РОССИЙСКАЯ АКАДЕМИЯ НАУК

ИНСТИТУТ ФИЛОСОФИИ

LOGICAL INVESTIGATIONS

Volume 12

MOSCOW NAUKA 2005

ЛОГИЧЕСКИЕ ИССЛЕДОВАНИЯ

Выпуск 12

МОСКВА НАУКА 2005

УДК 16
ББК 87.4
Л69

Логические исследования / [отв. ред. А.С. Карпенко]; Ин-т философии РАН. – М.: Наука, 1993 –.–
Вып. 12. – 2005. – 319 с. – ISBN 5-02-034966-6 (в пер.).

В двенадцатом выпуске «Логических исследований» опубликованы работы, в которых изложены новые результаты, полученные в различных областях современной логики. Дальнейшее развитие получили исследования в области неклассических логик: модальная логика, интуиционистская логика, базисная логика Виссера, паранормальная логика. Впервые уделено внимание истории отечественной логики.

Сборник предназначен логикам, философам, математикам и всем тем, кто интересуется различными приложениями логики.

По сети «Академкнига»

Logical Investigations. – Vol. 12. – M.: Nauka, 2005. – 319 p. – ISBN 5-02-034966-6.

12 volume of «Logical Investigations» contains papers presenting new results obtained in various areas of symbolic logic. In particular, the volume contains papers presenting advances in various braches of non-classical logics: modal logic, intuitionistic logic, Visser's basic logic, paranormal logic. For the first time, «Logical Investigations» publish papers on the history of logic in Russia.

The publication is addressed to logicians, philosophers, mathematicians, and those interested in logic and its applications.

ISBN 5-02-034966-6

Н.А. Алёшина*, Д.П. Шкатов**

О МОДАЛЬНЫХ ЛОГИКАХ С ЭКЗИСТЕНЦИАЛЬНОЙ МОДАЛЬНОСТЬЮ

Abstract. *In this paper we present Hilbert-style axiomatization of polymodal logic* $\mathbf{K}^{\#}$ *with "existential" modality, that is modality that allows us to say that a formula is true in a world accessible by* some *accessibility relation, and prove its completeness. We also prove completeness for the extension of* $\mathbf{K}^{\#}$ *obtained by augmenting it the axiom of determinism.*

1. Цель работы

В настоящей работе мы представляем аксиоматизацию гильбертовского типа полимодальной логики $\mathbf{K}^{\#}$ с "экзистенциальной" модальностью – модальностью, позволяющей записывать утверждения вида "формула φ истинна в мире, достижимом по *какому-то* отношению достижимости" – и доказываем ее полноту. Мы также доказываем полноту расширения $\mathbf{K}^{\#}$, получаемого за счет добавления к $\mathbf{K}^{\#}$ "аксиомы детерминизма".

2. Постановка задачи

В настоящее время одним из наиболее популярных применений модальных логик является использование модальных языков для описания систем транзиций, представляющих собой непустое множество W и множество бинарных отношений на W. Важность таких систем обусловлена тем, что очень широкий круг феноменов, изучаемых в различных областях знания, может быть формально представлен в виде системы транзиций. В философии "возможные миры" и различного рода "достижимости" между ними (временная, эпистемическая, логическая) могут быть представлены как система транзиций. В теоретической компьютеристике состояния вычислительного устройства и переходы из одного состояния в другое, интернет-сайты и ссылки между ними представимы как системы транзиций. (Примеры из других областей знания можно найти в [2].) Особый интерес представляют детерминистические системы, то есть системы в которых из каж-

* Работа выполнена при поддержке EPSRC (Великобритания), грант № GR/-M98050/01.

** Работа выполнена при поддержке РГНФ, грант № 04-03-00266а.

дого элемента W по каждому из отношений системы можно попасть в не более чем один элемент W.

При описании системы транзиций $T = (W, R_i \in I)$ при помощи модальных языков соответствующий язык, помимо стандартных пропозициональных связок, оснащается "элементарной" модальностью $<i>$ для каждого бинарного отношения R_i, содержащегося в T. Формулы вида $<i>\ \varphi$, оцениваемые на элементах W, в дальнейшем называемых точками, понимаются так: $<i>\ \varphi$ истинна в точке w, если в некоторой точке v, такой, что wR_iv, истинна φ. Помимо этого модальный язык может содержать модальные операторы, например стандартные операторы PDL (пропозициональной динамической логики; детали см. в [2]). В системах транзиций с более чем одним бинарным отношением полезно иметь модальный оператор, позволяющий сказать, что формула φ истинна в точке, достижимой по *какому-то* отношению. Эта модальность, обозначенная $<\#>$, была введена в [1] для описания систем транзиций, моделирующих системы частично структурированной информации, такие, как World-Wide-Web. Очевидно, что в контексте философской логики $<\#>$ может использоваться в рассуждениях о фактах, которые возможны в каком-то, не уточненном, отношении.

В работе [1] оператор $<\#>$ изучался семантически в контексте языка, являющегося расширением языка PDL. В настоящей работе мы рассматриваем $<\#>$ синтаксически, в более простом контексте. Во-первых, мы представляем полную аксиоматизацию гильбертовского типа минимальной полимодальной логики, содержащей $<\#>$; эту логику мы называем $\mathbf{K}^{\#}$. Во-вторых, мы делаем то же самое для логики всех детерминистических систем транзиций; эту логику мы называем $\mathbf{K}^{\#}_{\mathbf{D}}$.

3. Логики $\mathbf{K}^{\#}$ и $\mathbf{K}^{\#}_{\mathbf{D}}$

Рассмотрим пропозициональный язык $L^{\#}$, содержащий (i) счетно-бесконечное множество пропозициональных параметров Par, произвольные члены которого мы будем обозначать при помощи $p, q, r, \ldots$, (ii) пропозициональные связки $\neg$ (отрицание) и $\vee$ (дизъюнкция), (iii) для каждого элемента i счетно-бесконечного множества I модальных индексов, унарную модальную связку $<i>$ и (iv) унарную модальную связку $<\#>$. Остальные связки, в том числе дуальные модальности $[i]$ и $[\#]$, определяются обычным образом. Формулы $L^{\#}$ определяются стандартно; они интерпретируются на $L^{\#}$-моделях.

Определение 1. $L^{\#}$-моделью *назовем структуру* $M = (W, \{R\}_{i \in I}, R_{\#}, V)$, *где (1)* W *– непустое множество, (2) каждое* R_i *– это* *бинарное отношение на W, (3) $R_{\#} = \bigcup_{i \in I} R_i$, и (4) V – это функция (оценки) из Par в 2^W. $L^{\#}$-модель $M = (W, \{R_i\}_{i \in I}, R_{\#}, V)$ является* детерминистической, *если для каждого $w \in W$ и каждого $i \in I$ существует не более одного $v \in W$, такого что wR_iv.*

Формулы $L^{\#}$ оцениваются в точках W стандартным образом (мы пишем $M, w \models \varphi$, если φ истинна в точке w модели M):

$M, w \models p$, е.т.е. (если и только если) $\varphi \in V(p)$;
$M, w \models \neg\varphi$, е.т.е. неверно, что $M, w \models \varphi$;
$M, w \models \varphi \vee \psi$, е.т.е. $M, w \mid\!- \varphi$ или $M, w \models \psi$;
$M, w \models \langle i \rangle\, \varphi$, е.т.е. для некоторого $v \in W$, wR_iv и $M, v \models \varphi$;
$M, w \models \langle \# \rangle\, \varphi$, е.т.е. для некоторого $v \in W$, $wR_{\#}v$ и $M, v \models \varphi$.

Легко заметить, что вводить оператор $\langle \# \rangle$ имеет смысл только в языки, содержащие бесконечное число модальных индексов; в противном случае, $\langle \# \rangle\, \varphi$ определима через конечную дизъюнкцию формул вида $\langle i \rangle\, \varphi$.

Обозначим логику всех $L^{\#}$-моделей $\mathbf{K}^{\#}$ и логику всех детерминистических $L^{\#}$-моделей $\mathbf{K}^{\#}_{\mathbf{D}}$. Наша задача – формулировка полных аксиоматизаций $\mathbf{K}^{\#}$ и $\mathbf{K}^{\#}_{\mathbf{D}}$. Поскольку $\langle \# \rangle$ аналогичен квантору существования первопорядковой логики, разумно предположить, что аксиоматизация $\mathbf{K}^{\#}$ должна выглядеть следующим образом (π обозначает произвольный $i \in I$ или #):

Схемы аксиом

(PL) Все пропозициональные классические тавтологии.
(K) $[\pi]\,(\varphi \to \psi) \to ([\pi]\,\varphi \to [\pi]\,\psi)$.
(ER) $\langle i \rangle\, \varphi \to \langle \# \rangle\, \varphi$.

Правила вывода

(MP) Из $\varphi \to \psi$ и φ выводима ψ.
(N) Из φ выводима $[\pi]\,\varphi$.
(EL) Из $\langle i \rangle\, \varphi \to \psi$ выводима $\langle \# \rangle\, \varphi \to \psi$ при условии, что i не входит в ψ.

Также разумно предположить, что аксиоматизация $\mathbf{K}^{\#}_{\mathbf{D}}$ может быть получена добавлением к вышеприведенному списку схем аксиом следующей схемы, иногда называемой "аксиомой детерминизма":

(D) $\langle i \rangle\, \varphi \to [i]\,\varphi$.

Нетрудно проверить следующий факт.

Теорема 2. *$\boldsymbol{K}^{\#}$ непротиворечива по отношению к классу всех $L^{\#}$-моделей. $\boldsymbol{K}^{\#}_{\boldsymbol{D}}$ непротиворечива по отношению к классу всех детерминистических $L^{\#}$-моделей.*

Также нетрудно заметить, что ни $\mathbf{K}^{\#}$ ни $\mathbf{K}^{\#}_{\mathrm{D}}$ не имеют строго полной аксиоматизации. Действительно, любое конечное подмножество множества $\{\langle\#\rangle\, p, \neg\langle i\rangle\, p \colon i \in I\}$ выполнимо, в то время как оно само невыполнимо. Следовательно, обе $\mathbf{K}^{\#}$ и $\mathbf{K}^{\#}_{\mathrm{D}}$ некомпактны. Поскольку некомпактные логики не имеют строго полной аксиоматизации, ни $\mathbf{K}^{\#}$ ни $\mathbf{K}^{\#}_{\mathrm{D}}$ не имеют строго полной аксиоматизации.

В последующих разделах мы доказываем слабую полноту $\mathbf{K}^{\#}$ и $\mathbf{K}^{\#}_{\mathrm{D}}$, то есть показываем, что любая $\mathbf{K}^{\#}$–непротиворечивая и любая $\mathbf{K}^{\#}_{\mathrm{D}}$–непротиворечивая формула имеет модель.

4. Полнота $\mathbf{K}^{\#}$

Для доказательства полноты мы будем использовать технику доказательства полноты через построение конечных моделей (completeness-via-finite-models), подробно описанную в [2].

Определим псевдо-отрицание $\sim\varphi$ формулы φ следующим образом: если φ имеет вид $\neg\psi$, то $\sim\varphi$ – это ψ; в противном случае, $\sim\varphi$ – это $\neg\psi$. Замыканием множества формул Σ будем называть множество $CL(\Sigma)$, содержащее все подформулы формул из Σ и их псевдо-отрицания. Легко видеть, что замыкание конечного множества конечно. Конечная каноническая модель для формулы φ строится из *$\{\varphi\}$-атомов*, максимально $\mathbf{K}^{\#}$–непротиворечивых подмножеств $CL(\{\varphi\})$. (В общем, для произвольного множества формул Σ, Σ-атом – это максимально $\mathbf{K}^{\#}$–непротиворечивое подмножество $CL(\Sigma)$.)

Лемма 3. *Пусть Σ – конечное множество $L^{\#}$-формул и Γ – непротиворечивое подмножество $CL(\Sigma)$. Тогда Γ может быть расширено до Σ-атома.*

Доказательство. Чтобы получить требуемый атом, надо представить формулы $CL(\Sigma)$ в виде списка и добавить к Γ для каждой формулы из списка либо ее саму, либо ее псевдо-отрицание, так, чтобы множество формул, получаемое на каждом шаге, было непротиворечивым.

Нетрудно проверить, что каждый Σ–атом A обладает следующими свойствами:

(1) Для всякой $\psi \in CL(\Sigma)$ в точности одна из ψ и $\sim\psi$ принадлежит A.

(2) Для всякой $\varphi \vee \psi \in CL(\Sigma)$, $\varphi \vee \psi \in A$ е.т.е. $\varphi \in A$ или $\psi \in A$.

Определение 4. *Пусть Σ – конечное множество $L^{\#}$-формул и пусть a – модальный индекс, не встречающийся в Σ. Конечная каноническая модель M^{Σ} для $\mathbf{K}^{\#}$ относительно Σ – это структура $(At(\Sigma), \{R^{\Sigma}{}_{i}\}_{i \in I}, R^{\Sigma}{}_{\#}, V^{\Sigma})$, где*

(i) $At(\Sigma)$ – множество всех Σ–атомов.

(ii) AR_iB е.т.е. (1) i встречается в Σ или $i = a$ и (2) $A^\wedge \wedge \langle i\rangle B^\wedge$ непротиворечива ($A^\wedge$ обозначает конъюнкцию всех формул из A).

(iii) $AR^\Sigma_\# B$ е.т.е. $A^\wedge \wedge \langle\#\rangle B^\wedge$ непротиворечива.

(iv) Для каждого $p \in Par$, $V^\Sigma(p) = \{A \in At(\Sigma) : p \in A\}$.

Стандартным образом (детали см. в [2]) может быть доказана следующая лемма.

Лемма о существовании. *Пусть Σ – конечное множество $L^\#$-формул, A – это Σ-атом и π – или модальный индекс, входящий в Σ, или $\#$. Тогда для каждой $\langle\pi\rangle\ \varphi \in CL(\Sigma)$ существует Σ-атом такой, что $AR^\Sigma_\pi B$ и $\varphi \in B$.*

Из леммы о существовании и вышеперечисленных свойств атомов непосредственно следует следующая лемма.

Истинностная лемма *Пусть Σ – конечное множество $L^\#$-формул, M^Σ – конечная каноническая модель относительно Σ и $\varphi \in CL(\Sigma)$. Тогда для каждого $A \in At(\Sigma)$ имеет место, что $M^\Sigma, A \models \varphi$ е.т.е. $\varphi \in A$.*

Остается только доказать, что конечные канонические модели являются $L^\#$-моделями.

Лемма 5. *Каждая конечная каноническая модель $M^\Sigma = (At(\Sigma), \{R^\Sigma_i\}_{i \in I}, R^\Sigma_\#, V^\Sigma)$ для* **K$^\#$** *является $L^\#$-моделью.*

Доказательство. Все, что требуется доказать, это что $R^\Sigma_\# = \bigcup_{i \in I} R^\Sigma_i$. Сначала докажем включение справа налево. Предположим, с целью получения противоречия, что для некоторого $i \in I$ имеет место $A\ R^\Sigma_i\ B$, и что не имеет места $A\ R^\Sigma_\#\ B$. Тогда, согласно Определению 4, не имеет места $A^\wedge \wedge \langle i\rangle B^\wedge \vdash$ F, но имеет место $A^\wedge \wedge \langle\#\rangle B^\wedge \vdash$ F. Тогда $\langle\#\rangle B^\wedge \vdash \neg A^\wedge$ и следовательно, в силу **(ER)**, $\langle i\rangle B^\wedge \vdash \neg A^\wedge$, что невозможно, поскольку $A^\wedge \wedge \langle i\rangle B^\wedge$ непротиворечива.

Теперь докажем слева направо. Предположим, что $A\ R^\Sigma_\#\ B$. Если для некоторого $i \in I$ имеет место $A\ R^\Sigma_i\ B$, то доказательство закончено. В противном случае мы можем показать, что имеет место $A\ R^\Sigma_a\ B$. Действительно, в противном случае $A^\wedge \wedge \langle a\rangle B^\wedge \vdash$ F и, следовательно, $\langle a\rangle B^\wedge \vdash \neg A^\wedge$. Тогда, в силу **(EL)**, которое может быть применено, поскольку a не входит в Σ, $\langle\#\rangle B^\wedge \vdash \neg A^\wedge$, что невозможно, так как $A\ R^\Sigma_\#\ B$ и, следовательно, $A^\wedge \wedge \langle\#\rangle B^\wedge$ непротиворечива.

Теорема 6. ***K$^\#$*** *слабо полна относительно класса всех $L^\#$-моделей.*

Доказательство. Непосредственно следует из Леммы 3, Истинностной леммы и Леммы 5.

Замечание 7. Если бы при построении конечной канонической модели относительно Σ для $\mathbf{K}^{\#}$ мы не добавили к модальным индексам Σ "новый индекс" a, то мы не смогли бы доказать, что эта модель является $L^{\#}$-моделью. В качестве контрпримера рассмотрим $\Sigma = \{\langle\#\rangle p \wedge \neg \langle b\rangle p\}$. В канонической модели относительно такого Σ есть атом, а именно атом, содержащий $\langle\#\rangle p \wedge \neg \langle b\rangle p$, из которого по $R^{\Sigma}_{\#}$ достижим атом, не достижимый ни по какому R^{Σ}_{i}.

5. Полнота $\mathbf{K}^{\#}_{\mathrm{D}}$

Вышеприведенное доказательство не может быть легко переделано в доказательство полноты $\mathbf{K}^{\#}_{\mathrm{D}}$. Если мы просто заменим в определении конечных канонических моделей $\mathbf{K}^{\#}$-непротиворечивость $\mathbf{K}^{\#}_{\mathrm{D}}$–непротиворечивостью, то мы не сможем доказать, что полученные модели являются детерминистическими. Тем не менее, мы можем перестроить конечную каноническую модель для $\mathbf{K}^{\#}_{\mathrm{D}}$ в детерминистическую $L^{\#}$-модель.

Для доказательства полноты $\mathbf{K}^{\#}_{\mathrm{D}}$ нам придется несколько изменить определение замыкания. Если ψ является подформулой φ, то модальной глубиной вхождения ψ в φ мы называем число модальных связок φ, в области действия которых находится данное вхождение ψ; обозначим это число посредством $\mathbf{md}_{\varphi}(\psi)$. Детерминистическим замыканием множества $L^{\#}$-формул Σ будем называть множество $\mathrm{DCL}(\Sigma)$, содержащее (1) все подформулы формул из Σ, (2) их псевдо-отрицания и (3) для каждой $\varphi \in \Sigma$ и ψ такой, что $\mathbf{md}_{\varphi}(\psi) > 0$, если индекс i встречается в Σ, то $\langle i\rangle \psi \in \mathrm{DCL}(\Sigma)$ и $\langle i\rangle \sim\psi \in \mathrm{DCL}(\Sigma)$. Легко увидеть, что если Σ конечно, то $\mathrm{DCL}(\Sigma)$ тоже конечно. Σ-атомы теперь определяются как максимальные непротиворечивые подмножества $\mathrm{DCL}(\Sigma)$.

Определение 8. *Пусть Σ – конечное множество $L^{\#}$-формул. Конечная каноническая модель M^{Σ} для* $\mathbf{K}^{\#}_{\mathrm{D}}$ *относительно Σ – это структура $(At(\Sigma), \{R^{\Sigma}_{i}\}_{i \in I}, R^{\Sigma}_{\#}, V^{\Sigma})$, где*

(i) $At(\Sigma)$ – множество всех Σ–атомов.

(ii) $AR^{\Sigma}_{i}B$ е.т.е. $\hat{A} \wedge \langle i\rangle \hat{B}$ непротиворечива.

(iii) $AR^{\Sigma}_{\#}B$ е.т.е. $\hat{A} \wedge \langle\#\rangle \hat{B}$ непротиворечива.

(iv) Для каждого $p \in Par$, $V^{\Sigma}(p) = \{A \in At(\Sigma) : p \in A\}$.

Аналогично тому, как это было сделано в предыдущем разделе, могут быть доказаны следующие аналоги Истинностной леммы и Леммы 5.

Истинностная лемма для $\mathbf{K}^{\#}_{\mathrm{D}}$. *Пусть Σ – конечное множество $L^{\#}$-формул, M^{Σ} – конечная каноническая модель относительно Σ*

для $\mathbf{K}^{\#}{}_{\mathbf{D}}$ *и* $\varphi \in DCL(\Sigma)$. *Тогда для каждого* $A \in At(\Sigma)$ *имеет место, что* $M^{\Sigma}, A \vdash \varphi$ *е.т.е.* $\varphi \in A$.

Лемма 9. *Каждая конечная каноническая модель* $M^{\Sigma} = (At(\Sigma), \{R^{\Sigma}{}_{i}\}_{i \in I}, R^{\Sigma}{}_{\#}, V^{\Sigma})$ *для* $\mathbf{K}^{\#}{}_{\mathbf{D}}$ *является* $L^{\#}$*-моделью.*

Теперь нам нужно преобразовать M^{Σ} в детерминистическую модель. Мы сделаем это в два этапа: сначала избавимся от не-детерминизма в отношении модальных индексов, не встречающихся в Σ, и затем избавимся от не-детерминизма в отношении модальных индексов, встречающихся в Σ. Первый этап прост.

Лемма 10. Пусть $M^{\Sigma} = (At(\Sigma), \{R^{\Sigma}{}_{i}\}_{i \in I}, R^{\Sigma}{}_{\#}, V^{\Sigma})$ – *конечная каноническая модель для* $\mathbf{K}^{\#}{}_{\mathbf{D}}$ *относительно* Σ. *Тогда существует модель* $M'^{\Sigma} = (At(\Sigma), \{R'^{\Sigma}{}_{i}\}_{i \in I}, R^{\Sigma}{}_{\#}, V^{\Sigma})$ *такая, что (1) для каждого* i, *не имеющего вхождения в* Σ, *и всяких* $A, B, B' \in At(\Sigma)$, *если* $AR'^{\Sigma}{}_{i}B$ *и* $AR'^{\Sigma}{}_{i}B'$, *то* $B = B'$, *и (2) для всякой* $\varphi \in DCL(\Sigma)$ *и всякого* $X \in At(\Sigma)$ *имеет место* $M'^{\Sigma}, X \models \varphi$ *е.т.е.* $M^{\Sigma}, X \models \varphi$.

Доказательство. Заметим, что в силу Определения 8, если $AR^{\Sigma}{}_{\#}B$, то $AR^{\Sigma}{}_{i}B$ имеет место для каждого i, не входящего в Σ. Для каждой пары атомов оставим только одну "достижимость" по i, не входящему в Σ, если они не связаны никаким j, входящем в Σ, и ни одной "достижимости", если они связаны неким j, входящим в Σ.

Второй этап менее тривиален. Нам потребуется нестандартное определение развертывания модели для получения моделей, которые мы называем строго древовидными.

Определение 11. $L^{\#}$*-модель* $M = (W, \{R\}_{i \in I}, R_{\#}, V)$ *является строго древовидной, если структура* $(W, R_{\#})$ *является иррефлексивным деревом и для каждой* $(w, v) \in R_{\#}$ *существует строго один* $i \in I$, *такой, что* $(w, v) \in R_i$.

Лемма 12. *Пусть* $M = (W, \{R\}_{i \in I}, R_{\#}, V)$ – $L^{\#}$*-модель с корнем* w *(точкой, из которой может быть достигнута любая другая точка по* $R_{\#}$*). Тогда существует строго древовидная модель* $M^T = (W^T, \{R^T\}_{i \in I}, R^T{}_{\#}, V^T)$, *такая, что для каждой* $L^{\#}$*-формулы* φ *имеет место* $M^T, w \models \varphi$ *е.т.е.* $M, w \models \varphi$.

Доказательство. Сначала построим модель $M' = (W', \{R'\}_{i \in I}, R'_{\#}, V')$ такую, что

(1) W' – это множество всевозможных последовательностей формы $(w, w_1{}^{i1}, \ldots. w_n{}^{in})$, где $w_1, \ldots. w_{n \geq 0} \in W$ и $i_1, \ldots, i_n \in I$,

(2) $(w, w_1{}^{i1}, \ldots. w_n{}^{in})\ R'_j\ (w, w_1{}^{i1}, \ldots, w_n{}^{in}, w_{n+1}{}^{in+1})$, если $w_n R_j w_{n+1}$ и $j = i_{n+1}$,

(3)) $R'_{\#} = \bigcup_{i \in I} R'_i$,

(4) $V'(p) = \{(w, w_1{}^{i1}, \ldots. w_n{}^{in}): w_n \in V(p)\}$, для каждого $p \in Par$.

Затем возьмем подмодель M', порожденную w. Это и есть требуемая M^T. Легко убедиться, что M^T является строго древовидной (последний член последовательности, выступающей в качестве второго аргумента каждого R'_i имеет в точности один верхний индекс). Сохранение истинности гарантируется тем, что отношение $Z \subseteq W \times W^T$, такое, что $v\ Z\ (w, w_1^{i1}, \ldots, w_n^{in})$ е.т.е. $v = w_n$, является бисимуляцией.

Теперь докажем, что в древовидных моделях значение формулы φ в корне w модели не меняется, если мы заменим точку v, достижимую из w в k шагов, на точку v', согласующуюся с v на всех подформулах φ модальной глубины k. (В формулировке следующей леммы, $wR^k_{\#}\ v$ сокращает $wR_{\#}\ u_1\ \ldots\ u_{k-1}R_{\#}\ v$; в частности, $wR^0_{\#}\ v$ означает, что $w = v$.)

Лемма 13. *Пусть* φ *– это* $L^{\#}$*-формула,* $M = (W, \{R\}_{i \in I}, R_{\#}, V)$ *– древовидная* $L^{\#}$*-модель,* $w \in W$ *и* $v \in W$ *такая, что* $wR^k_{\#}\ v$. *Пусть* M' *получена из* M *заменой поддерева, порожденного* v, *поддеревом с корнем* v', *таким, что для каждой подформулы* ψ *формулы* φ *с* $\mathbf{md}_{\varphi}(\psi) = k$ *имеет место* $M', v \models \psi$ *е.т.е.* $M, v \models \psi$. *Тогда* $M', w \models \varphi$ *е.т.е.* $M, w \models \varphi$.

Доказательство. Индукцией по k.

Если $k = 0$, то $w = v$. Кроме того, v и v' согласуются на всех ψ с $\mathbf{md}_{\varphi}(\psi) = 0$. Поскольку $\mathbf{md}_{\varphi}(\varphi) = 0$, w и v' согласуются на φ.

Предположим, что утверждение леммы верно для $k = n$. Докажем, что тогда оно верно и для $k = n + 1$. Предположим обратное. Тогда, v и v' согласуются на всех ψ с $\mathbf{md}_{\varphi}(\psi) = n + 1$, $M, w \models \varphi$, но неверно, что $M', w \models \varphi$ (другой случай симметричен). Поскольку мы не меняли w, то φ должна содержать подформулу $\langle i \rangle \chi$ с $\mathbf{md}_{\varphi}(\langle i \rangle \chi) = 0$, такую, что для некоторой u, такой, что $w\ R_i\ u$ и u лежит на ветке, ведущей от w к v, $M, u \models \chi$, но не имеет места $M', u \models \chi$ (другой случай симметричен). Теперь $\mathbf{md}_{\varphi}(\chi) = \mathbf{md}_{\varphi}(\langle i \rangle \chi) + 1$ и каждая подформула χ является подформулой φ; следовательно, v и v' согласуются на всех подформулах χ модальной глубины n. Поскольку $uR^k_{\#}\ v$, применяя индуктивное предположение к дереву, порожденному u, получаем, что $M, u \models \chi$ е.т.е $M', u \models \chi$, что дает нам противоречие.

Лемма 14. *Пусть* $M^{\varphi T}$ *– строго древовидная модель, полученная из канонической модели относительно* $\{\varphi\}$, M^{φ} *развертыванием (процедурой, описанной в доказательстве Леммы 12) подмодели* M^{φ}, *порожденной атомом, содержащем* φ. *Тогда для любых* B, B' $\in M^{\varphi T}$ *таких, что, для некоторого* C, $C\ R_i\ B$ *и* $C\ R_i\ B'$, *и любой* ψ *с* $\mathbf{md}_{\varphi}(\psi) > 0$ *имеет место* $M^{\varphi T}, B \models \psi$ *е.т.е.* $M^{\varphi T}, B' \models \psi$.

Доказательство. Предположим обратное. Тогда $M^{\varphi T}$, $C \models \langle i\rangle\psi$ и $M^{\varphi T}, C' \models \langle i\rangle \sim\psi$. Тогда $\langle i\rangle\psi \in$ DCL($\{\varphi\}$) и $\langle i\rangle \sim\psi \in$ DCL($\{\varphi\}$) и, следовательно, в силу Истинностной леммы для $\mathbf{K}^{\#}{}_{\mathbf{D}}$ $\langle i\rangle\psi \in C$ и $\langle i\rangle \sim\psi \in$ C, что невозможно, поскольку, в силу аксиомы **(D)**, $\langle i\rangle\, \psi$, $\langle i\rangle \sim\psi \vdash$ F.

Теперь мы можем доказать полноту.

Теорема 15. *$\mathbf{K}^{\#}{}_{D}$ слабо полна по отношению к классу всех детерминистических $L^{\#}$-моделей.*

Доказательство. Возьмем $\mathbf{K}^{\#}{}_{\mathbf{D}}$-непротиворечивую формулу φ. Сначала строим конечную каноническую модель M^{φ} по отношению к $\{\varphi\}$. В M^{φ} имеется атом A_{φ}, содержащий φ. Согласно Истинностной лемме для $\mathbf{K}^{\#}{}_{\mathbf{D}}$, имеет место M^{φ}, $A_{\varphi} \models \varphi$. Удалим из M^{φ} все "лишние" достижимости по таким R_i, что i не входит в φ, получая модель M'^{φ}, как описано в доказательстве Леммы 10; в силу этой леммы M'^{φ}, $A_{\varphi} \models \varphi$. Теперь развернем M'^{φ} в строго древовидную модель $M'^{\varphi T}$, используя построение из доказательства Леммы 12; согласно этой лемме, $M'^{\varphi T}$, $A_{\varphi} \models \varphi$. Далее, уровень за уровнем, для каждого атома C и индекса i на уровне n таких, что из C достижимы по R_i атомы B_1, ... B_n, заменим все B_j на B_1. Обозначим полученную модель $M'^{\varphi T}{}'$. Согласно Лемме 13, $M'^{\varphi T}{}'$, $A_{\varphi} \models \varphi$. Наконец, построим модель $M'^{\varphi T}{}''$, заменяя в $M'^{\varphi T}{}'$ идентичные копии B_1 одним-единственным B_1. Очевидно, что $M'^{\varphi T}{}'$ и $M'^{\varphi T}{}''$ бисимулярны; следовательно, $M'^{\varphi T}{}''$, $A_{\varphi} \models \varphi$. Очевидно, что $M'^{\varphi T}{}''$ является детерминистической $L^{\#}$-моделью.

ЛИТЕРАТУРА

1. *Alechina N., de Rijke M., Demri S.* A modal perspective on path constrains // Journal of Logic and Computation. 2003.Vol. 13. P. 939-956.
2. *Blackburn P., de Rijke M., Venema Y.* Modal Logic. CUP, 2001.

А.М. Анисов

ПОНЯТИЕ РЕАЛЬНОСТИ И ЛОГИКА*

Abstract. *This paper discusses a philosophical notion of reality and shows that it was entangled with mysteries. Furthermore it argues that only through employment of methods of logic it becomes possible to overcome delusions and master complexities on the path of analysis of the notion of reality.*

Понятие *реальности* – философское. Ни одна из областей знания, кроме философии, не говорит о реальности как таковой. Наука *логика*, за исключением её чисто технических разделов, – часть философии. Точнее, когда логика выступает как теория рассуждений, – это философия. Когда логика теряет из виду рассуждения (заменяя их, например, изучением алгебр), она переходит в область математики. Логика как теория мышления – тоже философия, только устаревшая. Ибо будучи теорией рассуждений, логика касается не только мышления, но и того, о чём размышляют, т.е. реальности.

Как же рассуждают о реальности? – Согласимся, весьма поразному! И дело здесь не только в философских разногласиях (одни говорят, что реальность – характеристика субъекта; другие считают, что реальность потому и реальность, что существует независимо от субъекта, и т.п.), хотя их следует иметь в виду. Проблема глубже. Когда физик рассуждает об элементарных частицах, физиолог о рефлексах, лингвист о глаголах, математик о числах, историк о феодализме, социолог о безработице, биолог о генах и т.д. и т.п., – все они говорят о реальности. А когда мы объясняем, где что купить, как пройти туда или сюда и каков на самом деле он или какова она, – разве не о реальности мы говорим? Выясняются, таким образом, две вещи. Во-первых, о реальности говорят все, кто вообще способен говорить и рассуждать. Во-вторых, говорят они о ней настолько по-разному, что люди перестают понимать друг друга. Специалист по квантовой механике не понимает астронома, и наоборот (хотя оба физики); математический логик и математик тополог далеки друг от друга, как «да» и «нет»; эволюционист не заменит генетика, а высококлассный генетик может ничего не смылить в эволюции; вдохновенные разговоры об общих знакомых оставят равнодушными тех, кто с ними не знаком… Продолжать можно до бесконечности. Как после всего ска-

---

* Работа выполнена при поддержке РГНФ, грант № 04-03-00344.

занного понять тех философов, кто утверждает, что реальность *едина* (в любом смысле этого слова)? Особенно любопытно, когда при этом добавляют: «*на самом деле* едина».

Вот это «на самом деле», а также все аналогичные обороты типа: в действительности, в реальности, объективно и проч. и составляет проблему. Каждый, интересующийся философией, так или иначе сталкивался с утверждениями, в построение которых входит пресловутое «на самом деле». Ситуация примерно такова. Вначале говорится, что наши знания о реальности такие-то и такие-то. Затем вдруг следует заявление: но *на самом деле* реальность не такая, а такая. С некоторым ужасом предвижу, что и многие читатели разделяют данный подход. Рассмотрим следующий пример. Лектор-философ объясняет слушателям, что ещё в древности некоторые мыслители пришли к правильному выводу о том, что Земля – шар. Затем он на мгновение задумывается и, тонко улыбнувшись, добавляет: но мы-то знаем, что «шар» – это абстракция, шаров на самом деле не бывает! Возникает законный вопрос: так Земля шар или не шар? Или надо принять диалектическое «и шар, и не шар»? Логика учит, что принятие противоречия вида А и неА ведёт к катастрофе, поскольку становится доказуемым любое утверждение. Это так и в классической логике, и в логике интуиционистской (а других логик в общем-то и нет в том смысле, что по ним либо вообще никто не рассуждает, либо рассуждают, да и то изредка, лишь их создатели). Остаётся выбрать одну из альтернатив. Какую выберем – ту, которая повествует о мудрости древних, догадавшихся, что Земля – шар, или, сурово следуя по пути истины, ту, которая утверждает, что Земля на самом деле не шар?

Если эта работа попадётся на глаза человеку, имеющему геологические познания, то ему весь спор по поводу формы Земли может показаться результатом невежества. Разве в современной геологии не было установлено, что Земля – не шар, а *геоид*. Однако, к сожалению, проблема отнюдь не исчезла. «Геоид» буквально означает «подобный Земле». Получается (включаем элементарную логику), что утверждение «Земля имеет форму геоида» трансформируется в тавтологию «Земля имеет форму, подобную форме Земли». Разумеется, геологи не приняли бы эту тавтологию в качестве ответа на вопрос о форме Земли. Вместо этого геология предлагает *формулу*, описывающую геоид (более сложную, чем формулу, описывающую поверхность шара). Но как только понятие «геоид» получает математически точное определение, вновь обретают силу прежние аргументы: «геоид» – это абстракция, геоидов, как и шаров, на самом деле не существует; следовательно, Земля – не геоид.

Теперь мы готовы поставить один из основных вопросов данной работы. Философская проблема заключается, конечно, не в специально-научном вопросе о форме Земли, а в том, *есть ли у нас основания судить о реальности иначе, чем это вытекает из полученных знаний об этой реальности*? Иными словами, правомерны ли выражения следующего вида: *мы имеем знание о том, что А (или неА); однако на самом деле в реальности имеет место неА (или А)*. Выше были приведены два, как нам представляется, показательных примера выражений такого рода. Сформулируем их кратко в общей форме. 1. Знание о реальности вообще и научное знание в особенности явно не образуют никакого единства; тем не менее, *на самом деле* реальность едина (или, если угодно, одна). 2. Все наши абстракции (особенно математические) в той или иной степени искажают реальность; реальность *на самом деле* не такая.

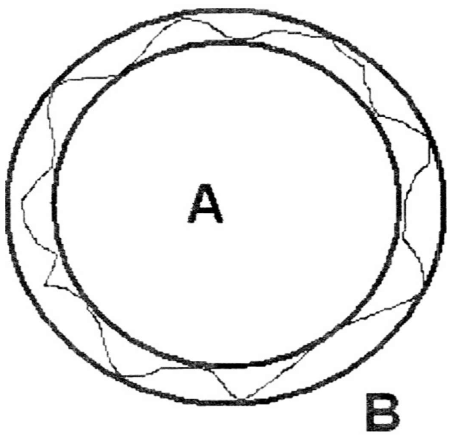
Мы полагаем, что тезисы 1 и 2 являются глубоко укоренёнными заблуждениями. Пролить свет на природу этих заблуждений позволяет современная логика. Вначале о тезисе 1. Логика членит мир по *объектно-предикатной схеме*. Иными словами, первичными сущностями признаются не физические атомы, не элементарные частицы, не идеальные числа, не сознательные личности и т.п., а объекты, которые обладают свойствами и вступают между собой в отношения. Ни сами объекты, ни их предикаты (т.е. свойства и отношения) заранее не предполагаются реальными. Одни из объектов реальны (атомы, элементарные частицы, люди), другие идеальны (числа) и т.д. Но вот интересный итог логического анализа: в логике отсутствует понятие о *совокупности всех возможных объектов*. Более узкая *совокупность всех возможных объектов науки* также отсутствует. В лучшем случае, да и то в весьма проблематичном смысле, можно вести речь о всех объектах какой-либо отдельной науки, например, математики или физики. В общей ситуации логика предлагает использовать структуры вида $<U, R_1, R_2, \ldots, R_n>$, где U – ограниченная область объектов (ограниченная в том смысле, что имеются и другие, отличные от U, области объектов), а R_i – предикаты, соотнесённые с объектами из U. Другая совокупность объектов, скажем V ($U \neq V$), породит, вообще говоря, и другие предикаты Q_j, причём связи между структурами $<U, R_1, R_2, \ldots, R_n>$ и $<V, Q_1, Q_2, \ldots, Q_m>$ может не быть, независимо от того, реальны ли объекты из U и V.

Поэтому на основании логических данных правомерно говорить о плюрализме реальностей, об их множественности,

не сводимости друг к другу и т.п., но нет оснований вести речь об одной реальности или, тем более, о единой реальности.

Против сделанного вывода могут привести притчу о слоне, которого ощупывают слепые и приходят к не согласующимся представлениям об этом животном. А что, если представления слепых рассмотреть как аналог знаний или наук, а слона – как реальность? Разве притча не демонстрирует, как знания не согласуются между собой, в то время как реальность не только одна, но и едина? Но будем последовательны. В основе притчи лежит предпосылка о том, что мы *уже знаем*, что такое слон сам по себе. Применительно к нашей ситуации это означало бы, что кто-то заранее, до получения результатов наук, уже знает, какова реальность на самом деле. Спрашивается, откуда он это знает? Кто ему шепнул, что реальность на самом деле едина и почему мы должны этому невразумительному шепоту верить? Хотя, увы, многие (и даже называющие себя учёными) верят в знание, получаемое каким-либо сверхъестественным путём. Мы не будем с ними спорить. Бесполезно вести дискуссию с людьми, которых уже озарил свет сверхъестественной Истины, возвысивший их над прочими смертными.

Теперь о тезисе 2. Логика требует, чтобы свойства и отношения объектов определялись точно. При этом *никаких степеней точности логика изначально не вводит*. Например, сравним числа 5 и 8. Утверждения «8 больше 5» и «8 больше 5 на 3» имеют логически одинаковую степень точности в теории чисел (как, между прочим, и отрицания этих утверждений, несмотря на их ложность в упомянутой теории). Психологически кажется, что первое утверждение менее точно, чем второе, но, повторим, с логической точки зрения это не так. Другой вопрос, что познающего субъекта интересуют разные аспекты изучаемой области объектов. Мы можем интересоваться качественным порядком чисел ($n > m$?), а можем интересоваться и количественной оценкой этого порядка ($n > m$ на k ?). Применительно к рассуждениям о реальных объектах наблюдается та же самая картина. Если мы желаем всего лишь отличить Землю по форме от плоских, кубических, пирамидальных и конусообразных объектов, то качественная характеристика «Земля – шар» вполне правомерна. Если же мы хотим иметь количественные характеристики формы Земли, то должны ли мы непременно утверждать, что «Земля – геоид»? Вовсе не должны. Дело только за тем, чтобы в соответствующей теории сделать нужные высказывания точными. Решать эту задачу можно по-разному. Например, назовём физическое тело s *реальным шаром*, если существуют две идеальные (математические) сферы А и В такие, что а) тело s полностью заполняет сферу В; б) s не выходит за границы сферы А; в) разность между диаметрами А и В составляет менее 1% от диаметра В (на рисунке масштаб не соблюдён). Для Земли можно указать требуемые сферы (геологические подробности мы опускаем), так что теперь со всей возможной (если хотите, с математической) точностью мы можем утверждать, что геоид впишется между данными сферами, и что «Земля – реальный шар».



Спросим себя, в каком смысле абстрактные математические сферы А и В, удовлетворяющие приведённым условиям применительно к Земле, дают искажённое представление о реальности, в данном случае – о реальной форме Земли? Ю.В. Ивлев в частной беседе предложил следующий ответ. Между сферами А и В умещаются поверхности неограниченного множества объектов. Какой же из них Земля? Значит, абстракции искажают реальность, в данном случае – реальную форму Земли. Согласимся, что понятие реального шара, будучи математически точным, не удовлетворяет требованиям точности, предъявляемым геологической наукой по данному вопросу (подобно тому, как школьного учителя может не удовлетворять ответ «8 больше 5», поскольку он хочет услышать, на сколько больше). Конечно, сферы А и В можно было бы заменить идеальными геоидами, но это ничего не изменит по сути. Проблема в том, можно ли требовать неограниченного увеличения точности определения характеристик реальных объектов, в данном случае – формы Земли? Нам представляется, что ответ должен быть отрицательным. Даже если не вспоминать о принципе неопределенности Гейзенберга, достаточно простого здравого смысла, чтобы понять нелепость требования неограниченного увеличения точности. Если на форму Земли будут влиять волны в океане, построенный новый дом, сидящий или стоящий человек, или ямка в песке, выкопанная ребенком – то разве не очевидна абсурдность такой псевдо точности?

Итак, по здравому размышлению следует признать, что абстракции не только не искажают, но только они и дают возможность построения точного определения понятия «реальный шар» посредством установления строгой *идеальной границы* между теми физическими объектами, которые обладают этим свойством, и теми, которые им не обладают. Аналогичным образом работают в познании и другие идеальные абстракции. **Роль абстракций (в том числе математических) в познании с логических позиций состоит в том, что они *идеально ограничивают* реальные объекты и тем самым позволяют *определять* предикаты этих объектов со всей возможной степенью строгости и точности**. Без абстракций наши познавательные способности остались бы на уровне познавательных процессов животных. С этой точки зрения прогресс в познании не сводится только к увеличению строгости (линия *дологическое знание – логически оформленное знание*), но требует логически корректной разработки всё усложняющихся абстрактных теорий описания реальностей (линия *простые теории – сложные теории*).

В числе таких теорий должно найтись место и для логически точно оформленных философских концепций реальности. Один из возможных путей построения подобных теорий предлагается ниже.

Теория ZFAE строится на базе модифицированной теории ZFA – теории множеств с атомами[1]. Язык ZFAE содержит два сорта переменных – по *ментальным* объектам (множествам и атомам)[2] x, y, z, x_1, y_1, z_1, ..., x_n, y_n, z_n, ... и по *реальным* объектам X, Y, Z, X_1, Y_2, Z_3, ..., X_n, Y_n, Z_n, ... Имеется три символа бинарных отношений: равенства $=$, принадлежности $\in$ и причастности ε. В язык теории ZFAE входят также две индивидные константы ментального уровня $\varnothing$ и A. Условимся вместо формул вида $\neg(x \in y)$ писать $x \notin y$. Чтобы сократить количество аксиом, примем также соглашение, что выделенные полужирным шрифтом переменные $\mathbf{x}$, $\mathbf{y}$, $\mathbf{z}$, $\mathbf{x_1}$, $\mathbf{y_1}$, $\mathbf{z_1}$, ..., $\mathbf{x_n}$, $\mathbf{y_n}$, $\mathbf{z_n}$ могут означать как переменные по ментальным объектам x, y, z, x_1, y_1, z_1, ..., x_n, y_n, z_n, так и переменные по реальным объектам X, Y, Z, X_1, Y_2, Z_3, ..., X_n, Y_n, Z_n. Аксиомами ZFAE будут следующие утверждения.

0. *Аксиомы равенства*:

$$\forall\mathbf{x}(\mathbf{x} = \mathbf{x});$$

$$(\mathbf{x}_1 = \mathbf{y}_1 \,\&\, ... \,\&\, \mathbf{x}_n = \mathbf{y}_n) \rightarrow (A(\mathbf{x}_1, ..., \mathbf{x}_n) \rightarrow A(\mathbf{y}_1, ..., \mathbf{y}_n)),$$

где $\mathbf{x}$, $\mathbf{x}_i$ и $\mathbf{y}_i$ являются переменными *любого* сорта, и формула A также может быть *любой*. Например, A может содержать двухместный предикатный символ ε и переменные по объектам любых

[1] Теория ZFA обсуждается в кн.: *Йех Т.* Теория множеств и метод форсинга. М., 1973.

[2] Множества представляют *идеальные* объекты, атомы – *темпоральные* объекты ментального мира. Обсуждение понятий ментального мира, идеальных и темпоральных объектов см. в статье: *Анисов А.М.* Типы существования // Вопросы философии. 2001. № 7.

сортов. Так, предположив, что $x = Y$ и что $x \varepsilon Z$, моментально получим заключение $Y \varepsilon Z$.

1. *Аксиома пустого множества*:

$$\forall \mathbf{x}(\mathbf{x} \notin \varnothing) \& \exists y(y = \varnothing).$$

Часть $\exists y(y = \varnothing)$ гарантирует отнесенность $\varnothing$ к ментальным объектам. В полном виде эта аксиома распадается на две: $\forall x(x \notin \varnothing) \& \exists y(y = \varnothing)$ и $\forall X(X \notin \varnothing) \& \exists y(y = \varnothing)$. Ниже следующие полужирные сокращения раскрываются аналогичным образом.

2. *Аксиома множества атомов*:

$$\forall x(x \in A \leftrightarrow (x \neq \varnothing \& \forall \mathbf{y}(\mathbf{y} \notin x))) \& \exists y(y = A).$$

Вновь часть $\exists y(y = A)$ нужна для спецификации A как ментального объекта. Будем называть элементы из A *ментальными атомами*, а *множествами* – ментальные объекты, не являющиеся атомами. Иными словами, x – ментальный атом, если и только если $x \in A$, и x – множество, если и только если $x \notin A$. В частности, ментальный объект $\varnothing$ в силу определения является множеством. То, что ментальный объект A также множество, будет установлено ниже. Отметим, что теория ZFAE не запрещает ситуацию $\exists X(X \in A)$ или даже ситуацию полного включения реальных объектов в A: $\forall X(X \in A)$. Те X, для которых верно $X \in A$ (если таковые существуют), также будут ментальными атомами. Но если $X \notin A$, то отсюда не вытекает, что X – множество.

3. *Аксиома экстенсиональности для множеств*:

$$(\forall x \notin A)(\forall y \notin A)(x = y \leftrightarrow \forall \mathbf{z}(\mathbf{z} \in x \leftrightarrow \mathbf{z} \in y)).$$

Эта аксиома устанавливает условия равенства множеств, но ничего не сообщает об условиях равенства атомов, реальных объектов или реальных и ментальных объектов. Вполне может случиться, что найдутся X, Y такие, что $\forall \mathbf{z}(\mathbf{z} \in X \leftrightarrow \mathbf{z} \in Y)$, но $X \neq Y$. Или найдутся X, y, для которых верно $\forall \mathbf{z}(\mathbf{z} \in X \leftrightarrow \mathbf{z} \in y)$, но вновь $X \neq y$. Аксиома экстенсиональности не выполняется и для атомов из A, если количество таких атомов более одного.

4. *Аксиома пары для множеств и атомов из* A:

$$\forall x \forall y \exists z \forall \mathbf{z}_1(\mathbf{z}_1 \in z \leftrightarrow \mathbf{z}_1 = x \vee \mathbf{z}_1 = y).$$

Для любых множеств или атомов x и y, множество, существование которого утверждает эта аксиома, обозначается через $\{x, y\}$. Для данных x и y оно единственно в силу аксиомы экстенсиональности.

5. *Аксиома суммы или объединения для множеств и атомов из* A:

$$\forall x(\exists y \notin A)\forall \mathbf{z}(\mathbf{z} \in y \leftrightarrow \exists \mathbf{z}_1(\mathbf{z}_1 \in x \& \mathbf{z} \in \mathbf{z}_1)).$$

Вновь множество, существование которого утверждается, единственно. Его обозначением является $\cup x$. В частности, $\cup\varnothing = \varnothing$ и если x – атом, то $\cup x = \varnothing$. Если в формулировке аксиомы опустить требование $y \notin A$, то единственность уже не гарантирована: ничто не мешает для атома a из A положить $\cup\varnothing = a$ и $\cup a = a$.

Чтобы сформулировать аксиому степени, нам понадобится понятие *реального атома*: $\mathrm{PA}(X) \leftrightarrow_{\mathrm{Df}} \forall \mathbf{x}(\mathbf{x} \notin X)$. Таким образом, наряду с ментальными атомами из A в теории ZFAE могут иметься реальные атомы. Причем заранее не предполагается, в каких отношениях находятся реальные и ментальные атомы. Например, может существовать X такой, что PA(X) и при этом $X \in A$. Или же, напротив, $\forall X(\mathrm{PA}(X) \rightarrow X \notin A)$.

6. *Аксиома множества степени*:

$$\forall x \exists y \forall \mathbf{z}(\mathbf{z} \in y \leftrightarrow \mathbf{z} \subseteq x),$$

где $\mathbf{z} \subseteq x \leftrightarrow_{\mathrm{Df}} \mathbf{z} \notin A \;\&\; \neg\mathrm{PA}(\mathbf{z}) \;\&\; \forall \mathbf{z}_1(\mathbf{z}_1 \in \mathbf{z} \rightarrow \mathbf{z}_1 \in x)$. Условие, что всякое подмножество $\mathbf{z}$ не является атомом (ни ментальным, ни реальным), обеспечивает верность предложения $\forall x(\varnothing \subseteq x)$, однако предотвращает $\boldsymbol{a} \subseteq x$ для любого x в том случае, если $\boldsymbol{a}$ – атом (реальный или ментальный). Например, $\neg(\boldsymbol{a} \subseteq \boldsymbol{a})$, но $x \subseteq x$, если x – множество. Единственность множества-степени для всякого x следует из аксиомы экстенсиональности, что позволяет ввести для него обозначение S(x). По аксиоме степени $S(\varnothing) = \{\varnothing\}$ и $S(a) = \{\varnothing\}$, если a – атом из A, то есть единственным подмножеством пустого множества и ментальных атомов является пустое множество.

7. *Аксиома бесконечности*:

$$\exists x(\varnothing \in x \;\&\; \forall y(y \in x \rightarrow y \cup \{y\} \in x)),$$

где результат операции $x \cup y$, по определению, удовлетворяет условию $\forall \mathbf{z}(\mathbf{z} \in x \cup y \leftrightarrow \mathbf{z} \in x \vee \mathbf{z} \in y)$. Существование множества $x \cup y$ гарантируется аксиомой пары и аксиомой суммы: $x \cup y =_{\mathrm{Df}} \cup\{x, y\}$, а его единственность – аксиомой экстенсиональности.

8. *Схема аксиом подстановки*:

$$\forall x(\forall \mathbf{z}_1(\mathbf{z}_1 \in x \rightarrow \exists! \mathbf{z} F(\mathbf{z}_1, \mathbf{z})) \rightarrow$$
$$(\exists y \notin A)\forall \mathbf{z}(\mathbf{z} \in y \leftrightarrow \exists \mathbf{z}_1(\mathbf{z}_1 \in x \;\&\; F(\mathbf{z}_1, \mathbf{z})))),$$

где $\exists!$ означает «существует и единственный», а $F(\mathbf{z}_1, \mathbf{z})$ – любая формула, не содержащая переменную y свободно. Условие $y \notin A$ позволяет предотвратить появление ментальных атомов в качестве результатов применения схемы подстановки при ложности

$$\exists \mathbf{z}_1(\mathbf{z}_1 \in x \;\&\; F(\mathbf{z}_1, \mathbf{z})).$$

8′. *Схема аксиом выделения подмножества* (значок ′ указывает, что данная схема аксиом выводится из остальных):

$$\forall x(\exists y \notin A)\forall \mathbf{z}(\mathbf{z} \in y \leftrightarrow \mathbf{z} \in x \;\&\; F(\mathbf{z})),$$

где $F(\mathbf{z})$ – произвольная формула, в которую y не входит свободно. Как обычно, обозначим множество, являющееся результатом выделения, через $\{\mathbf{z} \in x \mid F(\mathbf{z})\}$. Вновь условие $y \notin A$ позволяет предотвратить появление ментальных атомов в качестве результатов применения схемы выделения в тех случаях, когда нет таких $\mathbf{z}$, что $\mathbf{z} \in x \ \& \ F(\mathbf{z})$, так что будет выполнено $\{\mathbf{z} \in x \mid F(\mathbf{z})\} \subseteq x$ для любого x.

9. *Аксиома регулярности*:

$$\forall x(\exists z(z \in x) \to \exists y(y \in x \ \& \ y \cap x = \varnothing)).$$

Здесь результат операции $y \cap x$ при помощи схемы выделения определен следующим образом: $y \cap x =_{Df} \{\mathbf{z} \in x \cup y \mid \mathbf{z} \in x \ \& \ \mathbf{z} \in y\}$.

Теперь можно показать, что A – действительно множество, а не ментальный атом, то есть что $A \notin A$. В противном случае предположим $A \in A$ и возьмем синглетон $\{A\}$ (существующий в силу аксиомы пары: $\{A, A\} =_{Df} \{A\}$). Этот синглетон содержит единственный элемент A и поэтому по аксиоме регулярности должно быть выполнено $\{A\} \cap A = \varnothing$. Однако $A \in \{A\}$ и $A \in A$ по предположению, что влечет $A \in (\{A\} \cap A)$ и $\{A\} \cap A \neq \varnothing$. Получили противоречие.

Сформулируем аксиому выбора. Чтобы избежать излишних технических деталей, воспользуемся тем известным фактом, что отношение «y есть функция с областью определения x» выразимо на языке теории множеств ZF.

10. *Аксиома выбора*:

$$(\forall x \notin A)\exists y(y \text{ есть функция с областью определения } x \ \&$$
$$\forall z(z \in x \ \& \ \exists z_1(z_1 \in z) \to y(z) \in z)).$$

На этом список аксиом теории ZFAE завершен. Никаких специфических аксиом для реальных объектов и отношения причастности ε, как мы видели, изначально не предлагается. Можно было бы даже не предполагать и того, что реальные объекты и отношение причастности ε подчиняются аксиомам равенства, но тогда мы лишились бы возможности сравнения реальных и ментальных объектов хотя бы на предмет их совпадения или несовпадения. В любом случае нам не избежать принятия некоторой логики реальных объектов. Можно было бы эту логику сделать неклассической (оставив классику для ментального мира), отрицать применимость равенства для реальных объектов (скажем, не принимать или даже отрицать, что $\forall X(X = X)$) и т.п. Однако, повторим, все равно так или иначе придется что-то принимать. Наша позиция состоит в том, что классическая логика, даже если она появилась и сформировалась скорее из опыта работы с идеальными математическими объектами, через применимость математики к реальному миру также обнаружила свою к нему причастность. В конце концов, любой исследователь реального мира фактически пользуется исключительно классической логикой. Даже в таких экзотических областях, как теория относительности или квантовая физика, использование какой-либо неклассической логики вовсе не обязательно. Вполне можно обойтись логикой классической, перенося тяжесть теоретических проблем на прикладные (нелогические) постулаты.

Сказанное напрямую касается и предмета данной работы. Мы не считаем проблему статуса реальности и её отношения к ментальному миру проблемой *чистой* логики. Как известно, логика как таковая (будь она классической, модальной, интуиционистской или релевантной) не отличает реально существующее от существующего в мысли или в воображении. Для проведения соответствующего различия вновь не обязательно менять саму логику. Достаточно расширить её принятием подходящих прикладных аксиом. Вопрос в том, что это за аксиомы, каковы наиболее общие свойства ментальных и реальных объектов, которые должны быть в них отражены.

Ментальные объекты принадлежат ментальному миру (сознанию, психике, мыслимому и т.п.). Это *мы* выбираем исходные индивиды (атомы и пустое множество), затем строим из них совокупности (множества) по определённым *нами* же выбранным правилам. Иными словами, ментальный мир хотя бы отчасти нам подконтролен. Вопрос же о свойствах реальных объектов и отношения ε открыт. В зависимости от выбора той или иной философской позиции принимаются соответствующие постулаты о реальности. Два основных вопроса, на которые необходимо ответить в связи с этим, следующие. Во-первых, возникает вопрос о том, как *соотносятся* реальные и ментальные объекты. Во-вторых, это вопрос о *познаваемости* реальных объектов. Основные философские концепции реальности вытекают из определенных ответов на данные вопросы. В отношении первого вопроса существуют три радикальные позиции, которые мы назовем солипсизмом и реализмом (две формы монизма) и дуализмом.

Солипсизм. Существует только ментальный мир. То, что называют реальным миром, – лишь часть мира ментального. Формально этой позиции соответствует постулат

$$\forall X \exists x (X = x) \qquad \text{(С)}.$$

(Всякий называемый реальным объект X является на самом деле некоторым ментальным объектом x.)

Реализм. Существует только реальный мир. В универсуме нет ничего, кроме объективной реальности. Ментальные объекты лишь разновидность реальных объектов:

$$\forall x \exists X (x = X) \qquad \text{(Р)}.$$

(Всякий называемый ментальным объект x является на самом деле некоторым реальным объектом X.)

Дуализм. Реальный и ментальный миры различны. Никакой реальный объект не является ментальным, и наоборот. Соответствующий формальный постулат, стало быть, таков:

$$\forall X \neg \exists x (X = x) \qquad (Д).$$

Эквивалентной формой постулата (Д) будет аксиома

$$\forall X \forall x (X \neq x) \qquad (Д^*),$$

которая наглядно демонстрирует симметрию реального и ментального миров как отделенных друг от друга феноменов.

По поводу таким образом введенных солипсизма и реализма могут возразить, что солипсисты и реалисты в действительности занимали и занимают несовместимые позиции, тогда как (С) и (Р) вполне совместимы между собой. Согласимся, что с исторической точки зрения это замечание верно. Однако формальный анализ позволяет увидеть другое: из растворения реальности в ментальности логически не вытекает запрет на реализм, а из тезиса, что нет ничего, кроме объективной реальности, логически не выводится отрицание солипсизма. Поэтому исторически существовавшим солипсистам и реалистам просто-напросто приходилось отвергать позиции друг друга путем *волевого постулирования* соответствующих отрицаний. Т.е. солипсист наряду с постулатом (С) вынужден будет принять и постулат ¬(Р), а реалист, в свою очередь, принять не только постулат (Р), но и постулат ¬(С). Другой вопрос, что они этого не осознавали, ошибочно полагая, что монистическое утверждение психики или, например, материи в качестве единственной реальности автоматически отбрасывает конкурирующую теорию. В любом случае позиции солипсизма и реализма сходятся в пункте признания возможности *совпадения* ментальных и реальных объектов, что формально выражается суждением

$$\exists x \exists X (x = X) \qquad (СР).$$

Данное суждение тривиально вытекает как из (С), так и из (Р), но является несовместимым с дуализмом (Д).

Что еще более интересно, нашлись философы, которые, по сути, принимали конъюнкцию (С) & (Р). В качестве примера вспомним позитивистов второй волны, отстаивавших условность деления объектов на физические и психические и утверждавших, что любой объект может быть представлен в познании либо как физический, либо как психический. Недавно мне пришлось услышать от одного физика-теоретика, что физические явления проистекают из вещей, которые могут быть названы как материальными, так и идеальными. В общем, дух второго позитивизма еще жив. Однако эта позиция является эклектической и потому не заслуживает места в проводимой классификации. Также нет нужды помещать туда всевозможные метапозиции, например, типа юмовской. Как известно, суть скептической точки зрения Д. Юма на проблему реальности состоял в отказе дать определенный ответ на вопрос о статусе реальности, что в нашей терминологии выражается дизъюнкцией или (С), или (Р), или (Д) ((С) $\vee$ (Р) $\vee$ (Д)).

Реализм далее подразделяется на такие формы монизма, как материализм и идеализм (объективный), но обсуждение этого потребовало бы введения весьма сложных понятий пространства и времени, что выходит за границы решаемых в данной работе задач.

Термин «дуализм» используется не в традиционном смысле постулирования существования двух независимых друг от друга субстанций, а в более общем значении, связанном с жестким разделением ментального и реального миров. Разумеется, традиционный дуалист типа Р. Декарта окажется дуалистом и в нашем смысле, но не наоборот. В этом втором значении (но не в первом) дуалистом окажется, например, И. Кант. По видимости он принимал более слабую версию дуализма, связанную с утверждением существования вещей самих по себе[3] за пределами ментальных конструкций: $\exists X \forall x (X \neq x)$. Однако вряд ли бы Кант принял суждение (СР), выражающее возможность совпадения некоторой вещи самой по себе и ментального образования. А отсюда следует, что им был бы принят постулат (Д), или, что логически то же самое, постулат (Д*). В то же время Платон, проповедовавший своеобразный дуализм идей и вещей, не был последовательным дуалистом в нашем смысле, поскольку источник ментальности – душа принадлежала миру подлинно реального бытия в качестве эйдоса. Тем самым вроде бы принимается неприемлемое для дуализма суждение $\exists X \exists x (X = x)$ (эквивалентное (СР)).

Используя возможности языка теории ZFAE, уточним позицию дуализма, который назовем ε-дуализмом.

ε-Дуализм. Эта форма дуализма принимает следующие постулаты:

Д*;

$\forall x \forall X \forall Y((x \notin X) \,\&\, (X \notin Y))$;

$\forall x \forall y \forall X(\neg(x \in X) \,\&\, \neg(X \in x) \,\&\, \neg(x \in y))$.

---

[3] Ц.Г. Арзаканян отмечает, что данный Н.О. Лосским перевод знаменитого выражения Канта «das Ding an sich» как «вещи в себе» объективно «не передает смысла немецкого термина, в действительности означающего «вещь, существующая сама по себе». Выражение же «вещь в себе» не только искажает кантовское понятие, но в известной мере и мистифицирует его». См.: *Кант И.* Критика чистого разума / Пер. с нем. Н. Лосского сверен и отредактирован Ц.Г. Арзаканяном и М.И. Иткиным; Примеч. Ц.Г. Арзаканяна. М., 1994. С. 547. Аналогичной точки зрения придерживается Н.В. Мотрошилова.

Смысл этих постулатов в том, что предикаты $\in$ и ε как бы разводятся по разным мирам. Но если в отношении предиката ε такое разведение оказывается полным (никакие ментальные образования не могут вступать в отношение ε с объектами любых типов), то в отношении предиката $\in$ не запрещается ситуация $X \in x$ для некоторых X и x. Почему эта ситуации не запрещена – рассматривается ниже. Теорию, получающуюся из ZFAE добавлением трех данных постулатов, обозначим через ZFAε.

Перейдем теперь к обсуждению вопроса о познаваемости реальности. На этот раз основных позиций окажется много больше, в зависимости от степени признания или отрицания *познаваемости реальности*, а также в зависимости от признания или отрицания достижимости *реальной истины*. Проблема, таким образом, сводится к логически и философски корректному формулированию постулатов о познаваемости реальности и о достижимости реальной истины.

Но что по сути означает познаваемость? Чтобы найти ответ на данный вопрос, обратимся вначале к ментальным объектам. Что такое x? – Нечто неизвестное, неопределенное, непонятное. Положение дел не изменится, если дать этому x новое имя, обозначив его, скажем, атомом $c \in A$, что формально может быть представлено упорядоченной парой $<c, x>$. Значит, проблема познания не решается раздачей имен, вопреки имевшему и имеющему место сейчас заблуждению. А если сказать, что c – натуральное число? Пусть $н \in A$ и y – множество натуральных чисел (существование этого множества доказуемо в ZF). Вновь воспользуемся атомом как именем, на этот раз множества натуральных чисел y, образовав пару $<н, y>$. Конструкцию $<c, н>$ в этом случае можно рассматривать как внутреннее утверждение (построенное средствами теории ZFA как объект этой теории) о том, что c – натуральное число. Это утверждение будем считать истинным, если $x \in y$, и будем считать ложным, если $x \notin y$.

По-видимому, многие согласятся, что независимо от истинности или ложности внутреннего утверждения $<c, н>$ это будет первый познавательный акт в отношении неизвестного x, поименованного посредством c. Это верно при условии, что свойство «*Натуральное число(x)*», представленное множеством y, полагается известным в какой-то степени.

Каков гносеологический смысл этих простых рассуждений? Он заключается в том, что познание объекта осуществляется не непосредственно, а через приписывание ему известных познающему субъекту атрибутов, или, говоря более современным языком, через установление его предикатов, т.е. свойств и тех отношений, в которые он вступает с другими объектами. Неизвестные объекты обретают все бо́льшую познавательную определенность по мере выявления их предикатов, а последние также должны в той или иной мере быть познанными в том смысле, что должно быть частично или полностью известно, какие объекты ими обладают. Сказанное верно как для ментальных, так и для реальных объектов. Таким образом, *в самом общем виде познаваемость объекта состоит в обладании им познанными предикатами*.

Другой вопрос, что, в отличие от ментальных объектов, реальные объекты, если они вообще познаваемы, обладают реальными свойствами и вступают в реальные отношения независимо от того, есть ли на свете тот субъект, который реализует в исследовании эту познаваемость. Да и что может скрываться за реальными предикатами (повторим, если они вообще существуют), и, тем более, за их познанием? В целях простоты и краткости ограничимся в данной работе обсуждением только проблемы *реальных сингулярных предикатов*, т.е. *реальных свойств*.

Для концепции реальности $ZFAE_C$ ($ZFAE_C$ = $ZFAE$ + C) *все* реальные объекты безусловно познаваемы, поскольку любой реальный X совпадает с некоторым ментальным x, а с этим последним (а, значит, и с X) можно проводить любые операции, устанавливающие его свойства и отношения с другими объектами. Аналогичным образом, в теориях $ZFAE_P$ и $ZFAE_{CP}$ безусловно познаваемыми будут все реальные X, для которых найдется x такой, что $X = x$.

Другое дело дуалистические теории реальности $ZFAE_Д$ или $ZFA\varepsilon$. Здесь не существует тривиального варианта ответа на вопрос о том, что означает познаваемость реального объекта X, поскольку реальный и ментальный миры на уровне объектов в силу постулатов этих теорий отделены друг от друга. Однако познаваемость реальности предполагает, тем не менее, какую-то связь между реальностью и ментальностью. Так как объекты не могут образовывать эту связь, остается искать ее в их предикатах.

Решающий шаг состоит в принятии тезиса о том, что *субъект познания в состоянии образовывать совокупности или множества хотя бы некоторых реальных объектов*. При этом, поскольку упомянутые множества образует именно субъект, нет никаких причин считать их реальными объектами. Логичнее было бы отнести такие множества к категории ментальных объектов.

Представим себе далекого от цивилизации человека, впервые увидевшего неработающий портативный компьютер. Этот человек совершенно не имеет представления о том, что находится перед ним, для чего это и т.п. Однако нет сомнений, что он в состоянии идентифицировать компьютер как единичный реальный объект, единственное очевидное свойство которого – быть самим собой. В рассматриваемой теории данной ситуации соответствует образование ментального синглетона $x = \{X\}$, где X – реальный портативный компьютер. Аналогичным образом, увидев настольный компьютер в привычной обстановке (в хижине, например), наш персонаж вряд ли идентифицирует его как один объект. Вместо этого он образует ментальную тройку или множество $y = \{X_1, X_2, X_3\}$, элементы которого соответствуют монитору, системному блоку и клавиатуре. Далее он может объединить все эти незнакомые предметы в ментальную четвёрку $z = \{X\} \cup \{X_1, X_2, X_3\} = \{X, X_1, X_2, X_3\}$, или образовать ментальные пары сходных по величине предметов $z_1 = \{X, X_3\}$ (портативный компьютер и клавиатура) и $z_2 = \{X_1, X_2\}$ (монитор и системный блок). И т.д.

Мы особенно настаиваем на том, что совокупности реальных предметов, коль скоро они образованы субъектом *познания* (речь сейчас не идет о субъекте *действия* – ведь действия субъекта составляют часть объективной реальности) должны быть отнесены к ментальному миру. Если кто-то образовал совокупность ведьм, включив туда самых что ни на есть реальных женщин, от этого множество *Ведьма* и соответствующее ему свойство *Ведьма(x)* не стали реальностью. Даже реальные действия по сжиганию этих самых ведьм не сделали данное множество и свойство более реальными. Так что множество реальных предметов, прежде всего, – это ментальный объект.

Другой вопрос, что во всех построенных выше теориях, за исключением ZFAε, ничто не запрещает существования таких ментальных и реальных объектов z и Z, для которых выполняется формула $\forall X(X \in z \leftrightarrow X \in Z)$. Хотя это логически возможно, но философски мало приемлемо. Отношение $\in$ указывает на принадлежность исходных объектов (пусть любой природы) ментальным совокупностям. Просто не очень понятно, в каком смысле может $X \in Z$ или, что еще более странно, $x \in Z$. Тогда получится, что Z – своего рода множество, и нет никаких препятствий для допускаемых теорией множеств манипуляций с этим объектом: $\cup Z$, $S(Z)$, $Z \cap X$ и проч. Недаром современные номиналисты отрицают реальное существование множеств. Также возможно, но философски неприемлемо принятие $\forall X(X \varepsilon z \leftrightarrow X \varepsilon Z)$. Отношение причастности ε для того и вводилось, чтобы отличить неподконтрольные познающему субъекту реальные отношения между реальными объектами от контролируемых субъектом отношений на ментальных совокупностях. Эти и им подобные неестественности объясняют, почему понадобилось принятие постулатов ε-дуализма. В связи с этим *дальнейшие построения будут проводиться средствами теории* ZFAε.

При этом вовсе не требуется, чтобы из любых реальных предметов можно было образовать совокупности или множества. Теория ZFAε устроена таким образом, что в ней (при условии ее непротиворечивости) не доказуемы, например, утверждения вида $\forall X_1 \forall X_2 ... \forall X_n \exists y \forall Y(Y \in y \leftrightarrow Y = X_1 \vee Y = X_2 \vee ... \vee Y = X_n)$. Но так и должно быть. Ведь не все реальные предметы вовлечены в сферу познавательных актов субъекта. Данное обстоятельство не мешает расширять теорию ZFAε принятием более слабых постулатов типа $\exists X_1 \exists X_2 ... \exists X_n \exists y \forall Y(Y \in y \leftrightarrow Y = X_1 \vee Y = X_2 \vee ... \vee Y = X_n)$ или аналогичных.

Следующий шаг состоит в рассмотрении допущения, что существует реальный объект Z, в определенном смысле *соответствующий* ментальному объекту z, содержащему только реальные объекты в качестве элементов (т.е. верно $\neg\exists x(x \in z)$; при этом выполнимость формулы $\neg\exists x(x \in Z)$ для всякого Z гарантируется теорией ZFAε). Соответствие может принимать разные формы.

Будем говорить, что z ***экстенсионально включен в*** Z (сокращенно $z \angle Z$), если $\neg\exists x(x \in z)$ & $\forall X(X \in z \to X \varepsilon Z)$. Обратным образом, Z ***экстенсионально включен в*** z (сокращенно $Z \angle z$), если $\neg\exists x(x \in z)$ & $\forall X(X \varepsilon Z \to X \in z)$. Назовем z ***экстенсионально совпадающим с*** Z (сокращенно $z \equiv Z$), если $z \angle Z$ и $Z \angle z$. Иными словами, $z \equiv Z \leftrightarrow_{Df} \neg\exists x(x \in z)$ & $\forall X(X \in z \leftrightarrow X \varepsilon Z)$.

Полученные отношения $\equiv$ и $\angle$ не являются ни рефлексивными, ни симметричными, ни транзитивными. В итоге $\equiv$ не будет отношением эквивалентности, а $\angle$ не будет отношением порядка, что несколько неожиданно. Причина в том, что сорта объектов слева и справа от знаков этих отношений различны. Впрочем, нет никаких оснований возражать против принятия эквиваленции $z \equiv Z \leftrightarrow Z \equiv z$, выражающей симметричность отношения $\equiv$.

Реальный объект Z является ***познаваемым свойством*** (сокращенно ПС(Z)), если $\exists z \exists X(X \in z$ & $z \angle Z)$. Реальный объект Z является ***истинно познаваемым свойством*** (сокращенно ИПС(Z)), если $\exists z \exists X(X \in z$ & $z \equiv Z)$. Наконец, реальный объект Z ***познаваем*** (сокращенно П(Z)), если ∃X(ПС(X) & Z ε X) и ***истинно познаваем*** (сокращенно И(Z)), если ∃X(ИПС(X) & Z ε X). Разумеется, достижимость истины в отношении Z влечет познаваемость Z: ИПС(Z) $\vdash$ ПС(Z) и И(Z) $\vdash$ П(Z). Но не наоборот.

Между познаваемостью реального объекта и его истинной познаваемостью с философской точки зрения имеется существенное различие. Из П(Z) не вытекает, что хотя бы для одного X такого, что (ПС(X) & Z ε X), найдется ментальное свойство z, для которого верно $Z \in z$. Иными словами, Z может находиться в актуально непознанной области познаваемых свойств. Эта ситуация невозможна в случае истинной познаваемости: из (ИПС(X) & Z ε X) следует, что уже имеется ментальное свойство z, экстенсионально совпадающее с X (т.е. $z \equiv X$). Значит, верно $Z \in z$. Тем самым истинное познание, если оно вообще существует, всегда представлено актуально данным знанием. Не может быть нечто истинным, если оно еще не достигнуто. В итоге познаваемость указывает на потенциальное знание, а истинность – на актуально познанное. Познаваемость потенциальна, истинность актуальна.

Далее можно в несколько этапов ввести понятие *реальной истины*, однако это уже проделано нами в 11 выпуске «Логических исследований». Поэтому в заключение ограничимся рассмотрением некоторых основных позиций по вопросу о познаваемости реальности (с учетом, если потребуется, позиции и по вопросу о соотношении реальности и ментальности).

Агностицизм. Реальный мир непознаваем.

$\neg\exists Z П(Z)$ (¬П).

По контрапозиции из ¬П вытекает ¬И, так что в агностицизме о достижимости реальной истины и говорить не приходится. Такова, в частности, точка зрения Д. Юма.

Кантианство. Реальные объекты («вещи сами по себе») существуют отдельно от ментального мира, но они принципиально непознаваемы:

$\forall X \forall x(X \neq x)$ (Д*);

$\neg\exists Z П(Z)$ (¬П).

Кантианство, таким образом есть соединение дуализма и агностицизма.

Релятивизм. Кое-что о реальном мире мы знаем, но все эти знания относительны, поскольку истина недостижима.

$\exists Z П(Z)$ (П);

$\neg\exists Z И(Z)$ (¬И).

Чрезвычайно модная в настоящее время точка зрения в философии. Ее проповедуют с такой убежденностью, что создается впечатление, что одну «Великую Истину» достичь все же удалось – окончательную истину о том, что истина недостижима.

Позиции, признающие познаваемость реальности или достижимость истины, как это ни удивительно, не имеют утвердившихся наименований, так что следующие ниже названия условны.

Эпистемологический оптимизм. Любые реальные объекты доступны познанию, но истина достигнута лишь в отношении некоторых из них.

$\forall Z П(Z)$ (ОП);
$\exists Z И(Z)$ (И);
$\exists Z \neg И(Z)$ (~И).

Эпистемологический констативизм. Ограничивается осторожной констатацией достижимости истины о некоторых (но не всех) реальных вещах, не отвечая на вопрос, все ли реальные объекты познаваемы.

$\exists Z И(Z)$ (И);
$\exists Z \neg И(Z)$ (~И).

Постулат о познаваемости (П) логически следует из (И), так что (П) нет нужды помещать в список аксиом для рассматриваемой позиции.

Эпистемологический дуализм. Признает познаваемость некоторых реальных объектов и достижимость истины по отношению к некоторым из них, но считает, что в реальности есть и непознаваемое.

$\exists Z И(Z)$ (И);
$\exists Z \neg П(Z)$ (~П).

Реальность, таким образом, расслаивается на познаваемую (поскольку, повторим, И $\vdash$ П) и непознаваемую (рассмотренный выше дуализм (в том числе ε-дуализм) теперь логично было бы назвать *онтологическим дуализмом*).

На основе предикатов П(Z) и И(Z) с использованием логических связок и кванторов можно эксплицировать и другие реально существующие или виртуальные эпистемологические позиции.

В.А. Бажанов

ПАРТИЯ И ЛОГИКА. К ИСТОРИИ ОДНОГО СУДЬБОНОСНОГО ПОСТАНОВЛЕНИЯ ЦК ВКП(б) 1946 года*

Abstract. The paper deals with the so called ideologized science phenomenon emergence and it's development in the USSR, namely in the field of formal logic. It is shown that communist party itself produced in late 1946 the Decree which happened to be the starting point of the dismantlement of this phenomenon and foredoom one in the formal logic status as independent and finally respected science. This Decree published and analysed for the first time since its publication.

Едва ли не с самого начала существования советской власти стал формироваться так называемый феномен идеологизированной науки. Под идеологизацией науки понимают процесс, оказавшийся характерным для всех тоталитарных обществ, который выражается в стремлении либо создать "новую" науку, соответствующую господствующей идеологии, либо переработать научные представления с позиций этой идеологии, когда последняя подавляет объективное содержание науки и беспристрастный поиск объективной истины уступает место селекции научных положений под углом зрения идеологии и прежде всего таких, которые обеспечивают ее "торжество".

Признание социальной природы науки означает, что жизнь общества и его потребности оказывают определенное влияние и на характер научных исследований, и на стиль научного мышления, и на форму представления тех или иных научных результатов, и на цели развития науки. Однако это признание вовсе не подвергает сомнению, в конечном счете, автономность развития науки, помещая источники ее прогресса "внутрь" науки. В тоталитарных обществах автономность развития науки фактически теряется под давлением ценностей, которые в данном обществе выступают в качестве центральных: классовых – в марксизме-ленинизме, религиозных – в фундаментальном исламе, расовых – при национал-социализме.

Недоверие носителей новых идеологий, стремящихся к революционному переустройству общества, свойственному в России

---

* Работа выполнена при поддержке РГНФ, грант № 03-03-00350а.

не только марксистам, но и, например, анархистам М.А. Бакунину и П.А. Кропоткину, отказывавших "правительственной", буржуазной науке в объективности, их нетерпимость к другим политическим движениям порождало программу создания пролетарской науки, которая должна была обеспечить модернизацию народного хозяйства после совершения революции. Таким образом, новое общество, уверовав в могущество новой идеологии, оказывается нацеленным и на революцию в науке. Такого рода попытки редко являются успешными[1]. Обычно идеологический пресс способствует крайней политизации жизни научного сообщества, выдавливая из него ученых, противящихся устремлениям неофитов (формируя так называемую репрессивную науку) и оставляя на поверхности тех, кто строит свои исследования как прямое воплощение идеологических установок и обещает немедленный практический результат или научный прорыв[2].

Утверждение авторитета одного "вождя" в политике и во всех областях науки, вера в коллективный разум партии, догматизация марксистской идеологии, которой придавался статус единственного научного мировоззрения, усиление общей политической реакции в случае СССР привели в 1930–1940-х годах к возникновению феномена идеологизированной науки, охватившей и биологию, и физику, и химию, и математику, и психологию, и едва ли не все отрасли научного знания. Научная аргументация уступала место политическим обвинениям (типа "меньшевиствующего идеализма") и навешиванию ярлыков, следствием чего нередко становились аресты и иные репрессии. Особенно глубоко и негативно феномен идеологизированной науки проявился в области логики.

Среди сторонников марксистско-ленинской идеологии формальная логика продолжительный период рассматривалась как цитадель метафизического мышления, которое несовместимо с диалектикой, которое является по своей природе буржуазным и противостоит стремлению создать пролетарскую науку, диалектическую по своей сущности. Репрессии и террор, которые были особенно характерны для первых десятилетий существования советской власти, выразились, по меткому замечанию А.С. Карпенко, в том, что логика террора не оставляла места для логики [Карпенко, 2003, с. 63].

---

[1] К таковым можно отнести разве что культурно-историческую концепцию психической деятельности Л.С. Выготского и А.Р. Лурии или разработку релевантной логики И.Е. Орловым [Бажанов, 2002].

[2] Феномены Т.Д. Лысенко и О.Б. Лепешинской.

"Диалектики" рассматривали формальную логику если не как идеологического оппонента, то, по крайней мере, как чуждую марксизму "метафизическую" систему (см.: [Cavaliere, 1990]). "Старая логика, - писал в своем словаре Т.С. Ищенко, - рассматривает формы и категории мышления как самостоятельные и независимые" и потому ее "основной недостаток состоит в том, что она своим основанием имеет метафизический способ рассмотрения действительности... метафизическое понимание мира... Диалектика включает в себя формальную логику как высшая ступень мышления низшую, как превзойденный момент" [Ищенко, 1931, с. 100, 102].

Формальная логика, считали ортодоксальные марксисты, отрывает исследования законов мышления от природы. Ее законы "противоположны законам диалектической логики". Являясь основой метафизического метода, формальная логика не интересуется материальной истиной (правильным отражением в мышлении явлений природы). Закон тождества в формальной логике трактует каждое явление как "нечто неизменное и закостенелое". Материалистическая диалектика показывает несостоятельность такого рода взгляда на вещи, ибо для нее вещь тождественна и нетождественна самой себе потому, что она находится в процессе изменения, развития. Закон (не)противоречия также имеет метафизический характер, поскольку игнорирует то обстоятельство, что всякое развитие предполагает противоречие. Формула же закона исключенного третьего является и метафизической, и абстрактной, бессодержательной (см. [Краткий философский словарь, 1939, с. 296-298]).

Довольно характерны рассуждения одного из авторов учебника по формальной логике вице-президента Венгерской АН Б. Фогараши, который утверждал, что "диалектическая логика относится к формальной как высшая математика к низшей", что "формальная логика в своем традиционном понимании носит сильно выраженный метафизический характер", а неаристотелева логика представляет собой "подведение логического фундамента под идеализм" [Фогараши, 1959, с. 11, 45, 116].

Впрочем, первые серьезные признаки идеологизации науки относятся к концу 1922 г., когда были распущены непокорные Ученые советы, а студенческие старостаты были распущены еще летом 1919 г. Представительство в коллективах было предоставлено студенческим группам РКП(б) и "другим партиям, стоящим за Советскую власть".

Большевики взяли под свой сверхжесткий контроль все высшее образование и мысль, еще бившуюся в российских университетах. В 1922 г. был объявлен Всероссийский конкурс и многие профессора были уволены (в том числе, кстати, и Н.А. Васильев) на том основании, что они этот конкурс не прошли: "Старой профессуре с ее интеллектуальной независимостью и негибкой моралью просто не было места в стране победившего пролетариата" [Никольский, 1993, с.8].

14 декабря 1922 г. ЦК РКП(б) издает циркуляр "О работе парторганизаций в вузах и рабфаках". Там говорилось, что "значение высшей школы на боевом в настоящее время фронте огромно. Ее задачи – дать стране в кратчайшее время красных специалистов по всем отраслям государственного строительства… Партия ныне должна сделать следующий шаг в завоевании высшей школы, в которой до сих пор господствуют еще буржуазный ученый и буржуазная идеология, нередко переходящая даже к прямому наступлению на основы научного марксистского мировоззрения". Далее циркуляр провозглашал следующие организационные задачи:

"… Принять активное участие в кампании по проведению нового устава вузов через комячейки студентов и комфракции преподавателей… Принимать, действуя на основе устава вузов, через местные и профсоюзные органы, активное участие в подборе руководящего состава вузов и рабфаков – их правлений, советов, факультетов и т.д." [КПСС о культуре…, с. 330-331].

Были организованы новые "Ученые" советы, куда вошли и представители РКП(б). На заседании этого совета в Казанском университете 2 марта 1923 г., на котором присутствовали также и заведующий рабочим факультетом, представитель Комслужа, заместитель председателя Совнаркома, Татнаркомпроса, нарком Внутдела, Всеработпроса, бюро Комстуда областкома, одним словом, новая коммунистическая номенклатура, был принят новый Устав университета и ходатайство бюро ячейки РКП(б) о переименовании Казанского университета в Казанский государственный университет им. В.И.Ульянова (Ленина).

Ректор предложил совету принять это предложение ячейки и оно было принято единогласно [НА РТ, ф.1337, оп.1, д.72, с.2]. В резолюции того же самого заседания совета констатировалось, что "научные силы университета скудеют: одни умирают, другие бегут, ища, где лучше... жилища профессоров и преподавателей подвергаются уплотнению" [там же].

В ноябре 1923 г. М. Горький писал В. Ходасевичу: "Из новостей, ошеломляющих разум, могу сообщить, что…Надеждою Крупской и каким-то М. Сперанским запрещены для чтения: Платон, Кант, Шопенгауэр, Вл. Соловьев, Тэн, Нитче, Л. Толстой, Лесков, Ясинский (!) и еще многие подобные еретики" [Ходасевич, 1997, с. 175, 568].

"За тридцать лет от 1917 года и до конца 40-х годов философская традиция в России была практически разрушена," - пишет В.Н. Садовский [Садовский, 1993, с. 148]. Была создана монолитная партийно-государственная идеология, которая не допускала иных мнений, кроме тех, которые соответствовали мнению "земного бога", восседавшего в Кремле. Понятно, что появились и люди, которые предугадывали его желания, потаенные симпатии и глубину мысли. Наступил звездный час заштатных доцентов и профессоров, обладавших даром угадывания (см.: [Митрохин, 2004]).

Почти с самого начала выхода в 1922 г. нового журнала, установившего фактически полную монополию на философскую мысль, – журнала "Под знаменем марксизма" – стали обыкновенными нападки на представителей "старой" интеллигенции, не понимавшей, так сказать, глубины философии марксизма-ленинизма. Например, в том же 1922 г. В. Тэр-Оганесян утверждал, что «Профессор Васильев (имеется в виду А.В. Васильев. - *В.Б.*) в своей книге "Целое число" (Пг.,1922) нисходит до критики Энгельса и его "мистической диалектики", совершенно не понимания сути вопроса» [Тэр-Оганесян, 1922, с.212]. Между тем в своей критике Ф. Энгельса А.В. Васильев едва ли не на полвека опередил соответствующую обстоятельную работу Ж. ван Хейеноорта, показавшего примитивность (да и просто ошибочность) воззрений Энгельса на диалектику в математике (см.: [Хейеноорт, 1991]).

С 1922 г. развернулось марксистское переосмысление формальной логики, сопровождавшейся обычно уничтожающей критикой ее "узких горизонтов" (см.: [Варьяш, 1923, 1928; Орлов, 1925; Баммель, 1925, 1929]). Досталось и Н.А. Васильеву. Критикуя так называемый формально-логический подход А. Варьяша, представленный в книге "Логика и диалектика", В.Ф. Асмус писал: «Современная логика стремится к известной эмансипации от закона противоречия. Она признает возможность опущения этого принципа – без ущерба для формальной логики как таковой. *Однако ни в коем случае не следует преуменьшать* прогрессивное значение этих тенденций. "Металогика" (Н.А. Васильева. - *В.Б.*) не скрывает формалистической сущности своих задач... Вредное действие этой книги состоит в демагогических приемах, при помощи которых А. Варьяш стремится не только скрыть от читателя формалистический характер своей логики, но еще внушить ему впечатление, будто бы вся книга разработана в духе диалектики и верна ее началам» [Асмус, 1929, с.44, 62].

Позже В.Ф. Асмус немало сделал для реабилитации и укрепления позиций формальной логики в СССР. Один же из "диалектических логиков" - И.Е. Орлов, получивший естественнонаучное образование, фактически предвосхитил принципиальные положения современной релевантной логики.

В 1929 году полностью уничтожается тираж книги А.В. Васильева "Жизнь и научное дело Н.И. Лобачевского", изданной в 1927 г. и два года пылившейся (вместе, кстати, с книгой С.И. Вавилова о Ньютоне, которой была уготована более счастливая судьба) на складах Госиздата. Книга А.В. Васильева увидела свет только в 1992 г. [Васильев А.В., 1992]. Видимо, кто-то уже после печати тиража вспомнил, что А.В. Васильев являлся членом Первой Государственной Думы, членом Государственного Совета и ЦК кадетской партии, подписывал письма протеста против изъятия церковных ценностей.

Дискуссия между "диалектиками" и "механистами" к концу 1920-х годов носила уже явно политический характер, а ее содержание касалось всех советских философов, которые были в буквальном смысле *обязаны* критиковать и "деборинскую группу", и "механистов". Кроме того, они были вынуждены заниматься *самокритикой*, которая носила характер не только покаяния за то, что ранее допускали разного рода ошибки, но и была формой самозащиты. Так, Т.С. Ищенко в предисловии к новому изданию "Краткого философского словаря" был вынужден каяться за то, что ранее недооценивал глубину "корней влияния" деборинской группы в среде философов-специалистов, за то, что недооценивал В.И. Ленина как философа, не замечал принципиальные ошибки Г.В. Плеханова. В словарь им была включена статья "Меньшевиствующий идеализм", к которому были отнесены Кареев, Стэн, Тымянский, Гессен, Гоникман и "др. во главе с Дебориным", а главный порок этого направления виделся в том, что в нем подвергался забвению принцип партийности философии. Впрочем, "механические материалисты", по мнению Т.С. Ищенко, игнорировали "душу марксизма" – материалистическую диалектику, к которым были причислены Бухарин, Тимирязев, Сарабьянов и Варьяш [Ищенко, 1931, с. 1, 110, 134, 187].

Любопытно, что в статье о Сталине, работы которого расценивались как "непревзойденный пример единства теории и практики", а сам Сталин как "лучший ученик Ленина, неутомимый борец за рабочее дело и за дело всех трудящихся", говорилось, что в 1910 г. (! – *В.Б.*) он переходит на работу в *Ленинград* [Ищенко, 1931, с.

168, 167]. Советское "министерство правды" переписывало историю даже для столь очевидных ситуаций и обстоятельств.

В 1930 г. в журнале "Фронт науки и техники" появляются рубрики "Методология и практика вредительства", "Фронт идеологической борьбы", которые выражали важнейшие составляющие атмосферы в СССР второй половины 1920-1940-х годов, пронизанную поиском врагов.

Под предлогом обеспечения связи теории и практики и более полного удовлетворения нужд практики в 1930 г. была предпринята очередная реорганизация высшего образования. В частности, из учебных планов исключались теоретические дисциплины как умозрительные и не имеющие непосредственного практического применения, такие как теоретическая физика, фундаментальная математика и т.д. Раздавались предложения в университетах готовить только инженеров для промышленности (см.: [Павлов, 2003, с. 113]). Так, известный советский общественный деятель и алгебраист О.Ю. Шмидт, возглавлявший в 1918 г. Математическое отделение Комакадемии, утверждал, что "учебные заведения служат не для развития личностей, а для снабжения их орудиями практических знаний" (Из рукописи Н.С. Ермолаевой; цит. по: [Никольский, 1993, с. 8]).

Такая утилитарная ориентация привела к попыткам выделения из университетов гуманитарных факультетов и организации гуманитарных, правовых и иных институтов. В Московском университете остались лишь факультеты естественного профиля, а преподавание диалектического и исторического материализма осуществляла единственная гуманитарная кафедра истории и философии естествознания, возглавляемая ярым борцом с идеализмом в физике А.А. Максимовым.

С середины 1930 гг. практикуется назначение работников НКВД на руководящие посты в Университетах и Академиях наук. Так, в 1940 г. ректором Института философии был назначен некто А.И. Асеев, оперативный работник НКВД.

Ряд ученых, как, например, М.И. Шейнфинкель, не могли легко устроиться на работу, а после нескольких неудач он и не предпринимал больше попыток. М.И. Шейнфинкель жил и занимался математической логикой в своей коммунальной квартире на Ленинградском проспекте в Москве[3]. Существовал в основном за

[3] О М.И. Шейнфинкеле мало известно и предположений, касающихся его жизни, поэтому достаточно. Одно из них приведено в яркой книге, автор которой неизменно критически относится ко всякого рода спекуляциям [Непейвода, 1997, с. 35]. Речь там идет о том, что Шейнфинкель жил в Ленинграде и его заморили голодом в психиатрической больнице.

счет пожертвований друзей и коллег. Соседи считали, что он все время "перекладывает бумаги", причем куда-либо отлучался М.И. Шейнфинкель редко. Соседи его очень не любили за такой "нетрудовой" образ жизни. Возможно, М.И. Шейнфинкель не осознавал, что он является основателем нового математического направления. Часто в разговорах с коллегами он шутил, что пишет "в сундук". Действительно, свои рукописи он складывал в сундук, которые после его кончины в 1942 г., видимо, использовались соседями в тяжелое военное время для отопления [Кузичев, 1996].

Зимой 1940 г. Казанский Кремль из окна транссибирского экспресса мог видеть К. Гёдель, пересекавший Советскую Россию с тем, чтобы из Владивостока отправиться в эмиграцию в США. Метаморфозы истории на несколько часов сократили расстояние до считанных километров между великим логиком-классиком К. Гёделем и Н.А. Васильевым, прорубившим окно в высшей степени неклассическое пространство логики и пребывавшим последние месяцы жизни в психиатрической больнице, спасшей его от сталинского террора.

В 1979 г. автор настоящей работы слышал рассказ Г.П. Щедровицкого, который в свою очередь делился воспоминаниями В.Ф. Асмуса о том, что в 1940–начале 1941 г. ночью Асмуса вызвали в Кремль к Сталину. Сталин посетовал, что его комиссары совсем не умеют мыслить, и их нужно научить логике (этот же эпизод воспроизводится В.А. Смирновым в его воспоминаниях о В.Ф. Асмусе; см.: [Смирнов, 1995, с. 46]).

Вскоре после начала занятий разразилась Великая отечественная война, и комиссары воевали, так и не освоив науку о правильном мышлении. Между тем в голове бывшего семинариста идея о пользе логики сохранилась.

4 декабря 1946 г. ЦК ВКП(б) принимает постановление "О преподавании логики и психологии в средней школе", которое было опубликовано *только* в "Учительской газете" [О преподавании, 1946]. Факт этого постановления хорошо известен в кругах логиков, но его содержание уже забылось. Между тем это постановление оказалось судьбоносным для возрождения развития отечественной логики и не только ее, но и аналогичных процессов во всем так называемом лагере стран социализма.

Содержание постановления весьма любопытно и стоит воспроизвести это постановление полностью.

В ЦК ВКП (б)

О преподавании логики и психологии в средней школе

ЦК ВКП(б) обсудил вопрос о преподавании логики и психологии в средней школе и принял постановление по этому вопросу.

ЦК ВКП(б) признал совершенно ненормальным, что в средних школах не преподаются логика и психология.

ЦК ВКП(б) признал необходимым ввести в течение четырех лет, начиная с 1947/48 учебного года, преподавание психологии и логики в выпускных классах средней школы. Логика и психология должны преподаваться квалифицированными преподавателями, получившими специальную подготовку в области психологии и логики.

Министерству просвещения РСФСР (тов. Калашникову) предложено ввести в 1947/48 учебном году преподавание логики и психологии в 200 средних школах городов: Москвы, Ленинграда, Горького, Саратова, Свердловска, Куйбышева, Новосибирска, Ростова-на-Дону, Воронежа, Казани, Молотова, Томска.

ЦК компартий союзных республик и Советам Министров союзных республик предложено рассмотреть вопрос о постепенном введении преподавания логики и психологии, начиная с 1947/48 учебного года, в средних школах всех городов, где имеются подготовленные преподаватели.

Министерство высшего образования СССР и Министерства просвещения союзных республик обязаны организовать в университетах и педагогических институтах подготовку преподавателей логики и психологии для средней школы с таким расчетом, чтобы к 1950/51 учебному году полностью обеспечить потребности средней школы в преподавателях логики и психологии.

Для подготовки квалифицированных преподавателей логики и психологии признано необходимым создать с 1947/48 учебного года отделения логики и психологии на филологических факультетах Уральского и Азербайджанского университетов.

Институту философии Академии наук СССР (т. Васецкому) и Огизу (т. Грачеву) предложено до 1 марта 1947 г. издать учебник логики для высших учебных заведений и до 1 июля 1947 г. – популярный учебник логики для средней школы.

Академия педагогических наук РСФСР (т. Каиров) и Учпедгиз (т. Перловский) обязаны до 1 июля 1947 г. подготовить и издать учебник психологии для высших учебных заведений.

В целях подготовки высококвалифицированных кадров преподавателей психологии и логики для университетов и педагогических институтов предложено министру высшего образования

СССР т. Кафтанову, директору Институту философии АН СССР т. Васецкому и президенту Академия педагогических наук РСФСР т. Каирову не позднее октября 1947 г. довести контингент аспирантов:

по психологии – до 100 человек, из них в Институте философии Академии наук СССР – до 20 человек, в Академии педагогических наук РСФСР – до 30 человек, в университетах и педагогических институтах – до 50 человек;

по логике – до 50 человек, из них в Институте философии Академии наук СССР – 20 человек, на философских факультетах университетов – 30 человек [О преподавании, 1946, с.1].

Это постановление было принято в ходе интенсивной подготовки к выборам в Верховные Советы союзных и автономных республик, дня Конституции, которая провозглашала торжество "социалистического демократизма". Не было забыто и 125-летие со дня рождения Н.А. Некрасова. Однако постановление ЦК ВКП(б) не было заслонено такого рода событиями. Академия наук СССР, Академия педагогических наук РСФСР, школы начали проводить решения партии в жизнь.

Уже в следующем номере "Учительской газеты" (14 декабря 1946 г.) публикуется передовая, которая развивает положения, содержащиеся в постановлении. В ней утверждается, что "громадное значение для дисциплинирования нашего мышления имеет логика. Как наука о законах правильного мышления, логика устанавливает те принципы, следуя которым мы можем избежать ошибок в наших суждениях и умозаключениях и притти к правильным, логически обоснованным доказательствам. Изучение логики является превосходной тренировкой для ума, приучающей наше мышление к строгой дисциплине. Практическая польза логики в том, что она учит людей правильным суждениям, учит выводить последовательные умозаключения и добиваться строгих доказательств, столь необходимых для любой умственной деятельности. Логика воспитывает экономию мышления, предохраняя от напрасных заблуждений, лишних, бесплодных споров, возникающих при отсутствии обоснованных, т.е. логических доказательств. Изучение логики мышления является необходимой ступенью для изучения диалектической логики.

Успех введения логики и психологии в систему школьного образования будет зависеть в значительной степени от качества преподавателей по этим предметам, а также от соответствующих учебных пособий…

Задача преподавания психологии весьма облегчена выходом в свет хорошего учебника психологии для средней школы, написанного проф. Б.М. Тепловым... Если Институту философии Академии наук СССР удастся создать и аналогичный по качеству учебник логики, то преподаванию обеих дисциплин в средней школе будет оказана весьма существенная польза.

...Со всей активностью органы народного просвещения должны взяться за осуществление постановления ЦК ВКП(б) «О преподавании логики и психологии в средней школе», направленного к тому, чтобы восполнить существенный пробел в системе нашего общего образования".

Публикуется также статья заведующей учебной частью одной из школ на Урале "Развивать логическое мышление", в которой утверждается, что многие школьники мыслят, нарушая элементарные правила формальной логики, рецензия на учебник Теплова. На решения партии следовало реагировать быстро.

В вузах открываются отделения логики и психологии, просуществовавшие, впрочем, недолго. Стали издаваться учебники по логике, поначалу дореволюционные, а потом и вновь написанные.

Многие выпускники этих отделений фактически не могли заниматься исследовательской работой в области логики. Так, в Казанском университете из логических курсов они вообще слушали только курс общей (традиционной) и истории логики, читавшиеся Д.Г. Морозовым и Л.Л. Тузовым.

Оба достаточно квалифицированные преподаватели, они преднамеренно почти не публиковались. Причина проста: любые публикации могли и служили основанием для доносов, обвинений в идеализме, ревизионизме и т.п. Спокойнее было просто читать лекции и вести занятия, обдумывая, впрочем, каждое вслух сказанное слово. Это был фактически единственный выход для тех, кто продолжал работать, оставаясь строго в рамках официальной идеологии (и, само собой, философии).

Все-таки Л.Л. Тузовым в 1950 г. в Академии общественных наук при ВКП(б) была защищена кандидатская диссертация по теориям умозаключений М.И. Каринского и Л.В. Рутковского. Диссертантом был сделан вывод, что "Каринский и Рутковский - представители передовой отечественной логики прошлого. В их логических учениях имелись уступки идеализму, непонимание диалектики отношения вещей, а, следовательно, и мышления, однако в целом это была попытка материалистического разрешения проблемы умозаключений" [Тузов, 1950, с.19].

После смерти "отца народов", который, безусловно, стоял за постановлением 1946 г., весной 1953 г. на формальную логику обрушилась очередная атака "диалектиков". Логика вновь была изъята из программ школ, большинства университетов и педагогических институтов и ей было нелегко восстановить свои права на полноценную жизнь в условиях беспредельного господства "живой души марксизма".

Даже важнейшие результаты в математической логике и метаматематике трактовались также под углом зрения оппозиции диалектики и метафизики: "Достижения Сколема, Гёделя, Чёрча и других исследователей... показали, что аксиоматическая теория, рассматриваемая как замкнутая система, *не в состоянии устранить, разрешить противоречия, возникшие в математике*. Глубочайшую причину этого может понять, конечно, только материалистическо-диалектическая логика, раскрывающая связь математики и действительности" [Фогараши, 1959, с. 100-101].

В первом венгерском издании учебника (1951 г.) Б. Фогараши утверждал, что "в логике отражается классовая борьба", а при подготовке его расширенного венгерского издания (1959 г.), оставшегося в рукописи, он обвинял логиков в метафизике и в поддержке Имре Надя и контрреволюции, тогда как диалектики якобы всегда последовательно отстаивали партийную линию. Дискуссии об отношении формальной и так называемой диалектической логики, которые развертывались в СССР, потрясали и венгерскую научную общественность.

Упрощенное понимание гегелевского наследия долгий период доминировало на идеологической и философской авансцене в странах социализмам несмотря даже на решения центрального идеологического органа в Москве.

Впрочем, постановление ЦК ВКП(б), которое по существу было вскоре забыто – даже при живом Сталине, – сыграло громадную роль в освобождении мышления из-под оков ортодоксального марксизма. Логика открывала возможность заниматься вещами, далекими от господствующей идеологии. Это постановление, думается, имело даже более масштабное значение для развития гуманитарной мысли, нежели раскрепощение исследований в области логики и психологии: оно легитимизировало своего рода интеллектуальные ниши, свободные от идеологических привнесений и обеспечивало достаточно свободное научное творчество в этих нейтральных относительно политической конъюнктуры областях. В СССР и других странах с тоталитарными режимами действовал принцип "возмещения": несвобода в общественной деятельности и в анализе социально-политических явлений "компенсировалась" притоком блестящих умов в идеологически нейтральные области науки, и исследования здесь носили весьма оригинальный характер и часто вполне соответствовали мировому уровню. Особенно это справедливо по отношению к математике.

Поскольку решения ЦК ВКП(б) фактически имели силу и для стран Центральной и Восточной Европы – Венгрии, ГДР, Польши и т.д., находившихся в орбите советского влияния, то лакуны относительно свободного философского творчества открылись и для гуманитариев этих государств.

Так, весьма важное значение для достижения правильного понимания соотношения логики и диалектики и утверждения идей математической логики в Венгрии имела преподавательская деятельность в Будапештском университете Е.К. Войшвилло, активный интерес и поддержка некоторых венгерских алгебраистов, близких по своим интересам к логике, прежде всего, Л. Кальмара (1905-1978). Кроме того, определенную роль здесь сыграл авторитет В.Ф. Асмуса, П.С. Попова и И.С. Нарского, обосновывавших положение, согласно которому гегелевская диалектика не противоречит идеям формальной логики. Ш. Салаи, влиятельный философ и социолог в одном из ведущих венгерских журналов "Magyar Tudomany" в 1957 г. написал о развитии математической логики в СССР, семинаре в МГУ под руководством С.А. Яновской и указал на использование элементов математической логики в учебнике "Логика" (М., 1956) под редакцией Д.П. Горского и П.В. Таванца[4]. Атмосфера враждебности по отношению к формальной логике постепенно рассеивалась.

В СССР учились в аспирантуре болгарские, венгерские, немецкие и др. логики, которые впоследствии печатались в советских изданиях и участвовали в совместных научных мероприятиях[5].

Философский "рассвет" в общесоюзном масштабе в полной мере забрезжил тогда, когда "поколение философов 40-50-х годов смогло завершить свое философское образование, буквально вытащив себя за волосы из пучины марксистского догматизма и втащив - за счет самообразования - в те или иные области современного философского знания" [Садовский, 1993, с.160]. Именно это поколение и явилось поколением, приступившим к решению нелегкой задачи возрождения советской и российской философской мысли. Такое же поколение, часто при помощи своих советских коллег, командированных для преподавания в Будапешт, Софию, Варшаву и т.д., готовилось штурмовать высоты

---

[4] Автор признателен К. Хаваш за информацию о становлении логической мысли в Венгрии послевоенного периода.

[5] И. Лакатос какое-то время предполагал поступить в аспирантуру в МГУ к С.А. Яновской.

философской и логической мысли и в странах Центральной и Восточной Европы.

Между тем рецидивы элементов идеологизированной науки в области логики имели место вплоть едва ли не до начала 1980-х годов. Наиболее в каком-то смысле нашумевший случай произошел в 1976 году после выхода блестящей книги очень талантливого логика и философа Ю.А. Гастева (1928 – 1993) "Гомоморфизмы и модели" [Гастев, 1975]. Дело в том, что в Предисловии к своей книге Ю.А. Гастев перечисляет тех людей, которые оказали на него наибольшее влияние. Это в основном логики и математики. Однако в этом списке находились и имена У. Стокса и Дж. Чейна [Гастев, 1975, с. 4], а в библиографии на 55-м месте числилась их работа на английском языке, опубликованная в известном журнале "Mind" в марте 1953 года. Работа называлась "The breath of the death marks the rebirth of spirit (дыхание смерти означает возрождение духа"). Редакторы книги Б.В. Бирюков и В.С. Тюхтин не обратили внимания на это изощренное иносказание, выполненное в лучших традициях использования Эзопова языка, на такую "мелочь". Однако кто-то из особо въедливых, информированных в медицинской сфере и соответствующим образом настроенных читателей заметил этот факт: у Ю.А. Гастева упоминалось дыхание Чейна-Стокса, которое свидетельствует об агональном состоянии человека и его вероятной близкой кончине. Март 1953 года и название приписываемой Стоксу и Чейну статьи не оставляли сомнения, что здесь имеется в виду лучший друг советских ученых, хлеборобов и физкультурников И.В. Сталин. Видимо, в ЦК КПСС пошел "сигнал" о такой вопиющей насмешке над славным прошлым нашего Отечества, руководящей и направляющей силе всех побед советского народа – КПСС. Ю.А. Гастев лишился работы и был вынужден в 1981 году эмигрировать в США, где почти незаметно жил в Бостоне (иногда публикуясь в "Новом русском слове" и "Русской мысли"). Он очень страдал от чувства потерянности Родины, ругал США и американцев. У редакторов книги тоже были неприятности, но, слава богу, не повлекшие, как тогда говорили, организационных выводов.

В 1946 году студент механико-математического факультета МГУ Ю.А. Гастев был осужден судебной коллегией Московского городского суда по известной 58-й (политической) статье на 5 лет и 2 года поражения в правах. Из заключения Ю.А. Гастев вышел в 1949 году. В день смерти Сталина Гастев находился в Прибалтике и один из его сведущих в медицине приятелей услышал в сводке о здоровье вождя упоминание дыхания Чейна-Стокса. Он и разъяснил Гастеву, что финал Сталина очень близок.

Сталинские репрессии коснулись многих членов семьи Гастевых: был арестован и погиб в ГУЛАГе его отец А.К. Гастев, известный поэт и разработчик системы НОТ (научной организации труда), мама Ю.А. Гастева, двоюродный брат прошел сибирские лагеря, родной брат Петр погиб на Курской дуге [Гастев, Судьба...; Родос, Не всё...]. Понятно, что смерть тирана, который казался бессмертным, вызвала у Ю.А. Гастева надежду на перемены и на обретение будущего, в котором не останется следа от политического приговора и его последствий...

В 1979 г. в журнале "Коммунист" появилась пространная статья, как это часто бывало в таких случаях, совсем неизвестного автора, в которой в духе большевистского максимализма провозглашался классовый подход к логике и партийность в логике (и, стало быть, партийность основывающейся на ней политики). В статье говорилось, что за *любыми* утверждениями, включая те, которые делаются в логике, надо "разыскивать интересы тех или иных классов, за логикой слов – логику мыслей...", нельзя терпеть нападок на "алгебру революции", которые характерны для "мещанско-обывательского способа мышления" логического позитивизма [Садовский Г., 1979, с. 63]. Будучи учением о "внешних формах мышления", формальная логика оказывается враждебной диалектико-материалистической концепции логики как науки о всеобщем развитии и единстве противоположностей, представляющей собой "душу революционной теории". Здесь, по мнению автора, идет речь о двух противоположных типах мышления – "пролетарски-революционного и буржуазно-мещанского"; первое вскрывает закономерности развития общества, а второе используется для фальсификации идей научного коммунизма и представляет собой "профессорское фразерство" и "философско-математическое фиглярство", протаскивающее идеализм в подлинную науку [Садовский Г., 1979, с. 69, 65, 70 - 71]. В качестве примеров такого рода "фразерства", "фиглярства" и "словесной схоластики" приводились некоторые работы Д. Ст. Милля, К. Поппера, Р. Карнапа, С. Крипке и Г.Д. Левина. Если Поппер и Крипке так и остались, вероятно, в неведении, что являются носителями буржуазно-мещанского способа мышления, то для Г.Д. Левина и Института философии АН СССР, где он тогда работал, эта статья могла иметь весьма негативные последствия. Однако стагнирующий брежневский режим был все более и более неповоротлив и, насколько мне известно, никаких *оргвыводов* в данном случае не последовало, да и логическое сообщество в 1979 г., особенно в Институте философии АН СССР, было уже довольно влиятельным и вряд ли легко допустило новые гонения на формальную логику. Так называемая диалектическая логика (т.е. просто диалектический стиль мышления) еще какое-то время находилась в фаворе, но логика прозрения советской философии отводила ей скромное место в ряду других возможных способов рассуждений.

Вне зависимости от характера управления наукой и высшим образованием, все более редких рецидивов элементов идеологизированной науки в так называемых социалистических странах, а впоследствии на просторах СНГ формальная логика бо́льшими или меньшими темпами продолжала развиваться. Как показывает отечественный опыт, даже полный запрет логики как учебной дисциплины – ситуация дважды имевшая место в нашей истории – не прекращал ее развития. А уж более или менее удачная система управления наукой и образованием могла лишь ускорить или замедлить темп ее развития.

Принятые сокращения: НА РТ – Национальный архив республики Татарстан.

ЛИТЕРАТУРА

Асмус В.Ф. Формальная логика и диалектика (по поводу книги А. Варьяша) // Под знаменем марксизма, 1929, № 4. С.39-62.

Бажанов В.А. И.Е. Орлов – логик, философ, ученый. Особенности научного поиска // Логические исследования. Вып 9. М., 2002. – С. 32 – 54.

Баммель Гр. Логистика и диалектика //Под знаменем марксизма. 1925. № 3. – С. 24 – 60.

Баммель Гр. Ленин и проблема логики в марксизме // Под знаменем марксизма. 1929. № 4. – С. 1 – 38.

Варьяш А. Формальная и диалектическая логика // Под знаменем марксизма, 1923, № 6-7.-- С. 207 – 227.

Варьяш А. Логика и диалектика. М.,-Л., 1928.

Васильев А.В. Николай Иванович Лобачевский (1792 - 1856). М.: Наука, 1992.

Гастев Ю.А. Гомоморфизмы и модели. М.: Наука, 1975.

Гастев Ю.А. Судьба Нищих Сибаритов. Автобиографическая повесть (части 1 и 2) // http://www.serafim.spb.ru.

Ищенко Т.С. Краткий философский словарь. М., 1931.

Карпенко А.С. Современное состояние исследований в философской логике// Логические исследования. Вып. 10. М., 2003. – С. 61 – 93.

КПСС о культуре, просвещении и науке. М.: Изд-во полит. лит-ры, 1963.

Краткий философский словарь /Под ред. М. Розенталя и П. Юдина. М.: ОГИЗ, 1939.

Кузичев А.С. Интервью 14 марта 1996 г. (Москва, МГУ).

Митрохин Л.Н. Из бесед с академиком Т.И. Ойзерманом // Вопр. философии, 2004, № 5. С. 33-77.

Никольский Н.К. "Советская математика": распад или интеграция? (опыт анализа)// Природа, 1993, №1. С. 3-12.

Непейвода Н.Н. Прикладная логика. Ижевск, 1997.

О преподавании логики и психологии в средней школе. Постановление ЦК ВКП(б) // Учительская газета, 1946, 4 декабря, №55(3184).

Павлов А.Т. Философия в Московском университете в послереволюционные годы. 1917-1941 // Философские науки, 2003, № 9. -- С. 100-117.

Родос В. Не всё о Гастеве. Воспоминания о преподавателе // http://www.serafim.spb.ru.

Садовский В.Н. Философия в Москве в 50-е и 60-е годы // Вопр. философии, 1993, № 9. - С.147 – 164.

Садовский Г. Логика революционного мышления и классовый подход к логике // Коммунист, 1979, № 11. – С. 63 – 75.

Смирнов В.А. Воспоминания об В.Ф. Асмусе // Вопр. философии, 1995, № 1. – С. 44 – 48.

Тузов Л.Л. Теория умозаключений М.И. Каринского и Л.В. Рутковского. Автореферат дисс. на соиск. уч. ст. канд. филос. наук. М., 1950.

Тэр-Оганесян В. Несколько мыслей о диалектике // Под знаменем марксизма. 1922, № 9-10. С.209-215.

Фогараши Б. Логика. М.: Изд-во иностранной литературы, 1959.

Хейеноорт Ж. ван. Ф.Энгельс и математика // Природа, 1991, № 8. -- С.91-105.

Ходасевич В.Ф. Собрание сочинений. Т. 4. М.: Согласие, 1997.

Cavaliere F. La logica formale in Unione Sovietica. Gli anni dibattio, 1946 - 1965. Firenze: La nuova Italia, 1990.

Д.В. Баташев

О НЕСУЩЕСТВОВАНИИ КОНЕЧНОЙ ХАРАКТЕРИСТИЧЕСКОЙ МАТРИЦЫ ДЛЯ ОДНОЙ ПАРАНОРМАЛЬНОЙ ЛОГИКИ

Abstract. *In this paper a proof of a theorem of nonexistence of finite characteristic matrix for paranormal logic* VVP *is presented.*

Цель работы – доказать, что для предложенной в [1] пропозициональной логики **VVP**, являющейся вариантом паранормальной логики, не существует конечной характеристической матрицы. Логика **VVP** аксиоматизирована в [1] посредством исчисления **HVVP**, описание которого воспроизводится ниже. Алфавит пропозиционального языка $\mathcal{L}$ есть множество $\{\&, \vee, \supset, \neg,), (, p_1, p_2, p_3, \ldots\}$ символов, элементы которого имеют предполагаемые названия. Индуктивное определение $\mathcal{L}$-формулы (формулы в языке $\mathcal{L}$) стандартно:

(1) всякая пропозициональная переменная языка $\mathcal{L}$ есть $\mathcal{L}$-формула,

(2) если A и B есть $\mathcal{L}$-формулы, то $(A \& B)$, $(A \vee B)$, $(A \supset B)$, $(\neg A)$ есть $\mathcal{L}$-формулы.

Следуя [1], (а) условимся, что для всякого целого неотрицательного числа k и всякой пропозициональной переменной p языка $\mathcal{L}$

$$\neg^{(k)}p = \begin{cases} p, \text{ если } k = 0, \\ (\neg(\neg^{(k-1)}p)), \text{ если } k > 0, \end{cases}$$

и (б) определим квазиэлементарную $\mathcal{L}$-формулу как $\neg^{(k)}p$, где k есть целое неотрицательное число и p есть пропозициональная переменная языка $\mathcal{L}$.

Исчисление **HVVP** является стандартно определяемым исчислением гильбертовского типа, язык исчисления **HVVP** есть $\mathcal{L}$. Аксиомами исчисления **HVVP** являются в точности все формулы, каждая из которых имеет хотя бы один из следующих видов:

(1) $((A \supset B) \supset ((B \supset C) \supset (A \supset C)))$, где A, B и C – $\mathcal{L}$-формулы,

(2) $(A \supset (A \vee B))$, где A и B – $\mathcal{L}$-формулы,

(3) $(B \supset (A \vee B))$, где A и B – $\mathcal{L}$-формулы,

(4) $((A \supset C) \supset ((B \supset C) \supset ((A \vee B) \supset C)))$, где A, B и C – $\mathcal{L}$-формулы,

(5) $((A \& B) \supset A)$, где A и B – $\mathcal{L}$-формулы,

(6) $((A \,\&\, B) \supset B)$, где A и B -- $\mathcal{L}$-формулы,
(7) $((C \supset A) \supset ((C \supset B) \supset (C \supset (A \,\&\, B))))$, где A, B и C – $\mathcal{L}$-формулы,
(8) $((A \supset (B \supset C)) \supset ((A \,\&\, B) \supset C))$, где A, B и C – $\mathcal{L}$-формулы,
(9) $(((A \,\&\, B) \supset C)) \supset ((A \supset (B \supset C))$, где A, B и C – $\mathcal{L}$-формулы,
(10) $(((A \supset B) \supset A) \supset A)$, где A и B – $\mathcal{L}$-формулы,
(11) $((\neg D) \supset (D \supset A))$, где A – $\mathcal{L}$-формула, а D – $\mathcal{L}$-формула, не являющаяся квазиэлементарной $\mathcal{L}$-формулой,
(12) $((D \supset (\neg (A \supset A))) \supset (\neg D))$, где A – $\mathcal{L}$-формула, а D – $\mathcal{L}$-формула, не являющаяся квазиэлементарной $\mathcal{L}$-формулой.

Правило *modus ponens в* $\mathcal{L}$ является единственным правилом вывода исчисления **HVVP**. Доказательства в **HVVP** строятся обычным образом. Исчисление **HVVP** аксиоматизирует логику **VVP**, т.е. множество всех формул, доказуемых в **HVVP**, равно **VVP**.

Лемма 1. Пусть K есть n-элементное (n-целое положительное число) множество, f есть отображение множества K в себя, * есть операция композиции отображений множества K в себя, и для всякого целого неотрицательного числа i

$$f^{(i)} = \begin{cases} f, \text{ если } i = 0, \\ f * f^{(i-1)}, \text{ если } i > 0. \end{cases}$$

Тогда $\underset{k,\, l \text{ есть целые неотрицательные числа},\; k \neq l}{\exists k\, \exists l}: f^{(k)} = f^{(l)}$

Доказательство

Очевидно, что $\underset{k \text{ есть целое неотрицательное число}}{\forall k}: f^{(k)}$ есть отображение множества K в себя.

Отсюда получаем, что множество $\{f^{(0)}, f^{(1)}, f^{(2)}, \ldots\}$ является подмножеством множества всех отображений множества K в себя. Но множество всех отображений множества K в себя конечно, так как K есть конечное множество (известно, что число всех отображений конечного множества в себя равно m^m, где m-число элементов данного конечного множества). Поэтому множество $\{f^{(0)}, f^{(1)}, f^{(2)}, \ldots\}$ конечно. Значит, $f^{(0)}, f^{(1)}, f^{(2)}, \ldots$ не являются попарно различными отображениями. Но тогда существуют такие целые неотрицательные числа k и l, что $k \neq l$ и $f^{(k)} = f^{(l)}$.

Лемма 1 доказана.

Лемма 2. Если некоторая матрица, носитель которой есть n-элементное (n есть целое положительное число) множество, является характеристической матрицей для **VVP**, то существуют такие целые неотрицательные числа k и l, что $k \neq l$ и $\mathcal{L}$-формула $(\neg^{(k)} p_1 \supset \neg^{(l)} p_1)$ принадлежит множеству **VVP**.

Доказательство

(1) существует матрица, носитель которой есть n-элементное (n есть целое неотрицательное число) множество, являющаяся характеристической матрицей для **VVP** (допущение).

Пусть (2) $\mathfrak{M}$ есть матрица, носитель которой есть n-элементное (n-целое положительное число) множество, являющаяся характеристической матрицей для **VVP**.

Не ограничивая общности рассуждений, положим:

(3) $\mathfrak{M} = \langle M, N, \{\&', \vee', \supset', \neg'\}\rangle$, $\&'$, $\vee'$, $\supset'$ есть бинарные, а $\neg'$ есть унарная операции на M.

Оценка языка $\mathcal{L}$ в $\mathfrak{M}$ определяется стандартно (как отображение множества всех пропозициональных переменных языка $\mathcal{L}$ в M), обычным образом определяется (индукцией по построению $\mathcal{L}$-формулы) значение $\mathcal{L}$-формулы в $\mathfrak{M}$ при заданной оценке языка $\mathcal{L}$ в $\mathfrak{M}$ (значение $\mathcal{L}$-формулы F в $\mathfrak{M}$ при оценке v языка $\mathcal{L}$ в $\mathfrak{M}$ обозначаем через $|F|_v{}^{\mathfrak{M}}$):

(i) $|p|_v{}^{\mathfrak{M}} = v(p)$ для всякой пропозициональной переменной p языка $\mathcal{L}$,

(ii) $|(A \& B)|_v{}^{\mathfrak{M}} = |A|_v{}^{\mathfrak{M}} \&' |B|_v{}^{\mathfrak{M}}$ для всяких $\mathcal{L}$-формул A и B,

(iii) $|(A \vee B)|_v{}^{\mathfrak{M}} = |A|_v{}^{\mathfrak{M}} \vee' |B|_v{}^{\mathfrak{M}}$ для всяких $\mathcal{L}$-формул A и B,

(iv) $|(A \supset B)|_v{}^{\mathfrak{M}} = |A|_v{}^{\mathfrak{M}} \supset' |B|_v{}^{\mathfrak{M}}$ для всяких $\mathcal{L}$-формул A и B,

(v) $|(\neg A)|_v{}^{\mathfrak{M}} = \neg' |A|_v{}^{\mathfrak{M}}$ для всякой $\mathcal{L}$-формулы A.

Покажем теперь, что (4) $\underset{x \in M}{\forall x}: x \supset' x \in N$

Пусть $a \in M$ и v_a есть оценка языка $\mathcal{L}$ в $\mathfrak{M}$ такая, что $v_a(p) = a$ для всякой пропозициональной переменной p языка $\mathcal{L}$. Тогда $|(p_1 \supset p_1)|_{v_a}{}^{\mathfrak{M}} = |p_1|_{v_a}{}^{\mathfrak{M}} \supset' |p_1|_{v_a}{}^{\mathfrak{M}} = v_a(p_1) \supset' v_a(p_1) = a \supset' a$. Но для всякой оценки v языка $\mathcal{L}$ в $\mathfrak{M}$ $|(p_1 \supset p_1)|_v{}^{\mathfrak{M}} \in N$ (из (2), (3) и того, что $\mathcal{L}$-формула $(p_1 \supset p_1)$ доказуема в **HVVP**). Поэтому $a \supset' a \in N$. Отсюда, поскольку a есть произвольный элемент множества M, получаем, что $\underset{x \in M}{\forall x}: x \supset' x \in N$.

Условимся, что (5) для всякого целого неотрицательного числа m

$$\neg'^{(m)} = \begin{cases} \neg', & \text{если } m = 0, \\ \neg' * \neg'^{(m-1)}, & \text{если } m > 0 \end{cases}$$

(здесь * есть операция композиции отображений множества M в себя).

Тогда по лемме 1 получаем, что (6) $\underset{k,\, l \text{ есть целые неотрицательные числа},\ k \neq l}{\exists k\, \exists l}: \neg'^{(k)} = \neg'^{(l)}$.

Пусть (7) k_0 и l_0 есть целые неотрицательные числа, такие, что $k_0 \neq l_0$ и $\neg'^{(k_0)} = \neg'^{(l_0)}$.

Тогда (8) $\underset{x \in M}{\forall x}: \neg'^{(k_0)}(x) = \neg'^{(l_0)}(x)$.

Используя определение значения $\mathcal{L}$-формулы в $\mathfrak{M}$ при оценке языка $\mathcal{L}$ в $\mathfrak{M}$ и договорённости об обозначениях, легко получить, что

(9) $\underset{v \text{ есть оценка языка } \mathcal{L} \text{ в } \mathfrak{M}}{\forall v}: |(\neg^{(k_0)} p_1 \supset \neg^{(l_0)} p_1)|_v^{\mathfrak{M}} = (\neg'^{(k_0)} v(p_1)) \supset' (\neg'^{(l_0)} v(p_1))$.

(10) $\underset{v \text{ есть оценка языка } \mathcal{L} \text{ в } \mathfrak{M}}{\forall v}: (\neg'^{(k_0)} v(p_1)) \supset' (\neg'^{(l_0)} v(p_1)) = (\neg'^{(k_0)} v(p_1)) \supset' (\neg'^{(k_0)} v(p_1))$

(из (8) и того, что $\underset{v \text{ есть оценка языка } \mathcal{L} \text{ в } \mathfrak{M}}{\forall v}: v(p_1) \in M$)

(11) $\underset{v \text{ есть оценка языка } \mathcal{L} \text{ в } \mathfrak{M}}{\forall v}: (\neg'^{(k_0)} v(p_1)) \supset' (\neg'^{(k_0)} v(p_1)) \in N$ (из (5) и того, что $\underset{v \text{ есть оценка языка } \mathcal{L} \text{ в } \mathfrak{M}}{\forall v}: \neg'^{(k_0)} v(p_1) \in M$)

(12) $\underset{v \text{ есть оценка языка } \mathcal{L} \text{ в } \mathfrak{M}}{\forall v}: |(\neg^{(k_0)} p_1 \supset \neg^{(l_0)} p_1)|_v^{\mathfrak{M}} \in N$ (из (9), (10) и (11))

(13) $(\neg^{(k_0)} p_1 \supset \neg^{(l_0)} p_1) \in$ **VVP** (из (12) и того, что $\mathfrak{M}$ есть характеристическая матрица для **VVP** (см. (2)) и N есть выделенное множество матрицы $\mathfrak{M}$ (см. (3)), по определению характеристической матрицы для **VVP**).

Устраняя допущение (1), получаем, что верна лемма 2.

Лемма 2 доказана.

Лемма 3. Для всяких целых неотрицательных чисел k и l, таких, что $k \neq l$, $\mathcal{L}$-формула $(\neg^{(k)} p_1 \supset \neg^{(l)} p_1)$ не принадлежит множеству **VVP**.

При доказательстве леммы 3 будем использовать построенную в [1] семантику исчисления **HVVP**, базирующуюся на понятии *квазиописания описания состояния*. *Квазиописанием описанием состояния* (*кс*) называется отображение множества всех квазиэлементарных формул в $\{0,1\}$. Можно доказать, что для каждого *кс* α существует единственное отображение $|\ |_\alpha$ множества всех $\mathcal{L}$-формул в $\{0,1\}$, удовлетворяющее следующим условиям:

(a) для всякой квазиэлементарной $\mathcal{L}$-формулы e: $|e|_\alpha = \alpha(e)$,

(b) для всякой $\mathcal{L}$-формулы A, не являющейся квазиэлементарной $\mathcal{L}$-формулой: $|(\neg A)|_\alpha = 1$ т.т.т. $|A|_\alpha = 0$,

(c) для всяких $\mathcal{L}$-формул A и B: $|(A \,\&\, B)|_\alpha = 1$ т.т.т. $|A|_\alpha = 1$ и $|B|_\alpha = 1$,

(d) для всяких $\mathcal{L}$-формул A и B: $|(A \vee B)|_\alpha = 1$ т.т.т. $|A|_\alpha = 1$ или $|B|_\alpha = 1$,

(e) для всяких $\mathcal{L}$-формул A и B: $|(A \supset B)|_\alpha = 1$ т.т.т. $|A|_\alpha = 0$ или $|B|_\alpha = 1$.

Теорема об адекватности логики **VVP** рассмотренной семантике, сформулированная в [1], гласит: $\mathcal{L}$-формула A доказуема в **HVVP** т.т.т. $\mathcal{L}$-формула A такова, что $\forall \alpha: |A|_\alpha = 1$.

α есть *кс*

В силу этой теоремы для доказательства леммы 3 достаточно доказать, что

(+) для всяких неотрицательных чисел k и l, таких, что $k \neq l$, существует *кс* α такое, что $|(\neg^{(k)} p_1 \supset \neg^{(l)} p_1)|_\alpha \neq 1$.

Пусть k_0 и l_0 есть произвольные целые неотрицательные числа, такие, что $k_0 \neq l_0$. Пусть α_0 есть $\{\langle e, 0\rangle \mid e$ есть квазиэлементарная $\mathcal{L}$-формула и $e \neq \neg^{(k_0)} p_1\} \cup \{\langle \neg^{(k_0)} p_1, 1\rangle\}$. Ясно, что α_0 есть *кс* такое, что $|\neg^{(k_0)} p_1|_{\alpha 0} = 1$ и $|\neg^{(l_0)} p_1|_{\alpha 0} = 0$. Очевидно, что $|(\neg^{(k_0)} p_1 \supset \neg^{(l_0)} p_1)|_{\alpha 0} \neq 1$. Итак, существует *кс* α такое, что $|(\neg^{(k_0)} p_1 \supset \neg^{(l_0)} p_1)|_\alpha \neq 1$. Но тогда, поскольку k_0 и l_0 есть произвольные целые неотрицательные числа, такие, что $k_0 \neq l_0$, получаем, что для всяких целых неотрицательных чисел k и l, таких, что $k \neq l$, существует *кс* α такое, что $|(\neg^{(k)} p_1 \supset \neg^{(l)} p_1)|_\alpha \neq 1$.

Утверждение (+) доказано.

Лемма 3 доказана.

Следствием леммы 2 и леммы 3 является следующая **теорема**: не существует конечной характеристической матрицы для логики **VVP**.

Автор выражает благодарность В.М.Попову за помощь, оказанную при написании этой статьи.

ЛИТЕРАТУРА

1. *Попов В.М.* Паралогики: секвенциальные формулировки и семантика // Доклад, прочитанный 16.03.04 на заседании Объединенного семинара кафедры логики философского факультета МГУ и сектора логики Института философии РАН.

Д.В. Баташев, В.М. Попов

ОБ ОДНОЙ ДЕВЯТИЗНАЧНОЙ ПАРАНОРМАЛЬНОЙ ЛОГИКЕ*

Abstract. *A propositional logic* **VIK** *is defined in semantic terms of state quasidescription. A hilbert style calculi* **HVIK** *and a sequent calculi* **GVIK** *which axiomatizing this logic are constructed, a nine-valued characteristic matrix for* **VIK** *is performed, also defined the maps embedding a classical propositional logic to* **VIK**.

В семантических терминах *квазиописаний состояния* определяется пропозициональная логика **VIK**. Строятся исчисление **HVIK** гильбертовского типа и секвенциальное исчисление **GVIK**, аксиоматизирующие эту логику, конструируется девятизначная характеристическая матрица для **VIK**, определяются отображения, погружающие классическую пропозициональную логику в **VIK**.

Некоторые предварительные определения

Алфавит пропозиционального языка $\mathcal{L}$ есть множество $\{\&, \vee, \supset, \neg,), (, p_1, p_2, p_3, \ldots\}$ символов, элементы которого имеют предполагаемые читателем названия.

Определение $\mathcal{L}$-формулы индуктивно:

(1) всякая пропозициональная переменная языка $\mathcal{L}$ есть $\mathcal{L}$-формула,

(2) если A и B есть $\mathcal{L}$-формулы, то $(A \& B)$, $(A \vee B)$, $(A \supset B)$, $(\neg A)$ есть $\mathcal{L}$-формулы.

Квазиэлементарной $\mathcal{L}$-формулой называем $\mathcal{L}$-формулу, в которую не входят ни &, ни $\vee$, ни $\supset$.

Логикой называем непустое множество $\mathcal{L}$-формул, замкнутое относительно правила подстановки в $\mathcal{L}$ и правила *modus ponens в* $\mathcal{L}$.

Теорией логики L называем множество $\mathcal{L}$-формул, которое включает L и замкнуто относительно *modus ponens в* $\mathcal{L}$.

Ясно, что для всякой *логики* L множество $Form_{\mathcal{L}}$ всех $\mathcal{L}$-формул есть *теория логики* L.

Множество $Form_{\mathcal{L}}$ называем *тривиальной теорией логики* L (для всякой *логики* L).

---

* Работа выполнена при поддержке РГНФ, грант № 04-03-00266.

Противоречивой теорией логики L называем такую *теорию T логики L*, что для некоторой $\mathcal{L}$-формулы A верно следующее: $A \in T$ и $(\neg A) \in T$.

Паранепротиворечивой теорией логики L называем такую *противоречивую теорию T логики L*, что T не есть *тривиальная теория логики* L.

Паранепротиворечивой логикой называем такую *логику L*, что существует *паранепротиворечивая теория логики* L.

Полной теорией логики L называем такую *теорию T логики L*, что для всякой $\mathcal{L}$-формулы A верно следующее: $A \in T$ или $(\neg A) \in T$.

Параполной теорией логики L называем такую *теорию T логики L*, что T не является *полной теорией логики* L и всякая *полная теория логики L*, включающая T, есть *тривиальная теория логики* L.

Параполной логикой называем такую *логику L*, что существует *параполная теория логики* L.

Паранормальной логикой называем *логику*, которая является *паранепротиворечивой и параполной логикой.*

Семантика языка $\mathcal{L}$, базирующаяся на понятии *квазиописания состояния*, и определение логики VIK

Понятие *квазиописания состояния* является обобщением введенного в [1] понятия *обобщенного описания состояния.*

Квазиописанием состояния (*кс*) называем отображение множества всех *квазиэлементарных* $\mathcal{L}$-формул в $\{0, 1\}$.

Регулярным квазиописанием состояния называем такое *кс* α, что для всякой *квазиэлементарной* $\mathcal{L}$-формулы e верно следующее: $\alpha(e) = \alpha((\neg (\neg e)))$.

Квазиполным квазиописанием состояния называем такое *кс* α, что если $\underset{e \text{ есть } \textit{квазиэлементарная } \mathcal{L}\text{-формула}}{\exists e}$ $(\alpha(e) = 1$ и $\alpha((\neg e)) = 1)$, то $\underset{q \text{ есть } \textit{квазиэлементарная } \mathcal{L}\text{-формула}}{\forall q}$ $(\alpha(q) = 1$ или $\alpha((\neg q)) = 1)$.

Можно доказать, что для всякого *кс* α существует единственное отображение, обозначим его $||_\alpha$, множества $Form_{\mathcal{L}}$ во множество $\{0, 1\}$, удовлетворяющее условиям:

(а) для всякой *квазиэлементарной* $\mathcal{L}$-формулы e: $|e|_\alpha = \alpha(e)$,

(б) для всякой $\mathcal{L}$-формулы A, не являющейся квазиэлементарной $\mathcal{L}$-формулой:

$$|(\neg A)|_\alpha = \begin{cases} 1, \text{ если } |A|_\alpha = 0; \\ 0 \text{ в противном случае,} \end{cases}$$

(в) для всяких $\mathcal{L}$-формул A и B:

$$|(A \,\&\, B)|_\alpha = \begin{cases} 1, \text{ если } |A|_\alpha = 1 \text{ и } |B|_\alpha = 1; \\ 0 \text{ в противном случае,} \end{cases}$$

$$|(A \vee B)|_\alpha = \begin{cases} 1, \text{ если } |A|_\alpha = 1 \text{ или } |B|_\alpha = 1; \\ 0 \text{ в противном случае,} \end{cases}$$

$$|(A \supset B)|_\alpha = \begin{cases} 1, \text{ если } |A|_\alpha = 0 \text{ или } |B|_\alpha = 1; \\ 0 \text{ в противном случае.} \end{cases}$$

Обозначим через **VIK** множество всех таких $\mathcal{L}$-формул A, что для всякого *регулярного* и *квазиполного кс* α $|A|_\alpha = 1$.

Доказана следующая теорема 1.

Теорема 1. VIK есть паранормальная логика.

Исчисления HVIK и GVIK

HVIK является исчислением гильбертовского типа. Язык этого исчисления есть $\mathcal{L}$. Множеству всех аксиом исчисления **HVIK** принадлежат все те и только те $\mathcal{L}$-формулы, каждая из которых имеет хотя бы один из следующих видов (здесь A, B и C есть $\mathcal{L}$-формулы, D есть $\mathcal{L}$-формула, не являющаяся квазиэлементарной $\mathcal{L}$-формулой):

(I) $((A \supset B) \supset ((B \supset C) \supset (A \supset C)))$,
(II) $(A \supset (A \vee B))$,
(III) $(B \supset (A \vee B))$,
(IV) $((A \supset C) \supset ((B \supset C) \supset ((A \vee B) \supset C)))$,
(V) $((A \,\&\, B) \supset A)$,
(VI) $((A \,\&\, B) \supset B)$,
(VII) $((C \supset A) \supset ((C \supset B) \supset (C \supset (A \,\&\, B))))$,
(VIII) $((A \supset (B \supset C)) \supset ((A \,\&\, B) \supset C))$,
(IX) $(((A \,\&\, B) \supset C)) \supset ((A \supset (B \supset C))$,
(X) $(((A \supset B) \supset A) \supset A)$,
(XI) $((A \,\&\, (\neg A)) \supset (B \vee (\neg B)))$,
(XII) $((\neg D) \supset (D \supset A))$,
(XIII) $((D \supset (\neg (A \supset A))) \supset (\neg D))$,
(XIV) $(A \supset (\neg (\neg A)))$,
(XV) $((\neg (\neg A)) \supset A)$.

Правило *modus ponens в* $\mathcal{L}$ является единственным правилом вывода исчисления **HVIK**. Доказательства в **HVIK** строятся обычным для гильбертовского типа исчислений образом.

Доказана следующая теорема 2 о том, что исчисление **HVIK** аксиоматизирует логику **VIK**.

Теорема 2. Для всякой $\mathcal{L}$-формулы A: A доказуема в **HVIK** т.т.т. $A \in$ **VIK**.

GVIK является секвенциальным исчислением. Секвенции имеют вид $\pi \to \rho$, где π и ρ есть конечные последовательности $\mathcal{L}$-формул (конечной последовательностью $\mathcal{L}$-формул являются, в частности, пустое множество и любая $\mathcal{L}$-формула).

Множество всех основных секвенций исчисления **GVIK** есть множество всех секвенций, каждая из которых имеет вид $A \to A$ или $A, (\neg A) \to B, (\neg B)$, где A и B есть $\mathcal{L}$-формулы.

Множеству всех правил исчисления **GVIK** принадлежат все следующие правила R 1 – R 19 и только они. При нижеследующей формулировке этих правил предполагаем, что Γ, Δ, Σ и Θ есть конечные последовательности $\mathcal{L}$-формул, а A и B есть $\mathcal{L}$-формулы.

R 1: $\dfrac{\Gamma, A, B, \Delta \to \Theta}{\Gamma, B, A, \Delta \to \Theta}$, R 2: $\dfrac{\Gamma \to \Delta, A, B, \Theta}{\Gamma \to \Delta, B, A, \Theta}$,

R 3: $\dfrac{A, A, \Gamma \to \Theta}{A, \Gamma \to \Theta}$, R 4: $\dfrac{\Gamma \to \Delta, A, A}{\Gamma \to \Delta, A}$,

R 5: $\dfrac{\Gamma \to \Theta}{A, \Gamma \to \Theta}$, R 6: $\dfrac{A, \Gamma \to \Delta, B}{\Gamma \to \Delta, (A \supset B)}$,

R 7: $\dfrac{\Gamma \to \Delta, A \quad B, \Sigma \to \Theta}{(A \supset B), \Gamma, \Sigma \to \Delta, \Theta}$, R 8: $\dfrac{A, \Gamma \to \Delta, B}{\Gamma \to \Delta, (A \supset B)}$,

R 9: $\dfrac{A, \Gamma \to \Theta}{(A \,\&\, B), \Gamma \to \Theta}$, R 10: $\dfrac{A, \Gamma \to \Theta}{(B \,\&\, A), \Gamma \to \Theta}$,

R 11: $\dfrac{\Gamma \to \Theta, A \quad \Gamma \to \Theta, B}{\Gamma \to \Theta, (A \,\&\, B)}$, R 12: $\dfrac{\Gamma \to \Theta, \mathrm{A}}{\Gamma \to \Theta, (\mathrm{A} \vee \mathrm{B})}$, R 13: $\dfrac{\Gamma \to \Theta, A}{\Gamma \to \Theta, (B \vee A)}$, R 14: $\dfrac{A, \Gamma \to \Theta \quad B, \Gamma \to \Theta}{(A \vee B), \Gamma \to \Theta}$,

R 15: $\dfrac{\Gamma \to \Theta, D}{(\neg D), \Gamma \to \Theta}$ (здесь D есть $\mathcal{L}$-формула, не являющаяся квазиэлементарной $\mathcal{L}$-формулой),

R 16: $\dfrac{D, \Gamma \to \Theta}{\Gamma \to \Theta, (\neg D)}$ (здесь D есть $\mathcal{L}$-формула, не являющаяся квазиэлементарной $\mathcal{L}$-формулой),

R 17: $\dfrac{A, \Gamma \to \Theta}{(\neg (\neg A)), \Gamma \to \Theta}$, R 18: $\dfrac{\Gamma \to \Theta, A}{(\neg (\neg A)), \Gamma \to \Theta}$,

R 19: $\dfrac{\Gamma \to \Delta, A \quad A, \Sigma \to \Theta}{\Gamma, \Sigma \to \Delta, \Theta}$ (правило сечения).

Выводы в **GVIK** строятся обычным для секвенциальных исчислений генценовского типа образом (см. [2], [3]). Для **GVIK** доказана теорема об устранимости сечения. С использованием этой теоремы доказано, что (☆) для всякой $\mathcal{L}$-формулы A верно следующее: A доказуема в **HVIK** т.т.т. секвенция $\to A$ выводима в **GVIK**. Из утверждения (☆) и теоремы 2 вытекает следующая теорема 3 о том, что исчисление **GVIK** аксиоматизирует логику **VIK**.

Теорема 3. Для всякой $\mathcal{L}$-формулы A: секвенция $\to A$ выводима в **GVIK** т.т.т. $A \in$ **VIK**.

Девятизначная характеристическая матрица для VIK

Пусть $\&^+$, $\vee^+$ и $\supset^+$ есть бинарные, а $\urcorner$ есть унарная операции на $\{1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9\}$, определяемые нижеследующими таблицами.

$\&^{+}$	1	2	3	4	5	6	7	8	9
1	1	2	2	4	5	5	1	2	2
2	2	2	2	5	5	5	2	2	2
3	2	2	2	5	5	5	2	2	2
4	4	5	5	4	5	5	4	5	5
5	5	5	5	5	5	5	5	5	5
6	5	5	5	5	5	5	5	5	5
7	1	2	2	4	5	5	1	2	2
8	2	2	2	5	5	5	2	2	2
9	2	2	2	5	5	5	2	2	2

$\vee^{+}$	1	2	3	4	5	6	7	8	9
1	1	1	1	1	1	1	1	1	1
2	1	2	2	1	2	2	1	2	2
3	1	2	2	1	2	2	1	2	2
4	1	1	1	4	4	4	1	1	1
5	1	2	2	4	5	5	1	2	2
6	1	2	2	4	5	5	1	2	2
7	1	1	1	1	1	1	1	1	1
8	1	2	2	1	2	2	1	2	2
9	1	2	2	1	2	2	1	2	2

$\supset^{+}$	1	2	3	4	5	6	7	8	9
1	1	2	2	4	5	5	1	2	2
2	1	1	1	4	4	4	1	1	1
3	1	1	1	4	4	4	1	1	1
4	1	2	2	1	2	2	1	2	2
5	1	1	1	1	1	1	1	1	1
6	1	1	1	1	1	1	1	1	1
7	1	2	2	4	5	5	1	2	2
8	1	1	1	4	4	4	1	1	1
9	1	1	1	4	4	4	1	1	1

	╥
1	5
2	4
3	6
4	2
5	1
6	3
7	8
8	7
9	9

Операции $\&^{+}$, $\vee^{+}$ и $\supset^{+}$ определялись таблично в [4] при конструировании характеристической матрицы для логики $\mathbf{I}_3$. К сожалению, в [4] при определении операции $\&^{+}$ посредством таблицы допущены три опечатки: в пересечениях третьей сверху строки с четвертым, пятым и шестым столбцами напечатано «1» вместо «5».

Ясно, что $\langle\{1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9\}, \{1\}, \{\&^{+}, \vee^{+}, \supset^{+}, ╥\}\rangle$ есть матрица. Обозначим эту матрицу через $\mathfrak{M}_{\mathrm{VIK}}$. Оценкой языка $\mathcal{L}$ в

m_{VIK} называем отображение множества $\{p_1, p_2, p_3, \ldots\}$ в носитель матрицы m_{VIK}. Можно доказать, что для всякой оценки v языка $\mathcal{L}$ в m_{VIK} существует единственное отображение, обозначаем его $|\,|_v{}^{m^{\mathrm{VIK}}}$ множества $Form_{\mathcal{L}}$ в носитель матрицы m_{VIK}, удовлетворяющее следующим условиям:

(a) для всякой пропозициональной переменной p языка $\mathcal{L}$: $|p|_v{}^{m^{\mathrm{VIK}}} = v(p)$,

(b) для всяких $\mathcal{L}$-формул A и B:

$$|(\neg A)|_v{}^{m^{\mathrm{VIK}}} = \neg^{+} |A|_v{}^{m^{\mathrm{VIK}}},$$
$$|(A \mathbin{\&} B)|_v{}^{m^{\mathrm{VIK}}} = |A|_v{}^{m^{\mathrm{VIK}}} \mathbin{\&^{+}} |B|_v{}^{m^{\mathrm{VIK}}},$$
$$|(A \vee B)|_v{}^{m^{\mathrm{VIK}}} = |A|_v{}^{m^{\mathrm{VIK}}} \vee^{+} |B|_v{}^{m^{\mathrm{VIK}}},$$
$$|(A \supset B)|_v{}^{m^{\mathrm{VIK}}} = |A|_v{}^{m^{\mathrm{VIK}}} \supset^{+} |B|_v{}^{m^{\mathrm{VIK}}}.$$

Доказана следующая теорема 4 о том, что m_{VIK} является характеристической матрицей для логики **VIK**.

Теорема 4.

Для всякой $\mathcal{L}$-формулы A: $\underset{v \text{ есть оценка } \mathcal{L} \text{ в } m_{\mathrm{VIK}}}{\forall v}\ |A|_v{}^{m^{\mathrm{VIK}}} = 1$ т.т.т. $A \in$ **VIK**.

Отображения, погружающие классическую пропозициональную логику в VIK

Обозначаем через **CLP** классическую пропозициональную логику в языке $\mathcal{L}$.

Доказаны следующие теоремы 5 и 6 о погружении **CLP** в **VIK**.

Теорема 5. Пусть φ есть отображение множества всех пропозициональных переменных языка $\mathcal{L}$ во множество $Form_{\mathcal{L}}$, удовлетворяющее условиям:

1) $\varphi(p)$ не есть квазиэлементарная $\mathcal{L}$-формула ни для какой пропозициональной переменной p языка $\mathcal{L}$, 2) для всякой пропозициональной переменной p языка $\mathcal{L}$ $\mathcal{L}$-формулы $(p \supset \varphi(p))$ и $(\varphi(p) \supset p)$ принадлежат логике **CLP**.

Тогда для всякой $\mathcal{L}$-формулы A верно, что $A \in$ **CLP** т.т.т. $h_\varphi(A) \in$ **VIK**, где h_φ есть такое отображение множества $Form_{\mathcal{L}}$ в себя, что для всякой пропозициональной переменной p языка $\mathcal{L}$ и всяких $\mathcal{L}$-формул B и C выполняются условия:

(1) $h_\varphi(p) = \varphi(p)$,

(2) $h_\varphi((B \circ C)) = (h_\varphi(B) \circ h_\varphi(C))$ (здесь $\circ \in \{\&, \vee, \supset\}$),

(3) $h_\varphi((\neg B)) = (\neg h_\varphi(B))$.

Например, определив для всякой пропозициональной переменной p языка $\mathcal{L}$ $\varphi(p)$ как (p & p) (или как (p $\vee$ p)) получаем операцию h_φ, погружающую **CLP** в **VIK**.

Теорема 6. Пусть φ есть такое отображение множества $Form_{\mathcal{L}}$ в себя, что для всякой пропозициональной переменной p языка $\mathcal{L}$ и всяких $\mathcal{L}$-формул B и C выполняются условия:

(1) $\varphi(p) = p$,

(2) $\varphi((B \circ C)) = (\varphi(B) \circ \varphi(C))$ (здесь $\circ \in \{\&, \vee, \supset\}$),

(3) $\varphi((\neg B)) = (\varphi(B) \supset (\neg(p_1 \supset p_1)))$.

Тогда для всякой $\mathcal{L}$-формулы A: $A \in$ **CLP** т.т.т. $\varphi(A) \in$ **VIK**.

Следствие теоремы 6

Для всякой $\mathcal{L}$-формулы А, в которую не входит $\neg$, верно следующее: $A \in$ **CLP** т.т.т. $A \in$ **VIK**.

Таким образом, позитивный фрагмент классической пропозициональной логики, сформулированной в языке $\mathcal{L}$, равен позитивному фрагменту логики **VIK**.

ЛИТЕРАТУРА

1. *Войшвилло Е.К.* Философско-методологические аспекты релевантной логики. М., 1988.
2. *Генцен Г.* Исследования логических выводов // Математическая теория логического вывода. М., 1967.
3. *Смирнов В.А.* Формальный вывод и логические исчисления. М., 1972.
4. *Попов В.М.* Девятизначная характеризация логики $\mathbf{I}_3$ // Философия и будущее цивилизации: Тезисы докладов и выступлений IV Российского философского конгресса (Москва, 24-28 мая 2005 г.) Т.1. С. 547-548.

Д.В. Баташев, В.М. Попов

ПАРАНОРМАЛЬНАЯ ПОДЛОГИКА ИНТУИЦИОНИСТСКОЙ ЛОГИКИ*

Abstract. *A hilbert style calculi* **HIAP** *is constructed and a paranormal logic* **IAP** *which is sublogic of intuitionistic prepositional logic is defined. A sequent calculi* **GIAP** *axiomatizing a logic* ***IAP*** *is performed. Kripke style semantics corresponding to logic* **IAP** *is constructed and the maps embedding* **IntP** *to* **IAP** *are defined.*

Строится исчисление **HIAP** гильбертовского типа и определяется паранормальная логика **IAP**, являющаяся подлогикой интуиционистской пропозициональной логики **IntP**. Предлагается секвенциальное исчисление **GIAP**, аксиоматизирующее логику **IAP**. Конструируется семантика крипкевского типа, адекватная логике **IAP**, и определяются отображения, погружающие **IntP** в **IAP**.

Мы предполагаем известными определения, данные в разделе «**Некоторые предварительные определения**» статьи [1].

Исчисление HIAP гильбертовского типа, логика IAP и ее секвенциальная аксиоматизация

HIAP является исчислением гильбертовского типа. Язык этого исчисления есть $\mathcal{L}$. Множеству всех аксиом исчисления **HIAP** принадлежат все те и только те $\mathcal{L}$-формулы, каждая из которых имеет хотя бы один из следующих видов (здесь A, B и C есть $\mathcal{L}$-формулы, D есть $\mathcal{L}$-формула, не являющаяся квазиэлементарной $\mathcal{L}$-формулой):

(I) $((A \supset B) \supset ((B \supset C) \supset (A \supset C)))$,

(II) $(A \supset (A \vee B))$,

(III) $(B \supset (A \vee B))$,

(IV) $((A \supset C) \supset ((B \supset C) \supset ((A \vee B) \supset C)))$,

(V) $((A \& B) \supset A)$,

(VI) $((A \& B) \supset B)$,

(VII) $((C \supset A) \supset ((C \supset B) \supset (C \supset (A \& B))))$,

(VIII) $((A \supset (B \supset C)) \supset ((A \& B) \supset C))$,

(IX) $(((A \& B) \supset C)) \supset ((A \supset (B \supset C))$,

* Работа выполнена при поддержке РГНФ, грант № 04-03-00266.

(X) $((\neg D) \supset (D \supset A))$,

(XI) $((D \supset (\neg (A \supset A))) \supset (\neg D))$.

Правило *modus ponens в* $\mathcal{L}$ является единственным правилом вывода исчисления **HIAP**. Доказательства в **HIAP** строятся обычным для гильбертовского типа исчислений образом.

Множество всех $\mathcal{L}$-формул, доказуемых в **HIAP**, обозначаем через **IAP**. Доказана следующая теорема 1.

Теорема 1. IAP есть паранормальная логика.

GIAP является секвенциальным исчислением. Секвенция имеет вид $\pi \to \rho$, где π и ρ есть конечные последовательности $\mathcal{L}$-формул (конечной последовательностью $\mathcal{L}$-формул являются, в частности, пустое множество и любая $\mathcal{L}$-формула).

Множество всех основных секвенций исчисления **GIAP** есть множество всех секвенций, каждая из которых имеет вид $A \to A$, где A есть $\mathcal{L}$-формула.

Множеству всех правил исчисления **GIAP** принадлежат все следующие правила R 1 – R 15 и только они. При нижеследующей формулировке этих правил предполагаем, что Γ, Δ, Σ есть конечные последовательности $\mathcal{L}$-формул, Θ есть не более чем одночленная последовательность $\mathcal{L}$-формул, а A и B есть $\mathcal{L}$-формулы.

R 1: $$\frac{\Gamma, A, B, \Delta \to \Theta}{\Gamma, B, A, \Delta \to \Theta},$$

R 2: $$\frac{A, A, \Gamma \to \Theta}{A, \Gamma \to \Theta},$$

R 3: $$\frac{\Gamma \to \Theta}{A, \Gamma \to \Theta},$$

R 4: $$\frac{\Gamma \to}{\Gamma \to A},$$

R 5: $$\frac{\Gamma \to A \qquad B, \Sigma \to \Theta}{(A \supset B), \Gamma, \Sigma \to \Theta},$$

R 6: $$\frac{A, \Gamma \to B}{\Gamma \to (A \supset B)},$$

R 7: $$\frac{A, \Gamma \to \Theta}{(A \,\&\, B), \Gamma \to \Theta},$$

R 8: $$\frac{A, \Gamma \to \Theta}{(B \,\&\, A), \Gamma \to \Theta},$$

R 9: $$\frac{\Gamma \to A \qquad \Gamma \to B}{\Gamma \to (A \,\&\, B)},$$

R 10: $$\frac{\Gamma \to \mathrm{A}}{\Gamma \to (\mathrm{A} \vee \mathrm{B})},$$

R 11: $\dfrac{\Gamma \to A}{\Gamma \to (B \vee A)}$ R 12: $\dfrac{A, \Gamma \to \Theta \quad B, \Gamma \to \Theta}{(A \vee B), \Gamma \to \Theta}$

R 13: $\dfrac{\Gamma \to D}{(\neg D), \Gamma \to}$ (здесь D есть $\mathcal{L}$-формула, не являющаяся квазиэлементарной $\mathcal{L}$-формулой),

R 14: $\dfrac{D, \Gamma \to}{\Gamma \to (\neg D)}$ (здесь D есть $\mathcal{L}$-формула, не являющаяся квазиэлементарной $\mathcal{L}$-формулой),

R 15: $\dfrac{\Gamma \to A \quad A, \Sigma \to \Theta}{\Gamma, \Sigma \to \Theta}$ (правило сечения).

Выводы в **GIAP** строятся обычным для секвенциальных исчислений генценовского типа образом (см. [2], [3], [4]). Теорема об устранимости сечения для исчисления **GIAP**, теорема 2 о том, что исчисление **GIAP** аксиоматизирует логику **IAP**, и теорема 3 доказаны с использованием методов работы [2].

Теорема 2. Для всякой $\mathcal{L}$-формулы A: секвенция $\to A$ выводима в **GIAP** т.т.т. $A \in$ **IAP**.

Теорема 3. Исчисление **GIAP** разрешимо.

Из теоремы 2 и теоремы 3 вытекает, что логика **IAP** разрешима.

Следует обратить внимание на то, что логика **IAP** не имеет конечной характеристической матрицы. Доказательство несуществования конечной характеристической матрицы для **IAP** можно провести, например, аналогично известному геделевскому доказательству несуществования конечной характеристической матрицы для интуиционистской пропозициональной логики.

Семантика языка $\mathcal{L}$, базирующаяся на понятии IAP-модели Крипке

IAP-моделью Крипке называем упорядоченную тройку $\langle G, R, \models \rangle$, где G есть непустое множество, R есть рефлексивное и транзитивное бинарное отношение на G, $\models$ есть подмножество декартова произведения множества G на множество $Form_{\mathcal{L}}$, и выполняются следующие условия:

(1) для всякой квазиэлементарной $\mathcal{L}$-формулы e и всяких α и β из G, верно, что если $\alpha \vDash e$ и α R β, то $\beta \vDash e$,

(2) для всяких $\mathcal{L}$-формул A и B, всякой $\mathcal{L}$-формулы C, не являющейся квазиэлементарной $\mathcal{L}$-формулой языка $\mathcal{L}$, и всякого α из G верно, что

(2.1) $\alpha \vDash (A \mathbin{\&} B)$ т.т.т. $\alpha \vDash A$ и $\alpha \vDash B$,

(2.2) $\alpha \vDash (A \vee B)$ т.т.т. $\alpha \vDash A$ или $\alpha \vDash B$,

(2.3) $\alpha \vDash (A \supset B)$ т.т.т. для всякого β из G верно, что если α R β и $\beta \vDash A$, то $\beta \vDash B$,

(2.4) $\alpha \vDash (\neg C)$ т.т.т. для всякого β из G верно, что если α R β и $\beta \vDash A$, то неверно, что $\beta \vDash C$.

$\mathcal{L}$-формулу A называем общезначимой в **IAP**-модели Крипке $\langle$G, R, $\vDash\rangle$, если всякий α из G таков, что $\alpha \vDash A$.

Доказана следующая теорема 4.

Теорема 4. Для всякой $\mathcal{L}$-формулы A: A доказуема в **HIAP** т.т.т. A общезначима во всякой **IAP**-модели Крипке.

Используя эту теорему и определение множества **IAP**, получаем, что для всякой $\mathcal{L}$-формулы A: $A \in$ **IAP** т.т.т. A общезначима во всякой **IAP**-модели Крипке.

Отображения, погружающие интуиционистскую пропозициональную логику в IAP

Обозначаем через **IntP** интуиционистскую пропозициональную логику в языке $\mathcal{L}$.

Доказаны следующие теоремы 6 и 7 о погружении **IntP** в **IAP**.

Теорема 6. Пусть φ есть отображение множества всех пропозициональных переменных языка $\mathcal{L}$ во множество $Form_{\mathcal{L}}$, удовлетворяющее условиям:

1) $\varphi(p)$ не есть квазиэлементарная $\mathcal{L}$-формула ни для какой пропозициональной переменной p языка $\mathcal{L}$,

2) для всякой пропозициональной переменной p языка $\mathcal{L}$ $\mathcal{L}$-формулы $(p \supset \varphi(p))$ и $(\varphi\,(p) \supset p)$ принадлежат логике **IntP**.

Тогда для всякой $\mathcal{L}$-формулы A верно, что $A \in$ **IntP** т.т.т. $h_\varphi\,(A) \in$ **IAP**, где h_φ есть такое отображение множества $Form_{\mathcal{L}}$ в себя, что для всякой пропозициональной переменной p языка $\mathcal{L}$ и всяких $\mathcal{L}$-формул B и C выполняются условия:

(1) $h_\varphi\,(p) = \varphi\,(p)$,

(2) $h_\varphi\,((B \circ C)) = (h_\varphi\,(B) \circ h_\varphi\,(C))$ (здесь $\circ \in \{\&, \vee, \supset\}$),

(3) $h_\varphi\,((\neg B)) = (\neg h_\varphi\,(B))$.

Например, определив для всякой пропозициональной переменной p языка $\mathcal{L}$ $\varphi(p)$ как (p & p) (или как (p $\vee$ p)) получаем операцию h_φ, погружающую **IntP** в **IAP** .

Теорема 7. Пусть φ есть такое отображение множества $Form_{\mathcal{L}}$ в себя, что для всякой пропозициональной переменной p языка $\mathcal{L}$ и всяких $\mathcal{L}$-формул B и C выполняются условия:

(1) $\varphi(p) = p$,

(2) $\varphi((B \circ C)) = (\varphi(B) \circ \varphi(C))$ (здесь $\circ \in \{\&, \vee, \supset\}$),

(3) $\varphi((\neg B)) = (\varphi(B) \supset (\neg(p_1 \supset p_1)))$.

Тогда для всякой $\mathcal{L}$-формулы A: $A \in$ **IntP** т.т.т. $\varphi(A) \in$ **IAP**.

Следствие теоремы 7

Для всякой $\mathcal{L}$-формулы A, в которую не входит $\neg$, верно следующее: $A \in$ **IntP** т.т.т. $A \in$ **IAP**.

Таким образом, позитивный фрагмент интуиционистской пропозициональной логики, сформулированной в языке $\mathcal{L}$, равен позитивному фрагменту **IAP**.

ЛИТЕРАТУРА

1. *Баташев Д.В., Попов В.М.* Об одной девятизначной паранормальной логике // Логические исследования Вып.12 (см. наст. сборник)
2. *Генцен Г.* Исследования логических выводов // Математическая теория логического вывода. М., 1967 С. 9 – 74.
3. *Смирнов В.А.* Формальный вывод и логические исчисления. М., 1972.
4. *Драгалин А.Г.* Математический интуиционизм. Введение в теорию доказательств. М., 1979.

Б.В. Бирюков, З.А. Кузичева

ЗАРУБЕЖНЫЕ НАПРАВЛЕНИЯ В ФИЛОСОФИИ МАТЕМАТИКИ И ИХ ПРЕЛОМЛЕНИЕ В ФИЛОСОФСКО-ЛОГИЧЕСКОЙ И ИСТОРИКО-МАТЕМАТИЧЕСКОЙ МЫСЛИ РОССИИ XVIII – НАЧАЛА XX ВЕКОВ*

1. Развитие русской математической и философско-логической мысли. Эйлер и его логика «круглых фигур»

В XVIII столетии в России жил и творил великий математик Леонард Эйлер, занимавшийся также логикой и ее преподаванием. Относительный спад в области науки, в немалой мере вызванный его кончиной, был преодолен в первой четверти XIX столетия, когда в России оживилась научная и, прежде всего математическая, мысль. Фигуры Лобачевского, Остроградского, Буняковского, затем Чебышева и его учеников говорят сами за себя. Лобачевский занимает здесь, конечно, особое место. Причем, он, как и Эйлер, интересовался философскими проблемами, а также вопросами логики.

Эйлер был не только математиком – он владел логикой своего времени, а это была логика школы Вольфа. Логическую подготовку он получил в швейцарском Базеле, где был удостоен ученой степени магистра. С именем Эйлера[1] в логике связаны широко используемые и поныне графические схемы, названные его именем, – изображения отношений между классами (объемами понятий). Во втором томе знаменитых «Писем к одной немецкой прин-

---

* Работа подготовлена при поддержке РГНФ, гранты № 03-03-00096а, 05-03-03522а.

[1] Леонард *Эйлер* (1707–1783) прожил в Санкт-Петербурге и проработал в Петербургской Академии наук в общей сложности более 30 лет: в 1727–1741 и в 1766–1783 гг. В.И.Кобзарь, автор важной статьи «Логика Леонарда Эйлера» (Материалы VI Международной научной конференции «Современная логика: проблемы теории, истории и применения в науке». СПб,, 2000. С. 467–473) установил. что в 1738 г. Эйлер, кроме математики, преподавал в Санкт-Петербургском академическом университете логику.

цессе»[2] Эйлер последовательно развивает так называемый «объемный» подход, то есть рассматривает понятия с точки зрения их объемов. Это позволяет представлять отношения между понятиями на геометрических – впрочем, скорее, топологических – образах. Ими служат круговые схемы, которые он называл круглыми фигурами. Заметим, что подобные схемы встречались в логике и ранее, например у Лейбница. В данном случае мы обращаемся к эйлеровым схемам потому, что они вызрели, так сказать, на русской почве. Хотя «Письма» были написаны в Берлине, причем на французском языке, впервые они были опубликованы в Петербурге в русском переводе[3] (а также в их французском оригинале) и были применены Эйлером в обучении логике студентов университета, существовавшего при Петербургской академии наук.

В 102-м письме Эйлер анализирует суждения классических аристотелевских форм A, E, I, O и, рассматривая возможные соотношения между понятиями, изображает их с помощью круговых схем. Так, суждение формы A – «Все *X* суть *Y*» - предполагает два случая: *X* может совпадать с *Y*, но оно может быть собственной его частью, и оба они представимы на круговых схемах хорошо теперь известным образом. В суждении формы E объемы понятий *X* и *Y* внеположны, и соответствующие им круги не пересекаются. Эйлер отмечает, что оба частные суждения – утвердительное и отрицательное – изображаются одной и той же схемой: двумя частично перекрывающими друг друга «круглыми фигурами». Чтобы различить эти случаи, он по-разному расставляет буквы на схемах.

Используя круговые схемы, Эйлер исследует силлогистические умозаключения[4], показывая, как его схемы позволяют различать правильные и неправильные «умствования» – модусы категорического силлогизма (104-е письмо). При этом он опирается на следующие свойства «содержащего» и «содержимого», то есть отношения включения на множестве классов: 1) Все, что есть в содержащемся, находится и в содержимом, и 2) Все, что есть вне содержимого, находится и вне содержащего.

Последовательное проведение метода Эйлера предполагает перебор всех возможных расположений кругов, изображающих классы. Этот перебор, громоздкий, но выполнимый для трех классов, с ростом числа классов становится практически необозримым.

---

[2] *Эйлер Л.* Письма о разных физических и философических материях, писанных к некоторой немецкой принцессе. Том 2. СПб., 1772.

[3] Как сообщает В.И. Кобзарь в упомянутой статье, сейчас в петербургском отделении издательства «Наука» готовится новый их перевод.

[4] «Умозаключение» в существующем тексте «Писем» передано словом «умствование».

Это обстоятельство затрудняло использование в логике кругов Эйлера и снижало изобразительную ценность его метода. С этой трудностью справились лишь создатели логики классов в XIX столетии. Введение понятия «универсума» (де Морган) принципиально облегчило возможность строить диаграммы – вместо разных «картинок», соответствующих разным расположениям, например, трех кругов, достаточно было взять одну, на которой представлены все восемь подклассов, на которые универсум разбивается тремя классами. Эти подклассы, следуя Булю, получили название конституэнтов. В логике классов конституэнты стали теми объектами, над которыми производятся операции. Именно введение «универсума рассуждения» (по терминологии Буля) и «объемный» подход сыграли решающую роль в создании логики классов (алгебры логики). И именно разложение по конституэнтам использовал Дж. Венн в диаграммах, носящих его имя и являющихся обобщением и развитием метода Эйлера.

2. «Начальные основания логики» Лобачевского. Вклад А.В. Васильева

Лобачевский стоит у истоков нового отношения к аксиоматике математических теорий. Его «гиперболическая» геометрия несла в себе философский заряд большой силы: критическое отношение к кантовскому априоризму. Что Н.И. «отталкивался» от Канта, теперь об этом мы можем судить с полной определенностью. Лобачевский был знаком и с логической теорией кёнигсбергского мыслителя и с его «критической философией». Но обо всем по порядку.

Среди манускриптов, сохранившихся в архиве Лобачевского, имеется его студенческая рукопись, озаглавленная «Начальные основания логики»[5]. Издатели датируют ее не ранее чем 1809 годом. Комментатор этой рукописи А.П. Норден[6] утверждает, будто ее источником является «Логика» Канта 1800 года.

Надо сказать, что когда эта рукопись великого математика готовилась к печати, издатели обратились к одному из авторов этих строк – Бирюкову с просьбой высказать свое мнение о тех источниках, которыми мог пользоваться Лобачевский, и коль скоро в вопрос будет внесена ясность, принять участие в подготовке соответствующих комментариев. При этом была высказана

---

[5] *Лобачевский Н.И.* Научно-педагогическое наследие. Руководство Казанским университетом. Фрагменты. Письма. М.: Наука, 1976. С. 581–594.

[6] *Норден А.П.* Фрагмент 16_1 «Начальные основания логики». Об источниках фрагмента // Н.И.Лобачевский. Научно-педагогическое наследие..., С. 576–580.

гипотеза, что рукопись эта представляет собой конспект «Логики» И. Канта. Ознакомившись с текстом Лобачевского, Бирюков пришел к заключению, что в нем несомненно присутствуют мотивы Кантовой логики. Однако содержание рукописи Лобачевского слишком отличается от логики Канта и конспектом «Логики», изданной в 1800 г. от имени Канта его учеником – Йеше[7], быть никак не может. Наиболее четко этот факт обнаруживается, когда в параграфах 121–129 рукописи Лобачевского излагается теория вопросов и ответов, полностью отсутствующая у Канта. Поиски источника, которым мог пользоваться Лобачевский, результатов не дали – в библиотеках Москвы не было нужных книг по логике, принадлежащих представителям школы Канта, и на одном из Кантовских симпозиумов середины 1990-х годов об этой историко-научной задаче прозвучал соответствующий доклад.

К тому времени «Начальные основания логики» были давно изданы с комментариями А.П. Нордена, который с рвением неофита «постатейно» (текст Лобачевского был разбит составителем на 130 параграфов) сравнивает рукопись великого математика с текстом «Логики» Канта, делая акцент на совпадениях и не обращая внимания на несовпадения. Изыскания Нордена лишь подтверждали лежавший на поверхности факт, что содержание логического конспекта Лобачевского было вполне в духе логики кантовской школы. Норден близко подошел к истине, указав под конец своих комментариев на сходство конспекта Лобачевского с «Логикой» Иоганна Кизеветтера, существовавшей уже в русском переводе в изданиях 1829 и 1831 годов (см. ниже). Годы выпуска этой книги означали, что основой рукописи Лобачевского она быть не могла. Ну что стоило поинтересоваться, когда сочинения этого ученика Канта впервые увидели свет на языке оригинала!

На деле рукопись Лобачевского представляла собой конспект одного или двух логических пособий по логике, составленных Кизеветтером, слушателем Канта; конспект был, по-видимому, дополнен из неизвестных нам источников. О том, что Лобачевский изучал именно книгу или книги этого ученика Канта, увидевшую свет *до* кантовской «Логики» и потом много раз, уже в XIX в., неоднократно переиздававшуюся[8], было ясно сказано А.В. Васи-

---

[7] Теперь это сочинение существует в русском переводе: «Логика. Пособие к лекциям 1800» // И.Кант. Трактаты и письма. М., 1980.

[8] *Kiesewetter J.G.K.Ch.* Grundriß einen reinen allgemeinen Logik nach Kantischen Grundsatzen <…>.Berlin, 1791. Эта книга переиздавалась в 1793, 1795*, 1802, 1824 годах. Заметим, что, несмотря на наличие фундаментального библиографического труда Вильгельма Риссе (*W.Risse.* Bibliographia logica. Verzeichnis der Druckschriften zur Logik mit Angabe ihr Fundorte. Bd. I: 1472-1800, Bd. II: 1801-

льевым в книге о Лобачевском, которую в советское время не опубликовали, скорее всего из-за «реакционности» ее автора.

Александр Васильевич *Васильев* (1853–1929) был известным казанским математиком, выросшим в ученого и общественного деятеля общероссийского масштаба. Активный пропагандист «воображаемой геометрии» своего земляка, он был редактором первого, дореволюционного, собрания сочинений Лобачевского и автором первой его научной биографии[9]. А.В. Васильев был членом Государственного совета, депутатом Первой Государственной думы. Член партии конституционных демократов (сокращенно – кадетов), он входил в ее Центральный комитет; эта партия – она называла себя еще «партией народной свободы» – не стяжала, как известно, славы в российской истории, так как внесла заметный вклад в разрушение российской государственности.

Кадетская партия, как партия «буржуазная», после большевицкого переворота была запрещена, и ее деятели подвергались преследованиям. Но А.В.Васильеву, по-видимому, удалось избежать репрессий, он продолжал работать как математик и подготовил новую, расширенную книгу о Лобачевском. В 1927 г. книга была отпечатана, но ее тираж два года пролежал без движения на складе Госиздата, а в 1929 г. – в год кончины А.В. – его уничтожили.

К счастью, книга уцелела и обрела жизнь уже в посткоммунистическое время. Был найден экземпляр ее верстки, и в 1992 г. стараниями В.А. Бажанова она, наконец, увидела свет[10]. Ответственным редактором книги 1927–1992 гг. был ведущий советский историк математики А.П. Юшкевич, и в предисловии к ней он пишет, что причины «варварского поступка» – уничтожения книги А.В. Васильева – неизвестны. Это весьма странно: кому, как не Адольфу Павловичу, в 30-х годах активному борцу с «буржуазной

1969), нельзя с уверенностью сказать, что не было других изданий. В Библиографии Риссе не указано, например, издание 1795 года, хранившееся (по данным, приведенным в книге А.В. Васильева, о которой ниже) в 20-х годах прошлого века в Библиотеке Московского университета (год этого издания выше помечен звездочкой). Другой труд И. Кизеветтера. Logik zum Gebrauch fur Schulen. Berlin. 1796 (или также 1797), вышел затем в 1814* и 1832 гг. (эти два последних издания, согласно А.В. Васильеву, хранились в Библиотеке Московского ун-та). Русский перевод этой последней книги Кизеветтера был выполнен Толмачевым и издан в 1829 и 1831 г. в Петербурге под названием «Логика для употребления в училищах».

[9] *Васильев А.В.* Н.И.Лобачевский. СПб., 1914.

[10] *Васильев А.В.* Николай Иванович Лобачевский. 1792–1856. / Отв. ред. А.П. Юшкевич. Издание подготовили В.А. Бажанов и А.П. Широков. М., 1992. В дальнейшем при ссылках: *А.В. Васильев*, 1927–1992.

философией математики»[11], не знать о гонениях на «реакционную профессуру» в математике, развернувшихся на рубеже 20–30-х годов, о судьбе Д.Ф. Егорова и о «деле Н.Н. Лузина», наконец, о расправе властей с рядом выдающихся русских академиков. А.В. Васильев был явно «буржуазным» ученым, и «давать ему трибуну», как тогда говорили, советской власти было ни к чему. Что касается того, кто конкретно инициировал этот «варварский поступок», мы не знаем, да это не так уж важно.

Важно другое: невыпущенная в свет книга А.В. Васильева была достаточно известна в кругах математиков, занимавшихся научным наследием великого казанского ученого. Ее неоднократно упоминает В.Ф. Каган в своей известной книге о Лобачевском. О Вениамине Федоровиче мы будем говорить отдельно. Здесь для нас интересно то, что, рассказывая о первых шагах научной и педагогической деятельности создателя «воображаемой геометрии», В.Ф. приводит в переводе с латинского отзыв учителя Лобачевского – М.Ф. Бартельса[12], в котором говорилось об успехах этого его ученика. Каган пишет, что латинский текст этого отзыва содержится «в неизданной книге Васильева “Жизнь и научное дело Лобачевского”»[13], написанной в 1927 г. Эта книга Васильева была известна в то время. Например, А.П. Котельников[14], один из редакторов вышедшего в 1946 г. первого тома собрания сочинений Н.И. Лобачевского[15] упоминает о ней. Поэтому удивительно, что А.П. Юшкевич, – крупный специалист по истории математики в России[16], не упоминает о

---

[11] Ср., например, его текст «От переводчика» в книге: *Г. Вейль.* О философии математики. Сб. работ / Перев. А.П. Юшкевича. Предисловие С.А. Яновской. М.;Л. 1934.

[12] Мартин Федорович *Бартельс* (Johann Martin Christian Bartels, 1769–1836), уроженец г. Брауншвейга (ныне земля Нижняя Саксония), русский математик, с 1803 г. – профессор Казанского ун-та.

[13] *Каган В.Ф.* Лобачевский. М.–Л., Изд-во АН СССР, 1944. С. 47, издание 1948 г. – С. 64.

[14] Александр Петрович *Котельников* (1865–1944) был выпускником Казанского ун-та. Крупный математик и механик, заслуженный деятель науки и техники РСФСР, он изучал связь между геометрией Лобачевского и (общей) теорией относительности. Ему принадлежит труд «Некоторые приложения идей Лобачевского в механике и физике» (М.;Л., 1950), написанный совместно с известным физиком В.А. Фоком.

[15] *Н.И.Лобачевский.* Полное собрание сочинений. Тома 1–5. М.–Л., 1946–1951. В Приложении 1 к первому тому этого Собрания сочинений А.П. Котельников отмечает, что упомянутая биография Н.И. Лобачевского, составленная А.В. Васильевым, «находится в рукописи». См. т.1, с. 407, сноска 2.

[16] *Юшкевич А.П.* История математики в России. М., 1968. В «Математическом словаре» (М., 1988), в библиографии к статье «Лобачевский Николай Иванович» тоже указана только книга А.В. Васильева 1914 г.

книге А.В. Васильева 1927 года. Он ссылается только на работу этого автора, вышедшую до революции[17]. Между тем более фундаментальная книга Васильева, отпечатанная в конце 20-х годов, рукопись которой была доступна специалистам в 1946 г., не могла остаться неизвестной Адольфу Павловичу!

Крупнейший советский исследователь жизни и творчества гениального казанского математика – В.Ф. Каган, о котором мы еще будем не раз говорить, очень аккуратно отзывается о мировоззрении Лобачевского, не желая, видимо, компрометировать себя использованием советских философских штампов, но остерегаясь идти вразрез с официальной идеологией. Иное дело – А.В. Васильев, мысль которого сформировалась в дореволюционной России (А.В. был старше Кагана на 16 лет) и воззрения которого не имели ничего общего с марксизмом, что отчетливо видно по его книге о Лобачевском.

В книге А.В. Васильева особенно примечательна последняя глава – «Лобачевский как мыслитель». В ней нет ссылок на «классиков марксизма-ленинизма», но зато показана преемственность его (Лобачевского) философских взглядов с подлинными классиками мировой философии. «Указывая путь опыта, которым мы должны приобретать и расширять наши знания о том, что мы называем пространством, Лобачевский, – писал А.В. Васильев, – является продолжателем дела тех великих ученых и философов – Бэкона, Декарта, Галилея, Ньютона, которые, оставив априорные рассуждения, стали, по его словам, вопрошать природу, “зная, что она всегда отвечает непременно и удовлетворительно”»[18].

Во всех своих научных работах, продолжал А.В., Лобачевский пользовался всеми способами строгого доказательства, которыми обладают математики. Требуя от «начал» (то есть аксиом) строгости и ясности, он распространял это требование и на выводы следствий из этих «начал»[19]. Естественно, поэтому, предположить, писал А.В. Васильев, что «он не мог не интересоваться и общею природою рассуждения и доказательства, тою наукою,.. которая в систематической форме была изложена под именем аналитики Аристотелем, и уже во времена Цицерона носила название логики»[20].

---

[17] *Васильев А.В.* Николай Иванович Лобачевский. СПб, 1914.

[18] *Васильев А.В.* Николай Иванович Лобачевский 1927–1992. С. 206.

[19] Лобачевский, таким образом, понимал фундаментальный методологический принцип: строгость доказательства должна соответствовать строгости формулировки того, что доказывается.

[20] Там же. С. 206–207.

В рукописи «Начальные основания логики» Васильев видел подтверждение этого своего взгляда. При этом он высказал предположение, что рукопись является либо результатом внимательного изучения Лобачевским логических сочинений кантовской школы, которых было очень много, либо же является конспектом какой-либо из такого рода книг. Отложим пока в сторону обсуждение этого вопроса и покажем, как Васильев характеризует отношение Лобачевского к Канту.

Васильев указывает на то, что Лобачевский еще в 1915 г. был знаком с «Критикой чистого разума» и поначалу в своих философских представлениях (отраженных в лекциях по алгебре, читанных в 1825 г.) был склонен принять воззрения Канта на математику. В подтверждение этого А.В. Васильев цитирует великого математика: «Вещи в отношении к познавательной способности человека суть двоякого рода: одни суть предметы чистого разума, и разум сам от себя дает им все их свойства; другие основываются еще на опыте. Первые принадлежат чистой математике; в кругу же последних смешанная математика выбирает свои предметы. Вещи внутреннего чувства должны быть во времени; внешнего же еще и в пространстве»[21].

Размышления над природой параллельных линий сопровождались обращением Лобачевского к громадному корпусу философского наследия. В связи с этим А.В. указывает, что Лобачевскому «почти, наверное» были знакомы упомянутые выше письма Эйлера к немецкой принцессе, в которых великий математик изложил свои философские воззрения. На выработку взглядов Лобачевского могли оказать влияние и математик Т.Ф. Осиповский (профессор Харьковского университета), и А.С. Лубкин, и И.Е. Срезневский, последовательно занимавшие в Казани кафедру «умозрительной и практической философии» и пропагандировавшие идеи Канта. В числе тех, кто мог оказать влияние на Лобачевского может быть назван одно время находившийся в Казани магистр Московского университета И.И. Давидов (Давыдов), – сторонник английского эмпиризма и французского сенсуализма. Как бы то ни было, со временем Лобачевский изменил свое отношение к кантовским взглядам на математические суждения. Он остался при кантовской характеристике геометрических суждений как суждений синтетических, но отверг их априорный характер.

Васильев, излагая воззрения, к которым в конце концов пришел Лобачевский, пишет, что истины, лежащие в основе геомет-

---

[21] Там же. С. 209.

рии, «получаются прямо в природе чувствами и поэтому их достоверность ограничивается границами нашего пространственного опыта»; за пределами видимого мира или в тесной сфере молекулярных притяжений возможна иная теория параллельных линий. Здесь взгляды Лобачевского, констатирует А.В., «близки к взглядам английской эмпирической школы (Локк, Юм, Беркли) и к сенсуализму Кондильяка»[22].

Мы видим, таким образом, что никаких «материалистов» и «диалектиков» среди тех философов, взгляды которых так или иначе принимал во внимание Лобачевский, не было. И то, что его «передовые идеи» сделаются «орудием борьбы против идеализма в математике»[23], он мог видеть разве что в страшном сне.

Вернемся теперь к рукописи «Начальные основания логики». Здесь стоит сказать хотя бы о структуре этого примечательного документа, тем паче что о ней пишет и Васильев. Из 130 ее параграфов первые двенадцать представляют собой введение; далее следуют: «Аналитика» – часть I (начальное учение – параграфы 13–84) и часть II («методное», то есть методологическое, учение – параграфы 85–130); в первой части «аналитики» в отдельных главах рассматриваются учения о понятиях, суждениях и (умо)заключениях. Глава «О заключениях» подразделяется на «Отделение I. О силлогизмах» и «Отдел II. О непосредственных следствиях». Часть II на главы не разделяется; завершается документ, как мы уже упоминали, параграфами, где говорится о вопросах и ответах. «Из вопросов и ответов, – читаем мы в рукописи Лобачевского, – должны происходить суждения. Посему вопросы, смотря по происходящим из них суждениям, могут быть разделены на категорические, условные и разделительные»[24]. В завершающем, 130-м, параграфе конспекта казанского математика объясняются понятия об аксиоме, теореме, королларии, схолии, задаче (*problemata*), лемме и постулате. Заметим, что у Канта эти понятия тоже имеются, но речь о них он ведет не в учении о методе, а в связи с суждениями.

Как мы уже говорили, А.В. Васильев придерживался взгляда, что Лобачевский конспектировал пособие (или пособия) Кизеветтера[25]. Он привлек к изучению рукописи Лобачевского С.С. Скря-

---

[22] Там же. С. 208–209.

[23] Ср. книгу: *Яновская С.А.* Передовые идеи Лобачевского – орудие борьбы против идеализма в математике. М., 1950. В дальнейшем при ссылках: *Яновская*, 1950.

[24] *Лобачевский Н.И.* Научно-педагогическое наследие… С. 593.

[25] Об этом писал В.А. Бажанов в книге: Прерванный полет. История «университетской» философии и логики в России. М.: Изд-во МГУ, 1995. С. 59, 93, 97.

бина (?), и в результате этой работы у обоих возникло убеждение, что перед ними конспект, составленный на основе сочинений этого хорошо известного в России представителя кантовской школы. По просьбе Васильева С.С. Скрябин провел систематическую работу по сопоставительному изучению параграфов 1–12 конспекта Лобачевского, составляющих «Введение»; он сравнивал их с параграфами двух «Логик» Кизеветтера – 1795 и 1814 годов (в примечании 7 эти годы помечены звездочками).

«Введение» в конспекте Лобачевского весьма показательно. В нем даны определения самых главных понятий («мыслить», «разум», «логика»), указаны подразделения логики и сформулированы «три закона мышления». Выяснилось, что содержание параграфов рукописи Лобачевского соответствовало в одних случаях тому, что говорилось в одной из книг Кизеветтера, в других случаях – в другой; иногда же сказанное у Лобачевского было похоже или просто повторяло формулировки обеих книг. Так, параграф 11, в котором речь шла о законах мышления, оказался почти буквальным переводом параграфа 17 «Логики» Кизеветтера 1795 года, за исключением того, что у немецкого автора об этих законах сказано, что они «не происходят из опыта», а у Лобачевского – что они суть «то необходимое условие, без которого невозможно никакое мышление»[26]. Параграф 12 текста Лобачевского соответствует параграфам 23–26 «Логики» Кизеветтера 1795 г. и параграфу 21 «Логики» 1814 г. К сопоставлению был привлечен и Кант («Логика» 1800 г.), в частности, приведены кантовские формулировки «трех законов мышления»: было ясно, что все три сравниваемых текста так или иначе связаны с логическими воззрениями кёнигсбергского философа. Во всех трех текстах – Кизеветтера и Лобачевского за «Введением» следовала глава «Учение о понятиях».

Но в некоторых пунктах конспект Лобачевского отступал и от Кизеветтера, и от Канта. Так, Лобачевский упростил подразделение логики: «общую логику» (как известно, это специфический кантовский термин) он отождествил с «аналитикой», а «прикладную» – с «диалектикой», чего мы не находим ни у Кизеветтера, ни у Канта: для них эти различения обладают самостоятельным смыслом.

Ныне в каталоге Библиотеки МГУ книги Кизеветтера 1795 и 1814 гг. отсутствуют – имеется лишь их русский вариант. Но, быть может, эти книги имеются в других крупных научных библиотеках России; тогда, используя немецкие оригиналы и русский перевод,

---

[26] *Васильев А.В.* 1927–1992. С. 214–215, примеч. 6.

станет возможным дальнейшее сопоставление Лобачевского, Кизеветтера и Канта. Тогда мы сможем получить ответ на вопросы типа: откуда в рукописи казанского математика появились вопросительные предложения?

3. Научные последствия «великих реформ»

Русская научная и философская мысль делает в последней трети XIX – первых двух десятилетиях XX века стремительный рывок. Он охватывает математику, химию, физиологию, медицину. Имена Чебышева, Ляпунова, Мечникова, Менделеева, Павлова приобретают мировую известность. Мы не ошибемся, если свяжем этот прогресс с тем толчком, который был дан русскому обществу реформами государя Алексадра II.

В областях знания, которые нас будут в дальнейшем интересовать, – математике и логике (включая философский ее облик) появляются добротные учебные пособия. Примером может служить «Аналитическая геометрия» Н. Брашмана, изданная еще в 1836 г. Эта книга вливалась в общее развитие университетской математики. Наряду с этим все большее внимание уделяется преподаванию соответствующего предмета в средней школе. В 90-х годах школьные программы по математике были подвергнуты резкой критике со стороны многих ученых и педагогов. Они предлагали ввести в программы новые актуальные научные вопросы (особенно связанные с идеей функциональной зависимости), удалив из курса математики устаревший материал[27]. А.П. Юшкевич отмечает, что с такого рода требованиями в 1891 г. на страницах журнала «Русская школа» выступил педагог и методист С.И. Шохор-Троцкий. Вскоре этот же вопрос поднял в одной из своих статей В.П. Шереметевский[28], о философско-математических воззрениях которого ниже мы будем говорить подробнее. Здесь мы отметим лишь его вклад в математическое образование.

Шереметевский, сообщает А.П. Юшкевич, сетовал на то, что центральные идеи современной математики и математического естествознания остаются за рамками гимназических программ. Он писал: «Молодые люди конца XIX века, готовящиеся принять официальное удостоверение в умственной зрелости, искусственно задерживаются на средневековом уровне математической мысли»

---

[27] См. *Юшкевич А.П.* История математики в России. М., 1968. С. 310.

[28] *Шереметевский В.П.* (ум. в 1919 г.), крупный деятель математического просвещения (как его характеризует в своей книге А.П. Юшкевич) был профессором московского «народного университета» А.Л. Шанявского (университет существовал с 1908 по 1918 гг.).

и подробно обосновывал тезис, согласно которому «элементарный курс [математики] должен группироваться вокруг основного понятия о функциональной зависимости»[29].

После «великих реформ» резко оживляется русская – и прежде всего университетская – философия, которая вливается в общий поток интеллектуальных поисков Серебряного века, противостоявших убогому материализму «шестидесятников». Большую роль здесь сыграла реформа среднего образования, проведенная в начале 70-х годов, когда министром народного просвещения был граф Д.А. Толстой, с 1882 г. президент Петербургской Академии наук. В гимназиях стали в течение нескольких лет обучать гимназистов латинскому и греческому языкам. Душой реформы был видный представитель просвещенного консерватизма М.Н. Катков[30]. Взлет научно-философской мысли в России в предреволюционные годы во многом обязан этой реформе.

Впрочем, создание в 1872 г. альтернативных классическим гимназиям реальных училищ, выпускники которых владели большим объемом знаний по математике и естественным наукам, не только позволило русскому образованию обрести нужную гармоничность, но и привело к тому, что русская инженерная школа приобрела широкую известность. А имена А.М. Ляпунова, А.А. Маркова (старшего) и Н.Е. Жуковского вошли в мировую науку.

Теперь о философской логике. Этот учебный предмет в XIX веке без какого-либо перерыва преподавался в университетах (в отличие от философии, которая почти полтора десятилетия была из них изгнана), но учебники логики должного уровня появляются

---

[29] *Шереметевский В.П.* Математика как наука и ее школьные суррогаты // Русская мысль, 1895, № 5, с. 106, 118.

[30] Михаил Никифорович *Катков* (1818–1887), в годы студенчества в Московском университете был близок Белинскому и Герцену, но очень скоро порвал с ними – и вообще с так называемым освободительным движением и либерализмом. Он занял позицию славянофильского толка (в частности, сблизился с П.М. Леонтьевым), стал консерватором и поборником русской государственности. Верность слов М.Н.: если в России «вырвать с корнем монархическое начало, оно выродится в деспотизм диктатуры, а если уничтожить аристократический элемент в обществе, его место будет занято бюрократами или демагогами, олигархией самого дурного свойства...» подтверждена всей историей нашего отечества, начиная с 1917 г. (цитата из статьи Каткова «К какой принадлежим мы партии?», опубликованной в «Русском Вестнике» в 1862 г. Цит. по: *Алексеев П.В.* Философы России XIX–XX столетий. Биографии, идеи, труды. М., 2002. С. 423). В упомянутом труде П.В. Алексеева, в статье «Катков Михаил Никифорович» (авторы Н.Ф. Рахманкулова, П.В. Алексеев, А.В. Пролубников и А.А. Ширинянц) читатель может найти объективную характеристику фигуры Каткова, в советские годы заклейменного как «реакционер».

гораздо позже, чем пособия по математике. Наиболее известным здесь является «Учебник логики» Г.И. Челпанова, предназначенный для гимназий (он выдержал много изданий) и университетский учебник А.И. Ввведенского «Логика как часть теории познания» (три издания, последнее – 1922 г.). В этом процессе умственного развития немалую роль играли обзоры российской и иностранной научной литературы, появление биографий выдающихся ученых. Так, в старейшем русском научном издании – известном «Журнале Министерства Народного просвещения»[31] в 1856 г. был напечатан перевод биографии К.Ф. Гаусса. Создавались и другие научные журналы.

Развитие в России, с одной стороны, философской и логической, а с другой – историко-математической мысли в известном смысле воплощали Александр Иванович Введенский и Виктор Викторович Бобынин.

4. А.И. Введенский

Александр Иванович Введенский (1886–1925), ученик создателя отечественной философско-логической школы М.И. Владиславлева, имел чин статского советника, был профессором Петербургского университета и читал лекции во многих высших учебных заведениях столицы. В упомянутой выше книге «Логика как часть теории познания»[32] А.И. показал, какие выводы для логики можно сделать из философии Канта «критического» периода.

А.И. Введенский два года стажировался в Гейдельбергском университете, где слушал Куно Фишера; считается, что как неокантианец он по своим воззрениям близок Г. Когену. Однако он был вполне самостоятельным мыслителем. Следуя, в общем, учению Канта, он внес в «критическую» философию много оригинального. А.И., в частности, придавал большое значение логике как средству расширения знания – неслучайно он называл свою философию «логицизмом». Введенский четко различал нормативную и описательную стороны мышления, «логику открытия» новых истин и «логику проверки» истин, уже установленных. Нормативная сторона изучается логикой, а именно «логикой проверки», описательная же составляет предмет психологии. Что касается «логики открытия», то это еще не реализованный замысел. Логика как нормативная дисциплина – наука о правильности мышления –

---

[31] Этот журнал – ЖМНП – регулярно выходил с 1832 по октябрь 1917 г. включительно.

[32] *Введенский А.И.* Логика как часть теории познания. Пг., 1923. 3-е изд.

служит расширению знания именно тем, что позволяет различать правильный и неправильный ход мысли. В этом различении она совершенно не зависит от психологии; ибо последняя «изучает мышление безоценочно, как факт, тогда как логика рассматривает мышление только оценочным образом, решая, годен или нет для приращения знания данный способ мышления»[33]. Разграничивая априорную и апостериорную стороны познания, А.И. вместе с тем признавал метафизическое знание, относя к последнему веру.

Решительно отстаивая силлогистику как то главное в логике, что выражает движение мысли, позволяя отличать правильный его ход и отвергать неправильный, А.И. считал, что математизация логики (с чем он был достаточно знаком), здесь ничего дать не может.

Введенский предлагал «новое и легкое доказательство философского критицизма» в смысле Канта, которое, по его убеждению, покоится, прежде всего, на законе противоречия (а вместе с ним и на законах тождества и исключенного третьего). В.В. Зеньковский так излагает взгляды Введенского. Закон противоречия «естественен» для наших представлений и «нормативен» для нашего мышления, в силу чего логические выводы (которые, конечно, на нем основаны), законны лишь для наших представлений, но неуместны в отношении того, что находится за их пределами, то есть для «вещей в себе»; но быть заключенным в мире явлений невыносимо, и апостериорное знание и философское мышление стремится вывести нас за его пределы. Но подлинное постижение такого рода трансцендентного мира дается верой[34]. Здесь естественно возникает проблема о применимости к этому миру законов логики. Эту проблему рассматривал современник А.И. – И.И.Лапшин, и она впоследствии привела Н.А.Васильева к мысли о неаристотелевой логике (о которой мы в силу громадности этой темы здесь говорить не будем).

А.И. Введенский оказался первым – бессменным и единственным – председателем Философского общества при Петербургском университете, созданном в октябре – декабре 1897 г. (22 октября был утвержден Устав Общества, а первое заседание состоялось 7 декабря) и просуществовавшем до 1921 года, когда советские власти его закрыли. В этом Обществе А.И. Введенский играл руководящую роль. Первое теоретическое заседание общества, состоявшееся 31 января 1898 года, открылось его речью, в которой он

---

[33] *Там же. С.* 6.

[34] *Зеньковский В.В.* История русской философии. Т II, часть 1. Л., «Эго». 1991. [перепечатка с издания: YMKA Press – Париж, 1950]. С. 229–232.

говорил о том тернистом пути, который философия – и вместе с ней логика – прошла в России[35].

Историю русской философии А.И. разделил на три периода, различающиеся не только ее содержанием, но и отношением к ней российской власти, часто подозрительно-негативным. Первый период открывается вместе с основанием Московского университета в 1755 году; он назван Введенским «подготовительным», так как начало философии в России положило усвоение «уже готовой» западноевропейской философии. В этот период русская мысль прошла путь увлечения вольтерьянством и вольфианством, но особого следа в культурной жизни России это не оставило. Второй период, период «господства германского идеализма», падает на первые две трети XIX века. В царствование Александра I преподавание философии было «широко поставлено не только в университетах и духовных академиях[36], но даже в семинариях и гимназиях»; в число предметов, обязательных для гимназий, вошли логика и психология. Но преподавание философских предметов было под постоянным давлением со стороны клерикальных кругов, и в 1850 г. философия была изгнана из университетов – на целых тринадцать лет. Светская философия, на которую в России сильно влияли воззрения немецких идеалистов, прежде всего Шеллинга, подвергалась со стороны властей, как говорил

---

[35] Эта речь под названием «Судьбы философии в России» была напечатана в журнале «Вопросы философии и психологии» (1898, кн. 42), а затем в том же году отдельно издана в Москве. Впоследствии А.И. включил ее в свою книгу «Философские очерки» (СПб., 1901, вып. 1). Ныне она опубликована в книге: *А.И. Введенский А.Ф. Лосев, Э.Л. Радлов, Г.Г. Шпет.* Очерки истории русской философии / Сост., вступит. статья и примечания Б.В. Емельянова и К.Н. Любутина. Свердловск: Изд-во Уральского ун-та, 1991 (в дальнейшем при ссылках на статью «Судьбы философии в России»: *Введенский*, 1898). Остальные работы, помещенные в этой книге – А.Ф. Лосева «Русская философия», Э.Л. Радлова «Очерк истории русской философии» и Г.Г. Шпета «Очерк развития русской философии», – существенно дополняют картину, нарисованную в статье А.И. Введенского. Следует заметить, что Э.Л. Радлову принадлежит «Очерк русской философской литературы XVIII-го века», помещенный в двух выпусках журнала «Мысль» – № 2 и 3. Этот журнал издавался Философским Обществом при Петербургском (Петроградском) университете как продолжение традиции довоенного (до первой мировой войны) журнала «Вестник философии и психологии». Оба номера вышли в 1922 г., и в первом из них была помещена «Часть общая» работы Радлова, а во втором номере – «Часть специальная», в которой главное внимание было уделено логике. Полное библиографическое описание журнала «Мысль» будет дано ниже.

[36] В 1809 г. была открыта С.-Петербургская духовная академия, спустя десять лет – С.-Петербургский университет. Еще ранее – в 1802, 1803 и 1804 гг. были открыты соответственно Дерптский (Юрьевский), Казанский и Харьковский университеты.

А.И. Введенский, «беспощадному гонению». Это гонение распространялось на Харьковский, Казанский, Петербургский, в меньшей мере – на Московский университеты. Философию в этих условиях представляли естественники («натуралисты») и математики, среди которых А.И. особо выделяет Лобачевского, который «философски анализировал» начала геометрии и построил «синтетическую геометрию». Но общие синтетические суждения – суждения, предикат которых (полностью или частично) содержится в субъекте, могут быть только умственными конструкциями[37]. Построения Лобачевского были бы немыслимы без учета широкого круга западноевропейских философов и ученых, начиная с Декарта и Лейбница и кончая Риманом и Гельмгольцем. Но интеллектуальная жизнь в России никогда не прекращалась; в 30–40-е годы она сосредоточилась во внеуниверситетской среде – в литературных кружках, в течениях славянофилов и западников.

Изгнание философии из русских университетов, констатирует А.И., продолжалось тринадцать лет, вплоть до введения университетского устава 1863 г., однако преподавание *логики* не было прервано и в этот период, хотя и было отдано представителям духовного звания. Упомянутый устав открыл третий период развития философии в России – «период вторичного развития». Распространившиеся в это время на Западе материализм и позитивизм нашли своих сторонников и в России, но эти направления, утверждает А.И., сходят сами собой, уступая место идеалистическим и спиритуалистическим течениям. Свидетельством этого является деятельность созданного в 1885 г. Московского психологического общества и содержание издававшегося им (с 1889 г.) журнала «Вопросы философии и психологии». В воссоздании университетской философии большую роль сыграли зарубежные научные командировки (в основном в Германию) таких будущих русских профессоров философии, как М.М. Троицкий и М.В. Владиславлев. Но деятельность Общества была недолгой – новая власть его закрыла.

Не ясно, оставался ли А.И. до конца своих дней профессором в своем университете. В справочнике П.В. Алексеева утверждается,

---

[37] Аналогичную мысль высказывает А.П. Филиппов: «Никоим образом нельзя отрицать, что мы имеем возможность комбинировать по своему произволу понятия, а стало быть, и образовывать суждения». И далее: «Совершенно очевидно, таким образом, что с логической точки зрения, только именно исчерпав возможные комбинации понятий в соответствующей сфере, Лобачевский мог получить единую и цельную систему». *Филиппов А.П.* О сущности суждений // Труды Секции истории и методологии наук. «Ученые записки» Кафедры истории европейской культуры. Вып. III. Харьков, 1929. С. 209.

что да[38]. Но одно бесспорно: и в университете, и вне его А.И.Введенский старался всеми силами препятствовать упадку в России философской мысли. В частности, он участвовал в спорах 20-х годов, выступая против атеизма.

5. В.В.Бобынин. Новые математические и философские издания

Виктор Викторович Бобынин (1849–1919), выходец из небогатой провинциальной дворянской семьи (гимназию он закончил в Туле). По завершении образования в Московском университете по математическому отделению он начал с преподавательской деятельности в средних военно-учебных заведениях – сначала в Нижнем Новгороде, а потом в Москве. Темой его магистерской – по математике – диссертации, защищенной в 1882 г., была «Математика у древних египтян»[39]. Он был зачислен в Московский университет в качестве приват-доцента, и уже в год защиты диссертации начал читать факультативный курс истории математики.

В.В. Бобынин был первым в России историком математики, занимавшимся также ее методологией. Особую его заслугу составляет изложение математической логики, как она была представлена в трудах ее зарубежных создателей – Буля, Шрёдера и Р. Грассмана (о чем ниже). Советские историки математики особо выделяют изучение им истории математической мысли, а также астрономии в России XVII века, то есть до организации Петербургской Академии наук[40] – области, до того не привлекавшей внимания исследователей[41].

В.В. Бобынин основал журнал «Физико-математические науки в их прошлом и настоящем»[42]. Журнал выходил двумя параллельными изданиями: «Отдел научных статей» (четыре выпуска в год) и «Отдел научных новостей, критики и библиографии» (ежемесячно). В нем, а также в других изданиях он опубликовал много статей историко-математической тематики, в том числе посвященных истории математики в России. Изучая математику в России, он использовал обширные рукописные материалы[43]. Большим

---

[38] *Алексеева И.Ю., Кулакова Т.И.* Введенский Александр Иванович // *Алексеев.* Философы России. С. 171–172.

[39] См.: Математический листок. М., 1881–1882.

[40] *Бобынин В.В.* Очерки развития физико-математических знаний в России. XVII столетие. Вып. 1–2. М., 1885–1890.

[41] Ср. *Юшкевич А.П.* История математики в России. М., 1968. С. 323.

[42] Это издание имело подзаголовок: Журнал чистой и прикладной математики, астрономии и физики. Том I вышел в Москве в 1885 г.

[43] См. особенно тома VII–XI названного выше журнала.

вкладом в науку была составленная Бобыниным «Русская физико-математическая библиография», охватывавшая период от начала появления в России первых печатных книг до 1816 года; впоследствии она составила отдельный трехтомник[44].

Неудивительно, что имя Виктора Викторовича было широко известно в кругах специалистов, как в России, так и за границей. Общее число его работ, включая статьи в Энциклопедическом словаре Брокгауза и Ефрона, превышает 550[45]. Несмотря на это он в течение 35 лет оставался приват-доцентом Московского университета – профессорское звание было присвоено ему лишь незадолго до смерти, в 1917 году[46].

Журнал Бобынина не был единственным в своем роде. В Одессе выходил «Вестник опытной физики и элементарной математики», в редактировании которого одно время участвовал упоминавшийся уже нами В.Ф. Каган. Так как в дальнейшем изложении этот ученый займет значительное место, сообщим основные сведения о нем. Вениамин Федорович Каган (1869–1953) в 1887 г. поступил на физико-математический факультет Новороссийского университета (г. Одесса), но вскоре был отчислен за участие в революционном движении. К началу 1897 г. он завершил сдачу магистерских экзаменов при Петербургском университете. С 1898 г. приступил к работе в Новороссийском университете в качестве приват-доцента[47]. Здесь следует добавить, что исключенный из университета г. Одессы, он продолжил занятия в экстернате; а магистратуру прошел в киевском университете им. Св. Владимира. В 1908 г. В.Ф. защитил в качестве магистерской диссертации[48] труд «Основания геометрии». Каган был одним из

---

[44] Русская физико-математическая библиография. Указатель книг и журнальных статей по физико-математическим наукам, вышедших в России с начала книгопечатания до последнего времени. Приложение к журналу «Физико-математические науки», М., 1886–1890. Тома 1–3.

[45] См. *Юшкевич А.П.* История математики … С. 323.

[46] О В.В. Бобынине см.: *Попов Г.Н.* В.В.Бобынин [Некролог] // Сб. статей по вопросам физико-математических наук и их преподавании. Том I. М., 1924; *Лукомская А.* Бобынин // Советская библиография. 1949. Вып. 2 (27); *Рыбников К.А.* В.В.Бобынин // Успехи математических наук. 1950. Т. 5. Вып. 1; Лукомская и Рыбников, ИМИ, вып. 3, 1950 г.; *Зубов В.П.* Бобынин и его труды по истории математики // Труды Института истории естествознания и техники АН СССР. 1956. № 15.

[47] Примечание 50 к разделу «Софья Александровна Яновская» в кн.: Женщины – революционеры и ученые. М., 1982. С. 180 – со ссылкой на «Историко-математические исследования». 1961. Вып. 14.

[48] Магистерская диссертация – это примерно то же, что и нынешняя наша кандидатская диссертация, с тем, однако, отличием, что от диссертанта требуется, чтобы он показал себя как университетский преподаватель.

учредителей одесских «Высших женских курсов» (С.А. Яновская, о которой речь пойдет ниже, училась на этих курсах); он организовал известное издательство «Матезис», где участвовал в редактировании ряда выпущенных в нем книг. В советское время В.Ф. переехал в Москву и с 1922 (по другим сведениям – с 1923 г.) и до конца дней был профессором столичного университета, стал доктором физико-математических наук, ему было присвоено звание заслуженного деятеля науки РСФСР[49].

Перейдем теперь к философии и логике. Философское общество при Петербургском университете издавало «Вестник философии и психологии». Выходили серии книг «Новые идеи…» в математике, философии, социологии. Философское общество при Петербургском университете издавало также труды отечественных и зарубежных авторов. Когда ныне пишут о развернувшемся в советское время издании трудов классиков мировой философской мысли, может создаться впечатление, будто до революции подобной деятельности не было. Это не так. Только в трудах Петербургского Философского общества до 1917 г. в русском переводе были изданы сочинения Декарта, Беркли, Мальбранша, Аристотеля, Канта, Секста Эмпирика, Фихте; русскому читателю стали доступны «Логика» Канта и «Наука логики» Гегеля. Надо ли говорить, что русские философы, время от времени работавшие за рубежом (главным образом в Германии), были в курсе всего нового в западной философии, логике и психологии, а издания философских классиков сопровождали соответствующим научным аппаратом.

Прекратив свою деятельность в 1917 г., Философское общество возобновило (ненадолго!) работу в 1921 г. и 18 мая этого года на заседании Общества прозвучал доклад «К истории общего принципа относительности»; докладчиком был математик А.В. Васильев[50].

Вернемся, однако, к журналу В.В. Бобынина. Первый номер журнала вышел в 1885 г. Знаменательно, что в этом номере – в «Отделе научных статей» – в переводе Бобынина был опубликован биографический очерк – «Герман Грассманн. Его жизнь и ученолитературная деятельность», составленный Р. Штурмом, Е. Шрёдером и Л. Зонке. В оригинале очерк написан вскоре после

---

[49] О В.Ф. Кагане см. также «Успехи математических наук» 1953. Т. 8. Вып. 5.

[50] См.: Мысль. Журнал Петербургского Философского общества / Под ред. Э.Л. Радлова и Н.О. Лосского. СПб., ACADEMIA, 1922. С. 187 (раздел «Хроника»).

смерти Г. Грассмана и опубликован в 1879 г.[51] Через год перевод этой статьи вышел отдельным изданием[52]. Заметим, что Г. Грассман был математиком с широкими философскими и филологическими интересами, это был не просто математик, а математик-мыслитель. Свои пионерские работы он предварял философскими введениями. Но эти философские предварения, как по стилю, так и по содержанию, были (да и теперь остаются) исключительно трудны для восприятия, что на многие годы воспрепятствовало пониманию современниками его математических результатов. В силу этого работы Грассмана не получили должной оценки. Впрочем, остановимся на интерпретациях и оценке творчества Грассмана подробнее.

6. Бобынин и Каган как интерпретаторы Германа Грассмана

Мы начнем с Г. Грассмана, точнее со статьи о нем, которую вниманию русского читателя представил Виктор Викторович Бобынин. Немецкие авторы констатируют, что филологи признали значение деятельности Грассмана гораздо раньше математиков. По предложению санскритолога Р. Рота философский факультет Тюбингенского университета в 1876 г. присвоил Грассману ученую степень доктора *honoris causa*, «что так и не позаботились сделать математики», пишут три упомянутых немецких автора. Это была заслуженная честь – Герман Грассман совершил подлинный подвиг, переведя на немецкий язык великий индийский памятник – «Ригведу». Именно позднее признание математических заслуг Грассмана «делает совершенно необходимым, чтобы со стороны сотоварищей Грассмана по науке был сделан опыт оценки его произведений. Проникнутые этим убеждением и побуждаемые дружбою, составители предлагаемого очерка согласились между собою содействовать по мере сил созданию такой оценки»[53].

В статье констатируется, что главный труд Г. Грассмана, его «Учение о линейных протяженностях»[54] осталось «почти совер-

[51] *Sturmm E., Schroder E., Zonke L.* Hermann Grassmann. Sein Leben und seine mathematisch-physikalischen Arbeiten // Mathematische Annalen Bd. XIV. Leipzig, 1879.

[52] «Биографии знаменитых математиков XIX столетия». Вып. I, М., 1886 (при цитировании: Бобынин, 1886).

[53] *Бобынин*, 1886. С. 4.

[54] В немецком тексте фигурирует «Lineale Ausdehnungslehre», что В.В.Бобынин передает как «Учение о линейной протяженности», тогда как по смыслу грассмановской теории здесь надобно было бы говорить о «линейных протяженностях». Эту поправку мы и будем делать при цитировании текста Бобынина.

шенно незамеченным, нигде не вызвав ни подробного разбора, ни родственных исследований»[55], и немецкие математики объясняют эту ситуацию. Они указывают, что Грассман «построил свою науку совершенно независимо от других частей математики[56] и в весьма отвлеченной философской форме»[57]. О философской форме построения Г. Грассмана мы будем говорить особо, а пока заметим, что сам Грассман попытался иначе изложить свое учение – и в труде 1862 г. придал ему «евклидов» облик. Но и такое изложение, когда четко разделяются объяснения (определения), предложения (теоремы) и доказательства, замечают три немецких математика, не изменило ситуации, его учение оставалось непонятым.

Далее, однако, следует признание того, что идеи Г. Грассмана опережали свое время: «Мы и в самом деле еще не так далеко ушли вперед, чтобы идеи Грассмана, как он надеялся, могли войти во взаимодействие с развитием эпохи. Однако же некоторый поворот уже произошел: за последнее время все чаще и чаще встречается признание важности трудов Грассмана, и число стремящихся проникнуть в его идеи увеличивается»[58].

Переведенная Бобыниным статья о Г. Грассмане примечательна тем, что вводит в российский научный оборот новые историко-математические сведения и указывает на оригинальные математико-философские ориентиры. Этому служат, в частности, биографические сведения, а также список сочинений Грассмана, не только математических, сопровождаемый краткими комментариями. В списке выделены четыре раздела: сочинения по математике, физике, филологические работы и сочинения на иные темы. Читатель получает представление о выдающихся результатах, полученных Г. Грассманом в математике, физике, санскритологии.

Творческий путь создателя учения о «линейных протяженностях» ознаменован не только математическими изысканиями, но и философскими поисками: на Германа (и его брата, Роберта) большое влияние оказал Фридрих Шлейермахер – создатель герменевтики как науки о толковании текстов и автор труда по диалектике. Но именно диалектический характер подачи материала во вводных разделах «Учения о линейных протяженностях» отвращал от него

---

[55] *Бобынин*, 1886. С. 2.

[56] В.В. Бобынин пишет это слово с прописной буквы, придерживаясь этого написания и в других аналогичных случаях. Мы этого делать не будем. Не будем мы следовать Бобынину и в том, чтоб писать два «н» в фамилии Грассмана.

[57] *Бобынин*, 1886. С. 2.

[58] Там же. С. 3.

математиков – и именно он же привлекал внимание тех, кто раздумывал о философских основаниях математики и логики.

Кратко остановимся на достижениях Г. Грассмана в математике, опираясь, главным образом, – вслед за авторами переведенной Бобыниным статьи – на сочинения 1844 и 1862 гг., на грассмановский «Геометрический анализ», а также его «Арифметику» и «Тригонометрию». При этом мы будем иметь в виду возвращение к ним, когда речь пойдет о философско-методологических вопросах, поставленных в трудах Г. Грассмана.

«Арифметика» и «Тригонометрия» Г. Грассмана причисляются указанными авторами к *педагогически-дидактической области*[59], что в случае первой из названных книг смазывает ее большое методологическое значение. Правда, и в статье, переведенной Бобыниным, об этом кое-что говорится: «Обе книги уже с первого взгляда бросаются в глаза по необыкновенному богатству содержания при небольшом объеме, по строгости и сжатости выражения, по строго синтетическому построению»[60].

Прежде всего, нас будет интересовать, конечно, оценка арифметики. Достоинствами грассмановской «Арифметики» считается осуществление тенденции всюду проводить развитие алгебраических предложений к *простейшим*, всюду класть в основание только такие определения, которые свободны от всякого произвольного элемента, совершенно недвусмысленны и определенны. В этих видах Грассман определяет прежде прибавление единицы (как второго члена) к числу, полагая, что выводимый из единицы (e) основой ряд определяется следующим правилом перехода от n к $m = n + 1$:

$$m.e = n.e + e,$$

а также правилом прибавления к $a.e$ числа $(b + 1)\,e$:

$$ae + (b + 1)e = (a + b)e + e.$$

---

[59] В связи с этим отмечаются достоинства Грассмана-педагога: «Не одно только воспоминание об его успешной деятельности как преподавателя продолжает жить в благодарной памяти многочисленных учеников, единогласно восхваляющих приятность и замечательную ясность его преподавания. Они не забыли также и возбужденный им с таким умением интерес к предмету» (*Бобынин.* С.37). Ф. Клейн иначе оценивает Грассмана-педагога: «он был плохим учителем» (*Клейн Ф.* Лекции о развитии математики в XIX столетии. Том I / Перев. с нем. Н.М. Нагорного, под редакцией М.М. Постникова, М.: Наука, 1989. С. 197). Основываясь на этой оценке, мы можем заключить, что приведенное выше уверение в умении Грассмана пробуждать в своих учениках интерес к предмету, касалось только тех из них, которые действительно хотели приобретать преподносимые им знания.

[60] *Бобынин,* 1886. С. 37.

Подчеркивается, что, исходя из этих двух правил, основываясь лишь на «заключении от n к $n + 1$», Грассман доказывает ассоциативность («сочетательность») и коммутативность («переместительность») сложения и «всей в совокупности свойств родов счета первой ступени. То же самое он делает с помощью введения отрицательной единицы и для основного ряда, продолженного назад»[61].

То, что здесь сказано, означает рекурсивное введение операций сложения и умножения, определенных на всей последовательности целых чисел. Авторы ошибаются, различая рекурсивное задание операций сложения и умножения отдельно для положительной и неположительной «частей» основного ряда: Г. Грассман с самого начала работает с *целыми* (а не только натуральными) числами.

Мы знаем теперь, что распространение рекурсивного подхода – в той мере, в какой он присутствовал у Г. Грассмана, – на действительные числа невозможно. Три немецких автора и В.В. Бобынин это *чувствовали*, но объяснить, конечно, не могли. Тем более следует отметить корректность их следующих формулировок. Изложение теории иррациональных чисел Г. Грассманом, по мнению авторов очерка, уступает в отношении строгости или скорее полноты постановки работам И.Г.Т. Мюллера, Гейне и Георга Кантора[62]. Но этот недостаток, по мнению авторов очерка о Г. Грассмане, искупается разнообразием включенного в «Арифметику» материала. В этом небольшом по объему сочинении «заключается систематическое изложение не только дополненного и по всем направлениям умноженного содержания элементарно-арифметических учений (с включением, например, теории чисел[63]), но также и всего содержания так называемого алгебраического анализа, включая сюда разложение в ряды, уравнения высших степеней, непрерывные дроби и проч.»[64].

С полным основанием главным математическим достижением Г. Грассмана считается учение о линейных протяженностях. Его исходным пунктом признается операция сложения точек, которая определяется Грассманом с помощью операции сложения отрез-

---

[61] Там же. С. 38–39.

[62] *J.H.F. Muller* (1797–1862) – «Lehrbuch der allgemeinen Arithmetik». Halle, 1855; *E.Heine* (1821–1881) – «Die Elemente der Funktionenlehre». Borchardt, Crelle J., Bd. LXXI. 1872. S. 172–188; *G.Cantor* (1845–1918) – «Ueber die Ausdehnung eines Satzes aus der Theorie der trigonometrischen Reien» // Math. Annalen. Bd. 5. 1872. S. 123–132.

[63] Следует иметь в виду, что в современной математике, особенно в математической логике, теорию чисел часто отождествляют с арифметикой (целых чисел). В данном случае под «теорией чисел» подразумевается, по всей вероятности, теория действительных чисел.

[64] *Бобынин*, 1886. С. 38–39.

ков. Всякая точка может быть произведена из четырех других, независимых друг от друга точек, эти четыре точки, «из которых производятся остальные, названы Грассманом единицами, а производимые из них через указанное сложение – *экстенсивными величинами* 1 степени»[65]. Прямая – это экстенсивная величина первой степени, плоскость – второй степени. Немецкие авторы (и Бобынин) отмечают, что в сочинении 1862 года Г. Грассман исходит из общего случая, рассматривая n единиц:

«Из n не находящихся ни в каком числовом отношении единиц $e_1, e_2, \dots e_n$ происходит путем помножения и суммирования экстенсивная величина:

$$a = a_1 e_1 + a_2 e_2 + \dots + a_n e_n.$$

Идея составления *исчисления с такими гиперкомплексными* <…> *числами* представляет основную мысль, из которой исходят изыскания Грассмана»[66].

Со временем в нашей стране появляются посвященные Г. Грассману статьи в энциклопедических справочниках, а также работы, в которых анализируются его математические сочинения, например, статьи В.Ф. Кагана[67].

В.Ф. Каган убежден, что Г. Грассман был одним из наиболее значительных математиков XIX столетия: «Работа, которую он должен был представить при учительском экзамене, дала направление всей его научной деятельности. Имея в виду обработать учение о приливах и отливах, он применяет для этого методы, составляющие основу современного векториального анализа. Развитие этих идей привело Грассмана к исчислению чрезвычайной общности; эти идеи он изложил в обширном сочинении <…> (1844)». Относительно издания 1862 г. Каган замечает, что оно «по существу, совершенно новое сочинение, содержащее теорию высших комплексных чисел»[68].

Большая статья В.Ф. Кагана «Теоретические основания математики»[69] содержит анализ творчества Г. Грассмана, его вклада в исследование оснований не только арифметики, но и геометрии. При этом подчеркивается *генетический* подход Грассмана

---

[65] Там же. С. 9.
[66] Там же. С. 10.
[67] *Каган В.* Грассман, Герман // Энциклопедический словарь Товарищества «Братья А. и О. Гранат и К°». Т. 16 (СПб – Одесса; седьмое издание), ст. 462–463; *Он же.* Грассман, Герман // БСЭ. 1-е изд. Т. 18., С. 826. К фигуре В.Ф. Кагана мы еще вернемся.
[68] Энциклопедический словарь «Гранат» Т. 41, ч. VII, ст. 462–463.
[69] *Каган В.Ф.* Теоретические основания математики // Энциклопедический словарь «Русского библиографического института Гранат» Т. 41, ч. VII (СПб.–Одесса, 7-е изд.), ст. 327′ – 468′.

к построению математических теорий, о чем мы ниже будем говорить подробно.

7. В.П. Шереметевский

В 1898 году, в переводе, а правильнее сказать - в переработке, В.П. Шереметевского был опубликован первый том двухтомных «Элементов высшей математики» Г.А. Лоренца. При этом первоначальный объем сочинения Лоренца увеличился вдвое[70]. Второй отдел первого тома, озаглавленный «Очерки по истории математики», целиком принадлежит Шереметевскому[71]. Последний, восьмидесятый, параграф «Очерков» посвящен краткому обзору работ по основаниям математики. В этом параграфе Шереметевский отмечает, что XVIII век был в математике периодом бурного роста, периодом создания новых теорий, открытия новых фактов. Но «в это же самое время элементарные основы были по-прежнему далеки от идеальной ясности строгого логического построения»[72]. Одной из важных проблем, стоявших перед математиками XIX века, утверждал Шереметевский, явилось обоснование «арифметики действительных и мнимых чисел». В числе тех, кто внес заметный вклад в развитие комплексных чисел, наряду с Гауссом, Коши и Риманом, названы Г. Грассман и У. Гамильтон:

«В теории функций комплексного переменного введенное Гауссом геометрическое воплощение ее положений так срослось с самою сущностью этого наиболее общего, отвлеченного отдела анализа, что стало возможным, путем обобщения понятия о координатах и определений арифметических действий, перенести это последнее непосредственно на элементы протяжения. Идея лейбницева "счисления положения" получила развитие в различных формах, как Ausdehnungslehre H.Grassmann'a (1844), исчисления кватеринонов Hamilton'a (1858), исчисления векторов и т.п.»[73].

Что касается обоснования теории функций действительного переменного, то, по мнению Шереметевского, оно шло по линии пересмотра основных положений арифметики иррациональных, рациональных и, наконец, целых чисел: «Характерным направлением этой работы последнего времени[74] является стремление дать

---

[70] Это сочинение Лоренца–Шереметевского выдержало четыре издания. Первый том четвертого издания вышел в 1919, второй – в 1926 г.

[71] «Очерки по истории математики» В.П. Шереметевского были опубликованы в 1940 г. отдельным изданием, под редакцией и с примечаниями А.П.Юшкевича (в дальнейшем, при цитировании: *Шереметевский.* Очерки).

[72] *Шереметевский.* Очерки. С. 168.

[73] Там же. С. 173

[74] «Последнее время» здесь – конец XIX века.

науке *строго логическую конструкцию*, развивающую, как ряд чисто аналитических предложений, все учение о числовых соотношениях до высших частей анализа – из немногих положений, устанавливающих понятие о бесконечном ряде целых чисел»[75].

Русский математик, таким образом, был вполне в курсе тех трудностей, с которыми на рубеже веков пыталась справиться философско-математическая мысль. Отмечая отсутствие единомыслия в решении проблемы обоснования теории действительных чисел, начиная с вопроса о выборе исходных положений, автор «Очерков» приводит нелестные замечания участников соответствующей «дискуссии» относительно достижений их «оппонентов». Весьма примечательно, что Шереметевский дает слово брату Г. Грассмана – Роберту, который полагал, что, за исключением труда его брата, а также Шрёдера[76], «*все остальные* изложения в своих основных отделах представляют при так называемых доказательствах сомнительнейшие выводы, ничего не доказывающие».

8. Алгебра логики в России. П.С.Порецкий. Вопрос о соотношении математики и логики. Идея «метаарифметики»

Математическая логика была в XIX в. новым научным направлением. Одним из первых российских авторов, которому принадлежат сочинения в этой области, был П.С.Порецкий. Заняться логикой ему посоветовал его коллега по Казанскому университету – А.В. Васильев.

В это время в русском переводе появились математико-логические труды зарубежных авторов. Так, русскому читателю стали доступны почти все логические сочинения Ст. Джевонса, а работы Дж. Буля, Э. Шрёдера и Р. Грассмана были, как уже говорилось, опубликованы в изложении В.В. Бобынина (о чем – ниже).

О том прискорбном факте, что творчество Г. Грассмана нашло слабый отклик у его современников, хорошо известно. Тем более оставались мало замеченными сочинения его брата Роберта. Правда, это не совсем верно относительно работ Р. Грассмана по логике и теории величин – работ, содержание которых было проработано совместно обоими братьями. Как сказано выше, Шрёдер одобрительно отозвался о «Логике» Р. Грассмана сразу после ее выхода в свет в 1872 г. Для нас, однако, важно, что логическая работа Роберта была быстро замечена в России. На нее, в числе

---

[75] *Шереметевский.* Очерки. С. 170. Курсив наш. – *Б.Б., З.К.*

[76] Р. Грассман имел в виду «Арифметику» своего брата (1860) и «Учебник по арифметике и алгебре» Э. Шрёдера (1872).

других работ по математической логике, ссылается П.С. Порецкий в опубликованном в 1884 г. исследовании «О способах решения логических равенств»[77]. Введение к этой работе Порецкий заканчивает списком известных ему сочинений по математической логике, сопровождая каждое из них кратким комментарием[78].

По поводу сочинения Р. Грассмана Порецкий замечает: «Здесь недурно изложена, так сказать, азбука математических обозначений в логике, но и только; о логических равенствах и их решении нет и помину[79]. Отсутствием у Р. Грассмана решений логических уравнений и объясняется столь сдержанная (мягко говоря) оценка Порецким его логики. Дело в том, что Порецкого в то время больше всего интересовала именно проблема решения логических равенств. По вопросу о том, что значит: решить логическое равенство (уравнение), Порецкий дискутировал со Шрёдером. К согласию они не пришли. Порецкий полагал, что решение логического равенства представляет собой вывод следствия из посылок, заданных исходным уравнением, отмечая при этом, что здесь имеется полная аналогия с решением алгебраических уравнений, в то время как Шрёдер имел иную, более «алгебраическую», точку зрения.

Вопрос о решении логических равенств – коль скоро он трактуется в терминах логического вывода – для логики, конечно, важен. С философской же точки зрения более значима проблема *соотношения математики и логики*. Здесь мы должны вернуться к *Шереметевскому*. После кратких извлечений из Дедекинда и Кантора, он обращается к математической логике и пишет: «*Параллельно* этим *обобщениям объекта науки*[80] идет *расширение ее области как метода* и охватывает математическим алгоритмом самый процесс мышления в форме "математического анализа логики" Bool'я (1847), "алгебры логики" Schroder'а (1877, 1890) или, наконец, в форме слияния логики с математикою воедино, как у Роберта Грассмана в «Die Formenlehre oder Mathematik. I. Die Grossenlehre. II. Die Begriffslehre oder Logik», 1872; в переработке

---

[77] *Порецкий П.С.* О способах решения логических равенств и об обратном способе математической логики. Два сочинения, читанные 27 февраля и 23 марта 1882 г. в заседаниях Физико-математической секции Общества Естествоиспытателей при Императорском Казанском университете. Казань, 1884. В дальнейшем при цитировании: *Порецкий*, 1884.

[78] Вот этот список: *G.Boole.* An investigation of the lows of thought. London, 1854; *A.Makfarlein.* Principles of the algebra of logic. Edinburgh, 1879; *R.Grassmann.* Die Begriffslehre oder Logik. Stettin, 1872; *E.Schröder.* Der Operationskreis der Logikkalkuls; *С. Джевонс.* Основы науки / Перев. с англ. СПб., 1881.

[79] *Порецкий*, 1884. С. 18.

[80] Соответствующие высказывания Шереметевского об этом обобщении мы привели выше.

1895 г. математика предшествует логике, как равноправная часть в "Das Gebaude des Wissens" ("Здание знания") и притом независимо от логики»[81].

Точке зрения Р. Грассмана на соотношение логики и математики Шереметевский уделяет особое внимание, он пишет: «Почти все изложение учения о числах (Zahlenlehre), даже и появившиеся в последнее время, основывают свои доказательства на логических заключениях, хотя и до настоящего времени еще нет ни одного научного изложения логики; это делается притом, несмотря на то, что математика совершенно не нуждается в приложениях логических выводов и может быть обоснована без всякой логики на одних предложениях об однозначных величинах, их равенстве и неравенстве»[82].

А теперь вспомним об «Опытах математического изложения логики» (1885) Бобынина. Виктор Викторович изложил логические теории Дж. Буля, Э. Шрёдера и Р. Грассмана. И если взглянуть на это изложение, отталкиваясь от того, как Бобынин оценивает в целом математико-логическую концепцию Р. Грассмана[83], то получается сходная картина. Вначале идет общая оценка сочинения Р. Грассмана «Логика»: «Оно представляет оригинальную и совершенно независимую от рассмотренных [ранее] работ Буля обработку одного и того же предмета. С сочинением Буля Грассман был, по-видимому, совершенно незнаком[84] < >. Сходясь с ним в главной задаче своего труда – математическом выражении логических операций – он вполне расходится в главнейшей из второстепенных. В то время как Буль имеет в виду главным образом устранение многообразных несовершенств языка, Грассман почти исключительно заботится об усовершенствовании самой логики как науки»[85]. Что касается вопроса о месте математической логики в системе наук, то по этому поводу Бобынин приводит слова Грассмана: «Учение о понятиях, или Логика составляет вторую

---

[81] *Шереметевский.* Очерки. С. 176. Любопытна сноска, сделанная Шереметевским в этом отрывке после имени Р. Грассмана: «А не Германа, как сказано в статье "Математика" Энциклопедического словаря, изд. под ред. К.К.Арсеньева». Статья написана В.В.Бобыниным, упомянутый словарь – это «Энциклопедический словарь Брокгауза и Ефрона». Т. XVIIIа. СПб., 1896. С. 781-795. «Оплошность» Бобынина – см. С. 781.

[82] Там же. С. 171.

[83] Сочинение Роберта Грассмана. В сб. «Опыты математического изложения логики» // «Физико-математические науки в их настоящем и прошедшем. Отдел научных статей» 1885. Т. 1. С. 261–272. 414–422. То же: Отдельный оттиск. Вып. 1. М., 1886. 49 с.

[84] Мы знаем теперь, что это было действительно так.

[85] *Бобынин,* 1886. С. 30–31.

ветвь Учения о формах, или Математики»[86]. Стало быть, математика *предшествует* логике.

Обоим русским ученым – и Бобынину, и Шереметевскому – была, конечно, известна альтернативная позиция, тем более, что позиция эта была преобладающей в математике XIX века. Так, Шереметевский, продолжая свои рассуждения, указывает на воззрения Гильберта: «Обыкновенно при обосновании арифметики уже предполагаются основные логические понятия. Но при внимательном рассмотрении мы замечаем, что при изложении основных законов логики уже вводятся некоторые основные арифметические понятия, например, понятия о множестве, отчасти о числе. Мы попадаем, таким образом, в circulus vitiosus (порочный круг), и поэтому для избежания парадоксов необходимо одновременное развитие законов логики и арифметики»[87].

Эти слова с современной точки зрения не очень убедительны. В понятии множества логика не нуждается, хотя – в виде класса как объема понятия – широко им пользуется; не нуждается она и в понятии числа. Что касается законов, относящихся к равенству, то их статус – логический либо внелогический – окончательно не решен, хотя их обычно относят к логике, правда, с оговоркой типа «исчисление предикатов *с равенством*». Иное дело – мысль о том, что для обоснования математики необходимо совместное использование логических и математических средств. Это, в частности, обнаруживается, как только мы обращаемся к принципу математической индукции, статус которого – логический либо математический – также является предметом споров.

Останавливаясь на этом, Шереметевский подходит к вопросу с философских позиций. Судя по всему, он склоняется к мнению А. Пуанкаре, полагавшего, что математическая индукция – образец синтетического априорного суждения (в смысле Канта), которое тем более не нуждается в математическом доказательстве, что лежит в основе мышления математика. Но русский ученый приводит и альтернативные взгляды – Дедекинда и Шрёдера, которые полагали, что этот принцип является теоремой и может быть доказан логически.

Здесь не место рассматривать эти тонкие вопросы по существу. Для нас важно, что отечественная мысль была в курсе тех фило-

---

[86] Там же.

[87] Здесь Шереметевский в сноске указывает, что приводимая цитата заимствована «из исторического очерка проф. А.В.Васильева, предпосланного переводу курса G. Papelier "Начала анализа бесконечно-малых в элементарном изложении", перев. под ред. проф. Л.П. Котельникова, изд. студентов Н. Иовлева и Л. Коротнева, Казань, 1906, вып. 1, стр.47».

софско-математических «борений», которые сотрясали основания математики на рубеже веков. Шереметевский указывал, что следствием усилий по обоснованию понятия числа явилось изменение *стиля* трактатов по теории функций и математическому анализу: «современные курсы теории функций и анализа бесконечно-малых обыкновенно предваряются чрезвычайно детальным изложением основных положений учения о целых, рациональных, иррациональных, действительных и комплексных числах, теории пределов и исследования их сходимости. Приблизительно с восьмидесятых годов XIX столетия эти вводящие в высший анализ исследования делаются самодовлеющей дисциплиной и развиваются в то, что называют иногда "философией числа", и что, быть может, заслуживало бы называния метаарифметики, ибо число является уже частным случаем более общего понятия "совокупности", комплекса каких бы то ни было элементов, "системы" Дедекинда или "множества" (Menge) Георга Кантора»[88]. Здесь примечателен термин *метаарифметика* – предвидение будущих «метаматематики» и «метатеории».

9. Оценки П.Э. Лейкфельда и И.И. Ягодинского

Русские философские логики рассматриваемого периода не могли не откликаться на появление новой ветви логической науки – математическую логику. Одни из них, следуя П.С. Порецкому, безоговорочно приняли новое направление и по мере сил содействовали его становлению, другие отнеслись к нему настороженно, если не сказать враждебно. К числу последних можно отнести *П. Лейкфельда*[89], автора обзора различных направлений в логике[90]. В четвертой главе обзора он пишет:

«Дело в том, что уже очень давно у некоторых представителей нашей науки возникла мысль о близком сходстве между логикой и математикой <...>. Многих ученых и мыслителей, говорим мы, весьма занимает идея о каком-то родстве между логикой и математикой. Среди таких мыслителей и ученых более умеренные ограничиваются тем, что признают между этими науками известную

---

[88] *Шереметевский.* Очерки. С. 174. Курсив наш – *Б.Б., З.К.*

[89] *П.Э. Лейкфельд* преподавал в Харьковском ун-те. С 1899 по 1915 г. им было выпущено много литографированных пособий по логике. В 1895–1896 гг. в ЖМНП им была опубликована серия статей под названием «Логическое учение об индукции в главнейшие исторические моменты его разработки», занявшая целый ряд номеров этого издания. В 1896 г. эта работа была опубликована автором в виде отдельного издания.

[90] *Лейкфельд П.* Различные направления в логике и основные задачи этой науки. Харьков. 1890 (в дальнейшем при цитировании: *Лейкфельд*).

близость; крайние – прямо объявляют, будто логика есть не что иное, как математика, или один из отделов последней»[91] .

К «более умеренным» Лейкфельд относит Кондильяка, поскольку он «думает, что алгебра представляет пример хорошо разработанной науки, – пример, на котором можно научиться логике; но отождествления нашей науки с математикой мы у него не найдем»[92]. А вот О. Конт, по мнению Лейкфельда, «отождествляет, в конце концов, логику с математикой и объявляет, будто математику следовало бы лучше назвать логикой, так как она указывает законы человеческих мыслей»[93].

Напомнив о том, что уже Лейбниц стремился ввести в логику оперирование формулами, харьковский философ к числу последователей Лейбница относит Дробиша и Р. Грассмана. Затем следуют Буль, Джевонс, Шрёдер, Вундт и наш соотечественник П.С. Порецкий. Самое худшее в творчестве этих ученых, считает Лейкфельд, – это то, что они склонны употреблять термин «математическая логика». Не принимая этого называния, Лейкфельд использует выражение «математическое направление» в логике.

К более умеренному крылу математического направления в логике, согласно Лейкфельду, принадлежат Дробиш и Р. Грассман, которые, по его словам, «только стремятся рассмотрением логических формул воспользоваться, чтобы вывести известные заключения относительно разного рода вопросов нашей науки». Известно, что в логике, используя некоторые буквенные обозначения, часть смысла текста, тем не менее, выражают словами. По мнению харьковского ученого, Дробиш и Р. Грассман поступают иначе: они стремятся выразить в символах все содержание мысли и производить затем над полученными комбинациями различные действия. Лейкфельд относится к такой процедуре весьма скептически, он пишет: «Это дает им будто бы возможность сделать в логике новые выводы или, по крайней мере, доказать прежние и несколько видоизменить формулировку»[94]. Эти ученые, тем не менее, оставляют неизменным общее понятие о логике и ее общих законах. Несмотря на то что Р. Грассман объявляет логику одним из отделов математики или учения о формах, его математическая логика «по основным задачам своим не отличается от логики обыкновенной»[95]. Иначе обстоит дело в теории более радикально настроенных представителей математической логики, таких как

---

[91] *Лейкфельд*. С. 271.
[92] См. там же. С. 274.
[93] Там же.
[94] Там же.
[95] Там же.

Буль, Джевонс, Шрёдер, Вундт. Они, по мнению Лейкфельда, «думают, будто самое логическое мышление может отчасти или всецело быть заменено действиями с формулами и что предписания логики, сказали бы мы далее, <...> обращаются в правила относительно того, как производить подобные операции»[96].

Из изложенного ясно, что Лейкфельд не понял того главного, что было в трудах ученых «математического направления». Он не увидел, что ценным в подходе Р. Грассмана и других представителей «алгебры логики» была не столько постановка вопроса о соотношении логики и математики или установка на оперирование формулами, сколько стремление создать логические учения, свободные от многих уязвимых мест традиционной философской логики.

Здесь следует подчеркнуть, что Лейкфельд – крайний оппонент математизации логики, не отрицает ее реальности. Более того, он сам пишет работу о математической формуле, служащей выражению вероятности гипотез[97] (вспомним, что индукция была главной областью его логических поисков).

Почти двадцать лет спустя, профессор Казанского университета И. Ягодинский[98] уже совершенно спокойно воспринимает математизацию логики. Он пишет: «Объектом математики служит величина. Исходя из немногих аксиом, математика изучает все, что может увеличиваться или уменьшаться, все, что поддается числу и мере. Кроме того, математика обладает удивительной ясностью, несомненностью и общностью своих взглядов. Краткая формула зараз обнимает множество частных случаев, и аналитическое исследование дает чрезвычайно много результатов». И далее: «Эти качества математики послужили поводом к тому, чтобы излагать логику с математической точки зрения»[99]. В этом контексте он приводит взгляд Р. Грассмана, согласно которому логика является одним из разделов алгебры[100].

---

[96] Там же. С. 289.

[97] *Лейкфельд П.Э.* Математическая формула для определения вероятности гипотез в ее приложении к научным построениям // Записки Харьковского ун-та. Харьков, 1906. Вып. 1.

[98] Иван Иванович *Ягодинский* (р. в 1869 г., дата смерти не известна) окончил историко-филологический факультет Казанского университета и до 1917 г. там и профессорствовал. Исследовательскую работу вел в области истории философии (Лейбниц, Декарт) и логики. Его занимала проблематика, связанная с природой логических законов как средств достижения истины, а также индуктивные умозаключения. Свой метод разработки логики Ягодинский называл «генетическим».

[99] *Ягодинский И.И.* Генетический метод в логике, Казань, 1909. С. 11–12.

[100] Конечно, казанский автор не очень внимательно читал сочинения Р. Грассмана, иначе он говорил бы не об алгебре, а об «учении о формах» – тем более что сам использует сходную терминологию.

К сожалению, представления казанского автора об историческом развитии математической обработки логики грешат многими недостатками. Нельзя же, например, вслед за Ягодинским всерьез считать, что математизация логики началась с Гоббса. Математические увлечения английского философа, занимавшегося квадратурой круга, вызывали насмешки его математических современников[101], а уподобление Гоббсом логических операций арифметическим действиям, изложенное в главе V его главного труда – «Левиафан»[102], не имело никаких последствий для логики. Но Ягодинский прав, когда пишет, что своими успехами в Англии математическая логика обязана главным образом Булю и Джевонсу (забывая, правда, назвать имя А. Де Моргана). «После этих ученых, частью даже одновременно с ними, – читаем мы в его книге, – идут работы Грассмана, Дельбёфа, Шрёдера и, наконец, алгорифмы суждений, составленные в Германии Вундтом, а у нас Порецким»[103].

10. «Логика отношений» С.И. Поварнина

Вопрос о характере математической логики – «логистики» – в ее сравнении с логикой мышления занимал и С.И. Поварнина, более молодого представителя русской философии[104]. С.И. были известны работы А. Де Моргана и Ч. Пирса, положившие начало логической теории отношений. Но его не удовлетворяло, что они были математизированы: Поварнин был убежден, что логика

---

[101] См. *Кымпан Ф.* История числа π / Перев. с румынского. Под ред. Б.А.Розенфельда и Б.В.Бирюкова. М., Наука, 1971, глава «Два неудачливых борца за квадратуру круга».

[102] См. *Гоббс Т.* Левиафан, или Материя, форма и власть государства церковного и гражданского / Предисловие и редакция А.Ческиса. [М.]: Соцэкгиз, 1936. Гоббс определяет рассуждение как *подсчитывание* (т.е. складывание и вычитание) связей общепринятых общих имен с целью *отметить* и *обозначить* наши мысли» (с. 59). Дальше этой общей фразы английский философ не идет.

[103] *Ягодинский И.И.* Генетический метод... С. 148.

[104] Сергей Иннокентьевич *Поварнин* (1870–1952) был учеником А.И. Введенского. Он был ярким представителем «логики отношений», концепцию которой он изложил в серии трудов 1915–1921 гг.; он также разрабатывал «практическую логику», понимаемую как теория и практика аргументации (изложена в его работе «Спор», 1918, 1923). В течение сорока лет С.И. условиями советского бытия был выключен из научной жизни. Существует гипотеза, что письмо Сталину, в котором С.И. обосновывал восстановление логики в ее правах, направленное им в 1944 г., могло послужить одним из источников тех доводов, которыми руководствовался «великий кормчий», когда инициировал (или одобрил) введение логики («формальной логики») как предмета преподавания и исследования.

отношений должна быть непосредственным отражением мыслительных процедур обращения с суждениями и умозаключениями.

К логике отношений как более общей теории, нежели силлогистика, Поварнин, как и Де Морган, пришел, отправляясь от того факта, что суждения, выражающие отношения, получают при субъектно-предикатном истолковании неестественный для мышления характер. Логика отношений, писал он, «принимает, что нельзя свести все отношения в суждениях к одному типу»[105] – принадлежности некоторого свойства предмету. Существует много разных типов отношений, и в соответствии с этим – много разных типов суждений, в которых эти отношения утверждаются либо отрицаются. В суждении «А – причина Б» выражено причинное отношение, в суждении «Липа красива» – атрибутивное, в суждении «Петр – брат Ивана» отношение родства и т.д. «Суждение, – определяет Поварнин, – есть мысль об отношении между двумя предметами; иначе сказать, в нем мыслятся два предмета и отношение между ними»[106].

В центре логического учения Поварнина – суждения, выражающие, говоря современным языком, бинарные отношения, то есть суждения формы $a\ R\ b$, или в другой записи: $R(a,\ b)$, и умозаключения, основанные на переносе данного отношения с предмета на предмет в силу присущего отношению свойства транзитивности. Так возникают «ряды отношений», различие между которыми проистекает, в частности, из того, что в мышлении наряду с утверждением отношений имеет место и их отрицание.

Теория Поварнина интересна нам здесь не сама по себе, а в ее сопоставлении с «логистикой», то есть математической логикой. Надо сказать, что С.И. ориентировался в широком спектре работ по логике, включая основную математико-логическую тематику. Конечно, ему были известны отечественные труды – М.И. Каринского и Л.В. Рутковского, тоже развивавших в логике подход, в основе которого лежала категория отношения, П.С. Порецкого, представителя алгебрологического направления, и, конечно, книга Л. Кутюра «Алгебра логики», имевшаяся в русском переводе. Он отмечал, в частности, родство подходов Каринского и Джевонса (учение которого он считал стоящим ближе к логистике, чем к логике). Ему были известны зарубежные работы, не представленные в русскоязычной научной литературе. Так, в сочинении Поварнина «Введение в логику» отдельная глава посвящена рассмотрению квантификации предиката У.Гамильтона, «логистике»

---

[105] *Поварнин С.И.* Введение в логику // Философия. Под ред. Л.П. Карсавина, Н.О. Лосского, Э.Л. Радлова. Вып. VI. Петербург, 1921. С. 41.

[106] *Поварнин С.И.* Логика. Общее учение о доказательствах. Пг., 1916. С XII.

Буля, а также исследованиям Шрёдера и Пирса[107] по алгебре логики. Особое внимание было уделено Поварниным «логистике отношений», как она представлена в работах Б. Рассела (Рёсселя, как тогда было принято передавать по-русски имя этого философа). При этом говорилось об «исчислении предложений», «исчислении классов» и «исчислении отношений». Указывалось, что «объединяющей основой» для этих исчислений служит понятие «предложительной [то есть пропозициональной] функции»[108].

Здесь мы подходим к тому главному, что представляет для нас интерес, – к тому, в чем Поварнин видел различие между «логикой» и «логистикой». Логика, писал он, изучает *существующие* уже и *вновь появляющиеся* методы и формы знаний, она основывается на опыте. «Логистика творит свои методы, и комбинации методов <...> Логика отношений отличается от логистики отношений еще тем, что она есть *вид логики*, в то время как последняя – *часть* логистики»[109].

Психологизация логики и взгляд на нее как на опытную науку, отражающую *«естественную* логику» мышления составляли для С.И. Поварина предпосылку развивавшейся им теории аргументации. Но таковая была совершенно не нужна советской власти. Вообще, марксистские теоретики полностью игнорировали дореволюционную русскую философскую логику, что отчетливо видно, например, по творчеству С.А. Яновской.

Но прежде чем говорить об этом, обрисуем идеологическую атмосферу конца 20-х годов и последующих двух десятилетий, имея в виду существенные для нашей темы марксистские персоналии того времени.

11. «Советизация» философии и науки: фальсификация как главный «методологический» прием

В советское время на смену идеологически ненадежным математикам и философам – тому же «кадетскому» исследователю наследия Лобачевского А.В. Васильеву, начавшему свой профессорский путь в Казани, – пришли марксистские авторы, многие из которых были одесского происхождения. Мы имеем в виду

---

[107] Примечательно, что не рассматриваются работы Р. Грассмана и Г.Фреге.

[108] *Поварнин С.И.* Введение в логику. С. 47.

[109] Там же. С. 48. Последнее утверждение совершенно справедливо (см. статью: *Бирюков Б.В.* Логика отношений // Новая философская энциклопедия. Том 2. М., 2001. С. 420–421; ср. также: *Шрейдер Ю.А. Бирюков Б.В.* Категория отношения и ее когнитивные аспекты // Вестник Моск. ун-та. Сер. 7. Философия. 2002. № 3).

В.Ф. Кагана, С.А. Яновскую и упоминавшегося выше А.П. Юшкевича.

Надо представлять себе идеологическую атмосферу того времени. В конце 20-х–начале 30-х годов ОГПУ организовало серию судебных процессов над «вредителями»: удар наносился по старым инженерным кадрам. Наиболее известны здесь «Шахтинский процесс» (1928) и процесс «Промпартии» (1930), завершавшиеся расстрельными приговорами. Правда, расстрелы заменялись десятью годами заключения, да и те на деле были смягчены. Было ясно, что цель состояла в запугивании специалистов, которые на самом деле требовались для «социалистического строительства».

Поначалу власть не понимала значения математики как базы прикладных исследований в области техники. Больше думали не о развитии отечественной математической мысли, а о том, чтобы она была «идеологически выдержана». Отсюда арест главы московской математической школы Д.Ф. Егорова, которого чекисты пристегнули к делу об «Истинно-православной церкви» как всесоюзной контрреволюционной организации. Хотя решение в отношении Дмитрия Федоровича было сравнительно мягким – его выслали в Казань, это обернулось для него тяжелой психологической травмой, и в следующем году он скончался.

В 1929–1931 гг. последовал разгром русской академической исторической науки. В 1931 г. из Академии наук были исключены четыре ее действительных члена – С.Ф. Платонов, Е.В. Тарле, Н.П. Лихачев и М.К. Любавский; они были арестованы по обвинению в контрреволюционной деятельности и подверглись ссылке в разные города страны. Наказание для советской власти – мягкое, но из четырех фигурантов «дела Платонова» вернуться к научной работе смог только Е.В. Тарле (остальные скончались в 1929–1936 гг.).

В 1929–1930 гг. началось избиение и философов, причем марксистских. Это – знаменитая кампания против «меньшевиствующих идеалистов», к которым были причислены А.М. Деборин и группа его сторонников. Точка здесь была поставлена в 1931 г. постановлением ЦК ВКП(б) «О журнале “Под знаменем марксизма”», в котором появился сам термин «меньшевиствующий идеализм» и в котором ставилась задача разработки ленинского философского наследия (что читалось как следование указаниям товарища Сталина).

В 1933 г. фабриковалось дело о мнимом «Национально-фашистском центре» – по нему был осужден П.А. Флоренский; но современникам не было известно, что по этому «делу» работники «органов» собирали материал против ученика Егорова – Н.Н. Лузина. К счастью, по неизвестным причинам затея эта не была доведена до конца. Но до Николая Николаевича все же добрались – через три года, когда в центральной печати против него началась клеветническая кампания: как обычно, обвинение было – вредительство. Для разбора «дела Лузина» в 1936 г. руководству Академии наук пришлось создать специальную комиссию, весьма активно работавшую и показавшую, что среди математиков (в том числе тех, кто стал впоследствии крупными учеными) было немало лиц, готовых бросить камень в своего выдающегося коллегу (а для многих – учителя)[110].

Следует иметь в виду, что помимо главных персонажей дел, которые шило ОГПУ и послушные ему организации, была масса рядовых «обвиняемых», многие из которых попадали в тюрьмы, лагеря и даже приговаривались к расстрелу.

В военные годы было принято известное постановление ЦК ВКП(б) по третьему тому «Истории философии», прошла «философская дискуссия» 1947 г. и спазм борьбы против космополитизма и преклонения перед «иностранщиной»[111]. Серия политических кампаний, следовавших за соответствующими постановлениями партийного ЦК, должна была завершиться сталинским аккордом, начатым «делом врачей-убийц». К счастью, ему не суждено было прозвучать…

Таков был идеологический контекст, в котором действовали философы, логики, математики, считавшие себя марксистами. Естественно, что – в соответствии с положениями ленинско-сталинского «учения» – их советское *бытие* определяло их коммунистическое *сознание*. Мы выделим, имея в виду задачи данной статьи, три идеологические проявления этого сознания. Первое заключалось в клевете на «царскую Россию»; второе состояло в изображении русских мыслителей и ученых – тех, которые были объявлены «передовыми», «прогрессивными», – в качестве материалистов, диалектиков, борцов против всяческой «реакции»; суть третьего состояла в поношении зарубежных мыслителей и ученых (для этого выбирались наиболее известные имена), которые объявлялись идеалистами, метафизиками, прислужниками буржуазии, международного империализма. Все эти проявления идеологизированного сознания обычно (но, как мы увидим, не всегда) пере-

---

[110] См.: Дело академика Николая Николаевича Лузина / Отв. ред. С.С. Демидов, Б.В. Левшин. СПб., 1999.

[111] См. статью: *Бирюков Б.В.*, *Верстин И.С.* Идеологические события сороковых годов прошлого столетия и проблема русского национального сознания. Постановление ЦК ВКП(б) по третьему тому «Истории философии» и «философская дискуссия» 1947 года: роль Зиновия Яковлевича Белецкого // Вестник Моск. ун. Сер. философия. 2004.

плетались друг с другом, сопровождаясь марксистско-ленинскими философскими штампами и цитатами из текстов соответствующих «классиков». В последнее сталинское десятилетие проявления идеологической зашоренности приняли поистине гротескные формы. Для подтверждения сказанного мы ограничимся только одной темой – советской оценкой Н.И. Лобачевского и его гениального открытия.

Осторожный В.Ф. Каган в своей книге о Лобачевском избегал много говорить о его мировоззрении. Он предпочел в мрачных красках рисовать условия, в которых происходило становление великого ученого. Изображенная им картина была столь беспросветна, что непонятно было, как в описанных им обстоятельствах люди могли не то чтобы учиться, а вообще жить. Иностранным языкам, живописует В.Ф., обучали из рук вон плохо – хотя, как мы знаем, дореволюционная интеллигенция (в отличие от советской) ими почему-то владела. Лобачевскому еще не было и пятнадцати лет, когда началось его университетское образование; он владел латынью, и это было важно потому, что многие лекции в то время читались на латинском языке. Еще до завершения высшего образования Н.И. получил степень магистра и с 1911 г. стал преподавать в университете. У Вениамина Федоровича концы с концами как-то не сходились[112].

Впрочем, и то хорошо, что Каган не усердствовал в наклеивании идеологических ярлыков. Изложение в его книге спокойно повествовательное, чего нельзя сказать о стиле его молодых советских коллег, писавших на эту тему. Нам, авторам этой статьи, ученикам Софьи Александровны Яновской, горько читать многие места в ее публикациях о Лобачевском. Ниже мы попытаемся объяснить причины ее тогдашней «боевитости».

Текст Лобачевского, в котором было изложено великое открытие, был им представлен Отделению физико-математических наук Казанского университета 6 февраля 1826 г. (опубликована же соответствующая работа была лишь в 1929 г.). Советские математики решили отметить 125-летие со дня открытия «воображаемой геометрии» завершением пятитомного собрания сочинений Лобачевского, а также серией публикаций на эту тему. С.А. Яновская откликнулась уже упоминавшейся книжкой о его «передовых идеях», которые под ее пером превратились в «орудие борьбы

---

[112] Конечно, путь русской мысли в XIX столетии не был усыпан розами, и это мы отметили выше, когда речь шла об истории философии и логики в России, как ее представил А.И. Введенский. Но это был деловой рассказ о реальных событиях. Каган же походя пнул в грязь прошлую мыслящую Россию.

против идеализма в математике»[113]. Лобачевскому, его открытию, а также различным сторонам его деятельности были посвящены серии публикаций в III (1950) и IV (1951) выпусках продолжающегося издания «Историко-математические исследования» (ИМИ).

О тоне, в котором С.А. Яновская писала о Лобачевском, представление дает уже первая фраза ее книжки: «В аргументации, которую современный философский идеализм – это идеологическое орудие империализма (!) – неуклонно пытается "позаимствовать" из развития естествознания и математики, не последнее место занимают идеалистические спекуляции на открытии неевклидовой геометрии Н.И. Лобачевским». Лобачевского, продолжает она, пытаются сделать «отцом современного формалистического вырождения математики в пустую игру по произвольным правилам»; но это – «формалистический пасквиль», имеющий «формалистическую сущность»[114].

Этим взглядам С.А. противопоставляет подход, которым руководствовался Лобачевский. Подход этот изображается как «борьба с произвольными допущениями в науке», к которым он относил Евклидов постулат о параллельных, и всерьез утверждается, будто неевклидова геометрия была открыта именно «в борьбе» с такого рода допущениями. А «методологические установки» Лобачевского объявляются направленными «на выяснение материалистического содержания математических предложений»[115]. Великому казанскому математику приписывается «последовательная борьба» с формализмом, необходимым моментом которой будто бы были «его выступления против произвола и случайности в развитии науки»[116].

Конечно, в рассуждениях Софьи Александровны – математика, обладавшего недюжинным логико-философским чутьем, остротой мысли и большими знаниями, – много верного. Она права, когда пишет, что для решения «трудного вопроса о параллельных, не достаточно средств логики. По Лобачевскому вопрос может быть окончательно решен только опытно, путем обращения к материальной действительности, например, с помощью астрономических наблюдений»[117]. С.А. высказывает интересные идеи о математической строгости. Она привлекает в связи с этим убеждение Лобачевского в том, что научная строгость неотделима от *пони-*

---

[113] *Яновская С.А.* Передовые идеи Н.И. Лобачевского – орудие борьбы против идеализма в математике. М., Изд-во АН СССР, 1950. 84 с.

[114] Там же. С. 3.

[115] Там же. С. 28, 10.

[116] Там же. С. 42.

[117] Там же. С. 8 – 9.

мания и *объяснения*[118]. И вообще, *математическая* сторона предпринятого Софьей Александровной анализа того открытия, который был сделан гениальным русским математиком, заслуживает внимания и в наши дни.

Тем более досадны квалификации, которые в книжке С.А. раздаются крупным зарубежным математикам. Например, в «установках Пуанкаре» ею усматривается «реакционнейшая идеалистическая сущность». С.А. пишет о Р. Куранте, что этот немецкий математик «перекочевал на службу американскому империализму»; на строгости математического познания, утверждает она, «наездничают» все «школки» математического идеализма – неокантианцы, формалисты, интуиционисты, идеологически обслуживающие «интересы дельцов Уолл-стрита»[119].

Можно было бы полагать, что – в отличие от книжки 1950 г., выпущенной под грифом Института философии АН СССР, – в статьях С.А., помещенных в *научном* издании «Историко-математические исследования», подобный стиль уступит место деловому отношению к вопросу. Увы! В статье Яновской, напечатанной в третьем и четвертом выпусках «ИМИ» (1950 и 1951 гг.)[120], мы находим еще более хлесткие формулировки, не станем здесь их приводить. Ограничимся передачей общей установки автора – «разоблачить широко распространенные в зарубежной литературе идеалистические "интерпретации" идей нашего великого соотечественника», обратить его передовые идеи «в орудие борьбы» против идеализма, формализма и схоластики, «все более и более агрессивно овладевающих математикой в странах разлагающегося (!) капитализма»[121]. Лобачевский, в изображении Яновской, то и делал, что *боролся.* Он «боролся»: «против всяких произвольных допущений» и случайных истин в науке, против Канта (разумеется – «слева»), против идеалистических влияний в русском естествознании и пр. Яновской вторил Г.Ф. Рыбкин[122], утверждавший, будто материализм является «основной чертой» мировоззрения

---

[118] Там же. С. 10.

[119] Там же. С. 4, 65, 64.

[120] *Яновская С.А.* О мировоззрении Н.И. Лобачевского // ИМИ. Вып. III. 1950. С. 30 – 75 и вып. IV. 1951. С. 173–200. Эта работа С.А является продолжением книжки «Передовые идеи...».

[121] ИМИ. Вып. III. С. 30–31.

[122] *Рыбкин Г.Ф.* Материализм – основная черта мировоззрения Лобачевского // ИМИ. Вып. III. С. 9-29. Георгий Федорович *Рыбкин* (1903–1972) был директором Государственного издательства физико-математической литературы (Физматгиз), и один из авторов этих строк несколько лет работал в этом издательстве. Г.Ф. был очень квалифицированным и гуманным руководителем. Чего только не делает страшное время с людьми!

Лобачевского, поскольку он твердо уверен «в объективной реальности мира, отражаемого нашим сознанием» – ведь геометрия для него есть наука о реальном пространстве. В целом стиль статьи Георгия Федоровича более спокойный, чем стиль С.А. Тем не менее, и он ополчается на зарубежных математиков, извращающих, по его словам, действительную историю открытия неевклидовых геометрий; Анри Пуанкаре он, вслед за Лениным, назвал крупным математиком, но мелким философом, и так же (уже по собственной инициативе) отозвался о Ф. Клейне…

Конечно, в названных выше выпусках «ИМИ» были и деловые, конкретно-исторические статьи о разных гранях жизни и деятельности великого ученого, но идеологический тон в оценке воззрений Лобачевского задавала книжка и статья С.А. Яновской.

Не будем, однако, спешить с выводами. Вспомним, *каковы* были последние годы сталинского правления. Софья Александровна жила в постоянном страхе. Она была убеждена, что в те годы за ней следили «органы НКВД». Боялась телефонных разговоров, даже самого телефонного аппарата. Одному из авторов этой статьи она рассказывала, что тогда ее регулярно навещали с «телефонной станции» и, как она считала, что-то вставляли в домашний телефон. Неважно, так это было или нет, – важно то, что эта мысль ее преследовала.

В 1947 году – в год пресловутой «философской дискуссии» по книге Г.Ф. Александрова «История западноевропейской философии» – под редакцией, с предисловиями и комментариями Яновской были выпущены в русском переводе известные книги по математической логике: Д. Гильберта – В. Аккермана и А. Тарского. С.А. старалась уберечь эти издания от идеологических нападок и поэтому включала в свои предисловия и комментарии к ним фразы, осуждающие попытки «реакционных кругов США поставить прогресс науки на службу идеалистической реакции», приводила цитаты из Ленина и Сталина. Но это не помогло. В 1950 г. обе книги подверглись необоснованной и невежественной критике на страницах журнала «Вопросы философии» (№ 3, с. 331-339). Авторы статьи – В.П. Тугаринов и Л.Е. Майстров[123] утверждали, будто обе книги написаны «с идеалистических позиций, извращают сущность математической логики». Эта оценка прямо била по Софье Александровне, и ей приходилось защи-

[123] Об этих персонажах см.: *Бирюков Б.В.* Борьба вокруг логики в Московском государственном университете в первое послесталинское десятилетие (1954–1966) // Логика и В.Е.К. К 90-летию со дня рождения профессора Войшвилло Евгения Казимировича. М., 2003. С. 50–51.

щаться (и защищать научную логику!)[124]. Как же трудно было в этих условиях сохранить должную меру в оценке мировоззрения Лобачевского! Ведь это было совсем другое время, нежели та «вегетарианская» середина 20-х годов, когда создавал свой труд А.В. Васильев.

(*Продолжение статьи в следующем выпуске Логических исследований*)

[124] Мы не останавливаемся на этом вопросе, отсылая читателя к статье, указанной в предшествующем примечании.

П.И. Быстров

МЕТОД ВЗАИМНОГО ПЕРЕВОДА ИНДЕКСИРОВАННЫХ И ТАБЛИЧНЫХ ВЫВОДОВ

Abstract. *There "indexed derivation" means a derivation in Gentzen-style modal sequent calculi with indexed formulae. These calculi admit direct constructive proof of cut-elimination theorem. As consequence we have explicit procedure of mutual transformation for indexed and tableaux-style derivations in so called "normal" modal propositional systems.*

В данной статье один из вариантов упомянутого в ее названии метода демонстрируется на примере класса нормальных пропозициональных модальных систем табличного вывода $\{\mathbf{ST}\}_\mathbf{R}$ и дедуктивно эквивалентных им секвенциальных исчислений с индексированными формулами $\{\mathbf{SG}\}_\mathbf{R}$. При этом предполагаются известными стандартные понятия и правила, применяемые при построении «блоковых» аналитических таблиц для конечных множеств префиксированных формул (т. е. формул с префиксами T и F) и генценовских секвенциальных исчислений. Везде далее $\neg$, &, $\supset$, $\vee$ – классические пропозициональные константы; α, β, γ (возможно, со штрихами) - формулы; i, k, l, m, n – натуральные числа; u, w, z (возможно, со штрихами) – индексы; S, S_i – конечные множества (возможно, пустые) индексированных формул.

Индекс – это начинающаяся с 0 конечная последовательность попарно различных натуральных чисел (например: 0, 1, 7, 21, ..., n, где n не совпадает ни с одним из элементов последовательности {0, 1, 7, 21, ..., m}; m<n).

Индексированная формула – это выражение вида $(\alpha)_w$, где α – правильно построенная формула, а w – индекс. Соответственно, *префиксированная индексированная формула* – это выражение вида $T(\alpha)_w$ (или $F(\alpha)_w$), где T(или F) – префикс.

Отношение R – это бинарное отношение на множестве индексов, такое, что uRw, если и только если w = u, k или u = w. Свойства этого отношения определяются любой непустой комбинацией условий, выраженных следующими формулами:

1. $\forall w\,(wRw)$ (рефлексивность)
2. $\forall u\,\forall w\,\forall z\,(((uRw)\,\&\,(wRz)) \to (uRz))$ (транзитивность)
3. $\forall u\,\forall w\,((uRw) \to (wRu))$ (симметричность)

Выполнимость всех условий (1)-(3), означает, что имеет место

4. $\forall u \, \forall w \, (uRw)$ (универсальность)

В таком случае $\{\mathbf{ST}\}_R$ обозначает класс табличных пропозициональных модальных систем. Конкретная система этого класса получается в зависимости от того, какие условия выполняются для R. Например, если R удовлетворяет условию (4), $\mathbf{ST}_R$ – это табличный вариант известной системы **S5**; если удовлетворяются только условия (1) и (3), $\mathbf{ST}_R$ – это табличный вариант «брауэровой» модальной системы. Точно так же обстоит дело и с обозначением $\{\mathbf{SG}\}_R$ класса секвенциальных исчислений с индексированными формулами. В общем случае $\{\mathbf{ST}\}_R$ ($\{\mathbf{SG}\}_R$) охватывает весь класс таких модальных систем, которые непротиворечивы и полны относительно фреймов Крипке, в которых бинарное отношение достижимости R удовлетворяет конечному множеству условий {Con}, каждый элемент которого выразим общезначимой формулой первопорядковой логики с единственным двухместным предикатом.

Множество индексированных формул называется *чистым*, если всем его элементам не приписано никаких других индексов, кроме 0.

В формулировке систем $\{\mathbf{ST}\}_R$ (кроме введенных только что понятий) используются только префиксированные индексированные формулы и следующие понятия и определения.

*Начальное множество S (таблицы **t**)* – это множество формул, которое служит посылкой хотя бы одного применения правила построения (таблицы **t**) и не является заключением ни одного применения такого правила.

Конечное множество ветви – это множество формул, которое не является посылкой ни одного применения правил построения таблицы.

Главной формулой рассматриваемого применения правила построения таблицы называется формула, к которой применяется данное правило; *боковой формулой* рассматриваемого применения правила построения таблицы называется любая из формул, которые получаются из главной формулы в результате применения данного правила. Например, в схеме правил построения таблицы для

$$\frac{S,\ T(\alpha\vee\beta)_w}{S,\ F\alpha_w \;\Big|\; S,\ T\beta_w} \qquad\qquad \frac{S,\ F(\alpha\vee\beta)_w}{S,\ T\alpha_w\ ;\ S,\ F\beta_w}$$

формулы $T(\alpha\vee\beta)_w$ и $F(\alpha\vee\beta)_w$ являются главными, а формулы $T\alpha_w$ и $F\beta_w$ – боковыми.

Определение 1. Вхождения формул вида $T(\alpha)_w$ и $F(\alpha)_w$ в некоторую ветвь *b* таблицы **t** называются контрарной парой ветви *b* в **t**.

Определение 2. Ветвь *b* таблицы **t** замкнута, если в ней содержится по крайней мене одна контрарная пара. Таблица **t** замкнута, если замкнута каждая ее ветвь.

Завершенная ветвь таблицы – это незамкнутая ветвь, в которой не применимо ни одно из правил построения таблицы. *Завершенная* таблица – это таблица, все ветви которой являются завершенными.

В общем случае, замкнутая ветвь таблицы может быть незавершенной в том смысле, что в конечном множестве этой ветви есть по крайней мере одна формула, которая может служить боковой формулой применения правила построения таблицы.

Система $\{\mathbf{ST}\}_\mathbf{R}$ задается следующим множеством правил построения аналитических таблиц для формул, главными логическими знаками которых являются &, $\vee$, $\neg$ и $\Box$:

$$\frac{S,\ T(\alpha\supset\beta)_w}{S,\ F\alpha_w \mid S,\ T\beta_w}\ T\supset \qquad \frac{S,\ F(\alpha\supset\beta)_w}{S,\ T\alpha_w,\ F\beta_w}\ F\supset$$

$$\frac{S,\ T(\alpha\vee\beta)_w}{S,\ T\alpha_w \mid S,\ T\beta_w}\ T\vee \qquad \frac{S,\ F(\alpha\vee\beta)_w}{S,\ F\alpha_w,\ F\beta_w}\ F\vee$$

$$\frac{S,\ F(\alpha\&\beta)_w}{S,\ F\alpha_w \mid S,\ F\beta_w}\ F\& \qquad \frac{S,\ T(\alpha\&\beta)_w}{S,\ T\alpha_w,\ T\beta_w}\ T\&$$

$$\frac{S,\ T(\neg\alpha)_w}{S,\ F(\alpha)_w}\ T\neg \qquad \frac{S,\ F(\neg\alpha)_w}{S,\ T(\alpha)_w}\ F\neg$$

$$\frac{S,\ T(\Box\alpha)_u}{S,\ T(\alpha)_w}\ T\Box \qquad \frac{S,\ F(\Box\alpha)_u}{S,\ F(\alpha)_{u,k}}\ F\Box$$

В схеме правила $F\Box$ k – число, не встречающееся в индексах, приписанных формулам множества $\{S,\ T(\Box\alpha)_u\}$; в схеме правила $T\Box$ имеет место uRw.

***Выводом D (множества формул S) в системе {ST}**$_R$* называется замкнутая таблица **t** с начальным чистым множеством *S*, построенная по правилам системы $\{\mathbf{ST}\}_{\mathbf{R}}$. Соответственно, подвыводом D' такого вывода D считается любая подтаблица $\mathbf{t}'$ таблицы $\mathbf{t}$.

При построении выводов в $\{\mathbf{ST}\}_{\mathbf{R}}$ предполагается, что правила построения не применяются к конечному множеству формул замкнутой, но не завершенной ветви.

В определенном смысле (который будет ясен далее) интерес представляют "альтернативные формулировки" систем $\{\mathbf{S^{*}T}\}_{\mathbf{R}}$, которые получаются из $\{\mathbf{ST}\}_{\mathbf{R}}$ добавлением следующих схем правил:

$$\frac{S,\ T(\alpha)_w}{S}\ \mathrm{WT} \qquad\qquad \frac{S,\ F(\alpha)_w}{S}\ \mathrm{WF}$$

$$\frac{S,\ T(\alpha)_w}{S,\ T(\alpha)_w,\ T(\beta)_w}\ \mathrm{CT} \qquad\qquad \frac{S,\ F(\alpha)_w}{S,\ F(\alpha)_w,\ F(\beta)_w}\ \mathrm{CF}$$

В схемах правил WT и WF множество S содержит по крайней мере одну контрарную пару.

Пример вывода в $\mathbf{ST}_{\mathbf{R}}$ (где R выполняет пункт (4)):

1. $F\Box(\neg\Box\,(\alpha\supset\beta)\supset(\Box\neg\Box((\alpha)\supset(\alpha\supset\beta))))_{0}$
2. $F(\neg\Box\,(\alpha\supset\beta)\supset(\Box\neg\Box((\alpha)\supset(\alpha\supset\beta)))_{0,1}$
3. $T(\neg\Box\,(\alpha\supset\beta))_{0,1},\ F(\Box\neg\Box((\alpha)\supset(\alpha\supset\beta)))_{0,1}$
4. $F(\Box\,(\alpha\supset\beta))_{0,1},\ F(\Box\neg\Box((\alpha)\supset(\alpha\supset\beta)))_{0,1}$
5. $F(\Box\,(\alpha\supset\beta))_{0,1},\ F(\neg\Box((\alpha)\supset(\alpha\supset\beta)))_{0,1,2}$
6. $F(\Box\,(\alpha\supset\beta))_{0,1},\ T(\Box((\alpha)\supset(\alpha\supset\beta)))_{0,1,2}$
7. $F(\alpha\supset\beta))_{0,1,3},\ T(\Box\,((\alpha)\supset(\alpha\supset\beta)))_{0,1,2}$
8. $F(\alpha\supset\beta))_{0,1,3},\ T((\alpha)\supset(\alpha\supset\beta))_{0,1,3}$
9. $F(\alpha\supset\beta))_{0,1,3},\ F(\alpha)_{0,1,3}\ \mid\ F(\alpha\supset\beta))_{0,1,3},T(\alpha\supset\beta))_{0,1,3}$
10. $T(\alpha)_{0,1,3},\ F(\beta)_{0,1,3}\quad F(\alpha)_{0,1,3}$

Здесь, в строках 1 и 2 S – пустое множество, а единственной "точкой ветвления" табличного вывода является строка 8.

Секвенцией будем называть упорядоченную пару вида $S_1,\ ;\ S_2$, где S_1 и S_2 – конечные (возможно, пустые) множества индексированных формул. Как обычно, S_1 называется антецедентом, а S_2 – консеквентом. Будем считать, что $;S$ означает $\varnothing;S$, $S;$ означает $S;\varnothing$; и, наконец, $;$ означает $\varnothing;\varnothing$. (Чистая секвенция $S_1,\ ;\ S_2$ после удаления всех индексов 0 в точности соответствует генценовской секвенции $\Gamma\to\Theta$. Поэтому, *перевод* секвенции $S_1,\ ;\ S_2$, в которой S_1 и S_2 – непустые множества, есть формула $((\alpha)_u \,\&\, (\beta)_w \,\&\ldots\&\, (\gamma)_z)) \supset ((\alpha')_{w'} \vee (\beta')_{z'} \vee\ldots\vee (\gamma')_{u'}))$, которая называется *чистой формулой*, если все приписанные ее подформулам индексы графически совпадают с 0.)

Секвенциальные исчисления $\{\mathbf{SG}\}_R$ задаются аксиомой (основной секвенцией) вида $S_1, ; S_2$, где каждое из множеств S_1 и S_2 содержит формулу $(\alpha)_w$ и следующими схемами правил вывода:

$$\frac{S_1, ; S_2, (\alpha)_w \quad S_1, (\beta)_w; S_2}{S_1, (\alpha\supset\beta)_w; S_2}\supset a \qquad \frac{(\alpha)_w, S_1, ; S_2, (\beta)_w}{S_1, ; S_2, (\alpha\supset\beta)_w}\supset s$$

$$\frac{S_1,\alpha_w,; S_2 \quad S_1, (\beta)_w; S_2}{S_1, (\alpha\vee\beta)_w; S_2}\vee a \qquad \frac{S_1, ; S_2, (\alpha)_w, (\beta)_w}{S_1, ; S_2, (\alpha\vee\beta)_w}\vee s$$

$$\frac{S_1, ; S_2, (\alpha)_w \; S_1 ; S_2, (\beta)_w}{S_1 ; S_2, (\alpha\&\beta)_w}\&s \qquad \frac{S_1, (\alpha)_w, (\beta)_w,; S_2}{S_1, (\alpha\&\beta)_w, ; S_2}\&a$$

$$\frac{S_1, (\alpha)_w ; S_2}{S_1, ; S_2, (\neg\alpha)_w}\neg s \qquad \frac{S_1, ; S_2, (\alpha)_w}{S_1, (\neg\alpha)_w,; S_2}\neg a$$

$$\frac{S_1, (\alpha)_w; S_2}{S_1, (\Box\alpha)_u; S_2}\Box s \qquad \frac{S_1 ; S_2, (\alpha)_{u,k}}{S ; S_2 (\Box\alpha)_u}\Box a$$

$$\frac{S_1, ; S_2, (\alpha)_w \quad S_3, (\alpha)_w; S_4}{S_1, S_2 ; S_3 S_4,}\text{cut}$$

В схеме правила □s k – число, не встречающееся в индексах, приписанных формулам в секвенции заключения; в схеме правила □a имеет место uRw.

Системы $\{\mathbf{S^*G}\}_R$ получаются из $\{\mathbf{SG}\}_R$ заменой схем правил &a и ∨s соответственно схемами

$$\frac{S_1, (\alpha)_w; S_2,}{S_1, (\alpha\&\beta)_w; S_2}\&a_1 \qquad \frac{S_1, (\beta)_w; S_2,}{S_1, (\alpha\&\beta)_w; S_2}\&a_2$$

и

$$\frac{S_1, ; S_2, (\alpha)_w}{S_1, ; S_2, (\alpha\vee\beta)_w}\vee s_1 \qquad \frac{S_1, ; S_2, (\beta)_w}{S_1, ; S_2, (\alpha\vee\beta)_w}\vee s_2$$

заменой схемы правила $\supset$a схемой

$$\frac{S_1, ; S_2, (\alpha)_w \quad S_3, (\beta)_w; S_4}{S_1, S_3, (\alpha\supset\beta)_w; S_2, S_4}\supset a_1$$

и добавлением схем структурных правил утончения и сокращения

$$\frac{S_1, ; S_2,}{S_1, ; S_2, (\alpha)_w}\,Ws \qquad \frac{S_1, ; S_2}{S_1, (\alpha)_w ; S_2}\,Wa$$

$$\frac{S_1, ; S_2, (\alpha)_w, (\alpha)_w}{S_1, ; S_2, (\beta)_w}\,Cs \qquad \frac{S_1, (\alpha)_w, (\alpha)_w; S_2}{S_1, (\alpha)_w ; S_2}\,Ca$$

Приведем пример вывода в $\mathbf{S^{*}G_R}$ (где R выполняет пп. 1, 2):

$$\dfrac{\dfrac{\dfrac{\dfrac{\dfrac{\dfrac{(\alpha)_{0,1,2} ; (\alpha)_{0,1,2}}{(\alpha)_{0,1,2}, (\beta)_{0,1,2}; (\alpha)_{0,1,2}}}{(\alpha)_{0,1,2} ; (\beta\supset\alpha)_{0,1,2}}}{\Box(\alpha)_0 ; (\beta\supset\alpha))_{0,1,2}}}{\Box(\alpha)_0 ; (\Box(\beta\supset\alpha))_{0,1}}}{\Box(\alpha)_0 ; (\Box\Box((\alpha)\supset(\beta\supset\alpha)))_0}}{; (\Box(\alpha)_0 \supset \Box\Box((\alpha)\supset(\beta\supset\alpha)))_0}$$

Пример вывода в $\mathbf{SG_R}$ (где R выполняет пункт (4)):

$$
\begin{array}{l}
(\alpha)_{0,1,3}\,;(\alpha)_{0,1,3}\,,(\beta)_{0,1,3} \\
\hline
;\,(\alpha)_{0,1,3},(\alpha\supset\beta))_{0,1,3} \qquad\qquad (\alpha\supset\beta)_{0,1,3}\,;(\alpha\supset\beta)_{\,0,1,3} \\
\hline
((\alpha)\supset(\alpha\supset\beta))_{0,1,3}\,;(\alpha\supset\beta))_{\,0,1,3} \\
\hline
(\Box((\alpha)\supset(\alpha\supset\beta)))_{\,0,1,2}\,;(\alpha\supset\beta))_{0,1,3} \\
\hline
(\Box\,((\alpha)\supset(\alpha\supset\beta)))_{\,0,1,2}\,;(\Box\,(\alpha\supset\beta))_{0,1} \\
\hline
(\Box\,((\alpha)\supset(\alpha\supset\beta)))_{\,0,1,2}\,,(\neg\Box\,(\alpha\supset\beta))_{0,1}; \\
\hline
(\neg\Box\,(\alpha\supset\beta))_{0,1}\,;(\neg\Box\,((\alpha)\supset(\alpha\supset\beta)))_{\,0,1,2} \\
\hline
(\neg\Box\,(\alpha\supset\beta))_{0,1}\,;(\Box\neg\Box\,((\alpha)\supset(\alpha\supset\beta)))_{\,0,1} \\
\hline
;\,(\neg\Box\,(\alpha\supset\beta))_{0,1}\supset(\Box\neg\Box\,((\alpha)\supset(\alpha\supset\beta)))_{\,0,1} \\
\hline
;\,(\Box\,((\neg\Box\,(\alpha\supset\beta))\supset(\Box\neg\Box\,((\alpha)\supset(\alpha\supset\beta)))))_{\,0}
\end{array}
$$

Выводами в $\{\mathbf{SG}\}_R$ и $\{\mathbf{S^*G}\}_R$ являются деревья секвенций, построенные по правилам данных систем, начиная с основной секвенции (основных секвенций). Легко показать, что эти исчисления дедуктивно эквивалентны в том смысле, что секвенция S_1, ; S_2 выводима в $\{\mathbf{SG}\}_R$, если и только если она выводима в $\{\mathbf{S^*G}\}_R$. Выводы, в которых всем вхождениям формул приписан индекс 0, будем называть *чистыми* выводами. *Степенью индекса* называется общее количество натуральных чисел в данном индексе, отличающихся от 0. Например, степень индекса 0, 1, 3, 12 равна 3. Таким образом, 0 – это индекс нулевой степени. Индекс u называется *подиндексом* индекса w, если степень индекса u меньше или равна степени индекса w.

Для $\{\mathbf{SG}\}_R$ и $\{\mathbf{S^*G}\}_R$ верна следующая лемма.

Лемма 1. *Любой свободный от сечения вывод секвенции, являющейся посылкой единственного применения правила □ s, можно преобразовать в чистый вывод этой секвенции.*

Справедливость леммы вытекает из того факта, что степень индекса формулы, входящей в секвенцию, с необходимостью увеличивается на единицу только тогда, когда эта формула становится главной формулой применения правила □s. Применения правил для введения в антецедент и сукцедент секвенций классических пропозициональных констант не влияют на индексы. Применение правила $\Box$a позволяет не изменять степень индекса боковой формулы при переходе от посылки к заключению.

Например, рассмотрим удовлетворяющий условию леммы исходный вывод

$$\begin{array}{l}
(\alpha)_{0,1,2} ; (\alpha)_{0,1,2} \\ \hline
(\alpha)_{0,1,2} , (\beta)_{0,1,2} ; (\alpha)_{0,1,2} \\ \hline
(\alpha)_{0,1,2} ; (\beta \supset \alpha)_{0,1,2} \\ \hline
\Box(\alpha)_{0} ; (\beta \supset \alpha))_{0,1,2} \\ \hline
\Box(\alpha)_{0} ; (\Box(\beta \supset \alpha))_{0,1}
\end{array}$$

Его подвывод, заканчивающийся секвенцией $\Box(\alpha)_0 ; ((\alpha) \supset (\beta \supset \alpha))_{0,1,2}$, легко преобразовать в следующий чистый вывод посылки применения правила $\Box$s:

$$\begin{array}{l}
(\alpha)_{0} ; (\alpha)_{0} \\ \hline
(\alpha)_{0} , (\beta)_{0} ; (\alpha)_{0} \\ \hline
(\alpha)_{0} ; (\beta \supset \alpha)_{0} \\ \hline
\Box(\alpha)_{0} ; (\beta \supset \alpha)_{0}
\end{array}$$

а затем применить $\Box$s, получив ту же конечную секвенцию $\Box(\alpha)_0 ;$ $(\Box(\beta \supset \alpha))_{0,1}$.

В общем случае, для $\{\mathbf{SG}\}_{\mathbf{R}}$ и $\{\mathbf{S^{*}G}\}_{\mathbf{R}}$ имеет место следующая лемма.

Лемма 2. *Любой свободный от сечения вывод секвенции, заканчивающийся посылкой применения модального правила с главной формулой $\Box(\alpha)_w$, содержит вхождение секвенции, в которую входит формула$(\alpha)_u$, где u – подиндекс индекса w.*

Поскольку только применение правила $\Box$s может увеличить степень индекса боковой формулы ровно на единицу, лемма без затруднений доказывается возвратной индукцией по длине указанного в ее условии вывода.

В исчислениях $\{\mathbf{SG}\}_{\mathbf{R}}$ Cut является допустимым в силу следующей теоремы.

Теорема (об устранении сечения). *Любой вывод в {SG}$_R$ можно преобразовать в вывод с той же конечной секвенцией, не содержащий применений правила Cut.*

Теорема доказывается стандартным методом Генцена. Специфика доказательства состоит в том, что из исходного вывода устраняются не «смешения», а непосредственно применения правила сечения и добавляются следующие случаи, связанные с применением двух модальных правил.

1. Индукция по степени сечения. Ранг исходного вывода равен 2. Степень сечения >0. Конец исходного вывода *D* имеет следующий вид:

$$\dfrac{\dfrac{S_1 \,;\, S_2,\, (\alpha)_{u,k}}{S_1,\, (\Box\alpha)_u;\, S_2} \qquad \dfrac{S_3,\, (\alpha)_w;\, S_4}{S_3,\, (\Box\alpha)_u \,;\, S_4}}{S_1,\, S_2 \,;\, S_3,\; S_4}$$

1.1 Если w = u, k, вывод *D* преобразуется в следующий вывод D' с меньшей степенью сечения:

$$\dfrac{S_1 \,;\, S_2,\, (\alpha)_{u,k} \qquad S_3,\, (\alpha)_w;\, S_4}{S_1,\, S_2 \,;\, S_3,\; S_4}$$

1.2 w ≠ u, k. Тогда u является подиндексом индекса w. Согласно леммам 1 и 2, либо вывод левой посылки единственного применения Cut в *D* чистый, либо в нем найдется вхождение секвенции, в сукцедент которой входит формула $(\alpha)_z$, где u (и w) – подиндекс индекса z. В любом случае, сечение применяется к этому вхождению секвенции, и получается следующий вывод D' с меньшей степенью сечения (z = w):

$$\dfrac{S_1 \,;\, S_2,\, (\alpha)_z \qquad S_3,\, (\alpha)_w;\, S_4}{S_1,\, S_2 \,;\, S_3,\; S_4}$$

2. Индукция по рангу сечения. Ранг единственного применения сечения в исходном выводе >2. Степень сечения произвольна. Случаи применения модальных правил в исходном выводе рассматриваются так же, как случаи для других однопосылочных правил.

С одной стороны, преобразование любого вывода в табличной системе $\{\mathbf{ST}\}_\mathbf{R}$ в свободный от применений правила Cut вывод в исчислении $\{\mathbf{SG}\}_\mathbf{R}$ является простой “механической” процедурой.

С другой стороны, из теоремы об устранении сечения следует, что любой вывод в исчислении $\{\mathbf{SG}\}_\mathbf{R}$ можно «освободить» от применений правила Cut. Затем можно естественным образом “переписать” такой секвенциальный вывод в табличный вывод системы $\{\mathbf{ST}\}_\mathbf{R}$.

Например, с приведенным ранее примером табличного вывода мы поступаем следующим образом:

(1) Упорядочиваем все формулы слева направо, сначала записывая формулы с префиксом T, а затем – формулы с префиксом F.

(2) Группы формул с T (F) отделяем от групп формул с F (T) или от пустых групп знаком ;.

(3) Вычеркиваем все префиксы.

В результате шагов (1) – (3) получается секвенциальная конструкция:

1. $;\Box(\neg\Box(\alpha\supset\beta)\supset(\Box\neg\Box((\alpha)\supset(\alpha\supset\beta))))_{0}$
2. $;(\neg\Box(\alpha\supset\beta)\supset(\Box\neg\Box((\alpha)\supset(\alpha\supset\beta)))_{0,1}$
3. $(\neg\Box(\alpha\supset\beta))_{0,1};(\Box\neg\Box((\alpha)\supset(\alpha\supset\beta)))_{0,1}$
4. $(\Box(\alpha\supset\beta))_{0,1};(\Box\neg\Box((\alpha)\supset(\alpha\supset\beta)))_{0,1}$
5. $(\Box(\alpha\supset\beta))_{0,1},(\neg\Box((\alpha)\supset(\alpha\supset\beta)))_{0,1,2};$
6. $(\Box((\alpha)\supset(\alpha\supset\beta)))_{0,1,2};(\Box(\alpha\supset\beta))_{0,1},$
7. $(\Box((\alpha)\supset(\alpha\supset\beta)))_{0,1,2};(\alpha\supset\beta))_{0,1,3},$
8. $((\alpha)\supset(\alpha\supset\beta))_{0,1,3};(\alpha\supset\beta))_{0,1,3},$
9. $(\alpha\supset\beta))_{0,1,3},(\alpha)_{0,1,3};\qquad(\alpha\supset\beta))_{0,1,3};(\alpha\supset\beta))_{0,1,3},$
10. $(\alpha)_{0,1,3};(\beta)_{0,1,3}\ (\alpha)_{0,1,3}$

Очевидно, что если убрать нумерацию строк и «перевернуть» эту конструкцию «с ног на голову», получится корректный вывод в исчислении $\{\mathbf{SG}\}_\mathbf{R}$. Естественно, что любой свободный от сечения вывод в $\{\mathbf{SG}\}_\mathbf{R}$ также переписывается в табличный вывод в $\{\mathbf{ST}\}_\mathbf{R}$. Доказательство наличия такого взаимного преобразования для общего случая не встречает препятствий. Из этого следует, что системы $\{\mathbf{SG}\}_\mathbf{R}$ и $\{\mathbf{ST}\}_\mathbf{R}$ дедуктивно эквивалентны, а исчисления $\{\mathbf{SG}\}_\mathbf{R}$ разрешимы.

Г.Ванзинг, Я.В. Шрамко

ЛОГИКА КОМПЬЮТЕРНЫХ СЕТЕЙ*

Abstract. *We consider some generalizations of Belnap's "useful four-valued logic" by introducing generalized truth values of degree n and propose a heuristic interpretation of these generalizations in terms of computer networks.*

1. Белнаповский копьютер: пресыщенные оценки и истинностно-значные провалы

Н. Белнап ([1], [2], см. также [11, §81]), опираясь на некоторые фундаментальные идеи М. Данна (см. [13], [15]), предложил "полезную четырехзначную логику", которая призвана обеспечить бесперебойную и надежную работу компьютера в условиях неполноты и/или противоречивости поступающей информации. Эта логика может быть истолкована как результат обобщения классической логики: если в последней всякое высказывание может и должно быть либо истинным либо ложным, то логика Белнапа допускает для высказывания возможность не быть ни истинным, ни ложным (истинностно-значный провал), или же быть и тем и другим (пресыщенная оценка) – ср. [4], [7].

Компьютер, который в своих рассуждениях руководствуется четырехзначной логикой Белнапа, назовем *белнаповским компьютером*. Как отмечает Белнап, компьютер может получать информацию из *различных* (возможно, независимых) источников. Имея дело с тем или иным высказыванием, белнаповский компьютер оценивает его истинность в соответствии с полученной информацией. Ясно, что кроме двух стандартных (классических) случаев, когда компьютеру сообщается, что высказывание является истинным либо ложным, возможны две новые (нестандартные) ситуации, когда источники ничего не говорят о данном высказывании или же сообщают о нем противоречивую информацию. Этим четырем "информационным ситуациям" соответствуют следующие четыре истинностные значения:

---

* В данной работе мы излагаем и развиваем далее некоторые результаты наших совместных исследований, полученные в ходе научного проекта, осуществлявшегося Я.В. Шрамко в 2003-2004 гг. при Институте философии Дрезденского технического университета в рамках исследовательской премии им. Ф. Бесселя ***фонда Александра фон Гумбольдта*** (Германия). См. также [24].

N – значение "ни истина, ни ложь" (нет информации, что высказывание является ложным, но нет и информации, что высказывание является истинным);

F – значение "только ложь" (имеется *лишь* информация, что высказывание является ложным);

T – значение "только истина" (имеется *лишь* информация, что высказывание является истинным);

B – значение "как истина, так и ложь" (имеется информация, что высказывание является ложным, но также имеется информация, что высказывание является истинным)[1].

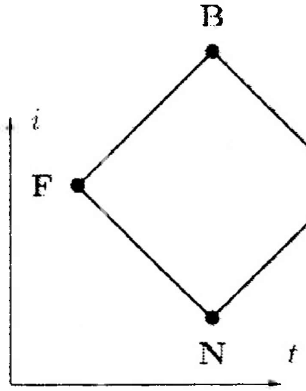


Рис. 1. Бирешетка $FOUR_2$

М. Гинзберг [17], [18] заметил, что истинностные значения логики Белнапа образуют интересную алгебраическую структуру, так называемую *двойную решетку* (или *бирешетку*), т.е., множество с *двумя* частичными порядками, каждый из которых задает на данном множестве свою собственную (отдельную) решетку[2]. Эта бирешетка, которую мы будем называть $FOUR_2$, представлена на рис. 1 посредством двойной диаграммы Хассе. Здесь мы имеем два частичных порядка: $\leq_i$ ("информационный" порядок, упорядочение по информативности) и $\leq_t$ ("логический" порядок, упорядочение по истине)[3]. Содержательно $\leq_i$ представляет возрастание информативности, а $\leq_t$ – возрастание истинности элементов, образующих $FOUR_2$.

---

[1] Подробнее о четырехзначной логике Белнапа и "компьютерной интерпретации" см., например, в [6], [8], [9].

[2] Напомним, что решетка есть частично упорядоченное множество, в котором для любой пары элементов имеются точная нижняя и точная верхняя грани. О бирешетках см., например, [12], [16].

[3] Соответственно, мы имеем информационную и логическую решетки. Белнап [1] детально рассмотрел эти решетки *по отдельности* под именами **A4** и **L4**.

Особо важную роль играет отношение $\leq_t$, поскольку именно этот порядок детерминирует логику белнаповского компьютера. Во-первых, операции решеточного пересечения и объединения относительно $\leq_t$ задают, соответственно, логические связки конъюнкции и дизъюнкции, а операция обращения порядка $\leq_t$ задает связку логического отрицания. Во-вторых, этот порядок позволяет естественным образом ввести *отношение логического следования*. Пусть v^4 (*4-оценка*) есть некоторое отображение высказываний языка на $FOUR_2$. Тогда имеем:

Определение 1. $A \models^4 B =_{\mathrm{df}} \forall v^4(v^4(A) \leq_t v^4(B))$.

Из высказывания A логически следует высказывание B, если и только если истинностное значение высказывания B *не ниже*, чем значение высказывания A. Иными словами, следование может только повышать логическое значение высказывания (см. [1, с. 224]).

Как известно, это отношение аксиоматизируется посредством системы "тавтологических следований" $\mathbf{E}_{fde}$ из [10, § 15.2], которая является первопорядковым – относительно вхождений импликации – фрагментом систем релевантной логики **E** и **R** (см., напр., [14], [3, с. 281-282]).

2. Компьютерная сеть: обобщенные истинностные значения

Следует отметить, что компьютерная интерпретация Белнапа прекрасно работает, когда мы имеем дело с *одним* (отдельно взятым) компьютером. Кроме этого, предполагается, что белнаповский компьютер получает информацию из *классических источников*, т.е. эти источники руководствуются исключительно двузначной классической логикой. Однако уже эта предпосылка представляет собой довольно сильную идеализацию. Более того, в наши дни не так уж часто можно встретить компьютер, который постоянно находился бы в полной изоляции, не будучи, хотя бы время от времени, подключаемым к другим компьютерам (пусть даже опосредованно, путем обмена дискетами)[4]. Но что же произойдет, если несколько белнаповских компьютеров объединить в единую *компьютерную сеть*?

Пусть имеется четыре белнаповских компьютера: C_1, C_2, C_3 и C_4 и пусть эти компьютеры подключены к некоторому центральному компьютеру (серверу) – C'_1, которому они должны постав-

[4] Таких компьютеров, конечно же, было гораздо больше в середине 70-х годов прошлого века, когда Белнап писал свои знаменитые статьи.

лять информацию (рис. 2). Ясно, что *логика сервера*, а значит, и сети в целом не может больше оставаться четырехзначной. В самом деле, пусть на запрос сервера один из подчиненных компьютеров (C_1) отвечает, что высказывание является *только* истинным (имеет значение **T**), в то время как другой компьютер (C_2) сообщает, что по данному высказыванию у него имеется противоречивая информация (высказывание является одновременно истинным и ложным, т.е. имеет значение **B**). Какое значение в этом случае должен приписать высказыванию наш сервер, при условии, что у него нет никаких дополнительных оснований доверять одному из компьютеров больше, чем другому?

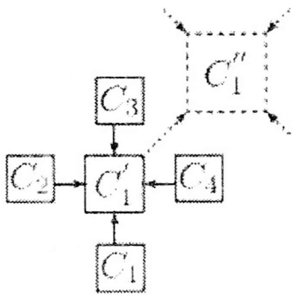


Рис. 2. Компьютерная сеть

С одной стороны, может показаться, что следует принять точку зрения компьютера C_1 (по крайней мере, он не противоречит сам себе и вроде бы ведет себя последовательно). Небольшое размышление убеждает, однако, в том, что последовательное поведение вовсе не обязательно гарантирует от возможной ошибки. В самом деле, допустим, что высказывание, о котором идет речь, в действительности является ложным. Допустим также, что эту информацию получил лишь компьютер C_2. Кроме того, предположим, что имеется другой (независимый) источник, который, заблуждаясь, сообщил обоим компьютерам (C_1 и C_2), что данное высказывание истинно. Очевидно, что если в этом случае мы проигнорируем тревожный сигнал, который подает нам C_2, и припишем высказыванию значение **T** (тем самым излишне доверившись C_1), то совершим грубый просчет.

С другой стороны, неправомерно было бы просто приписать высказыванию значение **B**, например, под тем предлогом, что раз оба компьютера сообщили об истинности высказывания, то двойное повторение истины якобы является излишним. Тем самым, была бы утеряна важная информация о том, что по крайней мере один из наших компьютеров не располагает сведениями о ложности высказывания. Сообщение о том, что высказывание является одновременно истинным и ложным вовсе не является простым расширением информации, что высказывание является *только* истинным (т.е., истинным *и не ложным*).

Для адекватной экспликации описанной ситуации мы должны "подняться" *над* четырехзначной логикой и *перейти на один уровень выше* путем введения в оборот новых истинностных значений, таких как **TB**. Содержательно это значение можно понимать как "на сервер поступила информация, что высказывание является только истинным, а также одновременно истинным и ложным".

Таким образом, если представить себе ситуацию, когда C_1 сообщает, что высказывание является только ложным, C_2 – что оно является только истинным, C_3 – ни истинным, ни ложным, а C_4 – как истинным, так и ложным, то **NFTB** оказывается вовсе не таким уж "безумием" (ср. [19, с. 19]), а напротив, вполне рациональным истинностным значением, которое сервер C'_1 должен приписать данному высказыванию. Это говорит о том, что логика сервера C'_1 является уже 16-значной. Если же подключить несколько компьютеров типа C'_1 к компьютеру более высокого уровня C''_1, то число истинностных значений возрастет до $2^{16} = 65536$.

Рассмотрим вопрос максимально обобщенно. Пусть $\mathbf{2} = \{F,T\}$ есть множество истинностных значений классической логики ("истина", "ложь")[5]. Как подчеркивает Белнап [1, с. 226], истинностные значения его четырехзначной логики, по существу, представляют собой множество всех подмножеств множества классических истинностных значений **2**, т.е. $\mathbf{4} = \{\mathbf{N},\mathbf{F},\mathbf{T},\mathbf{B}\} = P(\mathbf{2}) = \{\{\},\{F\},\{T\},\{F,T\}\}$[6]. Это приводит нас к идее *обобщенного истинностного значения* как подмножества некоторого базисного множества значений (см. [9], [22], [23], [24]). Если мы будем считать, что классические значения относятся к уровню 0 ("нулевому уровню"), то значения четырехзначной логики Белнапа (т.е., логики "одинокого компьютера") оказываются обобщенными истинностными значениями *первого уровня*. То есть при полном отсутствии компьютеров, компьютерная сеть также отсутствует, что можно обозначить как "компьютерную сетью нулевого уровня", а в случае с одним компьютером можно уже вести речь о (тривиальной) компьютерной сети первого уровня. Затем, обобщенные истинностные значения *второго уровня* (которые характе-

---

[5] Следует обратить внимание на разницу между классическим значеним T ("истина") и Белнаповским значением **T** (= {T}, "только истина"). Чтобы подчеркнуть эту разницу, мы маркируем значения Белнапа жирным шрифтом.

[6] Белнап отмечает, что эта фундаментальная идея принадлежит Данну.

ризуют логику простейшей нетривиальной компьютерной сети) образуют множество **16** = P(**4**). И так далее. В общем виде:

$$\mathbf{V}_{n+1} = P(\mathbf{V}), \text{ где } \mathbf{V}_0 = \mathbf{2}.$$

Что касается множества **16**, то здесь мы имеем следующие обобщенные истинностные значения:

1. **N** = ∅	9. **FT** = {{F},{T}}
2. ***N*** = {∅}	10. **FB** = {{F},{F,T}}
3. ***F*** = {{F}}	11. **TB** = {{T},{F,T}}
4. ***T*** = {{T}}	12. **NFT** = {∅,{F},{T}}
5. ***B*** = {{F,T}}	13. **NFB** = {∅,{F},{F,T}}
6. **NF** = {∅,{F}}	14. **NTB** = {∅,{T},{F,T}}
7. **NT** = {∅,{T}}	15. **FTB** = {{F},{T},{F,T}}
8. **NB** = {∅,{F,T}}	16. **A** = {∅,{F},{T},{F,T}}.

Опять же, обратим внимание на разницу между Белнаповскими исходными значениями {**N**,**F**,**T**,**B**} и их *аналогами* в **16**. Каждое из первоначальных значений четырехзначной логики Белнапа претерпевает существенную трансформацию, будучи преобразованным из некоторого множества в *элемент* множества более высокого уровня. Чтобы подчеркнуть это обстоятельство, получившиеся новые значения обозначаются курсивом. Ясно, что **N** ∈ ***N***, **F** ∈ ***F***, **T** ∈ ***T*** и **B** ∈ ***B***. Интересно также отметить разницу между **FT** и **B**. Ниже мы остановимся на этом подробнее.

3. Мультирешетки истинностных значений. Трирешетка *SIXTEEN*$_3$

В дальнейшем анализе важную роль будет играть понятие *мультирешетки*, введенное в [24] (ср. также [25], [9]).

Определение 2. *n-мерная мультирешетка* (или просто *n-решетка*) есть структура $M = (S, \leq_1, \ldots, \leq_n)$, где S есть непустое множество, а $\leq_1, \ldots, \leq_n$ – отношения частичного порядка, определенные на S, так что $(S, \leq_1), \ldots, (S, \leq_n)$ суть различные решетки.

Примером двумерной мультирешетки может служить бирешетка *FOUR*$_2$. В [23] была подробно рассмотрена *трирешетка* конструктивных истинностных значений *SIXTEEN*$_3$ (см. также [9]).

Среди всего множества мультирешеток имеет смысл выделить так называемые *правильные мультирешетки*, с тем чтобы разумным образом редуцировать число возможных частичных порядков до тех, которые являются в определенном смысле "нетривиальными" (или "интересными"). Для этого назовем любые два отношения, определенные на некотором множестве, *взаимно независимыми* относительно данного определения, если и только если эти отношения не являются обращениями друг друга и единственные общие термины, которые используются в их определениях (кроме метаязыковых логических связок и кванторов), суть стандартные теоретико-множественные термины. Теперь определяем:

Определение 3. *Правильной мультирешеткой* называется такая мультирешетка, все частичные порядки которой могут быть определены взаимно независимым образом.

Вернемся еще раз к бирешетке $FOUR_2$ и попробуем дать формальные определения для ее отношений частичного порядка ($\leq_i$ и $\leq_t$). Определение $\leq_i$ очень просто: для любых $x, y \in \mathbf{4}$, $x \leq_i y$ т.т.т. $x \subseteq y$[7]. С отношением $\leq_t$ ситуация не столь тривиальна. Вначале определим для каждого элемента из **4** его "истину-содержащую часть" и "ложь-содержащую часть":

$$x^t := \{z \in x \mid z = \mathrm{T}\}; \quad x^f := \{z \in x \mid z = \mathrm{F}\}.$$

Тогда имеем: $x \leq_t y$ т.т.т. $x^t \subseteq y^t$ и $y^f \subseteq x^f$. Это определение ясно указывает на то, что $\leq_t$ в рамках $FOUR_2$ представляет собой отношение не только по истине, но вместе *по истине и лжи*: упорядочивая истинностные значения из **4** в соответствии с этим отношением, мы должны принимать во внимание не только их "истинное содержание", но также и их "ложное содержание". Возрастание истинности элементов, образующих $FOUR_2$, *автоматически* означает убывание их ложности (и наоборот). Это говорит о том, что истина и ложь в логике Белнапа все еще не являются *полностью* независимыми понятиями: $FOUR_2$ предполагает, что само по себе значение "ложь" является не только менее истинным, чем значение "истина", но и чем значение "ни истина, ни ложь".

Обратимся теперь снова к множеству **16** и рассмотрим его алгебраическую структуру. Оказывается, в рамках этого множества имеется возможность провести эффективное различие между возрастанием истинности значений и убыванием их ложности, а значит, можем определить порядок по истине и порядок по лжи как два различных и *взаимно независимых* отношения. Для этого мы должны переопределить множества x^t и x^f, а также рассмотреть дополнения этих множеств:

---

[7] Ясно, что относительно данного определения отношение информационного порядка не зависит ни от какого другого отношения, как бы оно ни было определено. Иными словами, любая бирешетка, один из порядков которой является информационным, оказывается правильной.

$$x^{t} := \{z \in x \mid \mathrm{T} \in z\}; \quad x^{-t} := \{z \in x \mid \mathrm{T} \notin z\}.$$

И аналогично для лжи:

$$x^{f} := \{z \in x \mid \mathrm{F} \in z\}; \quad x^{-f} := \{z \in x \mid \mathrm{F} \notin z\}.$$

Теперь можем определить:

Определение 4. Для всех $x, y \in$ **16**:

(1) $x \leq_i y =_{\mathrm{df}} x \subseteq y$;

(2) $x \leq_t y =_{\mathrm{df}} x^t \subseteq y^t$ и $y^{-t} \subseteq x^{-t}$.

(3) $x \leq_f y =_{\mathrm{df}} x^f \subseteq y^f$ и $y^{-f} \subseteq x^{-f}$.

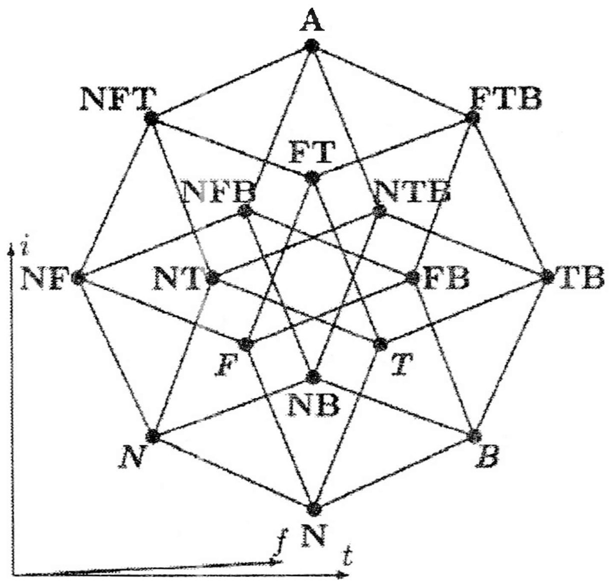


Рис. 3. Трирешетка $SIXTEEN_3$ (проекция i–t)

Таким образом, мы получаем правильную трехмерную мультирешетку – *трирешетку* $SIXTEEN_3 = (\mathbf{16}, \leq_i, \leq_t, \leq_f)$, образуемую на множестве **16**. Эта трирешетка представлена на рис. 3 и 4 в двух разных проекциях. Здесь можно ясно видеть все три частичных порядка – по информации, по истине и по лжи. **A** и **N** представляют собой, соответственно, единицу и нуль решетки относительно $\leq_i$, **TB** и **NF** – относительно $\leq_t$, а **FB** и **NT** – относительно $\leq_f$. Интуитивно **A** и **N** являются наиболее и наименее *информативными* элементами множества **16**, **TB** и **NF** – наиболее и наименее *истинными* его элементами, а **FB** и **NT** – наиболее и наименее *ложными* элементами. Таким образом, ранее единый логический порядок распадается здесь на *два независимых и равноправных логических порядка* – отдельно для истины и отдельно для лжи. Будем называть отношение $\leq_t$ *t-логическим* порядком, а отношение $\leq_f$ – *f-логическим* порядком.

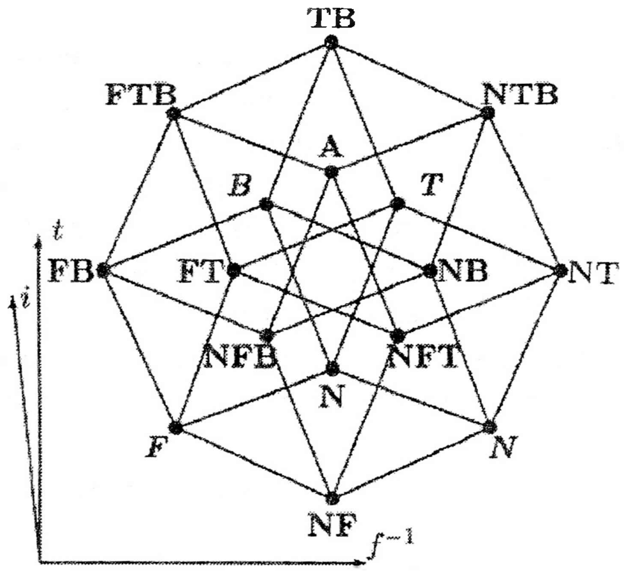


Рис 4. Трирешетка $SIXTEEN_3$ (проекция t–f)

Рассмотрим подробнее, как ведут себя старые белнаповские истинностные значения, вернее, их *аналоги* – ***N***, ***F***, ***T***, ***B*** в новых условиях. Оказывается, их поведение существенно меняется, например, относительно $\leq_i$. А именно в $FOUR_2$ значение **B** является *более*, а **N** – *менее* информативным, чем **F** и **T**, в то время как в $SIXTEEN_3$ аналогичные значения расположены все *на одном* информационном уровне. Последнее обстоятельство, на первый взгляд, нарушает некоторые базисные интуитивные предпосылки логики Белнапа. Действительно, в соответствии с белнаповской интерпретацией, которая и отражена в бирешетке $FOUR_2$, значение **B** заключает в себе больше информации чем **T**, поскольку **B** обозначает "как истину, так и ложь", в то время как **T** сообщает "только" истину (и аналогично для других значений).

Тем не менее, поведение значений ***N***, ***F***, ***T***, ***B*** в $SIXTEEN_3$ является гораздо более естественным, чем это может показаться на первый взгляд. Во-первых, еще раз отметим, что аналогичные значения из **4** и из **16**, будучи очень схожими, все же не тождественны друг другу. Так **T** = {T}, в то время как ***T*** = {{T}} и т.д. Учитывая же тот факт, что отношение $\leq_i$ упорядочивает значения исключительно по их мощности (чем больше элементов содержит данное множество, тем более информативным оно является), не приходится удивляться тому, что ***N***, ***F***, ***T***, ***B*** оказываются в $SIXTEEN_3$ равно информативными, так как все эти значения содержат ровно по одному элементу.

Во-вторых, следует иметь в виду, что *каждое* из обобщенных истинностных значений *явно или неявно* сообщает нечто как об истине, так и о лжи, в позитивном или негативном ключе. Но в чисто *количественном* отношении позитивная и негативная информации имеют совершенно одинаковую ценность! Чтобы сделать это обстоятельство очевидным, следует несколько модифицировать интуитивную интерпретацию четырех истинностных значений логики Белнапа. В оправдание этой новой интерпретации заметим, что "*только* истинно" означает не что иное как "истинно *и не ложно*". То есть приходим к следующему интуитивному пониманию белнаповских истинностных значений:

N – высказывание является не ложным и не истинным [*не-ложь, не-истина*];

F – высказывание является ложным и не истинным [*ложь, не-истина*];

T – высказывание является не ложным и истинным [*не-ложь, истина*];

B – высказывание является ложным и истинным [*ложь, истина*].

Важно подчеркнуть, что эта новая интерпретация элементов множества **4** может быть осуществлена только в рамках конструкции более высокого уровня, каковой и является **16**. Когда мы обобщаем некоторое базисное множество истинностных значений путем образования его множества-степени, то оказывается, что новые, обобщенные истинностные значения сообщают определенную информацию об исходном, базисном множестве значений. А именно каждое обобщенное значение информирует нас об определенном приписывании элементов базисного множества тому или иному высказыванию. То есть процедура обобщения понятия истинностного значения фактически вводит *функцию информатизации* $\sigma(x) := \{x\}$, назначение которой состоит в том, чтобы образовывать "информационный массив", относящийся к реальности более "низкого уровня" – истинностное значение $\{x\}$ простонапросто сообщает некоторую информацию относительно приписывания x.

Вышесказанное, в частности, позволяет прояснить разницу между **N** и $\mathcal{N}$. Единственное предназначение **N** (на любом уровне) состоит в том, чтобы сигнализировать об отсутствии *какой бы то ни было информации* (относительно соответствующего множества истинностных значений). Иными словами, **N** говорит нам, что нет никакой информации: в рамках множества **4** – о классических истинностных значениях; в рамках множества **16** – о значениях логики Белнапа. В то же время $\mathcal{N}$ в **16** обладает гораздо большей выразительной силой, будучи специфическим истинностным значением и сообщая нам, что высказыванию приписано *белнаповское* значение **N**. Такое сообщение, по существу, представляет собой *метаутверждение* о том, что данное высказывание не является ни *классически* истинным, ни *классически* ложным.

Довольно примечательным также является различие между значениями **FT** и **B**. Вспомним, что последнее обычно истолковывается в духе идей *паранепротиворечивой логики* о возможности существования *нетривиальных противоречий*. Однако эта интерпретация имеет не чисто логический характер, поскольку базируется на неявном языковом (семантическом) соглашении о характере взаимоотношений между понятиями "ложь" и "истина". С логической же точки зрения подлинным противоречием для истины является не-истина, а противоречием для лжи – не-ложь. Таким образом, значение **FT**, которое говорит нам "ложь и не истина, а также не ложь и истина" в гораздо большей степени, чем **B**, подходит на роль нетривиального противоречивого истинностного значения.

Интересно также отметить, что **N**, **F**, **T**, **B** в $FOUR_2$ и ***N***, ***F***, ***T***, ***B***, в $SIXTEEN_3$ по-разному упорядочены и относительно $\leq_t$. В рамках $FOUR_2$ **T** является "более истинным", чем **B**, а **N** – более истинным, чем **F**, в то время как **N** и **B** находятся на одном и том же "истинностном уровне". В отличие от этого в $SIXTEEN_3$ ***B*** оказывается более истинным, чем *N*, а "степень истинности" ***T*** и ***B***, а также *N* и ***F*** попарно одинакова. Эта ситуация ни в коем случае не должна нас удивлять, поскольку в $SIXTEEN_3$ (но не в $FOUR_2$!) $\leq_t$ представляет собой отношение между значениями *исключительно* по истине – при упорядочении элементов принимается во внимание только то, что они говорят об истине, а любая информация о лжи просто игнорируется.

Ясно, что каждый из трех частичных порядков в $SIXTEEN_3$ задает свои собственные операции пересечения и объединения. Для обозначения этих операций мы будем использовать символы $\cap$ и $\cup$ с соответствующими индексами. Таким образом, $SIXTEEN_3$ представляет собой структуру $(\mathbf{16}, \cap_i, \cup_i, \cap_t, \cup_t, \cap_f, \cup_f)$. В дальнейшем нас будут особо интересовать операции $\cap_t$, $\cup_t$, $\cap_f$ и $\cup_f$. Некоторые ключевые свойства этих операций суммируются в следующем утверждении (в истинности которого несложно убедиться при помощи диаграммы на рис. 4):

Утверждение 1. Для всех x, y в $SIXTEEN_3$:

(1) $\mathbf{T} \in x \cap_t y \Leftrightarrow \mathbf{T} \in x$ и $\mathbf{T} \in y$;	(2) $\mathbf{T} \in x \cup_t y \Leftrightarrow \mathbf{T} \in x$ или $\mathbf{T} \in y$;
$\mathbf{B} \in x \cap_t y \Leftrightarrow \mathbf{B} \in x$ и $\mathbf{B} \in y$;	$\mathbf{B} \in x \cup_t y \Leftrightarrow \mathbf{B} \in x$ или $\mathbf{B} \in y$;
$\mathbf{F} \in x \cap_t y \Leftrightarrow \mathbf{F} \in x$ или $\mathbf{F} \in y$;	$\mathbf{F} \in x \cup_t y \Leftrightarrow \mathbf{F} \in x$ и $\mathbf{F} \in y$;
$\mathbf{N} \in x \cap_t y \Leftrightarrow \mathbf{N} \in x$ или $\mathbf{N} \in y$;	$\mathbf{N} \in x \cup_t y \Leftrightarrow \mathbf{N} \in x$ и $\mathbf{N} \in y$;

(3) $\mathbf{T} \in x \cup_f y \Leftrightarrow \mathbf{T} \in x$ и $\mathbf{T} \in y$;
$\mathbf{N} \in x \cup_f y \Leftrightarrow \mathbf{N} \in x$ и $\mathbf{N} \in y$;
$\mathbf{F} \in x \cup_f y \Leftrightarrow \mathbf{F} \in x$ или $\mathbf{F} \in y$;
$\mathbf{B} \in x \cup_f y \Leftrightarrow \mathbf{B} \in x$ или $\mathbf{B} \in y$;

(4) $\mathbf{T} \in x \cap_f y \Leftrightarrow \mathbf{T} \in x$ или $\mathbf{T} \in y$;
$\mathbf{N} \in x \cap_f y \Leftrightarrow \mathbf{N} \in x$ или $\mathbf{N} \in y$;
$\mathbf{F} \in x \cap_f y \Leftrightarrow \mathbf{F} \in x$ и $\mathbf{F} \in y$;
$\mathbf{B} \in x \cap_f y \Leftrightarrow \mathbf{B} \in x$ и $\mathbf{B} \in y$.

Определение 5. Унарные операции *инверсии*, которые могут быть определены на трирешетке $(S, \leq_i, \leq_t, \leq_f)$, суть такие, которые удовлетворяют следующим условиям:

1. *t-инверсия* $(-_t)$:
(a) $a \leq_t b \Rightarrow -_t b \leq_t -_t a$;
(b) $a \leq_f b \Rightarrow -_t a \leq_f -_t b$;
(c) $a \leq_i b \Rightarrow -_t a \leq_i -_t b$;
(d) $-_t -_t a = a$.

2. *f-инверсия* $(-_f)$:
(a) $a \leq_f b \Rightarrow -_f b \leq_f -_f a$;
(b) $a \leq_t b \Rightarrow -_f a \leq_t -_f b$;
(c) $a \leq_i b \Rightarrow -_f a \leq_i -_f b$;
(d) $\sim_f \sim_f a = a$.

3. *i-инверсия* $(-_i)$:
(a) $a \leq_i b \Rightarrow -_i b \leq_i -_i a$;
(b) $a \leq_t b \Rightarrow -_i a \leq_t -_i b$;
(c) $a \leq_f b \Rightarrow -_i a \leq_f -_i b$;
(d) $-_i -_i a = a$.

В $SIXTEEN_3$ эти операции определяются посредством следующей таблицы:

Сводная таблица истинности для инверсий в $SIXTEEN_3$

a	$-_t a$	$-_f a$	$-_i a$	a	$-_t a$	$-_f a$	$-_i a$
N	**N**	**N**	**A**	**NB**	**FT**	**FT**	**FT**
N	***T***	***F***	**NFT**	**FB**	**FB**	**NT**	**FB**
F	***B***	***N***	**NFB**	**TB**	**NF**	**TB**	**TB**
T	***N***	***B***	**NTB**	**NFT**	**NTB**	**NFB**	***N***
B	***F***	***T***	**FTB**	**NFB**	**FTB**	**NFT**	***F***
NF	**TB**	**NF**	**NF**	**NTB**	**NFT**	**FTB**	***T***
NT	**NT**	**FB**	**NT**	**FTB**	**NFB**	**NTB**	***B***
FT	**NB**	**NF**	**NB**	**A**	**A**	**A**	**N**

Нас в первую очередь будут интересовать t-инверсия и f-инверсия, как наиболее естественные кандидаты на роль операции отрицания. Следующее утверждение фиксирует некоторые важные свойства этих операций.

Утверждение 2. Для любого x в $SIXTEEN_3$:

(1) $\mathbf{T} \in -_t x \Leftrightarrow \mathbf{N} \in x$; (2) $\mathbf{T} \in -_f x \Leftrightarrow \mathbf{B} \in x$;

$\mathbf{N} \in -_t x \Leftrightarrow \mathbf{T} \in x$; $\mathbf{B} \in -_f x \Leftrightarrow \mathbf{T} \in x$;

$\mathbf{F} \in -_t x \Leftrightarrow \mathbf{B} \in x$; $\mathbf{F} \in -_f x \Leftrightarrow \mathbf{N} \in x$;

$\mathbf{B} \in -_t x \Leftrightarrow \mathbf{F} \in x$; $\mathbf{N} \in -_f x \Leftrightarrow \mathbf{F} \in x$.

Переходя теперь к вопросу о логических связках, задаваемых алгебраическими операциями трирешетки $SIXTEEN_3$, важно иметь в виду, что $\cap_t$, $\cup_t$ и $-_t$ не являются теперь единственными операциями, которым в объектном языке естественным образом соответствуют связки конъюнкции, дизъюнкции и отрицания; на эту роль вполне могут претендовать и $\cup_f$, $\cap_f$ и $-_f$. По крайней мере, совершенно не очевидно, почему мы должны предпочесть один логический порядок другому. А принимая во внимание тот факт, что $x \cap_t y \neq x \cup_f y$, $x \cup_t y \neq x \cap_f y$ и $-_t x \neq -_f x$, можно прийти к выводу, что *оба* логических порядка порождают "параллельные", но фактически *различные* логические связки.

$SIXTEEN_3$ предоставляет возможность исследовать все эти операции в рамках единой логико-алгебраической конструкции. Синтаксически эта конструкция определяется языком L_{tf}, включающем следующие логические связки: $\wedge_t$, $\vee_t$, $\sim_t$, $\wedge_f$, $\vee_f$ и $\sim_f$. Что касается семантики, то пусть v^{16} (*16-оценка*) есть некоторое отображение множества атомарных высказываний на множество **16**. Тогда эта оценка распространяется на все высказывания языка L_{tf} посредством следующего определения:

Определение 6. Для любых высказываний A и B:

(1) $v^{16}(A \wedge_t B) = v^{16}(A) \cap_t v^{16}(B)$; (4) $v^{16}(A \wedge_f B) = v^{16}(A) \cup_f v^{16}(B)$;

(2) $v^{16}(A \vee_t B) = v^{16}(A) \cup_t v^{16}(B)$; (5) $v^{16}(A \vee_f B) = v^{16}(A) \cap_f v^{16}(B)$;

(3) $v^{16}(\sim_t A) = -_t v^{16}(A)$; (6) $v^{16}(\sim_f A) = -_f v^{16}(A)$.

Итак, $SIXTEEN_3$ допускает нетривиальное сосуществование попарно различных (хотя и аналогичных) логических связок. Интуитивно это различие обеспечивается тем, что логические операции $\wedge_t$, $\vee_t$, $\sim_t$ истолковываются в терминах *наличия истины*, в то время как $\wedge_f$, $\vee_f$ и $\sim_f$ можно интерпретировать как операции, подчеркивающие *отсутствие лжи*.

Между прочим, $SIXTEEN_3$ некоторым образом "исправляет" определенные спорные моменты $FOUR_2$. Так, еще сам Белнап (см. [1, с. 221-223]) отметил, что в его четырехзначной логике истинностно-значные функции от нестандартных значений (**N** и **B**) в некоторых случаях могут казаться "озадачивающими" и даже "странными" ("odd"). В частности, интуитивно не вполне очевидно, откуда берется $\mathbf{N} \wedge \mathbf{B} = \mathbf{F}$, или $\mathbf{N} \vee \mathbf{B} = \mathbf{T}$. В отличие от этого

$SIXTEEN_3$ предлагает несколько иную трактовку истинностно-значных провалов и пресыщенных оценок. Например, конъюнкция этих нестандартных значений дает здесь либо истинностный провал, либо пресыщение – в зависимости от того, рассматриваем ли мы ситуацию с точки зрения наличия истины (используя $\wedge_t$) или отсутствия лжи ($\wedge_f$).

Теперь пришло время, вслед за Белнапом [1, с. 223], спросить себя: "Чего же мы все-таки достигли?" Отвечая на этот вопрос, мы, следуя Белнапу, должны сделать вывод, что, несмотря на то, что у нас есть довольно-таки изящная алгебраическая структура, *логики* как таковой мы все еще не имеем. Для получения логики (в полном смысле этого слова) недостаточно задать некоторое множество истинностных значений и ввести на этом множестве обычные логические операции – важнейшая задача состоит в том, чтобы снабдить его подходящим отношением логического следования.

Канонический метод определения отношения следования посредством решетки истинностных значений предполагает использование логического порядка этой решетки. Так, в $FOUR_2$ это делается через отношение $\leq_t$ (см. определение 1). Однако, как было отмечено выше, в $SIXTEEN_3$ мы фактически имеем *два* различных логических порядка (один для истины и один для лжи), и было бы едва ли оправданно предпочесть один из этих порядков другому. Это означает, что мы имеем по меньшей мере три возможности: рассмотреть (отдельно) логику, определяемую t-логическим порядком, рассмотреть (отдельно) логику, генерируемую f-логическим порядком, или же рассмотреть логику, которая базируется на *обоих* этих порядках одновременно.

4. Полезные 16-значные логики истинности и ложности

Белнап рассматривает логику как некоторую совокупность "правил для порождения и оценки выводов" [1, с. 223]. Остановимся сперва на последней задаче. Стандартный (и вполне эффективный) механизм проверки правильности рассуждений обычно обеспечивается посредством *семантического* определения отношения логического следования. Мы можем сформулировать такое определение для любых высказываний A, $B \in L_{tf}$, используя частичный порядок $\leq_t$ трирешетки $SIXTEEN_3$:

Определение 7. $A \models_t^{16} B =_{\mathrm{df}} \forall v^{16}(v^{16}(A) \leq_t v^{16}(B))$.

В результате мы получаем *логику истинности*, т.е. логику, соответствующую t-логическому порядку трирешетки $SIXTEEN_3$. Иными словами, (семантически заданная) логика $(L_{tf}, \models_t^{16})$ есть множество всех валидных утверждений вида $A \models_t^{16} B$, где A, $B \in L_{tf}$.

Аналогичным образом мы получаем *логику ложности*, которая соответствует f-логическому порядку трирешетки $SIXTEEN_3$: $(L_{tf}, \models_f^{16})$. Отношение следования этой логики вводится посредством следующего определения:

Определение 8. $A \models_f^{16} B =_{\mathrm{df}} \forall v^{16}(v^{16}(B) \leq_f v^{16}(A))$.

По утверждению Белнапа, "вывод B из A *общезначим...*, если этот вывод никогда не приводит нас от "Истины" к ее отсутствию (т.е. сохраняет истинность), *а также* никогда не приводит нас от отсутствия "Лжи" к "Лжи" (т.е. сохраняет не-ложность)" [1, с. 224]. В рамках $FOUR_2$ такое понимание находит свое выражение в определении 1. Однако, как отмечалось выше, отношение $\leq_t$, которое используется в этом определении, не является "чистым" отношением по истине, а представляет упорядочение "по истине и лжи" одновременно. Таким образом, более подходящим обозначением для этого отношения было бы $\leq_{tf}$. В $SIXTEEN_3$ этот порядок "расщепляется" на два *независимых* отношения, что по существу приводит и к "расщеплению" отношения следования. Отмеченные Белнапом две стороны ранее единого отношения следования (сохранение истинности и сохранение не-ложности) образуют теперь *отдельные* (самостоятельные) отношения, фиксируемые, соответственно, определением 7 и определением 8. Как результат, в приведенном выше "критерии Белнапа" словочетание "а также" естественным образом должно быть заменено на слово "или".

Итак, теперь у нас есть целых *две* "полезные 16-значные логики", каждая из которых предоставляет в наше распоряжение определенный "критерий вывода", который может (и должен) использовать сервер нашей компьютерной сети второго уровня, чтобы проверять "выводы, содержащие конъюнкцию, дизъюнкцию и отрицание, а также, конечно, все, что может быть выражено посредством этих связок" [1, с. 225]. Представляется, что выбор одной из этих логик в том или ином конкретном случае не в последнюю очередь может зависеть от того, имеем ли мы дело с позитивной или негативной информацией. С другой стороны, ничто не мешает нашему серверу *объединить* эти две логики в рамках единой конструкции.

В самом деле, хотя обычно считается, что логическая система должна располагать одним-единственным отношением логического следования, однако понимание логики как теории корректных выводов вовсе не исключает того, что могут существовать несколько типов таких выводов. Трирешетка $SIXTEEN_3$ естественным образом задает два логических порядка, каждому из которых соответствует свое отношение логического следования, одно из которых отражает возрастание истинности, а другое – уменьшение ложности. А значит, вполне естественно рассмотреть объединенную логику трирешетки $SIXTEEN_3$ как систему с двумя типами отношений логического следования. Таким образом, приходим к следующему определению:

Определение 9. Логика (L_{tf}, $\models_t^{16}$, $\models_f^{16}$) представляет собой множество валидных утверждений вида $A \models_x^{16} B$, где $x = t$ или $x = f$ (см. определения 7 и 8). То есть $(L_{tf}, \models_t^{16}, \models_f^{16}) = (L_{tf}, \models_t^{16}) \cup (L_{tf}, \models_f^{16})$.

Следующей задачей является формулировка логических систем, позволяющих *генерировать* логические выводы (а не только проверять уже существующие выводы на правильность). Относительно полного языка L_{tf} эта задача (в общем виде) пока не решена. В [24] нам удалось аксиоматизировать некоторые важные *фрагменты* языка L_{tf}.

В частности, рассмотрим язык $L_t := p \mid \wedge_t \mid \vee_t \mid \sim_t$. То есть L_t содержит стандартный набор логических связок, соответствующий алгебраическим операциям *одного* из логических порядков (в данном случае речь идет о порядке по истине). Важным результатом [24] является обнаружение того факта, что отношение $\models_t^{16}$, будучи ограничено высказываниями языка L_t, аксиоматизируется посредством системы, полностью аналогичной системе $\mathbf{E}_{fde}$.

Эта система, которую мы обозначаем как $\mathbf{FDE}_t^t$, представляет собой пару $(L_t, \vdash_t)$, где $\vdash_t$ есть бинарное отношение выводимости между высказываниями языка L_t. Схемы аксиом и правил вывода $\mathbf{FDE}_t^t$ суть следующие:

a_t1. $A \wedge_t B \vdash_t A$;

a_t2. $A \wedge_t B \vdash_t B$;

a_t3. $A \vdash_t A \vee_t B$;

a_t4. $B \vdash_t A \vee_t B$;

a_t5. $A \wedge_t (B \vee_t C) \vdash_t (A \wedge_t B) \vee_t C$;

a_t6. $A \vdash_t \sim_t \sim_t A$;

a_t7. $\sim_t \sim_t A \vdash_t A$;

r_t1. $A \vdash_t B, B \vdash_t C \mathbin{/} A \vdash_t C$;

r_t2. $A \vdash_t B, A \vdash_t C \mathbin{/} A \vdash_t B \wedge_t C$;

r_t3. $A \vdash_t C, B \vdash_t C \mathbin{/} A \vee_t B \vdash_t C$;

r_t4. $A \vdash_t B \mathbin{/} \sim_t B \vdash_t \sim_t A$.

В [24] доказывается следующая теорема (которую мы здесь приводим без доказательства):

Теорема 1. Для любых $A, B \in L_t$: $A \models_t^{16} B \Leftrightarrow A \vdash_t B$.

Таким образом, *если мы остаемся в рамках стандартного языка типа КДО*, то оказывается, что логика компьютерной сети второго уровня по существу совпадает с логикой изолированного белнаповского компьютера. Это обстоятельство, на наш взгляд, еще раз подчеркивает значение системы "тавтологических следствий" Андерсона и Белнапа, как универсальной логики, которая может быть введена и обоснована самыми разнообразными способами. В последнем параграфе данной статьи мы обобщим этот результат для сети любого уровня n.

А пока посмотрим, что произойдет, если попробовать распространить действие отношения $\models_t$[16] на области, выходящие за пределы языка L_t. Сперва добавим к этому языку связку "ложностного отрицания" $\sim_f$ и перейдем, таким образом, к языку $L_{t+\sim f} := \{\wedge_t, \vee_t, \sim_t, \sim_f\}$. Система $\mathbf{FDE}_t^{t+\sim f} = (L_{t+\sim f}, \vdash_t)$ получается, если к аксиомам и правилам $\mathbf{FDE}_t^t$ добавить постулаты для $\sim_f$ ($A, B \in L_{t+\sim f}$):

a_t8. $A \vdash_t \sim_f\sim_f A$;

a_t9. $\sim_f\sim_f A \vdash_t A$;

a_t10. $\sim_f\sim_t A \vdash_t \sim_t\sim_f A$;

r_t5. $A \vdash_t B \,/\, \sim_f A \vdash_t \sim_f B$.

Следующие утверждения являются теоремами системы $\mathbf{FDE}_t^{t+\sim f}$:

t_t1. $\sim_f(A \wedge_t B) \vdash_t \sim_f A \wedge_t \sim_f B$;

t_t2. $\sim_f A \wedge_t \sim_f B \vdash_t \sim_f(A \wedge_t B)$;

t_t3. $\sim_f A \vee_t \sim_f B \vdash_t \sim_f(A \vee_t B)$;

t_t4. $\sim_f(A \vee_t B) \vdash_t \sim_f A \vee_t \sim_f B$;

t_t5. $\sim_t\sim_f A \vdash_t \sim_f\sim_t A$.

Эти теоремы, а также правило r_t5 проясняют ту роль, которую связка $\sim_f$ играет в $\mathbf{FDE}_t^{t+\sim f}$. В рамках данной системы $\sim_f$ представляет операцию *инволюции*, семантическим аналогом которой является знаменитая операция "звездочка" Роутли (см. [21]). На наш взгляд, совместное существование отрицания и инволюции ($\sim_t$ и $\sim_f$) в рамках *SIXTEEN*$_3$ позволяет еще раз убедиться в том, что между семантиками, построенными по так называемым "американскому" и "австралийскому" планам (см. [8], [19], [20]), имеется тесная взаимосвязь.

Мы можем также ввести *обобщенную связку логического отрицания*, которая объединяет операции $\sim_t$ и $\sim_f$. А именно примем $\sim A := \sim_f\sim_t A$. Нетрудно убедиться, что для этой связки выполняются все законы Де Моргана, введение и удаление двойного отрицания и контрапозиция. Для семантической характеризации этой связки мы можем следующим образом определить операцию *tf-инверсии*:

Определение 10. $-_{tf}x =_{\mathrm{df}} -_t -_f x$.

При помощи этого определения несложно вывести следующую таблицу:

Таблица истинности для *tf*-инверсии в *SIXTEEN*$_3$

a	$-_{tf}a$	a	$-_{tf}a$	a	$-_{tf}a$	a	$-_{tf}a$
N	**N**	***B***	***N***	**NB**	**NB**	**NFB**	**NTB**
N	***B***	**NF**	**TB**	**FB**	**NT**	**NTB**	**NFB**
F	***T***	**NT**	**FB**	**TB**	**NF**	**FTB**	**NFT**
T	***F***	**FT**	**FT**	**NFT**	**FTB**	**A**	**A**

Также могут быть доказаны следующие утверждения:

Утверждение 3. Для операции *tf*-инверсии выполяются следующие условия:

$$(a)\ a \leq_t b \Rightarrow -_{tf}b \leq_t -_{tf}a;$$

$$(b)\ a \leq_f b \Rightarrow -_{tf}b \leq_f -_{tf}a;$$

$$(c)\ a \leq_i b \Rightarrow -_{tf}a \leq_i -_{tf}b;$$

$$(d)\ -_{tf}-_{tf}a = a.$$

Утверждение 4. Для любого x в *SIXTEEN*$_3$:

$$\mathbf{T} \in -_{tf}x \Leftrightarrow \mathbf{F} \in x;$$

$$\mathbf{N} \in -_{tf}x \Leftrightarrow \mathbf{B} \in x;$$

$$\mathbf{F} \in -_{tf}x \Leftrightarrow \mathbf{T} \in x;$$

$$\mathbf{B} \in -_{tf}x \Leftrightarrow \mathbf{N} \in x.$$

Теперь мы можем ввести функцию оценки для связки ~:

Определение 11. Для любого высказывания A:

$$v^{16}(\sim A) = -_{tf}v^{16}(A).$$

В [24] доказывается следующая теорема:

Теорема 2. Для любых $A, B \in L_{t+\sim f}$: $A \models_t^{16} B \Leftrightarrow A \vdash_t B$.

Для завершения процесса аксиоматизации отношения $\models_t^{16}$ остается добавить к языку $L_{t+\sim f}$ связки $\wedge_f$ и $\vee_f$ и рассмотреть полный язык L_{tf}. В результате мы должны получить систему $\mathbf{FDE}_t^{tf}$. Центральной проблемой здесь является нахождение необходимых и достаточных постулатов, которые характеризовали бы связки $\wedge_f$ и $\vee_f$ относительно $\vdash_t$. Как мы уже сказали, эта проблема все еще остается открытой.

Переходя теперь к проблеме аксиоматизации отношения $\models_f^{16}$, можно отметить, что логика, генерируемая порядком по лжи, является полностью двойственной логике, задаваемой порядком по истине. Иными словами, аксиоматические системы для этих логик могут быть получены друг из друга посредством простой замены индексов "t" на "f" (и обратно) в постулатах этих систем. Таким образом, мы получаем системы $\mathbf{FDE}_t^{\,t}$ и $\mathbf{FDE}_t^{\,t+\sim f}$ для языков L_t и $L_{t+\sim f}$ соответственно.

Связка $\sim$, введенная выше, продолжает работать и в рамках логики ложности, и несложно показать, что в $\mathbf{FDE}_t^{\,t+\sim f}$ для этой связки также выводятся аналоги законов Де Моргана, двойного отрицания и контрапозиции. То есть, если $\sim_t$ представляет операцию отрицания относительно частичного порядка $\leq_t$ и инволюции относительно $\leq_f$, а $\sim_f$ играет роль отрицания относительно $\leq_f$ и инволюции относительно $\leq_t$, то связка $\sim$ ведет себя как отрицание относительно *обоих* порядков, репрезентируя тем самым операцию *обобщенного логического отрицания*.

Задача аксиоматизации отношения $\models_f^{16}$ относительно полного языка L_{tf} также до сих пор не решена. Решение этой задачи позволит решить и задачу построения логической системы с двумя отношениями выводимости: $\mathbf{FDE}_{tf}^{\,tf} = (L_{tf}, \vdash_t, \vdash_f)$, которая определяется как $\mathbf{FDE}_t^{\,tf} \cup \mathbf{FDE}_f^{\,tf}$.

5. Обобщения. Универсальность следования первого порядка

Конструкция, предложенная в данной статье, может быть обобщена для компьютерной сети любого уровня. Поскольку, как было отмечено выше, минимальная нетривиальная компьютерная сеть базируется на множестве обощенных истинностных значений **16**, то именно это множество (= P(**4**)) должно выступать в качестве исходного пункта дальнейших обобщений.

Итак, пусть X есть некоторое базисное множество истинностных значений, $P^1(X) := P(X)$ и $P^n(X) := P(P^{n-1}(X))$, где $1 < n$, $n \in \omega$. Тогда мы получаем бесконечную цепь множеств обобщенных истинностных значений путем рассмотрения P^n(**4**). На каждом из этих множеств устанавливаются отношения частичного порядка по информации, истине и лжи ($\leq_i$, $\leq_t$, $\leq_f$) посредством подходящим образом модифицированного определения 4. А именно теперь в этом определении x, $y \in P^n$(**4**), множества x^t, x^{-t}, x^f и x^{-f} определяются следующим образом:

$x^t := \{y_0 \in x \mid (\exists y_1 \in y_0)\ (\exists y_2 \in y_1) \ldots (\exists y_{n-1} \in y_{n-2})\ \mathrm{T} \in y_{n-1}\}$;

$x^{-t} := \{y_0 \in x \mid \neg(\exists y_1 \in y_0)\,(\exists y_2 \in y_1)\,\ldots\,(\exists y_{n-1} \in y_{n-2})\,\mathrm{T} \in y_{n-1}\}$;
$x^{f} := \{y_0 \in x \mid (\exists y_1 \in y_0)\,(\exists y_2 \in y_1)\,\ldots\,(\exists y_{n-1} \in y_{n-2})\,\mathrm{F} \in y_{n-1}\}$;
$x^{-f} := \{y_0 \in x \mid \neg(\exists y_1 \in y_0)\,(\exists y_2 \in y_1)\,\ldots\,(\exists y_{n-1} \in y_{n-2})\,\mathrm{F} \in y_{n-1}\}$.

То есть, $x^{-t} = x \setminus x^{t}$ и $x^{-f} = x \setminus x^{f}$. Если множество x^{t} (x^{-t}, x^{f}, x^{-f}) является непустым, x называется t-позитивным (t-негативным, f-позитивным, f-негативным). Посредством $P^n(\mathbf{4})^t$ ($P^n(\mathbf{4})^{-t}$, $P^n(\mathbf{4})^f$, $P^n(\mathbf{4})^{-f}$) будем обозначать множество всех t-позитивных (t-негативных, f-позитивных, f-негативных) элементов $P^n(\mathbf{4})^t$.

Определение 12. *Трирешетка Белнапа* есть структура

$$M_3^n := (P^n(\mathbf{4}), \cap_i, \cup_i, \cap_t, \cup_t, \cap_f, \cup_f),$$

где $\cap_i$ ($\cap_t$, $\cap_f$) есть решеточное пересечение, а $\cup_i$ ($\cup_t$, $\cup_f$) – решеточное объединение относительно $\leq_i$ ($\leq_t$, $\leq_f$), определенных на $P^n(\mathbf{4})$.

Итак, $SIXTEEN_3$ ($= M_3^1$) есть наименьшая трирешетка Белнапа. Кроме того, если на $P^n(\mathbf{4})$ существуют унарные операции $-_t$ и $-_f$, удовлетворяющие условиям из определения 5, то мы имеем *трирешетку Белнапа с t-инверсией и f-инверсией.*

Теорема 3. Для любой трирешетки Белнапа существуют операции t-инверсии и f-инверсии.

Доказательство. Для любой трирешетки Белнапа M_3^n может быть следующим образом определена каноническая операция t-инверсии. Пусть $x \in P^n(\mathbf{4})$. Если x пусто, то положим $-_t x = x$. Если $x \neq \varnothing$, то $-_t x$ определяется путем последовательного рассмотрения элементов из x. А именно каждый $y \in x$ содержит на некоторой конечной глубине вхождения его элементов (т.е. возможно не как свои элементы, но в качестве элементов своих элементов... и т.п.) белнаповские истинностные значения, т.е. $\varnothing$, $\{F\}$, $\{T\}$ или $\{F,T\}$. Чтобы получить $-_t x$, мы заменяем эти значения по следующим правилам:

$\varnothing$ заменяется на $\{T\}$;
$\{T\}$ заменяется на $\varnothing$;
$\{F\}$ заменяется на $\{F,T\}$;
$\{F,T\}$ заменяется на $\{F\}$.

Иными словами, в каждом элементе из множества $\mathbf{4}$, встречающемся в $P^n(\mathbf{4})$, операция $-_t$ удаляет *классическое* значение T там, где оно имеет вхождение, и вставляет его там, где оно отсутствует. Так определенная операция очевидным образом сохраняет неизменными информационный и f-логический порядки, но обращает t-логический порядок. Кроме того, из определения ясно, что $-_t-_t\, x = x$.

Операция f-инверсии определяется аналогично по следующим правилам:

$$\varnothing \text{ заменяется на } \{F\};$$
$$\{F\} \text{ заменяется на } \varnothing;$$
$$\{T\} \text{ заменяется на } \{F,T\};$$
$$\{F,T\} \text{ заменяется на } \{T\}.$$

Теорема доказана.

В дальнейшем мы ограничиваем наше рассмотрение только трирешетками с t-инверсией и f-инверсией (теорема 3 позволяет сделать это без какого-либо ущерба для общности анализа).

Ясно, что наибольшим элементом $\mathbf{1}_t$ решетки M_3^n относительно порядка $\leq_t$ ($\mathbf{1}_f$ относительно $\leq_f$) является $P^{n-1}(\mathbf{4})^t$ ($P^{n-1}(\mathbf{4})^f$), а наименьшим элементом $\mathbf{0}_t$ решетки M_3^n относительно порядка $\leq_t$ ($\mathbf{0}_f$ относительно $\leq_f$) является $P^{n-1}(\mathbf{4})^{-t}$ ($P^{n-1}(\mathbf{4})^{-f}$). Поскольку $\mathbf{0}_t \leq_t -_t\mathbf{1}_t$, а также в силу того, что $\mathbf{0}_t \leq_t -_t\mathbf{1}_t \Leftrightarrow \mathbf{1}_t \leq_t -_t\mathbf{0}_t$, имеем $\mathbf{1}_t = -_t\mathbf{0}_t$. Кроме того, $\mathbf{0}_t = -_t\mathbf{1}_t$, $\mathbf{1}_f = -_f\mathbf{0}_f$ и $\mathbf{0}_f = -_f\mathbf{1}_f$.

Заметим также, что для операций $-_t$ и $-_f$ выполняются законы Де Моргана относительно $\cap_t$ (соответственно, $\cap_f$) и $\cup_t$ ($\cup_f$).

Лемма 1. (a) Пусть x является t-позитивным. Тогда

1. $x \in (y \cap_t z) \Leftrightarrow x \in y$ и $x \in z$;
2. $x \in (y \cup_t z) \Leftrightarrow x \in y$ или $x \in z$.

(b) Пусть x является t-негативным. Тогда

1. $x \in (y \cap_t z) \Leftrightarrow x \in y$ или $x \in z$;
2. $x \in (y \cup_t z) \Leftrightarrow x \in y$ и $x \in z$.

Доказательство. (a) 1. $\Rightarrow$: Непосредственно следует из определений операции решеточного пересечения и отношения $\leq_t$.

$\Leftarrow$: Допустим, $x \in y$ и $x \in z$, но $x \notin (y \cap_t z)$. Пусть $X := y^{-t} \cup z^{-t}$ (здесь и далее $\cup$ и $\cap$ обозначают стандартные теоретико-множественные операции объединения и пересечения). Тогда $\{x\} \cup X \leq_t y$ и $\{x\} \cup X \leq_t z$, однако неверно, что $\{x\} \cup X \leq_t y \cap_t z$. Следовательно, $y \cap_t z$ не является точной нижней гранью. Противоречие.

(a) 2. $\Leftarrow$: Непосредственно следует из определений операции решеточного объединения и отношения $\leq_t$.

$\Rightarrow$: Допустим, $x \in (y \cup_t z)$, но $x \notin y$ и $x \notin z$. Тогда $y \leq_t (y \cup z)^t$ и $z \leq_t (y \cup z)^t$, однако неверно, что $y \cup_t z \leq_t (y \cup z)^t$. Следовательно, $y \cup_t z$ не является точной верхней гранью. Противоречие.

(b) 1. $\Leftarrow$: Непосредственно следует из определений операции решеточного пересечения и отношения $\leq_t$.

$\Rightarrow$: Допустим, $x \in (y \cap_t z)$, но $x \notin y$ и $x \notin z$. Тогда $(y \cup z)^{-t} \leq_t y$ и $(y \cup z)^{-t} \leq_t z$, однако неверно, что $(y \cup z)^{-t} \leq_t y \cap_t z$. Следовательно, $y \cap_t z$ не является точной нижней гранью. Противоречие.

(b) 2. $\Rightarrow$: Непосредственно следует из определений операции решеточного объединения и отношения $\leq_t$.

$\Leftarrow$: Допустим, $x \in y$ и $x \in z$, но $x \notin (y \cup_t z)$. Определим теперь $X := y^t \cup z^t$. Тогда $y \leq_t \{x\} \cup X$ и $z \leq_t \{x\} \cup X$, однако неверно, что $y \cup_t z \leq_t \{x\} \cup X$. Следовательно, $y \cup_t z$ не является точной верхней гранью. Противоречие. Лемма доказана.

Лемма 2. Для любого $P^n(\mathbf{4})$:

(1) $x^{-t} \neq \varnothing \Leftrightarrow (-_t x)^t \neq \varnothing$; (2) $x^t \neq \varnothing \Leftrightarrow (-_t x)^{-t} \neq \varnothing$.

Доказательство. Прежде всего заметим, что $-_t\varnothing = \varnothing$. Действительно, имеем: $\varnothing \subseteq -_t\varnothing \Leftrightarrow \varnothing \leq_t -_t\varnothing \Leftrightarrow -_t\varnothing \leq_t -_t-_t\varnothing \Leftrightarrow -_t\varnothing \leq_t \varnothing \Leftrightarrow -_t\varnothing \subseteq \varnothing$.

(1) $\Rightarrow$: Допустим, $y \in x^{-t}$, но $(-_t x)^t = \varnothing$. Тогда $-_t x \leq_t (-_t x)^t$. Поскольку $(-_t x)^t = \varnothing = -_t\varnothing$, то имеем $-_t x \leq_t -_t\varnothing$, и отсюда $\varnothing \leq_t x$, что противоречит нашему допущению.

$\Leftarrow$: Допустим, $y \in (-_t x)^t$, но $x^{-t} = \varnothing$. Тогда $\varnothing \leq_t x$, а значит, $-_t x \leq_t \varnothing$, что противоречит допущению.

(2) $\Rightarrow$: Допустим, $y \in x^t$, но $(-_t x)^{-t} = \varnothing$. Тогда $(-_t x)^{-t} \leq_t -_t x$. Следовательно, $x \leq_t \varnothing$, что противоречит нашему допущению.

$\Leftarrow$: Допустим, $y \in (-_t x)^{-t}$, но $x^t = \varnothing$. Тогда $x \leq_t -_t\varnothing$, а значит, $\varnothing \leq_t -_t x$, что противоречит допущению. Лемма доказана.

Мы рассматриваем языки L_t, L_f, L_{tf}, определенные в предыдущем разделе. Введем функцию *n-оценки* v^n, которая представляет собой отображение множества атомарных высказываний соответствующего языка на множество $P^n(\mathbf{4})$. Эта функция распространяется на все высказывания языка посредством определения 6 (с заменой v^{16} на v^n).

Сформулируем два ключевых отношения *n-следования* (репрезентирующих *t*–логический и *f*–логический порядки):

Определение 13. $A \models_t^n B =_{\mathrm{df}} \forall v^n(v^n(A) \leq_t v^n(B))$.

Определение 14. $A \models_f^n B =_{\mathrm{df}} \forall v^n(v^n(B) \leq_f v^n(A))$.

Нашей ближайшей задачей будет доказательство того факта, что, если мы ограничиваем сферу действия отношения $\models_t^n$ языком L_t, то корректной аксиоматизацией этого отношения остается все та же система $\mathbf{FDE}_t^t$. Для этого нам потребуется:

Лемма 3. Следующие два утверждения являются эквивалентными для всех $A, B \in L_t$:

(1) $\forall v^n \forall y(y \in v^n(A)^t \Rightarrow y \in v^n(B)^t)$;

(2) $\forall v^n \forall y (y \in v^n(B)^{-t} \Rightarrow y \in v^n(A)^{-t})$.

Доказательство. Для доказательства леммы мы определяем для имеющейся оценки v^n двойственную оценку v^{n*}. Для каждого $y \in P^{n-1}(\mathbf{4})^{-t}$, пусть g_y есть отображение из $P^{n-1}(\mathbf{4})^{-t}$ на $P^{n-1}(\mathbf{4})^t$, а для каждого $y \in P^{n-1}(\mathbf{4})^t$, пусть f_y: $P^{n-1}(\mathbf{4})^t \rightarrow P^{n-1}(\mathbf{4})^{-t}$. В силу леммы 2 мы можем выбрать такие g_y и f_y, что $g_y(y) \in x^{-t}$ т.т.т. $y \in -_t x$ и $f_y(y) \in x^{-t}$ т.т.т. $y \in -_t x$. Итак, для любой оценки v^n мы определяем:

$g_y(y) \in v_y^{n*}(p) \Leftrightarrow y \notin v^n(p)$

$x \in v_y^{n*}(p) \Leftrightarrow f_x(x) \in v_y^{n*}(p)$ (где $x \in P^{n-1}(\mathbf{4})^t$ и $x \neq g_y(y)$);

$f_y(y) \in v_y^{n*}(p) \Leftrightarrow y \notin v^n(p)$

$x \in v_y^{n*}(p) \Leftrightarrow g_x(x) \in v_y^{n*}(p)$ (где $x \in P^{n-1}(\mathbf{4})^{-t}$ и $x \neq f_y(y)$).

Необходимо показать, что v^{n*} распространяется на любое высказывание $A \in L_t$. Если $x \neq g_y(y)$ и $x \neq f_y(y)$, это следует из следующих оставшихся трех случаев:

Случай 1: $A = \sim_t B$.

$g_y(y) \in v_y^{n*}(\sim_t B) \Leftrightarrow g_y(y) \in -_t v_y^{n*}(B) \Leftrightarrow f_{g_y(y)}(g_y(y)) \in v_y^{n*}(B) \Leftrightarrow g_y(y) \notin v^n(B) \Leftrightarrow y \notin -_t v^n(B) \Leftrightarrow y \notin v^n(\sim_t B)$.

Для $f_y(y)$ доказательство аналогично.

Случай 2: $A = B \wedge_t C$.

Нужно показать, что (a) $g_y(y) \in v_y^{n*}(B \wedge_t C) \Leftrightarrow y \notin v^n(B \wedge_t C)$ и (b) $f_y(y) \in v_y^{n*}(B \wedge_t C) \Leftrightarrow y \notin v^n(B \wedge_t C)$. (a) $\Leftarrow$: Допустим, $g_y(y) \notin v_y^{n*}(B \wedge_t C)$ и $y \notin v^n(B \wedge_t C)$. Поскольку $v^n(B)^{-t} \subseteq (v^n(B) \cap_t v^n(C))^{-t}$ и $v^n(C)^{-t} \subseteq (v^n(B) \cap_t v^n(C))^{-t}$, то $y \notin v^n(B)$ и $y \notin v^n(C)$. Из леммы 1 и того факта, что $g_y(y) \notin v_y^{n*}(B) \cap_t v_y^{n*}(C)$ получаем $g_y(y) \notin v_y^{n*}(B)$ или $g_y(y) \notin v_y^{n*}(C)$. Отсюда $y \in v^n(B)$ или $y \in v^n(C)$. Противоречие. $\Rightarrow$: Используем индуктивное предположение и лемму 1. (b): Доказательство аналогично.

Случай 3: $A = B \vee_t C$. Доказательство аналогично случаю 2.

Теперь можем завершить доказательство леммы. (1) $\Rightarrow$ (2): Допустим (1) выполняется, и в то же время существуют t-негативный элемент y и оценка v^n такие, что (a) $y \in v^n(B)$ но (b) $y \notin v^n(A)$. В силу (a) и определения v_y^{n*} имеем $g_y(y) \notin v_y^{n*}(B)$, а по (1) и (b) получаем $g_y(y) \in v_y^{n*}(B)$. Противоречие. (2) $\Rightarrow$ (1): Доказательство аналогично. Лемма доказана.

Следствие 1. Для любых $A, B \in L_t$:

$$A \models_t^n B \Leftrightarrow \forall v^n (x \in v^n(A)^t \Rightarrow x \in v^n(B)^t).$$

Доказательство. В силу предыдущей леммы данное утверждение эквивалентно следующему: для любых A, $B \in L_t$, если и только если выполняются условия (1) и (2) леммы 3. Имеем:

$A \models_t^n B \Leftrightarrow \forall v^n(v^n(A) \leq_t v^n(B)) \Leftrightarrow \forall v^n(v^n(A)^t \subseteq v^n(B)^t$ и $v^n(B)^{-t} \subseteq v^n(A)^{-t}) \Leftrightarrow$ (1) и (2) леммы 3.

Теперь можем установить полноту системы $\mathbf{FDE}_t^t$ относительно $\models_t^n$ для языка L_t.

Теорема 4. (*Непротиворечивость*)

Для любых $A, B \in L_t$, $A \vdash_t B \Rightarrow A \models_t^n B$.

Доказательство. Необходимо показать, что для всех схем аксиом выполняется $\forall v^n(v^n(A) \leq_t v^n(B))$ и что это свойство сохраняется при применении любого правила вывода. Это – несложное упражнение, которое любознательный читатель вполне может выполнить самостоятельно. Для примера рассмотрим правило r_t4. Допустим $v^n(A) \leq_t v^n(B)$, но $v^n(\sim_t B) >_t v^n(\sim_t A)$. Тогда $v^n(\sim_t B) >_t v^n(\sim_t A) \Leftrightarrow -_t v^n(\sim_t A) >_t -_t v^n(\sim_t B) \Leftrightarrow v^n(\sim_t\sim_t A) >_t v^n(\sim_t\sim_t B) \Leftrightarrow v^n(A) >_t v^n(B)$. Противоречие. Теорема доказана.

Для доказательства полноты построим простую каноническую модель. Как обычно, *теория* есть множество высказываний, замкнутых по отношению $\vdash_t$ (т.е. для любой теории α, если $A \in \alpha$ и $A \vdash_t B$, то $B \in \alpha$) и относительно операции $\wedge_t$ (если $A \in \alpha$ и $B \in \alpha$, то $A \wedge_t B \in \alpha$). Теория называется *простой*, если и только если для нее выполняется дизъюнктивное свойство: если $A \vee_t B \in \alpha$, то $A \in \alpha$ или $B \in \alpha$. Для любой теории выполняется лемма Линденбаума, которую мы здесь приводим без доказательства:

Лемма 4. Для любых $A, B \in L_t$, если неверно, что $A \vdash_t B$, то существует простая теория α, такая что $A \in \alpha$ и $B \notin \alpha$.

Пусть α есть простая теория. Следующим образом определим каноническую n-оценку $v_y^{n\tau}$, используя функции g_y и f_y из леммы 3:

$g_y(y) \in v_y^{n\tau}(p) \Leftrightarrow p \in \alpha$

$x \in v_y^{n\tau}(p) \Leftrightarrow f_x(x) \in v_y^{n\tau}(p)$ (где $x \in P^{n-1}(\mathbf{4})^t$ и $x \neq g_y(y)$);

$f_y(y) \in v_y^{n\tau}(p) \Leftrightarrow \sim_t p \in \alpha$

$x \in v_y^{n\tau}(p) \Leftrightarrow g_x(x) \in v_y^{n\tau}(p)$ (где $x \in P^{n-1}(\mathbf{4})^{-t}$ и $x \neq f_y(y)$).

Лемма 5. Каноническая оценка $v_y^{n\tau}$ может быть распространена на любое высказывание $A \in L_t$.

Доказательство. Если $x \neq g_y(y)$ и $x \neq f_y(y)$, лемма следует из следующих оставшихся трех случаев:

Случай 1: $A = \sim_t B$.

$f_y(y) \in v_y^{n\tau}(\sim_t B) \Leftrightarrow f_y(y) \in -_t v_y^{n\tau}(B) \Leftrightarrow g_{fy(y)}(f_y(y)) \in v_y^{n\tau}(B) \Leftrightarrow B \in \alpha \Leftrightarrow \sim_t\sim_t B \in \alpha$.

Для $g_y(y)$ доказательство аналогично.

Случай 2: $A = B \wedge_t C$.

Нужно показать, что (a) $g_y(y) \in v_y^{n\tau}(B \wedge_t C) \Leftrightarrow B \wedge_t C \in \alpha$ и (b) $f_y(y) \in v_y^{n\tau}(B \wedge_t C) \Leftrightarrow \sim_t(B \wedge_t C) \in \alpha$. (b) Допустим, $\sim_t(B \wedge_t C) \in \alpha$. В силу законов Де Моргана, простоты теории α и ее замкнутости по отношению $\vdash_t$, это имеет место тогда и только тогда, когда $\sim_t B \in \alpha$ или $\sim_t C \in \alpha$. По индуктивному предположению, последнее выполняется если и только если $f_y(y) \in v_y^{n\tau}(B)$ или $f_y(y) \in v_y^{n\tau}(C)$, что в свою очередь, в силу леммы 1, имеет место тогда и только тогда, когда $f_y(y) \in v_y^{n\tau}(B) \cap_t v_y^{n\tau}(C) \Leftrightarrow f_y(y) \in v_y^{n\tau}(B \wedge_t C)$. (a): Доказательство аналогично.

Случай 3: $A = B \vee_t C$. Доказательство аналогично случаю 2. Лемма доказана.

Теорема 5. (*Полнота*) Для любых $A, B \in L_t$, $A \models_t^n B \Rightarrow A \vdash_t B$.

Доказательство. Допустим, $A \models_t^n B$ и неверно, что $A \vdash_t B$. Тогда, по лемме Линденбаума, существует такая простая теория α, что $A \in \alpha$ и $B \notin \alpha$. Тогда $g_y(y) \in v_y^{n\tau}(A)$ и $g_y(y) \notin v_y^{n\tau}(B)$, а значит существует оценка v^n такая, что $v^n(A)^t \subseteq v^n(B)^t$ не имеет места. Противоречие. Теорема доказана.

Доказательство того факта, что корректная аксиоматизация отношения $\models_f^n$ для языка L_f достигается посредством системы $\mathbf{FDE}_f^f$, полностью двойствено вышеприведенному.

Итак, мы показали, что если мы не выходим за рамки стандартного языка КДО, то логика компьютерной сети *любой степени сложности* (любого уровня иерархической организации) есть первопорядковый (относительно импликации) фрагмент релевантных систем **E** и **R** – система тавтологических следствий Андерсона и Белнапа. На наш взгляд, этот результат имеет важное значение, поскольку он подтверждает особое место релевантной логики вообще и системы $\mathbf{E}_{fde}$ в частности среди многочисленных неклассических логик современности[8].

Завершая статью, выскажем уверенность в том, что новые интересные результаты ожидают нас на путях построения логик истинности и ложности для комбинированного языка L_{tf}, а также при обогащении этого языка новыми логическими связками, и прежде всего связкой импликации.

ЛИТЕРАТУРА

1. *Белнап Н.* Как нужно рассуждать компьютеру // *Н. Белнап, Т. Стил.* Логика вопросов и ответов. М.: Прогресс, 1981. С. 208-239. (Оригинал:

[8] Как тут не вспомнить знаменитую идею Е.К. Войшвилло о релевантной логике как особом *этапе* в развитии логики (см., напр. [5])!

Contemporary Aspects of Philosophy. Stocksfield: Oriel Press Ltd., 1977. P. 30-55.)

2. *Белнап Н.* Об одной полезной четырехзначной логике // *Н. Белнап, Т. Стил.* Логика вопросов и ответов. М.: Прогресс, 1981. С. 240-267. (Оригинал: *Belnap N.* A useful four-valued logic // J.M. Dunn and G. Epstein (eds.). Modern Uses of Multiple-Valued Logic. Dordrecht: D. Reidel Publish. Co., 1977. P. 8-37.)
3. *Белнап Н., Стил Т.* Логика вопросов и ответов. М.: Прогресс, 1981.
4. *Войшвилло Е.К.* Семантическая информация. Понятия экстенсиональной и интенсиональной информации // Кибернетика и современное научное познание. М.: Наука, 1976. С. 165-179.
5. *Войшвилло Е.К.* Релевантная логика как этап развития логики, ее философское и методологическое значение // Логические исследования. Вып. 1. М.: Наука, 1993. С. 143-155.
6. *Зайцев Д.В., Шрамко Я.В.* Логическое следование и выделенные значения // Логические исследования. Вып. 11. М.: Наука, 2004. С. 126-137.
7. *Смирнова Е.Д.* Семантика с истинностными провалами, пресыщенными оценками и понятие логического следования // Интенсиональные логики и логическая структура теории. Тезисы докладов IV советско-финского коллоквиума по логике. Телави, 1985.
8. *Шрамко Я.В.* Американский план для интуиционистской логики 2: обобщенные интуиционистские модели // Online Journal Logical Studies. No. 5; 2000, ISBN 5-85593-141-2 (http://www.logic.ru).
9. *Шрамко Я.В.* Обобщенные истинностные значения: решетки и мультирешетки // Логические исследования. Вып. 9. М.: Наука, 2002. С. 264-291.
10. *Anderson A.R.* and *N.D. Belnap, Jr.* Entailment The Logic of Relevance and Necessity. Vol. I. Princeton University Press, 1975.
11. *Anderson A.R., N.D. Belnap, Jr.*, and *J.M. Dunn.* Entailment The Logic of Relevance and Necessity. Vol. II. Princeton University Press, 1992.
12. *Arieli O.* and *Avron A.* Reasoning with logical bilattices // Journal of Logic, Language and Information. 1996. Vol. 5. P. 25-63.
13. *Dunn J.M.* Intuitive semantics for first-degree entailment and 'coupled trees' // Philosophical Studies. 1976. Vol. 29. P. 149-168.
14. *Dunn J.M.* Relevance logic and entailment // D.M. Gabbay and F. Guenter (eds.) Handbook of Philosophical Logic. Vol. III. Dordrecht: D. Reidel Publishing Company, 1986. P. 117-224.
15. *Dunn J.M.* Partiality and its dual // Studia Logica. 2000. Vol. 66. P. 225-256.
16. *Fitting M.* Bilattices and the theory of truth // Journal of Philosophical Logic. 1989. Vol. 18. P. 225-256.
17. *Ginsberg M.* Multi-valued logics // Proceedings of AAAI-86, Fifth National Conference on Artificial Intellegence. Los Altos: Morgan Kaufman Publishers, 1986. P. 243-247.

18. *Ginsberg M.* Multi-valued logics: a uniform approach to reasoning in AI // Computer Intelligence. 1988. Vol. 4. P. 256-316.
19. *Meyer R.K.* Why I Am Not a Relevantist. Research paper. No. 1. Australian National University. Logic Group. Research School of the Social Sciences, Canberra, 1978.
20. *Meyer R.K.*, *Martin E.P.* Logic on the australian plan // The Journal of Philosophical Logic. 1986. Vol. 15. P. 305-332.
21. *Routley R.*, *Routley V.* Semantics of first-degree entailment // Nous. 1972. Vol. 3. P. 335-359.
22. *Shramko Y.* Die logische Wahrheitswerteontologie // Bente Christiansen und Uwe Scheffler (eds.). Was folgt. Themen zu Wessel. Berlin: Logos-Verlag, 2004. S. 149-169.
23. *Shramko Y.*, *Dunn J.M.*, *Takenaka T.* The trilattice of constructive truth values // Journal of Logic and Computation. 2001. Vol. 11. P. 761-788.
24. *Shramko Y.*, *Wansing H.* Some useful 16-valued logics: how a computer network should think // Journal of Philosophical Logic. 2005. Vol. 34. P. 121-153.
25. *Wansing H.* Short dialogue between M (Mathematician) and P (Philosopher) on multi-lattices // Journal of Logic and Computation. 2001. Vol. 11. P. 759-760.

В.Л. Васюков

НЕ-ФРЕГЕВСКИЙ ПУТЕВОДИТЕЛЬ ПО ГУССЕРЛЕВСКИМ И МЕЙНОНГОВСКИМ ДЖУНГЛЯМ. II*

Abstract. *The paper is a continuation of the non-fregean version of the guide to Husserl's and Meinong's Jungles from* [5]. *Here a brief survey of the realm of intentional objects from the point of view of sense-situational formal ontology is proposed where as the main tool the various extensions of so-called metaphorical (non-non-fregean and non-suszkean) logics are exploited.*

1. Введение

Данная статья представляет собой продолжение разработки версии формальной феноменологии, основанной на не-фрегевской логике (см. [5]). Однако основным инструментом этой части исследования будет не не-фрегевская логика (см. [6]), а метафорические (не-не-фрегевская и не-сушковская) логики, построенные автором как дальнейшее развитие подхода Р. Сушко, основанного на конструктивной критике принципа Г. Фреге, рассматривавшего в качестве референта высказываний их истинностные значения (в [3] приводится содержательное обоснование критики и развития автором подхода Сушко, в [4] дается формальная экспликация). Основные системы метафорической логики (не-фрегевской логики смысла) выглядят следующим образом.

Систему **R-NNFL** (ограниченной не-не-фрегевской логики – restricted non-non-fregean logic) можно описать следующим образом. Логическими константами **R-NNFL** будут $\neg$, $\wedge$, $\vee$, $\rightarrow$, $\leftrightarrow$, $\equiv$ (кореферентность), $\cong$ (подобие по смыслу), $\forall$, $\exists$. Под аксиомой будем понимать подстановочный частный случай любой из схем аксиом классической логики или любой из следующих схем:

1. $x = x$
2. $x = y \rightarrow y = x$
3. $(x = y \wedge y = z) \rightarrow (x = z)$
4. $(x_1 = y_1,\ldots,x_{s(i)} = y_{s(i)}) \rightarrow (R_i(y_1,\ldots,y_{s(i)}) \rightarrow R_i(x_1,\ldots,x_{s(i)}))$, $i = 1,\ldots,m$

A1. $A \equiv A$

A2. $(A \equiv B) \rightarrow (\varphi(B) \equiv \varphi(A))$ (*где* $\varphi(A)$, $\varphi(B)$ *– любые формулы, такие, что* $\varphi(A)$ *получается из* $\varphi(B)$ *замещением некоторых вхождений A в* $\varphi(A)$, *на B*)

---

* Работа выполнена при поддержке РГНФ, грант № 03-03-00186а.

A3. $x = y \to (A(x) \equiv A(y))$ *(где $A(x)$, $A(y)$ – любые формулы, такие, что x и y свободны в них и $A(y)$ получается из $A(x)$ замещением некоторых вхождений x в $A(x)$ на y).*

A4. $(\varphi(A/p)) \cong \varphi(B/p)) \to (B \cong A)$ *(где φ не является противоречивой формулой или пропозициональной переменной, переменная p должна явно фигурировать в φ и $\varphi(B/p)$ есть формула, получающаяся из формулы φ подстановкой в φ формулы B вместо некоторых вхождений переменной p)*

A5. $(A \equiv A') \to (A' \cong A)$

A6. $(A' \cong A) \to (A \leftrightarrow A')$

Заметим сразу, что A4 влечет

$$(A \cong B) \to (B \cong A)$$

и отметим нетранзитивность связки $\cong$ в общем случае и транзитивность связки $\equiv$. Последнее влечет за собой отсутствие гарантии того, что, заменяя часть предложения выражением, имеющим тот же самый смысл, мы сохраняем ситуацию, описываемую исходным предложением. Это будет иметь место, только если эти части будут вдобавок кореферентны. В качестве относительного противоядия предлагается рассматривать формулу

$$(A \cong B) \cong (B \cong C) \to (A \cong C)$$

(следствие вышеприведенной теоремы и A4) в качестве утверждения о специфической «транзитивности» $\cong$.

Система чисто метафорической (не-сушковской) логики **R-NSL** может быть получена путем отбрасывания аксиом, содержащих связку тождества и замены отношения равенства на отношение подобия, определяемое как

$$\forall x \forall y \exists F(x \div y \to (F(x) \leftrightarrow F(y))$$

(где $\div$ означает отношение подобия). Аксиоматика подобной системы выглядит следующим образом:

5. $x \div x$
6. $x \div y \to y \div x$
7. $(R_i(y_1,\ldots,y_{s(i)}) \to R_i(x_1,\ldots,x_{s(i)})) \to (x_1 \div y_1,\ldots,x_{s(i)} \div y_{s(i)}),\ i = 1,\ldots,m$

B1. $A \cong A$

B2. $(\varphi(A/p)) \cong \varphi(B/p)) \to (B \cong A)$ *(где φ не является противоречивой формулой или пропозициональной переменной, переменная p должна явно фигурировать в φ и $\varphi(B/p)$ есть формула, получающаяся из формулы φ подстановкой в φ формулы B вместо некоторых вхождений переменной p)*

B3. $(A(x/c)) \cong A(y/c)) \to x \div y$ *(где $A(x/c)$, $A(y/c)$ – любые формулы, такие, что x и y свободны в них, c явно фигурирует в A и $A(y/c)$ получается из $A(x/c)$ замещением некоторых вхождений x в $A(x/c)$ на y).*

B4. $(A' \cong A) \to (A \leftrightarrow A')$

Модификацией системы **R-NFL** является система **R-NFL**$^{\Rightarrow}$ с предложенной автором в работе [2] не-фрегевской связкой $\Rightarrow$, когда $A \Rightarrow B$ означает «A (референциально) приводит к B». В этом случае речь идет о примитивном отношении между референтами-ситуациями (отношении вовлечения), достаточном для большинства целей данного исследования. Наряду с этим вводится новая связка $\sqsubseteq$ ($x \sqsubseteq y$ читается «x ситуационно влечет y»), «расщепляющая» связку = и позволяющая преодолеть трудности с не-фрегевской аксиомой A3. Аксиомы **R-NFL**$^{\Rightarrow}$ выглядят следующим образом:

8. $x \sqsubseteq x$

9. $(x \sqsubseteq y \wedge y \sqsubseteq z) \rightarrow (x \sqsubseteq z)$

10. $(x_1 \sqsubseteq y_1,\ldots,x_{s(i)} \sqsubseteq y_{s(i)}) \rightarrow (R_i(y_1,\ldots,y_{s(i)}) \rightarrow R_i(x_1,\ldots,x_{s(i)}))$, $i = 1,\ldots,m$

Ax1. $A \Rightarrow A$

Ax2. $(A \Rightarrow B) \rightarrow (\varphi(B) \Rightarrow \varphi(A))$ (*где* $\varphi(A)$, $\varphi(B)$ – *любые формулы, такие, что* $\varphi(A)$ *получается из* $\varphi(B)$ *замещением некоторых вхождений* A *в* $\varphi(A)$, *на* B)

Ax3. $x \sqsubseteq y \rightarrow (A(x) \Rightarrow A(y))$ (*где* $A(x)$, $A(y)$ – *любые формулы, такие, что* x *и* y *свободны в них и* $A(y)$ *получается из* $A(x)$ *замещением некоторых вхождений* x *в* $A(x)$ *на* y)

Ax4. $(B \Rightarrow A) \rightarrow (A \rightarrow B)$

Соответствующей модификацией системы **R-NNFL** в этом случае будет система **R-NNFL**$^{\Rightarrow}$ с новой дополнительной связкой $\underline{\Rightarrow}$ *вовлечения по смыслу*, когда $A \underline{\Rightarrow} B$ означает «A референциально в некотором смысле приводит к B» и со следующими аксиомами:

11. $x \sqsubseteq x$

12. $(x \sqsubseteq y \wedge y \sqsubseteq z) \rightarrow (x \sqsubseteq z)$

13. $(x_1 \sqsubseteq y_1,\ldots,x_{s(i)} \sqsubseteq y_{s(i)}) \rightarrow (R_i(y_1,\ldots,y_{s(i)}) \rightarrow R_i(x_1,\ldots,x_{s(i)}))$, $i = 1,\ldots,m$

Ax1. $A \Rightarrow A$

Ax2. $(A \Rightarrow B) \rightarrow (\varphi(B) \Rightarrow \varphi(A))$ (*где* $\varphi(A)$, $\varphi(B)$ – *любые формулы, такие, что* $\varphi(A)$ *получается из* $\varphi(B)$ *замещением некоторых вхождений* A *в* $\varphi(A)$, *на* B)

Ax3. $(\varphi(A/p)) \underline{\Rightarrow} \varphi(B/p)) \rightarrow (B \underline{\Rightarrow} A)$ (*где* φ *не является противоречивой формулой или пропозициональной переменной, переменная* p *должна явно фигурировать в* φ *и* $\varphi(B/p)$ *есть формула, получающаяся из формулы* φ *подстановкой в* φ *формулы* B *вместо некоторых вхождений переменной* p)

Ax4. $x \sqsubseteq y \rightarrow (A(x) \Rightarrow A(y))$ (*где* $A(x)$, $A(y)$ – *любые формулы, такие, что* x *и* y *свободны в них и* $A(y)$ *получается из* $A(x)$ *замещением некоторых вхождений* x *в* $A(x)$ *на* y)

Ax5. $(A \Rightarrow B) \rightarrow (A \underline{\Rightarrow} B)$

Ax4. $(B \underline{\Rightarrow} A) \rightarrow (A \rightarrow B)$

Наконец, аналогичная модификация системы **R-NSL** представляет собой систему **R-NSL**$^{\Rightarrow}$ с новой связкой $\lhd$ *вовлечения с предвзятой точки зрения*, когда $x \unlhd y$ читается «x ситуационно влечет y с предвзятой точки зрения».

14. $x \unlhd x$

15. $(x_1 \unlhd y_1,\ldots,x_{s(i)} \unlhd y_{s(i)}) \rightarrow (R_i(y_1,\ldots,y_{s(i)}) \rightarrow R_i(x_1,\ldots,x_{s(i)}))$, $i = 1,\ldots,m$

Bx1. $A \underline{\Rightarrow} A$

Bx2. $(\varphi(A/p)) \underline{\Rightarrow} \varphi(B/p)) \rightarrow (B \underline{\Rightarrow} A)$ (*где* φ *не является противоречивой формулой или пропозициональной переменной, переменная* p *должна явно фигурировать в* φ *и* $\varphi(B/p)$ *есть формула, получающаяся из формулы* φ *подстановкой в* φ *формулы* B *вместо некоторых вхождений переменной* p)

Bx3. $(A(x) \underline{\Rightarrow} A(y)) \rightarrow x \unlhd y$ (*где* $A(x)$, $A(y)$ – *любые формулы, такие, что* x *и* y *свободны в них и* $A(y)$ *получается из* $A(x)$ *замещением некоторых вхождений* x *в* $A(x)$ *на* y)

Bx4. $(A' \underline{\Rightarrow} A) \rightarrow (A \rightarrow A')$

В системе **R-NFL**$^{\Rightarrow}$ можно определить кореферентность и равенство как

D1. $A \equiv B =_{def} (A \Rightarrow B) \wedge (B \Rightarrow A)$

D2. $x = y =_{def} (x \sqsubseteq y) \wedge (y \sqsubseteq x)$

и аналогично в системе **R-NNFL**$^{\Rightarrow}$ можно определить подобие по смыслу и подобие как

D3. $A \cong B =_{def} (A \underline{\Rightarrow} B) \wedge (B \underline{\Rightarrow} A)$

D4. $x \div y =_{def} (x \unlhd y) \wedge (y \unlhd x)$

Помимо этого в **R-NNFL** можно определить *относительное равенство* $=_{(\text{-})}$, сделав это двумя способами (см. [4]):

D5. $x =_{\Phi} y =_{def} (\Phi \cong \psi \rightarrow (\psi(x) \leftrightarrow \psi(y)))$

D6. $x =_{\Phi} y =_{def} (\Phi(x) \wedge \Phi(y) \wedge (\Phi \cong \psi \rightarrow (\psi(x) \leftrightarrow \psi(y))))$

и *относительную кореференциальность* $\equiv_{(\text{-})}$ (тоже двумя способами):

D7. $A \equiv_{\Phi} B =_{def} (\Phi \cong \psi \rightarrow (\psi(A) \equiv \psi(B)))$

D8. $A \equiv_{\Phi} B =_{def} (\Phi(A) \wedge \Phi(B) \wedge (\Phi \cong \psi \rightarrow (\psi(A) \equiv \psi(B))))$,

где ограничения, накладываемые на $\psi(A)$, $\psi(B)$, такие же, как и в А2.

Наконец, можно определить *относительное референциальное вовлечение* и *относительное ситуационное вовлечение* как

D7. $A \Rightarrow_{\Phi} B =_{def} (\Phi \underline{\Rightarrow} \psi \rightarrow (\psi(A) \rightarrow \psi(B)))$

D8. $A \Rightarrow_{\Phi} B =_{def} (\Phi(A) \wedge \Phi(B) \wedge (\Phi \underline{\Rightarrow} \psi \rightarrow (\psi(A) \rightarrow \psi(B))))$

D9. $x \sqsubseteq_{\Phi} y =_{def} (\Phi \underline{\Rightarrow} \psi \rightarrow (\psi(x) \rightarrow \psi(y)))$

D10. $x \sqsubseteq_{\Phi} y =_{def} (\Phi(x) \wedge \Phi(y) \wedge (\Phi \underline{\Rightarrow} \psi \rightarrow (\psi(x) \rightarrow \psi(y))))$

2. Метафорическая онтология смысла

Онтологические обязательства метафорической логики заявляют о себе при построении ситуационной семантики для приведенных выше логических исчислений. Возникающая при этом метафорическая онтология выглядит следующим образом.

В качестве универсума принимается модель $\boldsymbol{M} = (\boldsymbol{U},\boldsymbol{R}_1,\ldots,\boldsymbol{R}_n)$, где $\boldsymbol{M}$ есть реляционная структура типа $(r(1),\ldots,r(s))$. Понятие ситуации в модельной структуре $\boldsymbol{M} = (\boldsymbol{U},\boldsymbol{R}_1,\ldots,\boldsymbol{R}_n)$ описывается следующим образом:

(s1) Положим $r(0) = 2$ и обозначим через $\boldsymbol{R}_0$ отношение тождества на $\boldsymbol{U}$. Пусть $i = 0,1,\ldots,s$ и пусть $\mathbf{a}_1,\ldots,\mathbf{a}_{r(i)}\in\mathbf{U}$. Тогда $(\boldsymbol{R}_i,\mathbf{a}_1,\ldots,\mathbf{a}_{r(i)})$ и (**не**-$\boldsymbol{R}_i,\mathbf{a}_1,\ldots,\mathbf{a}_{r(i)}$) являются элементарными ситуациями в $\boldsymbol{M}$.

(s2) Если для каждого $t\in T$ Σ_t есть непустое множество элементарных ситуаций в $\boldsymbol{M}$, то $\{\Sigma_t: t\in T\}$ является ситуацией в $\boldsymbol{M}$.

(s3) Если S_1 и S_2 – ситуации в $\boldsymbol{M}$, то $(=,S_1,S_2)$ и $(\neq,S_1,S_2)$ являются элементарными ситуациями в $\boldsymbol{M}$.

(s4) Ничто другое не является ни ситуацией, ни элементарной ситуацией.

Каждая (элементарная) ситуация $(\boldsymbol{R}_i,\mathbf{a}_1,\ldots,\mathbf{a}_{r(i)})$ представляет собой такую ситуацию, что $\boldsymbol{R}_i(\mathbf{a}_1,\ldots,\mathbf{a}_{r(i)})$. Аналогично ситуации (**не**-$\boldsymbol{R}_i,\mathbf{a}_1,\ldots,\mathbf{a}_{r(i)}$), $(=,S_1,S_2)$ и $(\neq,S_1,S_2)$ суть такие ситуации, что **не**-$\boldsymbol{R}_i(\mathbf{a}_1,\ldots,\mathbf{a}_{r(i)})$, $S_1 = S_2$ и $S_1 \neq S_2$ соответственно. Элементарная ситуация $(\boldsymbol{R}_i,\mathbf{a}_1,\ldots,\mathbf{a}_{r(i)})$ ((**не**-$\boldsymbol{R}_i,\mathbf{a}_1,\ldots,\mathbf{a}_{r(i)}$), $(=,S_1,S_2)$, $(\neq,S_1,S_2)$) имеет место или является фактом тогда и только тогда, когда $R_i(a_1,\ldots,a_{r(i)})$ (*не*-$R_i(a_1,\ldots,a_{r(i)})$, $S_1 = S_2$, $S_1 \neq S_2$ соответственно*.

Элементарные ситуации и ситуации имеют различный теоретико-множественный тип (поэтому ни одна элементарная ситуация не является ситуацией в строгом смысле этого слова). Поскольку же каждая элементарная ситуация σ однозначно соответствует ситуации $\{\{\sigma\}\}$, то элементарная ситуация σ отождествляется с $\{\{\sigma\}\}$.

Далее, каждое множество элементарных ситуаций Σ однозначно определяет ситуацию $\{\Sigma\}$. Будем говорить, что $\{\Sigma\}$ имеет место, или является фактом, если фактами являются все $\sigma\in\Sigma$. По условиям (s2) и (s4) для некоторого семейства $\{\Sigma_t: t\in T\}$ непустых множеств элементарных ситуаций $S = \{\Sigma_t: t\in T\}$, где S – некоторая произвольная ситуация. Будем говорить, что ситуация S имеет место, или является фактом, если и только если существует $t\in T$,

* Следует иметь в виду, что настоящее рассуждение ведется в метаязыке, а не в языке, что и объясняет запись (т.е. следует обращать внимание на различие между $\mathbf{a}_1,\ldots,\mathbf{a}_{(i)}$ и $a_1,\ldots,a_{(i)}$, $\boldsymbol{R}_1,\ldots,\boldsymbol{R}_s$ и $R_1,\ldots,R_s$ и т.д.).

такое, что $\{\Sigma_i\}$ есть факт (т.е. S можно рассматривать как некоторый вид «онтологической» дизъюнкции конъюнкций элементарных ситуаций).

Обозначим класс всех ситуаций из $\boldsymbol{M}$ посредством $\boldsymbol{S_M}$. Для каждого кардинального числа α $\boldsymbol{S_M}$ включает подкласс мощности α, отсюда $\boldsymbol{S_M}$ является действительным классом, а не множеством, если различать классы и множества.

Существенным моментом является то, что мы расширим наш язык за счет добавления имен a, a_1, a_2... для элементов универсума U из $\boldsymbol{M}$. Сами элементы, соответствующие a, a_1, a_2..., будем обозначать через $\mathbf{a}$, $\mathbf{a}_1$, $\mathbf{a}_2$... .

Полученный подобным образом универсум ничем не отличается от универсума не-фрегевской онтологии. Чтобы преобразовать не-фрегевскую онтологию в не-не-фрегевскую, нам, во-первых, придется (учитывая, что введение связки $\sqsubseteq$ приводит к требованию упорядоченности универсума модели и к условию: если $x \leq y$ и $y \leq x$, то $x = y$) заменить пункт (s3) на

(s3′) Если S_1 и S_2 – ситуации в $\boldsymbol{M}$, то $(\leq, S_1, S_2)$ и $(\textbf{не-}\leq, S_1, S_2)$ являются элементарными ситуациями в $\boldsymbol{M}$;

и, во-вторых, потребуется постулирование существования некоторого семейства отношений эквивалентности $(\Theta_i)_{i\in I}$ на $\boldsymbol{S_M}$, удовлетворяющего двум следующим условиям:

(a') $(\Theta_i)_{i\in I}$ совместимо с =, т.е. для любых $S_1, S_2 \in \boldsymbol{S_M}$ из $S_1 = S_2$ следует, что всегда найдется некоторое Θ_i (по крайней мере, одно) из $(\Theta_i)_{i\in I}$, такое, что $\Theta_i(S_1, S_2)$;

(b') $(\Theta_i)_{i\in I}$ совместимо с фактуальностью, т.е. отношение Θ_i определено либо на фактах, либо на не-фактах, нет никаких «смешанных» случаев;

(c') $(\Theta_i)_{i\in I}$ не тотально, т.е. всегда $\Theta_i \subset \boldsymbol{S_M} \times \boldsymbol{S_M}$ (и никогда не $\Theta_i = \boldsymbol{S_M} \times \boldsymbol{S_M}$).

Интуитивный смысл упорядоченности универсума модели объясняется с помощью экспликации мейнонговского типа: с каждым элементом универсума связано множество ситуаций, в которых он «участвует». Это предполагает существование функции $SD^{-1}: \mathbf{U} \rightarrow \boldsymbol{P}(\mathbf{S})$ из универсума во множество подмножеств ситуаций, когда $x \leq y$ влечет $SD^{-1}(x) \in SD^{-1}(y)$ и наоборот.

Если же рассматривать не-сушковскую онтологию, то вместо упорядоченности универсума модели следует говорить о заданности на нем отношения подобия (рефлексивного, симметричного, но нетранзитивного), заменяя пункт (s3′) на (s3″) Если S_1 и S_2 – ситуации в $\boldsymbol{M}$, то $(\approx, S_1, S_2)$ и $(\textbf{не-}\approx, S_1, S_2)$ являются элементарными ситуациями в $\boldsymbol{M}$

и постулируя существование некоторого семейства отношений подобия $(\Theta_i)_{i \in I}$ на $\boldsymbol{S_M}$, с соответствующей заменой пункта (d) на

(a') $(\Theta_i)_{i \in I}$ совместимо с $\approx$, т.е. для любых $S_1, S_2 \in \boldsymbol{S_M}$ из $S_1 \approx S_2$ следует, что всегда найдется некоторое Θ_i (по крайней мере, одно) из $(\Theta_i)_{i \in I}$, такое, что $\Theta_i(S_1, S_2)$;

Семантика не-не-фрегевской логики будет теперь детерминироваться функцией D из множества всех предложений в класс всех ситуаций (**R-NNFL**-допустимой интерпретацией) тогда и только тогда, когда выполняются следующие условия:

(i) $D(R_i(a_1, \ldots, a_{(i)})$ есть факт тогда и только тогда, когда $\boldsymbol{R_i}(\mathbf{a}_1, \ldots, \mathbf{a}_{r(i)})$, где $i = 0, 1, \ldots, n$; $\mathbf{a}_1, \ldots, \mathbf{a}_{r(i)} \in \boldsymbol{U}$;

(ii) $D(A \wedge B)$ есть факт тогда и только тогда, когда $D(A)$ и $D(B)$ – факты;

(iii) $D(A \vee B)$ есть факт тогда и только тогда, когда хотя бы одна из ситуаций $D(A)$ и $D(B)$ есть факт;

(iv) $D(A \rightarrow B)$ есть факт тогда и только тогда, когда неверно, что $D(A)$ – факт, а $D(B)$ не факт;

(v) $D(A \leftrightarrow B)$ есть факт тогда и только тогда, когда либо $D(A)$ и $D(B)$ – факты, либо $D(A)$ и $D(B)$ не факты;

(vi) $D(\neg A)$ есть факт тогда и только тогда, когда $D(A)$ не факт;

(vii) $D(\forall xA)$ есть факт тогда и только тогда, когда для всех $\mathbf{a} \in \boldsymbol{U}$ фактами являются $D(A(a/x))$;

(viii) $D(\exists xA)$ есть факт тогда и только тогда, когда для некоторого $\mathbf{a} \in \boldsymbol{U}$ $D(A(a/x))$ есть факт;

(ix) $D(A \equiv B)$ есть факт тогда и только тогда, когда $D(A) = D(B)$;

(x) $D(A(a/x)) = D(B(a/x))$, если $\mathbf{a} = \mathbf{b}$;

(xi) $D(A \cong B)$ есть факт, е. т. е. существует, по крайней мере, хотя бы одно $\Theta_i \in (\Theta_i)_{i \in I}$, для которого $\Theta_i(D(A), D(B))$.

В случае $\mathbf{R\text{-}NNFL}^{\Rightarrow}$ пункт (ix) заменяется на

(xii) $D(A \Rightarrow B)$ есть факт тогда и только тогда, когда $D(A) \in D(B)$,

а пункт (xi) на

(xiii) $D(A \underset{\sim}{\Rightarrow} B)$ есть факт, е. т. е. существует, по крайней мере, хотя бы одно $\Psi_i \in (\Psi_i)_{i \in I}$, для которого $\Psi_i(D(A), D(B))$,

где $(\Psi_i)_{i \in}$ представляет собой семейство рефлексивных и нетранзитивных отношений.

Связь ситуаций по отношению вовлечения с точки зрения ситуационной семантики передается теоретико-множественным отношением принадлежности, поскольку в силу того, что множество ситуаций представляет собой транзитивное множество, $D(B)$

есть $\{\Sigma\}$ для некоторого множества ситуаций Σ, элементом которого является $D(A)$. Что же касается отношения вовлечения по смыслу, то здесь теоретико-множественное отношение принадлежности заменяется на нетранзитивное отношение (точнее, на некоторое их семейство).

Заметим, что если в не-фрегевской логике принцип тождества неразличимых Лейбница в [2, с. 136] выглядел как

$(a \sqsubseteq b) \leftrightarrow \forall\varphi(\varphi(a) \Rightarrow \varphi(b))$,

то в метафорической логике мы имеем дело с гораздо более слабым принципом подобия неразличимых с предвзятой точки зрения

$(a \trianglelefteq b) \leftrightarrow \exists\varphi(\varphi(a) \underset{\rightarrow}{\Rightarrow} \varphi(b))$,

когда требуется, чтобы хотя бы одна ситуация, в которой встречается a, была по смыслу вовлечена в ситуации, в которых встречается b.

R-NFO-допустимая интерпретация из [5], определяемая с помощью условия

(xiv) $D(x \sqsubseteq y)$ есть факт тогда и только тогда, когда имеет место $SD^{-1}(x) \in SD^{-1}(y)$,

становится **R-NNFO**-допустимой интерпретацией при добавлении следующего условия:

(xv) $D(x \trianglelefteq y)$ есть факт тогда и только тогда, когда существует, по крайней мере, хотя бы одно $\Psi_i \in (\Psi_i)_{i\in I}$, для которого имеет место $\Psi_i(SD^{-1}(x), SD^{-1}(y))$.

В построенной подобным образом метафорической онтологии можно получить смысловую алгебру имен, воспользовавшись следующими определениями:

$x \trianglelefteq y + z \cong (x \trianglelefteq y \vee x \trianglelefteq y)$
$x \trianglelefteq y \circ z \cong (x \trianglelefteq y \wedge x \trianglelefteq z)$
$x \trianglelefteq y' \cong \neg(x \trianglelefteq y)$
$x \trianglelefteq 1 \cong x \trianglelefteq y + y'$
$x \trianglelefteq 0 \cong x \trianglelefteq x \wedge \neg(x \trianglelefteq x)$

Возможные прочтения этих определений выглядят следующим образом:

x ситуационно влечет с предвзятой точки зрения либо y либо z,
x ситуационно влечет с предвзятой точки зрения и y и z,
x ситуационно не влечет с предвзятой точки зрения y,
с предвзятой точки зрения x встречается в возможном мире,
с предвзятой точки зрения x есть пустая ситуация.

Подобная алгебра имен, конечно же, не будет являться булевой алгеброй (достаточно вспомнить, что метафорическая онтология ситуаций образует транзитивное нефундированное множество).

В рамках метафорической онтологии понятия *существования* и *объекта в некотором смысле* можно ввести (по аналогии с системой Лесьневского) следующим образом:

$ExS(x) \equiv \exists y(y \trianglelefteq x)$

$ObS(x) \equiv \exists y(x \trianglelefteq y)$,

т.е. индивид x существует в некотором смысле, если имеется индивид y, с предвзятой точки зрения ситуационно влекущий x, и x есть объект в некотором смысле, если имеется хотя бы один объект y, который всегда возникает в ситуации, в которой с предвзятой точки зрения принимает участие x.

3. Исследуя гуссерлевские джунгли: метафорические ноэмы и модальные объекты

Как мною было отмечено в [1, с. 62], существует достаточно очевидное сходство между теорией интенциональности и теорией референции. Имена предметов можно в какой-то степени связывать с объективированным содержанием актов восприятия и таким образом отношение восприятия предметов в акте представления отождествлять с отношением называния, денотации. Каждое референциальное отношение явно является интенциональным отношением определенного типа, откуда следует, что теория референции должна быть частью теории интенциональности, хотя на практике эти теории развивались совершенно обособленно до конца шестидесятых годов прошлого столетия.

Проявившийся в последующий период в среде аналитических философов интерес к философии Мейнонга и проблемам интенциональности не оставил в стороне и гуссерлевскую концепцию интенциональности, о чем свидетельствовала разработанная Д. Фоллесдалем концепция, указывающая на сходство взглядов Гуссерля с семантическими взглядами Г. Фреге. В настоящее время можно упомянуть уже большое количество исследователей, занимающихся подобной тематикой (Г. Дрейфус, Г. Кюнг, Дж. Моханти, Я. Хинтикка, Дж. Серль, Б. Смит, Р.Чизхольм и др.).

В первой части нашего исследования язык не-фрегевской онтологии был расширен за счет интенциональных операторов. Так, понятие ноэзиса было передано с помощью выражений типа $x \sqsubseteq \langle y \rangle$ при введении оператора ноэмы $\langle - \rangle$ в язык **R-NFO**. О существовании интенциональных объектов в этом случае можно говорить, используя определения

$Ex_{Int}(x) \equiv \exists y(y \sqsubseteq \langle x \rangle)$

$Ob_{Int}(x) \equiv \exists y(x \sqsubseteq \langle y \rangle)$

т.е. индивид *x* существует, если имеется индивид *y*, ситуационно влекущий ноэму *x*, и *x* есть интенциональный объект, если имеется хотя бы один объект *y*, ноэма которого всегда возникает в ситуации, в которой принимает участие *x*.

С учетом описанной выше тенденции подхода аналитических философов, казалось бы, можно было на основании ситуационного понятия интенционального объекта провести аналогию между ноэмой и референтом в рамках не-фрегевской онтологии (феноменологии). К тому же, в одном из фрагментов второй части «Логических исследований» Гуссерль отождествляет интенциональный объект с референтом. Однако подобная попытка здесь обречена на неудачу. Как пишет Г. Кюнг, «основная трудность состоит в том, что ноэма – это *не* то же самое, что референт. Для Гуссерля ноэма все еще принадлежит к общему уровню Sinn'a (sense, смысл)… ноэма ноэтического акта (ноэзиса) – это не референт, но лишь *имеющийся в виду* (intended) референт *qua имеющийся в виду*; ноэма – это не объект, на который указывают, но лишь *интенциональный* объект *qua интенциональный*» [8, с. 312]. Более того, «ноэмы, строго говоря, относятся к уровню смысла. Феноменолог может, разумеется, указать на ноэму (т.е. говорить *о* ней) – но лишь в философской рефлексии; и в этом случае будет иметься некая иная ноэма высшего уровня, "посредством" которой он попадает [острием стрелы смысла] в ноэму, на которую он указывает» [8, с. 316].

Примечательно, наконец, что, по мнению Кюнга, ноэма ноэтического акта содержит обычно большую часть опыта, пережитого в прошлых ноэтических актах, которая остается в качестве определяющей и неотъемлемой части в том опыте, который переживается сейчас, в данный момент. Он пишет: «По этой причине ноэмы, на самом деле, очень похожи на сущности из универсума рассуждений той или иной логистической системы. Нужно только рассматривать данную логистическую систему как карту всего нашего знания в некоторый момент» [8, с. 318].

Все это кажется, с одной стороны, вполне сочетающимся с развитой в [1] лесьневскианской версией гуссерлевской формальной феноменологии. Там ультрафильтры объектов ассоциируются с интенциональным состояниями сознания, когда в каждом из состояний луч сознания направлен на определенное множество объектов. Ноэма интерпретируется в этом случае с помощью утверждения о наличии интенционального объекта на основании того, что ее прототип присутствовал в каком-то из интенциональных состояний сознания, доступном относительно данного состояния.

В не-фрегевской версии множество ситуаций упорядочено по включению (а возможные миры представляют собой просто максимально большие ситуации относительно этого упорядочения), объекты же определяются совокупностью ситуаций, в которых они участвуют. Это приводило к следующему семантическому условию, добавляемому к условиям интерпретации:

(xvi) $D(x \sqsubseteq \langle y\rangle)$ есть факт тогда и только тогда, когда имеет место $\boldsymbol{MP}(SD^{-1}(y),\ SD^{-1}(\langle y\rangle))$, и $SD^{-1}(x) \in SD^{-1}(\langle y\rangle)$ (*т.е. фактичность* $SD^{-1}(y)$ *делает возможным факт* $SD^{-1}(\langle y\rangle)$ и $x \leq \langle y\rangle$).

Здесь $\boldsymbol{MP}(\alpha,\beta)$ означало бинарное отношение между ситуациями «факт α возможен благодаря факту β» (см. [2]). С другой стороны, уровень смысла, о котором говорит Кюнг, в рамках метафорической онтологии легко достигается за счет возможности рассмотрения с помощью понятий *вовлечения по смыслу* и *вовлечения с предвзятой точки зрения*. В этом случае достаточно переписать (xvi) следующим образом:

(xvii) $D(x \trianglelefteq \langle y\rangle)$ есть факт тогда и только тогда, когда имеет место $\boldsymbol{MP}(SD^{-1}(y),\ SD^{-1}(\langle y\rangle))$, и когда существует, по крайней мере, хотя бы одно $\Psi_i \in (\Psi_i)_{i\in I}$, для которого $\Psi_i(SD^{-1}(x),\ SD^{-1}(y))$ (*т.е. фактичность* $SD^{-1}(y)$ *делает возможным факт* $SD^{-1}(\langle y\rangle)$ и x *связан с* $\langle y\rangle$ *отношением подобия*).

Как и в не-фрегевском случае, стандартным образом можно определить и оператор «интенционального объекта для некоторого объекта» с помощью определения типа $x \trianglelefteq [1] \equiv x \trianglelefteq \langle a'\rangle'$.

Эксплуатируя теперь аналогию с модальными логическими системами, как и в не-фрегевском случае, можно рассмотреть следующий список интенциональных схем аксиом и правил:

MA1. $x \trianglelefteq [y \supset z] \cong (x \trianglelefteq [y] \supset x \trianglelefteq [z])$,
MA2. $x \trianglelefteq [y] \Rightarrow x \trianglelefteq \langle y\rangle$,
MA3. $x \trianglelefteq [y] \Rightarrow x \trianglelefteq y$
MR1. $\dfrac{x \trianglelefteq y \Rightarrow x \trianglelefteq z}{x \trianglelefteq [y] \Rightarrow x \trianglelefteq [z]}$,

где $y \supset z$ дается определением

$$x \trianglelefteq y \supset z \cong x \trianglelefteq y' + z,$$

а затем рассмотреть следующие интенциональные расширения **R-NSO**:

R-NSO-C2 = {**MA**0, MA1; MR1}:
R-NSO-D2 = {**MA**0, MA1,MA2; MR1}:
R-NSO-E2 = {**MA**0, MA1,MA3; R1};

где **M**A0 означает аксиоматику **R-NSO**.

Заметим, что выбор именно этих комбинаций аксиом (аналог аксиом из [7]) и правил в не-фрегевском случае был не случаен. В нашем случае это означает, что системы **R-NSO-C2**, **R-NSO-D2** и **R-NSO-E2** совместимы с добавлением $x \trianglelefteq \langle y \rangle$. Семантически это означает, что относительно фактичности с предвзятой точки зрения ситуаций $SD^{-1}(y)$ мы ничего не можем сказать определенного. Последнее означает, в свою очередь, что мы не знаем, существует ли в некотором смысле объект y вообще. Технически же это означает, что в случае гуссерлевской версии метафорической формальной феноменологии выбор интенциональных аксиом обусловлен обязательным требованием отсутствия в нашей аксиоматике аксиом типа $x \trianglelefteq [y]$.

Теперь в рамках метафорической формальной феноменологии возникает возможность описания того, что можно было бы назвать смысловой «феноменологизацией» ситуаций. Учитывая то, что с индивидными переменными у нас связаны ситуации (множества ситуаций), в которые они входят, естественно связать с интенциональными объектами смысловые «интенциональные» ситуации. Это можно понимать как некую смысловую «интенционализацию» ситуаций, а с другой стороны, смысловая интенциональность подобных ситуаций подразумевает специфический интенциональный способ их восприятия.

Введем оператор смысловой интенционализации ситуации, используя следующее определение:

MD1. $[R_i(x_1,...,x_{s(i)})] =_{\text{def}} R_i([\mathrm{x}_1],...,[\mathrm{x}_{s(i)}])$,

где $[R_i(x_1,...,x_{s(i)})]$ означает интенциональную ситуацию. Точно так же можно ввести и понятие ноэзиса ситуации, воспользовавшись определением

MD2. $\langle R_i(x_1,...,x_{s(i)})\rangle =_{\text{def}} R_i(\langle \mathrm{x}_1\rangle,...,\langle \mathrm{x}_{s(i)}\rangle)$

где $\langle R_i(x_1,...,x_{s(i)})\rangle$ означает ноэму ситуации. В зависимости от принимаемых интенциональных аксиом для интенциональных и ноэматических ситуаций будут справедливы те или иные утверждения об их связи. Так, например, в рамках **R-NSO-D2** доказуемо

$$x \trianglelefteq y \Rightarrow x \trianglelefteq \langle y \rangle,$$

откуда получаем

$$R_i(x_1,...,x_{s(i)}) \to \langle R_i(x_1,...,x_{s(i)})\rangle$$

(по $x \trianglelefteq x$ и $(x_1 \trianglelefteq y_1,...,x_{s(i)} \trianglelefteq y_{s(i)}) \to (R_i(y_1,...,y_{s(i)}) \to R_i(x_1,...,x_{s(i)}))$, $i = 1,...,m$), что означает, что возникновение ситуация влечет за собой возникновение ноэмы этой ситуации.

Определения MD1 и MD2 приводят также к существованию «неполных» интенциональных и ноэматических ситуаций, когда только часть переменных является ноэмами или интенциональными объектами, поскольку у нас возможны ситуации, соответствующие $R_i([x_1],...,x_{s(i)})$ и $R_i(\langle x_1\rangle,...,x_{s(i)})$. Это позволяет говорить о степени смыслового интенционального «наполнения» ситуаций.

4. Метафорическая карта мейнонговских джунглей

Как уже констатировалось в [1, с. 83], между гуссерлевскими и мейнонговскими джунглями отсутствует четкая граница. «Ноэмы» с точки зрения Мейнонга будут несуществующими (неполными) объектами, поскольку они не имеют определенного расположения в пространстве и/или времени. Они представляют собой абстрактные объекты, или скорее объекты, обладающие иным видом существования. Если же учесть мейнонговское разделение подобных не-сущностей на логически возможные (*possibilia*) и логические невозможные (*impossibilia*), то для их учета нам потребуется модальное расширение метафорической логики.

Модальность в метафорической как и в не-фрегевской логике понимается онтологически, когда возможность означает возможность конструирования одной ситуации из другой. Как указывалось в [2, с. 134], семантическое условие, которое необходимо добавить к условиям интерпретации, должно выглядеть следующим образом:

(xviii) $D(\Diamond A)$ есть факт тогда и только тогда, когда $D(A)$ есть факт и имеет место $\boldsymbol{MP}(D(A), D(\Diamond A))$ (*то есть, фактичность* $D(A)$ *делает возможным факт* $D(\Diamond A)$).

Если обозначить как **MR-NSL** *модальную ограниченную не-сушковскую логику*, которая получается за счет добавления модальных аксиом к логике **R-NSL**, то система **MR-NSF** *модальной не-сушковской формальной феноменологии* получается добавлением к **MR-NSL** аксиом и правил не-сушковской онтологии. При этом следует учесть, что нам требуется слабая модальная версия **MR-NSL**, т.е. полученная добавлением модальных аксиом и правил только для систем типа C2, D2 и E2 из леммоновского списка, поскольку нам требуется существование «невозможных возможных ситуаций», что налагает свой отпечаток на модализацию **R-NSL**.

Не-сушковские определения *possibilia* и *impossibilia* в рамках **MR-NSF** выглядят теперь следующим образом:

$$Pos(x) = \Diamond Ob_{Int}(x) \cong \Diamond\exists y(x \trianglelefteq \langle y\rangle)$$

$ImPos(x) = \neg\Diamond Ob_{Int}(x) \cong \neg\Diamond\exists y(x \trianglelefteq \langle y \rangle)$

Дальнейшее продвижение в исследовании мейнонговских джунглей, как и в не-фрегевском случае, связано теперь с семантикой возможных миров, но не с бинарным, а тернарным отношением достижимости. В [5] было предложено истолковывать *Sosein*-высказывания с помощью тернарного отношения между тремя объектами, не пытаясь прояснить вопрос, являются ли они существующими или несуществующими сущностями. В отношении каждого из этих объектов предполагается, что они принадлежат различным возможным мирам, все их связи зависят от некоторого тернарного отношения достижимости между этими мирами. В случае метафорической онтологии мы говорим не о возможных мирах, но о ситуациях, связанных между собой тернарным, а не бинарным отношением «совозможности».

Как и в случае «гуссерлианского» расширения не-фрегевской онтологии для получения тернарной ситуационной семантики (т.е. семантики с тернарным, а не бинарным отношением на множестве ситуаций) нам требуется получить специфическую алгебру имен в рамках **MR-NSF**. Нам нужно получить структуру так называемого моноида де Моргана, которая определяет семантику релевантной системы **R** и которая преобразуется в семантику с тернарным отношением достижимости.

С этой целью можно ввести аксиоматически в алгебру имен дополнительную операцию $\otimes$, которая создает структуру коммутативной полугруппы. Кроме этого, можно ввести еще резидуальную операцию $\succ$ по отношению к $\otimes$, т.е. мы имеем $a\otimes b \trianglelefteq c$ тогда и только тогда, когда $a \trianglelefteq b\succ c$.Таким образом, следуя подходу лесьневскианской феноменологии, помимо расширения языка за счет операций $\otimes$ и $\succ$, мы должны были бы добавить к **MR-NFF** следующее определение и схемы аксиом:

DRx1. $x \trianglelefteq \mathbb{I} \cong (x \trianglelefteq x \wedge \forall y(y \div x\otimes y))$

ARx1. $x \trianglelefteq a\otimes(b + c) \cong x \trianglelefteq (a\otimes b) + (a\otimes c)$

ARx2. $((a\otimes b) + c = c) \cong (a + (b\succ c) \div b\succ c)$

ARx3. $x \trianglelefteq a\otimes b \cong x \trianglelefteq b\otimes a$

ARx4. $x \trianglelefteq a\otimes(b\otimes c) \cong x \trianglelefteq (a\otimes b)\otimes c$

ARx5. $a + a^2 \div a^2$,

где a^2 означает $a\otimes a$. Однако, как уже было замечено ранее, алгебра имен не является булевой алгеброй ввиду специфического характера множества ситуаций. По этой же причине мы не получаем моноид де Моргана, что требует дополнительного дальнейшего исследования.

Тем не менее, можно попытаться ввести понятие *Sosein*-объекта с помощью определения следующего вида:

$SoseinOb(x) \equiv \exists y,z(x \unlhd y \otimes z)$.

И в этом случае мы, как и в не-фрегевской феноменологии, приходим к интерпретации мейнонговской доктрины *Außersein* (внебытия), рассматривая определение бытия сущим в виде

$SoseinEx(x) \equiv \exists y,z\ (y \otimes z \unlhd x)$.

Это определение можно понимать как дополнительный вид существования по отношению к существованию, определяемому с помощью предиката *Ex*. Тем самым мы получаем возможность кроме обычной формулировки несуществования объекта

$\neg Ex(x)$

получить формулировку еще одного вида несуществования как

$\neg SoseinEx(x)$.

Чтобы интерпретировать *Nichtsosein* (небытия-таким-то, присутствие противоположного свойства) и *das Nichtsein eines Sosein* (небытия-бытия-каким-то), как у Роутли [9, p. 89], который расценивает контраст между этими понятиями как различие между «у *A* отсутствует *B*» (т.е. «*A* не имеет *B*») и «это не так, что *A* имеет *B*», введем, как и в [1], еще и релевантное отрицание *, наличие которого в релевантной логике приводит к структуре коммутативного негативно-импликативного группоида. Для этого нам понадобятся дополнительные схемы аксиом вида:

ARx6. $x \unlhd (a \succ b^* \otimes b) \underline{\Rightarrow} x \unlhd a^*$

ARx7. $x \unlhd a^{**} \cong x \unlhd a$

ARx8. $x \unlhd (a \succ a^*) \underline{\Rightarrow} x \unlhd a^*$.

С учетом этого нового, «релевантного» отрицания *Nichtsosein* и *das Nichtsein eines Sosein* могут быть переданы метафорическим способом как $a \unlhd b^*$ и $\neg(a \unlhd b)$ соответственно.

Для интерпретации «паранепротиворечивого» Мейнонга, чтобы получить паранепротиворечивую алгебру имен в стиле да Косты следует расширить язык за счет двух новых операторов $\Supset$, $^+$, констант $\mathbb{O}$ и $\mathbb{I}$ и добавить следующие схемы аксиом и определений:

DRx1. $x \unlhd y^{\circ} \div x \unlhd (y \wedge y^{+})^{+}$

AC1. $x \unlhd a \wedge x \unlhd a \Supset b \underline{\Rightarrow} x \unlhd b$

AC2. $x \circ y \unlhd z \underline{\Rightarrow} y \unlhd x \Supset z$

AC3. $\mathbb{O} \unlhd x \wedge x \unlhd \mathbb{I}$

AC4. $x \unlhd y^{\circ} \underline{\Rightarrow} (x \unlhd y^{+})^{\circ}$

AC5. $x \unlhd y \vee x \unlhd y^{+} \cong x \unlhd \mathbb{I}$

AC6. $x \unlhd y^{++} \underline{\Rightarrow} x \unlhd y$

AC7. $x \unlhd y^{\circ} \underline{\Rightarrow} ((x \unlhd z \Supset y) \underline{\Rightarrow} (x \unlhd ((z \Supset y^{+}) \Supset z^{+}))$

AC8. $x \trianglelefteq y^{o} \wedge x \trianglelefteq (y^{o})^{+} \cong x \trianglelefteq \mathbb{O}$.

В этом случае непротиворечивыми объектами будут объекты y^{o} из определения DC1, а противоречивыми будут объекты x из AC8. Конечно же, как и в не-фрегевском случае, это не единственный способ получения паранепротиворечивости в рамках **MR-NSF**. Например, можно было бы имитировать на алгебре имен структуру алгебры Брауэра, которая, как известно, тоже позволяет получить паранепротиворечивость.

ЛИТЕРАТУРА

1. *Васюков В.Л.* Формальная феноменология. М., 1999.
2. *Васюков В.Л.* Не-фрегевская логика и Пост-Трактатная онтология // Труды научно-исследовательского семинара логического центра Института философии РАН 1997. М., 1998. С. 131-138.
3. *Васюков В.Л.* Ситуации и смысл: не-не-фрегевская (метафорическая) логика. I // Логические исследования. М., 1999. Вып. 6. С. 138-152.
4. *Васюков В.Л.* Ситуации и смысл: не-не-фрегевская (метафорическая) логика. II // Логические исследования. М., 2002. Вып. 9. С. 64-89.
5. *Васюков В.Л.* Не-фрегевский путеводитель по гуссерлевским и мейнонговским джунглям. I // Логические исследования. М., 2004. Вып. 11. С. 99-118.
6. *Вуйцицкий Р.* Формальное построение ситуационной семантики // Синтаксические и семантические исследования неэкстенсиональных логик. М., 1989. С. 5-28.
7. *Леммон Е.* Алгебраическая семантика для модальных логик. I // Семантика модальных и интенсиональных логик / В.А.Смирнов. М., 1981. С. 98-124.
8. *Кюнг Г.* Мир как ноэма и как референт // Аналитическая философия: становление и развитие. Антология / Грязнов А.Ф. (ред.). М., 1998. С. 302-321.
9. *Routley R.* Exploring Meinong's Jungle and Beyond. An Investigation of Noneism and the Theory of Items. Canberra. Australian National University, 1980.

Е.Г. Драгалина-Черная

ФОРМАЛЬНЫЕ ОНТОЛОГИИ КАК АБСТРАКТНЫЕ ЛОГИКИ*

Abstract. *Abstract logics are interpreted as formal ontologies both in phenomenological and ontological engineering senses.*

Развитие онтологической инженерии (*ontological engineering*), успешно использующей логические методы в построении прагматически ориентированных онтологий предметных областей (*domain ontologies*)[1], возродило интерес к старой проблеме взаимосвязи логики и онтологии. Онтология, дискредитированная догматическими притязаниями «грезящей метафизики», вновь обретает интеллектуальную респектабельность, в то время как логика все настойчивее задается вопросом о собственных основаниях и границах. Многообразие логических систем, проблематизирующее онтологический статус логики, придает вместе с тем особую ценность попыткам точного определения фундаментального понятия логической системы (и в этом смысле – логики). Одной из таких попыток явилось определение абстрактной логики в обобщенной теории моделей.

Абстрактной логикой называется любая совокупность, состоящая из: (1) класса изоморфных структур, (2) класса формальных выражений некоторого языка и (3) отношения выполнимости между ними [Barwise, 1985, с. 4]. Тот факт, что данное определение не включает каких-либо теоретико-доказательственных понятий, делает, однако, спорным использование термина *логика* в отношении подобных совокупностей. Даже в фундаментальных работах по обобщенной теории моделей высказывается мнение, что термин *логика* просто привычнее, чем, скажем, *теоретико-модельный язык*, и его использование мотивировано в данном случае не столько теоретическими, сколько прагматическими соображениями простоты и краткости. Моя задача – дать истолкование абстрактных логик как формальных онтологий и тем самым показать, что, по крайней мере, в этом смысле они могут считаться подлинными логиками.

---

* Работа выполнена при поддержке РГНФ, грант 05-03-03270а.

[1] См., например, [Welty, Smith, 2001], [Рубашкин, Лахути, 2005], а также многочисленные Интернет-ресурсы, скажем, http://www.formalontology.it.

Традиция интерпретации логики как формальной онтологии восходит к Э. Гуссерлю[2]. Будучи апофантической дисциплиной – учением о суждениях и их преобразованиях в умозаключениях, логика в не меньшей степени является, по его мнению, формальной онтологией – априорным учением о формальных структурах предметности. Хотя истины логики относятся ко всем сферам бытия, Гуссерль считал возможным дать ее трансцендентальное обоснование лишь при условии допущения особой области абстрактных объектов. Если мы хотим спасти логику от специфического релятивизма, связанного с кантовским истолкованием трансцендентальных структур в терминах общечеловеческих познавательных способностей, мы должны, по Гуссерлю, рассматривать их как структуры некоторой объективной области абстрактных *категорных* объектов. Вопрос о природе этих объектов оказывается принципиальным для оценки всего феноменологического проекта.

На мой взгляд, точным теоретико-модельным аналогом категорных объектов гуссерлевского формального региона являются *классы (типы) изоморфизма*, рассматриваемые как абстрактные индивиды высшего порядка. Любые две изоморфные структуры служат представлением одной и той же абстрактной (в смысле Клини) системы. Система считается абстрактной, если о ее объектах мы не знаем ничего, кроме соотношений, имеющихся между ними в системе. «В этом случае устанавливается только структура системы, а природа ее объектов остается неопределенной во всех отношениях, кроме одного, - что они согласуются с этой структурой» [Клини, 1957, с. 30].

Классы структур, замкнутые относительно изоморфизма, представляют собой, как известно, экстенсионалы *обобщенных кванторов* (в другой терминологии, просто обобщенные кванторы). Впервые обобщенные кванторы были введены А. Мостовским (см. [Mostowski, 1957]), который предложил рассматривать их как *классы подмножеств универсума* (точнее, как функции, задаваемые на множествах объектов универсума модели и принимающие в качестве значений истину или ложь, или, говоря иначе, как функции, ассоциирующие с каждой моделью класс подмножеств ее универсума). Например, квантор Мостовского *«существует бесконечно много»* может пониматься просто как класс бесконеч-

---

[2] Программа построения формальной онтологии была намечена уже в «Логических исследованиях» Гуссерля, однако в развернутом виде она представлена лишь в более поздних его работах (см. [Гуссерль, 1998], [Гуссерль, 1999], [Husserl, 1969]). Своим непосредственным предшественником Гуссерль называет Б.Больцано.

ных подмножеств универсума. Важное свойство таких классов состоит в их инвариантности относительно любых перестановок индивидов в области интерпретации.

Нет, однако, никакой концептуальной необходимости рассматривать кванторы только как второпорядковые *свойства*. Естественно обобщить это понимание на второпорядковые *отношения*. Такое обобщение было проведено П.Линдстрёмом (см. [Lindström, 1966]), предложившим трактовку кванторов как второпорядковых отношений между первопорядковыми отношениями. Кванторы Линдстрёма являются полиадическими (многоместными) и имеют вид $Q(x_1, \ldots, x_n)\varphi(x_1, \ldots, x_n)$. Их бинарными примерами могут служить *силлогистические* кванторы, скажем, *«Все ... есть...»*$= \{<X,Y>: X,Y \subseteq U$ и $X \subseteq Y\}$, квантор *вполне-упорядоченности* Решера: $Q^R = \{<X, Y>: X, Y \subseteq U$ и $X < Y\}$, *квантор равномощности* Хартига: $Q^H = \{<X,Y>: X,Y \subseteq U$ и $X=Y\}$.

Используя терминологию Гуссерля, можно сказать, что обобщенные кванторы выражают *психические* свойства и отношения, которые, в отличие от *физических*, не оказывают влияния на другие свойства и отношения предметов, а сами существуют в силу других свойств и отношений. Мейнонг предпочитал говорить об *идеальных* и *реальных* свойствах и отношениях, соответственно, что более удачно, поскольку не вызывает ассоциаций с нерелевантной антитезой психологизма и антипсихологизма. Характеристика некоего свойства или отношения как *психического* не предполагает его отнесения к области психологии, но выражает тот факт, что оно характеризует содержание идеи, т.е. значение или понятие[3]. К числу таких второпорядковых идеальных свойств относятся свойства множества быть непустым, содержать все элементы универсума или, скажем, большинство из них, быть счетным, конечным или бесконечным. Из двух множеств одно может содержать все элементы другого, больше элементов, чем другое, и т.п. Бинарное отношение может быть полностью или частично упорядоченным и т.п.

Что же означает эта *идеальность* свойств и отношений в теоретико-модельных терминах? Как известно, особенностью интерпретации реальных (или, проще говоря, нелогических) свойств и отношений является возможность ее варьирования от модели к модели. Было бы неверно сказать, что обобщенные кванторы не допускают такого варьирования. Так, в модели с бесконечным универсумом интерпретация универсального квантора – это бес-

---

[3] Известно, что Фреге, например, рассматривал экзистенциальный и универсальный кванторы как свойства понятий.

конечное множество, в модели с пятью элементами – множество из пяти элементов. Аналогичным образом обстоит дело с *логическими объектами* в том смысле, как их понимал А.Тарский (см. [Tarski, 1986]), – они могут оказаться различными объектами для различных областей, как, скажем, универсальный класс индивидов. Однако, не будучи абсолютно инвариантными, кванторы *инвариантны относительно изоморфных преобразований модели*, в частности, относительно перестановок индивидов в области интерпретации[4].

Таким образом, формальные онтологии, рассматриваемые как абстрактные логики или логики с обобщенными кванторами, оказываются *формальными теориями отношений.* Они не различают конкретные индивиды в области, но при этом не являются «пустыми» в кантовском смысле, поскольку имеют дело с индивидами высшего порядка – классами изоморфных структур. Трактуемые как гипостазы форм региональных онтологий, типы изоморфизма приобретают, на мой взгляд, существенное сходство с *неделимыми видами* аристотелевской онтологии. Существовать для соотнесенного значит, по Аристотелю, находиться в каком-либо отношении к другому[5]. Вместе с тем, полемизируя с релятивизмом, он подчеркивает несоотнесенный, самостоятельный характер бытия сущности[6] как условия возможности отношений. Сущность как неделимый вид *(automon eide)* (наименее общий, ближайший к первичным сущностям вид, который на виды не распадается) в случае сущности – эйдоса (неделимости вещи по виду) будет тождествен *форме* вещи[7].

Итак, быть *формальным* означает в контексте развиваемого здесь подхода быть *инвариантным* относительно изоморфных преобразований модели. Является ли, однако, эта инвариантность необходимой и достаточной для демаркации логического и нелогического? Однозначно положительный ответ на этот вопрос дал Тарский, распространивший на логику принципы Эрлангенской программы Ф. Клайна. В 1872 году Клайн выдвинул в качестве основания классификации различных геометрий инвариантность

---

[4] Характерно, что не все второпорядковые свойства и отношения инвариантны в этом смысле. Таковыми не являются, например, *нелогические* кванторы Д. Барвайса и Р. Купера (см. [Драгалина-Черная, 2004]).

[5] Ср. формулировку Р. Роутли «онтологического критерия Ф. Брентано» *«Быть - значит находиться в некоем экстенсиональном отношении к некоторой сущности»* [Routley, 1980, с. 715].

[6] «Если же не все есть соотнесенное, а кое-что существует и само по себе, то уже не все, что представляется, может быть истинным» [Аристотель, 1975, с. 139].

[7] См. подробнее [Гайденко, 1997].

соответствующих геометрических понятий относительно определенных групп преобразований. Тарский предположил, что логическими являются понятия, инвариантные относительно самой обширной группы неструктурных преобразований – любых перестановок индивидов в области[8].

Как показал В. Макги, класс логических операторов, удовлетворяющих критерию инвариантности Тарского, в точности совпадает с классом операторов, определимых в бесконечном языке $L\infty,\infty$ [McGee, 1996, с. 572]. Как известно, $L\infty,\infty$ – достаточно мощный язык, допускающий конъюнкции и дизъюнкции произвольной длины, а также универсальную и экзистенциальную квантификацию последовательностей переменных любой мощности. По сути, результат Макги свидетельствует о том, что первопорядковый язык, обогащенный кванторами, инвариантными относительно перестановок индивидов в области, выразительно эквивалентен языку логики второго порядка (см. [Feferman, 1999, с. 38]). Таким образом, принимая критерий инвариантности Тарского, мы должны признать полноправной логикой второпорядковую логику, эту, по выражению У. Куайна, «теорию множеств в овечьей шкуре» [Quine, 1986, с. 66].

Сближение абстрактных логик и теории множеств не кажется столь уж неожиданным в контексте реконструкции идеи формальной онтологии Гуссерля. Дело в том, что логические и теоретико-множественные сущности совершенно на равных правах населяют его регион категорных объектов, будучи «производными образованиями чего-то вообще» [Husserl, 1969, p. 77]. Наряду с логикой, формальная онтология включает, по Гуссерлю, «математику множеств, комбинаций и перестановок, кардинальных чисел (в модусе «как много»), ординальных чисел, принадлежащих различным уровням многообразий» [там же].

Вместе с тем, критерий Тарского вступает в явное противоречие с принципом *онтологической нейтральности* У. Куайна, согласно которому логика не должна допускать существования каких-либо абстрактных сущностей. Второпорядковая логика (а точнее, по Куайну, математическая теория) допускает квантификацию по множествам и предполагает (в силу онтологического критерия Куайна) онтологию множеств [Quine, 1986, с. 66].

---

[8] Критерий инвариантности для логических понятий был сформулирован уже в 30-х годах в совместных работах Линденбаума и Тарского и подтвержден Тарским в 1966 году в его знаменитой лекции «Что такое логические понятия?», опубликованной лишь после смерти автора (см. [Tarski, 1986]).

Столкновение двух классических принципов демаркации логического и нелогического свидетельствует о возможности различных экспликаций фундаментальной интуиции *формальности* логики. Формальность может быть истолкована как универсальная применимость теории, и в этом смысле второпорядковая логика и теория множеств, безусловно, формальны[9]. Формальность теории, понимаемая как ее инвариантность относительно изоморфных преобразований модели, означает, что эта теория не различает индивидные объекты и характеризует лишь те свойства модели, которые не зависят от ее неструктурных модификаций. Подобная формальность не обязательно влечет онтологическую нейтральность теории. Если первопорядковая логика не различает конечное и бесконечное, счетное и несчетное, то выразительные возможности формальной (в указанном смысле) второпорядковой логики достаточны для характеризации этих (и многих других) абстрактных математических объектов[10].

Критерий инвариантности в принципе не исключает создания логики не только математических, но и, скажем, географических объектов или даже «логики цветности»[11]. Абстрактные логики в целом могут рассматриваться поэтому как формальные онтологии абстрактных объектов, приближаясь тем самым к компьютерным онтологиям предметных областей.

По наблюдению Барвайса, идеология абстрактных логик совсем не является экзотической, а, напротив, вполне соответствует обычному пониманию логики «человеком с улицы». «Если мы с вами обсуждаем некоторую тему, например, починку крыши, или законы генетики, или решение дифференциального уравнения, и я говорю: “*Логика этого ускользает от меня*”, то я имею в виду, что не вижу, каким образом ваше заключение следует из принимаемых нами обоими предпосылок и понятий, включая понятие о цели обсуждения. Каким образом оно следует из свойств крыши, или законов генетики, с которыми мы оба согласны, или из понятий, включенных в дифференциальное исчисление? …С точки

---

[9] По-видимому, именно такое понимание формальности позволило Фреге считать логикой его Begriffsschrift, не удовлетворяющий ни критерию Тарского, ни критерию Куайна.

[10] Возможность такой характеризации нередко служит аргументом *в пользу* признания второпорядковой логики полноценной логической теорией (см., например, [Barwise,1985], [Shapiro, 1991]).

[11] По замечанию И. ван Бентема, даже квантор «*все блондины*» инвариантен относительно перестановок индивидов, сохраняющих «блондинистость» (т.е. исключающих перестановку, например, блондинов и брюнетов) [van Benthem, 1989, P. 320].

зрения здравого смысла все понятия, которые мы используем для понимания и упорядочивания нашего мира, имеют собственную логику» [Barwise, 1985, P. 4].

Вместе с тем, столь свободная трактовка логики, к которой приводит применение критерия инвариантности, свидетельствует, на мой взгляд, о его недостаточности для демаркации логического и нелогического. Теоретико-модельные критерии должны быть, вероятно, дополнены теоретико-доказательственными (например, задаваемыми на основе правил введения логических терминов в натуральных исчислениях), а онтологический подход – метаонтологическим. Сравнительное исследование классов абстрактных логик (формальных онтологий) в терминах точно определяемых и варьируемых металогических свойств – метаонтологическая задача обобщенной теории моделей, соответствующая общей тенденции перехода от изучения отдельных логических систем к изучению классов логик, «от логических систем к исчислению логик» (см. [Карпенко, 2004]).

ЛИТЕРАТУРА

[Аристотель, 1975] *Аристотель.* Метафизика // Аристотель. Соч.: В 4 т. М.: Мысль, 1975. Т. 1.

[Гайденко, 1997] *Гайденко П.П.* Бытие и разум // Вопросы философии, 1997, № 7, С. 114-135.

[Гуссерль, 1998] *Гуссерль Э.* Картезианские размышления. СПб.: Наука, 1998.

[Гуссерль, 1999] *Гуссерль Э.* Идеи к чистой феноменологии и феноменологической философии. М.: Дом интеллектуальной книги, 1999.

[Драгалина-Черная, 2004] *Драгалина-Черная Е.Г.* Онтология обобщенной квантификации // Труды научно-исследовательского семинара логического центра Института философии РАН. Выпуск XVII, М.: ИФ РАН, 2004. С. 53 – 61.

[Карпенко, 2004] *Карпенко А.С.* Предмет логики в свете основных тенденций ее развития // Логические исследования. Вып. 11, М.: Наука, 2004. С. 149-172.

[Клини, 1957] *Клини С.* Введение в метаматематику. М.: Изд-во иностранной литературы, 1957.

[Рубашкин, Лахути, 2005] *Рубашкин В.Ш., Лахути Д.Г.* Онтология: от натурфилософии к научному мировоззрению и инженерии знаний // Вопросы философии. 2005, № 1. С. 64 – 81.

[Barwise,1985] *Barwise, J.* Model-Theoretic Logic: Background and Aims // Barwise J. and Feferman S., eds. Model-Theoretic Logic. New York, 1985. P. 3-23.

[Feferman, 1999] *Feferman, S.* Logic, Logics and Logicism // Notre Dame Journal of Formal logic. Vol. 40, 1999, P. 31-54.
[Husserl, 1969] *Husserl, E.* Formal and Transcendental Logic. Dordrecht, 1969.
[Lindström, 1966] *Lindström, P.* First Order Predicate Logic with Generalized Quantifiers // Theoria. Vol. 35, 1966.
[McGee, 1996] *McGee, V.* Logical Operations // Journal of Philosophical Logic. Vol. 25, 1996, P. 567-580.
[Mostowski, 1957] *Mostowski, A.* On a Generalization of Quantifiers // Fundamenta Matematicae. Vol. 44, 1957.
[Quine, 1986] [*Quine, W.V.* Philosophy of Logic. Cambridge, 1986.
[Routley 1980] *Routley, R.* Exploring Meinong's Jungle and Beyond. An Investigation of Noneism and the Theory of Items. Canberra, 1980.
[Shapiro, 1991] *Shapiro, S.* Foundations without Foundationalism: A Case for Second-Order Logic. Oxford, 1991.
[Tarski, 1986] *Tarski, A.* What are Logical Notions? // History and Philosophy of Logic. Vol. 7, 1986.
[van Benthem, 1989] *van Benthem, J.* Logical Constants Across Varying Types // Notre Dame Journal of Formal Logic. Vol. 30, 1989, P. 315 – 342.
[Welty, Smith, 2001] *Welty, C. and Smith B., eds.* Formal Ontology in Information Systems. New York, 2001.

Э.Ф. Караваев

ЕЩЕ РАЗ О ТРУДНОСТЯХ ПОСТРОЕНИЯ ДЕОНТИЧЕСКОЙ ЛОГИКИ

Abstract. *The purpose of this paper is to discuss some difficulties in constructing of deontic logic. In spite of a possibility and a fruitfulness of temporal qualification that has earlier been offered by the author for normative propositions there remain plenty of impediments on the way of construction of such a deontic logic that would correspond with our intuitive conceptions of normative reasoning.*

Серьезными препятствиями на пути разработки деонтической логики и построения - в качестве ее приложений в области методологии науки - нормативных систем являются проблемы, связанные собственно с природой деонтических модальностей.

Прежде всего отметим, что, по-видимому, все нормативные высказывания являются *условными* высказываниями, хотя соответствующие условия и выражаются в различных языковых формах, и часто некоторые из них представляются как бы безусловными. Рассмотрим пример:

"Пожалуйста, не $\llcorner_p$забывайте отключать ваши мобильные телефоны во время выступлений докладчиков$\lrcorner$; однако если $\llcorner_p$вы забыли это сделать$\lrcorner$ и $\llcorner_q$во время выступления кого-то раздался звонок$\lrcorner$, $\llcorner_r$вам следует извиниться$\lrcorner$". В символической записи мы имеем: $O\neg p \,\&\, ((p \,\&\, q) \to Or)$.

На первый взгляд, может показаться, что только вторая обязанность Or является обязанностью с условием, а первая, $O\neg p$, является безусловной. Правда, довольно скоро мы обнаруживаем, что первая обязывающая норма тоже сопряжена с условием, - "во время выступлений докладчиков".

Однако, представляется, что в техническом отношении средства для выражения норм с явно представленными условиями являются более сложными по сравнению со средствами для выражения норм без явного указания условий. Так что, например, вместо формулы $O(\mathbf{B}/\mathbf{A})$, где $\mathbf{A}$ есть условие для того, чтобы $\mathbf{B}$ было обязательным, мы можем писать: $(\mathbf{A} \to O\mathbf{B}) \,\&\, (\neg\mathbf{A} \to \neg O\mathbf{B})$. Второй член конъюнкции позволяет нам учитывать релевантность $\mathbf{A}$, то есть соответствующего положения дел, по отношению к $\mathbf{B}$. В противном случае мы могли бы ошибочно формализовать $O(\mathbf{B}/\mathbf{A})$ как $(\mathbf{A} \to O\mathbf{B})$.

Тогда, в противоречии с интуицией, $O(\mathbf{B}/\mathbf{A})$ было бы истинным всякий раз, когда **A** является ложным и/или $O\mathbf{B}$ является истинным.

Вместе с тем напомним, что когда мы при построении нормативных систем используем некоторые (мета-)принципы, которые представляются интуитивно вполне приемлемыми, мы часто сталкиваемся с разного рода парадоксальными заключениями. Так, например, если мы используем совместно "собирательный принцип", CP: $O\mathbf{A}\ \&\ O\mathbf{B} \rightarrow O(\mathbf{A}\ \&\ \mathbf{B})$ и "кантианский принцип" ("должен" влечет "может"), KP: $O\mathbf{A} \rightarrow \Diamond\mathbf{B}$, то мы получаем в качестве теоремы $(O\mathbf{A}\ \&\ O\mathbf{B}) \rightarrow (\neg\Diamond(\mathbf{A}\ \&\ \mathbf{B}) \rightarrow \Diamond(\mathbf{A}\ \&\ \mathbf{B}))$:

1.	$(O\mathbf{A}\ \&\ O\mathbf{B})$	- посылка
2.	$\neg\Diamond(\mathbf{A}\ \&\ \mathbf{B})$	- посылка
3.	$O\mathbf{A}\ \&\ O\mathbf{B} \rightarrow O(\mathbf{A}\ \&\ \mathbf{B})$	- принцип CP
4.	$O(\mathbf{A}\ \&\ \mathbf{B})$	- 1, 3, modus ponens
5.	$O(\mathbf{A}\ \&\ \mathbf{B}) \rightarrow \Diamond(\mathbf{A}\ \&\ \mathbf{B})$	- принцип KP
[6.]	$\Diamond(\mathbf{A}\ \&\ \mathbf{B})$	- 4, 5, modus ponens

Или другой пример сочетания тоже кажущихся вполне приемлемыми принципов. Согласно одному из них, если мы обязаны обеспечить положение дел **A**, и имеет место некоторое другое положение дел **B**, которое несовместимо с **A**, то мы обязаны действовать так, чтобы не было **B**: $O\mathbf{A}\ \&\ (\mathbf{B} \rightarrow \neg\mathbf{A}) \rightarrow O\neg\mathbf{B}$. Согласно другому принципу: $O\neg\mathbf{B} \rightarrow \neg O\mathbf{B}$. В этом случае можно доказать, что:

$(O\mathbf{A}\ \&\ O\mathbf{B}) \rightarrow (\neg\Diamond(\mathbf{A}\ \&\ \mathbf{B}) \rightarrow (O\mathbf{A}\ \&\ \neg O\mathbf{B}))$:

1.	$O\mathbf{A}\ \&\ O\mathbf{B}$	- посылка
2.	$\neg\Diamond(\mathbf{A}\ \&\ \mathbf{B})$	- посылка
3.	$\neg\Diamond(\mathbf{A}\ \&\ \mathbf{B}) \rightarrow \Box\neg(\mathbf{A}\ \&\ \mathbf{B})$	- схема аксиом
4.	$\Box\neg(\mathbf{A}\ \&\ \mathbf{B})$	- 2, 3, modus ponens
5.	$\neg(\mathbf{A}\ \&\ \mathbf{B})$	- 4
6.	$\mathbf{B} \rightarrow \neg\mathbf{A}$	- 5
7.	$O\mathbf{A}$	- 1
8.	$O\mathbf{A}\ \&\ (\mathbf{B} \rightarrow \neg\mathbf{A}) \rightarrow O\neg\mathbf{B}$	- первый принцип
9.	$O\mathbf{A}\ \&\ (\mathbf{B} \rightarrow \neg\mathbf{A})$	- 7, 6
10.	$O\neg\mathbf{B}$	- 9, 8, modus ponens
11.	$O\neg\mathbf{B} \rightarrow \neg O\mathbf{B}$	- второй принцип
12.	$\neg O\mathbf{B}$	- 10, 11, modus ponens
13.	$O\mathbf{B}$	- 1
[14.]	$O\mathbf{B}\ \&\ \neg O\mathbf{B}$	- 13, 12

Представляется, что *одна* из причин случаев такого рода нарушения корректности систем деонтической логики и, соответственно, нормативных систем, на них основывающихся, заключается в том, что в стандартных моделях, используемых в семантических основаниях деонтической логики, *не* отражается зависимость норм от времени. Нами было предложено модифицировать эти модели посредством временной квалификации нормативных высказываний [6].

В предложении используется модель времени в виде *дискретной, ветвящейся "влево" и бесконечной в обоих направлениях временной структуры* $\mathfrak{I}_b = \langle T, < \rangle$, состоящая из (непустого) базисного множества ("моментов") $T = \{x, y, z, \ldots\}$ и двухместного отношения на нем "раньше-позже" $<$.

Считая, что заранее ни одно из "возможных будущих" нельзя квалифицировать как действительное, - не делая при этом уступок фатализму, - используем следующие временные операторы:

F', при этом $F'\mathbf{A}$ обозначает "необходимо, будет (когда-нибудь) так, что $\mathbf{A}$";

F'', при этом $F''\mathbf{A}$ обозначает "необходимо и притом в определенное время («в свой срок») будет так, что $\mathbf{A}$";

G', при этом $G'\mathbf{A}$ обозначает "необходимо, всегда будет так, что $\mathbf{A}$";

P, при этом $P\mathbf{A}$ обозначает "когда-то было так, что $\mathbf{A}$".

Общепринятым образом определяем в качестве сокращений:

$Df.g$: $g\mathbf{A} = \rceil F' \rceil \mathbf{A}$:= возможно, всегда будет так, что $\mathbf{A}$;

$Df.g'$: $g'\mathbf{A} = \rceil F'' \rceil \mathbf{A}$:= возможно, всегда, кроме некоторого времени, будет так, что $\mathbf{A}$;

$Df.f$: $f\mathbf{A} = \rceil G' \rceil \mathbf{A}$:= возможно, когда-нибудь будет так, что $\mathbf{A}$;

$Df.H$: $H\mathbf{A} = \rceil P \rceil \mathbf{A}$:= всегда было так, что $\mathbf{A}$.

Определенным образом задаются условия истинности овремененных высказываний. Соответствующая система временной логики $\boldsymbol{K}_b$ является полной и разрешимой [3,4].

Полнота обосновывалась нами ранее [4].

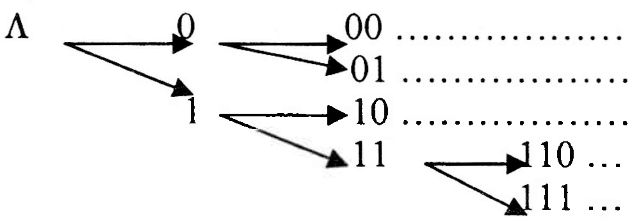
Разрешимость системы обосновывается посредством метода, разработанного М.О. Рабином [12] и приспособленного к области неклассической логики Д. Габбаем [8]. Его основная идея состоит в следующем. Пусть имеется некоторая *разрешимая* теория $Fth(\boldsymbol{K}_0)$, а $Fth(\boldsymbol{K})$ – это исследуемая теория. Допустим, что у нас есть (вычислимое) отображение *intr*, которое переводит каждую формулу β языка L теории $Fth(\boldsymbol{K})$ в формулу $\beta^+ = intr(\beta)$ языка L_0 теории $Fth(\boldsymbol{K}_0)$ так, что $\beta \in Fth(\boldsymbol{K})$, если и только если $\beta^+ \in Fth(\boldsymbol{K}_0)$.

При этих условиях, очевидно, $Fth(\boldsymbol{K})$ оказывается разрешимой: чтобы определить, выполняется ли $\beta \in Fth(\boldsymbol{K})$, нужно найти β^+ и проверить, выполняется ли $\beta^+ \in Fth(\boldsymbol{K}_0)$.

Интерпретация связана с теоретико-модельными рассмотрениями: задача состоит в том, чтобы модели для теории $Fth(\boldsymbol{K})$ изоморфно, с помощью предикатов, определимых в языке L_0, воспроизвести из моделей для теории $Fth(\boldsymbol{K}_0)$.

В качестве "эталонной" теории $Fth(\boldsymbol{K}_0)$ берется монадическая второпорядковая теория "структуры Рабина", или, как еще ее называют, “теория двух функций последователя” ***S2S***. Ее разрешимость доказана Рабином.

Пусть $\Sigma = \{0, 1\}$, Tr_2 – множество всех слов (конечных последовательностей) $x = x_1x_2x_3 \ldots x_n$ (где $x_i \in \Sigma$) над алфавитом Σ. Пустая последовательность (обозначается Λ) тоже входит в Tr_2. Пусть, далее, на множестве Tr_2 определены две “функции последователя”: r_0: $Tr_2 \Rightarrow Tr_2$ и r_1: $Tr_2 \Rightarrow Tr_2$ – такие, что $r_0(x) = x0$, а $r_1(x) = x1$, где $x \in Tr_2$. Тогда множество Tr_2 можно интерпретировать как бесконечное двоичное “дерево”: элементы x_i – это его точки разветвления (их еще называют “вершинами”), а пустое множество Λ является его корнем. Для элемента x_i элементы x_i0 и x_i1 называются его “последователями”. Можно условиться помечать посредством 0 разветвление “вверх”, а посредством 1 – разветвление “вниз”. Тогда, например, для элемента 1 “нижний последователь” есть элемент 11, а “верхний последователь” есть 110 и т.д.



Множество всех высказываний на описанном языке, истинных в структуре Рабина $\boldsymbol{T}_r = \{\Sigma, r_0, r_1\}$ $Th_2(T_r)$ (“2” в обозначении говорит, что это – теория двух функций последователя).

<u>Теорема о разрешимости для дерева</u>: Монадическая второпорядковая теория двух функций последователя $Th_2(\boldsymbol{T}_r)$ является разрешимой [12].

Очевидно, *дискретная*, ветвящаяся влево и бесконечная в обоих направлениях временная структура может быть “перекодирована” в “структуру Рабина”.

В самом деле, названная древовидная временная структура характеризуется следующими условиями:

(а) иррефлексивность: $\forall x \neg (x < x)$

(б) транзитивность: $\forall xyz(x < y \,\&\, y < z \Rightarrow x < z)$

(в) бесконечность: $\forall x \exists y(y < x) \,\&\, \forall x \exists y\, (x < y)$

(г) древовидность: $\forall xyz(y<x \;\&\; z<x \;\Rightarrow\; y<z \;\vee\; y \equiv z \;\vee\; z<y)$

(д) связность: $\forall xy(\neg(x \equiv y) \Rightarrow \exists z(z <x \;\&\; z < y))$

(е) дискретность: $\forall x(\exists y(y < x) \Rightarrow \exists y\, (y < x \;\&\; \neg z(y < z \,\&\, z < x)))$

$\&$: $\forall x(\exists y(x < y) \Rightarrow \exists y\, (x < y \;\&\; \neg z(x < z \,\&\, z < y)))$

Условие (е) соответствует использованию в качестве элементов временной структуры целых чисел. Всякое же упорядоченное множество последовательностей целых чисел, конечно же, может быть “перекодировано” в “структуру Рабина”. В “топологическом” отношении видно, что всякое разветвление (с любым счетным числом “ветвей”) в древовидной временной структуре можно заменить соответствующим числом двоичных разветвлений в “структуре Рабина”. Так что система $\boldsymbol{K}_b$ является разрешимой.

В предлагаемой системе деонтической логики, построенной на основе системы $\boldsymbol{K}_b$ и, таким образом, получающей временную квалификацию, вводится отношение "*исторического тождества*":

$\alpha \cong_t \beta$,если и только если (еие) $\alpha(t') = \beta(t')$ для каждого $t' < t$, и релятивизируется деонтическая альтернативность миров:

R_t : если $\alpha R_t \beta$, то $\alpha \cong_t \beta$.

Соответственно, означивание есть теперь:

V_t : если $\alpha(t) = \beta(t)$, то $\alpha \in w_i(t)$ еие $\beta \in w_i(t)$.

В переформулированной посредством временной квалификации модели $\mu_t = \langle W_t, R_t, V_t \rangle$, где W_t – декартово произведение множества W и множества T, высказывания означиваются по отношению к парам $\langle \alpha, t \rangle$, а выражение $\mu_t \models \mathrm{A}(\alpha,t)$ обозначает "A истинно в мире α во время t".

Релятивизируются условия истинности:

(1) $\mu_t \models p_i(\alpha,t)$ если и только если (еие) $\alpha \in w_i(t)$, для $i = 0, 1, 2, \ldots$

(2) $\mu_t \models \mathbf{A}(\alpha,t)$ еие $\langle \alpha,t \rangle \in V_t(\mathbf{A})$

(3) $\mu_t \models \urcorner\mathbf{A}(\alpha,t)$ еие не $\mu_t \models \mathbf{A}(\alpha,t)$ (или $\mu_t \not\models \mathbf{A}(\alpha,t)$)

(4) $\mu_t \models (\mathbf{A} \to \mathbf{B})(\alpha,t)$ еие не $\mu_t \models \mathbf{A}(\alpha,t)$ или $\mu_t \models \mathbf{B}(\alpha,t)$

(5) $\mu_t \models O\mathbf{A}(\alpha,t)$ еие $\forall \beta \in W_t(\alpha R_t \beta \Rightarrow \mu_t \models \mathbf{A}(\beta,t))$

и, – опять-таки, очевидным образом – для овремененных высказываний; например:

(6) $\mu_t \models H\mathbf{A}(\alpha,t)$ еие $\forall t' \in T(t' < t \Rightarrow \mu_t \models \mathbf{A}(\alpha,t'))$

(7) $\mu_t \models P\mathbf{A}(\alpha,t)$ еие $\exists t' \in T(t' < t \ \& \ \mu_t \models \mathbf{A}(\alpha,t'))$

Деонтическим операторам теперь можно придать вполне естественную *временную интерпретацию*. Для этого в используемый язык вводятся два *модально-временных* оператора:

оператор "исторической" необходимости $\Box_t$:

(8) $\mu_t \models \Box_t\mathbf{A}(\alpha,t)$ еие $\forall \beta \in W_t(\alpha \cong_t \beta \Rightarrow \mu_t \models \mathbf{A}(\beta,t))$

и оператор "исторической" возможности $\Diamond_t$:

(9) $\mu_t \models \Diamond_t\mathbf{A}(\alpha,t)$ еие $\exists \beta \in W_t(\alpha \cong_t \beta \ \& \ \mu_t \models \mathbf{A}(\beta,t))$.

Еще определяется особый *деонтически-временной* оператор O_t:

(10) $Df.O_t$: $O_t\mathrm{A} = \Box_t\mathbf{A} \vee \Box_t \urcorner\mathbf{A}$.

Это – выражение понятия некоторого рода исторической *предопределенности*. При условии, что заданы возможный мир и время, оно означает, что *независимо от человеческих действий* положение дел, описанное в суждении, выраженном посредством высказывания **A**, или выполняется в каждом из миров, имеющих в данное время ту же самую историю, что и данный мир, или не выполняется ни в одном из таких миров.

Допустим теперь, что, напротив, **A** является таким, что на него условие (10) *не* распространяется, то есть соответствующее действие является *выполнимым в прагматическом смысле.* И пусть, далее, мы хотим, чтобы следующим за данным (в настоящее время, текущим и т.д.) положением дел было бы так, что нечто, описываемое высказыванием **A**, *всегда* имеет место, или это нечто *когда-то* имеет место, или же оно имеет место *«в определенный срок»*, или, наконец, никогда *не* имеет места. Заметим, что невыполнение условия (10) означает, что речь идет о формулировании подлинных норм.

Из 27 формально возможных дизъюнкций, образованных из элементарных формул: $G\mathbf{A}'$, $F'\mathbf{A}$ и $\rceil F'\mathbf{A}$, различных, очевидно, только 7:

$G'\mathbf{A}$, которое позволяет определить деонтическую модальность “обязательно”;

$(G'\mathbf{A} \vee F'\mathbf{A})$, которое выражает “благоприятно”;

$(G'\mathbf{A} \vee \rceil F'\mathbf{A})$, которое выражает “либо обязательно, либо запрещено”;

$F'\mathbf{A}$, которое выражает “разрешено”;

$(F'\mathbf{A} \vee \rceil F'\mathbf{A})$, которое выражает “либо разрешено, либо запрещено”;

$\rceil F'\mathbf{A}$, которое выражает “запрещено”;

$(G'\mathbf{A} \vee F'\mathbf{A} \vee \rceil F'\mathbf{A})$, которое выражает “нормативно безразлично”.

И еще есть форма “разрешено в определенное время” – $F''\mathbf{A}$.

Очевидно, полнота и разрешимость системы временной логики $\boldsymbol{K_b}$ распространяется и на систему деонтической логики с выше приведенными деонтическими модальностями, определенными с помощью временных операторов системы $\boldsymbol{K_b}$.

Та часть логической системы, которая соответствует операторам $\Box_t$ и $\Diamond_t$, является, по крайней мере, системой типа $\boldsymbol{S5}$. "Смешанными" схемами доказуемых в ней формул являются, в частности:

ДВ.1 $\Box_t\mathbf{A} \rightarrow O\mathbf{A}$; эта схема соответствует условию R_t;

ДВ.2 $O\mathbf{A} \rightarrow \Diamond_t\mathbf{A}$; эта схема тоже следует из условия R_t и представляет собой (сильную) версию известного (кантовского) принципа "*должен* подразумевает *может*";

ДВ.3 $\Box_t\mathbf{A} \Leftrightarrow O\Box_t\mathbf{A}$ и

ДВ.4 $\Diamond_t\mathbf{A} \Leftrightarrow O\Diamond_t\mathbf{A}$; – согласно им, утверждения об обязанностях, если они касаются "исторически необходимых" или "возможных" вещей, оказываются нормативно бессодержательными.

Оператор, определенный в условии (10), позволяет сделать утверждение о том, что высказывания об исторически предопределенных вещах являются, в нормативном отношении, бессодержательными:

ДВ.5 $O_t\mathbf{A} \to (\mathbf{A} \Leftrightarrow O\mathbf{A})$.

Таким образом, временная квалификация нормативных высказываний, в самом деле, позволяет выразить *некоторые значимые* и интуитивно приемлемые положения, касающиеся нормативных рассуждений.

Однако в данном месте обратим внимание на то, что эти результаты ни в коем случае не означают преодоления многих *принципиальных трудностей*, стоящих на пути построения такой деонтической логики, которая была бы практически значимой, – прежде всего, для ее использования в разработке нормативных систем.

Конечно, речь не идет о системах "безупречных". Так можно назвать системы, которые гарантируют нам возможность избежать "тупиковых ситуаций", или, как это называется более научно, "эффекта Кондорсе", когда, несмотря на то что нормативная система является деонтически непротиворечивой, мы, тем не менее, в реально возникшей ситуации оказываемся не в состоянии принять какое-то решение как наиболее предпочтительное. Речь идет о том, чтобы уметь эффективно хотя бы во множестве *известных нам* наличных альтернатив находить решение, наиболее *удовлетворяющее* нашему критерию (уровню) притязания [7].

Напомним, что, как показал Г. Саймон [13], реальными ограничениями наших возможностей в принятии рациональных решений являются: (1) *неполнота информации* о множестве объективно существующих альтернатив; (2) *сложность* просчитывания тех альтернатив, которые нам известны, и, как результат, *невозможность* оценить их все; (3) *неопределенность* тех последствий, которых следует ожидать от каждой альтернативы.

Так что мы не в состоянии ни рассмотреть *все* возможные "варианты", ни, соответственно, выбирать *самую лучшую* из всех них, не говоря уже вообще о самой лучшей, так называемой (в теории игр и решений) *оптимальной*. Мы можем только продумать и сравнить относительно *небольшое* число альтернатив и только *частично*, то есть на какую-то небольшую "глубину". Так что действительные оценки окончательных решений остаются для нас неизвестными. Вместо них "вычисляются" *приближенные* оценки в *приближенном* проблемном пространстве.

Концепцию "ограниченной рациональности" Саймона можно дополнить еще упомянутым "эффектом Кондорсе": ведь, зная, что он составляет примерно 6 – 9% от всего объективно существующего множества альтернатив, мы *не* знаем, как именно этот эффект "поражает" древовидную структуру этого множества [5]. В реальном течении событий вполне может случиться и случается так, что в применении данной нормативной системы появляется противоречие. Спрашивается, как долго и насколько настойчиво мы должны выяснять, случилось это или нет. Если этого не делать, то вполне может оказаться так, что: (1) мы считаем, что следует выполнить некоторое действие p; при этом (2) q является нежелательным, и, объективно, имеет место (3) $p \rightarrow q$. Но затраты ресурсов (в том числе времени) на процедуру выяснения того, так ли это, могут превышать тот выигрыш, который связан с преимуществами избежания нежелательного (побочного) явления q.

Далее, названную концепцию можно дополнить указанием на то, что и при "нормальном" течении событий, то есть в области вне действия "эффекта Кондорсе", поиск даже удовлетворяющего решения связан с затратами разного рода ресурсов (включая и временные); при этом заранее неизвестно, окупятся ли эти затраты [9].

По-видимому, существуют и другие ограничения нашей рациональности. И, конечно же, введение временной квалификации нормативных высказываний позволяет только лучше их себе представлять, хотя и не устранить.

Теперь о трудностях, которые временная квалификация может *привнести*. Известно, что *все* существующие системы временной логики, которые являются (консервативными) расширениями "минимальной системы" $\boldsymbol{K}_t$ Э.Дж. Леммона, – а таковой является и используемая нами система $\boldsymbol{K}_b$, – в качестве "подразумеваемой" (онтологической) модели времени имеют "однородное" время. Это обусловлено тем, что соображения, которыми руководствовался Леммон при отборе постулатов для свой минимальной системы, являются чисто *математическими*. В самом деле, им оставлена такая совокупность постулатов временной логики, которая соответствует совокупности таких постулатов так называемого $\boldsymbol{U}$-исчисления, которые могут быть выведены из постулатов (классического) пропозиционального исчисления и теории квантификации без наложения каких-либо специальных условий на отношение временного ряда "раньше - позже" $\boldsymbol{U}$. А теория квантификации предполагает однородность квантифицируемых объектов в данном случае. Так что во временную логику с самого начала проникает предположение о том, что время является непременно *однородным* [2].

Но у нас нет никаких оснований, – во всяком случае, у нас в качестве *логиков*, – отвергать возможность того, что даже если, скажем, в прошлом время и было однородным, то в будущем это может оказаться не так. Например, с точки зрения *современной космологии*, однородность времени, вообще говоря, *не* обладает статусом универсального свойства: мелкие неоднородности в распределении гравитационных масс, будучи несущественными в больших масштабах, оказываются существенными при рассмотрении в малых масштабах и вызывают различие в темпе течения времени [1].

Сейчас трудно проследить, как именно такого рода нерешенные вопросы внутри временной логики могут повлиять на временную квалификацию деонтических операторов, но совсем не повлиять они, очевидно, не могут.

Так или иначе, приходится признать, что в настоящее время в семантике деонтической логики мы имеем дело с особого рода идеализациями, - "*деонтически совершенными мирами*". А именно: имеется "наш", исходный мир и миры, которые являются доступными из него; эти миры являются такими, что если какое-то множество их получено благодаря *разрешающей норме* (соответствующее положение дел выполняется хотя бы в одном из миров этого множества), то все положения дел, определяемые обязывающими нормами, во всех мирах названного множества выполняются. Так что они, в свою очередь, также являются деонтически совершенными по отношению к тому миру, из которого они "достижимы". Далее, оказывается, что если обязывающая норма, касающаяся некоторого положения дел p, выполняется в некотором мире, то, естественно, *все* логические следствия высказывания p являются в этом мире истинными. И если высказывание p является истинным, то истинным является и высказывание $(p \vee q)$. Так что не "просто так" оказываются теоремами: $Op \rightarrow O(p \vee q)$ и $Pp \rightarrow P(p \vee q)$: такое имеет место не в реальном мире, а в логически идеализированном совершенном мире.

Теперь задача состоит в том, чтобы выяснить, как "пройти дорогу" от идеализированных, "деонтически совершенных миров" к реальному миру? Представляется, что с помощью одной только логики этого сделать нельзя: ведь *ценности*, с которыми связано употребление норм, не определяются в рамках логики и даже науки в целом.

По отношению к алетической модальной логике собственно идея обоснованного продвижения от классической логики к неклассической была выдвинута впервые, по-видимому, У. Куайном в его докладе на XI Всемирном философском конгрессе в 1953 г. [11]. Во всяком случае Прайор, вводя в обиход выражение "ступени временно-логического вовлечения" ("grades of tense-logical involvement"), ссылается именно на работу Куайна [10].

Куайн выделяет три "ступени модального вовлечения". Первая состоит в том, что используется *особый предикат Nec*, который приписывается предложениям, рассматриваемым как *имена* высказываний о некоторых положениях дел. Например:

(1) *Nec* "$9 > 5$";

(2) *Nec* "теорема Штурма";

(3) *Nec* "Наполеон бежал с острова Эльба".

По-видимому, примеры (1) и (2) следует рассматривать как истинные высказывания, а (3) – как ложное: ведь необходимость в модальной логике, вообще говоря, является именно логической, то есть некоторого рода необходимостью *a priori*.

Вторая ступень связана с использованием *оператора над предложениями пес*. Соответственно, (1) и (3) преобразуются в:

(4) *nec* $(9 > 5)$;

(5) *nec* (Наполеон бежал с острова Эльба),

а (2) преобразуется посредством префиксирования оператора "*nec*" к самой формулировке знаменитой теоремы, а не к ее имени.

Таким образом, в то время как *Nec* является предикатом или глаголом "является необходимым", который присоединяется к некоторому "существительному" для того, чтобы образовать предложение, *nec* является скорее наречием "необходимо", которое присоединяется к какому-то предложению для того, чтобы образовать *тоже предложение*.

Третья ступень, которую Куайн справедливо называет самой важной, с точки зрения сути модальной логики, состоит в применении *оператора над высказываниями*. Эта ступень означает возможность присоединения *nec* не только к собственно высказываниям, то есть законченным высказываниям, но и к открытым высказываниям, то есть *формам высказываний,* тем самым в дальнейшем возможно и присоединение к ним кванторов:

(6) $\forall x$ *nec* $(x > 5)$;

(7) $\exists x$ *nec* $(x > 5)$;

(8)$\forall x[(x = 9) \rightarrow$ *nec* $(x > 5)]$.

Очевидно, в обычной предметной области математики (6) есть ложное высказывание, а (7) и (8) – истинные.

Представляется целесообразным установить некоторые "*градации*" в отношении деонтических модальностей. Если проводить параллели с вышеприведенным куайновским рассмотрением модальной логики, то в деонтической логике мы проводим различение между *нормами-высказываниями* и *высказываниями о нормах*. Очевидно, что оно имеет непосредственное отношение к различению модальностей *de re* и модальностей *de dicto*.

Можно видеть, что, - наподобие несовпадений вроде наличия теорем: $p \rightarrow \Diamond p$ и $\Box p \rightarrow p$ в алетической модальной логике и отсутствия их аналогов: $p \rightarrow Pp$ и $Op \rightarrow p$ в деонтической логике, при построении деонтической логики предикатов ситуация с так называемыми “формулами Баркан” тоже будет отличаться от того, что имеет место в алетической модальной логике. Например, хотя деонтическая формула $\forall x O\mathbf{A}(x) \rightarrow O\forall(x)\mathbf{A}(x)$ вполне сходна, с точки зрения интуитивной приемлемости (или неприемлемости) с модальной формулой $\forall x\Box\mathbf{A}(x) \rightarrow \Box\forall(x)\mathbf{A}(x)$, с формулами $P\exists x\mathbf{A}(x) \rightarrow \exists xP\mathbf{A}(x)$ и $\Diamond\exists x\mathbf{A}(x) \rightarrow \exists x\Diamond\mathbf{A}(x)$ дело обстоит иначе.

Но есть еще “градации” другого рода. В самом деле, и реальные и воображаемые “миры” могут отличаться друг от друга по *степени их приближения* к некоторому “идеальному миру”. Соответственно, например, для разрешающих норм можно попытаться определить: “в какой-то мере терпимо”, “едва-едва допустимо”, “(просто) позволительно”, “вполне допустимо”, “совершенно разрешено”. Выше были приведены примеры некоторых подобных различий, осуществимых благодаря временной квалификации деонтических модальностей.

В заключение, основываясь на всем изложенном выше, следует признать, что на пути построения деонтической логики стоит очень много и притом значительных проблем.

ЛИТЕРАТУРА

1. *Зельманов А.Л.* Многообразие материального мира и проблема бесконечности Вселенной // Бесконечность и Вселенная. М.: Мысль, 1969. С.274-329.
2. *Караваев Э.Ф.* Основания временной логики. Л.: Изд-во ЛГУ, 1983.
3. *Караваев Э.Ф.* Проблемы семантики временной логики // Логика и теория познания. Л.: Изд-во ЛГУ,1990. С.119-128.
4. *Караваев Э.Ф.* Средства временной логики для представления процесса развития научного знания // Логика и развитие научного знания. СПб.: Изд-во СПбГУ, 1992. С.62-82.
5. *Караваев Э.Ф.* Ответственность и рациональность выбора: неизбежность моральных дилемм // «Человек – Философия- Гуманизм»: Основные доклады и обзоры Первого Российского философского конгресса (4-7 июня 1997 г.). В 9 томах. Т9. СПб.: Изд-во СПбГУ, 1998. С.161-170.
6. *Караваев Э.Ф.* О временной квалификации нормативных высказываний // *Логические исследования*. Вып.7. М.: Наука, 2000. С.277-284.
7. *Караваев Э.Ф.* Дополнение концепции “ограниченной рациональности” Г.Саймона // *Вестник СПбГУ*. 2002. Сер.6. Вып.3 (№22). С.33-37.
8. *Gabbay D.M.* Decidability results in non-classical logics. Part I // *Annals of Mathematical Logic*. 1975. Vol.8. No.3. P.237-295.
9. *Karavaev E.F.* The scientist’s responsibility under conditions of bounded rationality // Wissenschaft und Ethik in der Gesellschaft von heute / Her. Von H. Hofmeister, Y. Solonin, T. Tumanyan. St.Petersburg: Verl. Der Philosophischen St.Petersburg, 2004. P.58-71.

10. *Prior A.N.* Papers on time and tense. Oxford: Oxford University press, 1968.
11. *Quine W. von.* Three grades off modal involvement // The ways of paradox and other essays. N.Y.: Random House, 1966. P.156-174.
12. *Rabin M.O.* Decidability of second order theories and automata on infinite trees // *Transactions of American Mathematical Society.* 1969. Vol.141. P.1-35.
13. *Simon H.A.* Theories of bounded rationality // Decision and organization: A volume in honor of Jakob Marschak / Ed. by C.B.McGuire, Roy Rader. Amsterdam; London: North-Holland Publ. Co., 1972. P.161-176.

И.А. Карпенко

ПОГРУЖАЮЩИЕ ОПЕРАЦИИ И ИХ ПРИМЕНЕНИЕ

Abstract. *Known definitions of translations between logic systems are considered and compared. Examples of embeddings of classical logic into intuitionistic logic are resulted. Embedding of classical propositional logic into a number of paraconsistent logics is constructed.*

В современной логике все чаще применяются различного рода переводы для изучения логических систем. Использование специального вида переводов – погружающих операций – позволяет устанавливать разрешимость и неразрешимость логических систем, проводить доказательства отделимости фрагментов логических исчислений, интерпретировать одно логическое исчисление в семантике другого логического исчисления, выявлять дедуктивные возможности формальных теорий.

Если в лингвистике теория перевода начала разрабатываться еще в XVI веке, то в логике к ее формированию приступили только в середине XX века [1]. Естественно, первые логические переводы были предприняты намного раньше [2]. Хотя до сих пор не существует завершенной логической теории перевода, появление большого количества работ, посвященных данной проблеме, свидетельствует о ее актуальности.

В логике перевод одного исчисления в другое осуществляется посредством отображения, сопоставляющего формулам языка первого исчисления формулы языка второго исчисления. Это отображение, вслед за Н.А. Шаниным, принято называть "погружающей операцией", хотя отображение далеко не всегда является операцией (погружающие операции строят также для исчислений, сформулированных в разных языках). Кроме того, вслед за В.А. Смирновым, различают перевод и погружающую операцию.

Применение погружающих операций для изучения логических систем оправдывается некоторыми свойствами логических систем, которые возможно устанавливать посредством погружающих операций. Имеет смысл рассматривать эти свойства в философском и техническом аспектах.

В философском плане, погружение позволяет изображать одну теорию в терминах другой. Погружение неинтерпретированного исчисления в исчисление, наделенное семантикой, решает проблему семантической осмысленности формул первого из этих исчислений и способствует тем самым пониманию того, какова природа логических отношений, формализованных в этом исчислении.

Встает вопрос о роли отрицания в языке: погружая исчисление, язык которого содержит негацию, в другое позитивное исчисление или собственную позитивную часть, мы получаем возможность формулировать истины первого исчисления только утвердительными выражениями, то есть не говоря "не".

В техническом аспекте, как уже говорилось, следует обратить внимание на проблему разрешимости. Так, в результате погружения какого-либо исчисления в какое-либо разрешимое исчисление положительно решается вопрос о разрешимости первого, в результате погружения какого-либо неразрешимого исчисления C_1 в какое-либо исчисление C_2 устанавливается неразрешимость исчисления C_2, погружение исчисления C в его фрагмент, язык которого не содержит некоторых логических констант, имеющихся в языке L исчисления C, позволяет изображать теоремы исчисления C теоремами этого же исчисления, записанными на языке, число логических констант которого меньше, чем в L. Например, В.М. Попов [3] погружает исчисление, аксиоматизирующее классическую пропозициональную логику, в его импликативный фрагмент, а также в импликативный фрагмент интуиционистской пропозициональной логики. С использованием погружающих операций доказывается отделимость фрагментов в исчислениях, что также было показано В.М. Поповым [3].

Указанные здесь свойства имеют большое значение для понимания логических систем, и, как становится ясно в современной логике, аппарат погружающих операций удобен для доказательства наличия этих свойств.

Определением погружающих операций и систематизацией погружений интересовались Д. Правиц и П. Малмнас [5], В. Карниэлли и Д`Оттавиано [6], Р. Эпштейн [7]. Последний предложил определение перевода, претендующее на универсальность.

Впервые погружающая операция была введена, как утверждает В.А. Смирнов [8, с.120], А.Н. Колмогоровым [2] в 1925 году. В [2] строится погружение классической арифметики в интуиционистскую арифметику.

Рассмотрим и сравним самые важные, на наш взгляд, определения погружающей операции. Для этого приведем определение погружающей операции, принадлежащее В.А. Смирнову [8], и осуществим реконструкции принадлежащих Р. Вуйцицкому [9] и Р. Эпштейну [7] определений погружающей операции.

Определение В.А. Смирнова из [8]:

Пусть T_1 и T_2 теории, сформулированные соответственно в языках L_1 и L_2 с соответствующими логиками. Пусть φ – рекурсивная функция, сопоставляющая формулам языка L_1 формулы языка L_2 для всякой L_1-формулы A. Функция φ называется переводом теории T_1 в T_2, если выполняется условие: если $A \in T_1$, то $\varphi(A) \in T_2$. Если выполняется дополнительное условие: если $\varphi(A) \in T_2$, то $A \in T_1$, то рекурсивная функция φ называется погружающей операцией теории T_1 в теорию T_2. Теория T_1 погружаема в теорию T_2, если и только если существует рекурсивная функция, погружающая T_1 в T_2.

Функция φ называется погружением исчисления C_1, язык которого есть L_1, в исчисление C_2, язык которого есть L_2, если для всякой L_1-формулы α выполняется следующее условие:

$\vdash_{C1} A$, т.т.т. $\vdash_{C2} \varphi(A)$.

Реконструкция определения Р. Вуйицкого погружающей операции.

Пусть языки L_1 и L_2 – стандартно определяемые пропозициональные языки и множество $\{p_1, p_2, p_3, \ldots\}$ всех пропозициональных переменных языка L_1 равно множеству всех пропозициональных переменных языка L_2, C_1 есть пропозициональное исчисление, язык которого есть L_1, C_2 есть пропозициональное исчисление, язык которого есть L_2, T_1 есть C_1-теория и T_2 есть C_2-теория. i-погружением (i – натуральное число) языка L_1 в язык L_2 называется отображение φ множества всех L_1-формул во множество всех L_2-формул, если выполняется следующее условие:

(1) существует формула ϕ в L_2 от одной пропозициональной переменной p_i такая, что для всякой пропозициональной переменной p, $\varphi(p)=[p_i/p]\phi$, где $[p_i/p]\phi$ есть результат подстановки p вместо p_i в ϕ,

(2) для всякой k-местной ($k \geq 0$) связки r_i языка L_1 существует формула ϕ_i языка L_2 такая, что для всяких формул $\alpha_1, \ldots, \alpha_k$ языка L_1

$$\varphi(r_i(\alpha_1, \ldots, \alpha_k))=[p_1/\varphi(\alpha_1), \ldots, p_k/\varphi(\alpha_k)]\phi_i,$$

где $[p_1/\varphi(\alpha_1), \ldots, p_k/\varphi(\alpha_k)]\phi_i$ есть результат подстановки $\varphi(\alpha_1)$ вместо p_1, …, $\varphi(\alpha_k)$ вместо p_k в ϕ.

Погружающей операцией теории T_1 в теорию T_2 называется любое i-погружение языка L_1 в язык L_2 такое, что для всякой формулы α языка L_1 верно следующее:

$$\alpha \in \Gamma_1 \text{ т.т.т. } \varphi(\alpha) \in T_2.$$

Погружающей операцией исчисления C_1 в исчисление C_2 называется i-погружение языка L_1 в язык L_2 такое, что для всякой формулы α языка L_1 верно следующее:

$$\vdash_{C1} \alpha, \text{ т.т.т. } \vdash_{C2} \varphi(\alpha).$$

Реконструкция определения Р. Эпштейна погружающей операции:

Пусть $L_{\supset\neg}$ есть стандартно определяемый пропозициональный язык, множество всех логических констант которого есть $\{\supset,\neg\}$, при этом $\supset$ – бинарная, а $\neg$ – унарная логические связки языка $L_{\supset\neg}$. Пусть L_1 и L_2 – стандартно определяемые языки, C_1 есть пропозициональное исчисление, язык которого есть L_1, C_2 есть пропозициональное исчисление, язык которого есть L_2.

Погружением исчисления C_1 в исчисление C_2 назовем отображение φ множества всех L_1-формул во множество всех L_2-формул такое, что для всякой L_1-формулы α и всякого множества Γ L_1-формул выполняется следующее условие:

$$\Gamma \vdash_{C1}\alpha, \text{ т.т.т. } \varphi(\Gamma) \vdash_{C2}\varphi(\alpha),$$

где $\varphi(\Gamma)=\{\varphi(\alpha):\alpha\in\Gamma\}$.

Пусть A, B и C есть L_1-формулы. i-грамматическим A-B-C отображением (i – натуральное число) языка $L_{\supset\neg}$ в язык L_1 такой, что множество всех пропозициональных переменных языка $L_{\supset\neg}$ равно множеству всех пропозициональных переменных языка L_1, по Эпштейну, называется отображение * множества всех $L_{\supset\neg}$-формул во множество всех L_1-формул, удовлетворяющее следующим условиям:

1) $\varphi(p)=[p_i/p]A$, где $[p_i/p]A$ есть результат подстановки p вместо p_i в формулу A,

2) $\varphi(\alpha\supset\beta)=[p_1/\varphi(\alpha),p_2/\varphi(\beta)]B$, где α и β есть формулы языка $L_{\supset\neg}$, а $[p_1/\varphi(\alpha), p_2/\varphi(\beta)]B$ есть результат подстановки $\varphi(\alpha)$ вместо p_1 и $\varphi(\beta)$ вместо p_2 в формулу B,

3) $\varphi(\neg\alpha)=[p_1/\varphi(\alpha)]C$, где α есть формула языка $L_{\supset\neg}$, а $[p_1/\varphi(\alpha)]C$ есть результат подстановки $\varphi(\alpha)$ вместо p_1 в формулу C.

Грамматическим погружением исчисления C_1, язык которого есть $L_{\supset\neg}$ в исчисление C_2, языку которого принадлежат все те и только те пропозициональные переменные, которые принадлежат языку $L_{\supset\neg}$, по Эпштейну, называется погружение φ исчисления C_1 в исчисление C_2 такое, что для некоторых L_1-формул A, B и C и некоторого натурального числа i φ есть i-грамматическое A-B-C-отображение языка $L_{\supset\neg}$ в язык исчисления C_2.

Грамматическое отображение называется гомофонным, если каждая связка отображается сама в себя. Грамматическое погружение есть грамматическое отображение, которое является погружением.

Легко заметить, что В.А. Смирнов определяет погружение для теорий и исчислений, Вуйицкий – для языков, теорий и исчислений, Эпштейн для исчислений. Таким образом, и В.А. Смирнов и Вуйицкий и Эпштейн определяют погружение исчисления в исчисление. Сравним эти определения. Определения Вуйицкого и Эпштейна отличаются от определения В.А. Смирнова по существу только наличием требования индуктивного определения погружающей операции. Поэтому всякое погружение в смысле Вуйицкого и всякое грамматическое погружение в смысле Эпштейна является погружением в смысле В.А. Смирнова. Эпштейн в определении погружающей операции ставит обязательным условием того, что отображение φ есть грамматическое погружение исчисления C_1 в исчисление C_2, более сильное требование, чем в соответствующем определении Вуйицкий. Требование Эпштейна таково: для всякого множества Γ формул языка исчисления C_1 и всякой формулы α данного языка верно, что $\Gamma \vdash_{C1} \alpha$, т.т.т. $\varphi(\Gamma) \vdash_{C2} \varphi(\alpha)$. Согласно определению Вуйицкого, погружение φ исчисления C_1 в исчисление C_2 удовлетворяет следующему условию: $\vdash_{C1} \alpha$, т.т.т. $\vdash_{C2} \varphi(\alpha)$. В пункте (1) определения погружающей операции по Вуйицкому требуется существование формулы ϕ от одной пропозициональной переменной p_0 такой, что для всякой пропозициональной переменной p, $\varphi(p)=[p_i/p]\phi$, где $[p_i/p]\phi$ есть результат подстановки p вместо p_i в ϕ. Из текста Эпштейна не вполне ясна его позиция относительно аналогичного требования в пункте 1) определения погружающей операции, но если допустить, что он выдвигает такое же требование, то справедливо заключить, что всякое грамматическое погружение в смысле Эпштейна является погружением в смысле Вуйицкого. В противном случае, если Эпштейн не выдвигает такое требование, можно предположить, что существуют исчисления, для которых имеет место погружение в смысле Вуйицкого, но не имеет места грамматическое погружение в смысле Эпштейна, и существуют исчисления, для которых имеет место грамматическое погружение в смысле Эпштейна, но не имеет места погружение в смысле Вуйицкого.

Рассмотрим примеры погружения классической логики в интуиционистскую логику.

Для этого зададим исчисления PC (классическое пропозициональное исчисление) и Int (интуиционистское пропозициональное исчисление), следуя [10].

Язык этих исчислений есть $L_{\wedge\vee\supset\neg}$. Исчисления PC и Int являются исчислениями гильбертовского типа со стандартно определяемым понятием доказательства, а множеству всех правил вывода каждого из этих исчислений принадлежит только одно правило – правило модус поненс в языке $L_{\wedge\vee\supset\neg}$. Поэтому для задания любого из этих исчислений остается определить множество всех его аксиом.

Множество всех аксиом исчисления PC есть множество всех $L_{\wedge\vee\supset\neg}$-формул, каждая из которых имеет хотя бы один из следующих видов (A, B и C – $L_{\wedge\vee\supset\neg}$-формулы):

1.$A\supset(B\supset A)$,
2.$(A\supset(B\supset C))\supset((A\supset B)\supset(A\supset C))$,
3.$(A\wedge B)\supset A$,
4.$(A\wedge B)\supset B$,
5.$A\supset(B\supset(A\wedge B))$,
6.$A\supset(A\vee B)$,
7.$B\supset(A\vee B)$,
8.$(A\supset C)\supset((B\supset C)\supset((A\vee B)\supset C))$,
9.$(A\supset B)\supset((A\supset(\neg B))\supset(\neg A))$,
10.$(\neg(\neg A))\supset A$.

Множество всех аксиом исчисления Int есть объединение множества всех формул, каждая из которых является формулой хотя бы одного из перечисленных выше видов 1.-8. с множеством всех формул вида: 9`.$(\neg A)\supset(A\supset B)$.

Гливенко [11] в 1929 году предложил операцию, погружающую классическую пропозициональную логику в интуиционистскую логику, язык которых есть $L_{\wedge\vee\supset\neg}$. Эта погружающая операция сопоставляет каждой $L_{\wedge\vee\supset\neg}$-формуле A $L_{\wedge\vee\supset\neg}$-формулу $\neg(\neg A)$. Используя введенную терминологию, результат Гливенко можно сформулировать в виде следующей теоремы:

T1. $\Gamma \vdash_{PC} A$ т.т.т. $\neg(\neg\Gamma) \vdash_{Int} \neg(\neg A)$.

Здесь $\neg(\neg\Gamma) = \{\neg(\neg B): B\in\Gamma\}$.

Любопытен факт, что аналог погружающей операции, предложенной Гливенко, не является операцией, погружающей классическую первопорядковую логику в интуиционистскую первопорядковую логику.

Погружаюшщая операция Гливенко не является погружающей операцией в смыслах Р. Вуйцицкого и Р. Эпштейна.

В 1933 году Гёдель показал [12], что Int может рассматриваться как расширение классической пропозициональной логики, сформулированной в языке $L_{\wedge\neg}$. Уточним сказанное. Пусть $PC_{\wedge\neg} = \{A$: A – формула в $L_{\wedge\neg}$ и $\vdash_{PC} A\}$. Тогда результат Гёделя из [12] можно сформулировать в виде следующей теоремы T2.

T2. Для всякой $L_{\wedge\neg}$-формулы A верно, что $A\in PC_{\wedge\neg}$ т.т.т. $\vdash_{Int} A$.

Доказательство этой теоремы справа налево очевидно, так как множество всех теорем Int включается во множество всех теорем PC. Докажем, что если $A\in PC_{\wedge\neg}$, то $\vdash_{Int} A$.

Доказательство проводится индукцией по построению $L_{\wedge\neg}$-формулы A.

Имеем три возможности: 1) A есть пропозициональная переменная, 2) A есть $\neg B$, 3) A есть $B_1\wedge B_2$.

Рассмотрим 1). В этом случае требуется доказать, что если $p_i \in PC_{\wedge\neg}$, то $\vdash_{Int} p_i$. Но ни одна пропозициональная переменная не может быть теоремой исчисления PC. Поэтому, в силу известных свойств классической импликации, получаем, что, то $\vdash_{Int} p_i$.

Рассмотрим 2). В этом случае требуется доказать, что если $\neg B \in PC_{\wedge\neg}$, то $\vdash_{Int} \neg B$. Но это верно в силу результата Гливенко [11] о том, что для всякой формулы $L_{\wedge\vee\supset\neg}$-формулы A $\vdash_{PC} \neg A$ т.т.т. $\vdash_{Int} \neg A$.

Рассмотрим 3). В этом случае требуется доказать, что если $B_1 \wedge B_2 \in PC_{\wedge\neg}$, то $\vdash_{Int} B_1 \wedge B_2$. В силу известных свойств $PC_{\wedge\neg}$ верно, что а) если $B_1 \wedge B_2 \in PC_{\wedge\neg}$, то $B_1 \in PC_{\wedge\neg}$ и $B_2 \in PC_{\wedge\neg}$.

По индуктивному допущению имеем: b) если $B_1 \in PC_{\wedge\neg}$, то $\vdash_{Int} B_1$ и если $B_2 \in PC_{\wedge\neg}$, то $\vdash_{Int} B_2$.

Известно, что с) $\vdash_{Int} B_1 \supset (B_2 \supset (B_1 \wedge B_2))$. Из а), b) и с) по определению доказательства в Int получаем, что $\vdash_{Int} B_1 \wedge B_2$.

Таким образом, теорема Т2 доказана.

Простота этого доказательства демонстрирует удобство использования одних результатов о погружениях для построения других погружений.

В 1952 году Я. Лукасевич [13] погрузил (нижеследующая теорема Т3) PC в Int посредством следующей погружающей операции *:

$(p)^* = p$

$(A \wedge B)^* = (A)^* \wedge (B)^*$

$(\neg A)^* = \neg (A)^*$

$(A \vee B)^* = \neg((\neg(A)^*) \wedge (\neg(B)^*))$

$(A \supset B)^* = \neg((A)^* \wedge (\neg(B)^*))$,

Т3: $\vdash_{PC} A$ т.т.т. $\vdash_{Int} (A)^*$.

Как утверждает Эпштейн (см. [7, p. 213]), погружение в смысле Т3 не сохраняет отношения присоединения следствий, так как следующее утверждение (♦) неверно: $\forall\Gamma\forall A$ (если Γ есть множество $L_{\supset\neg\wedge\vee}$-формул и A есть $L_{\supset\neg\wedge\vee}$-формула, то $\Gamma \vdash_{PC} A$ т.т.т. $\Gamma^* \vdash_{INT} A^*$.

Покажем, что утверждение (♦) неверно.

Допустим, что (♦). Тогда (i) $\neg\neg p_1 \vdash_{PC} p_1$ т.т.т. $(\neg\neg p_1)^* \vdash_{Int} (p_1)^*$.

(ii) $(\neg\neg p_1)^* = p_1$ – по определению операции *,

(iii) $(p_1)^* = p_1$ – по определению операции *,

(iv) $\neg\neg p_1 \vdash_{PC} p_1$ т.т.т. $\neg\neg p_1 \vdash_{Int} p_1$ – из (i), (ii) и (iii).

Известно, что (v) $\neg\neg p_1 \vdash_{PC} p_1$,

(vi) $\neg\neg p_1 \vdash_{Int} p_1$ – из (iv) и (v),

(vii) $\vdash_{Int} \neg\neg p_1 \supset p_1$ – из (vi) в силу теоремы дедукции для Int.

Однако известно, что $\vdash_{Int} \neg\neg p_1 \not\supset p_1$.

Таким образом, допущение (♦) неверно.

Еще одно погружение PC в Int, предложенное Генценом в 1936 году [14], сохраняет отношение присоединения следствий. Им строится определяемая ниже погружающая операция ° и доказывается нижеследующая теорема.

$(p)^{\circ}=\neg\neg p$
$(A\wedge B)^{\circ}=(A)^{\circ}\wedge(B)^{\circ}$
$(\neg A)^{\circ}=\neg(A)^{\circ}$
$(A\vee B)^{\circ}=\neg((\neg A)^{\circ}\wedge(\neg B)^{\circ})$
$(A\supset B)^{\circ}=(A)^{\circ}\supset(B)^{\circ}$,

T4: $\Gamma \vdash_{PC} A$ т.т.т. $(\Gamma)^{\circ} \vdash_{Int} (A)^{\circ}$.

В 2000 году вышла работа [3] В.М. Попова, в которой классическая пропозициональная логика погружается в импликативный фрагмент интуиционистской пропозициональной логики.

В [3] классическая пропозициональная логика представлена посредством исчисления $Cl_{\supset f}$, язык которого есть $L_{\supset f}$. Аксиомами исчисления $Cl_{\supset f}$ являются те и только те $L_{\supset f}$-формулы, каждая из которых имеет вид $A\supset(B\supset A)$ или $(A\supset B)\supset((A\supset(B\supset C))\supset(A\supset C))$ или $((A\supset f)\supset f)\supset A$. Правило вывода: A, $A\supset B/B$ в $L_{\supset f}$.

Импликативный фрагмент интуиционистской пропозициональной логики представлен в [3] исчислением $Int_{\supset}$. Его аксиомами являются те и только те $L_{\supset}$-формулы, каждая из которых имеет вид $A\supset(B\supset A)$ или $(A\supset B)\supset((A\supset(B\supset C))\supset(A\supset C))$. Правило вывода: A, $A\supset B/B$ в $L_{\supset}$.

В [3] определяются следующие операции: Сд (впервые предложенная В.М. Поповым в [15]) и T, где Сд есть отображение множества всех $L_{\supset f}$-формул во множество всех $L_{\supset}$-формул, а T есть отображение множества всех $L_{\supset f}$-формул во множества всех $L_{\supset}$-формул.

$Сд(f) = p_1$,
$Сд(p_i) = p_{i+1}$ (где $i\in\{1,2,3,\ldots\}$),
$Сд(A\supset B) = Сд(A)\supset Сд(B)$.
$T(p_1) = p_1$,
$T(p_i) = (p_i\supset p_1)\supset p_1$ (где $i\in\{1,2,3,\ldots\}$),
$T(A\supset B) = T(A)\supset T(B)$.

Далее доказывается теорема (в нашей нотации T5).

T5: $\vdash_{Cl\supset f} A$ т.т.т. $\vdash_{Int\supset} T(Сд(A))$.

В качестве еще одного примера самостоятельно докажем теорему о погружении. Посредством описываемой ниже операции классическое пропозициональное исчисление из [10], обозначаемое PC, погружается в исчисления I_0, I_1, I_2 и I_3 из [16].

Все упомянутые выше исчисления являются исчислениями гильбертовского типа со стандартно определяемым понятием доказательства. Множеству всех правил вывода каждого из этих исчислений принадлежит только одно правило – правило модус поненс в соответствующем языке.

Исчисление PC. Множество всех аксиом исчисления PC есть множество всех формул, каждая из которых имеет хотя бы один из следующих видов:

1. $A\supset(B\supset A)$,
2. $(A\supset(B\supset C))\supset((A\supset B)\supset(A\supset C))$,
3. $(A\wedge B)\supset A$,
4. $(A\wedge B)\supset B$,
5. $A\supset(B\supset(A\wedge B))$,
6. $A\supset(A\vee B)$,
7. $B\supset(A\vee B)$,
8. $(A\supset C)\supset((B\supset C)\supset((A\vee B)\supset C))$,
9. $(A\supset B)\supset((A\supset(\neg B))\supset(\neg A))$,
10. $(\neg(\neg A))\supset A$.

Исчисления I_0, I_1, I_2 и I_3. Множество всех аксиом исчисления I_0 есть объединение множества всех аксиом исчисления PC, не содержащих $\neg$, со множеством всех формул, каждая из которых имеет хотя бы один из следующих видов:

1\`. $(\neg(D\supset D))\supset B$,
2\`. $(A\supset(\neg(B\supset B)))\supset(\neg A)$,
3\`. $(A\supset B)\supset((B\supset(\neg A))\supset(\neg A))$,
4\`. $A\supset((\neg A)\supset(\neg(B\supset B)))$,
5\`. $((B\supset A)\supset A)\supset((\neg A)\supset B)$

Здесь A не является пропозициональной переменной.

Множество всех аксиом исчисления I_1 получаем из множества всех аксиом исчисления I_0 за счет замены схем 2\` и 3\` на схемы 2\`\`. $(D\supset(\neg(B\supset B)))\supset(\neg D)$ и 3\`\`. $(D\supset B)\supset((B\supset(\neg D))\supset(\neg D))$ соответственно.

Множество всех аксиом исчисления I_2 получаем из множества всех аксиом исчисления I_0 за счет замены схем 4\` и 5\` на схемы 4\`\`. $D\supset((\neg D)\supset(\neg(B\supset B)))$ и 5\`\`. $((B\supset D)\supset D)\supset((\neg D)\supset B))$ соответственно.

Множество всех аксиом исчисления I_3 есть объединение множества всех аксиом исчисления I_0 со множеством всех формул вида: 6\`. $A\supset((\neg A)\supset((B\supset(\neg B))\supset(\neg B)))$.

Используя тот факт, что все рассматриваемые здесь логики[1], соответствующие исчислениям I_0, I_1, I_2, I_3, являются конечнознач-

---

[1] Логикой, соответствующей данному исчислению, называется множество всех теорем этого исчисления.

ными (см. [16], [17] и [18]), нетрудно доказать, что все они являются паралогиками в том смысле, что каждая из этих логик паранепротиворечива или параполна. Например, простое доказательство того, что логика I_2 является параполной, дано в [18, с. 61-62]. Можно доказать, что логика I_0 является паранепротиворечивой и параполной; логика I_1 является паранепротиворечивой, но не является параполной; логика I_2 является параполной, но не является паранепротиворечивой; логика I_3 является паранепротиворечивой и параполной. Замечание: из определений исчислений I_0, I_1, I_2 и I_3 следует, что множество всех теорем исчисления I_0 включается во множество всех теорем каждого из исчислений I_1, I_2 и I_3.

Определение операции ψ:

$\psi(p_i) = \neg p_i$ для всякой пропозициональной переменной p_i,

$\psi(A \bullet B) = \psi(A) \bullet \psi(B)$, где $\bullet \in \{\wedge, \vee, \supset\}$, а A и B произвольные формулы,

$\psi(\neg A) = \neg\psi(A)$, где A произвольная формула.

Интересен тот факт, что погружение, осуществляемое посредством этой операции, является гомофонным в смысле Эпштейна.

Теорема (о погружении исчисления PC в исчисление I_i ($i \in \{0,1,2,3\}$): для всякого i из $\{0,1,2,3\}$ и всякой формулы α верно, что $\vdash_{PC}\alpha$ т.т.т. $\vdash_{Ii}\psi(\alpha)$.

Для доказательства теоремы 1 достаточно доказать следующие утверждение (I) и утверждение (II).

Утверждение (I): для всякого i из $\{0,1,2,3\}$ и всякой формулы α верно, что если $\vdash_{PC}\alpha$, то $\vdash_{Ii}\psi(\alpha)$.

Утверждение (II): для всякого i из $\{0,1,2,3\}$ и всякой формулы α верно, что если $\vdash_{Ii}\psi(\alpha)$, то $\vdash_{PC}\alpha$.

Доказательство утверждения (I) проводится возвратной индукцией по длине PC-доказательства формулы α.

Доказательству утверждения (II) предпосылаются лемма 1, лемма 2 и лемма 3.

Лемма 1: для всякого i из $\{0,1,2,3\}$ и всякой формулы α верно, что если $\vdash_{Ii}\alpha$, то $\vdash_{PC}\alpha$.

Доказательство этой очевидной леммы, осуществляемое возвратной индукцией по длине доказательства в исчислении I_i ($i \in \{0,1,2,3\}$) формулы α, здесь не приводится.

Доказательство нижеследующей леммы 2 имеет семантический характер, поэтому нам потребуются определения некоторых семантических понятий. Оценкой назовем любое отображение множества $\{p_1, p_2, p_3, \ldots\}$ всех пропозициональных переменных в $\{0, 1\}$. Оценку v' назовем обратной к оценке v, если для всякой пропозициональной переменной p_i верно, что

$$\nu'(p) = \begin{cases} 1, \text{ если } \nu(p_i) = 0 \\ 0, \text{ если } \nu(p_i) = 1. \end{cases}$$

Означиванием при оценке ν назовем отображение $|\ |\nu$ множества всех формул в $\{0, 1\}$, удовлетворяющее следующим условиям для всякой пропозициональной переменной p_i и всяких формул A и B:

1) $|p_i|\nu=\nu(p_i)$,
2) $|A \supset B|\nu = 1$ т.т.т. $|A|\nu = 0$ или $|B|\nu = 1$,
3) $|A \wedge B|\nu = 1$ т.т.т. $|A|\nu = 1$ и $|B|\nu = 1$,
4) $|A \vee B|\nu = 1$ т.т.т. $|A|\nu = 1$ или $|B|\nu = 1$,
5) $|\neg A|\nu = 1$ т.т.т. $|A|\nu = 0$.

Лемма 2: для всякой оценки ν и всякой формулы α верно, что $|\alpha|\nu = |\psi(\alpha)|\nu$`.

Доказательство леммы 2 проводится индукцией по построению формулы α.

Лемма 3: для всякой формулы α верно, что если $\vdash_{PC}\psi(\alpha)$, то $\vdash_{PC}\alpha$.

Доказательство легко проводится методом от противного.

(1) $\vdash_{PC}\psi(\alpha)$ (условие),
(2) $\nvdash_{PC}\alpha$ (допущение),
(3) $|\alpha|\nu = 0$ (из (2) по теореме о полноте для PC),
(4) $|\psi(\alpha)|\nu` = 0$ (из (3) по лемме 2),
(5) $\nvdash_{PC}\psi(\alpha)$ (из (4) по теореме о непротиворечивости PC),
(6) $\vdash_{PC}\alpha$ (противоречие (1) и (5)).

Лемма 3 доказана.

Докажем утверждение (II).

(1) $\vdash_{li}\psi(\alpha)$ (условие),
(2) $\vdash_{PC}\psi(\alpha)$ (из (1) и леммы 1),
(3) $\vdash_{PC}\alpha$ (из (2) и леммы 3).

Утверждение (II) доказано.

Из утверждений (I) и (II) получаем теорему. Таким образом, теорема доказана.

ЛИТЕРАТУРА

1. *Шанин Н.А.* О некоторых логических проблемах арифметики // Тр. мат. ин-та им. В.А.Стеклова. 1955. № 43.
2. *Колмогоров А.Н.* О принципе tertium non datur // Мат. сб. 1925. № 32.
3. *Попов В.М.* Погружение классической пропозициональной логики в ее импликативный фрагмент и в импликативный

фрагмент интуиционистской пропозициональной логики // Труды научно-исследовательского семинара Логического центра Института философии РАН. М., 2000.
4. *Попов В.М.* Погружение интуиционистского пропозиционального исчисления в его позитивный фрагмент // Логические исследования. М.: Наука, 2001. Вып. 8. С.183-184.
5. *Prawitz D. & Malmnâs P.E.* A survey of some connections between classical, intuitionistic and minimal logic. Amsterdam: North-Holland. 1968. P. 215-229.
6. *Carnielli W.A. &D`Ottaviano M.L.* Translations between logical systems: A MANIFESTO // Logique et Analyse. 1977. N 157. P. 67-81.
7. *Epstein R.L.* The semantic foundations of logic. Vol.1: Propositional logic. Dordrecht: Kluwer, 1990.
8. *Смирнов В.А.* Логические методы анализа научного знания. М., 2002. С. 119-129.
9. *Wòjcicki R.* Theory of Logical Calculi: Basic Theory of Consequence Operations. Dordrecht: Kluwer, 1988.
10. *Клини С.К.* Введение в метаматематику. М., 1957. С. 77.
11. *Glivenko M.* Sur quelques points de la logique de M.Brouwer. Acadèmie Royale de Belgique. Bulletins de la classe des sciences. Ser. 5. Vol. 15. P. 183-188.
12. *Gödel K.* Zur intuitionistischen Arithmetik und Zahlentheorie // Ergebnisse eines mathematischen Kolloquims. 1933. Vol. 4. P. 34-38.
13. *Lukasiewicz J.* On the intuitionistic theory of deduction. Konikl. Nederl. Akademie van Wetenschappen, Proceedings, Series A, no. 3. 1952. P. 202-212.
14. *Gentzen G.* Die Widerspruchsfreiheit der reinen Zahlentheorie // Mathematische Annalen. 1936. Vol. 112. P.493-565.
15. *Попов В.М.* Погружение импликативного фрагмента классической логики в импликативный фрагмент интуиционистской // Логические исследования. М.: Наука, 2000. Вып. 7.
16. *Popov V.M.* On the Logics Related to A. Arruda`s System V1 // Logic and Logical Philosophy. 1999. Vol.7. P.87-90.
17. *Попов В.М.* Об одной трехзначной паранепротиворечивой логике // Современная логика: проблемы теории, истории и применения в науке. Санкт-Петербург, 2002.
18. *Попов В.М.* Об одной трехзначной параполной логике // Логические исследования. М.: Наука, 2002. Вып.9.

С.П. Ковалёв

ПРИМЕНЕНИЕ ЛОГИКИ ЛУКАСЕВИЧА ДЛЯ РАЗРАБОТКИ АЛГОРИТМОВ

Abstract. *Practical problems associated with engineering efficient robust algorithms for real world computers lay beyond the traditional scope of mathematical theory of algorithms. Special mathematical methods are required to formally reflect and verify empirical approaches routinely used by technicians. Such methods based on model theory and multiple-valued logics are presented here. Specifically, it is proven that Łukasiewicz logic language is capable to express operations used in computer implementations of integral arithmetic. This allows proposing novel regard of the nature of Łukasiewicz logic.*

Введение

Важнейшим средством решения задач в различных областях знания в настоящее время служит компьютер. Для того чтобы машина смогла решить задачу, решение следует представить в виде алгоритма – явно заданного пошагового процесса преобразования исходных данных в искомый объект. Однако не для всякого объекта существует алгоритм его построения. По существу, представлению в форме алгоритмов не поддаются конструкции, уровень сложности которых качественно превосходит арифметические вычисления в натуральных числах. Поэтому объект, который можно построить при помощи некоторого алгоритма, называется вычислимым или рекурсивным.

Методы выявления вычислимых объектов разрабатываются в рамках специального раздела математики – теории алгоритмов. Предлагается ряд эквивалентных математических моделей алгоритмов, в том числе допускающих представление в виде (абстрактных) технических устройств. Ярким примером служит машина Тьюринга – автомат, перерабатывающий последовательности символов неограниченного размера согласно заданной программе, реализующей алгоритм. Состояние автомата характеризуется значением q и номером n текущего символа последовательности S. Команды, из которых состоит программа, записываются в виде $qa \to pb\varepsilon$, что означает возможность перехода из состояния q при условии, что $S_n = a$, в состояние p с заменой значения S_n на b и последующим перемещением от n-го символа к $n + \varepsilon$-му. Допускается перемещение не более чем на один шаг, т. е. $\varepsilon \in \{0, +1, -1\}$.

Такую машину можно представить в виде головки, движущейся вдоль бесконечной ленты, на которой записаны символы перерабатываемой последовательности.

Однако доказательство вычислимости некоторого объекта и даже предъявление алгоритма его построения вовсе не гарантирует практической отдачи от его реализации на компьютере. Дело в том, что реальные вычислительные устройства основываются на совершенно иных концепциях, чем математические модели теории алгоритмов. Для представления чисел и операций используются характеристики разнообразных физических и технических объектов, выходящих за рамки чистой математики. Например, в настоящее время широко распространены электронные устройства, реализующие вычислительный процесс путем преобразования значений электрического напряжения. Необходим специальный математический аппарат, позволяющий адекватно учитывать особенности устройств в целях создания алгоритмов, выдающих практически полезные результаты при выполнении на них. По существу, такой аппарат должен обеспечивать адекватное формальное выражение хода конструкторской мысли разработчика алгоритма, языка программирования или вычислительного устройства. В настоящей статье представлен подход к формированию такого аппарата, основанный на теории моделей и многозначной логике Лукасевича.

По сравнению с теорией алгоритмов предлагаемый аппарат обладает определенной громоздкостью. Это вызвано сложностью технических закономерностей, эмпирически нащупанных проектировщиками вычислительных машин. Подобная ситуация встречается и в других областях знания, сочетающих высокоразвитую теорию с техническими приложениями. Например, теоретическим фундаментом механики служат вариационные принципы Лагранжа и Гамильтона. Они позволяют строить и анализировать абстрактные модели механических явлений, используя изящный и мощный математический аппарат. Однако они не могут непосредственно применяться для решения конкретных технических проблем, например, расчета прочности зданий. Проблемы такого рода изучаются в рамках специальных технических дисциплин, таких как сопротивление материалов. Эти дисциплины предлагают громоздкие математические методы, обоснованные зачастую лишь частными эмпирическими наблюдениями.

Практические проблемы разработки алгоритмов

Итак, хотя теория алгоритмов предоставляет математический фундамент для их разработки, практическое применение ее результатов наталкивается на принципиальные ограничения. В частности, значительные затруднения связаны с ограниченностью объема ресурсов, которыми оснащены вычислительные машины. Например, множество натуральных чисел тривиально вычислимо – его характеристической функцией служит постоянная 1. Однако на практике вычислить все его элементы невозможно: этот процесс займет бесконечное время и потребует бесконечного количества ячеек памяти. Так что вычислимость объекта вовсе не гарантирует возможности представить его средствами реального компьютера. Более того, компьютер способен вычислять только функции, заданные на конечных множествах. Они образуют довольно бедный подкласс класса рекурсивных функций. В связи с этим программисты вкладывают в понятие «рекурсивная функция» совершенно другой смысл, чем установленный в теории: они называют так функцию, вызывающую саму себя в ходе выполнения. Здесь можно усмотреть не более чем условную аналогию с формой записи правила примитивной рекурсии, задающего зависимость значения функции $f(x + 1)$ от значения $f(x)$.

Ограничения на объем ресурсов памяти, доступных для представления чисел, приводят к тому, что результаты выполнения арифметических операций на компьютере могут отличаться от ожидаемых. Такие различия проявляются в форме всевозможных переполнений, переносов, ошибок округления. Например, современные персональные компьютеры, как правило, поддерживают только 2^{32} различных числовых значений. Поэтому, если в переменную i, имеющую целочисленный тип (int), поместить значение 65536 (т. е. 2^{16}), то произведение i*i будет равняться 0. При этом будет установлен специальный статусный флаг, сигнализирующий о переполнении. В то же время если результаты операций не выходят за пределы диапазона поддерживаемых чисел, то никаких отличий быть не должно. Так, если в приведенном примере значение i равно 2, то выражение i*i, разумеется, равняется 4. При реализации алгоритмов необходимо уметь определять, может ли произойти переполнение на очередном шаге, и задавать действия по его обработке.

Как известно, аппарат теории алгоритмов позволяет не только выявлять вычислимые задачи, но и оценивать их вычислительную сложность. С точки зрения теории, сложность алгоритма – это минимальное количество актов применения элементарных правил вычисления (например, шагов головки машины Тьюринга), требуемых для его выполнения. Обычно сложность задают как функцию от длины входной последовательности машины Тьюринга, т.е. от величины входных параметров задачи. Известно, что чем выше теоретическая сложность алгоритма, тем больше ресурсов (в первую очередь времени и памяти) следует отводить под выполнение его программной реализации. Однако получать конкретные количественные оценки эффективности решения задачи на реальном компьютере обычно не удается. Положение усугубляется тем, что для практически важных алгоритмов имеются лишь асимптотические оценки сложности, записываемые при помощи O-символов. Например, алгоритм бинарного поиска в массиве из n элементов имеет сложность $O(\log_2 n)$. Это означает, что его сложность выражается формулой $C \log_2 n$, причем константа C определяется правилом сравнения элементов и может иметь очень большое значение. Здесь показательным является пример одного алгоритма из теории графов, сложность которого зависит от числа вершин n как $10^{150}n^3$ [1]. Кубическая зависимость от параметра задачи считается признаком невысокого уровня сложности, однако величина постоянного множителя делает бессмысленной практическую реализацию такого алгоритма.

Чтобы получить практически значимые оценки эффективности алгоритма, необходимо принять во внимание архитектуру компьютера, на котором он реализуется. Дело в том, что в основе функционирования арифметических модулей компьютеров лежат совершенно иные физические процессы, чем те, которыми моделируется машина Тьюринга. Поэтому операции, имеющие значительную вычислительную сложность, могут быть реализованы при помощи быстрых и компактных устройств. В свою очередь, выполнение некоторых операций, элементарных с точки зрения теории алгоритмов, обычно требует значительного расхода ресурсов. В качестве примера рассмотрим многопроцессорную сеть, состоящую из большого количества арифметических устройств. Она способна быстро выполнять параллельные переборные алгоритмы, сложность которых экспоненциально зависит от количества перебираемых элементов. В то же время линейный по сложности, но строго последовательный алгоритм итеративного вычисления примитивно рекурсивной функции будет выполняться медленно и неэффективно, поскольку на каждом шаге работать будет только один процессор сети.

Большое значение имеет также «обратная задача» оценки сложности. Она состоит в построении такого алгоритма решения данной вычислительной задачи, реализация которого была бы оптимальной для данной архитектуры. Такая постановка известна как проблема отображения вычислительных задач на архитектуру компьютерных систем [2]. Теория алгоритмов здесь практически бессильна, поскольку она не предлагает математических средств для учета архитектурных особенностей компьютеров. В частности, требуются формальные языки для записи реализации вычислительного процесса, способы проверки его корректности, методы оценки потребляемых им объемов времени и памяти.

В последнее время большую актуальность приобрела задача оптимизации алгоритмов с точки зрения количества электроэнергии, затрачиваемого на его выполнение. Она вызвана распространением мобильных и переносных компьютерных устройств, емкость автономного электропитания которых очень ограничена в силу физико-химических закономерностей. Архитектура этих устройств такова, что действия, имеющие сходную структуру и одинаковые показатели эффективности, могут радикально отличаться по энергопотреблению. Например, при модификации числового значения, хранящегося в двоичной памяти, энергия затрачивается на переключение значения двоичного разряда из 0 в 1 и обратно. Предположим, что в памяти хранится число 15 (в двоичном представлении 1111). Его увеличение на единицу дает 16 (в двоичном представлении 10000), что требует переключения значений 5 разрядов. Увеличение еще на единицу дает 17 (в двоичном представлении 10001), изменяет всего один разряд и поэтому оказывается в 5 раз экономичнее.

В целях решения перечисленных проблем необходимо построить математическую модель компьютерной реализации арифметики. При этом очень важно определить адекватный уровень абстракции. С одной стороны, модель не должна быть привязанной к конкретным техническим решениям и физическим принципам, иначе она не будет обладать универсальностью и простотой. С другой стороны, она должна отражать ключевые особенности реализации арифметики при помощи доступных нам технических средств. Исходя из изложенного выше, мы выделяем следующие особенности такого рода:

(1) функционирование компьютера сводится к выполнению арифметических операций над числовыми кодами различных информационных объектов (самих чисел, текстов и т. д.);
(2) все допустимые числовые коды образуют конечное множество;
(3) существуют средства для обнаружения переполнения в ходе выполнения вычислений;

(4) все возможные элементарные операции, из которых составляются вычисления, образуют фиксированное конечное множество;
(5) скорость выполнения вычислений определяется правилами развертывания вычислительного процесса вдоль стрелы реального времени;
(6) необходима техника доказательства правильности реализации вычислительных алгоритмов.

Частичная интерпретация

Хорошо известно, что арифметика может быть формализована как теория, т. е. множество предложений языка первого порядка. Поэтому естественным кандидатом на роль математического объекта, способного служить моделью ее реализации, является алгебраическая система – стандартная семантическая конструкция первого порядка. В силу указанных выше требований (2) и (4) она должна иметь конечный универсум (основное множество) и конечную сигнатуру. Отсюда следует, что на ней не могут быть истинными все аксиомы арифметики, поскольку всякая модель последней бесконечна. Машинная реализация арифметики способна верифицировать только такие предложения арифметической теории, которые характеризуют поведение чисел из множества, поддерживаемого компьютером. Необходим математический метод построения алгебраических систем, на которых эти предложения истинны, и оценки их «близости» к стандартной модели арифметики.

В теоретическом программировании алгебраическая система, описывающая поведение информационных объектов определенного типа, называются абстрактным типом данных (АТД) [3]. Числовые АТД обычно строятся *ad hoc*, например, посредством той или иной модификации аксиом арифметики. Однако подобная модификация заставляет заново доказывать основные метатеоремы непротиворечивости, адекватности и т. д. Кроме того, аксиоматические теории, как правило, очень неустойчивы: небольшое изменение аксиом может привести к кардинальному изменению свойств теории. Поэтому следует модифицировать не саму теорию, а способ построения ее модели. Необходимая модификация теоретико-модельного подхода предложена автором в работе [4]. Она названа частичной интерпретацией теории первого порядка T и заключается в построении алгебраической системы, которая должна верифицировать только такие предложения теории T, для которых любые входящие в них термы могут быть заменены константами из заданной конечной подсигнатуры ее сигнатуры. Таким образом, формальной моделью ресурса, доступного для представления объектов теории T, является явно заданное множество константных символов. Вне этого множества даже стандартные аксиомы равенства могут не выполняться.

Точные определения этих конструкций выглядят следующим образом.

Определение 1. Будем рассматривать языки первого порядка без равенства. Пусть σ – сигнатура, содержащая символ равенства $\equiv$, T – теория сигнатуры σ, содержащая стандартные аксиомы равенства, σ_0 – конечная подсигнатура сигнатуры σ. *Проекцией* $T \downarrow \sigma_0$ называется множество таких бескванторных предложений φ сигнатуры σ_0, выводимых из T, что для любого терма t, входящего в φ, существует константный символ $c \in \sigma_0$, такой, что предложение $t \equiv c$ выводимо из T. *Частичной интерпретацией* теории T в сигнатуре σ_0 называется пара $<A, \sigma_0>$, где A – алгебраическая система сигнатуры $\sigma(A) \supseteq \sigma_0$, являющаяся моделью проекции $T \downarrow \sigma_0$.

Определение 2. Пусть $C(\sigma_0) = \{c_1, \ldots, c_n\}$ – множество константных символов сигнатуры σ_0. *Релятивизацией* формулы φ на σ_0 называется формула $\varphi \uparrow \sigma_0$, получающаяся из φ заменой всех подформул вида $\forall x_0\, \psi(x_0, x_1, \ldots, x_k)$ конъюнкциями $\bigwedge_{i=1,\ldots,n} \psi(c_i, x_1, \ldots, x_k)$ и вида $\exists x_0\, \psi(x_0, x_1, \ldots, x_k)$ – дизъюнкциями $\bigvee_{i=1,\ldots,n} \psi(c_i, x_1, \ldots, x_k)$. Будем говорить, что пара $<A, \sigma_0>$ *поддерживает* предложение φ, если предложение $\varphi \uparrow \sigma_0$ выполняется в алгебраической системе A.

В качестве математических моделей компьютерной реализации арифметики выступают частичные интерпретации арифметической теории с универсумом $E_{n+1} = \{0, 1, \ldots, n\}$, причем значение n кодирует флаг переполнения. Степень их сходства со стандартной моделью арифметики определяется способностью поддерживать (в смысле определения 2) основные арифметические аксиомы, в частности схему индукции и инъективность функции прибавления единицы s. Для случая арифметики целых чисел, как показано в работе [4], наиболее адекватными являются следующие частичные интерпретации.

Определение 3.

(i) *Начальным отрезком множества неотрицательных целых чисел с переполнением* называется алгебраическая система

$$\mathrm{OA}_{n+1} = <E_{n+1}, 0, 1, \ldots, n-1, =, |+|, |-|, |\times|>,$$
$$x \,|+|\, y = \min(n, x + y),$$
$$x \,|-|\, y = \max(0, x - y),$$

$x \,|{\times}|\, y = \min(n, xy)$.

(ii) *(Почти) симметричным отрезком целых чисел по модулю* называется алгебраическая система

$$\mathrm{MA}_{n+1} = \langle E_{n+1}, 0, 1, \ldots, [(n-1)/2], -[n/2], \ldots, -1, (=), (+), (-), (\times), \mathrm{Carry}\rangle,$$

$$x\,(=)\,y = (x = y) \vee (x, y) \in \{(0, n), (n, 0)\},$$

$$x\,(+)\,y = (x + y) \bmod n,$$

$$(-)\,x = n - x,$$

$$x\,(\times)\,y = xy \bmod n,$$

$$\mathrm{Carry}(x) = (x = n).$$

Арифметика вещественных чисел строится путем их аппроксимации парами целых чисел: целой и дробной частью либо мантиссой и порядком. Операции над ними представляют собой определенные модификации операций из определения 3. Их рассмотрение выходит за рамки настоящей работы, оно приведено в работе [4].

Аппарат логики Лукасевича

Естественным инструментом исследования свойств операций, заданных на конечных множествах, является многозначная логика. Действительно, универсум можно рассматривать как совокупность логических констант, а сигнатурные функции – как базисные логические связки. Как показано автором настоящей работы в статье [5], адекватный аппарат для моделирования компьютерной реализации арифметики предоставляет логика Лукасевича $Ł_{n+1}$. Следует отметить, что она функционально неполна – существуют логические функции, не выразимые через ее связки. Именно из-за неполноты она обычно не применяется для анализа арифметики. Однако в силу теоремы Эванса - Шварца [6] неполнота устраняется путем добавления самих чисел (константных функций), так что логика Лукасевича позволяет выявлять структурные свойства арифметических операций, не зависящие от значений их аргументов. Кроме того, не выразимыми оказываются именно функции, выходящие за рамки арифметики целых чисел как таковой (например, деление).

Для целей настоящей статьи многозначную логику следует представить в виде матрицы – алгебраической системы с универсумом E_{n+1} [7]. Сигнатура логической матрицы L состоит из некоторого набора функциональных символов, обозначающих связки, и одноместного предиката D, выделяющего истинностные значения данной логики. Тавтологиям логики отвечают такие и только такие термы $t(x_1, \ldots, x_k)$, что формула $D(t(x_1, \ldots, x_k))$ выполняется на L. Логике Лукасевича соответствует следующая матрица:

$$Ł_{n+1} = <E_{n+1}, \sim, \rightarrow, \{n\}>,$$
$$\sim x = n - x,$$
$$x \rightarrow y = \min(n, n - x + y).$$

Через ее связки выражаются дизъюнкция и конъюнкция многозначной логики:

$$x \vee y = \max(x, y) = (x \rightarrow y) \rightarrow y,$$
$$x \wedge y = \min(x, y) = \sim(\sim x \vee \sim y) = \sim(x \rightarrow \sim(x \rightarrow y)).$$

Рассмотрим свойства логики Лукасевича как класса функций на E_{n+1}, замкнутого относительно суперпозиции. Обозначим через P_{n+1} класс всех функций на E_{n+1}, образующий логику Поста. Для произвольного непустого подмножества $X \subset E_{n+1}$ положим

$$\mathrm{C}^X{}_{n+1} = \{f \in \mathrm{P}_{n+1} \mid f(X, \ldots, X) \subseteq X\},$$
$$\mathrm{D}^X{}_{n+1} = \{f \in \mathrm{P}_{n+1} \mid f(E_{n+1}, \ldots, E_{n+1}) \subseteq X\}.$$

Класс $\mathrm{C}^X{}_{n+1}$ является *предполным* в P_{n+1}, т.е. он замкнут и замыкание его объединения с любой функцией, не выразимой в нем, равно P_{n+1} [8]. Как установили Эванс и Шварц, логика Лукасевича является *слабо полным* классом [8], т.е. в результате его объединения с множеством всех константных функций на E_{n+1} получается система функций, полная в P_{n+1}. В частности, с одной стороны, $Ł_{n+1}$ содержится в предполном классе $\mathrm{C}^{\{0,\, n\}}{}_{n+1}$, причем совпадает с ним тогда и только тогда, когда n является простым числом. С другой стороны, $Ł_{n+1}$ содержит класс $\mathrm{D}^{\{0,\, n\}}{}_{n+1}$, причем не совпадает с ним при $n > 1$ (здесь мы считаем, что это условие выполнено). Отметим, что существует взаимно однозначное соответствие между функциями из $\mathrm{D}^{\{0,\, n\}}{}_{n+1}$ и предикатами на E_{n+1}, задающими арифметические отношения. Они строятся при помощи дизъюнкции и конъюнкции из функций

$$J_i(x) = \begin{cases} n, & x = i, \\ 0, & x \neq i. \end{cases}$$

Применим аппарат логики Лукасевича для анализа свойств операций компьютерных реализаций арифметики, описанных в определении 3. Здесь получены следующие результаты.

Предложение 1. *Выражение, вычисление которого задается формулой A, не дает переполнения тогда и только тогда, когда $\sim J_n(A)$ – тавтология $Ł_{n+1}$.*

Лемма 1. *Имеют место следующие равенства.*

(i) $(x = y) = J_n((x \to y) \wedge (y \to x))$;
(ii) $x \mathbin{|+|} y = {\sim}x \to y$;
(iii) $x \mathbin{|-|} y = {\sim}(x \to y)$;
(iv) $x \mathbin{|\times|} y = \bigvee_{i \in E_{n+1}} ({\sim}x \to^{i} 0) \wedge J_i(y)$.

Теорема 1.
(i) *Операции* $=$, $|+|$, $|-|$, $|\times|$ *выразимы в* $Ł_{n+1}$.
(ii) *Система функций* $\{|+|, |-|\}$ *образует базис в классе* $Ł_{n+1} \cap C^{\{0\}}{}_{n+1}$, *предполном в* $Ł_{n+1}$.
(iii) *Системы функций* $\{\sim, |+|\}$, $\{n, |-|\}$, $OAŁ_{n+1} = \{=, |-|\}$ *являются базисами в* $Ł_{n+1}$.

Следствие 1.1. *Система констант и функций арифметики с переполнением* OA_{n+1} *полна в* P_{n+1}.

Лемма 2. *Имеют место следующие равенства.*
(i) $x \bmod n = x \mathbin{|-|} J_n(x)$;
(ii) $x\ (+)\ y = ((x \mathbin{|+|} y) \bmod n) \mathbin{|+|} ((x \mathbin{|-|} (n \mathbin{|-|} y)) \bmod n)$;
(iii) $(-)x = n \mathbin{|-|} x$;
(iv) $x\ (\times)\ y = \bigvee_{i \in E_{n+1}} (0\ (+)^{i}\ x) \wedge J_i(y)$;
(v) $\mathrm{Carry}(x) = J_n(x)$;
(vi) $x\ (=)\ y = \mathrm{Carry}((-)(x\ (+)\ ((-)y)))$.

Обозначим через M_{n+1} класс функций, сохраняющих отношение равенства по модулю (=) системы MA_{n+1}. Известно [8], что класс M_{n+1} является предполным, но не слабо полным. Обозначим через $M^{\Lambda}{}_{n+1}$ класс функций, сохраняющих четырехместное отношение

$$\Lambda_{n+1} = \{<x, x, x, x> \mid x \in E_{n+1}\} \cup \\ \big(\{0, n\}^4 \cap \{<x_1, x_2, x_3, x_4> \mid x_1 + x_2 = x_3 + x_4 \ (\mathrm{mod}\ 2n)\}\big).$$

Далее, положим

$$MP_{n+1} = \{f \in P_{n+1} \mid f(x_1, \ldots, x_{s-1}, 0, x_{s+1}, \ldots, x_k) = \\ f(x_1, \ldots, x_{s-1}, n, x_{s+1}, \ldots, x_k) \text{ для всех } s = 1, \ldots, k\},$$
$$J_{n+1} = \{id, \sim, J_n, J_0, J_0J_n, J_0J_0\},$$
$$R_{n+1} = (MP_{n+1} \cap (D^{\{0,n\}}{}_{n+1} \cup D^{E_{n+1}\setminus\{n\}}{}_{n+1} \cup D^{E_{n+1}\setminus\{0\}}{}_{n+1})) \cup J_{n+1}.$$

Все эти классы замкнуты, причем $R_{n+1} \subset M^{\Lambda}{}_{n+1} \subset M_{n+1}$.

Теорема 2.
(i) *Операции* $(=)$, $(+)$, $(-)$, $(\times)$, Carry *выразимы в* $Ł_{n+1}$.
(ii) *Система функций* $\{(+), (-), (\times), \mathrm{Carry}\}$ *образует базис в классе* $MAC_{n+1} \subseteq Ł_{n+1} \cap R_{n+1} \subset Ł_{n+1} \cap M^{\Lambda}{}_{n+1} \subset Ł_{n+1} \cap M_{n+1} \subset Ł_{n+1}$, *причем* MAC_{n+1} *совпадает с* $Ł_{n+1} \cap R_{n+1}$ *тогда и только тогда, когда n является простым числом.*
(iii) *Система функций*

$$\text{MAŁ}_{n+1} = \begin{cases} \{(-), \text{Carry}, \vee\}, n=2, \\ \{(+), (-), \text{Carry}, \vee\}, n>2 \end{cases}$$

образует базис в $Ł_{n+1}$.

Следствие 2.1. *Система констант и функций арифметики по модулю* MA_{n+1} *неполна и не предполна в* P_{n+1}, *но становится полной при обогащении функцией* $\max(x, y)$, $(x, y) \in E_{n+1} \times E_{n+1}$.

Логический анализ алгоритмов

Покажем, каким образом представленный аппарат применятся при решении задач, описанных в разделе 1. В частности, он позволяет строить, преобразовывать и проверять логические модели алгоритмов, имеющие следующую форму. Арифметические и логические операции записываются явными выражениями в виде суперпозиций базисных логических связок. Управляющие конструкции (по возможности) записываются в форме дизъюнктов, что позволяет придать модели структурное сходство с однородным потоком вычислений. Например, цикл, вычисляющий функцию $F(x, y)$ путем последовательного применения y итераций функции $f(x)$, задается дизъюнктом вида $\bigvee_{i \in E_{n+1}} f^{i}(x) \wedge J_i(y)$ (ср. утверждения (iv) лемм 1 и 2).

Такое представление алгоритмов обладает высокой степенью гибкости и адаптивности с точки зрения отображения на архитектуру различных компьютеров. При выполнении отображения машинные команды целевой архитектуры также представляются словами языка многозначной логики. Это позволяет выполнить абстрактный аналог процедуры трансляции путем сопоставления подвыражений. Правильность выполнения этой процедуры можно доказать строго, привлекая технику доказательства логики Лукасевича (в том числе автоматизированную [9]).

К такой модели можно применить традиционные процедуры оптимизации: удаление повторяющихся подвыражений, необязательных промежуточных переменных, мертвого кода и т.д. В результате получатся, по существу, абстрактные инварианты поведения алгоритмов, для которых разработаны методы оценки производительности, не зависящие от выбора целевой аппаратуры [10]. В основе этих методов лежит трактовка базовых конструкций (в данном случае элементов синтаксиса языка многозначной логики) как обращений к некоторому логическому вычислительному ресурсу. Использование этого ресурса имеет определенную стоимость (меру вычислительной работы), отражающую показатели его эффективности.

Универсальность, присущая языку многозначной логики, позволяет использовать его при отображении алгоритмов на различные классы машинных архитектур. Так, подавляющее большинство современных компьютеров ориентированы на представление чисел в позиционной системе счисления по основанию 2. Основной моделью вычислений, реализованной в современных аппаратных средствах и воспроизводимой языками программирования, является арифметика MA_{2^q+1} (обычно q равно 16, 32 или 64). Однако предикат Carry (флаг переноса) не имеет программной реализации, что усложняет контроль целочисленного переполнения. Еще большую проблему составляет функциональная неполнота системы MA_{n+1}, приводящая к потребности в таких неэффективных операциях, как условный переход (см. следствие 2.1). Любопытную альтернативу представляют многозначные арифметические устройства, например, аппаратная реализация операции $|-|$ арифметики OA_{n+1} на токопроводящих полимерах [11]. В силу утверждения (iii) теоремы 1 этой операции достаточно для построения полнофункционального арифметического устройства.

Заключение

Основываясь на представленном подходе к построению машинной арифметики, мы хотели бы предложить новую интерпретацию природы логики Лукасевича. А именно, поскольку логика Лукасевича предоставляет адекватный формальный язык для описания инструментов решения вычислительных задач, можно заключить, что она определяет формы и ограничения, лишь в рамках которых конечные информационные системы способны работать с таким инфинитным объектом, как множество целых чисел. Логика Лукасевича оказывается своего рода «дистиллятом» тех явлений информационной реальности, которые порождают брауэровскую «изначальную интуицию натурального числа».

В частности, трактовка выделенного истинностного значения n как переполнения означает, что класс тавтологий $Ł_{n+1}$ содержит в точности такие арифметические термы, значения которых не могут быть вычислены в машинной арифметике, поддерживающей n чисел. Согласно предложению 1, этот факт открывает путь к использованию техники доказательств логики Лукасевича в задачах верификации вычислительных программ на предмет отсутствия переполнения. Отметим также, что слабость логики как класса теорем оборачивается ее выразительной силой как класса числовых функций – с ростом n выражений с неопределимым значением становится все меньше, так что $Ł_{n+1}$ как класс теорем ослабевает (например, согласно условию Линденбаума [7], $Ł_{kn+1} \subset Ł_{n+1}$ при всяком $k > 1$).

ЛИТЕРАТУРА

1. *Demetrescu C., Finocchi I., Italiano G.F.* Algorithm engineering // Bull. EATCS. 2003. Vol. 79. P. 48-63.
2. *Воеводин В.В.* Отображение проблем вычислительной математики на архитектуру вычислительных систем // Вычислительные методы и программирование. 2000. Т.1. С. 37-44.
3. *Liskov B.H., Zilles S.N.* Specification techniques for data abstractions // IEEE Trans. on Software Engineering. 1975. SE-1, 1. P. 7-19.
4. *Ковалёв С.П.* Аналитические модели машинной арифметики // Сибирский журнал индустриальной математики. 2003. Т. 6, №3. С. 88-102.
5. *Ковалёв С.П.* Логика Лукасевича как архитектурная модель арифметики // Сибирский журнал индустриальной математики. 2003. Т. 6, № 4. С. 32-50.
6. *Evans T., Schwartz P.B.* On Slupecki T-functions // J. Symbolic Logic. 1958. Vol. 23. P. 267-270.
7. *Карпенко А.С.* Логики Лукасевича и простые числа. М.: Наука, 2000.
8. *Rosenberg I.G.* Completeness properties of multiple-valued logic algebras // Computer Science and Multiple-Valued Logic. Amsterdam: North Holland, 1977. P. 144-186.
9. *Beavers G.* Automated theorem proving for Łukasiewicz logics // Studia Logica. 1993. Vol. 52, N 2. P. 183-195.
10. *Смелянский Р.Л.* Методы анализа и оценки производительности вычислительных систем. М.: МГУ, 1990.
11. *Mills J.W.* Polymer Processors. Indiana University, Computer Science Dept, Technical Report TR580. Indiana University, 2003. http://www.cs.indiana.edu/pub/techreports/TR580.pdf.

Е.Е. Ледников

НЕКОТОРЫЕ ОСОБЕННОСТИ ПЕРВОПОРЯДКОВОЙ КВАНТОРНОЙ ЛОГИКИ ЗНАНИЯ И МНЕНИЯ*

Abstract. *In the paper some general traits of First-order Logic of knowledge and belief are discussed. As soon as such Logic is built as specific modal logic with epistemic and doxastic modal operators, rules of universal instantiation, existential generalization and substitutivity of identity must be modified with order to avoid well-known modal paradoxes. It is proposed in the paper to consider as genuine singular terms only individual descriptions for which epistemic (or doxastic) existence is proved. Such descriptions are used with appropriate contextual definitions that differ from definitions of Russel's theory. No modal paradoxes arise under approach proposed.*

При построении логики знания и мнения мы руководствуемся рекомендацией Я. Хинтикки [1] рассматривать понятия знания и мнения в качестве модальных операторов, действующих на предложения. Нами в [2] была предложена аксиоматическая формулировка минимальной пропозициональной логики знания и мнения (KB_{min}-логики) и семантика для нее. Главная семантическая идея заключается в том, чтобы в качестве эпистемических альтернатив рассматривать неполные описания состояний, а в качестве доксатических альтернатив – еще и противоречивые описания состояний. Эта идея приводит к тому, что в KB_{min}-логике не будут корректными ни эпистемический, ни доксатический аналоги правила Гёделя, то есть правила: если $\vdash A$, то $\vdash (K_\alpha)A$; если $\vdash A$, то $\vdash (B_\alpha)A$. (Здесь K_α – это личностный эпистемический модальный оператор «субъект α знает, что…», B_α – личностный доксатический модальный оператор «субъект α полагает, что»).

В данной работе мы наметим пути построения кванторной первопорядковой логики знания и мнения. Прежде всего, требуется решить, по каким объектам будет происходить квантификация (какой смысл будут иметь *de re* модальности), то есть отвести давно известные возражения У. Куайна против квантификации в модальных контекстах. Нами ранее указывалось [3], что объектами квантификации в эпистемических контекстах должны быть «известные» индивиды. Соответственно, объектами квантификации в

* Работа выполнена при поддержке РГНФ, грант № 04-03-00144а.

доксатических контекстах должны быть, так сказать, «полагаемые» индивиды. Подобные индивиды задаются в языке логики знания и мнения индивидными дескрипциями, понимаемыми в духе Рассела как «неполные» символы, но с контектстуальными определениями, отличающимися от расселовских с учетом специфики эпистемических и доксатических контекстов. «Известный» индивид характеризуется дескрипцией вида

$$E_k!(\iota x)A =_{df} (\exists y)[K_a(\forall z)(A \equiv .z = y)],$$

контекстуально элиминируемой с помощью определения

$$[(\iota x)A]D(\iota x)A =_{df} (\exists y)[K_a(\forall z)(A \equiv .z = y) \,\&\, D(y)],$$

а «полагаемый» индивид – дескрипцией вида

$$E_b!(\iota x)A =_{df} (\exists y)[B_a^n(\forall z)(A \equiv .z = y)],$$

контектсуально элиминируемой с помощью определения

$$[(\iota x)A]G(\iota x)A =_{df} (\exists y)[B_a^n(\forall z)(A \equiv .z = y) \,\&\, G(y)].$$

В приведенных определениях выражение $[(\iota x)A]D(\iota x)A$ обозначает формулу D из эпистемического контекста, содержащую на аргументном месте индивидную дескрипцию $(\iota x)A$, причем область действия этой дескрипции максимальна, выражение $[(\iota x)A]G(\iota x)A$ обозначает формулу G из доксатического контекста, содержащую на аргументном месте индивидную дескрипцию $(\iota x)A$, причем область действия дескрипции максимальна, а B_a^n – это модальный профиль формулы G, вычисляемый по правилам, зависящим от дедуктивных особенностей выбранной доксатической логики. Дело в том, что логика знания, по-видимому, по своим дедуктивным свойствам такова, что пропозициональная ее часть должна быть изоморфна алетической модальной логике S4, а логика мнения, соответственно, в своей пропозициональной части изоморфна алетической системе C2, самой слабой из систем, для которых еще существует семантика Крипке.

Исходя из сказанного, формулировка кванторных правил $\forall$-удаления и $\exists$-введения в эпистемических контекстах приобретает следующий вид:

($\forall$-удаление) если формула D_2 отличается от формулы D_1 только вхождением индивидной дескрипции $(\iota x)A$ на месте свободного вхождения индивидной переменной w, то

$$\vdash (\exists y)[K_a(\forall z)(A \equiv .z = y)] \supset . (\forall w)D_1 \supset D_2$$

($\exists$-введение) если формула D_2 отличается от формулы D_1 только вхождением индивидной дескрипции $(\iota x)A$ на месте свободного вхождения индивидной переменной w, то

$\vdash D_2 \supset (\exists w)D_1$.

Особенность последнего правила состоит в том, что контекстуальное определение формулы D_2 предполагает ее истинность только при эпистемическом существовании и единственности дескрипции $(\iota x)A$. Поэтому дополнительная посылка существования последней была бы излишней. Для доксатических контекстов правила будут выглядеть аналогично, только на месте эпистемологического оператора личностного знания K_α в формулах будет стоять модальный профиль B_a^n

Еще одна проблема квантификации в эпистемических и доксатических контекстах связана с поведением тождества. Так, хотя высказывание «Утренняя Звезда = Вечерняя Звезда» является истинным, подстановка этих тождественных имен друг вместо друга не всегда возможна в эпистемических и доксатических контекстах. (Например, школьник Иван знает, что Утренняя Звезда – это планета Венера, но не знает, что она же является Вечерней Звездой). Однако, если принять во внимание предлагаемые нами контекстуальные определения индивидных дескрипций, то ни в эпистемических, ни в доксатических контекстах нарушение правила подставимости тождественного не будет иметь места. В эпистемических контекстах для этого достаточно принять следующие правила подстановки индивидной дескрипции на место свободного вхождения сингулярного термина (индивидной переменной):

(= - подставимость) если формула D_2 отличается от формулы D_1 только вхождением индивидной дескрипции $(\iota x)A$ на месте свободного вхождения индивидной переменной w, то

$$\vdash (\exists y)[K_a(\forall z)(A \equiv . z = y)] \supset : (\iota x)A = w. \supset . D_1 \equiv D_2,$$

и правило подстановки одной индивидной дескрипции вместо другой:

(= - подставимость) если формула D_2 отличается от формулы D_1 только вхождением индивидной дескрипции $(\iota x_2)A_2$ на месте вхождения индивидной дескрипции $(\iota x_1)A_1$, то

$$\vdash (\exists z_1)[K_a(\forall x_1)(A_1 \equiv . x_1 = z_1)] \ \& \ (\exists z_2)[K_a(\forall x_2)(A_2 \equiv . x_2 = z_2)] \supset : (\iota x_1)A_1 = (\iota x_2)A_2 \supset . D_1 \equiv D_2$$

Аналогичные правила могут быть сформулированы для доксатических контекстов (опять на месте эпистемического оператора личностного знания K_α будет стоять модальный профиль B_a^n). С учетом приведенных правил подставимости тождественного становится ясно, что, скажем, формула $[a = b \supset K_\alpha(a = b)]$ или формула $[a = b \supset B_\alpha^n(a = b)]$ (где a,b - индивидные константы экстенсионального языка) не являются общезначимыми, хотя общезначимой будет формула $(\forall x)(\forall y)[x = y \supset K_\alpha(x = y)]$ (и, соответственно, формула $(\forall x)(\forall y)[x = y \supset B_a^n(x = y)]$). Поскольку в предлагаемой нами логике удаление квантора общности осуществляется по индивидным дескрипциям, для которых доказано эпистемическое (доксатическое) существование и единственность в соответствии с правилами $\forall$-удаления для соответствующих контекстов, в ней никакие парадоксы «эпистемически (доксатически) необходимого тождества» возникать не будут.

Следующий вопрос, требующий предварительного выяснения, касается «возможных миров» в семантике для кванторной первопорядковой логики знания и мнения. Как нами уже указывалось [2], область мнений шире области знаний, включает в себя последнюю. А раз так, то должна существовать общая часть эпистемических альтернатив, входящая в любую доксатическую альтернативу. Эта общая часть состоит из атомарных формул (высказываний), некоторого множества предикатных формул со свободными и связанными переменными, а также некоторого множества формул, не содержащих свободных вхождений индивидных переменных. В таком случае знание по-прежнему будет имплицировать мнение (но не наоборот), как это имело место в пропозициональной логике знания и мнения. Но формулировка кванторной первопорядковой логики знания и мнения в законченном виде, как и ее семантики – дело дальнейших исследований.

ЛИТЕРАТУРА

1. *Хинтикка Я.* Семантика пропозициональных установок // Логико-эпистемологические исследования. М., 1980. С. 68-101.
2. *Ледников Е.Е.* О семантике знания и мнения // Логико-философские штудии-3. Санкт-Петербург, 2005. С. 460-463.
3. *Ледников Е.Е.* Существование и индивидные дескрипции // Логические исследования. М., 2002. Вып. 9. С. 113-118.

И.Б. Микиртумов

КОМПОЗИЦИОНАЛЬНАЯ КОНЦЕПТУАЛИЗАЦИЯ В ИНТЕНСИОНАЛЬНОЙ ЛОГИКЕ*

Abstract. *The present article aims at delineating the procedure of constructing compositional conceptualisation of arbitrary complex expression that is based on compositional conceptualisation of the expression components. Examples of acting of the procedure are considered which are to demonstrate that polymorphicality of sense may be used as an instrument serving to realize "Alternative 0" in the logic of sense and denotation of Church. Polymorphicality of sense is regarded as the logical characteristic of the contextual dependence which may be brought into light by means of logic of sense and denotation only. This sense dependence taken as a means of contextual analysis does not depend on semantic and linguistic methods of its analysis.*

В этой статье мы продолжим начатое в работе [1] исследование вопроса о построении композициональных концептуализаций для выражений общей интенсиональной логики $A0^{C^*}$, полученной как модификация логики смысла и денотата (ЛСД) Алонзо Чёрча A0. Язык и определения рассматриваемой системы ЛСД даны в [1]. Там же дан содержательный анализ проблемы. В настоящей работе будет предпринято небольшое изменение способа записи индексов интенсионального уровня в символах индексов типов, а именно мы будем записывать их как нижние, а не как верхние индексы символов типа, т. е. вместо α^1 будем писать α_1.

Процедура построения концептуализации замкнутого сложного выражения языка $A0^{C^*}$

Рассмотрим процедуру построения концептуализации произвольного замкнутого сложного выражения A_α на основе концептуализаций его атомарных компонент, полученных по процедуре, описанной в [1].

Этап (А). В A_α повышаем все индексы интенсионального уровня на 1 и заменяем все (даже совпадающие) индексы вложенности на различные метапеременные.

Этап (Б). Для получившегося после выполнения этапа (А) выражения строим *дерево анализа его структуры*, руководствуясь следующими двумя правилами:

* Работа выполнена при поддержке РГНФ, грант № 04-03-00412а.

правило «*App*» $$\begin{array}{ccc} B & & C \\ & \diagdown\ \diagup & \\ & BC & \end{array}$$ правило «λ» $$\begin{array}{ccc} \lambda x & & D \\ & \diagdown\ \diagup & \\ & \lambda x D & \end{array}$$

Концевой ветвью объявляется всякая ветвь, на которой находится λx или атомарная формула. Помещаем теперь формулу A_β в исходный узел или «корень» и в соответствии с правилами строим дерево анализа структуры до тех пор, пока построение не остановится, и все полученные ветви не окажутся концевыми. В полученном дереве из каждого узла отходят вверх ровно две ветви и либо обе они концевые, либо одна из них концевая, либо ни одна из них не концевая.

Этап (B). Преобразования.

Шаг (1). В полученном дереве заменяем все атомарные константы, стоящие на концевых ветвях и снабженные схемами символов типа, на *схемы* их концептуализаций, т. е., выполняя описанную в [1] процедуру, останавливаем ее для данного символа типа после выполнения этапа (B) этой процедуры. Кроме того, всякую переменную x_α, включая переменные, находящиеся в выражениях вида λx, заменяем на схему ее квазиконцептуализации x_{α^*}, где α^* есть тип квазиконцептуализации переменных типа α, а все символы λ_n заменяем на λ_{n+1}.

Шаг (2). Рассматриваем все пары $\langle E, D\rangle$ выражений, расположенных на сходящихся концевых ветвях, где E и D находятся, соответственно, на левой и правой ветвях. Выражение E может быть:

(а) схемой концептуализации атомарной константы,

(б) схемой квазиконцептуализации переменной,

(в) выражением вида $\lambda_{n+1} x_\alpha$.

Для выражения D могут иметь место только случаи (а) и (б). При любых комбинациях случаев (а) – (в) для E и D стираем обе ветви и в предшествующий им узел помещаем выражение, соответствующее приведенным ниже условиям (их обозначения отражают комбинации случаев (а) – (в) для E и D). Обозначаем схему типа формулы D как ρ^N:

– (а.а)(а.б)(б.а)(б.б) $\{E_{((\tau^K\rho^N)^K)(M/N)}D_{\rho^N}\}$, где E имело схему типа $(\tau^K\pi^M)^K$ и запись $((\tau^K\rho^N)^K)^{(M/N)}$ означает результат замены всех вхождений M в $(\tau^K\rho^N)^K$ на N;

– (в.а)(в.б.1) $\{(\lambda_{n+1}x_{\alpha^*} \,.\, D_{\rho^*})_{(\rho^*\alpha^*)^*}\}$, если $x_\alpha \neq D_\tau$, где схема символа типа $(\rho^*\alpha^*)^*$ получена следующим образом: если x_α и D_{ρ^N} есть схемы (квази)концептуализаций $x_{\alpha'}$ и $D_{\rho'}$ соответственно, то $(\rho^*\alpha^*)^*$ есть тип квазиконцептуализаций переменных типа $(\rho'\alpha')^h$, где h – внешний индекс вложенности схемы символа типа выражения, находившегося в этом узле до замены;

– (в.б.2) $\{(\lambda_{n+1}D_{\rho^*} \,.\, D_{\rho^*})_{(\rho^*\rho^*)^*}\}$, если $x_\alpha = D_\rho$, где схема символа типа $(\rho^*\rho^*)^*$ получена следующим образом: если D_ρ есть квазиконцептуализация $D_{\rho'}$, то $(\rho^*\rho^*)^*$ есть схема квазиконцептуализации переменных типа $(\rho'\rho')^h$, где h – внешний индекс вложенности схемы символа типа выражения, находившегося в этом узле до предпринимаемой замены.

Шаг (3). После выполнения преобразования шага (2) вместо некоторых узлов появляются новые концевые ветви, и мы переходим к рассмотрению всех пар сходящихся концевых ветвей. Такие пары могут иметь следующий вид:

(3.1) $\langle\{B_{(\pi\sigma M)K}\}, J_{\sigma N}\rangle$,
(3.2) $\langle H_{(\nu\pi M)K}, \{C_{\pi N}\}\rangle$,
(3.3) $\langle\{B_{(\pi\sigma M)K}\},\{M_{\sigma N}\}\rangle$,
(3.4) $\langle\lambda_{n+1}x_{\tau N}, \{C_{\pi M}\}\rangle$.

Во всех четырех случаях стираем соответствующие ветви и в предшествующий им узел помещаем выражения:

– (3.1) $\{B^*_{((\pi\sigma N)K)(M/N)}(J_{\sigma N})\}$, где B^* получено из B *корректной* заменой всех вхождений метапеременной по схемам индексов вложенности M на N и J может быть атомарной константой или переменной. Такая замена в сложном выражении корректна, если выражения, представляющие собой схемы индексов вложенности, даже если они совпадают, обозначаются разными метапеременными, во всех случаях, когда такие схемы образованы по разным пунктам процедур задания концептуализаций и квазиконцептуализаций. Этого легко можно достичь, сопоставляя этим схемам разные метапеременные непосредственно при выполнении процедуры. Схемы индексов вложенности, введенные в соответствии с разными пунктами процедур и на разных шагах, будем обозначать разными метапеременными;

– (3.2) $\{H_{((\nu\pi N)K)(M/N)}(C_{\pi N})\}$;

– (3.3) $\{B^*_{((\pi\sigma N)K)(M/N)}(M_{\sigma N})\}$, где B^* получено из B также, как в пункте (3.1);

– (3.4.1) $\{(\lambda_{n+1}x_{\tau^*} \;.\; C_{\pi^*})_{(\pi^*\tau^*)^*}\}$, если x_τ и C_π суть схемы (квази)концептуализаций $x_{\tau'}$ и $C_{\pi'}$ соответственно, и $x_{\tau'}$ не входит свободно в $C_{\pi'}$, и $(\pi^*\tau^*)^*$ – схема типа квазиконцептуализации переменных типа $(\pi'\tau')^h$, где h есть внешний индекс вложенности схемы типа того выражения, которое находилось в этом узле до замены;

– (3.4.2) $\{(\lambda_{n+1}x_{\tau^{**}} \,.\, C^*_{\pi^{**}})_{(\pi^{**}\tau^{**})^{**}}\}$, если $x_{\tau'}$ входит свободно в $C_{\pi'}$, и (а) если $x_{(\tau)1}, x_{(\tau)2}, \ldots, x_{(\tau)s}$ есть s-членный ($s \geq 1$) попарно различный список свободных вхождений в C различных схем квазиконцептуализаций переменной x_τ, то для каждого $x_{(\tau)i}$ обозначим метапеременными $A_1^{(\tau)i}$, ..., $A_r^{(\tau)i}$ ($r \geq 1$) все входящие в $(\tau)i$ схемы индексов вложенности, возможно также содержащие метапеременные, и при этом пусть порядковый номер такой метапеременной соответствует порядку ее вхождения в $(\tau)i$; тогда образуем τ^{**} из любого $(\tau)j$ корректной заменой:

$A_1^{(\tau)j}$ на $\max(A_1^{(\tau)1}, ..., A_1^{(\tau)s})$

...

$A_r^{(\tau)j}$ на $\max(A_r^{(\tau)1}, ..., A_r^{(\tau)s})$;

(б) $C^*{}_{\pi^{**}}$ получено из C заменой по п. (а) всех вхождений соответствующих выражений; $(\pi^{**}\tau^{**})^{**}$ получено из схемы $(\pi^*\tau^*)^*$ типа квазиконцептуализации переменных типа $(\pi'\tau')^h$, корректной заменой по п. (а);

(в) в этом выражении всякая пара внутренних переменных индексов вложенности, которые либо вместе входят, либо вместе не входят в каждую схему индекса вложенности, заменена одной из этих переменных.

Шаг (4). После выполнения шага (3) мы получаем редуцированное дерево, в котором в отличие от условия шага (3) могут иметь место два следующих новых вида пар, стоящих на концевых ветвях:

(4.1) $\langle(\lambda_n x_{\beta^*} . A_{\alpha^M})_{(\alpha^M\beta^*)^M}, B_\beta\rangle$

(4.2) $\langle(\lambda_n x_{(\alpha\beta)^*} . A_{\gamma^*})_{(\gamma^*(\alpha\beta)^*)^*}, (\lambda_m y_{\beta^{**}} . B_{\alpha^{**}})_{(\alpha^{**}\beta^{**})^{**}}\rangle$

В обоих случаях удаляем обе ветви и в предшествующий им узел помещаем выражения:

– (4.1) $\{(\lambda_n x_{\beta^{**}} . A^*{}_{\alpha^{**}})_{(\alpha^{**}\beta^{**})^{**}}(B^*{}_{\beta^{**}})\}$,

где A^* и B^* получены из A и B следующим образом. Пусть $A_1^{\beta^*}$, ..., $A_s^{\beta^*}$ суть все схемы индексов вложенности, входящие в схему символа типа β^*, выписанные по порядку их вхождений, а A_1^{β}, ..., A_s^{β} такие же схемы для β. Тогда (i) B^* получено из B корректной заменой всех вхождений A_1^{β}, ..., A_s^{β} в B и $A_1^{\beta^*}$, ..., $A_s^{\beta^*}$ в A на $\max(A_1^{\beta}, A_1^{\beta^*})$, ..., $\max(A_1^{\beta}, A_s^{\beta^*})$ соответственно; (ii) точно так же получен символ типа $(\alpha^{**}\beta^{**})^{**}$; (iii) в полученном выражении всякая пара внутренних переменных индексов вложенности, которые либо вместе входят, либо вместе не входят в каждую схему индекса вложенности, заменена одной из этих переменных.

– (4.2) $\{(\lambda_n x_{(\alpha''\beta'')''} . A^*{}_{\gamma''})_{(\gamma''(\alpha''\beta'')'')''}((\lambda_m y_{\beta''} . B^*{}_{\alpha''})_{(\alpha''\beta'')''})\}$,

где, (i) если $A_1^{\beta^*}$, ..., $A_s^{\beta^*}$ и A_1^{β}, ..., A_s^{β} ($s \geq 1$) суть все схемы индексов вложенности, входящие соответственно в β^* и β и выписанные в порядке их вхождений, и если $A_1^{\alpha^*}$, ..., $A_t^{\alpha^*}$ и A_1^{α}, ..., A_t^{α} ($t \geq 1$) суть такие же схемы для α и α^*, то $(\gamma''(\alpha''\beta'')'')''$ и $(\alpha''\beta'')''$ получено из $(\gamma^*(\alpha\beta)^*)^*$ и $(\alpha^{**}\beta^{**})^{**}$ соответственно путем корректной замены всякого вхождения:

$$A_i^{\beta*} \text{ и } A_i^{\beta} \text{ на } \max(A_i^{\beta*}, A_i^{\beta}) \text{ и } A_j^{\alpha*} \text{ и } A_j^{\alpha} \text{ на } \max(A_j^{\alpha*}, A_j^{\alpha});$$

(ii) A^* и B^* получены из A и B аналогичной заменой; (iii) в полученном выражении всякая пара внутренних переменных индексов вложенности, которые либо вместе входят, либо вместе не входят в каждую схему индекса вложенности, заменена на одну из этих переменных.

Все другие виды пар выражений, находящихся на концевых ветвях в редуцированном дереве, подпадают под преобразования шага (3). Редукцию дерева, которая производится повторением преобразований шагов (3) и (4), продолжаем до тех пор, пока она не остановится, и мы не получим узел, в котором находится выражение, заключенное в фигурные скобки и содержащее схемы индексов вложенности.

Этап (Г). Вычисление значений индексов.

Шаг (1). В полученную схему концептуализации подставляем значения индексов вложенности и присваиваем значения внешним переменным. При этом концептуализациям *не*интенсиональных λ-выражений, полученным в пункте (3.4) этапа (В), сопоставляется внешний индекс вложенности 0.

Шаг (2). Производим необходимые арифметические преобразования и в полученной формуле заключаем в квадратные скобки все непримитивные атомарные константы. Результат этих преобразований будем считать концептуализацией исходной замкнутой формулы, которая, возможно, окажется параметрической.

На этом заканчивается описание процедуры сопоставления концептуализации замкнутым формулам.

Несколько примеров

Рассмотрим примеры, которые пояснят принцип работы описанной процедуры. Будем сохранять индексы интенсионального уровня, не заменяя их переменными, если это не будет вызывать двусмысленности. Хотя описанная выше процедура выглядит громоздко, идея того, чем должна быть концептуализация выражения, достаточно проста. Построим концептуализацию для формулы

$$\boldsymbol{h}_{\alpha(oo_1 0)}\boldsymbol{f}_{oo_1 0},$$

т. е. определим полную форму выражения

$$[[\boldsymbol{h}_{\alpha(oo_1 0)}\boldsymbol{f}_{oo_1 0}]]_1.$$

Дерево анализа ее структуры элементарно, поэтому сразу перейдем к преобразованию. Из схем концептуализаций

$$\boldsymbol{h}_{(o_1^{\max(2,\,d+1,\,X^*,\,Y^*)}(o_1^{\max(2,\,d+1,\,X^*)}o_2^{d+1})^{\max(2,\,d+1,\,X^*)})^{\max(2,\,d+1,\,X^*,\,Y^*)}}$$

$$\boldsymbol{f}_{(o_1^{\max(2,\,g+1,\,Z^*)}o_2^{g+1})^{\max(2,\,g+1,\,Z^*)}}$$

получаем

$$\{\boldsymbol{h}_{(o_1^{\max(2,\,d+1,\,X^*,\,Y^*)}(o_1^{\max(2,\,d+1,\,X^*)}o_2^{d+1})^{\max(2,\,d+1,\,X^*)})^{\max(2,\,d+1,\,X^*,\,Y^*)}}(\boldsymbol{f}_{(o_1^{\max(2,\,g+1,\,Z^*)}o_2^{g+1})^{\max(2,\,g+1,\,Z^*)}})\}$$

и, после подстановки значений индексов вложенности, образуем искомую концептуализацию:

$$[\boldsymbol{h}]_{(o_1^2(o_1^2o_2^2)^2)^2}([\boldsymbol{f}]_{(o_1^2o_2^2)^2})$$

Построим концептуализацию формулы $(x_\iota)\ .\ f_{o\iota}x$, не сокращенная запись которой есть $\Pi_{o(o\iota)}(\lambda x_\iota\ .\ f_{o\iota}x)$. Дерево анализа ее структуры имеет вид

$$f_{o\iota} \qquad\qquad x_\iota$$

$$\lambda x_\iota \qquad\qquad f_{o\iota}x$$

$$\Pi_{o(o\iota)} \qquad\qquad \lambda x_\iota\,.\,f_{o\iota}x$$

$$\Pi_{o(o\iota)}(\lambda x_\iota\,.\,f_{o\iota}x)$$

Проследим ход преобразований по дереву:

$$f_{(o_1^{\max(1,\,X,\,C^*)}\iota_1^X)^{\max(1,\,X,\,C^*)}} \qquad\qquad x_{\iota_1^Y}$$

$$\lambda_1\, x_{\iota_1^Z} \qquad\qquad \{f_{(o_1^{\max(1,\,Y,\,C^*)}\iota_1^Y)^{\max(1,\,Y,\,C^*)}}(x_{\iota_1^Y})\}$$

$$\Pi_{(o_1^{\max(1,\,B^*,\,V,\,A^*)}(o_1^{\max(1,\,B^*,\,V)}\iota_1^V)^{\max(1,\,B^*,\,V)})^{\max(1,\,B^*,\,V,\,A^*)}}$$

$$\{(\lambda_1 x_{\iota_1^Y}.\,f_{(o_1^{\max(1,\,Y,\,C^*)}\iota_1^Y)^{\max(1,\,Y,\,C^*)}}(x_{\iota_1^Y}))_{(o_1^{\max(1,\,Y,\,C^*)}\iota_1^Y)^{\max(1,\,Y,\,C^*)}}\}$$

$$\{\Pi_{(o_1^{\max(1,\,C^*,\,Y,\,A^*)}(o_1^{\max(1,\,C^*,\,Y)}\iota_1^Y)^{\max(1,\,C^*,\,Y)})^{\max(1,\,C^*,\,Y,\,A^*)}}$$

$$((\lambda_1 x_{\iota_1^Y}.\ f_{(o_1^{\max(1,\,Y,\,C^*)}\iota_1^Y)^{\max(1,\,Y,\,C^*)}}(x_{\iota_1^Y}))_{(o_1^{\max(1,\,Y,\,C^*)}\iota_1^Y)^{\max(1,\,Y,\,C^*)}})\}$$

подставляем значения индексов и получаем выражение

$$\Pi_{(o_1^{\max(1,\,Y)}(o_1^{\max(1,\,Y)}\iota_1^{Y})^{\max(1,\,Y)})^{\max(1,\,Y)}}$$

$$(\lambda_1 x_{\iota_1^{Y}}.\ [f]_{(o_1^{\max(1,\,Y)}\iota_1^{Y})^{\max(1,\,Y)}}(x_{\iota_1^{Y}}))_{(o_1^{\max(1,\,Y)}\iota_1^{Y})^{\max(1,\,Y)}}).$$

Искомая концептуализация является параметрической, а ее частные случаи зависят от уровня вложенности связанной переменной. Один из них имеет, например, вид:

$$\Pi_{(o_1^{1}(o_1^{1}\iota_1^{0})^{1})^{1}}(\lambda_1 x_{\iota_1^{0}}.\ [f]_{(o_1^{1}\iota_1^{0})^{1}}(x_{\iota_1^{0}}))_{(o_1^{1}\iota_1^{0})^{1}})$$

При любом другом, кроме 0, значении Y, все индексы вложенности будут совпадать.

В следующем примере:

$$[[\boldsymbol{g}_{o\iota}\boldsymbol{a}_{\iota} \supset \boldsymbol{g}(\boldsymbol{h}_{\iota o_2^1} p_{o_2^1})]]_1$$

последовательность преобразований выглядит так (для наглядности сохраняем константные индексы вложенности). Из схемы концептуализации

$$\boldsymbol{g}_{(o_1^{\max(1,\,X^*,\,Y)}\iota_1^{Y})^{\max(1,\,X^*,\,Y)}},\ \boldsymbol{a}_{o_1^{0}}$$

образуем

$$\boldsymbol{g}_{(o_1^{\max(1,\,X^*)}\iota_1^{0})^{\max(1,\,X^*)}}(\boldsymbol{a}_{\iota_1^{0}}),$$

затем с помощью концептуализации импликации

$$\mathrm{C}_{(o_1^{\max(1,\,U^*,\,R,\,H^*,\,P)}o_1^{R})^{\max(1,\,U^*,\,R,\,H^*,\,P)}o_1^{P})^{\max(1,\,U^*,\,R,\,H^*,\,P)}}$$

получаем

$$\mathrm{C}_{(o_1^{\max(1,\,U^*,\,R,\,H^*,\,X^*)}o_1^{R})^{\max(1,\,U^*,\,R,\,H^*,\,X)}o_1^{\max(1,\,X^*)})^{\max(1,\,U^*,\,R,\,H^*,\,X^*,\,Y^*)}}$$

$$(\boldsymbol{g}_{(o_1^{\max(1,\,X^*)}\iota_1^{0})^{\max(1,\,X^*)}}(\boldsymbol{a}_{\iota_1^{0}})),$$

после чего из новой концептуализации $\boldsymbol{g}$ вида

$$\boldsymbol{g}_{(o_1^{\max(1,\,E^*,\,B)}\iota_1^{B})^{\max(1,\,E^*,\,B)}}$$

и схемы концептуализации

$$\boldsymbol{h}_{(\iota_1^{\max(3,\,Q^*)}o_3^{2})^{\max(3,\,Q^*)}}(\boldsymbol{p}_{o_3^{2}})$$

получаем

$$\boldsymbol{g}_{(o_1^{\max(3,\,E^*,\,Q^*)}\iota_1^{\max(3,\,Q^*)})^{\max(3,\,E^*,\,Q^*)}}(\boldsymbol{h}_{(\iota_1^{\max(3,\,Q^*)}o_3^{2})^{\max(3,\,Q^*)}}(\boldsymbol{p}_{o_3^{2}})).$$

Теперь образуем схему концептуализации всего выражения:

$$(\mathrm{C}_{(o_1^{\max(3,\,U^*,\,E^*,\,Q^*,\,H^*,\,X^*)}o_1^{\max(3,\,E^*,\,Q^*)})^{\max(3,\,U^*,\,E^*,\,Q^*,\,H^*,\,X^*)}o_1^{\max(1,\,X^*)})^{\max(3,\,U^*,\,E^*,\,Q^*,\,H^*,\,X^*,\,Y^*)}}$$

$$(\boldsymbol{g}_{(o_1^{\max(1,\,X^*)}\iota_1^{0})^{\max(1,\,X^*)}}(\boldsymbol{a}_{\iota_1^{0}})))$$

$$(\boldsymbol{g}_{(o_1^{\max(3,\,E^*,\,Q^*)}\iota_1^{\max(3,\,Q^*)})^{\max(3,\,E^*,\,Q^*)}}$$

$$(\boldsymbol{h}_{(\iota_1^{\max(3,\,Q^*)}o_3^{2})^{\max(3,\,Q^*)}}(\boldsymbol{p}_{o_3^{2}}))),$$

присваиваем значения внешним переменным и получаем искомую концептуализацию

$$(\mathrm{C}_{(o_1{}^3 o_1{}^3)^3 o_1{}^1)^3}([\boldsymbol{g}]_{(o_1{}^1 \iota_1{}^0)^1}([\boldsymbol{a}]_{\iota_1}{}^0)))([\boldsymbol{g}]_{(o_1{}^3 \iota_1{}^3)^3}([\boldsymbol{h}]_{(\iota_1{}^3 o_3{}^2)^3}([\boldsymbol{p}]_{o_3}{}^2))).$$

Обратим внимание на то, что функция $\boldsymbol{g}$ представлена сразу двумя своими концептуализациями

$$[\boldsymbol{g}]_{(o_1{}^1 \iota_1{}^0)^1} \text{ и } [\boldsymbol{g}]_{(o_1{}^3 \iota_1{}^3)^3}.$$

Это связано с тем, что в одном и том же сложном выражении функциональное выражение может выступать в различном качестве, т. е. будучи представлено разными частными случаями своей концептуализации. Смысл функционального выражения представляет собой программу осуществления композиции, тип которой зависит от типа участвующих в композиции программ, благодаря чему он может быть задан и реализован различным образом. Иными словами, многократное использование термина в одном и том же сложном выражении может требовать привлечения различных частных случаев его смысла. Отметим, что в нашем случае такая возможность исключается только для связанных переменных.

Определим полную форму выражения

$$[[\boldsymbol{f}_{\alpha(o\iota)}(\lambda g_{o\iota} \,.\, g\boldsymbol{a}_{\iota} \supset g(\boldsymbol{h}_{\iota o_2}{}^1 \boldsymbol{p}_{o_2}{}^1))]]_1.$$

Здесь мы столкнемся с различными квазиконцептуализациями переменных. Описываем ход преобразований сокращенно, с помощью записи промежуточных результатов. Кроме того, для лучшей обозримости, будем опускать символ «max». Из концептуализаций констант и квазиконцептуализации переменной g

$$g_{(o_2{}^{(1,\,X,\,Y)} \iota_1{}^X)^{(1,\,X,\,Y)}},\ \boldsymbol{a}_{\iota_1}{}^0,\ \boldsymbol{h}_{(\iota_1{}^3 o_3{}^2)^3},\ \boldsymbol{p}_{o_3}{}^2$$

получим концептуализации подформул

$$g_{(o_1{}^{(1,\,Y)} \iota_1{}^0)^{(1,\,Y)}}\boldsymbol{a}_{\iota_1}{}^0 \text{ и } \boldsymbol{h}_{(\iota_1{}^3 o_3{}^2)^3}\boldsymbol{p}_{o_3}{}^2.$$

Затем из новой квазиконцептуализации переменной g и второй из этих формул получаем

$$g_{(o_1{}^{(1,\,T)} \iota_1{}^3)^{(3,\,T)}}(\boldsymbol{h}_{(\iota_1{}^3 o_3{}^2)^3}\boldsymbol{p}_{o_3}{}^2).$$

Теперь из концептуализации импликации и полученных формул образуем сначала

$$\mathrm{C}_{((o_1{}^{(1,\,W,\,Y)} o_1{}^W)^{(1,\,W,\,Y)} o_1{}^{(1,\,Y)})^{(1,\,W,\,Y)}}(g_{(o_1{}^{(1,\,Y)} \iota_1{}^0)^{(1,\,Y)}}\boldsymbol{a}_{\iota_1}{}^0),$$

а затем

$$(\mathrm{C}_{((o_1{}^{(3,\,T,\,Y)} o_1{}^{(3,\,T)})^{(3,\,T,\,Y)} o_1{}^{(1,\,Y)})^{(3,\,T,\,Y)}}(g_{(o_1{}^{(1,\,Y)} \iota_1{}^0)^{(1,\,Y)}}\boldsymbol{a}_{\iota_1}{}^0))$$

$$(g_{(o_1{}^{(3,\,T)} \iota_1{}^3)^{(3,\,T)}}(\boldsymbol{h}_{(\iota_1{}^3 o_3{}^2)^3}\boldsymbol{p}_{o_3}{}^2)).$$

Здесь представлены две квазиконцептуализации переменной g:

$$g_{(o_1{}^{(1,\,Y)} \iota_1{}^0)^{(1,\,Y)}} \text{ и } g_{(o_1{}^{(3,\,T)} \iota_1{}^3)^{(3,\,T)}}$$

и, в соответствии с пунктом (4.2) шага (3), $\mathtt{max}(1, Y)$ и $\mathtt{max}(3, T)$ заменяются на $\mathtt{max}(1, 3, Y, T)$, после чего, поскольку Y и T вместе будут входить или не входить в каждую схему индекса вложенности, оставляем только Y, а 0 и 3 заменяются на $\mathtt{max}(0, 3)$. В результате получаем схему концептуализации λ-выражения:

$$\lambda_1 g_{(o_1{}^{(3,\,Y)}\iota_1{}^3)^{(3,\,Y)}} \,.\, (\mathrm{C}_{((o_1{}^{(3,\,Y)}o_1{}^{(3,\,Y)})^{(3,\,Y)}\,o_1{}^{(3,\,Y)})^{(3,\,Y)}}$$

$$(g_{(o_1{}^{(3,\,Y)}\iota_1{}^3)^{(3,\,Y)}}\,\boldsymbol{a}_{\iota_1{}^3}))(g_{(o_1{}^{(3,\,Y)}\iota_1{}^3)^{(3,\,Y)}}(\boldsymbol{h}_{(\iota_1{}^3 o_3{}^2)^3}\,\boldsymbol{p}_{o_3{}^2})),$$

тип которой есть $((o_1{}^{(3,\,Y)}(o_1{}^{(3,\,Y)}\iota_1{}^3)^{(3,\,Y)})^{(3,\,Y)}$, где концептуализация константы $\boldsymbol{a}$ получает индекс вложенности 3. Теперь из этого выражения и концептуализации $\boldsymbol{f}$ вида

$$\boldsymbol{f}_{((o_1{}^{(1,\,E)}(o_1{}^{(1,\,E)}(o_1{}^{(1,\,E)}\iota_1{}^E)^{(1,\,E)})^{(1,\,E)})^{(1,\,E)}}$$

образуем концептуализацию

$$[\boldsymbol{f}]_{(o_1{}^{(3,\,Y)}(o_1{}^{(3,\,Y)}(o_1{}^{(3,\,Y)}\iota_1{}^3)^{(3,\,Y)})^{(3,\,Y)})^{(3,\,Y)}}$$

$$(\lambda_1 g_{(o_1{}^{(3,\,Y)}\iota_1{}^3)^{(3,\,Y)}} \,.\, (\mathrm{C}_{((o_1{}^{(3,\,Y)}o_1{}^{(3,\,Y)})^{(3,\,Y)}o_1{}^{(3,\,Y)})^{(3,\,Y)}}$$

$$(g_{(o_1{}^{(3,\,Y)}\iota_1{}^3)^{(3,\,Y)}}[\boldsymbol{a}]_{\iota_1{}^3}))(g_{(o_1{}^{(3,\,Y)}\iota_1{}^3)^{(3,\,Y)}}([\boldsymbol{h}]_{(\iota_1{}^3 o_3{}^2)^3}[\boldsymbol{p}]_{o_3{}^2}))),$$

в которой фигурирует такая схема квазиконцептуализации переменной g, которая обеспечивает принятие во всех ее вхождениях максимального уровня вложенности. Это выражение можно прочитать так: $[\boldsymbol{f}]_1$ есть композициональная функция, которая образует процедуру проверки предложения

$$\boldsymbol{f}_{o(o\iota)}\,(\lambda g_{o\iota} \,.\, g\boldsymbol{a}_\iota \supset g(\boldsymbol{h}_{\iota o_2{}^1}\boldsymbol{p}_{o_2{}^1}))$$

из композициональной функции, образующей для любой композициональной функции d типа $(o_1{}^{(3,\,Y)}\iota_1{}^3)^{(3,\,Y)}$ и частных случаев концептуализаций

$$[\mathrm{C}_{ooo}]_1,\ [\boldsymbol{a}_\iota]_1,\ [\boldsymbol{h}_{\iota o_2{}^1}]_1,\ [\boldsymbol{p}_{o_2{}^1}]_1$$

процедуру задания денотата формулы

$$g\boldsymbol{a}_\iota \supset g(\boldsymbol{h}_{\iota o_2{}^1}\boldsymbol{p}_{o_2{}^1}).$$

Частным случаем полученной концептуализации будет, например, выражение

$$[\boldsymbol{f}]_{(o_1{}^3(o_1{}^3(o_1{}^3\iota_1{}^3)^3)^3)^3}(\lambda_1 g_{(o_1{}^3\iota_1{}^3)^3} \,.$$

$$(\mathrm{C}_{((o_1{}^3o_1{}^3)^3o_1{}^3)^3}(g_{(o_1{}^3\iota_1{}^3)^3}\,[\boldsymbol{a}]_{\iota_1{}^3}))(g_{(o_1{}^3\iota_1{}^3)^3}([\boldsymbol{h}]_{(\iota_1{}^3o_3{}^2)^3}[\boldsymbol{p}]_{o_3{}^2}))).$$

Тот факт, что вместо концептуализации константы $\boldsymbol{a}$, уровня вложенности 0 мы вынуждены использовать ее концептуализацию уровня 3, объясняется тем, что концептуализация λ-выражения должна оказаться функцией, тип аргумента которой соответствует типам концептуализаций всех выражений, в которые входит квантифицируемая переменная. Концептуализация константы $\boldsymbol{h}$ задает в этом примере, так сказать, нижний возможный предел. И это не противоречит нашим содержательным установкам. В самом деле, концепт λ-выражения, который рассматривался выше, обозначает программу композиции программы типа $(o_1{}^3 \iota_1{}^3)^3$ с адекватными ей по типу программами. Поскольку речь идет именно о программе фиксированного типа, которая, сама является концептуализацией функционального типа, все ее аргументы в данном выражении должны обладать одним и тем же уровнем вложенности.

При построении концептуализаций выражений

$$\boldsymbol{g}_{o\iota}\boldsymbol{a}_\iota \supset \boldsymbol{g}(\boldsymbol{h}_{\iota o_2{}^1}\boldsymbol{p}_{o_2{}^1}) \text{ и } \lambda g_{o\iota}\,.\,(g\boldsymbol{a}_\iota \supset g(\boldsymbol{h}_{\iota o_2{}^1}\boldsymbol{p}_{o_2{}^1}))$$

мы в первом случае имеем дело с двумя концептуализациями константы $\boldsymbol{g}$, а во втором – получаем унифицированную функцию, где фиксирован тип квазиконцептуализации переменной g.

Отметим важное следствие этого факта. Мы получаем инструмент реализации критерия «Альтернативы 0» Чёрча. В самом деле, если концептуализации $(\lambda x_\alpha Ax)B_\alpha$ и $A(B)$ в общем случае отличаются друг от друга тем, что являются различными семантическими программами, что, вообще говоря, не является логическим различением, то реализации принципа композициональности на основе расслоения концептов дает уже логический критерий. Здесь концептуализация $(\lambda x_\alpha Ax)B_\alpha$ будет иметь дело с квазиконцептуализацией переменной, соответствующей одному из частных случаев концептуализации B, причем только с одной из таких концептуализаций, а концептуализация $A(B)$ может содержать несколько частных случаев концептуализации B. Например,

$$[[(\lambda g_{o\iota}\,.\,(g\boldsymbol{a}_\iota \supset g(\boldsymbol{h}_{\iota o_2{}^1}\boldsymbol{p}_{o_2{}^1})))\boldsymbol{g}_{o\iota}]]_1$$

строится из концептуализации $\boldsymbol{g}_{o\iota}$, имеющей вид

$$[\boldsymbol{g}]_{(o_1{}^{(1,\,A)}\iota_1{}^{A})^{(1,\,A)}},$$

и ее схема выглядит так:

$$(\lambda_1 g_{(o_1{}^{(3,\,Y,\,A)}\iota_1{}^{(3,\,A)})^{(3,\,Y,\,A)}}\,.\,(\mathrm{C}_{((o_1{}^{(3,\,Y,\,A)}o_1{}^{(3,\,A)})^{(3,\,Y,\,A)}o_1{}^{(3,\,Y,\,A)})^{(3,\,Y,\,A)}}$$
$$(g_{(o_1{}^{(3,\,Y,\,A)}\iota_1{}^{(3,\,A)})^{(3,\,Y,\,A)}}\,\boldsymbol{a}_{\iota_1{}^{(3,\,A)}}))$$
$$(g_{(o_1{}^{(3,\,Y,\,A)}\iota_1{}^{(3,\,A)})^{(3,\,Y,\,A)}}(\boldsymbol{h}_{(\iota_1{}^{(3,\,A)}o_3{}^2)^{(3,\,A)}}\,\boldsymbol{p}_{o_3{}^2})))$$
$$([\boldsymbol{g}]_{(o_1{}^{(3,\,Y,\,A)}\iota_1{}^{(3,\,A)})^{(3,\,Y,\,A)}}),$$

а частным случаем такой концептуализации будет, например,

$$(\lambda_1 g_{(o_1{}^3\iota_1{}^3)^3}.\,(\mathrm{C}_{((o_1{}^3o_1{}^3)^3o_1{}^3)^3}\,(g_{(o_1{}^3\iota_1{}^3)^3}\,\boldsymbol{a}_{\iota_1{}^3}))$$
$$(g_{(o_1{}^3\iota_1{}^3)^3}\,(\boldsymbol{h}_{(\iota_1{}^3o_3{}^2)^3}\,\boldsymbol{p}_{o_3{}^2})))([\boldsymbol{g}]_{(o_1{}^3\iota_1{}^3)^3}).$$

Различия с концептуализацией выражения $\boldsymbol{g}_{o\iota}\boldsymbol{a}_\iota \supset \boldsymbol{g}(\boldsymbol{h}_{\iota o_2{}^1}\,\boldsymbol{p}_{o_2{}^1})$ очевидны.

Рассмотрим еще один пример с λ-выражениями, а именно когда модификации типов при редукции дерева предпринимаются и слева и справа, т. е. когда мы реализуем пункт (4.2) этапа (В). При построении концептуализации выражения

$$[[(\lambda g_{o(oi)} \,.\, (g\boldsymbol{h}_{oi} \supset g(\boldsymbol{k}_{(oi)o_3}2\,\boldsymbol{p}_{o_3}2)))(\lambda f_{oi} \,.\, (f\boldsymbol{a}_i \supset f(\boldsymbol{l}_{io_2}1\,\boldsymbol{q}_{o_2}1)))]]_1$$

мы сначала получаем концептуализацию первой его части из концептуализации

$$(\mathrm{C}_{((o_1(4,X,Y,A,B,C)_{o_1}(4,X,Y))(4,X,Y,A,B,C)_{o_1}(1,A,B))(4,X,Y,A,B,C)}$$
$$(g_{(o_1(1,A,B)_{o_1}(1,A)_{\iota_1}A)(1,A))(1,A,B)}\,\boldsymbol{h}_{(o_1(1,A)_{\iota_1}A)(1,A)}))$$
$$(g_{(o_1(4,X,Y)(o_1(4,X)_{\iota_1}X)(4,X))(4,X,Y)}$$
$$(\boldsymbol{k}_{((o_1(4,X)_{\iota_1}X)(4,X)_{o_4}3)(4,X)}\,\boldsymbol{p}_{o_4}3)),$$

которая после замен пар переменных $\langle A, X\rangle$ на A получает вид (опускаем внешний индекс типа при λ-выражении)

$$\lambda_1 g_{(o_1(4,A,B,Y)(o_1(4,A)_{\iota_1}(4,A))(4,A))(4,A,B,Y)}\,.$$
$$((\mathrm{C}_{((o_1(4,A,B,C,Y)_{o_1}(4,A,B,Y))(4,Y,A,B,C)_{o_1}(4,A,B,Y))(4,Y,A,B,C)}$$
$$(g_{(o_1(4,A,B,Y)_{o_1}(4,A)_{\iota_1}A)(4,A))(4,A,B,Y)}\,\boldsymbol{h}_{(o_1(4,A)_{\iota_1}A)_{\iota_1}(4,A)}))$$
$$(g_{(o_1(4,A,B,Y)(o_1(4,X)_{\iota_1}X)(4,X))(4,A,B,Y)}$$
$$(\boldsymbol{k}_{((o_1(4,A)_{\iota_1}A)(4,A)_{o_4}3)(4,A)}\,\boldsymbol{p}_{o_4}3))).$$

Концептуализация правой части, также после замены пары переменных на одну из них, имеет вид

$$\lambda_1 f_{(o_1(3,D)_{\iota_1}3)(3,D)}\,.\,((\mathrm{C}_{((o_1(3,D,F)_{o_1}(3,D))(3,D,F)_{o_1}(3,D))(3,D,F)}$$
$$(f_{(o_1(3,D)_{\iota_1}3)(3,D)}\,\boldsymbol{a}_{\iota_1}3))(f_{(o_1(3,D)_{\iota_1}3)(3,D)}\,(\boldsymbol{l}_{(\iota_1 3_{o_3}2)3}\,\boldsymbol{q}_{o_3}2))).$$

Образуем теперь концептуализацию всего выражения, заменяя пары переменных $\langle A, D\rangle$ на A:

$$(\lambda_1 g_{(o_1(4,A,B,F,Y)(o_1(4,A)_{\iota_1}(3,A))(4,A))(4,A,B,F,Y)}\,.$$
$$((\mathrm{C}_{((o_1(4,A,B,C,F,Y)_{o_1}(4,A,B,F,Y))(4,A,B,C,F,Y)_{o_1}(4,A,B,F,Y))(4,A,B,C,F,Y)}$$
$$(g_{(o_1(4,A,B,F,Y)\,(o_1(4,A)_{\iota_1}(3,A))(4,A))(4,A,B,F,Y)}\boldsymbol{h}_{(o_1(4,A)_{\iota_1}(3,A))(4,A)}))$$
$$(g_{(o_1(4,A,B,F,Y)(o_1(4,A)_{\iota_1}(3,A))(4,A))(4,A,B,F,Y)}$$
$$(\boldsymbol{k}_{((o_1(4,A)_{\iota_1}(3,A))(4,A)_{o_4}3)(4,A)}\,\boldsymbol{p}_{o_4}3)))$$
$$(\lambda_1 f_{(o_1(4,A)_{\iota_1}(3,A))(4,A)}\,.\,((\mathrm{C}_{((o_1(4,A,F)_{o_1}(4,A))(4,A,F)_{o_1}(4,A))(4,A,F)}$$
$$(f_{(o_1(4,A)_{\iota_1}(3,A))(4,A)}\,\boldsymbol{a}_{\iota_1}(3,A)))$$
$$(f_{(o_1(4,A)_{\iota_1}(3,A))(4,A)}\,(\boldsymbol{l}_{(\iota_1(3,A)_{o_3}2)(3,A)}\,\boldsymbol{q}_{o_3}2)))).$$

Здесь мы получили согласование обеих частей по уровням вложенности используемых переменных и их аргументов. Придав минимальные значения переменным индексам вложенности, мы получим следующий частный случай этой концептуализации:

$$(\lambda_1 g_{(o_1{}^4(o_1{}^4\iota_1{}^3)^4)^4} . ((\mathrm{C}_{((o_1{}^4 o_1{}^4)^4 o_1{}^4)^4} (g_{(o_1{}^4(o_1{}^4\iota_1{}^3)^4)^4}\ \boldsymbol{h}_{(o_1{}^4\iota_1{}^3)^4}))$$
$$(g_{(o_1{}^4(o_1{}^4\iota_1{}^3)^4)^4} (\boldsymbol{k}_{((o_1{}^4\iota_1{}^3)^4 o_4{}^3)^4}\ \boldsymbol{p}_{o_4{}^3}))))$$
$$(\lambda_1 f_{(o_1{}^4\iota_1{}^3)^4} . ((\mathrm{C}_{((o_1{}^4 o_1{}^4)^4 o_1{}^4)^4} (f_{(o_1{}^4\iota_1{}^3)^4}\ \boldsymbol{a}_{\iota_1{}^3}))$$
$$(f_{(o_1{}^4\iota_1{}^3)^4} (\boldsymbol{l}_{(\iota_1{}^3 o_3{}^2)^3}\ \boldsymbol{q}_{o_3{}^2})))).$$

Теперь можно дать определение того, что такое концептуализация замкнутого выражения языка $A0^{C^*}$.

Определение. Концептуализацией замкнутой формулы A языка $A0^{C^*}$ называется любой результат допустимой подстановки значений вместо переменных индексов вложенности (если они есть) в выражение, которое получено после применения к A процедуры построения концептуализации.

Необходимость введения переменных индексов вложенности на различных шагах процедуры образования композиционального типа и последующие модификации типов при построении концептуализации делают описанные выше процедуры непрозрачными, несмотря на простоту исходных содержательных установок. Это объясняется чисто синтаксической природой этих процедур, задача которых – построить в качестве концептуализации выражение интенсионального типа, которое, в том случае, если исходное выражение было функциональным, имеет композициональный тип и, при любом случае, все элементы которого имеют композициональные типы. Возможность варьировать индексы вложенности позволяет решить задачу согласования композициональных концептуализаций функций с типами их аргументов.

Композициональность и полиморфность концептов

Процедура построения концептуализации замкнутой формулы, для того, чтобы быть служить той цели, которую мы ставим, вводя расслоение интенсиональных типов и понятие концептуализации, должна удовлетворять следующим требованиям:

(i) концептуализация функционального выражения, при любой его сложности всегда является композициональной функцией на концептах, даже в том случае, когда сама исходная функция не композициональна;

(ii) концептуализация любого выражения обозначает такую семантическую программу, которая является композицией концептуализаций его компонент.

Описанная выше процедура построения концептуализаций в рассмотренных примерах приводила к результату, который удовлетворял требованиям (i) и (ii). Но мы не можем сказать, имеет ли это место в общем случае, и на каком пути следует искать доказательство этого факта. Кроме того, нельзя исключать существования других, более простых и наглядных процедур построения концептуализаций. Обозначенные здесь проблемы доказательства универсальности нашего метода построения концептуализаций и поиск альтернативных методов мы оставляем без решения. Но это не лишает нас возможности сделать некоторые содержательные выводы о системе $A0^{C^*}$, а также обойти нерешенные проблемы, используя вместо полных форм концептуализаций сокращенные формы, т. е. выражения, образованные операторами концептуализации. Независимо от успешности нашего подхода само существование той или иной процедуры или процедур построения полной формы концептуализации, сопоставляющей всякому выражению вида $[a]_1$, $[[A]]_1$ или $Com^1([[A]]_1, [[B]]_1)$ некоторую форму, удовлетворяющую требованиям (i) и (ii), не вызывает сомнений.

Каждая концептуализация связана с конкретным процессом ее построения по той или иной процедуре, и концептуализации мы рассматриваем как имена концептов, т. е. семантических программ с теми или иными свойствами. Среди концептов у нас появятся такие, которые обозначены концептуализациями некоторых формул, которые были введены, например, при семантическом анализе фрагмента текста. Это не значит, что другие концепты не могут быть обозначены концептуализациями. В ЛСД в качестве общего принципа принимается, что множество интенсиональных сущностей превосходит множество выражающих их формул, поскольку иначе неизбежны семантические парадоксы [Myhill 1958]. Но в реальном процессе интерпретации выражений мы каждый раз используем только ограниченное число интенсиональных сущностей, причем именно тех, которые непосредственно связаны с интерпретируемыми выражениями, так сказать, «здесь и теперь», т. е. обеспечивают «контекстную» определенность смысла каждого отдельного выражения. Итак, множество концептов в общем случае бесконечно, причем если речь идет о концептах интенсионального уровня большего, чем 0, или о концептах функциональных выражений, то оно более чем счетно. Одновременно множество актуально используемых концептов является конечным. Можно ли совместить эти свойства в рамках ЛСД, как системы, описывающей именно свойства используемых нами интенсиональных сущностей? Мы попытаемся сделать это, применяя понятие концептуализации.

Наше понятие концептуализации довольно далеко уводит нас от «наивного» принципа композициональности, который гласит, что концепт сложного выражения есть функция концептов (концептуализаций) его составляющих, и формальным выражением которого, например, в ЛСД Чёрча, была синтаксическая договоренность, на основании которой запись $(\alpha\beta)_1$ читалась как $(\alpha_1\beta_1)$. Это при нашем подходе соответствовало бы равнозначности записей $[[AB]]_1$ и $[[A]]_1[[B]]_1$, которая, как кажется, должна отражать функциональный характер концептуализации сложного выражения. Но, как мы видели, концептуализация выражения видоизменяет тип его компонент и может оказаться параметрической и (или) многомерной. При трактовке смысла как процедуры установления денотата и при некоторой дифференциации таких процедур по уровням их вложенности или, что то же самое, по наличию в процедурах подпроцедур, реализация принципа композициональности приводит к полиморфности концепта выражения, когда в зависимости от контекста этот концепт каждый раз может оказаться сущностью нового типа. Особенно ярко это проявляется при построении концептуализаций экстенсиональных и смешанных выражений. Но, как мы отмечали, в такого рода полиморфности нет ничего неожиданного, поскольку она отражает свойство смысла выражения адаптироваться к контексту. Мы не используем термин «контекст», поскольку не имеем в виду то, что в лингвистической или логической семантике естественного языка описывают как зависимость значения выражения от контекста – это явление иного рода и здесь нет связи с теорией смысла как таковой. Явление полиморфности смысла связано с многообразием аппроксимации норм семантического поведения пользователя языка, когда универсальная норма, диктующая метод установления значения выражения, используется не целиком, а в какой-то своей части, что актуально делает процесс интерпретации конечным и обозримым. Регулятором выбора конкретного применения нормы является контекст, но не контекст, понимаемый как функция смыслов выражений фрагмента текста, а как бы специфический *над*контекст, образованный в ходе анализа сложности этих смыслов, который является носителем дополнительной и уточняющей информации о логической структуре смысла всего выражения. Нас интересует не семантика того или иного фрагмента естественного языка, для чего можно привлекать исследование свойств контекстов, а универсальный механизм интерпретации и доступные формы описания различных его элементов. Принцип контекстной зависимости проявляется и здесь, но иным образом, так что, говоря о логике интенсиональных сущностей, мы подразумеваем иную систему, нежели логику одного из фрагментов языка, которую можно было бы назвать «логикой смысла» или «логикой разговоров о смысле», хотя и такой подход возможен.

Основной целью логики интенсиональных сущностей является формальное представление их свойств, проявляющихся в активном процессе интерпретации, который осуществляется активным субъектом. Его компетентность важна для нас не как осведомленность в той или иной области знания, позволяющая адекватно интерпретировать выражения языка, помещенные в соответствующий контекст, а как умение правильно выбирать и осуществлять интерпретацию сложного выражения на основании интерпретаций его частей. Здесь проявляется уже не зависимость смысла от контекста, а изначальная полиморфность смысла, выявление которой становится возможным при использовании аппарата ЛСД.

ЛИТЕРАТУРА

1. *Микиртумов И.Б.* Композициональные и некомпозициональные типы в интенсиональной логике // Логические исследования. Вып. 11. М., 2004. С. 200-214.
2. *Myhill J.* Problems Arising in the Formalisation of Intentional Logic // Logique et Analyse. 1958. V. 1. P. 78-83.

М.М. Новосёлов

СТРАНИЦЫ МИНУВШЕГО (из истории первой отечественной философской энциклопедии)

> В зеркале высокого и непреходящего
> Прошлое значительно ближе настоящего.
> *Ольга Мочалова*

Сегодня время мемуаристики. Книжные полки магазинов пестрят лицами артистов, художников, писателей, политических деятелей. Увы, в этой пестрой галерее портретов не заметно ни одного знакомого философского лица. Это вам не былые годы старой России, это вам не серебряный век, когда тот же Бердяев не стеснялся поведать российскому читателю о своем философском развитии.

Современная отечественная философия *несовременна*. Среди философских новинок подавляющее число книг – переводы. Это знакомо. За современностью отечественные авторы и прежде обращались на благодетельный Запад, который здорово выручал, питая философские труды под соусом марксистской критики всяческих «буржуазных» течений и методологий.

Однако теперь российская философия по существу выведена за рамки общественного поля. Правда, она еще живет на кафедрах институтов и университетов. Но только как несчастье для студентов, устремленных в компьютерные сети и бухгалтерский учет.

В том, что философией пренебрегают, виновата она сама. Прежде отечественная марксистско-ленинская философия в роли партийной идеологии надзирала науку. Это была ее профессия – быть «полицией мысли». Теперь, когда российской философии самой позволили занять положение науки, ей по сути нечего сказать. Остается только обращаться в собственную (советскую и не советскую!) историю.

Говорят, за неимением гербовой пишут на простой. Я думаю, что этой простой, способной пробудить интерес к сегодняшнему существованию российской философии, наметить ее путь к читателю, могла бы философская мемуаристика – воспоминания и беседы свидетелей «человеческой драмы» философии в России. К тому же воспоминания о бывшем всегда желанный материал для истории. А ситуация беседы, а не проповеди, могла бы вывести философию из ее эзотерического состояния, создать ей непрофессиональную (что особенно важно!) аудиторию.

Вот почему я порадовался появлению воспоминаний З.А. Каменского (Вопросы философии. № 1. 1996) и Р.А.Гальцевой (Знамя. № 2. 1997) о том, как создавалась первая советская «Философская энциклопедия» (дальше ФЭ). Повод был юбилейный – 25 лет со дня ее завершения в 1970 г. Значит, в текущем году – 35. Уже появилась «Новая философская энциклопедия» (дальше НФЭ). Когда-нибудь, конечно, расскажут и о ней. Но сейчас я хочу вернуться к далеким 70-ым, к той части работы, которая прямо или косвенно касалась моего участия в ФЭ. Речь, разумеется, пойдет о логике. В частности, о тех «злоключениях», о которых умолчали указанные выше мемуаристы.

Но сначала немного об общем редакционном климате.

По версии Каменского, появление на свет многотомного философского издания – это естественное следствие оттепели 60-х гг., главная задача которой «*очистить философское знание*» (читай: марксистско-ленинскую философию!) от «*сталинского догматизма*», по существу, представить советскому читателю подлинный рафинированный марксизм-ленинизм.

По версии Гальцевой, появление Философской энциклопедии в советской стране – это скорее явление противоестественное, если естественным считать общую идеологическую атмосферу конца 60-х. Противоестественное, поскольку главной задачей для тех, кто Философскую энциклопедию создавал (не скажу для всех, но, по крайней мере, для большей части второго состава редакции) было очищение «*от всей этой философии*».

Характеризуя общую атмосферу энциклопедической работы, Каменский и сам понимал, что помимо собственно научных задач она должна решать «задачи политико-идеологического свойства». Но он не разделял того радикализма, с каким эти задачи разрешались в последние годы работы над ФЭ рядовым составом ее редакторов, для которых агрессивное невежество «диаматчиков» и «истматчиков» было первым труднопроходимым препятствием на пути реализации (выпуска в свет!) профессионально выполненных статей энциклопедии. А насколько эти задачи удавалось разрешать, говорит хотя бы то, что в «ученом народе», не чаявшем сбросить ярмо официальной философии, ФЭ принимали хорошо. Ведь многим тогда (при взгляде на титул) она представлялась форпостом или, если хотите, лицензией на дозволенность философской мысли вообще.

Наше общество так привыкло к переменам по указам «царя-батюшки», что «содержательная эволюция» (точнее сказать –

революция!), представленная в последних двух томах энциклопедии (о чем Каменский говорит с сожалением), была даже истолкована как смена государственной политики: «*выход последних томов*, – вспоминает Гальцева, – *был воспринят как знамение перемены курса в Кремле. В редакцию время от времени вбегал с вопросом человек из провинции, чтобы подтвердить свою догадку: правда ли, что в Центре уже отменили марксистскую философию*?».

Нет, никто в Центре в 1970-ом ее не отменял. Для этого потребуется еще тридцать лет ожиданий. Ее отменили в своем сознании (*de facto* и *de jure*) некоторые из тех, кто создавал в редакции общий философский климат 4-го и 5-го томов.

Вспоминается обыкновенный летний московский день. В скромном кафе на улице Чернышевского шел оживленный разговор. За столиком устроилась небольшая компания сотрудников издательства «БСЭ», расположенного неподалеку. Зашли пообедать, а заодно и обсудить дела издательские – проблемы очередного тома Философской энциклопедии. Как шутили в редакции: второй в мире (после итальянской) и первой в России.

Среди участников разговора, помню, были: Рената Гальцева, Эрик Юдин, Юрий Попов, Александр Георгиевич Спиркин (Зам Главного) и я. О содержании разговора доподлинно сейчас не вспомнишь. Но касался он вопроса весьма важного – идеологической атмосферы работы в редакции. Отчетливо запомнилась только фраза, сказанная А.Г. Спиркиным: «Знаете, ребята, моя задача вам не мешать».

Эта, как будто бы рядовая фраза, обращенная заместителем Главного к участникам разговора, означала, во-первых, вотум доверия радикальной части редакции, а во-вторых, по существу открывала «зеленый свет» для той работы, которую С.С. Аверинцев определил как «*маленький крестовый поход*» против невежества партийно-философской бюрократии.

Можно доверять Каменскому, который в своих воспоминаниях пишет, что перед редакцией постоянно возникала проблема представления областей науки, «*традиционно не только не включавшихся в философию, но и вообще объявленных областями "буржуазной идеологии"... Таковы были символическая (математическая) логика, кибернетика, теория систем, значительная часть терминологии идеалистической философии, многие ее деятели и школы, особенно второй половины XIX-XX вв., как отечественные, так и зарубежные*».

И тот же Каменский высказывает мнение, которого он сам держался все годы работы в Энциклопедии: «*собственная пробле-*

матика математической логики или кибернетики действительно не могут считаться непосредственно философскими».

Ясно, что при такой позиции (не только заведующего редакцией, но и, что не менее важно, членов титульной редколлегии) отстаивание «собственной проблематики» математической логики в ФЭ было настоящей борьбой за науку.

ФЭ зачиналась в 1958-ом, в том самом, когда в МГУ была создана кафедра математической логики. Ее возглавил А.А. Марков. Таким образом, с этого года в МГУ оказались две кафедры логики – одна на философском факультете, другая на мехмате. Это было время нескончаемых (и весьма резких) дискуссий логиков формальных и логиков диалектических. Перевес в философской среде был, конечно, на стороне последних.

Между тем, если вы откроете первый том ФЭ, вы натолкнетесь на обширные статьи по логике, более обширные по обсуждаемым в них вопросам, чем статьи по тем же вопросам в НФЭ. В свете сказанного выше это может показаться странным, тем более что, как свидетельствует Каменский, и Главный (Ф.В. Константинов), и некоторые члены титульной редколлегии были настроены против логики в ее современной (математической) форме.

История умалчивает, чьими усилиями было решено включить в словник издания основные понятия логики. И кто сумел отстоять эту позицию перед консервативным Главным и титульной редколлегией, поскольку, по словам Каменского, логическая проблематика в ту пору «*подвергалась гонению и не находила достаточно широкого и детализированного выхода в печать*».

Но очевидно, что у самой редакции, на самом раннем этапе ее работы, не было возможностей не только самостоятельно сформировать довольно полный словник по логике, но и противостоять по этому вопросу Главному. Достаточно посмотреть на первый ее состав. В штате редакции не было ни одной «сильной фигуры», ни одного формального логика и ни одного, сочувствующего ей, кроме, возможно, А.Г. Спиркина, тогда заведующего редакцией.

Думается, решающим было то, что заинтересованность в непосредственном участии в ФЭ проявили Андрей Андреевич Марков (в первом и во втором томах в качестве научного консультанта по математической логике) и Софья Александровна Яновская (научный консультант по математической логике второго, третьего и четвертого томов). Инициатива, по-видимому, принадлежала ей, поскольку она уже давно вела «формально-логическую пропаганду» среди философов. Да и прежде философия математики была главной темой ее исследований.

Со слов Б.В. Бирюкова, составление словника по логике было делом кафедры логики мехмата (кафедра логики философского факультета в этой работе участия не принимала), а непосредственными исполнителями были сотрудники кафедры: С.А. Яновская, В.А. Успенский, А.В. Кузнецов, В.С. Чернявский и др., а из приглашенных – В.К. Финн, Д.Г. Лахути и И.С. Добронравов. Они же составили и первый авторский коллектив ФЭ. Утверждение словника состоялось, видимо, не без давления кафедры.

Правда, А.А. Марков для Главного был, конечно, фигурой призрачной. А вот Яновская – весьма ощутимой. Ф.В. Константинов был осведомлен о ее революционном прошлом и партийном настоящем. В известные периоды советской истории их судьбы и взгляды даже пересекались – Яновская входила в состав преподавателей Института Красной профессуры, который окончил Константинов, а первая его публикация «За большевизацию работы на философском фронте» была идейно не чужда, видимо, и Яновской в эпоху 30-х гг., когда она примкнула к травле академика Николая Николаевича Лузина (см. ее доклад «Против Лузина и лузинщины» на собрании математиков МГУ // Фронт науки и техники. 1936, № 7; или: Дело академика Н.Н. Лузина. СПб., 1999, с. 273-276).

Следовательно, на первом этапе создания ФЭ идеологическая защита у логики все же была. И позднее, пока была жива Софья Александровна (она скончалась в 1966-ом), сам Главный к статьям по логике не придирался и в работу отдела не вникал.

Но были, помимо Константинова, у логики и другие недруги в большой редколлегии. И самым активным противником математической логики был весьма почитаемый у диалектиков Бонифатий Михайлович Кедров. В ФЭ у меня с ним встреч не бывало, а вот у Бирюкова были, которому, по свидетельству Каменского, «*доставалось особенно*».

Сам Борис Владимирович вспоминает, что когда вышел второй том энциклопедии, наверху, в титульной редколлегии, разразился скандал. Особенно разгневанным был Кедров. Спровоцировали скандал статьи по логике. Они, похоже, заслоняли марксистскую тематику, были несравненно содержательней и попросту умней. Отвечавший за логику Борис Владимирович (в то время внештатный редактор) был вызван «на ковер». Но научных консультантов, А.А. Маркова и С.А. Яновскую (видимо, из боязни при профессиональном разговоре оказаться в платье голого короля), пригласить не решились. Дело кончилось выговором и требованием логику «урезать». А в сознании академика Кедрова математическая логика навсегда ассоциировалась с термином «бирюковщина»[1].

Жизнь под постоянным идеологическим давлением имеет одну положительную сторону. Она обязывает редактора к творчеству, к борьбе «*за мысли, взгляды, подходы, факты*» (Гальцева). Если хочешь спасти статью, надо обеспечить ее высокое качество. Качество первых логических статей в первом и втором томах ФЭ обеспечивалось авторским коллективом, о котором я уже говорил. Все главные статьи обсуждались на большом семинаре у А.А. Маркова. Другие курировала Софья Александровна, при необходимости проводя собственную авторскую работу.

Но со временем, когда математическая логика получила в стране самостоятельный оперативный простор, некоторые из авторского коллектива ушли, и возникла потребность в его пополнении. Именно в эту пору, так сказать на полдороге до завершения дела, я и появился в редакции ФЭ (1963).

Редакция линяла. Ушли старожилы. Пришли почти одновременно пять беспартийных научных редакторов (куда смотрела большая редколлегия?) – Рената Гальцева, Сергей Воробьев, Михаил Новоселов, Юрий Попов, недавно освобожденный из заключения по политическим мотивам, но не реабилитированный (до 1989-го) Эрик Юдин и, наконец, младший редактор Мария Андриевская, которая однажды на мой вопрос, почему бы ей, такой образованной и умной, не защитить диссертацию, ответила: «*Михаил Михайлович, я в принципе не способна сдать экзамен по истории партии*».

С этого момента и началась та эволюция (я выше сказал «революция»), о которой с таким сожалением пишет Каменский.

Представьте себе два полюса. Один – это титульная редколлегия и Главный (подробную характеристику ее составляющих см. в ст. Каменского). Этот полюс вполне устраивала задача, отмеченная Каменским, – «очищение философского знания от сталинского догматизма», но ровно настолько, чтобы это не затронуло «идеологическую чистоту принципов». Иначе говоря, надо было сохранить «*марксизм – оружие огнестрельный метод*» (В.В.Маяковский). Главный так и напутствовал редакторов: «*каждая статья должна стрелять*».

И, между прочим, многие статьи действительно стреляли. Только не в ту сторону, в какую хотелось Главному. И об этом

[1] Шутка ли, но спустя тридцать лет я с удивлением обнаруживаю в НФЭ, что Бонифатий Михайлович много сделал «для развития математической логики в СССР».

стоит прочитать в воспоминаниях Гальцевой или углубиться в чтение статей пятого тома [2].

Второй полюс – это по существу беспартийная редакция, для которой задача диаметрально иная: *вернуть философии ее человеческое лицо*.

Естественно, что со стороны большой редколлегии и речи быть не могло о решении такой задачи. И дело было вовсе не в отсутствии средств, а только в противодействии ее честному разрешению.

На первый взгляд, логика стояла в стороне от любой из этих задач. Однако еще на философском факультете меня убеждали, что логика – это тоже партийная наука. В этом, мне думается, не сомневались и члены титульной редколлегии. Выручало полное незнание ими самой логики. Выбор «верховных» для визирования статей Каменский приписывает инициативе редакторов отделов. Сам он «*считал обязательным любую статью завизировать у членов редколлегии*». Но для большинства из нас это был выбор между Сциллой и Харибдой. Поэтому лично я никогда никому из членов титульной редколлегии на визирование статей не посылал. Только миновать Главного было невозможно – он читал верстку.

Разумеется, решать задачи «политико-идеологического свойства» в лоб было невозможно. Поэтому Рената права, когда пишет, что «*концентрацией всей борьбы, ее апогеем была битва за слова и за обертоны слов*». Однако поиск и выбор авторов были не менее важной частью «прорыва блокады», поскольку и то и другое являлось прерогативой редактора отдела и, похоже, было единственной уступкой редакторской свободе со стороны издательства. Каждый редактор имел своих предпочитаемых авторов.

В то время не так-то легко было найти авторов, умеющих, во-первых, писать для энциклопедии, а во-вторых, способных удовлетворить запросы редактора. Найденными авторами приходилось дорожить.

Среди тех, кого Каменский называет «*молодыми штурманами будущей бури*» (какой такой бури Каменский не говорит), очень немногие могли выбраться из колеи марксистско-ленинских догм. Подлинные перемены несли совсем иные, никому дотоле не известные авторы.

В частности, это касалось и тех, кто писал по логике. Драматизм «авторской ситуации» проявился здесь наиболее ярко и с самого начала, поскольку некоторые из тех, кто писал по логике для ФЭ, были в той или иной степени (в разные годы) связаны с

---

[2] «*Это не энциклопедия, а кладбище репрессированных!*» – воскликнул после выхода пятого тома ФЭ один из членов титульной редколлегии.

правозащитным движением, а потому, по сути (потенциально для власти), были персонами *non grata*.

Если вы соедините имена этих авторов (а были и другие неугодные) с общим отношением к логике как философски значимой дисциплине со стороны титульной редколлегии и Главного, вы поймете, через какие тернии приходилось буквально продираться, отстаивая статьи.

Приведу один, но характерный, пример.

Александр Сергеевич Есенин-Вольпин был среди первых авторов ФЭ. Его статьи обычно оригинальны, он тонко чувствует философскую проблематику и умеет писать для энциклопедии, даже если речь идет о понятиях, набивших оскомину. Деятельность Есенина-Вольпина в энциклопедии совпала по времени с его правозащитной деятельностью. Понятно, что все написанные им статьи оказывались под цензурной угрозой – их просто требовали исключать. Это было первое испытание для редакции. Статьи сохраняли, публиковали, но без подписи автора. Конечно же, это было нарушением принятого в ФЭ правила.

В 1963-ем, как раз в том самом году, когда я приступил к работе в редакции, в одном из выступлений секретаря ЦК КПСС Л.Ф. Ильичева («Творить для народа во имя коммунизма») нашему автору за публикацию стихов и философской прозы в американском издании была дана такая вот «характеристика»: «проходимец… загнивший на корню ядовитый гриб».

Спросите за что? Ну хотя бы за то, что его философский трактат заканчивался словами «*В России нет свободы печати – но кто скажет, что в ней нет и свободы мысли*»[3].

Ясно, что, заказывая и публикуя статьи человека с такой характеристикой от «партии власти», редакция делала смелый (можно сказать, смертельный для себя) шаг. Ведь это была эпоха не Горбачева или Ельцина и даже уже не эпоха Хрущева.

Сам Александр Сергеевич, конечно, понимал ситуацию и вовсе не хотел «подставить» редакцию. В моем личном архиве хранится его письмо, из которого я позволю себе привести следующее:

«*Написанные мной три статьи "Парадоксы", "Причинность", "Связь" представляю редакции и разрешаю опубликовать в "Философской энциклопедии" анонимно или под псевдонимом "А"... В случае, если по указанным причинам* (об этом средняя часть письма. – М.Н.) *мои статьи окажутся неприемлемыми, я разрешаю использовать содержащийся в них материал, за исклю-*

[3] Теперь и стихи, и научную прозу Есенина-Вольпина можно прочитать в недавно изданной книге: *Есенин-Вольпин А.С.* Избранное, М., 1999. Но тогда…

чением могущих встретиться в нем новых, еще нигде не опубликованных положений, при составлении статей на соответствующие темы. Думаю, что по рассматриваемым вопросам я написал все, что мог, и только так, как могу. С уважением…»

Это письмо датировано 4 июня 1965-го. Щедрость его очевидна. Готовился 4-ый том. Статьи надо было сдавать. Кроме перечисленных выше в моем портфеле лежали «Непредикативное определение», «Отрицание (в логике»), «Правило», «Принцип исключенного третьего» и очень важная статья «Предикатов исчисление».

После редактуры все эти статьи я отправил в печать без какого-либо согласования с членами титульной редколлегии и Главным, и за полной подписью автора. По получению гранок реакция Главного была короткой и категоричной: «*Статьи Вольпина снять*!».

Надо было спасать положение. Опять-таки, не согласовывая с Главным, я уговорил Александра Георгиевича пойти со мной к тогдашнему председателю Научного Совета издательства Льву Степановичу Шаумяну. В трудных ситуациях он помогал нередко. Это был человек открытый и нечиновный. Мне кажется, он «болел» за наше предприятие. В кабинете Шаумяна вопрос был решен: статьи Есенина-Вольпина публикуем (в соответствии с его собственной волей) за подписью «А.С.». Замечу также, что эта аббревиатура в ряде случаев (где это удавалось сделать за счет внутренних ссылок) расшифровывалась мной в контексте соответствующих статей (см., например, ст.: «Математическая индукция», «Непротиворечивость» и «Прагматика»).

Я уже говорил, что в первые годы работы над ФЭ основные статьи по логике обсуждались на большом семинаре у А.А. Маркова. И хотя позднее эта практика прервалась, доверие к авторам не исключало рецензирования, что подчеркивает ответственность, с какой редакция продолжала относиться к своему изданию. Статьи даже маститых авторов, как правило, направлялись на отзыв специалистам по профилю.

В моем архиве сохранился пример такой редакторской практики – отзыв Дмитрия Анатольевича Бочвара на статью Есенина-Вольпина «Парадокс»[4] и ответ автора статьи на замечания Бочвара. Замечательно, что отзыв указывает на факт внимательного отношения Дмитрия Анатольевича к статьям ФЭ. Правда, многие его пожелания не были реализованы в окончательном варианте названной статьи. И не только потому, что их не принял автор.

---

[4] См.: Философская Энциклопедия. Т. 4. М. 1967. Я надеюсь, что читатель, ознакомившись с отзывом и с ответом на него, обязательно прочитает эту статью.

Признаюсь, и мне, как редактору, за которым был окончательный выбор, не хотелось разрушать оригинальный характер авторского текста. Читателям судить, удачно ли этот выбор был сделан. Но историю не перепишешь. И, публикуя оба текста, я оцениваю их как примечательный факт в жизни российской логики, факт личного порядка, конечно, но оттого не менее значительный.

ОТЗЫВ

о статье А.С. Есенина-Вольпина «Парадокс (в логике и математике)»[5]

Статья вызывает с моей стороны ряд замечаний. Эти замечания можно разделить на две группы. К первой группе относятся замечания, в которых я высказываю свои соображения, допуская, однако, что автор и Редакция могут иметь свои точки зрения, быть может, несколько отличающиеся от моей. Во вторую группу я отношу указания на недостатки статьи, требующие исправления, независимо от возможных различий в общих точках зрения.

I

1. Мне кажется, что сам термин «парадокс (в логике и математике)» сформулирован слишком широко. Дело в том, что, с одной стороны, в формальной логике (в традиционном смысле) термин «парадокс» в ряде случаев понимался просто, как обозначающий высказывание, противоположное общепринятому мнению, а, с другой стороны, в математической литературе, в широком смысле слова, этот термин нередко охватывал даже и примеры школьного характера. Как то, так и другое применение термина «парадокс» едва ли представляет интерес для ФЭ.

Мне поэтому кажется, что лучше было бы сформулировать самый термин как «парадокс в теории множеств и математической логике».

2. В статье слишком большой объем занимает рассмотрение парадоксов древности (в частности, апорий Зенона) и средневековья. Тогда как обсуждение парадокса «Лжец», как типичного семантического парадокса, вполне естественно в данной статье, сколько-нибудь подробное рассмотрение апорий Зенона, при наличии соответствующих терминов в первом и во втором томах ФЭ (см. «апория» и «Зенон Элейский»), едва ли следует включать в статью о парадоксах. То же следует сказать и об антиномиях Канта. Охватить в такой небольшой статье столь обширный материал в достаточно удачном изложении вообще едва ли возможно.

[5] Печатается по машинописному тексту, правленному автором – *М.Н.*

Мне казалось бы, поэтому, что, в соответствии с предлагаемой мной редакцией самого термина, статья, даже и чисто содержательно написанная, могла бы, в основном, ограничиться таким материалом, для которого есть фундамент в форме строгого анализа точными методами математической логики (включая семантику). Важность этой стороны дела может быть пояснена в связи, например, с одной из антиномий Канта. Конечно или бесконечно физическое пространство – это вопрос физики и космологии. Однако, если бы существовала в настоящее время строгая формализация для этой проблемы, то, изучая свойства соответствующих формализмов, можно было бы рассматривать вопрос об условиях их непротиворечивости и о возможных конкретных источниках противоречий при построении такого рода формальных систем. В настоящее время, однако, нет необходимых данных для такого рода исследований и потому достаточно строгое обсуждение, так сказать, метатеоретической стороны проблемы пока беспредметно. Поэтому в статье о парадоксах, мне кажется, было бы достаточно связь с такими вопросами, как античные и средневековые парадоксы и антиномии Канта, устанавливать в форме ссылок на соответствующие термины в других местах ФЭ.

Автор статьи, конечно, правильно говорит, что парадоксы возникают вследствие несовместимости исходных допущений. Вместе с тем, однако, по своему концептуальному составу апории Зенона и антиномии Канта сравнительно очень сложны. С другой стороны, в парадоксах математической логики и теории множеств особенно поразительным явилось как раз то, что оказались возможными весьма серьезные случаи противоречий, возникающих при пользовании лишь теми средствами, которые считались (и теперь многими считаются, хотя и неправильно) самыми простейшими логическими средствами. Как раз поэтому открытие именно парадоксов теории множеств явилось одной из основных причин, вызвавших к жизни многочисленные исследования, ставящие своей целью анализ и пересмотр оснований логики и математики.

3. Каждый автор пишет, естественно, со своей точки зрения. Однако обсуждение парадоксов с принадлежащей автору данной статьи точки зрения ультраинтуиционизма, весьма мало известной, правильнее сократить и свести к упоминанию возможности такого подхода, с кратким указанием на характер ультраинтуиционистской точки зрения и со ссылкой на опубликованные статьи (приводя их в списке литературы вопроса). Мне кажется, что изложение этой точки зрения, приводимое автором в данной статье, все равно не достигает цели; это слишком трудный вопрос для изложения в рамках небольшой энциклопедической статьи, не посвя-

щенной специально термину «ультраинтуиционизм» и рассчитанной на довольно широкий круг читателей.

4. На стр.1 рукописи автор говорит о расплывчатости значения термина «доказательство».

Всякое доказательство предполагает, конечно, определенные допущения и, в этом смысле, относительно. Кроме того, процесс вывода может происходить на различных уровнях строгости. Однако, если исходные допущения и правила вывода формулированы достаточно точно, – а именно такие случаи наиболее интересны в связи с темой данной статьи, – то значение термина «доказательство» (в частности, при построении парадокса) едва ли правильно характеризовать как расплывчатое.

5. Введение понятия об «абсолютном противоречии» (стр. 1 и 3 рукописи) кажется мне излишним и без нужды удлиняющим изложение.

6. Весь материал, начиная со слов «В логике модальностей...» на стр. 29, по моему мнению, следовало бы исключить или ограничиться очень кратким указанием. Статья перегружена второстепенным материалом, а в результате на собственно центральную тему, т.е. парадоксы теории множеств и типичные семантические парадоксы, из 32-х страниц едва ли приходится полных 12[6].

II

1. Вопрос о связи парадоксов с законом исключенного третьего излагается на стр. 4-5, далее на стр. 19-20, недостаточно ясно. Верно, что отказ от «*tertium non datur*» вовсе не обязательно исключает возможность построения парадоксов. Так, в трехзначной логике Лукасевича, при отсутствии ограничений на аксиомы свертывания, парадокс Рассела обычным путем, правда, не получается, однако парадокс Карри может быть построен (см., например, *Fraenkel – Bar-Hillel* «Found. of Set Theory», стр. 194) [7].

Что касается интуиционистской логики, то в ней парадоксы исключаются (вопреки неудачно сказанному на стр. 19 рукописи), но, правда, не благодаря отказу от «*tertium non datu*r», а благодаря интуиционистским ограничениям на способы введения рассматриваемых объектов.

Все же связь между парадоксами и «*tertium non datur*» есть. В самом деле, с одной стороны, переход от классической логики к многозначной включает отказ от «*tertium non datur*»; с другой сто-

[6] Этот первоначальный объем статьи в процессе редактирования был сокращен – *М.Н.*

[7] См.: *Френкель А., Бар-Хиллел И.* Основания теории множеств. М., 1966. С. 235. См. также прим. перев. на с. 17 этого же издания – *М.Н.*

роны, в многозначной логике, при введении известных ограничений на аксиомы свертывания, становятся выводимыми формулы, выражающие, что определенные высказывания, существенные в построении парадоксов, не истинны и не ложны; парадоксов же не получается.

2. Утверждение на стр. 20, что «в любой конечнозначной логике появляются некоторые разновидности парадокса Рассела» в такой форме во всяком случае неточно и нуждается в исправлении. Существуют конечнозначные логические исчисления, содержащие некоторые ограничения на аксиомы свертывания, в которых парадоксы типа Рассела, Карри и т.п., во всяком случае, не возникают. Для уточнения приведенного выше утверждения автора следовало бы дополнительно обратиться к оригиналам статей Сколема и Чанга, которые имеет в виду автор. Ясно, что оговорка об отсутствии ограничений на аксиомы свертывания существенна. Что касается Сколема, то в работе 1957 г. (Bemerkungen zum Komprehensionsaxiom // Zischr. f. math.Logik und Grundt. der Math. 3. C. 1-17) он имеет в виду под конечнозначными логиками только системы типа Лукасевича и высказывается весьма осторожно. Зато в работе 1960 г. (Math. Scand. 6. стр. 127-136) он сам предлагает некоторую трехзначную логику особого типа и считает, что она, вероятно, непротиворечива, хотя непротиворечивость остается недоказанной. Проверка и уточнение этого пункта рукописи необходимы.

3. На стр. 24 рукописи содержание принципа свертывания в системе аксиом Цермело (аксиома выделения) словесно охарактеризовано небрежно и неточно. Так, в системе Цермело, записанной с помощью узкого исчисления предикатов, можно рассматривать свойство $(\varepsilon_y)\, x \in y$, которое непосредственно выражает, что x есть элемент некоторого множества. Тем не менее, аксиома выделения Цермело не позволяет образовать множество, которое определялось бы формулой

$$x \in a \equiv (\varepsilon_y)\, x \in y.$$

Аксиома выделения есть следующее утверждение:

«Для всякого множества z и произвольного предложения вида $A(x)$[8] существует подмножество y множества z такое, что y содержит все те и только те элементы z, для которых $A(x)$».

[8] Из системы Цермело (*прим. Д.А.Бочвара*).

4. В рецензируемой статье полностью отсутствуют ссылки на статьи ФЭ, относящиеся к терминам, встречающимся в данной статье, но уже ранее нашедшим себе место в ФЭ. Это необходимо исправить и соответственно заново отредактировать соответствующие места статьи.

5. К статье должен быть приложен перечень основной литературы вопроса и в тексте должны быть введены необходимые ссылки на литературу.

К Отзыву Д.А. Бочвара на мою статью «Парадокс» для ФЭ[9].

Я полностью согласен с Д.А. Бочваром в том, что мой текст должен содержать ссылки на статьи ФЭ и перечень основной литературы. Ссылки, однако, в ряде мест были включены редакцией, и я благодарен за это редакторам. Я признаю, что недостаточно хорошо знаком с уже выпущенными в свет томами ФЭ, а потому и не в состоянии выполнить эту часть работы лучше, чем это делают редакторы. Библиографические указания имеются теперь в ряде мест в тексте – и в этом большая заслуга редакции, но этого, по-видимому, недостаточно.

Я с глубоким уважением отношусь к проф. Д.А. Бочвару и его отзыву. Внимательно прочтя этот отзыв, я счел нужным добавить в конце своей статьи несколько строк, указывающих – по необходимости, лишь в общих чертах – на связь рассматриваемых мной парадоксов с основаниями математики, в особенности, теории множеств. Таким образом я надеюсь преодолеть, хотя бы со временем, возражения проф. Д.А. Бочвара по поводу того, что, рассматривая вопросы о парадоксах в связи с основаниями математики и теории множеств, я далеко выхожу за рамки того круга парадоксов, которые только и принято в настоящее время рассматривать в этой связи. Я действительно считаю устаревшей традиционную трактовку этого вопроса, в свете которой различные авторы – в том числе и виднейшие специалисты по математической логике – считают возможным ограничиваться рассмотрением давно известных парадоксов собственно теории множеств и связанных с ними семантических парадоксов. На мой взгляд, это лишь небольшая часть тех парадоксов, с которыми мы вынуждены считаться в основаниях математики, и эта часть составляет меньше, чем $^1/_3$ всей темы о парадоксах, связанных с основаниями математики. Имея это в виду, я не могу согласиться с мнением проф. Д.А. Бочвара в том, что при общем объеме статьи в 32 стр. на долю традиционно трактуемых парадоксов должно приходиться

[9] Печатается по тексту рукописного оригинала – *М.Н.*

более 11 стр., и не согласен отказаться от рассмотрения других затронутых мною тем. Я к тому же считаю, что ультраинтуиционистская точка зрения позволяет уже в настоящее время трактовать вопросы о бесконечности физического пространства в философской статье о парадоксах, и не могу счесть «беспредметной» (см. стр. 2 отзыва проф. Бочвара) свою попытку этого обсуждения. Верно, что этот вопрос заслуживает гораздо более тщательного рассмотрения, чем в настоящей статье – и это естественно. Верно и то, что ультраинтуиционистская точка зрения сейчас еще почти неизвестна, и это дает проф. Д.А. Бочвару полное право предпочитать для ФЭ более традиционную трактовку вопроса. Я думаю, что и редакция ФЭ предпочла бы иметь дело с материалом, лучше освещенным в уже опубликованной литературе, тем более, что ФЭ не подходящее место для публикации материала очень нового по существу. Однако высказанные мною положения частично уже опубликованы, частично содержатся в текстах, направленных мною в печать в 1965 г. или ранее, и потому таких, которые должны появиться прежде 4-го тома ФЭ. (Мне неясно, однако, каким образом следует оформлять ссылки на эти тексты – речь идет о текстах докладов, прочитанных мною на различных симпозиумах.)

С учетом критики проф. Д.А. Бочвара я сделал вставку об относительном характере абсолютных противоречий (см. стр. 4 моей статьи и стр. 3 отзыва). Мне кажется, что в рамках этой статьи для Философской Энциклопедии следовало коснуться этого вопроса. Также с учетом этой критики, равно как и ультраинтуиционистской точки зрения, я ввел на стр. 1 слова «или относительной», указывая этим, что «расплывчатость» понятия доказательства связана с его относительностью. По-моему, это совместимо и с философскими требованиями ФЭ.

При написании статьи я вовсе не исходил из того, что она должна содержать подзаголовок «в логике и математике» – и этот подзаголовок, не помню как появившийся, был уже снят в редакции. Связанные с этим подзаголовком возражения я, поэтому, считаю основанными на недоразумении. В то же время, даже при наличии этого подзаголовка, избранная мной точка зрения (от которой я не могу отказаться) вынудила бы меня к рассмотрению всех, или почти всех, вопросов, затронутых в тексте моей статьи (в случае необходимости сокращения я не стал бы очень настаивать на сохранении материала, связанного с теорией относительности – стр. 11 – и пошел бы на некоторое сокращение материала, относящегося к традиционному, доканторовскому, математическому анализу – стр. 10).

Возможно, что проф. Бочвар прав в том смысле, что о парадоксах теории множеств следовало говорить здесь подробнее, как я и делал в первоначальном варианте, от которого мне пришлось отказаться по редакционным соображениям, связанным с объемом статьи. Действительно, лучше было бы сохранить на стр. 21-22 изложение парадокса Кантора, чем заменять его ссылкой на книгу Клини. Однако это более подробное изложение принесло бы пользу только читателям, знакомым с теорией множеств (ибо доказательства упоминаемых в нем теорем невозможно включить в эту статью), и я не могу сейчас решиться на соответствующие изменения в тексте.

Во второй части своего отзыва проф. Бочвар выдвигает 5 возражений, из которых о двух последних я уже говорил в самом начале этого своего ответа. Об остальных трех скажу сейчас. Первое из них я учел посредством двух вставок в текст на стр. 19 (вторая «вставка», строго говоря, представляет собой замену предлога «в» другим текстом). Аналогичными изменениями текста на стр. 20 я учел и второе замечание Д.А. Бочвара – самое важное из всех, так как в нем речь непосредственно идет о вопросах, в которых проф. Бочвар является крупным специалистом. К сожалению, сказанное мной на стр. 20 о работе Чана – это лишь то, что я сумел почерпнуть из реферата этой работы в Mathematical Reviews – саму работу Чана я еще не успел прочесть до сих пор. Постараюсь в ближайшее время восполнить этот пробел и, в случае надобности, внести в текст необходимые исправления.

Третье возражение Д.А. Бочвара из второй части его отзыва я признаю справедливым, но отношу его не столько к своему первоначальному тексту, сколько к тому, который из него возник в результате редакционных сокращений. Поэтому я счел нужным вернуться в этом месте (на стр. 24) к первоначальному тексту, внеся в него некоторые уточнения. Впрочем, добиться полной точности формулировки системы Цермело в рамках этой статьи вряд ли возможно – не удалось это, по-моему, и проф. Бочвару в его отзыве (стр. 6 отзыва).

Замечу, что сокращение, произведенное редакцией на стр. 23, делает обстоятельно необходимой развернутую статью в ФЭ о теории типов [10] – или раздел, посвященный этой теории, в статье о теории множеств. Я не знаю, как обстоит дело с этими статьями сейчас, но от этого может зависеть окончательная формулировка теоретико-множественных систем в статье «Парадокс».

[10] См.: Философская энциклопедия. Т.5. М. 1970 (статья «Типов теория») – *М.Н.*

Итак, я реагировал на отзыв проф. Д.А. Бочвара лишь незначительными изменениями в тексте своей статьи и постарался показать этим своим ответом, что других изменений, на мой взгляд, не требуется. Ультраинтуиционистскую точку зрения я считаю для себя обязательной во всех выступлениях по основаниям математики; надеюсь, что от меня никто и не ожидал другой позиции. Еще могут потребоваться дополнительные изменения в статье, в пределах возможного на стадии корректуры – именно, такие изменения могут быть нужны в связи с работой Чана (1963) и в связи с характером статей по теории типов или множеств (там, где в этой статье идет речь о формулировках систем теории множеств – сейчас, например, формулировка системы Куайна на стр. 24 просто непонятна, так как статья о теории типов отсутствует). Я признаю за редакцией право вводить отсылки на другие статьи ФЭ, и буду благодарен за всякую помощь, которая мне была бы оказана при составлении библиографии. Я не помню, в чем состоят редакционные требования к библиографии. Что касается работ по ультраинтуиционизму, то достаточно упомянуть в библиографии мои статьи, указанные в статье Гастева и Шмаина «Метатеория» для ФЭ.

11.1.66. Подпись А.С. Есенин-Вольпин

С.А. Павлов

БИРЕШЕТКИ ДЛЯ ЛОГИКИ БЕЛНАПА И ЕЕ ОБОГАЩЕНИЯ*

Abstract. *Distributive bilattice used to interpretation of Kleene's strong 3-valued logic, Lukasiewich's 3-valued logic, Belnap's four-valued logic, falsehood logic* FL4.

Целью этой работы является применение отношений порядка истины и порядка знания для интерпретации трехзначных логик Клини и Лукасевича и бирешеток для интерпретации четырехзначных логик: логики Белнапа и логики ложности FL4.

1. Отношения порядка истины и порядка знания и обобщение логики Клини

Для интерпретации трехзначной логики Клини и четырехзначной логики Белнапа Фиттинг использовал два отношения частичного порядка на множестве истинностных значений: отношение порядка истины $\leq_T$ и отношение порядка знания $\leq_K$.

Клини строит трехзначную логику K^S_3 с помощью регулярных таблиц для связок $\overline{}$, &, $\vee$, $\rightarrow$, $\equiv$, вводимых в сильном смысле [3].

Клини использует три истинностных значения: $\mathfrak{t}$ («истина»), $\mathfrak{f}$ («ложь»), $\mathfrak{u}$ («не определено»), или в другом их толковании «известна истинность», «известна ложность», «неизвестно, истинно или ложно» (также означает отсутствие информации, заключающейся в том, что некоторая формула принимает значение $\mathfrak{t}$ или $\mathfrak{f}$).

Для логики Клини имеются соответствующие ей алгебра Клини с операциями $\wedge$, $\vee$, ~ и дистрибутивная решетка [2].

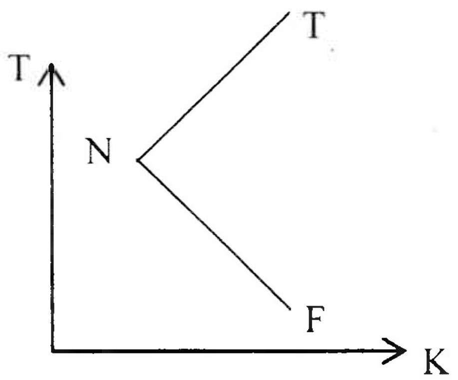
Элементы множества истинностных значений $\{\mathfrak{t}, \mathfrak{f}, \mathfrak{u}\}$, которые далее для единообразия обозначим $\{T, F, N\}$, упорядочены следующим образом:

$$\begin{array}{c} T \\ | \\ N \\ | \\ F \end{array}$$

* Работа выполнена при поддержке РГНФ, грант № 04-03-00266.

Отношению частичного порядка $\leq$ для логики Клини K^S_3 отвечает порядок истины $\leq_T$. Тогда на множестве истинностных значений логики Клини порядок истины $\leq_T$ образует полную решетку, а пересечение $\wedge$ и объединение $\vee$ в точности соответствуют конъюнкции и дизъюнкции логики Клини.

Обратим внимание на истинностное значение $\mathfrak{u}$. Его смысл состоит том, что о высказываниях, оцениваемых им, мы не знаем достаточно, чтобы оценить их как истинные или ложные, в отличие от высказываний, оцениваемых значениями $\mathfrak{t}$ или $\mathfrak{f}$, о которых мы знаем достаточно, чтобы их соответственно оценить. Поэтому имеет смысл ввести шкалу и порядок знания $\leq_K$. Тогда предыдущую диаграмму следует видоизменить следующим образом:

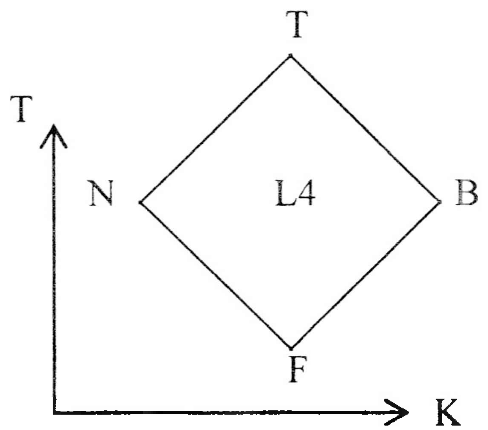


Осям абсцисс и ординат соответствуют порядок знания и порядок истины.

Отметим, что порядок знания $\leq_K$ в данном случае не задает полную решетку, а только полурешетку.

Ситуация меняется при добавлении четвертого истинностного значения B, являющегося верхней гранью (maximum) для порядка знания $\leq_K$.

В этом случае получаем две решетки, которые Белнап называет логической L4 и аппроксимационной A4, и применяет их для анализа построенной им четырехзначной логики, предназначенной для компьютерных рассуждений. Приведем диаграмму для L4.



По мнению Фиттинга [7], такое обобщение логики Клини является естественным и логика Клини является сублогикой логики Белнапа. Подобное сопоставление алгебры Клини и решеток L4 и A4 провел Мускенс в [9].

Вышеуказанные решетки образуют одну систему, которая является бирешеткой. Понятие дистрибутивной бирешетки ввел Гинсберг [8].

Бирешетка $<B, \leq_K, \leq_T>$ определяется как непустое множество истинностных значений B с двумя частичными порядками: $\leq_K$ и $\leq_T$, – каждый из которых образует на этом множестве полную решетку.

Фиттинг [7] использует бирешетки с двумя порядками: порядком знания $\leq_K$ и порядком истины $\leq_T$.

Обычным образом задаются бинарные операции пересечения $\wedge$ и объединения $\vee$ для решетки с порядком истины $\leq_T$, а для решетки с порядком знания операции $\otimes$ и $\oplus$ определяются аналогично.

2. Обогащение логик Клини и Белнапа

Как известно, логика Клини характеризуется тем, что в ней отсутствуют аксиомы и теоремы. Поэтому имеет смысл перейти к трехзначной логике Лукасевича в такой формулировке, которая может рассматриваться как логика Клини, обогащенная операторами возможности M и необходимости L или, в немодальном истолковании этих операторов, операторами неложности $-\!-$ и истинности | языка логики ложности FL3N [5].

Лукасевич вводит третье значение истинности $^1/_2$, исходя из утверждений «... существуют высказывания, которые не являются ни истинными, ни ложными, а лишь только *безразличными*», «Безразличные высказывания, которым онтологически соответствует возможность, имеют третье значение» [4]. В других его статьях смысл этого значения передается терминами *неопределенность* или *indetermine*.

Лукасевич конструирует логику Ł$_3$, в которой исходными связками являются $\rightarrow^{Ł}$ и отрицание ~.

Другая сигнатура $\{\vee, \sim, L\}$ предложена Е. Слупецким, Г. Брылем и Т. Пруцналем в [10] для аксиоматизации трехзначной логики Лукасевича.

Оператор возможности Mp определяется через исходный оператор необходимости Lp обычным образом:

$$Mp = \sim L \sim p.$$

Унарным операторам необходимости L и возможности M, а также операторам неложности -- и истинности | соответствуют истинностные таблицы:

A	LA	MA
0	0	0
$^1/_2$	0	1
1	1	1

A	|A	--A
F	F	F
N	F	F
T	T	T

Логики с множествами связок $\{\rightarrow^{Ł}, \sim\}$ и $\{\vee, \wedge, \sim, M\}$ эквивалентны. В последней сигнатуре формулируется трехэлементная алгебра Лукасевича

$$L_3 = <\{1, {}^1/_2, 0\}, \vee, \wedge, \sim, M, 1>.$$

Можно также показать, что трехвалентные логики с множествами связок $\{\rightarrow^{Ł}, \sim\}$ и $\{\vee, \wedge, \sim, L\}$ эквивалентны. Тогда сформулируем алгебру Лукасевича как

$$L_3 = <\{1, {}^1/_2, 0\}, \vee, \wedge, \sim, L, 1>.$$

Для логик $Ł_3$ и $K^S{}_3$ имеется известное соотношение:

Трехзначная логика Лукасевича $Ł_3$ *функционально эквивалентна трехзначной логике Клини с сильными связками* $K^S{}_3$*, обогащенной связкой полной эквивалентности.*

Тогда возможно получить соотношение алгебр Лукасевича и Клини, такое, что L_3 есть алгебра Клини, снабженная операцией L, для которой имеют место следующие равенства.

1. $x \vee \sim Lx = 1$,
2. $x \wedge \sim x = x \wedge \sim Lx$,
3. $LLx = Lx$,
4. $L(x \wedge y) = Lx \wedge Ly$.
5. $L(x \vee y) = Lx \vee Ly$.

Имеется также соотношение функциональной эквивалентности для логик $Ł_3$ и FL3N [5]. Отметим, что трехзначная логика FL3N, является сублогикой логики ложности FL4.

Подобно тому, как логика Лукасевича получается посредством обогащения логики Клини $K^S{}_3$ оператором необходимости, обогащение логики Белнапа оператором истинности | ведет к логике ложности FL4.

Соответственно алгебра ложности FA4 есть логическая решетка L4 снабженная операцией |, для которой имеют место следующие равенства:

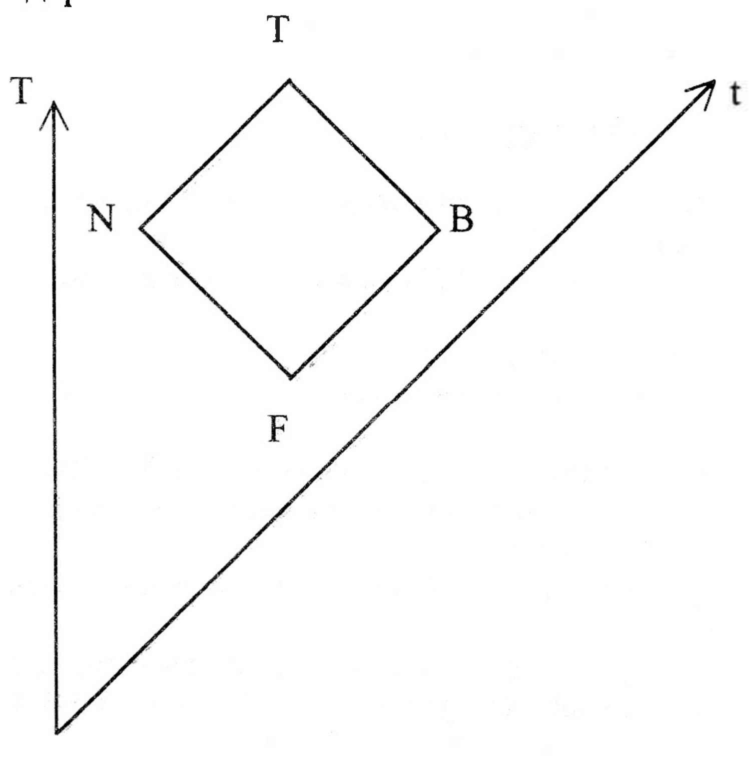
1. $||x = |x$,
2. $(|x \vee \sim |x) = 1$,

3. $(\,|x \wedge {\sim}|x) = 0$,
4. $|(x \wedge y) = |x \wedge |y$,
5. $|(x \vee y) = |x \vee |y$.

Н. Белнап отмечает необходимость отличать знак «говорит только Истину» от знака «по меньшей мере говорит Истину», но не предлагает формального выражения их различения. В языке логики FL4 это отличие в оценках предложений выражается употреблением двух различных операторов: оператора строгой истинности $\lceil$ и оператора истинности $|$.

Подобно различению истинности и неложности от истинности можно различить отношение порядка истины $\leq_T$, отвечающее логической решетке L4, и отношение порядка истинности $\leq_t$, соответствующее сравнению истинностных значений формул, префиксированных оператором истинности. Тогда порядку истины $\leq_T$ отвечает ось T, а порядку истинности $\leq_t$ отвечает ось t.

Это позволяет элиминировать эпистемическую компоненту из характеристик формул языка логики, оставив только логическое содержание.



Отметим, что логикой, в которой таблица для импликации может быть сопоставлена порядку истинности $\leq_t$, может быть логика, предложенная В.М. Поповым в [6].

Приведем таблицы для импликации $\supset$ и отрицания $\neg$ в четырехзначной паранормальной логике AVP [6] и соответствующие им таблицы для импликации истинности $\rightarrow^t$, сопоставляемой порядку истинности $\leq_t$, и отрицания ~ в логике ложности FL4 [5].

$\supset$	1	0	f	t
1	1	0	0	1
0	1	1	1	1
f	1	1	1	1
t	1	0	0	1

A	$\neg$A
1	0
0	1
f	f
t	t

$\rightarrow^t$	T	F	N	B
T	T	F	F	T
F	T	T	T	T
N	T	T	T	T
B	T	F	F	T

A	~A
T	F
F	T
N	N
B	B

В заключение отметим, что порядок истинности $\leq_t$ не образует решетки, следовательно, полученная система слабее бирешетки, тем не менее в ней можно выразить все логически значимые утверждения логики Белнапа и логики ложности FL4.

ЛИТЕРАТУРА

1. *Белнап Н.* Как нужно рассуждать компьютеру // Белнап Н., Стил Т. Логика вопросов и ответов. М., 1981.
2. *Карпенко А.С.* Многозначные логики // Логика и компьютер. Вып. 4. М., 1997.
3. *Клини С.К.* Введение в метаматематику. М., 1957.
4. *Лукасевич Я.* О детерминизме // Логические исследования. Вып. 2. М., 1993. С. 190-205.
5. *Павлов С.А.* Логика с операторами истинности и ложности. М., 2004.
6. *Попов В.М.* Об одной четырехзначной паранормальной логике // Логика и В.Е.К. М., 2003. С. 192-195.
7. *Fitting M.C.* Kleene's logic, generalized // Journal of Logic and Computation. 1992. Vol. 1. P. 797-810.
8. *Ginsberg M.L.* Multivalued logics: a uniform approach to reasoning in artificial intelligence // Computational Intelligence. 1988. Vol. 4. P. 265-316.
9. *Muskens R.A.* Meaning and partiality. Amsterdam, 1989.
10. *Słupecki J., Bryll G., Prucnal T.* Some Remarks on Three-valued Logic of J. Łukasiewicz // Studia Logica. 1967. Vol. XXI. P. 45-70.

Е.Д. Смирнова

ОБОБЩАЮЩИЙ ПОДХОД К ПОСТРОЕНИЮ СЕМАНТИКИ И ЕГО МЕТОДОЛОГИЧЕСКИЕ ОСНОВАНИЯ*

Abstract. *Principles of the yielding of theoretical semantics are considered. The non-standard generalized approach to constructing semantics is proposed. This is of a generalized character since it serves as the basis for producing semantics of the various types: nonstandard semantics with truth-value gluts, semantics with truth-value gaps, intensional and modal context semantics. For encompassing certain aspects of the coherent conception of the truth Tarski's scheme is revised.*

В работе исследуются принципы и пути построения теоретической семантики. Предлагается обобщенный, нестандартный подход к построению семантики. Обобщенный – потому, что дает основания для построения семантик разного типа. С такого рода семантиками непосредственно связаны вопросы обоснования логических систем, выявление их методологических предпосылок.

Я различаю вопросы обоснования формальных логических систем (построение адекватных семантик) и вопросы обоснования логики, допускаемых способов рассуждения. Рассмотрение второго рода вопросов идет в русле того, что называют «методологическим вызовом в логике».

Г. Фреге различал вопросы обоснования формальных систем – «представление логики в виде формул» и обоснование типов логических рассуждений. Когда ему указывали на то, что он «ломится в открытую дверь», что уже Дж. Буль представил логику в виде формул, Фреге отвечал, что его задача отнюдь не в этом. И хотя именно Буль применил к логике математические, алгебраические методы, его подход в принципе, в своих основаниях, ближе к традиционному, аристотелевскому методу. Ибо оба они начинают анализ с понятий (с объемов понятий), устанавливая определенные отношения между ними.

Сопоставляя свой подход в Begriffschrift с булевой «вычислительной логикой», Фреге подчеркивал, что вопрос не в том, «какой из двух формальных языков предпочтительнее», что его Begriffschrift охватывает более широкую область логики. У Аристотеля,

---

* Работа выполнена при поддержке РГНФ, грант № 03-03-00071а.

как и у Буля, «образование понятий через абстракцию является исходной логической деятельностью, а суждения и умозаключения получаются путем непосредственного или опосредованного сравнения понятий по объему» [8, с. 180].

Совсем по-иному трактовал структуру суждений Фреге. Он начинает анализ *с высказываний* и производит членение их совсем по иной схеме – по схеме: функтор и его аргументы. В основе семантики Фреге лежат не объемы понятий (классы), а такие сущности, как функции и предметы (предмет при этом понимается широко – как объект рассмотрения). Так возникает классическая логика – логика высказываний и логика предикатов и обосновываются способы рассуждения в них.

В предлагаемом ниже подходе обобщение идет по двум линиям:
1) по линии приписывания значений пропозициональным переменным, т.е. по линии интерпретации предложений;
2) по линии пересмотра и экспликации предиката истинности и, соответственно, пересмотра схемы Тарского.

Традиционная трактовка значений пропозициональных переменных опирается на вполне определенную методологическую установку. Нынешние значения *t* и *f* (*и* и *л*), приписываемые предложениям, – это не что иное как фрегевские *das Wahre* и *das Falsche*. Но что они собой представляют? Ситуации. Поскольку в основе семантики Фреге лежит членение на функции и предметы, соответственно выражения языка подразделяются на «насыщенные», завершенные – десигнативные (собственные имена) и «ненасыщенные» – выражения для функций. Предложения выступают как насыщенные, завершенные и в этом смысле как десигнативные.

Принцип взаимозаменимости предполагает, что при замене составляющего выражения α на тождественное ему по значению β значение целого не изменяется. (Известные примеры: «*Утренняя звезда* суть Венера», «*Вечерняя звезда* суть Венера»). Смысл высказывания, выражаемая им мысль, изменяются. Но заменялись тождественные по значению выражения, следовательно, значение целого сохраняется, т.е. – положение дел, репрезентируемое предложением. Но если отвлечься от смысла предложения, что останется от репрезентируемой ситуации? Остается только наличествующая ситуация («позитивный» факт) или неналичествующая («негативный» факт). Это фактически и есть фрегевские *das* Wahre и *das* Falsche – объекты рассмотрения (абстрактные ситуации), а *не предикаты истинности* или *ложности*. (Не случайно наличие артикля *das* – мы имеем дело с существительными.) Как в ситуации с известным чеширским котом: сам кот исчез, осталась одна улыбка. Так и конкретная ситуация, репрезентируемая предложением, исчезает, остается лишь параметр ее наличия (или отсутствия). Так формируются методологические основания логики высказываний и логики предикатов – возникают функции, задаваемые на абстрактных объектах, – *t* и *f*.

В известной схеме Тарского истинность, истинностная оценка высказываний выступает как *предикат*: $X \in Ист \equiv p$. Какова трактовка предиката истинности в схеме?

Схема представляет собой экспликацию понятия истинности, взятого в рамках теории корреспонденции. Предложению *X* приписывается предикат истинности *е.т.е.* в действительности имеет место положение дел, задаваемое предложением *p*.

На базе понятия истинности, отвечающего схеме Тарского, получены блестящие результаты в семантике и методологии дедуктивных наук[1]. Однако с этим понятием связан ряд трудностей.

Во-первых, схема задается для изолированного предложения – вне какого бы то ни было контекста.

Во-вторых, – вне учета условий реализуемости ситуации, задаваемой предложением *p*, условий ее достижения или проверки. Соответственно, без учета субъекта, выражающего высказывание, его установок, знания и т.п.

В сущности возникает вопрос о необходимости учета определенных аспектов *когерентной концепции* истинности. Так, идеальные высказывания Д. Гильберта получают свой смысл лишь в контексте всей теории [1, с. 356–358].

Наконец, возникает вопрос трактовки «действительности» в случае анализа предложения *p*. Предложение *p* задает ситуацию, «верифицирующую» рассматриваемое предложение *X* (задаваемую *смыслом* этого предложения). Но предложения могут быть разного типа, начиная с предложения Лжеца и включая в рассмотрение такие предложения, как «Гамлет черноволос», «Нынешний король Франции лыс» или упомянутые «идеальные высказывания» математики. Каков смысл, условия истинностных оценок такого рода высказываний и какова отвечающая им «действительность»?

Отметим, что в случае задаваемых схемой условий ложь (ложность) трактуется как просто отрицание истинности.

---

[1] Упомянем только известную теорему Тарского о неопределимости понятия истинности (истинного высказывания) системы S в самой системе S. Или введение важнейшего понятия – семантической определимости, связанного с экспликацией выразительных возможностей языков с теорией; см. [5, гл. III, § 3–4].

Рассматриваемое нами обобщение предполагает использование идеи семантик возможных миров как предпосылки. Пропозициональным переменным приписываются не объекты t и f (das Wahre и das Falsche), как обычно, а *области*. Мы тем самым в некотором смысле переходим к интенсиональной онтологии – если говорить в терминах Куайна.

В случае различного типа высказываний в качестве множества возможных миров – W могут приниматься самого разного типа условия (состояния знания или установки субъекта, миры определенных постулатов или миры, связанные между собой или исходным миром определенными отношениями).

Пусть φ – функция, приписывающая пропозициональным переменным области и антиобласти. $\varphi_T(p) \subseteq W$ – это класс миров, в которых p истинно (*область предложения*), а $\varphi_F(p) \subseteq W$ – это класс миров, в которых p ложно (*антиобласть предложения*). $\varphi_T(p)$ – это фактически условия, верифицирующие предложение, а $\varphi_F(p)$ – условия, фальсифицирующие, опровергающие предложение. Тем самым возникает возможность учета определенных аспектов *когерентной* концепции истинности. Более того, при таком приписывании намечаются возможности выхода на интенсиональные семантики.

Понятие истинности релятивизируется относительно области высказывания, относительно условий его принятия или отбрасывания. Истинность высказывания определяется следующим образом: *A истинно в мире* α (относительно приписывания значений φ($\alpha \overset{\varphi}{\Vdash} A$), е.т.е. $\alpha \in \varphi_T(A)$. Соответственно, меняется схема Тарского: условием, верифицирующим предложение A в схеме, выступает $\alpha \in \varphi_T(A)$. Аналогичным образом вводится понятие ложности (при данном приписывании в данном мире): $\alpha \dashv\mid A \Leftrightarrow \alpha \in \varphi_F(A)$. A – ложно, если α принадлежит к числу фальсифицирующих (опровергающих) условий $\varphi_F(A)$.

Не только пересматривается схема Тарского, но вводятся понятия сильной истинности, истинности, слабой истинности, неложности, см. [7].

Логические связки соответственно вводятся обобщающим образом: задаются не на истинностных значения t и f, а на областях.

Введем условия приписывания значений сложным формулам:

$\varphi_T(\sim A) = \varphi_F(A)$; $\qquad \varphi_F(\sim A) = \varphi_T(A)$;

$\varphi_T(A \& B) = \varphi_T(A) \cap \varphi_T(B)$; $\qquad \varphi_F(A \& B) = \varphi_F(A) \cup \varphi_F(B)$;

$\varphi_T(A \vee B) = \varphi_T(A) \cup \varphi_T(B)$; $\qquad \varphi_F(A \vee B) = \varphi_F(A) \cap \varphi_F(B)$;

$\varphi_T(A \supset B) = \varphi_F(A) \cup \varphi_T(B)$; $\qquad \varphi_F(A \supset B) = \varphi_T(A) \cap \varphi_F(B)$.

Все введенные связки, как можно видеть, являются сильными связками трехзначной клиниевской логики.

Предложение A – *тавтология*, если и только если $\forall\ \varphi(\varphi_T(A) = W)$. И A *неопровержимо*, если и только если $\forall\ \varphi(\varphi_F(A) = \varnothing)$. В универсуме миров W (принимаемых во внимание обстоятельств) нет опровергающих предложение обстоятельств. Предложение A – *опровержимо*, если $\varphi_F(A) \neq \varnothing$.

Области и антиобласти высказываний вводятся *независимым образом* (что в сущности предполагает пересмотр отношений между истинностью и ложностью). Соответственно, между ними могут устанавливаться отношения разного типа. Так, могут приниматься или не приниматься условия (1) и (2):

(1) $\varphi_T(p) \cap \varphi_F(p) = \varnothing$ и (2) $\varphi_T(p) \cup \varphi_F(p) = W$.

Отношения между областями и антиобластями детерминируют определенные *типы семантик*. Если приписываются оба условия (1) и (2), то мы имеем стандартную семантику; при принятии (1) и отбрасывании (2), т.е. (1) и ($\overline{2}$) – семантику с истиннозначными провалами (gap); при принятии (2) и отбрасывании (1), т.е. ($\overline{1}$) и (2) –двойственную ей семантику с пресыщенными оценками (glut). Наконец, отбрасывание (1) и (2) дает нам релевантную семантику[2].

В свою очередь типы семантик определяют классы тавтологий и неопровержимых формул (и отношения между ними). Так, если принимается условие (1) и отбрасывается (2), т.е. имеем семантику с истиннозначными провалами, то класс тавтологий пуст, а класс неопровержимых формул совпадает с классическими тавтологиями. Так, $(A \vee {\sim}A)$ не является тавтологией – $\varphi_T(A \vee {\sim}A) \neq W$, но $(A \vee {\sim}A)$ неопровержима: $\varphi_F(A \vee {\sim}A) = \varnothing$. Если ($\overline{1}$) и (2), то класс тавтологий совпадает с классическим, а класс неопровержимых формул пуст, и т.д.

Введение областей и антиобластей и отношений между ними ведет к пересмотру отношений между истинностью и ложностью. Ложь (ложность) в общем случае не выступает как отрицание истинности высказывания: $A \in F \not\equiv A \notin Tr$. На базе построенной семантики задается не одно, а *целый класс* отношений логического следования [5, гл. V, § 2]. Рассмотрим шесть таких отношений. Дополнение к классу $\varphi_T(A)$ обозначим $\varphi_T(A)'$, аналогично $\varphi_F(A)'$.

[a] $\varphi_T(A) \subseteq \varphi_T(B)$

[b] $\varphi_F(A)' \subseteq \varphi_F(B)'$

[c] $\varphi_F(A)' \subseteq \varphi_T(B)$, т.е. $\varphi_F(A) \cup \varphi_T(B) = W$

---

[2] В принципе могут рассматриваться и иные отношения между областями и антиобластями и соответствующие им логические отношения. См. напр. диссертацию О. Невдобенко «Отношение следования и нестандартные семантики», 2000.

[d] $\varphi_T(A) \subseteq \varphi_F(B)'$, т.е. $\varphi_T(A) \cap \varphi_F(B) = \phi$

[e] $\varphi_T(A) \subseteq \varphi_T(B)$ и $\varphi_F(B) \subseteq \varphi_F(A)$

[f] $\varphi_T(A) \cap \varphi_F(B) \subseteq \varphi_F(A) \cup \varphi_T(B)$

Если принимаются допущения (1) и (2), то все введенные отношения логического следования оказываются эквивалентными.

Следования вводятся независимо от условий (1) и (2).

Различные системы логики, допустимые в них рассуждения определяются *отношениями логического следования и условиями (1) и (2)* (зависят от условий принятия и отбрасывания высказываний).

Так, если принимаются условия (1) (2*)*:

для отношения следования [a]: $\varphi_T(A) \subseteq \varphi_T(B)$ modus ponens имеет место, теорема дедукции – не имеет;

для отношения следования [b]: $\varphi_F(A)' \subseteq \varphi_F(B)'$ modus ponens не имеет места, а теорема дедукции имеет;

класс отношений [c] – пуст (всюду, где есть gap – ($\overline{2}$); где нет gap – принимается (2) – свойства [c] классические);

[d] отвечает классике.

Так обосновываются различные системы логик – на базе семантики языка и связанных с ней методологических, теоретико-познавательных допущений, – прежде всего связанные с трактовкой истинности (ложности).

Вопрос обоснования логических систем – допускаемых фигур заключения мы отделяем, как отмечалось в начале, от вопроса их формализации, т.е. репрезентации в формальных логических исчислениях. Можно рассмотреть вопросы формализации приведенных отношений следования при допущении (отбрасывании) условий (1), (2). (Логические свойства этих отношений при указанных условиях мы рассмотрели выше.)

Теорема 1. В семантике с истинностно-значными провалами отношение [a] формализуется системой логики Хао Вана, отношение [b] – системой, двойственной логике Хао Вана, отношение [d] – классической логикой, отношение [c] – пусто, т.е. ни одна формула не находится в отношении [c] с любой другой.

Теорема 2. В семантике с *пресыщенными* оценками отношение [a] формализуется системой, двойственной логике Хао Вана, отношение [b] – системой Хао Вана, отношение [c] – классической логикой, отношение [d] – пусто.

Теорема 3. В семантике, где *не принимаются оба условия* (1) и (2), т.е. ($\overline{1}$) и ($\overline{2}$), отношения [a] и [b] формализуются логикой де Моргана, отношения [c] и [d] – пусты.

Доказательства см.: [5, гл. V].

Дадим сводку полученных результатов формализации отношений логического следования. Обозначим: **ХВ** – логика Хао Вана, **ДХВ** – двойственная логике **ХВ**, **Л** – логика Лукасевича, **С** – классическая логика, **М** – система де Моргана, **П** – пусто. Результаты *формализации* отношений логического следования *с учетом предпосылок (1) и (2)* можно свести в таблицу:

	[a]	[b]	[c]	[d]	[e]	[f]
$(\bar{1})$, $(\bar{2})$	М	М	П	П	М	С
(1), $(\bar{2})$	ХВ	ДХВ	П	С	Л	С
$(\bar{1})$, (2)	ДХВ	ХВ	С	П	Л	С
(1), (2)	С	С	С	С	С	С

Интересно отметить, что *одна и та же формальная система* может быть построена как на базе семантики с истиннозначными провалами, так и на базе семантики с пресыщенными оценками, но в таком случае формализуемое отношение логического следования может меняться.

Суммируя, можно сказать, что в основе предложенного подхода лежит ряд принципов:

1. Понятие невозможных возможных миров и его аналоги не используются в семантиках рассматриваемых логик. Используются понятия областей и антиобластей высказываний.

2. *Приписывания высказываниям областей и антиобластей* реализуются независимо. Это фактически означает введение понятий истинности и ложности независимым образом.

3. Имея дело с такими независимыми объектами, как области и антиобласти высказываний, можно в принципе устанавливать различные отношения между ними. В частности, отношения между классами $\varphi_T(A)$ и $\varphi_F(A)$ могут удовлетворять или не удовлетворять условиям:

(1) $\varphi_T(A)\cap\varphi_F(A) = \varnothing$; (2) $\varphi_T(A)\cup\varphi_F(A) = W$

При принятии (1) и (2) имеем стандартную семантику; при принятии (1) и отбрасывании (2) – семантику с истинностно-значными провалами (gap); при принятии (2) и отбрасывании (1) – двойственную ей семантику с пресыщенной оценкой (glut). Наконец, отбрасывание (1) и (2) дает нам релевантную семантику.

В результате получаем различного типа нестандартные семантики.

4. Функция приписывания значений пропозициональным переменным введена обобщенным образом: пропозициональным

переменным приписываются не истинностные значения в данном мире (то есть объекты t и f), но особые «интенсиональные объекты» – классы миров, в которых высказывания истинны или ложны. Именно это придает пропозициональным связкам интенсиональный характер.

5. Более того, при определении логических связок никакие ограничения изначально не налагаются на отношения между областями и антиобластями высказываний, т.е. на отношения между истинностью и ложностью.

6. Вместо единственного, классического понятия логического следования на основе понятий области и антиобласти изначально вводятся различные отношения логического следования – независимо от условий (1) и (2). Именно эти отношения логического следования в сочетании с принятием (или непринятием) условий (1) и (2) детерминируют различные логики.

Речь идет вовсе не о том, что эти логики воспроизводят «реальные» способы рассуждения, представленные в естественном языке. Наоборот, мы моделируем возможные типы рассуждений независимо от того, реализуются ли они в искусственных или естественных языках, машиной или человеком.

7. Одна и та же формальная система может соответствовать различным семантикам и тем самым, в сущности, базироваться на различных допущениях относительно отношений между областями и антиобластями. Однако отношение логического следования, формализуемое формальной системой, может в этих случаях меняться.

Заметим, что в терминах рассматриваемой семантики областей и антиобластей можно представить модальные понятия – $\Box A$, $\Diamond A$ и т.д. Трактовка модальных операторов при этом зависит от двух параметров:

1) от способа задания множества миров W;

2) от учета условий (1) и (2).

Если возможные миры равноположны (как в случае описаний состояния), необходимость фактически совпадает с логической истинностью, тавтологичностью A:

$\Box A \in \mathit{Ист} \Leftrightarrow \varphi_T(A) = W$

$\Diamond A \in \mathit{Ист} \Leftrightarrow \varphi_T(A) \neq \varnothing$ или $\varphi_F(A) \neq W$

$\neg\Diamond A \in \mathit{Ист} \Leftrightarrow \varphi_T(A) = \varnothing$ или $\varphi_F(A) = W$

$\neg\Box A \in \mathit{Ист} \Leftrightarrow \varphi_T(A) \neq W$ или $\varphi_T(A)' \neq \varnothing$ – A выполняется не во всех мирах. *Если принимаются условия (1) и (2)*, миры, в которых не подтверждается A, т.е. $\varphi_T(A)'$, совпадают с антиобластью $\varphi_F(A)$: $\varphi_T(A)' = \varphi_F(A)$.

Если ввести в рассмотрение *условия* (1), (2) и отношения, соответственно, между областями и антиобластями, *смысл модальных операторов* меняется. Пусть $\varphi_F(A)$ – область обстоятельств, фальсифицирующих A. Если имеет место (1) и ($\overline{2}$) – gap, $\varphi_T(A)' \neq \varphi_F(A)$, тогда $\neg\Box A$ означает, что A имеет место не во всех мирах, но не означает наличия опровергающих A условий $\varphi_F(A)$. Аналогично с $\Diamond A$ и $\neg\Diamond A$, $\varphi_T(A) = \varnothing \not\equiv \varphi_F(A) = W$. $\varphi_T(A \vee \neg A) \neq W$, соответственно – $\neg\Box(A \vee \neg A)$.

Если принимается ($\overline{1}$) и (2), то $\Diamond(A \mathbin{\&} \neg A)$, ($\varphi_T(A \mathbin{\&} \neg A) \neq \varnothing$) и верно $\Box(A \vee \neg A)$.

Перейдем к рассмотрению семантик интенсиональных контекстов на базе предложенного обобщенного подхода. Эти контексты отличаются вхождением особых знаков – интенсиональных операторов и предикатов. Способы интерпретации такого рода знаков принципиально *иные*. К какого рода семантическим категориям относятся интенсиональные знаки? Какого рода сущности (идеальные объекты) приписываются им при интерпретации? Семантика областей и антиобластей позволяет прояснить этот вопрос.

Известно, что в интенсиональных контекстах не проходит замена тождественных по значению составляющих – кодесигнативных выражений. С. Крипке рассматривает этот феномен как *загадку* контекстов мнения – особенно в случае жестких десигнаторов.

Принимаемый нами метод анализа интенсиональных контекстов базируется на двух важных моментах: 1) выявлении особенностей логической структуры этих контекстов и 2) на способах интерпретации интенсиональных знаков [6].

Основная идея подхода – выявление способов конструирования сложных выражений из составляющих в случае наличия интенсиональных операторов и предикатов.

В принципе способ членения сложных выражений на составляющие не является раз и навсегда данным. Мы это видели выше, сопоставляя метод анализа Фреге и методы Буля и силлогистики. Методы членения зависят от принятия определенных абстрактных сущностей в семантическом анализе.

Семантический анализ интенсиональных знаков предполагает введение более сложных абстрактных объектов, связан с умножением сущностей в семантике. Но, как нам представляется, в основе этих семантик *остается идея областей (и антиобластей)*.

Сама *логическая* структура интенсиональных контекстов, ее особенности связаны с типом сущностей, приписываемых интенсиональным знакам. Это и предопределяет способы установления экстенсионалов и интенсионалов сложных выражений в интенсиональных контекстах и, соответственно, «поведение» принципа взаимозаменимости в них [6]. Так, в контекстах с модальными операторами проходит, как известно, замена L-эквивалентных выражений, имеющих один и тот же интенсионал.

Интенсионал обычного экстенсионального знака есть функция f, сопоставляющая этому знаку (выражению) его экстенсию в каждом мире.

Так, выражению категории s/n – одноместному предикатному знаку p приписывается функция f: $\mathrm{W} \to 2^{\mathrm{U}}$, т.е. $(2^{\mathrm{U}})^{\mathrm{W}}$, в качестве его интенсионала, где U – универсум рассмотрения. Выражению категории s, высказыванию – f: $\mathrm{W} \to \{0,1\}$, т.е. t и f. Фактически функция f сопоставляет высказываниям пары $<\varphi_{\mathrm{T}}(A), \varphi_{\mathrm{F}}(A)>$ их области и антиобласти. Сокращенно обозначим область $\varphi_{\mathrm{T}}(A)$ – $\mathbf{S}$, аналогично антиобласть – . $\mathbf{s} \in 2^{\mathrm{W}}$ и $\mathbf{s} \subseteq \mathrm{W}$. Обозначим 2^{W} посредством $\mathbf{s}$. Если под интенсионалом, вслед за Карнапом, иметь в виду то общее, что имеют L-эквивалентные высказывания, то интенсионалами высказываний выступают области высказываний: если A L-эквивалентно B, то $\varphi_{\mathrm{T}}(A) = \varphi_{\mathrm{T}}(B)$. Интенсионал высказывания называют еще *пропозицией* высказывания или *пропозициональным концептом*.

Теперь рассмотрим множество h, *элементами* которого выступают пропозиции – $h = \{\mathbf{s}_1, \dots \mathbf{s}_l\}$. Подобно тому, как в случае описания состояний в качестве элементов описания состояний выступают атомарные факты (атомарные высказывания), h собирает в качестве элементов *пропозиции*. В этом плане теперь в качестве «областей» высказываний выступают семейства пропозиций.

Объединяться в семейства пропозиции могут по разным основаниям. Например, $h = \{\mathbf{s}_j \mid \mathrm{w}_0 \in \mathbf{s}_j\}$, т.е. h выделяет «окрестность» мира w_0. Или это могут быть «окрестности» различных миров, задаваемые отношением $\mathbf{G}$ по принципу: $h = \{\mathrm{s}_j \mid \mathrm{w}_i\ \mathbf{G}\ \mathbf{s}_j\}$, отношение $\mathbf{G}$ мирам сопоставляет пропозиции, т.е. выполняется на парах вида $< \mathrm{w}_i, \mathbf{s}_j >$. Множество таких окрестностей $\mathbf{H}$, $\mathrm{h} \in \mathbf{H}$ и $\mathbf{H} \subseteq \mathbf{S}$ – это все или не все (а некоторые возможные) окрестности мира w_i (или множества миров $\mathrm{w}_i, \dots \mathrm{w}_l$), например миров, в которых верны постулаты Г: $\mathbf{s}_j = \varphi_{\mathrm{T}}(\Gamma)$.

Рассмотрим теперь возможные интерпретации модальных операторов и интенсиональных предикатов. В качестве значений им будут сопоставляться функции или отношения, заданные на областях высказываний или семействах таких областей. Представим такие интерпретации посредством сводной таблицы № 1.

Таблица № 1

Интерпретация интенсиональных предикатов и операторов

I	**II**	**III**
1. *s*//*s* **M***p* (например □*p*) $(2^{W})^{(2^{W})}$ где 2^{W} – пропозициональный концепт (интенсионал *p*) – s_i	1. *s*//*s* $2^{W\times 2^{W}}$ – отношение **G** $\langle w_i, \mathbf{s}_i\rangle \in \mathbf{G}$	1. *s*//*s* **M***p* $(2^{(2^{W})})^{W}$ $f: \mathrm{W} \to 2^{(2^{W})}$ т.е. $\underbrace{w_i \to \{s_1, s_2, \dots s_n\}}_{\mathrm{h}}$ интенсионал оператора **M**. Экстенсинал **M** в мире w_i – $f(w_i) = \mathrm{h}$ $w_i \in s_i$; $s_i \in \mathrm{h}$; $\mathrm{h} \in 2^{(2^{W})}$
2. *s*//*n* **Q**[a] $(2^{W})^{(U^{W})}$ где U^{W} – индивидный концепт $s_i \subseteq K$, $s_i \in 2^{W}$, $I(p) = s_i$	2. *s*//*n* **Q**[a] $2^{W\times U^{W}}$	2. *s*//*n* **Q**[a] $(2^{(U^{W})})^{W}$

Интерпретация I представляет фактически подход Д. Скота, II – Р. Монтегю, III – примем, если хотим, чтобы интенсиональные знаки имели при интерпретации как экстенсионал, так и интенсионал.

Пропозициональным переменным интерпретация I – I(*p*) приписывает пропозицию **s**, т.е. $\varphi_T(p)$. При подходе III высказывание □*p* истинно в мире w_i – $w_i \Vdash \Box p$ е.т.е. $I(p) \in f^{\Box}(w_i)$. Так перестраивается схема Тарского применительно к интенсиональным контекстам.

Не будем здесь касаться способов установления экстенсионалов и интенсионалов сложных выражений в случае принципиально отличных от них интенсиональных контекстов. Способы эти различны, см. [6], [5, гл. 4].

Остановимся теперь на второй линии построения обобщенных семантик. Линия эта связана с пересмотром предиката истинности, области его приложения.

Поскольку в случае (1) ($\overline{2}$) $\varphi_T(A) \cup \varphi_F(A) \neq W$, мы подходим к идее не всюду определенных предикатов истинности – Tr и, аналогично, ложности – F.

Назовем *областью приложения предиката P* множество объектов $\mathbf{U}' \subseteq U$, на котором он *принимает значения* t *или f*. Но $\mathbf{U}'$ может не охватывать все объекты универсума рассмотрения U, т.е. $\mathbf{U}' \neq U$. При таком подходе, напр., с учетом области приложения предиката «быть простым числом», высказывание «Цезарь – простое число» не получает истинностной оценки.

Обозначим U_1 множество объектов, на которых предикат выполняется (экстенсия предиката), и U_2 – на которых он принимает значение «ложь» (антиобъем предиката). Но $\mathbf{U}_1 \cup \mathbf{U}_2$ может не равняться универсуму U, т.е., аналогично ситуации с высказываниями, возможны отношения:

(1) $\mathbf{U}_1 \cap \mathbf{U}_2 = \varnothing$; (2) $U_1 \cup U_2 = \mathbf{U}$.

Если не имеет места условие (2), т.е. ($\overline{2}$), мы имеем дело с не всюду определенным предикатом.

Аналогично обстоит дело с *метапредикатами Tr* (истинно) и *F* (ложно). Соответственно имеем следующие возможные подходы к построению семантик:

(1) Как стандартные, то есть несемантические, так и семантические предикаты могут быть не всюду определенными.

(2) Несемантические предикаты могут быть не всюду определенными, но семантические предикаты всюду определены.

(3) Стандартные предикаты являются всюду определенными, семантические предикаты могут быть не всюду определенными.

Если как стандартные, так и семантические предикаты всюду определены, мы имеем дело с ортодоксальным, классическим вариантом семантики. Семантически замкнутые языки с всюду определенными стандартными и семантическими предикатами, как известно, противоречивы.

Начнем с анализа семантик первого вида[3]. Схема, определяющая условия адекватности предиката «быть истинным высказыванием», в этом случае меняет свой смысл. Меняет свой смысл эквивалентность, выступающая в классической схеме Тарского.

---

[3] При этом предполагается, что объемы и антиобъемы предикатных знаков не пересекаются.

С нашей точки зрения, анализ семантик первого вида приводит к сильной трехзначной логике С. Клини [3]. В качестве экспликации эквивалентности в схеме Тарского введем клиниевскую эквиваленцию $\cong$, ее можно задать таблично:

$\cong$	t	f	u
t	t	f	f
f	f	t	f
u	f	f	t

Отметим, что и Клини не рассматривал u как значение истинности того же ранга, что t или f[4].

Возможна формализация отношений логического следования, имеющих место в такого типа семантиках, расширенных введением эквиваленции $\cong$. Так, формализацией отношения следования типа [a] $\varphi_7(A) \subset \varphi_7(B)$ в логике с истинностными провалами является логика Хао Вана [5, гл. V]. Можно показать, что в логике с истинностными провалами, обобщенной правилами для $\cong$ из $A \cong {\sim}A$ не следует $A \,\&\, {\sim}A$.

В следующем варианте рассматриваемых семантик несемантические предикаты могут быть не всюду определены, но семантические являются всюду определенными. В этом случае, на наш взгляд, может быть применен подход Д.А. Бочвара.

Д.А.Бочвар различает внутренние и внешние связки. Внутренние связки – это связки, которые С. Клини позже назвал слабыми трехзначными связками. Помимо внутренних связок в логике Бочвара имеется внешняя связка. Д.А. Бочвар обозначает ее знаком $\vdash$. Но поскольку этот знак «занят», вслед за Херцбергером будем обозначать ее буквой h (от слова horisontal).

Схема, которой должен удовлетворять всюду определенный предикат «быть истинным высказыванием», должна быть видоизменена, например, следующим образом:

если X определено, то X истинно, если и только если p;

если X не определено, то X не истинно.

Вместо «p» мы подставляем высказывание, а вместо «X» – его имя.

Представляет интерес видоизменить условие адекватности Тарского следующим образом:

---

[4] «Но может не существовать алгоритм для решения, определено или нет $Q(x)$ при данном x... Поэтому только классически, но не интуиционистски можно утверждать закон исключенного четвертого (утверждающий, что для каждого x значение $Q(x)$ есть t, f или u). Таким образом, третье “значение истинности” u в нашей теории выступает не наравне с двумя другими t и f». «u означает только отсутствие информации, заключающейся в том, что $Q(x)$ есть t или f» [3, с. 297].

X истинно, если и только если $h(p)$.

В этом случае семантическое понятие Tr будет аналогом связки h.

В третьем варианте несемантические предикаты являются всюду определенными, а семантические – не всюду определенными. Для анализа условий истинности высказываний в такого рода семантиках и, соответственно, характера и роли схемы Тарского особый интерес, с нашей точки зрения, представляет подход, при котором расширяется обычный, стандартный *объектный* язык L за счет введения особого предиката – **Т**-предиката истинности.

Таким образом, различается предикат истинности объектного языка – **Т**-предикат и метапредикат Tr. По такому пути идет, например, С. Крипке [4]. Все несемантические предикаты интерпретируются обычным образом. Предикат же истинности **Т**, введенный в объектный язык, в отличие от остальных предикатов объектного языка, не всюду определен. Ему приписывается объем $\mathbf{U}_1$ и антиобъем $\mathbf{U}_2$, при этом $\mathbf{U}_1 \cap \mathbf{U}_2 = \varnothing$, в то же время их объединение не равно универсуму $\mathbf{U}$.

При указанном подходе, поскольку Т не всюду определен, схему Тарского в объектном языке следует формулировать в виде: $\mathbf{T}(\mathbf{A}) \cong A$. При этом, как отмечалось, из $A \cong \sim A$ не следует $A \mathbin{\&} \sim A$.

Язык, казалось бы, становится *семантически замкнутым*, возможно построение самоприменимых высказываний, утверждающих собственную истинность или неистинность, однако *парадокс не возникает*. Это достигается за счет того, что *предикат истинности не является всюду определенным* (см. [5, гл. V, § 5]).

ЛИТЕРАТУРА

1. *Гильберт Д.* О бесконечном. Обоснования математики // Основания геометрии. М.; Л., 1948.
2. *Карнап Р.* Значение и необходимость. М.: Изд-во иностранной литературы, 1959.
3. *Клини Ст.* Введение в метаматематику. М.: Иностранная литература, 1957.
4. *Kripke S.* Outline of theory of truth // The Journal of Philosophy. 1975. Vol. 72. P. 690–715.
5. *Смирнова Е.Д.* Логика и философия. М.: РОССПЭН, 1996.
6. *Смирнова Е.Д.* Интенсиональные контексты // Новая философская энциклопедия. Т. 2. С. 132–133.
7. *Смирнова Е.Д.* Семантика с истинностными провалами, пресыщенными оценками и понятие логического следования // Интенсиональные логики и логическая структура теорий. Тезисы докладов IV советско-финского коллоквиума по логике. Телави, 1985.
8. *Frege G.* Schriften zur Logik. Aus dem Nachlaß. Berlin, 1973.

Б.И. Федоров

ВВЕДЕНИЕ ЕДИНИЧНЫХ ТЕРМИНОВ В СИЛЛОГИСТИКУ БОЛЬЦАНО

Abstract. *In the paper the author describes his method of comparative historical analysis of the deductive conception of B. Bolzano (1781-1848). This work analyses the syllogistics with negative and singular terms. According to secularities of Bolzano the natural deduction system BS1 is built and all Aristotle's syllogistics rules and modus and additional rules for syllogistics formulas of singular terms are proved.*

В §§ 239-243 раздела «Учение о выводе» своего фундаментального четырехтомного труда «Наукоучение» (Wissenschaftslehere. Versuch einer ausführlichen und grösstenteil neuen Darstellung der Logik mit steter Rücksicht auf deren bisherige Bearbeiter. Sulzbach, 1837. In 4 Bände (см.: [1])) Больцано рассматривает выводы из предложений с единичными терминами. Для подобных высказываний он использует выражения: «представление А является единичным представлением», «представление [нечто] (*а* + *в* + ...) – единичное представление», «представление о единичном представлении А имеет предметность» (не пусто. – *Б.Ф.*), «представление [нечто] (*а* + *в* + ...) имеет предметность» и т. п. Больцано использует их в качестве посылок 23-х правил вывода в сочетании с различными другими «стандартными формами предложений», отводя им номер IV в своей иерархии 13-ти главных «стандартных форм предложений». Уже ранее нами рассматривались и анализировались выводы с использованием различных «стандартных форм предложений» в логической теории Больцано (см.: [2], [3], [4], [5]). Теперь же мы обращаемся к специальному анализу силлогистических выводов у Больцано и попытаемся обосновать возможность использования в них выражений (форм высказываний) с единичными терминами. Для этого необходимо прежде познакомиться с особенностями самой силлогистики Больцано.

Первая особенность силлогистики Больцано (см.: 1, с. 221-247) касается смысла ее *экзистенциальной предпосылки*. Экзистенциальной предпосылкой этой силлогистики выступает форма «Если SaP, то SiP», в которой на месте S могут появляться как непустые, так и пустые термины. Поэтому, в частности, в силлогистике Больцано оказываются «правильными» всего лишь 22 из 24 модусов аристотелевской силлогистики, так как в число «неправильных» попадают два модуса четвертой фигуры: *Camenes* и *Cameno*. В силлогистике же Аристотеля, как показал Я. Лукасевич, пустые термины полностью исключены из употребления и экзистенциальной предпосылкой выступает выражение: «SiS».

Если в силлогистике Больцано на место S подставить пустой термин, то любое силлогистическое выражение (SaP, SiP, SeP, SoP) превращается в ложное высказывание. Иначе говоря, истинное суждение в этой логической теории не должно включать в свой состав пустых терминов («беспредметных», по выражению самого Больцано).

Вторая особенность силлогистики Больцано заключается в использовании *отрицательных терминов*. Выражения вида SeP и SoP трактуются в ней соответственно: «Все S суть не-P» и «Некоторые S суть не-P».

Отмеченные особенности обусловливают следующие характеристики силлогистики Больцано. В ней *выполняются полностью*:
– законы *подчинения* по «логическому квадрату»;

$$\frac{SaP}{SiP} \qquad \frac{SeP}{SoP} \qquad \frac{\rceil(SiP)}{\rceil(SaP)} \qquad \frac{\rceil(SoP)}{\rceil(SeP)},$$

где $\rceil$ – знак внешнего отрицания, читается: «Неверно, что…»;
– законы *противоположности* по «логическому квадрату»;

$$\frac{SaP}{\rceil(SeP)} \qquad \frac{SeP}{\rceil(SaP)} \qquad \frac{\rceil(SiP)}{SoP} \qquad \frac{\rceil(SoP)}{SiP},$$

– законы *превращения* всех силлогистических выражений (поскольку SaP эквивалентно Se не-P, SeP эквивалентно Sa не-P, SiP эквивалентно So не-P, SoP эквивалентно Si не-P и двойное отрицание термина или высказывания рассматривается как его утверждение).

В то же время в силлогистике Больцано имеются следующие характерные для нее ограничения:
– законы *обращения* выполнимы полностью лишь для утвердительных силлогистических выражений типа SaP и SiP, которые не являются одновременно определениями

$$\frac{SaP}{PiS} \qquad \frac{SiP}{PiS};$$

– для *обращения отрицательных* силлогистических суждений типа SeP и SoP необходимо выполнение дополнительного условия о непустоте субъекта суждения (лишь при «введении в действие» этого допущения в качестве дополнительной посылки в силлогистике Больцано осуществимо обращение общеотрицательного суждения и оказывается возможным вывод по модусам *Camenes* и *Cameno*).

$$\frac{SeP,\ S\neq\varnothing}{PiS}\qquad\qquad \frac{SoP,S\neq\varnothing}{PoS}$$

- законы *тождества* для SaP и SiP также требуют выполнения дополнительного условия о непустоте субъекта суждения;
- законы *противоречия* по «логическому квадрату» выполняются здесь от утверждения частных суждений SiP, SoP к отрицанию общих SeP, SaP, далее от утверждения общих суждений SeP, SaP «по диагоналям» квадрата можно переходить к отрицанию частных SiP, SoP; а поскольку, согласно экзистенциальной предпосылке, из истинных общих суждений мы всегда получаем сведения о непустоте их субъекта, то возможен и обратный переход: от отрицания частных SiP, SoP к утверждению общих суждений SeP, SaP;

$$\frac{SiP}{\rceil(SeP)}\quad \frac{SoP}{\rceil(SaP)}\quad \frac{SeP}{\rceil(SiP)}\quad \frac{SaP}{\rceil(SoP)}\quad \frac{\rceil(SiP)}{SeP}\quad \frac{\rceil(SoP)}{SaP};$$

- для перехода «*по диагоналям*» квадрата от отрицания общих суждений SeP, SaP к утверждению частных SiP, SoP необходимо дополнительное условие о непустоте субъекта общих суждений

$$\frac{\rceil(SeP),\ S\neq\varnothing}{SiP}\qquad\qquad \frac{\rceil(SaP),\ S\neq\varnothing}{SoP}.$$

Отмеченные ограничения позволяют сделать вывод о том, что в силлогистике Больцано без дополнительного условия о непустоте субъекта суждений не выполняется и *закон исключенного третьего*.

Не выполняется в силлогистике Больцано и закон контрапозиции для общих суждений без дополнительного условия о непустоте дополнения к предикату суждения.

Третья особенность силлогистики Больцано связана с необходимостью использования в ней *правил для отрицания*:
- правила двойного отрицания
- правила «сведения к абсурду»

$$\frac{\rceil\rceil A}{\overline{A}}\qquad\qquad\qquad \begin{array}{c} A \\ \vdots \\ B \\ \vdots \\ \underline{\rceil B,} \\ \rceil A \end{array}$$

где А, В – силлогистические выражения или их отрицания.

Четвертую особенность силлогистических выводов у Больцано мы связываем с возможностью использования в них силлогистических выражений, в состав которых входят *единичные термины.*

Хорошо известно, что Аристотель не вводил в свою дедуктивную систему единичных терминов, поскольку, как отмечал Я. Лукасевич, «для его силлогистики существенно то, что один и тот же термин без какого-либо ограничения может быть использован и как субъект и как предикат» ([7], с. 41). Единичный же термин, согласно Аристотелю, не может быть предикатом истинного высказывания. То, что у Аристотеля не нашлось места единичным терминам, Лукасевич называет «самым большим дефектом аристотелевской силлогистики» ([7], с. 39).

Можно с уверенностью утверждать, что специфика умозаключений с единичными терминами не нашла своего выражения и в традиционной силлогистике в целом. Если иногда и употребляли единичные термины в качестве субъекта высказывания, то последнее по существу отождествлялось с общим высказыванием. При этом ссылались на то, что в единичных и в общих высказываниях термин субъекта относится ко всему классу объектов, о которых идет речь в самом высказывании, т.е. субъект всегда распределен. Подобное отождествление очевидным образом основано на смешении единичного класса и индивида.

Предлагаемая ниже формальная система позволяет, опираясь на дедуктивную теорию Больцано, учесть в ней специфику логических выводов с использованием единичных терминов в составе силлогистических выражений.

Система *BS1*.

Алфавит:

$G, G_1, G_2,$ - общие силлогистические термины;
$g, g_1, g_2,$ - единичные термины;
a, o, i, e - логические константы;
$\sim$ .... - знак внутреннего отрицания (термина);
$\rceil$ .... - знак внешнего отрицания (высказывания);
$\in$ .... - отношение принадлежности элемента классу;
$\notin$ .... - отношение непринадлежности элемента классу;
$\varnothing$ .... - символ пустого класса;
U .... - символ универсального класса;
$\neq$ .... - отношение неравенства;
$=$ .... - отношение равенства
(,) ...... - технические знаки.

Определение силлогистической формулы

1. Если M[1], S и P общие силлогистические термины, то выражения: (SaP), (SoP), (SeP), (SiP), $(S \neq \varnothing)$, $(P \neq U)$ – силлогистические формулы.

2. Если x – единичный термин, то выражения: $(x \in P)$, $(x \notin P)$ – силлогистические формулы.

3. Если A – силлогистическая формула, то $\neg A$ – силлогистическая формула.

Основные правила вывода

В число основных правил вывода системы *BS1* мы включили те правила, которые были выявлены нами ранее при логической реконструкции основных идей логической теории Больцано (см.: [3]; [5]), а также правила его силлогистики. Теперь мы расширяем силлогистику Больцано за счет добавления к числу ее основных правил трех правил, в которых силлогистические формулы содержат единичные термины. Двойная черта в правилах позволяет сделать переход от силлогистических формул, записанных над чертой, к силлогистическим формулам, записанным под чертой, и наоборот.

П1. $$\frac{(x \notin P)}{\neg(x \in P)}$$ (двойная черта)

П2. $$\frac{(MaP),\ (x \in M)}{(x \in P)}$$

П3. $$\frac{(x \in P),\ (x \in S)}{(SiP)}$$

П4. $$\frac{(MaP),\ (SaM)}{(SaP)}$$

П5. $$\frac{(MaP),\ (SiM)}{(SiP)}$$

П6. $$\frac{(SaP)}{(SiP)}$$

П7. $$\frac{(SiP)}{(PiS)}$$

П8. $$\frac{\neg(SiP)}{(SeP)}$$ (двойная черта)

П9. $$\frac{\neg(SaP),\ (S \neq \varnothing)}{(SoP)}$$

П10. $$\frac{(SoP)}{\neg(SaP)}$$

П11. $$\frac{\neg\neg A}{A}$$ (двойная черта)

П12. $$\begin{array}{c} A_i \\ \vdots \\ B \\ \vdots \\ \underline{\neg B} \\ \neg A_i \end{array}$$

[1] Может использоваться отдельно вместо S или вместо P.

Определение вывода из допущений в BS1

Пусть $A_1 \ldots A_n$ – не содержащий повторений список силлогистических формул. Тогда последовательность силлогистических формул $B_1 \ldots B_m$ называется *выводом из допущений* $A_1 \ldots A_n$, если каждая силлогистическая формула B_i ($i \leq m$) либо принадлежит списку $A_1 \ldots A_n$, либо получена из предшествующих силлогистических формул по одному из основных правил *BS1* и в правиле П12 выражение A_i есть одна из силлогистических формул $A_1 \ldots A_n$.

Определение зависимости силлогистической формулы

Будем считать, что в выводе $B_1 \ldots B_m$ из допущений $A_1 \ldots A_n$ силлогистическая формула B_j ($j \leq m$) *зависит от допущения* A_l ($l \leq n$), если B_j есть A_l или если B_i ($i < j$) зависит от A_l и B_j получена из B_i (или из B_i и некоторой B_{i1} в любом порядке) по одному из правил П1–П11.

Определение ограниченного вывода из допущений

Последовательность силлогистических формул $B_1 \ldots B_m$ называется *ограниченным выводом из допущений* $A_1 \ldots A_n$, если она есть вывод из допущений, в котором правило П12 применяется к силлогистическим формулам A_i($i \leq n$), B и $\rceil$B лишь при условии, что B или $\rceil$B зависят от A_i.

Иными словами, правило П12, выражающее метод «приведения к абсурду», применяется следующим образом: если в ходе построения вывода из допущений $A_1 \ldots A_n$ в уже построенной его части, содержащей допущение A_i, имеются силлогистические формулы B и $\rceil$B, из которых по крайней мере одна зависит от A_i, то построенную часть вывода можно продолжить, присоединив к ней в качестве следующей строки силлогистическую формулу $\rceil A_i$.

Определение заключения из посылок

Силлогистическая формула B называется *заключением* (следствием) *из посылок* $A_1 \ldots A_k$, если можно построить такой ограниченный вывод из допущений $A_1 \ldots A_n$ ($k \leq n$), что в списке силлогистических формул $A_1 \ldots A_n$ наряду с $A_1 \ldots A_k$ содержатся все силлогистические формулы, отрицания которых включены в вывод как результат применения правила П12 и B есть последняя силлогистическая формула этого ограниченного вывода.

Определение производного правила

Тот факт, что формула B есть заключение из посылок $A_1 \ldots A_k$, выразим в виде схемы:

$$\frac{A_1 \ldots A_k}{B},$$

которая есть производное правило в системе *BS1*.

Строя выводы из допущений в дедуктивной системе *BS1*, мы можем получить в качестве производных правил *BS1* все известные правила и модусы аристотелевской силлогистики.

Рассмотрим несколько примеров.

Пр. 1.

$$\frac{(SeP)}{\rceil(SaP)}$$

Вывод:

1. (SeP) – допущение (посылка);
2. (SaP) – допущение (посылка);
3. ⌉(SiP) – из: 1. по П8;
4. (SiP) – из: 2 по П6;
5. ⌉(SaP) – из: 2, 3, 4 по П12.

В построенном выводе силлогистичекая формула ⌉(SaP) зависит от (посылки) допущения (SeP) и не зависит от (посылки) допущения (SaP), поскольку отрицание последнего входит в вывод как результат применения основного правила П12.

Пр. 2.

$$\frac{(MeP),\ (SaM)}{(SeP)}$$

Вывод:

1. (MeP) – доп. (пос.);
2. (SaM) - доп. (пос.);
3. (SiP) – доп.;
4. (PiS) – из: 3 по П7;
5. (PiM) – из: 2, 4 по П5;
6. (MiP) – из: 5 по П7;
7. ⌉(MiP) – из: 1 по П8;
8. ⌉(SiP) – из: 3, 6, 7 по П12;
9. (SeP) – из 8 по П8.

Обратимся теперь к выводам с силлогистическими формулами, содержащими единичные термины. Двухпосылочные правила с единичными терминами будем относить к соответствующим фигурам силлогизма в зависимости от того, какое место занимает единичный термин в обеих посылках – место «большего», «меньшего» или «среднего» термина. В правилах вывода, построенных по схеме *первой фигуры*, ни больший, ни средний термины не могут быть единичными, поскольку каждый из них, по крайней мере, в одном из трех силлогистических выражений выступает в качестве предиката. Поэтому он может быть включен в подобные правила лишь в качестве *меньшего* термина.

Пр. 3.

$$\frac{(MeP),\ (x\in M)}{(x\notin P)}$$

Вывод:

1. (MeP) – доп. (пос.);
2. $(x\in M)$ - доп. (пос.);
3. $(x\in P)$ доп.;
4. (MiP) – из: 3, 2 по П3;
5. $\neg(MiP)$ – из: 1 по П8;
6. $\neg(x\in P)$ – из: 3, 4, 5 по П12;
7. $(x\notin P)$ - из: 6 по П1.

В выводе Пр. 3 заключение $(x\notin P)$ не зависит от допущения $(x\in P)$ как посылки, поскольку ее отрицание $\neg(x\in P)$ включено в вывод как результат применения основного правила П12.

Основное правило П2 совместно с производным правилом Пр. 3 представляют собой по существу формальное выражение аксиомы силлогизма: dictum de omni et nullo.

В правилах вывода по схеме *второй фигуры* ни больший, ни средний термины не могут быть единичными, поскольку каждый из них, по крайней мере, в одном из трех силлогистических выражений выступает в качестве предиката. Поэтому он может быть включен в подобные правила лишь в качестве *меньшего* термина, как и для правил по схеме первой фигуры.

Пр. 4.

$$\frac{(PeM),\ (x\in M)}{(x\notin P)}$$

Вывод:

1. (PeM) – доп. (пос.);
2. $(x\in M)$ - доп. (пос.);
3. $(x\in P)$ доп.;
4. $(x\notin M)$ - из: 1, 3 по Пр3.;
5. $\neg(x\in M)$ – из: 4 по П1;
6. $\neg(x\in P)$ – из: 2, 3, 5 по П12;
7. $(x\notin P)$ - из: 6 по П1.

Пр. 5.

$$\frac{(PaM),\ (x\notin M)}{(x\notin P)}$$

Вывод:

1. (PaM) – доп. (пос.);
2. $(x\notin M)$ – доп. (пос.);
3. $(x\in P)$ – доп.;
4. $(x\in M)$ – из: 1, 3 по П2;.
5. $\neg(x\in M)$ – из: 2 по П1;
6. $\neg(x\in P)$ – из: 3, 4, 5 по П12;
7. $(x\notin P)$ – из: 6 по П1.

В правилах по схеме *третьей фигуры* ни больший, ни меньший термины не могут быть единичными, поскольку каждый из них, по крайней мере, в одном из трех силлогистических выражений выступает в качестве предиката. Здесь единичный термин может использоваться лишь как *средний* термин. Схеме третьей фигуры соответствует основное правило П3 и производное правило Пр. 6.

Пр. 6.

$$\frac{(x \notin P),\ (x \in S)}{(SoP)}$$

Вывод:

1. $(x \notin P)$ - доп. (пос.);
2. $(x \in S)$ - доп. (пос.);
3. (SaP) – доп.;
4. $(S \neq \varnothing)$ – доп.;
5. $(x \in P)$ – из: 2, 3 по П2;
6. $\rceil(x \in P)$ – из: 1 по П1;
7. $\rceil(SaP)$ – из: 3, 5, 6 по П12;
8. (SoP) – из: 4,6 по П9.

В правилах вывода по схеме *четвертой фигуры* единичных терминов не может быть вовсе, поскольку каждый из трех терминов этой фигуры, по крайней мере в одном из трех силлогистических выражений, выступает в качестве предиката.

Таким образом, использование единичных терминов в силлогистике Больцано оказывается возможным только на уровне первых трех классических фигур силлогизма и первых трех основных правил вывода самой системы *BS1*.

ЛИТЕРАТУРА

1. *Больцано Бернард* Учение о науке. СПб.: Наука, 2003.
2. *Федоров Б.И.* Единичные классы в дедуктивной теории Б.Больцано // Вестник СпбГУ. Сер. 6. Вып. 4. СПб., 1992. С. 36-37.
3. *Федоров Б.И.* Логика Бернарда Больцано. Л.: Изд-во ЛГУ, 1980.
4. *Fiodorov B.I.* Representation of Bolzanos content inferences with singular terms in the language of predicate logic // Смирновские чтения. Вып. 3. М., 2001. С. 83-85.
5. *Федоров Б.И.* Образец исторически логической реконструкции // Логические исследования. Вып. 10. М.: Наука, 2003. С. 175-198.
6. *Федоров Б.И.* Особенности силлогистики Б. Больцано // Современная логика: проблемы истории, теории и применения в науке. Вып. 8. СПб., 2004. С. 332-334.
7. *Лукасевич Я.* Аристотелевская силлогистика с точки зрения современной формальной логики. М., 1959.

В.Х. Хаханян

ФУНКЦИОНАЛЬНЫЕ АЛГЕБРАИЧЕСКИЕ МОДЕЛИ ДЛЯ НА И ТЕОРИИ МНОЖЕСТВ С ИНТУИЦИОНИСТСКОЙ ЛОГИКОЙ

Abstract. *In the work we constructed the new type models for the set theory with intuitionistic logic.*

1. Функциональные алгебраические модели для арифметики

В настоящей работе будет обобщен для теории множеств с интуиционистской логикой предложенный А.Г. Драгалиным очень общий подход к построению моделей для нестандартных логик, в частности для интуиционистской логики, в стиле равномерных алгебр (см. [1]). Приводимое изложение А.Г. Драгалина (ясное, но без очевидных деталей) сопровождается достаточным количеством примеров для арифметики, и необходимо для понимания обобщения данного подхода на теорию множеств. Рассматривая модель для штрих-реализуемости Клини (см. [2], столбец С), автор приводит «...модель, соответствующую штрих-реализуемости Клини...» ([1], с. 194). Связь между приводимой моделью и реализуемостью Клини такова: «...$^\circ\varphi^\circ = \mathbf{T} \Leftrightarrow ((\mid \varphi) \wedge \mathbf{HA} \vdash \varphi)$ » (см. также [1], с. 195; ср. [3]). Конечно, с помощью приведенной модели (соответствующей как раз формульной реализуемости из [3]) можно доказать свойства дизъюнктивности и экзистенциальности для арифметики **НА** (именно этот результат и стремится получить автор, используя подходящую равномерную алгебру). Однако штрих-реализуемость Клини (да и другие модели типа равномерной алгебры для **НА**) не совпадают с выводимостью в интуиционистской арифметике. В [4] доказано, что функциональной алгебраической модели для штрих-реализуемости Клини не существует. По-видимому, этим свойством обладает любая функциональная алгебраическая модель (и для теории множеств также), в которой формализуется содержательное понятие выводимости. Все результаты, приводимые в данной статье, анонсированы в работах [5], [6], [7].

Как сказано, в [1] дается ряд примеров, в которых для той или иной модели **НА** (в первую очередь для моделей типа реализуемости) приводится соответствующая функциональная алгебраическая модель (ФАМ). Охарактеризуем вкратце общую схему построения ФАМ для арифметики, что облегчит понимание подобной модели для теории множеств.

Известно, что при исследовании **НА** было построено большое количество моделей типа реализуемости (см. [3]). Естественно попытаться рассмотреть эти модели с некоторой единой точки зрения. Алгебраическое исследование таких моделей приводит к рассмотрению существенно неполных псевдобулевых алгебр (ПБА), в которых верхние и нижние грани существуют лишь для некоторых семейств, которые задаются структурой языка. Приведем описание одного из вариантов такого рассмотрения, предложенного А.Г. Драгалиным (см. [1] или [3]).

Функциональная псевдобулева алгебра (ФПБА) задается набором $<\mathbf{B}, \mathbf{D}, \mathbf{F}>$, где **B** – ПБА (алгебра истинностных значений), **D** – непустое множество (объектная область), а **F** – семейство функций (или семейство форм) ФПБА. Всякий элемент из **F** есть функция нескольких аргументов (может быть нульместных), всюду определенная на элементах из **D** и со значениями в ПБА. На **F** накладываются следующие ограничения:

1. **F** замкнуто относительно операций:

а) добавления фиктивного аргумента; б) перестановки аргументов; в) отождествления аргументов.

2. **F** содержит ноль и единицу ПБА в качестве нульместных функций.

3. **F** замкнуто относительно псевдобулевых операций $\wedge$, $\vee$, $\supset$.

Последнее означает, что если **f**, **g** есть две формы из **F** с одним и тем же количеством аргументных мест, то найдется функция **h** из семейства форм такая, что для любых элементов $\mathbf{a}_1,\dots,\mathbf{a}_n$ из **D** $\mathbf{h}(\mathbf{a}_1,\dots,\mathbf{a}_n) = \mathbf{f}(\mathbf{a}_1,\dots,\mathbf{a}_n)\wedge\mathbf{g}(\mathbf{a}_1,\dots,\mathbf{a}_n)$ или, кратко, $\mathbf{h} = \mathbf{f} \wedge \mathbf{g}$. Аналогично, требуется существование форм $\mathbf{f} \vee \mathbf{g}$ и $\mathbf{f} \supset \mathbf{g}$.

4. Наше множество форм должно быть замкнуто относительно операций взятия верхних и нижних граней. Это означает следующее. Пусть фиксировано некоторое аргументное место, например $\mathbf{x}_1$. Если **f** из семейства форм, то требуется, чтобы существовали формы **g** и **h** от аргументов $\mathbf{x}_2,\dots,\mathbf{x}_n$ такие, чтобы для любых объектов $\mathbf{a}, \mathbf{a}_2,\dots,\mathbf{a}_n$ из **D** было выполнено:

$\mathbf{g}(\mathbf{a}_2,\dots,\mathbf{a}_n)=\wedge\{\mathbf{f}(\mathbf{a},\mathbf{a}_2,\dots,\mathbf{a}_n):\mathbf{a}\in\mathbf{D}\}$, $\mathbf{h}(\mathbf{a}_2,\dots,\mathbf{a}_n)=\vee\{\mathbf{f}(\mathbf{a},\mathbf{a}_2,\dots,\mathbf{a}_n):\mathbf{a}\in\mathbf{D}\}$, т.е. требуется существование соответствующих пересечений и объединений в ПБА. Будем записывать это так: $\mathbf{g}(\mathbf{x}_2,\dots,\mathbf{x}_n)= \forall\mathbf{x}\mathbf{f}(\mathbf{x},\mathbf{x}_2,\dots,\mathbf{x}_n)$, $\mathbf{h}(\mathbf{x}_2,\dots,\mathbf{x}_n)=\exists\mathbf{x}\mathbf{f}(\mathbf{x},\mathbf{x}_2,\dots,\mathbf{x}_n)$. Определение ФПБА на этом завершено. Заметим, что совершенно не требуется, чтобы ПБА была полной, т.е. чтобы содержала все нижние и верхние грани своих подмножеств.

Далее рассматриваются логико-математические языки без выделенного равенства и функциональных символов, т.е. каждый язык задается набором <**Cnst, Pr**> – констант и предикатных символов. Функциональная алгебраическая модель (ФАМ) для языка <**Cnst, Pr**> определяется набором **A**= <**B, D, F**, ***Cnst, Pr***>, где <**B, D, F**> есть ФПБА, функция ***Cnst*** сопоставляет каждой константе **c** нашего языка объект c=***Cnst***(**c**) , а каждому предикатному символу **P** нашего языка элемент $^o\mathbf{P}^o$=***Pr***(**P**) из семейства форм **F**. Дополнительно предполагается, что семейство форм нашей модели **A** удовлетворяет и такому условию: это семейство замкнуто относительно операции фиксации аргумента объектной области c, где **c** есть константа нашего языка, что означает, что если $\mathbf{f}\in\mathbf{F}$, $\mathbf{f}=\mathbf{f}(\mathbf{x}_1,...,\mathbf{x}_i,...,\mathbf{x}_n)$, $\mathbf{c}\in\mathbf{Cnst}$, то найдется функция $\mathbf{g}\in\mathbf{F}$ такая, что для всех объектов $\mathbf{a}_1,...,\mathbf{a}_n$ $\mathbf{g}(\mathbf{a}_1,...,\mathbf{a}_{i-1},\mathbf{a}_{i+1},...,\mathbf{a}_n)=\mathbf{f}(\mathbf{a}_1,...,c,...,\mathbf{a}_n)$.

Если задана (ФАМ) **A** для языка **Q**, то для всякой формулы языка **Q** можно определить значение в модели. Значением формулы φ будет при этом некоторая форма ФПБА $^o\varphi^o\in\mathbf{F}$. Заметим, что, в отличие от обычных алгебраических моделей (см. [8]), значение приписывается не формулам, оцененным объектами модели, а просто формулам языка **Q**, в том числе и формулам с параметрами.

Для определения значения формулы в модели будем помечать аргументные места форм переменными языка **Q**. С этой целью линейно упорядочим все переменные языка **Q** каким-либо фиксированным способом. Если дана формула φ, то все ее параметры выпишем в список $\mathbf{x}_1,....\mathbf{x}_n$ в упомянутом выше линейном порядке. В качестве значения формуле φ будет сопоставляться форма $\mathbf{f}\in\mathbf{F}$ от аргументов $\mathbf{x}_1,....\mathbf{x}_n$.

Теперь определим значение $^o\varphi^o$ индукцией по построению формулы. Если φ - атомарная формула вида $\mathbf{P}\ (\mathbf{u}_1,\ ....\mathbf{u}_n)$, где $\mathbf{u}_i$ – переменные или константы, а $\mathbf{x}_1,....\mathbf{x}_n$ – стандартный список параметров φ, то $^o\mathbf{P}\ (\mathbf{u}_1,\ ....\mathbf{u}_n)^o$ есть форма от аргументов $\mathbf{x}_1,....\mathbf{x}_n$, получающаяся из $^o\mathbf{P}^o$ с помощью фиксации аргументов соответствующими константами. Значение $^o\bot^o$ есть нуль алгебры **B**.

Если φ имеет вид $(\psi\wedge\eta)$, $(\psi\vee\eta)$, $(\psi\supset\eta)$, то форму $^o\varphi^o$ вычисляем следующим образом. Сначала найдем $^o\psi^o$ и $^o\eta^o$. Затем с помощью тривиальных операций перестановки и добавления фиктивных аргументов получим из форм $^o\psi^o$ и $^o\eta^o$ формы $\mathbf{f}_1(\mathbf{x}_1,\ ...,\ \mathbf{x}_n)$ и $\mathbf{f}_2\ (\mathbf{x}_1,\ ...,\ \mathbf{x}_n)$ от параметров формулы φ и, наконец, вычислим $^o\varphi^o$ как форму $\mathbf{f}_1\wedge\mathbf{f}_2$, $\mathbf{f}_1\vee\mathbf{f}_2$ или $\mathbf{f}_1\supset\mathbf{f}_2$.

Если φ имеет вид $\forall\mathbf{x}\psi(\mathbf{x})$ или $\exists\mathbf{x}\eta(\mathbf{x})$, то определим $^o\varphi^o=\forall\mathbf{x}{}^o\psi(\mathbf{x})^o$ или, соответственно, $^o\varphi^o=\exists\mathbf{x}{}^o\eta(\mathbf{x})^o$. Разумеется, если у формулы нет параметра **x**, то никаких изменений при определении формы $°\varphi°$ не происходит. Если φ – предложение нашего языка, то соответствующая форма оказывается нульмерной и принадлежит ПБА. Предложение φ истинно в модели **A**, если $°\varphi°=\mathbf{1}$ – единица нашей ПБА. **A** есть модель для теории **H**, если все нелогические аксиомы **H** будут истинны в **A**. Теорема о корректности для нашего класса моделей имеет следующий вид.

Теорема (А.Г. Драгалин, см. [1]): если **A** – ФАМ для языка **Q**, φ – предложение **Q**, выводимое в интуиционистской логике предикатов, то $°\varphi°=\mathbf{1}$.

Доказательство теоремы проводится индукцией по длине вывода формулы φ.

Теперь рассмотрим некоторые виды реализуемости в языке арифметики. Сам язык арифметики **HA** нужно модифицировать так, чтобы избежать употребления функциональных символов. Это делается с помощью стандартной процедуры: каждому **n**-местному функциональному символу $\mathbf{f(x_1, ..., x_n)}$ сопоставляется $(\mathbf{n} + \mathbf{1})$-местный предикатный символ $\mathbf{y = f\ (x_1,..., x_n)}$ и все аксиомы, относящиеся к этому функциональному символу, естественным образом заменяются на аксиомы, относящиеся к предикатному символу. Соответственно, несколько изменяются и другие аксиомы. Например, принцип арифметической индукции приобретает вид: $\varphi\ \mathbf{(0)} \wedge \forall\ \mathbf{xy}\ (\varphi\ \mathbf{(x)} \wedge \mathbf{(y = Sx)} \to \varphi\ \mathbf{(y)}) \to \forall \mathbf{x}\varphi\ \mathbf{(x)}$. Мы считаем, что наш язык арифметики имеет один сорт переменных **x, y, z**,… и семейство констант **0, 1, 2**,... для изображения натуральных чисел.

Все функциональные алгебраические модели для языка **HA**, которые мы рассмотрим ниже в качестве примеров (см. [1]), будут иметь одну и ту же объектную область, т.е. в моделях **A** = <**B, D, F,** ***Cnst, Pr***> функция **D** будет одной и той же. А именно, объектная область **D** состоит, во-первых, из всех констант **0, 1, 2**,... для натуральных чисел и, во-вторых, из счетного семейства символов **[x]**, **[y]**, **[z]**,... которые будем называть каналами. Канал изображает константу - натуральное число, «о котором ничего не известно».

Функция ***Cnst*** во всех моделях ниже определяется тривиальным образом: константе **n** языка сопоставляется объект $\boldsymbol{n}\in\mathbf{D}$. Таким образом, в рассматриваемых примерах модель задается определением **D, F и *Pr*** Оцененная формула есть, по определению, формула φ, в которой все вхождения параметров замещены объектами из **D** (константами или каналами).

Все эти модели и получаемые с их помощью результаты, можно будет поднять на уровень теории множеств (двусортной и односортной) после того, как ниже будет приведена конструкция обобщения техники А.Г. Драгалина для арифметики на теорию множеств.

Приведем теперь две наиболее простых ФАМ. Каждую формальную теорию, например **НА**, можно рассматривать как функциональную алгебраическую модель. По существу это известная алгебра Линденбаума – Тарского. В качестве алгебры **B** истинностных значений следует взять просто множество всех оцененных формул, а в качестве множества **F** форм – множество всех формул. Каждая формула задает форму относительно Основное отношение на **B** определяется так: $\mathbf{a} \le \mathbf{b} \Leftrightarrow (\mathbf{HA} \vdash \mathbf{a}' \supset \mathbf{b}')$, где $\mathbf{a}'$, $\mathbf{b}'$ получены из **a**, **b** соответственно путем согласованного превращения каналов в переменные. Псевдобулевы операции над формами при этом будут совпадать с синтаксическими операциями над соответствующими формулами. Если определить $^{o}\varphi^{o} = \varphi$ для атомарных формул, то для всякого предложения ψ будем иметь $^{o}\psi^{o} = \mathbf{1} \Leftrightarrow (\mathbf{HA} \vdash \psi)$.

Но можно определить и более интересную и неожиданную модель **НА**, где в качестве форм будут фигурировать формулы (см. также [1]). Для всякой арифметической формулы φ через $\mathbf{Pr}(\varphi)$ обозначим формулу с теми же параметрами, что и у φ, содержательный смысл которой таков: $\mathbf{Pr}(\varphi)$ утверждает, что в исчислении **НА** выводится замкнутая формула, полученная из φ замещением ее параметров натуральными числами из некоторого списка *y*, который есть полный список всех параметров формулы φ. Формула $\mathbf{Pr}(\varphi)$ строится стандартным образом по формуле φ, с подробностями можно ознакомиться, например, по статье [9]. Для всякой формулы φ через $\Box\varphi$ обозначим формулу $\varphi \wedge \mathbf{Pr}(\varphi)$.

В качестве алгебры **B** вновь возьмем множество всех оцененных формул, а в качестве множества **F** форм – множество всех формул, но теперь основное отношение определим иначе: $\mathbf{a} \le \mathbf{b} \Leftrightarrow (\mathbf{HA} \vdash \Box\mathbf{a}' \supset \mathbf{b}')$. Для атомарных формул полагаем $^{o}\varphi^{o} = \varphi$.

Псевдобулевы операции в этой модели определяются следующим образом (здесь слева стоит знак операции в нашей модели, а справа – формула, являющаяся значением):
$(\varphi) \wedge (\psi) = (\varphi \wedge \psi)$; $(\varphi) \vee (\psi) = (\Box\varphi \vee \Box\psi)$; $(\varphi) \supset (\psi) = (\Box\,\varphi \supset \psi)$; $\neg(\varphi) = (\neg\,\Box\varphi)$; $\forall\mathbf{x}(\varphi) = (\forall\mathbf{x}\varphi)$; $\exists\mathbf{x}(\varphi) = (\exists\mathbf{x}\Box\varphi)$; $\perp = (\mathbf{0{=}1})$.

Реализуемость, соответствующая этой модели, была использована Бизоном (см. [10]). Связь модели с реализуемостью Бизона можно теперь выразить следующей эквивалентностью: $^{o}\varphi^{o} = \mathbf{1} \Leftrightarrow (\mathbf{HA} \vdash \varphi^{\mathrm{P}})$.

Далее в работах [1] и [3] рассматривается отмеченная во введении штрих-реализуемость Клини и для нее строится подходящая ФАМ, однако нетрудно видеть, доказывая свойства эффективности логических связок, что эта ФАМ совпадает с выводимостью в интуиционистской арифметике. Мы докажем, что не существует модели ФАМ для штрих-реализуемости Клини (и, тем не менее, существует модель типа ФАМ для формализованной и содержательной реализуемостей Клини: см. [1] и [3]).

Предположим, что некоторая ФАМ **A** есть модель для штрих-реализуемости Клини. Тогда (по определению) имеется такое отображение формул языка арифметики в множество форм **A**, что для всякой формулы

φ : $|$- реализуема φ тогда и только тогда, когда $\mathbf{F}_\varphi \in \mathbf{1}$ ($\mathbf{F}_\varphi$ - форма из ФПБА модели ФАМ **A**, соответствующая формуле арифметики φ, а **1** – единица ПБА, использованной при построении ФАМ **A**).

Рассмотрим два различных, неразрешимых в **HA**, утверждения φ и η (т.е. $\mathbf{HA} \nvdash \varphi$, $\mathbf{HA} \nvdash \neg\varphi$, $\mathbf{HA} \nvdash \eta$ и $\mathbf{HA} \nvdash \neg\eta$). Так как $\mathbf{HA} \nvdash \varphi$ и так как в $\mathbf{HA} \nvdash \eta$, то формулы φ и η не являются выводимыми, однако являются $|$- реализуемыми формулами языка арифметики. Если в ФАМ **A** им соответствуют формы $\mathbf{F}_{\neg\varphi}$ и $\mathbf{F}_{\neg\eta}$ соответственно, то эти формы принадлежат **1** ПБА, а тогда форма $\mathbf{F}_{\neg\varphi} \vee \mathbf{F}_{\neg\eta} = \mathbf{F}_{\neg\varphi\vee\neg\eta}$ (последняя соответствует в ФПБА модели **A** формуле $\neg\varphi \vee \neg\eta$) также принадлежит **1** нашей ПБА и, следовательно, формула $\neg\varphi \vee \neg\eta$ является $|$- реализуемой. Но это влечет, что в $\mathbf{HA} \vdash \neg\varphi$ или в $\mathbf{HA} \vdash \neg\eta$, что невозможно в силу выбора формул φ и η. Таким образом, доказана

Теорема 1. Не существует ФАМ **A**, соответствующей штрих-реализуемости Клини.

2. Функциональные алгебраические модели для теории множеств

В оставшейся части статьи техника А.Г. Драгалина будет обобщена на теорию множеств с интуиционистской логикой. Пусть имеется некоторая функциональная псевдобулева алгебра **B**. Построим универсум **D** (объектную область), используя внешнюю индукцию по ординалам (наше построение и доказательство не выйдет за рамки теории **ZFIR+DCS**). Все дальнейшие построения и результаты были анонсированы в [6] и [7].

Пусть **B** – псевдобулева алгебра, не обязательно полная, не факторизованная по отношению эквивалентности, и **0** и **1** – ноль и единица этой алгебры; пусть $\mathbf{B}^- = \mathbf{B}\backslash\{\mathbf{0}\}$ и **p** – произвольный элемент алгебры, не равный нулю. Полагаем: $\mathbf{D}_0=\varnothing$; $\mathbf{D}_{\alpha+1}=\{\mathbf{x} : \mathbf{xext}(\alpha+1)\}$; $\mathbf{xext}((\alpha+1) \Leftrightarrow \mathbf{x} \subseteq(\mathbf{B}^-\times\cup\{\mathbf{D}_\beta : \beta\leq\alpha\}) \wedge [\mathbf{y}\approx\mathbf{z}\ (\alpha,\mathbf{p}) \wedge \langle\mathbf{a},\mathbf{y}\rangle \in \mathbf{x} \Rightarrow (\exists\mathbf{b}\in\mathbf{B})(\mathbf{b} \geq (\mathbf{a}\wedge\mathbf{p}) \wedge \langle\mathbf{b},\mathbf{z}\rangle \in\mathbf{x})]$;

$\mathbf{y \approx z(\alpha,p)} \Leftrightarrow (\langle \mathbf{a,x} \rangle \in \mathbf{y} \Rightarrow (\exists \mathbf{b} \in \mathbf{B})\ (\mathbf{b} \geq (\mathbf{a} \wedge \mathbf{p}) \wedge \langle \mathbf{b,x} \rangle \in \mathbf{z})) \wedge (\langle \mathbf{a,x} \rangle \in \mathbf{z} \Rightarrow (\exists \mathbf{b} \in \mathbf{B})(\mathbf{b} \geq (\mathbf{a} \wedge \mathbf{p}) \wedge \langle \mathbf{b,x} \rangle \in \mathbf{y}))$; если α - предельный ординал, то $\mathbf{D}_\alpha = \cup\{\ \mathbf{D}_\beta : \beta < \alpha\}$. Полагаем теперь $\mathbf{D} = \cup\ \{\mathbf{D}_\alpha\mathbf{:}\ \alpha \in \mathbf{On}\}$. Универсум **D** (объектная область) определен.

В качестве ФПБА берем множество отображений из $\mathbf{D}^n$ в **B**, обладающее всеми свойствами, описанными выше в виде ограничений на ФПБА, и содержащее форму $^o\mathbf{x} \in \mathbf{y}^o$; (полагаем $^o\mathbf{x} \in \mathbf{y}^o(\mathbf{a,b}) = \mathbf{c} \Leftrightarrow \langle \mathbf{c,a} \rangle \in \mathbf{b} \wedge \mathbf{c} \neq \mathbf{0}$). ФПБА определена.

Определим теперь ФАМ для языка односортной теории множеств **ZFIR + DCS**. Функция ***Cnst*** не определена (считаем, что в языке нет индивидных констант), функция ***Pr*** уже определена, так как в языке один бинарный предикатный символ $\in$. Таким образом, определена функциональная алгебраическая модель набор **A= <B, D, F, *Cnst, Pr*>** для языка теории множеств.

Теорема 2. Если **A** – ФАМ для языка теории множеств и φ – предложение, выводимое в теории **ZFIR + DCS**, то $^o\varphi^o = \mathbf{1}$.

Доказательство Теоремы 2 проводим индукцией по построению вывода предложения φ в теории **ZFIR + DCS**. Аксиомы и правила вывода интуиционистской логики предикатов следуют из Теоремы Драгалина для логики предикатов (см. выше). Поэтому остается проверить, что значение всех собственных аксиом и схем аксиом теории множеств равно **1** алгебры **B**. Отметим, что метаматематика нашего доказательства не будет выходить за рамки теории множеств **ZF**, которая является равнонепротиворечивой с нашей теорией **ZFIR + DCS**.

а) Проверка выполнимости аксиомы объемности: пусть $\mathbf{p} = {}^o\forall \mathbf{u}(\mathbf{u} \in \mathbf{x} \leftrightarrow \mathbf{u} \in \mathbf{y})^o$ и пусть $\mathbf{q} = {}^o\mathbf{x} \in \mathbf{z}^o$ и пусть $\mathbf{r} = {}^o\mathbf{y} \in \mathbf{z}^o$. Нужно доказать, что $\mathbf{p} \wedge \mathbf{q} \leq \mathbf{r}$. Докажем, что $\mathbf{x} \approx \mathbf{y}(\mathbf{p},\alpha)$ для некоторого ординала α. Пусть для всякого $\mathbf{u}$ $^o\mathbf{u} \in \mathbf{x} \leftrightarrow \mathbf{u} \in \mathbf{y}^o = \mathbf{s}$, где $\mathbf{s} = \mathbf{s}_1 \wedge \mathbf{s}_2$, а $\mathbf{s}_1 = {}^o\mathbf{u} \in \mathbf{x} \to \mathbf{u} \in \mathbf{y}^o$ и $\mathbf{s}_2 = {}^o\mathbf{u} \in \mathbf{x} \leftarrow \mathbf{u} \in \mathbf{y}^o$. Имеем $\mathbf{p} \leq \mathbf{s} \leq \mathbf{s}_1 = \mathbf{a} \to \mathbf{b}$, где $\mathbf{a} = {}^o\mathbf{u} \in \mathbf{x}^o$ и $\mathbf{b} = {}^o\mathbf{u} \in \mathbf{y}^o$. Получаем по законам ПБА, что $\mathbf{p} \to \mathbf{a} \to \mathbf{b}$, т.е. $\mathbf{p} \wedge \mathbf{a} \leq \mathbf{b}$ и в обратную сторону симметрично с заменой $\mathbf{s}_1$ на $\mathbf{s}_2$. Отсюда следует, что $\mathbf{x} \approx \mathbf{y}(\mathbf{p},\alpha)$, где α – ранг множества **y**. Так как множество **z** из универсума, то $\mathbf{p} \wedge \mathbf{q} \leq \mathbf{r}$. Таким образом, истинность аксиомы объемности равна **1** нашей алгебры.

б) Проверка выполнимости аксиом пары, объединения и степени: проверим только одну из этих аксиом, так как все три аксиомы проверяются аналогично. Проверим выполнимость аксиомы пары $\forall \mathbf{ab} \exists \mathbf{x}(\mathbf{a} \in \mathbf{x} \wedge \mathbf{b} \in \mathbf{x})$. В качестве искомого множества **x** берем $\{\langle \mathbf{1,u} \rangle : [\mathbf{u} \approx \mathbf{a}(\mathbf{p},\alpha)] \vee [\mathbf{u} \approx \mathbf{b}(\mathbf{p},\alpha)]\}$, где α – максимальный ординал из рангов множеств **a** и **b**, а **p** – любой элемент ПБА, отличный от нуля. Очевидно, что **x** принадлежит **D** и что истинность аксиомы пары равна **1** по определению **x**. Аксиома пары выполнена. Аксиомы степени и объединения проверяются аналогично, удлиняется лишь определение множества **x**. Например, для аксиомы объединения $\mathbf{x} = \{\langle \mathbf{1,y} \rangle : \exists \mathbf{pqz}(\langle \mathbf{p,y} \rangle \in \mathbf{z} \wedge \langle \mathbf{q,z} \rangle \in \mathbf{a})\}$.

в) Проверка выполнимости аксиомы бесконечности: предположим, что мы теперь имеем дело с двусортным вариантом нашей теории множеств **ZFI2 + DCS**. Тогда аксиома бесконечности имела бы очень простой вид: $\exists \mathbf{x}\forall \mathbf{n}(\mathbf{n}\in\mathbf{x})$. Нужное **x** из нового универсума **D** строилось бы как в предыдущем пункте. Конечно, изменились бы определения эквивалентности множеств на соответствующем уровне с каким-либо элементом из ПБА, который обязан быть больше нуля, и определение экстенсиональности множеств, выбираемых для универсума на данном ординальном уровне. Однако в сущности это никак не поменяло бы идей построения нашего нового универсума по сравнению со старым, построенным для модели для односортной теории множеств: множества из нового универсума содержали бы теперь не только упорядоченные пары ⟨ненулевой элемент из ПБА, множество уже построенное⟩, но и пары ⟨ненулевой элемент из ПБА, натуральное число⟩. Доказательства выполнимости аксиом и схем аксиом делались бы точно также, с учетом появления новых упорядоченных пар: просто удлинились бы построения за счет появления в модели натуральных чисел. С учетом сказанного получаем, что истинность аксиомы бесконечности равна **1**.

г) Проверка выполнимости аксиомы **DCS**: $\exists \mathbf{x}\forall \mathbf{y}(\neg\neg \mathbf{y}\in\mathbf{a} \rightarrow \mathbf{y}\in\mathbf{x})$. Полагаем $\mathbf{x} = \{\langle \mathbf{1,y} \rangle : \exists \mathbf{p}\ \langle \mathbf{p,y} \rangle \in \mathbf{a}\}$. Нужно доказать, что $(\mathbf{p}\rightarrow\mathbf{0})\rightarrow\mathbf{0} \leq \mathbf{1}$, но это очевидно. Также очевидно, что множество **x** принадлежит универсуму **D**. Выполнимость аксиомы **DCS** доказана.

д) Проверка выполнимости схемы аксиом выделения: $\exists \mathbf{x}\forall \mathbf{y}(\mathbf{y}\in\mathbf{x} \leftrightarrow \mathbf{y}\in\mathbf{a} \wedge \varphi(\mathbf{y}))$; здесь формула $\varphi(\mathbf{y})$ может содержать параметры. Полагаем $\mathbf{x} = \{\langle \mathbf{q,y} \rangle : \mathbf{q} = {}^{\circ}\, \mathbf{y}\in\mathbf{a} \wedge \varphi(\mathbf{y})\, {}^{\circ}$. Докажем, что при выбранном **x** истинность схемы аксиом выделения равна **1**. Но истинности левой и правой частей эквивалентности совпадают и поэтому истинность схемы равна **1**, что и доказывает требуемое. Однако нужно доказать, что множество **x** принадлежит универсуму **D**.

Лемма 2.1. Если $\mathbf{y} \approx \mathbf{z}\ (\alpha,\mathbf{p})$, то $\mathbf{p} \wedge {}^{\circ}\, \varphi(\mathbf{y})^{\circ} = \mathbf{p} \wedge^{\circ} \varphi(\mathbf{z})^{\circ}$.

Доказательство Леммы 2.1 проводим индукцией по построению формулы φ.

Атомарные случаи:

1) $\varphi \Leftrightarrow \mathbf{y}\in\mathbf{u}$; т.к. $\mathbf{u}\in\mathbf{D}$, то если $\langle \mathbf{q},\mathbf{y}\rangle\in\mathbf{u}$, то $\exists \mathbf{r}\in\mathbf{B}(\langle \mathbf{r},\mathbf{z}\rangle\in\mathbf{u} \wedge (\mathbf{p}\wedge\mathbf{q}) \le \mathbf{r})$, т.е. $^{\circ}\mathbf{z}\in\mathbf{u}^{\circ} \ge \mathbf{p} \wedge {^{\circ}\mathbf{y}\in\mathbf{u}^{\circ}}$ и наоборот в силу симметрии;

2) $\varphi \Leftrightarrow \mathbf{u}\in\mathbf{y}$; если $\langle \mathbf{q},\mathbf{u}\rangle\in\mathbf{y}$, то $\exists \mathbf{r}\in\mathbf{B}(\langle \mathbf{r},\mathbf{u}\rangle\in\mathbf{z} \wedge (\mathbf{p}\wedge\mathbf{q}) \le \mathbf{r})$, т.е. $^{\circ}\mathbf{u}\in\mathbf{y}^{\circ} \wedge \mathbf{p} \le {^{\circ}\mathbf{u}\in\mathbf{z}^{\circ}}$.

Случаи связок: конъюнкция и дизъюнкция разбираются очевидным образом; пусть $\varphi \Leftrightarrow \psi \to \eta$ и пусть утверждение Леммы 2.1 выполнено для ψ и η, и пусть $^{\circ}\psi(\mathbf{y})^{\circ} = \alpha$, $^{\circ}\psi(\mathbf{z})^{\circ} = \beta$, $^{\circ}\eta(\mathbf{y})^{\circ} = \alpha_1$, $^{\circ}\eta(\mathbf{z})^{\circ} = \beta_1$. Дано $\mathbf{p} \wedge \alpha \to \alpha_1$, $\mathbf{p} \wedge \beta \to \beta_1$. Нужно доказать, что $(\mathbf{p} \wedge \alpha\to\beta) \to (\alpha_1\to\beta_1)$. Предположим $\mathbf{p}$, $(\alpha\to\beta)$, α_1 и докажем β_1. Так как α_1 , то $\mathbf{p} \wedge \alpha$, а так как α, то β, а так как $\mathbf{p} \wedge \beta$, то β_1, ч.т.д.

Случаи кванторов:

1) $\varphi \Leftrightarrow \forall \mathbf{x}\psi(\mathbf{x},\mathbf{y})$; имеем $\forall \mathbf{x}(\mathbf{p}\wedge{^{\circ}\psi(\mathbf{x},\mathbf{y})^{\circ}} \le {^{\circ}\psi(\mathbf{x},\mathbf{z})^{\circ}}$ по индукционному предположению, а тогда $\forall \mathbf{x}(\mathbf{p}\wedge{^{\circ}\forall \mathbf{x}\psi(\mathbf{x},\mathbf{y})^{\circ}} \le {^{\circ}\psi(\mathbf{x},\mathbf{z})^{\circ}})$, т.е. $\mathbf{p}\wedge{^{\circ}\forall \mathbf{x}\psi(\mathbf{x},\mathbf{y})^{\circ}} \le {^{\circ}\forall \mathbf{x}\psi(\mathbf{x},\mathbf{z})^{\circ}}$;

2) $\varphi \Leftrightarrow \exists \mathbf{x}\psi(\mathbf{x},\mathbf{y})$; имеем $\mathbf{p} \wedge{^{\circ}\psi(\mathbf{x},\mathbf{y})^{\circ}} \le {^{\circ}\psi(\mathbf{x},\mathbf{z})^{\circ}} \le {^{\circ}\exists \mathbf{x}\psi(\mathbf{x},\mathbf{z})^{\circ}}$ по предположению индукции, а тогда $\mathbf{p}\wedge{^{\circ}\exists \mathbf{x}\psi(\mathbf{x},\mathbf{y})^{\circ}} \le {^{\circ}\exists \mathbf{x}\psi(\mathbf{x},\mathbf{z})^{\circ}}$. Лемма 2.1 доказана, а с ней доказана и выполнимость схемы аксиом выделения.

е) Проверка выполнимости схемы аксиом трансфинитной индукции:

$\forall \mathbf{x}[\forall \mathbf{y}(\mathbf{y}\in\mathbf{x} \to \varphi(\mathbf{y})) \to \varphi(\mathbf{x})] \to \forall \mathbf{x}\varphi(\mathbf{x})$. Введем следующие обозначения $\mathbf{p}={^{\circ}\forall \mathbf{x}[\forall \mathbf{y}(\mathbf{y}\in\mathbf{x} \to \varphi(\mathbf{y})) \to \varphi(\mathbf{x})]^{\circ}}$, а $\mathbf{q}={^{\circ}\forall \mathbf{y}(\mathbf{y}\in\mathbf{x} \to \varphi(\mathbf{y}))^{\circ}}$. Трансфинитной индукцией по рангу множества докажем, что $\forall \mathbf{x}({^{\circ}\varphi(\mathbf{x})^{\circ}} \ge \mathbf{p})$. Предположим, что $\forall \mathbf{y}\ (\mathbf{rng}(\mathbf{y}) < \mathbf{rng}(\mathbf{x}) \to {^{\circ}\varphi(\mathbf{y})^{\circ}} \ge \mathbf{p})$. Имеем $\mathbf{q} \to {^{\circ}\varphi(\mathbf{x})^{\circ}} \ge \forall \mathbf{x}[\mathbf{q} \to {^{\circ}\varphi(\mathbf{x})^{\circ}}] = \mathbf{p}$, т.е. $\mathbf{p} \to (\mathbf{q} \to {^{\circ}\varphi(\mathbf{x})^{\circ}})$; докажем, что $\mathbf{p} \to \mathbf{q}$; но при фиксированом $\mathbf{x}$ пусть $\mathbf{rng}(\mathbf{y}) < \mathbf{rng}(\mathbf{x})$, а тогда $\mathbf{p} \to {^{\circ}\varphi(\mathbf{y})^{\circ}}$ и, следовательно, $\mathbf{p} \to ({^{\circ}\mathbf{y}\in\mathbf{x}^{\circ}} \to {^{\circ}\varphi(\mathbf{y})^{\circ}})$ для всех $\mathbf{y}$ таких, что ${^{\circ}\mathbf{y}\in\mathbf{x}^{\circ}} > \mathbf{0}$; но тогда предыдущее утверждение верно для любых $\mathbf{y}$ из нашего универсума $\mathbf{D}$, т.е. $\mathbf{p} \to {^{\circ}\forall \mathbf{y}(\mathbf{y}\in\mathbf{x} \to \varphi(\mathbf{y}))^{\circ}}$, т.е. $\mathbf{p} \to \mathbf{q}$, а тогда $\mathbf{p} \to {^{\circ}\varphi(\mathbf{x})^{\circ}}$.

ж) Проверка выполнимости схемы аксиом собирания («collection»; считаем, что ПБА $\mathbf{B}$ является множеством):

$\forall \mathbf{x}(\mathbf{x}\in\mathbf{a} \to \exists \mathbf{y}\varphi(\mathbf{x},\mathbf{y})) \to \exists \mathbf{H}\forall \mathbf{x}(\mathbf{x}\in\mathbf{a} \to \exists \mathbf{y}(\mathbf{y}\in\mathbf{H} \wedge \varphi(\mathbf{x},\mathbf{y})))$. Пусть истинность посылки есть $\mathbf{p}$, а $\mathbf{q}_x = {^{\circ}\exists \mathbf{y}\varphi(\mathbf{x},\mathbf{y}))^{\circ}}$. Имеем $\mathbf{q}_x \ge {^{\circ}\varphi(\mathbf{x},\mathbf{y})^{\circ}}$ для всякого $\mathbf{x}$; также $\mathbf{p} \le {^{\circ}\mathbf{x}\in\mathbf{a}^{\circ}} \to {^{\circ}\exists \mathbf{y}\varphi(\mathbf{x},\mathbf{y}))^{\circ}}$ или $\forall \mathbf{x}(\mathbf{p} \to ({^{\circ}\mathbf{x}\in\mathbf{a}^{\circ}} \to \mathbf{q}_x))$. Нужно доказать, что для некоторого множества $\mathbf{H}$ из $\mathbf{D}$ имеет место ${^{\circ}\forall \mathbf{x}(\mathbf{x}\in\mathbf{a} \to \exists \mathbf{y}(\mathbf{y}\in\mathbf{H} \wedge \varphi(\mathbf{x},\mathbf{y})))^{\circ}} \ge \mathbf{p}$, т.е. доказать, что для всякого $\mathbf{x}$ $({^{\circ}\mathbf{x}\in\mathbf{a}^{\circ}} \to ({^{\circ}\exists \mathbf{y}(\mathbf{y}\in\mathbf{H} \wedge \varphi(\mathbf{x},\mathbf{y}))^{\circ}} = \mathbf{r}_x)) \ge \mathbf{p}$. Рассмотрим $\mathbf{R}_x = \{\mathbf{s}\in\mathbf{B} : \exists \mathbf{y}.\mathbf{s} = {^{\circ}\varphi(\mathbf{x},\mathbf{y})^{\circ}}$, где $\mathbf{x}$ – фиксированное множество из $\mathbf{D}$. $\forall \mathbf{s}\in\mathbf{R}_x\exists \mathbf{y}.\ \mathbf{s} = {^{\circ}\varphi(\mathbf{x},\mathbf{y})^{\circ}}$, а тогда (в силу внешней схемы аксиом собирания (collection)), $\exists \mathbf{H}_x\forall \mathbf{s}\in\mathbf{R}_x\exists \mathbf{y}\in\mathbf{H}_x.\ \mathbf{s} = {^{\circ}\varphi(\mathbf{x},\mathbf{y})^{\circ}}$. Так как существует верхняя грань элементов ${^{\circ}\varphi(\mathbf{x},\mathbf{y})^{\circ}}$ по $\mathbf{y}\in\mathbf{H}_x$ (в силу существования ${^{\circ}\exists \mathbf{y}\varphi(\mathbf{x},\mathbf{y}))^{\circ}}$) и равна ${^{\circ}\exists \mathbf{y}\varphi(\mathbf{x},\mathbf{y}))^{\circ}}$, то полагаем $\mathbf{H} = \{\langle \mathbf{1},\mathbf{y}\rangle : \mathbf{y}\approx\mathbf{z}$

$(\alpha,p) \wedge z{\in}H_x\}$ для некоторого **x** такого, что $°x{\in}a° \neq 0\}$. Нетрудно видеть, что для всякого **x** $(°x{\in}a° \rightarrow (°\exists y(y{\in}H \wedge \varphi(x,y))°) \geq p$, а тогда истинность схемы аксиом собирания равна **1**. **Теорема 2** доказана.

ЛИТЕРАТУРА

1. *Драгалин А.Г.* Функциональные алгебраические модели. // Семиотика и информатика. М.: ВИНИТИ. 1979, Вып. XIII. С. 184-195.
2. *Kleene S.C.* Realizability: a retrospective survey // Lecture Notes in Math. 1973. N. 337. P. 96
3. *Драгалин А.Г.* Математический интуиционизм. Введение в теорию доказательств. М.: Наука, 1979. С. 60-61.
4. *Хаханян В.Х.* Функциональная алгебраическая модель, эквивалентная штрих-реализуемости Клини // Матем. Заметки. Т.75, январь 2004. Вып.1. С. 155- 157.
5. *Хаханян В.Х.* Функциональная алгебраическая модель, соответствующая штрих-реализуемости Клини. // Логические исследования. Вып. 10. М.: Наука, 2003. С.198-203.
6. *Хаханян В.Х.* Функциональные алгебраические модели для неклассической теории множеств. // Логические исследования. Вып. 4. М.: Наука, 1997. С. 192-195.
7. *Khakhanian V.Kh.* Functional algebraic models for non-classical set theory. // Bulletin of the Section of Logic, 1998, (march-june), V. 27. P. 53-54.
8. *Расёва Е., Сикорский Р.* Математика метаматематики. М.: Наука, 1972.
9. *Feferman S.* Arithmetization of mathematics in general setting.// Fundamenta Mathematica/ 1960/ N.49/ P.35-92
10. *Beeson M.* The nonderivability in intuitionistic formal system of theorem on the continuity of effective operations // The Journal of Symbolic Logic, 1975. V.40. N. 3. P.321-346.

В.И. Хомич

ОБ ИЗОМОРФНОЙ ВЛОЖИМОСТИ КОНЕЧНЫХ БУЛЕВЫХ И ТОПОЛОГИЧЕСКИХ БУЛЕВЫХ АЛГЕБР

Abstract. *In this paper we study the problem of isomorphic embeddability for finite Boolean and topological Boolean algebras. We obtain the criteria of isomorphic embeddability for such algebras. We also obtain some other results in connection with this problem.*

Введение

Настоящая статья посвящена изучению проблемы изоморфной вложимости конечных булевых и топологических булевых алгебр.

Известно (см., например, [1, 2, 3]), что булевы алгебры и топологические булевы алгебры являются моделями для классической пропозициональной логики и модальной логики **S4** соответственно. Решение многих задач дедуктивного характера, возникающих при исследовании этих логик, сводится к задаче изоморфной вложимости как булевых алгебр, так и топологических булевых алгебр друг в друга. Для решения последней часто используются их представления через объекты более простой структуры. В работах [4-9] автором предложено и детально разработано пригодное для этой цели представление конечных импликативных полуструктур и структур и псевдобулевых алгебр [10, 11, 1] через импликатуры[1], т.е. $\supset$–алгебры, специального вида. Суть его заключается в том, что заданная алгебра (полуструктура, структура) однозначно (с точностью до изоморфизма) определяется множеством ее неразложимых в пересечение элементов. Более того, это множество можно рассматривать как импликатуру, удовлетворяющую некоторому условию, и как частично упорядоченное множество с наибольшим элементом, причем эти объекты легко превращаются друг в друга [8, 9]. При таком подходе и представляемые алгебры (полуструктуры, структуры) и представляющие их импликатуры – суть объекты одной и той же природы, что облегчает изучение конечных импликативных полуструктур и структур и псевдобу-

---

[1] Импликатура (т.е. $\supset$-алгебра) [12, 4, 5, 6] – это множество, на котором задана операция относительного псевдодополнения, являющаяся модельным аналогом интуиционистской логической связки импликации.

левых алгебр. Поскольку всякая булева алгебра является псевдобулевой [1], то это представление касается и конечных булевых алгебр.

В работах [13, 14] получены критерии изоморфной вложимости для конечных импликативных полуструктур и структур и псевдобулевых алгебр. Они основаны на упомянутом выше представлении алгебр и сводят решение вопроса о вложении алгебры Θ в алгебру Φ к вопросу о вложении импликатуры, представляющей алгебру Θ, в алгебру Φ. В данной работе эти критерии распространим на конечные булевы и топологические булевы алгебры. Покажем, что предложенное автором представление конечных булевых алгебр согласовано с отношениями гомоморфности и изоморфности этих алгебр. Используя указанные выше результаты, достаточно легко докажем известный результат о том, что каждая булева алгебра представляется как некоторая декартова степень двухэлементной булевой алгебры.

1. Предварительные сведения

Напомним необходимые в дальнейшем сведения. Операции булевой алгебры и топологической булевой алгебры будем обозначать так же, как и соответствующие им (интерпретируемые ими) логические пропозициональные связки, а их наибольший (выделенный, единичный) и наименьший (нулевой) элементы – через **1** и **0** соответственно.

Известно [1], если в какой-либо псевдобулевой алгебре для любого ее элемента ξ верно соотношение $\xi\vee\neg\xi=\mathbf{1}$, то она булева алгебра. Одноэлементную булеву алгебру будем называть вырожденной.

Пусть Θ – булева алгебра или топологическая булева алгебра, а ξ и η – ее элементы. На Θ можно задать отношение частичного порядка, положив $\xi\leq\eta$ в том и только том случае, когда $\xi\supset\eta=\mathbf{1}$. Элементы ξ и η назовем *несравнимыми* в Θ, если $\xi\supset\eta\neq\mathbf{1}$ и $\eta\supset\xi\neq\mathbf{1}$. В противном случае элементы ξ и η назовем *сравнимыми* в Θ. Элемент ξ назовем *неразложимым в пересечение* или просто *неразложимым* в Θ, если из верности соотношений $\rho,\tau\in\Theta$ и $\rho\&\tau=\xi$ следует, что $\rho=\xi$ или $\tau=\xi$. В противном случае элемент ξ назовем *разложимым* в Θ. Как и в [5], множество всех неразложимых элементов алгебры Θ будем обозначать через $I(\Theta)$. Очевидно, что $\mathbf{1}\in I(\Theta)$. Согласно лемме 2 из [5] и лемме 1 из [6], если $\sigma\in\Theta$ и $\varphi\in I(\Theta)$, то в Θ верно хотя бы одно из равенств $\sigma\supset\varphi=\varphi$ или $\sigma\supset\varphi=\mathbf{1}$. Поэтому подмножество $I(\Theta)$

алгебры Θ замкнуто в Θ относительно операции $\supset$ и тем самым является импликатурой ($\supset$-алгеброй). Если Θ – конечная невырожденная булева алгебра, то $|I(\Theta)|>1$.

Пусть Ξ – какое-нибудь подмножество алгебры Θ. Элемент ρ множества Ξ назовем *минимальным* в Ξ, если из верности в Θ соотношений $\sigma\in\Xi$ и $\sigma\leq\rho$ следует, что $\sigma=\rho$. Множество всех минимальных элементов множества Ξ будем обозначать через $\Re(\Xi)$, а пересечение в Θ всех элементов множества Ξ (если Ξ конечно и непусто) – через $\langle\Xi\rangle$. Терм $\delta_n\supset(\ldots\supset(\delta_1\supset\gamma)\ldots)$ условимся записывать в виде $\{\delta_1,\ldots,\delta_n\}\supset\gamma$[2].

Конечное непустое множество Δ элементов алгебры Θ назовем *разложением элемента* ξ в Θ, если $\langle\Delta\rangle=\xi$. Пусть Ψ – какое-либо разложение элемента ξ в Θ. Элемент τ разложения Ψ назовем его *сократимым элементом*, если $\Psi\setminus\{\tau\}\neq\varnothing$ и $\langle\Psi\setminus\{\tau\}\rangle=\xi$. В противном случае τ будем называть *несократимым элементом* разложения Ψ. Разложение Ψ назовем *несократимым*, если каждый его элемент является несократимым. В противном случае разложение Ψ будем называть *сократимым*. Если в алгебре Θ для ξ существует несократимое разложение, состоящее из ее неразложимых элементов, то оно единственно [10]. В случае конечности алгебры Θ такое разложение для ξ осуществимо [10,8], а поэтому, имея в виду единственность, в дальнейшем будем обозначать его через $r(\xi)$.

Число элементов конечного множества Ω будем обозначать через $|\Omega|$. Если g – какое-небудь отображение множества Ξ в множество Ψ, а Δ – подмножество множества Ξ, то через $g(\Delta)$ будем обозначать множество образов Δ при отбражении g.

Пусть Θ и Φ – конечные булевы алгебры. Будем говорить, что булева алгебра Θ ($\supset$-алгебра $I(\Theta)$) *вложима* в булеву алгебру Φ, если существует изоморфизм булевой алгебры Θ ($\supset$-алгебры $I(\Theta)$) на некоторую булеву подалгебру ($\supset$-подалгебру) алгебры Φ. Сам изоморфизм будем называть *вложением* булевой алгебры Θ ($\supset$-алгебры $I(\Theta)$) в булеву алгебру Φ. Для конечных топологических булевых алгебр понятия *вложимости* и *вложения* определяются аналогичным образом.

Пусть f – какое-либо отображение подмножества $I(\Theta)$ алгебры Θ в алгебру Φ. Как и в [5], для f построим отображение $f_\&$ множества Θ в Φ, положив $f_\&(\zeta)=\langle f(r(\zeta))\rangle$, где $\zeta\in\Theta$. Если $\zeta\in I(\Theta)$, то верно равенство $f_\&(\zeta)=f(\zeta)$.

---

[2] По сути, эта запись обозначает семейство графически различных термов, имеющих одно и то же значение.

2. Булевы алгебры

В этом параграфе докажем теорему, дающую критерий изоморфной вложимости для конечных булевых алгебр. Этот критерий является аналогом критериев, полученных автором в работах [13, 14] для конечных импликативных полуструктур и структур и псевдобулевых алгебр. Покажем, что предложенное автором представление конечных булевых алгебр согласовано с отношениями гомоморфности и изоморфности этих алгебр. Кроме того, докажем известный результат, согласно которому каждая булева алгебра представляется как некоторая декартова степень двухэлементной булевой алгебры. Это будет сделано потому, что его доказательство основывается на изучаемом представлении булевых алгебр, использует только что упомянутые результаты и является достаточно простым.

Докажем следующую вспомогательную лемму.

Лемма 1. *Для любой конечной булевой алгебры* Θ *имеют место следующие утверждения*:

1) *если* $\xi,\eta\in I(\Theta)\setminus\{\mathbf{1}\}$ *и* $\xi\neq\eta$, *то верны неравенства* $\xi\supset\eta\neq\mathbf{1}$ *и* $\eta\supset\xi\neq\mathbf{1}$;

2) *если* Θ – *невырожденная булева алгебра, то* $\mathfrak{R}(I(\Theta))=I(\Theta)\setminus\{\mathbf{1}\}$.

Доказательство. Пусть задана конечная булева алгебра Θ. Докажем утверждение 1). Пусть $\xi,\eta\in I(\Theta)\setminus\{\mathbf{1}\}$ и $\xi\neq\eta$. Тогда имеем $\xi\neq\mathbf{1}$ и $\eta\neq\mathbf{1}$. Предположим, что $\xi\supset\eta=\mathbf{1}$ (т.е. $\xi\leq\eta$). Так как $\xi\neq\eta$, то η не является минимальным элементом множества $I(\Theta)$. Поэтому согласно лемме 5 (пункт 2) из [5] верно соотношение $\neg\eta=\mathbf{0}$. Тогда имеем $\mathbf{1}=\eta\vee\neg\eta=\eta\vee\mathbf{0}=\eta$. Получили противоречие. Следовательно, $\xi\supset\eta\neq\mathbf{1}$. Аналогичным образом получаем, что $\eta\supset\xi\neq\mathbf{1}$.

Докажем утверждение 2). Пусть Θ – невырожденная булева алгебра. Покажем, что $\mathfrak{R}(I(\Theta))\subseteq I(\Theta)\setminus\{\mathbf{1}\}$. Пусть $\rho\in\mathfrak{R}(I(\Theta))$. Тогда имеем $\rho\in I(\Theta)$. Если бы $\rho=\mathbf{1}$, то $I(\Theta)=\{\mathbf{1}\}$ и поэтому Θ была бы вырожденной алгеброй, что давало бы противоречие. Значит, $\rho\neq\mathbf{1}$. Тогда имеем $\rho\in I(\Theta)\setminus\{\mathbf{1}\}$. Следовательно, $\mathfrak{R}(I(\Theta))\subseteq I(\Theta)\setminus\{\mathbf{1}\}$.

Покажем, что $I(\Theta)\setminus\{\mathbf{1}\}\subseteq\mathfrak{R}(I(\Theta))$. Пусть $\tau\in I(\Theta)\setminus\{\mathbf{1}\}$. Тогда согласно утверждению 1) этой леммы в $I(\Theta)$ не существует такого элемента σ, что $\sigma\supset\tau=\mathbf{1}$ и $\sigma\neq\tau$. Значит, $\tau\in\mathfrak{R}(I(\Theta))$. Следовательно, $I(\Theta)\setminus\{\mathbf{1}\}\subseteq\mathfrak{R}(I(\Theta))$. В результате получаем, что $\mathfrak{R}(I(\Theta))=I(\Theta)\setminus\{\mathbf{1}\}$. Лемма 1 доказана.

Теорема 1, анонсированная в работе [13] и доказанная в [14], дает критерий изоморфной вложимости для конечных псевдобулевых алгебр. Для конечных булевых алгебр он упрощается. Докажем теорему, дающую этот критерий.

Теорема 1. *Конечная булева алгебра* Ψ *вложима в конечную булеву алгебру* Φ *в том и только том случае, когда существует такое вложение* f $\supset$*-алгебры* $I(\Psi)$ *в алгебру* Φ, *что* $\langle f(\Re(I(\Theta)))\rangle=\mathbf{0}$.

Доказательство. Пусть заданы конечные булевы алгебры Ψ и Φ. Пусть булева алгебра Ψ вложима в булеву алгебру Φ, т.е. существует подходящее вложение g. По лемме 2 из [5] и лемме 1 из [6] множество $I(\Psi)$ является $\supset$-подалгеброй алгебры Ψ. Следовательно, g – вложение $\supset$-алгебры $I(\Psi)$ в алгебру Φ. Согласно лемме 5 (пункт 1) из [5], в Ψ верно равенство $r(\mathbf{0}_\Psi)=\Re(I(\Psi))$. Значит, $\langle\Re(I(\Psi))\rangle=\mathbf{0}_\Psi$. Поскольку $g(\mathbf{0}_\Psi)=\mathbf{0}$ и g сохраняет операцию &, имеем $\langle g(\Re(I(\Psi)))\rangle=g(\langle\Re(I(\Psi))\rangle)=g(\mathbf{0}_\Psi)= =\mathbf{0}$.

Пусть f – вложение $\supset$-алгебры $I(\Psi)$ в алгебру Φ, удовлетворяющее условию $\langle f(\Re(I(\Psi)))\rangle=\mathbf{0}$. Тогда имеем $f(\mathbf{1})=\mathbf{1}$. Рассмотрим отображение $f_\&$ множества Ψ в Φ. Согласно его построению имеем $f_\&(\mathbf{1})=\mathbf{1}$. Пусть $\xi,\eta\in\Psi$. Покажем, что $f_\&$ сохраняет операцию $\supset$, т.е. $f_\&(\xi\supset\eta)=f_\&(\xi)\supset f_\&(\eta)$. Легко видеть, что $\xi\supset\eta=\langle r(\xi)\rangle\supset\langle r(\eta)\rangle=\langle\{r(\xi)\supset\zeta|\zeta\in r(\eta)\}\rangle$. Если $\zeta\in r(\eta)$ и $r(\xi)\supset\zeta\neq\mathbf{1}$, то $\xi\supset\zeta\neq\mathbf{1}$ и поэтому в силу леммы 2 из [5] имеем $\xi\supset\zeta=\zeta$, откуда получаем, что $r(\xi)\supset\zeta=\zeta$. Следовательно, $r(\xi\supset\eta)=\{\zeta|\zeta\in r(\eta),r(\xi)\supset\zeta\neq\mathbf{1}\}$, если в $r(\eta)$ существует такое ζ, что $r(\xi)\supset\zeta\neq\mathbf{1}$, и $r(\xi\supset\eta)=\{\mathbf{1}\}$ в противном случае. Так как f - вложение $\supset$-алгебры $I(\Psi)$ в алгебру Φ и для любого ζ из $r(\eta)$ в $I(\Psi)$ верно равенство $r(\xi)\supset\zeta=\mathbf{1}$ или равенство $r(\xi)\supset\zeta=\zeta$, то $f(r(\xi))\supset f(\zeta)=\mathbf{1}$ или $f(r(\xi))\supset f(\zeta)=f(\zeta)$. Следовательно, $f_\&(\xi\supset\eta)= =\langle f(r(\xi\supset\eta))\rangle=\langle\{f(r(\xi))\supset f(\zeta)|\zeta\in r(\eta)\}\rangle=\langle\{\langle f(r(\xi))\rangle\supset f(\zeta)|\zeta\in r(\eta)\}\rangle= =\langle f(r(\xi))\rangle\supset\langle f(r(\eta))\rangle=f_\&(\xi)\supset f_\&(\eta)$.

Покажем, что $f_\&$ сохраняет операцию $\neg$, т.е. $f_\&(\neg\xi)=\neg f_\&(\xi)$. Согласно лемме 5 (пункт 1) из [5], в Ψ верно равенство $r(\mathbf{0}_\Psi)=\Re(I(\Psi))$. Поскольку $\langle f(\Re(I(\Psi)))\rangle=\mathbf{0}$, имеем $f_\&(\mathbf{0}_\Psi)= =\langle f(r(\mathbf{0}_\Psi))\rangle=\langle f(\Re(I(\Psi)))\rangle=\mathbf{0}$. Так как $f_\&$ сохраняет операцию $\supset$, то $f_\&(\neg\xi)=f_\&(\xi\supset\mathbf{0}_\Psi)=f_\&(\xi)\supset f_\&(\mathbf{0}_\Psi)=f_\&(\xi)\supset\mathbf{0}=\neg f_\&(\xi)$.

Покажем, что $f_\&$ сохраняет операции & и $\vee$, т.е. $f_\&(\xi\&\eta)=f_\&(\xi)\&f_\&(\eta)$ и $f_\&(\xi\vee\eta)=f_\&(\xi)\vee f_\&(\eta)$. В алгебре Ψ верны равенства $\xi\&\eta=\neg(\xi\supset\neg\eta)$ и $\xi\vee\eta=\neg\xi\supset\eta$, а в Φ – равенства $f_\&(\xi)\&f_\&(\eta)=\neg(f_\&(\xi)\supset\neg f_\&(\eta))$ и $f_\&(\xi)\vee f_\&(\eta)=\neg f_\&(\xi)\supset f_\&(\eta)$. Поскольку $f_\&$ сохраняет операции $\supset$ и $\neg$, имеем $f_\&(\xi\&\eta)=f_\&(\neg(\xi\supset\neg\eta))=\neg(f_\&(\xi)\supset\neg f_\&(\eta))=f_\&(\xi)\&f_\&(\eta)$ и $f_\&(\xi\vee\eta)= =f_\&(\neg\xi\supset\eta)=\neg f_\&(\xi)\supset f_\&(\eta)=f_\&(\xi)\vee f_\&(\eta)$.

Покажем, что отображение $f_{\&}$ различным элементам сопоставляет различные элементы. Пусть $\xi \neq \eta$. Предположим, что $f_{\&}(\xi)=f_{\&}(\eta)$. Тогда имеем $f_{\&}(\xi)\supset f_{\&}(\eta)=\mathbf{1}$ и $f_{\&}(\eta)\supset f_{\&}(\xi)=\mathbf{1}$. С помощью равенства $f_{\&}(\xi)\supset f_{\&}(\eta)=\mathbf{1}$ получаем, что $\mathbf{1}=f_{\&}(\xi)\supset f_{\&}(\eta)=\langle f(r(\xi))\rangle\supset\langle f(r(\eta))\rangle=\langle\{\langle f(r(\xi))\rangle\supset f(\zeta)|\zeta\in r(\eta)\}\rangle=$ $=\langle\{f(r(\xi))\supset f(\zeta)|\zeta\in r(\eta)\}\rangle=\langle\{f(r(\xi)\supset\zeta)|\zeta\in r(\eta)\}\rangle$. Поэтому для любого ζ из $r(\eta)$ в Φ верно равенство $f(r(\xi)\supset\zeta)=\mathbf{1}$. Так как f – вложение $\supset$-алгебры $I(\Psi)$ в алгебру Φ, то в Ψ верно равенство $r(\xi)\supset\zeta=\mathbf{1}$, где $\zeta\in r(\eta)$. Тогда $\mathbf{1}=\langle\{r(\xi)\supset\zeta|\zeta\in r(\eta)\}\rangle=$ $\langle\{\langle r(\xi)\rangle\supset\zeta|\zeta\in r(\eta)\}\rangle=\langle r(\xi)\rangle\supset\langle r(\eta)\rangle=\xi\supset\eta$ и поэтому имеем $\xi\supset\eta=\mathbf{1}$.

Используя равенство $f_{\&}(\eta)\supset f_{\&}(\xi)=\mathbf{1}$, с помощью аналогичных рассуждений получаем, что $\eta\supset\xi=\mathbf{1}$. Значит, $\xi=\eta$. Получили противоречие. Следовательно, $f_{\&}(\xi)\neq f_{\&}(\eta)$.

Таким образом, $f_{\&}$ является вложением булевой алгебры Ψ в булеву алгебру Φ. Теорема 1 доказана.

Докажем, что предложенное автором представление конечных булевых алгебр согласованно с отношением гомоморфности этих алгебр.

Теорема 2. *Конечная булева алгебра Φ является гомоморфным образом конечной булевой алгебры Ψ тогда и только тогда, когда $\supset$-алгебра $I(\Phi)$ является гомоморфным образом $\supset$-алгебры $I(\Psi)$.*

Доказательство. Пусть заданы конечные булевы алгебры Ψ и Φ. Пусть g – гомоморфизм булевой алгебры Ψ на булеву алгебру Φ. Покажем, что g – гомоморфизм $\supset$-алгебры $I(\Psi)$ на $\supset$-алгебру $I(\Phi)$. Так как множества $I(\Psi)$ и $I(\Phi)$ являются $\supset$-подалгебрами булевых алгебр Ψ и Φ соответственно, то для этого достаточно доказать, что g отображает множество $I(\Psi)$ на множество $I(\Phi)$.

Пусть $\xi\in I(\Psi)$. Покажем, что $g(\xi)\in I(\Phi)$. Пусть в Φ верно соотношение $g(\xi)=\alpha\&\beta$, где $\alpha,\beta\in\Phi$. Тогда для α существует такой σ, что $\sigma\in\Psi$ и $g(\sigma)=\alpha$. Если $\alpha\supset g(\xi)=\mathbf{1}$, то $\alpha\leq g(\xi)$ и $g(\xi)=\alpha\&\beta\leq\alpha$, а поэтому имеем $g(\xi)=\alpha$.

Пусть $\alpha\supset g(\xi)\neq\mathbf{1}$. Тогда $g(\sigma)\supset g(\xi)\neq\mathbf{1}$ и поэтому имеем $g(\sigma\supset\xi)\neq\mathbf{1}$. Значит, $\sigma\supset\xi\neq\mathbf{1}$. Так как $\xi\in I(\Psi)$, то согласно лемме 2 из [5] в Ψ верно равенство $\sigma\supset\xi=\xi$. Тогда $g(\sigma)\supset g(\xi)=g(\xi)$, т.е. имеем $\alpha\supset g(\xi)=g(\xi)$. Так как $g(\xi)=\alpha\&\beta$, то верны соотношения $\beta\leq\alpha\supset g(\xi)=g(\xi)$ и $g(\xi)\leq\beta$. Значит, $g(\xi)=\beta$. В результате получаем, что $g(\xi)=\alpha$ или $g(\xi)=\beta$. Следовательно, $g(\xi)\in I(\Phi)$.

Пусть $\gamma\in I(\Phi)$. Тогда для γ существует такой τ, что $\tau\in\Psi$ и $g(\tau)=\gamma$. Так как Ψ конечна, то в подмножестве $\Delta=\{\zeta|\zeta\in\Psi,f(\zeta)=\mathbf{1}\}$ алгебры Ψ существует наименьший элемент. Обозначим его через ε. Положим $\omega=\varepsilon\supset\tau$. Тогда имеем $g(\omega)=g(\varepsilon\supset\tau)=g(\varepsilon)\supset g(\tau)=\mathbf{1}\supset g(\tau)=g(\tau)=\gamma$. Покажем, что $\omega\in I(\Psi)$. Пусть в Ψ верно соотношение $\omega=\kappa\&\rho$, где $\kappa,\rho\in\Psi$. Тогда имеем $\gamma=g(\omega)=g(\kappa\&\rho)=g(\kappa)\&g(\rho)$. Поскольку $\gamma\in I(\Phi)$, имеем $g(\kappa)=\gamma$ или $g(\rho)=\gamma$.

Пусть $g(\kappa)=\gamma$. Тогда $g(\kappa)=g(\tau)$ и поэтому $\mathbf{1}=g(\kappa)\supset g(\tau)=g(\kappa\supset\tau)$ и тем самым имеем $\kappa\supset\tau\in\Delta$. Значит, $\varepsilon\leq\kappa\supset\tau$. Следовательно, $\mathbf{1}=\varepsilon\supset(\kappa\supset\tau)=\kappa\supset(\varepsilon\supset\tau)$. Отсюда получаем, что $\kappa\leq\varepsilon\supset\tau=\omega$. Кроме того, имеем $\omega=\kappa\&\rho\leq\kappa$. Значит, $\omega=\kappa$. Если $g(\rho)=\gamma$, то с помощью аналогичных рассуждений получаем, что $\omega=\rho$. Следовательно, $\omega\in I(\Psi)$. Таким образом, g отображает $\supset$-подалгебру $I(\Psi)$ булевой алгебры Ψ на $\supset$-подалгебру $I(\Phi)$ булевой алгебры Φ.

Пусть f – гомоморфизм $\supset$-алгебры $I(\Psi)$ на $\supset$-алгебру $I(\Phi)$. Тогда имеем $f(\mathbf{1})=\mathbf{1}$. Рассмотрим отображение $f_\&$ множества Ψ в Φ. Согласно его построению имеем $f_\&(\mathbf{1})=\mathbf{1}$. Пусть $\eta,\varphi\in\Psi$. Как и в теореме 1, получаем, что $f_\&(\eta\supset\varphi)=f_\&(\eta)\supset f_\&(\varphi)$, т.е. $f_\&$ сохраняет операцию $\supset$.

Докажем, что $\langle f(\Re(I(\Psi)))\rangle=\mathbf{0}$. Согласно лемме 5 (пункт 1) из [5] в Φ верно равенство $r(\mathbf{0})=\Re(I(\Phi))$. Поэтому для нашей цели достаточно показать, что для всякого δ из $\Re(I(\Phi))$ существует ν, удовлетворяющий условиям $\nu\in\Re(I(\Psi))$ и $f(\nu)=\delta$. Пусть $\delta\in\Re(I(\Phi))$. Тогда для δ существует такой μ, что $\mu\in I(\Psi)$ и $f(\mu)=\delta$. Так как $\supset$-алгебра $I(\Psi)$ конечна, то найдется такой ν, что $\nu\in\Re(I(\Psi))$ и $\nu\leq\delta$. Тогда $\nu\supset\mu=\mathbf{1}$ и поэтому имеем $\mathbf{1}=f(\nu)\supset f(\mu)=f(\nu)\supset\delta$. Значит, $f(\nu)\leq\delta$. Поскольку $f(\nu)\in I(\Phi)$ и $\delta\in\Re(I(\Phi))$, имеем $f(\nu)=\delta$.

Покажем, что $f_\&$ сохраняет операцию $\neg$, т.е. $f_\&(\neg\eta)=\neg f_\&(\eta)$. Согласно лемме 5 (пункт 1) из [5] в Ψ верно равенство $r(\mathbf{0}_\Psi)=\Re(I(\Psi))$. Поскольку $\langle f(\Re(I(\Psi)))\rangle=\mathbf{0}$, имеем $f_\&(\mathbf{0}_\Psi)= =\langle f(r(\mathbf{0}_\Psi))\rangle=\langle f(\Re(I(\Psi)))\rangle=\mathbf{0}$. Так как $f_\&$ сохраняет операцию $\supset$, то $f_\&(\neg\eta)=f_\&(\eta\supset\mathbf{0}_\Psi)=f_\&(\eta)\supset f_\&(\mathbf{0}_\Psi)=f_\&(\eta)\supset\mathbf{0}=\neg f_\&(\eta)$.

Как и в теореме 1, получаем, что $f_\&(\eta\&\varphi)=f_\&(\eta)\&f_\&(\varphi)$ и $f_\&(\eta\vee\varphi)=f_\&(\eta)\vee f_\&(\varphi)$, т.е. $f_\&$ сохраняет операции & и $\vee$.

Покажем, что $f_\&$ отображает алгебру Ψ на Φ. Пусть $\lambda\in\Phi$. Множество $\{\zeta|\zeta\in I(\Psi),f(\zeta)\in r(\lambda)\}$ конечно и непусто. Тогда $\langle\{\zeta|\zeta\in I(\Psi),f(\zeta)\in r(\lambda)\}\rangle\in\Psi$ и поэтому имеем $f_\&(\langle\{\zeta|\zeta\in I(\Psi),f(\zeta)\in r(\lambda)\}\rangle)=\langle\{f_\&(\zeta)|\zeta\in I(\Psi),f(\zeta)\in r(\lambda)\}\rangle= =\langle\{f(\zeta)|\zeta\in I(\Psi),f(\zeta)\in r(\lambda)\}\rangle=\langle r(\lambda)\rangle=\lambda$. Теорема 2 доказана.

Докажем, что предложенное автором представление конечных булевых алгебр согласовано с отношением изоморфности этих алгебр.

Теорема 3. *Конечные булевы алгебры Ψ и Φ изоморфны тогда и только тогда, когда изоморфны $\supset$-алгебры $I(\Psi)$ и $I(\Phi)$.*

Доказательство. Пусть заданы конечные булевы алгебры Ψ и Φ. Изоморфность алгебр Ψ и Φ равносильна тому, что Ψ – гомоморфный образ Φ и Φ – гомоморфный образ Ψ. Согласно теореме 2 эта конъюнкция равносильна тому, что $\supset$-алгебра $I(\Psi)$ – гомоморфный образ $\supset$-алгебры $I(\Phi)$ и $\supset$-алгебра $I(\Phi)$– гомоморфный образ $\supset$-алгебры $I(\Psi)$. В свою очередь, последняя конъюнкция равносильна изоморфности $\supset$-алгебр $I(\Psi)$ и $I(\Phi)$. Теорема 3 доказана.

Двухэлементную булеву алгебру, задающую классическую пропозициональную логику и являющуюся также псевдобулевой алгеброй, обозначим через Λ. Для определенности и удобства изложения материала будем считать, что $\Lambda=\{0,1\}$, а 1 – выделенный элемент алгебры Λ. Прямое произведение алгебры Λ на себя n раз (т.е. n-ую степень) [1] будем обозначать через Λ^n. Известно [1], что Λ^n является булевой алгеброй. По определению Λ^0 – вырожденная булева алгебра.

Докажем лемму, описывающую структуру $\supset$-алгебры $I(\Lambda^n)$.

Лемма 2. *Если* $n\geq 1$, *то элемент* $(\zeta_1,\ldots,\zeta_n)$ *алгебры* Λ^n *неразложим в* Λ^n *тогда и только тогда, когда среди* $\zeta_1,\ldots,\zeta_n$ *имеется не более, чем один элемент, равный* 0.

Доказательство. Пусть $n\geq 1$. Зафиксируем элемент $(\zeta_1,\ldots,\zeta_n)$ алгебры Λ^n. Пусть $(\zeta_1,\ldots,\zeta_n)\in I(\Lambda^n)$. Покажем, что среди $\zeta_1,\ldots,\zeta_n$ имеется не более, чем один элемент, равный 0. Предположим, что среди $\zeta_1,\ldots,\zeta_n$ имеются не менее двух элементов, равных 0. Пусть $\zeta_k=\zeta_l=0$ и $1\leq k<l\leq n$. Положим $\xi_k=1$, $\xi_i=\zeta_i$, $\eta_l=1$ и $\eta_j=\zeta_j$, где $i\in\{1,\ldots,n\}\setminus\{k\}$ и $j\in\{1,\ldots,n\}\setminus\{l\}$. Нетрудно проверить, что в алгебре Λ^n верно соотношение $(\xi_1,\ldots,\xi_n)\&(\eta_1,\ldots,\eta_n)=(\zeta_1,\ldots,\zeta_n)$. Так как $(\xi_1,\ldots,\xi_n)$, $(\eta_1,\ldots,\eta_n)$ и $(\zeta_1,\ldots,\zeta_n)$ – различные элементы алгебры Λ^n, то $(\zeta_1,\ldots,\zeta_n)$ – ее разложимый элемент. Получили противоречие. Следовательно, среди $\zeta_1,\ldots,\zeta_n$ имеется не более, чем один элемент, равный 0.

Пусть среди $\zeta_1,\ldots,\zeta_n$ имеется не более, чем один элемент, равный 0. Покажем, что $(\zeta_1,\ldots,\zeta_n)\in I(\Lambda^n)$. Если $\zeta_1=\ldots=\zeta_n=1$, то имеем $(\zeta_1,\ldots,\zeta_n)\in I(\Lambda^n)$. Пусть $\zeta_m=0$, $\zeta_s=1$, $1\leq m\leq n$ и $s\in\{1,\ldots,n\}\setminus\{m\}$. Пусть $(\rho_1,\ldots,\rho_n)\&(\tau_1,\ldots,\tau_n)=(\zeta_1,\ldots,\zeta_n)$. Тогда имеем $\rho_t\&\tau_t=\zeta_t$, где $1\leq t\leq n$. Если $t=m$, то $\zeta_t=0$ и поэтому имеем $\rho_t=0$ или $\tau_t=0$. Если $t\neq m$, то $\zeta_t=1$ и поэтому имеем $\rho_t=1$ и $\tau_t=1$. Значит, $(\zeta_1,\ldots,\zeta_n)=(\rho_1,\ldots,\rho_n)$ или $(\zeta_1,\ldots,\zeta_n)=(\tau_1,\ldots,\tau_n)$. Следовательно, $(\zeta_1,\ldots,\zeta_n)\in I(\Lambda^n)$. Лемма 2 доказана.

С помощью полученных результатов докажем следующий известный результат.

Теорема 4. *Для любой конечной булевой алгебры* Φ *существует такое натуральное число* n, *что булевы алгебры* Φ *и* Λ^n *изоморфны*.

Доказательство. Пусть задана конечная булева алгебра Φ. Если Φ – вырожденная булева алгебра, то Φ изоморфна вырожденной булевой алгебре Λ^0. Пусть Φ не является вырожденной булевой алгеброй. Тогда имеем $|I(\Phi)|>1$. Положим $n=|I(\Phi)\setminus\{\mathbf{1}\}|$. Следовательно, $n\geq 1$. Докажем, что булевы алгебры Φ и Λ^n изоморфны. Согласно теореме 3 для этого достаточно показать, что $\supset$-алгебры $I(\Psi)$ и $I(\Lambda^n)$ изоморфны.

Согласно лемме 2 $\supset$-алгебра $I(\Lambda^n)$ состоит из выделенного элемента $(1,\ldots,1)$ булевой алгебры Λ^n и таких элементов $(\zeta_1,\ldots,\zeta_n)$, что из $\zeta_1,\ldots,\zeta_n$ только один элемент равен 0. Поэтому имеем $|I(\Lambda^n)\setminus\{(1,\ldots,1)\}|=n$. Возьмем взаимно однозначное отображение множества $I(\Phi)\setminus\{\mathbf{1}\}$ на множество $I(\Lambda^n)\setminus\{(1,\ldots,1)\}$ и обозначим его через f. Положим $f(\mathbf{1})=(1,\ldots,1)$. Тогда f – взаимно однозначное отображение множества $I(\Phi)$ на множество $I(\Lambda^n)$. Пусть $\xi,\eta\in I(\Phi)$. Покажем, что f сохраняет операцию $\supset$, т.е. $f(\xi\supset\eta)=f(\xi)\supset f(\eta)$. Если $\xi=\mathbf{1}$, то имеем $f(\xi\supset\eta)=f(\eta)=$ $=(1,\ldots,1)\supset f(\eta)=f(\xi)\supset f(\eta)$. Если $\eta=\mathbf{1}$, то имеем $f(\xi\supset\eta)=f(\mathbf{1})=(1,\ldots,1)=f(\xi)\supset(1,\ldots,1)=f(\xi)\supset f(\eta)$. Пусть $\xi\neq\mathbf{1}$ и $\eta\neq\mathbf{1}$. Если $\xi=\eta$, то $f(\xi)=f(\eta)$ и поэтому имеем $f(\xi\supset\eta)=f(\mathbf{1})=(1,\ldots,1)=f(\xi)\supset f(\eta)$. Пусть $\xi\neq\eta$. Тогда имеем $f(\xi)\neq f(\eta)$. Согласно лемме 1 (пункт 1) верно соотношение $\xi\supset\eta\neq\mathbf{1}$. Тогда имеем $f(\xi)\supset f(\eta)\neq\mathbf{1}$. Поэтому в силу леммы 2 из [5] имеем $\xi\supset\eta=\eta$ и $f(\xi)\supset f(\eta)=f(\eta)$. Значит, $f(\xi\supset\eta)=f(\eta)=f(\xi)\supset f(\eta)$.

Таким образом, f взаимно однозначно отображает $\supset$-алгебру $I(\Phi)$ на $\supset$-алгебру $I(\Lambda^n)$ и сохраняет операцию $\supset$. Следовательно, $\supset$-алгебры $I(\Phi)$ и $I(\Lambda^n)$ изоморфны. Теорема 4 доказана.

3. Топологические булевы алгебры

В этом параграфе докажем теорему, дающую критерий изоморфной вложимости для конечных топологических булевых алгебр.

Теорема 5. *Конечная топологическая булева алгебра* Ψ *вложима в конечную топологическую булеву алгебру* Φ *в том и только том случае, когда существует такое вложение* f $\supset$*-алгебры* $I(\Psi)$ *в алгебру* Φ, *что* $\langle f(\Re(I(\Psi)))\rangle=\mathbf{0}$ *и для любого* ξ *из* $I(\Psi)$ *в* Φ *имеет место равенство* $f_{\&}(\Box\xi)=\Box f_{\&}(\xi)$.

Доказательство. Пусть заданы конечные топологические булевы алгебры Ψ и Φ. Пусть топологическая булева алгебра Ψ вложима в топологическую булеву алгебру Φ, т.е. существует подходящее вложение g. По лемме 2 из [5] и лемме 1 из [6] множество $I(\Psi)$ является $\supset$-подалгеброй алгебры Ψ. Следовательно, g – вложение $\supset$-алгебры $I(\Psi)$ в алгебру Φ. Согласно лемме 5 (пункт 1) из [5] в Ψ верно равенство $r(\mathbf{0}_\Psi)=\Re(I(\Psi))$. Значит, $\langle\Re(I(\Psi))\rangle=\mathbf{0}_\Psi$. Поскольку $g(\mathbf{0}_\Psi)=\mathbf{0}$ и g сохраняет операцию &, имеем $\langle g(\Re(I(\Psi)))\rangle=g(\langle\Re(I(\Psi))\rangle)=g(\mathbf{0}_\Psi)= =\mathbf{0}$.

Для вложения g $\supset$-алгебры $I(\Psi)$ в алгебру Φ построим отображение $g_\&$ множества Ψ в Φ. Покажем, что для любого τ из Ψ верно равенство $g_\&(\tau)=g(\tau)$. Пусть $\tau\in\Psi$. Алгебра Ψ конечна, а поэтому в ней осуществимо разложение $r(\tau)$. Поскольку $\tau=\langle r(\tau)\rangle$ и g сохраняет операцию &, имеем $g_\&(\tau)=\langle g(r(\tau))\rangle=g(\langle r(\tau)\rangle)=g(\tau)$.

С помощью этого утверждения получаем, что для любого ξ из $I(\Psi)$ верно в Φ соотношение $g_\&(\Box\xi)=g(\Box\xi)=\Box g(\xi)=\Box g_\&(\xi)$.

Пусть f – вложение $\supset$-алгебры $I(\Psi)$ в алгебру Φ, удовлетворяющее условиям $\langle f(\Re(I(\Psi)))\rangle=\mathbf{0}$ и $f_\&(\Box\xi)=\Box f_\&(\xi)$, где $\xi\in I(\Psi)$. Рассмотрим отображение $f_\&$ множества Ψ в Φ. Как и в теореме 1, получаем, что отображение $f_\&$ различным элементам сопоставляет различные элементы и сохраняет операции $\supset$, $\neg$, & и $\vee$.

Покажем, что $f_\&$ сохраняет операцию $\Box$. Пусть $\rho\in\Psi$. Алгебра Ψ конечна, а поэтому в ней осуществимо разложение $r(\rho)$. Так как $\rho=\langle r(\rho)\rangle$, $f_\&$ сохраняет операцию & и в Φ имеет место равенство $f_\&(\Box\xi)=\Box f_\&(\xi)$ для любого ξ из $I(\Psi)$, то $f_\&(\Box\rho)=f_\&(\Box\langle r(\rho)\rangle)=f_\&(\langle\{\Box\zeta|\zeta\in r(\rho)\}\rangle)=\langle\{f_\&(\Box\zeta)|\zeta\in r(\rho)\}\rangle=$ $=\langle\{\Box f_\&(\zeta)|\zeta\in r(\rho)\}\rangle=\Box\langle\{f_\&(\zeta)|\zeta\in r(\rho)\}\rangle=\Box f_\&(\langle r(\rho)\rangle)=\Box f_\&(\rho)$.

Таким образом, $f_\&$ является вложением топологической булевой алгебры Ψ в топологическую булеву алгебру Φ. Теорема 5 доказана.

ЛИТЕРАТУРА

1. *Расева Е., Сикорский Р.* Математика метаматематики. М.: Наука, 1972.
2. *Сикорский Р.* Булевы алгебры. М.: Мир, 1969.
3. *Фейс Р.* Модальная логика. М.: Наука, 1974.
4. *Хомич В.И.* О вложении импликатур в импликативные полуструктуры // XVIII Всесоюзная алгебраическая конференция. Тезисы сообщений. Ч.2. Кишинев: Штиинца, 1985. С. 255.
5. *Хомич В.И.* Об отделимых суперинтуиционистских пропозициональных исчислениях и о конъюнктивно неразложимых элементах в импликативных полуструктурах // Zeitschrift für mathematische Logik und Grundlagen der Mathematik. 1986. Bd. 32. S. 149-180.
6. *Хомич В.И.* О вложении импликатур // Вопросы математической логики. М.: ВЦ АН СССР, 1988. С. 17-33.

7. *Хомич В.И.* О свойствах суперинтуиционистских пропозициональных исчислений // Сибирский математический журнал. 1990. Т. 31. № 6. С. 158-175.
8. *Хомич В.И.* О суперинтуиционистских пропозициональных логиках, связанных с частично упорядоченными множествами // Известия АН СССР. Серия математическая. 1991. Т. 55. № 2. С. 384-406.
9. *Хомич В.И.* О представлении конечных псевдобулевых алгебр и об одном его применении // Математические заметки. 1992. Т. 52. № 2. С. 127-137.
10. *Биркгоф Г.* Теория структур. М.: Иностранная литература, 1952.
11. *Карри Х.Б.* Основы математической логики. М.: Мир, 1969.
12. *Кузнецов А.В.* Об операциях, похожих на импликацию // VII Всесоюзный алгебраический коллоквиум. Резюме сообщений. Кишинев: Штиинца, 1965. С. 60.
13. *Хомич В.И.* О вложимости некоторых обобщений псевдобулевых алгебр // Доклады РАН. 1996. Т. 350. № 2. С. 174-177.
14. *Хомич В.И.* Об изоморфной вложимости псевдобулевых алгебр и некоторых их обобщений // Математические вопросы кибернетики. 1999. № 8. С. 191-218.

А.В. Чагров

НЕСКОЛЬКО ЗАМЕЧАНИЙ О ЕСТЕСТВЕННЫХ МИНИМАЛЬНЫХ ЛОГИКАХ: БАЗИСНАЯ И ФОРМАЛЬНАЯ ЛОГИКИ А. ВИССЕРА И ИХ МОДАЛЬНЫЕ НАПАРНИКИ*

Abstract. *The main result is following: Visser's basic logic* **BPL** *has a continuum of maximal normal modal companions and a continuum of maximal quasi-normal modal companions, the property "to be a modal companion of* **BPL**" *is undecidable in normal case and in quasi-normal case. Some hypothesis about modal companions of Visser's formal logic* **FPL** *is formulated.*

В своей классической монографии [2] и последующих работах В.А. Смирнов уделял пристальное внимание проблематике, связанной с минимальными средствами, позволяющими получить те или иные логические результаты, например – разные варианты теоремы дедукции, что выражалось в поиске необходимых и достаточных условий для их выполнения, с формулировкой исчислений, удовлетворяющих некоторым требованиям минимальности, например – абсолютные исчисления, и др. (Автор данного текста предпочитает говорить «теорема о дедукции», хотя только что употребил оборот «теорема дедукции», отдавая дань уважения В.А. Смирнову, говорившему именно так. Не считая разницу принципиальной, всё-таки поясню, что слово *теорема* означает *утверждение* (*имеющее доказательство*, разумеется), а в данном случае *теорема о дедукции* утверждает не столько дедукцию, сколько нечто *о* дедукции.) Вообще, многие логические исследования можно интерпретировать как стремление к очерчиванию минимальных средств, пригодных для тех или иных целей. Здесь уместно вспомнить многие неклассические логики, такие как интуиционистская, релевантная и т.д. Сюда же можно отнести и две логики, построенные в начале 80-х годов прошлого века А.Виссером [10]. В определенном смысле данная статья примыкает к работам [4], [5], [6], изданных в сборниках, выпускаемых сектором логики ИФ РАН. Кроме того, базисная логика обсуждается в работе [1], поэтому автор позволил себе считать, что идейная основа введения логик Виссера, а также их реляционная семантика читателю понятны, и ограничился формальным описанием результатов и проблем, относящихся к рассматриваемым логикам.

* Работа автора поддержана грантом РФФИ № 03-06-80115.

Мы будем обсуждать довольно разные задачи, но они близки либо по технике решения, либо по устойчивому «сопутствованию» решений в исследованиях самых разных логик и классов логик, либо по традиции одновременного рассмотрения.

Прежде всего напомним, что в [10] базисная и формальная логики были введены синтаксически, точнее – как исчисления натурального вида. Фактически исчисление для базисной логики **BPL** (далее часто – исчисление **BPL** или просто **BPL**) получается из некоторого варианта натурального исчисления для интуиционистской пропозициональной логики **Int** отбрасыванием правила удаления импликации, то есть правила modus ponens (точнее – заменой его на правило транзитивности импликации), в то время как правило введения импликации сохранено. Исчисление [10] для формальной логики **FPL** (далее – исчисление **FPL** или просто **FPL**) получается из **BPL** добавлением одного правила (правила Лёба, см. далее). Добавим еще одно соглашение: множества формул, выводимых в **BPL** и **FPL**, будем называть логиками **BPL** и **FPL** соответственно.

В исчисления **BPL** и **FPL** нельзя добавить правило введения импликации без изменения множества выводимых формул: при таком изменении **BPL**, как уже сказано, превращается в исчисление для **Int**, хотя в **BPL** не выводимы такие, например, принадлежащие **Int** формулы, как $A \wedge (A \to B) \to B$, $(A \to (B \to C)) \to ((A \to B) \to (A \to C))$, а исчисление **FPL** вообще становится противоречивым.

Долгое время был открыт вопрос об исчислениях гильбертовского типа для логик **BPL** и **FPL**. Вопрос не праздный: логики **BPL** и **FPL** *замкнуты* относительно правила modus ponens, что является крайне неожиданным в связи со сказанным в предыдущем абзаце, но легко проверяется с помощью семантики логик **BPL** и **FPL**. Тривиальное «решение» этого вопроса состоит в том, что в качестве схем аксиом можно взять все выводимые формулы (превратив их в схемы формул, конечно) логик **BPL** и **FPL** соответственно. Однако хотелось бы иметь обозримые, например – с конечным списком аксиом, аксиоматики. Не так давно такие аксиоматики были найдены в разных работах, но наиболее разумными являются аксиоматики, обнаруженные японскими логиками: для **BPL** – Х. Оно и Я. Судзуки, для **FPL** – К. Сасаки. Эти аксиоматики приводятся ниже. Чтобы не загромождать ссылочный аппарат, укажем как на источник информации доступную в интернете работу К. Сасаки [9], в которой все необходимые ссылки имеются.

Таким образом, возникает возможность рассмотрения для логик **BPL** и **FPL** задач, которые уже решены или решаются для логики **Int**, где развит и соответствующий аппарат, см., например, [8], да и возникающие аналогии могут подсказать и направления исследований, и возможные решения. Здесь было трудно удержатся от слова *параллели* вместо слова *аналогии*, но оно здесь все-таки не вполне уместно, поскольку, во-первых, некоторые результаты отличаются от своих аналогов, а во-вторых, серьёзным вопросом является вопрос о том, что считать расширением логики в случае рассмотрения логик **BPL** и **FPL**, поскольку постулирование правила modus ponens для множеств формул, включающих в себя **BPL** и **FPL**, проблематично. В связи с этим некоторые приводимые ниже факты и проблемы надо рассматривать с учетом этой проблематичности.

Приведем упомянутые выше исчисления для логик **BPL** и **FPL**.

Прежде всего, дадим исходные формулировки натуральных исчислений А. Виссера. Отметим только, что правила натуральных исчислений мы будем по некоторым причинам выписывать линейно, используя вместо горизонтальной черты, над которой и под которой пишутся формулы и/или допущения, символ /. Мы предполагаем, что читатель знаком с обычными обозначениями и наши линейные записи не будут мешать его пониманию.

Язык логик **BPL** и **FPL** определяется обычным образом с использованием пропозициональных переменных, константы $\perp$ («ложь») и пропозициональных связок $\wedge$ (конъюнкция), $\vee$ (дизъюнкция), $\rightarrow$ (импликация). Этот же язык принят для **Int** в [8].

Натуральное исчисление для **BPL** задается правилами (точнее – схемами правил, конечно; происхождение их обозначений должно быть ясно с учетом сокращения **f** от formalized):

$\wedge$**I**: $A, B / A \wedge B$; $\wedge$**E**: $A \wedge B / A$; $A \wedge B / B$;

$\vee$**I**: $A / A \vee B$; $B / A \vee B$;

$\perp$**E**: $\perp / \mathrm{A}$;

Tr: $(A \rightarrow B), (B \rightarrow C) / (A \rightarrow C)$;

$\wedge$**If**: $(A \rightarrow B), (A \rightarrow C) / (A \rightarrow (B \wedge C))$;

$\vee$**Ef**: $(A \rightarrow C), (B \rightarrow C) / ((A \vee B) \rightarrow C)$;

$\rightarrow$**I**: $[A] \ldots B / (A \rightarrow B)$;

$\vee$**E**: $A \vee B$; $[A] \ldots C$, $[B] \ldots C / C$.

Исчисление **FPL** задается теми же правилами, к которым добавлено ещё правило, названное правилом Лёба:

$((\perp \rightarrow \perp) \rightarrow A) \rightarrow A / (\perp \rightarrow \perp) \rightarrow A$.

Теперь обратимся к формулировкам гильбертовского типа. Правил вывода здесь два – modus ponens и подстановка. Использование схем аксиом вместо правила подстановки здесь не оправдано обычным удобством применения теоремы о дедукции в присутствии одного лишь правила вывода modus ponens, поскольку здесь такое применение невозможно.

Аксиоматика Х. Оно–Я. Судзуки для **BPL** (в используемых здесь обозначениях формул):

($\to_1$): $A \to A$;

($\to_2$): $A \to (B \to A)$;

($\to_3$): $(B \to C) \wedge (A \to B) \to (A \to C)$;

($\wedge_1$): $A \wedge B \to A$;

($\wedge_2$): $A \wedge B \to B$;

($\wedge_3$): $(C \to A) \wedge (C \to B) \to (C \to A \wedge B)$;

($\vee_1$): $A \to A \vee B$;

($\vee_2$): $B \to A \vee B$;

($\vee_3$): $(A \to C) \wedge (B \to C) \to (A \vee B \to C)$;

($\vee_4$): $A \wedge (B \vee C) \to (A \wedge B) \vee (A \wedge C)$;

($\bot_1$): $\bot \to A$.

Аксиоматика К. Сасаки [9] логики **FPL** получается из только что приведённой добавлением одной аксиомы, которую в связи с описанным выше правилом Лёба естественно называть формулой Лёба:

(**L**): $(((\bot \to \bot) \to A) \to A) \to ((\bot \to \bot) \to A)$.

Тот факт, что с учетом свойств приведенных выше трех исчислений эта аксиоматика действительно задаёт логику **FPL**, достаточно очевиден, поэтому, возможно, разумнее называть её аксиоматикой Х. Оно–Я. Судзуки– К. Сасаки.

Исчисления сформулированы, мы можем обратиться к вопросу о целях их введения; более точно, разумеется, говорить о целях введения логик, соответствующих этим исчислениям.

Уместно вспомнить, что в свое время интуиционистская логика была сформулирована с целью описать минимальное множество принципов, приемлемых с точки зрения интуиционистов. То, что это было сделано аксиоматически, не носит принципиального характера – это ведь один из способов эффективного (в широком смысле этого слова) описания бесконечного множества утверждений. С некоторых точек зрения, являющихся в определенной степени уточнениями интуиционистских взглядов, построенная интуиционистская логика оказалась не минимальной: на предикатном уровне она не содержит принципа Маркова (это единственное место в данной статье, где упоминаются не пропозициональные логики); на пропозициональном уровне она оказалось меньше логики реализуемости и меньше логики финитных задач Медведева и т.д. Тем не менее, она оказалась достаточно естественной минимальной логикой для рассмотрения всех упомянутых и некоторых других точек зрения и взглядов.

Добавим к этому, что интуиционистская логика появилась и еще в одном варианте стремления к минимальности. Имеется в виду обнаруженная К. Гёделем связь ее с модальной логикой **S4**. Вкратце (а тем самым и не вполне скрупулезно точно) интересующий нас аспект истории таков (подробности см. в [8]). К. Гёдель при попытке сформулировать пропозициональную модальную логику доказуемости построил экономную (читай: минимальную) аксиоматическую систему, оказавшуюся дедуктивно эквивалентной (равной по множеству выводимых формул) модальной логике К.И. Льюиса **S4**. Затем, задавшись целью выделить из нее фрагмент, в котором в формулах классические связки оказываются только в области действия модальности «доказуемо», обнаружил, что в результате у него получилась интуиционистская пропозициональная логика. Точнее, если каждую интуиционистскую пропозициональную связку расшифровать как соответствующую классическую, но на которую навешен оператор «доказуемо» (то есть считать ее сильным вариантом классической) и навесить оператор «доказуемо» на пропозициональные переменные, то в результате получается перевод, погружающий **Int** в **S4**: интуиционистская формула принадлежит **Int** тогда и только тогда, когда ее перевод принадлежит **S4**. Это наблюдение К. Гёделя (доказательств он не опубликовал, и неизвестно, были ли они у него) также можно отнести к поиску естественных минимальных логик: каков окажется фрагмент модальной логики, состоящий из формул, в которых всякая классическая связка снабжена оператором «доказуемо».

В дальнейшем было обнаружено несколько переводов с аналогичными свойствами, наиболее употребительным из которых оказался **T**-перевод: модальность «доказуемо» или «необходимо» (будем предпочитать читать её «необходимо» и обозначать $\Box$) навешивают только на элементарные подформулы (переменные и константу «ложь») и на импликацию; таким образом, **Int** можно называть **T**-фрагментом **S4**. Отошлю заинтересованного читателя к [3], [7] за дополнительной информацией.

Логики **BPL** и **FPL** возникли в [10] примерно по этой же схеме: А. Виссер выделял **T**-фрагменты из модальных логик **K4**, отличающейся от **S4** в формулировке К. Гёделя отсутствием аксиомы $\Box A \to A$, и логики доказуемости Гёделя - Лёба **GL**, являющейся расширением **K4**. Заметим, что выбор **K4** здесь довольно случаен: было замечено, что большинство модальных логик, возникших по естественным соображениям (прежде всего, **S4** и **GL**), включают в себя **K4**. В литературе встречались даже предложения называть ее базисной (или базовой) модальной логикой.

Однако было обнаружено (сошлюсь здесь опять-таки на работу [7], где это довольно подробно сказано), что **Int** погружается не только в **S4**. Имеются нормальные модальные логики, собственно расширяющие **S4** и являющиеся модальными напарниками **Int**. Среди них наибольшей является логика Гжегорчика **Grz**, получающаяся из **S4** добавлением аксиомы $\Box(\Box(A \to \Box A) \to A) \to A$. Этот факт вместе со свойствами **Grz** – финитной аппроксимируемостью и в результате разрешимостью – дает алгоритм, отвечающий на вопрос о произвольной формуле φ, будет ли нормальное расширение **S4** аксиомой φ модальным напарником **Int**. Сходная ситуация и в том случае, если мы будем рассматривать не только нормальные логики, то есть откажемся от постулирования правила Гёделя. Правда, в этом случае логика Гжегорчика уже не является максимальным (и тем более не наибольшим) модальным напарником **Int**, хотя и в этом случае **S4** имеет наибольшее расширение среди тех, в которое **Int** вкладывается **T**-переводом. Оба наибольших модальных напарника **Int** в расширениях **S4** (в нормальном и произвольном случаях) устроены достаточно просто (разрешимы, во всяком случае), чтобы доказать разрешимость проблемы «быть напарником **Int**» в расширениях **S4** и нормальных расширениях **S4**.

Теперь сформулируем четыре утверждения, проясняющие аналогичные вопросы о базисной логике **BPL**.

Теорема 1. *Базисная логика* **BPL** *имеет континуум максимальных по включению нормальных модальных напарников и континуум максимальных модальных напарников среди квазинормальных расширений* **K4**. *Свойство «быть модальным напарником* **BPL**» *алгоритмически неразрешимо и в случае нормальных, и в случае квазинормальных модальных логик.*

Теорема 2. *Базисная логика* **BPL** *имеет континуум максимальных по включению нормальных модальных напарников.*

Теорема 3. *Базисная логика* **BPL** *имеет континуум максимальных по включению модальных напарников среди квазинормальных расширений* **K4**.

Теорема 4. *Свойство «быть модальным напарником* **BPL**» *алгоритмически неразрешимо и в случае нормальных модальных логик.*

Теорема 5. *Свойство «быть модальным напарником* **BPL**» *алгоритмически неразрешимо в случае квазинормальных модальных логик.*

Что касается логики **FPL**, то мне не удалось для неё доказать аналоги этих теорем. Более того, представляется разумной гипотеза, что логика **GL** является единственным (а тем самым и наибольшим) нормальным модальным напарником **FPL**, а все квазинормальные модальные напарники **FPL** расположены между логиками **GL** и логикой Р. Соловея **S**.

ЛИТЕРАТУРА

1. *Витер Д.А.* Базисная логика и примитивно рекурсивная реализуемость // Логические исследования. Вып. 9. М.: Наука, 2002.
2. *Смирнов В.А.* Формальный вывод и логические исчисления М.: Наука, 1972.
3. *Чагров А.В.* О границах множества модальных напарников интуиционистской логики // Неклассические логики и их применение. Вып. 10. М.: ИФ АН СССР, 1989. С. 74-81.
4. *Чагров А.В.* Формальная пропозициональная логика А.Виссера и ее расширения // Логические исследования. Вып. 10. М.: Наука, 2003. С. 204-211.
5. *Чагров А.В., Чагрова Л.А.* Об алгоритмической проблеме пропозициональной определимости формул первого порядка в семантике формальной логики А.Виссера // Труды научно-исследовательского семинара Логического центра Института философии РАН. Вып. XVII. М., 2004. С. 94-102.
6. *Чагров А.В.* Алгоритмическая проблема финитарного семантического следования для базисной и формальной логик А.Виссера // Логические исследования. Вып. 11. М.: Наука, 2004. С. 282-289.
7. *Chagrov A., Zakharyashchev M.* Modal Companions of Intermediate Propositional Logics // Studia Logica. 1991. Vol. 51. P. 49-82.
8. *Chagrov A., Zakharyashchev M.* Modal Logic. Oxford University Press, 1997.
9. *Sasaki K.* Logics and Provability. ILLC Dissertation Series DS-2001-07.
10. *Visser A.* A propositional logic with explicit fixed points // Studia Logica. 1981. Vol. 40. P. 155-175.

F. Barral, D. Chemouil, S. Soloviev

NON-STANDARD REDUCTIONS AND CATEGORICAL MODELS IN TYPED LAMBDA-CALCULUS

Abstract. *We consider the problem of incorporation of new computational rules in lambda calculus with inductive types and recursion. We consider the extensions of standard reduction systems by certain new reductions preserving strong normalization and Church-Rosser property with possible applications to proof assistants and computer algebra systems.*

Абстракт. *Рассматривается проблема добавления новых правил вычисления к лямбда-исчислению с индуктивными типами и рекурсией. Рассматриваются расширения стандартных систем редукции при помощи новых редукций, сохраняющих строгую нормализацию и свойство Черча-Россера. Эти расширения имеют возможные приложения в областях компьютерных помощников поиска доказательств и систем компьютерной алгебры.*

1. Introduction

Computational power of untyped lambda-calculus is sufficient to represent any partial recursive function. One of obvious drawbacks is that some basic questions (like termination) are undecidable. Nowadays more and more attention is paid to various systems of typed lambda-calculi since typing provides greater safety. In "non-pathological" systems, computation represented by well-typed term always terminates.

Another positive aspect of typed calculi in comparison with untyped case is due to so called "proofs as programs paradigm". The type of a term can be considered as logical formula and the term represents its proof. At the same time it can be considered as a program. This explains why typed lambda-calculi are often used in modern proof-assistants. In perspective, this is one of possible ways to unification of proof and computation.

Of course, typing doesn't resolve all the difficulties. One of them is that the representation of real computations in lambda-calculus including only the fundamental term and type constructors (application and abstraction for terms, functional arrow for types) is very indirect, it is in fact complex coding, satisfactory for theoretical results but lacking directness and transparency required for efficient applications. Extensions of typed systems with "real-life" inductive types like natural numbers, lists, trees and corresponding functional constants and recursion operators are helpful but not sufficient. Mathematics computations are seldom represented in the form of recursive functions even if they are fully constructive.

Symbolic computations, for example, often include the transformations of symbolic expressions that were never studied from the point of view of properties of corresponding rewriting system. The importance of the problem of certified computation, symbolic or numerical (i.e., computation that is completed with the proof of its correctness) was emphasized several years ago in [4] but it was studied since in very limited number of cases.

The possibility usually provided by proof-assistants based on type theory is to obtain a proof-term that represents the proof of equality of two terms representing computations. This term should be carried everywhere the equality should be used, and this turns out to be very heavy and inefficient.

One of the reasons is that the system of reductions of terms incorporated in the underlying typed lambda-calculus is very restrictive. Because of this even very simple equalities used routinely very often require the proof-term corresponding to this equality to be carried around. It may require quite complex manipulations if the equality is used within another computation.

The approach we are studying in this paper is based on extension of the systems of reductions preserving good properties of the reduction system as a whole. Such properties as Strong Normalization (SN) and Church-Rosser property, or confluence (CR) need to be proved only once. Afterwards the use of the lambda-calculus may follow similar schema: some equalities are proved by reduction (this is much more efficient) and for some others we need to find a proof-term, but the classes of these “intensional” and “extensional” equalities are different, we have more “intensional” equalities. As result the transparency and efficiency of a system may be improved.

In this paper we consider several model cases of extensions of reduction systems in the calculus that doesn’t contain the type Prop and terms representing proofs, i.e., we concentrate on the computational part. This permits to simplify the technical side of the presentation. The calculus under consideration is simply typed lambda-calculus with inductive types.

Three cases are considered:

- the notion of a copy of inductive type and the reductions necessary to make it an isomorphism (it is not an isomorphism w.r.t. standard system of reductions and this complicates a lot the handling of copies of inductive types);

- the reductions to incorporate into lambda-calculus certain algebraic structures, such as groups of permutations;

- functoriality of the schema of inductive type (a schema of parameterized inductive type, like List(A), does not represent a functor w.r.t. standard reductions).

The aim of this paper is to present an approach that would help to bring closer proof and computation. The results concerning functoriality are completely new, the results concerning copy and groups of permutations were partly published (see [5], [9]).

2. Simply-typed lambda-calculus with inductive types

We will consider infinite sets of constructor name (Const), term variables (Var) and type variables (Tvar), with $Const \cap Var = Const \cap Tvar = Var \cap Tvar = \emptyset$. We will reserve the letters x, y and z for term variables, α and β for type variables, r, s, t and u for arbitrary terms, ρ and τ for arbitrary types, and κ for constructor schemas. The letters i, j, k, l will only be used for indexes and, respectively, n, m, p, q for their upper bound. Finally, constructor names will be denoted either by $c_1, c_2, \ldots, c'_1, c'_2\ldots$ or by the generic name *in*. Definitions will be introduced by the symbol =def , as in id =def $\lambda x^{\tau}.x$. Terms and types will be considered up to α-congruence (that is, the names of bound variables are meaningless) and this last relation will be denoted $\equiv$, thus one has $\lambda x^{\tau}.x \equiv \lambda y{:}\tau.y$. Sequences of types or terms $(t_i)_{i=1,n}$ will be written as $t_{1\div n}$. Using this notation we will sometimes write $\rho_{1\div n}\rightarrow\tau$ to mean $\rho 1\rightarrow\ldots\rightarrow\rho n\rightarrow\tau$, associated to the right. Furthermore, $s\in \mathbf{t}_{1\div n}$ will mean that there is an i such that $s\equiv \mathbf{t}_i$, and $\mathbf{t}_{1\div n}\in S$ will mean that all the $\mathbf{t}_i$'s belong to the set S. Finally, if some indexes depend on other ones, we shall write j(i), and $\mathbf{t}_{j(1\div n)}$ will stand for $t_{j(1)},\ldots, t_{j(n)}$. We will also need the notion of "curried" composition: for given lambda-terms f: $\rho_{1\div n}\rightarrow\tau$ and $g{:}\tau\rightarrow\upsilon$, gof will be defined as $\lambda \mathbf{z}_{1\div n}{:}\rho_{1\div n}.g(f\mathbf{z}_{1\div n})$, with $z_{1\div n}\notin FV(g)$ and $z_{1\div n}\notin FV(f)$. We shall also use the following notation, provided of course that f and g are of suitable types: $g\bullet f\equiv$ gof if f and g are composable, gf if they are not, but g can be applied to f.

Definition 1. (Prototypes.) The grammar of prototypes is defined as follows:

$\tau ::= \alpha | \tau\rightarrow\tau | \mu\alpha(c_{1\div n}{:}\tau_{1\div n})$, with $\alpha\in Tvar$.

Definition 2. (Types). We define simultaneously:

The set Ty of types:

$$\frac{\upsilon\in Tvar}{\upsilon\in Ty}\qquad \frac{\rho,\tau\in Ty}{\rho\rightarrow\tau\in Ty}\qquad \frac{c_{1\div n}\in Const;\alpha\in Tvar;\kappa_{1\div n}\in Sch(\alpha)}{\mu\alpha(c_{1\div n}{:}\kappa_{1\div n})\in Ty}$$

and the set Sch(α)of constructor schemas over type variable α :

$$\frac{\rho_{1\div m}, \sigma_{1,1\div j(1)}, \ldots, \sigma_{n\div j(n)} \in Ty}{\rho_{1\div m} \to (\sigma_{1,1\div j(1)} \to \alpha) \to \ldots \to (\sigma_{n,1\div j(n)} \to \alpha) \to \alpha \in Sch(\alpha)}$$

As usual, constructor names can only belong to one inductive type. Thus, an inductive type is also defined by names of its constructors.

Remarks:

An inductive type is a recursive type built from a sequence of (constructor) schemas.

Every schema κ_k over α is of the form $\rho_{1\div m} \to (\sigma_{1,1\div j(1)} \to \alpha) \to \ldots \to (\sigma_{n,1\div j(n)} \to \alpha) \to \alpha$ and each premise is called an operator over α. The number of operators in a schema is denoted $ar(\kappa_k)$ (arity). We write $nb^P(\kappa_k)=m$ for the number of ρ's and $nb^R(\kappa_k)=n$ for the number of operators $(\sigma_{i,1\div j(i)} \to \alpha)$, thus we have $ar(\kappa_k) = nb^P(\kappa_k) + nb^R(\kappa_k) = n+m$.

The ρ's and σ's are in Ty, which implies they don't contain any free type variable. They are called parameter types. The occurrences belonging to $\rho_{1\div m}$ are called covariant and to $\sigma_{1,1\div j(1)}, \ldots, \sigma_{n,1\div j(n)}$ contravariant. The fact that they don't contain any free type variable implies also that the only occurrences of α are those explicitly shown and α occurs only strictly positively in the operators of the schema. The operators containing α are recursive (correspond to "recursive calls"). If the list $\sigma_{i,1\div j(i)}$ is empty, such operator is called 0-recursive otherwise 1-recursive (by analogy with the functionals of types 0 and 1 in Gödel's system T). By definition of schemas, parameter types can only occur at the beginning of the schema: this restriction is useful for technical reasons, most notably for the typing of recursors and the definition of their computation rules. It will be clear to the reader that this is a minor restriction which does not impair the system at all.

Example 1. With the rules for inductive types described above, it is possible to define the types of natural numbers, of Brouwer's ordinals and of lists of natural numbers:

$Nat =_{def} \mu\alpha[0{:}\alpha, succ{:}\alpha \to \alpha]$

$Ord =_{def} \mu\alpha[0_{ord}{:}\alpha, succ_{ord}{:}\alpha \to \alpha, lim{:} (Nat \to \alpha) \to \alpha]$

$List(Nat) =_{def} \mu\alpha[nil{:}\alpha, cons{:} Nat \to \alpha \to \alpha]$

Note that every inductive type τ generates a recursor (or structural-recursion operator) to any type μ. This is explained below.

Definition 3. (Terms). The set of terms is generated by the following grammar (with $x \in Var$, $k \in N\backslash\{0\}$ and $\tau, \mu \in Ty$):

$t ::= x \mid \lambda x\tau\, t \mid (t\, t) \mid in_k^{\mu} \mid (\!| t_{1\div n} |\!)^{\mu,\tau}$

Here in_k^{μ} is the k-th constructor of the inductive type μ (in practice, we actually have constructor names $c \in Const$) and $(\!| t_{1\div n} |\!)^{\mu,\tau}$ is a recursor (or structural recursion operator) from μ to another type τ.

Definition 4. (Step type.) Given inductive type(s) $\mu \equiv \mu\alpha(c_{1\div n}{:}\kappa_{1\div n})$ and a result type τ, we define for every

$\kappa_k \equiv \rho_{1\div m}\rightarrow(\sigma_{1,1\div j(1)}\rightarrow\alpha)\rightarrow\ldots\rightarrow(\sigma_{n,1\div j(n)}\rightarrow\alpha)\rightarrow\alpha$ in Sch(α)
the step type

$\delta^{\mu,\tau}$

$\equiv \rho_{1\div m}\rightarrow(\sigma_{1,1\div j(1)}\rightarrow\mu)\rightarrow\ldots\rightarrow(\sigma_{n,1\div j(n)}\rightarrow\mu)\rightarrow(\sigma_{1,1\div j(1)}\rightarrow\tau)\rightarrow\ldots\rightarrow(\sigma_{n,1\div j(n)}\rightarrow\tau)\rightarrow\tau$

Definition 5. (Typing.) We define the following typing rules of the calculus:

$$\frac{}{\Gamma, x:\tau \vdash x:\tau}\ (\mathrm{Var})$$

$$\frac{\Gamma, x:\rho \vdash t:\tau}{\Gamma \vdash \lambda x:\rho.t:\rho\rightarrow\tau}\ (\mathrm{Lambda}) \qquad \frac{\Gamma \vdash t:\rho\rightarrow\tau \quad \Gamma\vdash u:\rho}{\Gamma \vdash (t\ u):\tau}\ (\mathrm{App})$$

$$\frac{c\in Const}{\Gamma \vdash c_k : \kappa_k[\mu]}\ (\mathrm{In}) \qquad \frac{\Gamma \vdash t_{1\div n} : \delta_{1\div n}{}^{\mu,\tau}}{\Gamma \vdash (|t_{1\div n}|)^{\mu,\tau}:\mu\rightarrow\tau}\ (\mathrm{Rec})$$

Sometimes for typographical reasons we shall write types of variables as superscripts.

Reduction. We take most of our terminology and notation in [2]. Given a binary relation R on a set A, we will denote the induced rewrite relation $\rightarrow_R$, but shall sometimes write R for $\rightarrow_R$ and vice-versa. We will respectively write $\rightarrow^*_R$, $\rightarrow^+_R$, and $=_R$ for its transitive, reflexive-transitive and reflexive-symmetric-transitive closures. Sometimes we may write R^*, R^+ and $R^=$. We say that a term t rewrites to u if there is a term u such that $t\rightarrow_R u$ and it reduces to u if there is a derivation $t\rightarrow_R^+ u$. The union $R\cup S$ of binary relations on the same set will be denoted RS. We also write R;S for the set $\{(r,s) \mid \exists t.\ rRt\wedge tSs\}$. A term is in normal form if it is not rewriteable. A rewrite relation R is strongly normalizing (terminating) is there is no infinite derivation $t_1\rightarrow_R t_2 \rightarrow_R\ldots$, for any term t_1.

Given two rewrite relations R and S: R commutes with S if ${}^*\!\leftarrow_S;\rightarrow^*_R\subseteq \rightarrow^*_R;{}^*\!\leftarrow_S$, R commutes strictly locally over S if $\leftarrow_S;\rightarrow_R\subseteq \rightarrow_R;\leftarrow_S$.

This definition is made in [8], and by R. Di Cosmo in [9] to state Akama - Di Cosmo's lemma under the name of (DPG) condition (see lemma 1 below).

A relation R is confluent (resp. locally confluent) if it commutes (resp. commutes locally) with itself. A strongly normalizing and confluent relation is said convergent. We will also write R/S to represent the quotient of a relation R by the reflexive-symmetric-transitive closure of S.

The usual notion of substitution is written $t\{u/x\}$ to mean that u replaces every free occurrence of x in t, avoiding capture. Finally, as usual in this kind of work, we will consider contexts, written C[], that is, terms with a "hole" inside which can be filled (giving for example $C[(\lambda x^{\tau}.p)q]$.

Definition 6. (β-conversion.) We define the relation of β-conversion by the following rule: $(\beta).(\lambda x^{\tau}.t)u \to \beta\ t\{u/x\}$.

Definition 7. (η-conversion.) We define η-conversion by the following rule (η) $t \to \eta\ \lambda x^{\tau} tx$ if t of type $\tau \to \upsilon$ is not in applicative position, does not begin with λ and $x \notin FV(t)$.

(This rule is also called η-expansion and is known to be more convenient for categorical applications than η–reduction oriented in opposite way.)

Definition 8. (ι-conversion.) Let $\mu \equiv \mu\alpha(c_{1\div n}:\kappa_{1\div n})$, and $\kappa_k \equiv \rho_{1\div m} \to (\sigma_{1,1\div j(1)} \to \alpha) \to \ldots \to (\sigma_{n,1\div j(n)} \to \alpha) \to \alpha$ over α in μ. Let $v_{1\div m}:\rho_{1\div m}$ and $u_{1\div n}$ with u_i^R: $\sigma_{i,1\div j(i)} \to \mu$ for any $1 \leq i \leq n$. Then, we define ι-reduction by the rule

$$(\iota)\ (|\ \mathbf{t}\ |)^{\mu,\tau} in^{\mu}_k (v_{1\div m}, u_{1\div n}) \to_{\iota} t_k(v_{1\div m}, u_{1\div n}, ((|\ t_{1\div p}\ |)^{\mu,\tau} \bullet u_{1\div n})).$$

Remark 1. Recall that $g \bullet f$ is just an abbreviation. Hence, we may describe ι-reductions as $(|t_{1\div p}\ |)^{\mu,\tau} in^{\mu}_k (v_{1\div m}, u_{1\div n}) \to_{\iota} t_k (v_{1\div m}, u_{1\div n}, \Delta_{1\div n}(u_{1\div n}))$ where

$\Delta_i(u_i) \equiv (|t_{1\div p}\ |)^{\mu,\tau}\ u_i$ if $u_i^R : \mu$ (i.e., u_i^R is 0-recursive), and $\Delta_i(u_i) \equiv (|t_{1\div p}\ |)^{\mu,\tau} \circ u_i$ if $u_i : \sigma_{i,1\div j(i)} \to \mu$ (i.e., u_i is 1-recursive).

Example 2. If we take the type of Brouwer's ordinals, $Ord =_{def} \mu\alpha[0_{ord}:\alpha, succ_{ord}:\alpha \to \alpha, lim: (Nat \to \alpha) \to \alpha]$, then, given some type τ (the type of result), the step types corresponding to 0_{ord}, $succ_{ord}$ and lim will be respectively τ, $Ord \to \tau \to \tau$ and $(Nat \to Ord) \to (Nat \to \tau) \to \tau$, the recursor will be of the form $(|t_1,t_2,t_3|)$ with $t_1:\tau$, $t_2:Ord \to \tau \to \tau$, $t_3:(Nat \to Ord) \to (Nat \to \tau) \to \tau$ and the ι-reduction will take the following forms:

$(|t_1,t_2,t_3|)\ 0_{ord} \to_{\iota} t_1$, $(|t_1,t_2,t_3|)\ succ_{ord}(u_1) \to_{\iota} (t_2\ u_1)((|t_1,t_2,t_3|)u_1)$,

$(|t_1,t_2,t_3|)\ lim\ (u_2) \to_{\iota} (t_3\ u_2)\ ((|t_1,t_2,t_3|) \circ u_2) \equiv (t_3\ u_2)\ (\lambda x^{Nat}.((|t_1,t_2,t_3|)(u_2 x^{Nat}))$

(here u_1:Ord, u_2:Nat $\to$ Ord).

The λ-calculus thus defined, together with $\beta\eta\iota$-conversion, is called $\beta\eta\iota$.

In the rest of this paper, we will often omit type indications, except for abstracted variables, to lighten the notation.

3. Main results

3.1. Copy

Let us consider the type $\mu \equiv \mu\alpha[c_1:\sigma_{1,1\div j(1)} \to \alpha, \dots c_p: \sigma_{p,1\div j(p)} \to \alpha]$.

An exact copy of this type differs only by names of introduction operators, e.g., μ' with introduction operators $c'_{1\div p}$. It is faithful or isomorphic copy of μ if some of the parameters π are replaced by isomorphic types π'.

Remark 2. The types π and π' are isomorphic if there exist $f: \pi \to \pi'$ and $f': \pi' \to \pi$ such that $f \text{ o} f'$ and $f' \text{o} f$ can be reduced to id_π, $id_{\pi'}$ respectively. In this case we write $f{:}\pi \leftrightarrow \pi'{:}\, f'$.

In general we call "copy" of μ any type μ' that differs by names of introduction operators and some parameters π are replaced by π' with $f: \pi \to \pi'$ and $f': \pi' \to \pi$, but it is no more required that f, f' were mutually inverse.

Let one occurrence of π into $\mu' \equiv \mu\alpha[\, c_1:\sigma_{1,1\div j(1)} \to \alpha, \dots c_p: \sigma_{p,1\div j(p)} \to \alpha]$ be fixed and μ' be a copy of μ such that the occurrence of π is replaced by π' (other changes concern only the names of introduction operators). We shall consider only the case when π occurs as a parameter type. Assume that it is given $f: \pi \to \pi'$ when the occurrence is covariant and $f: \pi' \to \pi$ it is contravariant. The function $Cp(f): \mu \to \mu'$ is defined as $(|\, t_{1\div p}|)$ where the terms $t_1, \dots, t_p$ are defined in the following way.

We shall note by $\underline{f}r$ the application fr if $r{:}\pi$ or $r{:}\pi'$ corresponds to an occurrence to be replaced and r otherwise. Similarly, we shall write $g \text{ } \underline{\text{o}} \text{ } \underline{f}$ for g o f if g has π or π' as its domain and for g otherwise.

Let us consider the introduction operator $c_i : \sigma_{i,i\div j(i)} \to \mu$. We may assume that $\sigma_{i,i\div j(i)} \to \mu \equiv \pi_{1\div k} \to \mu \to \dots \to \mu \to (\pi_{1,1\div n(1)} \to \mu) \to \dots \to (\pi_{m,1\div n(m)} \to \mu) \to \mu$ (with l premises of the form μ).

We define:

$t_i \equiv \lambda x_{1\div k}{:}\ \pi_{1\div k}.\lambda y_{1\div l}{:}\mu.\lambda z_{1\div m}{:}\ \pi_{1\div m,1\div n(1\div m)} \to \mu.\lambda u_{1\div l}{:}\mu'.\ \lambda v_{1\div m}{:}\ \pi_{1\div m,1\div n(1\div m)} \to \tau.c_i'(\underline{f}\, x)r(s \text{ } \underline{\text{o}} \text{ } \underline{f})$.

Example 3. Take again the type of Brouwer's ordinals and let f: Nat' $\to$ Nat. We have $Cp(f) \equiv (|\, t_{1\div 3}|)$, $t_1 \equiv 0'_{ord}$, $t_2 \equiv \lambda y^{Ord}.\ \lambda u^{Ord'}.succ'_{ord}(u)$, $t_3 \equiv \lambda z^{Nat\to Ord}.\lambda v^{Nat\to Ord'}.lim'(v \text{ o } f)$.

When f is an isomorphism with inverse f^{1}, the function Cp(f) is an extensional isomorphism in the sense that for every canonical element e of type μ (constant term containing only $c_1, \dots, c_p$) $Cp(f^{1})(Cp(f)\ e) \to_{\beta\eta\iota}$ e. One of main motivations to study non-standard reductions and their properties was for us the fact that within standard system of reductions $\beta\eta\iota$ many equalities are only extensional, for example $Cp(f^{1}) \text{ o } Cp(f)$ does not reduce to id_μ or, equivalently, $Cp(f^{1})(Cp(f)\ x)$ does not reduce to x if x is a variable, so, in practice, we have either to carry everywhere proof-term or we cannot verify the equalities before some constant value is called.

This will be the case even if we take f to be identity. For example, the composition of Cp(id) for Ord $\equiv \mu\alpha[0_{ord}:\alpha, succ_{ord}:\alpha\to\alpha, lim: (Nat\to\alpha)\to\alpha]$ and Ord'$\equiv\mu\alpha[0'_{ord}:\alpha, succ'_{ord}:\alpha\to\alpha, lim': (Nat\to\alpha)\to\alpha]$ will not be reducible to $id_{Ord}\equiv \lambda x^{Ord}.x$. In fact the term $(| t'_{1\div 3}|)\ ((| t_{1\div 3}|)x)$ will be $\beta\eta\iota$–normal.

Meanwhile, as the results below show, reductions can be added to $\beta\eta\iota$ to make the resulting system SN and CR.

Definition 9. (χ-reduction.) Let f be an isomorphism and f^{1} its inverse. The χ-rewriting rule is defined by

(χ_1) $Cp(f^{1})(Cp(f)r)\to_{\chi} r$

(χ_2) $Cp(f^{1})(Cp(f)r)\to_{\chi} r$,

where it is supposed that f and f^{1} act at the same occurrence of parameter of some inductive type μ and its faithful copy μ', r is arbitrary term.The χ-reduction is its contextual closure.

For lambda-calculus with inductive types considered in this paper the following theorem holds:

Theorem 1. The $\beta\eta\iota\chi$ reduction is SN and CR.

The detailed proof of this theorem may be found in [5]. Here we rather would like to discuss in more concrete way than before the specifics of the proofs of SN and CR for the extensions of reduction systems of the type we consider in this paper, both its technical and conceptual aspect.

The proof of SN for $\beta\eta\iota\chi$ reduction uses some standard lemmas, first of all, the Akama - Di Cosmo Lemma:

Lemma 1. Let R and S be two convergent relations, such that R preserves S-normal forms. Then RS is convergent if R commutes strictly locally over S. [1, 8].

Standard techniques are sufficient to prove convergence of $\beta\eta\iota$ part. To prove SN property in theorem 1 we need some more definitions and lemmas.

Definition 10. (Adjournment.) Given two binary relations R and S, S is adjournable w.r.t. R if S; R $\subseteq$ R, (RS)*.

Lemma 2. (Adjournment lemma.) Given two strongly normalizing relations R and S, RS is strongly normalizing if S is adjournable w.r.t. R.

Proofs of (variants of) this lemma can be found in literature [1, 3, 7, 8]. A subtle point in the proof of SN for $\beta\eta\iota\chi$ is that there are cases when the adjournment lemma can be used only on condition that certain 1-recursive arguments of ι-redex are η-expanded. The idea is therefore to insert suitable η-expansions in a term before χ-conversion, so that the adjournment remains possible.

Definition 11. (Conditional adjournment.) Let R and S be some reduction relations and P be a predicate on terms. Then S is adjournable w.r.t. R under condition P if $\forall t \forall t' \forall t''$. $P(t) \wedge t \to_S t' \wedge t' \to_R t'' \Rightarrow \exists$ u. $t \to_R u \to^*_{RS} t''$.

Definition 12. (Realization.) Let T be a reduction relation, P be a predicate on terms and t some term. Then T realize P for t if $\exists$ t'. $t \to^*_T t' \wedge P(t')$. It will be said that T realizes P if this is true for every term t.

Definition 13. (Insertability.) Let U, T be two reduction relations and Q a binary relation on terms. Then T is insertable in U w.r.t. S if:

- $T \subset U$,
- If t_1 Q t_2 and $t_1 \to_{\{U \setminus T\}} t_1'$ then there exists t_2' such that $t_2 \to^+_U t_2'$ and t_1' Q t_2',
- If t_1 Q t_2 and $t_1 \to_T t_1'$ then there exists t_2' such that $t_2 \to^*_U t_2'$ and t_1' Q t_2'

Lemma 3. (Insertion.) Let U, T be two reduction relations and Q a binary relation such that:

- T is insertable in U w.r.t. Q,
- T is SN.

Then for every infinite sequence of U-reductions u beginning at the term t, and every T-reduction $t \to_T t'$ such that t' Q t there exists an infinite sequence of U-reductions that has as its first step $t \to_T t'$.

The principal idea of insertion and insertion lemma is that we can add necessary reductions and preserve infinite sequences of reductions if they exist. This is useful for the proofs of strong normalization "ad absurdum". In the proof of theorem 1 this lemma is used with η-expansions as T, the whole βηιχ as U, and the relation of η-reduction inverse to η-expansion as Q.

Lemma 4. (Pre-adjusted adjournment.) Let R, S, T be reduction relations, Q a binary relation and P a predicate on terms such that:

- $T \subset R$,
- R is SN,
- S is SN,
- T realizes P,
- S is adjournable w.r.t. R under condition P,
- T is insertable into RS w.r.t. Q.

Then RS is SN.

This lemma is used in the setting similar to lemma 3, with P(t) meaning that the term t is in η-expanded form. T corresponds to η-expansion.

These lemmas are sufficient to prove SN property.

The proof of CR property (confluence) is based on routine check of possible critical pairs.

The following example shows how the notion of copy may be used to define easily interesting data structure.

Example 4. In type theory the (easily defined) embeddings of Nat into Nat are used to define even and odd numbers. In the definition of even numbers 0 is mapped to 0, 1 to 2 etc., and in case of odd numbers 0 is mapped to 1, 1 to 3... In fact, to make this definition "clean" the copies of Nat should be used. Let us note these copies by Nat', Nat''. Let E: Nat'$\rightarrow$Nat and O: Nat''$\rightarrow$ Nat be corresponding embeddings. We have also Cp': Nat$\rightarrow$Nat' and Cp'': Nat$\rightarrow$Nat'' (there is no change of parameter, so there is no parameter f in Cp', Cp''). Combining E, O, Cp' and Cp'' we can now iterate the whole construction:

$$
\begin{array}{l}
\qquad\quad \mathrm{E} \quad \mathrm{Cp'} \quad \mathrm{E} \\
\qquad\quad \mathrm{Nat} \leftarrow \mathrm{Nat'} \leftarrow \mathrm{Nat} \leftarrow \ldots \\
\qquad \mathrm{Cp''}\ \mathrm{O}\uparrow \quad \mathrm{Cp'}\uparrow \quad \mathrm{O}\uparrow \\
\rightarrow \mathrm{Nat} \rightarrow \mathrm{Nat''} \quad \mathrm{Nat} \leftarrow \\
\quad \uparrow \quad\ \uparrow \mathrm{Cp''} \ \uparrow \\
\quad \rightarrow \mathrm{Nat} \\
\qquad\qquad\qquad\quad \uparrow
\end{array}
$$

and within this structure define all subtypes of Nat defined via divisibility by 2^n.

3.2. Algebraic Structures

In this part we consider the extensions of reduction systems used to provide good representation of algebraic structures on finite types.

Finite set $|n| = \{1,..., n\}$ will be represented by the type $\underline{n} =_{def} \mu\alpha(cn_1{:}\alpha,..., cn_n{:}\alpha)$ (of course many representations that differ only by the names of the constructors are possible).

To every function f: $|n| \rightarrow |m|$ corresponds a term $\underline{f}{:}\underline{n}\rightarrow \underline{m}$ of the form $(|cm_{f(1)},..., cm_{f(n)}|)$ where $\underline{m}$ is $\mu\alpha(cm_1{:}\alpha,..., cm_m{:}\alpha)$. Note that the terms $\underline{f}$ are normal.

We considered two problems concerning finite types and terms $\underline{f}$: (a) What categorical structure can be introduced on this calculus and (b) what can be done to represent symmetric group using finite types and corresponding representation of permutations.

The difficulty in type theory as usual is that w.r.t. standard reductions one doesn't for example have $g(\underline{f}\, r) =_{\beta\eta\iota} (\underline{g \circ f})\, r$ for arbitrary term r.

Definition 14. We define υ-rewriting by

$g(\underline{f}\, r) \rightarrow_\upsilon (\underline{g \circ f})\, r$

and υ-reduction as its contextual closure.

The υ-reduction is thus defined for all recursors in normal form representing the applications f: $|n| \to |m|$, g: $|m| \to |p|$. It is supposed, of course, that "externally" the functions f and g are known.

Theorem 2. The $\beta\eta\iota\upsilon$ reduction is SN and CR.

The proof of this theorem uses essentially the same lemmas as in case of copy (the details may be found in [5], cf. also [6, 9]).

Categorical structure. As soon as the υ-reduction is integrated in the calculus, it becomes possible to define categorical structure on this calculus, in the following way:

- the objects are the types representing $|n|$ for all $n \in N$ (let us recall that there is infinitely many of them because the names of the constructors may be different);

- the arrows between n and m are the equivalence classes modulo $\beta\eta\iota\upsilon$ of the recursors $\underline{f} : \underline{n} \to \underline{m}$ for every f: $|n| \to |m|$.

One may consider $\underline{id}_{\underline{n}},=_{def}$ ($|cn_1,\ldots,$ cn_n $|$), one of many representations (associated with $\underline{n}$) of the identity map on $|n|$. Let us recall that one has also $id_{\underline{n}} \equiv \lambda x^{\underline{n}} x$. This term doesn't belong obviously to the categorical structure described above. It may be noticed that the reduction of $\underline{id}_{\underline{n}}$, to $id_{\underline{n}}$ is not necessary for the categorical construction described above because it would lead us outside this categorical structure and, moreover, one already has $\underline{f}$ o $\underline{id}_{\underline{n}} \leftrightarrow^* \underline{f} \leftrightarrow^* \underline{id}_{\underline{n}}$ o $\underline{f}$. This is a case when in certain categorical structures within λ-calculus the term chosen to represent identity is not necessarily of the form $\lambda x.x$.

Interaction with the copies. The results concerning υ-reduction presented above didn't take into account copies and χ-reduction. In fact when the χ-reduction is added, the identification of $\underline{id}_{\underline{n}}$ and $id_{\underline{n}} \equiv \lambda x^{\underline{n}} x$ may be necessary, since with χ-reduction the following critical pair appears. Let us take Cp: $\underline{n} \to \underline{n}'$ and Cp':$\underline{n}' \to \underline{n}$ (the copy map without change of parameter). We'll have:

$$\underline{id}_{\underline{n}} x \;{}_{\upsilon}\!\leftarrow Cp'(Cp\ x) \to_{\chi} x$$

To avoid non-confluence one can add the following new reduction rule.

Definition 15. (ω-reduction.) The ω-rewriting relation is defined by:

$\underline{id}_{\underline{n}} r \to_{\omega} r$ for every $n \in N$ and term r

and ω-reduction relation is its contextual closure.

Theorem 3. The $\beta\eta\iota\upsilon\chi$ reduction is SN and CR.

Group structure. Now we consider only the case of f: $|n| \to |n|$ associated term representation $\underline{f}$: $\underline{n} \to \underline{n}$. The set of (equivalence classes of) these terms, in presence of υ-reduction, may be considered as a representation of symmetric group, i.e., the group of permutations of the set $\{1,\ldots, n\}$. But the groups are often defined in mathematics using generators and relations, and it is natural to ask, if there is any connection between this definition and the notion of normal form used in lambda-calculus. The normal forms w.r.t. $\beta\eta\iota\upsilon$–reduction have little to do with generators-and-relations representation of symmetric group. But instead of υ-reduction we may consider reductions going in opposite direction, i.e., "splitting" $\underline{f}$ into composition.

It is well known that every permutation f: $|n|\rightarrow|n|$ can be represented as a product of disjoint cycles.

More precisely, f is called cycle if there exists some subset $\{i_1,\ldots, i_k\} \in \{1,\ldots, n\}$ such that $f(i_1) = i_2,\ldots, f(i_{k-1}) = i_k$, $f(i_k) = i_1$ and $f(i) = i$ if $i \notin \{i_1,\ldots, i_k\}$.

Two cycles are disjoint if the corresponding sets $\{i_1,\ldots, i_k\}$ and $\{j_1,\ldots, j_l\}$ have no common elements.

Product in S_n is represented by functional composition of permutations.

If f: $|n|\rightarrow|n|$ then $f = f_1 \circ \ldots f_m$ where $f_1,\ldots, f_m$ are disjoints cycles and the cycles that appear in the product are unique.

Product (composition) of disjoint cycles is commutative but it is possible to order cycles (for example, lexicographically) and to have for every f unique decomposition $f = f_1 \circ \ldots f_m$ with $f_1 \leq \ldots \leq f_m$. This suggests to study the conversion $\underline{f}\ r \rightarrow \underline{f}_1\ (\ \ldots\ (\underline{f}_m\ r)..)$ instead of $\rightarrow_\upsilon$ where $f : |n| \rightarrow |n|$ and $f_1,\ldots, f_m$ are disjoints cycles of the unique decomposition of f.

Definition 16. The υ'-rewriting is defined by

$\underline{f}\, r \rightarrow \underline{f}_1\ (\ \ldots (\underline{f}_m\, r)..)$

for every permutation $f : |n|\rightarrow |n|$, with $n \geq 2$, where f is decompose in $m\geq 2$ pairwise disjoint cycles. The υ'-reduction is defined as its contextual closure.

Theorem 4. $\beta\eta\iota\upsilon$ reduction is SN and CR.

(See [5], [9])

3.3. Functoriality of schemas

In this part we consider most recent results obtained by Freiric Barral. These results concern more general categorical structures in lambda-calculus with inductive types.

When a schema of inductive type $\mu \equiv \mu\alpha[in_1{:}\sigma_{1,1\div j(1)}\rightarrow \alpha, \ldots\ in_p{:}\ \sigma_{p,1\div j(p)} \rightarrow \alpha]$ is given, to everybody familiar with category theory it suggests the question of functoriality of this schema w. r. t. its parameters. Assume that for every choice of parameters the names of introduction operators are fixed. The choice of parameters may be limited in advance by some set of possible values.

In fact, since many categorical structures (with types as objects) were considered on the fragments of lambda-calculus, it may be the set of objects of one of such syntactic categories.

For example, it could be certain set of types of the form $\underline{n}$.

It may be also that only some functions f: $\pi \to \pi'$ are admitted (are considered as morphisms of the underlying category).

If we want to define a functor using the schema of inductive type, it is natural to take as its values on objects the types corresponding to the values of parameter. For simplicity we shall assume that only one occurrence of parameter is modified.

For example, we may consider

$\mathrm{List}(\pi) =_{def} \mu\alpha[\mathrm{nil}_\pi:\alpha, \mathrm{cons}_\pi: \pi \to \alpha \to \alpha]$

(we added the index π to show that the names of introduction operators are different for different values of parameter).

Or we may consider

$\mathrm{Ord} =_{def} \mu\alpha[0_{ord(\nu)}:\alpha, \mathrm{succ}_{ord(\nu)}:\alpha\to\alpha, \lim_\nu: (\nu\to\alpha)\to\alpha]$

where ν is taking only copies of Nat as values.

Notice that in the first case we have covariant occurrence of the parameter and in another contravariant.

The function Cp(f) may be suggested now as the value on morphism f: $\pi \to \pi'$. Indeed, if we shall denote by $\mu(\pi)$, $\mu(\pi')$ the types corresponding to the values π, π' of parameter, we shall have Cp(f): $\mu(\pi) \to \mu(\pi')$ for covariant occurrence and Cp(f): $\mu(\pi') \to \mu(\pi)$ for the contravariant.

The problem will be that the equalities required in category theory: Cp(f) o Cp(g) = Cp(f o g) for covariant occurrence and Cp(f) o Cp(g) = Cp(g o f) for contravariant, and $\mathrm{Cp}(\mathrm{id}_\pi) = \mathrm{id}_{\mu(\pi)}$ will not hold. It turns out that this problem can be solved by appropriate extension of the system of reductions.

Definition 17. The θ-rewriting is defined by

$\mathrm{Cp}(g)(\mathrm{Cp}(f)\ r) \to \theta\ \mathrm{Cp}(\ (f \circ g)^*)\ r$

in case of covariant occurrence of a parameter, and

$\mathrm{Cp}(g)(\mathrm{Cp}(f)\ r) \to \theta\ \mathrm{Cp}(\ (g \circ f)^*)\ r$

in case of contravariant one. Here it is assumed that f, g act on the same occurrence of a parameter, and (f o g)* denotes the $\beta\eta\iota$-normal form of (f o g). The θ-reduction is defined as its contextual closure.

The main reason to consider this reduction is to obtain new categorical structures from already defined ones together with a functor given by the schema of inductive type. It should be noted that in general one may have difficulties with the proof of SN and CR for the calculus extended by θ-reduction but since the underlying categorical structure doesn't necessarily include all the functions f: $\pi \to \pi'$ definable in our calculus it is natural to consider certain restrictions on the structure of term representing f.

Theorem 5. Let in the definition of θ-reduction the following additional constraint be satisfied: f and g should be of the form $\lambda x^{\pi}.x$, of the form $(| t_{1\div n} |)$ (or expansions of such terms) where $t_{1\div n}$ do not contain free variables. Then the βηιθ reduction is SN and CR.

The proof of this theorem is more complex than in previous cases, especially in the part SN. The proof uses again conditional adjournment (in principal case $\to_\theta$ of followed by $\to_\iota$), but in addition we need to prove that in a special case β-reduction is inserable. (In general of course it is not, because, for example, when the term contains a redex of the form the term s can disappear because of β-reduction, and original infinite sequence may originate from s.) The inserability proof uses parallel construction of several partly defined insertion operators and the proof that at least one will indeed produce an infinite sequence of reductions if input sequence was infinite. This is used to obtain a contradiction with SN for βηι reduction.

The constraints we had to impose on the structure of f and g in θ-reduction were necessary for the proof of confluence.

It should be noted that this variant of constraint is not the only possible constraint that will provide the "good behavior" of extended system of reductions. The fact that there are other possibilities is demonstrated by the following example.

We may take as the only object of underlying category the object Nat and as morphisms the functions succ, succ o succ, ... , succ o succ ... o succ: Nat→ Nat. If we shall restrict θ-reduction to the case when f and g are of this form only, the βηιθ reduction will be SN and CR.

At the moment we work on more general description of possible constraints to be imposed on θ–reduction.

4. Conclusion

Probably one of the main reasons why the "Types" community didn't yet study actively the extensions of standard reduction systems is that very little success and a lot of technical difficulties was expected. There are some exceptions [10], and hopefully more and more. Another reason is that there is still too much separation between groups working on theoretical aspects of formal methods and their applications, and between different approaches. One may mention two European research projects: "Types" and "Calculemus". While the people working on theoretical analysis of formal systems possess necessary methods and could prove useful innovative results, they are often satisfied with much less innovative solutions of standard problems. Within the class of problems we consider here it might be standard $\beta\eta$ normalizability for slightly modified calculus.

The groups working on practical aspects and implementation of theorem provers, proof assistants and alike, leave fundamental questions unanswered, or provide makeshift answers that, in long term, cannot satisfy competent user. One example cited above is the problem of extensional versus intensional equality. It is difficult to imagine a user, if only this user does not consider the answer provided by "scientifically approved" proof assistant as an oracle, who would accept that, for example, that the multiplication by 2 followed by (integer) division by 2 does not define identity on Nat. But with respect to intentional equality is not identity function.

Our methods permit to introduce simple extension of reduction system where it will be identity function.

In general the properties of extensions of reduction systems are not always easily proved, and there is many cases when they do not have good properties with respect to reduction at all.

One example "close at hand" would be the isomorphism between Nat and Nat $\times$ Nat. It holds extensionally because Nat $\times$ Nat can be enumerated, but the attempt to add "supporting" reductions, following χ-reduction as a model, fails (one doesn't obtain SN and CR system).

The point is that in many cases extensions with good properties can be successfully obtained. Moreover, this is true for some cases that are conceptually important, as with copies.

One may note that the Cp(f) permits to obtain new isomorphisms from already existing. The isomorphisms already have important role in applications, for example, for invertible transformations of data, so called "middleware", data search etc.

The same potential to generate new categorical structures from already existing within lambda-calculus has the theorem about functoriality of the schemas of inductive types w.r.t their parameters in an extension of standard reduction system that still has good properties, i.e., is convergent.

REFERENCES

1. *Akama Y.* On Mints' reductions for ccc-calculus // Lecture Notes in Computer Science. Vol. 664. P.1-12 (1993).
2. *Baader F. and Nipkow T.* Term rewriting and all that. Cambridge University Press, N. Y., 1998.
3. *Bachmair L. and Dershowitz N.* Commutation, transformation and termination // Lecture Notes in Computer Science. Vol. 230. P. 5-20 (1986).

4. *Barendreg H. and Barendsen E.* Autarkic computations in formal proofs // J. Autom. Reasoning. Vol. 28(3). P. 321-336 (2002).
5. *Chemouil D.* "Types inductifs, isomorphismes et recriture extensionnelle". Ph.d. thesis. Universite Toulouse 3 (2004).
6. *Chemouil D. and Soloviev S.* Remarks on Isomorphisms of Simple Inductive Types // H. Geuvers, F. Kamareddine, eds. Electronic Notes in Theoretical Computer Science. Vol. 85. Elsevier (2003).
7. *Di Cosmo R.*. On the power of simple diagrams // Harald Ganzinger, ed. Proceedings of the 7-th International Conference on Rewriting Techniques and Applications (RTA- 96). Lecture Notes in Computer Science. Vol. 1103. P. 200-214,Springer (1996).
8. *Gezer A.*. "Relative termination". Ph.D. thesis. University of Passau, Germany (1990).
9. *Soloviev S. and Chemouil D.* Some algebraic structures in lambda-calculus with inductive types // Stefano Berardi, Mario Coppo and Ferruccio Damiani, eds. Proc. Types'03. Lecture Notes in Computer Science. Vol. 3085, Springer (2004).
10. *Walukiewicz-Chrzaszcz D.* Termination of rewriting in the calculus of constructions // J. of Functional Programming. Vol. 13(2). P. 339-414 (2003).

СОДЕРЖАНИЕ

CONTENTS

Научное издание

Логические исследования
Вып. 12

Утверждено к печати
Институтом философии РАН

Зав. редакцией *Г.И. Чертова*

Редактор *Е.А. Жукова*
Художественный редактор *Т.В. Болотина*

Компьютерный набор выполнен
в Институте философии РАН
Компьютерная верстка
С.А. Павлов

Подписано к печати 30.11.2005. Формат $60 \times 90^1/_{16}$
Гарнитура Таймс. Печать офсетная
Усл. печ. л. 20,0. Усл. кр.-отт. 20,3. Уч.-изд. л. 20,6
Тип. зак. 4479

Издательство «Наука»
117997, Москва, Профсоюзная ул., 90

E-mail: secret@naukaran.ru
www.naukaran.ru

Отпечатано с готовых диапозитивов
в ГУП «Типография «Наука»
199034, Санкт-Петербург, 9 линия, 12