., 1969.
3. *Hintikka J.* Impossible possible worlds vindicated // Journal of Philosophical Logic. 1975. Vol. 4. P. 475-484.
4. *van der Hoek W. and Meyer J.* Possible logics for belief // Technical Report IR-170. Free University of Amsterdam, 1988.
5. *Kripke S.A.*. Semantical analysis of modal logic I. Normal modal propositional calculi // Zeitschrift für mathematische Logik und Grundlagen der Mathematik. 1963. Bd. 9. S. 67-96.
6. *Kripke S.*A. Semantical considerations on modal logic // Acta Philosophica Fennica. 1963. Vol. 16. P. 83-94.
7. *Levesque H.J.* A logic of implicit and explicit belief // AAAI-84. Austin, Texas, 1984. P. 198-202.
8. *Rantala V.* Impossible world semantics and logical omniscience // Acta Philosophica Fennica. 1982. Vol. 35. P. 106-115.
9. *Wansing H.* A general possible worlds framework for reasoning about knowledge and belief // Studia Logica. 1990. Vol. 49. P. 523-539.

Б.В.Бирюков, Л.Г.Бирюкова

ЛЮДВИГ ВИТГЕНШТЕЙН И СОФЬЯ АЛЕКСАНДРОВНА ЯНОВСКАЯ

«Кембриджский гений» знакомится с советскими математиками 30-х годов*

Abstract. *In this paper we discuss L. Witgenstein's visit to the Soviet Russia in 1935 and his contacts with Soviet mathematicians Yanovskaya, Glivenko, Yushkevich, probably Kolmogorov, and some others. We show that Witgenstein was disinclined to discuss with them any specific problems of mathematical logic and foundations of mathematics. We speculate about what may and what may not have been discussed by them. We clarify a number of facts and rebut a number of wide-circulated myths concerning Wittgenstein's stay in the USSR.*

О Витгенштейне существует огромная литература. Из нее известно о поездке этого философа в Советский Союз. Например, что в Москве его принимала С.А.Яновская, а в Ленинграде – Т.Н. Горнштейн. Но, как выяснилось, он встречался не только с ними, – судя по всему, он виделся и с другими математиками и философами этих городов и вел с ними беседы. В этой статье мы попытаемся вписать эти беседы в контекст как кембриджского, так и московского бытия соответствующих научных сообществ середины 30-х годов прошлого столетия. Мы также сопоставим философские воззрения и личности Витгенштейна, с одной стороны, и Яновской – с другой, расскажем о взаимоотношении «Фреге – Витгенштейн», поскольку именно благодаря кембриджскому философу Софья Александровна уяснила для себя значение научного вклада великого иенского мыслителя.

Прежде всего об исторических источниках. Из необозримой литературы о Витгенштейне мы ограничились только несколькими книгами и статьями на русском языке: их достаточно, чтобы осветить названные выше вопросы. Это прежде всего сочинения Витгенштейна, имеющиеся в русском переводе[1]; нами использо-

* Работа выполнена при поддержке РГНФ, грант № 03-03-00096а. Авторы выражают благодарность Вячеславу Павловичу Шестакову и Марие Семеновне Козловой, предоставившим в наше распоряжение уникальную информацию.

[1] Существует два перевода «Логико-философского трактата» – 1958 г. (переводчики И.Добронравов и Д.Лахути; при ссылках: *Трактат*, 1958) и 1994 г. (переводчики М.С.Козлова и Ю.А.Асеев; при ссылках: *Трактат*, 1994), причем

ван также сборник переводных работ, озаглавленный «Людвиг Витгенштейн: человек и мыслитель»[2], монография З.А.Сокулер[3], статья В.П.Шестакова[4], сочинение В.П.Руднева о «божественном Людвиге»[5] и некоторые другие источники. При обращении к

последний сопровождается немецким оригиналом. Мы пльзуемся обоими переводами, сверяя их с немецким текстом, а в одном случае используя собственный перевод. К витгенштейновским «Философским исследованиям» мы обращаемся как по их переводам в кн. «Новое в зарубежной лингвистике», вып. XVI, М., 1985 (перевод С.А.Крылова) и в издании: *Л.Витгенштейн.* Философские работы. Часть II, М., «Гнозис», 1994 (перевод М.С.Козловой и Ю.А.Асеева), а к иным работам данного философа – по их переводам-извлечениям, выполненным А.Ф.Грязновым – в его книге «Материалы к курсу критики современной буржуазной философии. Философия языка Л.Витгенштейна» ([М.], 1987; при ссылках на эту книгу: *Грязнов – Материалы*), также по части II (книга I) названных выше «Философских работ» Витгенштейна (в дальнейшем при ссылках: *Витгенштейн*, ч. II, кн. I; ссылки на ч.I этой книги даются в форме: *Витгенштейн*, кн. I).

[2] Сб. переводов с английского, составление и послесловие В.П.Руднева. М., Изд. группа «Прогресс», «Культура», 1993. В этой книге помещены переводы публикаций: *Г.Г. фон Вригт* (Wright). Людвиг Витгенштейн. Биографический очерк; *Н.Малкольм* (Malcolm). Людвиг Витгенштейн. Воспоминания; *Ф.Паскаль* (Pascal). Витгенштейн. Личные воспоминания; *У.У.Бартли III* (Bartley). Витгенштейн; *Г.Бергман* (Bergmann). Блеск и нищета Людвига Витгенштьейна; помещен также перевод текста: *L.Wittgenstein.* Лекции. Кембридж 1930–1932. По записям Дж.Кинга и Д. Ли. Послесловие в этой книге называется «Витгенштейн как личность». В дальнейшем эти публикации цитируются соответственно как: *Вригт, Малкольм, Паскаль, Бартли, Бергман, Витгештейн – лекции, Руднев – послесловие.*

[3] *З.А.Сокулер.* Людвиг Витгенштейн и его место в философии XX в. Курс лекций. Долгопрудный. Аллегро-Пресс, 1994 (в дальнейшем при ссылках: *Сокулер*); *А.Ф.Грязнов.* Эволюция философских взглядов Л.Витгенштейна. [М.], Изд-во МГУ, 1985 (в дальнейшем ри ссылках: *Грязнов 1985*).

[4] *В.П.Шестаков.* Людвиг Витгенштейн: поездка в Россию // Вопросы философии. 2003, № 5 (в дальнейшем при ссылках: *Шестаков*); *М.Козлова.* Философские искания Витгенштейна // Вступительная статья в кн.: *Витгенштейн*, ч. I (в дальнейшем при ссылках: *Козлова*).

[5] *В.Руднев.* Божественный Людвиг. Витгенштейн: формы жизни. М., Фонд научных исследований «Прагматика культуры», 2002. При дальнейших ссылках: *Руднев – книга.*

В писаниях В.П.Руднева много недостоверного. Например, Руднев ошибается, когда пишет, будто «Витгенштейн пришел на философский (!) факультет и представился Яновской»: философского факультета в МГУ тогда не было, была кафедра философии на *историческом* факультете, но сомнительно, чтобы Софья Александровна принимала его у историков.

Далее, высказывания этого писателя о том, будто Витгенштейн нашел у Фреге «ошибки» и «исправлял» Рассела, показывают, что их автор не владеет математико-логическим аппаратом. Об этом же говорят его слова о том, что Витгенштейн отнесся «без особого энтузиазма» к знаменитым результьатам Гёделя потому, что «сам пришел к тем же выводам, сформулированным по-другому значительно раньше» (*В.П.Руднев – послеловие*, с. 347–348). Но Гёдель *дока-*

Фреге мы опираемся на изданную в Германии его научную переписку[6].

С. А. Яновская

Начнем с характеристики Софьи Александровны. В советское время иные авторы патетически писали о днях ее молодости, когда она с оружием в руках боролась за «прекрасные идеалы марксизма-ленинизма» и отстаивала их в течение сорока лет[7]. Уже говорилось о том, что эти слова не совсем точны[8]. Конечно, как убежденная коммунистка, она считала свою научную работу служением партии, и в 20–30-х годах прошлого века, то есть тогда, когда состоялись ее встречи с Витгенштейном, она была вполне марксистским мыслителем. В среде советских математиков этого времени ее партийно-политическая деятельность – не самая светлая глава ее биографии. Думается, однако, что события 30-х годов, особенно после 1934 г. (убийство С.М.Кирова), когда всеохватный террор стал все больше распространяться на партийные кадры, не могли не повлиять на взгляды С.А.Яновской. Конечно, это было только начало ее идейной эволюции, которая, по нашему мнению, завершилась к середине 50-х годов – после пика сталинских зверств и юдофобской кампании (борьба с «безродными космополитами» и дело «врачей-убийц»). Мы свидетельствуем: к этому времени взгляды С. А. Яновской – в детстве девочки из местечковой семьи, которой страна, клеймившаяся революционерами как «тюрьма народов», позволила получить превосходное среднее и в значительной мере высшее образование, – стали иными. Она

зывал свои теоремы, пользуясь языком математической логики, тогда как у Витгенштейна могли быть только ни к чему не обязывающие общие идеи.

В своей книге о Витгенштейне Руднев цитирует некоего Д.Е.Галковского (автора книги «Бесконечный тупик»), объявившего, будто «одной из определяющих черт русского языка и, стало быть, характера, является склонность к глумлению», и, продолжая рассуждать на эту тему, говорит о «русском характере», что он глумится «от избытка интеллектуальной нерастраченности, от неприменности своего разума, загубленного русской жизнью...» (с. 181). Думается, было бы лучше, если бы Галковский и Руднев вместо глумления над русской жизнью и русским характером нашли иную «примененность» избытку собственной «интеллектуальной нерастраченности»...

[6] *G.Frege.* Wissenschaftlicher Briefwechsel. Felix Meiner Verlag. Hamburg. 1976. При дальнейших ссылках: *Фреге – переписка.*

[7] *Д.П. Горский.* Математик-марксист // Женщины – революционеры и ученые. М., «Наука», 1982. С.86.

[8] *Б.В.Бирюков, О.А.Борисова.* С.А.Яновская – выдающийся мыслитель, исследователь и педагог // Вопросы философии, 2004. № 3. В последующем при ссылках: *Бирюков – Борисова.*

осознала реальную цену «прекрасным идеалам», и на марксистскую фразеологию, встречающуюся в работах С.А. последнего десятилетия ее жизни, следует смотреть как на непременное условие тогдашних публикаций, включая работы на философско-математические и логико-методологические темы. Те, кто тесно с ней общался, помнят ее внутреннюю чистоту и высоко порядочный стиль поведения, резко отличный от манеры, усвоенной партийно-философским начальством.

Нас, однако, интересуют 30-е годы. С середины третьего десятилетия прошлого века Яновская, судя по всему, жила, в постоянном страхе. Старая коммунистка – член партии с 1918 года, участница большевицкого подполья в Одессе, занятой войсками Антанты и «Вооруженными силами Юга России», то есть белыми, политработник Красной армии периода Гражданской войны – она вполне могла оказаться в ГУЛАГЕ: чекистский террор все более направлялся против «ленинской гвардии».

Когда мы будем говорить о приезде Витгенштейна в Ленинград, речь пойдет и о Т.Н.Горнштейн. Именно к ней, профессору ЛГУ, пришел в 1935 г. кембриджский философ, когда он был в городе на Неве. Яновская же опекала Витгенштейна в Москве. И хотя и Т.Н., и С.А. наверняка действовали по поручению партийного начальства либо с его ведома – иначе при советской власти быть просто не могло, – Горнштейн в следующем году была *арестована* и много лет пробыла в ГУЛАГе.

Человек, который «принимал» Витгенштейна в Ленинграде, заслуживает того, чтобы о нем сказать отдельно. Татьяна Николаевна Горнштейн[9] (1904–1980) получила естественно-научное образование в Киевском университете. Там она окончила физико-математический и химический факультеты, а после переезда в Ленинград, кроме университета (профессором кафедры диалектического материализма которого она была), занимала должность научного сотрудника ленинградского отделения Института философии Коммунистической академии. Областью ее научных интересов была история науки. Вернувшись в Ленинград после почти двух десятилетий репрессий, она с 1955 г. работала в Ленинградском отделении Института истории естествознания и техники Ака-

[9] Пользуемся случаем, чтобы обратить внимание читателя на ошибку, допущенную в статье: *Б.В.Бирюков.* Борьба вокруг логики в Московском государственном университете в первое послесталинское десятилетие (1954–1965) // Логика и В.Е.К. К 90-летию со дня рождения профессора Войшвилло Евгения Казимировича. М., Изд-во «Современные тетради», 2003 [за грифом философского ф-та МГУ – «К 250-летию Московского университета»]. В этой публикации фамилия Татьяны Николаевны оказалась искаженной: Горенштейн.

демии наук СССР, затем на академической кафедре философии, защитила докторскую диссертацию.

Чаша, которую испила Т.Н.Горнштейн, миновала Яновскую – ее не тронули, хотя знакомство (и, наверное, даже дружба) ее с Т.Н. не могла остаться неизвестной «органам». Нетрудно представить себе, что чувствовала Софья Александровна, когда узнала об аресте Татьяны Николаевны.

В статье, посвященной столетию со дня рождения С.А. Яновской, ее авторы утверждают, что она (из осторожности) «практически никогда не упоминала» имени Витгенштейна[10]. Думается, это не совсем так. Своим ученикам она кое-что рассказывала. Говорила, например, что он был очень плохо одет – даже по советским меркам 30-х годов, и это воспринималось как свидетельство его материальной неустроенности в Англии (о том, что причина была не совсем в этом, мы скажем ниже). Именно этот философ из английского Кембриджа, судя по всему, раскрыл перед Яновской значение работ Г. Фреге. Во всяком случае он подарил ей главный труд иенского ученого – «Основные законы арифметики». До этого имя Фреге, этого создателя современной математической логики, и его идеи упоминались С.А. только вскользь и в негативном плане. Например, о Фреге мы ничего не нашли в ее статьях в выпущенном в 1936 г. сборнике статей о философии математики[11], хотя в помещенной там работе С.А. – «О так называемых "определениях через абстракцию"» обращение к фрегевским работам было бы более чем оправданным.

Экземпляром фрегевских «Основных законов...», подаренным Витгенштейном Софье Александровне, впоследствии пользовался ученик С.А., первый советский фрегевед – А.А. Ерофеев, а затем один из авторов этих строк, во второй половине 50-х годов – аспирант Яновской. Долгое время этот экземпляр, по-видимому, был единственным в Советском Союзе, и если бы не подарок Витгенштейна, фрегеведческие штудии в нашей стране появились бы с большим запозданием. Где ныне находится этот экземпляр, нам не известно.

---

[10] См.: *И.Г.Башмакова, С.С.Демидов, В.А.Успенский.* Жажда ясности // Вопросы истории естествознания и техники, 1996, № 4 (цит. по книге: *В.А.Успенский.* Труды по нематематике, т. 2. М., ОГИ, 2002, с. 1262).

[11] Сборник статей по философии математики. Под ред. проф. С.А.Яновской. М., Учпедгиз, 1936. На титуле книги указано: Утверждено Наркомпросом РСФСР.

Советская философия математики третьего десятилетия XX века

Это было время, когда те из марксиствующих философов нашей страны, которые пытались разрабатывать философскую проблематику математики и естествознания, в поисках идейной опоры обычно обращались к Гегелю. Однако они не всегда владели научным и философским материалом – произведенное советской властью идеологическое опустошение было слишком сильно, и подчас не у кого было учиться. Авторитетами были прежде всего Маркс да Энгельс, а они, как известно, были гегельянцами. На Гегеля ориентировали и «Философские тетради» В.И.Ульянова-Ленина, которые тогда были опубликованы. Но разобраться в том, что в гегелевском наследии было достойным внимания, а что нет, было непросто.

Дань увлечения Гегелем отдала и С.А.Яновская. В своих первых работах, относящихся к методологическим аспектам математического знания, она стремилась выявить позитивное в мыслях Гегеля о математике. Уже в этих работах, о которых «поздняя Яновская» не вспоминала, обнаружилось ее умение сосредоточиваться на принципиально важных логико-методологических вопросах. К концу 20-х годов она овладела и философской проблематикой, и математикой своего времени, открыв в качестве своей «ниши» историю математической мысли и логику.

О логике разговор особый. В условиях 30-х годов – да и последующих десятилетий тоже – она требовала защиты и в философском, и в математическом сообществах «страны советов». Яновская «выгородила» для научной логики область, в которую было трудно проникнуть научным невеждам: она объявила математическую логику наукой о рассуждениях в математике. В совместной с В.И.Гливенко ее энциклопедической статье о математической логике мы находим следующую дефиницию: «Логика математическая, дисциплина, исследующая свойства логических операций, применяемых в математике; логика математическая исследует эти свойства теми же методами, которыми, например, алгебра исследует свойства операций арифметики»[12].

Подобное истолкование математической логики предохраняло ее от нападок сторонников «диалектической логики». А чтобы защитить более широкое понимание логической науки – понимание, от которого было не уйти, С.А. использовала оружие своих же оппонентов: диалектико-материалистическую терминологию.

---

[12] *С.Яновская, В.Гливенко.* Логика математическая // Большая Советская энциклопедия. Том 37. М., 1938, С. 330.

Но терминологией она не ограничилась – по крайней мере с середины 30-х годов она начала вырабатывать свою собственную концепцию диалектической стороны логического. История упомянутого выше сборника статей по философии математики 1936 г. показывает, в каких сложных условиях это происходило.

Сборник был составлен из статей, написанных отечественными математиками нового поколения. Редактору книги – С.А.Яновской принадлежало в нем, помимо Предисловия (датированного 1 января 1936 г.), – три (!) статьи. Из книги явствует, что материал, вошедший в сборник, был доложен авторами на II Всесоюзном съезде математиков, состоявшемся в июне 1934 г., а именно – на секции истории и философии математики. Сообщалось, что книга подготовлена «к двадцатилетию ленинского "Материализма и эмпириокритицизма"». Очевидно, сам факт появления того или иного имени в качестве одного из авторов сборника означал, что данный ученый стоит на позициях борьбы с «буржуазной философией математики».

В книге приняли участие такие математики, как А.Н. Колмогоров, П.С. Александров, Г.А. Курош, В.И. Гливенко. Как следует из Предисловия, замысел сборника состоял в том, чтобы показать, что «гениальная ленинская характеристика сущности и основных черт кризиса физики оказалась полностью приложимой и к кризису основ математики. И здесь кризис был порожден самим ростом науки, приведшим к ломке всех ее основных понятий и методов; и здесь причиной его возникновения оказался философский идеализм, паразитирующий на росте науки, развивающейся в атмосфере неразрешимых для буржуазии противоречий империалистического капитализма; и здесь, по существу, на самом деле, математика оказалась рождающей отнюдь не идеализм, а диалектический материализм; и здесь идет борьба партий в философии, за которой скрывается, как ее собственная причина, порождающая поляризацию сил, классовая борьба». В отношении же советской математики говорилось, что развивается она «на почве самой передовой практики человечества – практики социализма», из чего следует, что в ее распоряжении «имеется все необходимое и достаточное для реализации лозунга вождя народов великого Сталина о ликвидации отставания теории от практики»[13].

Взглянув на этот текст глазами того времени, мы убеждаемся, что в нем представлена система защиты *отечественных* математических исследований от идеологической критики. Вспомним, что совсем недавно «прорабатывались» такие ученые, как Д.Ф. Егоров

---

[13] Сборник статей по философии математики, с. 3, 5.

и Н.Н. Лузин. Теперь же за идеализм критиковались не советские, а *зарубежные* математики – Кантор, Пуанкаре, Рассел, Герман Вейль, Гильберт; о Витгенштейне в сборнике нет ни слова, почему его рассказ о том, что С.А. встретила его словами – «неужели это великий Витгенштейн?!» могут показаться странными (мы еще вернемся к этому вопросу).

Так отвоевывалась область, где можно было творчески работать. Существенно, что в нее входила и математическая логика. Статус последней утверждался статьей «Логика математическая» в «Большой советской энциклопедии». Написанная С.А. Яновской и В.И. Гливенко (именно в таком порядке следуют подписи авторов статьи), она, как мы сказали выше, определяла математическую логику как дисциплину, исследующую применяемые *в математике* свойства логических операций.

Сборник был неоднороден. Одни авторы – Колмогоров, Александров, Курош предпочли сосредоточить внимание на «росте науки и ломке ее основных понятий», другие же писали о «паразитирующем на росте науки идеализме» за рубежом. Статья В.И. Гливенко называлась «Кризис основ математики на современном этапе его развития». Ленинградский математик А. Фишер писала о философии математики Р. Гонсета. Две статьи Яновской были посвящены критике идеализма в математике, но одна – об «определениях через абстракцию» принадлежала не идеологической конъюнктуре, а науке, точнее, научной методологии. С марксизмом эту статью связывало, по сути, только то, что в ней показывалось: Маркс в «Капитале» определял понятие «стоимости» аналогично понятию натурального (целого положительного) числа – *через абстракцию.* Проблема абстракции навсегда осталась центральной в творчестве С.А. И свою критику Кантора, высказавшего убеждение, что «сущность математики в ее свободе», она уже никогда не повторяла в той плоской форме, какая имела место в ее статьях 20-х – начала 30-х годов. С.А. стала отстаивать то, что можно назвать «свободой введения научных абстракций», – при условии, что их можно исключать, спускаясь на более низкий уровень абстрактности рассмотрений либо при приложениях теории, дающих верные результаты. Впоследствии эти взгляды С.А. вылились в стройную концепцию «введения и исключения абстракций», обосновывавшуюся прежде всего на материале математики и логики.

Мы говорим столь подробно о сборнике 1936 года по следующим причинам. Как оказалось, главная часть вошедших в него материалов готовилась к печати еще в 1934 г. Это следует из того, что в апрельском номере журнала «Фронт науки и техники» за наз-

ванный год[14] были опубликованы статьи А. Колмогорова, П. Александрова, Г. Куроша, В. Гливенко, С. Яновской, позднее почти в неизменной форме вошедшие в сборник 1936 года. А из напечатанного в этом журнале (за подписью В. Степанова) уведомления о том, что «Второй Всесоюзный математический съезд состоится в Ленинграде 30 июня 1934 года», следовало, что данный журнальный номер действительно вышел до приезда в СССР кембриджского философа. Это значит, что сборник 1936 г. – гораздо более доступный для читателя, чем упомянутый выше журнал, – отражал философские взгляды его авторов как раз на то время, когда с ними вел (или мог вести) беседы Витгенштейн. Мало того, четверо из участников труда 1936 г. – А.Н. Колмогоров, В.И. Гливенко, А.М. Фишер и С.А. Яновская фигурируют в двух ставших доступными нам страничках записной книжки Витгенштейна, о которых мы будем еще говорить.

В 1935 г. в том же журнале (№ 3) увидела свет статья С.А. Яновской «Современные течения в буржуазной философии математики», впоследствии вошедшая в сборник 1936 года. В свете тех дискуссий, которые С.А. вела в 1935 г. с Витгенштейном, эта статья особенно показательна. В ней анализируются особенности математики того времени, в частности трудности, которые связаны с проблемами бесконечности и существования математических объектов, ставящие под сомнение формально-логический закон исключенного третьего. В статье подвергаются критике «генетическая математика» интуиционистов и «метаматематика» формалистов, то есть установки Брауэра и Гильберта. Очевидно, что Яновской и Витгенштейну было что обсуждать.

Л. Витгенштейн: аристократ или еврей, гений или дутая величина?

Известно, что Витгенштейн происходил из очень богатой австрийской семьи, получил прекрасное образование – гуманитарное (он владел латынью и греческим) и техническое (приобрел специальность авиаинженера). Но ни гуманитарная культура, ни техника не послужили для него основой для формирования жизненного стержня. Он все время метался, нигде не находя прочной опоры для своего бытия. Восприняв учение Толстого периода его отщепенства от русской действительности, Витгенштейн то учи-

[14] Фронт науки и техники. 1934. № 4. Это был ежемесячный общественно-политический журнал Всесоюзной ассоциации работников науки и техники (ВАРНИТСО) и Секции научных работников (СНР). Раздел «Проблемы математики» занимает в № 4 страницы 24–78.

тельствовал в сельских школах австрийских Альп, то обретался на норвежских берегах в построенной им самим хижине. Снедаемый комплексом неполноценности и вины, причиной чего были его, как предполагают, нетрадиционные сексуальные ориентации, он надевал на себя личины то высокомерия, то самомнения (утверждая, например, что он никогда ни к кому не бывает несправедлив[15]), то смирения – вплоть до мысли об уходе в монастырь. Два его брата были самоубийцами, и сам он в течение многих лет подумывал последовать их примеру. В 20-х годах он даже подвергался принудительному освидетельствованию на предмет психического здоровья. Витгенштейн тщательно скрывал подробности своей личной жизни, доходя в этом до крайних форм. Например, когда его попросили предоставить для ознакомления письма, полученные им от Г. Фреге, он отказался, мотивируя это тем, что они имеют частный характер. Но какого содержания, кроме сугубо научного, могли они быть? В посмертных бумагах Витгенштейна письма эти обнаружены не были…

«Большая часть его [Витгенштейна] жизни навсегда останется неизвестной даже ближайшим друзьям», – пишет в своих воспоминаниях о нем Фаня Паскаль, учившая его русскому языку[16]. Но одно бесспорно: он отбросил все связи, которые, по его мнению, закабаляют человека, – «состояние[17], семью, нацию, государство»[18]. Он был бы типичным представителем «малого народа» в смысле И.Р. Шафаревича[19] (какими были его коллеги по Кембриджу, о чем мы скажем далее), если бы не его «пограничное» психическое состояние. Не знаю, заметила ли это С.А., имевшая опыт общения с психически больными мужем и сыном[20]. Наверное, нет, так как иначе она поняла бы истинные мотивы того костюма, в котором Витгенштейн, доктор философии Кембриджского университета и член Колледжа Св. Троицы, явился в СССР, – в рубахе с отложным воротничком, грубых ботинках и мятых брюках, как живописует его одеяние В.П.Руднев[21]. То, что это было

---

[15] *Малкольм* С. 41.

[16] *Паскаль* С. 109.

[17] Семья Витгенштейнов была очень богата, и после кончины отца, сталелитейного магната, он, в числе прочих детей, стал его наследником. От своей части наследства он отказался.

[18] *Сокулер* С. 9.

[19] См, например, *И.Р. Шафаревич*. Русский народ в битве цивилизаций. М., Алгоритм, 2003. С. 304.

[20] Послее смерти матери сын покончил жизнь самоубийством.

[21] *Руднев – книга*, с. 202. Малкольм, слушавший лекции Витгенштейна в 1939 г., уточняет: «Он всегда носил светло-серые фланелевые брюки, фланелевую рубашку с расстегнутым воротом, свитер [переводчик передал эту деталь оде-

выражением его «опрощения» в толстовском смысле, в Советском Союзе вряд ли понимали.

Витгенштейн в течение многих лет скрывал свое еврейское происхождение[22]. Он не пресекал слухи о его родстве с княжеским родом Сайн-Витгенштейнов. И, как вспоминает Х.И. Кильберг, в нашей стране его так и восприняли. Однако еврейство было одной из компонент его переживаний, свидетельством чему является его «исповедь» Фане Паскаль, о которой она поведала в своих воспоминаниях[23]; тем не менее легенда об аристократических корнях Витгенштейна упорно держалась в Англии, что и зафиксировали некрологи, появившиеся в английских газетах после его смерти.

Взглянем на эти переживания Витгенштейна с позиций православной России. Приняв во внимание, что его мать исповедовала католицизм и он был крещен как католик, что на вопрос о своем вероисповедании он отвечал – «римско-католическое» и похоронен был как христианин, нет оснований связывать его с иудаизмом. Для Православия факт крещения – тем более, когда оно не сопровождается скрытой приверженностью к еврейству, чего у Витгенштейна и в помине не было, – означал разрыв с конфессиональными корнями иудаизма. Этнический характер еврейству придавали недоверие к искренности «выкрестов» среди части русского населения старой России, пресловутый «пятый пункт» в советском паспорте и – особенно – расизм в национал-социалистической Германии. Именно последний растравил легко ранимую душу Витгенштейна.

Трудности Витгенштейн для себя создавал сам. Для Яновской они были объективной данностью. Тяжести советского быта того времени не могли не относиться и к «красным профессорам», к каковым принадлежала С.А. Когда Витгенштейн приехал в Москву, Софья Александровна жила в коммунальной квартире. Х.И. Кильберг вспоминает: «Корпус, в котором мы в 30-х годах жили бок о бок [с С.А.] (две семьи в четырехкомнатной квартире), был населен учеными – бывшими слушателями Института крас-

---

жды словом «жакет», не подходящем для мужского костюма] из грубой шерсти или кожаную куртку. Выходя на улицу в сырую погоду, он надевал желтовато-коричневый плащ и твидовую кепку» (*Малкольм*, с. 32).

[22] Как теперь склоняются пишущие о нем зарубежные авторы, по нацистским критериям он был евреем на три четверти. Впрочем, сами блюстители чистоты «арийской расы» установить это не смогли, и отнесли семью Витгенштейнов, оставшуюся в Рейхе, к «Mischlinge», то есть к лицам с примесью «неарийской» крови.

[23] *Паскаль*, с. 121–124. Сама Фаня была из еврейской семьи и во время Гражданской войны в России девочкой вместе с родными покинула Харьков и обосновалась в Англии.

ной профессуры. К Софье Александровне часто заходили "на огонек" многие из них. Кухня служила как бы клубом. Здесь Софья Александровна принимала приходивших по делу своих аспирантов, коллег»[24].

С первых лет появления Витгенштейна в Кембридже о нем пошла слава «гения». Его бесцеремонное и неожиданное появление на квартире Б.Рассела в 1911 году, высказывавшиеся им идеи произвели на последнего сильное впечатление, и в начале следующего года Витгенштейн получил в Кембриджском университете статус «студента-исследователя» колледжа Св. Троицы, то есть стал тем, что у нас называется аспирантом. В 1913 г., будучи в Кембридже, Витгенштейн сочинил «Заметки по логике», которые сохранил Рассел; в 1914 г., когда Витгенштейн на несколько лет покинул английский университетский город и поселился на берегах Норвегии, он продиктовал приехавшему к нему в гости Дж.Э. Муру другие заметки о логике. Вот, собственно, и все, что из его работ, относящихся к «дотрактатовскому» периоду его творческой жизни, было известно в Кембридже[25].

И тем не менее новый «студент-исследователь», по свидетельству Уильяма У. Бартли III, «произвел на всех в Кембридже блистательное впечатление, стал другом самых выдающихся университетских философов, Дж.Э. Мура и Рассела, а затем был избран в

---

[24] *Х.И.Кильберг.* Верность долгу // Женщины – революционеры и ученые. Отв. ред. И.И.Минц, А.П.Ненароков М.: Наука, 1992. С. 104. – Хися Израилевна Кильберг, член Коммунистической партии с 1920 г., была кандидатом исторических наук.

[25] Впоследствии выяснились, что в середине десятых годов Витгенштейн делал записи на философско-логические темы, но эти его «Дневники 1914–1916 гг.» были опубликованы лишь после его кончины. Дневники составлялись в виде афоризмов с нумерацией, подобной той, которая представлена в его «Логико-философском трактате», о котором речь впереди. Наиболее существенные изречения Витгенштейна в этих «дневниках» приведены в русском переводе в книге *Грязнов – Материалы.* М.С.Козлова, задумывая издание всех основных работ кембриджского философа, предполагала включить в него и эти «Дневники», а также названные выше «Заметки по логике» и «Заметки, продиктованные Муру», а именно во вторую часть издаваемого двухтомника (см. соответствующий анонс на с. 521 книги *Витгенштейн*, ч.I). Но середина 90-х годов не была благоприятной для осуществления подобных замыслов, и издательство «Гнозис» опубликовало перевод только витгенштейновских «Замечаний по основаниям математики»; на титульном листе соответствующего издания указывается, что это «книга I» части второй «философских работ» Витгенштейна, и это заставляло читателя думать, будто существует (или готовится к печати) «книга II», куда войдут остальные анонсированные работы кембриджского мыслителя. Все названные выше тексты Витгенштейна служили подготовке его «Трактата».

тайное[26] общество только для особо посвященных, которое называлось "Апостолы"»[27]. Если верить В.П. Рудневу[28], ключевую роль в приеме Витгенштена в число «апостолов» сыграл экономист Кейнс, о котором мы еще будем говорить. Заметим, что Витгенштейн стал членом этого общества, не опубликовав ни строчки на научные темы (первая его публикация – журнальная рецензия на книгу П. Коффки «Наука логики» – появилась лишь в 1913 г.); тем не менее, по словам Руднева, молодые преподаватели Кембриджа были «поклонниками Витгенштейна»[29].

Получается, что Витгенштейн авансом стал «гением»[30]. Так отзывался о нем и математик Рамзей, и философ Мур. Как пишет У.У. Бартли III, еще до 1922 года, когда в Лондоне был издан «Логико-философский трактат», – на языке немецкого оригинала и в английском переводе, предваряемый предисловием Рассела[31], «лучшие умы Англии готовы были почти на все, лишь бы создать Витгенштейну благоприятные условия для его дальнейшего философского роста»[32].

«Трактат», которому, по предложению Мура, было дано латинское название – *Tractatus logico-philosophicus*, принес, по заключению В.П. Руднева, «мировую славу» его автору; и когда в 1929 г. Витгенштейн снова приехал в Кембридж (после неудачного опыта школьной работы в Нижней Австрии), он был «легендарно знаменитым философом»[33]. Ему создали все условия для защиты докторской диссертации, коей послужил его *Tractatus*, о котором Мур в официальной бумаге отозвался как о «труде гения». После

---

[26] Конечно, *тайным* оно было не в современном смысле – просто это было элитарное общество, закрытое для тех, кто не был в него принят.

[27] *Бартли*, с.144.

[28] *Руднев – книга*, с. 51.

[29] В.П.Руднев собрал обширный материал о Витгенштейне, представив его в ряде публикаций. К сожалению, сообщаемым им фактам, характеристикам людей и событий не всегда можно доверять. Так, С.А.Яновскую он именует Софьей *Яковлевной*, называет ее «старой диаматчицей» и «старухой» (с. 197–198, 243), тогда как она была математиком-философом, занималась историей математики и математической логикой. Эта «старуха» была почти на семь лет *моложе* Витгенштейна. Математика-прикладника В.В.Налимова Руднев аттестует как лингвиста и философа (с. 87). Удивление вызывает упорная передача Рудневым английского *proposition* термином «пропозиция», чуждым для отечественной логико-философской литературы; это тем более странно, что данному автору известно первоначальное название, которое дал Витгенштейн рукописи «Трактата», – оно гласило «Der Satz» (ср. *Бартли*, с.169).

[30] Ср. название книги Р. Монка (Monk) – Ludwig Wittgenstein. The Duty of Genius. London, 1990.

[31] Это было второе издание «Трактата». Первое вышло в Германии в 1921 г.

[32] *Бартли*, с. 232.

[33] *Руднев – книга*, с. 88.

этого кембриджское руководство предоставило «гению» на пять лет должность *fellow* – члена совета и преподавателя Колледжа Св. Троицы. Студентка Кембриджского университета Ф.Паскаль, в 1934 г. преподававшая Витгенштейну русский язык, вспоминает, что он был «легендой, и Кембридж полнился слухами о нем»[34].

Свыше половины столетия прошло с тех пор, как ушел из жизни автор «Логико-философского трактата», а взвешенной оценки его вклада в философию и науку, по нашему мнению, до сих пор нет. Если говорить о философии, то надо признать: «великий новатор философии XX столетия», как иные величают Витгенштейна, не очень ориентировался в истории философской мысли. В имеющихся источниках отмечается, что первым философским трудом, который он прочитал (по совету сестры), была книга А.Шопенгауэра «Мир как воля и представление»[35], что он читал Платона и Августина Блаженного, Ницше и Киркьегора, знал ряд творения Достоевского и Толстого, проникся учением О.Шпенглера о «закате Запада». Как пишет фон Вригт, слушавший в Кембридже лекции Витгенштейна и составивший его биографический очерк, у Спинозы, Канта и Юма Людвиг Витгенштейн «смог понять, по его собственным словам, только отдельные места»[36].

Теперь о *научном* вкладе Витгенштейна. Ясно, что речь в этом случае могла идти только о математической логике, и очевидно, что он был невелик. Введение в «Трактате» таблиц истинности, истолкование логических законов как тавтологий, утверждение, что отрицание конъюнкции и отрицание диюзъюнкции обладают, каждое, свойством функциональной полноты[37] – все это вряд ли можно считать большим достижением. Критические замечания Витгенштейна о законе исключенного третьего или его рассуждения о том, что впоследствии получило название интенсиональных контекстов, носили слишком общий характер. Все это в той или иной форме было у Фреге, Рассела, Брауэра. Отсутствие у Витгенштейна существенных *математико-логических результатов* вполне понятно: математического образования, сколько-нибудь сравнимого с тем, которое давал, например, Московский университет, у него не было.

---

[34] *Паскаль*, с. 102.

[35] *Грязнов*, 1885, с. 93; *Козлова, с.* VII.

[36] *Вригт*, с. 27.

[37] То свойство отрицания конъюнкции (то есть операции, выражающей несовместимость двух высказываний), что через нее могут быть выражены все функции пропозициональной логики, было еще в 1913 г., то есть до Витгенштейна, открыто Шеффером (H.M. Sheffer).

К чести Витгенштейна надо сказать, что он и не претендовал на многое. В Предисловии к своему «Трактату» он откровенно сказал, что написанное им «не претендует на новизну деталей» – даже *деталей*, подчеркнем мы, – почему он и не указывает никаких источников: ему «совершенно безразлично», думал ли кто-нибудь над теми вопросами, которые его занимают. Но о двух своих предшественниках он помнил – и постоянно напоминал о них: ими были Фреге и Рассел. Ибо критика языка – центральная проблема, вокруг которой все время вращалась витгенштейновская мысль, – являлась, если говорить о сути дела, – развитием идей «позднего Фреге», Рассел же был его учителем в Кембридже. Фрегевские «Логические исследования» были Витгенштейну, по-видимому, известны (входящую в них статью «Мысль» он получил от самого автора), и ход мысли Витгенштейна был по существу продолжением фрегевской «критики языка». Если бы автор «Трактата» ознакомился с фрегевскими манускриптами, где проблема «логика и язык» звучит в полную силу, он убедился бы в том, что обоих мучили одни и те же вопросы. Но рукописи Фреге увидели свет, когда Витгенштейна уже не было в живых…

Выше мы отметили фрагментарную философскую образованность Витгенштейна. Конечно, философией, включая ее историю, не очень владели и те математики и философы, с которыми в Москве и Ленинграде встречался Витгенштейн. Но ведь их и не аттестовали как философских гениев. Что же касается математики, то большинство из тех, кто упоминается в двух известных нам листочках его записной книжки, внесло в нее весомый, а некоторые и выдающийся вклад – достаточно назвать Колмогорова.

Следует сказать, что четыре бесспорных авторитета в философии и логике – Фреге, Рассел, Карнап и Мур дали творениям Витгенштейна весьма примечательную характеристику.

Об отношении «Витгенштейн – Фреге» мы будем говорить особо, опираясь прежде всего на изданную в 1976 г. научную переписку иенского мыслителя. Здесь же мы приведем тот отзыв Фреге о витгенштейновском «Трактате», который содержится в книге 1990 года уже упоминавшегося автора Р. Монка. Речь идет о каком-то письме Фреге Витгенштейну, которое не было известно немецким издателям фрегевского рукописного наследия. Перевод соответствующего отрывка из письма приводит В.П. Руднев, и нам остается только положиться на достоверность сведений, которыми оперируют два названных лица.

Готтлоб Фреге писал Витгенштейну: «Удовольствие от чтения Вашей книги возникает не от содержания, которое *уже известно*, но лишь от особой формы, которую избрал автор. Книга поэтому

становится скорее *художественным*, чем научным достижением; То, *что* сказано в ней, занимает второстепенное место по сравнению с тем, *как* это сказано»[38].

Бертран Рассел в своей «Автобиографии» высказался так: «Теории, содержащиеся в работах Витгенштейна, новы, очень оригинальны и, без сомнения, важны. *Верны ли они, я не знаю.* Как логик, который стремится к простоте, я должен думать, что *нет*, но то что *я читал о них*, дает основание полагать, что у него есть все возможности разработать их»[39].

Рудольф Карнап в труде «Логический синтаксис языка» (1936) назвал вингенштейновский «Трактат» – собранием *разрозненных афоризмов*[40].

Наконец, в «Автобиографии» Джорджа Мура читаем: «Я бесконечно восхищаюсь этой книгой [«Логико-философским трактатом»]. Правда, я *не все понимаю* в ней, но то, что я понял, просветлило меня»[41].

Из приведенных слов явствует, что их авторы смотрели на творение Витгенштейна не столько как на научный труд, выражающий новые и понятные истины, сколько как на стилистическое достижение, грешащее, однако, неясностью и разрозненностью своих положений.

Подобный взгляд подтверждают воспоминания Малькольма, слушавшего Витгенштейна в 1939 году. «Мне кажется, я *почти ничего не понимал* в его лекциях, пока десять лет назад заново не пересмотрел сделанные мной тогда записи. И в то же время я, как и *все остальные*, осознавал, что Витгенштейн делает *что-то очень важное.* Все знали, что он занят решением *исключительно сложных проблем* и что его метод подхода к ним совершенно оригинален»; далее Малькольм добавляет, что «подход Витгентейна был труден для понимания»[42].

---

[38] *Руднев – книга*, с. 86. Здесь и далее в цитируемых высказываниях Фреге, Рассела, Карнапа и Мура курсив наш – *Б.Б., Л.Б.*

[39] Цит. по: *Шестаков*, с. 151–152. Стоит заметить, что в Предисловии к витгентейновскому «Трактату» Рассел дал более высокую оценку этому сочинению, высказав взгляд, что им не может пренебречь «ни один серьезный философ» (см. *Трактат*, 1958, с. 26). Кроме того, был период, когда Рассел находился под влиянием *личности* Витгенштейна; что же касается влияния на Рассела *мыслей* кембриджского аспиранта, то об этом вряд ли можно говорить всерьез: ведь это были идеи самого Рассела, просто представленые в иной, подчас парадоксальной форме, что и производило впечатление.

[40] См. *Руднев – книга*, с. 98.

[41] См. *Шестаков*, с. 157.

[42] *Малкольм*, с. 31–32, 34. Курсив наш. – *Б.Б., Л.Б.*

Почему же Витгенштейн сразу прослыл в Кембридже гением, и эта репутация достигла даже сталинской Москвы (будто бы дело дошло до того, что Н.И.Бухарин, «приехав на какой-то западный конгресс, критиковал "Логико-философский трактат"»[43])? Нам видятся две причины этого. Первая заключалась в личности самого Витгенштейна. Он обладал даром того, что обычно называют фасцинацией: способностью увлекать людей своими идеями, причем как в устной форме, так и в своих чрезвычайно эмоциональных и трудно истолковываемых текстах. Приведенное нами высказывание Мура можно свести к краткой формуле – непонятно, но здорово!

Вторая причина носит социальный характер. Она просвечивает в словах Дж.О.Уиздома, которые У.У.Бартли III вынес в качестве эпиграфа к главе 4 своей работы о Витгенштейне. Из нее мы узнаем, что последний «стал известен благодаря особенным обстоятельствам: сильному впечатлению, произведенному им на Бертрана Рассела, и смелой политике Кембриджского университета, открывшему ему доступ в *философское сообщество*»; если бы не это, «мы практически ничего не услышали бы о Витгенштейне»[44].

Итак, «гения авансом» подлинно великим мыслителем считать вряд ли возможно. Но был ли Витгенштейн «дутой величиной», как можно было бы заключить из приведенных выше отзывов о нем? Мы дадим ответ на этот вопрос в конце нашей статьи. Ответ этот потребует рассказа об упомянутом выше «философском сообществе» -- сообществе «апостолов», замкнутой секте «интеллектуалов», исповедовавших левые взгляды, о влиянии, которое автор «Логико-философского трактата» оказал на группу венских философов, и, конечно, о его поездке в Россию. Но прежде чем рассказывать обо всем этом, стоит задержаться на том, как Витгенштейн вообще обратился к логико-методологической проблематике. Здесь возникает имя великого иенского логика.

Людвиг Витгештейн и Готтлоб Фреге

Мы будем отправляться от свидетельств Г. фон Вригта, ученика «позднего Витгенштейна», логика и философа, которому из многочисленных авторов, писавших о своем учителе, можно, наверное, больше всего доверять[45]. Перепробовав в юности множе-

---

[43] См. *Руднев – книга*, с. 94. Любопытно было бы узнать, что это был за конгресс, где и когда он состоялся и за что Бухарин критиковал сочинение Витгенштейна.

[44] *Бартли*, с.232. Курсив наш. – *Б.Б., Л.Б.*

[45] *Вригт*, с. 12 и далее.

ство занятий и меняя одни интересы на другие, будущий автор «Трактата» увлекся в конце концов не более и не менее, как философией математики. Рассказывают, пишет фон Вригт, что однажды он обратился к кому-то с просьбой указать ему литературу по этому вопросу. Ему рекомендовали книгу Рассела «The Principles of Mathematics», вышедшую в Лондоне в 1903 г. Эта книга открыла для Витгенштейна новый мир, и, как предполагает фон Вригт, побудила его познакомиться с работами Г.Фреге и вступить с ним в личный контакт. Витгенштейн отправился в Иену и встретился с Фреге. Когда это произошло, точно не установлено, но очевидно, что было это не позже 1911 года. После этого Витгенштейн, следуя, по его собственным словам (засвидетельствованным фон Вригтом), совету Фреге, приехал в Кембридж к Б.Расселу; произошло это осенью 1912 года. Известно (благодаря одному письму Витгенштейна Расселу[46]), что он в том же году вновь посетил Фреге. Витгенштейн собирался приехать в Иену еще раз – и в письме к Фреге от 22 октября 1913 г. просил разрешения на встречу. Однако она не состоялась. Можно предполагать, что этому помешала война.

В дальнейшем общение Витгенштейна и Фреге происходило путем переписки, которая не сохранилась из-за гибели архива Фреге[47] и скрытности Витгенштейна. Г. Шольц, готовивший перед Второй мировой войной издание избранных трудов Фреге, кратко выписал сведения о письмах и почтовых открытках, которые Фреге получал от Витгенштейна (и о двух посланиях Фреге Витгенштейну). По-видимому, в переписке были заинтересованы оба корреспондента: кембриджского аспиранта интересовали содержательные проблемы, иенский же логик, наверное, видел в этом один из путей выхода из той научной изоляции, в которой он фактически находился в Германии. Сообщается также, что Фреге будто бы писал Витгенштейну, что рад его решению заняться логикой[48].

Переписка Витгенштейна и Фреге относится к 1913–1915 и 1918–1919 годам, причем в архиве Фреге хранились в основном письма и открытки, присланные ему Витгенштейном (как мы уже сказали, Шольцу были известны только два послания Фреге, адресованные Витгенштейну). Собирая фрегевский архив, Г.Шольц в письме, относящемся к 1936 г., просил Витгенштейна передать в

---

[46] См.: Wittgensteins *Notebooks* (1914–1916). Ed. by G.H. von Wright and G.A.M. Anscomb. Oxford, 1961, p. 120.

[47] См. об этом: *Б.В.Бирюков.* Готтлоб Фреге: современный взгляд // *Г.Фреге.* Логика и логическая семантика. Сб. трудов. Перев. с нем. М.: Аспект Пресс, 2000. С. 49 и далее.

[48] *Руднев – книга*, с. 77.

этот архив его переписку с Фреге, но Витгенштейн ответил: «Хотя я имею несколько почтовых открыток и писем Фреге, но они имеют чисто личное, нефилософское содержание. Для сборника сочинений Фреге они не имеют *никакой* ценности; для меня же они имеют значение как память о прошлом». Попытки найти в посмертных бумагах Витгенштейна эти открытки и письма, как мы уже говорили, окончились неудачей[49].

Фреге-расселовская логико-философская традиция наложила печать на все творчество Витгенштейна, особенно в период создания им «Логико-философского трактата». Последний пестрит ссылками на Рассела и Фреге. Естественно, что Витгенштейн считал важным узнать фрегевскую оценку его сочинения.

Как можно судить по данным, которые собрал Г.Шольц, переписка началась с письма, датированного 22 октября 1913 г.[50], в котором Витгенштейн просит у Фреге разрешения его посетить. Шольц приводит перечень еще 23 посланий, преимущественно от Витгенштейна к Фреге. Уже из третьего письма становится ясным, что начинающий логик не все принимал (и, наверное, не все понимал) во фрегевской концепции. В этом письме, как записал Шольц, Витгенштейн возражает против фрегевской теории истины. Комментатор переписки «Фреге – Витгенштейн» Г. Габриель, ссылаясь на «Записные книжки» Витгенштейна 1914 – 1916 гг., считает, что кембриджский аспирант отверг фрегевское онтологическое истолкование *истины* и *лжи* как предметов – «истинностных значений». Правда, как отмечается во многих источниках, Витгенштейн навсегда сохранил высокое мнение о знаменитой ныне статье Фреге «О смысле и значении», в которой предметное истолкование значений истинности составляет один из центральных пунктов.

Все это свидетельствует об одном: Витгенштейн *не понимал* логической системы Фреге, в которой истолкование предложений как имен «истинностных значений» – *истины* и *лжи* было неотъемлемой составной частью. То, что кембриджский аспирант предлагал изъять это истолкование из фрегевской концепции логики как учения о *бытии истины*, означало одно: он не вник в главный труд Фреге – «Основные законы арифметики», семантика

---

[49] См. *G.Frege.* Wissenschaftlicher Briefwechsel. Hamburg, 1976, S. 265 (раздел XLV. Frege – Wittgenstein. Einleitung des Herausgebers [G.Gabriel]). В дальнейшем при ссылках: WB.

[50] В BW это письмо носит номер XLV/1, где римская цифра указывает на то, что данное послание относится к переписке «Фреге – Витгенштейн», а арабская – на порядковый номер послания. В дальнешем мы будем указывать только номер послания.

которого *требует* подобного истолкования. Между тем это ясно следует из всей логико-арифметической конструкции Фреге. И не очень понятно, как в голове Витгенштейна сочеталась высокая оценка фрегевской статьи «О смысле и значении» с отвержением главного ее устоя – истолкования предложений (суждений) как носителей смыслов, задающих либо истину, либо ложь как особые предметы в универсальной предметной области[51]. Это непонимание концепции истины, которое развивал Фреге, Витгенштейн пронес через всю свою творческую жизнь.

Начиная с 1915 года темой переписки становится логико-философская работа (Abhandlung) Витгенштейна, будущий «Трактат». После того, как автор этого сочинения – солдат австро-венгерской армии – попал в Италии в плен, переписка с Фреге велась преимущественно через сестру Витгенштейна, которая и послала в Иену сочинение брата. В письме от 10 апреля 1919 г. Витгенштейн просит Фреге высказать суждение о его работе. Оценку Фреге мы привели выше. Витгенштейн, конечно, с ней не согласился и написал об этом Расселу, присовокупив, что по его мнению Фреге не понял ни одной строчки в его работе. Несмотря на это переписка продолжалась, и Витгенштейн даже просил Фреге содействовать публикации его работы в Германии; иенский мыслитель предпринял соответствующие попытки, но из них ничего не получилось. В последнем письме, сведения о котором сохранились (от 29 декабря 1919 г.), Витгенштейн сообщает Фреге о своей встрече с Расселом и о том, что последний собирается опубликовать его работу в Англии.

Влияние Фреге на Витгенштейна было чрезвычайно велико – и не только в первый период его творчества (как это обычно отмечается в имеющихся источниках), но и на протяжении всей жизни: «поздний Витгенштейн», автор посмертно изданных «Логических исследований», даже ближе к фрегевским идеям, чем «ранний». Знаменитое изречение Витгенштейна, высказанное в Предисловии к «Трактату»: «то, что вообще может быть сказано, может быть сказано ясно, а о чем невозможно говорить, о том следует молчать»[52] – вполне «фрегевское». Недаром из трудов великих логиков-философов, коих в истории человеческой мысли было немало, Витгешнтейн в своем Предисловии отмечает только «выдающиеся работы Фреге и моего друга Бертрана Рассела»[53].

---

[51] См. *Б.В. Бирюков.* В логическом мире Фреге // *Г. Фреге.* Логика и логическая семантика.

[52] *Трактат*, 1958, с. 29; ср. *Трактат*, 1994, с. 3.

[53] Там же.

«Апостолы», «ангелы» и Страна советов

Вернемся, однако, к кембриджским «апостолам». Этот интеллигентский кружок, существовавший с 1820 г.[54], был сектой закрытого типа, членами которой в 20–30-х годах XX века были, по характеристике В. Руднева, «все интеллектуально одаренные, выдающиеся преподаватели Кембриджа», в том числе Дж.М. Кейнс и Дж.Э.Мур. Кружок «апостолов» пополнялся ежегодно одним – двумя новыми членами, и Витгенштейн вошел в него уже в 1912 г. В свой второй кембриджский период, когда он снова приехал в университет (1929), его на вокзале встречал сам Кейнс – одна из наиболее влиятельных фигур Кембриджа. Витгенштейн теперь был избран в число почетных членов кружка – так называемых ангелов.

Члены кружка встречались каждую неделю, и один из его участников выступал с докладом, за которым следовало обсуждение поставленных в нем вопросов. Главным принципом диспутантов был отказ от каких-либо ограничений, включая моральное долженствование, и отвержения любых табу. Следствием сектантской замкнутости был, естественно, снобизм в сочетании с амбициями и интригами. Руднев приводит, со ссылкой на соответствующий источник, слова Кейнса: «Мы отказываемся от всех вариантов доктрины первородного греха <...>. Мы не испытываем уважения к традиционной мудрости <...> мы проповедуем открытость ко всем и ко всему»[55].

«Открытость» эта, впрочем, была, скажем мягко, несколько односторонней – носила «антикапиталистический» и просоветский характер. Конечно, «апостолы» были не единственной интеллигентской группировкой в данном университетском городе. Существовал еще Клуб моральных наук, в который Витгенштейн тоже входил. К счастью, не все кембриджские преподаватели и ученые исповедовали левацкую идеологию. Существовало, например, общество физиков, в которое входил П.Капица, – его члены были озабочены вопросами подлинной науки. Но не таковы были «апостолы».

Для характеристики «общества апостолов» очень подходит понятие «малого народа», как в своих культуроведческих работах его использует И.Р. Шафаревич[56], ссылаясь на современного исследователя Французской революции конца XVIII века – О. Кошена. «Малый народ» – это некий социальный или духовный

---

[54] *Руднев – книга*, с. 51

[55] Там же, с. 52–53.

[56] *И.Р.Шафаревич.* Сочинения: В 3 т.. Том 2. М., 1994, с.113–119.

слой образованных людей, осознающий свое единство (воплощенное в кружках, клубах, секциях и т.п.) и противопоставляющий себя остальному народу – обывателям. Эти люди враждебно относятся ко всему, что составляет «корни нации, ее духовный костяк» – к вере, чести, верности своему государству и его вековой истории. Внешней формой этой идеологии оказывается либерализм, ее крайней формой – нигилизм и даже предательство.

«Апостолы» того времени и были для своей страны именно таким «малым народом». В событиях на Западе они видели только «кризис» буржуазной идеологии и поэтому исповедовали прокоммунистические взгляды. Они не верили свидетельствам о чекистских зверствах и рассматривали все происходящее в России как великий социально-экономический и политический эксперимент. «Лето 1935 г., – цитирует В.Руднев одного из авторов, писавших о Витгенштене[57], – было временем, когда марксизм для людей, обучавшихся в Кембридже, стал наиболее важной интеллектуальной силой, а поездки в Советский Союз студентов и преподавателей университета носили характер паломничества»[58].

Это были годы, когда из-за прихода к власти в Германии национал-социалистов популярность коммунистической России достигла своего пика, а шпионаж в пользу СССР стал в Кембридже надолго некоей модой. Прокоммунистическая эпидемия не могла не затронуть Витгенштейна. Фаня Паскаль, обучавшая его русскому языку, была женой французского коммуниста и членом Комитета «дружбы с СССР». Истовым коммунистом был друг Витгенштейна Н.М. Бахтин (брат известного советского культуролога М.М.Бахтина)[59].

Конечно, мировоззрение «апостолов» было неоднородным. Другой друг Витгенштейна – итальянский экономист-антифашист П.Сраффа в вопросах политэкономии расходился с Марксом. Сам Витгенштейн имел о марксизме весьма поверхностное представление: почитывал «Капитал», но об Энгельсе не слыхивал. Ленина

---

[57] *R.Monk.* Op. cit., 1990.

[58] *Руднев – книга*, с. 191.

[59] Как мы узнали от некоторых сотрудников ВИНИТИ, в зарубежной литературе проскользнуло сообщение, будто Витгенштейн был советским шпионом. З.А.Сокулер (в частном разговоре) высказала соображение, что этого не могло быть в силу особенностей его личности. Действительно, платным агентом НКВД быть он не мог, так как безразлично относился к деньгам, а просоветские убеждения у него не переросли в коммунистические. Кроме того, он был психически слишком неустойчив, а таких разведка не вербует. И, конечно, ни к каким военным либо политическим секретам в Англии он допущен не был. Но вполне можно предположить, что он оказывал те или иные услуги советским агентам в Кембридже, не очень сознавая политический смысл своих поступков.

считал «философским примитивом»; но, называя его философию «абсурдом», с похвалой отзывался о нем за то, что он «все же хотел что-то сделать»[60]. Его не возмущал советский режим, он хвалил Сталина за то, что «он дал людям работу»[61], а цивилизацию страны, которая гостеприимно его приняла и позволяла ему проповедовать свои идеи, осуждал.

Более того, Витгенштейн подспудно симпатизировал Гитлеру – с ним он когда-то учился в одной школе; и о своем бывшем соученике он ведь тоже мог сказать, что тот «дал людям работу»; во всяком случае в гитлеровской книге *Mein Kampf* он был склонен видеть «нечто дельное книга»[62]. В свете подобных взглядов уже не удивляет, что ему нравилась О.Бисмарка «Мысли и воспоминания»[63], а прежняя имперская Австро-Венгрия была окрашена для него в светлые тона: левацкие настроения сочетались у Витгенштейна с известным консерватизмом. Как видно, взгляды Витгенштейна по ряду пунктов выпадали из идеологии «апостолов».

Витгенштейн и Россия

Россия занимала мысли Витгенштейна по крайней мере с того времени, как он познакомился с переводом толстовского «Евангелия» – такого изложения учения Христа, в котором отвергалась богочеловеческая сущность Спасителя. Толстовское отрицание цивилизации импонировало Витгенштейну, смотревшему на Запад глазами Освальда Шпенглера. В 1922 г. он писал одному из своих корреспондентов: «Бог знает, что станет со мной, может быть, я поеду в Россию». Россия привлекала Витгенштейна и своей «цивилизационной молодостью», и теми страданиями, которые выпали на ее долю, – страдания, которые, по убеждению «кембриджского гения», обещали «нечто в будущем»[64].

---

[60] См. *Шестаков*, с. 155; *Руднев – книга*, с. 345.

[61] *Руднев – книга*, с. 344.

[62] См. *Руднев –послесловие*, с. 344.

[63] Эта книга была издана в русском переводе после пакта Молотова – Риббентропа, в период сближения двух социалистических держав. Предисловие к ней написал профессор истории, германист и журналист-международник А.С.Ерусалимский. Как свидетельствует А.В.Гулыга, предисловие это внимательно читал Сталин, принял его автора и посоветовал характеристику Бисмарка – «прусский юнкер» заменить на «великий юнкер» (*А.В.Гулыга.* Эстетика в свете аксиологии, Пятьдесят лет на Волхонке (Фрагменты воспоминаний). СПб, «Алетейя», 2000, с. 389 – 390). Очевидно, что издание этой книги могло быть только с одобрения либо по инициативе «великого кормчего». Совпадение вкусов Витгенштейна и Сталина достаточно примечательно.

[64] См. *Паскаль*, с. 129; *Руднев –послесловие*, с. 344.

Задуманная Витгенштейном в середине 30-х годов поездка в Советский Союз была бегством от западной цивилизации. Последней он противопоставлял как культуру тех этносов, которых антропологи и этнографы относили к «первобытным» племенам[65], так и «динамизм» русских: «А вот Россия, – читаем мы в одном источнике его слова, в которых Россия выступала как альтернатива Америке. – Здесь страсти что-то обещают», в то время как «наша болтовня бессмысленна»[66].

Готовясь к поездке в страну большевиков (а может быть, и к переселению в нее), Витгенштейн взялся за изучение русского языка. Его учительница русскому, Фаня Паскаль, занималась с ним три кембриджских семестра, и Витгенштейн настолько овладел новым для него языком, что прочитал «Преступление и наказание» Ф.М. Достоевского в оригинале. Иные творения гениев русской литературы Толстого и Достоевского («Воскресенье», «Хаджи Мурат», «Братья Карамазовы») он, судя по всему, читал в переводе; надо полагать, что прочитанное им толстовское «Много ли человеку земли надо?» было ему особенно близко.

Другой формой подготовки к поездке было знакомство с теми, кто уже побывал в СССР, а также с западными коммунистами и «друзьями СССР». Чтобы получить разрешение советских властей на эту поездку, Витгенштейн попросил Кейнса рекомендовать его советскому полпреду (то есть послу) в Великобритании – И.М. Майскому[67] и устроить его встречу с ним. Известно, *что* Кейнс написал лондонскому представителю советской России: «Дорогой сэр Майский. Позвольте рекомендовать Вам Людвига Витгенштейна, феллоу Тринити-колледжа [Колледжа св. Троицы] в Кембридже. Доктор Витгенштейн – выдающийся философ и

---

[65] Это нашло выражение в его «Заметках» об известном труде Дж. Фрэзера «Золотая ветвь». Ныне эта работа Витгенштейна издана в русском переводе в «Историко-философском ежегоднике-89» (М., 1990).

[66] Цит. по: *Шестаков*, с. 15; *Руднев – послесловие*, с.344.

[67] Иван Михайлович *Майский* (1884–1975) был деятелем революционного движения в России, но в члены компартии был принят лишь в 1921 г. Дипломат, он до поста полпреда в Англии (советские послы в зарубежных странах тогда именовались «политическими представителями»; термин *посол* был отвергнут как «буржуазный»), который занимал в 1932–1943 гг., возглавлял советскую миссию в Финляндии. Репрессированный в годы войны с Германией, он два с половиной года провел в советской тюрьме; исключенный из партии, он фигурировал даже на судебном процессе Л.Берии. Реабилитированный, Иван Михайлович только после длительных хлопот был восстановлен в своих партийных правах. Сомнительно, чтобы в середине 30-х годов он пользовался большим влиянием в Москве. Во всяком случае Витгенштейну он мог обещать только туристическую визу, что вряд ли нравилось кембриджскому философу, который ехал в СССР с серьезными намерениями.

очень давний и близкий мой друг. <...> Он не член коммунистической партии, но он очень симпатизирует тому образу жизни, который, как он уверен, установлен в России»[68]. Майский принял Витгенштейна, который просил его не только о содействии в получении визы для планировавшейся им поездки, но и о сведениях (и, возможно, рекомендациях), относящихся к тем учреждениям, которые он хотел посетить в советской России, а также о лицах, с которыми он мог бы вступить в контакт. Обещав Витгенштейну свое содействие, советский полпред тем не менее указал, что речь может идти только о туристической визе.

Вопрос о мотивах вояжа Витгенштейна в страну большевицкой революции – один из самых темных. Из имеющихся на этот счет данных следует, что он не собирался заниматься в СССР ни философией, ни математикой, – но именно с математиками и философами встречался в Москве и Ленинграде. В одном из писем, адресованных Кейнсу, Витгенштейн писал: «Я уже решил поехать в Россию в качестве туриста и попытаться найти там, возможно, для себя работу. Если я обнаружу, что не смогу найти там работу или не получу разрешения на работу в России, я вернусь в Англию и, возможно, начну изучать медицину <...> я хочу поехать в Россию и получить разрешение работать там в качестве врача»[69]. Имеются данные, что Витгенштейна интересовали в России народы Крайнего Севера, и, по-видимому, именно там кембриджский философ мыслил найти сферу своей деятельности. Ему стало известно о существовании в Ленинграде и Москве соответствующих научных институтов – «Института Севера» в первом из этих городов, и «Института малых народов» – во втором. В литературе о Витгенштейне утверждается, что по приезде в СССР он посетил ленинградский институт и был готов отправиться в экспедицию для изучения языка и культуры северных народностей[70], но документальные данные об этом отсутствуют. Известно только (благодаря сообщению М.С. Козловой, которая беседовала о Витгенштейне с Т.Н. Горнштейн), что Витгенштейн прибыл в Россию в составе туристической группы.

В сведениях о пребывании Витгенштейна в СССР много недостоверного. Утверждается, например, что он пробыл в Советском Союзе «около 20 дней»[71], тогда как простой расчет показывает, что на советской земле он провел гораздо меньше времени. Бытует легенда – ее повторяет Руднев, – будто кембриджский философ ус-

---

[68] Цит. по: *Шестаков*, с. 154.
[69] Там же, с. 153–154.
[70] *Руднев – послесловие*, с. 343.
[71] *Шестаков*, с. 155.

пел съездить в Казань, однако никаких документальных подтверждений этому нет. Ходил даже слух, что «кембриджский гений» в 1939 г. еще раз посетил СССР, что уж совсем неправдоподобно.

Два листка из записной книжки кембриджского «ангела» Витгенштейн и советские математики

В конце декабря 2003 г. на философском факультете МГУ состоялось объединенное заседание методологических семинаров двух кафедр – эстетики и логики, посвященное анализу философских взглядов Витгенштейна. В числе докладчиков на этом заседании был В.П. Шестаков[72], работавший в Кембридже и собравший обширный материал об этом философе. Его рассказ о Витгенштейне, как его помнят в современной Англии, был живым дополнением к тому, о чем Шестаков писал в упомянутой нами статье. В.П. снял ксерокопии двух листков записной книжки Витгенштейна, относящихся к пребыванию последнего в СССР. К этим листкам мы и обратимся. Предварительно, однако, остановимся на хронологии вояжа кембриджского «гения» в страну большевиков.

Витгенштейн отплыл из Великобритании на корабле 7 сентября 1935 г. и прибыл в Ленинград 12 числа того же месяца. Значит, морское путешествие заняло у него не менее пяти дней. Как следует из письма, посланного им из Москвы в Англию одному из своих корреспондентов за два дня до отъезда из советской столицы, корабль должен был доставить его обратно в Англию в воскресенье 29 сентября[73]. Получается, что отплыть из города на Неве он должен был никак не позже 25 числа того же месяца. Даже если принять, что морской путь из советской России в Англию занял меньше времени, чем путь из Англии в Россию, то и тогда выходит, что пребывание Витгенштейна в Советском Союзе заняло от силы 13 дней. И Шестаков, и Руднев утверждают, что прибыв в Ленинград, Витгенштейн посетил Институт Севера и Ленинградский университет, где его принимала Т.Н. Горнштейн. Как будет ясно из дальнейшего изложения событий, это последнее утвержде-

---

[72] Вячеслав Павлович Шестаков (р. 1935), специалист в области истории эстетики и культурологии, д-р философских наук, в 1958–1964 гг. в качестве научного редактора философской редакции издательства «Советская энциклопедия» участвовал в создании первых трех томов «Философской энциклопедии», где ведал, в частности, разделами этики и эстетики. Там путь В.П. пересекся с путем одного из авторов этих строк, который тоже принимал участие в этом энциклопедическом памятнике своей эпохи.

[73] Соответствующий отрывок из этого письма приведен в книге В.Руднева (с. 199) – со ссылкой на уже упоминавшуюся нами книгу Монка 1990 года.

ние ошибочно. Затем Витгенштейн оказался в Москве (наверняка прибыв в столицу ночным поездом типа «Красной стрелы»), где его опекала С.А. Яновская. Из Москвы он возвратился в Ленинград и через день (максимум два дня) отбыл к берегам туманного Альбиона. Было ли у него время для вояжа в Казань? Вряд ли, так как это могла быть только поездка поездом: пассажирское авиасообщение с этим городом тогда вряд ли существовало. Таким образом, времени для посещения Казани у Витгенштейна не было.

Все это нуждается в проверке, и для этого у нас имеются два источника: листки из записной книжки Витгенштейна и рассказ Татьяны Николаевны Горнштейн о встрече с кембриджским гостем – рассказ, который она много лет назад (напомню, что скончалась Т.Н. в 1980 году) поведала Марие Семеновне Козловой.

Мы начнем с записной книжки кембриджского гостя, точнее, с тех двух листков из нее, которые имеются в нашем распоряжении. Книжка эта представляла собой то, что ныне называется ежедневником – ежедневником карманного размера, причем приспособленным, по-видимому, для использования преподавателями и студентами Кембриджского университета. Типографски выполненная, она содержала не только разбивку на месяцы и дни недели, но и помету дней поста, а также имена святых, чтимых в данный день; правая часть пространства, отведенного для каждого дня, содержала сведения о характере соответствующего периода университетской жизни. Листки, которые имеются в нашем распоряжении, свидетельствуют о том, что Витгенштейн совершал свой вояж в каникулярное время – на листках правый их столбец озаглавлен «Long Vacation».

На первом листке мы находим даты 18 – 21, на втором – 22, 23 и 24 сентября. Из почтовых отправлений Витгенштейна, адресованных его корреспондентам в Англии, устанавливается, что 17 и 18 сентября он был в Москве, однако в ежедневнике среда 18 сентября ничем не отмечена; запись же на следующий день содержит цифры, которые, судя по всему, означают телефонный номер, причем домашний, так как перед ними написано слово «Home»[74]. Зато остальные дни были, как следует из записей Витгенштейна, очень насыщенными: мы находим здесь названия учреждений и имена лиц, которые, судя по всему, были названы как специалисты,

[74] Правда, цифр пять, а нам известно, что во второй половине 30-х годов пятизначный номер в Москве предварялся буквой. Возможно, все телефонные номера, которые записывал Витгенштейн, начинались с одной и той же буквы, почему он ее и не выписывал. В отличие от номеров московских телефонов, ленинградский номер домашнего телефона Т.Н.Горнштейн, выписанный Витгенштейном, начинался с буквы Б.

встреча с которыми его могла интересовать. Записи сделаны почти исключительно по-русски (две пометы по-английски нам расшифровать не удалось).

В записи на 20 сентября, пятницу, в правой части соответствующей графы фигурируют «Арбат» и «Усачевка», время – 3 [20], а также помета «12 Autobus»; в левой же части мы находим слово, прочитанное нами как «Sesane», и номер телефона 3-34-33; возможно, это был телефон кого-то из «кураторов» их туристической группы. Под этой записью значится: «Office Дворец труда 546».

На улице Усачевка, как нам известно, в 40-х и последующих годах размещался физико-математический факультет МГПИ им. В.И.Ленина, и можно полагать, что и в 30-е годы там располагались аналогичные учебные и научные структуры. С некоторыми из математиков, имена которых мы находим в записной книжке Витгенштейна, последний мог встречаться именно на Усачевке или где-то поблизости, например в «Академии Коммунистического воспитания», размещавшейся недалеко от этой улицы. Понятной кажется и запись «Дворец труда 546». Имелось в виду построенное до войны здание ВЦСПС за Калужской заставой (ныне – Площадь Гагарина), существующее поныне, а «546», наверное, означало номер кабинета, где его должны были принять. «Дворец Труда» был тогда одиноким (и гигантским по масштабам тех лет) зданием, за которым расстилались поля одного подмосковного совхоза[75].

Что можно усмотреть в этой витгенштейновской записи? – Двойственный характер интересов ее автора. С одной стороны, Витгенштейн устанавливал контакты с советскими математиками (как мы убедимся из последующих его записей – математиками, которых, в числе прочего, занимали философские вопросы их науки). С другой стороны, через советские профсоюзы он, видимо, пытался выяснить перспективы своего трудоустройства в СССР. Эта попытка, как мы знаем, кончилась ничем, хотя мысль переселиться в Россию снова всплыла в его голове в страшном 1937 году[76].

Записи, относящиеся к субботе 21 сентября, наиболее информативны. Во-первых, мы находим здесь перечень тех лиц, которые, судя по всему, были ему названы как ученые, общение с которыми могло входить в его интересы. В правой части листка в столбик выписаны фимилии – Яновская, Выгодский, Варьяш, Колмогоров, Гливенко, Жегалкин, Юшкевич и сбоку – номер теле-

---

[75] Старшему из авторов этих строк, курсанту Курсов радиоспециалистов при заводе № 2 НКО СССР, довелось летом 1942 года работать по воскресеньям на этих полях.

[76] Витгенштейн высказал ее в письме к П.Энгельману, см. *Шестаков*, с. 155.

фона, с помощью которого Витгенштейн, по-видимому, мог с ними договариваться о встречах.

Фамилии Яновской, Гливенко, а также Юшкевича (в левой части листка), подчеркнуты. Под этим же числом значится: «11 в Институте Мат[ематики]. Конференцзал». По-видимому, имелся в виду Институт математики и механики МГУ; что касается «конференц-зала», то им мог быть один из залов в здании по улице Волхонка, д. 14, где размещался Институт красной профессуры, а «11», скорее всего было указанием времени какого-то заседания или приема, на который Витгенштейн был приглашен. Интересно, что ниже записан телефон 45 216 и «Юшкевич»; не договаривался ли Витгенштейн с ним о встрече, которая, судя по записи на следующий день, должна была состояться как раз в 11 часов утра?

Имя Софьи Александровны Яновской не зря выписано Витгенштейном первым. С.А., судя по всему, отвечала за прием иностранного гостя, и это могло быть либо прямым партийно-государственным поручением, либо ответом на инициативу иностранного гостя, и тогда С.А. не могла не ставить об этом в известность соответствующие «инстанции». По-видимому, на Яновской лежала ответственность за прием кембриджского «ангела», причем не только в период пребывания его в Москве, но и в СССР в целом. Иначе как она могла, как сообщил Витгенштейн Фане Паскаль (через своего друга Ф. Скиннера), предлагать ему место профессора в Казанском университете?

Список лиц в Москве, который мы находим в записи на субботу 21 сентября, несет на себе печать отчетливого влияния Яновской. Ко всем названным в нем ученым (кроме, быть может, Варьяша) С.А., как нам известно, относилась с огромным уважением. Обращает на себя внимание то, что в витгенштейновском списке нет имени Э. Кольмана. Это странно, так как он был соавтором С.А. по ряду публикаций, содержавших критику «идеализма в математике», и готовил тогда философско-математическую монографию[77]. Как рассказывала потом С.А., она была против издания этой книги, так как считала ее научно недостаточно зрелой, но автор не внял ее совету[78]. Может быть, поэтому она не назвала

---

[77] Имеется в виду книга: *Э.Кольман.* Предмет и метод современной математики. М., Соцэкгиз, 1936.

[78] Мы полагаем, что С.А. коробили нападки Кольмана на великого русского математика Н.Н. Лузина, которому в книге приписывался «черносотенный образ мыслей» и «дурман» субъективного идеализма и солипсизма (см. с. 290). Заметим, кстати, что Кольман дважды упоминает в своей книге Витгенштейна – один раз, так сказать, снисходительно полуположительно, а другой раз – отрицательно, называя его «Трактат» – «библией венских махистов» (см. с. 257, 266).

Витгенштейну его имени? Или Кольмана тогда просто не было в Москве?

Известно, что С.А. принимала Витгенштейна у себя дома, правда, на кухне коммунальной квартиры. Уже упоминавшаяся нами соседка Яновской по этой квартире – Х.И. Кильберг вспоминает оживленный спор Софьи Александровны с Витгенштейном, происходивший на кухне. «После ухода Витгенштейна, – пишет Кильберг, – шутя, я заметила, что уж этого отпрыска имперской династии следовало поить чаем не на кухне. Последовала реплика Софьи Александровны: "И не подумаю делать для него исключение"»[79]. Этого «исключения» делать было нельзя прежде всего потому, что общение с иностранцем в советских условиях должно было быть при свидетелях, максимально публичным.

Иногда в литературе о Витгенштейне можно прочесть, что Яновская с ним «много и плодотворно общалась». Листки записной книжки автора «Логико-философского трактата» этого не подтверждают: на это у Витгенштейна просто не было времени. Правда, в нашем распоряжении нет дневниковых записей на 12 – 17 сентября. Но, по-видимому, в них не было ничего существенного, иначе, думается, В.П. Шестаков ксерокопировал бы и их. Однако ясно, что из всех советских ученых и «партийных товарищей» Витгенштейн ближе всех познакомился именно с С.А., так как встречался с ней не только в официальной обстановке, но и видел ее в домашних условиях, узнал о ее болезни – сахарном диабете, а вернувшись в Англию, переписывался с ней, присылал ей лекарства, которые в Москве тогда было трудно достать. Ф. Паскаль воспоминает слова Витгенштейна о Яновской, что она замечательный человек, что у нее была трудная жизнь и что она воспитывает маленького сына. Почему С.А. не сохранила письма (или открытки), которые ей посылал Витгенштейн, понятно. В случае ареста это могло вылиться обвинением в «связи с заграницей». К сожалению, и Витгенштейн, по-видимому, не сохранил ничего из того, что писала ему С.А. (во всяком случае в имеющейся литературе об авторе «Логико-философского трактата» конкретных данных о его переписке с С.А. мы не обнаружили). Причина тому – уже отмеченая нами скрытность кембриджского «ангела».

Вернемся к листкам записной книжки Витгенштейна. В графе «Воскресенье. 22 сентября» фигурирует какой-то «Зал заседаний» и запись – «11 Юшкевич» и «11[30] Гливенко». Возникает вопрос,

---

[79] Женщины – революционеры и ученые, с. 104. Как видно, в СССР тогда считали, что автор «Логико-философского трактата» был знатного австро-венгерского рода.

могло ли в воскресенье в Москве состояться какое-либо мероприятие. Это вполне возможно, если в 1935 г. еще действовал введенный после революции календарь, по которому месяцы разделялись не на недели, а на пятидневки. Если же страну уже вернули к обычному календарю, то прием иностранца в общественном месте («зал заседаний») хотя и выглядит странным, на деле же вполне возможен. Известно, например, что партийные собрания в те годы могли продолжаться несколько дней и захватывать воскресенье. А у Витгенштейна время пребывания в СССР было, по-видимому, ограниченным.

Цифры «11» в случае Юшкевича и «11^{30}» в случае Гливенко естественно понять как обозначение времени встречи с названными лицами. Анализируя запись на следующий день, 23 сентября, мы первонаально предположили, что она относится к Ленинграду, так как названной там улицы «Малые кошки», насколько нам известно, в Москве не было. К этому вопросу мы еще вернемся.

Теперь обратимся к тем лицам, фамилии которых фигурируют в записях Витгенштейна, относящихся к Москве. О двух из них (не считая Яновскую) мы уже говорили, это Гливенко и Колмогоров, которым тогда было одному 38, а другому 32 года. Теперь об остальных персоналиях. Иван Иванович Жегалкин был профессором «старого покроя»: в 1935 г. ему было 66 лет; он был автором первой в СССР монографии о канторовском учении о множествах, специалистом в области математической логики. Марк Яковлевич Выгодский и Адольф Павлович Юшкевич были историками математики. Они принадлежали уже к советской поросли: первому из них было тогда 37, а второму 29 лет. Что касается Шандора Варьяша[80], то этот бывший венгерский коммунист был с 1932 г. профессором механико-математического факультета МГУ.

Виделся ли, разговаривал ли Витгенштейн со всеми, чьи фамилии выписаны в его записной книжке? Полного ответа на этот вопрос мы никогда не получим. Кроме Яновской здесь более или менее уверенно можно говорить лишь о Юшкевиче и Гливенко: как следует из записи на воскресенье 22 сентября, с А.П. и В.И. предполагалась встреча в интервале от 11 до 13 часов дня.

Прежде чем говорить о том, что могло и что не могло быть предметом разговоров Витгенштейна с советскими учеными, подчеркнем следующее обстоятельство. Все они (кроме, пожалуй,

---

[80] Варьяш, 1885 года рождения, именовался в советской России «Александром Ивановичем».

Варьяша) были, несмотря на молодость[81], профессионалами в своих научных областях и этим отличались от многих кембриджских коллег Витгенштейна. Конечно, в Кембридже были такие математики, как Г. Харди, и такие логики, как Б. Рассел и Ф. Рамзей. Но все же среди «апостолов» преобладали личности «разговорного жанра». Учитывая этот факт, а также скромную математико-логическую образованность Витгенштейна (трудно представить, чтобы он одолел трехтомные «Principia Mathematica»), мы можем дать ответ на вопрос, что *не могло быть* предметом его обсуждений с советскими учеными.

В.И. Гливенко и А.Н. Колмогоров в своих знаменитых публикациях 20-х – начала 30-х годов впервые исследовали семантическую сторону логических установок Брауэра и предложили аксиоматизацию интуиционистской пропозициональной логики. Примечательно, что статьи Гливенко «О логике Брауэра» и «О некоторых аспектах логики Брауэра» (1928 и 1929 гг.) были опубликованы по-французски в трудах Бельгийской Академии наук, а из двух статей Колмогорова («О приципе tertium non datur», 1925, и «К истолкованию интуиционистской логики», 1932) вторая, наиболее важная, где было представлено колмогоровское «исчисление задач», предвосхищавшее семантику «реализуемости» Клини, увидела свет по-немецки – в известном журнале «Mathematische Zeitschrift». Витгенштейн, таким образом, вполне мог ознакомиться с тем, сколь серьезно русские математики относились к логическим воззрениям Брауэра. Но, насколько нам известно, данные в пользу того, что он это сделал, отсутствуют.

В «Логико-философском трактате» нет никаких следов влияния брауэровского (нео)интуиционизма. Правда, с середины 20-х годов Витгенштейн находился в контакте с членами Венского кружка, которые не могли не знать о Брауэре. В марте 1929 г. последний выступил в Вене с докладом «Математика, наука и язык», и Витгенштейн на нем присутствовал. Идеи Брауэра произвели на Витгенштейна сильное впечатление. Будем, однако, помнить: Брауэр – тогда, во всяком случае, – отвергал возможность формализации интуиционистских представлений о логике. За рубежом этим впервые занялся А. Гейтинг (особенно значимы здесь две его публикации 1930 г.). Нет оснований полагать, что они были известны Витгенштейну. Таким образом, Витгенштейн не был готов обсуждать с советскими учеными *конкретные* вопросы интуиционистской логики. Как явствует из изданных посмерт-

[81] Кроме Жегалкина и Варьяша Витгенштейн был *старше* всех остальных московских математиков, упомянутых в его записной книжке.

но его «Замечаний по основаниям математики», он в трактовке закона исключенного третьего навсегда оставался в рамках общих слов. Это ясно видно из следующего критического пассажа, касающегося данного закона: «Если некто устанавливает закон исключенного третьего, то он как бы предлагает вам выбирать из двух картинок, говоря, что одна из них должна соответствовать факту. А что если сомнительна сама применимость здесь данных картинок?»[82].

Что же мог извлечь Витгенштейн из доклада Брауэра? По-видимому, то, что голландский математик и мыслитель отвергал концепцию логицизма – сведения математики к формализованной логике, – у истоков которой стоял Фреге и которая в развернутом виде была представлена в работах Рассела. Для Витгенштейна открылось, что подход его философско-логических учителей – не единственно возможный, да, наверное, и не самый убедительный. А известный брауэровский тезис, согласно которому математика есть не учение, а *деяние*, шел в унисон с афоризмом 4.112 «Трактата»: «Философия не теория, а деятельность».

Здесь было о чем спорить с советскими товарищами. Ведь они – и Гливенко, и Колмогоров, и Яновская – отвергали философские основания и интуиционизма, и логицизма, признавая, однако, важность формализации логики. Они критически относились и к логическому позитивизму членов Венского кружка. Не об этих ли логико-философских направлениях спорил Витгенштейн с Яновской, когда она угощала его чаем на кухне московской коммунальной квартиры?

Мы вряд ли ошибемся, если скажем: в центре обсуждения Витгенштейна с советскими математиками были вопросы о том, что такое философия, математика и логика. Но прежде чем говорить об этом, остановимся на других персоналиях, фигурирующих в записной книжке кембриджского гостя.

И.И. Жегалкин творчески работал в математической логике, где получил интересные результаты. В данном контексте существенно, что предложенная им формализация пропозициональной логики как кольца вычетов по модулю 2 – мы имеем в виду его известную работу 1927 года – заменяла мучительные доказательства теорем пропозициональной логики в аксиоматическом исчислении «Principia mathematica» вычислениями в очень простой «арифметике четного и нечетного»[83]. Вряд ли значимость

---

[82] *А.Ф.Грязнов.* Сочинение, указанное в примеч. 2, с. 83–84.

[83] См. *С.А.Яновская.* Математика в СССР за тридцать лет. 1917–1947. М.–Л., Гостехтеоретиздат, 1948, с. 34–36; *Б.М.Шуранов.* Иван Иванович Жегалкин:

подобной «технической» работы, так же как и проведенного затем Жегалкиным исследования проблемы разрешения для исчисления (одноместных) предикатов, могла бы быть понята Витгенштейном (то же можно сказать и о работе в важной для логики теории решеток, называвшихся в то время структурами, которой тогда занимался Гливенко).

М.Я. Выгодский был участником работы по изданию на русском языке (с фундаментальными комментариями) знаменитых «Начал» Евклида. К тому времени он уже был автором публикаций по истории математики на Древнем Востоке и в Элладе, изучал развитие математической мысли в XVIII веке (Эйлер, Монж). В 1935 г. он вместе с С.А. Яновской стал руководителем научно-исследовательского семинара по истории математики. А.П. Юшкевич только начинал свой путь в математической историографии, но уже был автором оригинальных работ по истории обоснования математического анализа. Впоследствии он вырастет в специалиста мирового масштаба. Что касается Ш. Варьяша, то он читал в МГУ лекции по истории и философии механики и математики[84]. Весьма существенно, что в сферу научных интересов и Выгодского, и Юшкевича, и Варьяша входила философско-математическая проблематика.

Теперь вернемся к тому, *что могло быть* содержанием дискуссий между Витгенштейном и советскими математиками. В освещении этой темы мы поступим следующим образом: постараемся выявить те положения советской школы философско-математической мысли, которые были заведомо (или возможно) неприемлемы для Витгенштейна, и те положения витгенштейновского понимания философии и логики, которые резко отвергались в советской России.

Для советских математиков был неприемлем «логический атомизм» Витгенштейна – взгляд, будто мир состоит из не связанных друг с другом «атомарных» фактов и отвечающих им «атомарных предложений». Они не могли принять и установку Витгенштейна смотреть на мир глазами субъекта и считать «миром» то, что явлено в том языке, которым пользуется субъект. Для них, мягко говоря, выглядело странным то, что кембриджский философ всерьез рассуждает о солипсизме и утверждает, будто последний, если его строго провести, «совпадает с чистым реализмом» (афо-

---

вклад в математическую логику // Вестник Международного Славянского ун-та. Вып. 4. М., 1998 , с. 31–33..

[84] См. *Е.В.Зорина, П.В.Алексеев.* Варьяш Шандор // *П.В.Алексеев.* Философы России XIX–XX столетий. Биографии, идеи, труды. М., «Академический Проект», 2002 [за грифом «МГУ им. М.В.Ломоносова 250 лет»], с. 165.

ризм 5.64), хотя «мыслящего, представляющего субъекта не существует» (афоризм 5.631). Не менее странными в их глазах должны были казаться и рассуждения кембриджского гостя о «мистическом» как лингвистически невыразимом.

Наверняка советских математиков удивляло отношение кембриджского философа к математической логике, проникновение которой в математику он назвал «проклятием», утверждая, будто «"Математическая логика" совершенно деформировала мышление математиков и философов, объявляя поверхностное толкование форм нашего повседневного языка анализом структуры фактов. Разумеется, здесь она лишь продолжила сооружение аристотелевской логики»[85]. В нашей стране математическая логика только осваивалась (хотя в ней уже были получены важные результаты), к ней относились серьезно, никто и не думал рассматривать ее как науку, занимающуюся «анализом структуры фактов».

Столь же неприемлемым для ученых в Москве и Ленинграде был скепсис Витгенштейна относительно перспективности исследований по *основаниям* математического знания. Если в Москве или Ленинграде он развивал мысли, подобные тому, о чем он позже записал в своих «Замечаниях...», – о том, что математические проблемы «так называемых оснований в столь же малой степени лежат для нас (то есть для Втгенштейна. – *Б.Б., Л.Б.*) в основе математики, в какой нарисованная скала несет на себе нарисованную крепость»[86], – его советские слушатели могли в ответ на это только развести руками. А на парадоксальное рассуждение: «Но разве *фрегевская* логика не становится из-за противоречия непригодной для обоснования арифметики? Становится! Но кто же утверждал, что она должна быть пригодной для этой цели?!»[87] – у собеседников гостя из Кембриджа был готовый ответ: это утверждал сам Фреге, а также Рассел, исправляя его систему путем введения теории типов, да и целые поколения специалистов по основаниям математики XX века тоже.

---

[85] *Витгенштейн*, ч. II, кн.1, с 164. Это – слова из витгенштейновских «Замечаний по основаниям математики», которые он начал писать вскоре после возвращения из России, а именно в 1937 г. Можно быть уверенным, что подобные идеи бродили в его голове и когда он был в России.

[86] До Витгенштейна Герман Вейль в предисловии к своему знаменитому «Континууму» (1918) применил сходный образ -- он говорил о «деревянных подпорках», декорирующих ненадежность здания классического математического анализа. Но отбросив их, великий математик развил собственную концепцию обоснования математики – так называемый *предикативизм*. У Витгенштейна же были только общие слова...

[87] *Витгенштейн*, ч. II, кн. 1, с. 180.

Советские математики не могли также принять витгенштейновского отрицания причинности, его утверждение, будто «вне логики все случайно» (афоризм 6.3). Этот взгляд резко контрастировал с пониманием мира как объективной реальности, находящейся в развитии и подчиняющейся самым разным закономерностям, включая закон причинности, – пониманием, которого они твердо придерживались. Вполне статичному «миру» Витгенштейна они противопоставляли мир, находящийся в диалектическом развитии. Именно в этом контексте С.А. Яновская, наверное, говорила о Гегеле (что Витгенштейн воспринял как совет читать его труды); а если кембриджский гость беседовал с Варьяшом, то наверняка услышал от него нечто подобное, так как Варьяш серьезно относился к диалектической логике. Мы не говорим уже о том, что в стране, власти которой стремились все подчинить планированию, мысль Витгенштейна о том, что события будущего не могут выводиться из событий настоящего (афоризм 5.1361), что существует только *логическая* необходимость (афоризм 6.37), выглядела дикой (а в применении к советским реалиям – контрреволюционной). Можно представить себе, что чувствовали бы московские собеседники Витгенштейна, если бы он стал развивать перед ними эти свои идеи.

Вообще, если в дискуссиях с Витгенштейном затрагивались вопросы, даже косвенно связанные с официальной идеологией «текущего момента», то его советские оппоненты не могли не поеживаться. Например, Витгенштейн, как мы уже говорили, принимал взгляды О. Шпенглера, а это имя тогда было рискованно даже упоминать. Ведь толчком для известной ленинской акции по высылке из страны цвета русской культуры на двух «философских пароходах» в 1922 г. явилось издание книги, в которой русские мыслители обсуждали шпенглеровскую концепцию: именно это вывело из себя главу советского государства.

Но вернемся к чисто философским вопросам. Конечно, Витгенштейн 1935 года отличался от Витгенштейна периода создания «Логико-философского трактата». Присутствовавшее в этом сочинении противопоставление «сказывания» и «показывания» вылилось уже в более «мягкое» отношение к языку, означавшее отход от жесткого «логического атомизма». Главным предметом рассмотрений Витгенштейна становится теперь не логика и ее специфический язык, а язык естественный. Подчеркнем, однако, что основным идеям труда 1922 года Витгенштейн остался верен и в 1935 г., и позже. Поэтому диалектико-материалистические рассуждения, которые могли противопоставлять его взглядам советские оппоненты, наверняка казались ему наивными. Он, конечно, не

мог согласиться с отождествлением философии и политизированного мировоззрения Маркса – Ленина. В соответствии со своим отношением к «философским предложениям» – он считал таковые лишенными смысла – на высказываемые Яновской положения марксистской философии он должен был смотреть как на что-то бессмысленное. Для него философия была не учением, а деянием, задачей коего ялвяется, однако, всего-навсего «логическое прояснение мыслей» (афоризм 4.112). Как это далеко от того понимания философии, которое выражено, например, в знаменитых Марксовых «Тезисах о Фейербахе»!

Советским математикам и философам, которые общались с Витгенштейном, наверняка был не очень понятен тот акцент на языке, который пронизывал все философское мышление гостя из Кембриджа. Если бы Витгенштейн обсуждал логико-лингвистические проблемы, скажем, с культурологами – историками, этнографами и, особенно, лингвистами школы Н.Я.Марра, то он мог бы найти с ними определенные точки соприкосновения; во всяком случае обмен идеями был бы полезен для обеих сторон. Это особенно так, если принять во внимание ту эволюцию в интерпретации языка, которая представлена в «Голубой» и «Коричневой» книгах Витгенштейна (1933–1935). В 20–30-е годы в СССР проходила оживленная дискуссия о концепции «прелогического мышления», которую развивал французский этнолог Люсьен Леви-Брюль. Поднимавшиеся в этой дискуссии вопросы, касающиеся и культуры «примитивных» этносов, и логики их мышления, могли живо заинтересовать будущего автора «Логических исследований». Но Витгенштейн не общался с этим кругом наших отечественных специалистов.

Далее. Весьма кардинальными были различия сторон в трактовке сущности математики. В СССР тогда – и на многие десятилетия вперед – было принято определение ее как науки о «пространственных формах и количественных отношениях действительного мира», освященное авторитетом Энгельса (о котором Витгенштейн, как утверждается в воспоминаниях о нем, ничего не знал). Напомним, что современным содержанием это определение попытался наполнить А.Н. Колмогоров. С.А. Яновская, характеризуя его подход, писала: «собственным предметом математики как исторически, так и логически являются прежде всего именно пространственные формы и количественные отношения в их простейшем виде, т.е. как фигуры и числа. Все остальные пространственные формы и количественные отношения, изучаемые в математике, вырастают из этих в процессе их диалектического развития. Эта точка зрения в наиболее отчетливой форме была выражена в

статье А.Н. Колмогорова, написанной для Большой Советской энциклопедии»[88]. Хотя эта статья увидела свет уже после 1935 г., можно не сомневаться, что соответствующие воззрения вызревали у Андрея Николаевича уже тогда, когда в СССР приехал кембриджский философ.

Выше мы отмечали, какое внимание уделяла С.А.Яновская проблеме абстракции и ее роли в математическом мышлении. Витгенштейн же критиковал математическую абстракцию – «стремление к общности», или «метод унификации рассмотрения различных вопросов путем генерализирования», за то, что заключенная в этом тенденция есть, как он писал в «Голубой книге», «подлинный источник метафизики, и она ведет философа к полной темноте»[89].

Была, однако, одна тема, которая наверняка обсуждалась в беседах Витгенштейна и Яновской, – это проблема *смысла* выражений естественных и искусственных языков. Кембриджский гость, судя по всему, обратил внимание С.А. на эту проблему, причем наверняка указал на важную в этом вопросе статью Фреге «О смысле и значении». Именно тогда, по нашему мнению, Яновская осознала значимость этой проблемы и держала ее в уме в течение многих лет. От С.А. ее ученики не раз слышали предостережение: помимо противоположности «истина – ложь» имеется противоположность «осмысленное – бессмысленное», и невнимание к последней наносит вред логическому мышлению. Проблему смысла– в разных ее вариантах – она предлагала многим своим ученикам (В.К. Финну, Д.Г. Лахути, В.В. Донченко и др.), указывая на различные ее аспекты. Вместе с С.А. ее ученики осваивали и подвергали критике труд Р. Карнапа «Значение и необходимость», идейно связанный с витгенштейновским «Трактатом», но несравненно более значительный, нежели последний.

Много лет спустя С.А. приняла участие в издании русского перевода книги Карнапа, написав к ней богатое мыслями предисловие[90]. А тему кандидатской диссертации своего аспиранта Б.В. Бирюкова Софья Александровна в 1959 г. сформулирована прямо – «Проблема смысла в логике» и в качестве первого источника назвала как раз упомянутую статью Фреге… Что касается

---

[88] *С.А.Яновская.* Указ. соч., с. 13. Статья А.Н.Колмогорова «Математика» помещена в томе 38 упомянутой энциклопедии, вышедшем в 1938 г. Наиболее полное (и доступное для читателя) изложение данной концепции можно найти в статье: *А.Н.Колмогоров.* Математика // Математический энциклопедический словарь. М., «Советская энциклопедия», 1988. С. 7–38.

[89] *А.Ф.Грязнов.* Указ. соч., с. 56.

[90] *Р.Карнап.* Значение и необходимость. Исследование по семантике и модальной логике. Перев. [с англ.]. Общая редакция Д.А.Бочвара. Предисловие С.А.Яновской. М., ИЛ, 1959.

самой С.А., то фрегевскую систему обоснования арифметики она освоила более глубоко, чем Витгенштейн, и это нашло отражение в ее лекциях, а также в ряде ее философско-математических и логико-методологических докладов на научных и философских семинарах[91].

Известно, что Витгенштейн («поздний», во всяком случае) отвергал «суеверный страх и трепет перед противоречием», утверждал (правда, без какого-либо доказательства), что появление противоречия в расселовской логико-математической системе безвредно[92]. Эти мысли Витгенштейна можно было бы истолковать как предвосхищение паранепротиворечивой логики – тем более, что в «Трактате» им была высказана идея, что при уточнении понятия логического следования вместо тавтологий (то есть всегда истинных высказываний) можно использовать противоречия (высказывания, которые всегда ложны) – афоризмы 6.12, 6.1201, 6.1202). Но и здесь кембриджский философ не был новатором: как известно, система паранепротиворечивой логики уже была развита русским мыслителем Н.А.Васильевым, причем не в «разговорном жанре», а на точном логическом языке.

Вернемся, однако, к взглядам Витгенштейна на математику. Они совершенно выпадали из «материалистического» понимания этой науки. Математические предложения, утверждал Витгенштейн в своем «Трактате», не выражают никакой мысли, они псевдопредложения (афоризмы 6.2 и 6.21), а сама математика неотделима от логики, так как «математика есть логический метод» и вместе с тем «математика есть метод логики» (афоризмы 6.2 и 6.234), причем логика – «трансцендентальна», все логические выводы априорны (афоризмы 6.13 и 5.133), а предложения логики «ничего не говорят» (афоризм 5.43). Для тех, кто в те (и последующие) годы писал о кризисе «буржуазной» философии математики, высказывания, подобные тем, какие мы находим у Витгенштейна, могли лишь укреплять этот взгляд.

* * *

Обратимся снова к листкам записной книжки Витгенштейна. Когда вдумаешься в них, возникает впечатление, что 22 сентября было последним днем его пребывания в Москве, а следующие дни он был уже в Ленинграде. Но так ли это?

---

[91] Некоторые заключенные в них идеи легли в основу книги: *Б.В.Бирюков.* Крушение метафизической концепции универсальности предметной области в логике. М., «Высшая школа», 1963.

[92] Там же, с. 81, 82.

Ответ на вопрос зависит от того, в каком городе 23 числа он посетил (или собирался посетить) кого-то на частной квартире. Ибо под этим числом Витгенштейн записал: «Малые кошки 7. Haus 4. Квартира 173. Autobus № 18». Была ли тогда в Ленинграде улица «Малые кошки»? Если да, то чья это была квартира? А может быть 23 числа кембриджский гость был еще в Москве?

Первый свет на этот вопрос пролил наш петербургский коллега – профессор П.М. Колычев, докторант философского факультета Санкт-Петербургского университета. По нашей просьбе он провел в своем городе соответствующие разыскания, и их результаты сообщил нам письмом. Петр Михайлович обратился за констультацией к работникам Справочного отдела Российской библиотеки Академии наук. Были просмотрены справочные издания, относящиеся к Санкт-Петербургу – Петрограду – Ленинграду, включая 30-е годы. Улица «Малые кошки» в них обнаружена не была. Но в Москве нашлась улица «Малые кочки». Разница в называниях всего в одной букве, – пишет П.М., – близких по звучанию "ч" и "ш"» могла не улавливаться иностранцем. Ошибку Витгенштейн мог сделать, если записывал адрес со слуха.

П.М.Колычев приводит выписку из издания «Вся Москва. Адресная и справочная книга с приложением нового плана г. Москвы. 7-й год издания[93], из которой (с. 62, правый столбец) мы приводим наиболее значимые данные. «*Кочки малые* улица. От 2-го Шибаевского переулка до улицы Савельева – домовладения 5, 7, 9 и 2 – 14. Фрунзенский район». Дом № 4 на «Малых кочках», таким образом, имелся. Указано также отделение милиции 7 и проезд трамваями и автобусами (до остановок «Клиническая площадь» либо «Новодевичий монастырь»). Автобус № 18, фигурирующий в записной книжке Витгенштейна, в адресной книге этого года не значился. Но, как предположил Петр Михайлович, данный маршрут мог быть введен позже. В аналогичной адресной книге «Вся Москва» за 1936 год в разделе проезда по городу, как установил мой коллега И.П. Прядко, автобус № 18 уже указан, причем названа и остановка «Кочки малые». Что касается семерки в записи Витгенштейна, то это могло быть отделением милиции (как у иностранца, у него могли быть там какие-то дела)[94]. Таким обра-

---

[93] М.: Изд-во Мособлисполкома, 1931. Приводимые ниже сведения заимствованы из раздела VII: «Проезды в г. Москве, трамвай, автобус и такси», имеющем самостоятельную нумерацию страниц.

[94] Выражаем благодарность Петру Михайловичу Колычеву и работникам академической библиотеки, а также Игорю Петровичу Прядко, – все они помогли в разыскании нужной информации.

зом, можно считать установленным, что 23 сентября Витгенштейн был в Москве и, возможно, посещал кого-то в районе Хамовников. Но кого?

Существует гипотеза (ее высказал Н.Н. Нагорный), что по этому адресу проживала Софья Александровна Яновская. Тогда получается довольно логичная картина: Витгенштейн получает у С.А. Яновской сведения о Т.Н. Горштейн – месте ее работы и домашнем адресе, и отбыв в Ленинград ночным поездом посещает ее в городе на Неве.

Следующий день, 24 сентября, вторник, в Ленинграде, был для Витгенштейна наполнен событиями. Он записывает: «Анна М. Фишер. Ленингр[адский] Унив[ерситет]. Инст[итут] Мат[ематики] и Мех[аники]». Можно полагать, что встретиться с А.М.Фишер Витгенштейну рекомендовала Яновская. Фишер опубликовала в 1934 г. статью о философии математики Ф.Гонсета[95], которая позже вошла в упоминавшийся нами выше «Сборник статей по философии математики» 1936 года, в выпуске которого С.А. играла ведущую роль. Обращение представителя марксизма – Фишер к философским взглядам швейцарского математика Фердинанда Гонсета не было случайным. Считалось, что в его взглядах присутствуют мотивы, близкие диалектическому материализму. Гонсет выдвинул программу историко-генетического обоснования математики, которая оказала влияние на формирование «генетической эпистемологии» Жана Пиаже. Если Витгенштейн встречался с А.М.Фишер, то он наверняка услышал от нее аргументы, аналогичные тем, которые в споре с ним должна была развивать Яновская; их смысл не мог не сводиться к идее о необходимости диалектического подхода к обоснованию математики.

В тот же день, 24 сентября, Витгенштейн собирался встретиться с Т.Н.Горнштейн: в его записной книжке значится – «Татьяна Никол[аевна] Горнштейн, ул. Достоевского д. 30 кв. 24 [телефон] Б 4 52 28». Здесь перед нами возникает вопрос: была ли это *первая* встреча с Горнштейн или Витгенштейн встречался с ней еще до переезда в Москву, где-то начиная с 12 сентября. Если верно последнее, тогда это был прощальный визит перед отбытием из советской России. Но рассказ Марии Семеновны Козловой[96], беседовавшей о Витгенштене с Татьяной Николаевной, опровергает подобный взгляд.

---

[95] Под знаменем марксизма, № 5. 1934.

[96] Устное сообщение.

Витгенштейн виделя с Т.Н. всего один раз[97]. Оказывается, он без предупреждения нагрянул к ней на службу – в Ленинградское отделение Института философии комакадемии. По-видимому, встретиться с Горнштейн кембриджскому философу рекомендовала С.А. Яновская, указав, где ее можно найти (это объясняет упомянутую выше запись, которую для себя сделал Витгенштейн); Яновскую и Горнштейн связывали узы дружбы – Т.Н. называла Яновскую «Сонечка». Судя по всему, после встречи с Т.Н. в советском учреждении Витгенштейн стал ее провожать – они ехали на трамвае, и ей пришлось пригласить его домой. Татьяна Николаевна, расказывает М.С. Козлова, была этим смущена, так как они с мужем проживали в коммунальной квартире, где у них была одна комната. Витгенштейна это, надо думать, не удивило: принимавшая его в Москве Яновская тоже жила в коммуналке. Витгенштейн, который и в Кембридже жил в одной комнате, сказал Татьяне Николаевние, что «он живет лучше», и это мнение Витгенштейна Т.Н. и М.С. объясняли тем, что Витгенштейн не любил заставленных комнат (неизменного атрибтута советского коммунального бытия) – его кембриджское жилище было почти пусто, и если он дома читал лекции, то слушатели располагались на полу.

Визит Витгенштейна был несомненно событием в жизни Т.Н., так как она знала о широкой известности своего гостя, имела представление о его философских воззрениях и о взглядах членов Венского кружка, а издалека здесь не виделось различия. Что касается личности заморского гостя, то надо сказать: он произвел на Т.Н. «чарующее впечатление». Из отзывов Витгенштейна о Москве Т.Н. запомнила, что он восторгался Покровским собором (храмом Висилия Блаженного) на Красной площади.

Здесь снова возникает вопрос, сколько дней Витгенштейн пробыл в Ленинграде. Т.Н. в разговорах с М.С. Козловой категрически утверждала – один. Это, как будто, согласуется с *московским* адресом «малых кошек». Правда, тогда возникает другой вопрос: если Витгенштейн был в составе туристической группы, то неужели распорядок поездки не предусматривал хотя бы двух дней для ознакомления с великим городом? Естественно допустить, что Витгенштейн до переезда в Москву провел два-три дня в Ленинграде: должен же он был появиться в «Институте Севера»!

Татьяна Николаевна была историком науки и философии, к тому времени ей принадлежали работы, в которых критически, с марксистских позиций, рассматривался эмпириокритицизм. Кроме

---

[97] Такм образом, часто повторяемые сообщения, будто Витгенштейн встречался с Т.Н. еще до его поездки в Москву, не соответствуют действительности.

того у нее были выраженные интересы в области истории естествознания; в Комакадемии ей было присвоено звание старшего научного сотрудника по специальности «История физики». Обсуждая с Витгенштейном философские вопросы, Т.Н. наверняка подчеркивала диалектические стороны развития науки; автор работы об энгельсовском понимании диалектики природы, она не могла не спорить с некоторыми положениями, высказанными Витгенштейном в его «Трактате». Разве мог марксист принять взгляд кембриджского философа на законы достаточного основания, непрерывности и наименьшей затраты сил в природе как на «априорные прозрения возможных форм предложений науки» (афоризм 6.34)? Впрочем, у Витгенштейна были и пункты, которые сближали его воззрения с тем, что должны были считать верным и ленинградские, и московские математики и философы, и в их числе мысль, выраженная в афоризме 6.3431: «И все же, пробиваясь через логический аппарат, физические законы говорят о предметах мира», а также утверждение, что об объекте, находящемся в движении, можно сказать, что «он не существует в данном месте; изменение могло быть выражено через противоречие»[98].

После поездки в Россию

Как рассказывала Софья Александровна, узнав от Витгенштейна о его намерении остаться в Советском Союзе, чтобы «строить социализм», она высказала свое соображение (наверняка, это было сделано очень ненавязчиво), что в России «климат для него неподходящий». Это значит: понимая, сколь опасным для него было оставаться в СССР, она пыталась дать ему знать об этом.

Что стало со многими иностранными «строителями социализма» в СССР, мы теперь хорошо знаем. Но есть пример, который так и просится, чтобы его привести. Один из узников ленинградских «Крестов», проведший в этой тюрьме в 1981–1982 гг. тринадцать месяцев, рассказал, что в попавшей в его руки французской книжке из тюремной библиотеки он обнаружил две записи по-французски, датированные 20.9.36. Первая гласила: «Прочтена парижанином, заточенным по ложному обвинению в К.Р. [контрреволюционной деятельности]», вторая сообщала, что ее автор прибыл из Парижа, «чтобы работать на благо Советской Революции»[99]. Уберегла бы от подобной судьбы известность Витгенштейна как философа, останься он в «государстве рабочих и крестьян»?

---

[98] *Витгенштейн*, ч. II, кн. 1, с. 175.

[99] *Л.Самойлов.* Ад – глазами француза // Знание – сила. 1990, № 2. С. 81.

Мы думаем, что кембриджскому гостю повезло – власти не хотели возиться с «буржуазным философом» из Кембриджа. «Авансы», которые ему делали в Ленинграде и Москве, носили совершенно необязательный характер – его просто водили за нос. И Витгенштейн покинул СССР, как говорится, не солоно хлебавши. Думается, что он тогда был просто в растерянности.

Нам кажется, что некоторая растерянность проявилась и в характере его размышлений на философско-математические темы – об этом свидетельствуют опубликованные посмертно витгенштейновские «Замечания по основаниям математики», которые он начал записывать с 1937 г. В них затрагивается масса самых разнообразных тем – от теории сечений Р. Дедекинда до теоремы Гёделя о неполноте формализованной арифметики. «Замечания» пестрят фразами, заканчивающимися знаками вопроса. Витгенштейн как бы спрашивал самого себя и не всегда находил ответ на свое вопрошание. Он поднимал много тонких проблем, путь решения которых для него был далеко не всегда ясен. Как мы видели, слушатели Витгенштейна ощущали важность того, о чем говорил лектор, но не понимали, к чему он клонит.

Конечно, эти «замечания» не были предназначены их автором для публикации. Но если бы он их и подготовил для печати, то вряд ли смог бы придать им существенно большую систематичность. Ведь в Предисловии к опубликованным в 1953 г. «Философским исследованиям» он признается, что «лучшее из того, что я мог бы написать, все равно осталось бы лишь философскими заметками»[100], и что на этих «заметках» нет штемпеля, удостоверяющего его авторство[101]; цель его сочинения, пишет Витгенштейн, побудить читателя к «самостоятельному мышлению»[102]. Нам кажется, что некоторые писатели, повествующие об этом кембриджском философе, игнорируют как завет, выраженный в приведенных выше словах Витгенштейна, так и следующую выразительную характеристику двух главных его трудов. Сопоставляя «Трактат» и «Философские исследования», Г. Бергман высказал мнение, что хотя первый – «первоклассное сочинение», это вместе с тем «блестящий провал». «Философские исследования» же – это «продиктованная отчаянием реакция на относительный неуспех»

---

[100] *Витгенштейн*, ч. I, с. 77.

[101] Там же, с. 79. Эту оговорку можно понять как оправдание того, что Витгенштейн в свойственной ему манере не ссылается ни на какие философские и математико-логические источники.

[102] *Витгенштейн*, ч. I, с. 79.

работы 1921–1922 гг. Вместе с тем между обеими книгами имеется «*теснейшая связь*»[103].

Оказавшись снова на британских берегах, Витгенштейн помалкивал о своем русском вояже, что скорее всего объясняется не только скрытностью его натуры, но и тем, что он, по-видимому, чувствовал ложность положения, в котором оказался в советской России. Именно этим, как нам кажется, а не тем, будто он, как иногда пишут, не хотел распространяться о теневых сторонах жизни в «государстве рабочих и крестьян», дабы не давать пищу противникам «советов», объясняется его поведение. Это тем более убедительно, что составить хотя бы приблизительное представление о жизни в СССР за такой короткий срок у него не было никаких возможностей.

Вернувшись из советской России, он кое-что рассказал своему другу Френсису Скиннеру и попросил его передать этот его «отчет» Фане Паскаль. От нее мы узнаем, что Витгенштейна, по его словам, в советской России «хорошо приняли». Вообще же он поведал своему другу некоторые детали (а тот передал рассказ о них Ф. Паскаль, которая и включила их в свои воспоминания), выглядящие странно и в совокупности смахивающие на саморекламу. Витгенштейна, будто бы, приглашали преподавать в университетах Москвы и Ленинграда, а через С.А. Яновскую – и в Казани. Будто бы Софья Александровна встретила его удивленным возгласом: «Так это что, неужели тот самый великий Витгенштейн?!», а потом, в беседах с ним, советовала ему «читать Гегеля», в отчетах же, которые она будто бы представляла в Институт философии (и о которых нет никаких данных), сообщала, что Витгенштейн якобы интересовался диалектическим материализмом[104].

Здесь что ни тема, то вопрос. В литературе о Витгенштейне имеются, например, сообщения о том, что, отбывая в СССР, он «запасся официальными (?) письмами в институты Севера (в Ленинграде) и малых народностей (в Москве)»[105]. Какого содержания, от кого и за чьей подписью были эти письма? Представил ли Витгенштейн их в соответствующие советские учреждения и если да, то каков был ответ «советских товарищей»? С кем и о чем беседовал Витгенштейн в «Дворце труда», если он там был? Кого навещал он на улице «Кочки малые» в квартире 173 дома № 4?

Снять эти и другие неясности, касающиеся пребывания Витгенштейна в советской России, можно лишь обратившись к архи-

---

[103] *Бергман*, с. 310. Курсив наш. – *Б.Б., Л.Б.*

[104] *Шестков*, с. 155.

[105] *М.С.Козлова.* Философские искания Л. Витгенштейна // *Л. Витгенштейн*, ч. I, с. XI.

вам Министерства иностранных дел и Института философии РАН (тогда это был Институт философии Комакадемии), к архивам обоих упомянутых выше институтов малых народов и к архивам университетов обеих столиц. Помочь могут и адресные книги Москвы и Ленинграда, телефонные справочники. Но главные учреждения, где, наверное, следует искать сведения о пребывании кембриджского философа в Советском Союзе, – это архивы партийных инстанций и органов «госбезопасности», которые наверняка «курировали» необычного зарубежного гостя.

В конце концов Витгенштейн отказался от намерения переселиться в СССР, и не очень верится в то, что, переписываясь с Яновской и затрагивая, как иногда утверждают[106], тему переезда в советскую страну, он относился к этому серьезно. Иначе как понять, что менее чем через два года после возвращения из СССР он представил документы на получение английского гражданства навсегда[107]. Но пиетет перед русской культурой Витгенштейн сохранил.

Ответ на главный вопрос

Имя Людвига Витгенштейна в философских кругах ныне широко известно. М.С.Козлова, например, пишет, что это был «один из наиболее оригинальных мыслителей нашего [двадцатого] века, труды, учение которого бесспорно (!) принадлежат к числу высочайших (!) достижений мировой культуры и оказывают колоссальное влияние на проблематику и стиль философствования XX века»[108]. Однако в математической логике и философии математики, вокруг которой все время вертелась мысль этого кембриджского философа, его влияния что-то не заметно. Ни его имя, ни его труды не упоминаются в монографии С.К. Клини «Введение в метаматематику», «эталонной» для XX столетия[109]. А в фундаментальном труде по философии математики – книге А.А.Френкеля и И. Бар-Хиллела «Основания теории множеств» о Витгенштейне говорится вскользь. Что касается отечественной математической логики, то имени «кембриджского гения» нам не удалось найти ни у А.А. Маркова, ни у П.С. Новикова, ни у А.Н. Колмогорова.

---

[106] *Шестаков*, с. 156.

[107] Там же.

[108] *М.С.Козлова.* Указ. соч., с. VII.

[109] В другой книге Клини – «Математическая логика» (1967; русский перев. – (1973) имя Витгенштейна встречается только один раз: в связи с термином «тавтология», введенном в его «Трактате».

Конечно, Витгенштейн занимает определенное место в истории философской логики, главным образом как один из зачинателей так называемой аналитической (или лингвистической) философии и мыслитель, которого неизменно вспоминают, когда речь заходит о становлении логической семантики. Он действительно выступает, говоря словами В.Ф.Асмуса, автора предисловия к первому русскому переводу «Трактата», как «одно из неустранимых звеньев в развитии *логики* XX века»[110]. Тому, кто захочет оценить масштаб этого звена, можно рекомендовать известную историко-логическую книгу Вильяма и Марты Нилов[111]. Там фигура Витгенштейна занимает достаточно скромное место.

Правда, если выйти за пределы собственно логики, в*и*дение фигуры Витгенштейна укрупняется. Он оказывается тогда мыслителем, во многом побудившем западную философскую мысль обратиться к семантико-семиотическим проблемам. Именно этим объясняется его влияние на Б. Рассела, то уважение, которое к нему испытывал Ф.Рамзей, и тот побудительный толчок, который, согласно нашей гипотезе, он дал направлению мысли С.А. Яновской.

Особая тема это – Витгенштейн и Венский кружок. В родную Вену Витгенштейн возвращался неоднократно. В Вене он готовил к изданию свой «Трактат». Там же этот труд, – правда, не сразу – нашел живой отклик: члены «Венского кружка» сочли Витгенштейна «своим» (с чем он был не очень согласен).

Какова же действительная связь между кембриджским и венским стилями философствования?

Недавно вышедший русский перевод известной книги Виктора Крафта[112], с одной строны, укрепил нас в скромной оценке *научного* вклада кембриджского «гения», а с другой стороны – убедил в том, что философские идеи Витгенштейна, при всей их сбивчивости, были глубже и шире, чем у членов «Венского кружка».

Книга Крафта ясно показала, в чем проявлялось воздействие витгенштейновских мыслей на венских философов 20–30-х годов. Одной из идей, разработанных членами Венского кружка под влиянием Витгенштейна, Карфт считает идею *верификации* предложений[113]. Он рисует картину, из которой ясно, что влияние Вит-

---

[110] *В.Ф.Асмус.* «Логико-философский трактат» Л.Витгенштейна // *Трактат*, 1958, с. 7. Курсив наш. – *Б.Б., Л.Б.*

[111] *W. and M.Kneale.* The Development of Logic. Oxford, Clarendon Press, 1978.

[112] *В.Крафт.* Венский кружок. Вознакновение неопозитивизма. Глава новейшей истории философии. Перев. с англ. А.Никифорова, М., Идея-Пресс, 2003. Немецкий оригинал книги вышел в 1950 г.

[113] В книге Крафта много передержек. Он приписывает Витгенштейну формулировку положений, которые были уже высказаны другими мыслителями, иногда веками до кембриджского философа. Так, он утверждает, будто Витген-

генштейна шло по линии *философско*-логической, а не *математико*-логической мысли.

Нет спору, Витгенштейн оказал большое влияние на одно из философских сообществ Запада – то, в котором получило развитие направление, которое, внесло существенный вклад в философию языка, но, на наш взгляд, в прочих отношениях было весьма спорным. Здесь достаточно привести приводимые Крафтом слова одного из ведущих представителей венской философской школы – Морица Шлика. «Шлик, – читаем мы у Крафта, – опираясь на идеи Витгенштейна, по-новому определил задачи философии. Философия должна заниматься прояснением смысла слов и высказываний, выявлением и исключением бессмысленных выражений. Поэтому она не формулирует никаких собственных утверждений, а лишь уточняет данные ей предложения. Философия *не является системой истин* и не представляет собой какой-то особой науки, это "деятельность, связанная с определением или раскрытием смысла высказываний. Философия разъясняет предложения, наука их верифицирует. В науке речь идет об истинности высказываний, в философии – о том, как их следует понимать"[114]. Таким образом, философия не имеет собственной области исследования, это – метод, используемый *во всех науках* там, где возникает неясность. Отсюда вытекает парадоксальный результат: стремление к научности лишает философию статуса науки»[115].

штейн был первым, кто указал на «связь логики и языка», тогда как размышления на эту тему имеют длительную историю, восходящую к античным философам и средневековым схоластам. Странно выглядит утверждение Крафта, будто к Витгенштейну восходит истолкование сложных предложений как функций истинности от предложений элементарных, а также различениие экстенсиональных и интенсиональных контекстов; на деле все это было четко представлено у Фреге – в его статье «О смысле и значении» и в «Логических исследованиях». Столь же неосновательно утверждение Крафта, согласно которому Витгенштейн был первым, кто осознал «связь модальностей с логико-синтаксической формой предложений» (с. 97) – эту связь в 20-х годах видел уже К.И.Льюис, с логическим аппаратом в руках осмыслял ее О.Беккер (в известной публикации 1930 года) и четко выразил Г.Вейль в замечательной статье 1940 года – «Призрак модальности». У Витгенштейна же на данную тему были лишь ни к чему не обязывающие общие соображения.

[114] Здесь Крафт ссылается на статью: *M.Schlick.* Die Wende der Philosophie // Erkenntnis. Bd.I, 1930–1931, S. 8.

[115] *В.Крафт.* Указ. Соч., с. 199 (курсив наш. – *Б.Б., Л.Б.*). Обращаем внимание на то, что у Крафта – Шлика не сходятся концы с концами. «Раскрытие смысла высказываний», производимое философией, должно приводить к определенным суждениям, которые, однако, не подлежат оценке с точки зрения их истинности. Что же тогда дает «прояснение смысла»? – Кроме того, что-то не слышно, чтобы конкретные науки обращались к крафто-шликовской (а в

Вы, читатель, согласны с таким пониманием философии? Готовы ли признать его великим научным либо философским достижением?

Мы – нет. Конечно, логический анализ языка и построение формальных систем, служащих такому анализу, вещь важная. Тем более это так в нашу эпоху информатизации. Поэтому-то Витгенштейн, поборник логического анализа языка, занимает неотъемлемое место в истории научно-философской мысли. Только его подход к языку отличен от позитивистского и сциентистского. Мы согласны с утверждеием М.С.Козловой, что «притягивание взглядов Витгенштейна к логическму позитивизму представляется ошибочным и дезориентирующим»[116].

И здесь мы снова возвращаемся к сопоставлению Витгенштейна и Яновской. Цель, побудительный мотив изысканий Витгенштейна, пишет процитированный выше автор, составляло стремление к *ясности*, отчетливому пониманию. Но тот же мотив двигал и мыслью Софьи Александровны. Не случайно статья о Яновской, опубликованная к столетию со дня ее рождения, носит название «Жажда ясности»[117], а в другой статье о ней в качесве одной из черт научной деятельности С.А. указана – *прозрачность мысли*[118]. Но если у Яновской «жажда ясности» действительно привела к прозрачности ее мысли, то у Витгенштейна эта жажда так и осталась неудовлетворенной: смешно всерьез говорить о прозрачности мысли в его устных лекциях и письменных текстах.

В сказанном – ответ на *главный вопрос*, который выше мы сформулировали в виде альтернативы: Витгенштейн – гений или дутая величина? Наш ответ – не то и не другое. Он мыслитель, оставивший реальный след в динамике *философской* мысли, но значимость его *научного* вклада в логику и основания математики преувеличивать не следует.

исходном пункте – витгенштейновской) философии с просьбой снять возникающие в них «неясности», – они прекрасно обходятся своими силами.

[116] *Козлова*, с. XIV.

[117] Статья опубликована в журнале «Вопросы истории естествознания и техники», № 4, 1996; ее авторы – И.Г.Башмакова, С.С.Демидов и В.А.Успенский.

[118] *Бирюков – Борисова*, с. 137.

П.И.Быстров

РЕЛЕВАНТНОЕ ИСЧИСЛЕНИЕ В ФОРМЕ АНАЛИТИЧЕСКИХ ТАБЛИЦ

Abstract. *Tableaux version of the propositional relevant system is considered. It exposes certain modification of the analytic tableaux construction method similar to the approach used in Gentzen-style sequent calculus constructions with "generalized" inference rules.*

Учитывая то обстоятельство, что при формулировке правил для импликативных формул в табличных вариантах релевантных систем в любом случае приходится учитывать «состояние» таблицы на том шаге ее построения, на котором эти правила применяются, желательно использовать метод построения таких систем, основанный на определении понятия «логического пути» между вхождениями префиксированных формул в конкретную ветвь таблицы. (Важно учитывать, что в данном случае речь идет не о правильно построенных префиксированных формулах, а именно о *вхождениях* таких формул в рассматриваемую таблицу. Различие между «формулой» и «вхождением» формул легко выразить в точных определениях.)

Далее один из вариантов такого метода демонстрируется на примере построения пропозициональной релевантной системы табличного вывода $\mathbf{RS_{AT}}$. При этом предполагаются известными стандартные понятия и правила, применяемые при построении «блоковых» аналитических таблиц для конечных множеств префиксированных формул (т. е. формул с префиксами T и F) (см. [3]).

В формулировке системы $\mathbf{RS_{AT}}$ используются только префиксированные формулы и следующие понятия и определения.

Главной формулой рассматриваемого применения правила вывода называется формула, к которой применяется данное правило; *боковой формулой* рассматриваемого применения правила вывода называется любая из формул, которые получаются из главной формулы в результате применения данного правила. Например, в схеме правила построения таблицы

$$\frac{S,\ T(\alpha \supset \beta)}{S,\ F\alpha \mid S,\ T\beta}$$

формула $T(\alpha \supset \beta)$ является главной, формулы $F\alpha$ и $T\beta$ - боковыми.

Определение 1. Вхождения формул вида T(α) и F(α) в некоторую ветвь *b* аналитической таблицы **t** называются контрарной парой ветви *b* в **t**.

Определение 2. Логический путь (в ветви *b* таблицы **t**) от фиксированного вхождения формулы α в *b* к фиксированному вхождению формулы β в *b* есть такая кратчайшая конечная последовательность формул $A_1, \ldots A_n$, , что A_1 есть α, A_n есть β, и для любого n (1<i<n), (1) A_i графически совпадает с A_{i+1}, или (2) A_i графически совпадает с членом контрарной пары вида Tγ (Fγ), а A_{i+1} графически совпадает с членом контрарной пары вида F(γ) (Tγ), или (3) A_i есть боковая (главная), а A_{i+1} есть главная (боковая) формула некоторого применения правила вывода в **t**.

Часть логического пути, удовлетворяющая пункту (1), варианту пункта (3), в котором «A_i есть главная, а A_{i+1} есть боковая формула некоторого применения правила вывода», и варианту пункта (2), в котором A_i графически совпадает с членом контрарной пары вида Tγ, а A_{i+1} графически совпадает с членом контрарной пары вида F(γ), называется *нисходящим фрагментом* данного пути. Часть логического пути, удовлетворяющая пункту (1), варианту пункта (3), в котором «A_i есть боковая, а A_{i+1} есть главная формула некоторого применения правила вывода», и варианту пункта (2), в котором A_i графически совпадает с членом контрарной пары вида Fγ, а A_{i+1} графически совпадает с членом контрарной пары вида T(γ), называется *восходящим фрагментом* данного пути.

Система $\mathbf{RS_{AT}}$ задается множеством стандартных правил построения аналитических таблиц для формул, главными логическими знаками являются &, ∨ или ¬, и следующими правилами для импликативных формул:

$$\frac{S,\ T(\alpha \supset \beta)}{S,\ F\alpha \ \mid\ S,\ T\beta}\ T\supset \qquad \frac{S,\ F(\alpha \supset \beta)}{S,\ T\alpha\ ;\ S,\ F\beta}\ F\supset$$

При этом применение правила F⊃ в ветви *b* аналитической таблицы считается *корректным*, если и только если в *b* есть начинающийся с нисходящего фрагмента и содержащий по крайней мере одну контрарную пару логический путь от любого вхождения в *b* каждой формулы, являющейся элементом множества {S, Tα}, к формуле Fβ, а также есть начинающийся с восходящего фрагмента и содержащий по крайней мере одну контрарную пару логический путь от любого вхождения в *b* формулы Fβ по крайней мере к одной из формул, являющейся элементом множества {S, Tα}.

На применение правила T⊃ не накладывается никаких ограничений. В процессе построения таблиц всегда сначала применяется правило F⊃, а затем правило T⊃.

Ветвь аналитической таблицы **t** для формулы α считается замкнутой, если в ней встречаются элементарные (не содержащие логических констант) префиксированные формулы T(β) и F(β) (т.е. в эту ветвь входит по крайней мере одна контрарная пара элементарных формул). Аналитическая таблица **t** для формулы α замкнута, если замкнуты все ее ветви. Формула α *доказуема* в $\mathbf{RS}_{\mathrm{AT}}$, если можно построить замкнутую аналитическую таблицу, построение которой начинается с префиксированной формулы Fα, *и каждое применение правила F⊃ в этом построении корректно*.

Пример замкнутой аналитической таблицы, показывающий, что формула (соответствующая принципу tollendo ponens) не доказуема в $\mathbf{RS}_{\mathrm{AT}}$:

	(1) F $(((A\vee B)\& \neg A)\supset B)$		
	(2) T $((A\vee B)\& \neg A)$; FB		
	(3) T $(A\vee B)$; T$\neg A$; FB		
(3.1)	TA; T$\neg A$; FB	(3.2)	TB; T$\neg A$; FB
(3.1.1)	TA; TA; (FB)*	(3.2.1)	TB; TA; FB

Данная замкнутая таблица не является выводом формулы $((A\vee B)\& \neg A)\supset B$, так как единственное применение правила F⊃ некорректно - в левой ветви таблицы нет (оговоренного в условии корректности) логического пути от помеченного звездочкой вхождения формулы FB к вхождению формулы T$((A\vee B)\& \neg A)$.

Примечание. В работе [1] среди прочих допущена досадная опечатка «содержательного» характера. Разумеется, там приведен табличный вывод формулы, соответствующей принципу сокращения, а не принципу *tollendo ponens*. Кстати говоря, сформулированная в [1] система $\mathbf{R}_{\mathrm{AT}}$ отличается от $\mathbf{RS}_{\mathrm{AT}}$, в частности, именно тем, что во второй из них не доказуема формула любого вида, выражающая принцип *tollendo ponens*, а в первой – доказуема.

Можно показать, что система $\mathbf{RS}_{\mathrm{AT}}$ дедуктивно эквивалентна исчислению **SLR**, которое получается из исчисления **SLA** В.А.Смирнова (см. [2]) заменой схем правил заключения для отрицания на следующие схемы:

$$\to\neg\ \frac{A, \Gamma\to\Theta}{\Gamma\to\Theta, \neg A} \qquad \neg\to\ \frac{\Gamma\to\Theta, A}{\neg A, \Gamma\to\Theta},$$

добавлением правила утончения

$$\rightarrow \mathrm{w}\ \frac{\Gamma\rightarrow\Theta}{\Gamma\rightarrow\Theta, A}$$

(во всех схемах Γ - конечная, возможно, пустая, последовательность формул, а Θ - формула или пустой знак); и следующим условием корректности применения правила

$$\rightarrow\supset\ \frac{A, \Gamma\rightarrow B}{\Gamma\rightarrow A\supset B}\ :$$

применение этого правила корректно, если и только если в выводе посылки есть проходящий по крайней мере через одну основную секвенцию логический путь от любого вхождения в этот вывод каждой формулы, являющейся элементом последовательности формул A, Γ→, к формуле B, а также есть начинающийся с восходящего фрагмента и проходящий по крайней мере через одну основную секвенцию логический путь от любого вхождения в этот вывод формулы B по крайней мере к одной из формул, являющейся элементом последовательности формул A, Γ→.

Определение логического пути (в ветви секвенциального вывода) от одного вхождения формулы в секвенцию к другому вхождению формулы в секвенцию совершенно аналогично приведенному выше определению 2 для табличной системы.

ЛИТЕРАТУРА

1. *Быстров П.И.* Проблемы построения табличных вариантов модальных и релевантных систем // Труды научно-исследовательского семинара логического центра Института философии РАН. М., 2004.
2. *Смирнов В.А.* Формальный вывод и логические исчисления. М.: Наука, 1973.
3. *Smullyan R.M.* First-Order Logic. Dover Publications Inc. New York, 1995.

В.Л.Васюков

НЕ-ФРЕГЕВСКИЙ ПУТЕВОДИТЕЛЬ ПО ГУССЕРЛЕВСКИМ И МЕЙНОНГОВСКИМ ДЖУНГЛЯМ. I*

Abstract. *Early the author in his book "Formal Phenomenology" remarked that the formal phenomenology could win the recognition as a research trend if it would not be so attached to Lesniewski's systems. One of the possible way of overcoming this situation seems to be the approach based on non-fregean logics which is developed in the paper. The non-fregean version of guide to Husserl's and Meinong's Jungles allows to give a brief survey of the realm of phenomenological objects from the point of view of situational formal ontology.*

1. Введение

Завершая свою книгу «Формальная феноменология», я писал: «формальная феноменология, как новое направление исследований, возможно, получила бы большее признание, если бы не была жестко привязана к системам Лесьневского... Формальная феноменология была бы окончательно признана в принципе, в то время как ее персонажи могли бы меняться... Положительных результатов на этом пути можно добиться, если обратить внимание на феноменологические концепции Л.Витгенштейна, что приводит к обращению к семантике ситуаций, а последняя – к системам не-фрегевской логики, разработанной польским логиком Р. Сушко и модифицированной Р. Вуйцицким» [1, с.213].

В данной статье и делается первый шаг на пути разработки версии формальной феноменологии, основанной на не-фрегевской логике. Однако, чтобы избежать терминологических недоразумений, начинать приходится с определения не-фрегевской логики, поскольку в современной литературе существует несколько ее версий.

Формулировка системы не-фрегевской логики **SCI** (the Sentential Calculus with Identity) Р. Сушко выглядит следующим образом [9, s.86]. Логическими константами **SCI** будут $\neg$, $\wedge$, $\vee$, $\rightarrow$, $\leftrightarrow$, $\equiv$ (связка тождества, кореферентциальности). Список аксиом включает в себя аксиомы классической пропозициональной логики, правило *модус поненс* и следующие аксиомы (аксиомы тождества):

a1. $A \equiv A$

---

* Работа выполнена при поддержке РГНФ, грант № 03-03-00186а.

a2. $(A \equiv B) \rightarrow (\neg A \equiv \neg B)$
a3. $((A \equiv B) \wedge (C \equiv D)) \rightarrow ((A \otimes C) \equiv (B \otimes D))$ (*где* $\otimes = \wedge, \vee, \rightarrow, \leftrightarrow, \equiv$)
a4. $(A \equiv B) \rightarrow (A \leftrightarrow B)$

Р. Вуйцицкий отказывается от принятия аксиом a2 и a3, апеллируя к тому, что смысл классических логических связок определяется исключительно в терминах логических значений, ввиду чего мы не можем просто переходить от референтов простых выражений к референтам сложных выражений (как это делается в a2, a3), и тем более судить об их совпадении (кореференциальности сложных выражений), не имея в распоряжении соответствующих семантических операций (операций с ситуациями), позволяющих конструировать эти сложные объекты из простых в согласии с нашей интуицией. Его версия системы не-фрегевской логики получается добавлением к классической логике следующих аксиом [13, p.325]:

(A1) $A \equiv A$

(A2) $(A \equiv B) \rightarrow (\varphi(B) \equiv \varphi(A))$ (*где* $\varphi(A)$, $\varphi(B)$ – *любые формулы, такие, что* $\varphi(A)$ *получается из* $\varphi(B)$ *замещением некоторых вхождений* A *в* $\varphi(A)$, *на* B)

(A5) $(A \equiv A') \rightarrow (A \leftrightarrow A')$

Точно так же он отказывается принять первопорядковую нефрегевскую логику в версии Сушко, включающую в себя следующие аксиомы [9, p. 131]:

i4. $\forall x(A \equiv B) \rightarrow (\forall xA \equiv \forall xB)$
i5. $\forall x(A \equiv B) \rightarrow (\exists xA \equiv \exists xB)$

Систему первопорядковой не-фрегевской логики Р.Вуйцицкого **R-NFL** (ограниченной не-фрегевской логики – restricted non-fregean logic), свободную от этого недостатка, можно описать следующим образом.

Логическими константами **R-NFL** будут $\neg, \wedge, \vee, \rightarrow, \leftrightarrow, \equiv, \forall, \exists$. Под аксиомой будем понимать подстановочный частный случай любой из схем аксиом классической логики или любой из следующих схем:

1. $x = x$
2. $x = y \rightarrow y = x$
3. $(x = y \wedge y = z) \rightarrow (x = z)$
4. $(x_1 = y_1,\ldots,x_{s(i)} = y_{s(i)}) \rightarrow (R_i(y_1,\ldots,y_{s(i)}) \rightarrow R_i(x_1,\ldots,x_{s(i)}))$, $i = 1,\ldots,m$

A1. $A \equiv A$

A2. $(A \equiv B) \rightarrow (\varphi(B) \equiv \varphi(A))$ (*где* $\varphi(A)$, $\varphi(B)$ – *любые формулы, такие, что* $\varphi(A)$ *получается из* $\varphi(B)$ *замещением некоторых вхождений* A *в* $\varphi(A)$, *на* B)

A3. $x = y \rightarrow (A(x) \equiv A(y))$ (*где* $A(x)$, $A(y)$ – *любые формулы, такие, что* x *и* y *свободны в них и* $A(y)$ *получается из* $A(x)$ *замещением некоторых вхождений* x *в* $A(x)$ *на* y).

A4′. $(A \equiv B) \rightarrow (A \leftrightarrow B)$

Еще одну версию не-фрегевской логики можно найти у Питера Ацела (хотя он сам ее так не называет, говоря об обобщенном пропозициональном исчислении и об обобщенном исчислении предикатов) [7]. Расширяя язык классической логики с помощью двуместной связки $\equiv$ и используя понятие контекста C (это предложения, которые могут содержать нульместную связку * в дополнение к обычным логическим связкам), когда $C[A]$ означает результат подстановки A вместо всех вхождений *, мы получаем пропозициональную систему Ацела путем добавления к аксиомам и правилам классической логики следующих аксиом:

(REFL) $A \equiv A$

(INV) $(A \equiv B) \rightarrow (C[A] \leftrightarrow C[B])$

В системе Ацела также выводима формула

(TS) $(A \equiv B) \rightarrow (A \leftrightarrow B)$,

что делает эту систему внешне похожей на систему не-фрегевской логики Вуйцицкого.

То, что об этой системе можно говорить как о версии не-фрегевской логики, становится ясным из анализа исходных положений Ацела. Он исходит из критики интенсиональной семантики Р. Монтегю Дж. Билером (а также Ю. Зальтой и К.Менцелем), когда последний предлагает преодолеть недостатки концепции Монтегю с помощью «алгебраического» подхода к семантике интенсиональных логик. Данный подход подразумевает трактовку высказываний, свойств и отношений как примитивных понятий, а не как функций из возможных миров в истинностные значения. Развивая этот подход, Ацел каждому свойству P ставит в соответствие пропозициональную функцию, которая отображает каждый объект a в высказывание $\pi(P,a)$, имеющее истинностное значение. Но это очень похоже на то, как делает Вуйцицкий в [13, p. 334] для отношений, когда он определяет ситуацию как структуру $(\mathbf{P}_i,\mathbf{a},\mathbf{b},+)$ или $(\mathbf{P}_i,\mathbf{a},\mathbf{b},-)$ для отношений $\mathbf{P}_i$ и объектов $\mathbf{a},\mathbf{b}$ в универсуме модели, когда последний знак понимается как знак базисной ситуации (позитивная или негативная ситуация).

2. Не-фрегевская онтология

В дальнейшем мы будем иметь дело с системами, основанными на версии ограниченной не-фрегевской логики, предложенной Р. Вуйцицким, что не в последнюю очередь обусловлено пос-

троенной им для **R-NFL** семантикой. Кратко ее можно описать следующим образом.

Пусть $\boldsymbol{M} = (\boldsymbol{U},\boldsymbol{R}_1,\ldots,\boldsymbol{R}_n)$ будет моделью **R-NFL**, а именно, $\boldsymbol{M}$ есть реляционная структура типа $(r(1),\ldots,r(s))$. Понятие ситуации в модельной структуре $\boldsymbol{M} = (\boldsymbol{U},\boldsymbol{R}_1,\ldots,\boldsymbol{R}_n)$ описывается следующим образом:

(s1) Положим $r(0) = 2$ и обозначим через $\boldsymbol{R}_0$ отношение тождества на $\boldsymbol{U}$. Пусть $i = 0,1,\ldots,s$ и пусть $\mathbf{a}_1,\ldots,\mathbf{a}_{r(i)}\in\mathbf{U}$. Тогда $(\boldsymbol{R}_i,\mathbf{a}_1,\ldots,\mathbf{a}_{r(i)})$ и $(\mathbf{не}\text{-}\boldsymbol{R}_i,\mathbf{a}_1,\ldots,\mathbf{a}_{r(i)})$ являются элементарными ситуациями в $\boldsymbol{M}$.

(s2) Если для каждого $t\in T$ Σ_t есть непустое множество элементарных ситуаций в $\boldsymbol{M}$, то $\{\Sigma_t\colon t\in T\}$ является ситуацией в $\boldsymbol{M}$.

(s3) Если S_1 и S_2 – ситуации в $\boldsymbol{M}$, то $(=,S_1,S_2)$ и $(\neq,S_1,S_2)$ являются элементарными ситуациями в $\boldsymbol{M}$.

(s4) Ничто другое не является ни ситуацией, ни элементарной ситуацией.

Каждая (элементарная) ситуация $(\boldsymbol{R}_i,\mathbf{a}_1,\ldots,\mathbf{a}_{r(i)})$ представляет собой такую ситуацию, что $\boldsymbol{R}_i(\mathbf{a}_1,\ldots,\mathbf{a}_{r(i)})$. Аналогично ситуации $(\mathbf{не}\text{-}\boldsymbol{R}_i,\mathbf{a}_1,\ldots,\mathbf{a}_{r(i)})$, $(=,S_1,S_2)$ и $(\neq,S_1,S_2)$ суть такие ситуации, что не-$\boldsymbol{R}_i(\mathbf{a}_1,\ldots,\mathbf{a}_{r(i)})$, $S_1 = S_2$ и $S_1 \neq S_2$ соответственно. Элементарная ситуация $(\boldsymbol{R}_i,\mathbf{a}_1,\ldots,\mathbf{a}_{r(i)})$ $((\mathbf{не}\text{-}\boldsymbol{R}_i,\mathbf{a}_1,\ldots,\mathbf{a}_{r(i)})$, $(=,S_1,S_2)$, $(\neq,S_1,S_2))$ имеет место или является фактом, тогда и только тогда, когда $R_i(a_1,\ldots,a_{r(i)})$ (*не*-$R_i(a_1,\ldots,a_{r(i)})$, $S_1 = S_2$, $S_1 \neq S_2$ соответственно)*.

Элементарные ситуации и ситуации имеют различный теоретико-множественный тип (поэтому ни одна элементарная ситуация не является ситуацией в строгом смысле этого слова). Поскольку же каждая элементарная ситуация σ однозначно соответствует ситуации $\{\{\sigma\}\}$, то элементарная ситуация σ отождествляется с $\{\{\sigma\}\}$.

Далее, каждое множество элементарных ситуаций Σ однозначно определяет ситуацию $\{\Sigma\}$. Будем говорить, что $\{\Sigma\}$ имеет место, или является фактом, если фактами являются все $\sigma\in\Sigma$. По условиям (s2) и (s4) для некоторого семейства $\{\Sigma_t\colon t\in T\}$ непустых множеств элементарных ситуаций $S = \{\Sigma_t\colon t\in T\}$, где S – некоторая произвольная ситуация. Будем говорить, что ситуация S имеет место, или является фактом, если и только если существует $t\in T$, такое, что $\{\Sigma_t\}$ есть факт (т.е. S можно рассматривать как некоторый вид «онтологической» дизъюнкции конъюнкций элементарных ситуаций).

---

* Следует иметь в виду, что настоящее рассуждение ведется в метаязыке, а не в языке, что и объясняет запись (т.е. следует обращать внимание на различие между $\mathbf{a}_1,\ldots,\mathbf{a}_{(i)}$ и $a_1,\ldots,a_{(i)}$, $\boldsymbol{R}_1,\ldots,\boldsymbol{R}_s$ и $R_1,\ldots,R_s$ и т.д.).

Обозначим класс всех ситуаций из $\boldsymbol{M}$ посредством $\boldsymbol{S_M}$. Для каждого кардинального числа α $\boldsymbol{S_M}$ включает подкласс мощности α, отсюда $\boldsymbol{S_M}$ является действительным классом, а не множеством, если различать классы и множества.

Существенным моментом является то, что мы расширим наш язык за счет добавления имен $a,a_1,a_2...$ для элементов универсума $\boldsymbol{U}$ из $\boldsymbol{M}$. Сами элементы, соответствующие $a,a_1,a_2...$, будем обозначать через $\mathbf{a},\mathbf{a}_1,\mathbf{a}_2...$.

Функция D из множества всех предложений в класс всех ситуаций называется **R-NFL**-допустимой интерпретацией тогда и только тогда, когда выполняются следующие условия:

(i) $D(R_i(a_1,...,a_{(i)}))$ есть факт тогда и только тогда, когда $\boldsymbol{R_i}(\mathbf{a}_1,...,\mathbf{a}_{r(i)})$, где $i = 0,1,...,n$; $\mathbf{a}_1,...,\mathbf{a}_{r(i)} \in \boldsymbol{U}$;
(ii) $D(A \wedge B)$ есть факт тогда и только тогда, когда $D(A)$ и $D(B)$ – факты;
(iii) $D(A \vee B)$ есть факт тогда и только тогда, когда хотя бы одна из ситуаций $D(A)$ и $D(B)$ есть факт;
(iv) $D(A \rightarrow B)$ есть факт тогда и только тогда, когда неверно, что $D(A)$ – факт, а $D(B)$ не факт;
(v) $D(A \leftrightarrow B)$ есть факт тогда и только тогда, когда либо $D(A)$ и $D(B)$ – факты, либо $D(A)$ и $D(B)$ не факты;
(vi) $D(\neg A)$ есть факт тогда и только тогда, когда $D(A)$ не факт;
(vii) $D(\forall xA)$ есть факт тогда и только тогда, когда для всех $\mathbf{a} \in \boldsymbol{U}$ фактами являются $D(A(a/x))$;
(viii) $D(\exists xA)$ есть факт тогда и только тогда, когда для некоторого $\mathbf{a} \in \boldsymbol{U}$ $D(A(a/x))$ есть факт;
(ix) $D(A \equiv B)$ есть факт тогда и только тогда, когда $D(A) = D(B)$;
(x) $D(A(a/x)) = D(B(a/x))$, если $\mathbf{a} = \mathbf{b}$.

В работе «Не-фрегевская логика и Пост-Трактатная онтология» [2] я, следуя идеям Б. Вольневича, ввел в рассмотрение не-фрегевскую связку $\Rightarrow$, когда $A \Rightarrow B$ означает «A (референциально) приводит к B». При этом аксиомы, связанные со связкой тождества, преобразуются в следующие аксиомы:

A0. $A \Rightarrow A$
A1. $(A \Rightarrow B) \rightarrow (\varphi(A) \Rightarrow \varphi(B))$ (*где* $\varphi(A)$, $\varphi(B)$ - *любые формулы, такие, что* $\varphi(B)$ *получается из* $\varphi(A)$ *замещением некоторых вхождений* A *в* $\varphi(A)$, *на* B)
A3. $(B \Rightarrow A) \rightarrow (A \rightarrow B)$

Однако здесь возникают трудности с не-фрегевской аксиомой

$x = y \rightarrow (A(x) \equiv A(y))$ (*где* $A(x)$, $A(y)$ - *любые формулы, такие, что* x *и* y *свободны в них и* $A(y)$ *получается из* $A(x)$ *замещением некоторых вхождений* x *в* $A(x)$ *на* y),

поскольку равенство в левой части носит ясно выраженный симметричный характер.

Для преодоления этой трудности было предложено «расщепить» связку равенства путем введения новой связки $\sqsubseteq$ (когда $x \sqsubseteq y$ читается «x ситуационно влечет y») и следующих схем аксиом:

1. $x \sqsubseteq x$
2. $(x \sqsubseteq y \wedge y \sqsubseteq z) \rightarrow (x \sqsubseteq z)$
3. $(x_1 \sqsubseteq y_1,...,x_{s(i)} \sqsubseteq y_{s(i)}) \rightarrow (R_i(y_1,...,y_{s(i)}) \rightarrow R_i(x_1,...,x_{s(i)}))$, $i = 1,...,m$

A2. $x \sqsubseteq y \rightarrow (A(x) \Rightarrow A(y))$ (*где* $A(x)$, $A(y)$ - *любые формулы, такие, что* x *и* y *свободны в них и* $A(y)$ *получается из* $A(x)$ *замещением некоторых вхождений* x *в* $A(x)$ *на* y).

Что означает связь ситуаций по отношению вовлечения с точки зрения ситуационной семантики? Согласно [4, с. 12] каждое множество (элементарных) ситуаций Σ однозначно определяет ситуацию $\{\Sigma\}$. В этом случае можно отождествить наше отношение вовлечения с теоретико-множественным отношением принадлежности, что приводит к следующему условию интерпретации:

(ix′) $D(A \Rightarrow B)$ есть факт тогда и только тогда, когда $D(A) \in D(B)$,

означающему, что $D(B)$ есть $\{\Sigma\}$ для некоторого множества ситуаций Σ, элементом которого является $D(A)$. Помимо этого мы должны учесть теперь нестандартный характер связки $<$, заменившей обычное равенство. Введение подобной связки приводит к требованию упорядоченности универсума модели и к условию: если $x \leq y$ и $y \leq x$, то $x = y$. И, как следствие, это требует от нас замены пункта (s3) на

(s3′) Если S_1 и S_2 – ситуации в ***M***, то $(\leq, S_1, S_2)$ и (**не-**$\leq, S_1, S_2$) являются элементарными ситуациями в ***M***.

Здесь возникает вопрос об интуитивном смысле подобного упорядочения. Можно прибегнуть к экспликации мейнонговского типа: связывать с каждым элементом универсума множество ситуаций, в которых он «участвует». Это предполагает существование функции SD^{-1}:**U**$\rightarrow$***P***(**S**) из универсума во множество подмножеств ситуаций. Тогда можно потребовать, чтобы $x \leq y$ влекло $SD^{-1}(x) \in SD^{-1}(y)$, и наоборот.

Заметим, что в не-фрегевской логике принцип тождества неразличимых Лейбница [4, с. 22] выглядит как

$(a = b) \leftrightarrow \forall\varphi(\varphi(a) \equiv \varphi(b))$.

Если его «расщепленный» вариант сформулировать в виде

$(a \sqsubseteq b) \leftrightarrow \forall\varphi(\varphi(b) \Rightarrow \varphi(a))$,

то становится понятным смысл введения функции SD^{-1}: от нас требуется, чтобы все ситуации, в которых встречается a, были вовлечены в ситуации, в которых встречается b.

Равенство = можно ввести по определению как

$x = y \leftrightarrow (x \sqsubseteq y \wedge y \sqsubseteq x)$,

а тождество ≡ (кореференциальность) как

$B \equiv A \leftrightarrow ((B \Rightarrow A) \wedge (A \Rightarrow B))$.

R-NFL-допустимая интерпретация становится **R-NFO**-допустимой интерпретацией при добавлении следующего условия:

(xi) $D(x \sqsubseteq y)$ есть факт тогда и только тогда, когда $SD^{-1}(x) \in SD^{-1}(y)$.

В полученной подобным образом формулировке системы **R-NFL** можно получить алгебру имен, если воспользоваться следующими определениями:

$x \sqsubseteq y + z \equiv (x \sqsubseteq y \vee x \sqsubseteq z)$
$x \sqsubseteq y \circ z \equiv (x \sqsubseteq y \wedge x \sqsubseteq z)$
$x \sqsubseteq y' \equiv \neg(x \sqsubseteq y)$
$x \sqsubseteq 1 \equiv x \sqsubseteq y+y'$
$x \sqsubseteq 0 \equiv x \sqsubseteq x \wedge \neg(x \sqsubseteq x)$

Возможные прочтения этих определений выглядят следующим образом:

x встречается в ситуациях, где встречаются y или z,
x ситуационно влечет и y и z,
x ситуационно не влечет y,
x встречается в возможном мире,
x есть пустая ситуация.

Однако сразу же заметим, что подобная алгебра имен не будет являться булевой алгеброй. В этом можно убедиться, если вспомнить, что наши ситуации образуют транзитивное нефундированное множество (согласно описанию модели для **R-NFL**), а упорядочение по (xi) задается отношением принадлежности в подобном множестве (в этом как раз и состоит одно из главных различий между версиями Сушко и Вуйцицкого).

В [3] указывалось на то обстоятельство, что во всех этих построениях мы имели дело с ограниченной не-фрегевской логикой. Ограниченность здесь понимается в том смысле, что неограниченная не-фрегевская логика может быть описана как расшире-

ние исчисления предикатов с равенством PCI, получающееся добавлением связки тождества к PCI добавлением к PCI переменных, пробегающих по ситуациям, и некоторых операторов (в частности, кванторов), связывающих эти переменные. Р. Вуйцицкий в связи с этим в [4] замечает, что в этом случае не-фрегевская логика становится расширением как PCI, так и прототетики Лесьневского.

Однако обратим внимание на то, что при добавлении переменных, пробегающих по ситуациям, мы фактически получаем систему с более чем одной базисной семантической категорией, что равносильно переходу от прототетики к системе онтологии. Тогда ситуация с введением связки становится технически более прозрачной.

Во-первых, в онтологии Лесьневского имеются два тождества: экстенсиональное тождество и собственно тождество, вводимые следующими определениями:

D1. $X =_Z Y \leftrightarrow \forall x(x\varepsilon X \leftrightarrow x\varepsilon Y)$
D2. $x = y \leftrightarrow x\varepsilon y \wedge y\varepsilon x$

Во-вторых, следует принять во внимание, что в неэлементарной онтологии Лесьневского (т.е. в полной системе онтологии) эпсилон отнюдь не понимается исключительно как функтор, образующий высказывание из двух аргументов, являющихся именами, т.е. его категория, или тип, не обязана быть $(s;n,n)$ (см. [8, p. 273]). Это приводит к следующей пропозициональной версии D1 и D2:

D3. $\Phi =_Z \Psi \leftrightarrow \forall\varphi(\varphi\varepsilon\Phi \leftrightarrow \varphi\varepsilon\Psi)$
D4. $\varphi = \psi \leftrightarrow \varphi\varepsilon\psi \wedge \psi\varepsilon\varphi$

Возникающая параллель между ограниченной первопорядковой не-фрегевской логикой и онтологией Лесьневского может быть представлена в форме единообразного перевода *tr* выражений со связками кореференциальности и равенства, основывающегося на следующих определениях:

DFL1. $tr(A \equiv B) = A =_Z B$
DFL2. $tr(x = y) = x =_Z y$

Если теперь перейти к не-фрегевской логике со связками референциального вовлечения $\Rightarrow$ и ситуационного вовлечения $<$, то в этом случае следует воспользоваться силлогистическим функтором a в онтологии Лесьневского, вводимого определениями

D5. $XaY \leftrightarrow \forall x(x\varepsilon X \rightarrow x\varepsilon Y)$
D6. $\Phi a\Psi \leftrightarrow \forall\varphi(\varphi\varepsilon\Phi \rightarrow \varphi\varepsilon\Psi)$

Требующийся в этом случае перевод будет уже основываться на следующих определениях:

DFL3. $tr(A \Rightarrow B) = AaB$
DFL4. $tr(x \sqsubseteq y) = x\ a\ y$

Именно в этом смысле можно говорить о том, что система нефрегевской логики **R-NFL** со связками референциального вовлечения $\Rightarrow$ и ситуационного вовлечения $\sqsubseteq$, которую в дальнейшем мы будем обозначать **R-NFO**, представляет собой систему *не-фрегевской онтологии.*

В рамках подобной онтологии понятия существования и объекта можно ввести (по аналогии с системой Лесьневского) следующим образом:

$Ex(x) \equiv \exists y(y \sqsubseteq x)$,

$Ob(x) \equiv \exists y(x \sqsubseteq y)$,

т.е. индивид x существует, если имеется индивид y, ситуационно влекущий x, и x есть (действительный) объект, если имеется хотя бы один объект y, который всегда возникает в ситуации, в которой принимает участие x.

3. Исследуя гуссерлевские джунгли: не-фрегевские ноэмы и модальные объекты

Мною в [1] были предложены расширения системы онтологии Лесьневского, позволяющие рассматривать интенциональные объекты, на которые направлено наше сознание. Оставляя в стороне детали, можно сказать, что формальная феноменология позволяет рассматривать и использовать предметную область, образованную не только объектами реальности, но и мыслимыми, интенциональными объектами, представлениями реальных объектов.

Особенностью такого рода объектов является, прежде всего, их зависимость от реальных объектов – они существуют как некие производные от реальных объектов. Чтобы учесть эту возможность, например, в случае гуссерлевской феноменологии, вводится понятие объектной, интенциональной модальности. Основные моменты подобного формального подхода выглядят следующим образом:

1) существуют интенциональные объекты;
2) они существуют не как разновидности реальных объектов и не поддаются классификации наравне с последними;
3) природу интенциональных объектов можно описать с помощью понятий ноэзиса и ноэмы;

4) существование интенциональных объектов может быть описано в рамках (аномально) монистической онтологии.

Последнее означает, что интенциональные объекты возникают на основании особого рода связей между реальными объектами, и не существуют независимо от них (отношений).

Принимая, что для каждого интенционального восприятия существует идеальная коррелятивная ноэма или интенциональный объект как таковой, не тождественные с реальным объектом, язык Онтологии Лесьневского расширяется с помощью оператора «ноэзиса» $\langle\text{--}\rangle$ для передачи перехода от объекта к его ноэме. Связь между объектом и ноэмой некоторого объекта формально может быть выражена как

$x\varepsilon\langle a\rangle$,

т.е. x есть ноэма объекта a. Двойственным образом можно ввести понятие интенционального объекта некоторого объекта как

$x\varepsilon[1] \equiv x\varepsilon\langle a'\rangle'$,

где $x\varepsilon X' \equiv x\varepsilon x \wedge \neg(x\varepsilon X)$ (булево дополнение в алгебре имен онтологии Лесьневского).

В каком смысле интенциональные объекты существуют, и в каком смысле они являются объектами? Ответ на этот вопрос дается с помощью определений

$Ex_{Int}(X) \leftrightarrow \exists x(x\varepsilon\langle X\rangle)$

$x\varepsilon N \leftrightarrow \exists X(x\varepsilon\langle X\rangle)$,

где N есть термин, обозначающий класс ноэм объектов. При этом следует учесть, что класс интенциональных объектов и класс действительных объектов не пресекаются, т.е. $N \cap V = \varnothing$.

Не-фрегевская онтология **R-NFO** также позволяет на ее основе получить системы формальной феноменологии, однако концептуальное и семантическое (как, впрочем, и синтаксическое) содержание этих систем существенно отличается от формальной феноменологии как интенционального расширения системы онтологии Лесьневского. Однако сама идея рассматриваемого подхода срабатывает и здесь.

Чисто формально нетрудно расширить язык не-фрегевской онтологии за счет интенциональных операторов. Так, понятие ноэзиса было бы передано с помощью выражений типа $x \sqsubseteq \langle y\rangle$, если бы мы ввели оператор ноэмы $\langle -\rangle$ в язык **R-NFO**. О существовании интенциональных объектов в этом случае можно говорить, используя определения

$Ex_{Int}(x) \equiv \exists y(y \sqsubseteq \langle x\rangle)$

$Ob_{Int}(x) \equiv \exists y(x \sqsubseteq \langle y\rangle)$,

т.е. индивид x существует, если имеется индивид y, ситуационно влекущий ноэму x, и x есть интенциональный объект, если имеется

хотя бы один объект y, ноэма которого всегда возникает в ситуации, в которой принимает участие x.

Однако как понимать не-фрегевские интенциональные объекты? Дело в том, что мы отождествляем с каждым объектом множество ситуаций, в которых он фигурирует. Чтобы соотнести это с понятием интенциональности, следует, по-видимому, постулировать наличие некоторого интенционального отношения на множестве ситуаций, которое позволяет соотнести с интенциональным состоянием сознания множество ситуаций, связанных с данной ситуацией этим интенциональным отношением. Отсюда ситуация «быть интенциональным объектом» для некоторого объекта означает совпадение этой ситуации с ситуацией вовлечения каким-нибудь объектом его ноэмы, которая, в свою очередь, определяется тем, что рассматриваемый объект хотя бы однажды встречался в интенциональном состоянии сознания.

Нечто подобное можно найти и у Гуссерля, если говорить не о ситуациях, а о восприятиях (ситуаций). Гуссерль указывает, что любое отдельное восприятие несет с собой некоторое предвидение, отсылающее к связи восприятий. Ряд восприятий объединяется в единую связь опыта, а мир дан нам в таких рядах восприятий. Указанная связь опыта создает наше представление о мире и реальности.

Гуссерль связывает с этой структурой интенциональной выводимости понятие горизонтной интенциональности и горизонтного сознания. П. Прехтль в связи с этим пишет: «Горизонтная интенциональность обнаруживается в соединении актуального восприятия и антиципации восприятия. Гуссерль разграничивает внутренний и внешний горизонты. Термином “внутренний горизонт” он указывает на то, что антиципация естественным образом подчинена смысловому измерению, связанному с воспринимаемым предметом... Внешний горизонт воспринимающего сознания учитывает то обстоятельство, что восприятие не ограничивается одним объектом, а включает в себя все пространство, как поле действительных, возможных и пока неизвестных предметов... К любому восприятию принадлежит антиципация возможностей, т.е “внешний пустой горизонт”... Эти неявные допущения... в дальнейшей последовательности восприятий могут стать эксплицитно созерцаемыми и понятными в качестве дальнейших возможностей опыта» [6, с. 46-47].

Семантика «гуссерлевской» версии лесьневскианской формальной феноменологии в [1] была определена на основе семантики, разработанной для онтологии Лесьневского с помощью стандартных методов З. Стахняком [12], следующим образом. Ядро

модели составляет атомная алгебра, на которой интерпретируются индивиды, при этом эпсилон-символ интерпретируется с помощью отношения частичного порядка. Все предикаты и функторы интерпретируются с помощью множества функций и отношений, заданных на данной булевой алгебре. Чтобы интерпретировать объектные функторы, передающие понятие ноэмы и интенционального объекта, ядро модели меняется - вместо атомной булевой алгебры рассматривается модальная алгебра, когда модальные операторы сопоставляются операторам ноэзиса и интенционального объекта. Можно стандартным образом перейти от модальной алгебры к модельной структуре, где универсум фрейма состоит из ультрафильтров, т.е. из максимальных последовательностей элементов, замкнутых относительно булевых операций и не содержащих наименьшего элемента. В этом случае ультрафильтры ассоциируются с интенциональным состояниями сознания, когда в каждом из состояний луч сознания направлен на определенное множество объектов. Ноэма интерпретируется в этом случае с помощью утверждения о наличии интенционального объекта на основании того, что ее прототип присутствовал в каком-то из интенциональных состояний сознания, доступном относительно данного состояния.

Возвращаясь к не-фрегевской онтологии, заметим, что понятие модальности в не-фрегевской онтологии имеет совершенно иной характер, связанный с ее ситуационной природой. Модальность в системах Сушко можно, например, определить следующим образом:

$\Box p \equiv (p \equiv 1)$

$\Diamond p \equiv (p \equiv 0)$,

где 0 и 1 являются пропозициональными константами. Но о какой модальности в данном случае идет речь? Что касается модальности у Витгенштейна (коль скоро, как известно, Сушко при построении не-фрегевской логики, ориентировался на ситуационную онтологию «Логико-философского трактата»), то Е.Пежановский утверждает, что Витгенштейн имеет в виду специальный вид модальности – не логическую, а онтологическую модальность, когда возможность означает возможность конструирования одной ситуации из другой. Витгенштейновская формальная возможность может быть введена как онтологическая модальность $\boldsymbol{MP}(x,y)$, т.е. как специфическое бинарное отношение, выражающее фундаментальную связь «x делает возможным y». Аксиома, характеризующая подобную связь, выглядит следующим образом:

$\boldsymbol{MP}(x,y) \leftrightarrow y \in \sigma(x)$ (*то, что получено из составляющих x, является возможным благодаря x*)

Здесь $\sigma(x)$ означает совокупность объектов, получаемых путем составления (синтеза) объектов из совокупности объектов, получаемых путем расчленения (анализа) x, более широко – из элементов, образующих y (см. [10]).

Таким образом, если принять во внимание, что в семантике нефрегевской логики речь идет не просто о ситуациях, но также и о фактах, то можно ввести бинарное отношение между ситуациями «факт α возможен благодаря факту β» (см. [2]). Еще один важный момент состоит в том, что в семантике не-фрегевской логики предполагается, что ситуации представляют собой транзитивные множества, т.е. что множество ситуаций также будет представлять собой ситуацию. Как мы помним, множество ситуаций упорядочено по включению (а возможные миры представляют собой просто максимально большие ситуации относительно этого упорядочения), объекты же определяются совокупностью ситуаций, в которых они участвуют.

Таким образом, семантическое условие, которое необходимо добавить к условиям интерпретации, должно выглядеть следующим образом:

(xi) $D(x \sqsubseteq \langle y\rangle)$ есть факт тогда и только тогда, когда имеет место $\boldsymbol{MP}(SD^{-1}(y), SD^{-1}(\langle y\rangle))$, и $SD^{-1}(x) \in SD^{-1}(\langle y\rangle)$ (*т.е. фактичность* $SD^{-1}(y)$ *делает возможным факт* $SD^{-1}(\langle y\rangle)$ и $x \leq \langle y\rangle$).

Стандартным образом можно определить оператор «интенционального объекта для некоторого объекта» с помощью определения типа $x \sqsubseteq [1] \equiv x \sqsubseteq \langle a'\rangle'$.

Следуя построению гуссерлевской версии лесьневскианской формальной феноменологии в [1] и эксплуатируя аналогию с модальными логическими системами, можно рассмотреть теперь следующий список интенциональных схем аксиом и правил:

MA1. $x \sqsubseteq [y \supset z] \equiv (x \sqsubseteq [y] \supset x \sqsubseteq [z])$,
MA2. $x \sqsubseteq [y] \Rightarrow x \sqsubseteq \langle y\rangle$,
MA3. $x \sqsubseteq [y] \Rightarrow x \sqsubseteq y$
MR1. $\dfrac{x \sqsubseteq y \Rightarrow x \sqsubseteq z}{x \sqsubseteq [y] \Rightarrow x \sqsubseteq [z]}$,

где $y \supset z$ дается определением

$x \sqsubseteq y \supset z \equiv x \sqsubseteq y' + z$,

а затем рассмотреть следующие интенциональные расширения **R-NFO**:

R-NFO-C2 = {**M**A0, MA1; MR1}:
R-NFO-D2 = {**M**A0, MA1,MA2; MR1}:

R-NFO-E2 = {MA0, MA1,MA3; R1},

где **M**A0 означает аксиоматику **R-NFO**.

Выбор именно этих комбинаций аксиом и правил не случаен. В статье Е. Леммона, откуда взят список пропозициональных модальных аксиом и правил, послуживших прототипом для построения «интенциональных» онтологических аксиом и правил, говорится: «нужно напомнить, что в слабых системах C2, D2 и E2 нет теорем вида $\Box A$, так что они совместимы с добавлением $\Diamond A$ как схемы аксиом: с точки зрения интерпретации это означает, что мы должны допускать возможность миров, в которых любое утверждение (в том числе противоречие) оказывается возможным и Q воспринимается как множество таких миров» [5, с.113]. В нашем случае это означает, что системы **R-NFO-C2**, **R-NFO-D2** и **R-NFO-E2** совместимы с добавлением $x \sqsubseteq \langle y \rangle$. Семантически это означает, что относительно фактичности ситуаций $SD^{-1}(y)$ мы ничего не можем сказать определенного. Последнее означает, в свою очередь, что мы не знаем, существует ли объект y вообще.

Важность этого момента проистекает для нас из того, что, согласно Гуссерлю, «речь, как о существовании, так и не существовании в отношении интенциональных предметов лишена смысла» [6, с. 28]. Разъясняя это на примере римского бога Юпитера, Гуссерль указывает, что если я представляю себе бога Юпитера, то он со всеми своими атрибутами является представленным предметом. Существует ли он фактически или нет, может ли быть обнаружен во внешней реальности или, в случае Юпитера нет, для сознания в структурном отношении ничего не меняется: «Предмет подразумевается, в случае Юпитера – всего лишь подразумевается, т.к. в реальности ему нет соответствия. В случае же Кёльнского собора как интенционального предмета для данного “мнения” (Meinung) можно было бы предоставить также и реальный предмет в действительности» [6, с. 29].

Таким образом, аналогично тому, как в логике говорится о Q как о множестве «невозможных возможных миров», у нас возникает множество «невозможных возможных ситуаций» или множество «невозможных возможных интенциональных состояний», т.е. чисто интенциональных состояний, когда мы не в состоянии судить о реальном существовании предметов, на которое направлено наше внимание. Технически же это означает, что в случае гуссерлевской версии не-фрегевской формальной феноменологии выбор интенциональных аксиом обусловлен обязательным требованием отсутствия в нашей аксиоматике аксиом типа $x \sqsubseteq [y]$.

В рамках не-фрегевской формальной феноменологии возникает возможность описания того, что можно было бы назвать «феноменологизацией» ситуаций. Учитывая то, что с индивидными переменными у нас связаны ситуации (множества ситуаций), в которые они входят, то естественно связать с интенциональными объектами «интенциональные» ситуации. Это можно понимать как некую «интенционализацию» ситуаций, а с другой стороны, интенциональность подобных ситуаций подразумевает специфический интенциональный способ их восприятия.

Введем оператор интенционализации ситуации, используя следующее определение:

MD1. $[R_i(x_1,...,x_{s(i)})] =_{\text{def}} R_i([\mathrm{x}_1],...,[\mathrm{x}_{s(i)}])$,

где $[R_i(x_1,...,x_{s(i)})]$ означает интенциональную ситуацию. Точно так же можно ввести и понятие ноэзиса ситуации, воспользовавшись определением

MD2. $\langle R_i(x_1,...,x_{s(i)})\rangle =_{\text{def}} R_i(\langle \mathrm{x}_1\rangle,...,\langle \mathrm{x}_{s(i)}\rangle)$,

где $\langle R_i(x_1,...,x_{s(i)})\rangle$ означает ноэму ситуации. В зависимости от принимаемых интенциональных аксиом для интенциональных и ноэматических ситуаций будут справедливы те или иные утверждения об их связи. Так, например, в рамках **R-NFO-D2** доказуемо

$x \sqsubseteq y \Rightarrow x \sqsubseteq \langle y\rangle$,

откуда получаем

$R_i(x_1,...,x_{s(i)}) \rightarrow \langle R_i(x_1,...,x_{s(i)})\rangle$

(по $x \sqsubseteq x$ и $(x_1 \sqsubseteq y_1,...,x_{s(i)} \sqsubseteq y_{s(i)}) \rightarrow (R_i(y_1,...,y_{s(i)}) \rightarrow R_i(x_1,...,x_{s(i)}))$, $i = 1,...,m$), что означает, что возникновение ситуация влечет за собой возникновение ноэмы этой ситуации.

Определения MD1 и MD2 приводят также к существованию «неполных» интенциональных и ноэматических ситуаций, когда только часть переменных является ноэмами или интенциональными объектами, поскольку у нас возможны ситуации, соответствующие $R_i([\mathrm{x}_1],...,\mathrm{x}_{s(i)})$ и $R_i(\langle \mathrm{x}_1\rangle,...,\mathrm{x}_{s(i)})$. Это позволяет говорить о степени интенционального «наполнения» ситуаций.

4. Не-фрегевская карта мейнонговских джунглей

Как уже констатировалось в [1, с. 83], между гуссерлевскими и мейнонговскими джунглями отсутствует четкая граница. «Ноэмы» с точки зрения Мейнонга будут несуществующими (неполными) объектами, поскольку они не имеют определенного расположения в пространстве и/или времени. Они представляют собой абстракт-

ные объекты, или, скорее, объекты, обладающие некоторым иным видом существования. Если же учесть мейнонговское разделение подобных не-сущностей на логически возможные (*possibilia*) и логические невозможные (*impossibilia*), то для их учета нам потребуется модальное расширение не-фрегевской логики.

Однако, как уже говорилось выше, модальность в не-фрегевской логике понимается онтологически, когда возможность означает возможность конструирования одной ситуации из другой. Как указывалось в [2, с. 134], семантическое условие, которое необходимо добавить к условиям интерпретации, должно выглядеть следующим образом:

(xii) $D(\Diamond A)$ есть факт тогда и только тогда, когда $D(A)$ есть факт и имеет место $\boldsymbol{MP}(D(A), D(\Diamond A))$ (*то есть, фактичность* $D(A)$ *делает возможным факт* $D(\Diamond A)$).

Если обозначить как **MR-NFL** *модальную ограниченную не-фрегевскую логику*, которая получается за счет добавления модальных аксиом к логике **R-NFL**, то система **MR-NFF** *модальной не-фрегевской формальной феноменологии* получается добавлением к **MR-NFL** аксиом и правил не-фрегевской онтологии. При этом следует учесть, что нам требуется слабая модальная версия **MR-NFL**, т.е. полученная добавлением модальных аксиом и правил только для систем типа C2, D2 и E2 из леммоновского списка, поскольку нам требуется существование «невозможных возможных ситуаций», что налагает свой отпечаток на модализацию **R-NFL**.

Не-фрегевские определения *possibilia* и *impossibilia* в рамках **MR-NFF** выглядят теперь следующим образом:

$Pos(x) = \Diamond Ob_{Int}(x) \equiv \Diamond \exists y(x \sqsubseteq \langle y \rangle)$
$ImPos(x) = \neg\Diamond Ob_{Int}(x) \equiv \neg\Diamond \exists y(x \sqsubseteq \langle y \rangle)$.

Дальнейшее продвижение в исследовании мейнонговских джунглей, как и в лесьневскианском случае, связано теперь с семантикой возможных миров, но не с бинарным, а тернарным отношением достижимости. Эта конструкция потребуется нам для интерпретации в рамках не-фрегевской феноменологии *Sosein*-высказываний (*Sosein* означает «бытие каким-то»). Согласно Мейнонгу, высказывании типа «Гора, придуманная мной, – золотая» являются *Sosein*-высказываниями ввиду того, что несмотря на истинность такого высказывания, мы не можем из него заключить «Существует x, такой, что я думаю о x и он золотой». Согласно Р.

Роутли из *Sosein*-высказываний вообще не следует, что вещи, о которых мы говорим, существует [11, p. 27]. Поэтому в [1] было предложено истолковывать *Sosein*-высказывания с помощью тернарного отношения между тремя объектами, не пытаясь прояснить вопрос, являются ли они существующими или несуществующими сущностями. В отношении каждого из этих объектов предполагается, что они принадлежат различным возможным мирам, все их связи зависят от некоторого тернарного отношения достижимости между этими мирами. В случае не-фрегевской онтологии мы говорим не о возможных мирах, но о ситуациях, связанных между собой тернарным, а не бинарным отношением «совозможности».

Как и в случае «гуссерлианского» расширения не-фрегевской онтологии для получения тернарной ситуационной семантики (т.е. семантики с тернарным, а не бинарным отношением на множестве ситуаций) нам требуется получить специфическую алгебру имен в рамках **MR-NFF**. Нам нужно получить структуру так называемого моноида де Моргана, которая определяет семантику релевантной системы **R** и которая преобразуется в семантику с тернарным отношением достижимости.

С этой целью можно ввести аксиоматически в алгебру имен дополнительную операцию $\otimes$, которая создает структуру коммутативной полугруппы. Кроме этого, можно ввести еще резидуальную операцию $\Rightarrow$ по отношению к $\otimes$, т.е. мы имеем $a \otimes b \sqsubseteq c$ тогда и только тогда, когда $a \sqsubseteq b \Rightarrow c$. Таким образом, следуя подходу лесьневскианской феноменологии, помимо расширения языка за счет операций $\otimes$ и $\Rightarrow$, мы должны были бы добавить к **MR-NFF** следующее определение и схемы аксиом:

DRx1. $x \sqsubseteq \mathbb{I} \equiv (x \sqsubseteq x \wedge \forall y(y = x \otimes y))$
ARx1. $x \sqsubseteq a \otimes (b + c) \equiv x \sqsubseteq (a \otimes b) + (a \otimes c)$
ARx2. $((a \otimes b) + c = c) \equiv (a + (b \Rightarrow c) = b \Rightarrow c)$
ARx3. $x \sqsubseteq a \otimes b \equiv x \sqsubseteq b \otimes a$
ARx4. $x \sqsubseteq a \otimes (b \otimes c) \equiv x \sqsubseteq (a \otimes b) \otimes c$
ARx5. $a + a^2 = a^2$,

где a^2 означает $a \otimes a$. Однако, как уже было замечено ранее, алгебра имен не является булевой алгеброй ввиду специфического характера множества ситуаций. По этой же причине мы не получаем моноид де Моргана, что требует дополнительного дальнейшего исследования.

Тем не менее, можно попытаться ввести понятие *Sosein*-объекта с помощью определения следующего вида:

$SoseinOb(x) \equiv \exists y,z(x \sqsubseteq y \otimes z)$.

И в этом случае мы, как и в лесневскианской феноменологии, приходим к интерпретации мейнонговской доктрины *Außersein* (внебытия), рассматривая определение бытия сущим в виде

$SoseinEx(x) \equiv \exists y,z\ (y \otimes z \sqsubseteq x)$.

Это определение можно понимать как дополнительный вид существования по отношению к существованию, определяемому с помощью предиката *Ex*. Тем самым мы имеем возможность получения кроме стандартной формулировки обычного несуществования объекта

$\neg Ex(x)$

формулировки еще одного вида несуществования как

$\neg SoseinEx(x)$.

Правда, по мнению Роутли, такого рода интерпретация будет ложной [11, p. 5]. По его мнению, речь идет о полном отсутствии бытия некоторого рода предметов, типа «круглого квадрата». В то же время Мейнонг различает еще *Nichtsosein* (небытия-таким-то, присутствие противоположного свойства) и *das Nichtsein eines Sosein* (небытия-бытия-каким-то). Роутли [11, p. 89] расценивает контраст между этими понятиями как различие между «у *A* отсутствует *B*» (т.е. «*A* не имеет *B*») и «это не так, что *A* имеет *B*».

Чтобы интерпретировать эти понятия, введем, как и в [1], еще и релевантное отрицание *, наличие которого в релевантной логике приводит к структуре коммутативного негативно-импликативного группоида. Для этого нам понадобятся дополнительные схемы аксиом вида:

ARx6. $x \sqsubseteq (a \Rightarrow b^* \otimes b) \Rightarrow x \sqsubseteq a^*$

ARx7. $x \sqsubseteq a^{**} \equiv x \sqsubseteq a$

ARx8. $x \sqsubseteq (a \Rightarrow a^*) \Rightarrow x \sqsubseteq a^*$

С учетом этого нового, «релевантного» отрицания *Nichtsosein* и *das Nichtsein eines Sosein* могут быть переданы не-фрегевским способом как $a \sqsubseteq b^*$ и $\neg(a \sqsubseteq b)$ соответственно.

Следующим шагом является интерпретация «паранепротиворечивого» Мейнонга: «Мейнонг различает класс дефективных, или парадоксальных объектов... Он пробно исключает эти парадоксальные объекты из теории собственно объектов... они не квантифицируемы, и они абсурдны» [11, p. 502]. И, тем не менее, «он также оставляет путь к альтернативной трактовке; и, несомненно, может быть принята паранепротиворечивая трактовка, которая спасает его теорию от крушения в критических моментах» [11, p. 502].

Если действовать так, как это было сделано в [1], то для получения паранепротиворечивой алгебры имен в стиле да Косты сле-

дует расширить язык за счет двух новых операторов $\supset$, +, констант $\mathbb{O}$ и $\mathbb{I}$ и добавить следующие схемы аксиом и определений:

. $x \sqsubseteq y^{\circ} = x \sqsubseteq (y \wedge y^{+})^{+}$
AC1. $x \sqsubseteq a \wedge x \sqsubseteq a \supset b \Rightarrow x \sqsubseteq b$
AC2. $x \circ y \sqsubseteq z \Rightarrow y \sqsubseteq x \supset z$
AC3. $\mathbb{O} \sqsubseteq x \wedge x \sqsubseteq \mathbb{I}$
AC4. $x \sqsubseteq y^{\circ} \Rightarrow (x \sqsubseteq y^{+})^{\circ}$
AC5. $x \sqsubseteq y \vee x \sqsubseteq y^{+} \equiv x \sqsubseteq \mathbb{I}$
AC6. $x \sqsubseteq y^{++} \Rightarrow x \sqsubseteq y$
AC7. $x \sqsubseteq y^{\circ} \Rightarrow ((x \sqsubseteq z \supset y) \Rightarrow (x \sqsubseteq ((z \supset y^{+}) \supset z^{+}))$
AC8. $x \sqsubseteq y^{\circ} \wedge x \sqsubseteq (y^{\circ})^{+} \equiv x \sqsubseteq \mathbb{O}$

В этом случае непротиворечивыми объектами будут объекты y° из определения DC1, а противоречивыми будут объекты x из AC8. Конечно, это не единственный способ получения паранепротиворечивости в рамках **MR-NFF**. Например, можно было бы имитировать на алгебре имен структуру алгебры Брауэра, которая, как известно, тоже ответственна за получение паранепротиворечивости.

ЛИТЕРАТУРА

1. *Васюков В.Л.* Формальная феноменология. М., 1999.
2. *Васюков В.Л.* Не-фрегевская логика и Пост-Трактатная онтология // Труды научно-исследовательского семинара Логического центра Института философии РАН 1997,.М., 1998. С. 131-138.
3. *Васюков В.Л.* Ситуации и смысл: не-не-фрегевская (метафорическая) логика. II // Логические исследования. Вып. 9. М., 2002.
4. *Вуйцицкий Р.* Формальное построение ситуационной семантики // Синтаксические и семантические исследования неэкстенсиональных логик. М., 1989. С. 5-28.
5. *Леммон Е.* Алгебраическая семантика для модальных логик. I // Семантика модальных и интенсиональных логик / В.А.Смирнов. М., 1981. С. 98-124.
6. *Прехтль П.* Введение в феноменологию Гуссерля. Томск, 1999.
7. *Aczel P.* Algebraic Semantics for Intensional Logics. I // Properties, Types and Meaning / G. Chierchio, B. H. Partee, and R. Turner. Dordrecht. Kluwer. 1989. P. 17-45.
8. *Hiż H.* Descriptions in Russel's Theory and in Ontology // Studia Logica. Vol. 36. No 4. 1977. P. 271-283.
9. *Omyła M.* Zarys logiki niefregowskiej. Warszawa, 1986.
10. *Perzanowski J.* Logiki modalne a filozofia // Jak filozofowac? / J.Perzanowski. Warszawa, 1989. S. 252-346.

11. *Routley R.* Exploring Meinong's Jungle and Beyond. An Investigation of Noneism and the Theory of Items. Canberra. Australian National University, 1980.
12. *Stachniak Z.* Introduction to model theory for Łeśniewski's Ontology. Wrocław, 1981.
13. *Wójcicki R.* R. Suszko's Situational Semantics // Studia Logica. Vol. 43. No 4. 1984. P. 323-340.

Л.Ю.Девяткин

ТРЕХЗНАЧНЫЕ ИЗОМОРФЫ КЛАССИЧЕСКОЙ ЛОГИКИ

Abstract. *Three-valued isomorph of the classic propositional logic C_2 is a set of three-valued connectives that verifies all classic axioms based on corresponding binary connectives and modus ponens. This paper deals with the implicative-negative case of such sets. An essential theorem concerning properties of three-valued isomorphs of C_2 is proven. In every isomorph, implication is only false (i.e. takes a non-designated value) iff an antecedent is true (i.e. takes a designated value) and a consequent is false. And the negation is only false iff a corresponding propositional variable takes a designated value. Once we have proved such a theorem we are able to show that every three-valued C_2 isomorph is consistent, count the total amount of three-valued C_2 isomorphs and devise a minimal condition for a three-valued logic to contain an isomorph of C_2.*

Введение

В 1938 году Д.А. Бочваром [1] был впервые обнаружен трехзначный изоморф классической пропозициональной логики $\mathbf{C_2}$, построенный средствами трехзначной логики $\mathbf{B_3}$ (определение изоморфа см. в следующем разделе). В 1997 году А.С. Карпенко [2] был обнаружен другой изоморф $\mathbf{C_2}$, построенный средствами $\mathbf{B_3}$. Г. Малиновский [6] приводит еще один изоморф $\mathbf{C_2}$ и с удивлением указывает, что существует также изоморф $\mathbf{C_2}$, в котором не верифицируется правило modus ponens. Заметим, что таким изоморфом уже является трехзначная логика Клини с двумя выделенными значениями (доказательство в [5]).

Прорыв в этой области был совершен В.Е. Комендантским в дипломной работе [3], где посредством компьютерной программы было вычислено 65 *нормальных* трехзначных изоморфов (определение нормальности см. ниже). Однако лишь 18 из них верифицируют modus ponens.

1. Основные понятия

Под изоморфом классической пропозициональной логики, содержащимся в некоторой трехзначной логике, будем понимать такой ее фрагмент, что в нем верифицируются все тавтологии классической логики и modus ponens. В этой работе мы будем использовать следующую аксиоматизацию классической логики [4]:

A1. $p \to (q \to p)$ (*K*)

A2. $(p \to (q \to r)) \to ((p \to q) \to (p \to r))$ (*S*)

A3. $(\sim p \to \sim q) \to (q \to p)$ (*contr.*)

Правила вывода: modus ponens, подстановка.

Таким образом, в данном случае под трехзначным изоморфом $\mathbf{C_2}$ мы подразумеваем такие трехзначные импликацию и отрицание, что для них аксиомы *K*, *S* и *contr.* сохраняют общезначимость. Изоморф называется *нормальным*, если ограничения операций импликации и отрицания на подмножестве {0,1} множества истинностных значений {0,½,1} суть обычные классические операции импликации и отрицания, т.е. эти операции являются *C-расширяющими*.

2. Теорема о свойствах трехзначных изоморфов $\mathbf{C_2}$

Теорема 1.

Связки, соответствующие определению изоморфа, обладают следующими свойствами:

1. Импликация принимает значение, отличное от выделенного, если и только если (е.т.е.) антецедент принимает выделенное значение, а консеквент – нет.

2. Отрицание сопоставляет выделенным значениям невыделенные, и наоборот.

Докажем теорему для логик с одним выделенным значением.

Будем обозначать буквой f элементы класса невыделенных значений (0 и ½).

Покажем, что все изоморфы $\mathbf{C_2}$ соответствуют *условию теоремы*, то есть $p \to q=f$, е.т.е. p=1 и q=f, а $\neg p=f$ при p=1 и $\neg p=1$ при p=f

Импликация.

1. При p=1 и q=1 $p \to q \neq f$, так как иначе для сохранения общезначимости аксиомы *K* было бы необходимо $1 \to f=1$, что противоречит условию верификации modus ponens.

2. При p=1 и q=½ $p \to q=f$ - условие верификации modus ponens.

3. При p=1 и q=0 $p \to q=f$ - условие верификации modus ponens.

4. При p=½ и q=1 $p \to q \neq f$, так как иначе для сохранения общезначимости аксиомы *K* было бы необходимо $1 \to f=1$, что противоречит условию верификации modus ponens.

5. При p=0 и q=1 $p \to q \neq f$, так как иначе для сохранения общезначимости аксиомы *K* было бы необходимо $1 \to f=1$, что противоречит условию верификации modus ponens.

6. При p=0 и q=0 p→ q≠0, так как иначе аксиома *K* принимала бы значение 0 при p=0 и q=0.

7. При p=0 и q=0 p→ q≠½. Допустим, что это не так. Как было показано в (3), 1→0=f.

a. Пусть 1→0=0. В этом случае *S*=½ при p=1, q=1, r=0.

b. Пусть 1→0=½.

Для сохранения общезначимости *K* в этом случае необходимо 0→½=1. 0→1=1 (5), 1→½=f (2). Для сохранения общезначимости *S* при p=0, q=1, r=0, необходимо, чтобы 0→½=½ или 0. Приходим к противоречию.

Таким образом, 0→ 0≠f (6, 7).

8. При p=0 и q=½ p→ q≠0, так как иначе аксиома *S* принимала бы значение f при p=0, q=0, s=½ (0→ 0=1 (6,7)).

9. При p=0 и q=½ p→ q≠½. Пусть это не так. Тогда при p=½, q=0 q→ p=½. Для сохранения общезначимости *contr.* необходимо, чтобы ~p→ ~q=½ и ½→ ½=1, так как 1→ ½=f (2) и 0→ ½=½ (по условию). Существуют четыре варианта, при которых ~p→ ~q может быть равно ½ при p=½, q=0:

a. ~½=0, ~0=½. Для *contr.*=1 при p=½, q=1 требуется ~1=½ (0→ 0=1(6,7)). Однако в этом случае при p=0, q=1 *contr.*=f (½→ ½=1 (по условию)).

b. ~½=1, ~0=½, 1→ ½=½. Для p=0, q=1 получаем (½→ ~1)→ f, но ½→ ½=1, а 1→ f≠1. Следовательно, ~1=0. Это значит, что для *contr.*=1 при p=½, q=1 требуется 1→ 0=½. Однако в этом случае *K*=½ при p=0, q=1, так как 0→ ½=½ (по условию).

c. ~½=1, ~1=0, 1→ 0=½. Аналогично предыдущему случаю, *K*=½ при p=0, q=1.

d. ~½=½, ~1=0, ½→ 0=½. *K*=½ при p=0, q=½.

Таким образом, 0→ ½≠f (8, 9).

10. При p=½ и q=½ p→ q≠½, так как в этом случае *K*=½, что противоречит определению изоморфа.

11. При p=½ и q=½ p→ q≠0. Допустим, что это не так. В этом случае для сохранения общезначимости *S* было бы необходимо ½→ 0=0 (иначе *S*=f при p=½, q=0, r=½, 0→ ½=1(8,9), ½→ 1=1(4), 0→ 0=1(6,7)). Однако при ½→ ½=0, ½→ 0=0 *K*=0 для p=½, q=½.

Таким образом, ½→ ½≠f (10, 11).

12. При p=½ и q=0 p→ q≠½. В противном случае, *S*=f при p=½, q=½, r=0 (½→ ½=1 (10,11)).

13. При p=½ и q=0 p→ q≠0. Допустим, что это не так. Тогда при p=0, q=½ q→ p=0. Для сохранения общезначимости *contr.* необходимо, чтобы ~p→ ~q=0, так как 1→ 0=f (3), ½→ 0=0 (условие). Существует три варианта, когда ~p→ ~q может быть равно 0 при p=0, q=½:

a. ~0=1, ~½=½, 1→ ½=0. Однако при 1→ ½=0 и ½→ 0=0 *K*=0 для p=½, q=1.

b. ~0=1, ~½=0, 1→ 0=0. Для *contr.*=1 при p=0, q=1 необходимо, чтобы ~1=0 (как было показано выше, 1→ ½≠0). Но тогда при p=½, q=1 *contr.*=f (0→ 0=1(6,7)).

c. ~0=½, ~½=0. Однако в этом случае *contr.*=f для p=½, q=1 (0→ p=1(5,6,7,8,9)).

Таким образом, ½→ 0 ≠f (12, 13).

Итак, для любой импликации, отвечающей критерию изоморфа, p→ q=f, е.т.е. p=1 и q=f.

Теперь покажем, что любая импликация, отвечающая условию теоремы, соответствует критерию изоморфа.

Для любой такой → , что

1. при p=1 и q=f p→ q=f.
2. p→ q ≠f ни для какого иного приписывания значений.

K и *S* сохраняют общезначимость при выделенном значении 1.

Покажем, что это так. Пусть *K*=f

1. Если *K*=f, то p=1, а q→ p=f	по условию теоремы
2. Однако импликация не может принимать значение f при значении консеквента 1.	по условию теоремы

Пусть *S*=f.

1. Если *S*=f, то p→ (q→ r)=1, а (p→ q)→ (p→ r)=f	по условию теоремы
2. Если (p→ q)→ (p→ r)=f, то (p→ q)=1, а (p→ r)=f	по условию теоремы
3. (p→ r)=f, е.т.е. p=1, а r=f	по условию теоремы
4. (p→ q)=1 при p=1, е.т.е. q=1	по условию теоремы
5. При p=1, q=1 и r=f p→ (q→ r)=f – противоречие с (1).	

Теперь покажем, что для любой импликации, соответствующей условию теоремы, может быть построено такое отрицание, что *contr.* сохраняет общезначимость при любых приписываниях значений переменным.

1. (~q→ ~p)→ (p→ q) может принимать значение f только когда (~q→ ~p) ≠f, а (p→ q)=f.
2. (p→ q)=f, е.т.е. p=1, а q=f.

3. Для того, чтобы при p=1 и q=f формула (~q→ ~p)→ (p→ q) принимала значение 1, необходимо такое отрицание, что (~q→ ~p)=f при p=1 и q=f.
4. (~q→ ~p)=f, е.т.е. ~q=1 и ~p=f.
5. Итак, необходимо такое отрицание, что ~0=1, ~½=1, ~1=f. Существует два таких отрицания:

p	$\neg^1$p
1	0
½	1
0	1

p	$\neg^2$p
1	½
½	1
0	1

Таким образом, любая импликация, отвечающая условию теоремы, соответствует критерию изоморфа. Первая часть теоремы доказана для логик с одним выделенным значением.

Переходим к доказательству второй части относительно отрицания.

Покажем, что любое отрицание, отвечающее критерию изоморфа, соответствует условию теоремы.

1. p=1, ¬p=1. В этом случае при p=f, q=1 вся формула будет принимать значение f, поскольку если ¬q=1, то (¬p→¬q)=1. В то же время q→p=1→f=f.

2. p=1, ¬p=½. Если ¬f=1, *contr.*=1 для любых приписываний значений переменным.

3. p=1, ¬p=0. Аналогично (2).

4. p=½, ¬p=1. Если ¬1=f, *contr.*=1 для любых приписываний значений переменным.

5. p=½, ¬p=½. Тогда (¬p→¬q)= ½→¬q=1, но q→p=1→f=f, а значит *contr.*=f.

6. p=½, ¬p=0. Аналогично (5).

7. p=0, ¬p=1. Если ¬1=f, *contr.*=1 для любых приписываний значений переменным.

8. p=0, ¬p=½. Аналогично (5).

9. p=0, ¬p=0. Аналогично (5).

Таким образом, критерию изоморфа соответствуют лишь такие отрицания, что ¬f=1, а ¬1=f, т.е. выполняют условие теоремы. То, что для любого отрицания, выполняющего условие теоремы, существует такая импликация, что *contr.*=1 для любого приписывания значений переменным, следует из предыдущей части доказательства.

Итак, мы доказали, что все изоморфы обладают свойствами, описанными в *Теореме 1*, а также, что все связки, соответствую-

щие условиям теоремы, отвечают критерию изоморфа. *Теорема 1* доказана для логик с одним выделенным значением.

Доказательство для логик с двумя выделенными значениями проводится аналогичным образом.

Следствие 1.

Не существует такого трехзначного изоморфа $\mathbf{C}_2$, что в нем одновременно общезначима некоторая формула A и ее отрицание. Докажем это.

1. Пусть в некотором изоморфе одновременно общезначимы A и ¬A.

2. По *теореме 1*, ¬A принимает выделенное значение, е.т.е. A принимает невыделенное. Таким образом, ¬A тождественно-истинно, е.т.е. A тождественно-ложно. Получаем противоречие с (1).

Следствие 2.

Количество трехзначных изоморфов $\mathbf{C}_2$ с k выделенных значений может быть подсчитано по формуле

$$(3\text{-}k)^{k\times(4\text{-}k)}\times k^{9\text{-}(3\text{-}k)\times(k\text{-}1)}.$$

Формула соответствует числу возможных комбинаций импликаций и отрицаний, отвечающих условию *теоремы 1*.

Всего существует 16 изоморфов $\mathbf{C}_2$ с одним выделенным значением (из них 2 нормальных) и 256 с двумя выделенными значениями (из них 16 нормальных).

Следствие 3.

Необходимым и достаточным условием существования в трехзначной логике нормального изоморфа $\mathbf{C}_2$ является выразимость в этой логике любой C-расширяющей импликации и C-расширяющего отрицания такого, что промежуточному значению сопоставляется значение 1 или 0. Докажем это.

По *теореме 1* отрицание, входящее в изоморф, сопоставляет выделенным значениям невыделенные, и наоборот. Для нормальных логик такие отрицания имеют вид:

p	⊣ p
1	0
½	1
0	1

p	¬p
1	0
½	0
0	1

для одного и двух выделенных значений соответственно. Следовательно, сформулированное условие является необходимым.

Покажем, что оно является достаточным.

Пусть $\rightarrow^0$ – исходная С-расширяющая импликация, а $\neg^0$ имеет вид $\neg$ или $\urcorner$. Тогда импликация $\rightarrow$, отвечающая критериям изоморфа, будет строиться так:

$p \rightarrow q = \neg^0 \neg^0 p \rightarrow^0 \neg^0 \neg^0 q$

Когда $\neg^0 = \neg$ - получится изоморф с двумя выделенными значениями:

$\rightarrow$	1	½	0
1	1	1	0
½	1	1	0
0	1	1	1

p	$\neg$p
1	0
½	0
0	1

Когда $\neg^0 = \lrcorner$ - получится изоморф с одним выделенным значением:

$\rightarrow$	1	½	0
1	1	0	0
½	1	1	1
0	1	1	1

p	$\lrcorner$ p
1	0
½	1
0	1

ЛИТЕРАТУРА

1. *Бочвар Д. А.* Об одном трехзначном исчислении и его применении к анализу парадоксов классического расширенного функционального исчисления // Математический сборник. 1938. Т. 4, № 2.
2. *Карпенко А. С.* Многозначные логики. М., 1997.
3. *Комендантский В. Е.* *n*-значные изоморфы классической логики. Дипломная работа выполнена на кафедре логики философского факультета МГУ, 2000.
4. *Чёрч А.* Введение в математическую логику. М., 1960.
5. *Epstein R. L.* The Semantic foundations of Logic. Vol. 1: Propositional Logics. Dondrecht;Boston;London, 1990.
6. *Malinowski G.* On Many-Valuedness, Sentential Identity, Interference and Łukasiewicz Modalities // Logica Trianguli. Vol. 1, 1997.

Д.В. Зайцев, Я.В. Шрамко

ЛОГИЧЕСКОЕ СЛЕДОВАНИЕ И ВЫДЕЛЕННЫЕ ЗНАЧЕНИЯ*

Abstract. *We consider various connections between truth values and the entailment relation, and prove a theorem saying that in Belnap's four-valued logic the definition of entailment trough a lattice order introduces the same relation as the definition using {T, B} as the set of designated truth values.*

1. Логика без выделенных значений?

Я.Лукасевич, следуя фундаментальной идее Г.Фреге, определил логику как науку об особого рода объектах – истинностных значениях, которые он назвал "логическими значениями" [см. 15, с. 90]. И если для классической логики таких значений существует всего два – "истина" и "ложь" (T, F), то неклассические логики вполне могут располагать и иными наборами истинностных значений. Это, в частности, относится к многозначным логикам. Так, в трехзначной логике Лукасевича к классическим истине и лжи добавляется третье значение "возможно", а в трехзначной логике Клини – "неопределенно".

В связи с этим особую роль призвано играть понятие выделенного истинностного значения, с помощью которого осуществляется выделение из множества высказываний нашего языка логически общезначимых высказываний. А именно высказывание является общезначимым, если оно во всех моделях (т.е. при любых приписываниях истинностных значений элементарным высказываниям) принимает выделенное значение. Как известно, в классической логике в качестве выделенного значения принимается значение "истина" – T, и общезначимые высказывания (то есть высказывания истинные во всех моделях) называются, соответственно, логически истинными. Следует учитывать, что в общем случае число выделенных значений может быть больше одного, и тогда говорят о "множестве выделенных значений". Основное требование к множеству выделенных значений заключается в следующем: оно должно составлять собственное подмножество множества

* Работа Я.В. Шрамко над данной статьей осуществлялась при поддержке ***Фонда Александра фон Гумбольдта*** (Германия) в рамках исследовательской премии им. Ф. Бесселя.

истинностных значений, с которыми оперирует та или иная логика.

Однако имеются логики, в которых вообще отсутствуют общезначимые высказывания и которые вместо этого имеют дело с общезначимыми (валидными) утверждениями о следовании. Типичным примером такого рода логик является система E_{fde}, предложенная Андерсоном и Белнапом [см. 9, §15.2], в рамках которой формализуются так называемые "тавтологические следования", то есть множество валидных (мета)утверждений вида "из высказывания A логически следует высказывание B". Эта система задается посредством следующих схем аксиом и правил вывода:

a1. $A \wedge B \vdash A$;
a2. $A \wedge B \vdash B$;
a3. $A \vdash A \vee B$;
a4. $B \vdash A \vee B$;
a5. $A \wedge (B \vee C) \vdash (A \wedge B) \vee (A \wedge C)$;
a7. $A \vdash {\sim\sim}A$
a8. ${\sim\sim}A \vdash A$;
r1. $A \vdash B, B \vdash C \,/\, A \vdash C$;
r2. $A \vdash B, A \vdash C \,/\, A \vdash B \wedge C$;
r3. $A \vdash C, B \vdash C \,/\, A \vee B \vdash C$;
r4. $A \vdash B \,/\, {\sim}B \vdash {\sim}A$

Характерной чертой E_{fde} (и аналогичных систем) является отсутствие общезначимых формул в соответствующих семантиках. Иными словами, для любого высказывания объектного языка существует такое приписывание истинностных значений составляющим его элементарным высказываниям, при котором значение высказывания в целом не является выделенным (какое бы множество ни было бы при этом избрано в качестве множества выделенных значений).

Означает ли это, что в такого рода логиках понятие выделенного значения не находит достойного применения? Вовсе нет. Наоборот, стандартное ("каноническое") определение следования естественным образом задействует понятие выделенного значения.

А именно, пусть задана тройка <V, D, v>, где V есть некоторое непустое множество истинностных значений, D – (непустое) множество выделенных значений, такое что $D \subset V$ и v (оценка) есть некоторое отображение множества элементарных высказываний

нашего языка на множество V. Пусть оценка стандартным образом распространяется на все множество высказываний языка. Тогда получаем следующее (вполне естественное) определение для отношения логического следования:

Определение 1.

$A \models_1 B \Leftrightarrow \forall v\,(v(A) \in D \Rightarrow v(B) \in D)$.

Из высказывания A логически следует высказывание B, если и только если всегда, когда значение высказывания A является выделенным, значение высказывания B также является выделенным.

2. Истина Данна и истина Белнапа

Остановимся более подробно на возможных способах построения семантики для системы E_{fde}. Здесь можно выделить два стандартных метода формулировки семантических моделей: во-первых, "интуитивную семантику" Дж. М. Данна [13] и во-вторых, "четырехзначную логику" Н. Белнапа (младшего) [11, 12]. Семантики Данна и Белнапа представляют собой различные варианты общей семантической стратегии, получившей в литературе название "Американский План" [см. 8, § 1] – являясь технически эквивалентными (взаимопереводимыми), они отличаются некоторыми существенными особенностями своих семантических конструкций[1].

В интуитивной семантике Данна множество истинностных значений формально остается таким же, как и в классической логике (т.е. V = {T, F}). В качестве выделенного значения попрежнему выступает T. Однако оценка теперь определяется просто как отношение (не обязательно функциональное) между элементарными высказываниями и элементами множества V[2]. Таким образом, наряду с обычными, допускаются нестандартные приписывания (Данн называет их "абстрактные эпистемические ситуации"), когда высказывание не является ни истинным ни ложным, или же истинным и ложным одновременно – так называемые "истинностно-значные провалы" и "пресыщенные оценки". Оценка

---

[1] Семантика обобщенных описаний состояний Е.К. Войшвилло [1, 2] может быть интерпретирована как конкретная семантическая модель, построенная в стиле интуитивной семантики Данна.

[2] Другой (эквивалентный) способ построения семантики Данна – интерпретировать оценку все же как функцию, но значениями которой выступают не элементы множества {T, F}, а подмножества этого множества.

распространяется на сложные высказывания при помощи следующих (до боли знакомых) определений:

Определение 2.

$v(\sim A) = T \Leftrightarrow v(A) = F$;

$v(\sim A) = F \Leftrightarrow v(A) = T$;

$v(A \wedge B) = T \Leftrightarrow v(A) = T$ и $v(B) = T$;

$v(A \wedge B) = F \Leftrightarrow v(A) = F$ или $v(B) = F$;

$v(A \vee B) = T \Leftrightarrow v(A) = T$ или $v(B) = T$;

$v(A \vee B) = F \Leftrightarrow v(A) = F$ и $v(B) = F$.

Отношение следования в семантике Данна вводится посредством определения 1 (с учетом того, что D = {T}). Система E_{fde} является непротиворечивой и полной относительно этого определения – все валидные утверждения о следовании являются теоремами системы, и наоборот.

В четырехзначной логике Белнапа нестандартные приписывания интерпретируются как новые истинностные значения, а именно истинностно-значный провал истолковывается как истинностное значение "ничего" – N (none), а пресыщенная оценка – как истинностное значение "оба" – B (both). В результате получаем V = {T, F, B, N}, где T означает "только истина", F – "только ложь", B – "как истина, так и ложь" и N – "ни истина, ни ложь".

Интересно отметить, что Белнап определяет отношение следования без явного использования понятия выделенного значения. Вместо этого он замечает, что множество V представляет собой логическую решетку, в которой T является вершиной ("единицей"), а F – нижней точкой ("нулем"). Эта решетка (которую Белнап обозначает как **L4**) представлена в виде диаграммы Хассе на рис. 1, где решеточный порядок направлен снизу вверх и располагает элементы в порядке возрастания их истинности. **L4** является логической решеткой, поскольку задаваемые на ней операции объединения ($\vee$) и пересечения ($\wedge$) представляют логические операции дизъюнкции и конъюнкции соответственно.

Например,

$T \wedge F = F$, $N \wedge T = N$, $N \wedge B = F$, $N \vee B = T$, и т.д.

Операция же, которая обращает решеточный порядок, представляет операцию логического отрицания:

$\sim T = F$, $\sim F = T$, $\sim N = N$, $\sim B = B$.

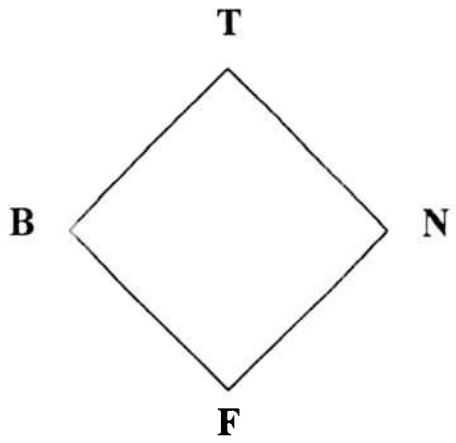


Рисунок 1. Логическая решетка **L4**

В логике Белнапа оценка (v) представляет собой отображение из множества элементарных высказываний в **L4**, которое естественным образом распространяется на все высказывания языка (посредством решеточных пересечения, объединения, а также обращения). Отношение же логического следования определяется через отношение решеточного порядка:

Определение 3.

$A \models_2 B \Leftrightarrow \forall v\ (v(A) \leq v(B))$.

Из высказывания A логически следует высказывание B, если и только если оценка высказывания A в **L4** не превышает значения высказывания B. Система E_{fde}, опять же, оказывается полной и непротиворечивой относительно этого определения.

Сравнивая семантические конструкции Данна и Белнапа, следует особо отметить разницу в трактовке ими понятия истины. А именно, если Данн продолжает оперировать классическим понятием истины (изолируя его при этом от понятия лжи), то в семантике Белнапа высказывание может быть истинным в двух разных смыслах: во-первых, оно может быть "только истинным" (когда ему приписывается значение Т), а во-вторых, оно может быть "по крайней мере истинным" (при приписывании ему значения В).

3. Определение следования через выделенные значения в четырехзначной логике Белнапа

Определение 3 вполне может показаться кому-то "не слишком логическим" или же "излишне алгебраическим"[3]. В самом деле, если исходить из Фрегевского понимания логики как науки "о

[3] Этот "кто-то" должен, как минимум, быть не согласен с утверждением А. Карпенко, что "законы логики есть не что иное, как законы алгебры" [3, С. 60].

наиболее общих законах бытия истины" [9, с. 307], более естественно определять центральное логическое отношение, каковым является отношение следования, через центральное логическое понятие – понятие истины (а понятие выделенного значения по существу является обощением понятия истины). Как это делается, например, в классической логике или в интуитивной семантике Данна: из высказывания A следует высказывание B, если и только если всегда когда A истинно, B также является истинным. А если учесть, что семантика Белнапа технически эквивалентна семантике Данна, то вполне можно предположить, что, хотя в определении 3 понятие выделенного значения явно никак не задействовано, неявным образом это понятие подразумевается также и в этом определении.

В связи с этим возникает следующий интересный вопрос: как можно было бы в семантике Белнапа в явном виде определить отношение следования в терминах выделенных значений? Иными словами, как следует конкретизировать определение 1, если V = {T, F, B, N}? Этот вопрос сводится главным образом к тому, как в этом случае должно (или могло бы) выглядеть множество D.

Первая мысль, которая приходит в голову в качестве возможного ответа на поставленный вопрос: почему бы не воспользоваться для этой цели проверенным и многократно испытанным значением T, столь хорошо зарекомендовавшим себя во многих логиках (и прежде всего, в классической, но также и в интуитивной семантике Данна)? Следующая лемма, однако, показывает, что такое решение было бы неадекватным.

Лемма 1.

Пусть V = **L4** = {T, F, B, N}, v есть Белнаповская оценка в **L4**, D = {T} и пусть логическое следование определяется посредством определения 1. Тогда система E_{fde} будет неполной относительно такого определения, то есть существует валидное утверждение о следовании, соответствующая формула которого не является теоремой E_{fde}.

Доказательство.

Для доказательства достаточно указать такое утверждение о следовании, которое удовлетворяет условиям леммы. Рассмотрим утверждение $A \wedge {\sim}A \models_1 B$. Хорошо известно, что формула $A \wedge {\sim}A \vdash B$ не является теоремой E_{fde}. В то же время, если условия леммы выполняются, то это утверждение оказывается валидным утверждением о следовании. В самом деле, допустим, существует оценка v, такая, что $v(A \wedge {\sim}A) = T$ и $v(B) \neq T$. Тогда $v(A) = T$ и $v(A) = F$ и $v(B) \neq T$. Но это невозможно, так как v является функцио-

нальной оценкой и она не может приписывать никакому высказыванию одновременно два разных значения из **L4**.

Таким образом, оказывается, что в четырехзначной логике Белнапа T в качестве единственного выделенного значения плохо справляется со своими обязанностями. И это не удивительно, если принять во внимание отмеченную выше "раздвоенность" понятия истины в семантике Белнапа – истина как "только" и как "по крайней мере". Ясно, что если мы излишне концентрируемся на значении T, вторая ипостась истины упускается из виду. Будем называть высказывание истинным, если оно является или только истинным, или по крайней мере истинным. В этом случае отношение следования в духе "из A следует B, если и только если всегда, когда A истинно, B также является истинным" приобретает новый смысл.

Иными словами, определение отношения следования через выделенные значения (определение 1) в логике Белнапа предполагает принятие D = {T, B}[4]. И это в самом деле оказывается адекватным определением, что устанавливается в следующей основной теореме, которую мы пока формулируем без доказательства.

Теорема

Пусть V = **L4** = {T, F, B, N}, v есть Белнаповская оценка в **L4**, D = {T, B}.

Тогда $A \models_1 B \Leftrightarrow A \models_2 B$.

4. Прямое сохранение истины и обратное сохранение лжи

Прежде чем пытаться доказать нашу основную теорему, попробуем, следуя методологическому указанию Декарта, подвергнуть ее сомнению. А именно рассмотрим следующее возможное опровержение этой теоремы. Если для семантики Белнапа принять определение 1, где D = {T, B}, то вполне можно представить себе ситуацию, когда $A \models_1 B$ и при этом v(A) = T, а v(B) = B. Однако T > B, что нарушает требование определения 3! Наличие такой ситуации означало бы неадекватность определения 1 системе E_{fde}. В частности, контрапозиция (r4) в этом случае не была бы валидным правилом вывода. В самом деле, пусть $A \models_1 B$ и

[4] О. Попов в своей статье [4], излагая семантику Белнапа в несколько модифицированной терминологии, также предлагает принять это множество в качестве выделенных значений.

пусть при этом v(A) = T, а v(B) = B. Тогда v($\sim A$) = F, а v($\sim B$) = B. Но это значит, что $\sim B \not\models_1 \sim A$.

В чем тут дело? Неужели в формулировке этой замечательной теоремы (которую мы даже успели объявить "основной") допущена трагическая ошибка? Поспешим успокоить чересчур впечатлительного читателя – никакой ошибки нет. Оказывается, если в семантике Белнапа выполняется $A \models_1 B$ по определению 1, то не существует такой оценки v, при которой v(A) = T, а v(B) = B, то есть описанная выше гипотетическая ситуация просто невозможна[5]. Ниже приводится доказательство этого замечательного факта. При этом мы существенным образом опираемся на известный результат Данна о том, что свойство логического следования передавать истинность от посылок к заключению (о чем, собственно, и идет речь в определении 1) влечет за собой свойство передавать ложность от заключения к посылкам[6], и наоборот [см. предложение 4 в [13], а также [7], где дается и доказательство этого свойства для семантики обобщенных описаний состояний Е.К. Войшвилло].

Лемма 2 (Дуальное приписывание).

Для любой формулы A и для любой оценки v входящих в A пропозициональных переменных относительно четырех Белнаповских значений существует (дуальная) оценка v*, такая, что:

v(A) = T $\Rightarrow$ v*(A) = T;
v(A) = F $\Rightarrow$ v*(A) = F;
v(A) = N $\Rightarrow$ v*(A) = B;
v(A) = B $\Rightarrow$ v*(A) = N.

Доказательство.

Определим оценку v* следующим образом (для любой переменной p из A):

v(p) = T $\Rightarrow$ v*(p) = T;
v(p) = F $\Rightarrow$ v*(p) = F;
v(p) = N $\Rightarrow$ v*(p) = B;
v(p) = B $\Rightarrow$ v*(p) = N.

Индукцией по длине формулы A несложно проверить, что при таком определении v* вся формула A ведет себя аналогичным образом.

---

[5] Равно как и другие, не менее "неблагополучные", ситуации v(A) = N и v(B) = B, v(A) = N и v(B) = F.

[6] Или – что то же самое – передавать неложность от посылок к заключению.

Заметим, кстати, что v** = v. Наличие дуального приписывания дает нам возможность доказать следующую лемму, которая по существу распространяет результат Данна непосредственно на семантику Белнапа.

Лемма 3 (Данн для Белнаповских значений).

Пусть $\forall$v (v(A) = T или v(A) = B $\Rightarrow$ v(B) = T или v(B) = B). Тогда $\forall$v (v(A) = T или v(A) = N $\Rightarrow$ v(B) = T или v(B) = N).

Доказательство.

Пусть для любой оценки v, если v(A) = T или v(A) = B, то v(B) = T или v(B) = B. Рассмотрим теперь произвольную оценку v, такую, что v(A) = T или v(A) = N.

Случай 1. v(A) = T. Тогда v(A) = T или v(A) = B. Отсюда, v(B) = T или v(B) = B.

Имеем два подслучая:

Подслучай 1. v(B) = T. Тогда v(B) = T или v(B) = N. Лемма верна.

Подслучай 2. v(B) = B. Тогда v*(B) = N. Но v*(A) = T. Отсюда v*(B) = T или v*(B) = B. Противоречие. Значит v(B) $\neq$ B. Таким образом, v(B) = T и лемма опять верна.

Случай 2. v(A) = N. Тогда v*(A) = B. Отсюда v*(B) = T или v*(B) = B.

Опять имеем два подслучая:

Подслучай 1. v*(B) = T. Тогда v(B) = T и значит, v(B) = T или v(B) = N. Лемма верна.

Подслучай 2. v*(B) = B. Тогда v(B) = N и значит, v(B) = T или v(B) = N. Лемма верна.

Из леммы 3 непосредственно следует невозможность случая, когда $A \models_1 B$ и при этом v(A) = T, а v(B) = B. В самом деле, пусть мы определяем следование в смысле определения 1, где D = {T, B}. То есть, если $A \models_1 B$, то $\forall$v (v(A) = T или v(A) = B $\Rightarrow$ v(B) = T или v(B) = B). Допустим $A \models_1 B$ и пусть v(A) = T. Тогда v(B) = T или v(B) = B. Но по лемме 3 имеем также: v(B) = T или же v(B) = N. Применяя "метадистрибутивность", получаем: либо v(B) = T, либо же одновременно v(B) = B и v(B) = N. Но последнее невозможно. Следовательно, v(B) = T.

Итак, определение следования через T и B в качестве выделенных значений исключает случай v(A) = T, а v(B) = B (равно как и случаи v(A) = N и v(B) = B и v(A) = N и v(B) = F). Между прочим, противоречие, полученное в подслучае 2 случая 1 доказательства леммы 3, как раз и говорит о том, что даже при определении сле-

дования через T и B, если из A следует B, то невозможна такая оценка v, при которой $v(A) = T$ и $v(B) = B$.

Основной результат данной статьи может быть получен и непосредственно, без использования леммы 3. А именно имеем:

Лемма 4

Пусть для любой оценки v, если $v(A) = T$ или $v(A) = B$, то $v(B) = T$ или $v(B) = B$.

Тогда не существует оценки w, такой, что $w(A) = T$ и $w(B) = B$ и не существует оценки w, такой, что $w(A) = N$ и $w(B) = F$.

Доказательство.

Пусть для любой оценки v, если $v(A) = T$ или $v(A) = B$, то $v(B) = T$ или $v(B) = B$. Допустим, существует оценка w, такая, что $w(A) = T$ и $w(B) = B$. По лемме 2 существует оценка w*, такая, что $w^*(A) = T$ и $w^*(B) = N$. Отсюда, во-первых, получаем $w^*(A) = T$ или $w^*(A) = B$, и далее (по условию леммы) – $w^*(B) = T$ или $w^*(B) = B$. Противоречие.

Теперь допустим, существует оценка w, такая, что $w(A) = N$ и $w(B) = F$. По лемме 2 существует оценка w*, такая, что $w^*(A) = B$ и $w^*(B) = F$. Отсюда, во-первых, получаем $w^*(A) = T$ или $w^*(A) = B$ и, во-вторых (по условию леммы), – $w^*(B) = T$ или $w^*(B) = B$. Противоречие.

Теперь имеем возможность со всей мыслимой строгостью доказать основную теорему:

Доказательство основной теоремы.

Требуется доказать, что $\forall v\ (v(A) \in D \Rightarrow v(B) \in D) \Leftrightarrow \forall v\ (v(A) \leq v(B))$.

Докажем утверждение справа налево.

Пусть $\forall v\ (v(A) \leq v(B))$, $v(A) \in D$ и $v(B) \notin D$. Тогда $v(A) = T$ или $v(A) = B$.

Рассмотрим первый случай. Пусть $v(A) = T$, тогда на основании допущения $v(B) = T$. Следовательно, во-первых, $v(B) = T$ или $v(B) = B$, а, во-вторых, $v(B) \in D$. Противоречие. Таким образом, $v(A) \neq T$ и, следовательно, $v(A) = B$. По допущению это означает, что $v(B) = T$. Отсюда получаем $v(B) = T$ или $v(B) = B$, и опять $v(B) \in D$. Противоречие.

Таким образом, принятие допущения $v(A) \in D$ приводит к $v(B) \in D$. Следовательно, $\forall v\ (v(A) \in D \Rightarrow v(B) \in D) \Rightarrow \forall v\ (v(A) \leq v(B))$.

Докажем утверждение слева направо.

Пусть $\forall v\ (v(A) \in D \Rightarrow v(B) \in D)$ и $\exists v\ \neg(v(A) \leq v(B))$. Последнее предполагает рассмотрение двух случаев: (1) $v(A) > v(B)$ и (2) $v(A)$ и $v(B)$ несравнимы.

1. Пусть $v(A) > v(B)$. Допустим, $v(B) \in D$, то есть $v(B) = T$ или $v(B) = B$. В силу допущения (1) $v(B) \neq T$, следовательно, $v(B) = B$. Тогда опять по допущению (1) $v(A) = T$. Но, по лемме 4, такой оценки, чтобы $v(A) = T$ и $v(B) = B$, не существует. Противоречие. Следовательно, $v(B) \notin D$. Тогда, по основному допущению, $v(A) \notin D$, то есть $v(A) = N$ или $v(A) = F$. В силу (1) $v(A) \neq F$, следовательно, $v(A) = N$. Но тогда, опять по допущению (1), $v(B) = F$. По лемме 4 опять получаем противоречие, чем заканчивается рассмотрение случая (1).

2. Пусть $v(A)$ и $v(B)$ несравнимы, тогда ($v(A) = B$ и $v(B) = N$) или ($v(A) = N$ и $v(B) = B$).

2.1. Допустим, $v(A) = B$ и $v(B) = N$. Тогда $v(A) \in D$ и, следовательно, $v(B) \in D$. Противоречие.

2.2. Теперь допустим, что ($v(A) = N$ и $v(B) = B$). Тогда по лемме 2 существует такая оценка v^*, что $v^*(A) = B$ и $v^*(B) = N$. Далее все, как в случае 2.1.

Таким образом, $\forall v\ (v(A) \in D \Rightarrow v(B) \in D) \Rightarrow \forall v\ (v(A) \leq v(B))$, что и завершает доказательство теоремы.

ЛИТЕРАТУРА

1. *Войшвилло Е.К.* Семантическая информация. Понятия экстенсиональной и интенсиональной информации // Кибернетика и современное научное познание. М.: Наука, 1976. С. 165-179.
2. *Войшвилло Е.К.* Семантика релевантной логики и вопрос о природе логических законов // Разум и культура. М.: Изд. МГУ, 1983. С. 69-76.
3. *Карпенко А.С.* Современные исследования в философской логике // Вопросы философии. 2003. № 9. С. 54-75.
4. *Попов О.В.* Четарехзначная логика с двумя выделенными значениями // Логика и В.Е.К. Сб. научн. Тр. М.: Современные тетради, 2003. С. 196-200.
5. *Смирнова Е.Д.* Логическая семантика и философские основания логики. М.: Изд. МГУ, 1986.
6. *Фреге Г.* Логика и логическая семантика. Сб. трудов. М.: Аспект Пресс, 2000.
7. *Шрамко Я.В.* Релевантное следование сохраняет не-ложность (чисто семантическое доказательство) // Вестник Московского университета, Серия 7: Философия, 1994, №1. С. 61-64.
8. *Шрамко Я.В.* Американский план для интуиционистской логики 2: обобщенные интуиционистские модели // Online Journal "Logical Studies". 2000, No. 5.
9. *Anderson A.R. and N.D. Belnap, Jr.* Entailment The Logic of Relevance and Necessity. Vol. I. Princeton University Press, 1975.
10. *Anderson A.R., N.D. Belnap, Jr., and J. M. Dunn.* Entailment The Logic of Relevance and Necessity. Vol. II. Princeton University Press, 1992.

11. *Belnap N.* A useful four-valued logic // J. M. Dunn and G. Epstein (eds.). Modern Uses of Multiple-Valued Logic. Dordrecht: D. Reidel Publish. Co., 1977. P. 8-37 (рус. пер. Н. Белнап, Т. Стил. Логика вопросов и ответов. М.: Прогресс, 1981).
12. *Belnap N.* How A computer should think // G. Ryle (ed.). Contemporary Aspects of Philosophy. Stocksfield: Oriel Press Ltd., 1977. P. 30-55 (рус. пер. Н. Белнап, Т. Стил. Логика вопросов и ответов, М.: Прогресс, 1981).
13. *Dunn J.M.* Intuitive semantics for first-degree entailment and 'coupled trees' // Philosophical Studies. 1976. Vol. 29. P. 149-168.
14. *Dunn J.M.* Partiality and its dual // Studia Logica. 2000. Vol. 65. P. 5-40.
15. *Lukasiewicz J.* On three-valued logic // Selected Works. Oxford, 1970. P. 87-88.

С.Ю.Знатнов

О ПРОГРАММНОМ ОБЕСПЕЧЕНИИ КОМПЬЮТЕРНЫХ ДОКАЗАТЕЛЬСТВ

Abstract. *In clause the review and classification of the software is made for carrying out of computer proofs.*

Попытки автоматизации вычислительного процесса известны еще издревле. В Средневековье, Новом времени и позже они даже получили техническую реализацию – в качестве примера можно привести логическую машину Луллия, счетные машины Лейбница и Паскаля, "фортепиано" Джевонса. В рамках нашей статьи мы рассматриваем современную ситуацию в области автоматизации доказательств, возникшую примерно в середине прошлого столетия и до сих пор находящуюся в процессе становления. Определяется начало этой ситуации появлением электронной вычислительной техники и ее использованием в различных отраслях знания. Более всего нас будет интересовать использование ЭВМ в решении логических и математических задач.

ЭВМ в настоящее время достаточно часто используют для доказательства теорем. Рассмотрим некоторые способы классификации программ, производящих указанные вычисления. Во-первых, их можно разделить на два класса: доказательства уже доказанных теорем (на примере работы программы Логик-Теоретик) и доказательства (или опровержения) теорем, впервые полученные с помощью компьютера. Это один вариант классификации.

Другой вариант классификации – по возможности реально перепроверить результат, полученный компьютером в процессе вычислений. И здесь мы будем применять термины "обозримая" и "необозримая" машинная процедура и – соответственно – теорема. Ситуации, когда некоторыми достижениями мы обязаны исключительно возможностям компьютера, становятся достаточно привычными; список таких задач постоянно пополняется. Один из последних примеров подобного рода – бурный компьютерный поиск простых чисел (подробнее ниже). Но то, что нам кажется привычным, в данном случае должно подвергаться строгой критике и тщательному анализу.

Еще один признак для классификации – автономность программы в поисках результата. Принимает ли участие человек в рассматриваемой процедуре или программа работает по задан-

ному алгоритму, не прибегая к его помощи и оценке возникающих ситуаций.

Другая классификация – по типу результата: что мы получаем на выходе? Доказательство теоремы или опровержение исходного математического утверждения?

Кроме того, программа может являться обширной системой дедуктивного вывода или применяться для доказательства лишь одной теоремы.

Можно найти и другие – менее существенные – признаки для классификации, как-то: среда программирования, модель ЭВМ, время работы программы. Но эти признаки будут уже не столь значимыми.

Повторные доказательства и новые. Теперь опишем подробнее различные виды классификации, обозначенные выше, с указанием их характерных особенностей и примеров соответствующих программ.

Итак, (пере)доказательство уже доказанных теорем или доказательства, впервые полученные на ЭВМ. К числу программ первого типа относится уже ставшая классической программа Логик-Теоретик [11][1]. Авторы программы Г. Саймон, А. Ньюэлл и Дж. Шоу, используя достижения в области информатики и психологии, разработали систему, которая передоказала многие теоремы математической логики. “С помощью программы Логик-Теоретик заново доказано 38 из 52 теорем одного из разделов математической логики - исчисления высказываний, содержащихся в книге Б. Рассела и А.Уайтхеда "Principia Mathematica". В дальнейшем на ЭВМ с большим быстродействием удалось вывести все 52 теоремы” [7, с. 101]. Доказательства, найденные системой эвристического поиска, в некоторых случаях были достаточно оригинальными и получили высокую оценку одного из авторов фундаментального труда: “Б. Рассел, ознакомившись с этими доказательствами, выразил восхищение полученными результатами” [12, с. 87]. В основе метода доказательства программы Логик-Теоретик лежали “психологические идеи, связанные с поиском решений человеком в ситуациях, похожих на блуждание в лабиринте” [6, с. 215].

Рассматривая метод полного перебора в некотором дереве поиска, можно произвести сравнение в природе поиска нового знания человеком и компьютерной программой. У человека часто изначально возникает некоторая интуитивная догадка, гипотеза, и

---

[1] Надо заметить, что программы, передоказывающие уже существующие доказательства, относятся к раннему этапу становления компьютерных программ для доказательства теорем. Они (практически) не давали новых математических знаний, но были необходимы для накопления соответствующего опыта.

затем производится ее обоснование. Появляется цель и производится поиск рационального пути к ней.

При работе компьютерной программы производится слепой поиск в некотором пространстве, блуждание по темному лабиринту, приводящее, возможно, к никем не поставленной цели (к тому, что древние греки называли поризмами). Если же цель задана изначально, то программа определяет (опять же методом перебора), существует ли путь к этой цели. В.П.Оревков в приложении к работе . "Математическая логика и автоматическое доказательство теорем" [14] так оценивает эффективность работы методом полного перебора, называя его алгоритмом Британского музея (АБМ): "...алгоритм Британского музея последовательно порождает все возможные выводы в каком-нибудь варианте исчисления предикатов и прекращает работу в тот момент, когда *наткнется* (курсив мой. – *С.З.*) на вывод исходной формулы. АБМ совершенно непригоден для фактического осуществления поиска вывода даже с использованием любых физически возможных ЭВМ" [14, с. 314]. Другие примеры подобных программ, связанных с машинным доказательством уже известных теорем геометрии, можно найти в работах Гелернтера [2] и Невинса [9]. В работе последнего методика доказательства теорем в программе сводится к тому, что к базе данных добавляется новое утверждение по допустимым правилам вывода. Если это утверждение совпадает с заданной целью, то считается, что доказательство проведено и программа останавливается. Если совпадения не происходит, то рассматриваются новые следствия из полученного утверждения. "Программа была написана на языке ЛИСП. Был доказан ряд геометрических теорем на плоскости на машине PDP... Она доказала все теоремы, приведенные Гелернтером, и ни для одной из них не потребовалось более 5 секунд" [9, с. 165]. Постановка задачи и вывод результатов работы программы производится в виде текста, представленного на формальном языке, разработанном для данной системы вывода. Например:

Дано: (PR(DC)(AB)), ((CQRB)(DA))

Доказать: (ES PQPB)

Тем не менее, доказательство представлено в виде *текста*, который может быть приведен к привычному виду (на формальном языке математической теории или на каком-либо естественном языке[2]), и само доказательство может быть проверено.

---

[2] Кстати, с такой задачей трансляции вполне справится несложная компьютерная программа.

Теперь рассмотрим примеры применения ЭВМ для *доказательства или опровержения* математических утверждений, впервые проведенные с помощью компьютера. По своей сути это программы, производящие полный конечный перебор всех случаев. Но количество этих просматриваемых случаев настолько велико, что человеческих ресурсов для проведения подобных вычислений просто не хватит. Рассмотрим более подробно некоторые примеры таких программ.

Первый пример - опровержение общих математических утверждений с помощью компьютера. Опровержение строится путем приведения контрпримера. Такие программы работают (назовем условно) в зоне, недосягаемой для человеческих возможностей.

Одним из полученных таким образом результатов является опровержение гипотезы Л.Эйлера:

Для любого показателя r≥3 диофантово уравнение $n^r = n_1^r + n_2^r + n_3^r + \ldots + n_s^r$ не имеет решений в натуральных числах, если s<r.

"В течение более 200 лет никому не удавалось ни доказать, ни опровергнуть эту гипотезу. И только уже в наши дни группа американских ученых с помощью мощного компьютера получила ... всего один-единственный результат – $144^5=27^5+84^5+110^5+133^5$" [5, с. 129].

Если рассмотреть полученный результат с точки зрения его обозримости, то получается следующее. Произвести те же вычисления вслед за компьютером абсолютно невозможно. Поэтому проведенный процесс можно считать необозримым. С другой стороны, полученный результат вполне отвечает свойству проверяемости – достаточно вычислить выражения в обеих частях равенства, чтобы убедиться, что гипотеза Эйлера неверна:

61917364224 = 14348907 + 4182119424 + 16105100000 + 41615795893.

Реализация подобного рода алгоритмов возможна по следующей структурной схеме:

Repeat
<вычисления>
Until <проверяемое условие>[3].

Цикл подобного рода не является арифметическим (или счетным) – нам не известно заранее, сколько раз будут произведены нужные вычисления. Это цикл по условию, где в качестве условия, прерывающего цикл, поставлено проверяемое выражение. Коне-

[3] Синтаксис языка Pascal. Повторять <вычисления> до тех пор, пока не станет истинным <условие>.

чен этот цикл или нет? В приведенном примере – конечен, если достигнут требуемый результат. Пока же результат не достигнут, программа будет продолжать свой счет. Но даже если она будет работать очень долгое время, нельзя будет сделать никакого позитивного вывода о том, когда она закончит счет. Нам не известно, к сожалению, была ли остановлена программа, достигшая вышеназванного результата. Но ничто не мешает нам предположить, что если работа программы продолжается, то она может выдать еще один результат, нарушающий гипотезу Эйлера. А может быть, и не один…

Теперь о доказательстве истинности общих математических утверждений с помощью компьютера. В качестве примера доказательств подобного рода известно доказательство Аппелем и Хакеном проблемы четырех красок - любую карту можно раскрасить, используя 4 цвета, причем, любые две соседние страны должны быть окрашены в разные цвета. Данное утверждение было доказано для общего случая при n>2000. 2000 же видов карт требовали отдельного перебора, который и был организован с помощью ЭВМ. "Мы использовали 1200 часов на 3 различных компьютерах. Заключительная процедура разгрузки отличалась от нашего первого приближения почти 500 модификаций, следующими из открытия критических окрестностей. Развитие процедуры требовало ручного анализа приблизительно 10000 соседств и машинного анализа более чем 2000 конфигураций. Значительная часть этого материала, включая сокращение до 1482 конфигураций, использовалась в заключительном доказательстве" [15, p. 121], – пишут о своей работе Аппель и Хакен. Если бы те же вычисления проводились людьми, то на это пришлось бы потратить "140000 полномасштабных человеческих жизней без сна и перерывов на трапезу" [5, с. 130].

Обозримые и необозримые процедуры. Приведенный выше пример как раз и принадлежит к тем случаям доказательств, которые мы условились называть необозримыми процедурами. Если представить структурную схему подобных доказательств на некотором языке программирования, то она будет выглядеть следующим образом:

```
        For n:=p to k do
        <вычисления и проверка>
или
        For n:=k downto p do
        <вычисления и проверка>
```

В отличие от цикла по условию при опровержении утверждений здесь, как мы видим, используется арифметический цикл, в

котором переменная цикла пробегает все натуральные значения на интервале от p до k (или в обратном порядке). Если цикл будет отработан полностью, то, следовательно, для любого n из указанного интервала проверено сформулированное утверждение. Остановку работы программы можно организовать в том случае, если для некоторого значения n это предложение ложно. А можно организовать работу программы так, что она зафиксирует все случаи, когда при заданном n исходное утверждение ложно. Тогда формулировку данного утверждения можно будет произвести с поправкой на эти случаи.

Подведем некоторый итог по этому поводу: компьютерные доказательства теорем, требующие огромных человеческих временных ресурсов и вычислительных способностей, реально существуют и не удовлетворяют свойству проверяемости обычных "человеческих" доказательств. Кстати, формально никак не определен критерий для названных нами "огромных человеческих временных ресурсов и вычислительных способностей". Только соображения здравого смысла и желание (или нежелание) потратить время на рутинную работу определяют в данном случае степень обозримости того или иного компьютерного доказательства.

Задачи и теоремы, которые мы отнесли к разряду необозримых, можно назвать задачами переборного типа, так как каждая из них требует огромного комбинаторного перебора. И при этом указанный перебор – единственный пока метод решения подобных задач. Об этом в самом начале дискуссии о проблемах доказательства теоремы о четырех красках говорил Пол Теллер (Paul Teller) в своей статье “Компьютерное доказательство”: “МАТЕМАТИКИ решили старую четырех-цветную проблему о том, что каждая карта может быть окрашена с использованием только четырех цветов. Их доказательство, однако, имеет новый поворот: оно требует некоторых комбинаторных проверок, которые слишком долго делать вручную... Доказательство использует критическую лемму, используя проверку комбинаторного характера. Список комбинаций, которые должны быть проверены, безнадежно велик для человека, чтобы его произвести; так что эта часть работы должна быть выполнена компьютером” [16, p. 797]. Решение задач переборного типа является в настоящий момент одной из фундаментальных проблем математики и вместе с ней - философии. Только использование компьютеров для организации подобных вычислений позволяет решить подобные задачи. Отмечая значимость проблемы, М.Гэри и Д.Джонсон пишут в своей работе: “Анализ трудностей, встретившихся на пути создания новых методов решения дискретных задач, привел к поста-

новке центральной теоретико-методологической проблемы всей дискретной математики – можно ли исключить перебор при решении дискретных задач? До настоящего времени эта проблема остается открытой" [4, с. 6]. И хотя эти слова были написаны более двадцати лет назад, они остаются актуальными и сейчас. Некоторые современные авторы говорят о текущей ситуации как об экстремальной и сравнивают ее с предшествующими кризисами в математике. Выход из создавшейся ситуации, по мнению автора приводимых далее строк, состоит в смене метода: "логика в дискретной математике должна уступить место интуиции как основному и самодостаточному методу исследования. ...Для развития дискретной математики более перспективным является развитие навыков интуиции как основного способа познания истины" [13, с. 6-7]. Развитие интуитивных способностей, по словам В.З.Стрыгина, должно стать едва ли не главной задачей современной школы. Не будем отрицать категорически эти предположения, но заметим, что развить уровень интуитивного мышления до способностей Раманужана, на наш взгляд, так же "естественно", как "естественно" перепроверить доказательство теоремы о 4-х красках вручную...

В качестве примера задач рассматриваемого нами типа можно привести задачу определения чисел на простоту. Изначально такие программы составлялись исключительно из любопытства и интереса авторов этих программ к оригинальности составления алгоритма для поиска простых чисел. Позже результаты работы этих программ нашли применение в криптографии, где используются и сейчас. Первые примеры описаний работы программ можно найти в новой серии Кибернетического сборника середины восьмидесятых годов. Масштаб производимых компьютером вычислений осознаешь, прочитав: "Это первый существующий тест проверки простоты, который без труда исследует числа с сотнями десятичных цифр... Программа на Паскале может работать с числами до 104 десятичных цифр, а программа на Фортране – с числами до 213 десятичных цифр" (Кибернитический сборник. 1987. Вып. 24. С. 101 и 143). Даже один из найденных результатов такого порядка проверить безмашинным методом будет очень проблематично: 10^{213} нужно будет "поделить" на все числа (или все простые числа – в зависимости от избранного алгоритма) от 2 до 10^{107}!

Современные исследования на эту тему еще более впечатляют. Вот уже несколько лет действует проект GIMPS (Great Internet Mersenne Prime Search), поддерживаемый компанией Entropia. Цель проекта – с помощью организации распределенных компьютерных вычислений находить все новые и новые простые числа

(причем, из класса чисел Мерсенна – те, которые можно представить в виде $n=2^p-1$). Приведем несколько достигнутых результатов с указанием использованных ресурсов.

Декабрь 2001 года – найдено число $n=2^{13\,466\,917}-1$. Над решением одной задачи одновременно трудились 130 тыс. добровольцев и 210 тыс. персональных компьютеров во всем мире. В общей сложности Gimps потребовалось затратить 13 тыс. лет машинного времени. Цифровая запись найденного простого числа содержит 405396 символов!

Декабрь 2003 года – найдено $n=2^{20\,996\,001}-1$ – сороковое по счету обнаруженное число Мерсенна. Затраченные ресурсы – примерно того же порядка. Количество цифр числа – 6 320 430.

Одно из последних достижений состоялось в июне 2004 года. Найденное число – $n=2^{24\,036\,583}-1$. Оно состоит более, чем из семи миллионов цифр. К сожалению, на текущий момент по этому результату дополнительной информации не найдено.

Именно доказательства математических утверждений и решения задач, которые мы отнесем к разряду необозримых, и представляют для нас особый интерес. Они приводят нас к новому знанию, но перепроверить правильность доказательства оказывается невозможным. (Здесь под "невозможным" мы понимаем невозможность буквально – шаг за шагом – повторить этот процесс человеком. Поэтому понятие необозримого доказательства можно уточнить и говорить о необозримости 1-го и 2-го рода. Необозримость 1-го рода означает, что нельзя провести те же действия, которые проделал компьютер, но можно провести проверку результата на истинность. Пример – приведенное опровержение гипотезы Эйлера. При необозримости 2-го рода нет возможности ни провести вычисления, ни проверить результат.)

Типы программ – пруверов. Далее рассмотрим вопрос об автономности программ-пруверов. Обратимся сначала к термину "прувер". Не любая программа, производящая доказательство, может быть названа данным термином. Он относится к той части программ, которые организуют поиск вывода (в традиционном логическом понимании этого термина) в некоторой логической системе. К примеру, программа, с помощью которой была опровергнута гипотеза Л.Эйлера, не относится в нашей классификации к пруверам в узком смысле. Итак, прувер – компьютерная программа, в которой в качестве начальных условий содержится описание некоторой логической системы – это может быть зафиксированная система, либо выбираемая из некоторого набора систем, либо определяемая пользователем. "Описание содержит сигнатуру, правила вывода и аксиомы и составляется на специальном

языке, позволяющем описывать как синтетические, так и аналитические правила" [10, с. 164].

По степени автономности в работе и принятии решений такие программы мы разделим на следующие классы:

- прувер – автомат (ПАВ): задается начальная система аксиом и набор правил вывода. Программа совершает слепой или эвристический поиск, производя обозримые и (возможно) необозримые процедуры без вмешательства человека;
- прувер – ассистент (ПАС): начальный набор – тот же, что и в предыдущем случае, но возможно вмешательство человека в вычислительный процесс для оценки возникающих в процессе вывода ситуаций и определения стратегии поиска;
- прувер – протокол (ПП): выбор начальной системы аксиом, правил вывода; фактически – хороший помощник для ведения протокола, сам вывод осуществляется в интерактивном режиме.

Приведем примеры соответствующих программ. Представитель первого класса – уже упоминавшийся нами "Логик – Теоретик". Подтверждением тому, что программа была самостоятельной в выборе решения, является то, "что в одном случае "Логик-теоретик" предложил даже более короткое и остроумное доказательство, чем данное Расселом и Уайтхедом" [8, с. 34-35]. Программа работала самостоятельно, используя начальный набор аксиом и правил вывода. Используя метод перебора, она нашла пути до многих теорем.

Варианты перебора могут быть различными.

Во-первых, это метод полного перебора. Используя этот метод, программа систематично, шаг за шагом, перебирает все возможные варианты. Другой метод – перебор с использованием эвристических правил. Этот метод и был использован авторами "Логика..." – "создатели снабдили ее эвристикой обратного рассуждения. Она заставляет программу прежде всего проверить, какие исходные положения должны быть истинными, если считать теорему верной" [8, с. 36]. Но, как правило, эти методы используются не обособленно, а согласованно. "В большинстве программ, предназначенных для решения задач, используются оба метода поиска: сначала для "обрезки" дерева применяются эвристики, а затем прибегают к полному перебору на оставшейся его части" [8, с. 39].

Третий способ – метод случайного поиска. Если первые два метода обязательно приводят к цели, то здесь достижение цели может и не произойти, так как здесь возможно повторное прохождение путей. То есть к цели мы придем случайно.

В качестве программ класса ПАС можно назвать оболочки экспертных системы (ЭС), работающие в различных областях человеческой деятельности, своеобразные машины логического вывода. Один из примеров – экспертная система DENDRAL. Экспертные системы – одна из отраслей в системе искусственного интеллекта. Основными составляющими любой ЭС являются база данных и система логического вывода, которую и можно назвать в нашей терминологии прувером-ассистентом.

В математике пруверы-ассистенты тоже находят свое применение. Такую ситуацию предвидел В.М.Глушков, когда писал в своих работах: "Поскольку дедуктивные построения над языком математики будущего по необходимости должны быть гораздо сложнее, успешное развитие математики и ее приложений в других науках станет невозможным без автоматизации этих построений. ...Разработка специального языка "подсказок" приведет к эффективной совместной работе математика с ЭВМ по доказательству новых теорем" [3, с. 97 и 99]. Одна из реализаций этого предвидения – в работе Л.Воза, где описана программа AURA, с помощью которой автор исследовал проблемы тернарной булевой алгебры, конечных полугрупп и т.д. Существенная характеристика, которую автор статьи дал указанной программе, состояла в том, что программа вела себя как коллега.

К программам последнего типа - ПП - можно отнести одну из отечественных разработок – программу Deductio, описанную в третьем выпуске сборника "Логика и компьютер". "Программа Deductio поддерживает построение выводов в логических системах, определенных пользователем. Это своего рода специализированный текстовый процессор, реализующий символические вычисления в логике первого порядка" [10, с. 164]. "Программа Deductio позволяет осуществлять в режиме диалога процедуру поиска вывода. При этом она контролирует соответствие всех изменений дерева поиска вывода системе поисковых правил, и тем самым гарантирует правильность построенного вывода" [7, с.5].

Итак, мы рассмотрели основные, на наш взгляд, способы классификации компьютерных доказательств. Несмотря на все это многообразие, будем считать, что наибольший интерес представляют "прежде всего те полученные с применением компьютеров теоремы, которые при сегодняшнем уровне знаний не могут быть доказаны без ЭВМ ввиду необходимости огромного количества расчетов, превышающего возможности человека" [1, с. 30].

ЛИТЕРАТУРА

1. *Анисов А.М.* ЭВМ и понимание математических доказательств // Вопросы философии. 1987, № 3.
2. *Гелернтер Г.* Реализация машины, доказывающей геометрические теоремы // Вычислительные машины и мышление. М.: Мир, 1967.
3. *Глушков В. М.* Кибернетика: вопросы теории и практики. М.: Наука, 1986.
4. *Гэри М., Джонсон Д.* Вычислительные машины и труднорешаемые задачи. М.: Мир, 1982.
5. *Зенкин А.А.* Когнитивная компьютерная графика // Материалы XI Межд. конф. по логике, методологии и философии науки. Москва - Обнинск, 1995. Том 2.
6. Информатика / Сост. Д.А. Поспелов. М.: Педагогика-Пресс, 1994.
7. Логика и компьютер. Вып. 1. М.: Наука, 1990.
8. Компьютер обретает разум. М.: Мир, 1990.
9. *Невинс А.* Доказательство теорем планиметрии с использованием прямых рассуждений // Кибернетический сборник. Новая серия. М.: Мир, 1979. Вып. 16. С. 145-170.
10. *Новодворский А.Е., Смирнов А.В.* Интерактивная система поиска вывода в различных логических системах // Материалы XI Международной конференции по логике, методологии и философии науки. Москва - Обнинск, 1995.
11. *Ньюэлл А., Шоу Дж., Саймон Г.* Эмпирические исследования машины "Логик-Теоретик"; пример изучения эвристик // Вычислительные машины и мышление. М.: Мир, 1967.
12. *Рузавин Г.И.* Интуиция и понимание в математике // Интуиция, логика, творчество . М., 1987.
13. *Стрыгин В.З.* Критика формальнологического метода исследования в дискретной математике. М.: Изд. отд. ЦАГИ, 1998.
14. *Чень Ч., Ли Р.* Математическая логика и автоматическое доказательство теорем. М.: Мир, 1983.
15. *Appel K., Haken W.* The solution of the four-color-map problem // Scientific American. 1977. No. 10.
16. *Teller P.* Computer proof // Journal of Philosophy. 1980. Vol. 77, No. 12.

А.С.Карпенко

ПРЕДМЕТ ЛОГИКИ В СВЕТЕ ОСНОВНЫХ ТЕНДЕНЦИЙ ЕЕ РАЗВИТИЯ

Abstract. *In this paper we suggest to discuss a very complicated question as to the subject-matter of logic. We investigate this question from the point of view of the current trends in development of logic. The following topics are considered:* 1) *Do we witness a revival of psychologism?* 2) *The principles of correct reasoning and the laws of logic.* 3) *The laws of logic and logical systems.* 4) *Logical systems and calculus of logics.* 5) *The laws of thought and the laws of algebra.* 6) *Logic as a categorical object.* 7) *The laws of thought again*?

Специально в канун наступления нового тысячелетия была опубликована статья [Карпенко, 2000], в которой основное внимание уделялось тенденциям развития современной логики. Уже здесь и особенно в аналитическом обзоре современных исследований в философской логике [Карпенко, 2003] обращалось внимание на то, что в мировой литературе широко обсуждаются проблемы обоснования логики, среди которых одной из главнейшей является вопрос – *что есть логическая система*?

Объем данной статьи не позволяет учесть все основные аспекты дискуссии, но ограничившись лишь некоторыми магистральными тенденциями развития логики (например, оставлен в стороне вопрос о компьютеризации логики и вопрос о том, является или нет мышление человека вычислительным процессом)[1] и имея в виду, что вопрос о том, ***что есть логика***, становится все более сакраментальным, мы приступим к рассмотрению предмета логики.

1. Возрождение психологизма?

В 2001 г. был переиздан учебник по логике известного российского философа В.Ф. Асмуса. Это была первая работа по *формальной логике*, вышедшая в СССР в 1947 г. после долгого периода резко критического отношения к этому научному направлению. Глава I «Предмет и задача логики» начинается подзаголовком: «Логика как наука о правильном мышлении» [Асмус, 2001]. В

[1] См. [Карпенко, 2003].

этом же году издана «Новая философская энциклопедия», где логика рассматривается «как наука, дающая теоретическое описание законов мышления» [Бочаров, 2001, с. 406]. Подчеркнем, что в подавляющем числе учебников и учебных пособий, издающихся в настоящее время для гуманитарных специальностей, предметом логики (за редчайшим исключением)[2] является изучение именно законов мышления, а значит форм мышления.

Такое понимание предмета логики можно было бы считать возрождением классического психологизма в логике, представленного Д.С. Миллем еще в середине XIX в. и который утверждал, что логика является моделью процессов мышления, а логические законы могут быть выведены из законов мышления. Известно, что психологизм в логике был подвергнут обстоятельной критике еще Г. Фреге и Э. Гуссерлем. Непримиримым критиком психологизма в логике был создатель логического направления в Львовско-Варшавской школе Я. Лукасевич: «...Неверно, что логика – наука о законах мышления. Исследовать, как мы действительно мыслим или как мы должны мыслить, – не предмет логики. Первая задача принадлежит психологии, вторая относится к области практического искусства, наподобие мнемоники» [Лукасевич, 1959, с. 48].

Время наивысшего развития классической логики принадлежит 30-м годам XX века. Как теоретико-доказательный способ рассуждений, так и теоретико-модельный способ рассуждений ни в коей мере не принимают в расчет тот факт, что реальный процесс рассуждения, осуществляемый людьми или машинами, имеет строгие внутренние ограничения. В машинах Тьюринга, которые являются важнейшим инструментом в металогических исследованиях, память вообще не ограничена.

Тем не менее интуитивная связь между логическими формами (законами) и формами (законами) мышления, по-видимому, коренится глубоко в подсознании, если даже такой выдающийся специалист в области математической логики, как Дж. Барвайс, говорит о законах мышления, выражаемых кванторами первопорядковой логики [Барвайс, 1982, с. 43].

2. От способов рассуждений к законам логики

Если обратиться к одному из самых авторитетных изданий по истории и развитию логики [Kneale W. and Kneale M., 1962, p. 1], то в нем можно найти следующее традиционное определение предмета логики: «Наука, которая исследует принципы коррект-

---

[2] См. [Гладкий, 2001] и [Анисов, 2002].

ных или приемлемых рассуждений». Однако такое определение оставляет полностью открытым вопрос о *точной сфере* данного предмета, т.е. о сфере действия логики. Для традиционной логики – это *силлогистические* рассуждения, и существует ровно 24 правильных силлогизма. В свою очередь, в одном из наиболее известных в мире учебников по логике находим: «Если... его исследования посвящены в первую очередь изучению математических рассуждений, то предмет его занятий может быть назван математической логикой» [Мендельсон, 1984, с. 7]. По своему характеру рассуждения могут быть весьма разнообразными, например, *немонотонные* рассуждения, которые позволяют адекватно оперировать с не полной и изменчивой информацией[3]. Нечеткая (fuzzy) логика изучает *нечеткие* рассуждения [Weisstein, 1999], неформальная логика изучает *неформальные* рассуждения [Groarke, 2002], философская логика, выходит, изучает *философские* рассуждения. Тогда *психологические* рассуждения изучает... Чтобы избежать подобной бессмысленности, нужно выделить то ядро или те базовые понятия, с которыми данная наука имеет дело. Таким ядром несомненно является понятие *логического следования*.

Именно А. Тарский еще в 1936 г., как один из создателей современной логики, выделяет ее суть в работе с характерным названием «О понятии логического следования» (см. [Tarski, 1983b]). Однако возникают чисто методологические проблемы: в каких терминах, или, как бы мы сейчас сказали, какова парадигма возможного ответа. Ответы на вопрос о сфере логики, о ее базисных понятиях, которыми оперирует и которые использует концепция логического следования, могут быть совершенно различными: теоретико-модельными, семантически теоретико-множественными, или теоретико-доказательными, или конструктивными, или комбинаторными, и т.д. Как мы увидим, ответ самого Тарского находится всецело в рамках семантического подхода: «Предложение X логически следует из предложений класса $\boldsymbol{K}$, если и только если каждая модель класса $\boldsymbol{K}$ есть также модель предложения X» [Tarski, 1983b, p. 417].

В последнее время концепция логического следования Тарского вызывает повышенный интерес, точнее, вокруг нее идет бурная дискуссия. Сама работа Тарского носит скорее философский, нетехнический характер и оставляет много места для различных конфликтующих интерпретаций. Особый интерес представляет статья М. Гомеза-Торренте [Gómez-Torrente, 1996], ана-

[3] См. большой обзор по немонотонным логикам [Brewka, Dix and Konolige, 1995].

лизирующего идеи Тарского в историческом логико-философском контексте, в котором они и были предложены.

Подчеркнем, что логические свойства, в частности *общезначимость* самого аргумента логического следования, должны быть независимы от отдельно выбранного универсума рассуждений. Основной замысел Тарского состоял в том, чтобы дать определение логического следования, применимого для очень широкого класса рассуждений, настолько широкого, что возникают проблемы уже другого уровня, относящиеся к вопросу о том, что есть логика.

Как бы то ни было, понятие логического следования заняло центральное место в логике и потому все больший интерес приобретает следующий вопрос: *Что значит для заключения A следовать из посылок Σ?* Следующий критерий считается общепринятым: *A* следует из посылок Σ, если и только если любой случай, в котором каждая посылка в Σ является *истинной*, есть случай, в котором *A истинна*. Обратим внимание, что выдающийся российский логик А.А. Марков связывает этот принцип с определением того, что есть логика: «Логику можно определить как науку о хороших способах рассуждения. Под "хорошими" способами рассуждения при этом можно понимать такие, при которых из верных исходных положений получаются верные результаты» [Марков, 1984, с. 5]. Таким образом, сутью логического следования является сохранение *истины* во всех случаях, а все это приводит нас к объектам, которые называются «логическими законами»: это сохраняющие *истину* рассуждения.

В итоге можно было бы объявить, что предметом логики является ни много ни мало как сама *Истина*. Заметим, что первоначальная реакция на психологизм в логике таковой и была. Определение предмета логики, данное Фреге, необычайно красиво: «Логика есть наука о наиболее общих законах бытия истины» [Фреге, 2000, с. 307]. Может показаться удивительным, что такое понимание логики продержалось почти сто лет и с некоторой модификацией вошло в книгу У. Куайна «Философская логика», где предмет логики определяется как *систематическое изучение логических истин* [Quine, 1970].

Этот традиционный подход к пониманию логики, развиваемый также Б. Расселом и А.Н. Уайтхедом, весьма располагает тем, что логику в нем можно попытаться определить посредством совокупности логических законов, ее задающих. При этом, конечно, мы отказываемся от мифологизации некоторых логических законов как ***основных*** *законов мышления* (это закон непротиворечия, закон исключенного третьего и закон тождества). И для этого есть вес-

кие основания: к концу XX века не осталось ни одного мало-мальски «приличного» логического закона, который не был бы подвергнут серьезной критике.

Итак, в правильном рассуждении заключение вытекает из посылок с логической необходимостью, и общая схема такого рассуждения представляет собой логический закон. Таким образом, рассуждать логически правильно – значит рассуждать в соответствии с законами логики.

3. От логических законов к логическим системам

С современной точки зрения «логический закон» – это «теорема формальной системы». Так мы приходим к понятиям *формальной системы* и *доказательства* в ней. Именно благодаря Д. Гильберту, предложившему программу обоснования математики после обнаружения в ней парадоксов, понятия формальной системы и доказательства становятся строго *формализованными объектами*. С этого времени начинается совершенно новый этап развития современной логики. Мы изучаем не рассуждения, не их отдельные классы, не те или иные аргументы, а доказательства как формальные объекты. Но для этого сама логика должна быть представлена в виде строго формализованной *логической системы* или *исчисления*. Представление логических систем в виде исчислений может быть совершенно различным. Первоначально такое представление состоялось в виде так называемых *гильбертовских исчислений*, которые по сей день играют важную роль при образовании новых исчислений, а также при их классификации[4]. Свою специфическую роль играют *натуральные исчисления*, *секвенциальные исчисления*, *аналитические таблицы*, но все они эквивалентны между собой.

Идеи, лежащие в основе гильбертовского исчисления, чрезвычайно просты: из бесконечного множества законов логики (тавтологий) выбирается некоторое конечное число «очевидных» законов, названных *аксиомами*, и минимальное число правил, с помощью которых из аксиом (а также из множества допущений Γ) выводятся другие законы. Например, в логике высказываний можно обойтись только одним *правилом отделения* (modus ponens): из формул φ и $\varphi \supset \phi$ выводима формула ϕ. Заметим, что это правило зависит только от вида формул и может в принципе производиться некоторым автоматическим устройством. В первопорядковой логике добавляются еще правила для кванторов. В качестве

[4] Некоторую классификацию гильбертовских исчислений посредством конечных булевых решеток можно найти в [Karpenko, 2000].

«вспомогательного» правила весьма полезной является *теорема дедукции*, когда какое-нибудь утверждение ϕ доказывают в предположении верности другого утверждения φ, после чего заключают, что верно утверждение «если φ, то ϕ».

Как видно, гильбертовские исчисления представляют собой довольно-таки простую ***конструкцию***, легко запоминаемую и объяснимую и, что немаловажно, удобную для доказательства различных метатеорем.

Доказательством называется всякая конечная последовательность формул такая, что формула из этой последовательности есть либо аксиома, либо непосредственное следствие из каких-либо предыдущих формул по одному из правил вывода (которые могут применяться неоднократно). Доказанная формула называется *теоремой*. К логической системе предъявляются некоторые требования, являющиеся ее фундаментальными свойствами. Во-первых, мы бы хотели, чтобы все наши теоремы являлись тавтологиями. Это требование называется *теоремой о корректности*. Так непроизвольно произошла интересная метаморфоза: от свойства быть корректным рассуждением перешли к свойству корректности всей логической системы. Отсюда следует фундаментальное свойство *непротиворечивости*: логическая система является непротиворечивой, если в ней одновременно не доказуемы некоторая формула и ее отрицание. С другой стороны, мы бы хотели, чтобы были доказуемы все тавтологии. Это требование называется *теоремой о полноте*. По существу здесь говорится о том, что логических средств, т.е. аксиом и правил вывода, вполне достаточно для доказательства всех тавтологий. Таким образом, достигается главная цель: используя минимальные средства можно обозреть все множество логических законов данной логической системы. Теорема о корректности и теорема о полноте вместе дают *теорему адекватности*: формула φ доказуема тогда и только тогда, когда φ тавтология. Смысл этой теоремы в том, что понятие логического следования и понятие доказательства совпадают. Для классической логики высказываний теорема адекватности была доказана в 1920 г. Э. Постом (1897-1954), а для логики предикатов в 1930 г. К. Гёделем (1906-1978).

Теорема дедукции и теорема адекватности являются весьма важными характеристическими свойствами логических систем и окажутся полезными нам в дальнейшем, как и определения *теории* и *дедуктивной системы*, предложенные А.Тарским в 1930 г.

Пусть $\mathcal{P}(A)$ есть множество всех подмножеств множества A. *Операцией присоединения следствий* на множестве A называются

функции $C : \mathcal{P}(A) \to \mathcal{P}(A)$, которые удовлетворяет следующим условиям для каждого $X \subseteq A$:

(C1) $X \subseteq C(X)$ (рефлексивность),

(C2) $CC(X) = C(X)$ (идемпотентность),

(C3) Если $X \subseteq Y$, то $C(X) \subseteq C(Y)$ (монотонность).

Функция C на множестве A называется *финитарной*, если

(C4) $C(X) = \cup \{C(Y): Y \subseteq X, Y \text{ конечно}\}$.

Заметим, что (C4) влечет (C3).

Множество всех формул, построенных из пропозициональных переменных и логических связок языка $\mathcal{L}$, обозначим посредством Fm. Если X замкнуто относительно операции присоединения следствий, т.е. $X = C(X)$, тогда X называется *теорией* C. $C(X)$ есть наименьшая теория C, содержащая X, и $C(\varnothing)$ есть система всех логически доказуемых или общезначимых предложений C. В терминологии Тарского $C(X)$ называется *дедуктивной системой*. Она предназначалась для того, чтобы абстрагировать свойства операции присоединения следствий классической логики, которая не зависит от значения логических связок.

Операция присоединения следствий C называется *структурной*, если для всех ***подстановок*** e (эндоморфизмов) пропозиционального языка $\mathcal{L}$ выполняется условие

(C5) $e(C(X)) \subseteq Ce(X)$.

Открытие того, что подстановки являются эндоморфизмами, и введение условия (C5)[5] было предназначено для того, чтобы выразить *формальный* характер логического следования.

Под *логикой* (пропозициональной) понимается пара $\langle Fm, C\rangle$ или сама C, где операция присоединения следствий C не обязательно финитарная, но структурная. Изучению логических свойств операции присоединения следствий посвящена фундаментальная монография Р. Вуйцицкого [Wójcicki, 1988].

Операция присоединения следствий C на множестве A может быть легко трансформирована в *отношение* $\vdash_c \subseteq \mathcal{P}(A) \times A$ между подмножествами A и элементами A, постулированием для каждого $X \subseteq A$ и каждого $a \in A$ того, что

$X \vdash_c a$ тогда и только тогда, когда $a \in C(X)$.

---

[5] См. [Łoś and Suszko, 1958].

Тогда свойства, которые $\vdash_c$ наследует из условий (C1), (C2) и (C3), налагаемых на C, определяют то, что называется ***отношением следования***. Эти три условия обычно переводятся в следующие два условия, налагаемые на $\vdash_c$:

(C1') если $a \in X$, тогда $X \vdash_c a$,

(C2') если $Y \vdash_c a$ для всех $a \in X$, и $X \vdash_c b$, тогда $Y \vdash_c b$,

которые влекут условие монотонности:

(C3') если $X \vdash_c a$ и $X \subseteq Y$, тогда $Y \vdash_c a$.

Дополнительно, $\vdash$ является *финитарным*, если

(C4') $\Gamma \vdash_c \varphi \Rightarrow \Gamma' \vdash_c \varphi$ для некоторого конечного $\Gamma' \subseteq \Gamma$,

и называется *структурным*, если

(C5') $\Gamma \vdash_c \varphi \Rightarrow e(\Gamma) \vdash_c e\varphi$

для каждой подстановки e.

Тогда в новой терминологии теория логики **L**, или просто **L**-теория, есть множество формул $\sum$ замкнутых относительно отношения следования $\vdash_L$. Последнее означает, что если $\sum \vdash_L \varphi$, тогда $\varphi \in \sum$. Дедуктивная система S (в языке $\mathcal{L}$) есть пара $S = < Fm, \vdash >$.

4. От логических систем к исчислению логик

Однако следующий шаг, а на самом деле яркая тенденция развития современной логики – это изучение не отдельной логической системы, какой бы она ни была привлекательной, пусть то классическая логика, интуиционистская логика, многозначная логика Лукасевича, цепная логика Даммита, модальная логика доказуемости Гёделя–Лёба, линейная логика Жирара или базисная логика Виссера и т.д., – а изучение целых классов логических систем. Здесь мы опять сталкиваемся с проблемой бесконечности, но на этот раз не с бесконечным числом законов, а с бесконечным числом логических систем, поскольку многие конечно-аксиоматизируемые логики (*исчисления*) имеют бесконечное число непротиворечивых расширений. Исчисление $\mathbf{L}'$ называется *расширением* исчисления **L**, если каждая доказуемая формула **L** также доказуема в $\mathbf{L}'$, но не наоборот. Исчисление $\mathbf{L}'$ называется *собственным* расширением исчисления **L**, если $\mathbf{L}'$ непротиворечиво и содержит формулу не выводимую в **L**.

Пусть Fm есть множество всех предложений языка $\mathcal{L}$ и пусть $Th(C)$ есть семейство теорий C (см. предыдущий раздел). Уже Тарский в 1930 г. заметил (см. [Tarski, 1983a]), что $Th(C)$ относительно

теоретико-множественного включения образует брауэрову решетку, т.е. алгебру дуальную к алгебре Гейтинга, с Fm в качестве её наибольшего элемента и с $C(\varnothing)$ в качестве её наименьшего элемента.

Итак, впервые было установлено, что само множество логических систем (в данном случае, дедуктивных систем в смысле Тарского) образует определенную конструкцию, более того, Тарский вводит термин «исчисление систем».

Интересное развитие результатов Тарского в этой области принадлежит В. Дзику [Dzik, 1982], который, в частности, показал, что *содержание решетки* всех теорий классической пропозициональной логики равно множеству интуиционистских теорем.

Подчеркнем, что изучение различных множеств логических систем в виде определенной решеточной структуры, с теми или иными свойствами, занимает все более значительное место в логических исследованиях и является одной из главных тенденций развития логики во второй половине XX века.

В последнее время особое внимание привлекает проблема интерпретируемости теорий в смысле Дж. Мак-Кинси и А. Тарского, доказавших в 1948 г., что система интуиционистских теорем интерпретируема в модальной системе Льюиса **S4**. Понятие интерпретируемости часто используется в современной логике. Классическими применениями являются доказательство относительной непротиворечивости, результаты разрешимости и неразрешимости теорий.

Рассмотрим вопрос об интерпретируемости первопорядковых теорий (См. [Mycielski, Pudlák and Stern, 1990]). Под теорией (математической) здесь понимается то, что может быть формализовано средствами первопорядковой логики. При этом желательно было бы выделить классы теорий, которые совместно интерпретируемы одна в другой, поскольку понятно, что теории зависят от выбора языка и исходных понятий. Последнее приводит к конструкции весьма абстрактных объектов, а именно классов эквивалентности первопорядковых теорий. Имеются различные отношения эквивалентности на множестве теорий. Дж. Мыцельский и др. изучают одно из наиболее абстрактных отношений эквивалентности, названное *локальной интерпретируемостью*, а сами классы эквивалентности названы *главами* (chapters) математики.

Чтобы избежать тривиальных исключений, рассматриваются только непротиворечивые теории T, с моделями, имеющими более одного элемента. T_1 является локально интерпретируемой в теории T_2 если для каждой теоремы $\delta \in T_1$ существует интерпретация I такая, что $\delta^I \in T_2$. Интерпретация может иметь параметры, пере-

менные могут переводиться как *n*-ки переменных (в этом случае говорят о *n*-мерной интерпретации). Будем говорить, что теории T_1 и T_2 имеют одну и ту же *главу* (т.е. попадают в один и тот же класс эквивалентности), если T_1 является локально интерпретируемой в теории T_2, и наоборот.

Собрание всех глав не является собственным классом и имеет мощность континуума $2^{\aleph_0}$. Локальная интерпретируемость индуцирует частичный порядок на множестве глав. Этот порядок таков, что образует дистрибутивную *алгебраическую решетку*, названную авторами **LC** (*the lattice of chapters*).

Большой интерес представляет изучение алгебраических свойств решетки **LC**, в особенности, если иметь в виду инвариантность глав теории T относительно языка, в котором T выражена. Отметим некоторые свойства: конечно-аксиоматизируемые теории соответствуют компактным элементам в **LC**; множество компактных глав и множество глав, содержащих рекурсивно перечислимые теории, являются подрешетками **LC**; эквациональные главы образуют алгебраическую решетку мощности $2^{\aleph_0}$, но она недистрибутивна и даже немодулярна, и т. д.

Кроме самих *теорий* особый интерес представляет изучение *классов логик*, замкнутых относительно соответствующих правил вывода, в первую очередь *modus ponens* (MP) и *подстановки* (Subst), и каждый элемент этого класса является непротиворечивым расширением какой-либо исходной логики. При этом желательно представить такие классы логик в виде хорошо известной конструкции.

То, что логик бесконечно много, – стало большим событием в логическом мире. Уже К. Гёдель в 1932 г. заметил, что существует счётное число логик между интуиционистской логикой **H** и классической $\mathbf{C}_2$, которые впоследствии получили название *суперинтуиционистских* логик (с.и.-логики). В середине 50-х годов начинается систематическое изучение таких классов логик, как с.и.-логики и льюисовские модальные логики.

В течение долгого времени оставалась надежда найти полное описание *решетки* модальных и с.и.-логик – тогда можно было бы «обозреть» любую логику и даже, может быть, представить их в виде исчисления.

Все эти надежды были разрушены открытием В.А. Янковым [Янков, 1968] континуального класса с.и.-логик и обнаружением способов конструирования модальных и с.и.-логик с весьма «нежелательными» свойствами (неразрешимость, неаксиоматизируемость и т. д.). Имея в виду исходный гёделевский перевод **H** в **S4** (Gödel, 1933), можно распространить его и на весь класс с.и.-

логик. В результате был установлен изоморфизм всех с.и.-логик и нормальных расширений **S4**, которых, следовательно, тоже континуум [Максимова и Рыбаков, 1974]. Впоследствии были обнаружены континуальные классы релевантных логик, паранепротиворечивых логик, логик следования и т.д. Оказывается, континуальность классов логик является не исключением, а нормой.

Важнейшим этапом современных исследований является изучение ***решеточных свойств*** классов логик. Уже С.Дж. Скрогом (1951 г.) впервые было рассмотрено семейство модальных логик, в данном случае нормальные расширения **S5**, в виде *решетки* и установлено, что таких расширений счетное число. Для **S4** подобные исследования впервые были проведены в уже упомянутой работе Л.Л. Максимовой и В.В. Рыбакова. Поскольку множество всех с.и.-логик, упорядоченное отношением включения, образует алгебру Гейтинга [Hosoi, 1969], то таковой является и решетка расширений **S4**. Заметим, что представление расширений логических систем в виде решеток позволяет устанавливать погружающие операции между ними и по свойствам одной решетки логик выявлять свойства другой решетки логик. В свою очередь Р. Григолия [Григолия, 1976] (см. также [Beavers, 1993]) показал, что множество всех расширений бесконечнозначной логики Лукасевича также образует алгебру Гейтинга.

Конечно, возникает вопрос, почему решетка теорий является брауэровой? Природа этого феномена скорее всего заключается в природе операции присоединения следствий (замыкания), используемой Тарским при определении логики. Эта операция является топологическим замыканием, а логики – замкнутые множества.

В обзоре по модальной логике, помещенном в первом издании «Справочника по философской логике» [Bull and Segerberg, 1984, p. 22], лишь отмечается, что все нормальные модальные логики образуют дистрибутивную решетку относительно теоретико-множественного включения, которая чрезвычайно сложна. Прекрасная книга М. Захарьящева и А. Чагрова [Chagrov and Zakharyaschev, 1997] содержит главу 4 под названием «От логик к классам логик», где оговорено, что классы расширений модальных логик рассматриваются как решетки. Здесь явно обозначена тенденция к изучению не отдельных логик, а их классов и намечено развитие общих методов исследования этих классов. Наконец, фундаментальный обзор по современной модальной логике, помещенный во втором издании «Справочника по философской логике» [Zakharyaschev, Wolter and Chagrov, 2001], начинается с представления решетки расширений базисной модальной логики **K**. Такой подход, отмечается авторами в предисловии, дает возможность использовать

мощный технический аппарат, который позволяет ставить вопросы типа «что является ко-атомами в решетке?» (т.е. какие логики являются максимально непротиворечивыми?), или «имеются ли бесконечные обрывающие цепи?» (т.е. являются ли все логики в этом семействе конечно аксиоматизируемыми?).

В итоге изучение способов рассуждения в некоторой *выделенной* логической системе отодвигается на второй план. А на первый план выдвигается изучение *классов* логических систем с «хорошими» семантическими или синтаксическими свойствами. Очевидно, есть разница между развитием теории дедукции для одной «избранной» логики и изучением свойств структуированных (континуальных) классов логик.

Если логика имеет какое-то отношение к мыслительной деятельности человека, то тогда уровень логичности последней скрывается за «функционированием» бесконечных классов различных логических систем.

5. От законов мышления к законам алгебры

Мы рассмотрели только одно из направлений развития логики, инициированное Г. Фреге, Н.А. Уайтхедом и Б. Расселом, где истина и логическая истина явились первоначальными логическими предикатами. Под воздействием идей метаматематики эта тенденция в логике сфокусировалась на теории дедукции логических истин, выраженных логическими законами, что привело к построению логических систем, а затем к изучению их классов в виде структурализованных объектов.

Однако еще ранее Дж. Буль, В. Джевонс, Ч.С. Пирс и Э. Шрёдер в качестве примитивного предиката взяли *логическую эквивалентность* и использовали сходство между логической эквивалентностью и *равенством*. Работы Джевонса, Пирса и Шрёдера привели к построению теории *алгебры отношений*, а работы Буля к *алгебре логики*. Обратим внимание на название главной работы Дж. Буля, опубликованной в 1854 г.: «Исследования в области *основных законов мышления*, на которых основаны математические теории логики и теория вероятностей» (курсив мой. – *А.К.*). С этой поры основным предметом логики становится изучение свойств логических операций над множеством высказываний, рассматриваемых со стороны их логических значений, и в первую очередь исследуются равенства (тождества) между формулами, приведение к нормальным формам, минимизация формул и т.д.[6]

---

[6] Эта проблематика лучше всего рассмотрена в книге [Гиндикин, 1972].

Постепенно были выделены *основные свойства* (классических) логических операций в виде некоторого количества тождеств. В совокупности эти тождества образовали конструкцию под названием «*булева алгебра*». Таким образом, булева алгебра есть результат алгебраической формализации классической логики высказываний.

Потребовалось некоторое время, чтобы логики задумались над связью между двумя казалось бы совершенно различными путями развития логики, пока А. Тарский в 1935 г. в точности не определил связь между булевой алгеброй и классическим пропозициональным исчислением. Его подход основывается на оригинальной идее А. Линденбаума (1926/27 гг.), который предложил рассматривать формализованный пропозициональный язык как универсальную алгебру с операциями, соответствующими логическим связкам этого же языка. Но самое главное, затем вводится отношение логической эвивалентности ≡ на множестве формул классического пропозиционального языка $\mathcal{L}$: $\varphi \equiv \phi$ т.т.т., когда $\varphi \leftrightarrow \phi$ есть теорема (или, эквивалентно, обе формулы $\varphi \rightarrow \phi$ и $\phi \rightarrow \varphi$ есть теоремы). Определенное таким образом отношение эквивалентности ≡ является также отношением конгруэнтности на алгебре формул Fm и соответствующая тогда фактор-алгебра $Fm/\equiv$ известна как алгебра Линденбаума–Тарского. Алгебры Линденбаума–Тарского классической пропозициональной логики, полученные подобным образом, являются (с точностью до изоморфизма) счетными булевыми алгебрами. Применение метода Линденбаума–Тарского к первопорядковой логике привело к появлению цилиндрических или полиадических алгебр.

К середине прошлого века Л. Хенкином, Р. Сикорским, Е. Расёвой и др. было осознано, что этот метод может быть применен к другим логикам со связкой импликации, удовлетворяющей некоторым базисным свойствам. Такого рода обобщение было проведено в хорошо известной книге Е.Расёвой [Rasiowa, 1974], где впервые вводится понятие «*алгебраического примера* (counterpart) *логики*». Магистральное развитие *алгебраической логики*[7] состояло в систематическом исследовании широкого класса логик алгебраическими методами. Одной из целей явилось установление общего критерия для класса алгебр (или для класса математических объектов, тесно связанных с алгебрами) быть алгебраическим приме-

[7] Уже в 1962 г. под таким названием появилась монография П. Халмоша [Halmos, 1962]. Интересно, что под таким названием большая статья включена во второе издание «Справочника по философской логике» [Andréka, Németi and Sain, 2001].

ром логики и развитие для этого самих методов. В связи с этим *абстракция* метода Линденбаума - Тарского играет главную роль. В результате, в конце XX века появился термин «абстрактная алгебраическая логика» [см. прекрасный обзор [Font, Jansana and Pigozzi, 2003].

Почти для всех логик, рассмотренных в традиционной алгебраической логике, следующее свойство имеет место для каждой теории Σ и каждой пары формул φ и ϕ:

если для каждой формулы δ *с переменной* x, $\delta(\varphi/x) \in \Sigma$
т.т.т., когда $\delta(\phi/x) \in \Sigma$, *то* $\Sigma \cup \{\varphi\} \vdash \phi$ *и* $\Sigma \cup \{\phi\} \vdash \varphi$.

Логики, которые удовлетворяют этому свойству для всех теорий, были названы ***протоалгебраизуемыми*** [Blok and Pigozzi, 1986]. Протоалгебраизуемые логики включают в себя почти все хорошо известные логики и составляют главный класс логик, для которых углубленные методы универсальной алгебры могут быть применены к их матрицам, чтобы получить строгие и интересные результаты. Матрицы Линденбаума–Тарского являются фундаментальным свойством протоалгебраизуемых логик.

Однако с начала 90-х годов был обнаружен целый ряд интересных непротоалгебраизуемых логик, среди которых конъюнктивно-дизъюнктивный фрагмент классической логики, безимпликационный фрагмент интуиционистской логики, позитивная модальная логика, известная четырехзначная логика Белнапа, базисная логика Виссера, которая характеризуется транзитивными, но нерефлексивными шкалами Крипке, и т.д. Это ставит вопрос о подходящем обобщении отношения конгруэнтности, введенного в алгебрах Линденбаума–Тарского, а также о построении общей теории непротоалгебраизуемых логик.

Что касается протоалгебраизуемых логик, то их теория развита в фундаментальной монографии Я. Челаковского [Czelakowski, 2001]. Интересно, что свойство протоалгебраизуемости может быть охарактеризовано различными и даже удивительными способами, например, протоалгебраизуемые логики обладают некоторой весьма ослабленной формой теоремы дедукции.

В уже ставшей классической работе В. Блока и Д. Пигоцци [Blok and Pigozzi, 1989] понятию *алгебраизуемая логика* было дано математически точное определение. Основополагающая идея состояла в следующем: логика является *алгебраизуемой*, если существует класс алгебр, относящийся к этой логике точно так же, как существует класс булевых алгебр, относящихся к классической пропозициональной логике. Это отношение может быть выражено в различных формах, но главное для нас, что рассматриваются

логические системы, в которых отношение логического следования выполняют пункты (1) – (4). Понятие алгебраизуемой логики, введенное в этой работе, в действительности сейчас называется *конечно-алгебраизуемой логикой.*

Обратим внимание на *внутреннее* свойство логики, делающее ее конечно-алгебраизуемой: для нее имеет место (обобщенная) теорема адекватности. В итоге мы имеем *алгебраическую семантику* для исключительно широкого класса логических систем (см. также [Font and Jansana, 1996].

Отметим, что все алгебраизуемые логики являются протоалгебраизуемыми, однако имеется много неалгебраизуемых протоалгебраизуемых логик. Например, неалгебраизуемы льюисовские модальные логики **S1**, **S2** и **S3**, логика следования **E**. Недавно было доказано [Lewin, Mikenberg and Schwarze, 1991], что известная паранепротиворечивая логика Н. да Косты $\mathbf{C}_1$ неалгебраизуема, и, следовательно, все логики из класса $\mathbf{C}_n$.

Современное бурное развитие алгебраической логики представляет собой систематическое применение методов и, главное, аппарата универсальной алгебры к символической логике. Именно на это, как на тенденцию возможного дальнейшего развития алгебры логики, указывал А. В. Кузнецов, когда говорил о возможности «охватить алгебраическими методами значительную часть современной математической логики» [Кузнецов, 1960]. На самом деле вопрос сейчас стоит об охвате всей символической логики и результаты здесь весьма впечатляющие. Речь идет о связи между отдельным металогическим свойством специфической логики, которая, как правило, является алгебраизуемой, и алгебраическим свойством ассоциированных с нею алгебр. Приведем некоторые примеры.

Пусть **Alg(L)** обозначает класс алгебр, который соотносится с некоторой логикой **L**. Например, если **L** есть классическая логика высказываний, то **Alg(L)** есть класс булевых алгебр. Теперь можно формулировать теоремы, утверждающие, что **L** имеет определенное логическое свойство т.т.т., когда **Alg(L)** имеет определенное алгебраическое свойство. Это позволяет дать алгебраическую характеризацию таких логических свойств, как полнота, наличие теоремы дедукции, компактность, разрешимость, интерполяционность Крейга, определимость по Бету, истинность формул в модели и т. д. Например, первые два свойства принимают следующий вид: **L** допускает строго полную гильбертовскую аксиоматизацию ($\Gamma \vdash A$ т.т.т., когда $\Gamma \models A$) т.т.т., когда **Alg(L)** есть финитно аксиоматизируемое квази-многообразие; **L** допускает теорему дедукции т.т.т., когда **Alg(L)** имеет эквационально опре-

делимые главные конгруэнции. Последнее свойство имеет особое значение, поскольку позволяет определять, существует или не существует, что более важно, теорема дедукции для широкого класса логик.

Заметим, что алгебраическая логика является хорошим инструментом для выяснения такого сложного вопроса, как взаимоотношение между различными логическими системами и, главное, их классификации в зависимости от свойств отношения конгруэнтности. См. рис. 1, где приведены 10 главных классов логик, следуя этому принципу [Font, Jansana and Pigozzi, 2003, p. 49].

Интересно, что дальнейший процесс абстрагирования понятия алгебраизуемости начинает фокусироваться на чисто теоретико-решеточной природе [Blok and Jónsson, 1999]. Здесь, как это ни странно, а может, наоборот, закономерно, мы находим явные точки соприкосновения с тем, к чему пришло логицистическое развитие логики (см. окончание предыдущего раздела).

Наконец, обратим внимание на книгу П. Халмоша и С. Гиванта с весьма примечательным названием: «Логика как алгебра» [Halmos and Givant, 1998], где показывается, что законы силлогистики, законы логики высказываний, законы логики предикатов – все есть *законы алгебры*. Таким образом, если идти от исходных идей Дж.Буля: *нет больше законов мышления, отличных от законов алгебры*.

6. Логика как категорный объект

Более 50 лет назад усилиями С. Мак-Лэйна и С. Эйленберга [Eilenberg and MacLane, 1986] была создана *теория категорий*, одна из наиболее важных математических теорий прошлого века. Новая теория позволила обнаружить совсем неожиданные и удивительные взаимоотношения внутри различных разделов математики и, самое главное, под влиянием идей В. Ловера выступила мощным средством для разработки новых оснований математики.

Во всем этом наблюдается некоторая негативная реакция на теорию множеств («основу всех основ»). Теперь в явном виде постулируется, что наши исходные элементы «*структурализованы*», а сама конструкция теории множеств должна быть более гибкой.

Одной из принципиальных особенностей теории категорий является то, что она принимает «морфизм» (отображение) как первичное понятие на одном уровне с понятием «объект», т.е. существуют только *объекты* и *морфизмы* между объектами. При этом морфизмы удовлетворяют законам идентичности и ассо-

циативности. Все вместе образует конструкцию под названием *категория*.

С построением теории категорий появилась возможность создания логического универсума гораздо более богатого, чем конструкция под названием «решетка», элементами которой являются логики в том или ином смысле.

В самом общем случае *объектами* являются логики вида $\mathcal{A} = \langle A, \vdash_A \rangle$, где A есть множество (предложений) и $\vdash_A$ есть отношение следования, выполняющее условия (1) – (2). Тогда *морфизмы* между объектами есть не что иное, как *переводы* или *погружения* (embedding).

Погружение одной логической системы в другую (первым примером которого является теорема Гливенко о погружении классической пропозициональной логики в интуиционистскую) становится сейчас одной из наиболее популярных тем исследования. Самое общее понятие перевода состоит в следующем: система S переводима в S', если существует функция между двумя универсумами рассуждений, которая *сохраняет* (по крайней мере, в одну сторону) *отношение дедуцируемости*.

Переводом (из) логики $\mathcal{A} = \langle A, \vdash_A \rangle$ в логику $\mathcal{B} = \langle B, \vdash_B \rangle$ является отображение f: $A \rightarrow B$ такое, что для любого $X \subseteq A$

$$X \vdash_A \varphi \Rightarrow f(X) \vdash_B f(\varphi).$$

Конечно, могут рассматриваться различные ограничения, как на само понятие логики, так и на отображение f. Обычно в литературе при определении перевода между логиками требуется также, чтобы имело место и обратное, т.е.

$$X \vdash_A \varphi \Leftrightarrow f(X) \vdash_B f(\varphi).$$

В результате, указанные логики, как объекты, и указанные переводы, как морфизмы, образуют *биполную категорию*, т. е. категорию, для которой определены произведения и суммы [Carnielli and D'Ottaviano, 1997, p. 74].

Отметим также, что с категорной точки зрения может быть рассмотрена и интерпретируемость теорий [Gaifman, 1976]: I называется точной (faithful) интерпретацией теории T_1 в теорию T_2, если

$T_1 \vdash \delta$ тогда и только тогда, когда $T_2 \vdash \delta^I$.

Точная интерпретируемость T_1 в T_2 и *наоборот* влечет категорную эквивалентность T_1- и T_2- пополнений *предтопоса*[8].

---

[8] Определение *предтопоса* см. в [Джонстон, 1986, с. 258].

Выше мы рассмотрели *категорию дедуктивных систем* в смысле Тарскоко, которая оказалась биполной. Другой категорией может выступать *категория алгебраизуемых логических систем*, где под последними понимаются «алгебраизуемые дедуктивные системы» в смысле Блока и Пигоцци. Было доказано (см. [Jánossy Kurucz and Eiben, 1996], что категория алгебраизуемых логических систем изоморфна категории соответствующих первопорядковых теорий. Показано также, что эти категории *кополны*.

Понятно, что различные вариации на понятие операции присоединения следствий, или на отношение следования, а также на семантические свойства логических систем будут приводить к разным категорным объектам.

В начале данного раздела мы видели, что в качестве объектов могут выступать сами дедуктивные системы, а морфизмами между такими объектами считаются переводы одной дедуктивной системы в другую. Теперь можно выйти на уровень еще большего обобщения. Представление дедуктивных систем в виде категории наводит на мысль использовать понятие *функтора*, являющегося одним из основных понятий в исходной работе родоначальников теории категорий в качестве погружающей операции. Функтор – это отображение из одной категории в другую, сохраняющее категорную структуру. На категорном языке это выглядит следующим образом.

Функтором $\boldsymbol{F}$ из категории $\mathcal{C}$ в категорию $\mathcal{D}$ называется функция, ставящая в соответствие каждому объекту A из $\mathcal{C}$ объект $\boldsymbol{F}(A)$ из $\mathcal{D}$, и еще одна функция, ставящая в соответствие каждой стрелке $f: A \vdash B$ из $\mathcal{C}$ стрелку $\boldsymbol{F}(f)$: $\boldsymbol{F}(A) \vdash \boldsymbol{F}(B)$ такую, что

$$\boldsymbol{F}(\mathbf{1}_A) = \mathbf{1}_{F(A)}, \quad \boldsymbol{F}(gf) = \boldsymbol{F}(g)\,\boldsymbol{F}(f).$$

В общем случае такие функторы можно рассматривать как *переводы* одной дедуктивной системы в другую.

Совсем недавно появилась работа, посвященная категорному подходу к абстрактной алгебраической логике [Voutsadakis, 2003], где обобщение дедуктивной системы дается в категорных терминах и главные усилия направлены на изучение функторов между категориями теорий (сформулированных в разных логических языках).

В итоге заметим, что категорный подход к логике вообще не оставляет места для психологизма в логике и совсем мало для самой логики, понимаемой в ее хорошем традиционном смысле как науки о правильных рассуждениях.

Однако новая парадигма – теории категорий – постепенно становится универсальной не только для всей математики (или

почти всей), но и для логики. Введение в теории категорий конструкции под названием *функтор* естественным образом привело к образованию Ф. Ловером в 1966 г. конструкции под названием *категория категорий*. Не случайно, что с объяснения, что такое категория категорий, по существу начинается монография К. Мак-Ларти [McLarty, 1992].

Каждая категория **A** имеет тождественный функтор $\mathbf{1}_{\mathbf{A}}$: **A** → **A**, который оставляет объекты и стрелки из **A** неизменными, и для заданных функторов **F**: **A** → **B** и **G**: **B** → **C** имеется композиция **G** ∘ **F**: **A** → **C**. Поэтому естественно говорить о категории всех категорий, которую назовём **CAT**, объекты которой есть все категории и стрелки которой есть все функторы. Тогда возникает настоящая проблема: является ли **CAT** сама по себе категорией? Ответ Мак-Ларти состоит в том, чтобы рассматривать **CAT** как регулятивную идею, т.е. как неизбежный способ мышления о категориях и функторах, но не как строго легитимную сущность. Такими регулятивными идеями являются, например, собственная личность, универсум и Бог у Канта (1781).

Подобным образом и логика приближается к статусу регулятивной идеи, симптомами чего является поиск при помощи категорных средств всё более строгого и по возможности универсального объекта под названием дедуктивная система. Понятно, что появление различных категорных объектов логической природы рано или поздно поставит подлинный вопрос о регулятивной идее *логики всех логик*.

7. Законы мышления?

Так неожиданно заканчивается 28 разделом, добавленным В.Ходжесом ко второму изданию «Справочника по философской логике», статья «Элементарная предикатная логика» [Hodges, 2001]. Ходжес указывает, что корректность выводимости

$$p \wedge q \vdash p$$

имеет отношение к мышлению не более, чем к девственности Артемиды или войны в Индонезии. В свою очередь заметим, что еще меньшее отношение к логичности мышления имеет изучение различных логических конструкций типа булевых алгебр, решеток Гейтинга или биполных категорий.

На самом деле вопрос стоит глубже: насколько обучение логике помогает думать логически? Например, в работе [Nisbett, Fong, Lehman and Cheng, 1987] показано, что стандартный курс логики для аспирантов совершенно не эффективен. Более того, в работе

[Wason, 1966] показано, какие чудовищные ошибки делаются при рассуждениях, использующих истинностные таблицы. Заметим, что истинностные таблицы представляют собой *наипростейшую* логическую конструкцию, моделирующую классическую логику высказываний. Этот эксперимент вызвал огромное число работ, проверяющих различные гипотезы относительно причин этих ошибок (см. [Manktelow and Over, 1990]). Еще мене удовлетворительным, отмечает Ходжес, является компьютерное обучение логике такими наиболее известными программами, как «Tarski's World» и «Hyperproof».

И здесь мы возвращаемся к мыслительной деятельности человека. Каковы ментальные механизмы, которые нетренированный человек использует при совершении логической дедукции? В свою очередь, С. Феферман в статье, где дается характеризация классической логики предикатов посредством семантического определения ее логических операций, объявляет, что более важным вопросом является «как работает разум?» [Feferman, 1999, p. 32]. Именно на этот вопрос пытается ответить выдающийся физик и космолог нашего времени Р. Пенроуз, обосновывая невычислительный характер деятельности человеческого мозга. При этом Пенроуз опирается на теоремы Гёделя о неполноте (см. [Пенроуз, 2003a], [Пенроуз, 2003b]).

В заключение отметим, что конструкция в виде первопорядковой логики, претендующая на основной и зачастую единственный аппарат для получения корректных рассуждений, является всего лишь предельным статичным огрублением человеческой дедукции с многочисленными ограничениями (см. [Карпенко, 2005]). При разумной деятельности человека, если он может разумно рассуждать, происходят ***различные*** логические процессы и проблема состоит в том, как эти процессы взаимосвязаны и как происходит переход из одного логического процесса в другой. Возможно, одним из начальных подходов к решению этой проблемы является логический «синтез познавательных процедур» (см. [Финн, 1999]).

ЛИТЕРАТУРА

[Анисов, 2002] А.М. Анисов. *Современная логика*. М.: ИФ РАН, 2002.

[Асмус, 2001] В.Ф. Асмус. *Логика*. М.: УРСС, 2001.

[Барвайс, 1982] Дж. Барвайс. Введение в логику первого порядка // *Справочная книга по математической логике. Часть I: Теория моделей*. С. 13-54. М.: Наука, 1982.

[Бочаров, 2001] В.А. Бочаров. Логика // *Новая философская энциклопедия*. Т. 2. С. 404-407. М.: Мысль, 2001.

[Гиндикин, 1972] С.Г. Гиндикин. *Алгебра логики в задачах*. М.: Наука, 1972.

[Гладкий, 2001] А.В. Гладкий. *Введение в современную логику*. М.: МЦНМО, 2001.

[Григолия, 1976] Р. Григолия. Решетка всех финитно-аппроксимируемых расширений счетнозначной логики Лукасевича // *Исследования по теории множеств и неклассическим логикам*. С. 221-246. М.: Наука, 1976.

[Джонстон, 1986] П.Т. Джонстон. *Теория топосов*. М.: Наука, 1986.

[Карпенко; 2000] А.С. Карпенко. Логика на рубеже тысячелетий // *Логические исследования*. Вып. 7. С. 7-60. М.: Наука, 2000.

[Карпенко, 2003] А.С. Карпенко. Современные исследования в философской логике // *Вопросы философии*, 9: 54-75. 2003.

[Карпенко, 2005] А.С. Карпенко. Неклассические логики *versus* классической // *Логико-философские штудии*. Вып. 3. СПб., 2005.

[Кузнецов, 1960] А.В. Кузнецов. Алгебра логики // *Философская Энциклопедия*. Т. 1. С. 33-38. М., 1960.

[Лукасевич, 1959] Я. Лукасевич. *Аристотелевская силлогистика с точки зрения современной формальной логики*. М.: ИЛ, 1959 (переиздано в 2001 г.)

[Максимова и Рыбаков, 1974]. Л.Л. Максимова и В.В. Рыбаков. Решетки модальных логик // *Алгебра и логика*, 13: 105-122. 1974.

[Марков, 1984] А.А. Марков. *Элементы математической логики*. М.: МГУ, 1984.

[Мендельсон, 1984] Э. Мендельсон. *Введение в математическую логику*. М.: Наука, 1984 (3-е издание).

[Пенроуз, 2003a] Р. Пенроуз. *Новый ум короля. О компьютерах, мышлении и законах физики*. М.: УРСС, 2003.

[Пенроуз, 2003b] Р. Пенроуз. Тени разума. В поисках науки о сознании. Москва – Ижевск: Институт компьютерных исследований, 2003.

[Финн, 1999] В.К. Финн. Синтез познавательных процедур и проблема индукции // *Научно-техническая информация*. Сер. 2. № 1/2: 8-44. 1999 (Переиздано: В.К. Финн. *Интеллектуальные системы и общество*. Сборник статей. М.: РГГУ, 2001).

[Фреге, 2000] Г. Фреге. *Логика и логическая семантика*. М.: АСПЕКТ ПРЕСС, 2000.

[Янков, 1968] В.А. Янков. Построение последовательности сильно независимых суперинтуиционистских пропозициональных исчислений // *Доклады Академии Наук СССР*, 181, № 1.: 33-34. 1968.

[Andréka, Németi and Sain] H. Andréka, I. Németi and I. Sain Algebraic logic // D. Gabbay and F. Guenthner, editors. *Handbook of Philosophical Logic*. Second Edition. Vol. 2. Dordrecht: Kluwer, 2001.

[Beavers, 1993] G. Beavers. Extensions of the $\aleph_0$-valued Łukasiewicz propositional logic // *Notre Dame Journal of Formal Logic*, 34, N. 2: 251-262. 1993.

[Blok and Jónsson, 1999] W.J. Blok and B. Jónsson. *Algebraic Structures for Logic*. New Mexico State University. 1999. Available at http://math.nmsu.edu/~holysymp/.

[Blok and Pigozzi, 1989] W.J. Blok and D. Pigozzi. Protoalgebraic logics // *Studia Logica*, 45: 337-369. 1989.

[Blok and Pigozzi, 1986] W.J. Blok and D. Pigozzi. Algebraizable Logics (monograph) // *Memoirs of the American Mathematical Society*. No. 396. 1989.

[Brewka, Dix and Konolige, 1995] G. Brewka G., J. Dix and K. Konolige. *Nonmonotonic Reasoning: An Overview*. Stanford: CSLI Publications, 1995.

[Bull and Segerberg, 1984] R.A. Bull and K. Segerberg. Basic modal logic // D. Gabbay and F. Guenthner, editors. *Handbook of Philosophical Logic*. Vol. II: *Extensions of Classical Logic*, pp. 1-88. Dordrecht: Reidel, 1984.

[Carnielli and D'Ottaviano, 1997] W. A. Carnielli and M. L. D'Ottaviano. Translations between logical systems: A MANIFESTO // *Logique et Analyse*, 157: 67-81. 1997.

[Chagrov and Zakharyaschev, 1997]. A. Chagrov and M. Zakharyaschev. *Modal logic*. Oxford: Clarendon Press, 1997.

[Czelakowski, 2001] J. Czelakowski. *Protoalgebraic Logic. Trends in Logic*. Vol. 10. Dordrect: Kluwer, 2001.

[Dzik, 1982] W. Dzik. On the content of lattices of logics. Part II // *Report on Mathematical Logic*, 14: 29-47. 1982.

[Eilenberg and MacLane, 1986] S. Eilenberg and S. MacLane. General theory of natural equivalences // *Transactions of the American Mathematical Society*, 58: 231-294. 1945. (Переиздано: *Eilenberg-MacLane: Collected Works*. Academic Press, 1986).

[Feferman, 1999]] S. Feferman. Logic, logics, and logicism // *Notre Dame Journal of Formal Logic*, 40, N 1: 31-54, 1999.

[Font and Jansana, 1996] J.M. Font and R. Jansana. *A General Algebraic Semantics for Sentential Logics*. Berlin: Springer-Verlag, 1996.

[Font, Jansana and Pigozzi, 2003] J.M. Font, R. Jansana and D. Pigozzi. A survey of abstract logic // *Studia Logica*, Vol. 74, No.1/2: 13-97. 2003.

[Gaifman, 1976] H. Gaifman. Operations on relational structures functors and classes. I // *Proceedings of the Tarski Symposium. Amer. Math. Society*, 25: 21-39. 1976.

[Gómez-Torrente, 1996] M. Gómez-Torrente. Tarski on logical consequence // *Notre Dame Journal of Formal Logic*, 37, No. 1: 125-151. 1996.

[Groarke, 2002] Informal logic // *Stanford Encyclopedia of Philosophy* (http://plato.stanford.edu/entries/logic-informal/).

[Halmos, 1962] P. Halmos. *Algebraic Logic*. New York: Chelsea Publishing, 1962.

[Halmos and Givant, 1998] P. Halmos and S. Givant. *Logic as Algebra*. Washington, 1998.

[Hodges, 2001] Elementary predicate logic // D. Gabbay and F. Guenthner, editors. *Handbook of Philosophical Logic*. Second Edition. Vol. 1. Dordrecht: Kluwer, 2001.

[Hosoi, 1969] T. Hosoi. On intermediate logics II // *Journal of the Faculty of Science, University of Tokyo,* 16: 1-12. 1969.

[Jánossy Kurucz and Eiben, 1996] A. Jánossy, Á. Kurucz, Á. E. Eiben. Combining algebraizable logics // *Notre Dame Jornal of Formal Logic*, 37, No. 2: 366-380. 1996.

[Karpenko, 2000] A.S. Karpenko. The classification of propositional calculi // *Studia Logica*, 66, No 2: 253-271. 2000.

[Kneale W. and Kneale M., 1962] W. Kneale and M. Kneale. *The Development of Logic*. Oxford: Oxford University Press, 1962 (9th ed. in 1985).

[Lewin, Mikenberg and Schwarze, 1991] R. A. Lewin, I. F. Mikenberg and M. G. Schwarze. C_1 is not algebraizable // *Notre Dame Journal of Formal Logic*, 32, N 4: 609-611. 1991.

[Łoś and Suszko, 1958] J. Łoś and R. Suszko. Remarks on sentential logics // *Indagationes mathematicae*, 20: 177-183. 1958.

[Manktelow and Over, 1990] K.I. Manktelow and D.E. Over. *Inference and Uderstanding*. London: Routledge, 1990.

[McLarty, 1992] C. McLarty. *Elementary Categories, Elementary Toposes*. Oxford: Clarendon Press, 1992.

[Mycielski, Pudlák and Stern, 1990] J. Mycielski, P. Pudlák, A. S. Stern. A lattice of chapters of mathematics (interpretations between theorems) // *Memoirs of the American Mathematical Society*, 84, N. 426. 1990.

[Nisbett *et al.* 1987] R.E. Nisbett, G.T. Fong, R.D. Lehman and P.W. Cheng. Teaching reasoning // *Science*, 238: 625-631. 1987.

[Quine, 1970] W.V. Quine. *Philosophy of Logic*. N.Y.: Englewood Cliffs, 1970 (Reprinted in 1986).

[Rasiowa, 1974] H. Rasiowa. *An Algebraic Approach to Non-classical Logics*. Warszawa: PWN, 1974.

[Tarski, 1983a] A. Tarski. Fundamental concepts of the methodology of the deductive sciences // A. Tarski. *Logic, Semantics, Metamatematics*. Indianapolis: Hacket, 1983 (2nd ed.)

[Tarski, 1983b] A. Tarski. On the concept of logical consequence // A. Tarski. *Logic, Semantics, Metamatematics*, pp. 409-420. Indianapolis: Hacket, 1983 (2nd ed.)

[Voutsadakis, 2003] G. Voutsadakis. Categorial abstract algebraic logic // *Studia Logica*, 74, No. 1/2: 275-311. 2003.

[Wason, 1966] P.C. Wason. Reasoning // B. Foss, editor. New Horisons in Psychology, pp. 135-151. Penguin: Harmondsworth, 1966.

[Weisstein, 1999] E.W. Weisstein. *Books about Fuzzy Logic* (http://www.ericweisstein.com/encyclopedias/books/FuzzyLogic.html).

[Wójcicki, 1988] R. Wójcicki. *Theory of Logical Calculi: Basic Theory of Consequence Operations*. Dordrecht: Kluwer, 1988.

[Zakharyaschev, Wolter and Chagrov, 2001] M. Zakharyaschev, F. Wolter and A. Chagrov. Advanced modal logic // D. M. Gabbay, F. Guenthner, editors. *Handbook of Pilosophical Logic*, Second Edition, Vol. 3, pp. 83-266. Dordrecht: Kluwer, 2001.

В.И.Левин

ИНТЕРВАЛЬНАЯ ЛОГИКА И НЕКОТОРЫЕ ЕЕ ПРИМЕНЕНИЯ

Abstract. *Generalization of continuous logic in the case of uncertainty is considered. Logical operations in this case are carried out not over exactly known numbers but over the intervals of such numbers. The basic laws of interval logic algebra are given. Possible applications of interval logic are shown.*

Введение

В 1950-е – 1960-е годы усилиями ученых ряда стран [1–4] были заложены основы непрерывной логики (НЛ), в которой логические операции совершаются над переменными из непрерывных множеств. В качестве последних обычно берутся конечные или бесконечные интервалы. Переход от традиционных дискретных логик, в которых логические операции совершались над дискретными переменными, к непрерывной логике сулил значительное увеличение областей применения логических методов. Уже исследования конца 1960-х – начала 1970-х годов показали ряд прикладных направлений, где с успехом могли быть применены непрерывно-логические методы, а также важные для этих и других возможных приложений усовершенствования основ и математического аппарата НЛ [5–7]. В настоящее время НЛ представляет собой развитую область исследований, находящуюся на стыке прикладной математики и математической логики и имеющую многочисленные приложения в технике, экономике, гуманитарных и общественных науках, в том числе в задачах управления техническими, экономическими и другими системами [3, 6–19]. Все известные на сегодня результаты в теории НЛ и ее приложениях относятся к случаю, когда независимые переменные задаются, а зависимые переменные вычисляются по ним с помощью операций НЛ абсолютно точно. Между тем, все большее число прикладных задач приходится решать в условиях той или иной неопределенности, когда независимые переменные, характеризующие изучаемую систему, задаются лишь приближенно, так что и зависимые переменные, являющиеся различными характеристиками этой системы, могут быть вычислены лишь приближенно. Эта качественно новая ситуация означает, что упомянутые выше многочисленные прикладные системы для адекватного их описания в условиях неопре-

деленности требуют использования нового логико-математического аппарата, получаемого путем обобщения НЛ на случай, когда логические операции выполняются над неточно известными переменными. Такой математический аппарат представлен в настоящей статье.

Постановка задачи

Как известно [1, 3, 8–10], основные операции НЛ: дизъюнкция $\vee$, конъюнкция $\wedge$ и отрицание $\neg$ определяются следующим образом. Пусть $C=[A,B]$ – замкнутый интервал вещественных чисел с центром $M=(A+B)/2$. Тогда для любых переменных $a,b\in C$

$$a\vee b=\max(a,b),\quad a\wedge b=\min(a,b),\quad \overline{a}=2M-a. \qquad (1)$$

Иногда в качестве основных в НЛ выбирают операции, отличные от дизъюнкции, конъюнкции и отрицания [1, 13]. Алгебры, образованные множеством C с теми или иными базовыми операциями НЛ на нем, называются алгебрами НЛ. Любая функция вида $C^n\to C$, заданная в форме суперпозиции конечного числа базовых операций данной алгебры НЛ, примененных к аргументам $x_1,\ldots,x_n\in C$, называется функцией НЛ. Наиболее разработанная алгебра НЛ – квазибулева алгебра

$$\Delta=(C,\vee,\wedge,\neg). \qquad (2)$$

Операции дизъюнкции и конъюнкции в алгебре (2) над переменными a и b дают значение одной из этих переменных, а операция отрицания над переменной a – число, симметричное с a относительно M. Более того, любая функция НЛ в алгебре (2) на любом наборе значений аргументов принимает значение одного из аргументов или его отрицания. Поэтому задать такую функцию можно таблицей значений. От таблицы можно перейти к аналитическому представлению функции НЛ в виде суперпозиции операций $\vee,\wedge,\neg$ (1). Для этого используется метод сочленения [8, 10].

В квазибулевой алгебре НЛ (2) справедливы следующие логические законы

$a\wedge a=a,\ a\wedge a=a$ – тавтологии (3)

$a\vee b=b\vee a,\ a\wedge b=b\wedge a$ – переместительный (4)

$(a\vee b)\vee c=a\vee(b\vee c),\ (a\wedge b)\wedge c=a\wedge(b\wedge c)$ – сочетательный (5)

$a\wedge(b\vee c)=(a\wedge b)\vee(a\wedge c),\ a\wedge(b\vee c)=(a\wedge b)\vee(a\wedge c)$ – распределительный (6)

$\overline{a\vee b}=\overline{a}\wedge\overline{b}$, $\overline{a\wedge b}=\overline{a}\vee\overline{b}$ – де Моргана (7)

$a\vee(a\wedge b)=a,\ a\wedge(a\vee b)=a,$ – поглощения (8)

$\overline{\overline{a}}=a$ – двойного отрицания (9)

$a\wedge A=A,\ a\wedge B=a,\ a\vee A=a,\ a\vee B=B$ – действий с константами (10)

$a\wedge \bar{a}=M-|a-M|$ – псевдопротиворечия (11)

$a\vee \bar{a}=M+|a-M|$ – псевдоисключенного третьего (12)

$a\vee(\bar{a}\wedge b)=(a\vee b)\wedge(M+|a-M|$ – псевдоортогональности (13)

Кроме того, при комбинировании базовых логических операций $\vee,\wedge,\neg$ (1) квазибулевой алгебры (2) со сложением и умножением появляются новые, комбинированные законы:

$$\left.\begin{array}{l} a+(b\vee c)=(a+b)\vee(a+c) \\ a-(b\vee c)=(a-b)\wedge(a-c) \end{array}\right\}$$ распределительный для сложения относительно дизъюнкции (14)

$$\left.\begin{array}{l} a+(b\wedge c)=(a+b)\wedge(a+c) \\ a-(b\wedge c)=(a-b)\vee(a-c) \end{array}\right\}$$ распределительный для сложения относительно конъюнкции (15)

$$\left.\begin{array}{l} a\cdot(b\vee c)=(a\cdot b)\vee(a\cdot c) \\ -a\cdot(b\vee c)=(-a\cdot b)\wedge(-a\cdot c) \end{array}\right\},\ a,b,c>0$$ распределительный для умножения относительно дизъюнкции (16)

$$\left.\begin{array}{l} a\cdot(b\wedge c)=(a\cdot b)\wedge(a\cdot c) \\ -a\cdot(b\wedge c)=(-a\cdot b)\vee(-a\cdot c) \end{array}\right\},\ a,b,c>0$$ распределительный для умножения относительно конъюнкции (17)

$\overline{a+b}=\bar{a}-b=\bar{b}-a;$ – спуска отрицания на слагаемые (18)

Законы (3)–(18) позволяют совершать эквивалентные преобразования логико-алгебраических выражений в НЛ, приводя их к наиболее простому или удобному виду.

Пусть теперь значения логических переменных $a,b,c,\ldots$ из отрезка $C=[A,B]$ известны не точно, а приближенно и заданы с точностью до интервала возможных значений. То есть любая переменная a задается в виде замкнутого интервала

$$\tilde{a}=\{a|a_1\le a\le a_2\}=[a_1,a_2] \quad (19)$$

В этом, более общем случае операции НЛ не могут определяться прежними выражениями типа (1), а нуждаются в новых, обобщенных определениях. Наша задача – дать эти новые определения для основных логических операций и принципы их получения для всех остальных операций, установить основные законы получающейся новой, интервальной НЛ и их отличия от аналогичных законов (3)–(18) классической НЛ, а также наметить пути применения этой новой НЛ для решения разнообразных прикладных задач в условиях неопределенности.

Общее описание интервальной непрерывной логики

Независимые переменные a,b,c в интервальной НЛ рассматриваются как замкнутые интервалы возможных значений этих переменных, т.е. как $\tilde{a}=[a_1,a_2]$, $\tilde{b}=[b_1,b_2]$, $\tilde{c}=[c_1,c_2]$. Введение логических операций над такими интервальными переменными возможно на основе различных принципов. Мы будем исходить из принципа, принятого в современной интервальной математике [20]. Согласно ему произвольная операция o над двумя интервальными переменными $\tilde{a}$ и $\tilde{b}$ вводится как прямое теоретико-множественное обобщение соответствующей операции $\bullet$ над точными переменными a и b при условии, что a и b принадлежат соответственно множествам $\tilde{a}$ и $\tilde{b}$, т.е.

$$\tilde{a}\, o\tilde{b}=a\bullet b \mid a\in\tilde{a},\ b\in\tilde{b} \qquad (20)$$

Другими словами, результатом операции o над интервалами $\tilde{a}$ и $\tilde{b}$ в интервальной математике считается множество результатов соответствующей операции $\bullet$ над вещественными числами a и b при условии, что a пробегает множество значений $\tilde{a}$, а b – множество значений $\tilde{b}$. Операция o над одним или несколькими интервальными переменными вводится аналогично (20). Пользуясь определением (20), в интервальной математике вводят и изучают алгебраические операции над интервалами – сложение, вычитание, умножение и деление. Мы же воспользуемся этим определением для введения логических – в НЛ – операций над интервалами.

Согласно (20) и с учетом определений (1) операций дизъюнкции, конъюнкции и отрицания обычной НЛ получим следующие определения этих операций в интервальной НЛ:

$$\tilde{a}\vee\tilde{b}=\{a\vee b \mid a\in\tilde{a},\ b\in\tilde{b}\},\ \tilde{a}\wedge\tilde{b}=\{a\wedge b \mid a\in\tilde{a},\ b\in\tilde{b}\}, \qquad (21)$$
$$\bar{\tilde{a}}=\{\bar{a} \mid a\in\tilde{a}\};\ \tilde{a},\ \tilde{b}\subseteq C=[A,B]$$

Другие возможные операции интервальной НЛ определяются аналогично (21), т.е. согласно (20) и с учетом определений соответствующих операций в обычной НЛ. Алгебры, образованные множеством C вместе с теми или иными базовыми операциями интервальной НЛ на нем, называются алгебрами интервальной НЛ. Любая функция вида $C^n\to C$, заданная в форме суперпозиции конечного числа базовых операций данной алгебры интервальной НЛ, примененных к аргументам $x_1,\ldots,x_n$ – интервалам из C, называется функцией интервальной НЛ. Наибольший интерес с точки зрения возможностей изучения и практического применения представляет квазибулева алгебра интервальной НЛ

$$\Delta_n=(C;\vee,\wedge,\neg). \qquad (22)$$

Эта алгебра отличается от квазибулевой алгебры обычной НЛ (2) тем, что логические операции дизъюнкции, конъюнкции и отрицания выполняются в ней не над вещественными числами из интервала C в соответствии с определением (1), а над вещественными интервалами из C в соответствии с определением (21). Данное отличие двух алгебр приводит к большим различиям в их свойствах.

Основные свойства интервальной НЛ описаны ниже. При этом мы ограничиваемся только рамками квазибулевой алгебры (22) этой НЛ, что не снижает общности, поскольку в интервальной НЛ, как и в обычной НЛ (см. [19]), различные возможные операции обычно выражаются суперпозицией операций $\vee,\wedge,\neg$ алгебры (22).

Теорема 1. *Результаты операций дизъюнкции* $\vee$, *конъюнкции* $\wedge$ *и отрицания* $\neg$ *НЛ над интервалами* $\tilde{a}=[a_1,a_2]$, $\tilde{b}=[b_1,b_2]$ *есть интервалы, вычисляемые по формулам*

$$\begin{aligned} \tilde{a}\vee\tilde{b}&=[a_1,a_2]\vee[b_1,b_2]=[a_1\vee b_1,\ a_2\vee b_2],\\ \tilde{a}\wedge\tilde{b}&=[a_1,a_2]\wedge[b_1,b_2]=[a_1\wedge b_1,\ a_2\wedge b_2],\\ \overline{\tilde{a}}&=\overline{[a_1,a_2]}=[\bar{a}_2,\bar{a}_1] \end{aligned} \qquad (23)$$

Доказательство теоремы 1. Докажем первую формулу (23). Согласно определению (21) операции $\vee$ над интервалами $\tilde{a}$ и $\tilde{b}$, нижняя граница множества значений результата этой операции равна $a_1\vee b_1$, а верхняя – $a_2\vee b_2$, где $\vee$=max – операция дизъюнкции обычной НЛ (1). Как известно из теории чисел, множество вещественных чисел всюду плотное. Это значит, что интервал $\tilde{a}$ (интервал $\tilde{b}$) содержит все вещественные значения между его нижней и верхней границами a_1 и a_2 (b_1 и b_2). Отсюда следует, что множество значений результата операции $\vee$ над интервалами $\tilde{a}$ и $\tilde{b}$ содержит все вещественные значения между нижней и верхней границами этого результата, найденными выше, что и означает первую формулу (23). Доказательство остальных формул (23) получается аналогично.

Как следует из формул (23), дизъюнкция (конъюнкция) НЛ двух интервалов $\tilde{a}$ и $\tilde{b}$ есть интервал, нижняя граница которого есть дизъюнкция $\vee$=max (конъюнкция $\wedge$=min) НЛ нижних границ $\tilde{a}$ и $\tilde{b}$, а верхняя граница – дизъюнкция $\vee$=max (конъюнкция $\wedge$=min) НЛ верхних границ $\tilde{a}$ и $\tilde{b}$. Отрицание НЛ интервала $\tilde{a}$ есть интервал, нижняя (верхняя) граница которого есть отрицание верхней (нижней) границы интервала $\tilde{a}$, т.е. интервал, расположенный симметрично с $\tilde{a}$ относительно центра M множества-носителя $C=[A,B]$ алгебры НЛ (22).

Теорема 2. *Операции дизъюнкции* $\vee$ *и конъюнкции* $\wedge$ *НЛ над*

интервалами $\tilde{a}$ *и* $\tilde{b}$ *согласованы в следующем смысле: если одна из операций дает результат* $\tilde{a}$, *то вторая дает* $\tilde{b}$ *и обратно, т.е. справедлива эквивалентность*

$$(\tilde{a} \vee \tilde{b} = \tilde{a}) \Leftrightarrow (\tilde{a} \wedge \tilde{b} = \tilde{b}) \qquad (24)$$

Доказательство теоремы 2. Докажем, что из левой части (24) следует правая часть. Учитывая формулу (23), найдем $(\tilde{a} \vee \tilde{b} = \tilde{a}) \Rightarrow ([a_1 \vee b_1, a_2 \vee b_2] = [a_1, a_2]) \Rightarrow (a_1 \vee b_1 = a_1,\ a_2 \vee b_2 = a_2) \Rightarrow (a_1 \geq b_1,\ a_2 \geq b_2) \Rightarrow (a_1 \wedge b_1 = b_1,\ a_2 \wedge b_2 = b_2) \Rightarrow ([a_1 \wedge b_1,\ a_2 \wedge b_2] = [b_1, b_2]) \Rightarrow (\tilde{a} \wedge \tilde{b} = \tilde{b})$, что и требовалось доказать. Доказательство того, что из правой части (24) следует левая часть, аналогично.

Теорема 2 отнюдь не означает, что операции дизъюнкции и конъюнкции НЛ над двумя интервалами всегда дают в качестве результата какой-то из этих интервалов. Ее смысл лишь в том, что два этих события (они показаны в левой и правой скобках соотношения (24)) наступают всегда одновременно. Условия же, при которых они происходят, определяются следующим утверждением.

Теорема 3. *Для того чтобы в паре интервалов* $\tilde{a} = [a_1, a_2]$, $\tilde{b} = [b_1, b_2]$ *выполнялись равенства* $\tilde{a} \vee \tilde{b} = \tilde{a}$, $\tilde{a} \wedge \tilde{b} = \tilde{b}$, *необходимо и достаточно выполнения системы неравенств* $a_1 \geq b_1$, $a_1 \geq b_1$, $a_2 \geq b_2$.

Доказательство теоремы 3. Первая половина цепочки следствий из доказательства теоремы 2 показывает, что $(\tilde{a} \vee \tilde{b} = \tilde{a}) \Rightarrow (a_1 \geq b_1,\ a_2 \geq b_2)$. Аналогичная цепочка следствий показывает, что $(\tilde{a} \wedge \tilde{b} = \tilde{b}) \Rightarrow (a_1 \geq b_1,\ a_2 \geq b_2)$. Два полученных следствия доказывают необходимость сформулированного в теореме условия. Достаточность этого условия доказывается аналогично.

Из теоремы 3 следует, что операции дизъюнкции и конъюнкции НЛ над двумя интервалами дают в качестве результата один из интервалов только в том случае, когда один из интервалов сдвинут относительно другого в одну сторону (вправо или влево) хотя бы по одной из двух границ либо когда интервалы совпадают.

Ситуация, когда операции дизъюнкции и конъюнкции НЛ над двумя интервалами $\tilde{a}$ и $\tilde{b}$ приводят к новому интервалу, отличному и от $\tilde{a}$ и от $\tilde{b}$, полностью описывается следующим утверждением.

Теорема 4. *Для того чтобы для пары интервалов* $\tilde{a} = [a_1, a_2]$, $\tilde{b} = [b_1, b_2]$, *выполнялись неравенства* $\tilde{a} \vee \tilde{b} \neq a, b$, $\tilde{a} \wedge \tilde{b} \neq a, b$, *необходимо и достаточно выполнения какой-нибудь одной из двух систем неравенств* $a_1 < b_1$, $a_2 > b_2$ *или* $b_1 < a_1$, $b_2 > a_2$.

Доказательство теоремы 4 есть прямое следствие теоремы 3 и

вытекает из того, что фигурирующие в ней интервальные неравенства есть дополнения интервальных равенств теоремы 3, а сформулированные необходимые и достаточные условия этих неравенств есть дополнение необходимых и достаточных условий интервальных равенств теоремы 3.

Из теоремы 4 следует, что операции дизъюнкции и конъюнкции НЛ над двумя интервалами $\tilde{a}$ и $\tilde{b}$ дают результат в виде нового интервала, отличного и от $\tilde{a}$ и от $\tilde{b}$, только в тех случаях, когда один из интервалов накрывает другой. В целом, приведенные результаты свидетельствуют о значительных отличиях интервальной НЛ от обычной НЛ и тем более от дискретных логик. Главное отличие состоит в том, что операции дизъюнкции и конъюнкции НЛ (21) над интервалами $\tilde{a}$ и $\tilde{b}$ не всегда дают значение одного из них. В связи с этим функции интервальной НЛ в алгебре (22) не на любом наборе значений аргументов принимают значение одного из аргументов или его отрицания. Поэтому задать такую функцию таблицей значений нельзя. Это задание требует указания самого алгебраического выражения, описывающего функцию интервальной НЛ в виде суперпозиции базовых операций этой алгебры. Такое задание функций интервальной НЛ позволяет вычислять их и совершать с ними другие действия.

Пример 1. Вычислить функцию, заданную выражением $\tilde{v}=(\tilde{x}\vee\tilde{y})\wedge\bar{\tilde{z}}$. По формулам (23), полагая $\tilde{x}=[x_1,x_2]$, $\tilde{y}=[y_1,y_2]$ $\tilde{z}=[z_1,z_2]$, находим $\tilde{v}=[v_1,v_2]=([x_1,x_2]\vee[y_1,y_2])\wedge[z_1,z_2]=[(x_1\vee y_1)\wedge\bar{z}_2$, $(x_2\vee y_2)\wedge\bar{z}_1]$. Теперь для вычисления значений $\tilde{v}$ остается подставить в полученное выражение $\tilde{v}$ численные значения интервалов $\tilde{x},\tilde{y},\tilde{z}$ и выполнить операции обычной НЛ (1).

Законы интервальной непрерывной логики

Особенно большие отличия между обычной и интервальной НЛ имеются на уровне их логических законов. При этом лишь 7 из 16 законов обычной НЛ сохраняют свою силу в интервальной НЛ, в то время как 9 других законов меняются. Начнем с законов НЛ, сохраняющих свою силу.

$$\tilde{a}\vee\tilde{a}=\tilde{a},\ \tilde{a}\wedge\tilde{a}=\tilde{a} \quad - \quad \text{тавтологии} \quad (25)$$

Доказательство закона (25). Согласно определению (21) операций дизъюнкции и конъюнкции интервальной НЛ и с учетом закона тавтологии (3) обычной НЛ $\tilde{a}\vee\tilde{a}=\{a\vee a|a\in\tilde{a}\}=\{a|a\in\tilde{a}\}$, доказывается первое тождество (25). Доказательство второго тождества аналогично.

$$\tilde{a}\vee\tilde{b}=\tilde{b}\vee\tilde{a},\ \tilde{a}\wedge\tilde{b}=\tilde{b}\wedge\tilde{a} \quad - \text{ переместительный} \quad (26)$$

Доказательство закона (26) аналогично доказательству закона (25), причем используется соответствующий закону (26) закон (4) обычной НЛ.

Последующие 5 законов также доказываются аналогично закону (25).

$(\tilde{a}\vee\tilde{b})\vee\tilde{c}=\tilde{a}\vee(\tilde{b}\vee\tilde{c}),\ (\tilde{a}\wedge\tilde{b})\wedge\tilde{c}=\tilde{a}\wedge(\tilde{b}\wedge\tilde{c})$ –сочетательный (27)

$\overline{\tilde{a}\vee\tilde{b}}=\overline{\tilde{a}}\wedge\overline{\tilde{b}},\quad \overline{\tilde{a}\wedge\tilde{b}}=\overline{\tilde{a}}\vee\overline{\tilde{b}}$ – де Моргана (28)

$\overline{\overline{\tilde{a}}}=\tilde{a}$ – двойного отрицания (29)

$\tilde{a}\wedge A=A,\ \tilde{a}\wedge B=\tilde{a},\ \tilde{a}\vee A=\tilde{a},\ \tilde{a}\wedge B=B$ – действий с константами (30)

$\overline{\tilde{a}+\tilde{b}}=\overline{\tilde{a}}-\tilde{b}=\overline{\tilde{b}}-\tilde{a}$ – спуска отрицания на слагаемые (31)

Теперь перечислим законы интервальной НЛ, отличающиеся от соответствующих законов обычной НЛ.

$\tilde{a}\vee(\tilde{a}\wedge\tilde{b})\supseteq\tilde{a},\ \tilde{a}\wedge(\tilde{a}\vee\tilde{b})\supseteq\tilde{a}$ – субпоглощения (32)

Доказательство закона (32). Согласно определению (19) произвольного интервала $\tilde{a}$ и с учетом закона (8) поглощения обычной НЛ $\tilde{a}=\{a|a\in\tilde{a}\}\subseteq\{a\vee(a'\wedge b)|\ a,a'\in\tilde{a},\ b\in\tilde{b}\}=\tilde{a}\vee(\tilde{a}\wedge\tilde{b})$, доказывается первое включение (32). Доказательство второго включения аналогично. В выписанной цепочке равенств знак включения $\subseteq$, а не равенства стоит потому, что переменные a и a', являясь независимыми переменными, могут принимать любые, в том числе неравные, значения из множества $\tilde{a}$.

$\tilde{a}\wedge(\tilde{b}\vee\tilde{c})\subseteq(\tilde{a}\wedge\tilde{b})\vee(\tilde{a}\wedge\tilde{c}),$ – субраспределительный (33)

$\tilde{a}\vee(\tilde{b}\wedge\tilde{c})\subseteq(\tilde{a}\vee\tilde{b})\wedge(\tilde{a}\vee\tilde{c}),$

Доказательство закона (33) аналогично доказательству закона (32), причем используется соответствующий закону (33) закон (6) обычной НЛ. Последующие 4 закона также доказываются аналогично закону (32):

$$\left.\begin{array}{l}\tilde{a}+(\tilde{b}\vee\tilde{c})\subseteq(\tilde{a}+\tilde{b})\vee(\tilde{a}+\tilde{c})\\ \tilde{a}-(\tilde{b}\vee\tilde{c})\subseteq(\tilde{a}-\tilde{b})\wedge(\tilde{a}-\tilde{c})\end{array}\right\}\ \begin{array}{l}\text{субраспределительный для}\\ \text{сложения}\\ \text{относительно дизъюнкции}\end{array}\quad (34)$$

$$\left.\begin{array}{l}\tilde{a}+(\tilde{b}\wedge\tilde{c})\subseteq(\tilde{a}+\tilde{b})\wedge(\tilde{a}+\tilde{c})\\ \tilde{a}-(\tilde{b}\wedge\tilde{c})\subseteq(\tilde{a}-\tilde{b})\vee(\tilde{a}-\tilde{c})\end{array}\right\}\ \begin{array}{l}\text{субраспределительный для}\\ \text{сложения}\\ \text{относительно конъюнкции}\end{array}\quad (35)$$

$$\left.\begin{array}{l}\tilde{a}\cdot(\tilde{b}\vee\tilde{c})\subseteq(\tilde{a}\cdot\tilde{b})\vee(\tilde{a}\cdot\tilde{c}),\quad \tilde{a},\tilde{b},\tilde{c}>0\\ -\tilde{a}\cdot(\tilde{b}\vee\tilde{c})\subseteq(-\tilde{a}\cdot\tilde{b})\wedge(-\tilde{a}\cdot\tilde{c}),\ \tilde{a},\tilde{b},\tilde{c}>0\end{array}\right\}\quad (36)$$

субраспределительный для умножения относительно дизъюнкции;

$$\left.\begin{array}{l}\tilde{a}\cdot(\tilde{b}\wedge\tilde{c})\subseteq(\tilde{a}\cdot\tilde{b})\wedge(\tilde{a}\cdot\tilde{c}),\quad \tilde{a},\tilde{b},\tilde{c}>0\\ -\tilde{a}\cdot(\tilde{b}\wedge\tilde{c})\subseteq(-\tilde{a}\cdot\tilde{b})\vee(-\tilde{a}\cdot\tilde{c}),\ \tilde{a},\tilde{b},\tilde{c}>0\end{array}\right\}\quad (37)$$

субраспределительный для умножения относительно конъюнкции;

$\tilde{a} \wedge \bar{\bar{\tilde{a}}} = M - |\tilde{a} - M| \operatorname{sgn}(M_{\tilde{a}} - M)$ – псевдопротиворечия (38)

(здесь $M=(A+B)/2$ – центр множества-носителя $C=[A,B]$ алгебры (22), $M_{\tilde{a}}=(a_1+a_2)/2$ – центр интервала $\tilde{a}=[a_1,a_2]$,

$$\operatorname{sgn} x = \begin{cases} 1, & x \geq 0; \\ -1, & x < 0. \end{cases}$$

Доказательство закона (38). Рассмотрим два возможных случая: 1) $M \not\subset \tilde{a}$, 2) $M \subset \tilde{a}$. В случае 1 имеем с учетом симметричного расположения $\tilde{a}$ и $\bar{\bar{\tilde{a}}}$ относительно точки M и теоремы 3

$$\tilde{a} \wedge \bar{\bar{\tilde{a}}} = \left\{ \begin{array}{ll} \tilde{a}, & \tilde{a} < M \\ \bar{\bar{\tilde{a}}} = 2M - \tilde{a}, & \tilde{a} \geq M \end{array} \right| = \left\{ \begin{array}{l} M + (\tilde{a} - M),\ M_{\tilde{a}} < M \\ M - (\tilde{a} - M),\ M_{\tilde{a}} \geq M \end{array} \right| =$$

$= M - (\tilde{a} - M) \operatorname{sgn}(M_{\tilde{a}} - M)$.

В случае 2 имеем с учетом теоремы 3 и того, что относительная сдвинутость двух интервалов $\tilde{a}$ и $\bar{\bar{\tilde{a}}}$ равносильна соответствующей сдвинутости их центров $M_{\tilde{a}}$ и $M_{\bar{\bar{\tilde{a}}}}$, между которыми находится точка M:

$$\tilde{a} \wedge \bar{\bar{\tilde{a}}} = \left\{ \begin{array}{ll} \tilde{a}, & M_{\tilde{a}} < M_{\bar{\bar{\tilde{a}}}} \\ \bar{\bar{\tilde{a}}} = 2M - \tilde{a}, & M_{\tilde{a}} \geq M_{\bar{\bar{\tilde{a}}}} \end{array} \right| = \left\{ \begin{array}{l} M + (\tilde{a} - M),\ M_{\tilde{a}} < M \\ M - (\tilde{a} - M),\ M_{\tilde{a}} \geq M \end{array} \right| =$$

$= M - (\tilde{a} - M) \operatorname{sgn}(M_{\tilde{a}} - M)$.

Таким образом, в обоих случаях тождество (38) выполнено, что и доказывает данный закон.

$\tilde{a} \vee \bar{\bar{\tilde{a}}} = M + (\tilde{a} - M) \operatorname{sgn}(M_{\tilde{a}} - M)$ – псевдоисключенного третьего (39)

(здесь $M, M_{\tilde{a}}$ и $\operatorname{sgn} x$ – те же, что и в законе (38)).

Доказательство закона (39) аналогично доказательству закона (38).

$\tilde{a} \vee (\bar{\bar{\tilde{a}}} \wedge \tilde{b}) \subseteq (\tilde{a} \vee \tilde{b}) \wedge [M + (\tilde{a} - M) \operatorname{sgn}(M_{\tilde{a}} - M)]$ –

субортогональности (40)

(M, $M_{\tilde{a}}$ и $\operatorname{sgn} x$ – те же).

Доказательство закона (40). Положив во втором выражении (33) $\tilde{c} = \bar{\bar{\tilde{a}}}$, получим $\tilde{a} \vee (\bar{\bar{\tilde{a}}} \wedge b) \subseteq (\tilde{a} \vee \tilde{b}) \wedge (\tilde{a} \vee \bar{\bar{\tilde{a}}})$, откуда после замены $(\tilde{a} \vee \bar{\bar{\tilde{a}}})$ по формуле (39) получим (40).

$\tilde{a} \wedge (\bar{\bar{\tilde{a}}} \vee \tilde{b}) \subseteq (\tilde{a} \wedge \tilde{b}) \vee [M + (\tilde{a} - M) \operatorname{sgn}(M_{\tilde{a}} - M)]$ –

субортогональности (41)

(M, $M_{\tilde{a}}$, $\operatorname{sgn} x$ – те же).

Доказательство закона (41) аналогично доказательству закона

(40) и использует первое выражение (33) и формулу (38).

Законы интервальной НЛ (25)–(31), (38), (39), в форме тождеств, можно использовать для эквивалентных преобразований логических выражений для приведения к наиболее простому (удобному) виду. Законы (32)–(37), (40), (41), в форме включений, можно использовать только для оценки логических выражений.

Применения интервальной непрерывной логики

Интервальная НЛ может найти широкое применение в задачах управления, вычислительной и измерительной техники, экономики и т.д. при наличии неопределенности. Ограничимся тремя примерами.

1. Геометрическое моделирование. Пусть задана точно некоторая кривая, характеризующая объект управления; требуется описать ее аналитически соответствующим уравне-

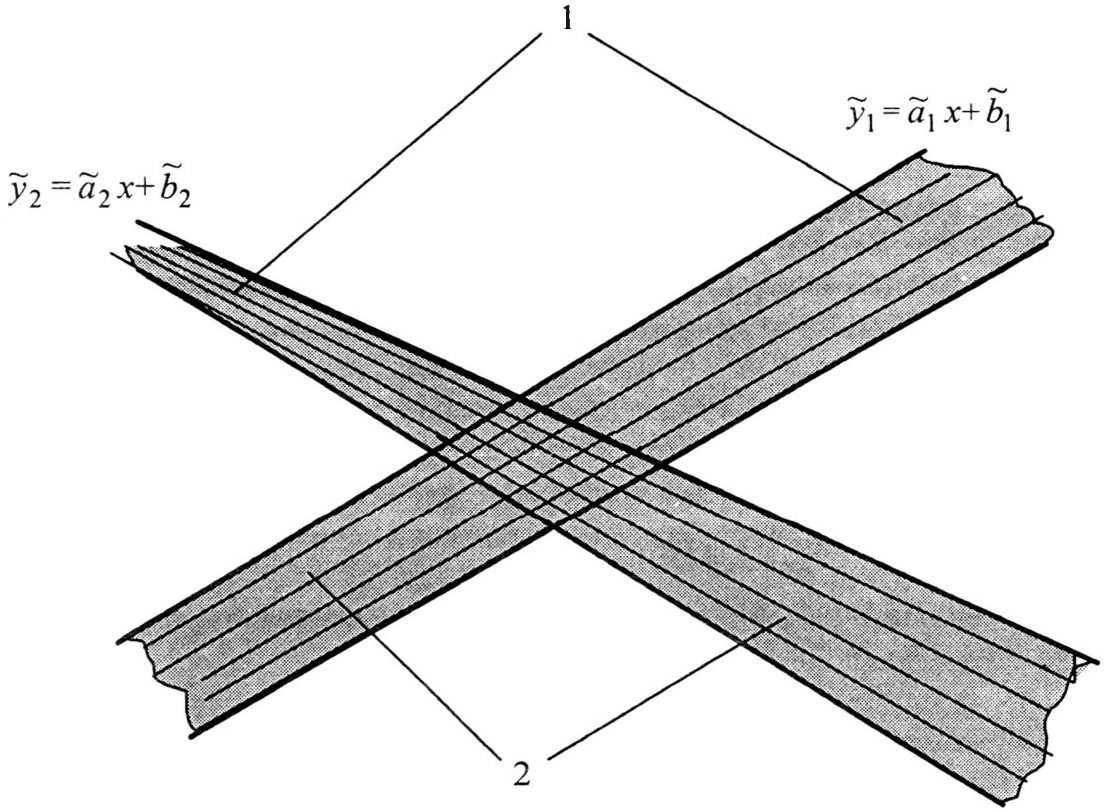


Рисунок. Размытая (интервальная) кривая, полученная пересечением интервальных прямых (1 – вогнутая, 2 – выпуклая).

нием [19]. В случае сложных (изломанных, разрывных и т.д.) кривых решение данной задачи с помощью НЛ обычно требует меньше исходных параметров и проще описывает объект, чем другие методы [17, 19]. Так, изломанную кривую, полученную пересече-

нием двух прямых a_1x+b_1 и a_2x+b_2 можно записать аналитически

$$y=(a_1x+b_1)\overset{\vee}{\wedge}(a_2x+b_2), \qquad (42)$$

где операция конъюнкции НЛ берется для выпуклой кривой, а операция дизъюнкции НЛ – для вогнутой.

Представление (42) не требует знания даже точки пересечения прямых, и потому оно особенно простое. Пусть теперь параметры указанных прямых известны не точно, а приближенно – в виде интервалов возможных значений $\tilde{a}_1=[a_{11},a_{12}]$, $\tilde{b}_1=[b_{11},b_{12}]$, $\tilde{a}_2=[a_{21},a_{22}]$, $\tilde{b}_2=[b_{21},b_{22}]$. Тогда каждая прямая в любой точке X принимает не одно значение, а интервал возможных значений: $\tilde{y}_1=\tilde{a}_1x+\tilde{b}_1$, $\tilde{y}_2=\tilde{a}_2x+\tilde{b}_2$. Как видим, исходные прямые превратились теперь в полосы с линейно возрастающей при увеличении x толщиной (см. рис.). Образующуюся при их пересечении размытую интервально кусочно-линейную кривую можно записать аналитически подобно (42)

$$\tilde{y}=(\tilde{a}_1x+\tilde{b}_1)\overset{\vee}{\wedge}(\tilde{a}_2x+b_2), \qquad (43)$$

где операция конъюнкции интервальной НЛ берется для выпуклой кривой, а операция дизъюнкции интервальной НЛ – для вогнутой. Получаемые изломанные интервальные кривые (43) показаны на рис. Представления типа (43) верны также для кривых.

2. Д и н а м и к а а в т о м а т о в. Пусть в элементарном дискретном автомате с двумя двоичными входами x_1 и x_2, одним двоичным выходом y и реализуемой булевой функцией конъюнкция: $y=x_1\&x_2$, x_1, x_2, $y\in\{0,1\}$ на входы действуют двоичные точно известные процессы

$$x_1(t)=\begin{cases}0, & t<a,\\ 1, & t\geq a,\end{cases} \qquad x_2(t)=\begin{cases}0, & t<b,\\ 1, & t\geq b,\end{cases} \qquad (44)$$

Двоичный процесс $y(t)$ на выходе автомата – реакция на заданные входные процессы $x_1(t)$, $x_2(t)$. При обозначении $1(A,B)$ двоичного процесса в виде импульса в интервале времени (A,B) $y(t)$ равен импульсу $1(a,b)$ при b≥a и постоянному 0 при $b<a$. Интерпретируя постоянный 0 как импульс $1(a,a)$ с совпадающими началом и концом и используя операцию дизъюнкции НЛ, получим выражение выходного процесса $y(t)$ в виде

$$y(t)=\begin{cases}1(a,b), & b\geq a\\ 0=1(a,a), & b<a\end{cases}=1(a,\ a\vee b) \qquad (45)$$

Аналогично находятся выходные процессы в других элементарных автоматах и при других входных процессах. На базе этих расчетов строятся расчеты выходных процессов в произволь-

ных дискретных автоматах, собранных из элементарных автоматов [8, 17–19]. Пусть теперь временные параметры a, b входных процессов изученного элементарного автомата известны не точно, а приближенно – в виде интервалов возможных значений $\tilde{a}=[a_1,a_2]$, $\tilde{b}=[b_1,b_2]$. Тогда двоичные процессы на входах автомата можно записать в виде

$$x_1(t)=\begin{cases}0, & t<\tilde{a}=[a_1,a_2],\\ 1, & t\geq\tilde{a}=[a_1,a_2],\end{cases}\qquad x_2(t)=\begin{cases}1, & t<\tilde{b}=[b_1,b_2],\\ 1, & t\geq\tilde{b}=[b_1,b_2].\end{cases}\qquad(46)$$

Ясно, что сравнение двух интервалов по отношениям $>$, $\geq$ возможно, лишь если дизъюнкция интервальной НЛ дает один из них (больший), а конъюнкция – другой (меньший), а для этого согласно теореме 3 интервалы должны быть сдвинуты относительно друг друга либо совпадать. Применительно к записанным процессам $x_1(t)$, $x_2(t)$ это означает наличие эквивалентностей $(t<\tilde{a})\Leftrightarrow(t\leq a_1)$, $(t\geq\tilde{a})\Leftrightarrow(t\geq a_2)$, $(t<\tilde{b})\Leftrightarrow(t\leq b_1)$, $(t\geq\tilde{b})\Leftrightarrow(t\geq b_2)$. Так что заданные двоичные входные процессы можно записать как

$$x_1(t)=\begin{cases}0, & t\leq a_1,\\ \Theta, & a_1<t<a_2\\ 1, & t\geq a_2,\end{cases}\qquad x_2(t)=\begin{cases}1, & t\leq b_1,\\ \Theta, & b_1<t<b_2\\ 0, & t\geq b_2.\end{cases}$$

где Θ – состояние неопределенности процесса, промежуточное между 0 и 1. Видим, что процессы на входах автомата – это переключения из 0 в 1 (из 1 в 0), но не мгновенные в момент a (момент b), как раньше, а затянутые на интервале времени $\tilde{a}=(a_1,a_2)$ (интервале $\tilde{b}=\tilde{a}=(b_1,b_2)$), где состояния процессов логически не определены. Для нахождения процесса $y(t)$ на выходе автомата при новых, неопределенных входных процессах $x_1(t)$, $x_2(t)$ применим метод раздетерминизации [18]. Для этого сначала детерминизируем входные процессы (46), положив $a_1=a_2=a$, $b_1=b_2=b$. Тогда эти процессы примут вид (44), а соответствующий выходной процесс – вид (45) единичного импульса в указанном интервале времени. Совершая теперь обратное преобразование $a\to\tilde{a}$, $b\to\tilde{b}$, т.е. раздетерминизируя снова входные процессы по условию задачи, получим выходной процесс $y(t)$ в виде $y(t)=1(\tilde{a},\tilde{a}\vee\tilde{b})$ единичного импульса с затянутыми передним (на интервале $\tilde{a}$) и задним (на интервале $\tilde{a}\vee\tilde{b}$) фронтами. После подстановки значений $\tilde{a}=[a_1,a_2]$, $\tilde{b}=[b_1,b_2]$ и выполнения дизъюнкции НЛ (23) над интервалами получим окончательно выходной процесс автомата с входными процессами (46)

$y(t)=1([a_1,a_2],[a_1\vee b_1,a_1\vee b_2])=$

$$= \begin{cases} \Theta(a_1, a_2)1(a_2, a_1 \vee b_1)\Theta(a_1 \vee b_1, a_2 \vee b_2), & a_2 \le a_1 \vee b_1 \\ \Theta(a_1, a_2 \vee b_2) = \Theta(a_1, a_2)1(a_2, a_2)\Theta(a_2, a_2 \vee b_2), & a_2 > a_1 \vee b_1 \end{cases},$$

или, объединяя два выражения с помощью дизъюнкции НЛ (1),

$$y(t)=\Theta(a_1,a_2)1(a_2,a_2 \vee b_1)\Theta(a_2 \vee b_1, a_2 \vee b_2) \qquad (47)$$

Выражения вида (47) получаются при расчетах динамики в условиях неопределенности и более сложных автоматов, чем рассмотренный [18].

3. Дискретная оптимизация. Пусть надо распределить 3 кандидатов по 3 должностям так, чтобы все должности были заняты, все кандидаты трудоустроены, а суммарная эффективность была максимальной. При этом значения a_{ij} эффективности кандидатов i в должностях j (i,j=1,3) известны лишь с точностью до интервала возможных значений: $\tilde{a}_{ij}=[a_{ij1},a_{ij2}]$. Детерминированный вариант этой задачи с точно известными эффективностями a_{ij} рассмотрен в [10, 13, 17, 19]. Сейчас используем аналогичный подход. Каждому распределению должностей соответствует своя распределяющая сумма элементов матрицы эффективности $\tilde{A}=\| \tilde{a}_{ij} \|$, включающая ровно по одному элементу из каждой строки и каждого столбца $\tilde{A}$. Поэтому задача сводится к отысканию максимальной распределяющей суммы $\tilde{A}^0$ элементов матрицы $\tilde{A}$. Общее выражение этой суммы при помощи операций интервальной НЛ, дающее алгоритм полного перебора для отыскания $\tilde{A}^0$, есть

$$\tilde{A}^0=(\tilde{a}_{11}+\tilde{a}_{22}+\tilde{a}_{33})\vee(\tilde{a}_{11}+\tilde{a}_{23}+\tilde{a}_{32})\vee(\tilde{a}_{12}+\tilde{a}_{21}+\tilde{a}_{33})\vee \qquad (48)$$
$$\vee(\tilde{a}_{12}+\tilde{a}_{23}+\tilde{a}_{31})\vee(\tilde{a}_{13}+\tilde{a}_{21}+\tilde{a}_{32})\vee(\tilde{a}_{13}+\tilde{a}_{22}+\tilde{a}_{31}).$$

Согласно алгоритму (48) для решения задачи надо: 1) вычислить все скобки в (48), используя правило сложения интервалов $[a_1,a_2]+[b_1,b_2]=[a_1+b_1,\ a_2+b_2]$ [20]; 2) выделить максимальную скобку, считая определением большего (меньшего) из двух интервалов $\tilde{a}$ и $\tilde{b}$ такую эквивалентность [21]: $(\tilde{a} \ge \tilde{b}) \Leftrightarrow (\tilde{a} \vee \tilde{b} = \tilde{a}$, $\tilde{a} \wedge \tilde{b} = \tilde{b}$, где $\vee$ и $\wedge$ -- дизъюнкция и конъюнкция (21) интервальной НЛ; при этом согласно теореме 3 правило сравнения интервалов оказывается таким [21]:

$$(\tilde{a}=[a_1,a_2] \ge \tilde{b}=[b_1,b_2]) \Leftrightarrow (a_1 \ge b_1, a_2 \ge b_2). \qquad (49)$$

Выделенная максимальная скобка в (48) и определит оптимальное распределение должностей между кандидатами. Например, если $(\tilde{a}_{11}+\tilde{a}_{23}+\tilde{a}_{32})$=max, то оптимально такое распределение: кандидат 1 занимает должность 1, кандидат 2 – должность 3, а кандидат 3 – должность 2.

Заключение

Предложенный вариант построения непрерывной логики (НЛ) с неопределенными (неточно заданными) параметрами – интервальная НЛ – позволяет выполнять все традиционные логические операции над переменными, известными лишь с точностью до интервалов возможных значений. Это открывает возможность изучения с помощью логических методов более широкого, чем прежде, класса систем – неопределенных (с интервальными параметрами), внося в это изучение свойственные таким методам преимущества. Эти преимущества – конструктивность, т.е. взаимнооднозначное соответствие между логическими выражениями и реализующими их алгоритмами или схемами; обозримость, т.е. возможность осмысленного представления с помощью логических выражений систем высокой размерности; формализуемость, т.е. возможность полностью формализованного анализа и синтеза изучаемых прикладных систем с помощью подходящих эквивалентных логических преобразований (законов). Вместе с тем, не все достоинства логических методов сохраняются в полной мере и в интервальной НЛ. Это вызвано тем, что часть законов интервальной НЛ, в отличие от традиционных логик, вообще не являются эквивалентными логическими преобразованиями, а носят лишь оценочный характер [законы (32)–(37), (40), (41)], а часть законов, являющихся такими преобразованиями, существенно усложняются [законы (38), (39)]. Такое уменьшение возможностей логических методов при переходе к интервальной НЛ следует рассматривать как неизбежную плату за получаемую возможность изучения с помощью логических методов систем в условиях неопределенности, когда параметры системы известны лишь с точностью до интервалов возможных значений.

ЛИТЕРАТУРА

1. *Мак-Нотон Р.* Теорема о бесконечнозначной логике высказываний // Кибернетический сб. Вып. 3. М.: Изд-во иностр. лит. 1961. С. 5–78.
2. *Schaefer D.H.* A rectifier algebra // Trans. American Inst. Electrical Eng. 1955. V. 73. № 1. P. 679–682.
3. *Гинзбург С.А.* Математическая непрерывная логика и изображение функций. М.: Энергия, 1968.
4. *Иванов Л.Л.* Начала аналитической теории разрывных функций и расчет нелинейных цепей // Электричество. 1960. №9. С. 23–29.
5. *Гинзбург С.А.* Непрерывная логика и ее применения // Автоматика и телемеханика. 1967. №2. С. 115–132.
6. *Рвачев В.Л.* Геометрические приложения алгебры логики. Киев: Техника, 1967.

7. *Гинзбург С.А., Любарский Ю.Я.* Функциональные преобразователи с аналогово-цифровым представлением информации. М.: Энергия, 1973.
8. *Левин В.И.* Динамика логических устройств и систем. М.: Энергия, 1980.
9. *Коффман А.* Введение в теорию нечетких множеств. М.: Радио и связь, 1982.
10. *Левин В.И.* Бесконечнозначная логика в задачах кибернетики. М.: Радио и связь, 1982.
11. *Левин В.И.* Логическая теория надежности сложных систем. М.: Энергоатомиздат, 1985.
12. *Золотова Т.М., Кербников Ф.И., Розенблат М.А.* Резервирование аналоговых устройств автоматики. М.: Энергоатомиздат, 1986.
13. *Левин В.И.* Структурно-логические методы исследования сложных систем. М.: Наука, 1987.
14. *Беркович Е.И.* Непрерывнозначная логика в задачах микроэлектроники // Опыт, результаты, проблемы. Повышение конкурентоспособности радиоэлектронной аппаратуры. Таллинн: Валгус, 1988. С. 165–201.
15. *Волгин Л.И.* Синтез устройств для обработки и преобразования информации в элементном базисе реляторов. Таллинн: Валгус, 1989.
16. *Шимбирев П.Н.* Гибридные непрерывно-логические устройства. М.: Энергоатомиздат, 1990.
17. *Волгин Л.И., Левин В.И.* Непрерывная логика: Теория и применения. Таллинн: АН Эстонии, 1990.
18. *Левин В.И.* Теория динамических автоматов. Пенза: Изд-во Пенз. гос. техн. ун-та. 1995.
19. *Левин В.И.* Методы непрерывной логики в задачах управления // Автоматика и телемеханика. 2003. № 3. С. 28–51.
20. *Алефельд Г., Херцбергер Ю.* Введение в интервальные вычисления. М.: Мир, 1987.
21. *Левин В.И.* Дискретная оптимизация в условиях интервальной неопределенности // Автоматика и телемеханика. 1992. № 7. С. 97–107.

В.И.Маркин

ФУНДАМЕНТАЛЬНАЯ СИЛЛОГИСТИКА С НЕОПРЕДЕЛЕННО-МЕСТНОЙ КОНСТАНТОЙ*

Abstract. *The paper concerns the problem of the representation of all possible extensional relations among any finite list of the universal terms by means of positive syllogistic – syllogistic without negative and other complex terms. I introduce new syllogistic constant @ with indefinite arity. The atomic formulae are of the type* $S_1S_2...S_n@P_1P_2...P_m$, *where* $n+m \geq 1$, *complex formulae are constructed by means of the propositional connectives. I offer the following translation * from the syllogistic language into the language of predicate calculus:* $(S_1S_2...S_n@P_1P_2...P_m)^* = \neg\exists x(S_1x \,\&\, S_2x \,\&...\&\, S_nx \,\&\, \neg P_1x \,\&\, \neg P_2x \,\&...\&\, \neg P_mx)$, $(\neg A)^* = \neg A^*$, $(A \nabla B)^* = A^* \nabla B^*$, *where* ∇ *is any binary connective. I formulate a syllogistic system which is the generalization of the fundamental positive syllogistic and prove that it is embedded into the classical predicate calculus under the translation **.

Силлогистику обычно понимают как теорию правильных рассуждений, основанных на объемных отношениях в сфере общих терминов – субъектов и предикатов категорических высказываний. Силлогистические константы при этом можно рассматривать как знаки отношений между терминами по объему. Например, константа **a** выступает в фундаментальной силлогистике в качестве аналога отношения включения объема субъекта в объем предиката, константа **i** – в качестве аналога отношения совместимости терминов высказывания по объему.

Однако не всякое объемное отношение можно адекватно выразить формулой в стандартных системах позитивной силлогистики (силлогистики, язык которой содержит лишь простые общие термины). Так, если отношения между множествами устанавливаются в фиксированном универсуме, то наряду с включением и совместимостью можно выделить еще одно фундаментальное объемное отношение – *отношение исчерпываемости* (объединение объемов субъекта и предиката совпадает с универсумом), которое не выразимо в рамках силлогистик указанного типа. В [2] мною были построены обобщения двух систем позитивной силлогистики – фундаментальной и традиционной силлогистик – за счет введения дополнительной константы **u** (аналога отношения исчерпываемости), в которых данный недостаток устраняется.

* Работа выполнена при поддержке РГНФ, грант № 03-03-00193а.

Ограниченность выразительных возможностей позитивной силлогистики связана также и с иным обстоятельством: все ее силлогистические константы являются бинарными, поэтому некоторые объемные отношения между тремя или более терминами невозможно адекватно эксплицировать посредством формул ее языка.

Приведем примеры подобных отношений:

(1) "термины $S_1,S_2,\ldots,S_n$ (n>2) совместимы по объему";

(2) "объемы терминов $P_1,P_2,\ldots,P_m$ исчерпывают универсум";

(3) "объем S включается в объединение объемов $P_1,P_2,\ldots,P_m$";

(4) "пересечение объемов $S_1,S_2,\ldots,S_n$ включается в объем P".

Для того чтобы получить возможность выражать такого рода отношения в силлогистической теории, ее язык обычно пополняют логическими символами новой категории – так называемыми *терминными операторами*: терминным отрицанием (аналогом операции дополнения), терминной конъюнкцией (аналогом пересечения) и терминной дизъюнкцией (аналогом объединения) и вводят в сферу рассмотрения – наряду с примитивными – сложные (отрицательные, конъюнктивные, дизъюнктивные) термины на местах субъектов и предикатов. Строящиеся в указанном языке *расширенные силлогистики* являются весьма сильными дедуктивными системами: так, В.А. Бочаров [1] и В.А. Смирнов [3] показали, что расширенный за счет введения сложных терминов вариант позитивной силлогистики **C2** дефинициально эквивалентен булевой алгебре.

Данный подход предполагает принятие в силлогистике логических символов принципиально новой синтаксической категории: если константы **a**, **i**, **e**, **o** относятся к числу высказываниеобразующих функторов, то терминные отрицание, конъюнкция и дизъюнкция представляют собой терминообразующие операторы.

Я предлагаю иной способ решения проблемы силлогистического представления всех возможных отношений между объемами произвольного конечного числа терминов, который не столь радикально изменяет категориальную сетку позитивной силлогистики. Он состоит во ведении в ее язык (в качестве исходной) одной *неопределенно-местной* силлогистической константы – **@**.

В алфавите содержится также бесконечный список общих силлогистических терминов (в качестве синтаксических метапеременных для них будем использовать S, P, Q, R, M, возможно с индексами), классические пропозициональные связки и скобки.

Атомарные формулы языка имеют вид $S_1S_2\ldots S_n@P_1P_2\ldots P_m$, где $S_1,S_2,\ldots,S_n,P_1,P_2,\ldots,P_m$ – произвольные общие термины и $n+m \geq 1$. В дальнейшем последовательности (возможно пустые) общих терми-

нов будем также (в метаязыке) обозначать малыми латинскими буквами s, p, q, r. Сложные формулы образуются с помощью пропозициональных связок.

Смысл силлогистических формул может быть эксплицирован посредством следующего их перевода * в язык одноместного исчисления предикатов:

$$(S_1S_2...S_n@P_1P_2...P_m)^* = \neg\exists x(S_1x \,\&\, S_2x \,\&...\&\, S_nx \,\&\, \&\neg P_1x \,\&\, \neg P_2x \,\&...\&\, \neg P_mx),$$

$$(\neg A)^* = \neg A^*, \quad (A \nabla B)^* = A^* \nabla B^*,$$

где ∇ – произвольная бинарная связка.

Стандартные категорические высказывания записываются в нашем языке следующим образом: "Всякий S есть P" – $S@P$, "Ни один S не есть P" – $SP@$, "Некоторый S есть P" – $\neg SP@$, "Некоторый S не есть P" – $\neg S@P$.

Информация о пустоте термина S передается, в соответствии с переводом *, формулой $S@$, а информация о его универсальности – формулой $@S$.

Приведенные выше отношения, не выразимые средствами позитивной силлогистики, эксплицируются посредством следующих формул: (1) – $\neg S_1S_2...S_n@$, (2) – $@P_1P_2...P_m$, (3) – $S@P_1P_2...P_m$, (4) – $S_1S_2...S_n@P$.

Перевод * является обобщением стандартного, принятого в математической логике перевода категорических высказываний в язык логики предикатов. Последний адекватен системе фундаментальной позитивной силлогистики.

Сформулируем исчисление **ФС@** обобщенной позитивной фундаментальной силлогистики в языке с единственной силлогистической константой @ и докажем ее адекватность переводу *.

Схемами аксиом **ФС@** являются:

A0. Схемы аксиом классического исчисления высказываний,

A1. $(Mq@r \,\&\, s@pM) \supset sq@pr$, где по крайней мере одна из последовательностей терминов – s, q, p или r – не является пустой.

A2. $S@S$,

A3. $sSPp@q \supset sPSp@q$,

A4. $s@pSPq \supset s@pPSq$,

A5. $SSs@p \supset Ss@p$,

A6. $s@pPP \supset s@pP$,

A7. $s@p \supset Ss@p$,

A8. $s@p \supset s@pP$,

A9. $\neg(S@ \,\&\, @S)$.

Единственное правило вывода в **ФС@** – *modus ponens*.

Налицо удивительное сходство некоторых схем аксиом обобщенной силлогистики с постулатами генценовского секвенциального исчисления. Так, **A2** напоминает основную секвенцию, **A1** –

правило сечения, **A3** и **A4** – правила перестановки, **A5** и **A6** – правила сокращения, **A7** и **A8** – правила утончения (добавления).

Аксиома **A9** в этом ряду стоит особняком. Ее семантический смысл – в постулировании непустоты исходной предметной области (универсума).

Для демонстрации погружаемости силлогистической системы **ФС@** в одноместное классическое исчисление предикатов посредством перевода * зададим сначала ее теоретико-множественную семантику и докажем ее адекватность приведенному исчислению.

Моделью назовем пару <**D**, φ>, где **D** ≠ ∅, а φ есть функция приписывания значений общим силлогистическим терминам: $\varphi(Q) \subseteq \mathbf{D}$. С каждой моделью <**D**, φ> связывается *функция означивания*, сопоставляющая всякой формуле языка либо **1**, либо **0**. Означивание атомарных формул определяется следующим образом:

$$|S_1S_2\ldots S_n@P_1P_2\ldots P_m| = \mathbf{1}, \text{ е.т.е. } \varphi(S_1)\cap\varphi(S_2)\cap\ldots\cap\varphi(S_n)\cap$$
$$\cap(\mathbf{D}\backslash\varphi(P_1))\cap(\mathbf{D}\backslash\varphi(P_2))\cap\ldots\cap(\mathbf{D}\backslash\varphi(P_m)) = \varnothing.$$

Правила означивания сложных формул обычные.

Силлогистическая формула ***A*** *значима в модели* <**D**, φ>, е.т.е. $|A| = \mathbf{1}$ в этой модели. Формула ***A*** *общезначима*, е.т.е. она истинна в каждой модели указанного типа.

Докажем метатеорему о семантической непротиворечивости:

Метатеорема 1. *Всякая формула, доказуемая в исчислении* **ФС@**, *общезначима.*

Продемонстрируем общезначимость аксиом нашей системы.

Аксиомы **A0** общезначимы, поскольку пропозициональные связки интерпретируются в семантике классически.

A1. $(Mq@r \;\&\; s@pM) \supset sq@pr$.

Примем следующие обозначения:

q есть $Q_1Q_2\ldots Q_i$, а $E^q = \varphi(Q_1)\cap\varphi(Q_2)\cap\ldots\cap\varphi(Q_i)$;

r есть $R_1R_2\ldots R_j$, а $E^r = (\mathbf{D}\backslash\varphi(R_1))\cap(\mathbf{D}\backslash\varphi(R_2))\cap\ldots\cap(\mathbf{D}\backslash\varphi(R_j))$;

s есть $S_1S_2\ldots S_n$, а $E^s = \varphi(S_1)\cap\varphi(S_2)\cap\ldots\cap\varphi(S_n)$;

p есть $P_1P_2\ldots P_m$, а $E^p = (\mathbf{D}\backslash\varphi(P_1))\cap(\mathbf{D}\backslash\varphi(P_2))\cap\ldots\cap(\mathbf{D}\backslash\varphi(P_m))$.

+1. $|(Mq@r \;\&\; s@pM) \supset sq@pr| = \mathbf{0}$.

2. $|Mq@r| = \mathbf{1}$ 1;

3. $|s@pM| = \mathbf{1}$ 1;

4. $|sq@pr| = \mathbf{0}$ 1;

5. $\varphi(M)\cap E^q\cap E^r = \varnothing$ 2;

6. $E^s\cap E^p\cap(\mathbf{D}\backslash\varphi(M)) = \varnothing$ 3;

7. $E^s\cap E^q\cap E^p\cap E^r \neq \varnothing$ 4;

8. $\varphi(M) \subseteq \mathbf{D}$ опр. φ;

9. $E^s \cap E^q \cap E^p \cap E^r \subseteq \mathbf{D}$ опр. φ;
10. $\varphi(M) \cap E^s \cap E^q \cap E^p \cap E^r \neq \varnothing$ или
$E^s \cap E^q \cap E^p \cap E^r \cap (\mathbf{D} \backslash \varphi(M)) \neq \varnothing$ 7,8,9;
11. $\varphi(M) \cap E^s \cap E^q \cap E^p \cap E^r \neq \varnothing \Rightarrow \varphi(M) \cap E^q \cap E^r \neq \varnothing$ св-во ∩;
12. $E^s \cap E^q \cap E^p \cap E^r \cap (\mathbf{D} \backslash \varphi(M)) \neq \varnothing \Rightarrow E^s \cap E^p \cap (\mathbf{D} \backslash \varphi(M)) \neq \varnothing$ св-во ∩;
13. $\varphi(M) \cap E^q \cap E^r \neq \varnothing$ или $E^s \cap E^p \cap (\mathbf{D} \backslash \varphi(M)) \neq \varnothing$ 10,11,12;
14. $E^s \cap E^p \cap (\mathbf{D} \backslash \varphi(M)) \neq \varnothing$ 13,5;

Противоречие 6 и 14.

A2 общезначима, поскольку $\varphi(S) \cap (\mathbf{D} \backslash \varphi(S)) = \varnothing$.

A3 и **A4** общезначимы в силу коммутативности ∩.

A5 и **A6** общезначимы в силу закона идемпотентности.

A7 и **A8** общезначимы в силу следующего свойства ∩: если пересечение двух множеств пусто, то пусто и его пересечение с третьим множеством.

A9 общезначима, поскольку, по определению модели, универсум **D** непуст.

Правило *modus ponens* сохраняет свойство "быть общезначимой формулой". □

Обратную метатеорему – метатеорему о семантической полноте предложенной системы обобщенной силлогистики – будем доказывать методом Хенкина.

Множество формул Г силлогистического языка назовем *непротиворечивым*, е.т.е. формула $\neg(A_1 \,\&\, A_2 \,\&\, \ldots \,\&\, A_n)$ не доказуема в исчислении **ФС@** ни для каких $A_1, A_2, \ldots, A_n$ из Г.

Пусть **T** – произвольное непустое множество общих терминов. Множество формул Δ назовем *максимальным относительно множества* **T**, е.т.е. (1) Δ является непротиворечивым; (2) формулы из Δ не содержат терминов, отсутствующих в **T**; (3) для любой формулы A подобного типа верно, что $A \in \Delta$ или $\neg A \in \Delta$.

Пусть $\mathbf{T}_1$ и $\mathbf{T}_2$ – множества терминов, а Δ_1 и Δ_2 – множества формул. Докажем следующую лемму:

Лемма 1. *Если* Δ_1 *максимально относительно множества* $\mathbf{T}_1$, *каждый термин, входящий в множество* $\mathbf{T}_2$ *содержится в* $\mathbf{T}_1$, *а* Δ_2 *– множество всех таких формул из* Δ_1, *которые не содержат терминов, отсутствующих в* $\mathbf{T}_2$, *то* Δ_2 *максимально относительно множества* $\mathbf{T}_2$.

Покажем, что Δ_2 обладает тремя свойствами максимального множества.

(1) Δ_2 непротиворечиво, так как в противном случае противоречивым оказалось бы и множество Δ_1, в которое оно включается.

(2) По условию леммы, формулы из Δ_2 не содержат терминов, отсутствующих в $\mathbf{T}_2$.

(3) Рассмотрим произвольную формулу A, не содержащую отсутствующих в $\mathbf{T}_2$ терминов. Поскольку $\mathbf{T}_2 \subseteq \mathbf{T}_1$ и в силу максимальности Δ_1 относительно $\mathbf{T}_1$, либо A, либо $\neg A$ содержится в Δ_1. А так как Δ_2 представляет собой множество всех формул из Δ_1, которые не содержат терминов, отсутствующих в $\mathbf{T}_2$, то какая-то из указанных формул принадлежит и Δ_2. □

Докажем далее особый вариант леммы о возможности расширения произвольного непротиворечивого множества формул до максимального:

Лемма 2. *Произвольное непротиворечивое множество* **Г**, *такое что множество* **Т** *терминов, входящих в его формулы, конечно, можно расширить до максимального относительно* **Т** *множества формул* **Δ**.

Пусть C_1, C_2, ... – пересчет всех таких формул силлогистического языка, которые не содержат терминов, отсутствующих в **Т**. Строим последовательность множеств Δ_1, Δ_2, ... следующим образом: $\Delta_1 = \Gamma$; $\Delta_{n+1} = \Delta_n \cup \{C_n\}$, если $\Delta_n \cup \{C_n\}$ непротиворечиво, и $\Delta_{n+1} = \Delta_n \cup \{\neg C_n\}$, если $\Delta_n \cup \{C_n\}$ противоречиво. Пусть Δ – результат объединения всех множеств бесконечной последовательности Δ_1, Δ_2, ... Легко убедиться в том, что сконструированное Δ является максимальным относительно **Т** множеством формул. □

Для определения канонических моделей предварительно введем ряд понятий и обоснуем несколько утверждений.

Описанием объекта посредством (попарно различных) *терминов* Q_1, ..., Q_k (k≥1) назовем множество $\{Q_1^0, ..., Q_k^0\}$, где каждое Q_i^0 есть либо Q_i^+, либо Q_i^-.

Неформально, Q_i^+ в описании некоторого объекта означает присущность, а Q_i^- неприсущность ему свойства Q_i.

В качестве метапеременных по описаниям объектов будем использовать буквы α и β.

Пусть $S_1,S_2,...,S_n,P_1,P_2,...,P_m$ – непустой конечный список попарно различных общих терминов. Рассмотрим произвольное множество формул **Δ**, максимальное относительно множества терминов $\{S_1,S_2,...,S_n, P_1,P_2,...,P_m\}$. Описание объекта $\{S_1^+, S_2^+,..., S_n^+, P_1^-, P_2^-,..., P_m^-\}$ посредством терминов $S_1,S_2,...,S_n,P_1,P_2,...,P_m$ назовем **Δ**-*допустимым*, если и только если $S_1S_2...S_n@P_1P_2...P_m \notin \Delta$.

Из данного определения вытекает, что если **Δ** максимально относительно **Т**, и α является **Δ**-допустимым описанием объекта, то $Q \in \mathbf{T}$ тогда и только тогда, когда $Q^+ \in \alpha$ или $Q^- \in \alpha$.

Лемма 3. *Пусть* Δ_1 – *максимальное множество формул относительно конечного множества терминов* **Т**, *а* Δ_2 – *максимальное множество формул относительно множества терминов*

$\mathbf{T} \cup \{M\}$, *где* $M \notin \mathbf{T}$. *Пусть также* $\Delta_1 \subset \Delta_2$. *Тогда для каждого* Δ_1-*допустимого описания* α *найдется* Δ_2-*допустимое описание* β, *такое что* $\beta = \alpha \cup \{M^+\}$ *или* $\beta = \alpha \cup \{M^-\}$.

Рассмотрим произвольное Δ_1-допустимое описание объекта $\alpha = \{S_1^+, S_2^+, \ldots, S_n^+, P_1^-, P_2^-, \ldots, P_m^-\}$. Из определения Δ-допустимого описания следует, что, во-первых, $\mathbf{T} = \{S_1, S_2, \ldots, S_n, P_1, P_2, \ldots, P_m\}$, а во-вторых, $S_1S_2\ldots S_n@P_1P_2\ldots P_m \notin \Delta_1$.

В силу максимальности Δ_1 относительно $\mathbf{T}$ имеем:

$$\neg S_1S_2\ldots S_n@P_1P_2\ldots P_m \in \Delta_1.$$

Поскольку $\Delta_1 \subset \Delta_2$, формула $\neg S_1S_2\ldots S_n@P_1P_2\ldots P_m$ принадлежит и множеству Δ_2. Формула

$$S_1S_2\ldots S_nS_1S_2\ldots S_n@P_1P_2\ldots P_mP_1P_2\ldots P_m \supset S_1S_2\ldots S_n@P_1P_2\ldots P_m$$

является теоремой нашей системы, она доказывается с использованием аксиом **А3-А6**. Следовательно, теоремой **ФС@** является и ее контрапозиция:

$$\neg S_1S_2\ldots S_n@P_1P_2\ldots P_m \supset \neg S_1S_2\ldots S_nS_1S_2\ldots S_n@P_1P_2\ldots P_mP_1P_2\ldots P_m.$$

Все термины указанной теоремы содержатся в $\mathbf{T} \cup \{M\}$, поэтому она принадлежит любому максимальному относительно $\mathbf{T} \cup \{M\}$ множеству формул, в том числе и Δ_2.

Выше было установлено, что антецедент данной формулы принадлежит Δ_2. Следовательно, это же верно и для ее консеквента:

$$\neg S_1S_2\ldots S_nS_1S_2\ldots S_n@P_1P_2\ldots P_mP_1P_2\ldots P_m \in \Delta_2.$$

Следующая формула является одной из аксиом схемы **А1**:

$$(MS_1S_2\ldots S_n@P_1P_2\ldots P_m \,\&\, S_1S_2\ldots S_n@P_1P_2\ldots P_mM) \supset$$
$$\supset S_1S_2\ldots S_nS_1S_2\ldots S_n@P_1P_2\ldots P_mP_1P_2\ldots P_m.$$

С ее помощью, пользуясь законами классического пропозиционального исчисления, легко доказать теорему:

$$\neg S_1S_2\ldots S_nS_1S_2\ldots S_n@P_1P_2\ldots P_mP_1P_2\ldots P_m \supset$$
$$\supset (\neg MS_1S_2\ldots S_n@P_1P_2\ldots P_m \vee \neg S_1S_2\ldots S_n@P_1P_2\ldots P_mM).$$

Последняя также не содержит терминов, отсутствующих в $\mathbf{T} \cup \{M\}$, поэтому и она является элементом Δ_2. А так как антецедент этой формулы принадлежит данному множеству, то консеквент принадлежит ему тоже:

$$(\neg MS_1S_2\ldots S_n@P_1P_2\ldots P_m \vee \neg S_1S_2\ldots S_n@P_1P_2\ldots P_mM) \in \Delta_2.$$

Отсюда в силу максимальности Δ_2 относительно $\mathbf{T} \cup \{M\}$ вытекает, что

(1) $MS_1S_2\ldots S_n@P_1P_2\ldots P_m \notin \Delta_2$ или (2) $S_1S_2\ldots S_n@P_1P_2\ldots P_mM \notin \Delta_2$.

Отметим, что $\mathbf{T} \cup \{M\} = \{S_1, S_2, \ldots, S_n, P_1, P_2, \ldots, P_m, M\}$.

Поэтому в случае (1) Δ_2-допустимым оказывается описание $\{M^+, S_1^+, S_2^+, \ldots, S_n^+, P_1^-, P_2^-, \ldots, P_m^-\}$, т.е. $\alpha \cup \{M^+\}$, а в случае (2) – описание $\{S_1^+, S_2^+, \ldots, S_n^+, P_1^-, P_2^-, \ldots, P_m^-, M^-\}$, т.е. $\alpha \cup \{M^-\}$. □

Лемма 4. *Пусть* Δ_1 *– максимальное множество формул относительно конечного множества терминов* **T**, *а* Δ_2 *– максимальное множество формул относительно множества терминов* $\mathbf{T} \cup \{M_1, \ldots, M_k\}$, *где* $M_1, \ldots, M_k$ *– попарно различные термины, не входящие в* **T**. *Пусть также* $\Delta_1 \subset \Delta_2$. *Тогда для любого* Δ_1*-допустимого описания* α *найдется* Δ_2*-допустимое описание* β, *такое что* $\beta = \alpha \cup \{M_1^0, \ldots, M_k^0\}$.

Доказывается k-кратным применением **Леммы 3**. □

Приступим к построению канонических моделей для максимальных множеств формул.

Рассмотрим произвольное множество силлогистических формул Δ, максимальное относительно конечного множества терминов **T**. Ассоциируем с Δ пару $<\mathbf{D}_\Delta, \varphi_\Delta>$, такую что $\mathbf{D}_\Delta$ – множество всех Δ-допустимых описаний объекта, а $\varphi_\Delta(Q) = \{\alpha: \alpha$ – Δ-допустимое описание и $Q^+ \in \alpha\}$. Пару $<\mathbf{D}_\Delta, \varphi_\Delta>$ будем называть *канонической моделью*.

Согласно определениям канонической модели и Δ-допустимого описания, для любого Δ, максимального относительно **T**, для любого Δ-допустимого описания α и произвольного термина $Q \in \mathbf{T}$ верно:

$$Q^+ \in \alpha, \text{ е.т.е. } \alpha \in \varphi_\Delta(Q) \text{ и } Q^- \in \alpha, \text{ е.т.е. } \alpha \in \mathbf{D}_\Delta \backslash \varphi_\Delta(Q).$$

Необходимо показать, что $<\mathbf{D}_\Delta, \varphi_\Delta>$ удовлетворяет всем требованиям, предъявляемым к моделям в семантике силлогистического исчисления **ФС@**.

Из определения канонической модели непосредственно вытекает, что $\varphi_\Delta(Q) \subseteq \mathbf{D}_\Delta$.

Остается продемонстрировать, что $\mathbf{D}_\Delta$ непусто.

Лемма 5. *Для любого множества формул* Δ, *максимального относительно конечного множества терминов* **T**, *существует по крайней мере одно* Δ*-допустимое описание объекта.*

Пусть $Q_1, Q_2, \ldots, Q_k$ – список всех попарно различных терминов из множества **T**.

Рассмотрим сначала случай, когда $k = 1$, т.е. когда формулы из Δ содержат только один термин Q_1.

Формула $\neg(Q_1@ \,\&\, @Q_1)$ – одна из аксиом схемы **A9**.

Из этой аксиомы по законам классического пропозиционального исчисления легко получить в качестве теоремы формулу $\neg Q_1@ \vee \neg @Q_1$.

Все теоремы, содержащие только термин Q_l, принадлежат максимальному относительно $\{Q_l\}$ множеству формул Δ.

В силу свойств максимального множества из того, что $\neg Q_l@ \vee \neg@Q_l \in \Delta$, вытекает, что

$$Q_l@ \notin \Delta \text{ или } @Q_l \notin \Delta.$$

В каждом из случаев можно указать Δ-допустимое описание объекта: если верен первый дизъюнкт, таковым будет $\{Q_l^+\}$, а если верен второй – $\{Q_l^-\}$.

Если $k>1$, то выделим сначала множество Δ_1 формул из Δ, не содержащих иных терминов, кроме Q_l. Согласно **Лемме 1**, Δ_1 является максимальным относительно одноэлементного множества терминов $\{Q_l\}$. Только что было доказано существование Δ_1-допустимого описания объекта. Рассмотрим какое-нибудь подобное описание α: $\{Q_l^+\}$, если $Q_l@ \notin \Delta_1$, или $\{Q_l^-\}$, если $@Q_l \notin \Delta_1$. В соответствии с **Леммой 4**, найдется описание $\alpha \cup \{Q_2^0, ..., Q_k^0\}$, которое является Δ-допустимым. □

Теперь мы в состоянии приступить к доказательству основной леммы о равносильности двух утверждений: о принадлежности формулы максимальному множеству и об истинности ее в канонической модели, ассоциированной с данным множеством.

Лемма 6. *Пусть* Δ *– произвольное множество формул, максимальное относительно конечного множества терминов* **T**. *Пусть* A *– формула, не содержащая терминов, отсутствующих в* **T**. *Тогда* $A \in \Delta$, *е.т.е.* $|A| = 1$ *в модели* $<\mathbf{D}_\Delta, \varphi_\Delta>$.

Доказательство осуществляется индукцией по числу пропозициональных связок в формуле A.

Базис индукции (A не содержит пропозициональных связок) представляет собой рассмотрение случая, когда A имеет вид $s@p$, где s и p – произвольные последовательности общих терминов (элементов **T**), из которых по крайней мере одна непуста.

Базисный случай распадается на два:
(i) существует термин Q, входящий как в состав s, так и в состав p;
(ii)в последовательностях s и p отсутствуют одинаковые термины.

В случае (i) формула $s@p$ оказывается теоремой исчисления **ФС@**: ее несложно доказать исходя из аксиомы $Q@Q$ (**А2**) с использованием "утончений" (**А7** и **А8**) и "перестановок" (**А3** и **А4**). Из доказуемости $s@p$ вытекает, во-первых, ее принадлежность множеству Δ (в силу максимальности последнего относительно **T** и того факта, что $s@p$ не содержит терминов, отсутствующих в **T**), и во-вторых, ее общезначимость (в силу **Метатеоремы 1**), а значит, значимость $s@p$ в канонической модели $<\mathbf{D}_\Delta, \varphi_\Delta>$.

Итак, в случае (i) имеем: $s@p \in \Delta$ и $|s@p| = \mathbf{1}$ в $<\mathbf{D}_\Delta, \varphi_\Delta>$. Отсюда следует справедливость эквивалентности: $s@p \in \Delta$, е.т.е. $|s@p| = \mathbf{1}$ в $<\mathbf{D}_\Delta, \varphi_\Delta>$.

Перейдем к рассмотрению случая (ii), когда последовательности s и p в составе формулы $s@p$ не содержат одинаковых терминов.

Пусть $S_1,S_2,\ldots,S_n$ – список всех попарно различных терминов, входящих в последовательность s, а $P_1,P_2,\ldots,P_m$ – аналогичный список терминов из p.

Нетрудно убедиться в том, что формулы

$$s@p \supset S_1S_2\ldots S_n@P_1P_2\ldots P_m \text{ и } S_1S_2\ldots S_n@P_1P_2\ldots P_m \supset s@p$$

являются теоремами **ФС@**: в доказательстве первой из них при необходимости используются "перестановки" (**A3** и **A4**) и "сокращения" (**A5** и **A6**), а в доказательстве второй – "утончения" (**A7** и **A8**) и "перестановки".

Каждая из указанных теорем принадлежит Δ, поскольку не содержит отсутствующих в **T** терминов. Отсюда, в силу свойств максимального множества следует:

$$s@p \in \Delta, \text{ е.т.е. } S_1S_2\ldots S_n@P_1P_2\ldots P_m \in \Delta.$$

Используя в рамках семантики законы коммутативности и идемпотентности легко установить равносильность условий значимости формул $s@p$ и $S_1S_2\ldots S_n@P_1P_2\ldots P_m$. Отсюда вытекает, что в модели $<\mathbf{D}_\Delta, \varphi_\Delta>$

$$|S_1S_2\ldots S_n@P_1P_2\ldots P_m| = \mathbf{1}, \text{ е.т.е. } |s@p| = \mathbf{1}.$$

Таким образом, остается показать:

$$S_1S_2\ldots S_n@P_1P_2\ldots P_m \in \Delta, \text{ е.т.е. } |S_1S_2\ldots S_n@P_1P_2\ldots P_m| = \mathbf{1} \text{ в } <\mathbf{D}_\Delta,\varphi_\Delta>.$$

При доказательстве данного утверждения будем иметь ввиду наличие двух возможностей:

(a) $\{S_1,S_2,\ldots,S_n,P_1,P_2,\ldots,P_m\} = \mathbf{T}$; (b) $\{S_1,S_2,\ldots,S_n,P_1,P_2,\ldots,P_m\} \subset \mathbf{T}$.

Докажем сначала импликацию: $S_1S_2\ldots S_n@P_1P_2\ldots P_m \in \Delta \Rightarrow$
$\Rightarrow |S_1S_2\ldots S_n@P_1P_2\ldots P_m| = \mathbf{1}$ в $<\mathbf{D}_\Delta,\varphi_\Delta>$.

+1. $S_1S_2\ldots S_n@P_1P_2\ldots P_m \in \Delta$.

+2. $|S_1S_2\ldots S_n@P_1P_2\ldots P_m| = \mathbf{0}$ в $<\mathbf{D}_\Delta,\varphi_\Delta>$.

Основываясь на условиях значимости атомарных формул, из 2 получаем:

3. $\varphi_\Delta(S_1) \cap \varphi_\Delta(S_2) \cap\ldots\cap \varphi_\Delta(S_n) \cap (\mathbf{D}_\Delta\backslash\varphi_\Delta(P_1)) \cap (\mathbf{D}_\Delta\backslash\varphi_\Delta(P_2)) \cap\ldots\cap (\mathbf{D}_\Delta\backslash\varphi_\Delta(P_m)) \neq \varnothing$.

Последнее, в силу определения канонической модели $<\mathbf{D}_\Delta,\varphi_\Delta>$, означает:

4. Существует Δ-допустимое описание объекта α такое, что $S_1^+ \in \alpha$, $S_2^+ \in \alpha$,..., $S_n^+ \in \alpha$, $P_1^- \in \alpha$, $P_2^- \in \alpha$,..., $P_m^- \in \alpha$.

Рассмотрим сначала случай (a)$\{S_1,S_2,\ldots,S_n,P_1,P_2,\ldots,P_m\} = \mathbf{T}$.

5. Описание $\{S_1^+, S_2^+,\ldots, S_n^+, P_1^-, P_2^-,\ldots, P_m^-\}$ Δ-допустимо.

Отсюда по определению Δ-допустимого описания объекта получаем:

6. $S_1S_2\ldots S_n@P_1P_2\ldots P_m \notin \Delta$.

Противоречие 1 и 6.

В случае (b) $\{S_1,S_2,\ldots,S_n,P_1,P_2,\ldots,P_m\} \subset \mathbf{T}$ имеем:

5'. Описание α помимо $S_1^+, S_2^+,\ldots, S_n^+, P_1^-, P_2^-,\ldots, P_m^-$ содержит также $Q_1^+, Q_2^+,\ldots, Q_i^+, R_1^-, R_2^-,\ldots, R_j^-$, где $Q_1, Q_2,\ldots, Q_i, R_1, R_2,\ldots, R_j$ – список всех попарно различных терминов из **T**, отсутствующих в классе $\{S_1,S_2,\ldots,S_n,P_1,P_2,\ldots,P_m\}$ $(i+j \geq 1)$.

6'. Описание $\{S_1^+, S_2^+,\ldots, S_n^+, Q_1^+, Q_2^+,\ldots, Q_i^+, P_1^-, P_2^-,\ldots, P_m^-, R_1^-, R_2^-,\ldots, R_j^-\}$ Δ-допустимо.

7'. $S_1S_2\ldots S_nQ_1Q_2\ldots Q_i@P_1P_2\ldots P_mR_1R_2\ldots R_j \notin \Delta$.

С использованием "утончений" (**A7** и **A8**) и "перестановок" (**A3** и **A4**) в системе **ФС@** несложно доказать формулу $S_1S_2\ldots S_n@P_1P_2\ldots P_m \supset S_1S_2\ldots S_nQ_1Q_2\ldots Q_i@P_1P_2\ldots P_mR_1R_2\ldots R_j$; она не содержит отсутствующих в **T** терминов, следовательно,

8'. $S_1S_2\ldots S_n@P_1P_2\ldots P_m \supset S_1S_2\ldots S_nQ_1Q_2\ldots Q_i@P_1P_2\ldots P_mR_1R_2\ldots R_j \in \Delta$.

Используя свойства максимального множества, из 1 и 8' получаем:

9'. $S_1S_2\ldots S_nQ_1Q_2\ldots Q_i@P_1P_2\ldots P_mR_1R_2\ldots R_j \in \Delta$.

Противоречие 7' и 9'.

Перейдем к доказательству обратного метаутверждения.

+1. $|S_1S_2\ldots S_n@P_1P_2\ldots P_m| = \mathbf{1}$ в $<\mathbf{D}_\Delta,\varphi_\Delta>$.

+2. $S_1S_2\ldots S_n@P_1P_2\ldots P_m \notin \Delta$.

Из 1 в силу семантического определения атомарных формул получаем:

3. $\varphi_\Delta(S_1) \cap \varphi_\Delta(S_2) \cap\ldots\cap \varphi_\Delta(S_n) \cap (\mathbf{D}_\Delta\backslash\varphi_\Delta(P_1)) \cap (\mathbf{D}_\Delta\backslash\varphi_\Delta(P_2)) \cap\ldots\cap (\mathbf{D}_\Delta\backslash\varphi_\Delta(P_m)) = \varnothing$.

Последнее, согласно определению канонической модели, означает:

4. Не существует Δ-допустимого описания объекта α такого, что $S_1^+ \in \alpha$, $S_2^+ \in \alpha$,..., $S_n^+ \in \alpha$, $P_1^- \in \alpha$, $P_2^- \in \alpha$,..., $P_m^- \in \alpha$.

Рассмотрим сначала случай (a)$\{S_1,S_2,\ldots,S_n,P_1,P_2,\ldots,P_m\} = \mathbf{T}$.

Из 2 в силу определения Δ-допустимого описания объекта получаем:

5. Описание $\{S_1^+, S_2^+,\ldots, S_n^+, P_1^-, P_2^-,\ldots, P_m^-\}$ Δ-допустимо.

А из 4 следует, что

6. $\{S_1^+, S_2^+, \ldots, S_n^+, P_1^-, P_2^-, \ldots, P_m^-\}$ не является Δ-допустимым.

Противоречие 5 и 6.

В случае (b) $\{S_1,S_2,\ldots,S_n,P_1,P_2,\ldots,P_m\} \subset \mathbf{T}$ рассмотрим множество Δ_1 – множество всех таких формул из Δ, которые не содержат никаких других терминов помимо $S_1,S_2,\ldots,S_n, P_1,P_2,\ldots,P_m$. Согласно **Лемме 1**,

5'. Δ_1 максимально относительно множества общих терминов $\{S_1,S_2,\ldots,S_n,P_1,P_2,\ldots,P_m\}$.

Из 2 и 5' по определению Δ-допустимого описания объекта вытекает:

6'. Описание $\{S_1^+, S_2^+, \ldots, S_n^+, P_1^-, P_2^-, \ldots, P_m^-\}$ Δ_1-допустимо.

Отсюда в силу **Леммы 4** получаем:

7'. Существует Δ-допустимое описание $\{S_1^+,S_2^+,\ldots,S_n^+, P_1^-,P_2^-, \ldots, P_m^-\} \cup \{M_1^0,\ldots,M_k^0\}$, где $M_1,\ldots,M_k$ – все попарно различные термины, входящие в **T**, но отсутствующие в $\{S_1,S_2,\ldots,S_n, P_1,P_2,\ldots,P_m\}$.

Последнее означает, что

8'. Существует Δ-допустимое описание объекта α такое, что $S_1^+ \in \alpha, S_2^+ \in \alpha,\ldots, S_n^+ \in \alpha, P_1^- \in \alpha, P_2^- \in \alpha,\ldots, P_m^- \in \alpha$.

Противоречие 4 и 8'.

Базис индукции доказан.

Обоснование индуктивного перехода тривиально, оно базируется на классических условиях значимости сложных формул и свойствах максимального множества формул Δ. □

Метатеорема 2. *Всякая общезначимая формула доказуема в исчислении* **ФС@**.

Рассмотрим произвольную общезначимую формулу A языка силлогистики. Допустим, что она не является теоремой исчисления **ФС@**. Тогда и формула $\neg\neg A$ не доказуема в данной системе. Последнее означает, что множество $\{\neg A\}$ непротиворечиво. Множество **T** силлогистических терминов в составе $\neg A$ конечно. Согласно **Лемме 2**, $\{\neg A\}$ можно расширить до максимального относительно **T** множества формул Δ. Ассоциируем с ним каноническую модель $\langle \mathbf{D}_\Delta, \varphi_\Delta \rangle$. В силу **Леммы 6**, всякая формула, которая не содержит терминов, отсутствующих в множестве **T**, принадлежит Δ, е.т.е. эта формула истинна в модели $\langle \mathbf{D}_\Delta, \varphi_\Delta \rangle$. Поскольку $\neg A \in \Delta$, постольку $|\neg \mathbf{A}| = \mathbf{1}$ в $\langle \mathbf{D}_\Delta, \varphi_\Delta \rangle$. Отсюда следует, что A не значима в данной модели. Поэтому A не является общезначимой в нашей семантике формулой. В рассуждении получено противоречие. Следовательно, формула A доказуема в обобщенном силлогистическом исчислении **ФС@**. □

Метатеорема 3. *Перевод * погружает силлогистику в классическое одноместное исчисление предикатов* (**КОИП**).

Требуется доказать, что для любой формулы A языка с единственной неопределенно-местной силлогистической константой @

ФС@ $\vdash A$, е.т.е. **КОИП** $\vdash A^*$.

В силу **Метатеорем 1** и **2** имеем для любой формулы A:

(1) **ФС@** $\vdash A$, е.т.е. $\models A$ в семантике **ФС@**.

Модель <**D**, φ> можно использовать не только для означивания формул силлогистического языка, но и для оценки формул языка **КОИП**. Легко установить, что условия значимости произвольной силлогистической формулы A и ее перевода A^* совпадают. Отсюда вытекает, что

(2) $\models A$ в семантике **ФС@**, е.т.е. $\models A^*$ в семантике **КОИП**.

Следствием метатеорем о семантической непротиворечивости и полноте **КОИП** является утверждение: для любой силлогистической формулы A

(3) $\models A^*$ в семантике **КОИП**, е.т.е. **КОИП** $\vdash A^*$.

Обосновываемый тезис непосредственно вытекает из утверждений (1)-(3). □

В заключение позволю себе выдвинуть гипотезу о том, что и классическое одноместное узкое исчисление предикатов (с замкнутыми формулами, без предметных и предметно-функциональных констант) погружается в систему обобщенной фундаментальной силлогистики **ФС@**, т.е. указанные исчисления рекурсивно эквивалентны. Данный факт означал бы, что средствами позитивной силлогистики действительно можно выразить все возможные виды отношений между конечным числом множеств, т.е. она представляет собой особый вариант логики классов.

ЛИТЕРАТУРА

1. *Бочаров В.А.* Булева алгебра в терминах силлогистики // Логические исследования. М.: ИФ РАН, 1983. С. 32-42.
2. *Маркин В.И.* Обобщенная позитивная силлогистика // Логические исследования. Вып. 6. М.: РОССПЭН, 1999. С. 241-258.
3. *Смирнов В.А.* Дефинициальная эквивалентность расширенной силлогистики С2Д булевой алгебре // Логические исследования. М.: ИФ РАН, 1983. С. 43-48.

И.Б.Микиртумов

КОМПОЗИЦИОНАЛЬНЫЕ И НЕКОМПОЗИЦИОНАЛЬНЫЕ ТИПЫ В ИНТЕНСИОНАЛЬНОЙ ЛОГИКЕ*

Abstract. *In the article the difference is defined between compositional and non-compositional types of intensional expressions, acting as the meanings in the type-theoretical language in the logic of sense and denotation (LSD). The expressions of compositional types make a system fragment free of paradoxes, while the expressions of non-compositional types may participate in the arising of paradoxes. The procedure is described, where the correspondend compositional meaning (conceptualisation) is given to every atomic expressions of language, and the polymorphical compositional conceptualisation – to the functions.*

Общая интенсиональная логика и ЛСД Чёрча

К общей интенсиональной логике относятся системы, в которых интенсиональные сущности (смыслы или концепты) получают именование в языке-объекте. Первой такой системой была логика смысла и денотата (ЛСД) Алонзо Чёрча [4, 5, 7], а среди последующих систем наиболее известны прагматика и интенсиональная логика Ричарда Монтегю [11, 12]. Развитие общей интенсиональной логики шло в направлении уменьшения выразительной возможности систем. Если ЛСД Чёрча является самой богатой среди систем общей интенсиональной логики и строилась как универсальный инструмент анализа любых интенсиональных контекстов, то более поздние системы создавались для решения более частных задач, и содержат лишь необходимые для этого средства. Поскольку конкретные задачи лучше всего решаются с помощью специализированных средств, неудивительно, что проект общей интенсиональной логики как универсальной системы не удался. Это относится не только к ЛСД Чёрча, в которой чрезмерное богатство средств привело к появлению разнообразных парадоксов [2, 3, 9], но также, хотя и в меньшей степени, к интенсиональной логике Монтегю, область первоначального применения которой сегодня поделена и переделена различными частными философскими логиками. Системам общей интенсиональной логики оставлена, таким образом, специфическая для них

* Работа выполнена при поддержке РГНФ, грант № 04-03-00412а.

область применения, а именно исследование свойств интенсиональных сущностей и путей их интерпретации. Здесь в 80-х годах возникли современные логические теории свойств, отношений, пропозиций и истины [1, 10], проблематика которых уравнивает старые и новые системы интенсиональной логики в их специфической сфере применения.

ЛСД Чёрча строится как простая теория типов порядка ω с λ-конверсией и с единственным разветвленным предикатом Δ – "быть концептом (смыслом)". Опишем номенклатуру символов типа. Символы простых типов: o^0, o^1, o^2, ... (о-микрон) и ι^0, ι^1, ι^2, ... (йота), где верхний индекс показывает *интенсиональный уровень*. Если интенсиональный уровень есть 0, то такой тип является экстенсиональным (индекс интенсионального уровня при нем можно опускать). o^0 – символ типа истинностных значений, домен которого есть $\mathsf{D}_{o0} = \{\mathrm{T}^0, \mathrm{F}^0\}$, ι^0 – символ типа индивидов с доменом $\mathsf{D}_{\iota 0}$. Если индекс интенсионального уровня больше 0, ты мы имеем дело с символом интенсионального типа. Символы простых интенсиональных типов: o^1, o^2, ... и ι^1, ι^2, ... Домен D_{o1} есть домен пропозиций, выступающих в роли концептов сущностей типа o^0, D_{o2} – домен пропозициональных концептов, $\mathsf{D}_{\iota 1}$ – домен индивидных концептов и т. д. Здесь и далее будем использовать буквы α, β, γ, δ ... как метапеременные по символам типов. Символ сложного типа $\alpha\beta$ соответствует домену $\mathsf{D}_{\alpha\beta}$ операций из D_β в D_α. Например, $\iota\iota$ – символ типа одноместной предметной функции, $o\iota$ – символ типа одноместного предиката, oo – символ типа унарной пропозициональной связки, $(o\iota)\iota$ – символ типа двухместного предиката[1], $(oo)o$ – символ типа бинарной пропозициональной связки, $(o_1\iota_1)\iota_1$ – символ типа отношения, oo_1 – символ типа интенсионального оператора и т. д. Существует столько символов типа, сколько можно построить в соответствии с определением:

(1) o^0, o^1, o^2, ... и ι^0, ι^1, ι^2, ... символы типов;

(2) если α и β – символы типов, то $(\alpha\beta)$ – символ типа.

Запись вида α^n обозначает результат увеличения на n всех индексов интенсионального уровня, входящих в α.

Примитивные символы языка ЛСД:

1. собственные: 1.1) счетно бесконечное число переменных каждого типа; 1.2) $\mathsf{C}_{o^n o^n o^n}$ (импликация), $\Pi_{o^n(o^n\alpha^n)}$ (универсальная квантификация), $\iota_{\beta^n(o^n\beta^n)}$ (дескрипция), для $n \geq 0$ и всех выделенных (непустых) β; 2.3) ${}^m\Delta_{o^n\alpha^{n+1}\alpha^n}$ (предикат "быть концептом"), где

[1] Группировка скобок всегда влево.

$n \geq 0$ и m – индекс порядка ветвления, такой что $m = l, l+1, l+2, \ldots$, где l – наибольший индекс интенсионального уровня, входящий в α;

2. несобственные: 2.1) λ_0, λ_1, λ_2, λ_3, ... (λ_0 – оператор абстракции, λ_{n+1} используются при обозначении смысла λ-термов); 2.2) нуль-символ $*_{\beta^n}$ для всех β^n, кроме o^n; 2.3) скобки.

Определение ппф:

1) переменная или константа есть ппф; 2) если x_{β^n} – переменная, A_{α^m} – ппф типа α^n, то $\lambda_m x_{\beta^m} A_{\alpha^m}$ – ппф типа $\alpha^n \beta^n$, где $m \leq n$; 3) если $A_{\alpha\beta}$ и a_β – ппф указанных типов, то $A_{\alpha\beta}\, a_\beta$ – ппф типа α.

Вхождение переменной x_δ в ппф является *связанным* или *свободным* в зависимости от того, является ли оно вхождением в пп-часть этой формулы вида $(\lambda_m x_\delta A_\nu)$.

Индексы типов опускаются, если их легко восстановить по определению ппф. Индекс интенсионального уровня опускается, если он равен 0. Используются сокращения скобок (группировка влево) и обычное применение точек.

Определения:

$(A_{o^n} \supset B_{o^n}) \approx_{\mathrm{Df}} \mathrm{C}_{o^n o^n o^n} A_{o^n} B_{o^n}$ (импликация);

$\forall x_{\alpha^n} A_{o^n} \approx_{\mathrm{Df}} \Pi_{o^n(o^n\alpha^n)}(\lambda_m x_{\alpha^m} A_{o^n})$ (квантор общности);

$\mathrm{T}_{o^n} \approx_{\mathrm{Df}} \forall x_{o^n} . x_{o^n} \supset x_{o^n}$ (“истина”);

$\mathrm{F}_{o^n} \approx_{\mathrm{Df}} \forall x_{o^n} . x_{o^n}$ (“ложь”);

$\neg A_{o^n} \approx_{\mathrm{Df}} A_{o^n} \supset \mathrm{F}_{o^n}$ (отрицание);

$(\imath x_{\beta^n}) A_{o^n} \approx_{\mathrm{Df}} \imath_{\beta^n(o^n\beta^n)} \lambda_m x_{\beta^m} A_{o^n}$ (дескрипция);

$\mathrm{Q}_{o^n\alpha^n\alpha^n} \approx_{\mathrm{Df}} \lambda_m x_{\alpha^m} \lambda_n y_{\alpha^n} (\forall f_{o^n\alpha^n} . fy \supset fx)$

(функция равенства);

$A_{\alpha^n} =_n B_{\alpha^n} \approx_{\mathrm{Df}} \mathrm{Q}_{o^n\alpha^n\alpha^n} B_{\alpha^n} A_{\alpha^n}$ (равенство);

$f^m{}_{\alpha^n\beta^n} \approx_{\mathrm{Df}} \lambda_m x_{\beta^m} (f_{\alpha^n\beta^m} x_{\beta^m})$, где $m \leq n$ и если $m = 0$, то m опускается.

Запись $f^m{}_{\alpha^n\beta^n} x_{\beta^n}$ обозначает “применение функции к аргументу”, в то время как $f_{\alpha^n\beta^n} x_{\beta^n}$ обозначает результат подстановки x_{β^n} в $f^0{}_{\alpha^n\beta^n}$ по правилам λ-конверсии.

Имя смысла выражения A (его интенсиональное восхождение) строится увеличением на 1 всех индексов интенсионального уровня всех символов типа, входящих в A и индексов интенсионального уровня при операторах абстракции. Например, имя смысла p_{o^2} есть p_{o^3}, имя смысла $((\imath a_{\iota^2}) . \forall x_{\iota^1}(P_{o\iota^1\iota^1}(x, f^1{}_{\iota^1} a_{\iota^2})))$ есть $((\imath a_{\iota^3}) . \forall x_{\iota^2}(P_{o\iota^2\iota^2}(x, f^2{}_{\iota^2} a_{\iota^3})))$.

В нашем исследовании мы следуем “Альтернативе 0” Чёрча [2, 4], согласно которой смыслы двух выражений тождественны, только если они отличаются друг от друга не более, чем переименованием связанных переменных.

Методы теории типов и парадоксы

ЛСД Чёрча столь богата, что в ней, во-первых, можно моделировать семантические парадоксы, и, во-вторых, она сама таким парадоксам подвержена. Существуют две стратегии устранения парадоксов в богатых системах. Первая стратегия состоит в том, чтобы сделать парадоксальные выражения синтаксически некорректными, используя, например, методы разветвленной теории типов [6, 7]. Вторая стратегия предполагает интерпретацию пропозиций как некоторых процедур установления значения предложений, которые в некотором специально уточняемом смысле обязательно приводят к одному из результатов "T" или "F". Поскольку денотатом парадоксального предложения оказывается "третье", помимо "T" и "F", значение или "провал", интенсиональные сущности, сопоставляемые парадоксальным предложениям в качестве смысла, не рассматриваются как пропозиции [1, 10], хотя и остаются осмысленными выражениями метаязыка или интенсиональной части языка-объекта. Это позволяет не устранять, а локализовывать парадоксы, моделируя тем самым их появление. Преимущества такого подхода очевидны и для его реализации в таких системах, как теория неподвижной точки Крипке [8] и логика предиката "быть пропозицией" Акцела [1], достаточно бестипового языка-объекта и формализованного фрагмента метаязыка. Здесь, однако, остается без решения существенная проблема, а именно мы получаем лишь неявное определение смысла парадоксального высказывания. Иными словами, ясно, как строятся пропозиции, но не ясно, как строятся не-пропозиции, и мы не можем сказать, что является содержанием пропозициональной установки, когда, например, парадоксальное предложение находится в контексте мнения или цитирования.

Попытаемся наметить путь для решения этой проблемы, совмещая методы обеих описанных выше стратегий в рамках модифицированной ЛСД Чёрча. Чем может быть полезно такое совмещение, в частности, привлечение теоретико-типовых методов там, где, как кажется, без них можно обойтись? Очевидно, что свободный от парадоксов и достаточно богатый язык, построенный на основе разветвленной теории типов, не является ни моделью лингвистической нормы, ни "улучшенным" вариантом бестипового языка. Но если мы хотим описать, как действует "достаточно компетентный субъект", осуществляющий логико-семантический анализ парадоксальных высказываний, то теоретико-типовой язык становится необходимым как средство представления формальных критериев, позволяющих субъекту анализа

дифференцировать “нормальные” и “парадоксальные” предложения. Такие критерии появляются вслед за содержательным схватыванием природы парадокса, а разнообразные ограничения, накладываемые на синтаксическую корректность символов типа, получают интерпретацию в терминах эпистемических установок субъекта. Пусть, например, имя смысла выражения строится на основе семантического анализа этого выражения в соответствии с некоторыми теоретико-типовыми ограничениями. Тогда, модифицируя эти ограничения, мы будем получать альтернативные версии смысла, отражающие поиск и сравнительный анализ субъектом различных интерпретаций выражения. “Парадоксальное” содержание выражения и его скорректированный, непарадоксальный смысл будут представлены в одном языке. Это дает хорошую модель естественной интерпретации выражений, которую мы осуществляем, используя одновременно различные методы и сопоставляя их результаты. В этом случае парадокс будет локализован пропозициональными установками субъекта соответствующего утверждения, его иллокутивными целями и компетентностью в сфере логико-семантического анализа.

Расслоение интенсиональных типов

Определения: (1) α есть символ *интенсионального* типа, если α представим как β^n для $n > 0$; (2) α есть символ *смешанного* типа, если α не является интенсиональным, но содержит вхождение некоторого символа типа, интенсиональный уровень которого больше 0; (3) прочие символы типа являются символами *экстенсиональных* типов; (4) интенсиональным *уровнем* символа неэкстенсионального типа α является максимальный интенсиональный уровень его компонент.

Расслоение. Каждый простой интенсиональный тип α^n, где $n > 0$, заменяем его расслоением на типы:

$\alpha^{n(n-1)}$, $\alpha^{n(n)}$, $\alpha^{n(n+1)}$, ...

Например, вместо o^1 и o^2 появляются последовательности

$o^{1(0)}$, $o^{1(1)}$, $o^{1(2)}$, ...

$o^{2(1)}$, $o^{2(2)}$, $o^{2(3)}$, ...

Таким же образом расслоен и каждый тип ι^n. Индексы, добавляемые в скобках к индексу интенсионального уровня (для удобства чтения они набраны особым шрифтом), будем называть *индексами*

вложенности[2]. Экстенсиональным и смешанным типам сопоставляется индекс вложенности –1, который, как правило, будем опускать.

Пусть $\max(a, b, ..., n)$ и $\min(a, b, ..., n)$ обозначают, соответственно, наибольшее и наименьшее числа из $a, b, ..., n$.

Каждый сложный интенсиональный тип расслаивается на уровни, начиная с *наименьшего* для него уровня вложенности, определяемого следующим образом:

– если $\alpha^{m(k)}$ и $\beta^{n(p)}$ простые символы типа, то для $(\alpha^{m(k)}\beta^{n(p)})^s$ s есть наименьший индекс вложенности, если $s = \min(m, n)-1$

– если $\alpha^{m(k)}$ простой символ типа, а β – сложный символ типа, минимальный индекс вложенности которого есть p, то для $(\alpha^{m(k)}\beta)^s$ s есть наименьший индекс вложенности, если $s = \min(m, p) - 1$;

– если α простой символ типа, минимальный индекс вложенности которого есть k, а $\beta^{n(p)}$ – простой символ типа, то для $(\alpha\beta^{n(p)})^s$ s есть наименьший индекс вложенности, если $s = \min(k, n) - 1$;

– если α и β – сложные символы типа, минимальные индексы вложенности которых есть k и p соответственно, то для $(\alpha\beta)^s$ s есть наименьший индекс вложенности, если $s = \min(k, p) - 1$.

Величина наименьшего уровня вложенности сложного интенсионального типа зависит только от интенсионального уровня его компонент. Например, наименьшие индексы вложенности символов типов $o^{2(1)}\iota^{1(2)}$, $(\iota^{2(1)}o^{4(2)})^3 o^{2(3)}$ и $(o^{4(2)}\iota^{3(1)})^5(\iota^{4(4)}o^{4(2)})^4$ (здесь индексы вложенности не всегда наименьшие) суть, соответственно, 0, 1 и 2. Общая схема расслоения типа $\alpha^{m(k)}\beta^{n(p)}$ выглядит так

$$(\alpha^{a(k)}\beta^{b(p)})^q, (\alpha^{a(k)}\beta^{b(p)})^{q+1}, (\alpha^{a(k)}\beta^{b(p)})^{q+2}, ...$$

где q – наименьший индекс вложенности для этого типа.

Запись $(\alpha^{a(k)}\beta^{b(p)})^Y$ будет означать, что Y – переменный индекс вложенности, такой, что $Y \geq q$, где q наименьший индекс вложенности для данного типа.

Всевозможные индексы вложенности интенсиональных типов будут указывать на интенсиональный уровень и уровень вложенности компонент тех выражений, смыслами которых являются объекты этих типов. Величина индекса вложенности определяется в каждом случае тем, использует ли данный смысл, который рассматривается как процедура задания денотата выражения, другие интенсиональные сущности в качестве своих компонент.

---

[2] Значения одних и тех же букв алфавита, фигурирующих в качестве метапеременных по индексам интенсионального уровня и вложенности, всегда совпадают: n и n принимают одни и те же значения.

Композициональность и композициональные типы

В соответствии с принципом композициональности Фреге, смысл сложного выражения является функцией смыслов его компонент. Насколько расслоение типов интенсиональных сущностей способствует реализации принципа композициональности? Рассмотрим пример. Пусть смысл предложения

У этой телеги четыре колеса (1)

есть процедура установления его денотата. Ее компонентами являются процедуры, сопоставляющие денотаты компонентам (1) и, поскольку, все эти компоненты являются выражениями экстенсионального типа, очевидно, что получающаяся процедура проверки (1) не будет включать в себя установление значения какого-либо интенсионального выражения. Смысл предложения

У объекта, который Боря считает наиболее удобным видом транспорта, четыре колеса (2)

будет включать в себя процедуру установления значения пропозиции, выраженной фразой "то, что x – самый удобный вид транспорта", которая должна принадлежать к сфере мнения Бори. Это значит, что смыслы (1) и (2) будут различаться между собой тем, что один включает в себя установление значения интенсионального выражения, а другой – нет, что будет выражено присвоением смыслу (2) индекса вложенности 1. Рассмотрим теперь концепт предиката "иметь четыре колеса". Он сопоставляет концепту выражений "эта телега" и концепту "объект, который Боря считает наиболее удобным видом транспорта" пропозиции, выступающие в роли смыслов (1) и (3). Мы уже выяснили, что эти пропозиции будут различаться по уровням вложенности и соответствовать разным типам пропозиций, а значит смысл выражения "иметь четыре колеса" является функцией, которая индивидному концепту с уровнем вложенности 0, т. е. смыслу выражения "эта телега", сопоставляет пропозицию уровня вложенности 0, а другому индивидному концепту, а именно смыслу выражения "объект, который Боря считает наиболее удобным видом транспорта", сопоставляет пропозицию уровня вложенности 1. В этом нет ничего неестественного: уровень вложенности пропозиции отражает ее структуру и не может быть меньше уровней вложенности ее компонент. Это значит, что тип концепта предиката "иметь четыре колеса" является типом функции на интенсиональных объектах, который не определяется однозначно и уточнение параметров которого зависит от контекста употребления.

Уровень вложенности смысла сложного выражения будет зависеть также от того, как выражен предикат "иметь четыре колеса". Например, выражение

Свойство, отражающее число колес, которым, по мнению Саши, обладает эта телега (3)

содержит интенсиональные компоненты и его смысл будет иметь индекс вложенности 1. Тогда результирующий смысл, образованный как функция от смысла (3) и смысла выражения "эта телега", окажется пропозицией уровня вложенности 1. Таким образом, повышать индекс вложенности смысла сложного выражения могут индексы вложенности всех его компонент.

Здесь мы подходим к различению *композициональных* и *некомпозициональных* типов. Расслоение сложных интенсиональных типов дает нам различные комбинации уровней вложенности компонентов выражения и самого выражения. Начиная с комбинации, соответствующей наименьшим уровням вложенности, все комбинации образуют символы типов синтаксически корректных выражений. Выделение композициональных типов производится на основании следующего критерия: композициональный тип есть тип функции на интенсиональных объектах, уровень вложенности которого зависит не только от интенсионального уровня и уровня вложенности типа аргумента, но и совпадает с уровнем вложенности типа значения. Композициональными мы будем считать, например, типы

$$(o^{1(1)}\iota^{1(0)})^1, (o^{1(2)}\iota^{1(0)})^2, (o^{1(2)}\iota^{1(2)})^2, (o^{1(3)}\iota^{1(2)})^3$$

В первом случае, для того, чтобы из семантической программы типа $\iota^{1(0)}$ получить программу типа $o^{1(1)}$, необходимо построить ее композицию с некоторой программой, уровень вложенности которой есть 1. Такая программа принадлежит к типу $(o^{1(1)}\iota^{1(0)})^1$. Точно так же рассуждаем относительно второго и четвертого случаев. В третьем случае повышения уровня вложенности не происходит, но это не значит, что композиция программы типа $\iota^{1(2)}$ с программой, уровень вложенности которой меньше 2, может дать программу уровня вложенности 2. Это хорошо видно на следующих примерах символов композициональных типов:

$$((o^{2(3)}\iota^{1(2)})^3 o^{3(2)})^3, (o^{1(2)}(\iota^{1(1)}o^{1(0)})^1)^2$$

В символах композициональных типов индекс вложенности всего символа типа не превосходит индекса вложенности типа значения. Это связано с тем, что свойства самой программы композиции оказывает такое же влияние на результирующую программу, что и программа, выступающая в роли значения. По этой причине в символе композиционального типа индекс вложенности всего типа

не только не меньше, но равен максимальному индексу вложенности компонент. В символах некомпозициональных типов соотношения могут быть любые и индексы вложенности ограничены только нижним пределом, который устанавливает определение наименьшего индекса вложенности. Следующие символы типов не являются символами композициональных типов:

$(o^{1(0)}\iota^{1(0)})^{1}$, $((o^{2(1)}\iota^{1(2)})^{0}o^{3(3)})^{3}$, $(o^{1(0)}(\iota^{1(1)}o^{2(1)})^{0})^{0}$.

Построение концептуализаций атомарных выражений

Введем *оператор n-концептуализации* атомарных констант и переменных $[...]_n$, так что выражения $[A_\alpha]_n$, где A_α – атомарная константа, будем называть *n*-концептуализацией A_α, а $[B_\beta]_n$, если B_β переменная, будем называть *n-квази*концептуализацией B_β. При $n = 0$, $[A]_n$ есть A. Для указания типа концептуализации записываем его как (α^*) в $[A_\alpha]_{n(\alpha^*)}$. Выражение вида $[A_\alpha]_n$, где A_α атомарно, будет обозначать имя смысла A_α, имеющее композициональный тип, получаемый в ходе описываемой ниже процедуры[3].

Процедура построения композициональных концептуализаций атомарных выражений простых типов и сложных неинтенсиональных типов.

Этап (А). *Шаг* (1). Пусть $A_{\alpha^{n(m)}}$ – атомарная константа. Если α есть o или ι, то $[A_{\alpha^{n(m)}}]_1$ имеет вид $[A]_{\alpha^{n+1(m+1)}}$. На этом построение концептуализации заканчивается.

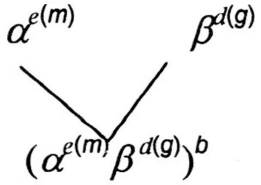
Шаг (2) Если α сложный и неинтенсиональный тип, имеющий вид $(\tau^{n(k)}\rho^{m(h)})^{p}$, где $\min(n, m) = 0$, то повышаем все индексы интенсионального уровня на 1 и в получившемся символе типа заменяем все, даже совпадающие, индексы интенсионального уровня и вложенности *различными* метапеременными, с тем, чтобы получить *схему* символа типа.

Этап (Б) Строим дерево анализа структуры схемы символа типа. Для этого помещаем полученный на этапе (А) символ типа $(\tau^{s(k)}\rho^{t(h)})^{p}$, где $s = n+1$ и $t = m+1$ в основание ("корень") дерева и

---

[3] Выражения A_{α^n} и $[A_\alpha]_n$ не являются просто вариантами записи, как это имеет место в случае построения интенсионального восхождения, и могут оказаться выражениями разных типов, отличаясь друг от друга системой индексов вложенности. Если первое выражение получено как восхождение выражения типа α^{n-1} и в качестве его значения будет фигурировать произвольный объект типа α^n, то второе выражение получается в ходе выполнения описываемой далее процедуры. Таким образом, объекты типа α^n могут обозначаться двумя разными видами выражений.

строим дерево шаг за шагом, руководствуясь правилом ветвления, схема которого такова:



Процесс построения дерева остановится сам, и ветви, на которых окажутся атомарные символы типа, будем называть концевыми. В получившемся дереве из каждого узла будут отходить наверх ровно две ветви, для которых существует три возможности: (а) обе эти ветви концевые, (б) одна из этих ветвей концевая, (в) ни одна из этих ветвей не концевая.

Этап (В). Редукция и преобразование дерева.

Шаг (1) Рассмотрим все имеющиеся узлы, ветви которых удовлетворяют условию (а). Эти ветви являются концевыми и каждой паре таких ветвей сопоставим пару простых символов типа $\langle \sigma^{c(s)}, \mu^{g(t)} \rangle$, где правый символ находится на конце правой ветви, а левый – на конце левой, в то время как предшествующему узлу соответствует символ типа $(\sigma^{c(s)} \mu^{g(t)})^{x}$. В каждом случае, когда имеется такая пара, стираем обе ветви и в предшествующий им узел помещаем следующее выражение (будем считать, что если при применении правил вводятся новые переменные индексы вложенности, то они всегда являются новыми, т. е. до сих пор нигде не использованными; переменные, отмеченные "*" будут называться "внешними" переменными):

(1.1) $\{(\sigma^{c(\max(g,\, Z,\, X^*))} \mu^{g(Z)})^{(\max(g,\, Z,\, X^*))}\}$, если $c = g = 1$;

(1.2) $\{(\sigma^{c(\max(g,\, t+1,\, X^*))} \mu^{g(t+1)})^{(\max(g,\, t+1,\, X^*))}\}$, если $c = 1$ и $g > 1$;

(1.3) $\{(\sigma^{c(\max(s+1,\, Z,\, X^*))} \mu^{g(Z)})^{(\max(s+1,\, Z,\, X^*))}\}$, если $c > 1$ и $g = 1$;

(1.4) $\{(\sigma^{c(\max(g,\, t+1,\, s+1,\, x+1))} \mu^{g(t+1)})^{(\max(g,\, t+1,\, s+1,\, x+1))}\}$,

если $c > 1$ и $g > 1$.

Шаг (2) После преобразований, соответствующих п. (1), рассматриваем редуцированное дерево, в котором появились новые концевые ветви, содержащие символы типа в фигурных скобках. Возьмем теперь все сходящиеся пары концевых ветвей дерева. Они могут иметь вид:

(2.1) $\langle \nu^{h(q)}, \{(\sigma\mu)^{M}\} \rangle$,

(2.2) $\langle \{(\gamma\delta)^{K}\}, \varphi^{h(q)} \rangle$,

(2.3) $\langle \{(\gamma\delta)^{K}\}, \{(\sigma\mu)^{M}\} \rangle$,

где K, M метапеременные по выражениям, которые образованны, в частности, метапеременными по индексам интенсионального уровня и вложенности, переменными индексами вложенности и

функциями max и min. Здесь $\{(\gamma\delta)^K\}$ и $\{(\sigma\mu)^M\}$ получены по пп. (1.1) – (1.4). В каждом из этих случаев стираем соответствующие ветви и в предшествующий им узел, в котором находился символ типа с внешним индексом вложенности i, помещаем

(2.1.1) $\{(\nu^{h(\max(M,\ X^*))}\ (\sigma\mu)^M)^{(\max(M,\ X^*))}\}$, если $h = 1$;

(2.1.2.1) $\{(\nu^{h(\max(q+1,\ M,\ i+1))}(\sigma\mu)^M)^{(\max(q+1,\ M,\ i+1))}\}$,

если $i > -1$ и $h > 1$;

(2.1.2.2) $\{(\nu^{h(\max(q+1,\ M,\ X^*))}(\sigma\mu)^M)^{\max(q+1,\ M,\ X^*)}\}$,

если $i = -1$ и $h > 1$;

(2.2.1) $\{(\gamma^{\max(K,\ X,\ Y^*)}\delta)^{\max(K,\ X,Y^*)}\ \varphi^{h(X)})^{\max(K,\ X,\ Y^*)}\}$, если $h = 1$;

(2.2.2.1) $\{(\gamma^{\max(K,\ h,\ q+1,\ i+1)}\delta)^{\max(K,\ h,\ q+1,\ i+1)}$

$\varphi^{h(q+1)})^{\max(K,\ h,\ q+1,\ i+1)}\}$, если $i > -1$ и $h > 1$;

(2.2.2.2) $\{(\gamma^{\max(K,\ h,\ q+1,\ X^*)}\delta)^{\max(K,\ h,\ q+1,\ X^*)}\varphi^{h(q+1)})^{\max(K,\ h,\ q+1,X^*)}\}$,

если $i = -1$ и $h > 1$;

(2.3.1) $\{((\gamma^{\max(K,\ M,\ i+1)}\delta)^{\max(K,\ M,\ i+1)}(\sigma\mu)^M)^{\max(K,\ M,\ i+1)}\}$,

если $i > -1$;

(2.3.2) $\{((\gamma^{\max(K,\ M,\ X^*)}\delta)^{\max(K,\ M,\ X^*)}(\sigma\mu)^M)^{\max(K,\ M,\ X^*)}\}$, если $i = -1$.

Обратим внимание, что внешние переменные появляются только тогда, когда $i = -1$.

Шаг (3). В полученном редуцированном дереве снова осуществляем редукции и преобразования по п. (2) до тех пор, пока дерево не будет редуцировано к одному узлу, в котором, после стирания фигурных скобок, окажется схема символа типа, представляющая собой программу вычисления значения индексов вложенности.

Этап (Г). Вычисление значений индексов.

Шаг (1). Совершаем преобразование, обратное этапу (Б), в результате чего метапеременные заменяются на те индексы, вместо которых они были подставлены.

Шаг (2). *Всем внешним*, т. е. отмеченным "*", переменным, входящим в *самый внешний* индекс вложенности, присваиваем значение 0.

Шаг (3). Осуществляем несложные вычисления, и полученный символ типа α^*, возможно, содержащий параметры, будет являться типом концептуализации рассматриваемой атомарной константы A_α, так что $[A_\alpha]_1$ есть $[A]_{\alpha^*}$. Кроме того, $[A]_{\alpha^{**}}$, где α^{**} получено из α^* любой допустимой подстановкой вместо переменных индексов вложенности, будем считать *частным случаем* концептуализации.

На этом описание процедуры завершено и мы можем сформулировать следующие определения:

Определение композиционального типа. Любой частный случай типа концептуализации атомарной константы, который можно получить по описанной выше процедуре, не используя при этом *шаг* (2) этапа (Г), называется *композициональным*.

Определение параметрической концептуализации. Концептуализации, тип которых содержит переменные индексы вложенности, будем называть *параметрическими* концептуализациями.

Приведем примеры того, как работает процедура, и поясним некоторые содержательные вопросы.

Определим концептуализацию константы f_{ol}. По процедуре установления $[f_{ol}]_1$ мы получим схему типа $(o^{1(\max(1,X))}\,\iota^{1(X)})^{\max(1,\,X)}$ для $X \geq 0$, откуда, например, можно получить частные случаи концептуализации f, имеющие вид

$[f]_{(o1(1)\iota1(0))1}$, $[f]_{(o1(1)\iota1(1))1}$, $[f]_{(o1(2)\iota1(2))2}$, $[f]_{(o1(3)\iota1(3))3}$, ...

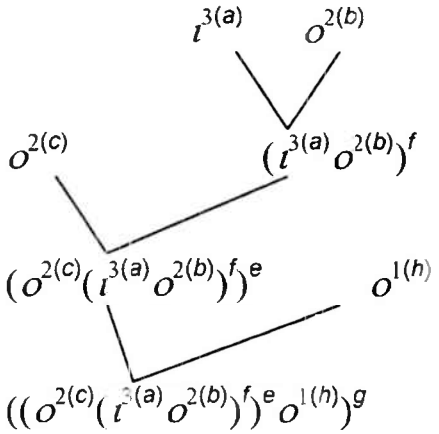
Зачем нужны переменные, а также внешние переменные индексы вложенности и о чем они говорят? Выше мы рассмотрели пример, в котором концепт предиката "иметь четыре колеса", если мы считаем его функцией композиционального типа, сопоставлял аргументам с разным уровнем вложенности пропозиции также с разным уровнем вложенности. Если в качестве аргумента функции $[f]_1$ будет выступать $A_{\iota1(0)}$, то для соответствующего частного случая концептуализации f вида $[f]_{(o1(1)\iota1(0))1}$ мы в качестве значения получим пропозицию типа $o^{1(1)}$. Для $B_{\iota1(2)}$ другой частный случай $[f]_{(o1(2)\iota1(2))2}$ сопоставит пропозицию типа $o^{1(2)}$. Тем самым с помощью параметров, проявляется "полиморфность" концептуализации. Может ли увеличение уровня вложенности результирующей пропозиции иметь другой источник, нежели уровень вложенности аргумента? В данном случае, нет. Имея дело с атомарными константами, мы предполагаем, что уровень вложенности, который сопоставляется их концептам, минимален. Именно поэтому мы присваиваем внешним переменным, входящим в самый внешний индекс вложенности символа типа концептуализации, значение 0. Это означает, что если в качестве программы концептуализации фигурирует концепт константы, то сама эта программа в наименьшей степени влияет на уровень вложенности результата. Поэтому в качестве концептуализации f не может фигурировать выражение вида $[f]_{(o1(3)\iota1(2))3}$. Выражение такого типа может являться концептуализацией, поскольку тип $(o^{1(3)}\iota^{1(2)})^3$ является композициональным, но это не будет концептуализация атомарной константы.

В следующем примере будем сохранять индексы интенсионального уровня, не заменяя их метапеременными, если это не вызывает двусмысленности. Пусть

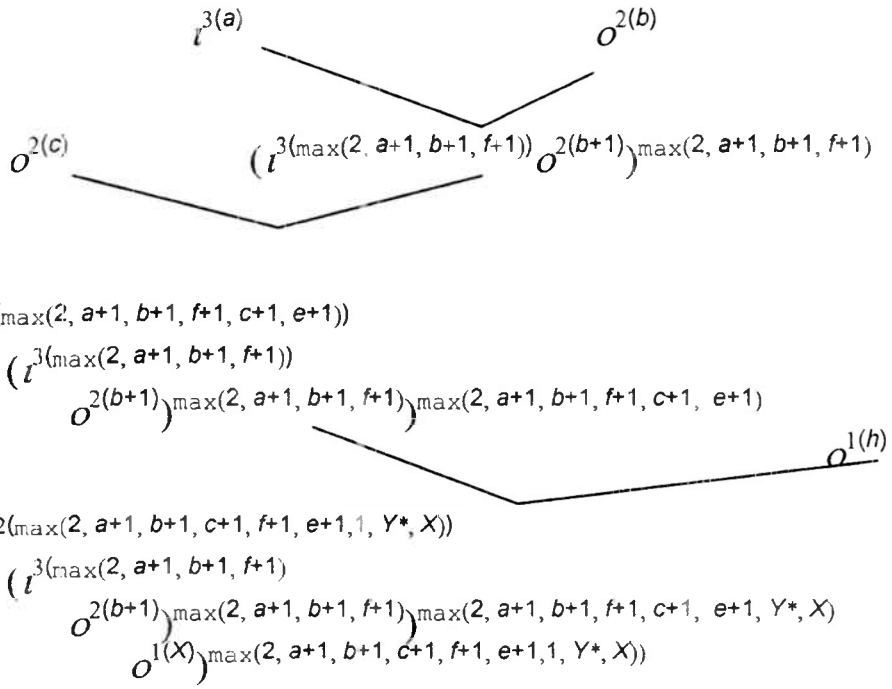
$A_{(o1(0)(\imath2(2)o1(3))4)0o(-1))(-1)}$

атомарная константа (индекс типа выписан без сокращений). После повышения интенсионального уровня на 1, превращаем символ типа
$((o^{2(0)}(\imath^{3(2)}o^{2(3)})^4)^0o^{1(-1)})^{(-1)}$ в схему $((o^{2(c)}(\imath^{3(a)}o^{2(b)})^f)^eo^{1(h)})^g$.

Вслед за тем строим дерево:



и производим редукцию, которую можно описать следующим образом (выражения вида $\max(\max(a, b), c)$ заменяем на $\max(a, b, c)$):



Теперь подставляем вместо метапеременных, соответствующие индексы:

$$((o^{2(\max(2,\,2+1,\,3+1,\,0+1,\,4+1,\,0+1,\,1,\,0,\,X))}$$
$$(\iota^{3(\max(2,\,2+1,\,3+1,\,4+1)}$$
$$o^{2(3+1)})^{\max(2,\,2+1,\,3+1,\,4+1)})^{\max(2,\,2+1,\,3+1,\,0+1,\,4+1,\,0+1,\,1,\,0,\,X))}$$
$$o^{1(X)})^{\max(2,\,2+1,\,3+1,\,0+1,\,4+1,\,0+1,\,1,\,0,\,X)}$$

откуда получаем символ типа

$$((o^{2(\max(5,\,X))}(\iota^{3(5)}o^{2(4)})^5)^{\max(1,\,X)}\ o^{1(X)})^{\max(5,\,X)},$$

содержащий параметр X. Это означает, что при применении к аргументу типа $o^{1(0)}$, $[A]_1$ будет действовать как функция типа

$$((o^{2(5)}(\iota^{3(5)}o^{2(4)})^5)^1 o^{1(0)})^0,$$

при применении к аргументам типов $o^{1(2)}$ и $o^{1(7)}$ – как функция, соответственно, типов

$$((o^{2(5)}(\iota^{3(5)}o^{2(4)})^5)^2 o^{1(2)})^2$$

и

$$((o^{2(7)}(\iota^{3(5)}o^{2(4)})^5)^7 o^{1(7)})^7.$$

Наше построение проведено почти без сокращений и поэтому выглядит довольно громоздким. На самом деле, можно использовать более компактные формы записи.

Определение. Квазиконцептуализацией переменной x_α назовем переменную x_{α^*}, полученную в ходе следующей процедуры:

шаг (а) если α простой тип и имеет вид $o^{n(m)}$ или $\iota^{n(m)}$, то,

(а.1) если $m > -1$, то α^* есть $o^{n+1(m+1)}$ или $\iota^{n+1(m+1)}$, и

(а.2) если $m = -1$, то α^* есть $o^{n+1(X)}$ или $\iota^{n+1(X)}$, где X новый переменный индекс вложенности;

шаг (б) если α^* сложный тип, то α^* получаем по процедуре построения концептуализации атомарной константы типа α, без использования шага (2) этапа (Г), и стерев звездочку "*" у всех внешних переменных, которые входят в самый внешний индекс вложенности.

Определения. Композициональной концептуализацией выражения композиционального интенсионального типа является его интенсиональное восхождение. Композициональной концептуализацией выражения A_{α^n} некомпозиционального интенсионального типа вида α^n, где α – неинтенсиональный тип, является $[A_\alpha]_{n+1}$.

Итак, описанная процедура позволяет сопоставить атомарным функциональным выражениям неинтенсиональных типов в качестве их смыслов композициональные концептуаплизации, т. е. функции на интенсиональных объектах, работа которых удовлетворяет принципу композициональности. При этом композициональные концептуализации функциональных типов могут быть полиморфны, т. е. мы имеем дело с множеством интенсиональных

сущностей, выполняющих роль смысла функции. В соответствии с определениями, можно затем получить композициональные концептуализации для выражений интенсиональных типов. Некомпозициональные концептуализации синтаксически корректны, но они будут получать иную интерпретацию, определяемую специфическими характеристиками сопоставляемых им объектов. Следующим шагом исследования является создание процедуры построения композициональных концептуализаций для произвольных выражений модифицированного языка ЛСД.

ЛИТЕРАТУРА

1. *Aczel P.* Frege Structures and the notions of Proposition, Truth and Set // The Kleene Symposium / Eds. J. Barwise, H.J. Heisler and K. Kunen. Dordrecht, 1980. P. 31-59.
2. *Anderson C. A.* General Intensional Logic // Handbook of Philosophical Logic / Eds. D. Gabbay, F. Guenthner. Dordrecht, 1984. Vol. II. P. 355-385.
3. *Anderson C. A.* Semantical Antinomies in the Logic of Sense and Denotation // Notre Dame Journal of Formal Logic. Vol. 28. 1987. P. 99-114.
4. *Church A.* A Formulation of the Logic of Sense and Denotation // Structure, Method and Meaning. Essays in honor of H.M. Sheffer. New York, 1951. P. 3-24.
5. *Church A.* Outline of a Revised Formulation of the Logic of Sense and Denotation (Part I) // NOUS. V. 7. 1973. P. 24-33; (Part II) // NOUS. V. 8. 1974. P. 135-156.
6. *Church A.* Comparision of Russell's Resolution of the semantical Antinomies with that of Tarski // Journal of Symbolic Logic. V. 41. 1976. P. 747-760.
7. *Church A.* A Revised Formulation of the Logic of Sense and Denotation. Alternative (1) // NOUS. V. 27. 1993. P. 141-157.
8. *Kripke S.* Outline of a theory of truth // Journal of Philosophy. V. 72, 1975. P. 690-716.
9. *Myhill J.* Problems Arising in the Formalisation of Intentional Logic // Logique et Analyse. 1958, V. 1. P. 78-83.
10. *Turner R.* Truth and Modality for Knowledge Representation. Cambridge, Mass. 1991.
11. *Монтегю Р.* Прагматика // Семантика модальных и интенсиональных логик / Пер. с англ. под ред. В.А. Смирнова. М., 1981. С. 254-279.
12. *Монтегю Р.* Прагматика и интенсиональная логика // Семантика модальных и интенсиональных логик / Пер. с англ. под ред. В.А. Смирнова. М., 1981. С. 223-253.

В.И.Моисеев

ПРОЕКТИВНО-МОДАЛЬНАЯ ОНТОЛОГИЯ И НЕКОТОРЫЕ ЕЕ ПРИЛОЖЕНИЯ

Abstract. *The paper describes the logical system called Projective Modal Ontology. It unites the formalized language of Stanislaw Lesniewski's ontology and the ideas of the All-Unity Russian philosophy. Many philosophical systems have a typical basic semantics: a principle can be restricted by conditions to form aspects of this principle (relation of principle and its aspects is similar to the relation of a three-dimensional object and its two dimensional projections). Projective Modal Ontology presents this semantics in a formalized way. Language, axioms, definitions and theorems of the system are discussed in detail.*

В этой работе я хотел бы предложить для рассмотрения проект одной аксиоматической системы с использованием средств языка «Онтологии» С.Лесьневского (см. [1] и [4]).

В частности, в рамках этой системы Прототетика используется без всяких изменений, затем, за исключением предиката ε, принимается синтаксис построения выражений Онтологии в форме различных категориальных типов, правила логического вывода [4, p. 21-27], кроме правила экстенсиональности. Прототетические определения используются без изменений. Онтологические определения претерпевают существенные изменения (подробнее см. в [3]). Как и у Лесьневского, определения добавляются в виде теорем системы.

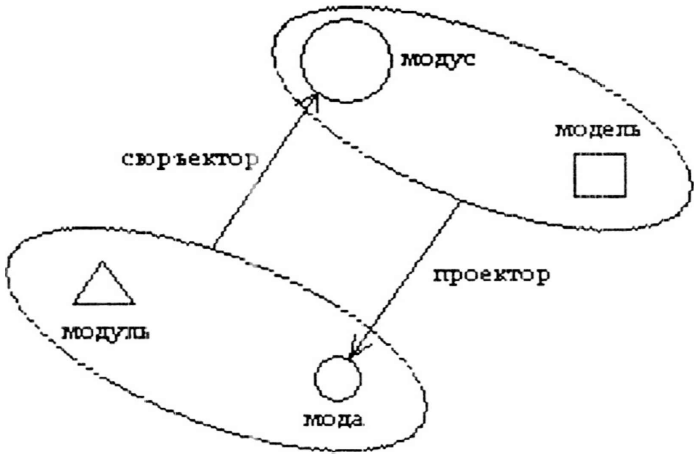
Основная идея построения новой аксиоматики состоит в использовании некоторого семиместного предиката Mod вместо предиката «ε» Лесьневского. Предикат Mod в формуле Mod(a,b,c,f,d,h,α) обладает категориальным типом

S / (T, (N/(N,N)), N, (N/(N,N)), N, N, N),

где S – тип предложений, N – тип имен, T – произвольный категориальный тип.

Идея такого предиката предполагает следующую онтологию. Определены некоторые источники – генераторы бытия (*модусы*), они способны образовывать свои аспекты (*моды*) в рамках некоторых ограничивающих условий (*моделей*), которые накладываются на модусы и ограничивают их до мод. Сама процедура ограничения может быть названа *проектором*. В общем случае проектор – это двуместная операция, определенная на модусе и модели, и образующая в результате моду этого модуса в этой

модели. В то же время на отношение моды и модуса можно посмотреть и с другой стороны. Можно представить, что не мода образуется из модуса, но наоборот, модус из моды. В этом случае нужно не начало ограничения, но некоторое начало расширения моды до модуса. Такое начало я буду называть *модулем*. Процедуру расширения моды до модуса на основе некоторого модуля также можно рассматривать как некоторый двуместный функтор, который я буду называть *сюръектором*. Определяясь на моде и модуле, сюръектор дает модус этой моды в этом модуле. В целом получаем симметричную схему такого вида:



Предикат Mod должен выразить указанную координацию всех шести элементов – модуса, моды, модели, модуля, проектора и сюръектора. Следовательно, он должен быть, как минимум, шестиместным предикатом. Кроме того, следует учесть, что возможны разные контексты определения всех указанных объектов. Например, в одном контексте объекты a и b могут быть таковы, что b – мода a, в другом контексте, наоборот, a может быть модой b. Чтобы выразить такую зависимость всех модальных определений от некоторых контекстов, я введу седьмой элемент, который назову *спецификатором*. Спецификатор задает конкретный контекст, в рамках которого определены все указанные шесть объектов. Теперь предикат Mod становится семиместным предикатом, и его можно записать в следующем виде:

Mod(**a**,**b**,**c**,**f**,**d**,**h**,α) – «в контексте α **a** есть мода модуса **b** в модели **c** и с проектором **f**, и **b** есть модус моды **a** в модуле **d** с сюръектором **h**»

Развиваемую систему я буду называть *Проективно-модальной 7α-Онтологией*, или просто 7α-*Онтологией*.

Первая аксиома 7α-Онтологии:

(**AO1**) $Moda(a,b,\alpha) \equiv Modus(a,\alpha) \wedge \forall d(Moda(b,d,\alpha) \supset Moda(a,d,\alpha)) \wedge Moda(b,b,\alpha)$.

Здесь:

$Modus(a,\alpha) \equiv \exists b \exists c \exists f \exists d \exists h Mod(b,a,c,f,d,h,\alpha)$ – «a есть α-модус»

$Moda(a,b,\alpha) \equiv \exists c \exists f \exists d \exists h Mod(a,b,c,f,d,h,\alpha)$ – «a есть α-мода модуса b».

В этой первой аксиоме определяются свойства отношения «быть модой модуса в контексте α» (Moda(…,…,α)). Требуется, чтобы это отношение было транзитивным и рефлексивным, чтобы всякая мода одновременно была и модусом.

Вторая аксиома:

(**AO2**) $Mod(a,b,c,f,d,h,\alpha) \equiv (a =^{\alpha 1} f(b,c)) \wedge (b =^{\alpha 2} h(a,c)) \wedge \exists x Mod(x,b,c,f,d,h,\alpha) \wedge \exists y Mod(a,y,c,f,d,h,\alpha)$,

где $(x =^{\alpha 1} y) \equiv \forall b \forall c \forall f \forall d \forall h(Mod(x,b,c,f,d,h,\alpha) \equiv Mod(y,b,c,f,d,h,\alpha)) \wedge Moda(x,\alpha) \wedge Moda(y,\alpha)$ – равенство мод по всем остальным объектам (кроме спецификатора),

$Moda(a,\alpha)$ – это формула $\exists b \exists c \exists f \exists d \exists h Mod(a,b,c,f,d,h,\alpha)$, и читается она как «a есть α-мода».

$(x =^{\alpha 2} y) \equiv \forall a \forall c \forall f \forall d \forall h(Mod(a,x,c,f,d,h,\alpha) \equiv Mod(a,y,c,f,d,h,\alpha)) \wedge Modus(x,\alpha) \wedge Modus(y,\alpha)$ – равенство модусов по всем остальным объектам (кроме спецификатора).

В этой аксиоме выражается связь функторов f и h с предикатом Mod.

С использованием указанных аксиом в рамках некоторой подходящей логической системы можно строить аксиоматическую теорию предиката Mod. В работах [2] и [3] я развивал версию Онтологии с использованием в качестве первичного четырехместного предиката Mod(a,b,c,f), который можно было бы определить в терминах 7α-Онтологии через формулу

$\exists d \exists h Mod(a,b,c,f,d,h,\alpha)$.

1. Первичные определения 7α-Онтологии

Все последующие конструкции определяются для некоторого фиксированного спецификатора α. Под первичными определениями 7α-Онтологии я буду в первую очередь понимать прототетические определения вида

$$D^{\alpha}k_1 \ldots k_m. \quad \mu(x_{k1},\ldots,x_{km},\alpha) \equiv \exists x_{p1} \ldots \exists x_{pn} Mod(x_k,x_p,\alpha),$$

где $\mu(x_{k1},\ldots,x_{km},\alpha)$ – определяемое выражение типа S. Выражение $\mu(x_{k1},\ldots,x_{km},\alpha)$ содержит в качестве свободных переменных, кроме

α, только переменные $x_{k1},\ldots,x_{km}$ типа ν, где $1 \leq k_j \leq 6$ при $j=1,..,m$, тип ν - это либо тип N при $k_j \neq 4,6$, либо N/(N,N) при $k_j = 4,6$. Под обозначением $\exists x_{p1}\ldots\exists x_{pn}Mod(x_k,x_p,\alpha)$ имеется в виду выражение, образованное навешиванием кванторов существования $\exists x_{p1}\ldots\exists x_{pn}$ на предикат Mod по переменным $x_{p1},\ldots,x_{pn}$ типа ν, где $1 \leq p_s \leq 6$ при $s=1,..,n$, и тип ν - это либо тип N при $p_s \neq 4,6$, либо N/(N,N) при $p_s = 4,6$. В предикат Mod, кроме терма α, который стоит на 7-м месте, входят только переменные $x_{k1},\ldots,x_{km}$ и $x_{p1},\ldots,x_{pn}$, так что переменная k_j стоит на k_j-ом месте в предикате Mod, перменная p_s – на p_s-ом месте, и $m+n = 6$.

Я буду обозначать выражения типа $\mu(x_{k1},\ldots,x_{km},\alpha)$ также символом $Mod^{k1\ldots km7}(x_{k1},\ldots,x_{km},\alpha)$, например:

$D^{\alpha}123.\ Mod^{1237}(a,b,c,\alpha) \equiv \exists f\exists d\exists h\ Mod(a,b,c,f,d,h,\alpha)$,

где " $Mod^{1237}(a,b,c,\alpha)$" читается как "a есть мода модуса b в модели c в контексте α".

Во-вторых, под первичными определениями я буду понимать прототетические определения вида

$DI^{\alpha i}{}_{k1\ldots km}.\quad a \subset^{\alpha i}_{k1\ldots km} b \equiv \forall x_{k1}\ldots\forall x_{km}(\exists y_{p1}\ldots\exists y_{pn}Mod(...a...) \supset \exists y_{p1}\ldots y_{pn}Mod(...b...))$.

$DE^{\alpha i}{}_{k1\ldots km}.\quad a \approx^{\alpha i}_{k1\ldots km} b \equiv \forall x_{k1}\ldots\forall x_{km}(\exists y_{p1}\ldots\exists y_{pn}Mod(...a...) \equiv \exists y_{p1}\ldots y_{pn}Mod(...b...))$.

Эти записи означают, что α стоит на 7-м месте, переменные $x_{k1},\ldots,x_{km}$ стоят соответственно на $k_1, \ldots, k_m$-ных местах, переменные $y_{p1},\ldots, y_{pn}$ – на $p_1,\ldots, p_n$-ных местах соответственно в предикатах Mod. Здесь $m+n = 6$, все i, k_j и p_s где $j=1,..,m$, $s=1,..,n$, не равны между собой и меньше 7. Термы a и b стоят на i-том месте в предикатах Mod. Переменные с индексом 4 и 6 (стоящие на 4-м или 6-м месте в предикатах Mod) – это переменные типа N/(N,N). Все остальные переменные, кроме α, имеют тип N.

Из этих определений видно, что $a \approx^{\alpha i}_{k1\ldots km} b \equiv (a \subset^{\alpha i}_{k1\ldots km} b) \wedge (b \subset^{\alpha i}_{k1\ldots km} a)$.

Выражение $a \subset^{\alpha i}_{k1\ldots km} b$ я буду называть «слабым $^{\alpha i}_{k1\ldots km}$-включением a в b», выражение $a \approx^{\alpha i}_{k1\ldots km} b$ – «слабым $^{\alpha i}_{k1\ldots km}$-равенством a и b».

Отношение с индексной формой $^{\alpha i}_{k1\ldots km}$ выражает равенство или включение i-объектов по k_1-, k_2-,…,k_m-объектам в рамках контекста α. Например, модусы могут быть равны между собой по модам и моделям:

$a \approx^{\alpha 2}_{13} b \equiv \forall x_1\forall x_3(\exists y_4\exists y_5\exists y_6 Mod(x_1,a,x_3,y_4,y_5,y_6,\alpha) \equiv \exists y_4\exists y_5\exists y_6 Mod(x_1,b,x_3,y_4,y_5,y_6,\alpha))$

Используется также следующее равенство:

DE^{α}. $a =^{\alpha} b \equiv Moda(a,b,\alpha) \wedge Moda(b,a,\alpha)$,
где "$a =^{\alpha} b$" читается как "a α-равно b".

В-третьих, под первичными определениями я буду понимать так называемые *валентные определения*, среди которых, по крайней мере, содержатся следующие:

$DPModa1^{\alpha}$. $PModa(a,\alpha) \equiv \exists b(Moda(b,a,\alpha) \wedge \neg Moda(a,b,\alpha)) \wedge Moda(a,\alpha)$,
где "PModa(a,α)" читается как "a есть положительная (ненулевая) α-мода".

Здесь положительная мода определяется как такая, которая имеет не равную себе моду.

$DNModa^{\alpha}$. $NModa(a,\alpha) \equiv \forall b(Moda(b,\alpha) \supset Moda(a,b,\alpha)) \wedge Moda(a,\alpha)$,
где "NModa(a,α)" читается как "a есть нулевая α-мода".

$DPModa2^{\alpha}$. $PModa(a,b,\alpha) \equiv Moda(a,b,\alpha) \wedge PModa(a,\alpha)$,
где "PModa(a,b,α)" читается как "a есть положительная мода модуса b в контексте α".

$DPModus^{\alpha}$. $PModus(a,\alpha) \equiv \exists b PModa(b,a,\alpha)$,
где "PModus(a,α)" читается как "a есть положительный α-модус".

DAt^{α}. $At(a,\alpha) \equiv PModus(a,\alpha) \wedge \forall b(PModa(b,a,\alpha) \supset b=^{\alpha}a)$, здесь "At(a,$\alpha$)" читается как "a есть α-атом".

2. Теория множеств в 7α-Онтологии

Пусть P - функтор категориального типа S/a, где a – некоторый категориальный тип. Рассмотрим определение

DSET(Δ,a)1. $x \in \langle P \rangle \equiv \Delta(x) \wedge P(x)$.

Здесь Δ(x) есть некоторое условие на x, не являющееся теоремой 7α-Онтологии. В определении DSET(Δ,a)1 вводится некоторый функтор F[P] с параметром P и категориальным типом S/(a,S/a), т.е. F[P](x) есть $x \in \langle P \rangle$. Я буду использовать символику "$\in\langle P \rangle$" для выражения функтора F[P], т.е. $\in\langle P \rangle(x)$ есть $x \in \langle P \rangle$ в данном случае. Символ "$\in$" представляет из себя при этом только лишь часть обозначения указанного функтора без какого-либо самостоятельного смысла, но неформально читать выражение «$x \in \langle P \rangle$» можно обычным способом: «x принадлежит множеству <P>». Таким образом, определение DSET(Δ,a)1 представляет собой прототетическое определение в 7α-Онтологии. Спецификацию (Δ,a) можно называть *сортом* «множества». Используя определение DSET(Δ,a)1, можно развить в 7α-Онтологии свою версию теории множеств. Например, можно использовать определения:

DSET(Δ,a)2. $x \in (<P> \cup <Q>) \equiv \Delta(x) \wedge (P(x) \vee Q(x))$
DSET(Δ,a)3. $x \in (<P> \cap <Q>) \equiv \Delta(x) \wedge (P(x) \wedge Q(x))$
DSET(Δ,a)4. $x \in <P>' \equiv \Delta(x) \wedge \neg P(x)$
DSET(Δ,a)5. $<P> =_z <Q> \equiv \forall x(x \in <P> \equiv x \in <Q>)$
DSET(Δ,a)6. $x \in \{a\} \equiv \Delta(x) \wedge (x =^{\alpha 2}_{1} a)$.

3. Булева алгебра на модусах

На модусах может быть определена булева алгебра. Я вновь буду опускать ссылку на конкретный спецификатор α, например, обозначая формулу $(a \,{}^{\alpha}\varepsilon\, b)$ через $(a \varepsilon b)$, и т.д. Под $(x \varepsilon_1 y)$ имеется в виду формула PModa(y,x,α).

В основе алгебры модусов лежат следующие три определения.

DA1. $(a \oplus b)\, \varepsilon\, x \equiv x \varepsilon x \wedge a \varepsilon a \wedge b \varepsilon b \wedge [\forall y(x \varepsilon_1 y \supset \exists z(y \varepsilon_1 z \wedge (a \varepsilon z \vee b \varepsilon z))) \vee NModa(x)]$, где «$(a \oplus b)$» читается как «сумма модусов a и b».

DA2. $(a \otimes b)\, \varepsilon\, x \equiv x \varepsilon x \wedge a \varepsilon a \wedge b \varepsilon b \wedge [\forall y(x \varepsilon_1 y \supset (a \varepsilon y \wedge b \varepsilon y)) \vee NModa(x)]$, где «$(a \otimes b)$» читается как «пересечение модусов a и b».

DA3. $a'\, \varepsilon\, x \equiv x \varepsilon x \wedge a \varepsilon a \wedge [\forall y(x \varepsilon_1 y \supset \neg(a \varepsilon y)) \vee NModa(x)]$, где «a′» читается как «внешность модуса a».

Кроме того, принимаются две дополнительные аксиомы.

AN. $\exists a NModa(a)$ [*Аксиома существования нулевой моды*].

AS. $Moda(a) \wedge Moda(b) \wedge \neg(a \varepsilon b) \supset \exists x(b \varepsilon_1 x \wedge \forall y(x \varepsilon_1 y \supset \neg(a \varepsilon y)))$ [*Аксиома отделения*].

При этих условиях может быть доказана

Теорема булевой алгебры на модусах. Операции ⊕, ⊗ и ′ образуют булеву алгебру на модусах.

При доказательстве теоремы (подробнее см. в [3]) используются следующие аксиомы булевой алгебры

1. $a \oplus b = b \oplus a$
2. $(a \oplus b) \oplus c = a \oplus (b \oplus c)$
3. $a \oplus (b \otimes c) = (a \oplus b) \otimes (a \oplus c)$
4. $(a \oplus b)' = (a') \otimes (b')$
5. $a \oplus a = a$
6. $(a \otimes a') \oplus b = b$
7. $(a')' = a$

Операции модусной суммы и произведения могут быть обобщены, например:

DA1*. $\sum<P> \varepsilon x \equiv x \varepsilon x \wedge [\forall y(x \varepsilon_1 y \supset \exists z \exists t(y \varepsilon_1 z \wedge \Delta(t) \wedge P(t) \wedge t \varepsilon z) \vee NModa(x))]$, где «$\sum<P>$» читается как «сумма модусов, принадлежащих множеству <P>».

4. Исчисление логических дифференциалов и интегралов

Пусть дана версия 7α-Онтологии с двумя фиксированными функторами – проектором ↓ и сюръектором ↑. В такой Онтологии в формуле Mod(a,b,c,↓,d,↑,α) будут варьировать только 4 переменных a,b,c, и d, так что реально мы имеем дело с некоторой 5α-Онтологией. В силу фиксации проектора и сюръектора, можно эту версию Онтологии обозначать как «5↓↑α-Онтология».

В 5↓↑α-Онтологии можно использовать следующие онтологические определения:

Dd1. $Mod^{12467}(x,d_c(b),\downarrow,\uparrow,\alpha) \equiv \exists y(Mod^{123467}(y,b,c,\downarrow,\uparrow,\alpha) \wedge Mod^{12467}(x,y,\downarrow,\uparrow,\alpha))$ – модусно-модальное определение *дифференциала* d_c с параметром c (c-дифференциала).

Dd2. $Mod^{12467}(d_c(b),x,\downarrow,\uparrow,\alpha) \equiv \exists y(Mod^{123467}(y,b,c,\downarrow,\uparrow,\alpha) \wedge Mod^{12467}(y,x,\downarrow,\uparrow,\alpha))$ – модально-модусное определение *дифференциала* d_c с параметром c (c-дифференциала).

Di1. $Mod^{12467}(i_e(a),x,\downarrow,\uparrow,\alpha) \equiv \exists y(Mod^{124567}(a,y,\downarrow,e,\uparrow,\alpha) \wedge Mod^{12467}(y,x,\downarrow,\uparrow,\alpha))$ – модально-модусное определение *интеграла* i_e с параметром e (e-интеграла).

Di2. $Mod^{12467}(x,i_e(a),\downarrow,\uparrow,\alpha) \equiv \exists y(Mod^{124567}(a,y,\downarrow,e,\uparrow,\alpha) \wedge Mod^{12467}(x,y,\downarrow,\uparrow,\alpha))$ – модусно-модальное определение *интеграла* i_e с параметром e (e-интеграла).

На основе этих определений может быть развито своего рода исчисление (логических) дифференциалов и интегралов. Далее в этом параграфе я буду сокращать формулу Mod(a,b,c,↓,e,↑,α) через формулу Mod(a,b,c,e), оставляя в явной записи только варьирующие элементы. Для формулы Mod(a,b,c,e) также можно использовать нотацию, принятую в 7α-Онтологии, только опуская индексы 4, 6 и 7. Например, выражение $Mod^{124567}(a,b,\downarrow,e,\uparrow,\alpha)$ будет выглядеть как выражение $Mod^{125}(a,b,e)$, и т.д. Под записью b ε a будет иметься в виду в этом случае формула $Mod^{12467}(a,b,\downarrow,\uparrow,\alpha)$. Могут быть доказаны, например, следующие теоремы.

Теорема 1. $Mod(a,b,c,e) \supset (d_c(b) = a)$

Теорема 2. $Mod(a,b,c,e) \supset (i_e(a) = b)$

Теорема 3. $Mod(a,b,c,e) \supset (i_e(d_c(b)) = b)$

Теорема 4. $Mod(a,b,c,e) \equiv (d_c(b) = a) \wedge (i_e(a) = b)$

Далее могут быть определены операторы анализа и синтеза.

Оператор анализа A должен воздействовать на модус и давать в результате некоторое множество его мод. Для полного определения такого оператора необходимо уточнить, какой используется проектор и модели. Поскольку результатом оператора анализа будет именно множество, то необходимо будет воспользоваться представленной выше методологией работы с множествами.

DA. $a \in A[b,c_1,\ldots,c_n,\downarrow_1,\ldots,\downarrow_n] \equiv Mod^{12347}(a,b,c_1,\downarrow_1,\alpha) \vee \ldots \vee Mod^{12347}(a,b,c_n,\downarrow_n,\alpha)$.

Здесь множество $A[b,c_1,\ldots,c_n,\downarrow_1,\ldots,\downarrow_n]$ может быть прочитано как «множество мод модуса b, полученных в моделях $c_1,\ldots,c_n$ с проекторами $\downarrow_1,\ldots,\downarrow_n$ соответственно». Символ «A» обозначает оператор анализа.

Наоборот, *оператор синтеза* S должен действовать на множество мод, сопоставляя им некоторый их модус. Чтобы избежать неоднозначности, нужно будет указать, какие именно здесь используются модули и сюръекторы. В итоге получим:

DS1. $S[\{a_1,\ldots,a_n\},e_1,\ldots,e_n,\uparrow_1,\ldots,\uparrow_n] \,{}^{\alpha}\varepsilon\, x \equiv \exists y(Mod^{12567}(a_1,y,e_1,\uparrow_1,\alpha) \wedge \ldots \wedge Mod^{12567}(a_n,y,e_n,\uparrow_n,\alpha) \wedge (y \,{}^{\alpha}\varepsilon\, x))$ – модусно-модальное определение оператора синтеза.

DS2. $x \,{}^{\alpha}\varepsilon\, S[\{a_1,\ldots,a_n\},e_1,\ldots,e_n,\uparrow_1,\ldots,\uparrow_n] \equiv \exists y(Mod^{12567}(a_1,y,e_1,\uparrow_1,\alpha) \wedge \ldots \wedge Mod^{12567}(a_n,y,e_n,\uparrow_n,\alpha) \wedge (x \,{}^{\alpha}\varepsilon\, y))$ – модально-модусное определение оператора синтеза.

Здесь использовано выражение $\{a_1,\ldots,a_n\}$, которое может быть определено следующим образом:

$$x \in \{a_1,\ldots,a_n\} \equiv (x = {}^{\alpha 2}{}_1\, a_1) \vee \ldots \vee (x = {}^{\alpha 2}{}_1\, a_n)$$

и представляет собой «множество», до ${}^{\alpha 2}{}_1$-точности состоящее из α-модусов $a_1,\ldots,a_n$.

Хотя такого рода определение не совпадает по форме с определением $x \in \langle P \rangle \equiv \Delta(x) \wedge P(x)$, но его можно рассматривать как сокращение для определения

$x \in \langle (x = {}^{\alpha 2}{}_1\, a_1) \vee \ldots \vee (x = {}^{\alpha 2}{}_1\, a_n) \rangle \equiv Modus(x,\alpha) \wedge ((x = {}^{\alpha 2}{}_1\, a_1) \vee \ldots \vee (x = {}^{\alpha 2}{}_1\, a_n))$.

Многоточие «...» относится к метаязыку, так что в объектном языке всегда предполагается конкретное конечное число элементов $(x = {}^{\alpha 2}{}_1\, a_1),\ldots, (x = {}^{\alpha 2}{}_1\, a_n)$.

Пусть элементы a_i, b, c_i, $\downarrow_i$, e_i и $\uparrow_i$ связаны соотношением $Mod(a_i,b,c_i,\downarrow_i,e_i,\uparrow_i,\alpha)$ для каждого $i=1,\ldots,n$. Можно доказать следующие теоремы.

AS-Теорема. $Mod(a_1,b,c_1,\downarrow_1,e_1,\uparrow_1,\alpha) \wedge \ldots \wedge Mod(a_n,b,c_n,\downarrow_n,e_n,\uparrow_n,\alpha) \supset A[S[\{a_1,\ldots,a_n\},e_1,\ldots,e_n,\uparrow_1,\ldots,\uparrow_n],c_1,\ldots,c_n,\downarrow_1,\ldots,\downarrow_n] \underset{z}{=} \{a_1,\ldots,a_n\}$.

SA-Теорема. $Mod(a_1,b,c_1,\downarrow_1,e_1,\uparrow_1,\alpha)\wedge\ldots\wedge Mod(a_n,b,c_n,\downarrow_n,e_n,\uparrow_n,\alpha) \supset S[A[b,c_1,\ldots,c_n,\downarrow_1,\ldots,\downarrow_n],e_1,\ldots,e_n,\uparrow_1,\ldots,\uparrow_n] =^{\alpha 2}_1 b.$

Теорема 5. $b =^{\alpha} S[\{a_1,\ldots,a_n\},e_1,\ldots,e_n,\uparrow_1,\ldots,\uparrow_n] \equiv (b =^{\alpha} i_{e1}(a_1))\wedge\ldots\wedge (b =^{\alpha} i_{en}(a_n))$,
где интегралы $i_{e1},\ldots, i_{en}$ определены на основе сюръекторов $\uparrow_1,\ldots,\uparrow_n$ соответственно.

Теорема 6. $\{a_1,\ldots,a_n\} =_z A[b,c_1,\ldots,c_n,\downarrow_1,\ldots,\downarrow_n] \equiv (a_1 =^{\alpha} d_{c1}(b))\wedge\ldots\wedge (a_n =^{\alpha} d_{cn}(b))$,
где дифференциалы $d_{c1},\ldots, d_{cn}$ определены на основе проекторов $\downarrow_1,\ldots,\downarrow_n$ соответственно.

5. Онтологии на предикатах

В общем случае может быть построен вариант 7β-Онтологии для произвольных категориальных типов, т.е. на основе предиката Mod(a,b,c,f,d,h,β), где a и b имеют некоторый категориальный тип T_1, c – тип T_2, d – тип T_3. Тогда функтор f обладает типом $T_1/(T_1,T_2)$, функтор h – типом $T_1/(T_1,T_3)$. Весь предикат Mod будет обладать типом

$$S / (T_1,T_1,T_2, T_1/(T_1,T_2), T_3, T_1/(T_1,T_3), T^*),$$

где T* – тип спецификатора.

Рассмотренную выше версию 7α-Онтологии получим в таком частном случае, когда $T_1 = T_2 = T_3 = N$.

Видно, что основными типами являются типы T*, T_1, T_2 и T_3, так что версию 7β-Онтологии с этими категориальными типами можно обозначать в виде 7β<T*,T_1,T_2,T_3>-Онтологии. Здесь T* – тип спецификатора, T_1 – тип мод и модусов, T_2 – тип моделей и T_3 – тип модулей. 7α-Онтология в этих обозначениях – это 7α<T,N,N,N>-Онтология.

В остальном синтаксис 7β<T*,T_1,T_2,T_3>-Онтологии можно задать аналогично синтаксису 7α-Онтологии.

Ниже я несколько более подробно рассмотрю вариант 7β<T*,T_1,T_2,T_3>-Онтологии, где тип T_1 – это тип S/(N,…,N), когда N повторяется n раз. В этом случае в качестве мод и модусов выступят n-местные предикаты.

Предположим, что 7β<T*,T_1,T_2,T_3>-Онтология строится одновременно с 7α<T,N,N,N>-Онтологией. В этом случае уже нужна явная ссылка на спецификатор во всех модальных выражениях, поэтому выражения 7α<T,N,N,N>-Онтологии я буду сопровождать спецификатором α, выражения 7β<T*,T_1,T_2,T_3>-Онтологии – спецификатором β. Добавим в эту версию Онтологии, кроме аксиом Проективно-Модальной Онтологии, следующие аксиомы.

(AO3β) $[NModa(P,\beta) \supset \forall x_1 \ldots \forall x_n(P<x_1,\ldots,x_n> \equiv P(x_1,\ldots,x_n))] \wedge [PModa(P,\beta) \supset \forall x_1 \ldots \forall x_n(P<x_1,\ldots,x_n> \equiv Modus(x_1,\alpha) \wedge \ldots \wedge Modus(x_n,\alpha) \wedge \forall Q(P\ {}^{\beta}\varepsilon\ Q \wedge At(Q,\beta) \supset \exists y_1 \ldots \exists y_n((x_1\ {}^{\alpha}\varepsilon\ y_1) \wedge \ldots \wedge (x_n\ {}^{\alpha}\varepsilon\ y_n) \wedge Q(y_1,\ldots,y_n))))]$.

(UsnPr1) $UsnPr(P) \wedge UsnPr(Q) \supset UsnPr(\neg P) \wedge UsnPr(P \wedge Q)$.

(UsnPr2) $At(P,\beta) \equiv UsnPr(P) \wedge \exists x_1 \ldots \exists x_n(P(x_1,\ldots,x_n) \wedge Modus(x_1,\alpha) \wedge \ldots \wedge Modus(x_n,\alpha))$.

(UsnPr3) $NModa(P,\beta) \equiv UsnPr(P) \wedge (P \equiv \mathbf{0}^n)$.

Здесь: $P<x_1,\ldots,x_n>$ - случай предикации β-модуса на элементах $x_1,\ldots,x_n$, определяемый аксиомой (AO3β). Эту предикацию я буду называть β-*предикацией.*

UsnPr – первичный предикат типа S/S/(N,…,N), когда N повторяется n раз. Выражение UsnPr(P) читается «P есть обычный n-местный предикат (usual n placed predicate)»,

$\mathbf{0}^n$ – это n-местный предикат, определяемый условием $\forall x_1 \ldots \forall x_n(\mathbf{0}^n(x_1,\ldots,x_n) \equiv \mathbf{0})$.

Поясню неформальный смысл представленных аксиом.

В аксиоме (AO3β) определяется β-предикация $P<x_1,\ldots,x_n>$ для β-модуса P, когда P является нулевой β-модой, и когда P является положительной β-модой. Именно, если P – нулевая β-мода, то β-предикация совпадает с обычной предикацией $P(x_1,\ldots,x_n)$. Если же P – положительная β-мода, то β-предикация на n-ке $x_1,\ldots,x_n$ выполнена тогда и только тогда, когда каждый из x_i является α-модусом, и когда для любой атомарной β-моды предиката P найдутся α-моды $y_1,\ldots,y_n$ модусов $x_1,\ldots,x_n$ соответственно, на которых выполнена эта атомарная β-мода.

Из аксиомы (UsnPr2) мы можем увидеть, что атомарная β-мода – это выполнимый на α-модусах обычный n-местный предикат.

В аксиоме (UsnPr1) утверждается, что обычные n-местные предикаты замкнуты относительно основных логических операций.

Наконец, в аксиоме (UsnPr3) нулевая β-мода определяется как тождественный нулю n-местный предикат.

Представленная аксиоматика имеет своей целью выразить проективно-модальные отношения на n-местных предикатах, когда одни предикаты могут выступать как моды или модусы по отношению к другим предикатам (в рамках β-Онтологии). Предполагается также, что среди всех β-модусов есть «обычные» n-местные предикаты, определяемые как атомарные или нулевые β-модусы. Такие предикаты представляют собой простейший случай β-модусов. В более сложном случае возможны β-модусы, «склеенные» из нескольких обычных n-местных предикатов. Для них предикация определяется аксиомой (AO3β). На n α-модусах выполнено положительное «склеенное» отношение, если для каж-

дого обычного отношения, из которых «склеен» этот β-модус, найдутся α-моды этих α-модусов, на наборе которых выполнено обычное отношение.

Пусть, например, P – свойство «быть красным», и a – некоторый объект (α-модус), у которого есть две моды b и c, причем, мода b – это, например, часть объекта, окрашенная в красный цвет, c – другая часть объекта, окрашенная в синий цвет. Тогда для b выполнено свойство P, т.е. имеем P(b), а для c свойство P не выполнено, т.е. ¬P(c). Положим теперь, что P – это обычный одноместный предикат (случай n=1), т.е. верно, что Us1Pr(P). Полагая, что в β-Онтологии определена булева алгебра β-модусов, образуем сумму (P $^{\beta}\oplus$ ¬P), где $^{\beta}\oplus$ - операция суммы модусов в β-Онтологии. Так как P(b), ¬P(c) и Us1Pr(P), Us1Pr(¬P), то At(P,β) и At(¬P,β) – P и ¬P есть β-атомы, так что сумма (P $^{\beta}\oplus$ ¬P) – положительный β-модус. Поскольку у α-модуса a найдутся моды b и c, на которых выполнены P и ¬P, причем, P и ¬P – это все β-атомы суммы (P $^{\beta}\oplus$ ¬P), то, согласно аксиоме (АО3β), получаем, что (P $^{\beta}\oplus$ ¬P)<a>, т.е. β-модус (P $^{\beta}\oplus$ ¬P) β-выполнен на α-модусе a. Это означает, что a обладает «склеенным» свойством (P $^{\beta}\oplus$ ¬P). Одновременно верно, что ¬P(a), P<a> и ¬P<a>.

Более строго эти рассуждения могут быть представлены в форме следующей теоремы.

Теорема 1. [(a $^{\alpha}\varepsilon$ b) ∧ (a $^{\alpha}\varepsilon$ c) ∧ Us1Pr(P) ∧ P(b) ∧ ¬P(c)] ⊃ (P$^{\beta}\oplus$ ¬P)<a>.

«Склеенные» свойства типа (P $^{\beta}\oplus$ ¬P) могут представлять специальный класс антиномий, которые обычно неправомерно представляются в форме противоречия (P∧¬P). При более детальном исследовании объекта a рано или поздно в нем обнаруживают моды b и c, где P(b) и ¬P(c), и тем самым «разрешают противоречие». Таким образом, здесь пытаются утверждать переход типа (P ∧ ¬P)(a) → P(b) ∧ ¬P(c), но реально существует переход (P $^{\beta}\oplus$ ¬P)<a> → P(b) ∧ ¬P(c) – переход от «молекулярного» свойства (P $^{\beta}\oplus$ ¬P), β-выполненного на целом объекте, к слагающим его атомам P и ¬P, выполненным на частях объекта. Например, в одном своем проявлении b человек a может оказаться добрым (P(b)), в другом проявлении c – злым (¬P(c)). Каков же сам человек? Можно сказать, что человек «добро-зол», β-обладая «молекулярным» свойством (P $^{\beta}\oplus$ ¬P). Интересно, что в этом случае в β-предикации в некотором смысле перестает выполняться закон исключенного третьего. Так, например, верно, что P<a> ∧ ¬P<a> ∧ (P $^{\beta}\oplus$ ¬P)<a>, т.е., кроме вариантов P<a> и ¬P<a>, появляется третий вариант (P $^{\beta}\oplus$ ¬P)<a>. Свойства,

образованные «склейкой» нескольких простых свойств, можно называть *метасвойствами*.

Можно также доказать теорему.

Теорема 2. $At(P,\beta) \wedge At(a,\alpha) \supset (P(a) \equiv P<a>)$.

Здесь мы видим условие совпадения обычной предикации свойств и β-предикации для ненулевых α-модусов. Таким условием является α- и β-атомарность – α-атомарность носителя свойства и β-атомарность самого свойства. Если же носитель свойства начинает содержать отличные от себя ненулевые моды, проявляет некоторую внутреннюю гетерогенность, то здесь уже появляется возможность разброса свойств, которыми обладают части объекта и/или объект в целом, и, следовательно, - возможность различия обычной и β-предикации.

Подобная же логика может быть распространена и на отношения. Пусть, например, есть два человека A и B. Человек A умнее, чем B, но человек B физически сильнее, чем A. Пусть A_1 и B_1 – проявления людей A и B соответственно с точки зрения ума, A_2 и B_2 – их проявления с точки зрения физической силы. Предполагается, что такие проявления могут быть представлены как моды людей-модусов. Пусть далее $\leq_1$ – это порядок сравнения людей по уму, $\leq_2$ – порядок сравнения по физической силе. Тогда получим, что $B_1 \leq_1 A_1$ и $A_2 \leq_2 B_2$. Представим теперь порядки $\leq_1$ и $\leq_2$ как два обычных отношения в β-Онтологии, т.е. положим, что верно $Us2Pr(\leq_1)$ и $Us2Pr(\leq_2)$. Образуем отношение-сумму ($\leq_1 {}^{\beta}\oplus \leq_2$), и два новых α-модуса $A_1{}^{\alpha}\oplus B_2$ и $A_2{}^{\alpha}\oplus B_1$. Можно показать, что отношение-сумма ($\leq_1 {}^{\beta}\oplus \leq_2$) β-выполнена на парах $<A, A_1{}^{\alpha}\oplus B_2>$ и $<B, A_1{}^{\circ}\oplus B_2>$, т.е. $(\leq_1{}^{\beta}\oplus\leq_2)<A,A_1{}^{\alpha}\oplus B_2>$ и $(\leq_1{}^{\beta}\oplus\leq_2)<B,A_1{}^{\alpha}\oplus B_2>$. Отношение ($\leq_1 {}^{\beta}\oplus \leq_2$) можно называть *метапорядком* по отношению к обычным порядкам $\leq_1$ и $\leq_2$. Максимальным (минимальным) элементом метапорядка будет модус, полученный как α-сумма максимальных (минимальных) элементов отдельных обычных порядков. Для метапорядка ($\leq_1 {}^{\beta}\oplus \leq_2$) в нашем примере максимальным элементом будет сумма $A_1{}^{\alpha}\oplus B_2$, минимальным элементом – сумма $A_2{}^{\alpha}\oplus B_1$.

Метапорядки позволяют, как представляется, для каждой иерархической структуры ввести максимальный элемент. Если в иерархии $I = <M,\leq>$ нет максимального элемента, то M можно пополнить α-суммой $\Sigma^{\alpha}M$ до множества $M^* =_z M \cup \{\Sigma^{\alpha}M\}$ и показать, что $\leq <m, \Sigma^{\alpha}M>$ для любого элемента m из M^*, т.е. обычный порядок $\leq$ будет (как метапорядок) β-выполнен для любого m и элемента $\Sigma^{\alpha}M$, т.е. элемент $\Sigma^{\alpha}M$ окажется

максимальным элементом в множестве M* в смысле β-выполнимости порядка ≤.

Так, используя идею метапорядка, можно показать, что любые иерархии I могут быть погружены в «монистические иерархии» I*, т.е. иерархии с максимальным элементом. Кроме того, любая монистическая иерархия I* может быть всегда расширена до более полной монистической иерархии I** за счет включения в себя новых элементов и новых порядков в составе более полного метапорядка.

6. Заключение

Издавна в истории философской логики присутствуют два проекта – формальной логики и некоторой «содержательной логики», часто называемой «диалектикой», или «трансцендентальной логикой», или «тектологией». Возможно, Проективно-модальная Онтология могла бы послужить выражением именно этой, более содержательной, линии развития философской логики.

ЛИТЕРАТУРА

1. *Васюков В.Л.* Формальная феноменология. М.: Наука, 1999.
2. *Моисеев В.И.* К аксиоматике Модальной Онтологии // Рационализм и культура на пороге 3-го тысячелетия: материалы 3-го Российского Философского конгресса (16 – 20 сентября 2002 г.). В 3-х тт. Том 1. Философия и методология науки, эпистемология, логика, философия природы, философия сознания, философия техники, философия образования. Ростов н/Д: СКНЦ ВШ, 2002. С. 283-284.
3. *Moiseev V.* Projectively Modal Ontology // Logical Studies. № 9. 2002. (http://www.logic.ru/LogStud/09/LS9.html).
4. *Slupecki J.* S.Lesniewski's Calculus of Names // Studia Logica. Vol. 3. 1955. P. 7-76.

Л.И.Мчедлишвили

АРИСТОТЕЛЕВСКАЯ АПОДИКТИЧЕСКАЯ СИЛЛОГИСТИКА: МЕТОД ПОЛУЧЕНИЯ ИЗБЫТОЧНОЙ ИНФОРМАЦИИ; ФРАГМЕНТАРНОСТЬ

Abstract. *The article exemines some defects of the Aristotelian theory of apodeictic syllogisms. 1) To demonstrate the invalidity of some mixed apodeictic moods, for example Barba□ra□ (An. Pr. 30a 24-28), Aristotle, except contrasted instances, used the method of argumentation to derive such consequence from the apodeictic premise and conclusion of a mood, the negation of which is consistent with the other, assertoric premise. It is argued that this Aristotelian method involves application of the formally incorrect rule: if G⊦F and F⊮H, then G⊮H. 2) It is shown, that there are the apodeictic syllogisms (Barba□ri□, Ca□mestor□p and so on) for which with use of Aristotelian means neither proving, nor rejecting is possible. A survey of all such moods is given in the article.*

Аподиктическая силлогистика Аристотеля [ПА, I, 3, 8-12] является расширением его же ассерторической силлогистики. Наряду с простыми категорическими высказываниями в аподиктический силлогизм могут входить аподиктические высказывания Sa□P, Se□P, Si□P и So□P, в которых связки "присуще", "не присуще" снабжены аподиктической квалификацией "небходимо". В аподиктической силлогистике верным формулам ассерторической силлогистики добавляются формулы верные в силу специфических свойств аподиктических форм a□, e□, i□ и o□. Целью построения теории аподиктических силлогизмов является описание упомянутого класса формул. Такая теория строится по образцу ассерторической силлогистики. Аподиктические силлогизмы подразделяются на те же фигуры, выделяются совершенные схемы силлогизмов и схемы, сводимые к ним. Аналогия распространяется и на неправильные модусы – неправильность модуса устанавливается либо с помощью опровергающего примера, либо с помощью рассуждения, в котором могут быть использованы утверждения об опровержимости или доказуемости других формул. Есть и существенное различие: если в каждой фигуре ассерторической силлогистики Аристотель анализирует каждую возможную комбинацию посылок, в аподиктической силлогистике объектами исследования являются только такие схемы силло-

гизмов, из которых после опущения аподиктических квалификаций связок получаются корректные ассерторические модусы, и кажется, что Аристотель руководствуется *ограничивающим предположением* – из любого неправильного ассерторического модуса произвольной квалификацией связок получается неправильный аподиктический модус. Модальный тип модуса определяется модальным статусом каждой из посылок и заключения, и можно вслед за Макколлом обозначить его упорядоченной тройкой букв X и L; например, LXL обозначает модальный тип силлогизма, в котором большая посылка и заключение являются аподиктическими высказываниями, а меньшая посылка – ассерторическим высказыванием. XXX – модальный тип ассерторического силлогизма. При анализе силлогизмов Аристотель имел в виду модальные типы, хотя для этого он специальным термином не пользовался.

Вопрос о правильности силлогизмов типов XLX, LXX, LLX и XXL Аристотелем не рассматривался, по-видимому, из-за тривиальности его решения в силу того, что им принимаются силлогистические частные случаи T-закона модальной логики

$$Sa\Box P \supset SaP,\ Se\Box P \supset SeP \text{ и т.д.},$$

а их конверсии отвергаются. Для силлогизмов остальных трех типов картина следующая: 1) модус типа LLL является правилным, если и только если является правилным ассерторический модус, получающийся из него опусканием всех аподиктических квалификаций; 2) модус аподиктической силлогистики, получающийся из верного ассерторического модуса аподиктической квалификацией одной посылки и заключения, является правильным, если и только если аподиктически квалифицирована а) (в I фигуре) большая посылка, б) (во II фигуре) общеотрицательная посылка, в) (в III фигуре) общеутвердительная посылка, если обе посылки утвердительные, и общеотрицательная посылка в противном случае.

Очень трудным оказалось воссоздание модальной, в частности, аподиктической силлогистики Аристотеля в виде осмысленного единого логического исчисления, а также семантическое обоснование совмещения принятия некоторых смешанных модусов с отбрасыванием других, т.е. совмещения класса принимаемых формул с "легитимностью" всех методов рассуждения, применяемых Аристотелем, и т.д. Такое совмещение оказалось настолько трудным, что исследователи модальной силлогистики Аристотеля, начиная с его непосредственных преемников в перипатетической школе и кончая А. Бекером, Я. Лукасевичем и И. М. Бохенским в XX веке, причиной возникновения этих трудностей признали не

до конца продуманные конструкции и ошибки, содержащиеся в самой аристотелевской концепции. Но в таком случае изучение модальной силлогистики Аристотеля, исторический подход к ее оценке подразумевает выявление и анализ недостатков и ошибок, содержащихся в ней. Цель настоящей статьи – описание двух дефектов аподиктической силлогистики Аристотеля: 1) формальной некорректности процедуры рассуждения, протекающей по схеме reductio ad impossibile, для показа опровержимости некоторых смешанных модусов и 2) существования таких осмысленных выражений (модусов) аподиктической силлогистики, для которых средствами, используемыми в ПА, невозможно решить вопрос о приемлемости или опровержимости в аристотелевском смысле.

§1. Один из методов отбрасывания неправильных смешанных модусов, применяемых в ПА, состоит в показе того, что из заключения отбрасываемого модуса совместно с аподиктической посылкой выводится утверждение, содержащее избыточную информацию и поэтому могущее быть ложным при истинности другой, ассерторической посылки (т.е. выводится утверждение, отрицание которого совместимо с другой посылкой), что, как становится ясным из текста, считается недопустимой ситуацией. В первый раз с рассуждением такого рода встречаемся при доказательстве некорректности модуса XLL-Barbara [ПА, I, 9, 30a 24-28]: если бы из посылок MaP и Sa□M следовало заключение Sa□M, то стало бы возможным и получение заключения Mi□P (в самом деле оно следует из Sa□P и обращения Sa□M посредством LLL-Darii), "но это неправильно", говорит Аристотель, ибо при истинности MaP возможен такой подбор терминов M и P, чтобы выполнялось Me◊P (т.е. ¬Mi□P) (следует заметить, что Аристотелем принимается равнозначность функторов "возможно" (в унилатеральном смысле, ◊) и "не необходимо не" (¬□¬) [4, p.84], частными случаями которой являются равносильности [6, p. 35]:

Sa◊P ≡ ¬So□P, Se◊P ≡ ¬Si□P, Si◊P ≡ ¬Se□P, So◊P ≡ ¬Sa□P).

Далее указывается возможность такого же рода опровержения модуса XLL-Celarent, а еще ниже [I, 10, 30b 24-30] с помощью точно такого же рассуждения отбрасывается LXL-Camestres.

Согласно Д. Россу [2, p. 319], Александр Афродизийский верно подметил, что это рассуждение, хотя имеет сходство с reductio ad impossibile, полностью не совпадает с ним. В нем допускается не ложность доказуемого модуса с тем, чтобы из этого допущения извлечь невозможное следствие (так поступает Аристотель, например, при доказательстве ассерторического модуса Bagoco), а чтобы

доказать, что определенное заключение не следует из посылок, допускается, что следует, и показывается, что оно приводит к знанию, которое не может быть получено из первоначальных посылок и поэтому является возможно ложным (ψευδος [a27]). С помощью метатеоретических кванторов это различие можно было бы выразить следующим образом: при доказательстве модуса тезисом является утверждение вида $\forall S\forall M\forall P[(F\wedge G)\supset H]$, а антитезисом утверждение вида $\exists S\exists M\exists P\ [F\wedge G\wedge\neg H]$, а при отбрасывании – наоборот (в дальнейшем описанный выше метод рассуждения будем называть ψ-методом).

Тем же методом из правильного модуса LXL-Barbara нельзя получить возможно ложное следствие. Это позволило С. Макколлу высказать предположение, что Аристотель мог удовлетворительно различать LXL-Barbara и XLL-Barbara касательно их правильности [6, p. 13]. Нельзя ли обобщить предположение Макколла для каждой пары смешанных модусов с аподиктическими заключениями и одними и теми же схоластическими названиями, один член которой принимается, а другой – отбрасывается? Единственным препятствием для такого обобщения является отбрасываемый модус XLL-Felapton, к которому не применяется ψ-метод (о том как следует применить ψ-метод к неправильным модусам Darii и Ferio типа XLL и об интерпретации фразы I, 9, 30b 2-4 из ПА см. [8]).

Более того, существует обстоятельство, вынуждающее подвергнуть сомнению возможность применения этого метода в качестве критерия некорректности модуса. Дело в том, что возможно ложное следствие $Mi^{\Box}P$, которое получается из некорректного модуса XLL-Barbara, можно получить также из правильного модуса XLX-Barbara с ассерторическим заключением (этот факт, согласно В. Виланду [9], был замечен еще Г. Майером). Для этого в первом выводе (из XLL-Barbara) достаточно заменить применение LLL-Darii на применение LXL-Darii и лищний раз использовать обращение:

(1) $(MaP\wedge Sa^{\Box}M)\supset SaP$ – XLX-Barbara
(2) $SaP\supset PiS$ – обращение
(3) $(Sa^{\Box}M\wedge PiS)\supset Pi^{\Box}M$ – LXL-Darii
(4) $Pi^{\Box}M\supset Mi^{\Box}P$ – обращение

Аналогичные следствия можно вывести из Darii и Datisi типа XLX и LXX-Disamis. Но корректность этих модусов в системе аподиктической силлогистики не вызывает сомнений. Согласно Я. Хинтикке, подозрение может пасть на средства, с помощью которых в данном контексте осуществляется вывод избыточного, возможно

ложного следствия. Таковыми являются LXL-Darii и законы аподиктического обращения. Возникает дилемма: отвергнуть LXL-Darii, либо законы аподиктического обращения [5].

Отбросив законы аподиктического обращения, потеряем всякую надежду понять, что имел в виду Аристотель, когда строил свою аподиктическую силлогистику. Исходя из этой справедливой оценки, Хинтикка склоняется к другой альтернативе. Но следует заметить, что и в результате такого шага наступают невосполнимые потери, так как вместе с LXL-Darii придется отбросить также LXL-Datisi, XLL-Disamis и, возможно, оба смешанных модуса Darapti. Таким образом, решение хинтикковской дилеммы вряд ли обеспечивает удовлетворительное решение проблемы.

Однако существует нерассмотренная возможность. Получив следствие Mi□P, Аристотель утверждает его [возможную] ложность, т.е. утверждает опровержимость импликации

(a) (MaP∧Sa□M) ⊃ Mi□P

и выдвигает довод, что в MaP не подразумевается Mi□P, или, что

(b) MaP ⊃ Mi□P

является опровержимой (хотя MaP и Mi□P совместимы). Следовательно, утверждение об опровержимости (b) по какому-то *правилу X* выводится из утверждения об опровержимости (a). Теперь все доказательство опровержимости XLL-Barbara можно представить по обычной схеме reductio ad impossibile: с одной стороны, из XLL-Barbara выводится (b), а с другой – показывается опровержимость (b) (в силу опровержимости (a) и правила X); тем самым получается противоречие и отбрасывается XLL-Barbara. Аналогично можно представить все отбрасывания по ψ-методу.

Становится очевидным, что для полной реконструкции ψ-метода необходимо выявить и оценить правило X. В ПА ни одно из рассуждений, явно применяющих ψ-метод для демонстрации опровержимости, не содержит даже намека, что при переходе от опровержимости (a) к опровержимости (b) кроме (a) используется еще какая-либо посылка, и, таким образом, текст ПА почти однозначно исключает альтернативные возможности реконструкции правила X: анализируемый нами вывод (то, что не следует из MaP, не следует и из MaP совместно с Sa□M) является частным случаем общей, логически некорректной схемы – что не следует из более слабого, не следует также из более сильного:

$$(X)\ \frac{F \vdash G,\ G \nvdash H}{F \nvdash H}$$

(F, G и H – произвольные утверждения), – которая и представляет собой правило X.

Применение Аристотелем некорректного правила X в описанном выше контексте не является случайным. В ПА имеются и другие его применения; и хотя некоторые из них легко исправляются, все-таки порождают убеждение, что он просмотрел ошибочность правила X, принимая его за верное.

Сравним два места из ПА – доказательство LXL-Cesare [I, 10, 30b 9-12] и отбрасывание XLL-Cesare [I, 10, 30b 20-24]. 1) Поскольку из посылок F модуса LXL-Cesare посредством аподиктического обращения следуют посылки G модуса LXL-Celarent, а из G в силу LXL-Celarent следует заключение H (оба модуса имеют одно и то же заключение), то из F следует H (т.е. является верным LXL-Cesare). Рассуждение протекает по логически корректной схеме

$$(Y)\ \frac{F \vdash G,\ G \vdash H}{F \vdash H},$$

2) Поскольку из посылок F модуса XLL-Cesare следуют посылки G модуса XLL-Celarent посредством ассерторического обращения, а из G не следует H (XLL-Celarent не является правильным модусом), то из F также не следует H (т.е. и XLL-Cesare не является правильным модусом). Очевидно, что рассуждение протекает по некорректной схеме X и содержит формальную ошибку. Однако в этом случае ошибка легко исправляется, так как закон простого обращения имеет форму равносильности и в рассуждении следование $F \vdash G$ можно заменить на $G \vdash F$. Скорректированное рассуждение протекает уже по верной схеме – что не следует из более сильного, не следует также из более слабого:

$$(Z)\ \frac{G \vdash F,\ G \nvdash H}{F \nvdash H}.$$

Но аналогичное рассуждение для отклонения XLL-Felapton (ПА, I, 11, 32a 37-31b 4) не поддается исправлению, так как в этом случае применяется обращение с ограничением, имеющее форму импликации, а не равносильности. А. Бекер, комментируя указанное место, прямо говорит о формальной ошибке [3, s. 72-73] (у него находим и другие ссылки на аналогичные ошибки).

Из факта логической некорректности ψ-метода не следует, что статус отброшенных с помощью этого метода модусов должен измениться. Не исключено, что принятие или отвержение модуса Аристотелем определялось на основе интуитивно-семантических соображений, а потом обосновывалось неверными средствами.

§2. В отличие от ассерторических, аподиктические силлогизмы IV фигуры в ПА вообще не упоминаются, но тем не менее не трудно решить вопрос об их статусе точно таким же способом,

каким на аналогичные вопросы для II и III фигур отвечает Аристотель. В частности, все пять модусов IV фигуры типа LLL, Bramantip, Camenes и Dimaris типа XLL и Fesapo и Fresison типа LXL должны быть приняты; остальные же смешанные модусы с аподиктическими заключениями отбрасываются с использованием законов обращения и выше упомянутого правила Z. В каждой фигуре легко можно обосновать также "ослабленные" аподиктические модусы, получающиеся из модусов с аподиктическими заключениями заменой заключений Sa□P и Se□P, соответственно, на Si□P и So□P.

В то же время текст ПА, по всей вероятности, не дает ключа для решения вопроса – должны ли быть приняты или отброшены в аподиктической силлогистике "ослабленные" модусы, получаемые из отброшенных модусов с аподиктическими общими заключениями? Таковыми являются:

(U_1) Bramantip (LXL), Cesaro (XLL), Camestrop (LXL),
Barbari (XLL), Celaront (XLL), Camenop (LXL)

(модусы, стоящие в одной колонке, дедуктивно эквивалентны). Модусы III фигуры Darapti и Felapton составляют образец решения подобной проблемы Аристотелем. Из комбинаций посылок этой фигуры

aa, ea, a□a□, e□a□, e□a, e□a, aa□, ea□

не следует общего заключения, ассерторического в первых двух случаях и аподиктического – в остальных; во всех случаях, кроме последнего, следует ослабленное частное заключение, ассерторическое в первых двух случаях, аподиктическое – в остальных; из восьмой комбинации ea□ не следует даже ослабленного аподиктического заключения So□P.

Можно установить, что ни один из методов, используемых Аристотелем для сведения модусов II и III фигур к совершенным модусам I фигуры, применительно к модусам из списка U_1 не дает положительного результата. С другой стороны, невозможно установить и их опровержимость применением законов обращения и првила Z. Но вместе с тем к модусам XLL-Barbari и XLL-Celaront можно применить некорректный ψ-метод и из предполагаемого заключения Si□P (соответственно, So□P) совместно с аподиктической посылкой получить следствие, отрицание которого совместимо с ассерторической посылкой (для этого в первом случае достаточно применить обращение и LLL-Darii, во втором – метод аподиктического эктезиса [7, с. 233] и LLL-Bocardo). К членам последней пары не применим и этот метод. Таким образом, мы оказываемся перед другой дилеммой: следуя тексту ПА, либо ни один из вопросов о статусе модусов из списка U_1 не имеет

решения в духе Аристотеля, либо из-за того, что некоторые из этих модусов посредством ψ-метода дают избыточную информацию, Аристотель отбросил бы их, если бы они попали в поле его зрения.

Принимая равносильности, определяющие унилатеральную возможность в языке силлогистики (об этом было сказано выше), Аристотель трактовал синтаксический аспект этого понятия как квалификацию связки, т.е. подобно необходимости, как составную часть силлогистических форм $a^{\lozenge}$, $e^{\lozenge}$, $i^{\lozenge}$, $o^{\lozenge}$. Если иметь в виду привлечение проблематических (в унилатеральном смысле) высказаний при построении контрпримеров, при применении ψ-метода, те места из проблематической силлогистики (ПА, I, 13-22), где устанавливается, что из определенных посылок следует заключение о возможности не в смысле случайности, а только в унилатеральном смысле, а также тот факт, что из аподиктических силлогизмов с помощью законов контрапозиции или reductio ad impossibile, часто применяемых Аристотелем, получаются силлогизмы, содержащие отрицания аподиктических высказываний, покажется весьма вероятным, что он осознавал существование силлогизмов с возможными посылками и заключением.

Тогда почему же мы не находим в ПА результатов систематического исследования таких силлогизмов? Почему они опущены? Может быть, потому, что хотя аподиктический силлогизм наряду с ассерторическими и аподиктическими высказываниями может содержать также отрицания аподиктических высказываний, т.е. проблематические (в унилатеральном смысле) высказывания, такой силлогизм посредством reductio ad impossibile сводится к обычному аподиктическому силлогизму (силлогизму только с ассерторическими и аподиктическими составляющими)? Например, таким способом, в частности, из LXL-Barbara можно вывести MXM-Bocardo и тем самым установить его логическую правильность, а из MXM-Barbara – отбрасываемый Аристотелем модус LXL-Bocardo, на основе которого по правилу Z устанавливается, что MXM-Barbara должен быть отброшен (буква M в обозначении модального типа означает проблематические в унилатеральном смысле высказывания).

Нас интересует логическая, а не психологическая сторона вопроса. Исходя из этого следует считать аристотелевским не только то, что явно утверждалось Аристотелем, но и то, что можно дедуцировать из его эксплицитных утверждений его же методами, а именно правилами пропозициональной логики (прежде всего методом reductio ad impossibile), определениями $a^{\lozenge}$, $e^{\lozenge}$, $i^{\lozenge}$ и $o^{\lozenge}$, а также T-законами для унилатеральной возможности.

$$SaP \supset Sa^{0}P,\ SeP \supset Se^{0}P,\ SiP \supset Si^{0}P,\ SoP \supset So^{0}P.$$

В частности, к числу таких следствий принадлежат и некоторые унилатерально возможные модусы. Поэтому первая часть нашего предположения верна. Однако существуют такие унилатерально проблематические модусы, что для решения вопроса об их приемлемости или опровержимости в аристотелевском смысле в тексте ПА не находим никаких аргументов, т.е. существуют модусы неразрешимые средствами ПА, или модусы с неопределенным статусом принятия и отбрасывания в аристотелевском смысле. В этом заключается один из недостатков аристотелевской аподиктической силлогистики – ее *фрагментарность*, незавершенность.

Класс U_2 модусов с неопределенным статусом принятия и отбрасывания в аристотелевском смысле, являющийся расширением U_1, отношением дедуктивной эквивалентности разбивается на восемь групп:

I	LML-Celarent, LML-Cesare, MLL-Camestres, LML-Camenes,	LML-Festino, LML-Ferio, LML-Ferison, LML-Fresison,	MMM-Disamis, MMM-Datisi, MMM-Darii, MMM-Dimaris.
II	XLL-Barbari, LXL-Bramantip,	XMM-Camestrop, XMM-Camenop,	MLX-Felapton, MLX-Fesapo.
III	LMX-Barbari, MLX-Bramantip,	LXL-Camestrop, LXL-Camenop,	XMM-Felapton, XMM-Fesapo
IV	LML-Barbari, MLL- Bramantip,	LML-Camestrop, LML-Camenop,	MMM-Felapton, MMM-Fesapo.
V	MMM-Barbari, MMM- Bramantip,	MLL-Camestrop, MLL-Camenop,	LML-Felapton, LML-Fesapo.
VI	XLL-Celaront, XLL- Cesaro,	XMM-Cesaro, XMM-Celaront,	MLX-Darapti, LMX- Darapti.
VII	MLL- Celaront, MLL- Cesaro,	MMM-Cesaro, MMM-Celaront,	MLL- Darapti, LML- Darapti.
VIII	LML- Celaront,	LMM- Cesaro,	MMM- Darapti

В каждой группе модусы, стоящие на одной строке, эквивалентны в силу пропозициональных законов контрапозиции, а модусы, стоящие в одной колонке – эквивалентны в силу законов обращения. Следовательно, разрешение хотя бы одного модуса в группе – доказательство его правильности или опровержимости, означает разрешение с тем же исходом всех модусов группы.

Если исключить из рассмотрения ослабленные модусы и модусы неаристотелевской IV фигуры, неразрешимых модусов окажется 18 вместо 51, хотя количество групп и, следовательно, число открытых проблем о статусе не изменится. Если же ослабленные аподиктические модусы и модус LXL-Bramantip отбросить в силу вышеприведенных соображений (применимость ψ-метода), то число неразрешимых модусов будет опять 18, но существенно сократится число открытых проблем о статусе – из них останутся только I, V и VIII.

ЛИТЕРАТУРА

1. *Аристотель*. Первая аналитика (ПА) // Аристотель. Сочинения. Т. 2, М., 1978.
2. *Aristotle*. Aristotle's Prior and Posterior Analytics. A Revised Text with Introduction and Commentary by W. D. Ross. Oxford, 1949.
3. *Becker A.* Die Aristotelische Theorie der Möglichkeitsschlüsse. Berlin, 1933.
4. *Bochenski I. M.* A History of Formal Logic. New York, 1970^2.
4. *Hintikka J.* An Aristotelian Dilemma // Ajatus, 22 (1959). P. 87-92.
5. *MacCall S.* Aristotle's Model Syllogisms. Amsterdam, 1063.
6. *Мчедлишвили Л. И.* К семантике аподиктической силлогистики Аристотеля // Логические исследования. Вып. 6. М., 1999. С. 230-240
7. *Мчедлишвили Л. И.* Об интерпретации одного утверждения из "Первой аналитики" Аристотеля // К истокам против течения. Тбилиси, 2003. С. 198-204.
8. *Wieland W.* Die Aristotelische Theorie der Notwendigkeitsschlüsse // Logik und Erkenntnislehre des Aristoteles. Darmstadt. 1972. S. 308-338.

С.А.Павлов

РАСШИРЕНИЕ ОБЛАСТИ ОПРЕДЕЛЕНИЯ ОПЕРАТОРА ИСТИННОСТИ НА ОГРАНИЧЕННУЮ ОБЛАСТЬ СИМВОЛЬНЫХ ВЫРАЖЕНИЙ*

Abstract. *Generalization of logic on the domain of symbolic expressions is realized. Quantifiers are introduced for symbolic expressions variables.*

Целью этой работы является построение языка логики, в котором область определения операторов истинности и ложности расширяется на область символьных выражений языка и вводятся кванторы по этим символьным выражениям. Символьным выражением некоторого языка L называется любая конечная линейная последовательность (упорядоченная *n*-ка) символов из алфавита этого языка L. Синонимом *символьного выражения* являются *слово*, *выражение* или *строка* в алфавите [4].

В [3] сформулирована логика, обогащенная операторами истинности и ложности, а также связкой полной эквивалентности $\cong$. Затем эта логика расширена на область нестандартных формул. Следующий шаг состоит в квантификации по символьным выражения языка этой логики.

1. Расширение пропозициональной логики на область нестандартных формул

Приведем кратко содержательные положения, на которых основывается расширение пропозициональной логики на область нестандартных формул.

В дополнение к множеству правильно построенных формул рассмотрим множество неправильно построенных формул. Относительно последних можно утверждать две вещи: 1) что они бессмысленны и 2) что они ни истинны, ни ложны. В стандартном языке пропозициональной логики невыразим тот факт, что они ни истинны и ни ложны. Однако в языке с операторами истинности и ложности утверждения о неистинности и неложности формул, являющихся неправильно построенными, можно выразить следующим образом:

---

* Работа выполнена при поддержке РГНФ, грант № 02-03-18287.

(~ | (Nonsense & ~ – (Nonsense)),

где словом «Nonsense» обозначено имя некоторой неправильно построенной формулы, | и – операторы истинности и ложности соответственно.

В качестве исходных неправильно построенных формул возьмем символы $\rightarrow$, $\cong$ логических констант (импликации и полной эквивалентности соответственно). Это ограничение не снизит общности рассмотрения. В этом частном случае будем называть их для определенности нестандартными формулами (нф).

В дополнение к метапеременным A, B, C для ппф введем новую метапеременную N, соответствующую нестандартным формулам, зададим дополнительные правила образования и сформулируем дополнительную аксиому для нф, которая будет аналогична вышеприведенному положению:

$(-|\, N \wedge - - N)$.

Также введем метапеременные E, E_1, E_2, ... для любых формул, как правильно построенных, так и нестандартных, то есть для ппф и нф одновременно.

Для формул (как правильно построенных, так и нестандартных) принцип двузначности не имеет места, но остается справедливым закон противоречия в семантической форме

$- (|E \wedge - E)$.

Назовем полученное исчисление **TC3N($\cong$)** и приведем его формулировку.

2. Формулировка логики с оператором истинности, обогащенной связкой полной эквивалентности

Язык исчисления TC3N($\cong$)

Алфавит TC3N($\cong$):

s, s_1, s_2, ...	пропозициональные переменные;
e, e_1, e_2, ...	переменные для символьных выражений языка (экспрессиональные переменные);
$\rightarrow$, $\cong$, $\forall$	логические константы;
|	символ оператора истинности;
(,)	технические символы.

Правила образования формул

(i) Всякая пропозициональная переменная есть правильно построенная формула (ппф).

(ii) Если A, B есть ппф, то (|A), (A $\rightarrow$ B), (A $\cong$ B) есть ппф.

(iii) Символы логических констант $\rightarrow$, $\cong$ есть нестандартные формулы (сокращенно нф).

(iv) Если A есть ппф или нф, или экспрессиональная переменная, то A есть формула.

(v) Если A есть формула, B есть нф, то $(A \to B)$, $(B \to A)$, есть нф.

(vi) Если A, B есть формула, то $(|A)$, $(A \cong B)$ есть ппф.

(vii) Если A есть формула, x есть пропозициональная или экспрессиональная переменная, то $\forall x\,(|A)$ есть ппф.

(viii) Ничто иное не является ппф и нф.

Метапеременные: A, B, C, ... для ппф,
N для нф,
$E, E_1, E_2, \ldots$ для формул.

Принимаем стандартные соглашения относительно опускания скобок.

Введем следующие сокращения для формул.

Определим формулу 0, являющуюся тождественно ложной, которая будет играть роль константы "ложь".

D1.1.1. $0 =_{df} \forall s \mid s$ (константа "ложь")

Определим отрицание ~.

D1.1.2. $\sim A =_{df} (A \to 0)$ (отрицание)

Высказывание о ложности предложения A рассматривается как сокращение для высказывания об истинности отрицания предложения A. Определим оператор ложности.

D1.2.1. $-A =_{df} |\sim A$

Для высказывания о строгой истинности предложения A:

'$\ulcorner$' содержательно означает 'есть истинно и неложно'.

D1.2.2. $\ulcorner A =_{df} -(|A \to -A)$

Определим D-импликацию $\supset$, которая фигурирует в правиле вывода.

D1.2.3. $(A \supset B) =_{df} (\ulcorner A \to \ulcorner B)$

Определим конъюнкцию, дизъюнкцию и эквиваленцию $\leftrightarrow$.

D1.3.1. $(A \,\&\, B) =_{df} \sim(A \to \sim B)$.

D1.3.2. $(A \vee B) =_{df} (\sim A \to B)$.

D1.3.3. $(A \leftrightarrow B) =_{df} (A \to B) \,\&\, (B \to A)$

Из всего класса формул выделим подкласс, который образован из префиксированных операторами истинности или ложности формул (называемых далее T.F.-формулами (T.F.-ф.)).

(ix) Если A, B есть формулы, то $(|A)$, $(A \cong B)$ есть T.F.-ф.

(x) Если P_1, P_2 есть T.F.-ф., x есть пропозициональная или экспрессиональная переменная, то $(P_1 \to P_2)$ и $\forall x\, P$, есть T.F.-ф.

Метапеременные: P, P_1, P_2, ... для T.F.-ф.,
x, x_1, x_2, ... для пропозициональных или экспрессиональных переменных.

D1.4.1. $(P_1 \wedge P_2) =_{df} -(P_1 \supset -P_2)$

D1.4.2. $(P_1 \vee P_2) =_{df} (-P_1 \supset P_2)$

D1.4.3. $(P_1 \equiv P_2) =_{df} (P_1 \supset P_2) \wedge (P_2 \supset P_1)$

D1.4.4. $(P_1 \veebar P_2) =_{df} -(P_1 \equiv P_2)$

D1.4.5. $\exists x\, P(x) =_{df} \sim\forall x \sim P(x)$

Схемы аксиом

Имеем следующие группы аксиом:

1) аксиомы классической логики для T.F.-формул:

A1.1. $(P_1 \supset (P_2 \supset P_1))$

A1.2. $(P_1 \supset (P_2 \supset P_3)) \supset ((P_1 \supset P_2) \supset (P_1 \supset P_3))$

A1.3. $((-P_1 \supset -P_2) \supset (P_2 \supset P_1))$

и также

A1.4. $|P \equiv P$

A1.5. $\forall x\, P(x) \supset P(E)$, если формула E свободна для x в P(x).

A1.6. $\forall x\, (P_1 \supset P_2) \supset (P_1 \supset \forall x\, P_2))$, если P_1 не содержит свободных вхождений x.

2) аксиомы, выражающие условия истинности для импликации:

A2.1. $|(E_1 \to E_2) \equiv (-E_1 \vee |E_2)$,

A2.2. $-(E_1 \to E_2) \equiv (|E_1 \wedge -E_2)$.

3) аксиома, выражающая принцип двузначности для ппф:

A3. $(|A \veebar -A)$.

А также добавим аксиому, задающую свойства связки полной эквивалентности $\cong$:

A4. $(E_1 \cong E_2) \equiv (|E_1 \leftrightarrow |E_2) \wedge (-E_1 \leftrightarrow -E_2)$.

Аксиома, выражающая закон противоречия в семантической форме.

A5. $-(|E_1 \wedge -E_1)$.

Аксиома, утверждающая ни истинность, ни ложность нестандартных формул.

A6. $(-|N \wedge --N)$

Правила вывода

$$\frac{E_1,\ (E_1 \supset E_2)}{E_2}\ \text{MP}, \qquad \frac{P}{\forall x\ P}\ \text{Gen.}$$

Интерпретация:

Таблицы истинности ниже.

$\rightarrow$	0	½	1
0	1	1	1
½	½	½	1
1	0	½	1

$\cong$	0	½	1
0	1	0	0
½	0	1	0
1	0	0	1

A	|A	−A
0	0	1
½	0	0
1	1	0

Пропозициональная часть исчисления **TC3N(≅)** эквивалентна сильной логике Клини [1], обогащенной клиниевской же связкой полной эквивалентности, а также трехзначной логике Лукасевича. Последнее может быть понято при учете того, что при построении этого исчисления ослаблялся именно принцип двузначности, что являлось для Лукасевича [2] отправной точкой в построении им трехзначной логики.

Аналогично тому, как Черч [6] показывает эквивалентность расширенного пропозиционального исчисления (с кванторами по пропозициональным переменным) Лукасевича-Тарского, Рассела классическому пропозициональному исчислению, можно показать эквивалентность построенного исчисления **TC3N(≅)** трехзначной логике ложности **FL3N**.

В заключение приведем ряд теорем, имеющих несколько непривычный вид.

T1.1. $\vdash {\sim}\forall x\,|\,(x \rightarrow x)$

T1.2. $\vdash\ {\sim}\,|\,(\rightarrow \rightarrow \rightarrow)$.

T2.1. $\vdash\ \forall x\,(x \cong x)$

T2.2. $\vdash\ (\rightarrow \cong \rightarrow)$.

T2.3. $\vdash\ (\cong \cong \cong)$.

ЛИТЕРАТУРА

1. *Клини С.К.* Введение в метаматематику М., 1957.
2. *Лукасевич Я.* О детерминизме // Логические исследования. Вып. 2. М., 1993. С. 190–205.
3. *Павлов С.А.* Новый подход к построению и обобщению классической логики // Логические исследования. Выпуск 10, М., 2003, С. 150–157.
4. *Смальян Р.* Теория формальных систем. М., 1981.
5. *Тарский А.* Понятие истины в языках дедуктивных наук // Философия и логика Львовско-Варшавской школы. М., 1999. С. 19–156.
6. *Чёрч А.* Введение в математическую логику. М., 1960.

В.М.Попов, Г.Н.Шуклин

ИНТУИЦИОНИСТСКИ ПРИЕМЛЕМАЯ ПАРАНОРМАЛЬНАЯ ЛОГИКА*

Философу Льву Хоруцу, который 37 лет назад учил реконструированию возможных миров, с уважением и признательностью посвящается

Abstract. *In the paper a propositional logic* AIP *which is a paranormal sublogic of intuitionistic propositional logic is constructed. The semantics of* AIP *which is a modification of Kripke semantics adequate to the intuitionistic propositional logic, and a sequent calculus* GAIP *axiomatizing the* AIP *logic, are also described. The embeddings of intuitionistic propositional logic into* AIP *are defined.*

Строится пропозициональная логика AIP, являющаяся паранормальной подлогикой интуиционистской пропозициональной логики. Описываются семантика логики AIP, представляющая модификацию семантики Крипке, адекватной интуиционистской пропозициональной логике, и секвенциальное исчисление GAIP, аксиоматизирующее логику AIP. Определяются погружения интуиционистской пропозициональной логике в AIP.

Язык L логики AIP есть стандартно определяемый пропозициональный язык над алфавитом < S, &, v, $\supset$, ¬ ,), (>, где S есть множество $\{s_1, s_2, s_3, \ldots\}$ всех пропозициональных переменных языка L. Определение L-формулы индуктивно: (i) всякая пропозициональная переменная языка L есть L-формула, (ii) если A и B есть L-формулы, то (A & B), (A v B), (A $\supset$ B), (¬ A) есть L-формулы. Элементарной L-формулой называется L-формула, которая является пропозициональной переменной языка L или имеет вид (¬ p), где p – пропозициональная переменная языка L. Термины «формула» и «элементарная формула» используются как сокращения для « L-формула» и «элементарная L-формула» соответственно. Логика AIP есть наименьшее множество формул, которое замкнуто относительно правила подстановки и правила modus ponens и которому принадлежат: (а) все интуиционистски доказуемые формулы, ни в одну из которых не входит ¬ , (б) все формулы вида

* Работа выполнена при поддержке РГНФ, грант № 02-03-11819 а.

((A ⊃ (¬ (B ⊃ B))) ⊃ (¬ A)), где A и B есть формулы и при этом A не есть пропозициональная перемененная языка L, (в) все формулы вида (C ⊃ ((¬ C) ⊃ D)), где C и D есть формулы и при этом C не есть пропозициональная переменная языка L. AIP-теорией называется множество формул, включающее AIP и замкнутое относительно правила modus ponens. Противоречивой AIP-теорией называется такая AIP-теория T, что для всякой формулы A верно, что A ∈ T и (¬ A) ∈ T. Паранепротиворечивой AIP-теорией называется противоречивая AIP-теория, которая не равна множеству всех формул. Полной AIP-теорией называется такая AIP-теория T, что для всякой формулы A верно, что A ∈ T или (¬ A) ∈ T. Неполной AIP-теорией называется AIP-теория, не являющаяся полной AIP-теорией. Параполной AIP-теорией называется такая неполная AIP-теория T, что всякая полная AIP-теория, включающая T, равна множеству всех формул.

Теорема 1 (о паранормальности логики AIP).

Существует паранепротиворечивая и существует параполная AIP-теории.

AIP-моделью называется упорядоченная тройка < G, R, ⊨ > такая, что G есть непустое множество, R есть рефлексивное и транзитивное бинарное отношение на G, ⊨ есть подмножество множества G x {A | A есть формула}, и выполняются следующие условия: (1) для всякой элементарной формулы e и всяких α и β из G верно, что если $\alpha \models e$ и $\alpha R \beta$, то $\beta \models e$, (2) для всяких формул A и B, всякой формулы C, не являющейся пропозициональной переменной языка L, и всякого α из G верно, что

(2.1) $\alpha \models (A\&B)$ т.т.т. $\alpha \models A$ и $\alpha \models B$,

(2.2) $\alpha \models (A \vee B)$ т.т.т. $\alpha \models A$ или $\alpha \models B$,

(2.3) $\alpha \models (A \supset B)$ т.т.т. для всякого β из G верно, что если $\alpha R \beta$ и $\beta \models A$, то $\beta \models B$,

(2.4) $\alpha \models (\neg C)$ т.т.т. для всякого β из G верно, что если $\alpha R \beta$, то неверно, что $\beta \models C$.

Формула A называется общезначимой в AIP-модели < G, R, ⊨ >, если всякий α из G таков, что $\alpha \models A$.

Теорема 2. Для всякой формулы A выполняется следующее условие: A ∈ AIP т.т.т. A общезначима во всякой AIP-модели.

Секвенциальное исчисление GAIP является секвенциальным исчислением генценовского типа. Формулировка исчисления GAIP получается из предложенной в [1] формулировки исчисления GI интуиционистской логики предикатов первого порядка исключением правил для кванторов (с соответствующей модификацией языка) и заменой правила A, Γ→ / Γ→ (¬ A) введения негации справа правилом B, Γ→ / Γ→ (¬ B) ограниченного введения нега-

ции справа: B не является пропозициональной переменной языка L, а правила Г→ A / (¬ A), Г→ введения негации слева правилом Г→ B / (¬ B), Г→ ограниченного введения негации слева: B не является пропозициональной переменной языка L. Выводы в GAIP строятся обычным для генценовских секвенциальных исчислений способом. Теорема об устранимости сечения и нижеследующие теоремы 3 и 4 доказаны с использованием методов работы [1].

Теорема 3. Для всякой формулы A выполняется условие: A ∈ AIP т.т.т. секвенция → A выводима в GAIP.

Теорема 4. Исчисление GAIP разрешимо.

Следствием теоремы 3 и 4 является теорема 5.

Теорема 5. Логики AIP разрешима.

Следует обратить внимание на то, что логика AIP не имеет конечной характеристической матрицы. Доказательство несуществования конечной характеристической матрицы для AIP аналогично известному геделевскому доказательству несуществования конечной характеристической матрицы для интуиционистской пропозициональной логики.

Связь логики AIP с интуиционистской пропозициональной логикой IntP (язык логики IntP есть L) устанавливается следующими теоремами 6 и 7.

Теорема 6. Пусть ϕ есть вычислимое отображение множества всех пропозициональных переменных языка L во множество всех формул, удовлетворяющее следующим условиям: (1) ϕ(p) не есть пропозициональная переменная языка L ни для какой пропозициональной переменной p языка L, (2) для всякой пропозициональной переменной p языка L формулы (p ⊃ ϕ(p)) и (ϕ(p) ⊃ p) принадлежат логике AIP. Пусть h_ϕ есть такое отображение множества всех формул в само это множество, что для всякой пропозициональной переменной p языка L и всяких формул B и C выполняются следующие условия:

(a) $h_\phi(p) = \phi(p)$,

(в) $h_\phi((B \bullet C)) = (h_\phi(B) \bullet h_\phi(C))$, где • ∈ {&, v, ⊃ },

(c) $h_\phi((\neg B)) = (\neg h_\phi(B))$.

Тогда для всякой формулы A: A ∈ IntP т.т.т. h_ϕ(A) ∈ AIP.

Например, определив для всякой пропозициональной переменной p языка L ϕ(p) как (p & p) (или как (p v p)), получаем отображение h_ϕ , погружающее логику IntP в AIP.

Теорема 7. Пусть g есть такое отображение множества всех формул в само это множество, что для всякой пропозициональной переменной p языка L и всяких формул B и C выполняются следующие условия:

(I) $g(p) = p$,
(II) $g((B \bullet C)) = (g(B) \bullet g(C))$, где $\bullet \in \{\&, \vee, \supset\}$,
(III) $g((\neg B)) = (g(B) \supset (\neg (s_1 \supset s_1)))$.

Тогда для всякой формулы A: $A \in IntP$ т.т.т. $g(A) \in IntP$.

Используя теорему 7, можно доказать, что для всякой формулы A такой, что всякое вхождение $\neg$ в A есть вхождение в формулу $(\neg (s_1 \supset s_1))$, верно следующее: $A \in IntP$ т.т.т. $A \in AIP$.

ЛИТЕРАТУРА

1. *Генцен Г.* Исследования логических выводов // Математическая теория логического вывода. М., 1967. С. 9-74.
2. *Драгалин А.Г.* Математический интуиционизм. Введение в теорию доказательств. М., 1979.

М.Н.Рыбаков

ПОГРУЖЕНИЕ ИНТУИЦИОНИСТСКОЙ ЛОГИКИ В ЕЕ ФРАГМЕНТ ОТ ДВУХ ПЕРЕМЕННЫХ И СЛОЖНОСТЬ ЭТОГО ФРАГМЕНТА*

Abstract. *An embedding of intuitionistic propositional logic into its two-variable fragment is constructed. Using this embedding, we prove that the decision problem for two-variable fragment of intuitionistic propositional logic is* PSPACE*-complete.*

1. Введение

Как следует из названия, речь пойдет, в частности, о построении погружения интуиционистской пропозициональной логики **Int** в ее фрагмент от двух переменных. Здесь под погружением множества формул A во множество формул B мы понимаем полиномиально (по затратам времени) вычислимую функцию (алгоритм, эффективную процедуру) f такую, что для всякой формулы φ имеет место эквивалентность

$$\varphi \in A \iff f(\varphi) \in B.$$

Погружение, которое будет построено, на самом деле обладает и некоторыми дополнительными «хорошими» свойствами, например, оно в определенном смысле сохраняет структуру исходной интуиционистской формулы.

Сразу заметим, что это погружение (или существование такого погружения) навряд ли представляет большой интерес само по себе; оно в первую очередь является лишь средством для решения других задач. Более того, оно и возникло при решении автором вопроса, не связанного напрямую с погружениями, а именно вопроса о сложности проблемы разрешения некоторых фрагментов интуиционистской логики. И хотя в названии работы погружение поставлено на первое место, мы, тем не менее, ставим целью не столько построить его, сколько получить с его помощью некоторые новые факты об **Int**, в частности, касающиеся алгоритмических аспектов этой логики и некоторых ее расширений.

Опишем ситуацию с проблемой разрешения интуиционистской логики подробнее.

* Работа выполнена при поддержке РФФИ, грант 03–06–80115.

2. Сложность разрешения Int

Хорошо известно, что интуиционистская логика **Int**, как и многие другие «естественные» пропозициональные логики, является разрешимой. Это означает, что существует алгоритм (эффективная процедура), который по всякой формуле дает ответ на вопрос о том, принадлежит эта формула интуиционистской логике или нет. Заметим, что существование такого алгоритма говорит лишь о принципиальной разрешимости интуиционистской логики, поскольку алгоритмы, разрешающие **Int**, могут оказаться довольно сложными, например, все они могут требовать для своей работы слишком больших временных ресурсов, что сильно затруднит их применение на практике.

В некотором смысле дело именно так и обстоит. В [9] доказано, что проблема разрешения интуиционистской логики является PSPACE-полной (доказательство этого факта можно найти также в [4]). Напомним, что проблема называется PSPACE-полной, если

- она находится в классе PSPACE, т.е. может быть решена некоторым алгоритмом с полиномиальными затратами памяти от длины входных данных;
- она PSPACE-трудна, т.е. всякая проблема из класса PSPACE полиномиально (по времени) сводится к данной проблеме

(о классах сложности см. [5, 10]). Проблемы, являющиеся PSPACE-полными, на данный момент считаются реально не решаемыми – из известных алгоритмов, решающих такие проблемы, самые быстрые требуют для своей работы экспоненту времени (при этом неизвестно, существуют ли более эффективные алгоритмы, решающие такого рода проблемы). Таким образом, хотя интуиционистская логика и разрешима, вряд ли удастся решать на практике проблему принадлежности формул логике **Int** с использованием существующей сегодня вычислительной техники.

Тем не менее, хотя и имеются определенные трудности с разрешением логики **Int**, быть может, некоторые достаточно выразительные фрагменты этой логики удастся разрешать за «реальное время».

Одним из таких фрагментов является позитивный фрагмент логики **Int**, обозначим его через $\mathbf{Int}^{+}$. Заметим, что, отказываясь от использования отрицания, мы практически не теряем выразительности языка: логика **Int** погружается в $\mathbf{Int}^{+}$, см., например, [1]. Но и PSPACE-полноту мы тоже не теряем: на самом деле в [9] для обоснования PSPACE-трудности проблемы разрешения **Int** использовались формулы, которые в качестве связок содержали

лишь конъюнкцию и импликацию. Более того, как показано в [3], уже импликативный фрагмент **Int** обладает PSPACE-полной проблемой разрешения. Поскольку безымпликативные интуиционистские фрагменты не столь интересны, то на пути уменьшения набора связок (с сохранением импликации[1]) нельзя получить фрагменты интуиционистской логики, которые были бы разрешимы за «реальное время».

Мы рассмотрим ситуацию, когда язык интуиционистской логики содержит лишь конечное число переменных. Такое ограничение на язык, с одной стороны, вполне оправдано: в реально возникающих формулах (множествах формул) обычно имеется лишь конечное число переменных, причем это число зачастую невелико (например, чтобы аксиоматизировать **Int**, вполне достаточно формул от трех переменных). С другой стороны, известно, что для некоторых логик с достаточно сложной проблемой разрешения в полном языке удается доказать, что проблема разрешения в языке с конечным числом переменных решается с полиномиальными затратами времени. Например, так обстоит дело с проблемой выполнимости булевых формул – она является NP-полной – и с проблемой выполнимости булевых формул с кванторами – эта проблема PSPACE-полна. Если рассматривать булевы формулы (или булевы формулы с кванторами) только от n переменных (число n фиксировано), то соответствующие проблемы решаются с полиномиальными затратами времени, поскольку в этом случае для решения указанных проблем достаточно обозревать таблицы истинности с заранее ограниченным некоторой константой числом наборов возможных значений переменных (например, для булевых формул от n переменных в качестве такой константы можно взять 2^n).

Для удобства дальнейшего изложения введем следующее обозначение. Пусть L – некоторая пропозициональная логика (в языке с бесконечным числом переменных); через $L(n)$ будем обозначать фрагмент логики L, состоящий из формул от не более чем n переменных.

Из сказанного выше следует, что фрагмент **Cl**(n) полиномиально разрешим для любого n. Может, и с **Int**(n) дело обстоит примерно так же?

Известно, что фрагмент **Int**(0) является полиномиально разрешимым. Действительно, любая константная формула эквивалентна в **Int** либо формуле $\bot$, либо формуле $\top$, а из того, что **Int** содер-

---

[1] Например, проблема разрешения некоторых безымпликативных фрагментов **Int** находится в классе NP.

жится в классической пропозициональной логике **Cl**, получаем, что **Int**(0) = **Cl**(0), т.е. для выяснения принадлежности константной формулы интуиционистской логике достаточно выяснить, является ли эта формула тождественно истинной, а последний вопрос решается для константных формул с квадратичными затратами времени от длины тестируемой формулы: соответствующий алгоритм состоит в нахождении истинностного значения формулы с использованием таблиц истинности для булевых связок. Более того, полиномиально разрешимым является фрагмент **Int**(1), что следует из конструкции Нишимуры [7]: каждая формула от одной переменной, которая не принадлежит **Int**, опровергается в одном из миров «лестницы» Нишимуры. Остается заметить, что для выяснения опровержимости формулы от одной переменной на «лестнице» Нишимуры достаточно проверить, истинна ли эта формула в верхних[2] мирах «лестницы», число которых не превышает длины тестируемой формулы.

Что можно сказать о сложности **Int**(n) для $n \geqslant 2$?

Некоторое время назад А.В. Чагровым была высказана гипотеза о том, что для всякого натурального n фрагмент **Int**(n) полиномиально разрешим. Эта гипотеза отчасти подкреплялась тем, что в доказательстве PSPACE-трудности проблемы разрешения **Int** в [9] (как, впрочем, и в других, более поздних, доказательствах) существенно использовался тот факт, что язык интуиционистской логики содержит бесконечно много переменных. Однако в середине 90-х годов XX века было доказано, что для обоснования PSPACE-полноты проблемы разрешения некоторых модальных пропозициональных логик достаточно, чтобы в языке была лишь одна переменная [6, 8], а чуть позже было установлено, что в ряде случаев достаточно и константных формул [2]. Возникло предположение, что аналогичный результат (только с двумя или более переменными в языке) может быть справедлив и для **Int**. Построив погружение, о котором говорилось во введении, мы докажем, что дело именно так и обстоит: уже фрагмент **Int**(2) обладает PSPACE-полной проблемой разрешения.

3. Построение погружения

Считаем, что интуиционистские формулы строятся из переменных $p_0, p_1, p_2, \ldots$ и константы $\bot$ с помощью $\wedge$, $\vee$ и $\rightarrow$. Отрицание вводим как обычное сокращение: $\neg\psi = \psi \rightarrow \bot$. При записи формул будем опускать некоторые скобки, считая самой сильной

---

[2] Имеются в виду, конечно, не самые верхние миры «лестницы» (т.е. из которых достижимы только они сами), а верхняя часть «лестницы».

связкой $\neg$, затем $\wedge$, $\vee$ и $\rightarrow$. В рассуждениях будет использоваться семантика Крипке; мы будем придерживаться обозначений [4].

Поскольку имеется погружение **Int** в $\mathbf{Int}^+$ [1], нам достаточно построить погружение $\mathbf{Int}^+$ в **Int**(2).

Пусть p и q – две (различные) пропозициональные переменные. Определим следующие формулы:

$$A_1^0 = \neg(p \wedge q);\quad A_2^0 = \neg(\neg p \wedge q);\quad B_1^0 = \neg(p \wedge \neg q);\quad B_2^0 = \neg(\neg p \wedge \neg q);$$

$$A_1^1 = A_1^0 \wedge A_2^0 \rightarrow B_1^0 \vee B_2^0; \qquad B_1^1 = A_2^0 \wedge B_1^0 \rightarrow A_1^0 \vee B_2^0;$$

$$A_2^1 = A_1^0 \wedge B_1^0 \rightarrow A_2^0 \vee B_2^0; \qquad B_2^1 = A_2^0 \wedge B_2^0 \rightarrow A_1^0 \vee B_1^0;$$

$$A_3^1 = A_1^0 \wedge B_2^0 \rightarrow A_1^0 \vee B_1^0; \qquad B_3^1 = B_1^0 \wedge B_2^0 \rightarrow A_1^0 \vee A_2^0.$$

Пусть определены формулы $A_1^k, \ldots, A_m^k$ и $B_1^k, \ldots, B_m^k$, где $k \geqslant 1$. Определим формулы $A_1^{k+1}, \ldots, A_n^{k+1}$ и $B_1^{k+1}, \ldots, B_n^{k+1}$, где $n = (m-1)^2$:

$$A_1^{k+1} = A_1^k \rightarrow B_1^k \vee A_2^k \vee B_2^k; \qquad B_1^{k+1} = B_1^k \rightarrow A_1^k \vee A_2^k \vee B_2^k;$$

$$A_2^{k+1} = A_1^k \rightarrow B_1^k \vee A_2^k \vee B_3^k; \qquad B_2^{k+1} = B_1^k \rightarrow A_1^k \vee A_2^k \vee B_3^k;$$

$$A_3^{k+1} = A_1^k \rightarrow B_1^k \vee A_2^k \vee B_4^k; \qquad B_3^{k+1} = B_1^k \rightarrow A_1^k \vee A_2^k \vee B_4^k;$$

$$\ldots \qquad\qquad \ldots$$

$$A_s^{k+1} = A_1^k \rightarrow B_1^k \vee A_i^k \vee B_j^k; \qquad B_s^{k+1} = B_1^k \rightarrow A_1^k \vee A_i^k \vee B_j^k;$$

$$\ldots \qquad\qquad \ldots$$

$$A_n^{k+1} = A_1^k \rightarrow B_1^k \vee A_m^k \vee B_m^k; \qquad B_n^{k+1} = B_1^k \rightarrow A_1^k \vee A_m^k \vee B_m^k.$$

Формулы A_i^k и B_i^k будем называть формулами уровня k. Обозначим через N_k число формул A_i^k уровня k (ясно, что N_k будет также и числом формул B_i^k уровня k). Нетрудно видеть, что

$$N_0 = 2, \quad N_1 = 3, \quad N_{k+2} = (N_{k+1} - 1)^2.$$

Через $|A|$ обозначим длину формулы A. Пусть

$$l = \max_{1 \leqslant i \leqslant 2} \{|A_i^0| + |B_i^0|\}.$$

Считая отрицание за один символ, получаем, что $l = 15$. Понятно, что $|A_i^k| < 5^k \cdot l$ и $|B_i^k| < 5^k \cdot l$ (этот факт легко обосновывается индукцией по k). Кроме того, нетрудно видеть, что существует k_0 такое, что для всякого $k \geqslant k_0$ имеет место отношение $5^k \cdot l < N_k$. Легко убедиться, что в качестве k_0 можно взять любое целое число, большее пяти; пусть для определенности $k_0 = 6$.

Теперь построим модель, в которой будут опровергаться все определенные выше формулы, при этом для каждой формулы будет существовать единственный максимальный мир, в котором она опровергается. Положим

$$W = \{a_i^0, b_i^0 : k \geqslant 0,\ 1 \leqslant i \leqslant N_k\}.$$

Элементы a_i^k и b_i^k будем называть мирами уровня k. На множестве W определим отношение достижимости R. Положим

$$R_1^a = \{\langle a_1^1, b_1^0\rangle, \langle a_1^1, b_2^0\rangle, \langle a_2^1, a_1^0\rangle, \langle a_2^1, b_2^0\rangle, \langle a_3^1, a_2^0\rangle, \langle a_3^1, b_1^0\rangle\};$$
$$R_1^b = \{\langle b_1^1, a_1^0\rangle, \langle b_1^1, b_2^0\rangle, \langle b_2^1, a_1^0\rangle, \langle b_2^1, b_1^0\rangle, \langle b_3^1, a_1^0\rangle, \langle b_3^1, a_2^0\rangle\};$$
$$R_1 = R_1^a \cup R_1^b.$$

Для всякого $k \geqslant 1$ положим

$$R_{k+1}^a = \{\langle a_m^{k+1}, b_1^k\rangle, \langle a_m^{k+1}, a_i^k\rangle, \langle a_m^{k+1}, b_j^k\rangle : A_m^{k+1} = A_1^k \to B_1^k \vee A_i^k \vee B_j^k\};$$
$$R_{k+1}^b = \{\langle b_m^{k+1}, a_1^k\rangle, \langle b_m^{k+1}, a_i^k\rangle, \langle b_m^{k+1}, b_j^k\rangle : B_m^{k+1} = B_1^k \to A_1^k \vee A_i^k \vee B_j^k\};$$
$$R_{k+1} = R_{k+1}^a \cup R_{k+1}^b.$$

Теперь положим

$$R' = \bigcup_{k=1}^{\infty} R_k$$

и в качестве отношения достижимости R возьмем рефлексивно-транзитивное замыкание отношения R'.

Положим $\mathcal{F} = \langle W, R\rangle$, $\mathcal{M} = \langle \mathcal{F}, v\rangle$, где оценка v определена следующим образом:

$$(\mathcal{M}, w) \vDash p \iff w = a_1^0 \text{ или } w = b_1^0;$$
$$(\mathcal{M}, w) \vDash q \iff w = a_1^0 \text{ или } w = b_2^0.$$

Для наглядности модель $\mathcal{M}$ изображена на рис. 1.

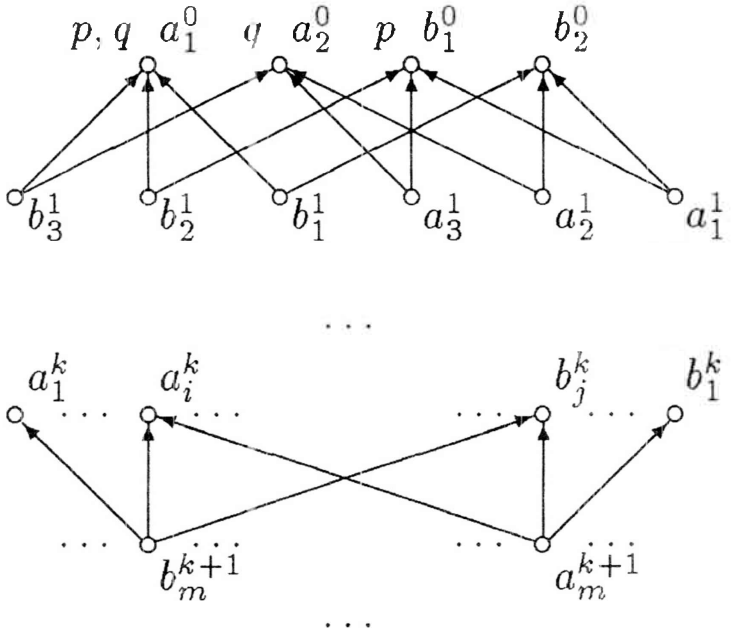


Рис. 1: Модель $\mathcal{M}$

Лемма 1. *Пусть w – мир модели $\mathcal{M}$. Тогда*

$$(\mathcal{M},w) \not\models A_m^k \iff wRa_m^k;$$
$$(\mathcal{M},w) \not\models B_m^k \iff wRb_m^k.$$

Доказательство проведем индукцией по k. Пусть $k = 0$. Имеется всего четыре формулы нулевого уровня: A_1^0, A_2^0, B_1^0 и B_2^0.

Поскольку $(\mathcal{M}, a_1^0) \models p \wedge q$, то $(\mathcal{M}, a_1^0) \not\models A_1^0$, а следовательно, для всякого мира w такого, что wRa_1^0, имеет место отношение $(\mathcal{M}, w) \not\models A_1^0$. Пусть теперь для некоторого $w \in W$ выполнено отношение $(\mathcal{M}, w) \not\models A_1^0$. Тогда существует мир w', достижимый из w, такой, что $(\mathcal{M}, w') \models p \wedge q$. Но единственным миром модели $\mathcal{M}$, в котором истинны обе переменные p и q, является мир a_1^0. Следовательно, $w' = a_1^0$, и значит, wRa_1^0.

Поскольку $(\mathcal{M}, a_2^0) \models \neg p \wedge q$, то $(\mathcal{M}, a_2^0) \not\models A_2^0$, а следовательно, для всякого мира w такого, что wRa_2^0, имеет место отношение $(\mathcal{M}, w) \not\models A_2^0$. Пусть теперь для некоторого $w \in W$ выполнено отношение $(\mathcal{M}, w) \not\models A_2^0$. Тогда существует мир w', достижимый из w, такой, что $(\mathcal{M}, w) \models \neg p \wedge q$. Но единственным миром модели $\mathcal{M}$, в котором истинна только переменная q, является мир a_2^0. Следовательно, $w' = a_2^0$, и значит, wRa_2^0.

Поскольку $(\mathcal{M}, b_1^0) \models p \wedge \neg q$, то $(\mathcal{M}, b_1^0) \not\models B_1^0$, а следовательно, для всякого мира w такого, что wRb_1^0, имеет место отношение $(\mathcal{M}, w) \not\models B_1^0$. Пусть теперь для некоторого $w \in W$ выполнено отношение $(\mathcal{M}, w) \not\models B_1^0$. Тогда существует мир w', достижимый из w, такой, что $(\mathcal{M}, w) \models p \wedge \neg q$. Но единственным миром модели $\mathcal{M}$, в котором истинна только переменная p, является мир b_1^0. Следовательно, $w' = b_b^0$, и значит, wRa_2^0.

Поскольку $(\mathcal{M}, b_2^0) \models \neg p \wedge \neg q$, то $(\mathcal{M}, b_2^0) \not\models B_2^0$, а следовательно, для всякого мира w такого, что wRb_2^0, имеет место отношение $(\mathcal{M}, w) \not\models B_2^0$. Пусть теперь для некоторого $w \in W$ выполнено отношение $(\mathcal{M}, w) \not\models B_2^0$. Тогда существует мир w', достижимый из w, такой, что $(\mathcal{M}, w) \models \neg p \wedge \neg q$. Предположим, что $w' \neq b_2^0$. Заметим, что w' в этом случае не может быть миром нулевого уровня, поскольку в каждом мире нулевого уровня, отличном от b_2^0, истинна хотя одна из переменных p и q. Значит, w' является миром уровня k для некоторого $k > 0$. Нетрудно видеть, что в этом случае из w' достижимы как минимум два различных мира уровня 0; хотя бы в одном из них истинна хотя бы одна из переменных p и q, а последнее противоречит справедливости отношения $(\mathcal{M}, w) \models \neg p \wedge \neg q$. Следовательно, $w' = b_2^0$, и значит, wRb_2^0.

Пусть для всякого мира w модели $\mathcal{M}$ и всякого $s \leqslant N_k$ имеют место следующие эквивалентности:

$$(\mathcal{M}, w) \not\models A_s^k \iff wRa_s^k;$$
$$(\mathcal{M}, w) \not\models B_s^k \iff wRb_s^k.$$

Пусть $A_m^{k+1} = A_1^k \to B_1^k \vee A_i^k \vee B_j^k$ и $B_m^{k+1} = B_1^k \to A_1^k \vee A_i^k \vee B_j^k$ для некоторых $i, j \in \{2, \ldots, N_k\}$. Покажем, что

$$(\mathcal{M}, w) \not\models A_m^{k+1} \iff wRa_m^{k+1};$$
$$(\mathcal{M}, w) \not\models B_m^{k+1} \iff wRb_m^{k+1}.$$

Поскольку $a_m^{k+1} Rb_1^k$, $a_m^{k+1} Ra_i^k$, $a_m^{k+1} Rb_j^k$, то по индукционному предположению $(\mathcal{M}, a_m^{k+1}) \not\models B_1^k \vee A_i^k \vee B_j^k$, а поскольку неверно, что $a_m^{k+1} Ra_1^k$, то по индукционному предположению $(\mathcal{M}, a_m^{k+1}) \models A_1^k$. Следовательно, для всякого w такого, что wRa_m^{k+1}, имеет место отношение $(\mathcal{M}, w) \not\models A_m^{k+1}$.

Аналогично обосновывается, что для всякого w такого, что wRb_m^{k+1}, имеет место отношение $(\mathcal{M}, w) \not\models B_m^{k+1}$.

Пусть $(\mathcal{M}, w) \not\models A_m^{k+1}$ для некоторого мира w модели $\mathcal{M}$. Тогда существует достижимый из w мир w' такой, что $(\mathcal{M}, w') \models A_1^k$ и $(\mathcal{M}, w') \not\models B_1^k \vee A_i^k \vee B_j^k$. По индукционному предположению, из w' должны быть достижимы миры b_1^k, a_i^k, b_j^k, и должен быть недостижим мир a_1^k. Поскольку различные миры одного и того же уровня друг из друга не достижимы, а миры более высокого уровня не достижимы из миров более низкого уровня, то w' является миром уровня не ниже, чем $k+1$. С другой стороны, для всякого мира w'' более высокого уровня, чем $k+1$, имеет место отношение $w''Ra_1^k$, и значит, $(\mathcal{M}, w'') \not\models A_1^k$. Следовательно, w' является миром уровня не выше, чем $k+1$. Итак, w' – мир уровня $k+1$, из которого достижимы миры b_1^k, a_i^k, b_j^k и не достижим мир a_1^k. По определению шкалы $\mathcal{F}$ это возможно только в том случае, когда $w' = a_s^{k+1}$, где s таково, что $A_s^{k+1} = A_1^k \to B_1^k \vee A_i^k \vee B_j^k$. Ясно, что в нашем случае $s = m$, т.е. $w' = a_m^{k+1}$. Следовательно, wRa_m^{k+1}.

Аналогично доказывается, что если $(\mathcal{M}, w) \not\models B_m^{k+1}$, то wRb_m^{k+1}.

Пусть φ – некоторая интуиционистская формула, не содержащая отрицания, $p_1, \ldots, p_n$ – все ее переменные. Обозначим через k наименьшее натуральное число, удовлетворяющее отношению $|\varphi| < 5^k \cdot 15$. Заметим, что

$$N_{k+6} > 5^{k+6} \cdot 15 > 5^6 \cdot 15 \cdot |\varphi| > |\varphi| > n,$$

поэтому следующее определение корректно: для всякого $i \in \{1, \ldots, n\}$ определим формулу α_i, положив

$$\alpha_i = A_i^{k+6} \vee B_i^{k+6}.$$

Обозначим через φ_α формулу, которая получается из φ подстановкой формул $\alpha_1, \ldots, \alpha_n$ вместо переменных $p_1, \ldots, p_n$ соответственно.

Лемма 2. *Для некоторого натурального числа c имеет место отношение* $|\varphi_\alpha| < c \cdot |\varphi|^2$.

Доказательство. Пусть k – наименьшее натуральное число, удовлетворяющее отношению $|\varphi| < 5^k \cdot 15$. Тогда $5^{k-1} \cdot 15 \leqslant |\varphi|$, и следовательно,

$$5^{k+6} \cdot 15 \leqslant 5^7 \cdot |\varphi|.$$

Поскольку $|A_i^{k+6}| < 5^{k+6} \cdot 15$ и $|B_i^{k+6}| < 5^{k+6} \cdot 15$, то

$$|\alpha_i| < 2 \cdot 5^{k+6} \cdot 15 \leqslant 2 \cdot 5^7 \cdot |\varphi|.$$

Следовательно,

$$|\varphi_\alpha| \leqslant |\varphi| \cdot \max_{1 \leqslant i \leqslant n} |\alpha_i| < 2 \cdot 5^7 \cdot |\varphi|^2,$$

т.е. в качестве c можно взять число $2 \cdot 5^7$.

Лемма 3. *Для всякой интуиционистской формулы φ, не содержащей отрицания, имеет место следующая эквивалентность:*

$$\varphi \in \mathbf{Int} \iff \varphi_\alpha \in \mathbf{Int}.$$

Доказательство. Если $\varphi \in \mathbf{Int}$, то $\varphi_\alpha \in \mathbf{Int}$, поскольку φ_α является подстановочным примером формулы φ.

Пусть φ – интуиционистская формула, не содержащая отрицания, и пусть $\varphi_\alpha \notin \mathbf{Int}$. Тогда существует интуиционистская модель $\mathcal{M}_\varphi = \langle \mathcal{F}_\varphi, v_\varphi \rangle$, определенная на шкале $\mathcal{F}_\varphi = \langle W_\varphi, R_\varphi \rangle$, такая, что для некоторого $w_0 \in W_\varphi$ имеет место отношение $(\mathcal{M}_\varphi, w_0) \nvDash \varphi$.

Построим интуиционистскую модель, в некотором мире которой будет опровергаться формула φ_α. Без ограничений общности можем считать, что $W \cap W_\varphi = \varnothing$. Положим $W^* = W \cup W_\varphi$. На множестве W^* рассмотрим следующее отношение R':

$$R' = \{\langle w, a_i^{k+6}\rangle, \langle w, b_i^{k+6}\rangle : w \in W_\varphi, (\mathcal{M}_\varphi, w) \nvDash p_i, 1 \leqslant i \leqslant n\} \cup$$
$$\cup \{\langle w, a_{n+1}^{k+6}\rangle, \langle w, b_{n+1}^{k+6}\rangle : w \in W_\varphi\}.$$

Пусть R^* – рефлексивно-транзитивное замыкание отношения $R \cup R_\varphi \cup R'$ и пусть $\mathcal{F}^* = \langle W^*, R^* \rangle$. На шкале $\mathcal{F}^*$ определим модель $\mathcal{M}^* = \langle \mathcal{F}^*, v^* \rangle$, положив для всякого $w \in W^*$

$$(\mathcal{M}^*, w) \vDash p \iff w = a_1^0 \text{ или } w = b_1^0;$$
$$(\mathcal{M}^*, w) \vDash q \iff w = a_1^0 \text{ или } w = b_2^0.$$

Для всякой подформулы ψ формулы φ через ψ_α обозначим формулу, получающуюся из ψ подстановкой формул $\alpha_1, \ldots, \alpha_n$ вместо переменных $p_1, \ldots, p_n$ соответственно. Индукцией по построению ψ докажем, что для всякого $w \in W_\varphi$

$$(\mathcal{M}^*, w) \vDash \psi_\alpha \iff (\mathcal{M}_\varphi, w) \vDash \psi.$$

Пусть $\psi = p_m$. Если $(\mathcal{M}_\varphi, w) \nvDash p_m$, то в модели $\mathcal{M}^*$ из мира w достижимы миры a_m^{k+6} и b_m^{k+6}. Но $(\mathcal{M}, a_m^{k+6}) \nvDash A_m^{k+6}$, $(\mathcal{M}, b_m^{k+6}) \nvDash B_m^{k+6}$. Понятно, что в этом случае также имеют место отношения

$(\mathcal{M}^*, a_m^{k+6}) \not\models A_m^{k+6}$, $(\mathcal{M}^*, b_m^{k+6}) \not\models B_m^{k+6}$, а следовательно, $(\mathcal{M}^*, w) \not\models \alpha_m$, т.е. $(\mathcal{M}^*, w) \not\models \psi_\alpha$.

Пусть теперь $(\mathcal{M}^*, w) \not\models \alpha_m$ для некоторого мира $w \in W_\varphi$; пусть при этом $A_m^{k+6} = A_1^{k+5} \to B_1^{k+5} \vee A_i^{k+5} \vee B_j^{k+5}$, $B_m^{k+6} = B_1^{k+5} \to A_1^{k+5} \vee A_i^{k+5} \vee B_j^{k+5}$. Тогда в модели $\mathcal{M}^*$ существуют миры w' и w'' такие, что wR^*w', wR^*w'', и при этом

$(\mathcal{M}^*, w') \models A_1^{k+5}, (\mathcal{M}^*, w') \not\models B_1^{k+5}, (\mathcal{M}^*, w') \not\models A_i^{k+5}, (\mathcal{M}^*, w') \not\models B_j^{k+5}$;

$(\mathcal{M}^*, w'') \models B_1^{k+5}, (\mathcal{M}^*, w'') \not\models A_1^{k+5}, (\mathcal{M}^*, w'') \not\models A_i^{k+5}, (\mathcal{M}^*, w'') \not\models B_j^{k+5}$.

Заметим, что $w', w'' \notin W_\varphi$. Действительно, для всякого $u \in W_\varphi$ имеют место отношения $uR^*a_{n+1}^{k+6}$ и $uR^*b_{n+1}^{k+6}$; но $(\mathcal{M}^*, a_{n+1}^{k+6}) \not\models B_1^{k+5}$ и $(\mathcal{M}^*, b_{n+1}^{k+6}) \not\models A_1^{k+5}$, поэтому $(\mathcal{M}^*, u) \not\models A_1^{k+5}$ и $(\mathcal{M}^*, u) \not\models B_1^{k+5}$, и поскольку $(\mathcal{M}^*, w') \models A_1^{k+5}$ и $(\mathcal{M}^*, w'') \models B_1^{k+5}$, то $w', w'' \notin W_\varphi$.

Так как миры w' и w'' достижимы по R^* из некоторого мира множества W_φ, то они не могут быть мирами более высокого уровня, чем $k+6$. С другой стороны, $(\mathcal{M}^*, w') \not\models A_m^{k+6}$ и $(\mathcal{M}^*, w'') \not\models B_m^{k+6}$, поэтому w' и w'' не могут быть мирами уровня ниже, чем $k+6$. Таким образом, w' и w'' – миры уровня $k+6$. Но среди миров уровня $k+6$ формула A_m^{k+6} опровергается только в мире a_m^{k+6}, а формула B_m^{k+6} – только в мире b_m^{k+6}, следовательно, $w' = a_m^{k+6}$, а $w'' = b_m^{k+6}$.

Итак, $wR^*a_m^{k+6}$. Это означает, что при построении шкалы $\mathcal{F}^*$ мы положили $uR'a_m^{k+6}$ для некоторого $u \in W_\varphi$ такого, что $wR_\varphi u$. Но если при построении шкалы $\mathcal{F}^*$ мы положили $uR'a_m^{k+6}$, то мы также должны были положить $uR'b_m^{k+6}$, и сделать это мы могли только в том случае, когда $(\mathcal{M}_\varphi, u) \not\models p_m$. Поскольку $wR_\varphi u$, то получаем, что $(\mathcal{M}_\varphi, w) \not\models p_m$, и тем самым базис индукции обоснован.

Пусть теперь ψ' и ψ'' – подформулы формулы φ такие, что для всякого мира $w \in W_\varphi$

$$(\mathcal{M}^*, w) \models \psi'_\alpha \iff (\mathcal{M}_\varphi, w) \models \psi';$$

$$(\mathcal{M}^*, w) \models \psi''_\alpha \iff (\mathcal{M}_\varphi, w) \models \psi''.$$

Пусть $\psi = \psi' \wedge \psi''$. Тогда для всякого $w \in W_\varphi$

$$\begin{aligned}(\mathcal{M}^*, w) \models \psi_\alpha &\iff (\mathcal{M}^*, w) \models \psi'_\alpha \text{ и } (\mathcal{M}^*, w) \models \psi''_\alpha \\ &\iff (\mathcal{M}_\varphi, w) \models \psi' \text{ и } (\mathcal{M}_\varphi, w) \models \psi'' \\ &\iff (\mathcal{M}_\varphi, w) \models \psi.\end{aligned}$$

Пусть $\psi = \psi' \vee \psi''$. Тогда для всякого $w \in W_\varphi$

$$\begin{aligned}(\mathcal{M}^*, w) \models \psi_\alpha &\iff (\mathcal{M}^*, w) \models \psi'_\alpha \text{ или } (\mathcal{M}^*, w) \models \psi''_\alpha \\ &\iff (\mathcal{M}_\varphi, w) \models \psi' \text{ или } (\mathcal{M}_\varphi, w) \models \psi'' \\ &\iff (\mathcal{M}_\varphi, w) \models \psi.\end{aligned}$$

Пусть $\psi = \psi' \to \psi''$. Если $(\mathcal{M}_\varphi, w) \not\models \psi$, то в модели $\mathcal{M}_\varphi$ существует мир w', достижимый из w, такой, что $(\mathcal{M}_\varphi, w') \models \psi'$ и $(\mathcal{M}_\varphi, w') \not\models \psi''$; но тогда $(\mathcal{M}^*, w') \models \psi'_\alpha$ и $(\mathcal{M}^*, w') \not\models \psi''_\alpha$, а следовательно, $(\mathcal{M}^*, w) \not\models \psi_\alpha$.

Пусть для некоторого $w \in W_\varphi$ имеет место отношение $(\mathcal{M}^*, w) \not\models \psi_\alpha$. Тогда существует $w' \in W^*$ такой, что wR^*w', $(\mathcal{M}^*, w') \models \psi'_\alpha$ и $(\mathcal{M}^*, w') \not\models \psi''_\alpha$. Заметим, что во всяком мире $u \in W$ уровня не выше $k + 6$ формулы $\alpha_1, \ldots, \alpha_n$ истинны. Следовательно, во всяком таком мире будут истинны и все формулы, построенные из $\alpha_1, \ldots, \alpha_n$ с помощью конъюнкции, дизъюнкции и импликации, в частности, во всяком таком мире должна быть истинной формула ψ''_α. Поскольку $(\mathcal{M}^*, w') \not\models \psi''_\alpha$, то w' не может быть миром из множества W, и следовательно, $w' \in W_\varphi$. Тогда, применяя индукционное предположение, получаем, что $(\mathcal{M}_\varphi, w') \models \psi'_\alpha$ и $(\mathcal{M}_\varphi, w') \not\models \psi''_\alpha$, и значит, $(\mathcal{M}_\varphi, w') \not\models \psi_\alpha$.

Поскольку $(\mathcal{M}_\varphi, w_0) \not\models \varphi$, то $(\mathcal{M}^*, w_0) \not\models \varphi_\alpha$, т.е. $\varphi_\alpha \notin \mathbf{Int}$.

Определим функцию f, положив для всякой интуиционистской формулы φ

$$f(\varphi) = \varphi_\alpha.$$

Следующая теорема является следствием лемм 2 и 3.

Теорема 1. *Функция f является погружением* $\mathbf{Int}^+$ *в* $\mathbf{Int}(2)$.

Ввиду того, что **Int** погружается в $\mathbf{Int}^+$ [1], то из теоремы 1 следует

Теорема 2. *Существует погружение* **Int** *в* $\mathbf{Int}(2)$.

4. Некоторые следствия

Имея погружение **Int** в $\mathbf{Int}(2)$, получаем оценку сложности проблемы разрешения для $\mathbf{Int}(2)$.

Теорема 3. *Проблема разрешения* $\mathbf{Int}(2)$ *является* PSPACE*-полной.*

Доказательство. Тот факт, что эта проблема находится в классе PSPACE, следует из того, что в классе PSPACE находится проблема разрешения **Int**, а PSPACE-трудность проблемы разрешения $\mathbf{Int}(2)$ – из того, что к этой проблеме полиномиально сводится PSPACE-полная проблема, именно проблема разрешения $\mathbf{Int}^+$.

Описанную выше конструкцию можно модифицировать и построить погружение, аналогичное f, для некоторых суперинтуиционистских логик, отличных от **Int**. Мы покажем, как это сделать в случае логики слабого закона исключенного третьего $\mathbf{KC} = \mathbf{Int} + \neg p \vee \neg\neg p$. Положим

$$C_0 = \neg(p \wedge q); \qquad D_1 = p \to q \vee C_0;$$
$$D_2 = q \to p \vee C_0; \qquad D_3 = D_1 \vee D_2 \to p \vee q \vee C_0;$$
$$A_1^0 = D_2 \to D_1 \vee D_3; \qquad B_1^0 = D_1 \to D_2 \vee D_3;$$
$$A_2^0 = D_3 \to D_1 \vee D_2; \qquad B_2^0 = A_1^0 \wedge A_2^0 \wedge B_1^0 \to D_1 \vee D_2 \vee D_3;$$
$$A_1^1 = A_1^0 \wedge A_2^0 \to B_1^0 \vee B_2^0; \qquad B_1^1 = A_2^0 \wedge B_1^0 \to A_1^0 \vee B_2^0;$$
$$A_2^1 = A_1^0 \wedge B_1^0 \to A_2^0 \vee B_2^0; \qquad B_2^1 = A_2^0 \wedge B_2^0 \to A_1^0 \vee B_1^0;$$
$$A_3^1 = A_1^0 \wedge B_2^0 \to A_1^0 \vee B_1^0; \qquad B_3^1 = B_1^0 \wedge B_2^0 \to A_1^0 \vee A_2^0.$$

Если формулы $A_1^k, \ldots, A_m^k$ и $B_1^k, \ldots, B_m^k$, где $k \geqslant 1$, уже определены, то формулы $A_1^{k+1}, \ldots, A_n^{k+1}$ и $B_1^{k+1}, \ldots, B_n^{k+1}$, где $n = (m-1)^2$, определяются аналогично тому, как это описано выше:

$$A_s^{k+1} = A_1^k \to B_1^k \vee A_i^k \vee B_j^k; \qquad B_s^{k+1} = B_1^k \to A_1^k \vee A_i^k \vee B_j^k,$$

где $i, j \in \{2, \ldots, m\}$.

Пусть

$$W^+ = W \cup \{c_0, d_1, d_2, d_3\},$$

а R^+ – рефлексивно-транзитивное замыкание следующего отношения R':

$$R' = \mathrm{R} \cup \{\langle d_1, c_0\rangle, \langle d_2, c_0\rangle, \langle d_3, c_0\rangle, \langle a_1^0, d_1\rangle, \langle a_2^0, d_1\rangle, \langle b_2^0, d_1\rangle,$$
$$\langle a_2^0, d_2\rangle, \langle b_1^0, d_2\rangle, \langle b_2^0, d_2\rangle, \langle a_1^0, d_3\rangle, \langle b_1^0, d_3\rangle, \langle b_2^0, d_3\rangle\}.$$

Положим $\mathcal{F}^+ = \langle W^+, R^+\rangle$, $\mathcal{M}^+ = \langle \mathcal{F}^+, v^+\rangle$, где оценка v определена следующим образом:

$$(\mathcal{M}^+, w) \models p \iff w = c_0 \text{ или } w = d_1;$$
$$(\mathcal{M}^+, w) \models q \iff w = c_0 \text{ или } w = d_2.$$

Для наглядности модель изображена на рис. 2.

Нетрудно убедиться, что имеют место следующие утверждения.

Лемма 4. *Пусть w – мир модели $\mathcal{M}^+$. Тогда*

$$(\mathcal{M}^+, w) \not\models C_0 \iff wRc_0;$$
$$(\mathcal{M}^+, w) \not\models D_i \iff wRd_i,\ 1 \leqslant i \leqslant 3.$$

Используя лемму 4, несложно доказать следующее утверждение; доказательство проводится аналогично доказательству леммы 1, и мы его опускаем.

Лемма 5. *Пусть w – мир модели $\mathcal{M}^+$. Тогда*

$$(\mathcal{M}^+, w) \not\models A_m^k \iff wRa_m^k;$$
$$(\mathcal{M}^+, w) \not\models B_m^k \iff wRb_m^k.$$

Обозначим через $\mathbf{KC}^+$ позитивный фрагмент логики **KC**. Заменяя в рассуждениях выше формулы A_m^k и B_m^k их новыми вариантами, а вместо модели $\mathcal{M}$ рассматривая модель $\mathcal{M}^+$, с помощью леммы 5 несложно доказать справедливость следующего утверждения.

Теорема 4. *Существует погружение* $\mathbf{KC}^+$ *в* **KC**(2).

Поскольку проблема разрешения $\mathbf{KC}^+$ является PSPACE-полной (доказательство аналогично доказательству PSPACE-полноты проблемы разрешения $\mathbf{Int}^+$, см. [9]), то в качестве следствия получаем, что имеет место

Теорема 5. *Проблема разрешения* **KC**(2) *является* PSPACE-*полной.*

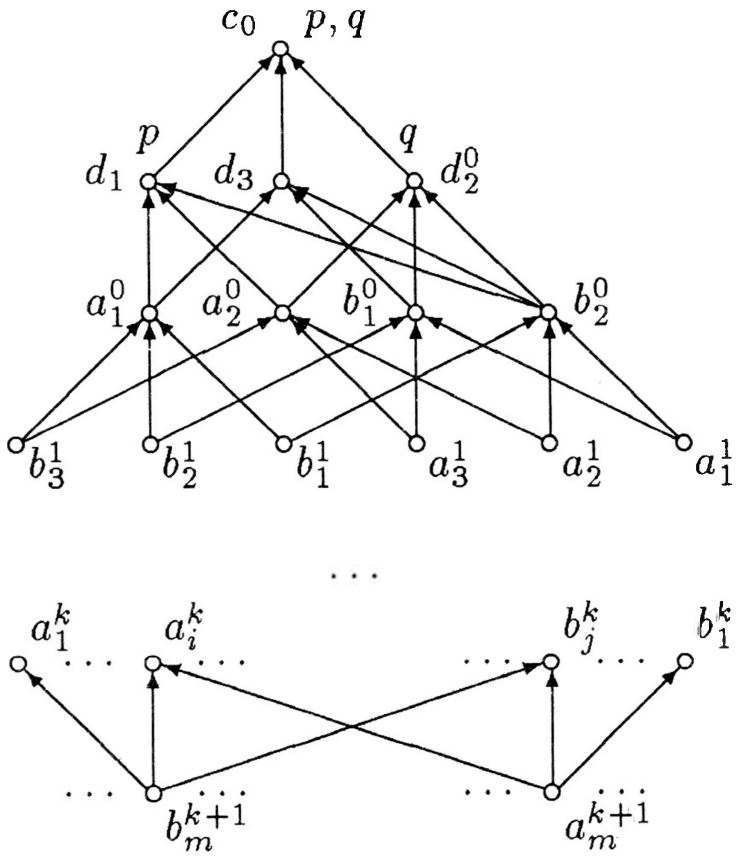


Рис. 2: Модель $\mathcal{M}^+$

Заметим, что новые формулы A_m^k и B_m^k можно бы было использовать и для построения погружения $\mathbf{Int}^+$ в **Int**(2), поэтому на самом деле мы доказали более сильное утверждение. Для суперинтуиционистской логики L обозначим через L^+ ее позитивный фрагмент. Тогда имеет место

Теорема 6. *Пусть* $L \in$ [**Int, KC**]. *Тогда существует погружение* L^+ *в* $L(2)$.

В качестве следствия теоремы 6 получаем следующее утверждение.

Теорема 7. *Пусть* $L \in$ [**Int, KC**]. *Тогда проблема разрешения для* $L(2)$ *является* PSPACE-*трудной.*

В заключение скажем несколько слов о функции сложности М.В. Захарьящева для $L(2)$, где $L \in$ [**Int, KC**]. Пусть L – некоторая логика (множество формул); функция сложности $f_L(n)$ определяется следующим образом (см. [4]):

$$f_L(n) = \max_{\substack{|\varphi| \le n \\ \varphi \notin L}} \min_{\substack{\mathcal{F} \models L \\ \mathcal{F} \not\models \varphi}} |\mathcal{F}|,$$

где $|\mathcal{F}|$ – число миров шкалы $\mathcal{F}$.

Функция сложности М.В. Захарьящева – это, в некотором роде, еще одна мера сложности проблемы разрешения логики L. Имеется некоторая связь между функцией сложности и сложностью вычислений в смысле оценки затрат памяти и времени. Так, в известных случаях, когда логика L обладает PSPACE-полной проблемой разрешения, $f_L(n)$ тоже оказывается довольно «сложной», например, экспоненциальной в смысле оценки по порядку.

Используя формулы [9] и приведенную выше конструкцию, несложно показать, что справедлива

Теорема 8. *Пусть* $L \in$ [**Int, KC**]. *Тогда функция* $f_{L(2)}(n)$ *не может быть ограничена сверху никаким полиномом от* n.

ЛИТЕРАТУРА

1. *Попов В.М.* Погружение интуиционистского пропозиционального исчисления в его позитивный фрагмент // Логические исследования. Вып.8. М.: Наука, 2003. С. 150–154.
2. *Рыбаков М.Н., Чагров А.В.* Константные формулы в модальных логиках: проблема разрешения // Логические исследования. Вып.9. М.: Наука, 2003. С. 202–220.
3. *Чагров А.В.* О сложности пропозициональных логик // Сложностные проблемы математической логики. Калинин, 1985. С. 80–90.
4. *Chagrov A., Zakharyaschev M.* Modal Logic. Oxford University Press, 1997.
5. *Garey M.R., Johnson D.S.* Computers and Intractability: A Guide to the Theory of NP-completeness. San Francisco, 1979. (Русский перевод: *Гэри М., Джонсон Д.* Вычислительные машины и труднорешаемые задачи. М.: Мир, 1982).

6. *Halpern J.Y.* The Effect of Bounding the Number of Primitive Propositions and the Depth of Nesting on the Complexity of Modal Logic // Artificial Intelligence. Vol. 75. 1995. P. 361–372.
7. *Nishimura I.* On formulas of the one variable in intuitionistic propositional calculus // The Journal of Symbolic Logic. Vol. 25. N. 1. 1960. P. 327–331.
8. *Spaan E.* Complexity of Modal Logics // PhD thesis. Department of Mathematics and Computer Science, University of Amsterdam, 1993.
9. *Statman R.* Intuitionistic propositional logic is polynomial-space complete // Theoret. Comput. Sci. Vol. 9. N. 1. 1979. P. 67–72.
10. *Stockmeyer L.* Classifying the Computational complexity of Problems // The Journal of Symbolic Logic. Vol. 52. N.1. 1987. P. 1–43. (Русский перевод: *Стокмейер Л.* Классификация вычислительной сложности проблем // Кибернетический сборник, вып. 26. М.: Мир, 1989. С. 20–83.)

Е.Д.Смирнова

К ЭКСПЛИКАЦИИ СЕМАНТИЧЕСКОГО ПОНЯТИЯ ИСТИННОСТИ*

Abstract. *The correlation of the semantic notion of truth with different philosophical conceptions is considered (especially with the coherent and correspondent one). The role of Tarski.s scheme is displayed as well as the possibility and the ways of its explication.*

Центральным понятием семантики является понятие истинности. Известная схема Тарского[1] является экспликацией классического понятия истинности как оно представлено в рамках корреспондентской концепции. Высказывание **X** истинно е.т.е. имеет место определенное положение для *p*. Таким образом, положение дел *p* «верифицирует» высказывание **X** и детерминирует его смысл, фиксируя, какое положение дел утверждается рассматриваемым предложением. С другой стороны, если мы знаем содержание предложения, мы можем указать то положение дел, которое должно иметь место.

Однако сразу намечается ряд трудностей и ограничений. Во-первых, что имеется в виду под «действительностью» – особенно в случае теоретических утверждений, утверждений об идеальных объектах и т.д. Иными словами, возникает вопрос трактовки предложения *p*, устанавливающего условие истинности высказывания. Далее, этот подход предполагает возможность истинностной оценки высказываний, рассматриваемых в изоляции, вне контекста.

Наконец, возникает вопрос эффективности – наличия в принципе процедуры, позволяющей устанавливать истинность (ложность) рассматриваемого предложения.

Однако учет контекста, а также познавательных возможностей субъекта, условий установления истинностных оценок высказываний предполагает обращение к определенным аспектам когерентной теории истинности.

Возможность истинностной оценки таких известных утвержде-

---

* Работа выполнена при поддержке РГНФ, грант № 03-03-00071а.

[1] «**X** истинно ≡ *p*», где вместо «**X**» подставляется имя высказывания, а вместо «*p*» его перевод в метаязык.

ний, как «Все дети Джона спят» или «Нынешний король Франции лыс», предполагают некоторые условия – «пресуппозиции». В данном случае – существование рассматриваемых объектов. В общем случае: если условие *B* не выполняется (*B* – пресуппозиция высказывания *A*), то высказывание *A* вообще не получает истинностной оценки (истинностный провал).

Возможность истинностной оценки высказываний, да и вообще их осмысленность во многом диктуются условиями, определяемыми когерентной концепцией истинности. Так, идеальные высказывания в смысле Гильберта вообще не являются осмысленными (содержательными высказываниями математики) вне контекста теории, соответственно, не получают истинностной оценки, поскольку это высказывания о в принципе не реализуемых объектах – прежде всего объектах, предполагающих абстракцию актуальной бесконечности. «...Бесконечное нигде не реализуется. Его нет в природе, и оно недопустимо как основа нашего разумного мышления... Роль, которая остается бесконечному, – это только роль идеи, – если, согласно Канту, под идеей подразумевать понятие, образованное разумом, которое выходит за пределы всякого опыта» [1, с. 364]. Как отмечает Ст. Клини, «для формалистской позиции[2] будет затруднительно объяснить, каким образом неинтуиционистская классическая математика оказывается осмысленной, если согласиться с интуиционистами в том, что ее теоремам недостает *реального смысла*, в терминах которого они были бы истинны» (курсив мой. – *Е.С.*) [2, с. 57]. Однако, согласно Гильберту, хотя идеальные высказывания «сами по себе не имеют значения», они приобретают смысл в контексте теории. «Выставить общее требование, согласно которому отдельные формулы сами по себе допускали бы истолкование, – отнюдь неразумно; напротив, сущности теории соответствует, что при ее развитии нет необходимости, между прочим, возвращаться к наглядности или значимости» [1, с. 381]. Идеальные высказывания – высказывания о фикциях, «идеальных элементах» в терминологии Гильберта. Но такого рода высказывания не исключаются из математики. Гильберт стремится сохранить всю классическую математику в полном объеме (весь «канторовский рай»).

Возникает лишь вопрос о путях введения идеальных элементов в теорию и условиях их устранимости – у Гильберта это означает доказательство их устранимости из контекста всей теории [см.: 4, гл. VI, § 2].

Таким образом, мы приходим к недостаточности подхода кор-

---

[2] Т.е. позиции Д.Гильберта.

респондентской концепции истинности в общем случае и необходимости учитывать определенные условия, контексты теорий при установлении осмысленности и условий истинностных оценок высказываний – условий их подтверждения и опровержения.

С нашей точки зрения, определенная экспликация такого типа условий может быть достигнута на основе определенным образом построенных семантик возможных миров. Обычно концепция возможных миров используется в случае интерпретации и фиксации условий истинности модальных высказываний различного типа. В качестве верифицирующего условия p в схеме выступает не определенное положение дел в данном мире, а информация о «поведении» подоператорного высказывания A в задаваемых отношениями достижимости возможных мирах, т.е. о сохранении истинности A в различных ситуациях («мирах»).

Однако семантика возможных миров может быть использована не только для введения L-понятий и интерпретации модальных высказываний, но и для установления условий истинности обычных асерторических высказываний. Схема Тарского меняется в этом случае в том плане, что предполагается учет определенного комплекса условий, детерминируемого принимаемым аспектом когерентной концепции истинности, во-первых, и трактовкой рассматриваемых возможчых миров W, во-вторых.

Предлагается следующего типа семантика возможных миров. Прежде всего, с каждым предложением связывается не просто положение дел в мире, но множество миров $H \subseteq W$, в которых предложение истинно (область предложения), что позволяет эксплицировать определенные условия когерентности – в зависимости от задания H и W.

Пусть W – множество возможных миров, φ – функция, сопоставляющая каждой пропозициональной переменной пару множеств возможных миров $\varphi(p) = \langle \varphi_T(p), \varphi_F(p) \rangle$; содержательно $\varphi_T(p)$ – это класс миров, в которых имеет место p, $\varphi_F(p)$ – класс возможных миров, в которых p не имеет места. Можно принять или отбросить следующие условия:

(1) $\varphi_T(p) \cap \varphi_F(p) = \varnothing$
(2) $\varphi_T(p) \cup \varphi_F(p) = W$.

При рассматриваемом подходе учитываются случаи невозможности истинностных оценок высказываний – это достигается отбрасыванием условия (2).

Приписывание высказываниям областей и антиобластей реализуется независимым образом. В принципе можно рассматривать и иные отношения между $\varphi_T(p)$ и $\varphi_F(p)$.

$\varphi_T(p)$ и $\varphi_F(p)$ можно интерпретировать соответственно как класс обстоятельств, подтверждающих p, и класс обстоятельств, фальсифицирующих p. Варьируя отношения между областями и антиобластями предложений, мы тем самым варьируем условия истинности и ложности высказываний в зависимости от принимаемых во внимание обстоятельств и отношений между ними. Функция приписывания значений пропозициональным переменным введена обобщенным образом: пропозициональным переменным приписываются не истинностные значения в данном мире (т.е. объекты t и f), но классы миров, в которых высказывания истинны или ложны.

Принятие или отбрасывание условий (1) и (2) детерминирует семантики различного типа[3].

Рассмотрим язык с пропозициональными связками: &, ∨, ⊃, ¬. Приписывание значений сложным высказываниям задается следующим образом:

$$\varphi_T(A\&B) = \varphi_T(A) \cap \varphi_T(B) \qquad \varphi_F(A\&B) = \varphi_F(A) \cup \varphi_F(B)$$
$$\varphi_T(A \vee B) = \varphi_T(A) \cup \varphi_T(B) \qquad \varphi_F(A \vee B) = \varphi_F(A) \cap \varphi_F(B)$$
$$\varphi_T(A \supset B) = \varphi_F(A) \cup \varphi_T(B) \qquad \varphi_F(A \supset B) = \varphi_F(A) \cap \varphi_T(B)$$
$$\varphi_T(\neg A) = \varphi_F(A) \qquad \varphi_F(\neg A) = \varphi_T(A)$$

Введем понятия истинности и ложности в данном мире при приписывании φ:

I. $w \overset{\varphi}{\models} A \Leftrightarrow w \in \varphi_T(A)$
II. $A \overset{\varphi}{\not\models} w \Leftrightarrow w \in \varphi_F(A)$

При данном подходе в силу учета условий подтверждения и условий опровержения высказываний мы имеем четыре понятия истинности: (1) *A сильно истинно* в w при φ если и только если A истинно ($w \overset{\varphi}{\models} A$) и не ложно ($A \overset{\varphi}{\not\models} w$); (2) *A истинно* ($w \overset{\varphi}{\models} A$); (3) *A не ложно* ($A \overset{\varphi}{\not\models} w$); (4) *A слабо истинно* если и только если A истинно или A не ложно. Очевидно, что если имеет место (1), то имеют место (2) и (3); если имеет место (2) или (3), то имеет место (4).

Условия адекватности принимаемых понятий истинности в целом отвечают схеме Тарского, только в качестве «действитель-

---

[3] При принятии (1) и (2) мы имеем стандартную семантику; при принятии (1) и отбрасывании (2) – семантику с истинностно-значными провалами; при принятии (2) и отбрасывании (1) – семантику с пресыщенными оценками; при отбрасывании (1) и (2) – аппроксимационную (релевантную) семантику [см.: 4, гл. VI, § 2].

ности» выступают не определенные положения дел в мире (снег бел), а определенные совокупности обстоятельств («миры»). В качестве таковых могут приниматься состояния знания, установки субъекта, принимаемые пресуппозиции и т.д.

Ложь не рассматривается, как в классике, просто как отрицание истинности, но детерминируется условиями – $\varphi_F(A)$. Соответственно изменяется трактовка принципа исключенного третьего – формулируемого в метаязыке – с учетом трактовки отрицания и наличия индетерминированных высказываний.

Семантика не детерминирует логическую систему, если не определено понятие логического следования (или общезначимости). В классическом случае из множества формул Г логически следует Δ тогда и только тогда, когда в каждой модельной структуре при каждом приписывании и в каждом возможном мире, если каждая формула Г истинна, то истинна по крайней мере одна из формул Δ. Но у нас имеются четыре понятия истинности: сильная истинность, простая истинность, неложность и слабая истинность.

Соответственно можно ввести не одно, а целый класс отношений логического следования [4, гл. V, § 2]. Именно эти отношения логического следования в сочетании с принятием (или непринятием) условий (1) и (2) детерминируют различные логики [4, гл. V, § 2, 3]. Действенность логических законов (типа закона исключенного третьего, правила modus ponens, правила дедукции) зависит от этих параметров.

ЛИТЕРАТУРА

1. *Гильберт Д.* О бесконечном. Обоснования математики // Основания геометрии. М.; Л., 1948. Добавления VIII и IX. С. 338–365.
2. *Клини Ст.* Введение в метаматематику. М.: Иностранная литература, 1957.
3. *Смирнова Е.Д.* Семантика с истинностными провалами, пресыщенными оценками и понятие логического следования // Интенсиональные логики и логическая структура теории. Тезисы докладов IV советско-финского коллоквиума по логике. Телави, 1985.
4. *Смирнова Е.Д.* Логика и философия. М.: РОССПЭН, 1996.

В.В.Суворов

СИНТЕЗ ЛОГИЧЕСКИХ АКСИОМ В ПРОСТРАНСТВЕ ГИПЕРКУБОВЫХ СТРУКТУР

Abstract. *We consider a method for logical analysis based on geometric interpretation of propositional formulas. A logical formula is represented as a unit hypercube in an orthogonal basis of dimension equal to the locality of the formula. It is shown that the analysis of cube intersections in accordance with simple visual criteria allows one to formulate logical axioms. The possibility to construct programming tools for estimating the truth of formulas according to visual perceptions is discussed.*

Введение

Одним из главных направлений повышения эффективности компьютерных технологий для решения задач в проблемных постановках является визуализация информации и применение приемов остенсивного выбора и преобразования объектов, путем непосредственного указания на них, например, с помощью "курсора мыши". Зрительное восприятие высокоинформативных объектов сопровождается интеграцией большого количества атрибутов в целостный образ, оцениваемый по интегральным критериям естественного интеллекта. Такие оценки оказываются эффективными, в частности, там, где теоретические расчеты затруднены ввиду большой сложности или дефицита информации. Прямой, не опосредствованный логикой доступ к информации, актуальное нахождение в едином поле зрения многих компонентов, определяющих решение, приводят к эффективному синтезу решения в форме "узрения" результата. Примерами элементарных действий такого рода являются: визуальное различение скрещивающихся и пересекающихся прямых, или, что имеет прямое отношение к решаемой задаче, фиксация факта прохождения секущей плоскости через помеченные вершины пространственной решетки. Соответствующие приемы зрительного мышления, реализованные в вычислительной среде, приобретают значение интеллектуальных инструментов. Построение подобных инструментов может идти по двум направлениям: создание структур, аналогичных нейросетевым, со специальной методологией "обучения", и программная эмуляция методов пространственного анализа.

Настоящая работа посвящена реализации в вычислительной среде интеллектуальных приемов зрительного мышления для ре-

шения задач математической логики. Рассматривается геометрическая интерпретация пропозициональных формул. Показывается, что построение тождественно истинных формул для пропозициональных форм фиксированной структуры, а также оценка истинности произвольных формул может быть выполнена в результате актов зрительной оценки с опорой на такие базовые свойства зрения, как: а) прямой доступ к высокоинформативным объектам, б) единовременное представление в поле зрения совокупности сложных компонентов, из которых должно следовать решение; в) непосредственное приложение к сложным информационным объектам интегральных, также интуитивных критериев содержательной оценки.

Описание подхода

Фундаментальный подход к установлению взаимосвязи между алгебраическими и геометрическими способами представления математических объектов изложен в [1]. Исследованию свойств гиперкуба в качестве пространства представления для математических объектов различной природы, также для формул математической логики посвящены работы [2, 3, 4 и др.], известны другие подходы к геометризации логических объектов [например, 5]. Особенность излагаемого способа геометрической интерпретации состоит в следующем:

- логическая формула рассматривается в двух относительно независимых аспектах: с точки зрения структуры формулы (скобочной и операторной) и с точки зрения взаимозависимости входящих в нее аргументов; каждый аспект специфически отражается на распределении истинностных значений результирующей формулы;
- геометрический образ формируется не непосредственно для конкретной формулы, но получается в результате выполнения сечения с выделением подпространства из пространства большей размерности; исходное пространство строится для пропозициональной формы, имеющей ту же операторную и скобочную структуру, что и анализируемая формула, но все аргументы которой являются независимыми переменными;
- исследование направлено на создание продуктивного метода и практического инструмента, приложимого как для работы с отдельными формулами, так и с системами аксиом;
- решается задача реализации приемов визуального мышления, характеризующихся высокой степенью интегрированности, в вычислительной среде в форме интеллектуальных орудий.

Геометрическая интерпретация формул математической логики основывается на введении пространственных координат для аргументов формулы. На рис.1 показана геометрическая интерпретация для 16 функций, соответствующих различным распределениям значений функций от двух логических аргументов. В центре диаграмм обозначение функции, в частности, «|» – штрих Шеффера, «↓» – стрелка Пирса. Индекс в f_n соответствует естественной нумерации – равен увеличенному на единицу значению четырехразрядного двоичного числа, образованного значениями функции от комбинаций аргументов, расположенных в возрастающем порядке. Четыре точки в вершинах квадрата соответствуют значениям аргументов $x_1x_2 = \{00, 10, 01, 11\}$. Зачерненные точки означают, что при данных значениях аргументов (координат точки) значение функции равно '1', незачерненные – '0'.

Переходя от рассмотренных диаграмм к геометрической интерпретации формул, отметим, что геометрическое пространство формируется не для формул, а для пропозициональных форм, под которыми здесь понимаются определенного вида формальные объекты. Пусть имеется пропозициональная формула $F^n(x_1,\ldots,x_k)$, где n – местность формулы, k – количество независимых аргументов ($k<n$). Производится разотождествление аргументов во всех позициях формулы. Например, аксиома

$(((x_1\to 0)\to 0)\to x_1)$ [6] преобразуется в

$(((x_1\to x_2)\to x_3)\to x_4)$. В компьютерном представлении обозначения переменных опускаются и форма приобретает вид схемы – $(((*\to *)\to *)\to *)$.

Для n-местной формы Φ^n могут быть построены формулы $F_1,\ldots, F_w$, имеющие идентичную скобочную структуру, но различающиеся зависимостями входящих в них аргументов. Более точное обозначение каждой такой формулы – $F_i^{n,k}$, где n – местность формулы, k – количество независимых аргументов, i – вариант отождествления переменных. Формула наиболее общего вида $F_0^{n,n} \equiv F_0^n$ имеет n независимых аргументов – $x_1,\ldots,x_n$. В результате отождествления некоторых аргументов получаются формулы частного вида. Для каждой полученной формулы аргументы x_i и x_j в произвольно взятых i-й и j-й позициях формулы могут: а) быть независимыми переменными; б) находиться в прямой зависимости $x_i=x_j$; в) находиться в инверсной зависимости $x_i = \neg x_j$; кроме того г) каждый аргумент может отождествляться с логической константой – '1' или '0'. Каждое распределение значений аргументов есть двоичное число. Если в n-местной формуле все аргументы являются независимыми переменными, то любой двоичный n-раз-

рядный код реализуется в качестве распределения значений аргументов формулы.

При геометрической интерпретации формулы каждому распределению аргументов соответствует точка в гиперпространстве размерности n. Значения аргументов соответствуют координатам точки. Индексация координатных осей соответствует порядку расположения аргументов в формуле F^n. При введении зависимостей для аргументов в формуле не реализуются коды, нарушающие введенные зависимости. Соответственно числу введенных зависимостей уменьшается фактическая размерность пространства, в которое может быть изоморфно отображена формула. Процесс отождествления аргументов сопровождается выделением в пространстве гиперплоскостей. Например, семиместная формула, имеющая четыре независимых аргумента, может быть изоморфно отображена в 4-мерное пространство. Представление формулы в семимерном пространстве позволяет, однако, отобразить не только зависимость от аргументов, но и структуру формулы.

Геометрическое представление логических функций

Как уже отмечалось, пространство представления формируется не для формул, а для соответствующих им пропозициональных форм. Геометрический образ формулы соответствует подпространству χ^k.пространства Ξ^n. На рис.2 приведены геометрические образы некоторых формул, полученных из пропозициональной формы – ((((). Формула наиболее общего вида F0n графически совпадает с пропозициональной формой (n. Для формы (((() формула F02 изображается полной четырехточечной диаграммой.

На рис.2:

- диагональ $x_2=x_1$ означает прямую зависимость второго аргумента от первого; подстановка x2=x1 в исходную формулу дает $x_1 \to x_1$;
- диагональ $x_2=\neg x_1$ означает инверсную зависимость второго аргумента от первого; подстановка $x_2=\neg x_1$ в исходную формулу дает $(x_1 \to \neg x_1)$;
- сторона квадрата $x_2=0$ соответствует $(x_1 \to x_0)$;
- взятие точки $x_1=1$, $x_2=0$ дает $(1 \to 0)$.

Аналогичным образом строятся другие графики и соответствующие им формулы.

Геометрический способ получения тавтологий

Пространством для структуры формулы с тремя аргументами является трехмерный единичный куб. На рис.3 приведены диаграммы для формул $(x_1 \wedge x_2) \vee x_3$ и $(x_1 \wedge x_2) \rightarrow x_3$.

Для рассмотрения трехмерных диаграмм обратимся, например, к формуле $(x_1 \rightarrow (x2(x3))$. На рис.4 приведены графический образ исходной формулы и построенные различным образом сечения для тавтологий: двумерные (плоские), одномерные (линейные) и нульмерные (точки). В формулах под рисунками переменные x1, x2 и x3 переобозначены через x, y и z; кроме того, выполнены подстановки в соответствии с зависимостями аргументов:

(x((y(z)) – три независимых аргумента;

(x((y(y)) – заштрихованное сечение, прямая зависимость x3=x2;

(x(((x(y)) – заштрихованное сечение, инверсная зависимость x2=(x1;

(x((0(y)) – заштрихованное сечение, x2=0;

$(x \rightarrow (x \rightarrow x))$ – соответствует x3=x2=x1;

$(x \rightarrow (\neg x \rightarrow x))$ – соответствует $x2=\neg x1$, x3=x1;

$(0 \rightarrow (x \rightarrow \neg x))$ – соответствует x1=0, $x3=\neg x2$;

(0((0(1)) – соответствует x1=0; x2=0; x3=1.

Формирование тавтологии означает в геометрической интерпретации построение сечения, не имеющего пересечений с 0-вершинами. Основным результатом проведенного рассмотрения является демонстрация того факта, что заключение на основе визуального анализа имеет результатом построение логической тавтологии. Все приведенные выше тавтологии получены путем выбора секущих плоскостей, граней, отрезков, соединяющих вершины, либо путем выбора самих вершин по единственному критерию отсутствия в них 0-вершин. В данном примере диаграмма для функции (x((y(z)) имеет значение 0 (незачерненный кружок) в точке (1, 1, 0).

Примеры для системы аксиом

Приводимый ниже пример иллюстрирует четырех- и пятимерные геометрические объекты, которые соответствуют четырех- и пятиместным пропозициональным формам. На рис.5 базовая система ортов обозначена полужирным символом 0, штрихом помечены локальные системы для четвертого измерения, индексом 1 отмечены подбазисы для пятого измерения.

В качестве примера возьмем первые две аксиомы из импликативной аксиоматики Лукасевича[7]: CCCxyzCNxz, CCCxyzCyz, CCNxzCCyzCCxyz. Переходя от польской записи к классической и к используемым обозначениям аргументов, получаем две формулы:

$$(((x1(x2)(x3)(((x1(x3)),$$

$$(((x_1 \to x_2) \to x_3) \to (x_2 \to x_3)).$$

Аксиомы имеют одинаковую скобочную структуру. Разметку вершин выполняем для пропозициональной формы –

$$(((x_1 \to x_2) \to x_3) \to (x_4 \to x_5)),$$

компьютерное представление –

$$(((((()(()((((()),$$

С учетом отождествлений x4(x1, x5=x3 для первой формулы и x4=x2, x5=x3 – для второй получаем вершины, в которых функции имеют значение '1' и строим сечение.

На рис.5 приведены диаграммы для функций. Отмечены только запрещенные вершины (светлые кружочки), т.е. те, для которых значение формы равно ~0. В математическом представлении полученные фигуры – два по-разному расположенных трехмерных куба в одной и той же координатной сетке. На рисунке кубы трансформировались в параллелепипеды с заштрихованными верхними и нижними гранями и утолщенными линиями, соединяющими выбранные вершины. Как и ранее, введены обозначения x, y и z для переменных x_1, x_2 и x_3.

Теоретические обобщения

Не приводя доказательств, сформулируем положения, фиксирующие связь формального и геометрического представлений.

Лемма 1. Для произвольной формулы F^k от независимых аргументов $x_1,...,x_k$, полученной из пропозициональной формы Φ^n в результате отождествления некоторых из ее аргументов $x_1,...,x_n$, ($k<n$), реализуется множество распределений аргументов, соответствующее множеству $S(F^k)$ всех точек некоторого подпространства χ^k пространства Ξ^n. В другой формулировке леммы – множество точек $S(F^k)$, составляющих образ формулы F^k, не может быть расположено в пространстве произвольным образом, но с необходимостью образует подпространство χ^k.

Лемма 2. Любое сечение χ^k пространства Ξ^n со структурой гиперкуба, полученное в результате введения зависимостей между неко-

торыми пространственными координатами, получает в формальном представлении вид формулы F^k с зависимостями для аргументов, соответствующими введенным зависимостям пространственных координат.

Лемма 3. Множество всех подпространств $\{ \chi^i \mid i \in I\}$, где I – множество индексов для зависимостей пространственных координат, изоморфно множеству всех формул $\{F^i\}$, которые могут быть получены из пропозициональной формы Φ^n путем отождествления некоторых или всех аргументов.

Теорема. Множество всех тавтологий $\{T_i\}$, которые могут быть получены из пропозициональной формы Φ^n в результате всех различных вариантов отождествления аргументов, изоморфно множеству подпространств в форме сечений $\{ \chi^i \mid i \in I\}$, проходящих через точки пространства Ξ^n, в которых формула F_0^n, графически совпадающая с Φ^n, имеет значение 1.

В дальнейших исследованиях нуждается вопрос о совместном геометрическом представлении совокупностей тавтологий в качестве систем аксиом. Интерес представляет установление геометрических свойств формул, выводимых в конструктивных логиках с различной аксиоматикой. Например, при наличии инверсий (отрицаний для некоторых аргументов) соответствующее сечение может не проходить через начало координат. С введением метрики можно говорить об удаленности сечения от начала координат, в зависимости от того, как именно в системе аксиом представлено отрицание.

Для автоматического формирования тавтологий составлен алгоритм, моделирующий построение сечения по визуальным критериям. Например, при обработке пропозициональной формы для аксиомы импликативного исчисления с одной аксиомой [7]

$$(((x_1 \rightarrow x_2) \rightarrow x_3) \rightarrow ((x_3 \rightarrow x_1)((x4(x1))),$$

получен список тавтологий, из которого представляет интерес, например, тавтология

$$(((x1(x2)(x3)(((x3(x4)((x2(x4)))$$

которая, в свою очередь, может быть принята в качестве аксиомы одноаксиомного импликативного исчисления.

Заключение

Предлагаемая геометрическая интерпретация пропозициональных формул позволяет оценивать истинностные свойства пропозициональных формул по критериям, которые естественным обра-

зом присущи зрительному восприятию, т.е. без обращения к дедуктивному или модельному методам. Получение тавтологий (потенциальных аксиом) из пропозициональной формы превращается из процесса вывода или оценивания в действие выбора сечения через вершины геометрической фигуры. Выполнение сечения означает в формальном представлении отождествление некоторых переменных с другими переменными формулы в прямой или инверсной зависимости либо подстановку констант '0' или '1'.

Описываемый подход может применяться для интерактивных процедур при обучении и в исследовательской работе. Критерии визуального анализа могут быть смоделированы в вычислительной среде. Оптимальной средой для аппаратной реализации метода является дискретная многослойная микрокристаллическая среда, подобная нейросетевой, но со специальной методологией "обучения".

ЛИТЕРАТУРА

1. *Ольшанский А.Ю.* Геометрия определяющих соотношений в группах. М.: Наука, 1989.
2. *Deza M., Laurent M.* Isometric hypercube embedding of generalized bipartite metrics // Discrete Applied Mathematics, 56, 1995, 215–230.
3. *Deza M., Grishukin V.* Hypermetric two-distance spaces // J.Combin. Inform. System Sci. 25 (2000) 89–132.
4. *Cox J.L.* Digital Morse Theory With Suggested Applications. City University of New York Department of Computer Science CUNY Graduate Center URL: http://www.casi.net/D.DMT/D.Overview/AcademicPressPaper14-03/index.html
5. *Bryant R.E.* Symbolic Boolean manipulation with ordered binary-decision diagrams // ACM Computing Surveys. V.24, 3, 1992.
6. *Новиков П.С.* Конструктивная математическая логика с точки зрения классической. М.: Наука, 1977.
7. *Домбровский Б.Т.* Львовско-варшавская философская школа. URL: http://www.philosophy.ru/library/dombrovski.
8. Философия и логика Львовско-Варшавской Школы. М.: РОССПЭН, 1999.

РИСУНКИ К СТАТЬЕ

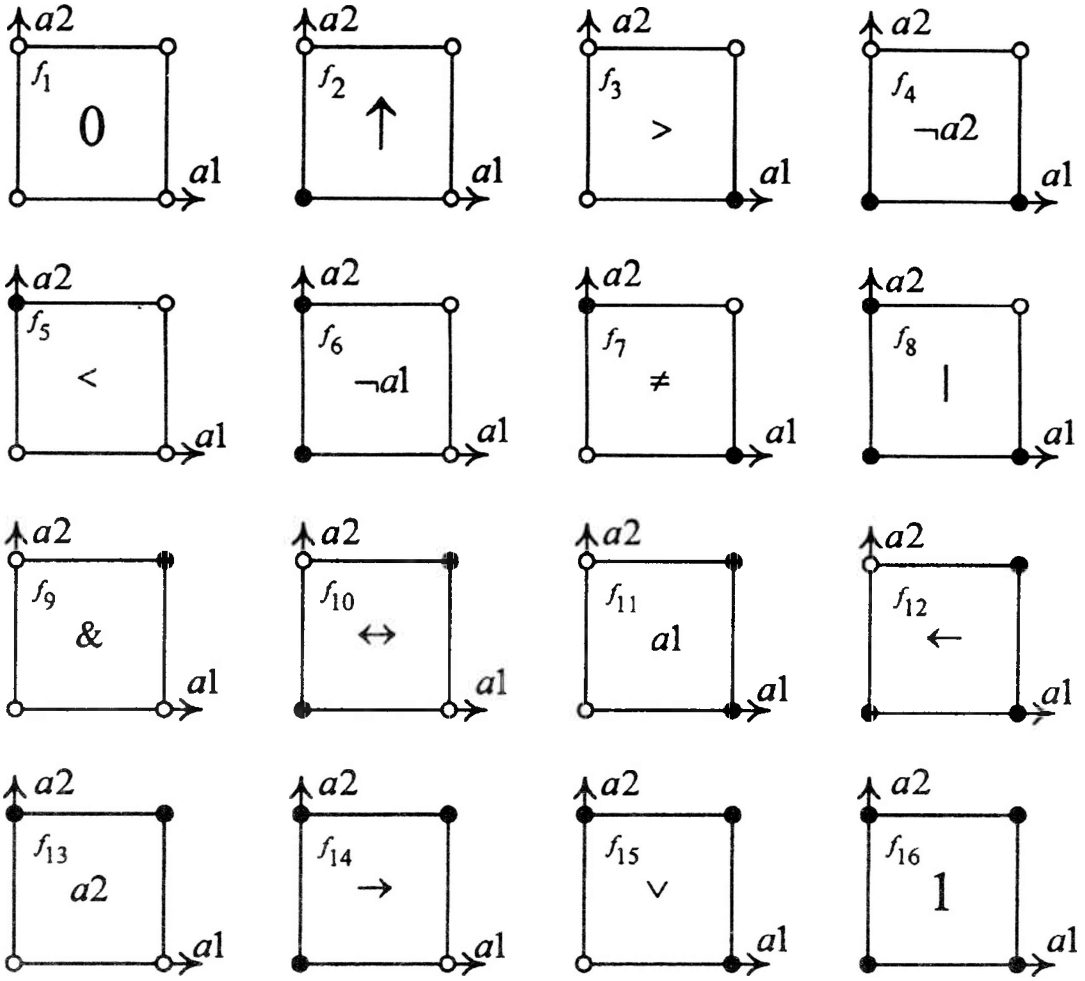


Рис.1. Изображение логических функций на координатной плоскости

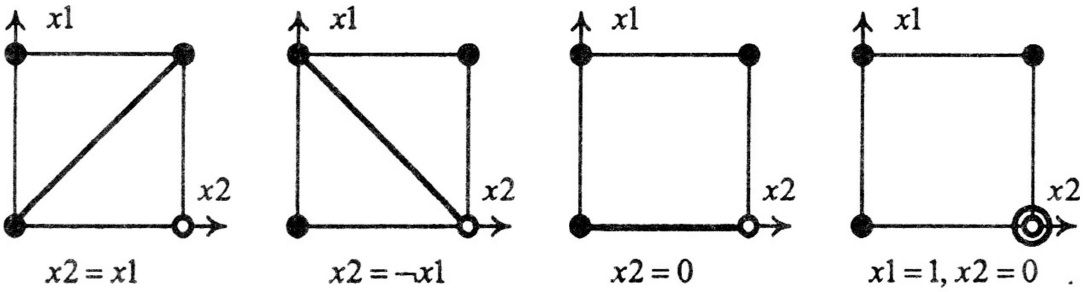


Рис.2. Графики логических формул

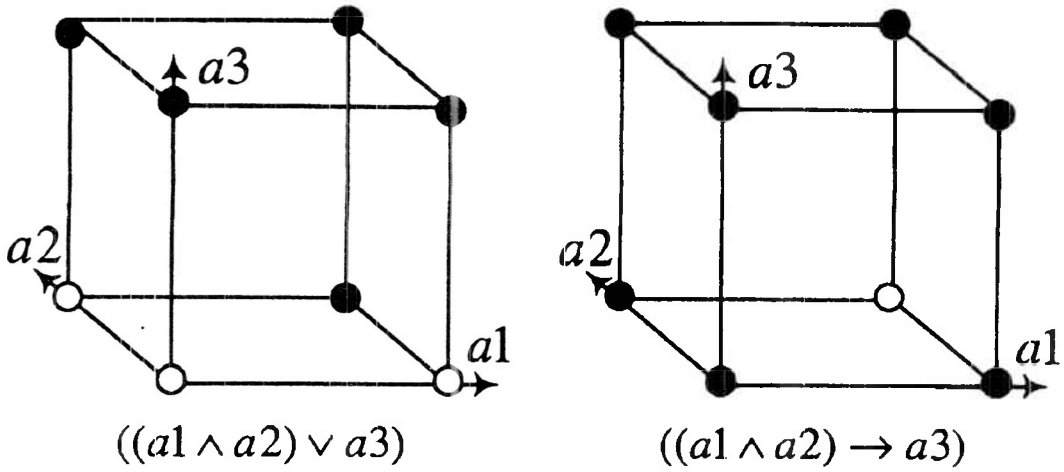


Рис.3. Трехкоординатные логические формулы

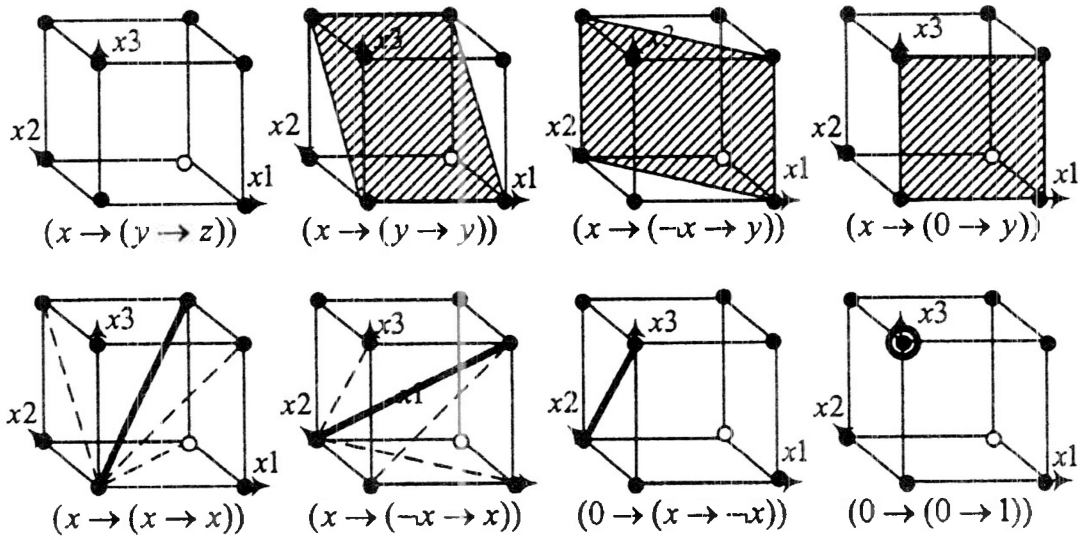


Рис.4. Геометрическое построение логических тавтологий

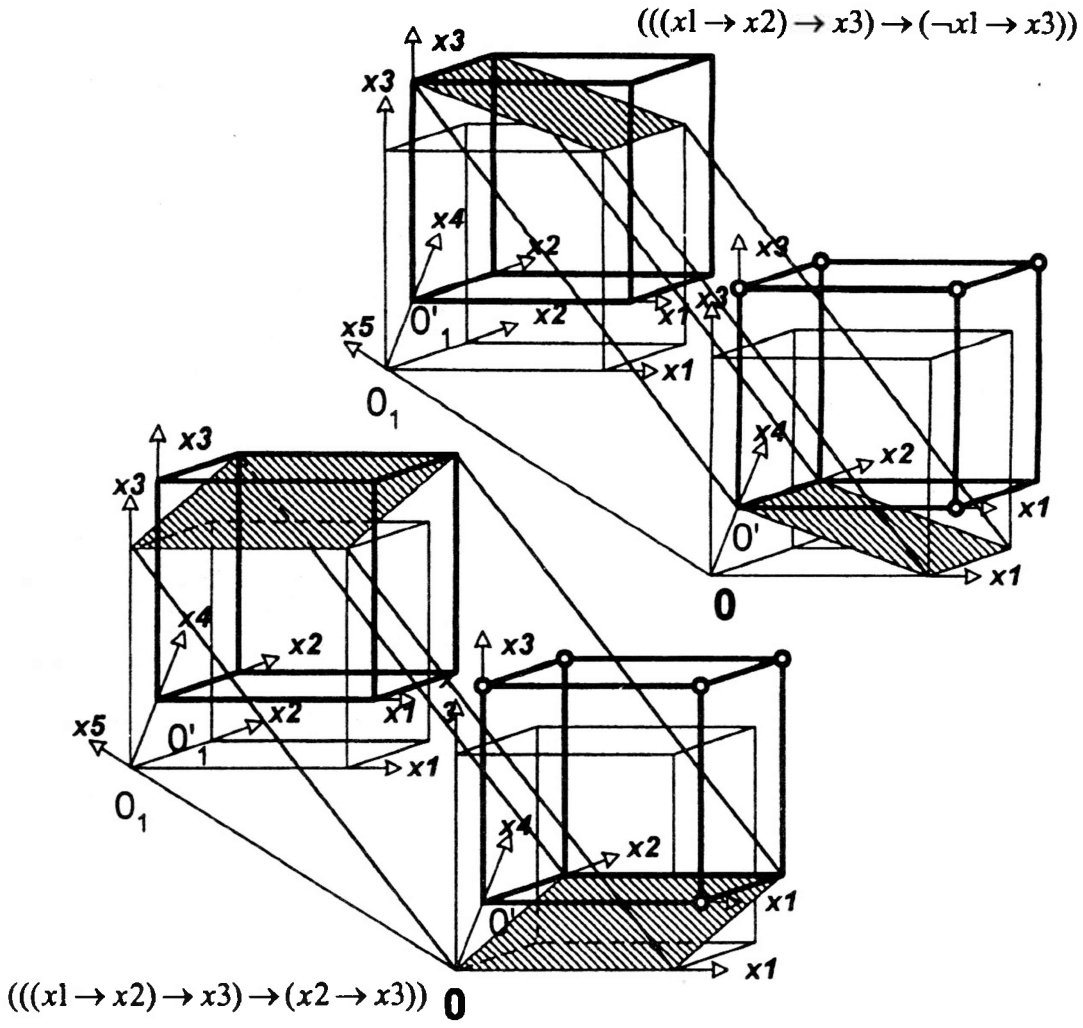


Рис.5. Диаграммы для аксиом

В.Х.Хаханян

ТЕОРИЯ МНОЖЕСТВ С ИНТУИЦИОНИСТСКОЙ ЛОГИКОЙ: БАЗИСНАЯ СИСТЕМА

Abstract. *We give in this short article the basic formal system of set theory, which underlining logic is intuitionistic logic.*

Открытие Г. Кантора оформилось в отдельную ветвь математической науки во второй половине XIX века. К концу XIX и началу XX века теория множеств стала широко применяться сначала в анализе и геометрии, а затем и в отдельных разделах математики. Однако едва завершилось оформление учения о множествах Кантора, как оно натолкнулось на ряд противоречий (Бурали-Форти – 1895 г., Рассел – 1902 г.). При этом сама логика оказалась в опасном положении и проблема обоснования логики и математики вновь стала поистине сверхактуальной. Многие математики резко изменили свою позицию по отношению к теории множеств (А. Пуанкаре). Наступил третий кризис в основаниях математики. Были предложены различные возможные варианты выхода из этого кризиса. Одним их таких выходов стало создание аксиоматической системы теории множеств, устраняющей неограниченную схему свертки (аксиоматическая система теории множеств сначала Цермело, а затем – Цермело–Френкеля). Стандартной моделью такой аксиоматической системы теории множеств может служить кумулятивная иерархия.

С другой стороны, Л.Я. Брауэр предложил положить в основу математической деятельности интуитивную ясность математических конструкций и определений. А. Гейтинг дал соединенное начало этих двух направлений (формализма и интуитивной ясности) в 1930 году, что в итоге привело к созданию аксиоматической системы теории множеств, основанной на интуиционистской логике. Однако желаемого выхода так и не было найдено и ни одна из казавшихся наиболее оптимистичными программ (например, программа Д. Гильберта) в целом не привела к успеху (2-я теорема Гёделя и другие причины). В итоге ситуация так и не была выправлена. В книге А.Френкеля и И.Бар-Хиллела, у крупнейших специалистов в области оснований математики мы читаем (стр. 416): “Во взглядах на то, каким образом можно было бы достигнуть удовлетворительного обоснования, все еще имеется

большое расхождение и громадное количество возникающих в этой связи проблем еще далеко не решено. И все же подавляющее большинство математиков отказывается считать, что идеи Кантора были всего лишь болезненным бредом. Несмотря на то, что основания теории множеств все еще довольно шатки, эти математики продолжают с успехом применять понятия, методы и результаты теории множеств в большей части разделов анализа и геометрии, и даже отчасти в арифметике и алгебре, твердо веря, что работы по обоснованию теории множеств приведут в конце концов к реабилитации теории множеств в полном (или по крайней мере *почти* полном) ее классическом объеме. Эта позиция отнюдь не исключает готовности интерпретировать теорию множеств совсем не так, как это обычно делается, что соответствует, очевидно, существуюшей потребности в пересмотре интерпретации логики и математики вообще". Первая часть этого вывода ("...к реабилитации теории множеств в полном (или по крайней мере *почти* полном) ее классическом объеме...") кажется мне излишне оптимистичной, так же как и возможность полного пересмотра интерпретации логики и математики, так как никаких удачных идей такого пересмотра (и направлений) пока даже не просматривается. Тем не менее уже нашло себе место направление, заключающееся в более или менее локальной формализации той или иной части (раздела) математики и изучении с определенной метаматематической и философской точки зрения этой части (раздела), причем последняя (метаматематика) является более или менее делом привычки и вкуса того или иного исследователя. Взаимоотношение различных метаматематических разделов также может изучаться с формальной точки зрения (т.е. возникает метаматематика формализованных систем метаматематик). Именно такая ситуация имеет сейчас место в большинстве исследований по основаниям математики и именно с этой точки зрения и стояла задача создания такой системы теории множеств на базе интуиционистской логики, которая удовлетворяла бы следующим критериям, т.е. была бы:

а) достаточно мощной, не слабее классической теории множеств Цермело–Френкеля;

б) достаточно эффективной, например, обладающей свойством полной экзистенциальности, и в которой были бы допустимы разные эффективные правила, например Черча, Маркова и другие;

в) эта система теории множеств должна была бы быть приемлемой с различных точек зрения, т.е. допускать расширения до различных, может быть, несовместных друг с другом, вариантов теории множеств (классическое расширение до теории **ZF**, конст-

руктивное в стиле Майхилла до конструктивной теории множеств **CST**, интуиционистское до теорий множеств с различными оттенками понимания эффективности и т.д.).

Последний пункт говорит о базисности такой аксиоматической системы теории множеств, основанной на интуиционистской логике предикатов. Целью исследований в создании такой базисной системы теории множеств, основанной на интуиционистской логике, может служить аксиоматическая система $\mathbf{ZFI_R}$ + **DCS**, как обладающая всеми отмеченными свойствами (см., например, В.Х.Хаханян «Интуиционистская теория множеств: модели и метаматематика»). Это – основной философский вывод моих исследований в области теории множеств с интуиционистской логикой. Отметим также, что наиболее трудной и нерешённой проблемой в исследованиях по аксиоматическим системам теории множеств остается следующая (после, естественно, проблемы построения модели для аксиоматической системы теории множеств **NF** Куайна): возможна ли интерпретация системы $\mathbf{ZFI_R}$ + **DCS** (или системы $\mathbf{ZFI_C}$ или классической теории множеств **ZF**) в системе $\mathbf{ZFI_R}$? Дадим сейчас краткий набросок возможного решения этой проблемы. Система $\mathbf{ZFI_C}$ является системой теории множеств, равнонепротиворечивой с системами $\mathbf{ZFI_R}$ + **DCS** и **ZF** (так как вторая система легко интерпретируется в третьей, а третья в первой (результат Фридмана)). Поэтому будем строить интерпретацию первой системы теории множеств $\mathbf{ZFI_C}$ в $\mathbf{ZFI_R}$. Предположим, что в последней теории множеств нам удалось построить (т.е. выразить) систему функций на множествах (это самое тонкое место – вопрос о существовании системы функций со свойствами, описанными ниже), может быть счетную, которая обладает следующими свойствами:

а) система функций допускает кодировку множествами и существует универсальная функция для данной системы функций;

б) система функций содержит некоторые стандартные функции на множествах (например, тождественную функцию, функции-константы, гёделевы конструктивные функции и т.д.);

в) при ограничении аргументов натуральными числами или ординалами получаются системы функций с теми же свойствами на натуральных числах (частично-рекурсивные) или на ординалах;

г) для данной системы функций имеется некоторый аналог **s-m-n**-теоремы для частично-рекурсивных функций на натуральных числах.

Системы функций такого рода выразимы (т.е. теорию таких систем функций можно развить) в классической **ZF** (ряд работ на эту тему опубликовали Йенсен и Карп). Однако в интуиционист-

ской $\mathbf{ZFI_R}$ будут ли выразимы системы функций на множествах со свойствами а) – г)?

Главная тонкость в том, что при построении такой системы функций и доказательстве свойств а) – г) не должен использоваться полный закон исключенного третьего. Такая система функций позволила бы интерпретировать все аксиомы и схемы аксиом системы теории множеств $\mathbf{ZFI_C}$ как систему «реализующих» функций при оценках (например так, как это проводилось в книге автора, упомянутой выше, для определения реализуемости формулы при оценках для системы теории множеств **ZFI2**). В этом случае схема аксиом собирания могла бы быть «реализуема» следующим образом с использованием внешним образом только схемы аксиом подстановки, т.е. стала бы возможной интерпретация теории $\mathbf{ZFI_C}$ в теории $\mathbf{ZFI_R}$:

R(**e**(код функции), **g**: $\omega \to V$ (достаточно только одной оценнки), $\forall x \in a \exists y \varphi(x,y) \to \exists B \forall x \in a \exists y \in B \varphi(x,y)$ – схема аксиом собирания). Такую конструкцию нужно получить. Предположим, что **R(k,g,** $\forall x \in a \exists y \varphi(x,y)$**)**, то есть функция **к** «реализует» посылку схемы собирания. Это означает, что для всякого множества **x** из $a \in V$, $!k(x) = \langle l,y \rangle$ так, что $R(l,g^n_y, \varphi(x,))$ и тогда нужное **B** и «реализующая» заключение схемы собирания функция могут быть получены с помощью схемы подстановки из функции **к** («реализация» посылки), что и доказывало бы «реализуемость» схемы собирания и, следовательно, (с учетом реализуемости всех остальных аксиом) интерпретируемость системы $\mathbf{ZFI_C}$ в системе $\mathbf{ZFI_R}$ и тем самым доказывало бы непротиворечивость первой системы теории множеств относительно второй.

А.В.Чагров

АЛГОРИТМИЧЕСКАЯ ПРОБЛЕМА ФИНИТАРНОГО СЕМАНТИЧЕСКОГО СЛЕДОВАНИЯ ДЛЯ БАЗИСНОЙ И ФОРМАЛЬНОЙ ЛОГИК А.ВИССЕРА*

Abstract. *Formula B is a finitary semantical consequence of formula A on class of semantical structures Ω (for example, Kripke frames or generalized frames of some logic L) if B is valid in all finite structures from Ω validating A. The undecidability of various versions of the notion of finitary semantical consequence relation for classes of Kripke frames and generalized frames of the Visser's basic logic and the Visser's formal logic is proposed.*

В этой статье продолжаются исследования базисной и формальной пропозициональных логик А.Виссера [10], **BPL** и **FPL** соответственно. В частности, мы отсылаем читателя к статье автора [3], где обсуждаются определения этих логик и возможные определения их расширений. Однако для удобства чтения вкратце напомним, что базисная логика и формальная логика имеют тот же язык, что и интуиционистская пропозициональная логика, т.е. их формулы строятся стандартным образом из пропозициональных переменных и константы $\bot$ («ложь») с помощью связок $\&$ (конъюнкция), $\vee$ (дизъюнкция), $\rightarrow$ (импликация), и они могут быть определены семантически подобно интуиционистской логике, как описывается ниже.

Напомним, что интуиционистская логика может быть задана как множество формул, истинных в конечных шкалах Крипке, являющихся частичными порядками (т.е. отношение достижимости в них является транзитивным, рефлексивным и антисимметричным). Формулы в шкале оцениваются с помощью оценок (означиваний), сопоставляющих каждой пропозициональной переменной множество элементов шкалы (миров, иными словами), являющееся наследственным, т. е. если в такое множество попал некоторый мир, то и все достижимые из него также попадают. Значение формулы в мире (отношение «в мире α истинна формула φ») при данной оценке задается индукцией по построению формулы: константа $\bot$ не является истинной ни в одном мире; в мире

* В ходе исследований автор пользовался поддержкой РФФИ (гранты 03-06-80115 и 02-01-22003) и фонда CNRS (Франция).

α истинна пропозициональная переменная p, если оценкой переменной p сопоставляется множество, содержащее мир α; конъюнкция истинна в мире α, если в этом мире истинны оба конъюнктивных члена; дизъюнкция истинна в мире α, если в этом мире истинен хотя бы один из дизъюнктивных членов; импликация истинна в мире α, если для всякого мира β, достижимого из α, из того, что в β истинна посылка импликации, следует, что в β истинно и заключение этой импликации. (Отметим, что специфика шкалы здесь проявляется только в импликации.) Наконец, формула считается истинной в шкале, если она истинна в каждой точке этой шкалы при любой оценке.

Для семантического определения логик **BPL** и **FPL** в соответствии с результатами А.Виссера [10] достаточно внести следующие изменения. Если в определениях предыдущего абзаца в конечных шкалах вместо частичного порядка постулируем всего лишь транзитивность отношения достижимости (при этом можно постулировать и антисимметричность, это ровным счетом ничего не меняет для истинности рассматриваемых формул; собственно, как хорошо известно, и в определении истинности формул для случая интуиционистской логики требование антисимметричности можно опустить), то множество формул, истинных во всех получившихся шкалах, и будет множеством формул, выводимых в **BPL**. Если же вместо частичного порядка постулировать строгий частичный порядок, т.е. потребовать, чтобы отношение достижимости было транзитивным и иррефлексивным, то получившееся множество истинных формул есть **FPL**.

Обратим внимание, что в только что приведенных определениях речь шла о *конечных* шкалах. Хотя и **BPL** и **FPL** имеют бесконечные шкалы, в этой статье нас будут интересовать только их конечные шкалы.

Нам понадобится еще одно семантическое понятие – понятие обобщенной шкалы.

Обобщенной конечной шкалой называем конечную шкалу с некоторым фиксированным семейством наследственных множеств, которое замкнуто относительно следующей операции: если в качестве оценки выбирать сопоставление переменным множеств этого семейства, то для всякой формулы множество миров, в которых эта формула истинна, будет элементом этого семейства. Истинность в обобщенных шкалах определяется так же, как и выше, за одним исключением: оценки всегда выбираются так, что переменным сопоставляются множества миров из фиксированного для этой шкалы семейства. Если обобщенная шкала такова, что фиксированное семейство наследственных множеств состоит из

всех ее наследственных множеств, то эту шкалу будем называть шкалой Крипке. В случае шкал Крипке фиксированное семейство наследственных множеств можно не упоминать, поскольку берутся все такие множества. Легко понять, что если в приведенных выше определениях логик **BPL** и **FPL** заменить понятие конечной шкалы Крипке понятием обобщенной конечной шкалы, то получатся те же логики **BPL** и **FPL**. Для краткости далее будем называть шкалы Крипке и обобщенные шкалы, участвующие в этих двух вариантах семантических определений логик **BPL** и **FPL**, шкалами Крипке и обобщенными шкалами этих логик соответственно.

Вообще, интерес к конечным семантическим структурам (шкалам, обобщенным шкалам, моделям, алгебрам, матрицам и т.п.) в логических исследованиях совершенно оправдан с содержательной точки зрения. Помимо стандартных объяснений этого тем, что логические системы призваны, в частности, моделировать человеческие рассуждения, а человек в принципе познает бесконечное лишь как абстракцию чего-то «очень большого», к настоящему времени сложилась новая компьютерно-информационная реальность (впрочем, можно считать, что осознание наличия этой новой реальности относится к 30-м годам XX века), а каждый конкретный реальный компьютер в принципе конечен не только по принципам работы, но и по имеющейся у него памяти (чем реальный компьютер принципиально отличается от своих идеальных собратьев вроде машины Тьюринга, имеющей потенциально бесконечную память в виде достраиваемой в случае необходимости ленты с ячейками).

Уже в начале 50-х годов XX века было понято, что логика конечных семантических структур во многих случаях устроена значительно сложнее логики структур без требования конечности. Так, логика первого порядка, хотя и является алгоритмически неразрешимой по теореме Черча, все же рекурсивно перечислима (это следствие теоремы Геделя о полноте для логики первого порядка), т. е. имеется алгоритм, который строит такую последовательность формул первого порядка (бесконечную, разумеется; т. е. алгоритм работает вечно), что она состоит в точности из всех тождественно истинных формул первого порядка. Однако по теореме Трахтенброта множество формул первого порядка, истинных во всех *конечных* моделях, не является даже рекурсивно перечислимым. К настоящему времени даже сложилась своеобразная теория конечных моделей, см. [8], со своей проблематикой, во многом несхожей с проблематикой классической теории моделей, см. [7].

В случае пропозициональных логик конечные семантические структуры играют существенно более позитивную роль: подавляющее большинство этих логик, построенных по содержательным соображениям (в частности, и рассматриваемые нами **BPL** и **FPL** в соответствии с [10] и/или приведенными выше определениями), финитно аппроксимируемы, что чаще всего позволяет доказывать разрешимость этих логик. Но имеется тип алгоритмических вопросов о пропозициональных логиках, когда конечные семантические структуры теряют эту свою позитивность. Это прежде всего проблема семантического следования для конечного случая, то есть различных вариантов того, что мы далее будем называть финитарным семантическим следованием.

Говорим, формула B финитарно семантически следует из формулы A на классе семантических структур Ω, если B истинна во всех тех конечных семантических структурах из Ω, в которых истинна формула A. Впервые вопрос о разрешимости финитарного семантического следования в пропозициональном случае был поставлен явно в [4] для случая модальных формул и класса шкал Крипке. Надо думать, что известен он был и раньше, но автору данных строк он стал известен именно из [4], правда, в препринтном варианте, т.е. несколько раньше публикации [4].

Решение вопроса [4] было получено мною в 1990 году, см. [1]: оказалось, что отношение финитарного семантического следования неразрешимо не во многих интересных случаях, в частности – для модальных формул и конечных шкал, модальных формул и шкал логики **S4**, модальных формул и шкал логики **GL**, интуиционистских пропозициональных формул и интуиционистских шкал. Стоит заметить, что результаты [1] легко распространяются и на некоторые другие классы шкал, близкие к рассмотренным там; в частности, отношение финитарного семантического следования неразрешимо не во многих интересных случаях, в частности – для модальных формул и шкал логики **K4**, т.е. шкал Крипке с транзитивным отношением достижимости. Для случая модальных формул и шкал логики **GL** доказательство неразрешимости финитарного семантического следования вошло в [6], а на основе этого доказательства в [5] был решён ещё один вопрос [4]: проблема первопорядковой определимости модальных формул на классе конечных шкал алгоритмически неразрешима. Аналогичный факт можно доказать и для первопорядковой определимости интуиционистских пропозициональных формул на классе конечных интуиционистских шкал.

Базисная и формальная пропозициональные логики А.Виссера близки к модальным и интуиционистской логикам. А именно, если

воспользоваться Т-переводом, погружающим интуиционистскую логику в модальную логику **S4**, при котором оператор необходимости навешивается на атомарные подформулы и подформулы с главной связкой – импликацией, то **BPL** погружается в модальную логику **K4**, а **FPL** – в **GL**.

Тем не менее сходство **BPL** и **FPL** с интуиционистской логикой не является глубокой аналогией. В частности, если для суперинтуиционистских логик и нормальных модальных логик все виды конечных семантических структур – шкалы, модели как обобщенной шкалы, алгебры – эффективно эквивалентны, т. е. каждая из этих структур эффективно перестраивается в конечную структуру другого типа с сохранением множества истинных формул (поэтому, в частности, понятие финитно аппроксимируемой логики для этих классов логик формулируется безразлично по отношению к выбору типа семантики, а всякая финитно аппроксимируемая логика полна по Крипке), то для **BPL** и **FPL** это не так: как было показано в [9], существуют конечные обобщенные шкалы **BPL** и **FPL**, которые не эквивалентны семантически никаким шкалам Крипке. Поэтому и формулировки финитарного семантического следования для случая логик **BPL** и **FPL** различны для случая шкал Крипке и обобщенных шкал.

Сформулируем теперь основные результаты этой работы.

Теорема 1. *Проблема семантического следования формул от одной переменной для случая шкал Крипке базисной логики* **BPL** *алгоритмически неразрешима.*

Теорема 2. *Проблема семантического следования формул от одной переменной для случая обобщенных шкал базисной логики* **BPL** *алгоритмически неразрешима.*

Теорема 3. *Проблема семантического следования формул от двух переменных для случая шкал Крипке формальной логики* **FPL** *алгоритмически неразрешима.*

Теорема 4. *Проблема семантического следования формул от двух переменных для случая обобщенных шкал формальной логики* **FPL** *алгоритмически неразрешима.*

Разумеется, эти утверждения останутся справедливыми, если мы снимем ограничения на число переменных.

Доказательства теорем 1–4 довольно громоздки, поэтому мы вынуждены здесь ограничиться лишь несколькими замечаниями.

Доказательства всех четырех теорем проводятся параллельно с небольшими изменениями, т.е. по существу это почти одно и то же доказательство, причем доказательства теорем 1 и 2 совпадают практически дословно, так же как и доказательства теорем 3 и 4. Во многих деталях эти доказательства близки к доказательству неразрешимости финитарного семантического следования модальных формул на шкалах логики **GL**, опубликованному в [5] и [6]. Однако эти детали близки лишь идейно. Например, модальные аналоги теорем 3 и 4 в случае логики **GL** оказываются более сильными – в этом случае достаточно одной переменной для получения неразрешимости финитарного семантического следования. Надо сказать, что в [5] и [6] вообще не оценивалось необходимое количество переменных, в частности использовались четыре переменные. Снижение этого числа переменных до одной в случае **GL** и двух в случае **FPL** в теоремах 3 и 4, а также до одной переменной в теоремах 1 и 2 получается применением метода контекстных подстановок, использовавшимся автором в [2].

Несмотря на одновременность доказательств теорем 1 и 2, 3 и 4, сами теоремы независимы, поскольку в них рассматриваются *разные* множества пар формул A и B, находящихся в отношении финитарного семантического следования, т.е. такие формулы A и B, что находятся в одном отношении, но не находятся в другом, иными словами, не представляется возможным непосредственно вывести из теоремы 1 теорему 2, и наоборот, а также теорему 4 из теоремы 3, и наоборот.

Теперь обратимся к некоторым усилениям теорем 1–4. Хотя из этих усилений теоремы 1–4 следуют непосредственно, по изначальной формулировке решаемых проблем именно теоремы 1–4 являются основными, поэтому они и сформулированы первыми.

Небольшие модификации доказательств теорем 1–4, детали таких модификаций см. в [5], дают возможность фиксировать подходящим образом одну из двух формул, находящихся в отношении финитарного семантического следования. Так получаются следующие утверждения.

Теорема 5. *Существует такая формула A от одной переменной, что множество константных* (т.е. не содержащих переменных) *формул, являющихся финитарными семантическими следствиями формулы A на классе шкал Крипке базисной логики* **BPL**, *алгоритмически неразрешимо.*

Теорема 6. *Существует такая константная формула B, что множество формул от одной переменной, из которых формула B*

финитарно семантически следует на классе шкал Крипке базисной логики **BPL**, *алгоритмически неразрешимо.*

Теорема 7. *Существует такая формула A от одной переменной, что множество константных формул, являющихся финитарными семантическими следствиями формулы A на классе обобщенных шкал базисной логики* **BPL**, *алгоритмически неразрешимо.*

Теорема 8. *Существует такая константная формула B, что множество формул от одной переменной, из которых формула B финитарно семантически следует на классе обобщенных шкал базисной логики* **BPL**, *алгоритмически неразрешимо.*

Теорема 9. *Существует такая формула A от двух переменных, что множество формул от одной переменной, являющихся финитарными семантическими следствиями формулы A на классе шкал Крипке формальной логики* **FPL**, *алгоритмически неразрешимо.*

Теорема 10. *Существует такая формула B от одной переменной, что множество формул от двух переменных, из которых формула B финитарно семантически следует на классе шкал Крипке формальной логики* **FPL**, *алгоритмически неразрешимо.*

Теорема 11. *Существует такая формула A от двух переменных, что множество формул от одной переменной, являющихся финитарными семантическими следствиями формулы A на классе обобщенных шкал формальной логики* **FPL**, *алгоритмически неразрешимо.*

Теорема 12. *Существует такая формула B от одной переменной, что множество формул от двух переменных, из которых формула B финитарно семантически следует на классе обобщенных шкал формальной логики* **FPL**, *алгоритмически неразрешимо.*

И наконец, последнее замечание. Ввиду очевидной рекурсивной (т.е. алгоритмической) перечислимости дополнений всех упомянутых в формулировках приведенных выше теорем множеств пар формул, находящихся в том или ином отношении финитарного семантического следования (теоремы 1–4), и множеств формул (теоремы 5–12), оборот «алгоритмически неразрешимо» можно заменить на «не является рекурсивно перечислимым».

Таким образом, каждую из этих теорем можно считать аналогом упомянутой выше теоремы Трахтенброта.

ЛИТЕРАТУРА

1. *Чагров А.В.* Неразрешимость финитарного семантического следования // Десятая Всесоюзная конференция по математической логике. Алма-Ата, 1990. С. 162.
2. *Чагров А.В.* Неразрешимые свойства суперинтуиционистских логик // Математические вопросы кибернетики. Вып. 5. М., Физматлит, 1994. С. 62–108.
3. *Чагров А.В.* Формальная пропозициональная логика А. Виссера и ее расширения // Логические исследования. Вып. 10. М., Наука, 2003. С. 204–211.
4. *van Benthem J.F.A.K.* Notes on Modal Definability // Notre Dame Journal of Formal Logic. 1989. V. 30. P. 20–35.
5. *Chagrov A., Chagrova L.* Algorithmic Problems Concerning First-Order Definability of Modal Formulas on the Class of all Finite Frames // Studia Logica. 1995. V. 55. P. 421–448.
6. *Chagrov A., Zakharyaschev M.* Modal Logic. Oxford University Press, 1997.
7. *Chang C.C., Keisler H.K.* Model Theory. Elsevier Science Publishers, 1990.
8. *Ebbinghaus H.-D., Flum J.* Finite Model Theory. Springer, 1999.
9. *Suzuki Y., Wolter F., and Zakharyaschev M.* Speaking about transitive frames in propositional languages // Journal of Logic, Language, and Information. 1998. V. 7. P. 317–339.
10. *Visser A.* A propositional logic with explicit fixed points // Studia Logica. 1981.V. 40. P. 155–175.

В.И.Шалак

ЛОГИКА АБЕЛЕВЫХ ГРУПП*

Abstract. *In this paper we construct implicational logic which is complete with respect to abelian groups.*

Def1. *Язык*

1. p, q, r... ∈ Var – множество пропозициональных переменных;
2. → – логические связки;
3. (,)– скобки.

Def2. *Формулы*

1. Всякая пропозициональная переменная является формулой;
2. Если A, B - формулы, то (A→B) также является формулой;
3. Ничто другое формулой не является.

Def3. *Абелева группа* **Ab**=<M,+,-,0>, где 0∈M, + – бинарная, а - – унарная операции, для которых выполняются следующие постулаты:

4. x+(y+z)=(x+y)+z
5. x+0=x
6. x+(-x)=0
7. x+y=y+x

Определим интерпретацию формул в абелевых группах.

Пусть **Ab** – произвольная абелева группа, а $Val=M^{Var}$ – множество всех приписываний значений пропозициональным переменным.

Распространим Val на множество всех формул.

Def4. v(A→B) = -v(A)+v(B) для v∈Val

Def5. Формула A *общезначима* (|=A) е.т.е. для всех абелевых групп **Ab** и для всех v∈Val имеет место v(A)=0.

Def6. ¬A = A→(A→A)

Аксиомы абелевой логики

A1. (A→B)→((B→C)→(A→C))
A2. (A→(B→C))→(B→(A→C))

---

* Работа поддержана РФФИ, грант № 04-03-002660.

A3. $(B\to B)\to(A\to A)$
A4. $\neg\neg A\to A$
A5. $(B\to A)\to\neg(A\to B)$
A6. $\neg(A\to B)\to(B\to A)$

R1. $A, A\to B \Rightarrow B$

Определения доказательства из множества аксиом и теоремы – стандартные. Если A – теорема, будем обозначать это посредством |-A.

Теорема непротиворечивости. Все теоремы построенной логики общезначимы.

Достаточно проверить, что для произвольной абелевой группы **Ab** и произвольного приписывания v все аксиомы принимают значение 0, а единственное правило вывода сохраняет значение 0 от посылок к заключению.

Примем обозначения v(A) = a, v(B) = b, v(C) = c.

A0. $v(\neg A) = v(A\to(A\to A)) = -v(A)-v(A)+v(A) = -v(A)$

A1. $v((A\to B)\to((B\to C)\to(A\to C))) = -v(A\to B)-v(B\to C)+v(A\to C) = -(-a+b)-(-b+c)-a+c = a-b+b-c-a+c = 0$

A2. $v((A\to(B\to C))\to(B\to(A\to C))) = -v(A\to(B\to C))+v(B\to(A\to C)) = -(-a+-b+c)-b-a+c = a+b-c-b-a+c = 0$

A3. $v((B\to B)\to(A\to A) = -v(B\to B)+v(A\to A) = -(-v(B)+v(B))+-v(A)+v(A) = -(-b+b)-a+a = b+-b-a+a = 0$

A4. $v(\neg\neg A\to A) = -v(\neg\neg A)+v(A) = --v(\neg A)+a = ---a+a = -a+a = 0$

A5. $v((B\to A)\to\neg(A\to B)) = -v(B\to A)+v(\neg(A\to B)) = --b-a-v(A\to B) = b-a--a-b = b-a+a-b = 0$

A6. $v(\neg(A\to B)\to(B\to A)) = -v(\neg(A\to B))+v(B\to A) = --v(A\to B)-b+a = v(A\to B)-b+a = -a+b-b+a = 0$

R1.

1. v(A)=0	- условие
2. v(A→B)=0	- условие
3. -a+b=0	- из 2 по Def4.
4. a-a+b=a+0	- из 3.
5. 0+b=a	- из 4 по Def3.
6. v(B)=0	- из 5 по 1 и Def3.

Теорема доказана.

Лемма 1. Следующие правила вывода производны, а формулы являются теоремами абелевой логики:

R2. $\vdash A\to B, \vdash B\to C \Rightarrow \vdash A\to C$
R3. $\vdash A\to(B\to C) \Rightarrow \vdash B\to(A\to C)$
R4. $\vdash A\to B \Rightarrow \vdash \neg B\to\neg A$

T1. $\vdash (B\to C)\to((A\to B)\to(A\to C))$
T2. $\vdash A\to\neg\neg A$
T3. $\vdash A\to A$
T4. $\vdash (A\to B)\to(\neg B\to\neg A)$

Доказательство R2 и R3 тривиально на основании аксиом A1 и A2.

T1.

1. $(A\to B)\to((B\to C)\to(A\to C))$	- аксиома A1.
2. $(B\to C)\to((A\to B)\to(A\to C))$	- из 1 по R3.

T2.

1. $(A\to A)\to\neg(A\to A)$	- аксиома A5.
2. $\neg(A\to A)\to(A\to A)$	- аксиома A6.
3. $(A\to A)\to(A\to A)$	- из 1, 2 по R2.
4. $A\to((A\to A)\to A)$	- из 3 по R3.
5. $((A\to A)\to A)\to\neg(A\to(A\to A)$	- аксиома A5.
6. $A\to\neg(A\to(A\to A)$	- из 4, 5 по R2.
7. $A\to\neg\neg A$	- из 6 по Def6.

T3.

1. $A\to\neg\neg A$	- T2.
2. $\neg\neg A\to A$	- аксиома A4.
3. $A\to A$	- из 1, 2 по R2.

T4.

1. $(B\to B)\to(A\to A)$	- аксиома A3.
2. $((B\to B)\to(A\to A))\to((B\to(B\to B))\to(B\to(A\to A)))$	- T1.
3. $(B\to(B\to B))\to(B\to(A\to A))$	- из 1, 2 по R1.
4. $(B\to(A\to A))\to((A\to B)\to(A\to(A\to A)))$	- T1.
5. $(B\to(B\to B))\to((A\to B)\to(A\to(A\to A)))$	- из 3, 4 по R2.
6. $(A\to B)\to((B\to(B\to B))\to(A\to(A\to A)))$	- из 5 по R3.
7. $(A\to B)\to(\neg B\to\neg A)$	- из 6 по Def6.

Доказательство R4 тривиально на основании T4.

Лемма доказана.

Лемма 2. Следующие правила вывода являются допустимыми:

R5 $\vdash A \Rightarrow \vdash \neg A$
R6 $\vdash A\to B \Rightarrow \vdash B\to A$

Доказательство.

R5

Для доказательства этого правила достаточно показать, что вместе с каждой аксиомой логики доказуемо ее отрицание, а также производна негативная формулировка правила R1:

R1'. $\neg A, \neg(A\to B) \Rightarrow \neg B$

A1'.

1. $(B\to A)\to((A\to C)\to(B\to C))$ - A1.
2. $\neg((A\to C)\to(B\to C))\to\neg(B\to A)$ - из 1 по R4.
3. $\neg(B\to A)\to(A\to B)$ - A6.
4. $\neg((A\to C)\to(B\to C))\to(A\to B)$ - из 2, 3 по R2.
5. $((B\to C)\to(A\to C))\to\neg((A\to C)\to(B\to C))$ - A5.
6. $((B\to C)\to(A\to C))\to(A\to B)$ - из 4, 5 по R2.
7. $(((B\to C)\to(A\to C))\to(A\to B))\to\neg((A\to B)\to((B\to C)\to(A\to C)))$ - A5.
8. $\neg((A\to B)\to((B\to C)\to(A\to C)))$ - из 6, 7 по R1.

A2'.

1. $(B\to(A\to C))\to(A\to(B\to C))$ - A2.
2. $((B\to(A\to C))\to(A\to(B\to C)))\to\neg((A\to(B\to C))\to(B\to(A\to C)))$ - A5.
3. $\neg((A\to(B\to C))\to(B\to(A\to C)))$ - из 1, 2 по R1.

A3'.

1. $(A\to A)\to(B\to B)$ - A3.
2. $((A\to A)\to(B\to B))\to\neg((B\to B)\to(A\to A))$ - A5.
3. $\neg((B\to B)\to(A\to A))$ - из 1, 2 по R1.

A4'.

1. $A\to\neg\neg A$ - T2.
2. $(A\to\neg\neg A)\to\neg(\neg\neg A\to A)$ - A5.
3. $\neg(\neg\neg A\to A)$ - из 1, 2 по R1.

A5'.

1. $\neg(B\to A)\to(A\to B)$ - A6.
2. $(\neg(B\to A)\to(A\to B))\to\neg((A\to B)\to\neg(B\to A))$ - A5.
3. $\neg((A\to B)\to\neg(B\to A))$ - из 1, 2 по R1.

A6'. Аналогично A5'.

R1'.

1. $\neg A$ - посылка

2. ¬(A→B) - посылка
3. ¬(A→B)→(B→A) - A6.
4. B→A - из 2, 3 по R1.
5. ¬A→¬B - из 4 по R4.
6. ¬B - из 1, 5 по R1.

Допустимость правила R5 доказана.

R6.

1. A→B - посылка
2. ¬(A→B) - из 1 по R5.
3. ¬(A→B)→(B→A) - A6.
4. B→A - из 2, 3 по R1.

Допустимость правила R8 доказана.

Лемма доказана.

Теорема о замене. Следующие правила доказательства являются производными:

R7. |-A→B ⇒ |-F(A)→F(B)
R8. |-A→B, |-F(A) ⇒ |-F(B)

где F(B) получена из F(A) заменой нуля или более подформул вида A на B.

Доказательство проводим индукцией по степени формулы F.

1.1. F – пропозициональная переменная и F≠A. Тогда F(A)=F(B) и формула F(A)→F(B) доказуема в силу T3.

1.2. F – пропозициональная переменная и F=A. Тогда формула F(A)→F(B) доказуема либо в силу T3, либо по условию теоремы.

2. F=D→E. По индуктивному допущению доказуемы формулы D(A)→D(B) и E(A)→E(B). Покажем, что в этом случае будет доказуема формула (D(A)→E(A))→(D(B)→E(B)).

1) (E(A)→E(B))→((D(A)→E(A))→(D(A)→E(B))) - T1.
2) E(A)→E(B) - по инд. допущению
3) (D(A)→E(A))→(D(A)→E(B)) - из 1), 2) по R1.
4) D(A)→((D(A)→E(A))→E(B))) - из 3) по R3.
5) D(B)→D(A) - по инд. допущению
6) D(B)→((D(A)→E(A))→E(B))) - из 4), 5) по R2.
7) (D(A)→E(A))→(D(B)→E(B)) - из 6) по R3.

R8.
1) |-A→B - условие

2) |-F(A) - условие
3) |-F(A)→F(B) - из 1) по R7.
4) |-F(B) - из 2), 3) по R1.

Теорема доказана.

Лемма 3. Следующие правила вывода производны, а формулы являются теоремами абелевой логики:

R9. $\vdash F(\neg\neg\neg A) \Rightarrow \vdash F(A)$

T5. $\vdash (\neg A \to B) \to (\neg B \to A)$
T6. $\vdash (\neg A \to (\neg B \to C)) \to (\neg(\neg A \to B) \to C)$
T7. $\vdash A \to (\neg A \to (B \to B))$

Доказательство правила R9 тривиально с использованием A4, T2 и R8.

T5.
1. $(\neg A \to B) \to (\neg B \to \neg\neg A)$ - T4.
2. $(\neg A \to B) \to (\neg B \to A)$ - из 1 по R9.

T6.
1. $(\neg\neg A \to (\neg B \to C)) \to (\neg A \to (\neg B \to C))$ - T3.
2. $(\neg B \to C) \to (\neg C \to B)$ - T5.
3. $(\neg A \to (\neg B \to C)) \to (\neg A \to (\neg C \to B))$ - из 1, 2 по R8.
4. $(\neg A \to (\neg C \to B)) \to (\neg C \to (\neg A \to B))$ - аксиома A2.
5. $(\neg A \to (\neg B \to C)) \to (\neg C \to (\neg A \to B))$ - из 3, 4 по R2.
6. $(\neg C \to (\neg A \to B)) \to (\neg(\neg A \to B) \to C)$ - T5.
7. $(\neg A \to (\neg B \to C)) \to (\neg(\neg A \to B) \to C)$ - из 5, 6 по R2.

T7.
1. $A \to \neg\neg\neg A$ - T2.
2. $A \to (\neg A \to (\neg A \to \neg A))$ - из 1 по Def6.
3. $(\neg A \to \neg A) \to (B \to B)$ - аксиома A3.
4. $A \to (\neg A \to (B \to B))$ - из 2, 3 по R8.

Лемма доказана.

Def7. $A \approx B \Leftrightarrow \vdash A \to B$ и $\vdash B \to A$

Очевидно, что $\approx$ является отношением эквивалентности, т.е. транзитивно, симметрично и рефлексивно.

Def8. $|A| = \{B \mid B \approx A\}$

Определим алгебру Линденбаума для абелевой логики.

Def9. **AbL** = <F/≈, +, -, 0>, где F/≈ – множество всех классов эквивалентности для формул абелевой логики. Операции задаются следующими условиями:

1. $|A|+|B| = |\neg A \to B|$
2. $-|A| = |\neg A|$
3. $0 = |A \to A|$

В силу A3 в определении константы 0 не имеет значения, какая конкретная формула A выбрана.

Лемма 4. AbL является абелевой группой.

Для доказательства леммы достаточно показать, что операции алгебры обладают следующими свойствами:

1. $|A|+(|B|+|C|) = (|A|+|B|)+|C|$
2. $|A|+0 = |A|$
3. $|A|+(-|A|) = 0$
4. $|A|+|B| = |B|+|A|$

Доказательство.

1. $|A|+(|B|+|C|) = |\neg A \to (\neg B \to C)|$ - Def9.
2. $\vdash (\neg A \to (\neg B \to C)) \to (\neg(\neg A \to B) \to C)$ - T6.
3. $\vdash (\neg(\neg A \to B) \to C) \to (\neg A \to (\neg B \to C))$ - из 2 по R6.
4. $(\neg A \to (\neg B \to C)) \approx (\neg(\neg A \to B) \to C)$ - из 2, 3 по Def7.
5. $|\neg A \to (\neg B \to C)| = |\neg(\neg A \to B) \to C|$ - из 4 по Def8.
6. $|\neg(\neg A \to B) \to C| = (|A|+|B|)+|C|$ - Def9.
7. $|A|+(|B|+|C|) = (|A|+|B|)+|C|$ - из 1, 5, 6.

1. $|A|+0 = |A|+|B \to B| = |\neg A \to (B \to B)|$ - Def9.
2. $\vdash A \to (\neg A \to (B \to B))$ - T7 .
3. $\vdash (\neg A \to (B \to B)) \to A$ - из 2 по R6.
4. $(\neg A \to (B \to B)) \approx A$ - из 2, 3 по Def8.
5. $|\neg A \to (B \to B)| = |A|$ - из 4 по Def9.
6. $|A|+0 = |A|$ - из 1, 5.

1. $|A|+(-|A|) = |\neg A \to \neg A| = 0$ - Def9.

1. $|A|+|B| = |\neg A \to B|$ - Def9.
2. $\vdash (\neg A \to B) \to (\neg B \to A)$ - T5.
3. $\vdash (\neg B \to A) \to (\neg A \to B)$ - T5.
4. $(\neg A \to B) \approx (\neg A \to B)$ - из 2, 3 по Def7.
5. $|\neg A \to B| = |\neg B \to A|$ - из 4 по Def8.
6. $|\neg B \to A| = |B|+|A|$ - Def9.
7. $|A|+|B| = |B|+|A|$ - из 1, 5, 6.

Лемма доказана.

Лемма 5. Если **AbL** – алгебра Линденбаума для абелевой логики, а **v:Var -> F/≈** – функция приписывания значений пропозициональным переменным, задаваемая условием **v**(p)=|p|, то для любой формулы A абелевой логики будет иметь место **v**(A)=|A|.

Доказательство проводим индукцией по построению формулы.

A=B→C

1. v(B) = |B|	- индуктивное допущение.
2. v(C) = |C|	- индуктивное допущение.
3. v(B→C) = -v(B)+v(C)	- Def4.
4. -v(B) = -|B|	- из 1.
5. -|B| = |¬B|	- Def8.
6. -v(B)+v(C) = |¬B|+|C|	- из 2, 4, 5.
7. |¬B|+|C| = |¬¬B→C|	- из 6 по Def9.
8. |- (¬¬B→C)→(B→C)	- теорема абелевой логики
9. |- (B→C)→(¬¬B→C)	- теорема абелевой логики
10. (B→C) ≈ (¬¬B→C)	- из 8, 9 по Def7.
11. |B→C| = |¬¬B→C|	- из 10 по Def8.
12. v(B→C) = |B→C|	- из 3, 6, 7, 11.

Лемма доказана.

Теорема полноты. Всякая общезначимая формула доказуема.

Доказательство.

1. |=B	- допущение.
2. v(B) = 0	- из 1 по Def5 для всякой абелевой группы **Ab**=<M,+,-,0> и всякого приписывания v∈M^{Var}
3. v(B) = |A→A|	- из 2 для **AbL** и приписывания v, задаваемого условием v(p)=|p|.
4. |A→A| = |B|	- из 3 по Лемме 4.
5. (A→A) ≈ B	- из 4 по Def7.
6. |- (A→A)→B	- из 5 по Def6.
7. |- (A→A)	- T3.
8. |- B	- из 6, 7 по R1.

Теорема доказана.

В.И.Шалак

ЛОГИКА ГРУПП И СВОБОДНЫЕ ГРУППЫ*

Abstract. *In this paper we prove theorem about isomorphism between free groups and Lindenbaum algebra for group logic.*

В настоящей статье будет доказана теорема об изоморфизме между алгеброй Линденбаума для логики групп [1] и свободными группами. Напомним определение логики групп и интерпретацию ее формул.

Def1. *Язык*

1. $Var=\{p_1,p_2,\ldots\}$ – множество пропозициональных переменных;
2. $\rightarrow$ – логическая связка;
3. (,)– скобки.

Def2. *Формулы* **FG**

1. $Var\subseteq\mathbf{FG}$;
2. Если $A, B \in \mathbf{FG}$, то $(A\rightarrow B)\in\mathbf{FG}$;
3. Ничто другое формулой не является.

Def3. *Группа* $\mathbf{G} = \langle M,+,-,0\rangle$, где $0\in M$, + бинарная, а - – унарная операции, для которых выполняются следующие постулаты:

1. $x+(y+z) = (x+y)+z$
2. $x+0 = x$
3. $x+(-x) = 0$

Определим интерпретацию формул в группах.

Пусть **G** – произвольная группа, а $Val=M^{Var}$ – множество всех приписываний значений пропозициональным переменным.

Распространим Val на множество всех формул.

Def4. $v(A\rightarrow B) = -v(A)+v(B)$ для $v\in Val$

Def5. Формула A *общезначима* ($\models A$) е.т.е. для всех групп **G** и для всех $v\in Val$ имеет место $v(A)=0$.

Def6. $\neg A = A\rightarrow(A\rightarrow A)$

Аксиомы логики групп

A1. $(A\rightarrow B)\rightarrow((C\rightarrow A)\rightarrow(C\rightarrow B))$

---

* Работа поддержана РФФИ, грант № 04-03-002660.

A2. $(A\to A)\to(B\to B)$
A3. $A\to\neg\neg A$
A4. $\neg\neg A\to A$
A5. $(A\to B)\to\neg(B\to A)$
A6. $\neg(B\to A)\to(A\to B)$

R1. $A, A\to B \Rightarrow B$
R2. $A\to B \Rightarrow (B\to C)\to(A\to C)$

Определение понятия доказуемости и теоремы – стандартные.

В статье [1] была доказана теорема о непротиворечивости и полноте данной логики относительно интерпретации в произвольных группах.

Def7. $A\approx B \Leftrightarrow |\!-A\to B$ и $|\!-B\to A$

Очевидно, что $\approx$ является отношением эквивалентности, т.е. транзитивно, симметрично и рефлексивно.

Def8. $|A| = \{B|\ B\approx A\}$

Определим *алгебру Линденбаума* **GL** для логики групп.

Def9. **GL** = $<FG/_{\approx}, +, -, 0>$, где $FG/_{\approx} = \{|A|: A\in \mathbf{FG}\}$ – множество всех классов эквивалентности для формул логики групп. Операции задаются следующими условиями:

1. $|A|+|B| = |\neg A\to B|$
2. $-|A| = |\neg A|$
3. $0 = |A\to A|$

В силу A2 в определении константы 0 не имеет значения, какая конкретная формула A выбрана.

Напомним определение понятия *свободной группы* [2].

Пусть задан алфавит $T=\{a_1, a_2, \ldots\}\cup\{-a_1, -a_2, \ldots\}$. Конечные последовательности букв в этом алфавите называются *словами*. К числу рассматриваемых слов относим и пустое слово, которое будем обозначать посредством 0. Словом, *обратным* слову $u=b_1b_2\ldots b_n$, будем называть слово $-u=-b_n\ldots-b_2-b_1$. Под $--a_i$ будем понимать просто a_i. *Приведенным* будем называть слово, в котором нигде рядом не стоят буквы a_i и $-a_i$. Суммой двух слов u и v будем называть слово u+v, получаемое путем их конкатенации с последующим выбрасыванием из него всех стоящих рядом букв a_i и $-a_i$, пока не получится приведенное слово. Множество всех приведенных слов с так определенной операцией + образует группу **WG**, называемую *свободной*.

Определим отображение f:**FG**→**WG** из множества формул **FG** логики групп в множество слов свободной группы **WG** в алфавите $T=\{p_1,p_2,\ldots\}\cup\{-p_1,-p_2,\ldots\}$.

Def10.

1. $f(p_i) = p_i$
2. $f(A\to B) = -f(A)+f(B)$

Определим отображение f^{-1}:**WG**→**FG** из множества слов свободной группы **WG** в множество формул **FG** логики групп:

Def11.

1. $f^{-1}(p_i) = p_i$
2. $f^{-1}(-u) = \neg f^{-1}(u)$
3. $f^{-1}(u+v) = \neg f^{-1}(u)\to f^{-1}(v)$
4. $f^{-1}(0) = p_1\to p_1$

Def12. Определим понятие степени слова:

1. $\deg(0) = 0$
2. $\deg(p_i) = 0$
3. $\deg(-u) = \deg(u)+1$
4. $\deg(u+v) = \deg(u)+\deg(v)+1$

Лемма 1. $f\,f^{-1}(u) = u$, $f^{-1}f(A)\approx A$

$f\,f^{-1}(u) = u$ доказываем индукцией по степени слова u.

Базис.

1. $f\,f^{-1}(0) = f(p_1\to p_1)$	- Def11.
2. $f(p_1\to p_1) = -f(p_1)+f(p_1)$	- Def10.
3. $-f(p_1)+f(p_1) = 0$	- приведение.
4. $f\,f^{-1}(0) = 0$	- из 1-3.

1. $f\,f^{-1}(p_i) = f(p_i)$	- Def11.
2. $f(p_i) = p_i$	- Def10.
3. $f\,f^{-1}(p_i) = p_i$	- из 1, 2.

Индукционный шаг.

1. $f\,f^{-1}(u) = u$	- инд. доп.
2. $f\,f^{-1}(-u) = f(\neg f^{-1}(u))$	- Def11.
3. $f(\neg f^{-1}(u)) = f(f^{-1}(u)\to(f^{-1}(u)\to f^{-1}(u)))$	- Def6.
4. $f(f^{-1}(u)\to(f^{-1}(u)\to f^{-1}(u))) = -f\,f^{-1}(u)-f\,f^{-1}(u)+f\,f^{-1}(u)$	- Def10.
5. $-f\,f^{-1}(u)-f\,f^{-1}(u)+f\,f^{-1}(u) = -f\,f^{-1}(u)$	- приведение
6. $-f\,f^{-1}(u) = -u$	- из 1.
7. $f\,f^{-1}(-u) = -u$	- из 2 – 6.

1. $f\,f^{-1}(u) = u$	- инд. доп.

2. $f f^{-1}(v) = v$ - инд. доп.
3. $ff^{-1}(u+v) = f(\neg f^{-1}(u) \rightarrow f^{-1}(v))$ - Def11.
4. $f(\neg f^{-1}(u) \rightarrow f^{-1}(v)) = -f(\neg f^{-1}(u)) + ff^{-1}(v))$ - Def10.
5. $-f(\neg f^{-1}(u)) + ff^{-1}(v)) = -f(f^{-1}(u) \rightarrow (f^{-1}(u) \rightarrow f^{-1}(u))) + f f^{-1}(v)$ - Def6.
6. $-f(f^{-1}(u) \rightarrow (f^{-1}(u) \rightarrow f^{-1}(u))) + f f^{-1}(v) = -(-ff^{-1}(u) - ff^{-1}(u) + ff^{-1}(u)) + ff^{-1}(v)$ - Def10.
7. $-(-ff^{-1}(u) - ff^{-1}(u) + f f^{-1}(u)) + ff^{-1}(v) = --ff^{-1}(u) + ff^{-1}(v)$ - приведение
8. $--ff^{-1}(u) + ff^{-1}(v) = ff^{-1}(u) + ff^{-1}(v)$ - определение -
9. $ff^{-1}(u) + ff^{-1}(v) = u+v$ - из 1, 2.
10. $ff^{-1}(u+v) = u+v$ - из 3 – 9.

$f^{-1}f(A) \approx A$ доказываем индукцией по степени формулы А.

Базис.
1. $f^{-1}f(p_i) = f^{-1}(p_i)$ - Def10.
2. $f^{-1}(p_i) = p_i$ - Def11.
3. $p_i \approx p_i$ - Def7.

Индукционный шаг.
1. $f^{-1}f(A) \approx A$ - инд. доп.
2. $f^{-1}f(B) \approx B$ - инд. доп.
3. $f^{-1}f(A \rightarrow B) = f^{-1}(-f(A) + f(B))$ - Def10.
4. $f^{-1}(-f(A) + f(B)) = \neg f^{-1}(-f(A)) \rightarrow f^{-1}f(B)$ - Def11.
5. $\neg f^{-1}(-f(A)) \rightarrow f^{-1}f(B) = \neg\neg f^{-1}f(A) \rightarrow f^{-1}f(B)$ - Def11.
7. $\neg\neg f^{-1}f(A) \rightarrow f^{-1}f(B) \approx f^{-1}f(A) \rightarrow f^{-1}f(B)$ - Def7, теоремы логики групп.
8. $f^{-1}f(A) \rightarrow f^{-1}f(B) \approx A \rightarrow B$ - из 1, 2 по Def7.
9. $f^{-1}f(A \rightarrow B) \approx A \rightarrow B$ - из 3 – 8.

Лемма доказана.

Теорема об изоморфизме. Алгебра Линденбаума **GL** $=<FG/\approx, +, -, 0>$ для логики групп изоморфна свободной группе в алфавите $T=\{p_1,p_2,\ldots\} \cup \{-p_1,-p_2, \ldots\}$.

Функцию изоморфизма определим посредством:

Def13. $F(|A|) = f(A)$

Тогда обратная ей функция определяется следующим образом:

Def14. $F^{-1}(u) = |f^{-1}(u)|$

Для доказательства теоремы необходимо показать, что:

1). F является функцией, т.е. если $|A|=|B|$, то $f(A)=f(B)$.

2). F – является гомоморфизмом, т.е.

a) $F(|A|+|B|) = F(|A|)+F(|B|)$

b) $F(-|A|) = -F(|A|)$

c) $F(0) = |0|$

3). F – взаимно-однозначное отображение $\mathbf{FG}/_{\approx}$ на **WG**.

1) Если $|A|=|B|$, то $A \approx B$ и по Def8 $\vdash A \to B$ и $\vdash B \to A$. Отсюда следует, что в каждой модели при каждом приписывании формулам A и B сопоставляются одни и те же значения. Допустим, что $f(A) \neq f(B)$. Но тогда функция приписывания значения формулам в группе **GL**, определяемая как $v(A)=f(A)$, сопоставляет формулам A и B разные значения. Получили противоречие. Следовательно, $f(A)=f(B)$.

2a) $F(|A|+|B|) = F(|A|)+F(|B|)$

1. $F(\|A\|+\|B\|) = F(\|\neg A \to B\|)$	- Def9.
2. $F(\|\neg A \to B\|) = f(\neg A \to B)$	- Def13.
3. $f(\neg A \to B) = -f(\neg A)+f(B)$	- Def10.
4. $-f(\neg A) = -(-f(A)-f(A)+f(A))$	- Def6, Def10.
5. $-(-f(A)-f(A)+f(A)) = --f(A)$	- приведение.
6. $--f(A) = f(A)$	- определение свободной группы.
7. $f(\neg A \to B) = f(A)+f(B)$	- из 3 – 6
8. $F(\|A\|) = f(A)$	- Def14.
9. $F(\|B\|) = f(B)$	- Def14.
10. $F(\|A\|+\|B\|) = F(\|A\|)+F(\|B\|)$	- из 1, 2, 7 – 9.

2b) $F(-|A|) = - F(|A|)$

1. $F(-\|A\|) = F(\|\neg A\|)$	- Def9.
2. $F(\|\neg A\|) = f(\neg A)$	- Def13.
3. $f(\neg A) = -f(A)-f(A)+f(A)$	- Def6, Def10.
4. $-f(A)-f(A)+f(A) = -f(A)$	- приведение.
5. $f(\neg A) = -f(A)$	- из 3, 4.
6. $-f(A) = -F(\|A\|)$	- Def13.
7. $F(-\|A\|) = - F(\|A\|)$	- из 1 - 6.

2c) $F(0) = 0$

1. $F(0) = F(\|A \to A\|)$	- Def9.
2. $F(\|A \to A\|) = f(A \to A)$	- Def13.
3. $f(A \to A) = -f(A)+f(A)$	- Def10.
4. $-f(A)+f(A) = 0$	- приведение.
5. $F(0) = 0$	- из 1 – 4.

3) Покажем, что $F^{-1}F(|A|) = |A|$ и $FF^{-1}(u) = u$.

1. $F^{-1}F(\|A\|) = \|f^{-1}f(A)\|$	- Def13, Def14.
2. $f^{-1}f(A) \approx A$	- лемма 1.
3. $\| f^{-1}f(A)\| = \|A\|$	- из 3.

4. $F^{-1}F(|A|) = |A|$ - из 1 – 3.

1. $FF^{-1}(u) = F(|f^{-1}(u)|)$ - Def14.
2. $F(|f^{-1}(u)|) = ff^{-1}(u)$ - Def13.
3. $ff^{-1}(u) = u$ - лемма 1.
4. $FF^{-1}(u) = u$ - из 1 -3.

Теорема доказана.

ЛИТЕРАТУРА

1. *Шалак В.И.* Логика групп // Труды научно-исследовательского семинара Логического центра Института философии РАН, 2004.
2. *Шафаревич И.Р.* Основные понятия алгебры. Ижевск: НИЦ РХД, 2001.

Д.П.Шкатов

АНАЛОГ ТЕОРЕМЫ МАКИНСОНА ДЛЯ НОРМАЛЬНЫХ МОДАЛЬНЫХ ЛОГИК С ОПЕРАТОРОМ СЕГЕРБЕРГА*

Abstract. *We prove the analogue of Makinson's theorem ([Makinson, 1971]) for normal modal logics with the Segerberg operator, i. e. logics with two unary modalities: the usual "necessity" operator* $\Box$ *and the operator* $\Box^*$*, defined by the "Segerberg axioms",* $\Box^*\phi \leftrightarrow \phi \& \Box\Box^*\phi$ *and* $\phi \& \Box^*(\phi \to \Box\phi) \to \Box^*\phi$*. (The Segerberg operator is widely known as one of the modalities of propositional dynamic logic.) As the corollary of the proven result we get a simple decidability procedure for effectively axiomatizable normal logics with the Segerberg operator.*

1. Цель работы

В настоящей работе доказывается аналог теоремы Макинсона ([Makinson, 1971]) для нормальных модальных логик с оператором Сегерберга, т. е. логик с двумя унарными модальностями – обычным оператором "необходимости" $\Box$ и оператором $\Box^*$, определяемым так называемыми "аксиомами Сегерберга": $\Box^*\phi \leftrightarrow \phi \& \Box\Box^*\phi$ и $\phi \& \Box^*(\phi \to \Box\phi) \to \Box^*\phi$. (Оператор Сегерберга известен главным образом как одна из модальностей языка логики PDL.) Следствием доказанного результата является наличие простой разрешающей процедуры для эффективно конечноаксиоматизируемых нормальных логик с оператором Сегерберга.

2. Постановка задачи

Синтаксическая непротиворечивость – одно из важнейших метатеоретических свойств логических исчислений. Исчисление синтаксически непротиворечиво, если в нем нельзя доказать любую формулу языка исчисления. (Для расширений классического пропозиционального исчисления непротиворечивость равносильна невозможности доказать "противоречивую" формулу вида $\phi \,\&\, \sim\phi$). Очевидно, что противоречивые исчисления не пред-

* Я глубоко благодарен Н.А. Алешиной и А.В. Чагрову за научную и эмоциональную поддержку, в которой я так нуждался. Кроме того, я очень признателен А.В. Чагрову за постановку вопроса, обсуждаемого в настоящей работе.

ставляют самостоятельного интереса, ибо цель исчисления – различение общезначимых и необщезначимых формул.

Для эффективно конечноаксиоматизируемых нормальных мономодальных логик – нормальных логик с единственной модальностью $\Box$, эффективно представимых в виде гильбертовского исчисления с конечным списком аксиом – существует элегантный алгоритм проверки на непротиворечивость, опирающийся на результат, доказанный Д. Макинсоном ([Makinson, 1971]).

Теорема Макинсона. *Пусть* Λ° *обозначает логику фрейма, содержащего одну рефлексивную точку;* $\Lambda^{\bullet}$ *– логику фрейма, содержащего одну иррефлексивную точку; и* Λ *– произвольную нормальную мономодальную логику.* Λ *непротиворечива, если и только если* $\Lambda \subseteq \Lambda^{\circ}$ *или* $\Lambda \subseteq \Lambda^{\bullet}$.

Из теоремы Макинсона следует, что для того, чтобы проверить произвольную эффективно конечноаксиоматизируемую нормальную логику Λ на непротиворечивость, достаточно проверить, общезначимы ли аксиомы Λ (1) на одной рефлексивной точке, и (2) на одной иррефлексивной точке. Если ответ один из тестов (1) и (2) дает положительный результат, то Λ непротиворечива; в обратном случае Λ противоречива.

К сожалению, для логик в произвольном бимодальном языке теорема Макинсона неверна. Отсюда возникает вопрос, поставленный А. В. Чагровым: можно ли доказать аналог теоремы Макинсона для языка, содержащего помимо $\Box$ модальный оператор, определяемый аксиомами Сегерберга?

3. Нормальные логики с оператором Сегерберга

Рассмотрим пропозициональный язык $SL(\Sigma)$, содержащий некоторое множество Σ, называемое *сигнатурой* языка $SL(\Sigma)$, пропозициональных параметров, произвольные элементы которого мы будем обозначать при помощи p, q, ….; пропозициональные константы $\bot$ (ложь) и T (истина); бинарную связку & (конъюнкция); и унарные связки $\sim$ (отрицание), $\Box$ (бокс), и $\Box^*$ (оператор Сегерберга). Бинарные связки $\vee$ (дизъюнкция), $\rightarrow$ (импликация), и $\leftrightarrow$ (эквиваленция) определяются стандартным образом; унарные связки $\Diamond$ и $\Diamond^*$ определяются как дуалы $\Box$ и $\Box^*$, соответственно. Формулы $SL(\Sigma)$ определяются стандартно; запись $\phi \in SL(\Sigma)$ означает, что ϕ – формула $SL(\Sigma)$. Мы будем опускать упоминание сигнатуры в случаях, когда ее выбор не влияет на ход изложения.

Под логикой в языке SL мы понимаем множество формул SL, содержащее все теоремы классического пропозиционального исчисления и замкнутое относительно modus ponens и подста-

новки. Логика Λ в языке *SL* называется нормальной, если она содержит подстановочные случаи следующих формул:

(K1) $\Box(\phi \to \psi) \to (\Box\phi \to \Box\psi)$
(K2) $\Box^*(\phi \to \psi) \to (\Box^*\phi \to \Box^*\psi)$
(Seg1) $\Box^*\phi \leftrightarrow \phi \& \Box\Box^*\phi$
(Seg2) $\phi \& \Box^*(\phi \to \Box\phi) \to \Box^*\phi$

и обладает следующими свойствами замкнутости:

(G1) если $\phi \in \Lambda$, то $\Box\phi \in \Lambda$.
(G2) если $\phi \in \Lambda$, то $\Box^*\phi \in \Lambda$.

Формулы (Seg1) и (Seg2) мы называем "аксиомами Сегерберга". (K1) и (K2) – это обычные "аксиомы нормальности"; условия (G1) и (G2) – аналоги "правил Геделя". Минимальную нормальную логику в *SL* мы обозначаем **Seg** (в честь Сегерберга). Принадлежащие логике формулы мы будем называть ее теоремами. Примером теоремы **Seg**, а значит и любого ее расширения, является $\Diamond^*\phi \leftrightarrow \phi \vee \Diamond\Diamond^*\phi$.

4. Фреймы и модели

Определение 1. Стандартным фреймом[1] *будем называть тройку вида (W, R, R*), где (1) W – непустое множество (точек или миров), (2) R – бинарное отношение на W, и (3) R* – рефлексивно-транзитивное замыкание R (то есть, xR*y, если и только если x = y или, для некоторого n ≥0, $xR\,z_1R \ldots R\,z_nR\,y$).*

Определение 2. Фреймом *будем называть тройку вида (W, R, R*), где (1) W – непустое множество, (2) R – бинарное отношение на W, (3) R* – рефлексивное и транзитивное отношение, содержащее R.*

Определение 3. Стандартной моделью *языка SL(Σ) будем называть пятерку вида M = (W, R, R*, V, |=), где (1) (W, R, R*) – стандартный фрейм, (2) V – функция (оценки) из Σ в 2^W, и (3) |= – отношение истинности формул в точках модели, рекурсивно определяемое следующим образом:*

M, w $\models p$ *если* $w \in V(p)$, *для каждого* $p \in \Sigma$.
M, w $\models \bot$ *ни для какого w ; M, w* $\models \top$ *для всякого w.*
M, w $\models \sim\psi$ *если M, w* $\not\models \psi$.
M, w $\models \psi \,\&\, \psi'$ *если M, w* $\models \psi$ *и M, w* $\models \psi'$.
M, w $\models \Box\psi$ *если, для каждой v такой что wRv, M, v* $\models \psi$.
M, w $\models \Box^*\psi$ *если, для каждой v такой что wR*v, M, v* $\models \psi$.

---

[1] В математической литературе фреймы обычно называются шкалами.

Определение 4. Моделью *языка SL(Σ) будем называть пятерку вида (W, R, R*, V, |=) такую что (1) (W, R, R*) – фрейм, (2) V – функция из Σ в* 2^W, *(3) |= – отношение истинности, определяемое так же, как в Определении 3, и (4) если* $\phi \in$ ***Seg***, *то M, w |=* ϕ *для каждой* $w \in W$.

Нетрудно проверить, что всякая стандартная модель является моделью (обратное не верно; аналогично для фреймов); поэтому, когда мы говорим о моделях (фреймах), мы имеем в виду как стандартную, так и более общую (неквалифицированную) разновидности. Мы обычно будем опускать отношение истинности |= при упоминании модели, так как оно может быть однозначно восстановлено по означиванию V. Мы говорим, что модель (W, R, R*, V) *основана на* фрейме (W, R, R*).

Определение 5. *Формула* ϕ истинна в модели *M, если* ϕ *истинна в каждой точке M. Формула* ϕ истинна на фрейме *F, если* ϕ *истинна в каждой модели, основанной на F.*

Нетрудно убедиться в том, что множество всех формул *SL*, истинных на некотором стандартном фрейме, является нормальной логикой в *SL*. Поэтому для данного стандартного фрейма F мы можем говорить о "логике F", имея в виду логику, идентичную множеству формул, истинных на F.

Если M = (W, R, R*, V) и M' = (W', R', R'*, V') основаны на изоморфных фреймах и V(*p*) = V'(*p*) с точностью до изоморфизма для всякой *p*, входящей в некоторую формулу ψ, то мы говорим, что M и M' *согласуются на* всех параметрах ψ. Легко удостовериться в истинности следующего факта.

Факт 1. *Пусть M и M' – модели, основанные на изоморфных фреймах (обозначим соответствующий изоморфизм при помощи f) и согласующиеся на всех параметрах* ψ. *Тогда для всякого* $w \in W$ *мы имеем M, w |=* ψ *е.т.е. M', f(w) |=* ψ.

В ходе последующего изложения нам понадобятся следующие модельные конструкции.

Определение 6. *Пусть M = (W, R, R*, V) – модель SL(Σ) и* $w \in W$. Подмоделью *M*, порожденной точкой *w*, *называется модель* M_w = *(W', R', R*', V'), где (1) W' – наименьшее подмножество W такое, что (a)* $w \in W'$ *и (b) если* $v \in W'$ *и vRu, то* $u \in W'$; *(2)* $R' = W' \cap R$; *(3)* $R^{*\prime} = W' \cap R^*$; *(4)* $V'(p) = W' \cap V(p)$ *для каждого* $p \in \Sigma$.

Определение 7. *Пусть M = (W, R, R*, V) и M' = (W', R', R*', V') – модели SL(Σ). Функция f из W в W' называется p*-морфизмом, *если (1) для всякого* $p \in \Sigma$, $w \in V(p)$ *е.т.е.* $f(w) \in V'(p)$; *(2a) если wRv, то f(w)R'f(v); (2b) если f(w)R'v', то найдется такая* $v \in W$, *что wRv и*

*f(v) = v'; (3a) если wR*v, то f(w)R*'f(v); (3b) если f(w)R*'v', то найдется такая v∈ W, что wR*v и f(v) = v'. Если f сюръективна, то M' называется p*-морфным образом *M.*

Следующие хорошо известные факты легко доказываются индукцией по построению формулы.

Лемма 1. *Пусть M_w = (W', R', R*', V') – подмодель SL(Σ)-модели M = (W, R, R*, V), порожденная w. Тогда для всяких v∈ W' и ϕ∈ SL(Σ) M_w, v |= ϕ e.m.e M, v |= ϕ.*

Лемма 2. *Пусть f – p-морфизм между SL(Σ)-моделями M и M'. Тогда для всякой ϕ∈ SL(Σ), M, w |= ϕ e.m.e M', f(w) |= ϕ.*

5. (Нестандартные) канонические модели

Пусть Λ – непротиворечивое расширение **Seg**. Тогда для Λ можно построить каноническую модель из максимальных Λ-непротиворечивых множеств формул. Каноническая модель **M** = (**W**, **R**, **R***, **V**) для Λ строится следующим образом: (1) **W** – множество всех максимальных Λ-непротиворечивых множеств; (2) *w***R***v*, если для всякой $\Box\phi\in w$ имеет место $\phi\in v$ (или для всякой $\phi\in v$ имеет место $\Diamond\phi\in w$); (3) *w*R**v*, если для всякой $\Box^*\phi\in w$ имеет место $\phi\in v$ (или для всякой $\phi\in v$ имеет место $\Diamond^*\phi\in w$); (4) $w\in V(p)$, если $p\in w$.

Стандартным образом может быть доказано следующее утверждение.

Лемма 3. *Пусть Λ – непротиворечивое расширение **Seg** и **M** – каноническая модель для Λ. Тогда ϕ∈ Λ e.m.e ϕ истинна в каждой точке **M**.*

Ключевым шагом в доказательстве Леммы 3 является следующий факт.

Лемма 4. *Пусть Λ – непротиворечивое расширение **Seg** и Δ – максимальное Λ-непротиворечивое множество, содержащее формулу ◊ϕ. Тогда существует максимальное Λ-непротиворечивое множество Δ' такое, что Δ **R** Δ' и ϕ∈ Δ'. Аналогичное утверждение истинно для ◊* и **R***.*

Обратим внимание на то, что канонические модели для расширений **Seg** нестандартны. В этом несложно убедиться в случае языков с непустой сигнатурой: множество $\{\Diamond^*p, \sim p, \sim\Diamond^n p, n \geq 0\}$ ($\Diamond^n$ сокращает *n* знаков ◊) **Seg**-непротиворечиво, а значит содержится в некотором максимальном **Seg**-непротиворечивом множестве; тогда в канонической модели для **Seg** имеются отличные миры *w* и *w'* такие, что $w\mathbf{R}^*w'$, но ни для какого *n* не имеет места $w\mathbf{R}^n w'$ ($w\mathbf{R}^n w'$ сокращает $w\mathbf{R}^n v_1 \ldots v_{n-1}\mathbf{R}^n w'$). Для языков с пустой сигнатурой ана-

логичный эффект следует из непротиворечивости множества $\{\Diamond^*\sim\Diamond\top,\ \Diamond\top,\ \sim\Diamond^n\sim\Diamond\top\}$. Именно нестандартность канонических моделей для расширений **Seg** делает доказательство аналога теоремы Макинсона для них нетривиальным.

6. Аналог теоремы Макинсона

Обозначим (стандартный) фрейм $(\{w\}, R = \{(w, w)\}, R^* = \{(w, w)\})$ символом $\mathfrak{I}^r$ и (стандартный) фрейм $(\{w\}, R = \varnothing, R^* = \{(w, w)\})$ символом $\mathfrak{I}^{ir}$. Обозначим логику фрейма $\mathfrak{I}^r$ символом Λ^r и логику фрейма $\mathfrak{I}^{ir}$ символом Λ^{ir}.

Теорема 1. *Пусть* Λ *– произвольное расширение Seg.* Λ *непротиворечива, если и только если* $\Lambda \subseteq \Lambda^{ir}$ *или* $\Lambda \subseteq \Lambda^r$.

Доказательство. Сначала обоснуем утверждение теоремы "слева на право". Поскольку Λ непротиворечива, можно построить ее каноническую модель $\mathbf{M} = (\mathbf{W}, \mathbf{R}, \mathbf{R}^*, \mathbf{V})$ в языке с пустой сигнатурой (но содержащем константы $\bot$ и $\top$). Очевидно, что либо (1) имеется такая $w \in \mathbf{W}$, что ни для какой $v \in \mathbf{W}$ не имеет места $w\ \mathbf{R}\ v$, либо (2) для всякой $w \in \mathbf{W}$ имеется такая $v \in \mathbf{W}$, что $w\ \mathbf{R}\ v$. Мы покажем, что в первом случае $\Lambda \subseteq \Lambda^{ir}$, в то время как во втором случае $\Lambda \subseteq \Lambda^r$.

(1) Предположим, что для некоторой $w \in \mathbf{W}$ не имеется такой $v \in \mathbf{W}$, что $w\ \mathbf{R}v$. Рассмотрим подмодель $\mathbf{M}_w$ модели $\mathbf{M}$, порожденную точкой w. Сначала покажем, что $\mathbf{M}_w$ содержит только одну точку, w. Во-первых, согласно предположению (1), нет такой $v \in \mathbf{W}$, что $w\ \mathbf{R}\ v$. Во-вторых, ни для какой $v \neq w$ не имеет места $w\ \mathbf{R}^*\ v$. Действительно, в обратном случае, поскольку w и v – различные максимально Λ-непротиворечивые множества, имеется формула ϕ такая, что $\sim\phi \in w$ и $\phi \in v$. Но тогда, по определению $\mathbf{R}^*$, $\Diamond^*\phi \in w$ и, поскольку в силу Леммы 3, $\Diamond^*\phi \leftrightarrow \phi \vee \Diamond\ \Diamond^*\phi \in w$, мы получаем, что $\Diamond\ \Diamond^*\phi \in w$. Тогда, в силу Леммы 4, для некоторого $v \in \mathbf{W}$ имеет место $w\mathbf{R}v$; это противоречит предположению (1); следовательно, допущение о наличии такого $v \neq w$, что $w\ \mathbf{R}^* v$, приводит нас к противоречию. Таким образом, мы обосновали, что $\mathbf{M}_w$ содержит только w.

Теперь, с целью получения противоречия, допустим, что Λ не включена в Λ^r и, таким образом, существует такая модель $M = (\{v\}, R = \varnothing, R^* = \{v, v\}, V)$, что для некоторой $\psi \in \Lambda$, мы имеем $M, v \mid\neq \psi$ (заметим, что ψ может быть формулой языка с произвольной сигнатурой). На основе означивания V модели M построим подстановочный случай ψ' формулы ψ; а именно для каждого параметра p, входящего в ψ, сделаем следующую подстановку: если $v \in V(p)$, то заменим p на $\top$; если $v \notin V(p)$, то заменим

p на $\perp$. Легко увидеть, что M, $v \models \psi$ е.т.е. M, $v \models \psi'$; следовательно, M, $v \not\models \psi'$. Теперь, так как ψ' – это подстановочный случай ψ, мы имеем $\psi' \in \Lambda$. Следовательно, в силу Леммы 3, $\mathbf{M}, w \models \psi'$, и в силу Леммы 1, $\mathbf{M}_w, w \models \psi'$. Поскольку M и $\mathbf{M}_w$ основаны на изоморфных фреймах и тривиально согласуются на всех параметрах формулы ψ, в силу Факта 1, $\mathbf{M}_w, w \models \psi'$ е.т.е. M, $v \models \psi'$. Мы вынуждены заключить, что M, $v \models \psi'$. Мы получили противоречие и, таким образом, обосновали, что $\Lambda \subseteq \Lambda^{ir}$.

(2) Предположим, что для всякой $w \in \mathbf{W}$ имеется такая $v \in \mathbf{W}$, что $w\mathbf{R}v$. Тогда, поскольку $\mathbf{R} \subseteq \mathbf{R}^*$, для всякой $w \in \mathbf{W}$ имеется такая $v \in \mathbf{W}$, что $w\mathbf{R}^*v$. Рассмотрим модель M = ($\{u\}$, R, R*, V), где R = R* = $\{(u, u)\}$ и V(p) = $\varnothing$ для каждого p. Легко увидеть, что M – это p-морфный образ $\mathbf{M}$; следовательно, в силу Лемм 2 и 3, каждая теорема Λ истинна в точке u модели M. При помощи аргумента, подобного использованному в случае (1), мы можем показать, что ни одна теорема Λ не может быть провалена в модели, основанной на фрейме, изоморфном фрейму, на котором основана M. Отсюда следует, что $\Lambda \subseteq \Lambda^{r}$.

Утверждение теоремы "справа налево" следует из того, что обе логики Λ^{ir} и Λ^{r} непротиворечивы. Их непротиворечивость следует из того, что (a) обе логики являются логиками одной точки и (b) ни одна формула не может быть истинной в точке вместе со своим отрицанием. **Q.E.D.**

Следствие 1. *Пусть* Λ *– эффективно конечноаксиоматизируемое, непротиворечивое расширение* ***Seg***. *Проблема непротиворечивости* Λ *разрешима.*

ЛИТЕРАТУРА

[Makinson, 1971] *Makinson*, D. Some embedding theorems for modal logic. // Notre Dame Journal of Formal Logic. 1971.Vol. 12. P. 252-254.

СОДЕРЖАНИЕ

Анисов А.М. Определение понятия реальной истины в теории множеств с атомами 5

Бажанов В.А. П.С.Порецкий. Жизнь и научная деятельность пионера исследований в области математической логики в России 23

Бежанишвили М.Н. Логическое всеведение и эпистемическое табличное исчисление предикатов 34

Бирюков Б.В., Бирюкова Л.Г. Людвиг Витгенштейн и Софья Александровна Яновская. «Кембриджский гений» знакомится с советскими математиками 30-х годов 46

Быстров П.И. Релевантное исчисление в форме аналитических таблиц 95

Васюков В.Л. Не-фрегевский путеводитель по гуссерлевским и мейнонговским джунглям 99

Девяткин Л.Ю. Трехзначные изоморфы классической логики 119

Зайцев Д.В., Шрамко Я.В. Логическое следование и выделенные значения 126

Знатнов С.Ю. О программном обеспечении компьютерных доказательств 138

Карпенко А.С. Предмет логики в свете основных тенденций ее развития 149

Левин В.И. Интервальная логика и некоторые ее применения .. 172

Маркин В.И. Фундаментальная силлогистика с неопределенно-местной константой 187

Микиртумов И.Б. Композициональные и некомпозициональные типы в интенсиональной логике 200

Моисеев В.И. Проективно-модальная Онтология и некоторые ее приложения 215

Мчедлишвили Л.И. Аристотелевская аподиктическая силлогистика: метод получения избыточной информации; фрагментарность 228

Павлов С.А. Расширение области определения предиката истинности на ограниченную область символьных выражений 238

Попов В.М., Шуклин Г.Н. Интуиционистски приемлемая паранормальная логика 243

Рыбаков М.Н. Погружение интуиционистской логики в её фрагмент от двух переменных и сложность этого фрагмента 247
Смирнова Е.Д. К экспликации семантического понятия истинности 262
Суворов В.В. Синтез логических аксиом в пространстве гиперкубовых структур 267
Хаханян В.Х. Теория множеств с интуиционистской логикой: базисная система 278
Чагров А.В. Алгоритмическая проблема финитарного семантического следования для базисной и формальной логик А.Виссера 282
Шалак В.И. Логика абелевых групп 290
Шалак В.И. Логика групп и свободные группы 298
Шкатов Д. П. Аналог теоремы Макинсона для нормальных модальных логик с оператором Сегерберга 304

CONTENTS

Anisov A.M. Definition of Real Truth Concept in Set Theory with Atoms 5

Bazhanov V.A. P.S.Poretsky. Life and Scientific Activity of Pioneer in Russian Investigations in the Field of Mathematical Logic 23

Bezhanishvili M.N. Logical Omniscience and Epistemic Tableaux Predicate Calculus 34

Biryukov B.V., Biryukova L.G. Ludvig Wittgenstain and Sofia Aleksandrovna Yanovskaya. "Cambridge Genius" Becomes Acquainted with Soviet Mathemathicians in 30th Years..... 46

Bystrov P.I. Relevant Calculus in Analitic Tableaux Form 95

Vasyukov V.L. Non-Fregean Guide for Husserlian and Meinongian Djungles 99

Devyatkin L.Y. Three-Valued Isomorphisms of Classical Logic 119

Zaitsev D.V., Shramko Y.V. Logical Entailment and Marked Values 126

Znatnov S.Y. On Program Support for the Computer Proofs..... 138

Karpenko A.S. Subject of Logic in the Light of the Main Trends of its Development 149

Levin V.I. Interval Logic and Some its Applications 172

Markin V.I. Fundamental Syllogistics with Indefinably-Placed Constant 187

Mikirtumov I.B. Compositional and Non-Compositional Types in Intensional Logic 200

Moiseev V.I. Projective-Modal Ontology and Some It's Applications 215

Mchedlishvili L.I. Aristotle's Apodeictic Syllogistics: Method of Derivation of Superfluous Information; Fragmentarity..... 228

Pavlov S.A. Extensions of the Domain of Definition of Truth Predicate to the Restricted Scope of Symbolic Expressions 238

Popov V.M., Shuklin G.N. Intuitionistically Acceptable Paranormal Logic 243

Rybakov M.N. Emdedding of Intuitionistic Logic in His Two-Variable Fragment and Complexity oh this Fragment 247

Smirnova E.D. Towards an Explication of Semantics Concept of Truth 262

Suvorov V.V. Synthesis of Logical Axioms in Hypercube Structures Space 267

Khakhanian V. H. Set Theory with Intuitionistic Logic: Dasic System 278

Chagrov A.V. Algorithmic Problem of Finitary Semantics Entailment for Basic and Formal A.Visser's Logics 282

Shalack V.I. Logic of Abelian Groups 290

Shalack V.I. Logic of Groups and Free Groups 298

Shkatov D.P. Analogue of Makinson's Theorem for the Normal Modal Logics with Segerberg's Operator 304

Научное издание

Логические исследования
Вып. 11

Утверждено к печати
Ученым советом
Института философии РАН

Зав. редакцией *Г.И. Чертова*
Редактор *Е.А. Жукова*
Художественный редактор *Т.В. Болотина*

Компьютерный набор выполнен
в Институте философии РАН

Компьютерная верстка
С.А. Павлов

Подписано к печати 02.11.2004
Формат 60 × 90 1/16. Гарнитура Таймс
Печать офсетная
Усл.печ.л. 20,0. Усл.кр.-отт. 20,3. Уч.-изд.л. 19,5
Тираж 420 экз. Тип. зак. 3680.

Издательство "Наука"
117997, Москва, Профсоюзная ул., 90

E-mail: secret@naukaran.ru
Internet: www.naukaran.ru

Отпечатано с готовых диапозитивов
в ГУП "Типография "Наука"
199034, Санкт-Петербург, 9 линия, 12

Воронин А.А. **Миф техники**

Ставится проблема: преодолеть жесткое противопоставление культуры и техники, ставшее общим местом во многих попытках объяснить их взаимодействие. Технократизм и культуроцентризм – однобокие трактовки реальной проблемы единства и многообразия форм человеческого творчества. В технике, как и в культуре, а также в науке и других видах познавательной и продуктивной деятельности человека лежат общие, глубокие основания – общность креативной, производящей и коммуникативной сущности человеческой природы. Такое осознание сущности техники облегчит ее гуманизацию и точнее расставит акценты ответственности человека за техническую среду.

Для всех интересующихся проблемами методологии науки, взаимодействием культуры и техники, их сущностью и будущим.

АДРЕСА КНИГОТОРГОВЫХ ПРЕДПРИЯТИЙ ТОРГОВОЙ ФИРМЫ "АКАДЕМКНИГА" РАН

Магазины "Книга-почтой"

121099 Москва, Шубинский пер., 6; 241-02-52
E-mail: akadem.kniga@G23.relcom.ru
197345 Санкт-Петербург, ул. Петрозаводская, 76; (код 812) 235-40-64

Магазины "Академкнига" с указанием "Книга-почтой"

690088 Владивосток, Океанский пр-т, 140 ("Книга-почтой");
(код 4232) 45-27-91 antoli@mail.ru
620151 Екатеринбург, ул. Мамина-Сибиряка, 137 ("Книга-почтой");
(код 3433) 50-10-03 KNIGA@SKY.ru
664033 Иркутск, ул. Лермонтова, 298 ("Книга-почтой"); (код 3952) 42-96-20
val@igc.irk.ru
660049 Красноярск, ул. Сурикова, 45; (код 3912) 27-03-90
AKADEMKNIGA@KRASMAIL.RU
220012 Минск, проспект Ф. Скорины, 72; (код 10375-17) 232-00-52, 232-46-52
117312 Москва, ул. Вавилова, 55/7; 124-55-00 akadkniga@voxnet.ru;
akadkniga@nm.ru; http://akadkniga.nm.ru
117192 Москва, Мичуринский пр-т, 12; 932-74-79
127051 Москва, Цветной бульвар, 21, строение 2; 921-55-96
113105 Москва, Варшавское ш., 9, Книж. ярмарка на Тульской (5 эт.);
737-03-33, 737-03-77 (доб. 50-10)
117997 Москва, ул. Профсоюзная, 90; 334-72-98
630091 Новосибирск, Красный пр-т, 51; (код 3832) 21-15-60
akademkniga@mail.ru
630090 Новосибирск, Морской пр-т, 22 ("Книга-почтой");
(код 3832) 30-09-22 akdmn2@mail.nsk.ru
142290 Пущино Московской обл., МКР "В", 1 ("Книга-почтой");
(код 277) 3-38-80
191104 Санкт-Петербург, Литейный пр-т, 57; (код 812) 272-36-65 ak@akbook.ru
199164 Санкт-Петербург, Таможенный пер., 2; (код 812) 328-32-11
194064 Санкт-Петербург, Тихорецкий пр-т, 4; (код 812) 247-70-39
199034 Санкт-Петербург, Васильевский остров, 9-я линия, 16;
(код 812) 323-34-62
634050 Томск, Набережная р. Ушайки, 18;
(код 3822) 51-60-36 akademkniga@mail.tomsknet.ru
450059 Уфа, ул. Р. Зорге, 10 ("Книга-почтой"); (код 3472) 24-47-74
450025 Уфа, ул. Коммунистическая, 49; (код 3472) 22-91-85

Коммерческий отдел, г. Москва
Телефон 241-03-09
E-mail: akadem.kniga@g 23.relcom.ru
akadkniga@voxnet.ru
Склад, телефон 291-58-87
Факс 241-02-77

По вопросам приобретения книг
государственные организации
просим обращаться также
в Издательство по адресу:
117997 Москва, ул. Профсоюзная, 90
тел. факс (095) 334-98-59
E-mail: initsiat @ naukaran.ru
Internet: www.naukaran.ru