РОССИЙСКАЯ АКАДЕМИЯ НАУК

ИНСТИТУТ ФИЛОСОФИИ

LOGICAL INVESTIGATIONS

Volume 13

MOSCOW NAUKA 2006

ЛОГИЧЕСКИЕ ИССЛЕДОВАНИЯ

Выпуск 13

МОСКВА НАУКА 2006

УДК 16
ББК 87.4
Л69

Логические исследования / [отв. ред. А.С. Карпенко] ; Ин-т философии РАН. – М. : Наука, 1993. – . –

Вып. 13. – М. : Наука, 2006. – 308 с. – ISBN 5-02-035152-0 (в пер.)

В данный сборник «Логических исследований» включены наиболее важные результаты, полученные в различных областях логики за последнее время. Основное внимание уделено развитию неклассических логик. В первую очередь это относится к интуиционистской логике, непрерывной логике, логике знаний, логике направленности и изменения, модальной логике, логике аргументации и таким новым направлениям, как логика альтернативного отношения следования и универсальная логика. Исследуется также агоритмическая проблематика.

Для логиков, философов, математиков и всех тех, кто интересуется ее различными приложениями.

ТП 2006-II-24

Logical Investigations. – Vol. 13. – M. : Nauka, 2006. – 308 p. – ISBN 5-02-035152-0

This volume of «Logical Investigations» contains papers presenting new results in various areas of logic such as intuitionistic logic, continuous logic, logic of knowledge, modal logic, logic of argumentation, logic of alternative consequence negation, and universal logic.

The publication is addressed to logicians, philosophers, mathematicians, and those interested in logic and its applications.

ISBN 5-02-035152-0

Общий метод доказательства разрешимости интуиционистских модальных логик[1]

Н.А. Алешина, Д.П. Шкатов[2]

ABSTRACT. We generalise the result of [10] on decidability of the two variable monadic guarded fragmet of first order logic with constraints on the guard relations expressible in monadic second order logic. In [10] such constraints apply to one relation at a time. We modify their proof to obtain decidability for constraint involving several relations. Now we can use this result to prove decidability of multi-modal logics where conditions on accessibility relations involve more than one relation. Our main application is intuitionistic modal logic, where the intuitionistic and modal accessibility relations usually interact in a non-trivial way.

1 Введение

В настоящей статье мы предлагаем новый общий метод доказательства разрешимости интуиционистских модальных логик. Этот метод опирается на доказываемое в настоящей работе обобщение результата Ганцингера, Мейера и Вианеса (см. [10]) о том, что двухпеременный монадический защищенный фрагмент GF^2_{mon} классической первопорядковой логики, в котором на некоторое отношение, встречающееся в защитниках, наложено условие, выразимое как условие замкнутости, определимое в монадической второпорядковой логике, разрешим. Мы обобщаем этот результат на случай, когда условия упомянутого вида накладываются на более, чем одно отношение. Такое обобщение позволяет нам доказать разрешимость широкого класса интуиционистских модальных систем путем их погружения в этот раз-

---

[1]Настоящая статья была опубликована на английском языке в Journal of Applied Logic, Vol 4, N. Alechina, D. Shkatov, A general method for proving decidability of intuitionistic modal logics, pp. 219-230. Публикуется с разрешения Elsevier.

[2]Работа поддержана РГНФ. Грант № 04-03-02660.

решимый фрагмент. Общие результаты о разрешимости и свойстве конечной модели интуиционистских модальных логик были доказаны в [23], [24] и [25] путем погружения интуиционистских модальных логик с n модальностями в классические модальные логики с $n+1$ модальностями, называемые классическими напарниками интуиционистских логик. Однако эти результаты могут быть использованы только для доказательства разрешимости тех интуиционистских логик, разрешимость классических напарников которых уже установлена.

2 Двухпеременный монадический защищенный фрагмент

Начнем с определения двухпеременного монадического защищенного фрагмента GF^2_{mon}, сформулированного в [10]. В нижеследующих определениях $FV(\varphi)$ обозначает множество свободных переменных формулы φ и $\bar{x}$ обозначает упорядоченную последовательность переменных. Мы предполагаем, что наш первопорядковый язык содержит предикатные параметры произвольной местности и предикатную константу равенства $=$, но не содержит ни индивидных, ни функциональных параметров.

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 1. Защищенным фрагментом GF первопорядковой логики будем называть наименьшее множество формул, содержащее все первопорядковые атомарные формулы и замкнутое относительно булевых связок и нижеследующего правила: если ρ — атомарная формула, $\varphi \in GF$ и $\bar{x} \subset FV(\varphi) \subset FV(\rho)$, то $\exists\bar{x}(\rho \wedge \varphi) \in GF$ и $\forall\bar{x}(\rho \to \varphi) \in GF$.

Формулу ρ в $\exists\bar{x}(\rho \wedge \varphi)$ и $\forall\bar{x}(\rho \to \varphi)$ будем называть формулой-защитником или, для краткости, просто защитником.

Двухпеременным монадическим защищенным фрагментом GF^2_{mon} будем называть наименьшее подмножество GF, содержащее формулы φ такие, что (i) φ содержит не более двух переменных (свободных или связанных), и (ii) все неунарные предикатные параметры φ содержатся в защитниках.

3 Условия замкнутости

В настоящем разделе мы определяем вид накладываемых на защитников GF^2_{mon} условий, порождающих разрешимые фрагменты первопорядковой логики. При этом мы обобщаем понятие mso-определимых условий замкнутости из [10] таким образом, что оно становится применимым к более чем одному отношению, обозначенному предикатными параметрами формул GF^2_{mon}.

Сначала определим простые и параметризованные операторы замыкания на отношениях.

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 2. Пусть W — это непустое множество. Будем называть унарную функцию C на 2^W простым оператором замыкания, если для всех $\mathcal{P}, \mathcal{P}' \subseteq W$ имеют место следующие условия:

1. $\mathcal{P} \subseteq C(\mathcal{P})$ (C растет),

2. $\mathcal{P} \subseteq \mathcal{P}'$ влечет $C(\mathcal{P}) \subseteq C(\mathcal{P}')$ (C монотонна)

3. $C(\mathcal{P}) = C(C(\mathcal{P}))$ (C идемпотентна).

Будем называть $n+1$-местную функцию C на 2^W параметризованным оператором замыкания, если $C(\mathcal{P}_1, \ldots, \mathcal{P}_n, -)$ является простым оператором замыкания для любых $\mathcal{P}_1, \ldots, \mathcal{P}_n \subseteq W$. Мы будем обозначать при помощи $C^{\mathcal{P}_1, \ldots, \mathcal{P}_n}$ операторы замыкания, параметризованные отношениями $\mathcal{P}_1, \ldots, \mathcal{P}_n$.

ПРИМЕР 3. Оператор рефлексивного, транзитивного замыкания бинарных отношений $TC(\mathcal{P})$, отображающий бинарное отношение $\mathcal{P}$ в его рефлексивное, транзитивное замыкание $\mathcal{P}^*$, является простым оператором замыкания.

ПРИМЕР 4. Функция $Incl^{\mathcal{P}'}(\mathcal{P}) = \mathcal{P}' \cup \mathcal{P}$ является оператором замыкания, параметризованным отношением $\mathcal{P}'$.

Теперь мы определим простые и параметризованные условия замкнутости.

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 5. Будем называть условие, наложенное на отношение $\mathcal{P}$, простым условием замкнутости, если оно может быть выражено в виде равенства $C(\mathcal{P}) = \mathcal{P}$, где C — простой оператор замыкания.

Будем называть условие, наложенное на отношение $\mathcal{P}$, параметризованным условием замкнутости, если оно может быть выражено в виде равенства $C^{\mathcal{P}_1, \ldots, \mathcal{P}_n}(\mathcal{P}) = \mathcal{P}$, где $C^{\mathcal{P}_1, \ldots, \mathcal{P}_n}$ — параметризованный оператор замыкания.

ПРИМЕР 6. Рефлексивность-и-транзитивность является простым условием замкнутости, поскольку оно может быть выражено в виде равенства $TC(\mathcal{P}) = \mathcal{P}$ и мы показали в примере 3, что TC — это простой оператор замыкания.

ПРИМЕР 7. Условие $\mathcal{P}' \subseteq \mathcal{P}$ является условием замкнутости на $\mathcal{P}$, параметризованным отношением $\mathcal{P}'$, поскольку оно может быть выражено в виде равенства $Incl^{\mathcal{P}'}(\mathcal{P}) = \mathcal{P}$ и мы показали в примере 4, что $Incl^{\mathcal{P}'}$ — это параметризованный оператор замыкания.

Имея совокупность наложенных на множество отношений S условий замкнутости, мы не хотим допустить эффекта «порочного круга» при замыкании отношений из S.

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 8. Пусть S — конечное множество отношений, $\mathbf{C}$ — множество условий замкнутости, наложенных на эти отношения, и $\mathbf{C}(\mathcal{P})$ — все условия замкнутости из $\mathbf{C}$, наложенные на отношение $\mathcal{P}$ из S. Будем называть $\mathbf{C}$ ацикличным, если имеется такое упорядочивание $\mathcal{P}_1, \ldots, \mathcal{P}_n$ множества S, что $\mathbf{C}(\mathcal{P}_{i+1})$ не содержит параметров, отличных от $\mathcal{P}_1, \ldots, \mathcal{P}_i$.

Более того, нам интересны не любые операторы замкнутости, а только те, которые могут быть определены формулами монадической второпорядковой логики. Обозначим при помощи $\|\varphi(x_1, \ldots, x_n)\|^{\mathcal{M}}$ множества n-ок, выполняющих монадическую второпорядковую формулу φ в модели $\mathcal{M}$.

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 9. Будем называть оператор замыкания $C^{\mathcal{P}_1,\ldots,\mathcal{P}_m}$ на n-местных отношениях mso-определимым, если существует монадическая второпорядковая формула $\overline{C_P^{P_1,\ldots,P_m}}$, содержащая предикатные параметры $P_1, \ldots, P_m$ и P, такая, что для любой модели $\mathcal{M}$ и любой n-местной формулы (то есть формулы с n свободными переменными) φ имеет место

$$C^{\mathcal{P}_1,\ldots,\mathcal{P}_m}(\|\varphi\|^{\mathcal{M}}) = \|\overline{C_P^{P_1,\ldots,P_m}}(\varphi/P))\|^{\mathcal{M}}.$$

ПРИМЕР 10. Оператор замыкания TC определим монадической второпорядковой формулой

$$\overline{TC_P}(z_1, z_2) = \forall X(X(z_1) \wedge \forall x, y(X(x) \wedge P(x, y) \to X(y)) \to X(z_2))$$

Для того, чтобы убедиться в том, что $\overline{TC_P}$ определяет рефлексивное, транзитивное замыкание отношения $\mathcal{P}$, предположим, что имеется $\mathcal{P}$-цепь $w_1\mathcal{P}w_2 \dots w_{n-1}\mathcal{P}w_n$, связывающая w_1 с w_n, и что имеют место $\mathcal{X}(w_1)$ и $\forall x, y(X(x) \wedge P(x, y) \to X(y))$. Тогда $\mathcal{X}(w_1)$ влечет $\mathcal{X}(w_2)$ ...влечет $\mathcal{X}(w_n)$; значит, $\overline{TC_P}(z_1, z_n)$ истинна при таком α, что $\alpha(z_1) = w_1$ и $\alpha(z_2) = w_2$. Для доказательства в обратную сторону предположим, что не существует $\mathcal{P}$-цепи, связывающей w_1 с w_n. Припишем переменной X множество $\mathcal{X}$, содержащее w_1 и все элементы модели, которые $\mathcal{P}$-достижимы из w_1. Тогда $\mathcal{X}(w_n)$ не имеет места, и следовательно, $\overline{TC_P}(w_1, w_n)$ ложна при таком α, что $\alpha(z_1) = w_1$ и $\alpha(z_2) = w_2$.

ПРИМЕР 11. Оператор замыкания $Incl^{\mathcal{P}'}$ определим монадической второпорядковой (на самом деле первопорядковой) формулой $\overline{Incl_P^{P'}}(z_1, z_2) = P'(z_1, z_2) \vee P(z_1, z_2)$.

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 12. Будем называть (простое или параметризованное) условие замкнутости, наложенное на отношение $\mathcal{P}$, mso-определимым, если оно может быть выражено при помощи равенства, содержащего mso-определимый (простой или параметризованный) оператор замыкания.

Следующим шагом мы обобщим результат [10] таким образом, чтобы он был применим не только к GF^2_{mon} с единственным mso-определимым условием замкнутости, наложенным на отношения, обозначенные предикатными параметрами формул, но и к множествам mso-определимых условий замкнутости.

ТЕОРЕМА 13. *Пусть $\varphi \in GF^2_{mon}$ и $\boldsymbol{C}$ — ацикличное множество mso-определимых условий замкнутости, наложенных на отношения из φ, такое, что на каждое отношениене наложено не более одного условия замкнутости. Проблема выполнимости φ в модели, удовлетворяющей всем условиям из $\boldsymbol{C}$, разрешима.*

Доказательство. Доказательство похоже на доказательство, предложенное в [10] для непараметризованных условий замкнутости. На самом деле наше доказательство существенно упрощает доказательство из [10], поскольку в [10] все отношения замыкаются относительно эквивалентности (что требуется из-за присутствия в языке константы равенства), а замкнутость относительно эквивалентности — это частный случай параметризованного условия замкнутости, что означает, что мы не должны уделять ей специального внимания в ходе нашего доказательства.

Пусть $\varphi \in GF^2_{mon}$ и пусть $\mathbf{C}$ — ациклическое множество mso-определимых условий замкнутости на отношения из φ. Мы знаем, что φ выполнима в модели, удовлетворяющей всем условиям из $\mathbf{C}$, если и только если сколемовская форма φ, которую мы будем называть N, выполнима в эрбрановой модели, в которой имеют место все условия из $\mathbf{C}$. Идея доказательства заключается в сведении проблемы выполнимости N в эрбрановой модели, в которой имеют место все условия из $\mathbf{C}$, к проблеме выполнимости формул SkS (монадической второпорядковой теории деревьев с постоянным фактором ветвления k), где k — это число сколемовских функциональных символов в N. Мы построим монадическую второпорядковую формулу MSO_N в словаре SkS (который содержит унарные предикатные параметры, унарные функциональные параметры и равенство) такую, что MSO_N выполнма в древовидной модели, если и только если N имеет эрбрановскую модель, выполняющую все условия из $\mathbf{C}$. Построение формулы MSO_N будет произведено в три шага: (1) определение напарников предикатных букв, (2) определение напарников предложений N и (3) определение напарника для самой N.

Шаг 1. Для каждой предикатной буквы P, имеющей вхождение в N, построим формулу φ_P в словаре SkS.

Пусть $P(\overline{t_1}), \ldots, P(\overline{t_m})$ — это все позитивные литералы N, содержащие P. Заметим, что, поскольку $\varphi \in GF^2_{mon}$, то каждая P является или унарной или бинарной предикатной буквой; значит, каждый позитивный литерал содержит не более одной свободной переменной. Для каждого из вышеперечисленных $P(\overline{t_i})$ введем новую унарную второпорядковую переменную $X_{P(\overline{t_i})}$. Пусть $\bar{t}[z]$ — результат подстановки переменной z вместо свободной переменной $\bar{t}$. Тогда, если P — унарная предикатная буква, то

$$\varphi_P(z_1) = \bigvee_{i=1}^{m} \exists z (X_{P(t_i)}(z) \wedge z_1 = t_i[z])$$

и, если P — бинарная предикатная буква, то

$$\varphi_P(z_1, z_2) = \bigvee_{i=1}^{m} \exists z(X_{P(t_{i1}, t_{i2})}(z) \wedge z_1 = t_{i1}[z] \wedge z_2 = t_{i2}[z]).$$

Интуитивно, отношение, определяемое формулой φ_P, является минимальным расширением P.

Теперь, для каждой предикатной буквы P, на которую наложено условие замкнутости, определим замыкание ψ_P формулы φ_P по отношению к условиям замкнутости, наложенным на P. Для каждой такой P имеется единственное условие замкнутости C_P, которое может быть параметризовано другими предикатными буквами. Для простоты изложения предположим, что C_P параметризовано единственной предикатной буквой P', на которую наложено простое условие замкнутости $C_{P'}$. Тогда $C_{P'}$ определимо при помощи монадической второпорядковой формулы $\overline{C_{P'}}(z_1, z_2)$, содержащей P', и C_P определимо при помощи монадической второпорядковой формулы $\overline{C_P^{P'}}(z_1, z_2)$, содержащей P' и P. Сначала определим замыкание P' по отношению к наложенному на него простому условию замкнутости:

$$\psi_{P'}(z_1, z_2) = \overline{C_{P'}}(z_1, z_2)[\varphi_{P'}/P'],$$

то есть мы заменяем каждое вхождение P' в $\overline{C_{P'}}(z_1, z_2)$ на $\varphi_{P'}$.

Затем определим замыкание P по отношению к наложенному на него параметризованному условию замкнутости:

$$\psi_P(z_1, z_2) = \overline{C_P^{P'}}(z_1, z_2)[\psi_{P'}/P', \varphi_P/P].$$

В общем случае для любого ацикличного множества условий $\mathbf{C}$, наложенных на множество отношений S, мы сначала должны определить простые замыкания, затем замыкания, параметризованные отношениями с простыми условиями замкнутости, и так далее. Ацикличность $\mathbf{C}$ гарантирует, что эта процедура может быть успешно завершена.

Шаг 2. Для каждого предложения $\chi = \{\rho_1, \ldots, \rho_l\}$ из N построим формулу MSO_χ в словаре SkS.

Для каждого литерала ρ из χ формула MSO_ρ определяется в соответствии со следующим правилом:

$$MSO_\rho = \begin{cases} X_\rho(x), & \text{если } \rho \text{ — это атом со свободной переменной } x \\ \exists z X_\rho(z), & \text{если } \rho \text{ — это атом без свободных переменных} \\ \neg\psi_P(\bar{t}), & \text{если } \rho \text{ — это } \neg P(\bar{t}), \end{cases}$$

где ψ_P — это формула, построенная на шаге 1. Теперь определим MSO_χ как $MSO_\chi = \bigvee_{\rho\in\chi} MSO_\rho$.

Шаг 3. Наконец, положим, что $MSO_N = \exists\overline{X}\forall\overline{x}\bigwedge_{\chi\in N} MSO_\chi$, где $\overline{X}$ — это все свободные второпорядковые и $\overline{x}$ — все свободные первопорядковые переменные $\bigwedge_{\chi\in N} MSO_\chi$.

Наи остается показать, что N имеет эрбранову модель, удовлетворяющую всем условиям из **C**, если и только если MSO_N выполнима в древовидной модели. Пусть $\mathcal{T}$ — это дерево, соответствующее алгебре термов эрбранового универсума нашей формулы N.

Сначала докажем требуемое утверждение слева направо. Допустим, что N имеет эрбранову модель $\mathcal{A}$, выполняющую все условия замкнутости из C. Нам нужно доказать, что $\mathcal{T}$ выполняет MSO_N. Следующим образом зафиксируем «свидетелей» для второпорядковых переменных X_ρ формулы MSO_N:

(i) Если $\overline{t_i}$ содержит свободные переменные, то $X_{P(\overline{t_i})} = \{w : \mathcal{A} \models P(\overline{t_i}[w])\}$.

(ii) Если $\overline{t_i}$ не содержит свободных переменных, то $X_{P(\overline{t_i})}$ — это произвольное непустое множество.

Мы знаем, что для каждого предложения χ из N и каждой последовательности $\overline{w}$ имеет место $\mathcal{A} \models \chi(\overline{w})$. Это означает, что для каждой $\overline{w}$ имеется литерал ρ из χ такой, что $\mathcal{A} \models \rho(\overline{w})$. Мы покажем, что для любых $\overline{w}$ и ρ, если $\mathcal{A} \models \rho(\overline{w})$, то $\mathcal{T} \models MSO_\rho(\overline{w})$. Следовательно, $\mathcal{A} \models \chi(\overline{w})$ влечет $\mathcal{T} \models MSO_\chi(\overline{w})$.

Мы должны рассмотреть три случая, в соответствии с видом литерала ρ. Первые два случая (ρ — это атом $P(\overline{t_i})$ со свободными переменными и ρ — это атом без свободных переменных) в точности совпадают с доказательством из [10], и потому мы их здесь опускаем. Если ρ — это негативный литерал $\neg P(\overline{t_i})$, то мы должны показать, что $\mathcal{T} \models \neg\psi_P(\bar{t})(\overline{w})$. Для этого достаточно показать, что $\|\psi_P\|^{\mathcal{A}} \subseteq P^{\mathcal{A}}$. Действительно, из этого и из нашего предположения, что $\mathcal{A} \models \neg P(\bar{t})[\overline{w}]$, следует $\mathcal{T} \models \neg\psi_P(\overline{w})$. Итак, определение $\mathcal{T}$ гарантирует, что $\|\varphi_P\|^{\mathcal{A}} \subseteq P^{\mathcal{A}}$. Значит, поскольку операторы замыкания монотонны, $C_P^{P_1^{\mathcal{A}}}(\|\varphi_P\|^{\mathcal{A}}) \subseteq C_P^{P_1^{\mathcal{A}}}(P^{\mathcal{A}})$. В соответствии с определением ψ_P, $C_P^{P_1^{\mathcal{A}}}(\|\varphi_P\|^{\mathcal{A}}) = \|\psi_P\|^{\mathcal{A}}$; кроме того, поскольку $\mathcal{A}$ выполняет все условия из $\mathbf{C}$, $C_P^{P_1^{\mathcal{A}}}(P^{\mathcal{A}}) = P^{\mathcal{A}}$; следовательно, $\|\psi_P\|^{\mathcal{A}} \subseteq P^{\mathcal{A}}$.

Теперь докажем требуемое утверждение справа налево. Предположим, что MSO_N истинна в $\mathcal{T}$. Следующим образом определим эрбрановскую модель $\mathcal{A}$. Универсумом $\mathcal{A}$ является множество узлов дерева $\mathcal{T}$, и $P^{\mathcal{A}} = \|\psi_P\|$. Сначала докажем, что $\mathcal{A}$ выполняет все условия из $\mathbf{C}$. Для этого мы должны показать, что $C_P^{\mathcal{P}_1}(P^{\mathcal{A}}) = P^{\mathcal{A}}$. Действительно, $C_P^{P_1^{\mathcal{A}}}(P^{\mathcal{A}}) = C_P^{P_1^{\mathcal{A}}}(\|\psi_P\|) = C_P^{\|\psi_{P_1}\|}(C_P^{\|\psi_{P_1}\|}(\|\varphi_P\|)) = C_P^{\|\psi_{P_1}\|}(\|\varphi_P\|) = \|\psi_P\| = P^{\mathcal{A}}$.

Наконец, мы должны показать, что $\mathcal{A}$ выполняет все предложения из N. Эта часть доказательства в точности совпадает с доказательством, приведенным в [10], поэтому мы ее здесь опускаем. Q.E.D.

4 Интуиционистские модальные логики

Одним из наиболее интересных приложений теоремы 13, доказанной в предыдущем разделе, являются пропозициональные интуиционистские модальные логики, то есть модальные логики, чьей базовой логикой является не классическая, а интуиционистская пропозициональная логика. Интуиционистским модальным логикам посвящена огромная литература, например [9, 3, 4, 5, 19, 13, 15, 16, 11, 8, 18, 6, 22, 24, 23, 25]. Всеобъемлющий обзор может быть найден в [20]; ссылки на более поздние работы могут быть найдены в [26] и [17].

Интерес к изучению интуиционистких модальных логик вызван рядом причин. Во-первых, многие логики (которых принято называть «интуиционистами») по философским соображениям склонны считать интуиционистскую, а не классическую логику той логикой, которую мы должны использовать для проверки корректности рассуждений. Естественным образом, при формализации рассуждений о возможности и необходимости интуиционисты хотят использовать интуиционистскую, а не классическую логику в качестве базиса для построения модальных логик. Во-вторых, в недавнее время интуиционистские логики стали применяться для формального моделирования задач, возникающих в различных приложениях логики, главным образом в теоретической компьютеристике. Например, Могги в [14] расширил формальную семантику функциональных языков программирования, основанную на λ-исчислении с типами, новой конструкцией, монадой, используемой для формального моделирования различных эффектов функциональных языков (например, порождение исключений). Хорошо известна тесная связь между λ-исчислением с простыми типами и интуиционистской пропозициональной логикой (через так называемый изоморфизм Карри—Ховарда); оказалось, что монады при этом соответствуют модальностям типа **S4**. Интуиционистские модальные логики также были использованы для моделирования неполной информации (см. [22]), систем коммуникации (см. [21]) и методов проверки компьютерного оборудования (см. [12, 7]).

Для построения интуиционистских модальных языков к языку пропозициональной интуиционистской логики, содержащему множество пропозициональных параметров $\Phi = \{p_1, p_2, \ldots\}$, унарную связку $\sim$ (отрицание «неверно, что ...») и бинарные связки $\wedge$ (конъюнкция «и»), $\vee$ (дизъюнкция «или») и $\Rightarrow$ (импликация «если ..., то ...»), добавляют обе или одну из связок $\Diamond$ (возможность) и $\Box$ (необходимость). Для обозначения интуиционистских отрицания и импликации мы используем символы, отличные от символов, использованных нами для обозначения классических отрицания и импликации, во-первых, потому, что эти связки имеют различное значение в классической и интуиционистской логиках, и, во-вторых, потому, что позднее нам понадобится одновременно использовать и классические и интуиционистские связки в одном и том же контексте. Аналогично кванторам $\forall$ и $\exists$ в интуиционистских логиках $\Box$ и $\Diamond$ не обязательно являются дуалами друг друга; поэтому, в отличие от того, как это делается в случае классических модальных логик, в интуиционистских модальных логиках $\Box$ и $\Diamond$ следует рассматривать как независимые модальности. В интуиционистских модальных логиках некоторые из классически общезначимых формул необщезначимы; наиболее очевидным примером является формула $\Box(\varphi \vee \sim \varphi)$, так как «закон исключенного третьего» интуиционистски неприемлем. Возможно, более неожиданно, что в некоторых интуиционистских логиках «проваливается» формула $\Diamond(\varphi \vee \psi) \equiv (\Diamond\varphi \vee \Diamond\psi)$ (см., например, [22]).

Семантика крипкевского типа для интуиционистских модальных логик расширяет семантику крипкевского типа для пропозициональной интуиционистской логики. Интуиционистскими крипкевскими моделями являются структуры $\mathcal{M} = (W, \mathcal{R}, V)$ такие, что (i) $W \neq \emptyset$, (ii) $\mathcal{R}$ — это рефлексивное и транзитивное бинарное отношение на W и (iii) V — это функция из множества пропозициональных параметров Φ в 2^W такая, что для любых $w \in W$ и $p \in \Phi$ имеет место следующее: если $w \in V(p)$ и $w\mathcal{R}v$, то $v \in V(p)$ (это условие обычно называется «наследованием»). Элементы W мы будем называть точками. Истина в точке модели определяется следующим образом ($\rightarrow$ и $\neg$, как и прежде, обозначают классические импликацию и отрицание соответственно):

$\mathcal{M}, w \Vdash p$	е.т.е.	$w \in V(p)$;
$\mathcal{M}, w \Vdash\sim \varphi$	е.т.е.	$\forall v(\mathcal{R}(w,v) \rightarrow \neg(\mathcal{M}, v \Vdash \varphi))$;
$\mathcal{M}, w \Vdash \varphi \wedge \psi$	е.т.е.	$\mathcal{M}, w \Vdash \varphi$ и $\mathcal{M}, w \Vdash \psi$;
$\mathcal{M}, w \Vdash \varphi \vee \psi$	е.т.е.	$\mathcal{M}, w \Vdash \varphi$ или $\mathcal{M}, w \Vdash \psi$;
$\mathcal{M}, w \Vdash \varphi \Rightarrow \psi$	е.т.е.	$\forall v(\mathcal{R}(w,v) \rightarrow (\neg(\mathcal{M}, v \Vdash \varphi)$ или $\mathcal{M}, v \Vdash \psi)$.

Для оценки формул вида $\Box\varphi$ и $\Diamond\varphi$ в интуиционистские крипкевские модели добавляют бинарные отношения $\mathcal{R}_\Box$ и $\mathcal{R}_\Diamond$. Не существует единого, общепризнанного определения значения связок $\Box$ и $\Diamond$ в интуиционистской логике. Все из нижеследующих определений встречаются в литературе (всеобъемлющий обзор различных определений $\Box$ и $\Diamond$ в интуиционистском контексте может быть найден в главе 3 дисссертации [20]):

$(\Box_1)$ $\mathcal{M}, w \Vdash \Box\varphi$	е.т.е.	$\forall v(w\mathcal{R}_\Box v \rightarrow \mathcal{M}, v \Vdash \varphi)$
$(\Box_2)$ $\mathcal{M}, w \Vdash \Box\varphi$	е.т.е.	$\forall v(w\mathcal{R}v \rightarrow \forall u(v\mathcal{R}_\Box u \rightarrow \mathcal{M}, u \Vdash \varphi))$
$(\Diamond_1)$ $\mathcal{M}, w \Vdash \Diamond\varphi$	е.т.е.	$\exists v(w\mathcal{R}_\Diamond v \wedge \mathcal{M}, v \Vdash \varphi)$
$(\Diamond_2)$ $\mathcal{M}, w \Vdash \Diamond\varphi$	е.т.е.	$\forall v(w\mathcal{R}v \rightarrow \exists u(v\mathcal{R}_\Diamond u \wedge \mathcal{M}, u \Vdash \varphi))$

Заметим, что условие $(\Diamond_2)$ определяет модальность, не являющуюся дистрибутивной по отношению к дизъюнкции. Соответственно логики с оператором возможности, определенным таким образом, обычно называются ненормальными интуиционистскими модальными логиками.

Кроме требования, что $\mathcal{R}$ должно быть рефлексивным и транзитивным, семантики интуиционистских модальных логик накладывают дополнительные условия на $\mathcal{R}$, $\mathcal{R}_\Box$ и $\mathcal{R}_\Diamond$. Как правило, эти условия постулируют, как отношения $\mathcal{R}$, $\mathcal{R}_\Box$ и $\mathcal{R}_\Diamond$ взаимодействуют между собой. Например, следующие условия обычно сопровождают условия истинности ($\Box_1$) и ($\Diamond_1$) (см. [24]):

(1) $\mathcal{R} \circ \mathcal{R}_\Box \circ \mathcal{R} = \mathcal{R}_\Box$

(2) $\mathcal{R} \circ \overline{\mathcal{R}_\Diamond} \circ \mathcal{R} = \overline{\mathcal{R}_\Diamond}$

В вышеприведенных условиях $\circ$ обозначает композицию отношений, которая определяется следующим образом:

$$\mathcal{R} \circ \mathcal{R}' = \{ (x,y) : \exists z \ ((x,z) \in \mathcal{R} \ \wedge (z,y) \in \mathcal{R}') \}$$

и $\overline{\mathcal{R}}$ обозначает обратное отношение, которое определяется следующим образом:

$$\overline{\mathcal{R}} = \{ (y,x) : (x,y) \in \mathcal{R} \}.$$

Другое условие, встречающееся в литературе (см., например, [7]), постулирует, что

(3) $\mathcal{R}_\Diamond \subseteq \mathcal{R}$

Оказывается, что многие из условий, налагаемых на отношения $\mathcal{R}$, $\mathcal{R}_\Box$ и $\mathcal{R}_\Diamond$, в том числе приведенные выше условия (1)–(3), являются mso-определимыми условиями замкнутости, определенными в разделе 3. Для того чтобы убедиться, что это так в случае условия (3), достаточно взглянуть на примеры 4 и 7. Следующая теорема показывает, что (1) и (2) также являются mso-определимыми условиями замкнутости.

ТЕОРЕМА 14. *Любое условие вида $\mathcal{P} = \mathcal{P}' \circ \mathcal{P} \circ \mathcal{P}'$ является mso-определимым условием замкнутости, если $\mathcal{P}'$ рефлексивно и транзитивно.*

Доказательство. Рассмотрим функцию $Comp^{\mathcal{P}'}(\mathcal{P}) = \mathcal{P}' \circ \mathcal{P} \circ \mathcal{P}'$. Если $\mathcal{P}'$ рефлексивно и транзитивно, то $\mathcal{P} \subseteq \mathcal{P}' \circ \mathcal{P} \circ \mathcal{P}'$ в силу рефлексивности $\mathcal{P}'$. Очевидно, что $\mathcal{P}' \circ \mathcal{P} \circ \mathcal{P}'$ монотонна по отношению к $\mathcal{P}$; кроме того, $Comp^{\mathcal{P}'}$ идемпотентна в силу транзитивности $\mathcal{P}'$. Это доказывает, что если $\mathcal{P}'$ рефлексивно и транзитивно, то $Comp^{\mathcal{P}'}$ — это оператор замкнутости. Условия вида $\mathcal{P}' \circ \mathcal{P} \circ \mathcal{P}' = \mathcal{P}$ могут быть выражены как условие замыкания: $Comp^{\mathcal{P}'}(\mathcal{P}) = \mathcal{P}$. Это условие mso-определимо; на самом деле оно определимо первопорядковой формулой:

$$\overline{Comp^{\mathcal{P}'}_{\mathcal{P}}}(z_1, z_2) = \exists x \exists y (P'(z_1, x) \wedge P(x, y) \wedge P'(y, z_2))$$

Q.E.D.

5 Погружение в двухпеременный монадический фрагмент

В настоящем разделе мы показываем, что всякая интуиционистская модальная логика Λ, определенная семантически через любые из условий истинности $(\Box_1)$ – $(\Diamond_2)$, может быть погружена в GF^2_{mon}.

Для этого мы сначала определим при помощи взаимной индукции две функции, τ_x и τ_y, таким образом, что первопорядковая формула $\tau_v(\varphi)\,(v \in \{x, y\})$ содержит единственную свободную переменную v, которая интуитивно соответствует точке, в которой φ оценивается в крипкевской модели. τ_x определяется следующими равенствами:

- $\tau_x(p) := P(x)$;
- $\tau_x({\sim}\,\varphi) := \forall y(R(x, y) \to \neg\tau_y(\varphi))$;
- $\tau_x(\varphi \wedge \psi) := \tau_x(\varphi) \wedge \tau_x(\psi)$;
- $\tau_x(\varphi \vee \psi) := \tau_x(\varphi) \vee \tau_x(\psi)$;
- $\tau_x(\varphi \Rightarrow \psi) := \forall y(R(x, y) \to (\neg\tau_y(\varphi) \vee \tau_y(\psi)))$;
- $\tau_x(\Box\varphi) := \forall y(R(x, y) \to \forall x(R_\Box(y, x) \to \tau_x(\varphi)))$;
- $\tau_x(\Diamond\varphi) := \forall y(R(x, y) \to \exists x(R_\Diamond(y, x) \wedge \tau_x(\varphi)))$.

τ_y определяется аналогично, заменой x на y и y на x в вышеприведенных равенствах. Затем мы положим, что стандартным переводом интуиционистской модальной формулы φ в GF^2_{mon}

считается $\tau_x(\varphi)$. Этот перевод предполагает условия истинности ($\Box_2$) и ($\Diamond_2$). Равенства для условий ($\Box_1$) и ($\Diamond_1$) еще проще (на самом деле они совпадают с равенствами, известными из классической модальной логики):

- $\tau'_x(\Box\varphi) := \forall y(R_\Box(x,y) \to \tau'_y(\varphi))$
- $\tau'_x(\Diamond\varphi) := \exists y(R_\Diamond(x,y) \land \tau'_y(\varphi))$

Поскольку τ_x — это естественное обобщение стандартного перевода классической модальной логики в классическую первопорядковую логику, неудивительно, что мы можем доказать следующую теорему.

ТЕОРЕМА 15. *Пусть φ — это интуиционистская модальная формула и* M *— класс моделей интуиционистской модальной логики. Пусть $\mathcal{M} \in$* M*. Тогда $\mathcal{M}, w \Vdash \varphi$ е.т.е. $\mathcal{M}, \alpha \Vdash \tau_x(\varphi)$ при $\alpha(x) = w$ (где $\mathcal{M}$ — это первопорядковая модель, в которой $\mathcal{R}, \mathcal{R}_\Box$ и $\mathcal{R}_\Diamond$ интерпретируют $R, R_\Box$ и $R_\Diamond$).*

6 Разрешимость

Из теоремы 15 следует, что если проблема выполнимости формул GF^2_{mon} в классе моделей M разрешима, то проблема выполнимости интуиционистских модальных формул в M также разрешима.

Хорошо известно, что защищенный фрагмент разрешим в классе всех первопорядковых моделей (см. [2]). Разрешимость GF^2_{mon} в моделях с рефлексивными и транзитивными защитниками доказана в [10]. Из этих фактов и того, что наследственность для пропозициональных параметров входящих в произвольную формулу φ выразима в GF^2_{mon}, непосредственно следует, что базисная интуиционистская модальная логика (в которой на взаимодействие $\mathcal{R}$, $\mathcal{R}_\Box$ и $\mathcal{R}_\Diamond$ не наложено никаких условий) разрешима. Целью настоящей работы является обобщение этого результата на модели, в которых на взаимодействие $\mathcal{R}$, $\mathcal{R}_\Box$ и $\mathcal{R}_\Diamond$ наложены какие-то условия.

Теоремы 15 и 13 непосредственно дают нам нашу основную теорему

ТЕОРЕМА 16. *Пусть* M *— класс интуиционистских модальных моделей, определенных при помощи ацикличного множе-*

ства tso-определимых условий замкнутости, наложенных на $\mathcal{R}$, $\mathcal{R}_\Box$ и $\mathcal{R}_\Diamond$, таким образом, что не более, чем одно, условие замкнутости соответствует каждому из этих отношений, и пусть φ — это интуиционистская модальная формула. Тогда проблема выполнимости φ в M разрешима.

7 Примеры

В настоящем разделе мы формулируем несколько результатов о разрешимости для иллюстрации нашего метода доказательства разрешимости.

Наш первый результат — по существу, результат о разрешимости нескольких видов базовых интуиционистских модальных логик, то есть логик, в которых на $\mathcal{R}_\Diamond$ и $\mathcal{R}_\Box$ не накладываются никакие условия, за исключением условий, постулирующих, как эти отношения взаимодействуют с интуиционистским отношением достижимости $\mathcal{R}$. Этот результат обобщает ряд известных результатов о разрешимости отдельных систем интуиционистской модальной логики.

ТЕОРЕМА 17. *Любая интуиционистская модальная логика Λ с двумя модальностями $\Box$ и $\Diamond$, определенная классом моделей, в которых*

- $\mathcal{R} \circ \overline{\mathcal{R}_\Diamond} \circ \mathcal{R} = \overline{\mathcal{R}_\Diamond}$
- $\mathcal{R} \circ \mathcal{R}_\Box \circ \mathcal{R} = \mathcal{R}_\Box$

и в которых оценка модальных формул определяется любыми из условий ($\Box_1$), ($\Box_2$), ($\Diamond_1$), ($\Diamond_2$) (в любой комбинации, например ($\Box_1$) может встречаться в паре с ($\Diamond_2$); возможно с другими модальностями, условия истинности которых погружаемы в GF^2_{mon}), разрешима.

Доказательство. Класс моделей Λ определим следующими условиями замкнутости для $\mathcal{R}_\Box$, $\mathcal{R}_\Diamond$ и $\mathcal{R}$:

1. $\mathcal{R}$ рефлексивно и транзитивно;
2. $\mathcal{R} \circ \overline{\mathcal{R}_\Diamond} \circ \mathcal{R} = \overline{\mathcal{R}_\Diamond}$;
3. $\mathcal{R} \circ \mathcal{R}_\Box \circ \mathcal{R} = \mathcal{R}_\Box$.

Очевидно, что каждому из отношений $\mathcal{R}$, $\mathcal{R}_\Diamond$ и $\mathcal{R}_\Box$ соответствует не более одного условия и что множество условий ациклично. Мы показали в примерах 3 и 6, что условие, наложенное на $\mathcal{R}$, является условием замкнутости, и в примере 10, что оно mso-определимо. В силу теоремы 14 условия, наложенные на $\mathcal{R}_\Box$ $\mathcal{R}_\Diamond$, также являются mso-определимыми условиями замкнутости.

Мы показали, что класс моделей Λ удовлетворяет условиям теоремы 16, чего достаточно для доказательства разрешимости Λ. Q.E.D.

Наш следующий результат относится к логике, похожей на логику PLL (разрешимость которой известна из [7]) условиями, накладываемыми на отношения достижимости, но отличной от PLL отсутствием в ее семантике ненормальных миров (то есть миров, проваливающих общезначимые формулы):

ТЕОРЕМА 18. *Интуиционистская модальная логика Λ с одной модальностью $\Diamond$, определенная классом моделей, где*

$\mathcal{R}_\Diamond$ *рефлексивно и транзитивно;*

$\mathcal{R}_\Diamond \subseteq \mathcal{R}$

и где модальные формулы оцениваются согласно условию ($\Diamond_2$), разрешима.

Доказательство. Класс моделей Λ определим следующими условиями замкнутости:

1. $TC(\mathcal{R}_\Diamond) = \mathcal{R}_\Diamond$;
2. $TC(\mathcal{R}) = \mathcal{R}$;
3. $Incl^{\mathcal{R}_\Diamond}(\mathcal{R}) = \mathcal{R}$ (см. примеры 4 и 7).

Это множество ациклично, и все условия mso-определимы. Проблема заключается в том, что на отношение $\mathcal{R}$ наложены два условия: оно должно быть замкнуто по отношению как к TC, так и к $Incl^{\mathcal{R}_\Diamond}$. Для того чтобы выполнить условия теоремы 16, мы должны соединить их в одно mso-определимое условие замкнутости. Заметим, что $TC \circ Incl^{\mathcal{P}'}$ — это оператор замыкания такой, что для любого отношения $\mathcal{P}$ имеет место

$$TC(Incl^{\mathcal{P}'}(\mathcal{P})) = \mathcal{P} \Leftrightarrow TC(\mathcal{P}) = \mathcal{P} \text{ и } Incl^{P'}(\mathcal{P}) = \mathcal{P}.$$

Прежде всего, $TC \circ Incl^{\mathcal{P}'}$ растет и является монотонным, поскольку и TC и $Incl^{\mathcal{P}'}$ являются таковыми. Кроме того, он идемпотентен, поскольку результат применения $TC \circ Incl^{\mathcal{P}'}$ к любому отношению $\mathcal{P}$ — это транзитивное отношение, содержащее $\mathcal{P}'$, и любое последующее применение $TC \circ Incl^{\mathcal{P}'}$ не может этого изменить. Следовательно, $TC \circ Incl^{\mathcal{P}'}$ — оператор замыкания. Чтобы доказать, что замкнутость по отношению к этому оператору эквивалента замкнутости по отношению к TC и к $Incl^{\mathcal{P}'}$, заметим, что одна из импликаций очевидна: если $\mathcal{P}$ замкнуто по отношению к TC и к $Incl^{\mathcal{P}'}$, то оно замкнуто по отношению к $TC \circ Incl^{\mathcal{P}'}$. Для доказательства импликации в другую сторону сначала предположим, что

$$TC(Incl^{\mathcal{P}'}(\mathcal{P})) = \mathcal{P},$$

но что $\mathcal{P}$ не замкнуто по отношению к $Incl^{\mathcal{P}'}$, то есть что оно — собственное подмножество $Incl^{\mathcal{P}'}(\mathcal{P})$. Тогда, поскольку TC растет, $\mathcal{P}$ — это собственное подмножество $TC(Incl^{\mathcal{P}'}(\mathcal{P}))$, что противоречит предположению. Далее, предположим, что $\mathcal{P}$ не замкнуто по отношению к TC, то есть что оно — собственное подмножество $TC(\mathcal{P})$. Однако, поскольку $\mathcal{P} \subseteq Incl^{\mathcal{P}'}(P)$, то имеет место

$$TC(\mathcal{P}) \subseteq TC(Incl^{\mathcal{P}'}(P)),$$

а значит $\mathcal{P}$ — это собственное подмножество $TC(Incl^{\mathcal{P}'}(P))$, что опять-таки противоречит предположению. Это означает, что вышеприведенные условия могут быть переформулированы следующим образом:

1. $TC(\mathcal{R}_\Diamond) = \mathcal{R}_\Diamond$;

2. $TC(Incl^{\mathcal{R}_\Diamond}(\mathcal{R})) = \mathcal{R}$;

и не составляет труда показать, что второе условие mso-определимо. Q.E.D.

В заключение заметим, что мы не смогли применить предложенный нами метод к ряду описанных в литературе логик. Мы не смогли переформулировать условие $\mathcal{R}_\Box \circ \mathcal{R} \subseteq \mathcal{R} \circ \mathcal{R}_\Box$, определяющее интуиционистские модальные логики в [1], в виде mso-определимых условий замкнутости. Мы также не смогли применить наш метод к известной логике IS4, определенной в [20],

поскольку условия истинности формул IS4 определены на парах (w, d) (где w — возможный мир и d — элемент его множества-носителя) и, следовательно, стандартный перевод формул IS4 находится вне GF^2_{mon}.

8 Заключение

Мы описали общий метод доказательства разрешимости интуиционистских модальных логик путем погружения их в монадический двухпеременный защищенный фрагмент и демонстрации того, что условия, накладываемые на интуиционистские отношения достижимости, могут быть сформулированы как mso-определимые условия замкнутости. Мы проиллюстрировали этот метод на примере нескольких условий истиности для интуиционистских модальностей и условий истинности, накладываемых на интуиционистские отношения достижимости, встречающиеся в литератере. Несмотря на то что большинство результатов о разрешимости конкретных интуиционистских модальных логик, приведенных в качестве иллюстрации нашего метода, были получены до нас, мы уверены, что наш метод может быть использован для получения новых результатов о разрешимости, особенно в случае ненормальных логик, которые на настоящий момент недостаточно изучены. Очевидно, что наш метод также может быть применен к логикам с более чем двумя модальностями, при условии что их условия истинности могут быть погружены в GF^2_{mon}.

Литература

[1] *Alechina N., Mendler M., de Paiva V., Ritter E.* Categorical and Kripke semantics for constructive modal logics // Proceedings of the 15th International Workshop Computer Science Logic, CSL 2001. Lecture Notes in Computer Science, vol. 2142. Springer, 2001. P. 292–307.

[2] *Andréka H., van Benthem J., Németi I.* Modal Logics and Bounded Fragments of Predicate Logic // Journal of Philosophical Logic. 1998. Vol. 21. P. 217–274.

[3] *Bull R. A.* A modal extension of intuitionistic modal logic // Notre Dame Journal of Formal Logic. 1965. Vol. VI. P. 142–146.

[4] *Bull R. A.* Some modal calculi based on IC // Formal Systems and Recursive Functions. North Holland, 1965. P. 3–7.

[5] *Bull R. A.* MIPC as the formalisation of an intuitionistic concept of modality // Journal of Symbolic Logic. 1966. Vol. 31. P. 609–616.

[6] *Dosen K.* Models for stronger normal intuitionistic modal logics // Studia Logica. 1985. Vol. 44. P. 39–70.

[7] *Fairtlough M., Mendler M.* Propositional lax logic // Information and Computation. 1997. Vol. 137. P.. 1–33.

[8] *Fisher Servi G.* On modal logics with intuitionistic base // Studia Logica. 1986. Vol. 27. P. 533–546.

[9] *Fitch F. B.* Intuitionistic modal logic with quantifiers // Portugaliae Mathematicae. 1948. Vol. 7. P. 113–118.

[10] *Ganzinger H., Meyer Ch., Veanes M.* The Two-Variable Guarded Fragment with Transitive Relations // Proceedings of 14th IEEE Symposium on Logic in Computer Science. IEEE Computer Society Press, 1999. P. 24–34.

[11] *Goldblatt R.* Metamathematics of modal logic // Reports on Mathematical Logic. 1976. Vol. 6, 7. P. 31–42, 21–52.

[12] *Mendler M.* Constrained Proofs: a Logic for Dealing with Behavioural Constrains in Formal Hardware Verification // Proceedings of Workshop on Designing Correct Circuits, Oxford 1990. Springer-Verlag, 1991.

[13] *Mints G.* Some calculi of modal logic // Труды математического института им. В.А. Стеклова. Т. 98. М., 1968. С. 88–111.

[14] *Moggi E.* Notions of Computation and Monads // Information and Computation. 1991. Vol. 93. P. 55–92.

[15] *Ono H.* On some intuitionistic modal logics // Publications of the Research Institute for Mathematical Science. Kyoto University. 1977. Vol. 13. P. 55–67.

[16] *Ono H., Suzuki N.-Y.* Relations between intuitionistic modal logics and intermediate predicate logics // Reports on Mathematical Logic. 1988. Vol. 22. P. 65–87.

[17] *Pfenning F., Davies R.* A judgmental reconstruction of modal logic // Mathematical Structures in Computer Science. 2001. Vol. 11. P. 511-540.

[18] *Plotkin G., Stirling C.* A framework for intuitionistic modal logic // Theoretical Aspects of Reasoning about Knowledge. 1986. P. 399–406.

[19] *Prawitz D.* Natural Deduction: A Proof-Theoretic Study. Almqvist and Wiksell, 1965.

[20] *Simpson A.* The Proof Theory and Semantics of Intuitionistic Modal Logic. Ph.D. thesis. University of Edinburgh. 1994.

[21] *Stirling C.* Modal Logics for Communicating Systems // Theoretical Computer Science. 1987. Vol. 49. P. 311–347.

[22] *Wijesekera D.* Constructive Modal Logic I // Annals of Pure and Applied Logic. 1990. Vol. 50. P. 271–301.

[23] *Wolter F., Zakharyaschev M.* On the Relation between Intuitionistic and Classical Modal Logics // Algebra and Logic. 1997. Vol. 36. P. 121–155.

[24] *Wolter F., Zakharyaschev M.* Intuitionistic modal logics // Logic and Foundations of Mathematics. Kluwer Academic Publishers, 1999. P. 227–238.

[25] *Wolter F., Zakharyaschev M.* Intuitionistic modal logics as fragments of classical bimodal logics // Orlowska E. (ed.) Logic at Work. Springer-Verlag, 1999. P. 168–186.

[26] *Zakharyaschev M., Wolter F., Chagrov A.* Advanced Modal Logic // Gabbay D. et. al (eds.) Handbook of Philosophical Logic. Kluwer Academic Publishers, 2001. Vol. 3. P. 83–266.

Вычислительная метамодель реальности и проблема истины[1]

А.М. Анисов

ABSTRACT. A computational interpretation of philosophical notions of reality and truth is provided along with a non-standard computational treatment of logical connectives and quantors. First-order language statements are compared to sets whereupon the computablilty of these statements comes to the problem of computability of the corresponding sets.

В ряде предшествующих работ проблема истины и реальности обсуждалась применительно к моделям, в которых реальность была представлена теоретико-множественным образом. Точнее, это не были обычные регулярные структуры, которые можно мыслить как построенные с помощью стандартных теоретико-множественных операций исходя из пустого множества. Объекты и предикаты реальности моделировались иррегулярными атомами, свойства которых не подлежали контролю со стороны модельного познающего субъекта ([3], [4], [5]). Несмотря на некоторую экзотичность таких моделей, они всецело оставались в рамках статического подхода к представлению реальности. Более того, применительно к ним опять возникал уже давно поставленный в философии теории множеств вопрос: в каком смысле множества могут обладать реальным существованием? И если еще можно смириться с реальным существованием множеств объектов, соответствующим сингулярным предикатам (допустим, согласиться с реальным существованием множеств людей, футбольных мячей и планет), то как быть с реальным существованием упорядоченных пар, троек, четверок и т.д., образующих основу предикатов-отношений?

В теории множеств упорядоченная пара $< a, b >$ объектов a и b стандартно определяется множеством множеств $< a, b > =$

[1]Работа поддержана РГНФ. Грант № 04-03-00344.

$\{\{a\},\{a,b\}\}$. Полагая $< a,b,c > = < a, < b,c >>$, $< a,b,c,d > = < a, < b, < c,d >>>$ и, вообще, $< a_1, a_2, \ldots a_n > = < a_1, < a_2, \ldots, < a_{n-1}, a_n >> \ldots >$, получаем быстро растущую конструкцию вложенных друг в друга множеств. Скажем, очередь из трех человек a, b, c должна быть представлена следующим множеством множеств:

$$< a,b,c > = < a, < b,c >> = \{\{a\},\{a,\{\{b\},\{b,c\}\}\}\}.$$

Затруднительно придать такой конструкции статус реальной, т.е. существующей независимо от субъекта, сущности, хотя очереди, вне сомнений, существуют как раз реально.

Поскольку речь идет не о недостатках какой-то конкретной модели или серии моделей, а об ограниченности возможностей теоретико-множественного моделирования в целом, уместнее в этом плане говорить о *теоретико-множественной метамодели*. Естественно, подразумевается, что данная метамодель не единственна. Альтернативой теоретико-множественной метамодели могла бы стать *вычислительная метамодель*. В первом приближении идея вычислимости предпочтительнее теоретико-множественного подхода как в отношении возможности преодоления статики, так и в смысле возможности построения более реалистичной онтологии, не предполагающей реального существования иерархии множеств.

В условиях широчайшего распространения вычислительного моделирования, особенно с применением компьютеров, призыв к построению вычислительной метамодели может показаться неуместным: не ломится ли автор в давно открытую дверь? Однако напомним, в какой связи возникает идея этой метамодели. *Теория вычислимости до сих пор не стала альтернативой теории множеств как фундаментального основания философии и науки.* Последние по сей день либо пребывают в плену статики, либо впадают в иррационализм, когда обнаруживают неустранимую нестабильность универсума. Автор лично неоднократно сталкивался с искренним недоумением известных и не очень известных философов и физиков, когда предлагал вычислительную модель времени — они-то знают, что «в действительности» все существует «в едином пространстве-времени», все «мировые линии» которого раз и навсегда прописаны. Мною был даже предложен термин *парменидовская наука* для описания практически полного торжества в ориентированной на науку философии и в точном естествознании восходящей к элеатам концепции неподвижного универсума, само время которого полностью статично и лишено даже намека на становление ([2]).

Сама по себе идея рассмотрения природы как особого рода вычислительного процесса или совокупности вычислительных процессов не нова. Уже давно мы слышим призывы считать законы природы алгоритмами, высказывания о том, что роль теорий с успехом способны взять на себя компьютерные программы и т.п. Однако, как правило, эти высказывания — либо не более чем декларации ([10]), либо за ними скрываются пока еще мало продуктивные попытки ввести вычислительный язык в физику ([6]). Редким удачным исключением является, например, книга известного ученого и инженера X. Хармута ([9]), но в ней обсуждается проблема перехода от континуальных пространств к дискретным, а не идея физической вычислимости как таковая. И все же здесь затрагиваются некоторые философские вопросы, в частности, проблемы дискретного времени.

В философии вычислительные концепции фактически находятся в стадии начальной разработки. В нашей стране, кроме упомянутой вычислительной модели времени ([1]), можно назвать предложенное В.И. Шалаком альтернативное классическому понятие вычислительного следования[2] и попытку А.А. Крушинского трактовать рассуждения древних китайцев как вычисления ([8] и другие работы). Примечательно, что оба специалиста скептически относятся к понятию истины, усматривая в нем выражение унаследованной от Платона и Аристотеля статичности и созерцательности в отношении к миру, несовместимых с ориентированными на умения вычислительными действиями. Разделяя позицию коллег в плане отрицания гордой *Истины*, тем не менее хотелось бы высказаться в защиту куда более скромной *истины*. Я полагаю, что *изменчивость универсума не является препятствием для принятия некоторых высказываний в качестве истинных.* Аргументации в пользу этого тезиса и будет посвящена данная работа.

Пусть U непустое множество, $V \subset U$ (включая случай $V = U$) и $f_V(x_1, x_2, \dots, x_n)$ — тотальная или частичная функция из мно-

[2] См. статьи В.И. Шалака в данном сборнике.

жества V^n в V, C_V — компьютер[3], обрабатывающий данные из V, и $\pi_{C_V}(x_1, x_2, \ldots, x_n)$ — программа, выполняемая компьютером C_V. Если программа $\pi_{C_V}(x_1, x_2, \ldots, x_n)$ нормально останавливается на входе $(x_1, x_2, \ldots, x_n)$, пишем $\pi_{C_V}(x_1, x_2, \ldots, x_n) \downarrow$. В противном случае (учитывая как возможность неограниченно продолжающихся вычислений, так и возможность аварийного останова или *авоста*) пишем $\pi_{C_V}(x_1, x_2, \ldots, x_n) \uparrow$. Условимся, что только в случае $\pi_{C_V}(x_1, x_2, \ldots, x_n) \downarrow$ существует, и при том единственное, $y \in V$, которое называется ***результатом выполнения*** программы π_{C_V} ***на входе*** $(x_1, x_2, \ldots, x_n)$. Тогда применяем запись $\pi_{C_V}(x_1, x_2, \ldots, x_n) \downarrow y$. Если же $\pi_{C_V}(x_1, x_2, \ldots, x_n) \uparrow$, считаем, что результат выполнения программы π_{C_V} на входе $(x_1, x_2, \ldots, x_n)$ *отсутствует*.

Введем достаточно близкое к стандартному уточнение понятия вычислимости применительно к функциям. Функция $f_V(x_1, x_2, \ldots, x_n)$ ***вычислима*** на компьютере C_V, если существует программа π_{C_V} такая, что $\forall x_1 \forall x_2 \ldots \forall x_n \forall y (f_V(x_1, x_2, \ldots, x_n) = y \iff \pi_{C_V}(x_1, x_2, \ldots, x_n) \downarrow y)$. (В дальнейшем, если конкретные возможности компьютера C_V не существенны, упоминание о нем можем опускать.)

Идея представления универсума в виде совокупности вычислительных процессов порождает проблему, которую нелегко сформулировать точным образом. Проблема в следующем. В каком смысле эти процессы, возможно, между собой никак не связанные, относятся к одному и тому же универсуму, формируют его, делают существующим? Теоретико-множественный универсум можно представлять как конструирующийся при помощи соответствующих операций из постулированно существующих пустого множества и бесконечного множества. Тем самым эти операции придают ему требуемое единство. Какие же операции придают связность совокупности вычислительных процессов? Взаимодействия процессов, их взаимное влияние? Но какая связь может быть, например, между процессами формирования звезды, рождения человека и становления государствен-

[3]Вычислительное устройство естественного или искусственного происхождения, реальное или идеальное, физическое или ментальное — на данном этапе это не столь существенно; важно лишь помнить, что все эти возможности допустимы, так что идея компьютера берется в предельно общем виде

ности? Хотя все это процессы порождения чего-то, они относятся к столь разным областям реальности, что никакая конкретная связь между ними невозможна. Остается искать связь абстрактную, не физическую, а логическую. Но и она интуитивно не очень-то просматривается. Тем не менее, мы рискнем предложить аргумент в пользу существования такой логической связи. Утверждая, что выполняются процессы π_1 и π_2, мы фактически как-то соотносим их между собой, как-то объединяем. Не допустить ли тогда существование некоторого абстрактного объединяющего процесса? Одним из возможных способов формально выразить данный аргумент является принятие следующего *постулата локального объединения*.

$(\forall V \subset U)(\forall W \subset U)((f_V$ *вычислима* & f_W *вычислима*$) \Longrightarrow f_{V \cup W}$ *вычислима*$)$.

Можно было бы обобщить постулат локального объединения. Пусть $\{V_{i \in I}\}$ — произвольное семейство множеств такое, что $I \subset U$ и $(\forall i \in I)(V_i \subset U)$. Тогда *постулат тотального объединения* утверждает, что $(\forall i \in I)$ f_{V_i} *вычислима* $\Longrightarrow f_{\cup\{V_{i \in I}\}}$ *вычислима*. Очевидно, что из второго постулата следует первый (достаточно взять двухэлементное $I \subset U$, если $|U| > 1$).

Дополнительными, хотя и косвенными, аргументами в защиту постулатов объединения могут послужить следующие факты. При вычислениях на заводских компьютерах, объединенных в сеть, достаточно реализовать возможность посылки терминального сигнала всем компьютерам любым из них, который первым закончит вычисление (пример реализации постулата локального объединения). В наиболее общей теории пространств — топологии — топологическое пространство τ может быть представлено семейством множеств, для которого принимается аксиома о том, что объединение любого семейства множеств из τ принадлежит τ (аналог постулата тотального объединения). Тем не менее в данной работе принимается лишь постулат локального объединения, поскольку только он понадобится в дальнейшем.

Те же соображения наводят на мысль о постулировании обязательного существования пересекающихся процессов. Если функции f_V и f_W вычислимы и при этом $V \cap W \neq \varnothing$, то интуитивно функция $f_{V \cap W}$ тоже должна быть вычислимой. В самом деле, если исполняются вычисляющие эти функции программы π_{C_V}

и π_{C_W}, то при $< x_1, x_2, \ldots, x_n > \in V \cap W$ будем в конце концов иметь $\pi_{C_V}(x_1, x_2, \ldots, x_n) \downarrow$ и $\pi_{C_W}(x_1, x_2, \ldots, x_n) \downarrow$. Но это по сути и означает вычислимость функции $f_{V \cap W}$. Остается формально обеспечить наличие соответствующих объектов, приняв следующий *постулат локального пересечения.*

$(\forall V \subset U)(\forall W \subset U)((f_V$ *вычислима* & f_W *вычислима* & $V \cap W \neq \varnothing) \Longrightarrow f_{V \cap W}$ *вычислима*$)$.

Требование непустоты пересечения нетрудно обосновать. Поскольку никакая конкретная модель вычислимости в обсуждаемой метатеории задана не была, возможно сужение области вычислимых функций на некоторую подобласть непустых тотальных (т.е. всюду определенных) функций $f^n : U^n \longmapsto U$. Тогда при $V \cap W = \varnothing$ функция $f_{V \cap W}$ не попадет в область вычислимым функций.

Разумеется, нельзя в общем случае требовать, чтобы для каждого непустого подмножества M множества V (соответственно W) функция f_M была бы вычислима, если функции f_V и f_W вычислимы. Например, классическая модель вычислимости на натуральных числах дает счетное множество вычислимых функций, тогда как число непустых подмножеств натурального ряда несчетно.

Также можно сформулировать обобщение только что принятой аксиомы до *постулата тотального пересечения.* Пусть $\{V_{i \in I}\}$ — произвольное семейство множеств такое, что $I \subset U$, $(\forall i \in I)(V_i \subset U)$ и $\cap\{V_{i \in I}\} \neq \varnothing$. Тогда $(\forall i \in I)$ f_{V_i} *вычислима* $\Longrightarrow f_{\cap\{V_{i \in I}\}}$ *вычислима.* Опять очевидно, что из постулата тотального пересечения вытекает постулат локального пересечения.

И вновь наличествует топологическая аналогия. Топологическое пространство τ представимо семейством множеств, для которого принимается аксиома о том, что пересечение любого семейства множеств из τ принадлежит τ. Тем не менее и здесь мы ограничимся принятием лишь локальной формы постулата пересечения.

Обратим внимание, что функция $f_V(x_1, x_2, \ldots, x_n)$ может быть частичной в двояком смысле. Во-первых, при $< x_1, x_2, \ldots, x_n > \in V^n$ значение функции $f_V(x_1, x_2, \ldots, x_n)$ может быть не определено. Во-вторых, при $V \neq U$ аргумент функции $f_V(x_1, x_2, \ldots, x_n)$

может быть неопределен. Это случится, если $< x_1, x_2, \ldots, x_n > \notin V^n$. В этой ситуации значение функции $f_V(x_1, x_2, \ldots, x_n)$ также будет неопределенным. Эти два случая позволяют трактовать запись $\pi_{C_V}(x_1, x_2, \ldots, x_n) \quad \uparrow$ при вычислениии функции $f_V(x_1, x_2, \ldots, x_n)$ просто как отсутствие результата вычисления, оставляя открытым вопрос, явилось ли отсутствие результата следствием неограниченности вычисления во времени или тем, что оно закончилось аварийно.

Пусть L — какой-нибудь язык предикатов первого порядка, не содержащий функциональных символов[4], так что любой терм t — это либо индивидная переменная, либо индивидная константа. Пусть, далее, $P(x)$ сингулярный предикатный символ из L. В стандартной семантике А.Тарского функция интерпретации I сопоставит этому символу подмножество универсума: $I(P(x)) = V$, $V \subset U$. В обычной теории вычислимости, базирующейся на понятии машины с неограниченными регистрами (МНР)[5], которая манипулирует натуральными числами, вычислимость сингулярного предиката V определяется следующим образом. Предикат V *вычислим*, если существует МНР-программа π такая, что $\pi(x) \downarrow 1$ при $x \in V$ и $\pi(x) \downarrow 0$ при $x \notin V$. Но в наши планы отнюдь не входит намерение объявить числа частью реальности. Более того, нет вообще никаких оснований искать в реальности особые объекты «истина» и «ложь», даже если не отождествлять истину с 1, а ложь с 0. Истина и ложь входят в мир вместе с субъектом. Как тогда они могут иметь отношение к реальности?

Поэтапно отвечая на данный вопрос, вначале сопоставим предикату V функцию $f_V(x)$ такую, что $f_V(x) = y$ в случае $x \in V$ и $f_V(x)$ не определена в противном случае. Предикат V *вычислим*, если вычислима функция $f_V(x)$. Иными словами, вычислимость сингулярного предиката V означает, что существует программа $\pi_{C_V}(x)$, для которой верно $\pi_{C_V}(x) \downarrow y$, если $x \in V$, и $\pi_{C_V}(x) \uparrow$, если $x \notin V$. Предикатный символ $P(x)$ имеет *вычислительную*

---

[4]Это ограничение не приводит к потере общности, поскольку любой функциональный символ $f(x_1, x_2, \ldots, x_n)$ может быть заменен предикатным символом $F(x_1, x_2, \ldots, x_n, x_{n+1})$.

[5]См. [7]. В частности, в гл. 3 показано, что МНР-вычислимость эквивалентна вычислимости по Тьюрингу, а также другим известным классическим теориям вычислимости.

интерпретацию в смысле I, если предикат $I(P(x))$ вычислим.

Предложенная конструкция без проблем обобщается на случай многоместных предикатов. Пусть $I(P(x_1, x_2, \ldots, x_n)) = V^n$, $V^n \subset U^n$. Сопоставим предикату V^n функцию $f_V(x_1, x_2, \ldots, x_n)$ такую, что $f_V(x_1, x_2, \ldots, x_n) = y$ в случае $< x_1, x_2, \ldots, x_n > \in V^n$ и $f_V(x_1, x_2, \ldots, x_n)$ не определена в противном случае. Предикат V^n *вычислим*, если вычислима функция $f_V(x_1, x_2, \ldots, x_n)$, т.е. существует программа $\pi_{C_V}(x_1, x_2, \ldots, x_n)$, для которой верно $\pi_{C_V}(x_1, x_2, \ldots, x_n) \downarrow y$, если $< x_1, x_2, \ldots, x_n > \in V^n$, и $\pi_{C_V}(x_1, x_2, \ldots, x_n) \uparrow$, если $< x_1, x_2, \ldots, x_n > \notin V^n$. Предикатный символ $P(x_1, x_2, \ldots, x_n)$ имеет *вычислительную интерпретацию в смысле I*, если предикат $I(P(x_1, x_2, \ldots, x_n))$ вычислим.

Если $\forall x_1 \forall x_2 \ldots \forall x_n \exists y \exists z (f_V(x_1, x_2, \ldots, x_n) = y \iff g_V(x_1, x_2, \ldots, x_n) = z)$, то пишем $f_V(x_1, x_2, \ldots, x_n) \equiv g_V(x_1, x_2, \ldots, x_n)$ или, короче, $f_V \equiv g_V$. Аналогичным образом для программ: если $\forall x_1 \forall x_2 \ldots \forall x_n \exists y \exists z (\pi_{C_V}(x_1, x_2, \ldots, x_n) \downarrow y \iff \tau_{C_V}(x_1, x_2, \ldots, x_n) \downarrow z)$, то по определению $\pi_{C_V}(x_1, x_2, \ldots, x_n) \downarrow y \equiv \tau_{C_V}(x_1, x_2, \ldots, x_n) \downarrow z$ или $\pi_{C_V} \equiv \tau_{C_V}$.

ТЕОРЕМА 1. *Отношение $\equiv$ является отношением эквивалентности соответственно на функциях и на программах. Кроме того, если функция f_V и соответствующая ей программа π_{C_V} вычисляют предикат V^n и при этом $f_V \equiv g_V$ и $\pi_{C_V} \equiv \tau_{C_V}$, то g_V и τ_{C_V} тоже вычисляют V^n.*

Доказательство. Доказательство очевидно. Q.E.D.

Из данной теоремы вытекает, что формально все равно, какую из эквивалентных функций или программ взять. В любом случае важно лишь то, имеет место $\pi_{C_V}(x_1, x_2, \ldots, x_n) \downarrow$ или $\pi_{C_V}(x_1, x_2, \ldots, x_n) \uparrow$. Если реализовался первый вариант, то конкретный результат вычисления программы π_{C_V} на входе $(x_1, x_2, \ldots, x_n)$ не существен. Однако с философской точки зрения в случае реализации второго варианта при выборе эквивалентных программ необходимо учитывать, что невозможность получить результат вычисления может быть обусловлена двумя типами причин. Одно дело неограниченность процесса вычислений, другое — авост. Вряд ли в природе при невозможности получить результат какого-то конкретного процесса он будет продолжаться неограниченно долго. Более реалистично предположить, что такой процесс все-таки завершится, но аварийно. Например, природное вычисление предиката *Ключ x подошел к Замку y* может успешно завершиться за конечное число шагов, но может и не иметь благополучного завершения. В последнем случае вовсе не обязательно до бесконечности предпринимать все новые и новые безуспешные попытки открыть замок. В реальности такой процесс завершится авостом, чем бы он ни был вызван — поломкой ключа или замка, потерей терпения или чем-то иным. Хотя исключать априори реальное существование конкретных бесконечных процессов мы бы не решились, не говоря уже о возможных бесконечных процессах, связанных с универсумом в целом.

На данном этапе исследования установлена цепочка переходов ***предикатный символ*** $P(x_1, x_2, \ldots, x_n) \longmapsto$ ***предикат*** $I(P(x_1, x_2, \ldots, x_n)) = V^n \longmapsto$ ***функция*** $f_V(x_1, x_2, \ldots, x_n) \rightsquigarrow$ ***программа*** $\pi_{C_V}(x_1, x_2, \ldots, x_n) \downarrow$. Последний переход $\rightsquigarrow$ осуществим не всегда — ведь функция $f_V(x_1, x_2, \ldots, x_n)$ не обязательно будет вычислимой на компьютере C_V. Но если она вычислима, понятия вычислимой выполнимости и вычислимой истины определяются почти очевидным образом. Пусть v — функция приписывания значений свободным переменным языка L: $v : Var \mapsto V$. Выражение $P(x_1, x_2, \ldots, x_n)$ ***вычислимо выполнено*** на компьютере C_V при интерпретации I и приписывании v, если $\pi_{C_V}(v(x_1), v(x_2), \ldots, v(x_n)) \downarrow$. Пусть $c_1, c_2, \ldots, c_n$ — индивидные константы из L. Высказывание $P(c_1, c_2, \ldots, c_n)$ ***вычислимо истинно*** на компьютере C_V при интерпретации I, если $\pi_{C_V}(I(c_1), I(c_2), \ldots, I(c_n)) \downarrow$.

В стандартной семантике не выполнимость $P(x_1, x_2, \ldots, x_n)$ и не истинность (ложность) $P(c_1, c_2, \ldots, c_n)$ определялись условиями $< v(x_1), v(x_2), \ldots, v(x_n) > \notin V^n$ и $< I(c_1), I(c_2), \ldots, I(c_n) > \notin V^n$ соответственно. Но механически переносить эту идею на вычислимость нельзя. Ведь замена $\pi_{C_V}(v(x_1), v(x_2), \ldots, v(x_n)) \downarrow$ на $\pi_{C_V}(v(x_1), v(x_2), \ldots, v(x_n)) \uparrow$, а $\pi_{C_V}(I(c_1), I(c_2), \ldots, I(c_n)) \downarrow$ на $\pi_{C_V}(I(c_1), I(c_2), \ldots, I(c_n)) \uparrow$ приведет к многочисленным нелепостям практического и теоретического характера.

Например, попробуем вычислять функцию деления $x/y = z$, т.е. трехместный предикат $/(x, y, z)$. Что случится, если $y = 0$?

Калькулятор Windows в ответ на введение $x = 1$ и $y = 0$ при применении операции / сообщил: «Деление на нуль запрещено». Можно ли сделать вывод, что это же сообщение последует при любых допустимых значениях переменной x, если $y = 0$? Однако при $x = 0$, $y = 0$ последовало: «Значение не определено». Чтобы прояснить вопрос, в системе Free Pascal была откомпилирована (компилятор PPC386) следующая простая программа.

```
var x, y, z : real;
begin
  Read(x, y);
   z := x / y;
  Write(z);
end.
```

В ответ на ввод 1 и 0 ничего не произошло! Программа либо зависла, либо продолжала выполняться как ни в чем не бывало, не выдавая никаких сообщений и явно не собираясь когда-либо заканчивать вычисления. Зато ввод значений 0 и 0 привел к распечатке результата: –0.0000000000000000E+000.

Или тот же пример с ключом и замком. Разве из того факта, что ключ x не открыл замок y, однозначно вытекает отрицание предиката *Ключ x подошел к Замку y* и выполнимость $\neg$(*Ключ x подошел к Замку y*)? А если замок тугой и не поддается, но ключ все-таки от него? А если ключ крутили не в ту сторону? Могли быть и многие другие причины неудачи. Так что и здесь отсутствие результата не означает, что выполнено отрицание искомого предиката.

Что касается теоретических аргументов, то главное теоретическое возражение против трактовки отрицания как отсутствия результата вычисления состоит в том, что факт получения результата в принципе может быть зафиксирован, тогда как продолжающееся вычисление, вообще говоря, оставляет открытым вопрос, закончится оно нормально или нет. Те же компьютерные вычисления могут продолжаться неприемлемо долго, но их искусственное прерывание не означает фиксации наступления события $\pi_{C_V}(x_1, x_2, \ldots, x_n) \uparrow$. В теории классической вычислимости, как хорошо известно, проблема останова не разрешима. В логике доказано существование алгоритма перебора всех теорем исчисления предикатов, но если некоторая формула A не появилась на шаге n выполнения такого алгоритма, то в общем не исключено, что она появится потом на каком-то шаге m. Не наступивший до сих пор конец света не ведет к однозначному выводу, что мир будет существовать вечно. И так далее. Так что корректное введение отрицания на такой неопределенной по самой своей сути основе, как незавершенность вычисления, невозможно.

Теоретически, выходом из создавшегося затруднительного положения было бы такое определение отрицания, которое базировалось бы на нормально завершающихся вычислениях, т.е. на конструкциях типа $\pi_{C_V}(x_1, x_2, \ldots, x_n) \downarrow$. Алгебра логики подсказывает решение, связанное с операцией *дополнения* $\setminus$ множеств на выбранном заранее универсуме. Поскольку универсум U фиксирован, вычислимость $\neg P(x)$ можно свести к проблеме вычислимости предиката $U \setminus V$, где $V = I(P(x))$. Или, в общем виде, вычислимость $P(x_1, x_2, \ldots, x_n)$ свести к вычислимости предиката $U^n \setminus V^n$, где $V^n = I(P(x_1, x_2, \ldots, x_n))$. Однако есть определенные сомнения на счет философской приемлемости такого решения.

Во-первых, нередко получается так, что универсумы рассуждений весьма обширны, тогда как исходные предикаты имеют сравнительно небольшой объем. Тогда подвергнутый отрицанию такой исходный предикат внезапно увеличивается до непомерных размеров. Проанализируем в качестве примера следующий ряд утверждений: «*Все люди смертны. Все греки люди. Сократ грек. Следовательно, Сократ смертен. Но Наполеон не грек...*». По контексту в качестве универсума здесь надо взять, как мнимум, множество смертных существ. Но тогда высказывание $\neg$*Грек(Наполеон)* должно быть проинтерпретировано на всем огромном множестве смертных, за исключением греков. Обычно считается, что подобные вещи не создают особых логических проблем, однако проблемы с вычислимостью появляются. Представьте себе вычислительный процесс, который перебирает всех смертных не греков, включая бактерии, растения, грибы и животных, чтобы устновить, что Наполеон не грек.

Во-вторых, для практики и эмпирической науки характерно использование многослойных или многосортных универсумов. Простой подсчет баранов в стаде уже сочетает такие сорта, как бараны и числа. Многосортная логика предикатов первого порядка, как известно, сводима к обычной односортной, так что и здесь проблем обычно не видят. Семантически сводимость обеспечивается объединением слоев в единый универсум с введением соотвествующих слоям предикатов. Однако операция отрицания вновь выглядит довольно нелепо. К примеру, выделив в стаде белых баранов, получим с использованием отрицания высказывательную форму *Это не белый*, которая может быть представлена в классическом исчислении предикатов формулой $\neg$*Белый*(x), интерпретация которой потребует смешения баранов и чисел, ибо не былыми окажутся не только некоторые бараны, но и все числа. Вычисление так понимаемого отрицания еще более усложнит проблему.

Отчасти аналогичными затруднениями вызвана трактовка отрицания как *неудачи* в логическом программировании и в языке декларативного программирования Пролог. Проблеме отрицания в логическом программировании и в Прологе посвящена обширная литература[6], которую мы разбирать не будем. В самом общем виде отрицание $\neg P$ здесь понимается как неудача в выводе P: если вывести P не удалось, считается выведенным $\neg P$. В терминах наших примеров, чтобы вычислить истинностное значение высказывания $\neg$*Грек(Наполеон)*, надо проверять высказывание *Грек(Наполеон)*, перебирая множество греков Г (все-таки не весь универсум!). Если перебор завершится неудачей, разрешено сделать вывод $\neg$*Грек(Наполеон)*. Для нас проблема в том, что перебирающий множество $V = I(P(x))$ вычислительный процесс может «не видеть» объекты из дополнения $U \backslash V$. Скажем, если есть механизм развития болезни $\pi_{C_\Gamma}(x) \downarrow$, поражающий греков, и только их, то в отношении Наполеона такой процесс не установит ничего определенного — он попросту не будет выполнен: π_{C_Γ}(*Наполеон*) $\uparrow$. Таким образом, трактовка отрицания как неудачи вновь возвращает нас к уже отвергнутому варианту применения конструкций вида $\pi_{C_V}(x_1, x_2, \ldots, x_n) \uparrow$ в связи с отрицанием.

---

[6]Отметим книги: *Хоггер К.* Введение в логическое программирование. М., 1988; *Ковальски Р.* Логика в решении проблем. М., 1990; *Клоксин У., Меллиш К.* Программирование на языке Пролог. М., 1987; *Стерлинг Л., Шапиро Э.* Искусство программирования на языке Пролог. М., 1990.

Напрашивается следующий, как нам представляется, естественный путь избавления от возникших проблем с отрицанием. С исходным дескриптивным предикатом P надо соотнести *релевантную* для него часть R универсума U. В некотором отношении такая часть сама ведет себя подобно универсуму, так что R можно назвать *релевантным универсумом* для P. Поясним основную идею на примере рассуждения: «*Насекомое — это животное. Следовательно, крупное насекомое — это крупное животное*». По биологическим классификациям насекомые действительно являются животными, так что посылка истинна. Но как быть с заключением? Один из квалифицированных логиков, к которому обратился автор, согласился с этим рассуждением. Синтаксис языка в самом деле принуждает к тому, чтобы считать два вхождения слова «крупное» вхождением одного и того же предиката. Однако смысл первого вхождения данного слова отличается от его второго вхождения. Поэтому надо было бы написать «*крупное*$_1$ *насекомое — это крупное*$_2$ *животное*». Затем предикат $Крупное_1(x)$ определить на множестве насекомых R_1, получив $I(Крупное_1(x)) \subset R_1$, а $Крупное_2(x)$ определить на множестве животных R_2, получив $I(Крупное_2(x)) \subset R_2$ и не возражая против $R_2 = U$. Множества R_1 и R_2 будут соответствующими исходным дескриптивным предикатам $Крупное_1(x)$ и $Крупное_2(x)$ релевантными универсумами. В этом случае следования, конечно, нет, в должном соответствии со смыслом рассуждения.

Предлагаемый подход к отрицанию состоит в ограничении операции дополнения соответствующим релевантным универсумом. Отрицанию $\neg Крупное_1(x)$ в модели сопоставляется множество $R_1 \backslash I(Крупное_1(x))$, а отрицанию $\neg Крупное_2(x)$ — множество $R_2 \backslash I(Крупное_2(x))$. Такой подход не только позволяет избавиться от призрака отрицания как неудачи, но и решает как проблему соразмерности утверждаемого и отрицаемого, так и проблему предотвращения смешения сортов при отрицании в многосортном универсуме.

Теперь определения вычислимой выполнимости и вычислимой истины на отрицаниях атомарных предикатов получаются из соответствующих определений для атомарных предикатов. Достаточно при построении семантических значений отрицаний заменить предикат V^n на предикат $R^n \backslash V^n$, только и всего. При этом случай $R^n = U^n$, вообще говоря, не исключается. Однако следует явным образом исключить возможность пустоты релевантных универсумов. Ведь каждый релевантный универсум с философской точки зрения есть именно универсум, а универсумы должны быть непусты (иначе о чем рассуждать?). Кроме того, как нельзя в одном рассуждении по-разному интерпретировать предикатный символ P, так и нельзя по тем же причинам в одном рассуждении приписывать предикатному символу P разные релевантные универсумы. Отсюда необходимость принятия следующего неформального постулата.

Для всякого атомарного предикатного символа P^n и релевантного для P^n универсума R^n имеет место непустота и единственность R^n.

Но мы не решаемся в общем случае требовать, чтобы для всякого атомарного предиката P^n *существовал* релевантный универсум R^n. Хотя бы из-за вышеописанных трудностей с отрицанием некоторых разновидностей пустых предикатов. Но применительно к конкретным предметным областям и наборам исходных дескриптивных предикатных символов такое существование возможно.

Свойства получившегося вычислительного отрицания на атомарных предикатах в существенных отношениях не совпадают с классическим логическим отрицанием. В дальнейшем при обсуждении свойств логических операций будем использовать сингулярные предикаты, если их местность не важна. Зафиксировав функцию интерпретации I, вместо длинного «предикатный символ $P(x)$ имеет вычислительную интерпретацию в смысле I» будем писать «$P(x)$ вычислимо». Будем использовать символ $\vdash$ для принятия метаутверждения и символ $\dashv$ для отбрасывания метаутверждения.

ТЕОРЕМА 2. $\vdash$ *(a). $P(x)$ и $\neg P(x)$ не могут быть вместе вычислимо выполнены;*

$\vdash$ *(b). $P(c)$ и $\neg P(c)$ не могут быть вместе вычислимо истинны;*

$\vdash$ *(c). $P(t)$ вычислимо (выполнено, истинно) $\Longleftrightarrow$*
$\neg\neg P(t)$ вычислимо (выполнено, истинно);

$\dashv$ *(d). $P(x)$ вычислимо $\Longrightarrow \neg P(x)$ вычислимо;*

$\dashv$ *(e).* $\neg P(x)$ *вычислимо* $\Longrightarrow$ $P(x)$ *вычислимо;*

Доказательство. Ограничимся пунктами (b)–(d).

(b). Пусть $P(c)$ вычислимо истинно. Тогда $\pi_{C_V}(I(c))\downarrow$. Отсюда $I(c) \in V$. Если бы $\neg P(c)$ было вычислимо истинно, имели бы $\pi_{C_{R\setminus V}}(I(c))\downarrow$ и, следовательно, $I(c) \in R\setminus V$, что противоречиво. Пусть $\neg P(c)$ вычислимо истинно. Имеем $\pi_{C_{R\setminus V}}(I(c))\downarrow$ и $I(c) \in R\setminus V$, что исключает вычислимую истинность $P(c)$.

(c). Если $I(P(t)) = V$, то $I(\neg P(t)) = R\setminus V$. Положим $W = R\setminus V$. Тогда $I(\neg\neg P(t)) = R\setminus W = R\setminus(R\setminus V) = V$.

(d). Возьмем в качестве компьютера C МНР-машину. Тогда на множестве формул классического исчисления предикатов предикат *Теорема*(x) вычислим, но предикат $\neg$*Теорема*(x) не вычислим. Q.E.D.

Обратим внимание на то, что в построенном фундаменте вычислительной онтологии и семантики понятие *лжи* до сих пор не появилось, хотя онтология и семантика отрицания были определены. Речь шла о вычислимой выполнимости и вычислимой истине независимо от того, применялись эти понятия к предикатному символу $P(t)$ или к $\neg P(t)$. Невольно возникает мысль, что *без понятия лжи вообще можно обойтись*! Такая идея хорошо согласуется с нововременным философским принципом классической науки о том, что природа не может лгать. В логическом плане идею истины как единственного денотата определенных языковых выражений развивает С.А. Павлов[7]. Суть в том, что некоторые выражения обозначают истину, тогда как остальные не обозначают истину. Но отсюда, как показывает С.А. Павлов, вовсе не обязательно делать вывод, что эти остальные обозначают ложь. Другой вопрос, что в его логической метатеории формально ложь можно сделать единственным денотатом. Наш подход в этом пункте принципиально отличается. Не видно, как в рамках предлагаемой метатеории вычислимости формально можно было бы вычислительную ложь сделать исходной по отношению к вычислительной истине, тем более сделать ложь единственным денотатом, полностью устранив истину.

[7]См. статью С.А. Павлова в данном сборнике.

Не только производность, вторичность лжи по отношению к истине, но и некоторую искусственность и избыточность понятия лжи мы сейчас, учитывая уже сказанное, попытаемся продемонстрировать. Что может означать утверждение о *ложности* высказывания $P(c)$ при интерпретации I в вычислительном смысле? Единственно возможный ответ — никакой вычислительный процесс никогда нормально не остановится на входе $I(c)$: $\neg\exists\pi(\pi(I(P(c))\downarrow)$. Вытекает ли отсюда, что существуют множество R и процесс π такие, что $\pi(R\backslash I(P(c))\downarrow$? Рассуждая абстрактно, ни откуда не следует, что такое множество и такой процесс существуют. Тогда каков реальный смысл утверждения о ложности $P(c)$? Ведь получается, что с ним ни прямо, ни косвенно нельзя связать никакого процесса!

Рассмотрим следующий пример утверждения: *Ложно, что Жанна д'Арк — ведьма*, или, в логической форме, *Ведьма*(*Жанна д'Арк*) *ложно*. Чтобы напрямую в этом убедиться, необходимо запустить *все возможные* процессы (что само по себе абсурдно). И сидеть ждать? Как долго? А если некоторые процессы никогда не завершатся? Ясно, что прямой путь ведет в никуда. Остается косвенное решение: обосновать истинность $\neg$*Ведьма*(*Жанна д'Арк*), подобрав релевантное R, а затем найдя подходящий процесс π, для которых имело бы место $\pi(R\backslash I(\textit{Ведьма}(\textit{Жанна д'Арк}))\downarrow$. Но что взять за R? Ложность рассматриваемого высказывания предполагает, что $I(\textit{Ведьма}(\textit{Жанна д'Арк})) = \varnothing$. Если положить $R = U$, то $I(\neg\textit{Ведьма}(\textit{Жанна д'Арк})) = U\backslash\varnothing = U$, и *любой* нормально завершившийся процесс (например, передачи данных, деления клетки, слияния фирм, борьбы с врагом и т.д., до бесконечности) делает это высказывание истинным, что бессмысленно. Ясно, что R должно быть существенно сужено. Как сужено? Раз ведьмы могут встречаться только среди женщин, не взять ли $R = \{$x: Женщина(x)$\}$? Тогда $I(\neg\textit{Ведьма}(\textit{Жанна д'Арк})) = R\backslash\varnothing = R = \{$x: Женщина(x)$\}$, и любая успешная проверка на свойство быть женщиной будет означать ложность высказывания *Ведьма*(*Жанна д'Арк*), что вновь бессмысленно.

Такая же аргументация может быть применена по отношению к любым пустым высказываниям, в действительности не имеющим отношения к реальности. Ясно, что причиной систематических провалов в определении ложности подобных высказываний является отсутствие у них истинного аналога в реальности R. Отсюда вывод: *прежде чем какое-то высказывание A получит статус ложного, необходимо уметь обосновать истинность* $\neg A$. Этими соображениями мотивировано принятие следующего определения:

Высказывание A *вычислимо ложно* $\rightleftharpoons$ Высказывание $\neg A$ *вычислимо истинно.*

Проще говоря, фраза «*высказывание A вычислимо ложно*» не может означать ничего иного, как сокращение выражения «*высказывание $\neg A$ вычислимо истинно*». Значит, вычислимая истина иногда (а именно в случае $\neg A$) детерминирует вычислимую ложь, но никогда не наоборот. Следовательно, истина первична, а ложь производна, вторична. Без истины не обойтись, а ложь избыточна и о ней вообще можно было бы не упоминать. А раз так, то истина естественна, а ложь искусственна.

Расширим функцию интерпретации I, дополнив область ее определения не атомарными формулами. В результате каждой формуле A языка L будет сопоставлено определенное подмножество $I^n(A)$ декартова произведения универсума U^n. Это позволит трактовать формулы как представления вычислимых или не вычислимых множеств. Такая метаоперация выводит нас за границы стандартной семантики А.Тарского.

Реализация указанного замысла наталкивается на следующую проблему. Пусть для формул $P(x)$ и $Q(x,y)$ значения $I(P(x))$ и $I(Q(x,y))$ даны. Как и полагается, $I(P(x)) \subset U$ и $I(Q(x,y)) \subset U^2$. Предположим, формула A имеет вид $(P(x) \mathbin{\&} Q(x,y))$. Тогда какое множество сопоставить A? Естественно было бы конъюнкции сопоставить пересечение, но пересечение $I(P(x)) \cap I(Q(x,y))$ заведомо пусто. Получится, к примеру, что простейшее утверждение «Сократ — человек и Сократ старше Платона» заранее обречено на пустоту. Формальных затруднений не возникает при понимании дизъюнкции как объединения: достаточно положить $I(P(x) \vee Q(x,y)) = I(P(x)) \cup I(Q(x,y))$. Но как вычислять такое смешанное множество, сколько параметров должно быть у соответствующей программы? Хотя многие компьютерные программы и команды допускают ввод разного числа параметров, логически это не естественно, коль скоро предполагается, что каждая программа вычисляет какую-то частичную или тотальную функцию.

Мы предлагаем простое решение возникшей проблемы. Пусть n — наибольшая местность, которую имеют атомарные предикаты из формулы A. Назовем число n *степенью формулы* A. Предположим, что интерпретация I определена для всех атомарных предикатов из A. Если входящий в A атомарный предикат $P(t_1, t_2, \ldots, t_m)$ таков, что $m < n$ (где n — степень формулы A), то, не меняя саму формулу A, изменим интерпретацию данного предикатного символа следующим образом. Вместо $I(P(t_1, t_2, \ldots, t_m)) = V_1 \times V_2 \times \ldots \times V_m \subset U^m$ положим $I^n(P(t_1, t_2, \ldots, t_m)) = V_1 \times V_2 \times \ldots \times V_m \times V_{m+1} \times V_{m+2} \times \ldots \times V_{m+(n-m)} \subset U^n$, причем, по определению, $V_m = V_{m+i}$ для всех i, $m < i \leq n$. Если же $m = n$, то полагаем $I^n(P(t_1, t_2, \ldots, t_m)) = I(P(t_1, t_2, \ldots, t_m))$.

Представляется, что такое расширение интерпретации не меняет ее содержательной сути. Зато теперь каждый атомарный предикатный символ из A, независимо от своей местности, интерпретируется как подмножество декартова произведения U^n, где n — степень формулы A. Отметим, что нет препятствий для того, чтобы с помощью той же техники определить более высокую степень интерпретации атомарных предикатов из A: для $k > n$ точно таким же способом, как и для n, определим $I^k(P(t_1, t_2, \ldots, t_m)) \subset U^k$. Данный прием *повышения степени интерпретации* атомарных предикатных символов потребуется в дальнейшем.

Перейдем к вычислительной интерпретации логических связок. Допустим, формула A имеет степень n, содержит k атомарных предикатных символов (ясно, что $k > 0$) и интерпретация $I^n(A)$ определена. Тем самым определена и интерпретация $I^n(P_i(t_1, t_2, \ldots, t_m))$ каждого атомарного предикатного символа $P_i(t_1, t_2, \ldots, t_m)$ из A, где $1 \leq i \leq k$. Допустим также, что для каждого атомарного предикатного символа $P_i(t_1, t_2, \ldots, t_m)$ из A существует релевантная для $I^n(P_i(t_1, t_2, \ldots, t_m))$ часть универсума R_i^n, так что выполняется включение $I^n(P_i(t_1, t_2, \ldots, t_m)) \subset R_i^n$. Определим релевантную часть универсума R_A^n для всей формулы A: $R_A^n = \cup\{R_{i \leq k}^n\}$. Иными словами, релевантная часть универсума для формулы A получается в результате объединения релевантных частей универсума ее атомарных предикатов. Поскольку в силу третьей аксиомы каждое R_i^n из $\{R_{i\leq k}^n\}$ непусто, R_A^n тем более не пусто. После этого, естественно, полагаем $I^n(\neg A) = R_A^n \backslash I^n(A)$. По определению, формула $\neg A$ ***вычислимо выполнена*** (*истинна*), если (1) предикат $I^n(\neg A)$ вычислим, и (2) $I^n(\neg A) \neq \varnothing$.

Речь здесь и в дальнейшем идет о ***выполнимости***, если значение формулы зависит от функции приписывания значений свободным индивидным переменным, и об *истинности*, если значение формулы от приписываний не зависит, например, если свободных индивидных переменных в ней нет. В двух этих конкретных пунктах имеется полное соответствие с семантикой А.Тарского.

Предположим, что функции интерпретации I^k и I^m определены для формул A и B. Лишь в этом случае имеет смысл рассматривать интерпретацию формул вида $(A\&B)$ и $(A \vee B)$. Перейдем к вычислительной характеризации логических операций конъюнкции $\&$ и дизъюнкции $\vee$. Предварительно вычислим степень n формул $(A\&B)$ и $(A \vee B)$ (ясно, что она будет одинаковой для этих формул и, к тому же, $n = k$, если $k \geq m$, или $n = m$, если $m \geq k$) и переопределим с помощью приема повышения степени интерпретации $I^k(A)$ и $I^m(B)$, получив в результате $I^n(A)$ и $I^n(B)$. Формула $A\&B$ ***вычислимо выполнена*** (*истинна*), если (1) предикат $I^n(A\&B) = I^n(A) \cap I^n(B)$ вычислим, и (2) $I^n(A\&B) \neq \varnothing$. Формула $A \vee B$ ***вычислимо выполнена*** (*истинна*), если (1) предикат $I^n(A \vee B) = I^n(A) \cup I^n(B)$ вычислим, и (2) $I^n(A \vee B) \neq \varnothing$.

Будем опускать индексы степеней интерпретации и писать I вместо I^n и R вместо R^n, памятуя о всегда имеющейся возможности уравнения степеней интерпретации всех подформул формулы A с помощью приема повышения степени. Вообще, от любого ***конечного*** набора формул $\{A_1, A_2, \ldots, A_k\}$, для которого определены интерпретации $\{I^{n_1}(A_1), I^{n_2}(A_2), \ldots, I^{n_k}(A_k)\}$, всегда можно перейти к унифицированному по степени интерпретации набору $\{I^n(A_1), I^n(A_2), \ldots, I^n(A_k)\}$, где $n \geq n_i$ $(1 \leq i \leq k)$. Разумеется, это не так в случае бесконечных множеств формул.

ТЕОРЕМА 3.

$\dashv$ *(a). Если $I(A)$ и $I(B)$ вычислимы, то $I(A\&B)$ вычислим.*

$\dashv$ *(b). Если $I(A\&B)$ вычислим, то $I(A)$ и $I(B)$ вычислимы.*

$\vdash$ *(c). Если $I(A)$ вычислим, $I(B)$ вычислим и $\exists x(x \in I(A\&B))$, то $I(A\&B)$ вычислим.*

$\vdash$ *(d). Если $I(A)$ и $I(B)$ вычислимы, то $I(A \vee B)$ вычислим.*

Доказательство.

(a). При $I(A\&B) = \varnothing$ предикат $I(A\&B)$ в общем случае не является вычислимым (см. обсуждение постулата локального пересечения).

(b). Возьмем в качестве компьютера C МНР-машину. Тогда на множестве формул классического исчисления предикатов предикат *Теорема*(x) вычислим, а предикат *Выполнима*(x) не вычислим. Положим $I(A) =$ *Теорема*(x) и $I(B) =$ Выполнима(x). Тогда $I(A) \cap I(B) =$ *Теорема*$(x) \cap$ Выполнима$(x) =$ *Теорема*$(x) = I(A\&B)$. Отсюда предикат $I(A\&B)$ вычислим, а предикат $I(B)$ не вычислим.

(c). Следует из постулата локального пересечения.

(d). Следует из постулата локального объединения. Q.E.D.

Если считать импликацию $(A \to B)$ самостоятельной логической операцией, то не вполне понятно, какой вычислительный смысл эта операция может иметь. Наверное, недаром импликация отсутствует в большинстве языков программирования. Проще поступить обычным образом: положить, по определению, $(A \to B) \rightleftharpoons (\neg A \vee B)$. В этом случае интерпретация формулы $(A \to B)$ предполагает существование предикатов $I(\neg A)$ и $I(B)$. Тогда $I(A \to B) = I(\neg A) \cup I(B)$.

Остается рассмотреть выполнимость и истинностные условия для формул с кванторами. В каком случае считать выполненными и истинными формулы вида $\forall x A(x)$ и $\exists x A(x)$? Первый шаг очевиден: предположим, что предикат $I(A(x))$ определен. В случае с квантором общности второй шаг должен состоять в предположении, что определено релевантное (в нашем смысле) отрицание предиката $I(A(x))$, т.е. предикат $R \backslash I(A(x))$. Тогда на третьем шаге получаем: формула $\forall x A(x)$ ***вычислимо выполнена*** (***истинна***), если (1) предикат R вычислим и (2) $R \backslash I(A(x)) = \varnothing$

(или, что то же самое, $R = I(A(x))$). Отсюда вытекает, что следует принять по определению: $I(\forall x A(x)) = R$, если $I(A(x)) = R$, и $I(\forall x A(x)) = \varnothing$, если $I(A(x)) \neq R$.

Второй шаг в случае с квантором существования совершенно иной. Здесь вообще не требуется отнесения к релевантному универсуму R. Вместо этого достаточно потребовать, чтобы выполнялись требования вычислимости и непустоты: формула $\exists x A(x)$ *вычислимо выполнена* (*истинна*), если (1) предикат $I(A(x))$ вычислим и (2) $I(A(x)) \neq \varnothing$. Тогда логично установить $I(\exists x A(x)) = I(A(x))$, если $I(A(x)) \neq \varnothing$, и $I(\exists x A(x)) = \varnothing$, если $I(A(x)) = \varnothing$. Отсюда принимаем по определению $I(\exists x A(x)) = I(A(x))$.

Таким образом, квантор общности действует как переключатель, дающий либо R, либо $\varnothing$ в зависимости от значения $I(A(x))$, тогда как квантор существования сохраняет значение $I(A(x))$ и в этом смысле ничего не меняет.

В итоге был представлен метод *вычислительной интерпретации* формул классического первопорядкового языка, сводимый к двум этапам: на первом определялось множество $I(A)$, а на втором ставился вопрос о вычислимости множества $I(A)$. При этом отнюдь не всякой правильно построенной формуле была гарантирована вычислительная интерпретация из-за проблем с релевантным отрицанием на первом этапе и из-за невычислимости некоторых множеств на втором этапе. Тем не менее, верно следующее общее утверждение.

ТЕОРЕМА 4. *Формула A вычислимо выполнена (истинна) $\Longleftrightarrow$ предикат $I(A)$ вычислим и $I(A) \neq \varnothing$.*

Доказательство. Доказательство осуществляется индукцией по числу логических связок и кванторов в формуле A. Q.E.D.

Подробное изучение свойств введенных логических операций оставим на будущее. Обсудим лишь некоторые частные случаи. Начнем с формулы $(P(x) \vee \neg P(x))$. Если релевантный универсум для P не определен, говорить не о чем. Если же имеется соотвествующее $R \subset U$ и $I(P(x)) = V$, где $V \subset R$, то $I(\neg P(x)) = R \backslash V$. Тогда формуле $(P(x) \vee \neg P(x))$ сопоставляется множество $I(P(x) \vee \neg P(x)) = I(P(x)) \cup I(\neg P(x)) = V \cup R \backslash V = R$. Если $R =$

U, то формула $(P(x) \vee \neg P(x))$ выполнена при каждом приписывании v, т.е. классически истинна. Но вычислимо истинна она будет лишь в том случае, если множество U вычислимо, что не гарантировано. Но если $R \neq U$, классически $(P(x) \vee \neg P(x))$ уже не будет истинной. Зато, учитывая $V \cup R \backslash V = R$ и $R \neq \varnothing$, при условии вычислимости множества R, формула $(P(x) \vee \neg P(x))$ будет вычислимо истинна: $(P(x) \vee \neg P(x))$ вычислимо истинна $\Longleftrightarrow$ R вычислим. Более того, при тех же условиях будет вычислимо истинна и формула $\forall x(P(x) \vee \neg P(x))$, поскольку предикат R вычислим и $R \backslash I(P(x) \vee \neg P(x)) = \varnothing$. Непустота и вычислимость релевантного универсума R обеспечат вычислимую истинность и формулы $\exists x(P(x) \vee \neg P(x))$. Однако невычислимость R все разрушит.

Формула $(P(x)\ \&\ \neg P(x))$ ни при каких условиях не может стать вычислимо истинной. Действительно, $I(P(x)\ \&\ \neg P(x)) = I(P(x)) \cap I(\neg P(x)) = V \cap R \backslash V = \varnothing$. Но вычислимая истинность ее отрицания вновь зависит от вычислимости R. Поскольку $R_{(P(x)\ \&\ \neg P(x))} = \cup\{R_{P(x)}\} = R$, имеем $I(\neg(P(x)\ \&\ \neg P(x))) = R \backslash I(P(x)\ \&\ \neg P(x)) = R \backslash \varnothing = R \neq \varnothing$. Отсюда $\neg(P(x)\ \&\ \neg P(x))$ вычислимо истинна $\Longleftrightarrow$ R вычислим. И снова вычислимость R обеспечит вычислимую истинность формул $\forall x \neg(P(x)\ \&\ \neg P(x))$ и $\exists x \neg(P(x)\ \&\ \neg P(x))$.

Предложенное введение в теорию вычислимой истины является дальнейшим развитием концепции истины как трехместного предиката, обсуждавшейся в упомянутых работах автора. Истина является не характеристикой высказывания A самого по себе, и не определяется (как у А.Тарского) сочетанием «высказывание — модель», т.е. парой $< A, I(A) >$. Интерпретация I лишь придает высказыванию A *смысл*. Необходима третья компонента, позволяющая соотнести высказывание A вместе с вложенным в него смыслом $I(A)$ с *реальностью* $\mathbb{C}$. Тем самым получаем трехкомпонентную структуру $< A, I(A), \mathbb{C} >$: *высказывание A с приписанным смыслом $I(A)$* **истинно** (*или* **не истинно**) *по отношению к реальности* $\mathbb{C}$. В предыдущих работах автора по проблеме истины и реальности последняя была описана теоретико-множественным образом. Здесь реальность $\mathbb{C}$ представлена вычислительными устройствами (компьютерами) и реализуемыми на них вычислительными процессами, тогда как смысловые характеристики оставались теоретико-множественными. В какой мере плодотворно представление изменяющейся реальности в виде вычислимого универсума — покажет будущее.

Литература

[1] *Анисов А.М.* Время и компьютер. Негеометрический образ времени. М., 1991.

[2] *Анисов А.М.* Темпоральный универсум и его познание. М., 2000.

[3] *Анисов А.М.* Проблема реальности в семантической теории истины // Труды научно-исследовательского семинара Логического центра Института философии РАН. Вып. XVII. М., 2004.

[4] *Анисов А.М.* Определение понятия реальной истины в теории множеств с атомами // Логические исследования. Вып. 11. М., 2004.

[5] *Анисов А.М.* Понятие реальности и логика // Логические исследования. Вып. 12. М., 2005.

[6] *Беркович С.Я.* Клеточные автоматы как модель реальности: Поиски новых представлений физических и информационных процессов. М., 1993.

[7] *Катленд Н.* Вычислимость. Введение в теорию рекурсивных функций. М., 1983.

[8] *Крушинский А.А.* Логика «И цзина»: дедукция в древнем Китае. М., 1999.

[9] *Хармут Х.* Применение методов теории информации в физике. М., 1989.

[10] *Poundstone W.* The Recursive Universe. Cosmic Complexity and the Limits of Scientific Knowledge. N.Y., 1985.

Зарубежные направления в философии математики и их преломление в философско-логической и историко-математической мысли России XVIII–начала XX века. (Продолжение)[1]

Б.В. Бирюков, З.А. Кузичева

12 Марксистские интерпретации «Введения» в учение о линейных протяженностях

Прежде чем приступить к изложению материала настоящего параграфа, мы вынуждены сделать несколько замечаний к статье В.А. Бажанова «Партия и логика. К истории одного судьбоносного постановления ЦК ВКП(б) 1946 года», опубликованной в «Логических исследованиях» (№ 12, 2005, с. 32–48).

В.А. Бажанов ошибочно указывает, что бывший работник НКВД А.И. Асеев в 1940 г. был назначен директором *Института философии* (с. 38). В действительности, он стал директором МИФЛИ (Московского института истории, философии и литературы). Далее, В.А. Бажанов написал о «деле Ю.А. Гастева», возникшего после выхода книги последнего «Гомоморфизмы и модели» (с. 45), не разобравшись в сути вопроса. Заметим, прежде всего, что он называет вторым редактором этой книги (наряду с Б.В. Бирюковым) В.С. Тюхтина, тогда как им был Ю.А. Шрейдер (держал ли В.А. в руках книгу Гастева?). Но самое досадное то, что В.А. Бажанов повторяет легенду, распространявшуюся самим Ю.А. Гастевым, о причине гонений на

[1]Работа подготовлена при поддержке Российского гуманитарного научного фонда, проект № 03-03-00096а, 05-03-03522а.

его труд. Не вдаваясь в детали, отметим, что причиной создания комиссии АН СССР, разбиравшей факт выхода «порочной» книги, и принятия соответствующего решения РИСО АН СССР было то, что в Предисловии к ней было упомянуто имя «диссидента» А.С. Есенина-Вольпина, находившегося уже за границей. *Никаких других* вопросов кроме этого комиссией и РИСО не поднималось (но и этот вопрос весьма показателен!) Председатель РИСО, вице-президент Академии наук П.Н. Федосеев, подписавший план, по которому была издана книга Гастева, не был заинтересован в раздувании этого дела. Все это В.А. Бажанов мог бы выяснить, просто сняв телефонную трубку.

Вернемся, однако, к научно-философской тематике. До сих пор мы занимались преимущественно логическими — даже историко-логическими — вопросами. Обратимся теперь к проблематике философско-математической. Из трех направлений, выкристаллизовавшихся в этой сфере: аксиоматической методологии, теоретико-множественной установке и генетического подхода — мы здесь уделим внимание главным образом последнему.

В 1913 г. под редакцией уже знакомого нам математика А.В. Васильева и выпускника Сорбонны П.С. Юшкевича стал выходить непериодический сборник «Новые идеи в математике». В его первом выпуске был опубликован перевод «Введения» в «Учение о линейной протяженности» Г. Грассмана [1, с. 78–95]. Примечательно, что переводчиком оказался социал-демократ и оппонент В.И. Ульянова-Ленина[2]. Видимо, в этом введении содержалось нечто, привлекавшее марксистскую мысль. Правда, разные марксисты по-разному вычитывали мудрость из философских строк Г. Грассмана.

Владимир Ильич помянул Г. Грассмана еще до публикации Васильева–Юшкевича. Речь идет о книжке «Материализм и эм-

---

[2]Павел Соломонович Юшкевич (1873–1945), уроженец Одессы, участник революционной борьбы против «царизма», отец упоминавшегося в первой части настоящей статьи Адольфа Павловича Юшкевича. После «ссылки» (в город Кишинев!) П.С. эмигрировал из России, и образование закончил во Франции, окончив Парижский университет. Участие в издании «Новых идей в математике» — светлая страница в его жизни, участие в спровоцированном большевиками «русском бунте, бессмысленном и беспощадном» (который он, по свидетельству И.А. Бунина в «Окаянных днях», оправдывал) составляет его теневую сторону. В советские годы П.С. отдал много сил переводам на русский язык философских классиков.

пириокритицизм», в которой ее автор, имея в виду «Учение о протяженностях», оценил взгляды Г. Грассмана как «материалистические». Материализм он усматривал в грассмановском утверждении о согласии мышления с бытием и согласованности процессов мысли друг с другом. Неужели невдомек было будущему «вождю мирового пролетариата» задаться простым вопросом: а не был ли Г. Грассман верующим? Утвердительный ответ на этот вопрос — а именно он является верным — обесценивал все ленинские рассуждения о грассмановском материализме.

В.Ф. Каган в своей большой энциклопедической статье, посвященной философским вопросам математики, в частности геометрии, дал идеям Г. Грассмана иную оценку [2, столб. 406–407]. Каган отмечает, что Г. Грассман подразделял все науки на «реальные» и «формальные», и что формальные науки, по Грассману, «имеют своим предметом то, что предложено самой человеческой мыслью, и истинность их заключается во взаимном согласии процессов нашего мышления». На этом основании Каган причисляет Г. Грассмана к родоначальникам *конвенционализма*, наряду с Фреге, Пеано и Пиери. Эта оценка — так же как приводимые Каганом и мало совместимые друг с другом имена — не намного убедительней ленинской.

Ни Ленин, ни Каган не отметили одну важную для марксизма черту философии математики Г. Грассмана — ее *диалектический* характер. Это было сделано — в конце 20-х годов прошлого века — С.А. Яновской. Мы имеем в виду ее статью о категории количества у Гегеля [3]. Она отмечает, что в конце первой половины XIX века, когда идеи Гегеля и его ближайших предшественников еще не считались столь «одиозными» у математиков, в этот период такой крупный математик, как Герман Грассман, например, писал: «Противоположность между дискретным и непрерывным (как и все истинные противоположности) — текучая, ибо дискретное может быть раскрываемо как непрерывное и, наоборот, непрерывное — как дискретное» [4]. Грассман понимал, продолжала Яновская, что отсюда вовсе не следует, что различие непрерывного и дискретного лишено смысла. «Будучи единством противоположностей, заключая в себе *момент* дискретности, непрерывное, однако, *положено* в форме непрерывности. Дискретность в нем содержится лишь в скрытой, неразвитой еще форме, именно, как момент. И наоборот, дискретное *положено* в форме дискретности, заключая в себе непрерывность лишь в зародыше, лишь как *момент*. Недостаточно поэтому сказать «все и непрерывно и дискретно», но в каждом отдельном случае необходимо выяснить, в какой именно форме предстоит перед нами нечто данное, в какой из них оно *положено*. В каждом отдельном случае мы имеем дело *или* с непрерывным, *или* с дискретным. Но это непрерывное содержит в себе момент дискретности, а дискретное — момент непрерывности. Так, *относительно* непрерывная *эволюция* в действительности тоже содержит в себе множество разрывов, а дискретный *скачок* при ближайшем анализе сам выступает, как непрерывная величина. Задача исследователя состоит, однако, не в том, чтобы все *свести только* к дискретности или только к непрерывности, но чтобы в *каждом отдельном случае* подчеркнуть *существенный* для него момент» [3, с. 55–56].

Далее Яновская пишет, что для Грассмана была ясной эта черта гегелевской трактовки единства противоположностей, и в подтверждение своей мысли цитирует из его текста другое место, относящееся, правда, не к противоположению дискретного и непрерывного, а равного и различного: «Противоположность между равным и различным, — пишет он [Г. Грассман], — тоже текучая. Равное различно, поскольку уже то или иное, равное ему, каким-нибудь образом обособлено (ведь без этого обособления оно было бы только одним, значит — не было бы равного); различное — равно, хотя бы постольку, поскольку различные объекты связываются между собою относящеюся к ним деятельностью, т.е. поскольку они являются чем-то связанным. *Но это не значит, что оба момента теряются друг в друге*, так что нужен масштаб для определения того, сколько следует признать равного и сколько различного между обоими представлениями. Хотя с равным и связано всегда каким-нибудь образом различное, и наоборот, но все-таки в *каждом отдельном случае лишь одно из них является моментом рассмотрения, между тем как другое представляет лишь предпосылку и основу первого* (Курсив мой. — *С.Я.*)» [3, с. 56].

Эти высказывания и оценки С.А. Яновской нуждаются в пояснении. Когда она говорит об «одиозности» для математиков гегелевской диалектики, она имеет в виду утрату гегельянством своего первоначального обаяния. Математики склонны были признавать не гегелевский, а кантовский взгляд на их науку, а после появления неевклидовых геометрий и Кант во многом утратил у них кредит. Далее, С.А. ошибается, однозначно связывая диалектические идеи Германа Грассмана с именем Гегеля. Диалектике братья Грассманы учились не у автора «Науки логики» и «Феноменологии духа», а у Шлейермахера, основоположника герменевтики. А слишком уж «текучие» грассмановские рассуждения о равном и различном Яновская впоследствии отвергла, и в ее статьях «Количество в математике» и «Равенство (в логике и математике)» [5] мы не найдем ссылок ни на Гегеля, ни на Г. Грассмана. Другое дело — диалектика дискретного и непрерывного. Ее *С.А.* осмысливала в связи с развитием кибернетики и цифровой вычислительной техники. Например, в предисловии к русскому переводу книжки А. Тьюринга и Дж. фон Неймана она писала о познании непрерывного с помощью дискретного и обращала внимание на идею фон Неймана, который связывал прогресс логики с использованием такого аппарата, который является гораздо менее комбинаторным (то есть менее дискретным), чем используемый в настоящее время, и «гораздо более близким к математическому анализу, имеющему дело с непрерывностью» [6]. Мы знаем теперь, что разработки разного рода «непрерывностных логик» впоследствии получили значительное развитие (хотя и не привели к тому прогрессу в формализации мышления, к которому стремились и Тьюринг, и Нейман).

Не упоминая Г. Грассмана в своих последующих работах, С.А. Яновская фактически придавала современную форму его идеям.

13 И.И. Жегалкин: трансфинитные числа и арифметика «четного и нечетного»

У истоков математической логики в России XX столетия стоит И.И. Жегалкин[3], продолжавший традицию, начало которой

[3]Иван Иванович Жегалкин (1869–1947) — российский (советский) математик и логик, в 1902–1911 гг. — приват-доцент Московского университета; в советское время — доктор физико-математических наук, профессор МГУ.

положил Порецкий. Он был первым в СССР собственно математическим логиком. В частности, он явился создателем и руководителем (совместно с П.С. Новиковым и С.А. Яновской) научно-исследовательского семинара по математической логике в МГУ.

И.И. Жегалкину принадлежит первая в России монография, посвященная учению о множествах Г. Кантора — «Трансфинитные числа» [7]. Одна из характерных особенностей его подхода состояла в том, что он начинает с определения понятия *конечного* множества и на его основе вводит понятие *бесконечного* множества. Это выглядит так.

Установив понятие упорядоченного множества, Жегалкин переходит к понятию *вполне* упорядоченного множества, определяя его как такое упорядоченное множество, всякая часть которого имеет первый элемент. Далее, опираясь на теорему Цермело, согласно которой всякое непустое упорядоченное множество может быть вполне упорядочено, он определяет: «Конечным множеством называется вполне упорядоченное множество, всякая часть которого, а, следовательно, и оно само, имеет последний элемент», или также: «Конечное множество есть такое упорядоченное множество, всякая часть которого имеет первый и последний элемент», поясняя, что термин «часть» употребляется им «в широком смысле»; теперь бы мы вместо «части» сказали «подмножество». Множество, которое не может быть так упорядочено, чтобы каждое его подмножество имело первый и последний элемент, называется *бесконечным*. Определяющим свойством бесконечного множества является наличие у него собственного подмножества, равномощного самому множеству [7, с. 178, 203 и др.].

По-видимому, И.И. Жегалкин считал понятие конечного множества интуитивно более ясным, чем понятие бесконечного множества. Кроме того, определение конечного множества как такого, которое не является бесконечным, не представлялось ему логически безупречным. Поэтому построение теории множеств И.И. начал именно с него. Теперь мы знаем, что интуиция здесь подводит, так как и в понятии конечного множества таятся свои трудности.

Спустя двадцать лет, в 1927 г., Жегалкин опубликовал статью «О технике вычислений предложений в символической логике», в начале которой писал: «Настоящую работу, по ее содержанию, можно рассматривать как дополнение к капитальному труду Whitehead and Russell — "Principia Mathematica"». И далее: «Метод авторов "Principia Mathematica" — непрерывная цепь следующих друг за другом теорем. Давая верные результаты, этот метод не содержит никаких указаний, как надо поступать, чтобы получить не только верные результаты, но и ответы на поставленные вопросы. Если взять из "Principia Mathematica" на выбор любое доказанное предложение и предложить кому-нибудь доказать его, то наша просьба едва ли будет выполнена.

Однако можно, что и является целью этой работы, усовершенствовать технику вычисления предложений так, что получается возможность, *механически применяя раз навсегда установленные правила, убедиться простым вычислением* в истинности или ложности всякого произвольно взятого элементарного предложения» [8, с. 9].

Истинность и ложность предложения, о которых здесь говорится, — это тождественная истинность и тождественная ложность, то есть, соответственно, доказуемость предложения (формулы пропозиционального исчисления) из пустого множества посылок и опровержимость, то есть доказуемость из пустого множества посылок отрицания предложения (формулы упомянутого исчисления).

Жегалкин строит исчисление высказываний, в котором заглавные буквы латинского алфавита, например $P, Q, \ldots$ — символы предложений, а соответствующие строчные буквы $p, q, \ldots$— их истинностные значения, пробегающие множество $\{0, 1\}$. Он пишет далее: «будем числовое значение предложения принимать равным нулю, если предложение ложно, и равным единице, если оно истинно» [8, с. 10]. Над истинностными значениями определены операции сложения и умножения, задаваемые следующим образом:

$$0+0 = 0;\ 0+1 = 1+0 = 1;\ 1+1 = 0;\ 0{\cdot}0 = 0;\ 0{\cdot}1 = 1{\cdot}0 = 0;\ 1{\cdot}1 = 1.$$

Пусть p обозначает любое из чисел $0, 1$. Тогда, используя приведенные выше свойства сложения и умножения, получаем: $0 + p = p$; $0 \cdot p = 0$; $1 \cdot p = p$; $p + p = 0$; $p \cdot p = p$. Если теперь определить разность истинностных значений предложений P и

Q как такое $r = p - q$, что $r + q = p$, то, прибавляя q к обеим частям последнего равенства, получаем $r = p + q$, $p + q = r = p - q$. А это значит, что вычитание совпадает со сложением. В теоретико-множественном смысле умножение и сложение Жегалкина соответствуют пересечению и симметрической разности, которая обратна самой себе. Операции дизъюнкции и отрицания (в теоретико-множественном смысле — объединение множеств и взятие дополнения к множеству до универсального множества) — они составляют базис пропозициональной логики в построениях Уайтхеда и Рассела — получают у Жегалкина, соответственно, следующее представление:

$$p \vee q = p \cdot q + p + q \text{ и } \neg p = p + 1.$$

Использованный Жегалкиным базис операций $\{+, \cdot, 1\}$ был функционально полон, а построенное на его основе исчисление изоморфно кольцу вычетов по модулю два, то есть «пифагорейской» арифметике четного и нечетного. В системе Жегалкина сложение и умножение ассоциативны и дистрибутивны, а умножение идемпотентно. Поэтому приведение формул пропозициональной логики к каноническому виду — логическому многочлену Жегалкина — производится очень просто. Оно сводится к раскрытию скобок и приведению подобных. В результате любая формула, представленная на языке Жегалкина, предстает в виде суммы произведений переменных, включая произведения, состоящие из одиночных букв и константы 1; при этом любое четное число одинаковых слагаемых взаимно уничтожается, а любое нечетное их число сводится к одному слагаемому. Пусть, например,

$$f = (x + y)(x + z) + y(z + x).$$

Нетрудно убедиться, что многочлен Жегалкина для f имеет вид: $f = x + yz$.

Логический многочлен Жегалкина для произвольной пропозициональной формулы F, содержащий переменные $p_1, p_2, \ldots p_n$, линеен относительно каждой из них и представляет F однозначно. Проблема разрешения, поэтому, сводится к выяснению того, равна или нет единице формула F. Как отмечала С.А. Яновская, заявка на работу, в которой пропозициональная логика строилась в виде алгебраического кольца, была сделана только спустя почти двадцать лет (в 1946 г.) Правда, при этом было осуществлено построение, двойственное тому, что осуществил Жегалкин: вместо строгой дизъюнкции использовалась эквиваленция, а вместо конъюнкции — (неразделительная) дизъюнкция.

Вслед за статьей 1927 г. И.И. Жегалкин опубликовал серию работ [9], развивавших описанный выше подход. Он распространил его на логику одноместных предикатов и получил для нее решение проблемы разрешения. Он рассмотрел также некоторые частные случаи узкого исчисления предикатов (не обязательно одноместных) и нашел решения проблемы разрешения на конечных классах. Заметим, что в 1950 г. Б.А. Трахтенброт доказал неразрешимость проблемы разрешения для общего случая.

Стоит заметить, что общелогическое содержание того, чем занимался Иван Иванович, — и прежде всего проблема формализации логического следования — в явной форме им не раскрывалось. Но, как отмечается в литературе [10], всякий знающий логик его времени понимал: чтобы показать, что некоторое следствие F выводимо из посылок $F_1, F_2, \ldots F_n$, достаточно образовать импликативную формулу, антецедентом которой является конъюнкция посылок, а консеквентом — данное следствие, построить для этой формулы многочлен Жегалкина и показать, что он равен единице.

Ирония судьбы: Иван Иванович при «царизме» мог совершить смелый, как тогда считалось, поступок — покинуть Московский университет в знак протеста против «реакционной» политики министра народного просвещения Кассо[4], а в советское время он не только не решался рассматривать философское содержание логики. Не решался он даже прямо сказать, что занимается этой наукой как таковой, а не только «символической» логикой. Сфера логического была тогда небезопасной областью знания, так как логику в ту пору отождествляли с «формальной логикой», наукой «метафизической» и потому подозрительной с идеологической точки зрения.

[4]Л.А. Кассо занимал этот пост в 1910–1914 гг., и в советских справочниках можно прочитать, что он преследовал «прогрессивную профессуру и революционное студенчество».

Известно, что И.И. готовил учебник логики, но рукопись его не сохранилась. Это очень похоже на судьбу книги А.В. Васильева ...

14 Три направления в философии математики. Первый опыт построения рекурсивной арифметики

Известно, что математика, математическая логика, ряд разделов физики (прежде всего классическая механика), некоторые применения математики и информатики в сфере гуманитарных наук (в их числе структурная и математическая лингвистика), — словом, то, что можно назвать дедуктивным знанием, — используют ныне самые многообразные методы. На первое место среди них, пожалуй, следует поставить построение аксиоматических систем, предполагающих всегда те или иные интерпретации. К аксиоматизации естественным образом оказывается «привязанным» аппарат логического вывода, а также эвристические приемы анализа и синтеза, к которым прибегают и при формулировке требующихся аксиом, и при поиске нужных интерпретаций. В качестве более общего подхода следует назвать формализацию содержания и идеализацию понятий — то и другое идет рука об руку и приводит к соответствующим структурам абстрактных объектов. Однако на протяжении всей истории дедуктивного знания в нем — с той или иной мерой четкости — присутствовали: теоретико-множественный подход (первоначально в виде логики объемов понятий) и генетический метод. Сущность последнего заключается в порождении объектов по определенным правилам и в последующем их исследовании — в частности, с помощью указанных выше «альтернативных» методов и приемов.

Хотя и аксиоматизация, и генетическая установка, и оперирование с классами (множествами) как объемами понятий проходят через всю историю математики и логики, не все они в равной мере удостаивались внимания со стороны математического философствования. В наибольшей мере осмыслялись аксиоматизация и учение о множествах — особенно с тех пор, как Г. Кантор разработал свое учение о множествах, и оно было сочтено базой всей математики. Между тем генетическая методология —

и связанный с ней стиль мышления — может гордиться такими именами, как Евклид, Декарт, Паскаль, Лейбниц, как Пуанкаре, Брауэр и Г. Вейль, да и Георг Кантор тоже, так как его актуальные бесконечности мыслятся генетически порождаемыми. А в России в этом контексте надо назвать Лузина, представителя так называемого эффективизма — концепции, предварявшей появление математического и логического конструктивизма: выдвигалось требование конструктивного осмысления континуума без ясной идеи конструктивности используемых методов[5]. Таковая оформилась только после создания теории алгорифмов.

Начиная с третьего десятилетия прошлого века, генетическая методология привела к конструктивистской концепции в философии математики и методологии науки. В нашем отечестве эту концепцию представляла, прежде всего, школа А.А. Маркова, хотя в менее «жестком» варианте она присутствовала и в математической «классике», например, у А.Н. Колмогорова. В последующем развитии генетическая концепция слилась с теорией алгорифмов, языками программирования и компьютерной наукой и практикой.

В течение длительного времени в философско-математических и логико-методологических работах акцентировались, прежде всего, аксиоматика и теоретико-множественная установка; в России последняя была представлена трудом И.И. Жегалкина «Трансфинитные числа». Что касается генетического подхода — не забудем, что представление о нем получило известность благодаря Д. Гильберту, — то в «докибернетическую» эру он как бы оставался в тени. И это при том, что, начиная с последней трети XIX столетия, в математике и логике подход этот взаимодействовал с аксиоматическим и теоретико-множественным стилями мышления, обогащая математико-логическое видение мира.

Недооценка генетического подхода приводила к вполне конкретным философско-математическим и историко-математическим упущениям, когда, например, из поля зрения исследователей выпадали определенные стороны творчества Лейбница и

[5]Термин «эффективизм» обычно связывают с французской школой теории множеств и функций (Борель, Лебег, Бэр и др.), установки которой принял и развивал Н.Н. Лузин. См. [11].

Паскаля, не усматривалась внутренняя связь идей Пуанкаре, Сколема, Г. Вейля, Лузина. Это суживало представления об идейных линиях, приведших к теории алгорифмов — абстрактной и прикладной, к уяснению логических основ обработки информации. Не случайно при разработке языков программирования обращение к математической логике произошло с большим запозданием.

Генетическая концепция построения строгой науки в четкой форме и на прочном алгебраическом фундаменте впервые была явлена в творчестве Германа Грассмана: именно от него отталкивался А.Н. Уайтхед в своем известном «Трактате об универсальной алгебре» (1898). В развернутом виде, но без учета наследия Г. Грассмана и «учения о величинах» его брата Роберта, концепция эта обрела новую жизнь в «рекуррентном способе мышления» Т. Сколема (1923). От его результатов прямой путь вел к теории алгорифмов...

Первым опытом осмысления в отечественной литературе генетического подхода к основаниям математики, представленного в «Учебнике арифметики» Г. Грассмана (1861), можно считать работу В.Ф. Кагана, о который речь пойдет ниже. Для этого, однако, нам придется предварительно остановиться на грассмановском построении[6]. Говоря современным языком, оно было основано на индуктивном порождении системы величин, на которой задавались некоторые операции. Заметим, что подобный метод впоследствии получил у Г. Вейля (следовавшего, впрочем, примеру А. Пуанкаре) название метода итерации[7].

Г. Грассман начинает с того, что строит систему величин, названную им основным рядом. Члены системы порождаются из единственного элемента — «положительной единичности» (он обозначается буквой e) — посредством прибавления к уже построенным величинам либо элемента e, либо «отрицательной единичности», $-e$. В результате получается потенциально бесконечная линейно упорядоченная система

$$\ldots, e + -e + -e + -e, e + -e + -e, e + -e, e, e + e, e + e + e, \ldots;$$

[6]Мы будем следовать при этом тому конспективному изложению, которое представлено в тезисах [12].

[7]Впрочем, метод этот, обогащенный за счет логики предикатов, был несравненно более мощным и пригодным для обоснования анализа.

величина $e + -e$ именуется нулем и обозначается обычным знаком 0. Естественно принять, что в этой системе каждый ее член отличен от всех остальных, и тогда она получает наименование «основного ряда»[8]. Предполагается, разумеется, что в нашем распоряжении имеется неограниченно много «положительных единичностей».

Положительная единичность e и следующие за ней члены — результат итерации операции сложения элементов e — образуют положительную часть основного ряда. Члены, предшествующие элементу e, составляют неположительную часть основного ряда; каждый член в этой части основного ряда представляет собой сумму, складывающуюся из элемента e и одной или более отрицательных единичностей.

На основном ряде рекурсивно определяется бинарная операция сложения; при этом используются операции «порождения непосредственно последующего» и «непосредственно предшествующего» члена ряда (при произвольной величине a в роли параметра); эти операции вытекают из построения основного ряда. При вычислении сумм, каковыми являются члены основного ряда, используется отношение равенства, основывающееся на графической одинаковости величин. Величины, таким образом, оказываются, говоря современным языком, словами (определенного вида) в алфавите знаков

$$e, +, -,$$

что приводит к тому, что отношение равенства (соответственно неравенства) величин сводится к отношению их графической одинаковости/неодинаковости.

Не станем прослеживать дальнейшие детали теории основного ряда. То, что следует отметить, так это способ перехода от основного ряда к ряду целых чисел. Совершается он, когда рекурсивно определяется операция умножения, причем «единичность», e, заменяется «единицей» (Eins), 1; основной ряд становится «числовым» (линейно упорядоченным множеством всех целых чисел) в результате определения: $a \cdot 1 = a$ и установления

[8]Вместо *ряда* здесь было бы более уместно говорить *последовательность*, но мы будем придерживаться уже сложившейся терминологии.

того, что числовой ряд — это такой основной ряд, единичность которого есть 1.

Для чего же основной ряд строится как в некотором смысле предшествующий числовому? Ответ: для того чтобы ввести именованные числа как величины основного ряда, множество которых изоморфно числовому ряду относительно сложения и вычитания. При этом известные свойства операции сложения (в частности ассоциативность и коммутативность) и вычитания доказываются относительно величин основного ряда в его общем виде, дистрибутивность же умножения относительно операций «+» и «−» вводится уже в предположении числового ряда. Это и понятно: перемножение именованных чисел выводит за пределы основного ряда (аналогично тому как в грассмановском «учении о протяженностях» перемножение направленных отрезков порождает ориентированную площадку — объект 2-го порядка).

15 Отечественная наука о грассмановской арифметике

В России в 20-е годы грассмановской арифметикой *целых чисел* занялся В.Ф. Каган. Заметим, что его интерес к обоснованию теории чисел не был случаен — он был связан с его исследованиями в области оснований геометрии. По-видимому, В.Ф. собирался, так сказать, перебросить мост между арифметикой и геометрией. В связи с этим стоит обратить внимание на то, что знаменитые «Principia Mathematica» Уайтхеда и Рассела были задуманы как четырехтомник, но последний том — он должен был быть посвящен геометрии и написан Уайтхедом — так и не вышел за смертью последнего.

В упоминавшейся выше большой энциклопедической статье (144 столбца!) Каган дважды обращается к обоснованию арифметики. Сначала он выделяет в построении Грассмана часть, касающуюся натуральных (целых неотрицательных) чисел и лишь потом переходит к целым числам; он, таким образом, идет путем, который противоположен оригиналу. Но основные черты грассмановского построения теории целых чисел он формулирует аккуратно. Для нас особенно интересно, что В.Ф. четко выявляет особенности конструкции грассмановской арифметики. Это — истолкование чисел как знаков определенного вида — слов в фиксированном алфавите; порождение чисел с помощью операции взятия непосредственно следующего числа в (бесконечном) числовом ряду; взаимнооднозначность соответствия между любым числом и числом, которое за ним непосредственно следует (свойство, вытекающее из процесса построения числовой системы); попарное различие всех чисел-слов; рекурсивный характер определения основных операций и индуктивный (в смысле «совершенной индукции») характер доказательств теорем; систематическое использование явных («номинальных», как говорят ныне) определений. «Грассман, — пишет В.Ф. Каган, — не только обнаружил, что в арифметике натурального ряда все доказательства могут быть проведены методом совершенной индукции, но и показал, что все основные определения могут быть установлены таким же путем» [2, столб.413], то есть рекурсивно.

Примечательной чертой кагановского изложения концепции Г. Грассмана было то, что в нем была показана логическая роль явных определений, а также того, что ныне называют определенными дескрипциями, то есть выражений, вводимых с помощью оператора «тот, который». Основание, на котором покоятся определенные дескрипции, Каган называет «принципом свободного обозначения» и поясняет его так: «если мы вводим новый символ, или термин, который раньше не имел никакого значения, то мы можем условиться разуметь под этим символом, или термином, любой ранее установленный объект» [2, столб. 413].

Каган утверждает, что на этом принципе и на «законе совершенной индукции» основана вся арифметика. Здесь уместно отметить, что кагановский «принцип свободного обозначения» был явно указан Т. Сколемом в работе 1923 г. в качестве одного из необходимых логических средств построения примитивно-рекурсивной арифметики. В «Учебнике» Г. Грассмана этот принцип применяется, например, когда вводится операция вычитания.

Следует иметь в виду, что энциклопедическая статья В.Ф. Кагана не была работой историко-математического (и тем более историко-логического) жанра. Автор, судя по всему, уяснял проблему для самого себя. Если рассматривать работу Кагана как реконструкцию грассмановской теории чисел, то в глаза бросаются допущенные В.Ф. неточности. Так, не соответствует исторической правде утверждение, будто у Г. Грассмана теория натуральных чисел выступает как особая конструкция. На деле она включена в теорию «основного ряда» и арифметику целых чисел. Рассмотрения, характеристичные именно для натуральных чисел, появляются в конструкции Г. Грассмана *после* построения основного ряда, ряда целых чисел и основных операций, определяемых для этих рядов. У Кагана (раздел 20 — «Арифметика Грассмана») дело преподносится так, будто у немецкого математика теория натуральных чисел предшествует теории чисел целых[9]. Реконструируя грассмановскую теорию натуральных чисел, В.Ф. Каган ведет рекурсию, начиная с нуля. У Г. Грассмана же рекурсивные процедуры ведутся по правой части «основного ряда» (а потом — ряда целых чисел), начинающейся с единичности «e» (и по левой части, начинающейся с нуля). В разделе 23: «Относительные (положительные и отрицательные) числа» В.Ф. снова обращается к арифметике Грассмана — на этот раз к его теории целых чисел, реконструируя грассмановские рекурсивные определения операций. Но истолкование Каганом операции сложения целых чисел отклоняется от оригинала. В приводимой им системе равенств, задающих сложение, различаются равенства, относящиеся к натуральным, с одной стороны, и к целым отрицательным числам — с другой. Это не соответствует идее Грассмана — задать операцию сложения для произвольных целых чисел; кроме того, не отмечен тот существенный факт, что немецкий математик исходит из более общей структуры — основного ряда. В данной В.Ф. Каганом характеристике грассмановских доказательств не отмечено использование в них иных, отличных от индуктивно-рекурсивных, методов.

И все же реконструкция В.Ф. Кагана для отечественного историко-методологического развития — примечательное явление. Правда, вывод В.Ф.: «Заслуга Грассмана заключается в том, что он построил строго научную арифметику натурального ря-

[9]Правда, в подстрочном примечании в конце раздела 20 отмечается, что «Грассман фактически оперирует с двухсторонним натуральным рядом, неограниченно простирающимся как в одну сторону (положительную), так и в другую (отрицательную)», однако эти слова оставляют читателя в недоумении, куда при этом следует относить число нуль.

да и тем заложил фундамент не только научной арифметики, *но и всего анализа*» [2, столб. 419] — не соответствует реальному вкладу Германа (да и Роберта) Грассмана в основания арифметики. Вклад этот более скромен: обоснованию анализа он заведомо служить не мог, так как для этого требовалась более мощная арифметика — арифметика второго порядка, то есть, говоря логическим языком, теория, содержащая кванторы (без которых Г. Грассман мог обойтись), пробегающие не только по предметным (числовым) переменным, но и по предикатам. Подобной логической теории в распоряжении братьев Грассманов не было: при всей детальности алгебрологического построения Роберта Грассмана (к которому мы вскоре перейдем) кванторов — тем более по предикатным переменным — у него не было.

В начале 80-х годов прошлого века тщательный анализ индуктивно-рекурсивной методологии Г. Грассмана, как она была представлена в его «Арифметике», провела Л.Г. Бирюкова, сотрудничавшая в этой работе с одним из авторов этих строк [13]. В то время вклад Г. Грассмана можно было уже оценить с позиций сложившейся теории алгоритмов. Но этого не мог сделать В.Ф. Каган в начале века, что не умаляет его главную заслугу: он выявил конструктивистскую компоненту построения, представленного в грассмановском «Учебнике арифметики», хотя, конечно, не мог подойти к вопросу с алгоритмических позиций.

16 Логика в контексте «учения о величинах». Инициатива И.Н. Бродского

Братья Грассманы являли собой необычайное содружество — аналогичные примеры мы вряд ли найдем в истории математики, методологии, философии и логики. Герман Грассман, знаменитый ныне математик и филолог, часть своего жизненного и научного пути прошел вместе с младшим братом, впоследствии оказавшимся чрезвычайно плодовитым автором. Роберт выпустил громадное количество своих работ (благо у него были собственная типография и издательство) по самым различным отраслям знания.

Для нас существенно, что Р. Грассман явился — в сотрудничестве с братом и независимо от Буля и Джевонса — одним из основоположников алгебраической формы логики. Работы Роберта до сих пор привлекают мало внимания за рубежом, в то время как, мы уже говорили, они почти сразу вошли в круг отечественных логических исследований. Быть может, одной из причин этой ситуации было то, что работы Р. Грассмана необычайно многочисленны, разноплановы, затрагивают широчайший круг вопросов. Сочинения Р. Грассмана выходили по много раз — с начала 60-х годов до конца XIX столетия[10]. Идентификация сочинений Р. Грассмана представляет значительную трудность, так как он имел обыкновение издавать под разными названиями одни и те же работы. Все это объясняет те трудности, которые доставляют исследователю изучение его литературного наследия.

Жизнь Роберта Грассмана сложилась так, что его научно-литературная деятельность проходила вне академической науки. Отсюда невнимание к его сочинениям со стороны немецких — и вообще западных — исследователей. Логические идеи в его работах тонули в ворохе вопросов, которыми изобиловали его произведения. Отсюда — пренебрежение к его творчеству.

Иное дело Россия. Русским ученым было недосуг разбираться в потоке работ Роберта, в которых писалось «про все», — внимание обращали только на его логическое учение. О дореволюционном изложении его концепции логики и ее оценке мы уже говорили. Но о нем помнили и в советское время: в первом томе «Философской энциклопедии» была помещена небольшая статья о нем [14].

В 70-х годах XX века И.Н. Бродский, ныне покойный[11], предложил своей аспирантке Г.И. Малыхиной в качестве темы кандидатской диссертации анализ и осмысление философско-логического наследия Р. Грассмана. Результатом исследований Га-

[10]Библиография трудов Р. Грассмана и тем более зарубежная литература, в которой хоть с какой-то степенью подробности освещаются его идеи, нам не известны. Ни в Каталоге Британского музея, ни в Национальной немецкой библиографии, ни даже в Каталоге Библиотеки Конгресса США — мы не говорим уже о российских библиотеках — невозможно найти полный перечень его работ.

[11]Иосиф Нусимович Бродский (1924–1994), выпускник Ленинградского университета 1948 г., доктор философских науки и профессор, с 1954 г. до конца дней был членом кафедры логики в своем университете, определяя — вместе со своим коллегой О.Ф. Серебрянниковым — высокий уровень работ ленинградских философских логиков.

лины Ивановны, которые направлял Бродский, явилась ее диссертация на соискание ученой степени кандидата философских наук по специальности «Логика». Подготовленная в Ленинградском университете, она там же была успешно защищена [15][12].

Исходным пунктом методологической концепции Грассманов была теория величин — она была изложена Робертом. Без «учения о величинах» невозможно верно понять особенности грассмановского логического исчисления. «Учение о величинах» предстает в качестве предельно общей и абстрактной теории, которая «закладывается» в основание логики, арифметики, комбинаторики и того же «учения о протяженностях». «Учение о величинах» в том виде, в каком оно было развито Р. Грассманом, рассматривалось Г.И. Малыхиной как предвосхищение — мы должны добавить, весьма отдаленное — общей теории формальных систем, возникшей в XX столетии.

Секрет столь универсального характера грассмановской теории величин состоит в том, что в ней вводятся «законы связи» величин (то есть законы, относящиеся к бинарным операциям и отношениям), которые являются общими для целого класса математико-логических дисциплин. Реконструируя грассмановское учение, мы обнаруживаем основные принципы его построения и его отношение к соответствующей логике (как простейшей из «форм» математики). Последняя представляет собой алгебраически трактуемую теорию понятий, суждений, умозаключений и доказательств: она представлена в работах Р. Грассмана 1872 и 1890 годов.

Анализ логического учения Р. Грассмана требует учета его историко-логического фона, сравнения построения Р. Грассмана с исчислениями Дж. Буля, Ст. Джевонса и Э. Шрёдера. Такой подход позволяет установить историческое место логических сочинений Р. Грассмана в панораме развития логической мысли XIX века, включая формализацию силлогистики. Эта формальная конструкция представляет собой расширение — за счет введения отрицательных терминов и операций объединения и пересечения классов — алгебраически трактуемой аристотелевской теории. Расширение это консервативно, так как не добавляет в

[12]Содержание этой диссертационной работы получило отражение в ряде статей Г.И., опубликованных как до, так и после ее защиты.

силлогистику новых правильных модусов. Историческая значимость «Логики» Р. Грассмана 1872 г. проявляется в том, что она оказала большое влияние на Э. Шрёдера.

Логическое и алгебраическое наследие Г. и Р. Грассманов в 80-е годы было тщательно изучено в работах Б.В. Бирюкова и Л.Г. Бирюковой, а впоследствии и З.А. Кузичевой. Выяснилось, что, реализуя генетическую программу обоснования математики и представляя логику, — понимаемую как часть науки о мышлении, — в качестве одной из «форм математики», братья Грассманы в своем логическом учении строили структуру, именуемую в современной литературе дистрибутивной решеткой. Введение дополнений превращает ее в булеву алгебру. Построение последней было сделано совершенно независимо от работ их предшественников, причем примечательно: в своей алгебре логики Грассманы использовали только прямые операции: логическое сложение (объединение классов, дизъюнкцию высказываний), логическое умножение (пересечение классов, конъюнкцию высказываний) и отрицание, трактуемое — в логике классов — как дополнение заданного класса до универсума. Совершенно необычным для алгебры логики того времени было ограничение логики понятиями с конечным объемом, что вызывалось спецификой использовавшихся Р. Грассманом индуктивно-рекурсивных доказательств. Что же касается Г. Грассмана, то выяснилось: в его исходных алгебраических построениях (выполненных до сотрудничества с братом) присутствовала аксиоматика (коммутативной) группы и по сути дела предполагалось понятие полугруппы.

В настоящее время авторами этих строк подготовлен перевод всех философских и логических работ братьев Грассманов, снабженный соответствующими научными комментариями и подробным послесловием, что освобождает от необходимости входить здесь в дальнейшие детали.

В работах Г.И. Малыхиной логические идеи Р. Грассмана были введены в контекст его философских, науковедческих и теологических представлений. Дело в том, что жизненной целью Р. Грассмана была разработка энциклопедического «Здания знания». Оно должно было охватить, по замыслу, все, что представлялось автору входящим в современную ему науку — от естествознания и техники до богословия.

Следует сказать, что анализировать грандиозную научно-философскую конструкцию Р. Грассмана не просто. Его «Здание» включает, наряду с философией, естествознание, общественно-политические науки, тщательно разработанное теологическое учение. Все это Р. Грассман пытается делать, придерживаясь выдвинутого им принципа «строго научного подхода»; однако вне сфер математики и логики использование этого принципа оказывается достаточно призрачным.

Хотя определяющей для всей конструкции Р. Грассмана была установка на разработку строго научной методологии, сопровождаемая критикой «спекулятивной философии», изложенное им «Здание знания» само представляло умозрительное учение. Правда, его онтологическая часть отражала тот значительный интерес, который этот автор проявлял к наукам о природе.

Р. Грассман считал, что построение всеобъемлющей системы научного знания возможно лишь на основе «точного формального метода» — метода, копировавшего генетическую конструкцию «теории величин» и переносившего ее на материал, где этот метод заведомо не применим. Впрочем, Р. Грассман был достаточно «методологически чуток» и не противопоставлял свой метод опытному знанию: научная методология, по его замыслу, должна иметь в своей основе триаду «опытный источник знания — математические средства познания — критический философский анализ утверждений науки». Что касается методологии, то, по мнению Р. Грассмана, ей необходимо выработать принципы «строго научного мышления». Эту задачу он пытался решить в «Учении о науке», сочинении, опубликованном в Штеттине (где вышли все работы Р. Грассмана) в 1875/76 гг., а также в двух томах «Здания знания» (1890). Для достижения этой цели Роберт предполагал создать «строго научный» искусственный язык. Этот язык, в отличие от естественного языка, должен был обеспечивать объективность и однозначность научных результатов. Но предлагаемый им вариант такого языка сводился к тому, что было изложено в его сочинении «Учение о формах» (в его вариантах 1872 и 1895 гг.). Очевидно, что язык этот был слишком слаб даже для формализации математики: отсутствие в нем кванторов делало его непригодным для формального представления действительных чисел и анализа.

В оценке философских взглядов Р. Грассмана мы присоединяемся к квалификациям Г.И. Малыхиной. Она показала, что он придавал большое значение естественным наукам, считая их фундаментом «здания знания»: согласно Р. Грассману, науки о природе призваны вскрыть «первопричины и принципы реально существующего». Онтологическое учение Грассмана содержит положения, относящиеся к различным областям знания. В их числе встречаются механика, физика, химия, астрономия, биология, геология, анатомия, медицина, антропология. К сожалению, многие из этих положений неубедительны. Вместе с тем, отмечала Г.И., этим автором выдвинут ряд свежих идей относительно путей формирования технических дисциплин на базе взаимодействий и синтеза опытных и теоретических наук. Однако, с увлечением обращаясь к миру естествознания, математики и логики, Р. Грассман всегда имел в виду то, что было для него высшей истиной, — теологическое учение.

В сочинениях Р. Грассмана представлена объективно-идеалистическая картина мира. Мотивом для ее разработки и радикального отвержения «старой» методологии служило убеждение в недостаточности философских принципов материалистической метафизики для решения естественно-научных проблем. Отсюда критика им прежних философских систем «спекулятивной философии», в частности гегелевской. Правда, следуя Гегелю, в качестве фундаментальной характеристики процесса развития он признавал диалектические противоречия.

Роберт Грассман, как и его старший брат — Герман, был глубоко религиозным человеком, и неудивительно, что он чаще всего обращался к Платону и Лейбницу. Создатель «Здания знания» отвергал кантовский априоризм в вопросе о категориальных формах познания внешнего мира. В этом отношении он был вполне «материалистом» в смысле Ленина.

В российской науке при анализе развития философии математики в конце XIX — начале XX столетия не всегда подчеркивается различие аксиоматического метода, теоретико-множественного подхода и генетической установки. Это имеет свое оправдание: эти три направления совместны и дополняют друг друга при условии, что противопоставление конструктивного подхода математической «классике» не заостряется. Мы отчетливо чувствуем это, например, в работах И.И. Жегалкина, в которых, как мы видели, присутствует как теоретико-множественное мышление, так и «оперативная» установка, реализованная в его арифметике вычетов по модулю 2, содержится алгоритм доказательства массива теорем пропозициональной логики (Иван Иванович имел перед глазами первый том «Principia Mathematica»). И мы понимаем, почему Н. Бурбаки утверждали, что под чистой математикой Герман Грассман «отчетливо понимал аксиоматическую математику в современном значении слова». Хотя в явной форме к аксиоматическому («евклидову») способу изложения своего «учения о протяженностях» он обратился только во втором издании своего главного математического труда, но уже его арифметика, отчетливо рекурсивно-индуктивная, позволила Хао-Вану [16] так ее реконструировать, что она предстала в аксиоматической форме и с использованием теоретико-множественных операций.

Мы показали, сколь многообразны были формы и направления, в которых отечественная мысль на протяжении двух столетий старалась вобрать в себя — и развить далее — достижения мировой философско-логической, логико-математической и историко-научной мысли. Наш рассказ, разумеется, не претендует на полноту. Например, мы оставили в стороне громадную проблему логической классичности/неклассичности. Но основные вехи, как думается, нами расставлены.

Литература

[1] *Грассман Г.* Чистая математика и учение о протяженности / Перев. П.С. Юшкевича // Новые идеи в математике. Сборник 1. СПб, 1913. С. 78-95.

[2] *Каган В.Ф.* Теоретические основания математики // Энциклопедический словарь «Гранат». Т. 41, VII.

[3] *Яновская С.А.* Категория количества у Гегеля и сущность математики. // Под знаменем марксизма. Ежемесячный философский и обществ[енно]-эконом[ический] журнал. М., 1928, № 3. В подстрочном примечании к статье указано: «Из доклада, читанного в семинаре по Гегелю на естественном отделении Института Красной Профессуры».

[4] *Грассман Г.* Чистая математика и учение о протяженности. С. 69.

[5] «Философская энциклопедия». 1960. Т. 2; 1967. Т. 4.

[6] *Яновская С.А.* Предисловие к русскому переводу // А. Тьюринг. Может ли машина мыслить? С приложением статьи Дж. фон Неймана «Общая и логическая теория автоматов». Редакция и предисловие С.А. Яновской. М., 1960. С. 10, 17.

[7] *Жегалкин И.И.* Трансфинитные числа. М., 1907.

[8] *Жегалкин И.И.* О технике вычисления предложений в символической логике // Матем. сб. 1927. Т. 34, вып. 1. С. 9.

[9] *Жегалкин И.И.* Арифметизация символической логики // Матем. сб. 1928. Т. 35, вып. 3–4; 1929. Т. 36, вып. 3–4; *Он же.* К проблеме разрешимости // Матем. сб. 1939. Т.6 (48), вып. 2; *Он же.* Проблема разрешимости на конечных классах // Ученые записки. МГУ. 1946. Вып. 3–4.

[10] *Шуранов Б.М.* Иван Иванович Жегалкин: вклад в математическую логику // Вестник Международного славянского университета. Вып. 4. М., 1998. С. 32–33.

[11] *Новоселов Н.Н.* Эффективизм // Философская энциклопедия. 1970. Т. 5.

[12] *Бирюкова Л.Г., Бирюков Б.В.* Из истории генетического метода: об одном опыте осмысления грассмановской индуктивно-рекурсивной арифметики (В.Ф. Каган) // Современная логика: проблемы теории, истории и применения в науке. Материалы VI Международной научной конференции. [СПб], Изд-во С.-Петербургского ун-та, 2000.

[13] *Бирюкова Л.Г., Бирюков Б.В.* «Учение о формах (величинах)» Германа и Роберта Грасманов как предвосхищение конструктивного направления в математике I. // Вопросы кибернетики. Кибернетика и логическая формализация. Аспекты истории и методологии. М., 1982 [Издание научного совета по кибернетике АН СССР].

[14] *Бирюков Б.* Грассман Роберт // Философская энциклопедия. 1960.Т. 1.

[15] *Малыхина Г.И.* Логические исследования Роберта Грассмана. Дисс. канд. филос. наук. Л., 1981.

[16] *Hao Wang.* The axiomatization of arithmetic // Journal of Symbolic Logic. 1957. Vol. 22. P. 145–158.

Натуральный вывод для системы логики линейного времени

А.Е. Болотов, А. Бащуковски, О.М. Григорьев[1], В.О. Шангин

ABSTRACT. We present a sound and complete Quine-style natural deduction system for propositional linear-time temporal logic based on similar systems for the propositional classical logic. The presented system can serve as a basis for the construction of provers, which are of interest in the context of research in Artificial Intelligence.

1 Введение

В нашей статье предложена семантически непротиворечивая и полная система натурального вывода типа Фитча для логики линейного времени PLTL (the propositional linear-time temporal logic). Первые системы натурального вывода (НВ) были предложены независимо Г. Генценом [2] и С. Яськовским [3]. В дальнейшем подход С. Яськовского разрабатывался Ф. Фитчем [4] и У. Куайном [5]. Поэтому мы будем называть системы НВ такого типа системами НВ типа Куайна. Отметим интересную деталь в развитии НВ. С одной стороны, неоспоримо, что НВ — это тип логического вывода, который наиболее адекватно имитирует рассуждения, характерные для человеческого мышления, решающего (прежде всего) математическую задачу. С другой стороны, до 90-х годов прошлого века НВ не использовался в качестве основы для построения различных автоматических процедур поиска вывода. В качестве причины при этом называлось нарушение при построении НВ свойства подформульности, говорящего, что в выводе формулы используются только подформулы или отрицания подформул этой формулы. В результате долгое время исследования в области автоматического

[1]Работа поддержана РГНФ. Грант № 06-03-00020а.

поиска логического вывода были сосредоточены на поиске вывода с помощью метода резолюции, секвенциальных и аналитико-табличных типов логического вывода. Однако в последнее время ситуация стала меняться. Например, системы НВ используются в логических frameworks, при анализе которых существенную роль играет понятие гипотетических рассуждений, т.е. умозаключений с помощью посылок. В частности, системы НВ были предложены для интуиционистской линейной логики. В нашей статье для логики линейного времени предложена семантически непротиворечивая и полная система натурального вывода типа Куйана, основанная на аналогичных системах натурального вывода для классической и интуиционистской логик. Предложенная система натурального вывода, по нашему мнению, может служить основой для построения различных автоматических процедур поиска вывода, реализуемых в рамках программы создания Искусственного интеллекта. Структура статьи следующая. В § 2 задаются синтаксис и семантика линейной временной логики PLTL. В § 3 описывается система НВ для PLTL, которую в дальнейшем мы будем называть PLTL_{ND}, и приводится пример доказательства. Теоремам о семантической непротиворечивости и полноте PLTL_{ND} посвящен § 4. Итоги работы и темы для будущих исследований обсуждаются в § 5.

2 Синтаксис и семантика линейной временной логики PLTL

Алфавит языка PLTL задается следующим образом:

- бесконечный список $Prop$ пропозициональных переменных:

  $p, q, r, \dots, p_1, q_1, r_1, \dots, p_n, q_n, r_n, \dots;$

- стандартные логические символы для классической логики, $\neg, \wedge, \Rightarrow, \vee$;

- логические символы для временной логики:

  $\Box$ – «всегда будет»;
  $\Diamond$ – «когда-нибудь будет»;
  $\bigcirc$ – «в следующий момент времени»;
  $\mathcal{U}$ – «... до тех пор пока не наступит...».

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 1 (правильно построенная формула (**ппф**)).

1. Любая пропозициональная переменная есть **ппф**.

2. Если A и B есть **ппф**, то $A \wedge B$, $\neg A$, $A \vee B$ и $A \Rightarrow B$ суть **ппф**.

3. Если A и B есть **ппф**, то $\Box A$, $\Diamond A$, $\bigcirc A$ и $A \mathcal{U} B$ суть **ппф**.

Моделью для PLTL является дискретная и линейная последовательность состояний (моментов времени, миров)

$$\sigma = s_0, s_1, s_2, \ldots,$$

которая изоморфна множеству натуральных чисел $\mathbb{N}$ и в которой любое состояние s_i включает те пропозициональные переменные, которые истинны в i-й момент времени.

Выражение $\langle\sigma, i\rangle \models A$ будет обозначать тот факт, что формула A выполнима в модели σ в i-й момент времени.

Далее определяется отношение $\models$ — выполнимости формулы языка PLTL в модели, $i, j, k \in \mathbb{N}$.

$$
\begin{array}{lll}
\langle\sigma, i\rangle \models p & \Leftrightarrow & p \in s_i, \text{ для } p \in Prop \\
\langle\sigma, i\rangle \models \neg A & \Leftrightarrow & \langle\sigma, i\rangle \not\models A \\
\langle\sigma, i\rangle \models A \wedge B & \Leftrightarrow & \langle\sigma, i\rangle \models A \text{ и } \langle\sigma, i\rangle \models B \\
\langle\sigma, i\rangle \models A \vee B & \Leftrightarrow & \langle\sigma, i\rangle \models A \text{ или } \langle\sigma, i\rangle \models B \\
\langle\sigma, i\rangle \models A \Rightarrow B & \Leftrightarrow & \langle\sigma, i\rangle \not\models A \text{ или } \langle\sigma, i\rangle \models B \\
\langle\sigma, i\rangle \models \Box A & \Leftrightarrow & \text{для всякого } j \text{ если } i \leq j \\
 & & \quad \text{то } \langle\sigma, j\rangle \models A \\
\langle\sigma, i\rangle \models \Diamond A & \Leftrightarrow & \text{существует } j \text{ такое, что } i \leq j \\
 & & \quad \text{и } \langle\sigma, j\rangle \models A \\
\langle\sigma, i\rangle \models \bigcirc A & \Leftrightarrow & \langle\sigma, i+1\rangle \models A \\
\langle\sigma, i\rangle \models A \mathcal{U} B & \Leftrightarrow & \text{существует } j \text{ такое, что } i \leq j \\
 & & \quad \text{и } \langle\sigma, j\rangle \models B \text{ и для каждого } k, \\
 & & \quad \text{если } i \leq k < j, \text{ то } \langle\sigma, k\rangle \models A
\end{array}
$$

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 2 (Выполнимость). Формула A называется выполнимой, если и только если существует модель σ такая, что $\langle\sigma, 0\rangle \models A$.

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 3 (Общезначимость). Формула A является общезначимой, если и только если A выполнима в любой модели, то есть для всякой модели σ, $\langle\sigma, 0\rangle \models A$.

3 Система натурального вывода PLTL$_{ND}$

3.1 Расширенные PLTL синтаксис и семантика

Язык PLTL$_{ND}$ строится за счет добавления к алфавиту языка PLTL множества индексов.

Индексы из множества Lab — это переменные по мирам из σ:

$$Lab : \{x, y, z, x_1, x_2, x_3, \dots\}.$$

Пусть g есть функция, отображающая множество Lab в $\mathbb{N}$. Определим двухместные отношения $\prec$, $\preceq$, $Next$ и операцию $'$ следующим образом:

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 4 (Отношения $\prec$, $\preceq$, $Next$ и операция $'$). Для $x,\ y \in Lab$:

(4.1) $\prec \subset Lab^2 : x \prec y \Leftrightarrow g(x) < g(y)$,

(4.2) $\preceq \subset Lab^2 : x \preceq y \Leftrightarrow g(x) \leq g(y)$,

(4.3) $Next \subset Lab^2 : Next(x, y) \Leftrightarrow g(y) = g(x) + 1$, так что для всякого $i \in Lab$, существует $j \in Lab$ такой, что $Next(i, j)$ (сериальность),

(4.4) При наличии индекса i операция $'$, примененная к i, дает нам индекс i' такой, что $Next(i, i')$.

Следующие свойства данных отношений получаются из данного определения.

ЛЕММА 5 (Свойства $\prec$, $\preceq$ и $Next$).

- *Для всякого $i, j \in Lab$, если $Next(i, j)$, то $i \preceq j$.*
- *Для всякого $i, j \in Lab$, если $i \prec j$, то $i \preceq j$.*
- *Свойства $\preceq$:*
  - *Для всякого $i \in Lab$: $i \preceq i$ (рефлексивность),*
  - *Для всякого $i, j, k \in Lab$, если $i \preceq j$ и $j \preceq k$, то $i \preceq k$ (транзитивность).*

В дальнейшем высказывания, выражающие свойства отношений, называются *реляционными формулами.*

Теперь зададим понятие формулы языка PLTL_{ND}.

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 6 (Язык PLTL_{ND}).

- Если A — формула PLTL и $i \in Lab$ — индекс, то $i : A$ является формулой языка PLTL_{ND}.
- Любая реляционная формула типа $Next(i, i')$ и $i \preceq j$ является формулой языка PLTL_{ND}.

Семантика $\mathbf{PLTL}_{ND}$. В дальнейшем мы используем буквы $A, B, C, D, \ldots$ как метасимволы для формул PLTL, а каллиграфические буквы $\mathcal{A}, \mathcal{B}, \mathcal{C}, \mathcal{D} \ldots$ для обозначения формул языка PLTL_{ND}, то есть индексированных или реляционных формул. Интуитивно запись $i : A$ обозначает, что формула A выполнима в мире, соответствующем индексу i. Поэтому семантика для языка PLTL_{ND} строится аналогично семантике для языка PLTL, заданной в § 2.

Пусть Γ обозначает множество формул языка PLTL_{ND}, $D_\Gamma = \{x \mid x : A \in \Gamma\}$, σ — это модель, определенная в § 2, и пусть f есть функция, которая отображает элементы D_Γ в σ.

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 7 (Реализуемость PLTL_{ND}-формулы в модели). Модель σ *реализует* множество Γ при отображении f^σ, если выполняются следующие условия:

(1) Для всякого $x \in D_\Gamma$ и для всякой формулы A, если $x : A \in \Gamma$, то $\langle \sigma, f^\sigma(x) \rangle \models A$,

(2) Для всяких x, y, если $x \preceq y \in \Gamma$ и $f^\sigma(x) = i$, и $f^\sigma(y) = j$, то $i \leq j$,

(3) Для всяких x, y, если $Next(x, y) \in \Gamma$ и $f^\sigma(x) = i$, и $f^\sigma(y) = j$, тогда $j = i + 1$.

Множество Γ в этом случае называется *реализуемым* в σ при отображении f^σ. Если из контекста понятно, о каких модели и отображении идет речь, то Γ называется реализуемым.

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 8 (Общезначимость PLTL_{ND}-формул). Формула $\mathcal{A} = i : B$ является общезначимой (символически $\models_{ND} \mathcal{A}$), если и только если множество $\{\mathcal{A}\}$ реализуемо в любой модели, для любой функции f.

3.2 Пропозициональные правила

Множество правил делится на два класса: *правила исключения* и *правила введения* логических связок. Правила первого рода позволяют нам упрощать формулы, в то время как правила второго рода направлены на синтезирование формул.

Представим указанные два типа правил для пропозициональных связок.

Правила исключения:	Правила введения:
$\wedge_{\text{и}_1}\quad \dfrac{i:A\wedge B}{i:A}$	$\wedge_{\text{в}}\quad \dfrac{i:A,\quad i:B}{i:A\wedge B}$
$\wedge_{\text{и}_2}\quad \dfrac{i:A\wedge B}{i:B}$	$\vee_{\text{в}_1}\quad \dfrac{i:A}{i:A\vee B}$
$\vee_{\text{и}}\quad \dfrac{i:A\vee B,\quad i:\neg A}{i:B}$	$\vee_{\text{в}_2}\quad \dfrac{i:B}{i:A\vee B}$
$\Rightarrow_{\text{и}}\quad \dfrac{i:A\Rightarrow B,\quad i:A}{i:B}$	$\Rightarrow_{\text{в}}\quad \dfrac{[i:C],\quad i:B}{i:C\Rightarrow B}$
$\neg_{\text{и}}\quad \dfrac{i:\neg\neg A}{i:A}$	$\neg_{\text{в}}\quad \dfrac{[j:C],\quad i:B,\quad i:\neg B}{j:\neg C}$

В формулировке правил «$\Rightarrow$ в» и «$\neg$ в» формула $i : C$ является последним неисключенным допущением в выводе (это понятие будет разъяснено ниже). Применяя какое-либо из этих правил на n-ом шаге построения вывода, мы исключаем последнее допущение, а также все следующие за ним формулы вывода до шага $n-1$ включительно. Если последнее допущение было введено на шаге k, то такое исключение будем обозначать в выводах как $[k\text{—}(n-1)]$.

3.3 Правила для временных операторов

В формулировке правил исключения и введения временных операторов мы используем понятия *абсолютно* и *относительно* ограниченная переменная, аналогично тому как это делается в первопорядковой логике [1]. Так, говоря, что переменная j, являющаяся индексом некоторой формулы, ограничена абсолютно, и обозначая этот факт через $\mapsto j$, мы имеем в виду, что значение этой переменной фиксировано. Иначе говоря, переменная j теперь пробегает не по всему множеству моментов времени, а ей приписан строго определенный момент. Говоря, что переменная i является относительно ограниченной переменной j, и обозначая это через $j \mapsto i$, мы имеем в виду, что уже абсолютно ограниченная j, ограничивает возможное множество значений для i, с которой она связана в реляционной формуле, например, в $i \preceq j$.

Представим теперь правила исключения и введения временных операторов.

Правила исключения:

$$\Box_{\text{и}} \quad \frac{i: \Box A, \quad i \preceq j}{j : A}$$

$$\Diamond_{\text{и}} \quad \frac{i: \Diamond A}{i \preceq j, \quad j : A} \quad \begin{array}{l}\text{где } \forall C(j : C \notin M1)\\ \mapsto j,\ j \mapsto i\end{array}$$

$$\bigcirc^{\star}_{\text{и}} \quad \frac{i: \bigcirc A}{i' : A} \quad \text{где } i' : A \in M1$$

$$\mathcal{U}_{\text{и}1} \quad \frac{i : A \mathcal{U} B, \quad i : \neg B}{i : A, \quad j : B, \quad i \prec j} \quad \begin{array}{l}\text{где } \forall C(j : C \notin M1)\\ \mapsto j,\ j \mapsto i\end{array}$$

$$\mathcal{U}^{\star\star}_{\text{и}2} \quad \frac{i^{[AB]} \preceq j^{[AB]}, i^{[AB]} \preceq k, k \prec j^{[AB]}}{k : A}$$

Правила введения:

$$\Box_{\text{в}}^{\star\star\star} \quad \frac{j : A, \quad [i \preceq j]}{i : \Box A} \quad \begin{array}{l}\text{где} j : A \notin M1\\ \mapsto j,\ j \mapsto i\end{array}$$

$$\Diamond_{\text{в}} \quad \frac{j : A, \quad i \preceq j}{i : \Diamond A} \qquad \bigcirc_{\text{в}} \quad \frac{i' : A, \quad Next(i, i')}{i : \bigcirc A}$$

$$\mathcal{U}_{\text{в}1} \quad \frac{i : B}{i : A \mathcal{U} B} \qquad \mathcal{U}_{\text{в}2} \quad \frac{i : A, \quad i' : B, \quad Next(i, i')}{i : A \mathcal{U} B}$$

$$\mathcal{U}^{\star\star\star\star}_{\text{в}3} \quad \frac{j : A,\ l : B,\ i \preceq l,\ [i \preceq j],\ [j \preceq l]}{i : A \mathcal{U} B} \quad \begin{array}{l}\text{где } j : A \notin M1\\ \mapsto j,\ j \mapsto i,\\ j \mapsto l\end{array}$$

Условие $\forall C(j : C \notin M1)$ в правилах $\Diamond_{\text{И}}$ и $\mathcal{U}_{\text{И}_1}$ означает, что j не должен встречаться в выводе любой формулы C, которая отмечена меткой $M1$. Переменная j в этих правилах не встречается в других посылках и допущениях вывода.

Условие $j : A \notin M1$ в правилах $\Box_{\text{В}}$ и $\mathcal{U}_{\text{В}_3}$ означает, что $j : A$ не отмечена меткой $M1$.

$\star$ В правиле $\bigcirc_{\text{И}}$ заключение $i' : A$ отмечено в выводе меткой M_1.

$\star\star$ В правиле $\mathcal{U}_{\text{И}_2}$ выражение $i^{[AB]}$ означает, что в выводе переменная i отмечена $[AB]$, если эта переменная была получена в результате применения правила $\mathcal{U}_{\text{И}_1}$ к формуле $i : A\mathcal{U}B$.

$\star\star\star$ В правиле $\Box_{\text{В}}$ формула $i \preceq j$ должна быть последней неисключенной посылкой; применяя правило на шаге n, мы исключаем формулу $i \preceq j$ и все следующие за ней формулы вывода, заканчивая шагом $n-1$. Переменная j не встречается в других посылках и допущениях вывода.

$\star\star\star\star$ Применяя правило $\mathcal{U}_{\text{В}_3}$ на шаге n, мы исключаем допущение $i \preceq j$ или $j \preceq l$, которое встречается раньше в выводе, и все следующие за ней формулы вывода, заканчивая шагом $n-1$. Переменная j не встречается в других посылках и допущениях вывода.

К приведенным правилам добавим также правило индукции:

Индукция: $$\frac{i : A \quad [i \preceq j] \qquad j : A \Rightarrow \bigcirc A}{i : \Box A},$$ где

- $j : A \notin M1$ и $\mapsto j$, $j \mapsto i$.

- $i \preceq j$ должно быть последней посылкой; применяя правило на шаге n, мы исключаем формулу $i \preceq j$ и все следующие за ней формулы вывода, заканчивая шагом $n-1$.

Следующие правила применяются к реляционным формулам:

Рефлексивность: $\dfrac{}{i \preceq i}$

Транзитивность: $\dfrac{i \preceq j,\ j \preceq k}{i \preceq k}$

$\bigcirc$ **Сериальность:** $\dfrac{}{Next(i, i')}$

$\bigcirc / \preceq$: $\dfrac{Next(i, i')}{i \preceq i'}$ $\qquad$ $\prec / \preceq$: $\dfrac{i \prec j}{i \preceq j}$

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 9 (Вывод в PLTL_{ND}). Вывод $\mathfrak{D}$ PLTL_{ND}-формулы $\mathcal{A}$ из множества PLTL_{ND}-формул Γ есть непустая последовательность PLTL_{ND}-формул, в которой

1. Каждый элемент из Γ и PLTL_{ND}-формула $\mathcal{A}$ имеют вид $i : C$ (для некоторой PLTL-формулы C и $i \in Lab$) и префиксированы одинаковым индексом,

2. Каждый член $\mathfrak{D}$ есть либо элемент множества Γ, либо допущение, либо получен из PLTL_{ND}-формул предыдущих шагов вывода по одному из правил системы PLTL_{ND},

3. Ни один индекс, входящий в $\mathfrak{D}$, не является ограниченным дважды и не ограничивает сам себя,

4. Индекс $\mathcal{A}$ не ограничен в $\mathfrak{D}$,

5. Множество неисключенных допущений пусто.

Выражение $\Gamma \vdash_{ND} \mathcal{A}$ обозначает, что существует PLTL_{ND}-вывод $\mathcal{A}$ из Γ.

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 10 (Доказательство в системе PLTL_{ND}). Доказательством $PLTL$-формулы A называется непустая конечная последовательность формул $C_1, C_2, ...C_n, (n \leq 1)$, удовлетворяющая следующим условиям:

1. Каждая формула $\mathcal{A}_i$, где $(1 \leq i \leq n)$, есть либо посылка, либо получена из предыдущих формул по одному из правил;

2. Последняя формула вывода $\mathcal{A}_n$ есть $x : B$, для некоторого индекса x;

3. Ни одна переменная в доказательстве не ограничивается абсолютно более одного раза;

4. Ни одна переменная не ограничивает в доказательстве сама себя.

Теоремой называется формула, для которой имеется доказательство. Символически обозначается как $\vdash_{ND} B$.

Теперь приведем пример доказательства формулы

$$(1) \quad \Box(p \Rightarrow \bigcirc p) \Rightarrow (p \Rightarrow \Box p).$$

Доказательство начинается взятием в качестве посылки антецедента этой формулы, то есть $\Box(p \Rightarrow \bigcirc p)$.

1. $x : \Box(p \Rightarrow \bigcirc p)$	посылка
2. $x : p$	посылка
3. $x \preceq y$	посылка
4. $y : p \Rightarrow \bigcirc p$	$\Box_{\text{И}}, 1, 3$
5. $x : \Box p$	Индукция $2, 3, 4,$ $\mapsto y, y \mapsto x,$ [3—4]
6. $x : p \Rightarrow \Box p$	$\Rightarrow_{\text{В}}$ 5, [2—5]
7. $x : \Box(p \Rightarrow \bigcirc p) \Rightarrow (p \Rightarrow \Box p)$	$\Rightarrow_{\text{В}}, 6,$ [1—6]

Еще две посылки вводятся на шаге 2 и 3 соответственно, что позволяет нам на шаге 4 применить правило $\Box_{\text{И}}$ к формулам 1 и 3. Далее следует применение правила индукции к формулам 2—4. Напомним, что в результате применения правила индукции переменная y становится абсолютно ограниченной и переменная x становится относительно ограниченной. Также мы исключаем из вывода формулы 3—4, начиная с последней неисключенной посылки 3. На шаге 6 к формуле применяется правило $\Rightarrow_{\text{В}}$ и формулы 2—5 исключаются. Еще одно применение этого правила на шаге 7 дает нам искомое доказательство. На этом шаге мы также исключаем все формулы, начиная с последней неисключенной посылки 1. Так как последней формулой является формула $x : \Box(p \Rightarrow \bigcirc p) \Rightarrow (p \Rightarrow \Box p)$, и множество неисключенных посылок пусто, мы имеем доказательство для 1. В следующем параграфе приводятся другие примеры доказательств в нашей системе.

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 11 (Логическое следование в PLTL_{ND}). PLTL_{ND}-формула $\mathcal{A}$ логически следует из множества PLTL_{ND}-формул Γ, символически $\Gamma \models_{ND} \mathcal{A}$, если имеет место следующее:

1. Все элементы из Γ и PLTL_{ND}-формула $\mathcal{A}$ имеют вид $i : C$ (для некоторой PLTL формулы C и $i \in Lab$) и префиксированы одинаковым индексом,
2. Для всякого отображения f^{σ} и всякой модели σ, PLTL_{ND}-формула $\mathcal{A}$ реализуема всякий раз, когда реализуемо множество Γ.

4 Метатеоретические свойства

Данный параграф посвящен рассмотрению метатеоретических свойств нашей системы НВ. Мы показываем, что система является семантически непротиворечивой и полной.

4.1 Семантическая непротиворечивость

Прежде всего докажем лемму, необходимую для доказательства теоремы о непротиворечивости.

ЛЕММА 12. *Допустим, что нам даны следующие условия:*

- *$\mathfrak{D}$ есть вывод $PLTL_{ND}$-формулы $\mathcal{B}$ из множества $PLTL_{ND}$-формул Γ*
- *$\Phi_m \subseteq \mathfrak{D}$ есть объединение Γ и множества неисключенных допущений Θ_m, содержащихся в $\mathfrak{D}$ на некотором шаге m.*
- *Λ_m есть множество $PLTL_{ND}$-формул $\mathfrak{D}$ на шаге m такое, что для всякой C, если $C \in \Lambda_m$, то она получена применением одного из правил вывода, и Δ есть заключение $PLTL_{ND}$-правила, примененного на шаге $m+1$.*

- Φ_{m+1} *состоит из множества* Γ *и всех неисключенных после применения правила допущений из* Θ_m*;* Λ_{m+1} *состоит из неисключенных членов* Λ_m *и элементов множества* Δ.

Тогда для всяких f^σ *и* σ*, если* Φ_{m+1} *реализуемо в модели* σ *при отображении* f^σ*, то* Λ_{m+1} *также реализуемо в* σ *при* f^σ.

Доказательство. Доказательство леммы ведется по числу применений PLTL_{ND}-правил в выводе. Предполагая, что утверждение леммы верно для некоторого числа n ($n \in \mathbb{N}$) применений PLTL_{ND}-правил в выводе $\mathfrak{D}$, мы должны показать, что утверждение справедливо и для $n+1$. В качестве базиса рассмотрим случай, когда ни одно из правил вывода не применялось и $B \in \Phi_0$. Понятно, что множество Λ_0 пусто и, следовательно, реализуемо в любой модели σ при любом отображении f^σ. Таким образом, для этого случая утверждение леммы доказывается тривиально. Теперь допустим, что в выводе сделано m применений правил. Рассмотрим $m+1$-е применение.

Случай $\Rightarrow_\text{В}$. Предположим, что $x : B$ есть некоторая PLTL_{ND}-формула в выводе и $x : A$ есть последняя посылка, содержащаяся в множестве Φ_m. Применение правила $\Rightarrow_\text{В}$ приводит к появлению PLTL_{ND}-формулы $x : A \Rightarrow B$ в $\mathfrak{D}$. Для доказательства леммы потребуется рассмотреть несколько подслучаев, в зависимости от того, в какой части доказательства помещается $x : B$, и какова структура всего доказательства.

Подслучай 1. $x : B \in \Lambda_m$ и множество Φ_m образует начальный отрезок $\mathfrak{D}$, состоящий из всех элементов Γ, за которыми непосредственно следуют все элементы из Θ_m. После применения правила $\Rightarrow_\text{В}$ получаем $x : A \Rightarrow B$ на $m+1$-м шаге вывода, $\Phi_{m+1} = \Phi_m - \{x : A\}$ (поскольку $x : A$ есть последняя неисключенная посылка), $\Lambda_{m+1} = \Delta = \{x : A \Rightarrow B\}$ (поскольку все PLTL_{ND}-формулы вывода, начиная с последней неисключенной посылки и до результата применения правила, исключаются). Таким образом, необходимо показать, что $\{x : A \Rightarrow B\}$ реализуемо в любой модели σ при любом отображении f^σ, при условии реализуемости Φ_{m+1}. Заметим, что если некоторая модель, при некотором отображении реализует Φ_{m+1}, но опровергает формулу A, то эта модель реализует множество $\{x : A \Rightarrow B\}$ по условию истинности импликации. Допустим, что в какой-то произвольно взятой модели σ', при некотором отображении $f^{\sigma'}$, Φ_{m+1} и $\{x : A\}$ реализуемы. Заметим, что объединение этих двух множеств есть множество Φ_m. По допущению индукции известно, что реализуемость Φ_m влечет реализуемость Λ. Но $x : B \in \Lambda$, откуда $\{x : A \Rightarrow B\}$ реализуемо.

Подслучай 2. $x : B \in \Lambda$, но некоторые элементы из Θ_m появляются в выводе после какого-то числа применений PLTL_{ND}-правил. Теперь множество Λ_{m+1} может содержать элементы помимо $\{x : A \Rightarrow B\}$. Наиболее трудная часть доказательства связана со случаем, когда некоторая модель, например σ', при некотором отображении $f^{\sigma'}$, реализует множество Φ_{m+1}, но не реализует $\{x : A\}$. Как и в предыдущем случае, известно, что σ' реализует $\{x : A \Rightarrow B\}$, но встает вопрос о реализуемости оставшейся части множества Λ_{m+1}. Обозначим $\Lambda_{m+1} - \{x : A \Rightarrow B\}$ через Λ^*_{m+1}. Здесь необходимо обратиться к структуре вывода. Пусть Φ^p_{m+1} есть подмножество Φ_{m+1}, состоящее из всех посылок и допущений, предшествующих формулам Λ^*_{m+1} в выводе. По предположению, какие-то применения правил осуществлялись после того, как все элементы Λ^*_{m+1} появились в выводе. По допущению индукции, реализуемость Φ^p_{m+1} влечет реализуемость Λ^*_{m+1}. Допустим, что Λ^*_{m+1} нереализуемо в σ' при отображении $f^{\sigma'}$. Тогда множество Φ^p_{m+1}также нереализуемо. Но $\Phi^p_{m+1} \subseteq \Phi_{m+1}$ и Φ_{m+1} реализуемо в σ', что приводит к противоречию. Случай, когда Φ_{m+1} и $\{x : A\}$ оба реализуемы в σ', непосредственно следует из допущения индукции.

Подслучай 3. Допустим, что $x : B \in \Phi_m$. В этом случае после применения правила $\Rightarrow_{\mathrm{B}}$ получаем, что $\Phi_{m+1} = \Phi_m \cup \{x : B\}$, Λ_{m+1} есть $\{x : A \Rightarrow B\} \cup \Lambda^*_{m+1}$, где $\Lambda^*_{m+1} \subset \Lambda_{m+1}$. Для доказательства применяются рассуждения, аналогичные приведенным в предыдущих подслучаях.

Случай $\Box_{\mathrm{B}}$. Допустим, чтс для некоторой PLTL-формулы A и индекса y, $y : A$ содержится в $\mathfrak{D}$ после m применений PLTL_{ND}-правил, а также что в выводе имеется реляционное суждение $x \preceq y$, являющееся последней неисключенной посылкой. Применение правила $\Box_{\mathrm{B}}$ приводит к появлению в выводе PLTL_{ND}-формулы $x : \Box A$. Как и в случае $\Rightarrow_{\mathrm{B}}$, требуется рассмотреть ряд подслучаев, зависящих от расположения PLTL_{ND}-формулы $x : \Box A$ в $\mathfrak{D}$.

Подслучай 1. $x : \Box A \in \Lambda_m$ и после применения правила имеем $\Phi_{m+1} = \Phi_m - \{x \preceq y\}$ и $\Lambda_{m+1} = \Delta\{x : \Box A\}$. По допущению индукции, если множество Φ_m реализуемо в модели σ при отображении f^σ, то реализуемо и Λ_m. Допустим, что множество Φ_{m+1} реализуемо в модели σ при отображении f_1^σ, где $f_1^\sigma = f^\sigma - \{\langle y, f^\sigma(y)\rangle\}$. Необходимо показать, что тогда реализуемо и множество Λ_{m+1}, то есть $\langle \sigma, f_1^\sigma(x)\rangle \models \Box A$. Пусть существует такой элемент j в σ, что $f_1^\sigma(x) \leq j$. Расширим отображение f_1^σ до f^σ таким образом, что $f^\sigma(y) = j$. Тогда при таком отображении в модели σ реализуемо множество Φ_m, а значит и Λ_m. Но $y : A \in \Lambda_m$, откуда $\langle \sigma, f^\sigma(y)\rangle \models A$, то есть $j \models A$.

Подслучаи 2 и 3 рассматриваются аналогично с учетом структуры вывода, как это было сделано для правила $\Rightarrow_B$.

Также аналогично доказываются случаи применения других правил. Q.E.D.

ТЕОРЕМА 13 (Непротиворечивость PLTL$_{ND}$).
Пусть $\mathfrak{D} = \langle \mathcal{A}_1, \mathcal{A}_2, \ldots, \mathcal{A}_k\rangle$ есть вывод PLTL$_{ND}$-формулы $\mathcal{B}$ из множества посылок Γ. *Тогда* $\Gamma \models_{ND} B$.

Доказательство. Согласно определению 10, PLTL$_{ND}$-формула $\mathcal{A}_k$ имеет вид $x : B$, для некоторого индекса x. В общем случае $x : B$ принадлежит некоторому множеству Λ неисключенных PLTL$_{ND}$ формул вывода. Заметим, что множество неисключенных посылок пусто. Тогда, согласно лемме 12, реализуемость Γ влечет реализуемость Λ. В частности, если множество Γ пусто, то оно реализуемо в любой модели σ при любом отображении f^σ, по определению 7. Следовательно, Λ также реализуемо в любой модели σ при любом отображении f^σ. Таким образом, любая формула, принадлежащая Λ, общезначима. В частности, $x : B$ общезначима. Q.E.D.

4.2 Семантическая полнота

Семантическая полнота нашей системы следует из того факта, что в ней доказуемы все теоремы, доказуемые в следующей формулировке аксиоматики PLTL [3, 6].

Схемы аксиом для PLTL.

$A1.$ Схемы для классической пропозициональной логики

$A2.$ $\Box(A \Rightarrow B) \Rightarrow (\Box A \Rightarrow \Box B)$

$A3.$ $\bigcirc\neg A \Rightarrow \neg\bigcirc A$

$A4.$ $\neg\bigcirc A \Rightarrow \bigcirc\neg A$

$A5.$ $\bigcirc(A \Rightarrow B) \Rightarrow (\bigcirc A \Rightarrow \bigcirc B)$

$A6.$ $\Box A \Rightarrow A \wedge \bigcirc\Box A$

$A7.$ $\Box(A \Rightarrow \bigcirc A) \Rightarrow (A \Rightarrow \Box A)$

$A8.$ $(A\,\mathcal{U}\,B) \Rightarrow \Diamond B$

$A9.$ $(A\,\mathcal{U}\,B) \Rightarrow (B \vee (A \wedge \bigcirc(A\,\mathcal{U}\,B)))$

$A10.$ $(B \vee (A \wedge \bigcirc(A\,\mathcal{U}\,B))) \Rightarrow (A\,\mathcal{U}\,B)$

Правила вывода:

Генерализация $\dfrac{\vdash A}{\vdash \Box A}$ Модус поненс $\dfrac{\vdash A, \quad \vdash A \Rightarrow B}{\vdash B}$

Для доказательства семантической полноты нашей системы мы, во-первых, показываем, что все вышеуказанные аксиомы доказуемы в нашей системе и, во-вторых, что если посылки правил вывода для аксиоматической системы доказуемы в нашей системе, то заключения также доказуемы.

ЛЕММА 14. *Все частные случаи аксиом PLTL доказуемы в системе $PLTL_{ND}$.*

Доказательство. Случаи с пропозициональными аксиомами тривиальны: в силу полноты натурального вывода для классической логики любой такой частный случай аксиомы имеет доказательство, значит, теперь достаточно к каждой формуле этого доказательства добавить некоторый произвольный индекс.

Доказательства остальных аксиом приводятся в приложении.

Q.E.D.

Доказательство следующей леммы, используемой в дальнейшем, может быть легко получено индукцией по длине PLTL_{ND}-формулы:

ЛЕММА 15. *Пусть $\mathcal{A}_1, \mathcal{A}_2, \ldots, \mathcal{A}_n$ — это доказательство формулы B в системе $PLTL_{ND}$. Пусть B' получено из B подстановкой C' вместо некоторой ее подформулы C. Тогда последовательность $\mathcal{A}'_1, \mathcal{A}'_2, \ldots, \mathcal{A}'_n$, где любое вхождение C заменено на C', является доказательством B'.*

Таким образом, из леммы 15 и доказательств частных случаев аксиом PLTL мы получаем доказательство леммы 14.

ЛЕММА 16. *Если посылки правил вывода для аксиоматической системы доказуемая системе* PLTL_{ND}, *то и их заключения также доказуемы.*

Доказательство. Случай 1. Правило генерализации. Рассмотрим доказательство произвольно выбранной формулы A, и пусть x и y будут индексы, которые не встречаются в этом доказательстве. Теперь мы можем перестроить данное доказательство, начиная его с допущения $\neg\Box A$ (здесь мы специально используем метаформулы вместо формул PLTL_{ND}, что может быть легко обосновано при учете леммы 15):

1. $x : \neg\Box A$	посылка
2. $x : \Diamond\neg A$	$1, \neg\Box$ преобразование
3. $x \preceq y$	$2, \Diamond_{\text{и}}, \mapsto y, y \mapsto x$
4. $y : \neg A$	$2, \Diamond_{\text{и}}$

На этом шаге мы возвращаемся к искомому доказательству A, обращая внимание на то, что оно заканчивается формулой $z : A$ (отметим, что $z \neq x \neq y$). В этом доказательстве мы действуем следующим образом: заменяем любое вхождение индекса z на y. При этом полученная последовательность также является доказательством формулы A. Теперь новое доказательство (которое содержит, скажем, n шагов) мы записываем под шагами 1—4 и продолжаем его, получая следующую последовательность:

1. $x : \neg\Box A$	посылка
2. $x : \Diamond\neg A$	$1, \neg\Box$ преобразование
3. $x \preceq y$	$2, \Diamond_{\text{и}}, \mapsto y, y \mapsto x$
4. $y : \neg A$	$2, \Diamond_{\text{и}}$
5.	(первая формула в доказательстве A)
...	
...	
...	
$n+5$. $y : A$	(последняя формула в доказательстве A)

Шаги 4 и $n+5$ содержат противоречащие формулы. Значит, применимо правило $\neg_{\text{в}}$, и на шаге $n+6$ выводима формула $\neg\neg\Box A$. При этом все формулы, начиная с 1 и вплоть до n, исключаются. Формула $\Box A$ получается на следующем шаге

по правилу $\neg_{\text{И}}$. Полученная последовательность удовлетворяет всем условиям доказательства в нашей системе.

1. $x : \neg \Box A$	посылка
2. $x : \Diamond \neg A$	$1, \neg \Box$ преобразование
3. $x \preceq y$	$2, \Diamond_{\text{И}}, \mapsto y, y \mapsto x$
4. $y : \neg A$	$2, \Diamond_{\text{И}}$
5.	первая формула в доказательстве A
...	
...	
...	
$n+5$. $y : A$	последняя формула в доказательстве A
$n+6$. $\neg\neg \Box A$	$4, n+5, \neg_{\text{В}}, [1-(n+5)]$
$n+7$. $\Box A$	$\neg_{\text{И}}, n+6$

Случай 2. Правило модус поненс.Пусть доказательства для формул $A \Rightarrow B$ и A содержат соответственно n и m шагов. Для тех же формул несложно построить новые доказательства такие, что множества индексов в них не пересекаются. Пусть последней формулой доказательства формулы $A \Rightarrow B$ будет $x : A \Rightarrow B$. Доказательство формулы получается следующим образом:

1.	первая формула в доказательстве $A \Rightarrow B$
...	
...	
...	
n. $x : A \Rightarrow B$	последняя формула в доказательстве $A \Rightarrow B$

Теперь мы можем заменить индекс x, находящийся на последнем шаге доказательства A, и продолжить построение доказательства B следующим образом:

$n+1$.	первая формула в доказательстве A
...	
...	
...	
$n+m$. $x : A$	последняя формула в доказательстве A
$n+m+1$. $x : B$	$n, n+m, \Rightarrow_{\text{И}}$

Полученная последовательность удовлетворяет всем условиям доказательства в нашей системе. Q.E.D.

Теперь мы можем перейти к доказательству полноты системы временной логики PLTL_{ND}.

ТЕОРЕМА 17 (Семантическая полнота системы PLTL_{ND}). *Для любой формулы A системы $PLTL_{ND}$ верно, что если $\models_{ND} A$, то формула A доказуема.*

Доказательство. Рассмотрим произвольную теорему A логики PLTL. Индукцией по n — длине вывода аксиоматического доказательства для A, мы теперь покажем, что A также доказуема в системе PLTL_{ND}.

Базисный случай. $n = 1$. В этом случае A — это один из частных случаев PLTL аксиом, и значит, базовый случай следует в силу леммы 14.

Индукционный шаг. Если утверждение теоремы 17 верно для доказательства длины m, $(1 \le m \le n)$, то оно также верно и для доказательства длины $m + 1$, $(1 \le m \le n)$.

Здесь формула на шаге $m + 1$ является или аксиомой, или получена из некоторых предыдущих формул, или по генерализации, или по модус понекс. Для этих случаев утверждение теоремы 17 следует из леммы 16.

Q.E.D.

5 Заключение

В настоящей статье для логики линейного времени предложена семантически непротиворечивая и полная система натурального вывода. Насколько известно авторам, единственной работой по данной проблеме является [7], которая основана на результатах [8]. В системе, предложенной Марчиньоли, многие правила вывода (например, $\vee_{И}, \Rightarrow_{В}, \neg_{В}$) являются непрямыми. Непрямое правило вывода предполагает построение дополнительного подвывода, гарантирующего наличие отношения логического следования между посылками и заключением. По нашему мнению, построение дополнительного подвывода приводит к усложнению вывода, затрудняя построение процедуры поиска вывода в системе. Поэтому для всех/некоторых связок приведены прямые правила вывода.

Темой будущих исследований может, в частности, стать вопрос о построении процедуры поиска вывода в нашей системе с использованием наработок [1], апробированных на классической и интуиционистской логиках. Еще одной темой будущих исследований может стать вопрос о сложности данного метода, а также обобщение этого метода на логику ветвящегося времени.

Литература

[1] *Болотов А.Е., Бочаров В.А., Горчаков А. А., Макаров В.В., Шангин В.О.* Пусть докажет компьютер. М.: Наука, 2004.

[2] *Gentzen G.* Investigation into Logical Deduction, The Collected Papers of Gerhard Gentzen. Amsterdam. North-Holland, 1969. P. 68–131.

[3] *Gabbay D., Phueli A., Shelah S., and Stavi J.* On the temporal analysis of fairness. // Proceedings of 7th ACM Symposium on Principles of Programming Languages. 1980. P. 163–173.

[4] *Fitch F.* Symbolic Logic. NY, Roland Press, 1952.

[5] *Quine W.* On natural deduction. // Journal of Symbolic Logic. V. 15. 1950. P. 93–102.

[6] *Fisher M., Dixon C., and Peim M.* Clausal Temporal Resolution. // ACM Transactions on Computational Logic (TOCL). V. 1. № 2. 2001. P. 12-56.

[7] *Marchignoli D.* Natural Deduction Systems for Temporal Logic. Department of Informatics, Unviersity of Pisa. 2002.

[8] *Simpson A.* The Proof Theory and Semantics of Intuitionistic Modal Logic. College of Science and Engineering, School of Informatics, University of Edinburgh, 1994.

Приложение

Здесь мы приводим доказательства всех аксиом системы PLTL в системе PLTL_{ND}.

Аксиома 2.

1.	$i\colon \Box(p \Rightarrow q)$	посылка
2.	$i\colon \Box p$	посылка
3.	$i \preceq j$	$\preceq$ посылка
4.	$j : p \Rightarrow q$	$1, 3,\ \Box_{\text{и}}$
5.	$j : p$	$2, 3\ \Box_{\text{и}}$
6.	$j : q$	$4, 5, \Rightarrow_{\text{и}}$
7.	$i\colon \Box q$	$3, 6,\ \Box_{\text{в}}$, $\mapsto j,\ j \mapsto i,\ [3-6]$
8.	$i\colon \Box p \Rightarrow \Box q$	$7, \Rightarrow_{\text{в}}, [2–7]$
9.	$i\colon \Box(p \Rightarrow q) \Rightarrow (\Box p \Rightarrow \Box q)$	$8, \Rightarrow_{\text{в}}, [1–8]$

Аксиома 3

1.	$i\colon \bigcirc\neg p$	посылка
2.	$i'\colon \neg p$	$1, \bigcirc_{\text{и}}, i' \in M1$
3.	$i\colon \bigcirc p$	посылка
4.	$i'\colon p$	$3, \bigcirc_{\text{и}}$
5.	$i\colon \neg\bigcirc p$	$2, 4, \neg_{\text{в}}, [2\text{—}4]$
6.	$i\colon \bigcirc\neg p \Rightarrow \neg\bigcirc p$	$5, \Rightarrow_{\text{в}}, [1\text{—}5]$

Аксиома 4

1.	$i : \neg\bigcirc p$	посылка
2.	$i' : p$	посылка
3.	$Next(i, i')$	$\bigcirc$ сериальность
4.	$i : \bigcirc p$	$2, 3, \bigcirc_{\text{в}}$
5.	$i' : \neg p$	$1, 4, \neg_{\text{в}}, [2\text{—}4]$
6.	$i : \bigcirc\neg p$	$3, 5, \bigcirc_{\text{в}}$
7.	$i : \neg\bigcirc p \Rightarrow \bigcirc\neg p$	$5, \Rightarrow_{\text{в}}, [1\text{—}6]$

Аксиома 5.

1.	$i\colon \bigcirc(p \Rightarrow q)$	посылка
2.	$i\colon \bigcirc p$	посылка
3.	$i'\colon p \Rightarrow q$	$1, \bigcirc_{\text{и}}, i' \in M1$
4.	$i'\colon p$	$2, \bigcirc_{\text{и}}$
5.	$i'\colon q$	$3, 4, \Rightarrow_{\text{и}}$
6.	$Next(i, i')$	$\bigcirc$ сериальность
7.	$i\colon \bigcirc q$	$5, 6, \bigcirc_{\text{в}}$
8.	$i\colon \bigcirc p \Rightarrow \bigcirc q$	$7, \Rightarrow_{\text{в}}, [2\text{—}6]$
9.	$i\colon \bigcirc(p \Rightarrow q) \Rightarrow (\bigcirc p \Rightarrow \bigcirc q)$	$8, \Rightarrow_{\text{в}}, [1\text{—}8]$

Аксиома 6.

1.	$i\colon \Box p$	посылка
2.	$i\colon \neg(p \wedge \bigcirc \Box p)$	посылка
3.	$i\colon \neg p \vee \neg \bigcirc \Box p$	классическая выводимость
4.	$i\colon p$	посылка
5.	$i\colon \neg p$	посылка
6.	$i\colon \neg\neg p$	$\neg_{\text{в}}$ 4, 5, [5]
7.	$i\colon \neg \bigcirc \Box p$	$\vee_{\text{и}}, 3, 6$
8.	$i\colon \bigcirc \neg \Box p$	в силу Аксиомы 3
9.	$Next(i, i')$	$\bigcirc$ сериальность
10.	$i'\colon \neg \Box p$	8, $\bigcirc_{\text{и}}$, $i' \in M1$
11.	$i'\colon \Diamond \neg p$	10, временная эквивален.
12.	$i' \preceq j$	11, $\Diamond_{\text{и}}$
13.	$j\colon \neg p$	11, $\Diamond_{\text{и}}$, $\mapsto j$, $j \mapsto i'$
14.	$i \preceq i'$	9, $\bigcirc / \preceq$
15.	$i \preceq j$	12, 14, $\preceq$ транзитивность
16.	$j\colon p$	1, 15 $\Box_{\text{и}}$
17.	$i\colon \neg p$	$\neg_{\text{в}}$, 13, 16, [4—16]
18.	$i \preceq i$	$\preceq$ рефлексивность
19.	$i\colon p$	1, 18, $\Box_{\text{и}}$
20.	$i\colon \neg\neg(p \wedge \bigcirc \Box p)$	$\neg_{\text{в}}$, 17, 19, [3—19]
21.	$i\colon p \wedge \bigcirc \Box p$	20, $\neg_{\text{и}}$
22.	$i\colon \Box p \Rightarrow p \wedge \bigcirc \Box p$	21, $\Rightarrow_{\text{в}}$, [1—21]

Аксиома 7.

1.	$i\colon \Box(A \Rightarrow \bigcirc A)$	посылка
2.	$i\colon A$	посылка
3.	$i \preceq j$	посылка
4.	$j\colon A \Rightarrow \bigcirc A$	$1, 3,\ \Box_{\text{и}}$
5.	$i\colon \Box A$	$2, 3, 4,$ индукция, $\mapsto j,\ j \mapsto i,\ [3-4]$
6.	$i\colon A \Rightarrow \Box A$	$5,\ \Rightarrow_{\text{в}}, [2–5]$
7.	$i\colon \Box(A \Rightarrow \bigcirc A) \Rightarrow (A \Rightarrow \Box A)$	$6,\ \Rightarrow_{\text{в}}, [1–6]$

Аксиома 8.

1.	$i\colon A\,\mathcal{U}\,B$	посылка
2.	$i\colon \neg\Diamond B$	посылка
3.	$i\colon \Box\neg B$	временная экв-ость
4.	$i \preceq i$	$\preceq$ рефлексивность
5.	$i\colon \neg B$	$3, 4,\ \Box_{\text{и}}$
6.	$i \prec j$	$1, 5,\ \mathcal{U}_{\text{и}},\ \mapsto j,\ j \mapsto i$
7.	$j\colon B$	$1, 5,\ \mathcal{U}_{\text{и}}$
8.	$i \preceq j$	$6,\ \prec / \preceq$
9.	$j\colon \neg B$	$3, 8\ \Box_{\text{и}}$
10.	$i\colon \neg\neg\Diamond p$	$\neg_{\text{в}}, 7, 9,\ [2–9]$
11.	$i\colon \Diamond p$	$10,\ \neg_{\text{и}}$
12.	$i\colon A\,\mathcal{U}\,B \Rightarrow \Diamond B$	$10,\ \Rightarrow_{\text{в}}, [1–11]$

Аксиома 9.

1.	$i : A\mathcal{U} B$	посылка
2.	$i : \neg(B \vee (A \wedge \bigcirc(A\mathcal{U} B)))$	посылка
3.	$i : \neg B \wedge \neg(A \wedge \bigcirc(A\mathcal{U} B))$	2, з. де Моргана
4.	$i : \neg B$	$3, \wedge_{\text{И}}$
5.	$i : \neg(A \wedge \bigcirc(A\mathcal{U} B))$	$2, \wedge_{\text{И}}$
6.	$i : \neg A \vee \neg\bigcirc(A\mathcal{U} B)$	5, з. де Моргана
7.	$i : A$	$1, 4,\ \mathcal{U}_{\text{И}}$
8.	$j : B$	$1, 4,\ \mathcal{U}_{\text{И}}$
9.	$i \prec j$	$\mathcal{U}_{\text{И}},\ \mapsto j,\ j \mapsto i$
10.	$i : \neg A$	посылка
11.	$i : \neg\neg A$	$7, 10,\ \neg_{\text{В}}, [10]$
12.	$i : \neg\bigcirc(A\mathcal{U} B)$	$6, 11,\ \vee_{\text{И}}$
11.	$Next(i, i')$	$\bigcirc$сериальн.
12.	$i \preceq i'$	$\bigcirc / \preceq$
13.	$i' \prec j$	посылка
14.	$i' : A$	$\mathcal{U}_{\text{И}_2}, 6, 12, 13$
15.	$i' \preceq z$	посылка
16.	$z \preceq j$	посылка
17.	$i \preceq z$	12, 15, транз.
18.	$z : A$	$\mathcal{U}_{\text{И}_2}, 6, 16, 17$
19.	$i' : A\mathcal{U} B$	$\mathcal{U}_{\text{В}_3}, 14, 8, 15, 16,$ 18, [15, 16]
20.	$i : \bigcirc(A\mathcal{U} B)$	$\bigcirc_{\text{Б}}, 11, 19$
21.	$\neg\neg(B \vee (A \wedge \bigcirc(A\mathcal{U} B)))$	$\neg_{\text{В}}, 10, 20[2\text{—}20]$
22.	$(B \vee (A \wedge \bigcirc(A\mathcal{U} B)))$	$\neg_{\text{И}}, 21$
23.	$(A\mathcal{U} B) \Rightarrow (B \vee (A \wedge \bigcirc(A\mathcal{U} B)))$	$\Rightarrow_{\text{В}}, 23$

Аксиома 10.

1.	$x : B \vee (A \wedge \bigcirc(A \mathcal{U} B)$	посылка
2.	$x : \neg B$	посылка
3.	$x : A \wedge \bigcirc(A \mathcal{U} B)$	$1, \vee_{\text{и}}$
4.	$x : A$	$3, \wedge_{\text{и}}$
5.	$x : \bigcirc(A \mathcal{U} B)$	$3, \wedge_{\text{и}}$
6.	$x : \neg(A \mathcal{U} B)$	посылка
7.	$Next(x, x+1)$	$\bigcirc$ – сериальность
8.	$x \preceq x'$	$7, \bigcirc / \preceq$
9.	$x' : A \mathcal{U} B$	$\bigcirc_{\text{и}}, 5, 7$
10.	$x' : B$	посылка
11.	$x : A \mathcal{U} B$	$4, 8, 10, \mathcal{U}_{\text{в}}2$
12.	$x' : \neg B$	$\neg_{\text{в}}, 6, 11, [10—11]$
13.	$x' \preceq z$	$9, 12, \mathcal{U}_{\text{и}}, \ \mapsto z, z \mapsto x'$
14.	$x' : A$	$9, 12, \mathcal{U}_{\text{и}}$
15.	$z : B$	$9, 12, \mathcal{U}_{\text{и}}$
16.	$x \preceq z$	$8, 13, \preceq$ транз.
17.	$x : A \mathcal{U} B$	$14, 15, 18, 13, 16,$ $\mathcal{U}_{\text{в}}, \mapsto x', x' \mapsto z$
18.	$x : \neg\neg A \mathcal{U} B$	$\neg_{\text{в}}, 6, 16, [6—16]$
19.	$x : B$	посылка
20.	$x : A \mathcal{U} B$	$\mathcal{U}_{\text{в}}, 19$
21.	$x : A \mathcal{U} B$	$2, 19, 20,$ рассужд. по сл.
22.	$1 \Rightarrow 21$	$\Rightarrow_{\text{в}}, 21, [1—21]$

Проблема структуры универсальной логики[1]

В.Л. Васюков

abstract. The subject of the inquiry is the nature and the structure of the general universe of possible combinations of logical systems. Some categorical constructions are introduced which along with the coproducts underlying the fibring of logics describe the inner structure of the category of logical systems. It is shown that categorically the universe of universal logic turns out to be a paraconsistent complement topos.

Введение

Интерес к комбинированию логических систем в последнее время привел к публикации множества статей, посвященных этому вопросу (см. [3, 13, 14, 19, 20]). Многочисленные исследования в этой области используют*расслоение* — самый общий механизм комбинирования логических систем, предложенный Д. Габбаем [10]. Расслоение может применяться не только к модальным системам, но и в случае основных логических систем. Область этих логик достаточно богата, чтобы проиллюстрировать наиболее интересные свойства расслоения и снабдить нас базисом для комбинаций логических систем начиная от интуиционистских и заканчивая многозначными логиками (включая в себя модальные системы в качестве частного случая) [4, 8, 10, 17, 21].

В области основных логических систем конструирование расслоения не вызывает особых затруднений. Более интересным случаем было бы, по-видимому, исследование природы и структуры общего универсума возможных комбинаций всех логических систем. И здесь на помощь приходит концепция *универсальной логики* (см. [5, 6]), позволяющая выдвинуть гипотезу относительно структуры подобного универсума. Универсальная

[1]Работа поддержана РГНФ. Грант № 06-03-00195а.

логика представляет собой общую теорию логик, рассматриваемых как особая разновидность математических структур, по аналогии с тем, как универсальная алгебра рассматривает конкретные алгебраические системы. Переходя на точку зрения универсальной логики, нетрудно прийти к заключению, что теоретико-категорный подход, когда логические системы объединяются в категорию специального вида, снабжает нас некоторым фундаментом для исследования универсума универсальной логики. В статье эта проблема решается путем введения категорных конструкций, которые наряду с копроизведениями, лежащими в основе расслоения логик, описывают внутреннюю структуру категории логических систем. Главной целью является демонстрация того факта, что универсум универсальной логики оказывается *паранепротиворечивым дополняющим топосом.*

Во втором параграфе формулируется понятие категории **Log** логических систем, которая будет использоваться в качестве основного инструмента на всем протяжении исследования.

В третьем параграфе рассматриваются *копроизведения* в **Log**, чья конструкция лежит в основании техники расслоения логических систем. Показано, что *неограниченные расслоения* являются, по сути дела, копроизведениями в **Log**.

Действуя дуально предыдущему случаю копроизведений, в четвертом параграфе вводится понятие *произведений*, специальный случай требуемой нам конструкции расслоенного произведения, и понятие уравнителя (с точностью до изоморфизма). Показывается, что *неограниченные индексирования* представляют собой произведения в **Log**. Приводятся некоторые примеры логических систем, являющиеся произведениями.

В пятом параграфе рассматривается конструкция *коэкспоненциала*, дуального обычному экспоненциалу в декартовых категориях. Вводится понятие *возможной переводимости*, основанное на технике семантики возможной переводимости, и показывается, что возможные переводимости представляют собой коэкспоненциалы в **Log**. В качестве примера подобного подхода рассматривается возможная переводимость трехзначной логики $\mathbf{P}^1$ в классическую логику.

Наконец, путем использования понятия *дополняющего классификатора*, разработанного К. Мортенсеном, показывается, что

Log является *дополняющим топосом*, т.е. декартовой козамкнутой категорией с дополняющим классификатором подобъектов. Поскольку, согласно Мортенсену, дополняющий топос соответствует паранепротиворечивой логике, основывающейся на брауэровой алгебре, так же как обычный топос соответствует интуиционистской логике, основывающейся на алгебре Гейтинга, то утверждение о том, что **Log** по своей природе является дополняющим топосом, позволяет развить параллель с хорошо известным результатом А. Тарского о том, что решетка всех элементарных теорий классической логики является брауэровой алгеброй.

1 Логические системы и пространства теорий

Опишем основной формализм, служащий фундаментом дальнейших исследований. Следуя [7, p. 101-103], рассмотрим логический язык, который свободно порожден некоторой сигнатурой, включающей в себя, как это обычно делается, конструкторы различной местности.

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 1. Сигнатура представляет собой индексированное множество $\Sigma = \{\Sigma^n\}_{n \in \mathbb{N}}$, где каждое Σ^n является n-арным конструктором.

Будем считать, что множество пропозициональных переменных включено в Σ^0.

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 2. *Язык* над данной сигнатурой Σ, который будет обозначаться L_Σ, строится индуктивно обычным способом:

- $\Sigma^0 \subseteq L_\Sigma$;
- *если* $n \in \mathbb{N}$, $\varphi_1, \ldots, \varphi_n \in L_\Sigma$ *и* $c \in \Sigma^n$, *то* $c(\varphi_1, \ldots, \varphi_n) \in L_\Sigma$.

Будем называть *Σ-формулами* элементы L_Σ, или просто *формулами,* когда Σ ясно из контекста.

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 3. *Логическая система* является парой $\mathcal{L} = \langle \Sigma, \vdash \rangle$, где Σ есть сигнатура, а $\vdash$ представляет собой оператор присоединения следствий в L_Σ (в смысле Тарского, см. [23]), то есть, $\vdash$: $2^{L_\Sigma} \to 2^{L_\Sigma}$ является функцией, обладающей следующими свойствами для каждых $\Gamma, \Phi \subseteq L_\Sigma$:

Экстенсивность: $\Gamma \subseteq \Gamma^{\vdash}$;

Монотонность: если $\Gamma \subseteq \Phi$, то $\Gamma^{\vdash} \subseteq \Phi^{\vdash}$;

Идемпотентность: $(\Gamma^{\vdash})^{\vdash} \subseteq \Gamma^{\vdash}$.

Здесь $\Gamma^{\vdash}$ есть множество следствий Γ. Для сохранения общности не будем требовать здесь и в дальнейшем, чтобы оператор присоединения следствий был финитным, и тем более структурным.

Поскольку нам потребуется принимать во внимание выразительную силу данной логической системы, нам придется ссылаться на ее логические связки (примитивные или производные). Будем считать раз и навсегда зафиксированным множество $\Xi = \{\xi_i\}_{i \in \mathbb{N}}$ метапеременных. Для данной сигнатуры Σ и $k \in \mathbb{N}$ будем рассматривать множество L^k_Σ определенным индуктивно:

- $\{\xi_1, \ldots, \xi_k\} \subseteq L^k_\Sigma$;
- $\Sigma^0 \subseteq L^k_\Sigma$;
- если $n \in \mathbb{N}, \varphi_1, \ldots, \varphi_n \in L^k_\Sigma$ и $c \in \Sigma^n$, то $c(\varphi_1, \ldots, \varphi_n) \in L^k_\Sigma$.

Очевидным образом $L_\Sigma = L^0_\Sigma$. Для данного $\varphi_n \in L^k_\Sigma$ будем записывать как $\varphi(\xi_1 \backslash \psi_1, \ldots, \xi_k \backslash \psi_k)$ формулу, получаемую из φ одновременной заменой каждого вхождения ξ_1 в φ на ψ_i для каждого $i \leq k$.

Производная связка местности $k \in \mathbb{N}$ является λ-термом $d = \lambda\xi_1, \ldots, \xi_k.\varphi$, где $\varphi \in L^k_\Sigma$. Обозначим через DC^k_Σ множество всех производных k-местных над Σ. Отметим, что если $c \in \Sigma^n$ является примитивной связкой, то она также может рассматриваться как производная связка $c = \lambda\xi_1, \ldots, \xi_k.c(\xi_1, \ldots, \xi_k)$. Для данной производной связки $d = \lambda\xi_1, \ldots, \xi_k.\varphi$ будем писать $d(\psi_1, \ldots, \psi_n)$ вместо $\varphi(\xi_1 \backslash \psi_1, \ldots, \xi_k \backslash \psi_k)$.

Различные языки, порожденные различными сигнатурами, могут переводиться друг в друга с помощью понятия морфизма, когда примитивные связки одной сигнатуры отображаются в производные связки другой сигнатуры с сохранением соответствующей местности.

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 4. Для данных сигнатур Σ_1 и Σ_2 *морфизм сигнатур* $h : \Sigma_1 \to \Sigma_2$ является $\mathbb{N}$-индексированным семейством функций $h = \{h^n : \Sigma_1^n \to DC^n_{\Sigma_2}\}_{n \in \mathbb{N}}$.

Для данного морфизма сигнатур $h : \Sigma_1 \to \Sigma_2$ определяем его свободные расширения $h : L^k_{\Sigma_1} \to L^k_{\Sigma_2}$ для $k \in \mathbb{N}$, следующим образом:

- $h(\xi_i) = \xi_i$, если $\xi_i \in \Xi$;
- $h(c) = h^0(c)$, если $c \in \Sigma_1^0$;
- $h(c(\varphi_1, \ldots, \varphi_n)) = h^0(c)(h(\varphi_1), \ldots, h(\varphi_n))$, если $c \in \Sigma_1^n$.

Функцию перевода h, удовлетворяющую вышеизложенным требованиям, будем называть *унифицированной*.

Сигнатуры и их морфизмы образуют категорию **Sig** с тождествами $id_\Sigma : \Sigma_1 \to \Sigma_2$, такими, что для каждого $n \in \mathbb{N}$ и $c \in \Sigma^n$ $id^n_\Sigma(c) = \lambda\xi_1, \ldots, \xi_k.c(\xi_1, \ldots, \xi_k)$, а композиция морфизмов сигнатур $f : \Sigma_1 \to \Sigma_2$ и $g : \Sigma_2 \to \Sigma_3$ будет определяться как $g \circ f : \Sigma_1 \to \Sigma_3$, такая, что $(g \circ f)^n(c) = \xi_1, \ldots, \xi_n.g(\varphi)$, полагая, что $f^n(c) = \lambda\xi_1, \ldots, \xi_n.\varphi$.

Удобство использования унифицированных переводов сказывается при формулировке понятия морфизма между логическими системами. Для данной функции $h : L_{\Sigma_1} \to L_{\Sigma_2}$ с $\Phi \subseteq L_{\Sigma_1}$ мы будем рассматривать множество $h[\Phi] = \{h(\varphi) : \varphi \in \Phi\}$.

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 5. Пусть $\mathcal{L}_1 = \langle \Sigma_1, \vdash_1 \rangle$ и $\mathcal{L}_2 = \langle \Sigma_2, \vdash_2 \rangle$ будут логическими системами. *Морфизм логических систем* $h : \mathcal{L}_1 \to \mathcal{L}_2$ представляет собой морфизм сигнатур $h : \Sigma_1 \to \Sigma_2$, такой, что $h[\Phi^{\vdash_1}] \subseteq h[\Phi]^{\vdash_2}$ для каждого $\Phi \subseteq L_{\Sigma_1}$.

Логические системы и их морфизмы образуют конкретную категорию **Log** над **Sig**. Уместно напомнить следующую хорошо известную полезную лемму.

ЛЕММА 6. *Пусть* $\mathcal{L}_1 = \langle \Sigma_1, \vdash_1 \rangle$ *и* $\mathcal{L}_2 = \langle \Sigma_2, \vdash_2 \rangle$ *будут логическими системами, а* $h : \mathcal{L}_1 \to \mathcal{L}_2$ *—* **Log**-*морфизмом. Тогда* $h[\Phi^{\vdash_1}]^{\vdash_2} = h[\Phi]^{\vdash_2}$ *для каждого* $\Phi \subseteq L_{\Sigma_1}$.

Теорией логической системы $\mathcal{L} = \langle \Sigma, \vdash \rangle$ является, как обычно, множество $\Phi \subseteq L_\Sigma$, такое, что $\Phi^\vdash = \Phi$. Обозначим как

$Th(\mathcal{L})$ множество всех теорий $\mathcal{L}$. Хорошо известно, что множество $Th(\mathcal{L})$, упорядоченное по отношению включения, всегда является полной решеткой.

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 7. *Пространство теорий* есть полная решетка $tsp = \langle Th, \leq \rangle$, то есть частичный порядок $\leq$ на множестве Th, такой, что каждое $T \subseteq Th$ имеет наименьшую верхнюю грань (или пересечение) $\bigvee T$.

В частности, для данной логической системы $\mathcal{L} = \langle \Sigma, \vdash \rangle$ структура $tsp_{\mathcal{L}} = \langle Th(\mathcal{L}), \subseteq \rangle$ всегда будет пространством теорий (см., напр., [11]). Более того, переводы языков, ассоциированные с морфизмами логических систем, всегда действуют на операторы присоединения следствий таким образом, что в соответствующих пространствах теорий сохраняются пересечения.

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 8. Пусть $tsp_1 = \langle Th_1, \leq_1 \rangle$ и $tsp_2 = \langle Th_2, \leq_2 \rangle$ будут пространствами теорий. *Морфизм пространств теорий* $h : tsp_1 \to tsp_2$ представляет собой функцию $h : Th_1 \to Th_2$ такую, что $h(\bigvee_1 T) = \bigvee_2 h[T]$ для каждого $T \subseteq Th$.

Следующая формулировка представляет собой хорошо известную полезную лемму.

ЛЕММА 9. *Пусть $tsp_1 = \langle Th_1, \leq_1 \rangle$ и $tsp_2 = \langle Th_2, \leq_2 \rangle$ будут пространствами теорий и $h : tsp_1 \to tsp_2$ будет морфизмом пространств теорий. Тогда h сохраняет порядок, то есть для каждого $\Phi, \Gamma \in Th_1$, если $\Phi \leq_1 \Gamma$, то $h(\Phi) \leq_2 h(\Gamma)$.*

Пространства теорий и их морфизмы образуют категорию **Tsp** с обычными тождествами и композицией функций. Более того, определение пространства теорий, индуцированного логической системой, может быть расширено на случай функтора.

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 10. Отображения

- $Th(h : \mathcal{L}_1 \to \mathcal{L}_2) : tsp_1 \to tsp_2$, с $Th(h)(\Phi) = h[\Phi]^{\vdash_2}$ в $\mathcal{L}_2 = \langle \Sigma_2, \vdash_2 \rangle$ для каждого $\Phi \in Th(\mathcal{L}_1)$,

образуют функтор Th: **Log**$\to$**Tsp**.

Нетрудно показать, что Th представляет собой сопряженный функтор, но этот факт нам здесь не понадобится.

2 Копроизведения и расслоения в Log

В [4, p. 153] указывается, что категория **Sig** является хорошо известной категорией $\mathbb{N}$-индексированных множеств и сохраняющих индексы отображений $\mathbf{Set}/\mathbb{N}$. Как следствие, верно следующее предложение:

УТВЕРЖДЕНИЕ 11. *Категория Sig является (малой) кополной категорией.*

В частности, в **Sig** имеются копроизведения и амальгамы. Первые позволяют нам объединить две сигнатуры с различными конструкторами, в то время как последние могут быть использованы для объединения конструкторов. Определим копроизведения, требуемый нам специальный случай конструкции амальгам и коуравнитель (с точностью до изморфизма) следующим образом.

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 12. *Копроизведение* двух сигнатур Σ_1 и Σ_2 представляет собой сигнатуру $\Sigma_1 \oplus \Sigma_2$, наделенную инъекциями $i_1 : \Sigma_1 \to \Sigma_1 \oplus \Sigma_2$ и $i_2 : \Sigma_2 \to \Sigma_1 \oplus \Sigma_2$, такими, что для каждого $k \in \mathbb{N}$:

- $(\Sigma_1 \oplus \Sigma_2)^k$ *является дизъюнктным объединением* Σ_1^k и Σ_2^k;
- i_1^k *и* i_2^k *являются инъекциями* Σ_1^k *и* Σ_2^k на $(\Sigma_1 \oplus \Sigma_2)^k$ *соответственно.*

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 13. *Амальгама* двух инъективных морфизмов сигнатур с одним и тем же началом $f_1 : \Sigma \to \Sigma_1$ и $f_2 : \Sigma \to \Sigma_2$ есть сигнатура $\Sigma_1 \oplus^{f_1 \Sigma f_2} \Sigma_2$, наделенная морфизмами $g_1 : \Sigma_1 \to \Sigma_1 \oplus^{f_1 \Sigma f_2} \Sigma_2$ и $g_2 : \Sigma_2 \to \Sigma_1 \oplus^{f_1 \Sigma f_2} \Sigma_2$, такими, что для каждого $k \in \mathbb{N}$:

- $(\Sigma_1 \oplus^{f_1 \Sigma f_2} \Sigma_2)^k$ есть $\Sigma^k \cup i_1^k(\Sigma_1^k \backslash f_1(\Sigma^k)) \cup i_2^k(\Sigma_2^k \backslash f_2(\Sigma^k))$;
- $g_1^k(c_1) = \begin{cases} i_1^k(c_1), & \text{если } c_1 \notin f_1^k(\Sigma^k) \\ (f_1^k)^{-1}(c_1) & \text{в противном случае,} \end{cases}$

  и аналогично для g_2^k.

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 14. *Коуравнителем* двух морфизмов сигнатур с одним и тем же началом и концом $f, g : \Sigma \to \Sigma_1$ является сигнатура $\Sigma_1/\equiv^{f,g}$, снабженная морфизмом $q : \Sigma_1 \to \Sigma_1/\equiv^{f,g}$, таким, что

- $(\Sigma_1/\equiv^{f,g})^k$ *есть фактор-множество* $\Sigma_1^k(\equiv^{f,g})^k$, *где* $(\equiv^{f,g})^k$ *является наименьшим отношением эквивалентности на* Σ_1^k, *содержащим* $\{\langle f^k(c), g^k(c)\rangle : c \in \Sigma^k\}$;
- $q^k(c_1)$ *является* $(\equiv^{f,g})^k$*-классом эквивалентности для* $c_1 \in \Sigma_1^k$.

Амальгамы существуют, если даже мы не предполагаем, что f_1 и f_2 являются инъекциями. Что касается коуравнителя, то каждый коуравнитель является, в сущности, семейством сюрьективных отображений. В дальнейшем оказывается полезным следующий факт: амальгама двух морфизмов $f_1 : \Sigma \to \Sigma_1$ и $f_2 : \Sigma \to \Sigma_2$ может быть получена путем построения вначале копроизведения $\Sigma_1 \oplus \Sigma_2$, снабженного инъекциями $i_1 : \Sigma_1 \to \Sigma_1 \oplus \Sigma_2$ и $i_2 : \Sigma_2 \to \Sigma_1 \oplus \Sigma_2$, а затем конструированием коуравнителя $i_1 \circ f_1$ и $i_2 \circ f_2$.

Для рассмотрения неограниченных расслоений в **Log** мы используем конструкторы и операторы присоединения следствий из обеих логических систем. Заметим, что метапеременные играют важную роль в получении точной конструкции.

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 15. Пусть $\mathcal{L}_1 = \langle\Sigma_1, \vdash_1\rangle$ и $\mathcal{L}_2 = \langle\Sigma_2, \vdash_2\rangle$ будут логическими системами. Тогда их *неограниченным расслоением* является логическая система $\langle\Sigma_1, \vdash_1\rangle \oplus \langle\Sigma_2, \vdash_2\rangle = \langle\Sigma_1 \oplus \Sigma_2, \vdash_{1\oplus 2}\rangle$, где $\vdash_{1\oplus 2}$ есть оператор присоединения следствий $\vdash_{1\oplus 2}$: $2^{L_{i_1(\Sigma_1)\cup i_2(\Sigma_2)}} \to 2^{L_{i_1(\Sigma_1)\cup i_2(\Sigma_2)}}$ и i_1, i_2 являются инъекциями копроизведения $\Sigma_1 \oplus \Sigma_2$.

УТВЕРЖДЕНИЕ 16. *Неограниченные расслоения являются копроизведениями в* ***Log***.

Доказательство. 1) Инъекции i_1 и i_2 являются морфизмами в **Log** согласно определению 5. 2) *Универсальность*. Пусть $h_1 : \langle\Sigma_1, \vdash_1\rangle \to \langle\Sigma_3, \vdash_3\rangle, h_2 : \langle\Sigma_2, \vdash_2\rangle \to \langle\Sigma_3, \vdash_3\rangle$ будут произвольными морфизмами в **Log**. Пусть $k : \Sigma_1 \oplus \Sigma_2 \to \Sigma_3$ будет единственным морфизмом в **Sig**, таким, что $k \circ i_1 = h_1$ и $k \circ i_2 = h_2$. Тривиальным образом k является морфизмом в **Log** и он единственный такой, что $k \circ i_1 = h_1$ и $k \circ i_2 = h$. Q.E.D.

Когда надо совместно использовать (объединить) конструкторы, то расслоение ограничивается за счет введения какого-то взаимодействия между двумя логическими системами. Техника подъема морфизмов по кодекартовому квадрату снабжает нас средствами получения объединения, определенного на уровне сигнатур.

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 17. Пусть $\mathcal{L}_1 = \langle \Sigma_1, \vdash_1 \rangle$ и $\mathcal{L}_2 = \langle \Sigma_2, \vdash_2 \rangle$ будут логическими системами и $f_1 : \Sigma \to \Sigma_1, f_2 : \Sigma \to \Sigma_2$ будут инъективными морфизмами сигнатур. Тогда их *ограниченным совмещенным расслоением* является

$$\langle \Sigma_1, \vdash_1 \rangle \oplus^{f_1 \Sigma f_2} \langle \Sigma_2, \vdash_2 \rangle = q(\langle \Sigma_1, \vdash_1 \rangle \oplus \langle \Sigma_2, \vdash_2 \rangle),$$

где $q : \Sigma_1 \oplus \Sigma_2 \to \Sigma_1 \oplus^{f_1 \Sigma f_2} \Sigma_2$ является коуравнителем $i_1 \circ f_1 \colon \Sigma \to \Sigma_1 \oplus \Sigma_2$ и $i_2 \circ f_2 \colon \Sigma \to \Sigma_1 \oplus \Sigma_2$.

Совмещение логических операторов отражается, в первую очередь, на синтаксисе расслоенной логики. Но поскольку допускается совмещение как пропозициональных символов, так и логических операторов, то совмещение логических операторов дает нам способ наложения ограничений путем постулирования взаимодействия между двумя логиками. Примеры (внося соответствующие изменения) можно найти в [20].

3 Произведения и индексирование в Log

Опять, поскольку категория **Sig** представляет собой хорошо известную категорию **Set**/$\mathbb{N}$ $\mathbb{N}$-индексированных множеств и сохраняющих индексирование отображений, то как следствие справедливым будет следующее предложение.

УТВЕРЖДЕНИЕ 18. *Категория Sig является (малой) полной категорией.*

В частности, в **Sig** имеются произведения и обратные образы. Действуя дуально случаю копроизведений, определим произведения, специальный случай требуемых нам обратных образов и уравнитель (с точностью до изоморфизма) следующим образом.

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 19. *Произведение* двух сигнатур Σ_1 и Σ_2 представляет собой сигнатуру $\Sigma_1 \otimes \Sigma_2$, снабженную проекциями $pr_1 : \Sigma_1 \otimes \Sigma_2 \to \Sigma_1$ и $pr_2 : \Sigma_1 \otimes \Sigma_2 \to \Sigma_2$, такими, что для каждого $k \in \mathbb{N}$:

- $(\Sigma_1 \otimes \Sigma_2)^k$ есть $\Sigma_1^k \times \Sigma_2^k$;
- pr_1^k и pr_2^k являются инъективными проекциями $(\Sigma_1 \otimes \Sigma_2)^k$ в Σ_1^k и Σ_2^k соответственно.

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 20. *Обратный образ* двух инъективных морфизмов сигнатур с одинаковым концом $f_1 : \Sigma_1 \to \Sigma$ и $f_2 : \Sigma_2 \to \Sigma$ есть сигнатура $\Sigma_1 \otimes^{f_1 \Sigma f_2} \Sigma_2$, снабженная морфизмами $g_1 : \Sigma_1 \otimes^{f_1 \Sigma f_2} \Sigma_2 \to \Sigma_1$ и $g_2 : \Sigma_1 \otimes^{f_1 \Sigma f_2} \Sigma_2 \to \Sigma_2$, такими, что для каждого $k \in \mathbb{N}$:

- $(\Sigma_1 \otimes^{f_1 \Sigma f_2} \Sigma_2)^k$ *есть* $\{\langle pr_1^k(\langle c_1, c_2 \rangle), pr_2^k(\langle c_1, c_2 \rangle) : f_1^k(c_1) = f_2^k(c_1)\}$
- $g_1^k(\langle c_1, c_2 \rangle) = c_1, g_2^k(\langle c_1, c_2 \rangle) = c_2$.

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 21. *Уравнитель* двух сигнатур с одинаковым началом и концом $f, g : \Sigma_1 \to \Sigma_2$ является сигнатурой Σ, снабженной морфизмом $q : \Sigma \to \Sigma_1$, таким, что

- Σ^k *является множеством* $\{c \in \Sigma_1^k : f^k(c_1) = g^k(c_1)\}$;
- $f^k \circ q^k = g^k \circ q^k$.

Следующий факт пригодится в дальнейшем: обратный образ двух морфизмов $f_1 : \Sigma_1 \to \Sigma$ и $f_2 : \Sigma_2 \to \Sigma$ может быть получен вначале построением произведения $\Sigma_1 \otimes \Sigma_2$, снабженного проекциями $pr_1 : \Sigma_1 \otimes \Sigma_2 \to \Sigma_1$ и $pr_2 : \Sigma_1 \otimes \Sigma_2 \to \Sigma_2$, а затем получением уравнителя $f_1 \circ pr_1$ и $f_2 \circ pr_2$.

Рассмотрение неограниченного индексирования (*unconstrained labelling*) в **Log** (понятие индексированных дедуктивных систем см. в [17]) требует использования конструкторов и операторов присоединения следствий из обеих логических систем. Заметим, что использование метапеременных необходимо для точности конструкции.

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 22. Пусть $\mathcal{L}_1 = \langle \Sigma_1, \vdash_1 \rangle$ и $\mathcal{L}_2 = \langle \Sigma_2, \vdash_2 \rangle$ будут логическими системами. Тогда их *неограниченное индексирование* представляет собой $\langle \Sigma_1, \vdash_1 \rangle \otimes \langle \Sigma_2, \vdash_2 \rangle = \langle \Sigma_1 \otimes \Sigma_2, \vdash_{1 \otimes 2} \rangle$, где $\vdash_{1 \otimes 2}$ является оператором присоединения следствий $\vdash_{1 \otimes 2}$: $2^{L_{pr_1(\Sigma_1 \otimes \Sigma_2) \times pr_2(\Sigma_1 \otimes \Sigma_2)}} \to 2^{L_{pr_1(\Sigma_1 \otimes \Sigma_2) \times pr_2(\Sigma_1 \otimes \Sigma_2)}}$, а pr_1, pr_2 являются проекциями произведения $\Sigma_1 \otimes \Sigma_2$.

УТВЕРЖДЕНИЕ 23. *Неограниченные индексирования являются произведениями в* ***Log***.

Доказательство. 1) Проекции pr_1 и pr_2 являются морфизмами в **Log** согласно определению 5. 2) *Универсальность.* Пусть $h_1 : \langle \Sigma_3, \vdash_3 \rangle \to \langle \Sigma_1, \vdash_1 \rangle, h_2 : \langle \Sigma_3, \vdash_3 \rangle \to \langle \Sigma_2, \vdash_2 \rangle$ будут произвольными морфизмами в **Log**. Пусть $k : \Sigma_3 \to \Sigma_1 \otimes \Sigma_2$ будет единственным морфизмом в **Sig**, таким, что $pr_1 \circ k = h_1$ и $pr_2 \circ k = h_2$. Тривиальным образом k является морфизмом в **Log** и это единственный морфизм, такой, что $pr_1 \circ k = h_1$ и $pr_2 \circ k = h_2$. Q.E.D.

Если нам нужно отождествить конструкторы, то мы накладываем ограничение на индексирование с помощью введения взаимодействия между двумя данными логическими системами. Средствами получения отождествления на уровне сигнатур снабжает нас техника подъема морфизмов по декартовому квадрату.

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 24. Пусть $\mathcal{L}_1 = \langle \Sigma_1, \vdash_1 \rangle$ и $\mathcal{L}_2 = \langle \Sigma_2, \vdash_2 \rangle$ будут логическими системами и $f_1 : \Sigma_1 \to \Sigma, f_2 : \Sigma_2 \to \Sigma$ будет инъективным морфизмом сигнатур. Тогда их *ограниченным индексированием* является $\langle \Sigma_1, \vdash_1 \rangle \otimes^{f_1 \Sigma f_2} \langle \Sigma_2, \vdash_2 \rangle = q(\langle \Sigma_1, \vdash_1 \rangle \otimes \langle \Sigma_2, \vdash_2 \rangle)$, где $q : \Sigma_1 \otimes^{f_1 \Sigma f_2} \Sigma_2 \to \Sigma_1 \otimes \Sigma_2$ является уравнителем $f_1 \circ pr_1 : \Sigma_1 \otimes \Sigma_2 \to \Sigma$ и $f_2 \circ pr_2 : \Sigma_1 \otimes \Sigma_2 \to \Sigma$.

Отождествление логических операторов прежде всего отражается на синтаксисе логики с индексированием. Но поскольку мы допускаем отождествление как пропозициональных символов, так и логических операторов, то отождествление логических операторов может снабдить нас способом формулировки некоторого взаимодействия между двумя логиками.

ПРИМЕР 25. *k-дедуктивные системы.*

2-мерная дедуктивная система (или 2-дедуктивная система для краткости) [11, p. 51] является логической системой $\langle \Sigma, \vdash^2 \rangle$, где $\Sigma = \Sigma_1 \otimes \Sigma_1$ и $\vdash^2$: $2^{L_{\Sigma_1 \times \Sigma_1}} \to 2^{L_{\Sigma_1 \times \Sigma_1}}$ является оператором присоединения следствий, таким, что

- если $\langle \varphi, \psi \rangle \in \Pi$, то $\Pi \vdash^2 \langle \varphi, \psi \rangle$,
- если для каждой $\langle \varphi, \psi \rangle \in \Phi, \Pi \vdash^2 \langle \varphi, \psi \rangle$ и $\Phi \vdash^2 \langle \delta, \varepsilon \rangle$, то $\Pi \vdash^2 \langle \delta, \varepsilon \rangle$,
- если $\Phi \vdash^2 \langle \varphi, \psi \rangle$ и $\Phi \subseteq \Pi$, то $\Pi \vdash^2 \langle \varphi, \psi \rangle$.

Для каждого $k > 0$ k-дедуктивные системы или k-мерные дедуктивные системы определяются путем замены в определении 2-дедуктивной системы пар формул последовательностями формул длины k (k-последовательности) и производя другие очевидные изменения.

ПРИМЕР 26. Следуя общему рецепту для индексированной дедукции в [22] рассмотрим логические системы:

- $\mathcal{L}_2 = \langle \Sigma_2, \vdash_2 \rangle$, где Σ_2^0 есть множество истинностных значений с выделенным значением $\top$, $\Sigma_2^1 = \{\Box^\circ\}$ и $\vdash_2$ соответствует $\leq$ (следовательно, $\beta \vdash_2 \top$, и мы будем писать $\beta_1 = \beta_2$ в том случае, когда $\beta_1 \vdash_2 \beta_2$ и $\beta_2 \vdash_2 \beta_1$);
- $\mathcal{L}_1 = \langle \Sigma_1, \vdash_1 \rangle$, где Σ_1^0 является множеством пропозициональных переменных, $\Sigma_1^1 = \{\neg, \Box\}, \Sigma_1^2 = \{\supset, \wedge, \vee\}$ и $\vdash_1$ есть соответствующий фрагмент оператора присоединения следствий модальной логики.

Неограниченное индексирование $\mathcal{L}_1$ с помощью $\mathcal{L}_2$ получается в рамках системы $\langle \Sigma_1, \vdash_1 \rangle \otimes \langle \Sigma_2, \vdash_2 \rangle = \langle \Sigma_1 \otimes \Sigma_2, \vdash_{1\otimes 2} \rangle$, где $\Sigma_1 \otimes \Sigma_2$–формулы имеют форму $\beta : \varphi$ (что означает, что истинное значение φ больше или равно β). $\vdash_{1\otimes 2}$: $2^{L_{pr_1(\Sigma_1\otimes\Sigma_2)\times pr_2(\Sigma_1\otimes\Sigma_2)}} \longrightarrow 2^{L_{pr_1(\Sigma_1\otimes\Sigma_2)\times pr_2(\Sigma_1\otimes\Sigma_2)}}$ является оператором присоединения следствий, таким, что (записываем $\beta :: \varphi$, если для каждого β_1 мы имеем $\beta_1 = \beta_2 : \varphi$):

- $\beta : \varphi \in \Pi$, тогда $\Pi \vdash_{1\otimes 2} \beta : \varphi$,
- если для каждой $\beta : \varphi \in \Phi, \Pi \vdash_{1\otimes 2} \beta : \varphi$ и $\Phi \vdash_{1\otimes 2} \delta : \psi$, то $\Pi \vdash_{1\otimes 2} \delta : \psi$,
- если $\Phi \vdash_{1\otimes 2} \beta : \varphi$ и $\Phi \subseteq \Pi$, то $\Pi \vdash_{1\otimes 2} \beta : \varphi$,
- если для каждой $\beta_1 : \varphi \in \Phi, \beta_1 : \varphi \vdash_{1\otimes 2} \beta_2 : \varphi$, то $\beta_2 : \varphi \in \Phi$,
- $\Box^\circ \beta :: \varphi \vdash_{1\otimes 2} \beta :: \varphi$,
- $\beta : \Box\varphi \vdash_{1\otimes 2} \Box^\circ \beta :: \varphi$.

Содержательно последние два случая означают, что формула $\Box\varphi$ истинна, по меньшей мере, во множестве миров β тогда и только тогда, когда формула φ истинна во всех мирах, достижимых для миров из β, что подразумевает $\Box^\circ\beta$.

4 Коэкспоненциалы и возможная переводимость в **Log**

Предлагаемый подход сталкивается с непреодолимыми трудностями, если попытаться определить экспоненцирование в **Log** обычным образом. Дело в том, что общепринятое понимание экспоненциала A^B как множества всех отображений из B в A (по крайней мере в **Set**) в нашем случае приводит к «логике» всех переводов из одной логической системы в другую. Однако трудно сказать что-либо определенное о такой конструкции или понятии. Поэтому нам следует либо отказаться от продолжения исследования, либо сменить направление рассмотрения.

Выход заключается в использовании дуальных понятий. Мы говорим, что категория допускает *коэкспоненцирование*, если в ней существует копроизведение любых двух объектов и для двух произвольных объектов a, b всегда имеется объект ${}^a b$, называемый *коэкспоненциалом*, и стрелка $ev^\circ : b \rightarrow {}^a b + a$ (*кооценка*), такая, что для любого объекта c и стрелки $g : b \rightarrow c + a$ существует стрелка $\breve{g} : {}^a b \rightarrow c$, такая, что $(\breve{g} + id_a) \circ ev^\circ = g$.

Как пример категории с экспоненцированием обычно рассматривают алгебру Гейтинга, взятую категорно (то есть как категорию предпорядка с произведениями и копроизведениями), где экспоненциалом будет импликация Гейтинга, являющаяся псевдодополнением a относительно b (см. [1]). В качестве примера категории с коэкспоненцированием в этом случае можно рассматривать алгебру Брауэра, где в роли коэкспоненциала выступает брауэровская импликация $a \Longleftarrow b$, являющаяся псевдоразностью b и a (см., например, [2]). Наконец, примером категории с экспоненцированием и коэкспоненцированием будет так называемая алгебра Гейтинга—Брауэра, представляющая собой алгебру Гейтинга, пополненную брауэровской импликацией (см. [18]).

Конечно, в категории **Set** конструкция коэкспоненциала будет выглядеть гораздо более сложной, например, мы можем использовать с этой целью так называемые *антифункции* (согласно [16] антифункция $g^{\perp} : X \to Y$ является бинарным отношением между X и Y, чьим обратным отношением будет функция $g : Y \to X$). Вообще, если мы можем с каждым переводом из одной логической системы в другую связать отношение (антифункцию), то это дает нам возможность рассмотреть конструкцию коэкспоненциала. А в случае, когда антифункция является обратной функцией (если принять во внимание, что функции представляют собой частный случай отношений), конструкция коэкспоненциала превращается в конструкцию, полученную с помощью обратных функций.

Техника *семантики возможной переводимости* (см. [9]) подсказывает нам конструкцию коэкспоненциала в **Log**.

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 27. *Коэкспоненциалом* двух сигнатур Σ_1 и Σ_2 является сигнатура ${}^{\Sigma_2}\Sigma_1$ с функцией кооценки $ev^{\circ} : \Sigma_1 \to {}^{\Sigma_2}\Sigma_1 \oplus$ $\oplus \Sigma_2$ такой, что для каждого $k \in \mathbb{N}$:

- $({}^{\Sigma_2}\Sigma_1)^k$ *есть множество* $O = \{O_n\}_{n \in \mathbb{N}}$ *реляционных бинарных операторов и язык реляционных формул* L_O *представляет собой множество* $o(c_2, c_1)$ *для всех* $o \in O$ *и* $c_1 \in \Sigma_1^k, c_2 \in \Sigma_1^k$;
- $(ev^{\circ})^k$ *является биекцией, причем* $(ev^{\circ})^k(c_1) = o(c_2, c_1)$ *или* $(ev^{\circ})^k(c_1) = c_2$ *в противном случае (где* $o \in O$, $c_1 \in \Sigma_1^k, c_2 \in \Sigma_1^k$*)*.

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 28. *Коэкспоненцированием* морфизма сигнатур $g : \Sigma_1 \to \Sigma_3 \oplus \Sigma_2$ является сигнатура ${}^{\Sigma_2}\Sigma_1 \oplus \Sigma_2$ с морфизмом $\breve{g} : {}^{\Sigma_2}\Sigma_1 \to \Sigma_3$, таким, что для каждого $k \in \mathbb{N}$:

- $(\breve{g} + id_{\Sigma_2}) \circ ev^{\circ} = g$;
- $g^k(c_1) = \begin{cases} (ev^{\circ})^k(c_1), & \text{если} (ev^{\circ})^k(c_1) \in \Sigma_2^k \\ \breve{g}((ev^{\circ})^k(c_1)) & \text{в противном случае.} \end{cases}$

Чтобы рассмотреть *возможную переводимость* в **Log**, нам требуются конструкторы и операторы присоединения следствий из обеих логических систем. Вновь существенным является использование метапеременных, позволяющее сделать конструкцию точной.

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 29. Пусть $\mathcal{L}_1 = \langle \Sigma_1, \vdash_1 \rangle$ и $\mathcal{L}_2 = \langle \Sigma_2, \vdash_2 \rangle$ будут логическими системами. Тогда *возможной переводимостью* из $\mathcal{L}_1$ в $\mathcal{L}_2$ будет $\langle {}^{\Sigma_2}\Sigma_1 \oplus \Sigma_2, \vdash_{(1,2)} \rangle$, где $\vdash_{(1,2)}$ означает $\vdash_{(1,2)}$: $2^{L_{ev^\circ(\Sigma_1) \cup {}^{\Sigma_2}\Sigma_1}} \rightarrow 2^{L_{ev^\circ(\Sigma_1) \cup {}^{\Sigma_2}\Sigma_1}}$ и ev° есть морфизм кооценки в **Sig**.

УТВЕРЖДЕНИЕ 30. *Возможные переводимости являются коэкспоненциалами в* ***Log***.

Доказательство. 1) Кооценка является логическим морфизмом в **Log** согласно определению 5. 2) *Универсальность*. Пусть $g : \Sigma_1 \rightarrow \Sigma_3 \oplus \Sigma_2$ будут морфизмами в **Log**. Пусть $\breve{g} : {}^{\Sigma_2}\Sigma_1 \rightarrow \Sigma_3$ будет единственным морфизмом в **Sig**, таким, что $(\breve{g} + id_{\Sigma_2}) \circ ev^\circ = g$. Тривиальным образом $\breve{g}$ является таким единственным морфизмом в **Log**, что $(\breve{g} + id_{\Sigma_2}) \circ ev^\circ = g$. Q.E.D.

Мы можем улучшить и уточнить перевод, налагая ограничения на свободные расширения морфизмов между двумя данными логическими системами.

ПРИМЕР 31. Возможная переводимость трехзначной логики $\mathbf{P}^1$ *в классическую логику.*

Рассмотрим логические системы (см. [9]):

- $\mathbf{L}_3 = \langle \Sigma_1, \vdash_1 \rangle$ (трехзначное паранепротиворечивое исчисление $\mathbf{P}^1$), где Σ_1^0 есть множество пропозициональных переменных, $\Sigma_1^1 = \{\neg_3\}, \Sigma_1^2 = \{\supset_3, \wedge_3, \vee_3\}$ и $\vdash_1$ является оператором присоединения следствий трехзначной логики $\mathbf{P}^1$;

- $\mathbf{L}_{PC} = \langle \Sigma_2, \vdash_2 \rangle$ (классическая логика), где Σ_2^0 есть множество пропозициональных переменных, $\Sigma_2^1 = \{\neg\}, \Sigma_2^2 = \{\supset, \wedge, \vee\}$ и $\vdash_2$ является оператором присоединения следствий классической логики.

Перевод $g : \mathbf{L}_3 \rightarrow \mathcal{L}_3 \oplus \mathbf{L}_{PC}$ можно было бы определить в части, касающейся Σ_2, как $g(\neg_3) = \neg$, $g(\supset_3) = \supset, g(\wedge_3) = \wedge$, $g(\vee_3) = \vee$. Свободное расширение морфизма $g : \Sigma_1 \rightarrow \Sigma_3 \oplus \Sigma_2$ определяется следующими условиями:

- $g(p) = p$ для атомарного p,

- $g(\neg_3 \varphi) = \neg g(\varphi)$ для неатомарной φ,

- $g(\varphi \supset_3 \psi) = g(\varphi) \supset g(\psi)$.

Свободная переводимость $\mathbf{L}_3$ в $\mathbf{L}_{PC}$ есть экспоненциал $\langle^{\Sigma_2}\Sigma_1 \oplus \Sigma_2, \vdash_{(1,2)}\rangle$ и мы определяем

- $\breve{g}(o_1(\varphi, p)), \breve{g}(o_2(\psi, p)), g[\Gamma] \vdash_{3\otimes 2} p$ в случае, если $\breve{g}(o_1(\varphi, p))$, $g[\Gamma] \vdash_{3\otimes 2} p$ или $\breve{g}(o_2(\psi, p))$, $g[\Gamma] \vdash_{3\otimes 2} p$ (для атомарного p),
- $\breve{g}(o_1(\varphi, p)), \breve{g}(o_2(\psi, p)), g[\Gamma] \vdash_{3\otimes 2} g(\neg_3 p)$ если $\breve{g}(o_1(\varphi, p))$, $g[\Gamma] \vdash_{3\otimes 2} g(\neg_3 p)$ или $\breve{g}(o_2(\psi, p))$, $g[\Gamma] \vdash_{3\otimes 2} g(\neg_3 p)$ (для атомарного p),
- $\breve{g}(o_1(\sigma, \neg_3\varphi)), \breve{g}(o_2(\psi, \neg_3\varphi)), g[\Gamma] \vdash_{3\otimes 2} g(\neg_3\varphi)$ тогда и только тогда, когда $\breve{g}(o_1(\sigma, \neg_3\varphi)), \breve{g}(o_2(\psi, \neg_3\varphi))$, $g[\Gamma] \nvdash_{3\otimes 2} g(\varphi)$ (для неатомарной φ),
- $\breve{g}(o_1(\sigma, \varphi \supset_3 \psi))$, $\breve{g}(o_2(\tau, \varphi \supset_3 \psi))$, $g[\Gamma] \vdash_{3\otimes 2} g(\varphi \supset_3 \psi)$ тогда и только тогда, когда $\breve{g}(o_1(\sigma, \varphi \supset_3 \psi))$, $\breve{g}(o_2(\tau, \varphi \supset_3 \psi))$, $g[\Gamma] \nvdash_{3\otimes 2} g(\varphi)$ или $\breve{g}(o_1(\sigma, \varphi \supset_3 \psi))$, $\breve{g}(o_2(\tau, \varphi \supset_3 \psi))$, $g[\Gamma] \vdash_{3\otimes 2} g(\psi)$ (для любых φ и ψ).

Очевидным образом подобные условия дают нам синтаксическую версию семантики возможной переводимости из [9], если мы определим $\Gamma \vdash_1^* A$ тогда и только тогда, когда $g[\Gamma] \vdash_{3\otimes 2} g(B)$ для всех переводов g.

5 Log как дополняющий топос

На основании предыдущего рассмотрения мы можем прийти к выводу, что **Log** является по крайней мере биполной категорией (в качестве терминального объекта мы можем рассматривать логическую систему $\mathcal{L}_1 = \langle\Sigma, \vdash\rangle$, где $\Sigma_1^0 = \{\top\}$ и $\Sigma_1^k = \varnothing$ для $k > 0$, а $\vdash$ является таким, что $\varnothing^{\vdash} = \{\top\}$, в то время как за начальный объект принимается пустая сигнатура). Единственной проблемой является то обстоятельство, что в отличие от **Set** мы получаем не декартову замкнутость (поскольку **Log** не допускает экспоненцирования), но лишь кодекартову замкнутость. Конечно мы можем получить экспоненциал, строя его из тех отношений из конструкции коэкспоненциала, которые являются функциональными отношениями (с соответствующей дуализацией морфизмов). Но в этом случае экспоненциал оказывается частичной конструкцией — ситуация, сразу же отличающаяся от обычного категорного способа рассмотрения.

Тем не менее это еще не окончательный результат, несмотря на то что декартова козамкнутость **Log**, по-видимому, закрывает дорогу для дальнейшего продвижения в нужном нам направлении. На первый взгляд кажется, что нет ни малейшей возможности получить структуру топоса в **Log**, поскольку, согласно определению топоса, последний представляет собой декартово *замкнутую* категорию с классификатором подобъектов.

Но здесь на помощь приходит интересный факт, касающийся классификатора подобъектов: К.Мортенсен в [15] ввел понятие *дополняющего* классификатора как инструмента рассмотрения паранепротиворечивости в теории топосов. Его определение выглядит следующим образом.

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 32. В категории $\mathcal{C}$ *дополняющий классификатор* является $\mathcal{C}$-стрелкой $false : 1 \to \Omega$, где для любой моност, релки $f : a \rightarrowtail b$ имеется одна и только одна $\mathcal{C}$-стрелка $b \to \Omega$, обозначаемая $\bar{\chi}_f$, превращающая следующую диаграмму в амальгамирование в $\mathcal{C}$,

$$\begin{tikzcd} a \arrow[r, "f"] \arrow[d] & b \arrow[d, "\bar{\chi}_f"] \\ 1 \arrow[r, "false"'] & \Omega \end{tikzcd}$$

Мортенсен показал, что дополняющий классификатор в топосе **Set** неотличим (с помощью теоретико-категорных методов) от стандартного классификатора подобъектов, что они изоморфны. Таким образом, в **Set** всегда присутствует паранепротиворечивость ввиду наличия обоих типов классификаторов подобъектов. Более того, справедливо следующее предложение.

УТВЕРЖДЕНИЕ 33. *Дополняющие топосы отвечают паранепротиворечивой логике, основывающейся на брауэровой алгебре, аналогично тому как топосы отвечают интуционистской логике, основывающейся на алгебре Гейтинга.*

Поскольку топосы отвечают интуиционистской логике, отражая структуру алгебры Гейтинга в строении классификатора подобъектов, то в дополняющем топосе дополняющий классификатор отражает соответственно структуру брауэровой алгебры. Отсюда нам требуется как раз дополняющий классификатор, а поскольку **Log** не является декартово замкнутой категорией, то, собственно говоря, присутствие обычного классификатора подобъектов необязательно. Иными словами, **Log** должна быть лишь дополняющим топосом, что подразумевает декартово козамкнутую категорию с дополняющим классификатором. Как следствие нам нужно рассмотреть только диаграмму дополняющего классификатора Мортенсена.

УТВЕРЖДЕНИЕ 34. *Log является дополняющим топосом.*

Доказательство. Определим $\Omega = \langle \Sigma, \vdash \rangle$, где $\Sigma_1^0 = \{\top, \bot\}, \Sigma_1^1 = \{\neg\}, \Sigma_1^2 = \{\Longleftarrow, \wedge, \vee\}$, а $\vdash$ соответствует $\leq$ в брауэровой алгебре (в частности, $\varnothing^{\vdash} = \{\bot\}$). Поскольку $1 = \langle \Sigma, \vdash \rangle$, где $\Sigma_1^0 = \{\top\}$ и $\Sigma_1^k = \varnothing$ для $k > 0$, а $\vdash$ таков, что $\varnothing^{\vdash} = \{\top\}$, то $false(\top) = \bot$. Остальное очевидно. Q.E.D.

Выражаясь более точно, **Log** будет *паранепротиворечивым дополняющим топосом.* Фактически эта глобальная структура накладывается на универсум универсальной логики, если мы в качестве последней подразумеваем общую теорию логических систем. И конечно же, полученная структура не исчерпывает всех возможностей дальнейшего анализа, окончательно закрывая тему исследования.

Литература

[1] *Голдблатт Р.* Топосы. Категорный анализ логики. М.: 1983.

[2] *Расева Е., Сикорский Р.* Математика метаматематики. М.: 1972.

[3] *Armando A.* (ed.). Frontiers of combining systems. Lecture Notes in Computer Science, V. 2309 Berlin, 2002.

[4] *Baader F. and Schulz K. U.* (eds.). Frontiers of combining systems, Applied Logic Series. V. 3. Dordrecht, 1996 (Papers from the First International Workshop (FroCoS'96) held in Munich, March 26-29, 1996)

[5] *Béziau J.-Y., de Freitas R.P., VianaJ.P.* What is Classical Propositional Logic? (A Study in Universal Logic) // Logical Investigations, V. 8, 2001. P. 266-277.

[6] *Béziau J.-Y.* From Consequence Operator to Universal Logic: A Survey of General Abstract Logic // Logica Universalis. *J.-Y. Béziau* (ed.). Basel, 2005. P. 3-18.

[7] *Caleiro C., Gonçalves R.* Equipollent Logical Systems // Logica Universalis. J.-Y. Béziau (ed.). Basel, 2005. P. 99-111.

[8] *Caleiro C., Carnielli W.A., Coniglio M. E., Sernadas A., and Sernadas C.* Fibring non-truth-functional logics: Completeness preservation // Journal of Logic, Language and Information. V. 12 № 2. 2003. P. 183–211.

[9] *Carnielli W.* Possible-Translations Semantics for Paraconsistent Logics // Frontiers of Paraconsistent Logic / D. Batens et al (eds.). Baldock, Herfordshire, 2000. P.149-163.

[10] *Coniglio M.E., Sernadas A., and SernadasC.* Fibring logics with topos semantics // Journal of Logic and Computation. V. 13. № 4. 2003. P. 595–624.

[11] *Font J.M., Jansana R., Pigozzi D.* A Survey of Abstract Algebraic Logic // Studia Logica. Vol. 74, No 1/2, 2003. P. 13-97.

[12] *Gabbay D.* Fibred semantics and the weaving of logics: part 1 // Journal of Symbolic Logic. V. 61. № 4. 1996. P. 1057–1120.

[13] *Gabbay D. and Pirri F.* (eds.). Special issue on combining logics // Studia Logica, V. 59. № 1,2. 1997.

[14] *Kirchner H. and Ringeissen C.* (eds.). Frontiers of combining systems. Lecture Notes in Computer Science. V. 1794. Berlin, 2000.

[15] *Mortensen C.* Inconsistent Mathematics. Dordrecht, 1995.

[16] *Pratt V.R.* Rational Mechanics and Natural Mathematics // Proc. TAPSOFT'95, LNCS V. 915. Aarhus, Denmark, May 1995. P. 108–122.

[17] *Rasga J., Sernadas A., Sernadas C. and Viganò L.* Fibring labelled deduction systems // Journal of Logic and Computation. V. 12. № 3. 2002. P. 443–473.

[18] *Rauszer C.* A Formalization of the Propositional Calculus of H-B-logic // Studia Logica. V. 33. № 1. 1973. P. 23-34.

[19] *de Rijke M. and Blackburn P.* (eds.). Special issue on combining logics // Notre Dame Journal of Formal Logic, V. 37. № 2. 1996.

[20] *Sernadas A., Sernadas C., Caleiro C.* Fibring of Logics as a Categorial Construction // Journal of Logic and Computation. V. 9. № 2. 1999. P. 149–179.

[21] *Sernadas C., Rasga J., and Carnielli W.A.* Modulated fibring and the collapsing problem // Journal of Symbolic Logic. V. 67. № 4. 2002. P. 1541–1569.

[22] *Sernadas C., Viganò L., Rasga J., and Sernadas A.* Truth-values as labels: A general recipe for labelled deduction // Journal of Applied Non-Classical Logics. V. 13. № 3-4. 2003. P. 277–315.

[23] *Wójcicki R.* Theory of Logical Calculi. Synthese Library. Vl. 199. Dordrecht, 1988.

Непрерывная логика. Основные понятия

В.И. Левин

ABSTRACT. We consider the Continuous Logic and its algebras and present the basic laws of quasiboolean algebra of continuous logic. We also discuss the difference between finite-valued logic and continuous logic.

1 Введение

В последние годы было выяснено, что математический аппарат непрерывной логики может быть с успехом применен для количественного исследования многих устройств и систем. В связи с этим в данной статье-обзоре дано общее описание непрерывной логики, ее задач и методов, и определены ее основные операции. Описана алгебра непрерывной логики, перечислены ее основные функции с 1, 2 и 3 переменными. Изложены законы этой логики, отмечено их отличие от законов дискретной двузначной логики. Представлены проблемы перечисления всех непрерывно-логических функций от заданного числа переменных и представления этих функций в стандартной форме. Показано отличие этих форм от соответствующих в двузначной логике. Описаны процедуры минимизации непрерывно-логических функций и их декомпозиции на функции с меньшим числом переменных. Отмечены особенности этих процедур по сравнению с соответствующими в двузначной логике. Даны постановки и методы решения задач анализа и синтеза непрерывно-логических функций. Изложены основы дифференциального и интегрального исчисления для непрерывной логики. Показано наличие у любой непрерывно-логической функции точек, где производная не существует. Описана проблема полноты для непрерывной логики, имеющиеся здесь результаты и их отличие от аналогичных в дискретном случае.

Непрерывная логика (НЛ) вводится как естественное обобщение дискретной логики (ДЛ). При этом большинство законов ДЛ остается в силе и для НЛ. Однако операцию отрицания НЛ нельзя определить так, чтобы она была дополнением, как, например, в двузначной логике, т.е. чтобы выполнялись законы исключенного третьего и противоречия. Поэтому структурно НЛ существенно отличается от двузначной ДЛ. Это и непрерывность переменных приводит к определенным отличиям НЛ от ДЛ в номенклатуре решаемых задач и методике их решения. На сегодня НЛ сложилась как самостоятельная научная дисциплина, характер которой определяется потребностями ее гармоничного развития как математической дисциплины и потребностями ее многочисленных приложений, охватывающих чуть ли не все области человеческой деятельности: математика (аппроксимация функций, геометрия, теория множеств, теория чисел, интервальный анализ); техника (расчет электрических цепей; синтез функциональных генераторов и АЦП, расчет аналоговых и цифровых устройств, моделирование формы деталей; надежность, диагностика и техническое обслуживание); системы (теория систем обслуживания, распознавание образов и анализ сцен, принятие решений, обработка информации, синхронизация); экономика (дискретная оптимизация, теория расписаний, моделирование экономических систем), биология (моделирование нейронных структур), социология (моделирование динамики поведения коллектива); политология (моделирование динамики общества), история (моделирование потоков исторических событий). Во всех вышеперечисленных областях применение НЛ позволило либо впервые получить аналитическое решение задачи, либо прийти к решению, существенно лучшему, чем известные, в отношении обозримости при высокой размерности задачи и/или трудоемкости ее решения.

Основными задачами НЛ являются: 1) перечисление всех функций НЛ с данным числом аргументов; 2) представление функций НЛ в стандартной форме (в т.ч. однозначное представление); 3) выделение элементарных функций НЛ; 4) минимизация и декомпозиция функций НЛ; 5) анализ и синтез функций НЛ; 6) решение уравнений и неравенств НЛ; 7) дифференцирование и интегрирование функций НЛ; 8) установление полноты системы функций НЛ. Задачи 1–4 по постановке (и частично по методам решения) аналогичны соответствующим задачам ДЛ. Задачи 5–8 специфичны для НЛ.

Для получения новых результатов в НЛ используют ряд прямых методов: 1) вычисление таблицы значений логического выражения; 2) эквивалентные преобразования логических выражений; 3) сочленение частных логических выражений в общее; 4) расчленение общего логического выражения на несколько частных. Кроме того, используют метод погружения алгебры НЛ в более общую дистрибутивную структуру, с привлечением методов теории структур.

2 Общее описание непрерывной логики

Пусть $C = [A, B]$ замкнутый интервал с серединой $M = (A + B)/2$. Основные операции НЛ определяются на C в виде

$$(1) \qquad \begin{array}{ll} a \vee b = \max(a, b) & \text{(дизъюнкция)}, \\ a \wedge b = \min(a, b) & \text{(конъюнкция)}, \\ \bar{a} = 2M - a & \text{(отрицание)}. \end{array}$$

Знак $\wedge$ часто не ставится. Реже в качестве базовых выбирают операции включения $a \supset b = (\bar{a} + b) \wedge B$, импликации $a \to b = \bar{a} \vee b$, эквивалентности $(a \equiv b) = (a \vee \bar{b})(\bar{a} \vee b)$, неэквивалентности $(a \not\equiv b) = a\bar{b} \vee \bar{a}b$, Шеффера $a|b = \overline{ab}$, Вебба $a \downarrow b = \overline{a \vee b}$, противоречия $(a \neq a) = a\bar{a}$, тавтологии $(a \equiv a) = a \vee \bar{a}$, запрета $(a \not\Rightarrow b) = a\bar{b}$. Алгебры, образуемые множеством C вместе с теми или иными базовыми операциями на нем, называются алгебрами НЛ. Любая функция вида $C^n \to C$, в форме суперпозиции конечного числа базовых операций данной алгебры НЛ, примененных к аргументам $x_1, ..., x_n \in C$, называется функцией НЛ. Число функций НЛ конечно, хотя множество всех функций вида $C^n \to C$ является бесконечным.

Наиболее разработанная алгебра НЛ – квазибулева алгебра

$$(2) \quad \Delta = (C; \vee, \wedge, \bar{\ }).$$

Любая функция непрерывной логики в алгебре (2) на любом наборе аргументов $a_1, ..., a_n$ принимает значение одного из аргументов или его отрицания. Поэтому задать такую функцию можно таблицей значений, в которой каждому варианту упорядочения значений множества аргументов ставится в соответствие тот аргумент a_i или его отрицание $\overline{a}_i$, значение которого принимает функция. От табличного можно перейти к аналитическому представлению функции, используя метод сочленения. Обратный переход осуществляется методом расчленения.

Число $P(n)$ функций НЛ от n аргументов в квазибулевой алгебре растет с увеличением n весьма быстро: $P(0) = 2, P(1) = 6, P(2) = 84, P(3) = 43918$. Для $n = 0$ эти функции-константы

(3) $y_0 = A, y_1 = B.$

Для $n = 1$ это константы y_0, y_1 и еще 4 функции, существенно зависящие от аргумента x

(4) $y_2 = x, y_3 = \overline{x}, y_4 = x \vee \overline{x}, y_5 = x\overline{x}.$

Для $n = 2$ это 2 константы (3), 8 функций (4), зависящих от одного аргумента (x_1 или x_2), 10 функций, зависящих от двух аргументов

$$
(5)\quad
\begin{aligned}
&y_{10} = x_1 \vee x_2,\ y_{11} = x_1x_2,\ y_{12} = (x_1 \vee \overline{x}_2)(\overline{x}_1 \vee x_2),\\
&y_{13} = x_1\overline{x}_2 \vee \overline{x}_1x_2,\ y_{14} = \overline{x_1x_2},\ y_{15} = \overline{x_1 \vee x_2},\\
&y_{16} = \overline{x}_1 \vee x_2,\ y_{17} = x_1 \vee \overline{x}_2,\ y_{18} = \overline{x}_1x_2,\ y_{19} = x_1\overline{x}_2,
\end{aligned}
$$

и еще 64 функции, зависящие от 2 аргументов, получаемые суперпозицией перечисленных 20 функций, либо составлением таблицы значений функции и последующим переходом к ее аналитическому представлению. Для $n = 3$ функции НЛ включают все упомянутые выше функции, зависящие не более чем от 2 аргументов, и все функции, существенно зависящие от 3 аргументов. Из последних наиболее употребительны дизъюнкция и конъюнкция

$$
(6)\quad
\begin{aligned}
&y = x_1 \vee x_2 \vee x_3 = \max(x_1, x_2, x_3),\\
&y = x_1x_2x_3 = \min(x_1, x_2, x_3),
\end{aligned}
$$

медиана и ее отрицание (инверсия)

$$
(7)\quad
\begin{aligned}
&y = \mathrm{med}(\mathrm{x}_1, \mathrm{x}_2, \mathrm{x}_3) = \mathrm{x}_1\mathrm{x}_2 \vee \mathrm{x}_1\mathrm{x}_3 \vee \mathrm{x}_2\mathrm{x}_3,\\
&y = \overline{\mathrm{med}}(x_1, x_2, x_3) = \overline{x}_1\overline{x}_2 \vee \overline{x}_1\overline{x}_3 \vee \overline{x}_2\overline{x}_3,
\end{aligned}
$$

функции Шеффера и Вебба

$$(8) \quad y = \overline{x_1 x_2 x_3}, y = \overline{x_1 \vee x_2 \vee x_3},$$

элементарные трехместные дизъюнкция и конъюнкция

$$(9) \quad y = x_1 \vee \overline{x}_1 \vee x_2 \vee \overline{x}_2 \vee x_3 \vee \overline{x}_3, y = x_1 \overline{x}_1 x_2 \overline{x}_2 x_3 \overline{x}_3.$$

Остальные функции, существенно зависящие от 3 аргументов, можно получить суперпозицией перечисленных выше функций либо составлением таблицы значений функции и последующим переходом к ее аналитическому представлению. Аналогично строятся множества функции НЛ от большего числа аргументов.

Заметим, что число $P(n)$ функций НЛ от n аргументов растет при увеличении n гораздо быстрее, чем число $Q(n)$ функций двоичной логики. Например, учитывая, что $Q(0) = 2, Q(1) = 4, Q(2) = 16, Q(3) = 256$, получаем

$$\frac{P(n)}{Q(n)} = \begin{cases} 1\,, & n = 0, \\ 1{,}5\,, & n = 1, \\ 5{,}25\,, & n = 2, \\ 171{,}55\,, & n = 3. \end{cases}$$

Поэтому изучать свойства функций НЛ путем их перебора, как это делается в двоичной логике, нельзя. Так что ограничиваются изучением наиболее важных типовых функций НЛ.

Основные операции НЛ впервые рассмотрел Р. Мак-Нотон. Общее описание НЛ и ее математический аппарат разработали С.А. Гинзбург, В.И. Левин, П.Н. Шимбирев. Обзор соответствующих работ приведен в [1, 2, 4, 6, 7, 8, 9, 10, 11, 12].

3 Законы непрерывной логики

НЛ есть непосредственное обобщение ДЛ на случай непрерывного множества-носителя C. Поэтому большинство законов ДЛ сохраняется и в НЛ:

$$(10) \qquad a \vee a = a, aa = a \qquad \text{(тавтология)},$$

$$(11) \qquad a \vee b = b \vee a, ab = ba \quad \text{(переместительный)},$$

(12) $$(a \vee b) \vee c = a \vee (b \vee c), (ab)c = a(bc)$$
(сочетательный),

(13) $$a(b \vee c) = ab \vee ac, a \vee bc = (a \vee b)(a \vee c)$$
(распределительный),

(14) $$\overline{a \vee b} = \overline{a}\overline{b}, \overline{ab} = \overline{a} \vee \overline{b}$$ (де Моргана),

(15) $$a \vee ab = a, a(a \vee b) = a$$ (поглощение),

(16) $$\overline{\overline{a}} = a$$ (двойное отрицание),

(17) $$aA = A, aB = a, a \vee A = a, a \vee B = B$$
(действия с константами),

(18) $$a\overline{a}(b \vee \overline{b}) = a\overline{a}, a\overline{a} \vee (b \vee \overline{b}) = b \vee \overline{b}$$
(Клини).

Однако законы противоречия и исключенного третьего ДЛ здесь не действуют и заменяются на следующие законы

(19) $$a\overline{a} = M - |a - M|, \quad a \vee \overline{a} = M + |a - M|.$$

Так как операции НЛ применяются к непрерывным величинам, естественно их применение совместно с алгебраическими операциями над непрерывными величинами: сложением и умножением.

При комбинировании операций НЛ со сложением и умножением появляются новые законы – распределительный при сочетании дизъюнкции и конъюнкции со сложением и умножением

(20) $$\begin{gathered} a + (b \vee c) = (a + b) \vee (a + c), \\ a + (b \wedge c) = (a + b) \wedge (a + c); \\ a - (b \vee c) = (a - b) \wedge (a - c), \\ a - (b \wedge c) = (a - b) \vee (a - c); \\ a \cdot (b \vee c) = a \cdot b \vee a \cdot c, \quad a \cdot (b \wedge c) = a \cdot b \wedge a \cdot c; \\ -a \cdot (b \vee c) = (-a \cdot b) \wedge (-a \cdot c), \\ -a \cdot (b \wedge c) = (-a \cdot b) \vee (-a \cdot c); \\ \text{где } a, b, c \text{ положительны;} \end{gathered}$$

закон спуска отрицания на слагаемые

(21) $$\overline{a + b} = \overline{a} - b = \overline{b} - a$$

и др. Операции НЛ выражаются через алгебраические операции сложения и умножения при использовании нелинейных операций – единичной функции $I(x) = \begin{cases} 1, x \geqslant 0 \\ 0, x < 0 \end{cases}$ или модуля $|x|$. Так, дизъюнкция и конъюнкция НЛ выражаются в виде

$$(22)\quad a \vee b = 0,5[a + b + |a - b|],\ a \wedge b = 0,5[a + b - |a - b|].$$

Проверка законов (10)–(22) осуществляется перебором всех возможных вариантов упорядочения значений переменных и установлением для каждого варианта равенств левой и правой части.

Возможность выражения операций НЛ через алгебраические операции (см. формулы (1), (22)) означает наличие связей между алгеброй и логикой.

Обобщая ДЛ, сама НЛ есть частный случай дистрибутивной структуры с псевдодополнением (то есть с операцией отрицания, которая не есть дополнение, так как не выполняются законы исключенного третьего и противоречия). Значения непрерывных переменных НЛ, принадлежащих интервалу $[A, B]$, имеют интерпретацию, сходную с ДЛ: граничное значение $x = A$ ($x = B$) считается мерой истинности абсолютно ложного (абсолютно истинного) высказывания, промежуточные значения x, $A < x < B$, считаются мерой истинности любого другого высказывания.

Некоторые основные законы НЛ для частного случая $C = [0, 1]$ указал Р. Мак-Нотон. В общем виде законы НЛ изучали С.А. Гинзбург, В.И. Левин и Е.И. Беркович. Обзор соответствующих результатов содержится в [1, 2, 4, 6, 8, 12].

4 Перечисление и стандартизация непрерывно-логических функций

Наиболее традиционными для логики задачами НЛ являются перечисление всех функций НЛ с данным числом аргументов и представление их в стандартной форме.

Перечисление всех функций НЛ в алгебре (2) требует указать для них соответствующие аналитические выражения. Для этого можно использовать двухэтапную процедуру: 1) перечисление таблиц значений функций (таблицы для всех функций имеют одинаковый порядок следования вариантов упорядочения аргументов $x_1, ..., x_n$ и их отрицаний $\overline{x}_1, ..., \overline{x}_n$, отличаясь распределением значений функций, равных x_i или $\overline{x}_i$, между вариантами); 2) переход от таблиц к соответствующим аналитическим выражениям методом сочленения. Однако такой подход при $n \geqslant 3$ затруднителен. Поэтому на практике ограничиваются определенными классами функций НЛ, которые выделяют по признаку сходства с соответствующими классами функций ДЛ, простоты получения формулы, важности практического применения.

В качестве стандартных форм функции НЛ в алгебре (2) принимают дизъюнктивную и конъюнктивную нормальные формы (ДНФ и КНФ). Они отличаются от аналогичных форм двузначной ДЛ тем, что их элементарные конъюнкции (дизъюнкции) могут вместе с аргументом x_i включать и его отрицание $\overline{x}_i$ (см., например, (9)). Переход от любого аналитического представления функции НЛ к ее ДНФ или КНФ аналогичен соответствующему для функции двузначной ДЛ. Он состоит в случае ДНФ в: 1) спуске отрицаний на более простые выражения согласно законам (14), (16); 2) раскрытии скобок согласно 1-му закону (13), в случае КНФ – в: 1) таком же спуске отрицаний; 2) введении скобок согласно закону (13). Для упрощения получаемого представления функции используют законы (10), (15), (18).

ПРИМЕР 1. Перейдем от функции НЛ, заданной аналитически, к ее ДНФ.

$$
\begin{aligned}
&(x_1x_2 \vee \overline{x}_2x_3)\overline{\overline{x}_1x_4} = (x_1x_2 \vee \overline{x}_2x_3)(x_1 \vee \overline{x}_4) = \\
&= \underline{x_1x_2} \vee x_1\overline{x}_2x_3 \vee \underline{x_1x_2\overline{x}_4} \vee \overline{x}_2x_3\overline{x}_4 = x_1x_2 \vee x_1\overline{x}_2x_3 \vee \overline{x}_2x_3\overline{x}_4.
\end{aligned}
$$

В качестве однозначных стандартных (канонических) форм функций НЛ принимают канонические ДНФ и КНФ. ДНФ однозначно представляет функцию НЛ, если она тупиковая (несократимая) дизъюнкция неразложимых элементарных конъюнкций. В свою очередь, элементарная конъюнкция неразложима в дизъюнкцию конъюнкций, если она фундаментальна, т.е. непротиворечива (не содержит одновременно x_i и $\overline{x}_i$) или противоречива, но содержит все аргументы данной функции, в прямом x_i или инверсном $\overline{x}_i$ виде. Отсюда – алгоритм приведения любой ДНФ функции НЛ к канонической ДНФ: 1) выделить в

ДНФ все фундаментальные конъюнкции; 2) каждую нефундаментальную конъюнкцию k (она противоречива и содержит не все аргументы функций) представить дизъюнкцией фундаментальных конъюнкций, для чего взять ее конъюнкцию с подходящей дизъюнкцией вида $x_j \vee \overline{x}_j$ (что не изменит величины k, содержащей $x_i\overline{x}_i \leqslant M$, ибо $x_j \vee \overline{x}_j \geqslant M$) и раскрыть скобки; 3) из каждой пары сравнимых (в отношении $\leqslant$) конъюнкций ДНФ исключить меньшую. Полученная каноническая ДНФ по смыслу (но не по форме) аналогична совершенной ДНФ булевой функции.

ПРИМЕР 2. Преобразуем функцию НЛ, заданную в ДНФ, к канонической ДНФ:

$$y = x_2x_4 \vee x_1\overline{x}_2x_3\overline{x}_4 \vee x_1x_2\overline{x}_2x_3\overline{x}_3.$$

Здесь первые две конъюнкции – фундаментальные. Третья конъюнкция – нефундаментальная, при умножении на $x_4 \vee \overline{x}_4$ разлагается в $x_1x_2\overline{x}_2x_3\overline{x}_3x_4 \vee$ $\vee x_1x_2\overline{x}_2x_3\overline{x}_3\overline{x}_4$. Полученные две фундаментальные конъюнкции поглощаются первыми двумя фундаментальными конъюнкциями заданной ДНФ функции y. Окончательно каноническая ДНФ функции

$$y = x_2x_4 \vee x_1\overline{x}_2x_3\overline{x}_4.$$

Любая функция непрерывной логики, отличная от фундаментальной конъюнкции, разложима, т.е. класс неразложимых (элементарных) функций НЛ в алгебре (2) состоит из одних фундаментальных конъюнкций.

Задание и перечисление функций НЛ изучали К.М. Кларк, Д. Дюбуа, А. Прад, А. Кандель, В.И. Левин, М. Мукайдоно, П.Н. Шимбирев (см. обзоры [3, 5, 6, 8, 9, 10, 11]). Представление функций НЛ в стандартной форме исследовали Ф.П. Препарата, А. Кандель, Д. Дюбуа, А. Прад, В.И. Левин, П.Н. Шимбирев (см. обзоры [3, 6, 8, 9]).

5 Минимизация и декомпозиция непрерывно-логических функций

Минимизация функций НЛ преследует ту же цель, что и минимизация функций ДЛ — приведение функций к форме с минимальным числом вхождений переменных.

Минимизация функций НЛ в алгебре (2) разработана лишь для функций, представленных в ДНФ. Ее задача – найти ДНФ с минимальным числом вхождений всех букв $x_i, \overline{x}_i$. Процедура минимизации аналогична соответствующей для булевых функций: 1) отыскание всех фундаментальных конъюнкций функции НЛ f (они играют роль элементарных конъюнкций СДНФ булевой функции) и представление f в канонической тупиковой форме; 2) отыскание всех простых импликант функции (как обычно, импликантой функции f считаем элементарную конъюнкцию k, такую, что $k \leqslant f$; если k не поглощается другими импликантами, она называется простой); 3) нахождение минимального покрытия множества фундаментальных конъюнкций множеством простых импликант (например, с помощью импликантных таблиц). Содержание шагов 1, 2 специфично для функций НЛ. О шаге 1 сказано выше. О шаге 2. В его основе — понятие консенсуса элементарных конъюнкций k_i: если $k_1 = x_i a,\ \ k_2 = \overline{x}_i b$, где a, b — конъюнкции других букв, то консенсус k_1 и k_2 — это множество таких противоречивых конъюнкций: 1) ab, (если она противоречива); 2) конъюнкции $x_i \overline{x}_i ab,\ \ i = \overline{1, n}$ (если ab непротиворечива). Если k_1, k_2 не представлены в указанном виде ни при каком i, консенсус $= 0$.

ПРИМЕР 3. Для элементарных конъюнкций $k_1 = x_1 \overline{x}_2 x_3,\ \ k_2 = x_2 \overline{x}_3$ консенсус $\{x_1 x_2 \overline{x}_2, x_1 x_3 \overline{x}_3\}$. Для элементарных конъюнкций $k_1 = x_1 x_2 x_3,\ \ k_2 = x_2 \overline{x}_3$ консенсус $\{x_1 x_2 x_3 \overline{x}_3, x_1 x_2 \overline{x}_2, x_1 \overline{x}_1 x_2\}$.

Отыскание всех простых импликант функции НЛ f, представленной в тупиковой ДНФ $f = \bigvee\limits_i k_i$, выполняется по такому алгоритму: 1) для некоторой пары (k_i, k_j) образуется консенсус; 2) к дизъюнкции $\bigvee\limits_i k_i$ добавляются все конъюнкции, полученные на шаге 1; 3) удаляются все конъюнкции k_a, входящие в другие конъюнкции k_b (т.е. $k_a \leqslant k_b$). Шаги 1–3 повторяются для новых пар (k_i, k_j) до тех пор, пока выражение функции f не перестанет изменяться. Окончательное выражение $f = \bigvee\limits_i \tilde{k}_i$ в качестве конъюнкций $\tilde{k}_i$ будет содержать все простые импликанты функции f.

В связи с быстрым ростом числа функций НЛ при увеличении числа их аргументов и сложностью их минимизации важное значение имеет задача декомпозиции этих функций.

Декомпозицией функции НЛ $f(x), x = (x_1, ..., x_n)$ называется представление f в виде композиции нескольких функций НЛ с меньшим числом аргументов

$$(23)\quad f(x) = F[f_m(x^m), ..., f_1(x^1), x^i], x^i \subset x, i = \overline{0, m}.$$

Если множества $x^i, i = \overline{0, m}$ не пересекаются, декомпозиция называется разделительной, в противном случае — неразделительной. Представление (23) с $m = 1$ называется простой декомпозицией. На сегодня известен лишь алгоритм поиска простой декомпозиции функции НЛ в алгебре (2).

Вопросы минимизации и декомпозиции функций непрерывной логики исследовали А. Кандель, Д. Дюбуа, А. Прад, П.Н. Шимбирев (см. обзоры [3, 8, 9, 10]).

6 Анализ и синтез непрерывно-логических функций

Анализ и синтез функций НЛ отличаются от аналогичных задач в ДЛ.

Пусть D_x — область значений вектора аргументов $x = (x_1, ..., x_n)$, D_f — область значений функции НЛ $f(x)$ и имеется взаимно-однозначное соответствие

$$(24)\quad (x \in D_x) \Leftrightarrow (f(x) \in D_f).$$

Анализом функции f называется нахождение в соответствии с (24) области D_x по заданным области D_f и функции $f(x)$. Синтезом функции $f(x)$ называется построение по заданным областям D_x и D_f такой функции НЛ f, которая реализует соответствие (24). Основные методы анализа разработаны для частных случаев, когда f — многоместная дизъюнкция или конъюнкция, а D_f — полуинтервал или интервал. Они основаны на следующих эквивалентностях

$$(25)\quad \begin{aligned}
&\left(\bigvee_{i=1}^{n} x_i \geqslant a\right) \Leftrightarrow (x_1 \geqslant a \text{ или ... или } x_n \geqslant a);\\
&\left(\bigvee_{i=1}^{n} x_i \leqslant b\right) \Leftrightarrow (x_1 \leqslant b,\ ...,\ x_n \leqslant b);\\
&\left(\bigwedge_{i=1}^{n} x_i \geqslant a\right) \Leftrightarrow (x_1 \geqslant a,\ ...,\ x_n \geqslant a);\\
&\left(\bigwedge_{i=1}^{n} x_i \leqslant b\right) \Leftrightarrow (x_1 \leqslant b \text{ или ... или } x_n \leq b).
\end{aligned}$$

В общем случае при произвольной функции НЛ f и ее области D_f применяют формальные методы, разбивая D_f на подобласти — полуинтервалы, решая для каждой соответствующие неравенства (см. §7) и объединяя результаты. Иногда анализ функции $f(x)$ понимают как отыскание по заданным f и областям $D_{x_1}, ..., D_{x_n}$ для аргументов $x_1, ..., x_n$ (составляющим в совокупности область D_x) соответствующей области D_f (24). Эта постановка обратна рассматриваемой выше, а ее решение проще. Оно основано на эквивалентностях

$$(26) \qquad \begin{aligned} &(a \leqslant x_1 \leqslant b,\, c \leqslant x_2 \leqslant d) \Leftrightarrow \\ &(a \vee c \leqslant x_1 \vee x_2 \leqslant b \vee d,\, ac \leqslant x_1 x_2 \leqslant bd), \\ &(a \leqslant x \leqslant b) \Leftrightarrow (2M - b \leqslant \overline{x} \leqslant 2M - a). \end{aligned}$$

Задача синтеза функции НЛ в общем случае не имеет единственного решения, а алгоритм ее точного решения неизвестен. Возможный путь отыскания решения таков: 1) отбросить требование $x \leqslant D_x$; 2) выбрать какую-либо типовую функцию $f(x)$; 3) проанализировать $f(x)$ по заданным условиям $f \in D_f$, найти соответствующее условие для $x : x \in D'_x$; 4) если $D_x \subseteq D'_x$, то $f(x)$ — решение задачи. В противном случае — переход к следующей функции $f(x)$ и т.д. Такой перебор при большом n невозможен, и тогда отказываются от требования $x \in D_x$, получая задачу синтеза: построить по заданной области D_f функцию $f(x)$, такую, что $f(x) \in D_f$. Но любая (кроме констант) функция НЛ $f(x)$ при подходящем x может принимать любое значение в C. В итоге получаем обычную задачу анализа: найти в соответствии с (24) область D_x по заданной области D_f и выбранной функции f.

Проблемами анализа и синтеза непрерывно-логических функций занимались А. Кандель [3], А. Коффман [5], П.И. Шимбирев [9], В.И. Левин [13, 15].

7 Решение уравнений и неравенств непрерывной логики

Уравнения и неравенства НЛ по смыслу аналогичны уравнениям и неравенствам ДЛ. Однако методы их решения особые, в связи с тем, что НЛ оперирует непрерывными множествами.

Уравнением (неравенством) НЛ называется уравнение (неравенство):

(27) $f(a,x) \leqq F(a,x)$,

где f и F — заданные различные функции НЛ, $a = (a_1, ..., a_k)$ — вектор параметров, $x = (x_1, ..., x_n)$ — вектор неизвестных. Частным решением уравнения (неравенства) (27) называется любой вектор x, для которого справедливо равенство (неравенство) (27), а общим решением — совокупность всех частных решений. Уравнения и неравенства НЛ классифицируются по числу неизвестных n и по сложности функций НЛ левой и правой частей, представленных в стандартной тупиковой ДНФ. Полное уравнение (неравенство) с 1 неизвестным в стандартной форме

(28) $ax \vee a'\overline{x} \vee bx\overline{x} \vee c \leqq dx \vee d'\overline{x} \vee lx\overline{x} \vee e.$

Наибольшее число неизвестных и их отрицаний в одной элементарной конъюнкции стандартизированного уравнения (неравенства) называется его порядком I. Для (28) $I = 2$. Уравнения (неравенства) с $I = 1$ называются линейными, а с $I \geqslant 2$ - нелинейными. Общий вид линейного уравнения (неравенства) с n неизвестными в стандартной форме

(29) $\left(\bigvee_{i=1}^{n} a_i x_i\right) \vee \left(\bigvee_{i=1}^{n} a_i' \overline{x}_i\right) \vee c \leqq \left(\bigvee_{i=1}^{n} d_i x_i\right) \vee \left(\bigvee_{i=1}^{n} d_i' \overline{x}_i\right) \vee e.$

Уравнения (неравенства) НЛ делятся на содержащие и не содержащие отрицание неизвестных. Основным методом решения уравнений (неравенств) НЛ является последовательное расчленение их правых и левых частей, позволяющее заменить исходное уравнение (неравенство) эквивалентным объединением систем более простых уравнений и неравенств.

ПРИМЕР 4. Рассмотрим уравнение (неравенство) вида (27), в котором последняя операция в левой части — дизъюнкция НЛ

$$f_1(a,x) \vee f_2(a,x) \leqq F(a,x).$$

Используя определение дизъюнкции НЛ, это уравнение (неравенство) можно расчленить, представив в виде эквивалентного объединения двух систем уравнений-неравенств

$$\left\{\begin{array}{l} f_1(a,x) \geqslant f_2(a,x) \\ f_1(a,x) \leqq F(a,x) \end{array}\right\} \cup \left\{\begin{array}{l} f_1(a,x) < f_2(a,x) \\ f_2(a,x) \leqq F(a,x) \end{array}\right\}.$$

Здесь каждое полученное уравнение (неравенство) проще исходного, так как в одной части содержит меньше операций. Процесс упрощения можно продолжить расчленением правой части заданного уравнения (неравенства) и т.д. Этот процесс продолжается до получения нерасчленяемых уравнений и неравенств, дающих в совокупности решение заданного уравнения (неравенства).

Случай, когда последняя операция в левой или правой части заданного уравнения (неравенства) есть конъюнкция НЛ, рассматривается аналогично.

Теорию и методы решения уравнений и неравенств НЛ разработал В.И. Левин. Наиболее полные сведения по этому вопросу содержатся в [2]. Обзорные сведения можно также найти в [4–6, 8].

8 Дифференцирование и интегрирование непрерывно-логических функций

Как известно, функции ДЛ зависят от дискретных аргументов и потому не могут дифференцироваться и интегрироваться.

Функции НЛ зависят от непрерывных аргументов и потому могут дифференцироваться и интегрироваться. Трудность дифференцирования функций НЛ в том, что они всегда содержат точки излома, где производная не существует. Назовем функцию НЛ, образованную суперпозицией операций $\vee$ и $\wedge$ над аргументами x_i (и их отрицаниями), функцией 1-го рода (2-го рода). Точка $x = (x_1, ..., x_n)$ называется полурегулярной у функции 1-го рода, если она имеет ε-окрестность с постоянной упорядоченностью $x_1, ..., x_n$. Точка $x = (x_1, \overline{x}_1, ..., x_n, \overline{x}_n)$ называется регулярной у функции 2-го рода, если она имеет ε-окрестность с постоянной упорядоченностью $x_1, \overline{x}_1, ..., x_n \overline{x}_n$. Для полурегулярности точки x (регулярности точки x) необходимо и достаточно, чтобы ее координаты были строго упорядочены по величине. Справедливы следующие теоремы: 1) Любая функция НЛ 1-го рода имеет в каждой полурегулярной точке единственную производную по любому аргументу со значениями из множества

$\{0,\ 1\}$; 2) любая функция НЛ 2-го рода имеет в каждой регулярной точке единственную производную по любому аргументу со значениями из множества $\{1,\ -1,\ 0\}$; 3) любая функция НЛ f в каждой точке существования ее производных $\partial f/\partial x_i, i = \overline{1,n}$, имеет не более 1 производной, отличной от 0. Основным методом дифференцирования функций НЛ является их последовательное расчленение с получением совокупности более простых выражений, справедливых в соответствующих подобластях, и их дифференцированием. При необходимости используются также общие правила дифференциального исчисления (производная суммы, произведения и т.д.). Несколько примеров производных от функций НЛ:

$$\begin{gathered} x'_x = 1,\ (\overline{x})'_x = -1,\ (x \vee \overline{x})'_x = 1(x - M) - 1(M - x), \\ (x\overline{x})'_x = 1(M - x) - 1(x - M),\ x \neq M; \\ (x_1 \vee x_2)'_{x_1} = 1(x_1 - x_2),\ (x_1 x_2)'_{x_1} = 1(x_2 - x_1),\ x_1 \neq x_2. \end{gathered} \tag{30}$$

Здесь $1(x)$ — единичная функция. Условие $x \neq M$ исключает нерегулярную точку $x = M$, в которой третья и четвертая из указанных производных не существуют. Дифференциальное исчисление в НЛ служит источником новых тождеств (законов). Они появляются, в частности, при дифференцировании законов алгебры НЛ и могут рассматриваться как дифференциально-разностные уравнения, определяющие различные функции НЛ. Например,

$$(x_1 \vee x_2)'_{x_1} + (x_1 x_2)'_{x_1} = 1, \quad (x_1 \vee x_2)'_{x_1} \cdot (x_1 x_2)'_{x_1} = 0. \tag{31}$$

Система из двух дифференциальных уравнений (31) определяет две функции НЛ — дизъюнкцию и конъюнкцию, которые являются решениями этой системы.

При дифференцировании функций НЛ с большим числом аргументов целесообразно приведение этих функций к стандартным формам, в которых дифференцируемая переменная выделена. От такой формы легко взять производную. Примеры выделенных форм в классе ДНФ:

$$ax \vee d,\ b\overline{x} \vee d. \tag{32}$$

Их производные

$$(33)\quad \begin{aligned} &(ax \vee d)'_x = 1(ax - d) \cdot 1(a - x), \quad ax \neq d, \quad x \neq a; \\ &(b\overline{x} \vee d)'_x = 1(bx - d) \cdot 1(\overline{x} - b), \quad b\overline{x} \neq d, \quad \overline{x} \neq b. \end{aligned}$$

Для функций НЛ можно определить также производные высших порядков (2-го, 3-го и т.д.). При этом любая функция 1-го рода в каждой полурегулярной точке и любая функция 2-го рода в каждой регулярной точке имеют производные высших порядков и все они равны 0.

Функции НЛ, равно как и функции непрерывных переменных, можно интегрировать. Для этого подынтегральную функцию последовательно расчленяют, получая совокупность более простых выражений, справедливых в своих подобластях, где их интегрируют.

В случае необходимости используются также обычные правила интегрирования (интеграл от суммы, разбиение интервала интегрирования и т.д.). Получаемые интегралы в силу непрерывности функций НЛ всегда существуют.

Дифференциальное и интегральное исчисление для функций НЛ разработали и исследовали Е.И. Беркович и В.И. Левин. Обзор их работ приведен в [10, 13, 15].

9 Проблема полноты в непрерывной логике

В НЛ, как и в ДЛ, существует проблема полноты. Система функций НЛ $\{f_1, ..., f_m\}$ называется полной (базисом) в классе R, если любую функцию из R можно представить суперпозицией функций $f_1, ..., f_m$. В отличие от ДЛ, где R задан, а ищутся базисы, в НЛ обычно задан базис, а отыскивается класс R. Наиболее известные результаты здесь таковы. 1) Система функций $\{\vee, \wedge\}$ есть базис для класса R_1 тех функций вида $C^n \to C$, которые принимают значение одного из аргументов; 2) Система функций $\{\vee, \wedge, \overline{\ }\}$ есть базис для класса R_2 тех функций вида $C^n \to C$, которые принимают значение одного из аргументов или его отрицания; 3) Системы $\{\overline{x_1 x_2}\}$ и $\{\overline{x_1 \vee x_2}\}$ являются базисами для класса функций R_1; 4) Системы $\{\overline{x_1 x_2}, \overline{\ }\}$ и $\{\overline{x_1 \vee x_2}, \overline{\ }\}$ являются базисами для класса функций R_2; 5) Система функций $\{\vee, \wedge, \supset\}$ есть базис для класса R_3 тех функций вида $C^n \to C$, которые представимы в виде

(34) $y = \left[A \vee \left(b_0 + \sum_{i=1}^{n} b_i x_i\right)\right] \wedge B$, где $b_0, ..., b_n$ – целые числа.

Классы функций НЛ R_1, R_2, R_3 являются различными конечными подмножествами бесконечного множества всех функций НЛ. Математически эти классы достаточно узкие. Однако практически они весьма важны, так как именно их элементарные операции НЛ (дизъюнкция, конъюнкция и др.) адекватны процессам, происходящим во многих реально существующих системах. Эта адекватность, вместе с полнотой этих операций НЛ, лежит в основе многочисленных применений НЛ к изучению математических, технических, экономических, социальных и других объектов.

Различные вопросы полноты систем функций НЛ изучали Р. Мак-Нотон, Ф.П. Препарата, В.И. Левин. Обзор соответствующих результатов приведен в [5, 6, 8, 12].

Литература

[1] *Гинзбург С.А.* Математическая непрерывная логика и изображение функций. М.: Энергия, 1968.

[2] *Левин В.И.* Введение в динамическую теорию конечных автоматов. Рига: Зинатне, 1975.

[3] *Kandel A., Lee S.C.* Fuzzy switching and automata. Theory and application. N.-Y.: Grain, Russak and Co, 1979.

[4] *Левин В.И.* Динамика логических устройств и систем. М.: Энергия, 1980.

[5] *Коффман А.* Введение в теорию нечетких множеств. М.: Радио и связь, 1982.

[6] *Левин В.И.* Бесконечнозначная логика в задачах кибернетики. М.: Радио и связь, 1982.

[7] *Левин В.И.* Логическая теория надежности сложных систем. М.: Энергоатомиздат, 1985.

[8] *Левин В.И.* Структурно-логические методы исследования сложных систем с применением ЭВМ. М.: Наука, 1987.

[9] *Шимбирев П.Н.* Гибридные непрерывно-логические устройства. М.: Энергоатомиздат, 1990.

[10] *Волгин Л.И., Левин В.И.* Непрерывная логика. Теория и применения. Таллинн: АН Эстонии. 1990.

[11] Прикладные нечеткие системы // Под ред. Г. Тэрано, К. Асаи и М. Сугэно. М.: Мир, 1993.

[12] *McNaughton R.* A theorem about infinite-valued sentential logic // J. Symb. Logic. 1951. Vol. 16. No 1. P. 1–13.

[13] *Левин В.И.* Непрерывная логика. Ее обобщения и применения. I, II. // Автоматика и телемеханика. 1990. No 8. С. 3–22; No 9. С. 3–26.

[14] *Levin V.I.* Continuous Logic. I. Basic Concepts; II. Main Generalizations // Kybernetes. The International Journal of Systems and Cybernetics. 2000. Vol. 29. No 9. P. 1234–1249; No 10. – P. 1250–1263.

[15] *Левин В.И.* Методы непрерывной логики в задачах управления // Автоматика и телемеханика. 2003. No 2. С. 28–51.

Логика знания и родственных ему понятий[1]

Е.Е. Ледников

abstract. In the paper the logic of knowledge and related notions (belief, conviction, doubt) are proposed. Such logic (L_{ep}-logic) is formulated in the form of analytical tableaux and in axiomatic form. L_{ep}-logic preserves intuitive properties of notions under discussion.

Углубленный логический анализ процесса познания требует привлечения не только понятий знания и мнения, трактуемых как модальные понятия, но также понятий убежденности, веры, сомнения. У этих понятий имеются общие черты со знанием и мнением, но есть и важные отличия. Так, рассмотрение И. Кантом приведенных понятий как степеней знания привело его к заключению, что мнение — это «сознательное признание чего-либо истинным, недостаточное *как* с субъективной, *так* и с объективной стороны» [1]. И далее он продолжает: «Если признание истинности суждения имеет достаточное основание с субъективной стороны и в то же время считается объективно недостаточным, то оно называется *верой*. Наконец, и субъективно, и объективно достаточное признание истинности суждения есть *знание*. Субъективная достаточность называется убеждением (для меня самого)» [1].

Приведенные высказывания И. Канта порождают ряд вопросов, в частности, касающихся субъективной и объективной достаточности. Разумно предположить, что субъективная достаточность — это характерный для каждого субъекта познания свой стандарт обоснованности суждения, а объективная достаточность — стандарт, разделяемый научным сообществом в целом. Тогда возникает следующий ряд понятий, упорядоченных по возрастанию степени достаточности: сомнение–мнение–

[1]Работа поддержана РГНФ. Грант № 04-03-00144а.

вера(убеждение)–знание. Очевидно, трудно отличить веру от убеждения, особенно если речь идет о нерелигиозной вере ученого. Поэтому понятия веры и убеждения (убежденности) будем считать синонимами, по крайней мере, при логическом анализе знания. Что же касается сомнения, то, очевидно, оно означает попытку опровергнуть субъективную или же объективную достаточность суждения, или ту и другую одновременно.

Как может выглядеть логика перечисленных понятий? Первую (и, увы, пока единственную) версию подобной логики можно найти в работе [2]. Мы намерены предложить собственный вариант пропозициональной логики знания, мнения, веры, сомнения, который, как нам кажется, больше соответствует интуитивным представлениям о логических свойствах перечисленных понятий.

Соотношение знания и мнения нами уже было исследовано в ряде работ, например, в [3, 4], где понятия личностного знания и мнения истолковывались как модальные операторы. Так же поступим и с остальными двумя понятиями. Обозначим через K_φ, B_φ, C_φ, D_φ личностные модальные операторы «субъект φ знает, что...», «субъект φ полагает, что...», «субъект φ верит (убежден в том), что...», «субъект φ сомневается в том, что...» соответственно. Так что если A — формула классической логики высказываний, φ — индивидный символ для обозначения субъекта знания, мнения, убежденности или сомнения, то $K_\varphi A$, $C_\varphi A$, $B_\varphi A$, $D_\varphi A$ — формулы рассматриваемой логики[2].

Аналитико-табличная формулировка интересующей нас логики (обозначим ее как L_{ep} -логику) может быть получена в духе идей М. Фиттинга [6] с помощью следующих правил редукции, добавленных к правилам классической пропозициональной логики (α-правилам и β-правилам):

$[(K)\nu/\nu_0]\frac{K_\varphi A}{A}$ –правило удаления для сильной эпистемической модальности;

$[(C)\nu/\nu_0]$ –правило удаления для сильной модальности убежденности ($C_\varphi A$) отсутствует;

[2] В целом вопрос о возможной суперпозиции и итерации перечисленных операторов в формулах логики знания мы в этой работе рассматривать не будем — это дело дальнейших исследований. Здесь же предлагается минимальная логика знания и родственных ему понятий, в которой допускается только итерация в отношении оператора K_φ.

$[(B)\nu/\nu_0]$ – правило удаления для сильной доксатической модальности $(B_\varphi A)$ отсутствует;

$[(D)\nu/\nu_0]$ – правило удаления для сильной модальности сомнения $(D_\varphi A)$ отсутствует.

А вот как будут выглядеть правила удаления соответствующих слабых модальностей:

$[(K)\pi/\pi_0]\frac{\sim K_\varphi A}{\sim A}$ (но сначала из столбца вычеркиваются все формулы, кроме $(K)\nu$-формул);

$[(C)\pi/\pi_0]\frac{\sim C_\varphi A}{\sim A}$ (но сначала из столбца вычеркиваются все формулы, кроме $(K)\nu$-формул и $(C)\nu$-формул, а $(C)\nu$-формулы заменяют $(C)\nu_0$-формулами);

$[(B)\pi/\pi_0]\frac{\sim B_\varphi A}{\sim A}$ (но сначала из столбца вычеркиваются все формулы, кроме $(K)\nu$-формул, $(C)\nu$-формул и $(B)\nu$-формул, а $(C)\nu$-формулы и $(B)\nu$-формулы заменяют $(C)\nu_0$-формулами и $(B)\nu_0$-формулами соответственно;

$[(D)\pi/\pi_0]$ – правило удаления для слабой модальности сомнения $(\sim D_\varphi A)$ отсутствует.

Столбец таблицы является замкнутым, если он содержит пару формул $(A, \sim A)$, либо $(K_\varphi A, D_\varphi A)$, либо $(C_\varphi A, D_\varphi A)$.

Воспользовавшись методом М. Фиттинга [6, с. 616-618], легко доказать теорему о существовании модели для данной формулировки L_{ep} -логики. Из этой теоремы следует непротиворечивость и полнота предложенной формулировки L_{ep} -логики.

При такой формулировке L_{ep} -логики в ней оказываются доказуемыми следующие формулы: 1) $K_\varphi A \supset A$ (если субъект φ знает, что A, то A — истинно); 2) $K_\varphi A \supset K_\varphi K_\varphi A$ (если субъект φ знает, что A, то он знает, что он знает, что A); 3) $K_\varphi A \supset C_\varphi A$ (если субъект φ знает, что A, то он убежден в том, что A), 4) $K_\varphi A \supset B_\varphi A$ (если субъект φ знает, что A, то он полагает, что A); 5) $C_\varphi A \supset B_\varphi A$ (если субъект φ убежден в истинности A, то он полагает, что A); 6) $K_\varphi A \supset\sim D_\varphi A$ (если субъект φ знает, что A, то неверно, что он сомневается, что A); 7) $D_\varphi A \supset\sim K_\varphi A$ (если субъект φ сомневается в истинности A, то неверно, что он знает, что A); 8) $C_\varphi A \supset\sim D_\varphi A$ (если субъект φ убежден в истинности A, то неверно, что он сомневается в истинности A);

9) $D_\varphi A \supset\sim C_\varphi A$ (если субъект φ сомневается в истинности A, то неверно, что он убежден в истинности A).

Если же есть потребность сформулировать L_{ep} -логику в аксиоматической форме, то, наример, к аксиомным схемам А1–А3 из [5] можно присоединить в качестве дополнительных аксиомных схем формулы (1)–(9), а в качестве единственного правила вывода взять правило *modus ponens*.

Литература

[1] *Кант И.* Критика чистого разума. М.: Мысль, 1994. С. 481.

[2] *Костюк В.Н.* Элементы модальной логики. Киев: «Наукова Думка», 1978. С. 129-133.

[3] *Ледников Е.Е.* О семантике знания и мнения // Логико-философские штудии-3. Санкт-Петербург: Издательство С.-Петербургского университета, 2005. С. 457-460.

[4] *Ледников Е.Е.* Аналитические таблицы для логики знания и мнения // Современная логика: проблемы теории, истории и применения в науке. Санкт-Петербург, 2006. С. 61-62.

[5] *Мендельсон Э.* Введение в математическую логику. М.: Наука, 1971. С. 38.

[6] *Fitting Melvin.* Model existence theorems for modal and intuitionistic logics // The journal of symbolic logic. V. 36, n. 4, Dec., 1973. P. 613-627.

Модификации семантики Фреге и семантики Данна для сентенциональных логик

С.А. Павлов

ABSTRACT. We propose some modifications of Frege's and Dunn's semantics by eliminating the denotate falsehood from semantic contexts and using only truth and semantic and syntactical negations for the construction of semantics. A class of T-logics as well as two-, three- and four-valued interpretations determined by this approach, is formulated semantically with the only denotate truth.

В данной работе предлагаются модификации семантики Фреге и семантики Данна, состоящие в изменении семантического статуса денотата ложь и элиминации термина «ложь» из семантических контекстов.

Пусть имеется язык классической сентенциональной логики L с отрицанием '$\sim$' и импликацией $\rightarrow$. Сентенциальные переменные p, q. Правила построения формул стандарные. Пусть A, $\sim A$, B, $\sim B$ есть предложения (формулы) этого языка.

Как известно, Фреге предложил рассматривать предложения и высказывания как имена, денотатами (bedeutung, истинностными значениями) которых являются абстрактные предметы истина и ложь [3]. Согласно учению Фреге об истинности и ложности все истинные предложения обозначают истинностное значение истину, а все ложные предложения — истинностное значение ложь. Также принимается принцип бивалентности, согласно которому любые предложения языка классической логики либо истинны, либо ложны. Из этих положений следует ряд семантических утверждений.

В классическом случае имеют место следующие эквивалентности:

'A' обозначает истину е.т.е. '$\sim A$' не обозначает истину,

'A' обозначает истину е.т.е. '$\sim A$' обозначает ложь,
'A' обозначает истину е.т.е. 'A' не обозначает ложь.

И также
'$\sim B$' обозначает истину е.т.е. 'B' не обозначает истину,
'$\sim B$' обозначает истину е.т.е. '$\sim B$' не обозначает ложь,
'$\sim B$' обозначает истину е.т.е. 'B' обозначает ложь.

Принцип бивалентности, в свою очередь, эквивалентен следующим дилеммам:
либо 'A' обозначает истину, либо 'A' обозначает ложь;
либо 'A' обозначает истину, либо '$\sim A$' обозначает истину;
либо 'A' обозначает истину, либо 'A' не обозначает истину.

Только некоторые из этих семантических утверждений используются в семантических правилах, а большая часть этих тривиальных утверждений обычно не рассматривается. Если посмотреть на них внимательно, то можно увидеть, что некоторые из них можно считать информационно избыточными. В частности, семантические утверждения, в которых встречается термин «ложь», можно заменить утверждениями, в которых этот термин не фигурирует, согласно следующим эквивалентостям:
'$\sim A$' обозначает ложь е.т.е. 'A' обозначает истину,
'B' обозначает ложь е.т.е. '$\sim B$' обозначает истину.

Другая же пара эквивалентностей:
'$\sim A$' обозначает ложь е.т.е. '$\sim A$' не обозначает истину,
'B' обозначает ложь е.т.е. 'B' не обозначает истину —
наводит на идею, что тезис Фреге, приведенный выше, может быть модифицирован следующим образом: все истинные предложения обозначают истину, а все ложные (то есть не истинные) предложения не обозначают истину.

Говоря другими словами, нет необходимости в допущении существования такого абстрактного предмета, как ложь [1], поэтому далее будем исходить из того, что истина существует, а ложь не существует (в качестве денотата).

С учетом того, что семантическое утверждение «'A' не обозначает истину» тождественно утверждению «неверно, что 'A' обозначает истину», все семантические утверждения можно привести к единообразному виду: «'A' обозначает истину» и отрицанию подобных семантических утверждений, имеющих вид «неверно, что 'A' обозначает истину».

В соответствии с предложенной модификацией все вышеприведенные семантические утверждения вытекают для классического случая из дилеммы: либо предложение 'A' обозначает истину, либо предложение '$\sim A$' обозначает истину, которую назовем дилеммой истины.

Следовательно, на онтологическом уровне имеем только один денотат истина, но на семантическом уровне имеем две оценки предложений, основанные на том, что эти предложения могут либо обозначать, либо не обозначать истину. То есть можно говорить о нарушении симметрии истинности и ложности на онтологическом уровне.

Прежде чем перейти к другим интерпретациям, которых для классической логики имеется немало (среди них выделяют главную), желательно в дальнейшем различать семантические отношения «обозначать» (to denote) и «принимать значение» (to have values), то есть различать семантику в обычном смысле и абстрактные математические интерпретации, которые, подчеркнем, предложенная нефункциональная модификация семантики Фреге не затрагивает.

В теории имен Фреге рассматриваются как собственные (единичные) имена, так и пустые имена. Следствием рассматриваемой модификации семантики Фреге является то, что истинные предложения остаются единичными именами, а ложные предложения рассматриваются как пустые имена. Это позволяет построить еще одну интерпретацию языка логики. Сопоставим истинным предложениям одноэлементные множества, единственным элементом которых будет денотат истина, а ложным предложениям (которые не обозначают истину) — пустое множество. При этом конъюнкции двух предложений будет соответствовать множество, являющееся пересечением множеств, соответствующих этим предложениям, а дизъюнкции двух предложений будет соответствовать объединение. В результате получаем булеву алгебру.

Интерпретация языка сентенциональной логики, основанная на идеях Данна, состоит в отождествлении подмножеств двухэлементного множества $\{\text{истина}, \text{ложь}\}$, которое он в [4] записывает как $\{1, 0\}$, с истинностными значениями T, F, B, N:

$T = \{1\}$, $F = \{0\}$, $B = \{1, 0\}$, $N = \{\}$.

Для случая классической логики модифицируем семантику Данна следующим образом. В качестве исходного множества, подмножества которого будут отождествляться с истинностными значениями, вместо двухэлементного возьмем одноэлементное множество {истина}. Тогда два традиционных истинностных значения, которые мы будем символизировать здесь как *И*, *Л*, будут отождествляться с подмножествами множества {истина} следующим образом:

И = {истина}, *Л* = {}.

В этом случае содержательно смысл этих значений можно передать словами «истина» и «пустота» («пустое множество»). Отметим также, что содержательный смысл значений F, N и *Л* различен, так как они фигурируют в разных семантических контекстах.

Перейдем к рассмотрению неклассического случая, для которого принцип бивалентности нарушается. Предложению ‘A’ поставим в соответствие упорядоченную пару предложений $\langle A, \sim A\rangle$, каждое из которых независимо одно от другого обозначает либо не обозначает истину. Отметим, что у нас есть два разных отрицания: одно (синтаксическое) принадлежит языку логики, другое (семантическое) метаязыку семантики. Тем самым для каждой пары предложений имеем четыре возможных варианта денотации, выражаемых в тетралемме истины: (1) либо ‘A’ обозначает истину и неверно, что ‘$\sim A$’ обозначает истину, (2) либо неверно, что ‘A’ обозначает истину, и ‘$\sim A$’ обозначает истину, (3) либо ‘A’ обозначает истину и ‘$\sim A$’ обозначает истину, (4) либо неверно, что ‘A’ обозначает истину, и неверно, что ‘$\sim A$’ обозначает истину.

Четырем членам тетралеммы можно сопоставить четыре оценки: истинно и неложно, ложно и неистинно, истинно и ложно, ни истинно, ни ложно соответственно.

Различные ограничения, наложенные на эту тетралемму, или отсутствие этих ограничений ведут к различным семантикам (которые будем называть T-семантиками) для ряда неклассических логик (которые будем называть T-логиками), многие из которых рассмотрены в [2].

Примерами таких ограничений могут служить нижеследующие положения.

Неверно, что 'A' обозначает истину и '$\sim A$' обозначает истину.
'A' обозначает истину или '$\sim A$' обозначает истину.
Либо 'A' обозначает истину, либо '$\sim A$' обозначает истину.

Эти ограничения ведут к трех- и двухвалентным интерпретациям. Отметим, что об одновалентных интерпретациях речи нет. Таким образом, возможность построения различных семантик, несмотря на наличие только одного денотата истина, имеется за счет наличия двух типов отрицания и различных семантических ограничений.

Модификация идеи Данна для неклассического случая с использованием бисентенциональной семантики приводит к следующим отождествлениям истинностных значений T, F, B, N с парами подмножеств одноэлементного множества {истина}.

$T = \langle\{\text{истина}\}, \{\}\rangle$,
$F = \langle\{\}, \{\text{истина}\}\rangle$,
$B = \langle\{\text{истина}\}, \{\text{истина}\}\rangle$,
$N = \langle\{\}, \{\}\rangle$.

Эти четыре значения подобны оценкам, соответствующим четырем членам тетралеммы.

В заключение отметим, что предложенная бисентенциональная семантика позволяет выделить класс T-логик, а также математических интерпретаций, семантически основанных только на истине (единственном денотате истина), тем самым исходя из утверждения Фреге, что «логика есть наука о наиболее общих законах бытия истины». При этом необходимо использовать различные возможные зависимости или же их отсутствие между утверждениями о денотации для предложения 'A' и его отрицания, то есть '$\sim A$'. Полученные таким образом семантики с единственным денотатом истина могут быть согласованы с двух-, трех- и четырехвалентными интерпретациями логик из вышеупомянутого класса T-логик.

Литература

[1] *Павлов С.А.* Термины «истинность» и «ложность» в языке // IV Российский философский конгресс: Философия и будущее цивилизации. Тезисы докладов и выступлений IV Российского философского конгресса. Том I. М., 2005. С. 525.

[2] *Павлов С.А.* Логика с операторами истинности и ложности. М., 2004.

[3] *Фреге Г.* О смысле и значении // Логика и логическая семантика. М., 2000. С. 230–246.

[4] *Dunn J.M.* Partiality and its Dual // Studia Logica. 2000. Vol. 65. P. 5–40.

Логика направленности и изменения Л. Роговского как функциональная система

Н.И. Стешенко

ABSTRACT. In this paper, we prove functional completeness of the four-valued logic of Rogowski by reduction to several well-known functionally complete systems by using J. Slupecki's completeness criterion. We also indicate the bases of this logic.

Логика направленности и изменения, созданная Роговским, — четырехзначная [8]. Он аксиоматизировал эту логику, доказал ее корректность, непротиворечивость, полноту и независимость системы аксиом.

Мне не известны работы, в которых эта логика рассматривалась бы как функциональная система. Задать логику как функциональную систему — означает указать систему исходных функций и операцию (суперпозицию) над множеством исходных функций так, чтобы посредством этих функций и их суперпозиций были определяемы все другие функции. Определение операции суперпозиции будет дано ниже. При исследовании логики Роговского как функциональной системы будем заниматься двумя естественными задачами. Во-первых, проверим, является ли исходная система функций этой логики функционально полной, во-вторых, выделим лишь те базисы в множестве всех функций логики Роговского, которые оправданы (не разрушают содержательной основы этой логики).

Исходными синтаксическими понятиями логики направленности изменения являются импликация и оператор возникновения «B», который читается «возникает так, что...», где вместо точек подставляются пропозициональные переменные, т.е. в этой логике имеется потенциально бесконечный список пропозициональных букв. Через исходные понятия определениями вводятся другие логические связки и операторы. Дадим некоторые важные определения логики направленности.

(D1) $\sim p \equiv_{Df} BBp$ — «не есть так, что p»;

(D2) $Иp \equiv_{Df} B \sim p$ — «исчезает так, что p»;

(D3) $p \wedge g \equiv_{Df} \sim (p \rightarrow \sim g)$;

(D4) $Tp \equiv_{Df} p \wedge И(p \wedge Bp) \wedge B(p \wedge Иp)$ — сильное утверждение: «истинно, что p»;

(D5) $p \vee g \equiv_{Df} \sim (\sim p \wedge \sim g) = \sim p \rightarrow g$;

(D6) $Уp \equiv_{Df} T(p \vee Bp)$ — «уже есть так, что p»;

(D7) $Ep \equiv_{Df} T(p \vee Иp)$ — «еще есть так, что p».

С содержательной точки зрения логика направленности изменения дедуктивно систематизирует высказывания о переходе в гегелевском смысле (направленные интервалы). Они выделяются упорядоченными парами высказываний (есть так, что p; не есть так, что p), (не есть так, что p; есть так, что p). Операторы B,$И$, E,$У$, как раз и предназначены для исследования свойств перехода. Семантическое значение логических связок и операторов определяется таблицами истинности.

Выделенным значением является «3» — истина. Остальные истинностные значения обозначаются так: «2» — подистина; «1» — подложь; «0» — ложь.

Таблица 1

p	$\sim p$	Tp	Bp	$Иp$	$Уp$	Ep	$p \rightarrow g$	3	2	1	0
3	0	3	1	2	3	3	3	3	2	1	0
2	1	0	3	0	3	0	2	3	2	1	1
1	2	0	0	3	0	3	1	3	2	2	2
0	3	0	2	1	0	0	0	3	3	3	3

Перейдем к описанию логики Роговского как функциональной системы. Функция $f(x_1, \cdots, x_n)$ от n-аргументов называется *функцией четырехзначной логики*, если ее аргументы определены на множестве $\Gamma_4 = \{3, 2, 1, 0\}$ и сама функция принимает значение из того же множества. Функции логики Роговского полностью определяются ее таблицами истинности, т.е. в каждой строчке таблицы, которая определяет ту или иную функцию, вначале задается значение переменных функции, затем значения функции на построчных наборах. Если функция f и формула Φ имеют одну и ту же таблицу истинности, то будем говорить, что формула Φ представляет (реализует) функцию f. Произвольные формулы Φ_1 и Φ_2, представляющие одну и ту же функцию, называются эквивалентными, т.е. Φ_1 и Φ_2 имеют совпадающие таблицы истинности. Другими словами, в отличие от табличного задания функции, представление данной функции формулой не единственно.

Ниже отождествляются знаки и названия некоторых логических связок и операторов логики Роговского со знаками и названиями функций.

Обозначим систему исходных функций указанной логики через $F = \{\rightarrow,\ B\}$.

Суперпозицией функций называется образование новых функций из множества исходных функций через а) операцию переименования переменных (в частности, их отождествления) и б) операцию подстановки некоторой функции вместо аргументов какой-то функции — исходной или образованной из исходных — (в частности, подстановкой фиксированной функции вместо собственного аргумента)(см.: [2, с. 33]).

Множество всех суперпозиций функций от n-аргументов ($n = 0, 1, 2, \cdots, n-1$) логики Роговского обозначим через $\mathbf{R}_4$. Константные функции (константы) рассматриваются как функции, зависящие от произвольного числа переменных, включая и нуль переменных [1, с. 88]. Образуем суперпозициями отдельные функции из $\mathbf{R}_4$. Некоторые суперпозиции функций копируют вышеуказанные определения.

1. $\sim x = (3 - x)$ — отрицание;

2. $И(x) = B(\sim x)$ — «исчезает, что...»;

3. $x \vee y = max(x, y)$ — дизъюнкция;

4. $x \wedge y = min(x, y)$ — конъюнкция.

Введем *константные функции*, т.е. функции, принимающие на всех значениях аргументов какое-то одно значение: 3, либо 2, либо 1, либо 0. Введем соглашение: в многократных подстановках функции $B(x)$ (и функции $И(x)$) на место собственного аргумента скобки опускаются, например $B(B(x))$ записывается как $BB(x)$, кроме того, очевидные скобки также опускаются.

5. $3 = x \vee B(x) \vee BB(x) \vee BBB(x)$ — константа 3;

6. $1 = B(3)$ — константа 1;

7. $0 = B(1)$ — константа 0;

8. $2 = B(0)$ — константа 2.

Определим в $\mathbf{R}_4$ функции Россера-Тюркетта.

9. $J_3(x) = BB[x \to [B(x \to BBB(x)) \to B(x \to B(x))]]$;

10. $J_2(x) = J_3(B(x))$;

11. $J_1(x) = J_3(BBB(x))$;

12. $J_0(x) = J_3(BB(x))$.

Введя переменную i, принимающую все значения из множества $\Gamma_4 = \{0, 1, 2, 3\}$, мы получим известную характеристическую функцию:

$$J_i(x) = \begin{cases} 3, \text{если } x = i \\ 0, \text{если } x \neq i. \end{cases}$$

Определим посредством суперпозиции функций Россера-Тюркетта другие функции, играющие огромную роль в логике Роговского.

13. $У(x) = J_2(x) \vee J_3(x)$; — «уже есть так, что...».

14. $E(x) = J_1(x) \vee J_3(x)$, — «еще есть так, что...».

15. $x \sqcap y = (У(x) \wedge E(y)) \vee (E(x) \wedge У(y))$, — «$x$ и вместе с тем y».

16. $x \sqcap \sim x = J_1(x) \vee J_2(x)$, — «$x$ и вместе с тем не-x» — гегелевская конъюнкция.

Проверка всех равенств (1)–(16) осуществляется непосредственно по таблицам истинности и строению суперпозиций (правые части равенств), посредством которых вводятся функции (левые части равенств).

Дальше сосредоточимся на проверке функциональной полноты $\mathbf{R}_4$. Приспособим известные определения и формулировки теорем к символам логики изменения и направленности, которая рассматривается как функциональная система.

Система функций $F = \{\rightarrow, B\}$ в $\mathbf{R}_4$ называется *функционально полной*, если каждая функция из $\mathbf{R}_4$ является суперпозицией функций из F этой системы [7, с. 58].

Для произвольных k-значных, в том числе и 4-значных логик, имеется несколько способов проверки полноты систем функций. Компактное описание этих способов дано, например, в [1, с. 97].

Первый из них основан на рассмотрении всех предполных классов в $\mathbf{R}_4$: система функций из $\mathbf{R}_4$ полна в $\mathbf{R}_4$ тогда и только тогда, когда она целиком не содержится ни в одном из предполных классов. Понятие предполного класса стандартное [7, с. 78–79]. Этот способ практически малопригоден, так как надо фактически иметь все предполные классы, которых у нас нет; их число равно 82 (см.: [3, с. 106]).

Второй способ доказательства полноты проводится методом сведения к заведомо полным системам.

Наконец, третий способ проверки систем функций на полноту состоит в том, что рассматривается множество, содержащее некоторую совокупность функций от одной переменной и функцию, которая существенно зависит не менее чем от двух переменных и принимающая все значения из множества Γ_4. Эти функции должны удовлетворять критериям (признакам) полноты: критериям Е. Слупецкого, С.В. Яблонского, А. Саломаа. Отметим попутно, что критерий А. Саломаа к нашему случаю неприменим, так как он предназначен для проверки полноты многозначных логик, имеющих не менее 5-ти истинностных значений. Нужные определения будут даны ниже.

Доказательство функциональной полноты системы функций $F = \{\rightarrow, B\}$ в $\mathbf{R}_4$ проведем методом сведения к заведомо полным системам посредством критерия Слупецкого.

Доказательство функциональной полноты с помощью метода сведения к заведомо полным системам покоится на теореме, формулировка и доказательство которой имеется в [5, с. 30–31]. Она сформулирована для двухзначной логики, но автоматически переносится на многозначные логики, так как понятие суперпозиции функций одинаково для двухзначных и многозначных логик.

ТЕОРЕМА 1. *Пусть даны две системы функций из четырехзначной логики (а) $F_1 = \{f_1, f_2, \dots\}$ и (б) $F = \{g_1, g_2, \dots\}$, относительно которых известно, что система (а) полна и каждая ее функция получена посредством суперпозиций функций из системы (б). Тогда система (б) является полной.*

ТЕОРЕМА 2. *Система функций $F = \{\to, B\}$ в $\mathbf{R}_4$ функционально полная.*

Имеем систему (б) $F = \{\to, B\}$ в $\mathbf{R}_4$, надо найти такую систему (а), относительно которой известно, что она является функционально полной. В множестве $\mathbf{R}_4$ такая подсистема имеется: это 4-значный вариант системы Россера и Тюркетта.

(а). $F_1 = \{x \vee y,\ x \wedge y,\ J_3(x),\ J_2(x),\ J_1(x),\ J_0(x),\ 3,\ 2,\ 1,\ 0\}$.

Каждая функция системы (а) получена суперпозицией функций из системы (б): это равенства (3)–(12). Доказательство функциональной полноты системы F_1 [4, с. 48] покоится на том факте, что в многозначной логике имеется аналог совершенной дизъюнктивно нормальной формы (с.д.н.ф.).

$$f(x_1, \dots, x_n) = \bigvee_{(\delta_1, \dots, \delta_n)} [(J_{\delta_1}(x_1) \wedge \dots \wedge J_{\delta_n}(x_n)) \wedge f(\delta_1, \dots, \delta_n) \neq 0]$$

Дизъюнкция берется по всем 4-значным наборам $\delta_1, \dots, \delta_n$ значений переменных $x_1, \dots, x_n$, каждый из которых имеет длину n. Доказательство равенства левой и правой частей этого разложения аналогично доказательству в 2-значной логике [5, с. 15-16]. Правая часть этого разложения есть формула логики Роговского над множеством функций из F_1, левая часть есть функция, которую представляет формула. Любая, отличная от тождественно ложной, формула логики Роговского, которая представляет функцию $f(x_1, \ldots, x_n)$, преобразуема в с.д.н.ф., и такое представление единственно.

Таким образом, системы $F = \{\rightarrow, B\}$ и $F_1 = \{x \vee y, x \wedge y, J_3(x), J_2(x), J_1(x), J_0(x), 3, 2, 1, 0\}$ удовлетворяют требованиям теоремы 1, значит система $F = \{\rightarrow, B\}$ является функционально полной.

Известно также, что система Поста $\Pi_4 = \{\neg, \vee\}$ — функционально полная [5, с. 48-50]. Сведем проверку полноты $F = \{\rightarrow, B\}$ к полноте Π_4. Выше было показано, что дизъюнкция $x \vee y = max(x, y)$ есть суперпозиция функций из $F = \{\rightarrow, B\}$, эта дизъюнкция равнозначна постовской дизъюнкции. Но в логиках Роговского и Поста различные типы отрицания. В первой используется отрицание в виде симметрического отображения истинностных значений ($\sim x = 3 - x$), во второй — циклического сдвига истинностных значений ($\neg x = x + 1 (mod\, 4)$). Надо определить постовское отрицание посредством суперпозиции функций из $F = \{\rightarrow, B\}$.

$\neg x = (J_0(x) \wedge И(x)) \vee ((J_1(x) \wedge \sim x) \vee J_2(x)) = (J_0(x) \rightarrow B(x)) \rightarrow (BB(J_2(x)) \rightarrow BB(J_1(x) \rightarrow x))$

Проверка равенства осуществляется с помощью применения таблиц истинности по структуре суперпозиции функций в правой части, т.е. получим $x = \{0, 3, 2, 1\}$ при $x = \{3, 2, 1, 0\}$. Таким образом, система (а) $\Pi_4 = \{\neg, \vee\}$ и система (б) $F = \{\rightarrow, B\}$ выполняют условия теоремы 1, значит $F = \{\rightarrow, B\}$ функционально полна.

В логике Роговского центральную роль играют одноместные (одноаргументные) функции $B(x)$, $И(x)$, $У(x)$, $E(x)$. Но доказательство полноты $\mathbf{R}_4$ методом сведения к заведомо полным системам ничего не говорит о функциональных свойствах упомянутых одноместных функций логики изменения и направленности. Критерий Е. Слупецкого, дополненный условиями на функции от одной переменной, которые задаются теоремой С. Пикар (Sophie Piccard), позволяет, в частности, исследовать функциональную полноту в множестве одноместных функций.

Дадим нужные для формулировки критерия Слупецкого обозначения и определения применительно к $\mathbf{R}_4$.

Обозначим через $\mathbf{R}_4^{(1)}$ множество всех одноместных функций в $\mathbf{R}_4$, их число равно $44 = 256$; $\mathbf{S}_4$ — множество всех *разнозначных функций*, т.е. функции одного аргумента, каждая из которых принимает все четыре значения истинности, их число равно $4! = 24$; этому множеству, в частности, принадлежат функции $В(x)$, $И(x)$, $\sim x$. Но функции $У(x)$ и $E(x)$ принадлежат другому множеству: множеству одноместных функций, «выпускающих» хотя бы одно из значений истинности из Γ_4.

Будем говорить, что одноместная *функция выпускает хотя бы одно истинностное значение*, если совокупность ее значений является строгим подмножеством множества $\Gamma_4 = \{0, 1, 2, 3\}$, т.е. $f(\Gamma_4) \neq \Gamma_4$. Множество одноместных функций, выпускающих хотя бы одно истинностное значение, есть дополнение множества разнозначных функций в множестве всех одноместных функций: $\mathbf{CS}_4 = \mathbf{R}_4^{(1)} \backslash \mathbf{S}_4$.

Функция $f(x_1, \ldots, x_{k-1}, x_k, x_{k+1}, \ldots, x_n)$ из $\mathbf{R}_4$ существенно зависит от переменной x_k, если найдутся два набора истинностных значений $\alpha^1 = (\alpha_1, \ldots, \alpha_{k-1}, \beta_1, \alpha_{k+1}, \ldots, \alpha_n)$ и $\alpha^2 = (\alpha_1, \ldots, \alpha_{k-1}, \beta_2, \alpha_{k+1}, \ldots, \alpha_n)$, $\beta_1 \neq \beta_2$ таких, что $f(\alpha^1) \neq f(\alpha^2)$ [7, с. 57]. Функцию $f(x_1, \ldots, x_n)$ назовем *существенной*, если она существенно зависит более чем от одной переменной и принимает все истинностные значения из множества Γ_4.

ТЕОРЕМА 3 (критерий Е. Слупецкого). *Система функций $\mathbf{R}_4^{(1)} \cup \{\to\}$ полна в $\mathbf{R}_4$ тогда и только тогда, когда функция $\to$ существенная.*

Доказательство теоремы дано в [9]. Наша цель — показать, что система $F = \{\to, B\}$ подпадает под критерий Слупецкого. «Подпадает» означает, что F имеет все одноместные функции и функция $\to$ является существенной. Сама же функциональная полнота, т.е. существование всех остальных функций (наряду с одноместными) в $\mathbf{R}_4$, гарантируется теоремой.

Легко проверить по таблице истинности, что функция $\to$ существенная. По критерию Слупецкого надо фактически иметь все функции одного аргумента, их число, как отмечали, равно 256. Некоторые одноместные функции в $\mathbf{R}_4$ построены, но чтобы получить весь список одноместных функций $\mathbf{R}_4^{(1)}$ посредством суперпозиции функций из $F = \{\to, B\}$, надо провести огромное число вычислений. Чтобы избежать утомительных вычислений, С. Пикар предложила несколько систем одноместных функций, которые являются полными в $\mathbf{R}_4^{(1)}$. Позже обсуждались и другие системы функций от одной переменной, достаточные для порождения всех одноместных функций [4]. Используем функции Пикар, следуя [5, с. 64-65], но изменив обозначения.

ТЕОРЕМА 4 (С. Пикар). *Все функции одного переменного из* $\mathbf{R}_4$ *могут быть порождены четырьмя функциями.*

$$J_{0i}(x) = \begin{cases} i, \text{ если } x = 0; \\ 0, \text{ если } x = i (i = 1, 2, 3); \\ x \text{ в остальных случаях.} \end{cases}$$

$$h(x) = \begin{cases} 1, \text{ если } x = 0; \\ x, \text{ если } x \neq 0. \end{cases}$$

Убедимся, что эти функции в $\mathbf{R}_4^{(1)}$ имеются, т.е. определим эти функции посредством суперпозиций функций логики Роговского:

$f_{01}(x) = (x \wedge B(x)) \vee \sim [(\sim x \wedge B(x)) \vee J_1(x) \vee J_2(x)]$;
$f_{02}(x) = [(x \wedge \sim x) \wedge И(x)] \vee \sim [J_1(x) \vee J_2(x) \vee (И(x) \wedge \sim x)]$;
$f_{03}(x) = [(x \wedge \sim x) \wedge И(x)] \vee \sim [J_1(x) \vee J_3(x) \vee (x \wedge \sim x)]$;
$h(x) = x \vee ((И(x) \wedge B(x) \wedge J_0(x))$.

Проверка равенств проводится на основании определений функций, задаваемых теоремой С. Пикар, и по структуре суперпозиций функций в правой части равенств.

Система функций $f_{oi} = (f_{01}, f_{02}, f_{03})$ порождает множество $\mathbf{S}_4$ всех разнозначных функций.

Докажем полноту системы функций $\{f_{oi}\} = \{f_{01}, f_{02}, f_{03}\}$ в $\mathbf{S}_4$ индукцией по $i (1 \leq i \leq 3)$. Для доказательства полноты используем свойство функций $f_{oi}(x)$, задаваемое их определениями: $f_{oi}(x) \equiv x$, если $x \neq i$ и $x \neq 0$. К тому же из четырехзначности функций логики Роговского ясно, что $f_{oi}(x) \equiv x$ имеет место на двух значениях аргумента (отличных от «0» и «i»).

Установим, что любая функция $s(x)$ из $\mathbf{S}_4$, удовлетворяющая условию $s(x) \equiv x$ при $x > i \neq 3$ (и x $< i$, если$i = 3$) порождается системой функций f_{oi}.

Базис индукции: $i = 1$. Тогда условие $s(x) \equiv x$ при $x > 1$ означает, что функция $s(x)$ тождественна на построчных наборах аргументов «2» и «3». Из трех функций $\{f_{01}, f_{02}, f_{03}\}$ только функция f_{01} порождает множество функций, выделенных указанным свойством, так как функция f_{02} (по ее определению) не сохраняет тождество $s(x) \equiv x$ на аргументе «2», а функция f_{03} (по определению) не сохраняет тождество $s(x) \equiv x$ на аргументе «3». Тем самым базис индукции доказан.

Индуктивное допущение. Предположим, что мы имеем подмножество функций из $\mathbf{S}_4$, порожденное функцией f_{02}. Надо доказать, что остальные функции из множества $\mathbf{S}_4$ порождаются f_{03}, т.е. $i = 3$.

Сначала надо убедиться, что множество функций, порождаемых функцией f_{03}, отличается (не пересекается) от тех множеств функций, которые порождаются функциями f_{01} и f_{02}. Другими словами, надо показать, что f_{03} не является суперпозицией функций f_{01} и f_{02}, т.е. $f_{03}(x) \neq f_{01}(f_{02}(x))[f_{03}(x) \neq f_{02}(f_{01}(x))]$. Из базиса индукции известно, что все функции, заданные f_{01}, сохраняют тождество $s(x) \equiv x$ на значениях аргументов «2» и «3», по индуктивному допущению имеем, что все функции, порожденные функцией f_{02}, дают тождество $s(x) \equiv x$ на значениях аргументов «3» и «1». Тогда суперпозиция функций из этих множеств функций сохраняет тождество на аргументе со значением «3». Но f_{03} не сохраняет тождество (по определению f_{03}) на аргументе со значением «3». Значит, множество функций, порождаемое f_{03}, не может пересекаться с множествами функций, порождаемых функциями f_{01} и f_{02}. Условие $s(x) \equiv x$ при $x < 3$ означает, что множество функций тождественно на наборах аргументов со значением «2» и «1». Но множество функций, выделенное этим условием, порождается функцией f_{03}. Доказательство полноты системы функций $\{f_{oi}\} = \{f_{01}, f_{02}, f_{03}\}$ в $\mathbf{S}_4$ завершено.

Функции В(x),$И(x)$,$\sim x$ и $\neg x$ — разнозначные функции, и, стало быть, выразимы функциями из f_{oi}: $B(x) = f_{01}(f_{03}(f_{02}(x)))$; $И(x) = f_{02}(f_{03}(f_{01}(x)))$; $\sim x = f_{03}(f_{02}(f_{01}(f_{02}(x)))$; $\neg x = f_{03}(f_{02}(f_{01}(x)))$.

Функция $h(x)$ (с использованием функций из $\mathbf{S}_4$) позволяет задать любую функцию из множества $\mathbf{CS}_4$, т.е. множество функций, выпускающих хотя бы одно значение истинности из множества $\Gamma_4 = \{0, 1, 2, 3\}$. Выделим те функции из $\mathbf{S}_4$, которые нам особо понадобятся в порождении множества функций из $\mathbf{CS}_4$: $И(x)$, $B(x)$, $\sim(x)$, $f_{12}(x) = f_{01}(f_{02}(f_{01}(x)))$, $f_{13}(x) = f_{01}(f_{03}(f_{03}(x)))$.

$$f_{12}(x) = \begin{cases} 1, \text{ если } x = 2; \\ 2, \text{ если } x = 1; \\ x \text{ в остальных} \\ \text{случаях.} \end{cases} \qquad f_{13}(x) = \begin{cases} 1, \text{ если } x = 3; \\ 3, \text{ если } x = 1; \\ x \text{ в остальных} \\ \text{случаях.} \end{cases}$$

Из определения функций, выпускающих хотя бы одно значение истинности из множества $\Gamma_4 = \{0, 1, 2, 3\}$, легко видеть, что в таких функциях имеется по меньшей мере два повторяющихся (одинаковых) значения истинности. Например, в функциях $f_1(x) = (1, 2, 1, 3)$, $f_2(x) = (1, 2, 3, 2)$, $f_3(x) = (3, 2, 3, 1)$ выпущено значение «0» и соответственно повторяются значения $(1, 1)$, $(2, 2)$ и $(3, 3)$.

Доказательство проведем индукцией по j $(1 \leq j \leq 3)$, где j — число, выпускаемых в функциях истинностных значений. Установим, что любая функция $p(x)$ из $\mathbf{CS}_4$, удовлетворяющая условию «иметь одинаковые истинностные значения», задается функцией $h(x)$ (с использованием функций из $\mathbf{CS}_4$).

Базис индукции $j = 1$. Имеем четыре случая: (а). Выпускается значение «0» и повторяются в функциях истинностные значения — $(1, 1)$, $(2, 2)$ и $(3, 3)$, т.е. $p_0(x) = p_0^1(x) \cup p_0^2(x) \cup p_0^3(x)$, где нижний индекс указывает какое истинностное значение выпускается, а верхние индексы показывают, какие истинностные значения повторяются. Другими словами, множество функций, в котором выпущено истинностное значение «0», состоит из трех подмножеств функций. (б). Выпускается значение «1» и повторяются в функциях истинностные значения — $(0, 0)$, $(2, 2)$ и $(3, 3)$, т.е. $p_1(x) = p_1^0(x) \cup p_1^2(x) \cup p_1^3(x)$. (в). Выпускается значение «2» и повторяются в функциях истинностные значения — $(0, 0)$, $(1, 1)$ и $(3, 3)$, т.е. $p_2(x) = p_2^0(x) \cup p_2^1(x) \cup p_2^3(x)$. (г). Выпускается значение «3» и повторяются в функциях истинностные значения — $(0, 0)$, $(2, 2)$ и $(1, 1)$, т.е. $p_3(x) = p_3^0(x) \cup p_3^2(x) \cup p_3^1(x)$.

Рассмотрим случай (а). Подставим вместо аргумента функции $h(x)$ каждую функцию из класса $\mathbf{S}_4$. Тогда в так полученном множестве функций появятся пары таких функций, которые состоят из одинаковых по значению функций. Например, различные функции в $\mathbf{S}_4$ $s_k(x) = (3, 0, 2, 1)$ и $s_k(x) = (3, 1, 2, 0)$ в результате подстановки окажутся одинаковыми — $h(s_k(x)) = h(s_e(x)) = (3, 1, 2, 1)$. Оставим по одной функции из каждой пары. Хотя можно действовать иначе: из $\mathbf{S}_4$ предварительно выбираются функции таким образом, чтобы указанные повторы при подстановке вместо аргумента $h(x)$ не встречались. В результате получим класс $p_0^1(x)$ всех функций, в которых во всевозможных комбинациях повторяется значение «1», так как множество $\mathbf{S}_4$, из которого собственно и получили $p_0^1(x)$ посредством $h(x)$, содержит (ввиду полноты $\mathbf{S}_4$) функции с всевозможными построчными наборами истинностных значений «0» и «1». Осталось получить $p_0^2(x)$ и $p_0^3(x)$. Подставим вместо аргумента функции $f_{12}(x)$ каждую функцию из множества $p_0^1(x)$, в результате получим все функции класса $p_0^2(x)$. Подставим вместо аргумента функции $f_{13}(x)$ каждую функцию из множества $p_0^1(x)$, в результате получим все функции класса $p_0^3(x)$. Случай (а) доказан, т.е. $p_0(x) = p_0^1(x) \cup p_0^2(x) \cup p_0^3(x)$.

(б). Для доказательства этого случая используем функцию $И(x) = f_{02}(f_{03}(f_{01}(x)))$ и все функции, полученные в случае (а). Подставим вместо аргумента $И(x)$ каждую функцию из множества $p_0^1(x)$, получим все множество функций из $p_1^3(x)$, т.е. множество функций, в которых выпускается значение «1» и повторяются значения $(3, 3)$. Сокращенно эти подстановки запишем $И(p_0^1(x)) = p_1^3(x)$. Дальше подставим вместо аргумента $И(x)$ каждую функцию из множества $p_0^2(x)$, получим все множество функций из $p_1^0(x)$, т.е. множество функций, в которых выпускается значение «1» и повторяются значения (0, 0). Сокращенно эти подстановки запишем $И(p_0^2(x)) = p_1^0(x)$. Наконец, подставим вместо аргумента $И(x)$ каждую функцию из множества $p_0^3(x)$, получим все множество функций из $p_1^2(x)$, т.е. множество функций, в которых выпускается значение «1» и повторяются значения (2, 2). Сокращенно эти подстановки запишем $И(p_0^3(x)) = p_1^2(x)$. Случай (б) завершен, т.е. имеем $p_1(x) = p_1^0(x) \cup p_1^2(x) \cup p_1^3(x)$.

(в). Для доказательства этого случая используем функцию $B(x) = f_{01}(f_{03}(f_{02}(x)))$ и все функции случая (а). Все нужные подстановки запишем сокращенно: $B(\mathrm{p}_0^1(x)) = p_2^0(x))$; $B(p_0^2(x)) = p_2^3(x))$; $B(p_0^3(x)) = p_2^1(x))$, т.е. были получены все функции, в которых выпускается значение «2» и повторяются значения $(0,0)$, $(1,1)$ и $(3,3)$ — $p_2(x) = p_2^0(x) \cup p_2^1(x) \cup p_2^3(x)$.

(г). Для доказательства последнего случая используем функцию $\sim x = f_{03}(f_{02}(f_{01}(f_{02}(x))))$ и все функции, полученные в случае (а). Все нужные подстановки запишем сокращенно: $\sim (p_0^1(x)) = p_3^2(x)$; $\sim (p_0^2(x)) = p_3^1(x)$; $\sim (p_0^3(x)) = p_3^0(x)$, т.е. получили все функции, в которых выпущено значение «3» и повторяются значения $(0,0)$, $(1,1)$ и $(2,2)$ — $p_3(x) = p_3^0(x) \cup p_3^2(x) \cup p_3^1(x)$.

Таким образом, все случаи базиса индукции доказаны.

Индуктивное допущение $i = 2$. Предполагая, что имеются все функции, выпускающие ровно два значения (либо 0 и 1, либо 0 и 2, и т.д.), можем построить множество всех функций, выпускающих три значения истинности ((0, 1, 2), либо (0, 1, 3) либо (0, 2, 3), либо (1, 2, 3)), т.е. получим все константные функции.

Среди функций, выпускающих два истинностных значения, имеются функции, выпускающие истинностные значения «2» и «3», например функция $f_k = (0,1,1,1)$. Суперпозиция функций $h(f_k(x))$ дает константу 1, т.е. функцию, выпускающую истинностные значения (0, 2, 3). Нетрудно получить оставшиеся константные функции.

Так как функции $У(\mathrm{x})$ и $E(x)$ выпускают истинностные значения «1» и «2», то их можно определить, например посредством таких суперпозиций функций: $У(x) = \neg(\neg(h \sim (h(x))))$ и $E(x) = \neg(\neg(f_{12}(h(\sim h(B(x))))))$.

Итак, суперпозицией функций из $F = \{\rightarrow, B\}$ была определена система одноместных функций $\{f_{oi}, h(x)\}$, которая порождает множество всех одноместных функций $\mathbf{R}_4^{(1)}$. Функция $\rightarrow$ является существенной. Значит, система функций $F = \{\rightarrow, B\}$ удовлетворяет критерию Е. Слупецкого, т.е. является функционально полной в $\mathbf{R}_4$.

Докажем, пользуясь критерием Е. Слупецкого, что система функций $F_3 = \{\rightarrow, У, E\}$ не является функционально полной в $\mathbf{R}_4$. Для этого надо показать, что F_3 порождает не все множество одноместных функций, а лишь его часть, т.е. собственное подмножество множества $\mathbf{R}_4^{(1)}$.

Посредством суперпозиций функций из F_3 образуем некоторое множество функций, зависящих от одной переменной. Этому множеству принадлежит константа 3 (например, полученная суперпозицией функций $\rightarrow$ и $У$: $У(x) \rightarrow У(x)$), тождественная функция ($3 \rightarrow x \equiv x$), а также подмножество функций, выпускающие значения «0» или «1», или «2» и принимающие по меньшей мере в двух строчках значения «3». Но мы не получим ни одной одноместной функции, в которой выпускается значение «3» из $\mathbf{E}_4$. Покажем это. По аналогии с трехзначной логикой [6, с. 110] будем говорить, что функция ***сохраняет*** истинностное значение 3, если $f(3, 3, \ldots, 3) = 3$. Все три функции $\{\rightarrow, У, E\}$ сохраняют истинностное значение 3, тогда и суперпозиция этих функций сохраняет истинностное значение 3 (доказательство такое же, как и в случае двухзначной логики (см.: [5, с. 34])). Таким образом, среди одноместных функций, порождаемых системой функций из $F_3 = \{\rightarrow, У, E\}$, нет, по меньшей мере, функций, выпускающих истинностное значение «3» из Γ_4. Это означает, что $F_3 = \{\rightarrow, У, E\}$ не является функционально полной.

ТЕОРЕМА 5. $F = \{\rightarrow, B\}$ *есть базис* $\mathbf{R}_4$.

Для доказательства этой теоремы введем ряд известных понятий. Пусть $F \subset \mathbf{R}_4$. ***Замыканием*** множества функций F называется множество, обозначаемое $[F]$, которое состоит из функций множества F и функций, которые могут быть получены из функций множества F посредством суперпозиции. Если $[F] = F$, то F называется ***замкнутым***. Множество функций F называется ***полным***, если $[F] = \mathbf{R}_4$. Множество функций F^+ называется ***неполным*** в $\mathbf{R}_4$, если $[F^+] \neq \mathbf{R}_4$. ***Базисом*** называется минимальная полная система функций, т.е. такая система функций, удаление из которой любой функции делает систему неполной.

Зафиксируем, что система $F = \{\rightarrow, B\}$ является функционально полной. Ее полнота была установлена методом сведения к заведомо полным системам и при помощи критерия Е. Слупецкого.

Рассмотрим два случая: 1) $F^1 = \{B\}$; 2) $F^2 = \{\rightarrow\}$. В первом случае имеем $[B(x)] = \{B(x), \sim x, И(x), x\}$, т.е. любая суперпозиция функции $B(x)$ дает одну из четырех указанных функций.

Это означает, что $[F^1] \neq \mathbf{R}_4$. Более точно, $[F^1] \neq \mathbf{S}_4$, т.е. F^1 не является полной даже в множестве разнозначных функций ($\mathbf{S}_4 \subset \mathbf{R}_4^{(1)} \subset \mathbf{R}_4$). Несложно показать, что $[F^2] \neq \mathbf{R}4$.

Суммируем: $F = \{\rightarrow, B\}$ — полная система, $F^1 = \{B\}$ и $F^2 = \{\rightarrow\}$ — неполные, значит, $F = \{\rightarrow, B\}$ есть базис в $\mathbf{R}_4$.

Укажем еще пять базисных систем функций логики Роговского. На задание базисов введем ограничения, диктуемые содержательными предпосылками логики изменения и направленности. В логике Роговского, как отмечалось выше, систематизируются гегелевские высказывания о переходе предмета из одного состояния в другое; функции $B, У, E, И$ как раз и предназначены для образования сложных высказываний, в которых что-то утверждается либо отрицается о свойствах перехода. Система функций $F_3 = \{\rightarrow, У, E\}$ не является базисом в $\mathbf{R}_4$, так как она — это было показано выше — не является полной в $\mathbf{R}_4$. С другой стороны, функции $У(x)$ и $E(x)$ определимы через импликацию и функции $B(x)$ или И(x), поэтому включение их в базис избыточно. Функции $B(x)$ и $И(x)$ взаимоопределимы — $И(x) = B(\sim x)$; $B(x) = И(\sim x)$, и совпадают как замкнутые классы $[B(x)] = \{B(x), \sim x, И(x), x\} = [И(x)]$. Ввиду этого среди функций, входящих в базис, должны быть эти функции. Следующие системы функций образуют базис: $F_1 = \{\vee, B\}$; $F_2 = \{\wedge, B\}$; $F_3 = \{\rightarrow, И\}$; $F_4 = \{\vee, И\}$; $F_5 = \{\wedge, И\}$ — при этом учитываются определения (D3) и (D5). Можно получить и другие базисы, например: $\{\rightarrow$ (плюс) минимальная система одноместных функций, через которые выразима функция $B(x)$ или $И(x)\}$, но вызывает большие сомнения, что еще какая-либо минимальная система одноместных функций может быть обоснована содержательными предпосылками логики изменения и направленности.

Литература

[1] *Гаврилов Г.П., Сапоженко А.А.* Задачи и упражнения по дискретной математике. М.: Физматлит, 2004.

[2] *Гиндикин С.Г.* Алгебра логики в задачах. М.: Наука, 1972.

[3] *Карпенко А.С.* Многозначные логики. Логика и компьютер. Вып. 4. М.: Наука, 1997.

[4] *Саломаа А.* Некоторые критерии полноты для множеств функций многозначной логики // Кибернетический сборник. Вып. 8. М.: Мир, 1964. С. 7-32.

[5] *Яблонский С.В.* Введение в дискретную математику. М.: Наука, 1986.

[6] *Яблонский С.В., Гаврилов Г.П., Кудрявцев В.Г.* Функции алгебры логики и классы Поста. М.: Наука, 1966.
[7] *Яблонский С.В.* Функциональные построения в k-значной логике // Труды МИАН СССР. 1958. Т. 51. С. 5-142.
[8] *Rogowski L.S.* Logika kierunkowa a heglowska teza o sprzeczności zmiany. Toruń, 1969.
[9] *Slupecki J.* A criterion of fullness of many-valued systems of propositional logic // Studia logica. Vol. XXX. 1972. P. 153-157.

Стандартные и нестандартные логики аргументации I

В.К. Финн

1 Введение

В [1] был предложен вариант логики аргументации A_4, истинностные значения которой $1, \text{-}1, 0, \tau$ истолковывались соответственно как «фактически истинно», «фактически ложно», «фактически противоречиво» и «неопределенно». Семантика логики аргументации A_4 образована непустым множеством доводов (возможных аргументов и контраргументов) $\mathbf{A}$ и функциями $\mathbf{g}^+$ и $\mathbf{g}^-$ такими, что:

$\mathbf{g}^\sigma : \wp \to 2^{\mathbf{A}}$, где $\sigma \in \{+, -\}$, а $\wp$ — множество пропозициональных переменных p, q, r, s (быть может с нижними индексами). $\mathbf{g}^+(p)$ и $\mathbf{g}^-(p)$ являются множеством аргументов и контраргументов высказывания p, соответственно. Предполагается, что для любого $p \in \wp$ имеет место $\mathbf{g}^+(p) \cap \mathbf{g}^-(p) = \varnothing$.

Принцип оценивания пропозициональных переменных прост:

если p имеет аргументы и не имеет контраргументов, то p фактически истинно ($v[p] = 1$, где $v[p]$ — функция оценки);

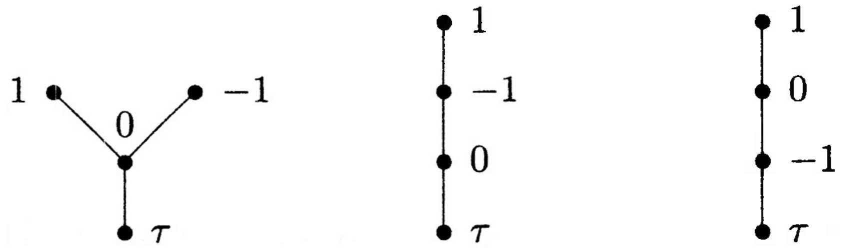
если p не имеет аргументов и имеет контраргументы, то p фактически ложно ($v[p] = -1$);

если p имеет аргументы и имеет контраргументы, то p фактически противоречиво ($v[p] = 0$); если p не имеет ни аргументов, ни контраргументов, то p неопределенно ($v[p] = \tau$).

Таким образом, функция оценки атомарных формул определяется следующим образом:

$v[p] = 1$, если и только если $\mathbf{g}^+(p) \neq \varnothing$ и $\mathbf{g}^-(p) = \varnothing$;
$v[p] = -1$, если и только если $\mathbf{g}^+(p) = \varnothing$ и $\mathbf{g}^-(p) \neq \varnothing$;
$v[p] = 0$, если и только если $\mathbf{g}^+(p) \neq \varnothing$ и $\mathbf{g}^-(p) \neq \varnothing$;
$v[p] = \tau$, если и только если $\mathbf{g}^+(p) = \mathbf{g}^-(p) = \varnothing$.

Д.А. Бочвар[1] высказал соображение об осмысленности многозначных логик при условии интерпретируемости их истинностных значений. Он предположил, что интересные многозначные логики могут быть фрагментами формализованной семантики. В соответствии с этим соображением рассмотрим 3 типа отношения порядка на множестве истинностных значений $\{1,\ -1,\ 0,\ \tau\}$:



(1) (2) (3)

Интерпретация порядка (1) следующая: высказывания подразделяются на принимаемые в силу наличия аргументов и отсутствия контраргументов (они получают оценку 1), на отвергаемые в силу наличия контраргументов и отсутствия аргументов (они получают оценку -1) и на не принимаемые и не отвергаемые, соответственно, имеющие аргументы и контраргументы (они получают оценку 0 — «фактически противоречиво») и не имеющие ни аргументов, ни контраргументов (они получают оценку τ — «неопределенность»).

Естественно тогда считать, что $V_d = \{1,\ -1\}$ образует множество выделенных истинностных значений, а $\{0,\ \tau\}$ — множество невыделенных.

Рассмотрим теперь следующие варианты четырехзначных логик аргументации $A_4^{(i)}$, $i = 0,\ 1,\ 2,\ 3$.

2 Логика аргументации $A_4^{(0)}$

Логические связки: $\sim$, $\{\&_n^{(0)}\}_{n \in N}$($n \geq 2$, N — множество натуральных чисел), $\vee^{(2)}, \supset$. Связки $\sim, \supset, \&_2^{(0)}, \vee^{(2)}$ определяются следующими истинностными таблицами.

[1]Устное сообщение.

p	$\sim p$
1	-1
-1	1
0	0
τ	τ

$\supset$	1	-1	0	τ
1	1	-1	0	τ
-1	1	1	1	1
0	1	-1	1	τ
τ	1	-1	0	1

$\&_2^{(0)}$	1	-1	0	τ
1	1	0	0	τ
-1	0	-1	0	-1
0	0	0	0	0
τ	τ	-1	0	τ

$\vee^{(2)}$	1	-1	0	τ
1	1	1	1	1
-1	1	-1	-1	-1
0	1	-1	0	0
τ	1	-1	0	τ

$A_4^{(0)}$ является модификацией логики аргументации A_4 из [7]: заменена дизъюнкция $\vee_2$ на $\vee^{(2)}$, которая является $max(p,q)$ на порядке (2).

Обратим внимание на незамкнутость $\{1, -1\}$ относительно $\&_2^{(0)}$, так как $1 \&_2^{(0)} -1 = 0$, следствием которой является ее неассоциативность [7]. Очевидно, что ограничение $\&_2^{(0)}$ на $\{1, -1\}$ является небулевским. Однако дизъюнкция $\vee^{(2)}$ образует полурешетку с единицей «1», а именно:

$p \vee^{(2)} p = p$

$p \vee^{(2)} (q \vee^{(2)} r) = (p \vee^{(2)} q) \vee^{(2)} r$

$p \vee^{(2)} q = q \vee^{(2)} p$

$p \vee^{(2)} 1 = 1.$

Отметим, что ограничение $\vee^{(2)}$ на множестве истинностных значений $\{1, -1\}$ является булевским.

3 Логика аргументации $A_4^{(1)}$

Логические связки: $\sim, \&^{(1)}, \{\vee_n^{(1)}\}_{n \in N}$, $(n \geq 2), \supset$ — определяются истинностными таблицами[2]

[2]Для $n > 2$ $\vee_n^{(1)}$ определяется посредством функции оценки аналогично [7].

$\&^{(1)}$	1	-1	0	τ
1	1	0	0	τ
-1	0	-1	0	τ
0	0	0	0	τ
τ	τ	τ	τ	τ

$\vee_2^{(1)}$	1	-1	0	τ
1	1	τ	1	1
-1	τ	-1	-1	-1
0	1	-1	0	0
τ	1	-1	0	τ

и истинностными таблицами для $\sim$ (отрицания) и $\supset$ (импликации) $A_4^{(0)}$.

Легко проверить, что $p\,\&^{(1)}q = min_1(p,q)$ для порядка (1), но $p \vee^{(1)} q$ не является $max_1(p,q)$ для этого порядка, так как $1 \vee^{(1)} -1 = \tau$.

Имеет место ассоциативность для $\&^{(1)}$:
$p\,\&^{(1)}(q\,\&^{(1)}r) = (p\,\&^{(1)}q)\,\&^{(1)}r$

Очевидно, что $\&^{(1)}$ образует полурешетку с нулем τ, а именно:
$p\,\&^{(1)}p = p$
$p\,\&^{(1)}(q\,\&^{(1)}r) = (p\,\&^{(1)}q)\,\&^{(1)}r$
$p\,\&^{(1)}q = q\,\&^{(1)}p$
$p\,\&^{(1)}\tau = \tau$

Так как $1 \vee_2^{(1)} -1 = \tau$, то дизъюнкция не является $max_1(p,q)$ для порядка (1). Более того,$\vee_2^{(1)}$ не является ассоциативной логической связкой, так как имеет место:
$1 \vee_2^{(1)} (1 \vee_2^{(1)} -1) = 1 \vee_2^{(1)} \tau = 1$ и
$(1 \vee_2^{(1)} 1) \vee_2^{(1)} -1 = 1 \vee_2^{(1)} -1 = \tau$

Как было сказано выше, $\{1, -1\}$ — множество выделенных истинностных значений в соответствии с их принятой интерпретацией, однако смыслы «1» и «-1» противоположны: если $v[p] = 1$, то p принято на основании имеющейся аргументации, но если $v[p] = -1$, то p не принято (опровергнуто) на основании имеющихся контраргументов. Поэтому «1» и «-1» не сравнимы и $1 \vee_2^{(1)} -1 = \tau$. В силу этого аналогично [7] вводится счетное множество n-местных дизъюнкций $\&_n^{(1)}$, где $n \geq 2$ и определяется функция оценки $v[\vee_n^{(1)}(p_1, \ldots, p_n)]$.

4 Логика аргументации $A_4^{(2)}$

Логические связки: $\sim, \&^{(2)}, \vee^{(2)}, \supset$ — определяются следующими истинностными таблицами

$\&^{(2)}$	1	-1	0	τ
1	1	-1	0	τ
-1	-1	-1	0	τ
0	0	0	0	τ
τ	τ	τ	τ	τ

$\vee^{(2)}$	1	-1	0	τ
1	1	1	1	1
-1	1	-1	-1	-1
0	1	-1	0	0
τ	1	-1	0	τ

и истинностными таблицами для $\sim$ и $\supset$ $A_4^{(0)}$.

Легко видеть, что $p\,\&^{(2)}q = min_2(p, q)$, а $p \vee^{(2)} q = max_2(p, q)$ для порядка (2). Множество выделенных истинностных значений $V_d = \{1\}$.

Очевидно, что $\&^{(2)}$ и $\vee^{(2)}$ образуют решетку, а ограничения $\&^{(2)}$ и $\vee^{(2)}$ на множестве $\{1, -1\}$ являются булевскими $\&$ и $\vee$, соответственно.

Можно показать, что имеют место аксиомы дистрибутивности
$p\,\&^{(2)}(q \vee^{(2)} r) = (p\,\&^{(2)}q) \vee^{(2)} (p\,\&^{(2)}r)$,
$p \vee^{(2)} (q\,\&^{(2)}r) = (p \vee^{(2)} q)\,\&^{(2)}(p \vee^{(2)} r)$.

Таким образом, $\&^{(2)}$ и $\vee^{(2)}$ образуют дистрибутивную решетку.

5 Логика аргументации $A_4^{(3)}$

Логические связки: $\sim, \&^{(3)}, \vee^{(3)}, \supset$ — определяются следующими истинностными таблицами

$\&^{(3)}$	1	-1	0	τ
1	1	-1	0	τ
-1	-1	-1	-1	τ
0	0	-1	0	τ
τ	τ	τ	τ	τ

$\vee^{(3)}$	1	-1	0	τ
1	1	1	1	1
-1	1	-1	0	-1
0	1	0	0	0
τ	1	-1	0	τ

и истинностными таблицами для $\sim$ и $\supset$ $A_4^{(0)}$.

Легко видеть, что $p\,\&^{(3)}q = min_3(p, q)$, а $p \vee^{(3)} q = max_3(p, q)$ для порядка (3). Множество выделенных истинностных значений $A_4^{(3)}$ $D = \{1\}$.

Можно показать, что $\&^{(3)}$ и $\vee^{(3)}$ образуют дистрибутивную решетку, а ограничения $\&^{(3)}$ и $\vee^{(3)}$ на множестве $\{1, -1\}$ являются булевскими $\&$ и $\vee$ соответственно.

Логики аргументации $A_4^{(2)}$ и $A_4^{(3)}$, логические связки которых $\&^{(i)}$ и $\vee^{(i)}$ $(i = 2, 3)$ образуют дистрибутивные решетки, а ограничения $\&^{(i)} \mid_{\{1,-1\}} = \&$ и $\vee^{(i)} \mid_{\{1,-1\}} = \vee$, где $\&$ и $\vee$ соответственно конъюнкция и дизъюнкция двузначной логики $(i = 2, 3)$, будем называть стандартными четырехзначными логиками аргументации. Логики аргументации $A_4^{(0)}$ и $A_4^{(1)}$, которые содержат неассоциативные логические связки $\&_2^{(0)}$ и $\vee_2^{(1)}$, а их ограничения $\&_2^{(0)} \mid_{\{1,-1\}} = \&$ и $\vee_2^{(1)} \mid_{\{1,-1\}} = \vee$ не являются соответственно $\&$ и $\vee$ двузначной логики, будем называть нестандартными[3].

6 Об интерпретации истинностных значений логик $A_4^{(i)}$

Семантическим принципом нестандартных логик аргументации $A_4^{(0)}$ и $A_4^{(1)}$ является условие оценки $\&_2^{(i)}(\varphi_1, \varphi_2)$ $(i = 0, 2)$ такое, что $v[\&_2^{(i)}(\varphi_1, \varphi_2)] = 0$, если и только если $v[\varphi_1] = 1$ и $v[\varphi_2] = -1$, или $v[\varphi_1] = -1$ и $v[\varphi_2] = 1$, или $v[\varphi_1] = 0$, или $v[\varphi_2] = 0$.

Это условие обобщается для $n > 2$ [10]: $v[\&_n^{(i)}(\varphi_1, \dots, \varphi_n)] = 0$, если и только если $\exists i \exists j (v[\varphi_i] = 1 \,\&\, v[\varphi_j] = -1) \vee \exists h (v[\varphi_h] = 0)$, где $1 \leq i, j, h \leq n$.

Таким образом, множество формул $\varphi_1, \dots, \varphi_n$, входящих в $\&_n^{(i)}$, оцениваются как «гештальт» независимо от порядка их вхождения. Этот факт связан с неассоциативностью $\&_2^{(i)}$ и истолкованием $\&_2^{(i)}(1, -1) = 0$ как фактического противоречия. Атомарная формула p получает оценку $v[p] = 0$, если и только если $\mathbf{g}^+(p) \neq \varnothing$ и $\mathbf{g}^-(p) \neq \varnothing$. Это означает, что p имеет аргументы и контраргументы.

Порядок (1) используется для определения ассоциативной $\&^{(1)}$ с небулевским ограничением $\&^{(1)} \mid_{\{1,-1\}}$, так как $1 \,\&^{(1)} - 1 = 0$. При этом для $A_4^{(1)}$ $V_d = \{1, -1\}$ это означает, что принятыми высказываниями являются как аргументируемые, так и те, которые отвергаются в силу наличия контраргументов при отсутствии аргументов.

Для нестандартных логик аргументации можно выдвинуть

---

[3]Очевидно, что логика A_4, рассмотренная в [7], является нестандартной логикой аргументации.

гипотезу о том, что функции $\mathbf{g}^+$ и $\mathbf{g}^-$ индуктивно определимы для формул φ произвольной сложности. В частности, $v[\&_2^{(i)}(\varphi_1, \varphi_2)] = 0$, если и только если $(\mathbf{g}^+(\varphi_1) \neq \emptyset \,\&\, \mathbf{g}^-(\varphi_1) \neq \emptyset) \vee (\mathbf{g}^+(\varphi_2) \neq \emptyset \,\&\, \mathbf{g}^-(\varphi_2) \neq \emptyset) \vee ((\mathbf{g}^+(\varphi_1) \neq \emptyset \,\&\, \mathbf{g}^-(\varphi_1) = \emptyset) \,\&\, (\mathbf{g}^+(\varphi_2) = \emptyset \,\&\, \mathbf{g}^-(\varphi_2) \neq \emptyset)) \vee ((\mathbf{g}^+(\varphi_1) = \emptyset \,\&\, \mathbf{g}^-(\varphi_1) \neq \emptyset) \,\&\, (\mathbf{g}^+(\varphi_2) \neq \emptyset \,\&\, \mathbf{g}^-(\varphi_2) = \emptyset))$.

Интерпретации истинностных значений для $A_4^{(2)}$ и $A_4^{(3)}$ отличаются тем, что для $A_4^{(2)}$ предпочтительнее является непринятие высказывания посредством установления контраргументов (при отсутствии аргументов) по сравнению с установлением фактического противоречия, что соответствует порядку (2); а для $A_4^{(3)}$ предпочтительнее является непринятие высказывания посредством установления как наличия аргументов, так и наличия контраргументов, по сравнению с установлением фактической ложности, что соответствует порядку (3).

7 Замечание о теории истины и семантике логики аргументации

В [10] было отмечено, что развитие теории автоматического порождения гипотез делает актуальным применение различных теорий истины — теории соответствия (Аристотель — А. Тарский), теории когерентности и прагматической теории [5]. В самом деле, формирование базы фактов интеллектуальной системы требует применения теории соответствия, оценивание и автоматическое принятие гипотез основано на теории когерентности [5] — согласованности порождаемых гипотез с имеющимися знаниями (в том числе использование абдуктивного объяснения базы фактов для принятия гипотез). Выделение надежных гипотез требует проверки их полезности при практическом применении, что означает применение теории прагматической истины.

Аналогичное имеет место и в семантике логики аргументации, ибо атомарная оценка основана на применении функций $\mathbf{g}^+$ и $\mathbf{g}^-$ и множества возможных аргументов и контраргументов $\mathbf{A}$, что означает использование теории когерентности.

В [7] семантика A_4 была охарактеризована посредством аргументационной матрицы $\mathfrak{M} = \langle \{1, -1, 0, \tau\}, V_d, \mathbf{A}, \mathbf{g}^+, \mathbf{g}^- \rangle$ и функции оценки $v[\varphi]$ для соответствующего множества логических связок. Можно сформулировать реляционный вариант семантики логики аргументации, задав отношение частичного порядка $\geq$ на множестве $\mathbf{A}$, изменив, соответственно, определения $v[\varphi]$.

Аналогично A_4, рассмотренной в [7], для логик $A_4^{(i)}$, $i = 0, 1, 2, 3$ могут быть построены формализации доказательства и выводимости из гипотез посредством метода аналитических таблиц как для логики высказываний, так и для логики предикатов.

В последнее время активно развиваются идеи и средства формализации аргументации [13, 14, 16]. Обстоятельный обзор логик аргументации и их семантик содержится в [4].

8 Логики аргументации для ДСМ-метода автоматического порождения гипотез

В [8] были представлены принципы ДСМ-метода автоматического порождения гипотез, реализующего синтез познавательных процедур — индукции, аналогии и абдукции (с возможным применением дедукции после завершения формирования знаний в результате применения ДСМ-рассуждений).

ДСМ-метод АПГ для формализации рассуждений использует итеративную логику, которая обладает следующим принципом «раскрытия неопределенностей»:

$(\tau, n) = \{\langle 1, n+1\rangle, \langle -1, n+1\rangle, \langle 0, n+1\rangle\} \cup (\tau, n+1)$, где n и $n+1$ — числа применений правил правдоподобного вывода, выражающие степень правдоподобия порождаемых гипотез (чем меньше n, тем больше степень правдоподобия гипотезы) [8].

Истинностные значения ДСМ-логик определяются следующим образом:

$\langle \nu, n\rangle \,\&^{(i)} \langle \mu, m\rangle = \langle \nu \,\&^{(i)} \mu, max(n, m)\rangle$,

$\langle \nu, n\rangle \vee^{(i)} \langle \mu, m\rangle = \langle \nu \vee^{(i)} \mu, min(n, m)\rangle$,

$\langle \nu, n\rangle \supset \langle \mu, m\rangle = \langle \nu \supset \mu, max(n, m)\rangle$,

$\sim \langle \nu, n\rangle = \langle \sim \nu, n\rangle$.

Рассмотрим логические связки, определяемые следующими истинностными таблицами

$\&_2^{(4)}$	1	-1	0	τ
1	1	0	0	τ
-1	0	-1	0	τ
0	0	0	0	0
τ	τ	τ	0	τ

$\vee_2^{(4)}$	1	-1	0	τ
1	1	τ	1	1
-1	τ	-1	-1	-1
0	1	-1	0	τ
τ	1	-1	τ	τ

Тогда для симметричного ДСМ-метода АПГ $\&_2^{(4)}$ и $\vee_2^{(4)}$ оказываются адекватными в соответствии с рекуррентным определением множества истинностных значений $(\tau,\, n)$, определенным выше. В силу этого для симметричного ДСМ-метода АПГ адекватными являются логики аргументации $A_{4,i}^{(4)}$, $(i = 1,\, 2)$, исходными логическими связками которых являются $\sim$, $\supset$, $\{\&_n^{(4)}\}_{n\in N}$, $\{\vee_n^{(4)}\}_{n\in N}$ с $V_{d,1} = \{1\}$ и $V_{d,2} = \{1,\, -1\}$.

Отметим, что $A_{4,2}^{(4)}$ с $V_{d,2} = \{1,\, -1\}$ наиболее соответствует идее симметричного ДСМ-метода АПГ.

Логики аргументации $A_{4,i}^{(4)}$ являются нестандартными четырехзначными логиками аргументации, так как $\&_2^{(4)}$ и $\vee_2^{(4)}$ являются неассоциативными логическими связками, а их ограничения $\&_2^{(4)}\,|_{\{1,\,-1\}}$ и $\vee_2^{(4)}\,|_{\{1,\,-1\}}$ не являются, соответственно, $\&$ и $\vee$ двузначной логики.

В заключение следует указать, что всем логикам аргументации, рассмотренным выше, соответствуют формализации посредством метода аналитических таблиц.

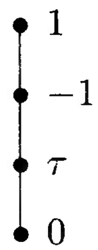
9 Логики аргументации $A_{4,i}^{(4)}$ и их ДСМ-расширения

Рассмотрим логики аргументации $A_{4,i}^{(4)}$, $i = 1,\, 2$ такие, что $V_{d,1} = \{1\}$, $V_{d,2} = \{1, -1\}$ соответственно для $A_{4,1}^{(4)}$ и $A_{4,2}^{(4)}$. Сигнатура $A_{4,i}^{(4)}$ состоит из $\sim$, $\supset$, $\{\&_n^{(4)}\}_{n\in N}$, $\vee^{(4)}$, где: $\sim$, $\supset$ — логические связки из $A_4^{(0)}$, а

$\&_2^{(4)}$	1	-1	0	τ
1	1	0	0	τ
-1	0	-1	0	τ
0	0	0	0	0
τ	τ	τ	0	τ

$\vee_2^{(4)}$	1	-1	0	τ
1	1	τ	1	1
-1	τ	-1	-1	-1
0	1	-1	0	τ
τ	1	-1	τ	τ

Легко видеть, что $\&_2^{(4)}$ является неассоциативной логической связкой, так как $0 = (1\,\&_2^{(4)} - 1)\,\&_2^{(4)}\tau \neq 1\,\&_2^{(4)}(-1\&_2^{(4)}\tau) = 1\,\&_2^{(4)}\tau = \tau$, а $p \vee^{(4)} q = max_4(p,q)$ для порядка



(4)

Мотивацией для введения $\&_2^{(4)}$ является следующее соображение, лежащее в основе процедурной семантики ДСМ-метода автоматического порождения гипотез [8]. Бесконечнозначная логика, посредством которой формализуются ДСМ-рассуждения [8], имеет конечное число типов истинностных значений и счетное множество истинностных значений $\overline{\nu}$ таких, что $\overline{\nu} = \langle \nu, n \rangle$, где ν — тип истинностных значений, а n — натуральное число, обозначающее число применений правил правдоподобного вывода (степень правдоподобия порождаемых гипотез). Минимальным множеством типов внутренних истинностных значений является множество $\{1, -1, 0, \tau\}$, где $1, \text{-}1, 0$ и τ соответственно обозначают «фактическую истину», «фактическую ложь», «фактическую противоречивость» и «недоопределенность». Причем $\overline{\nu} = \langle \nu, n \rangle$, где $\nu \in \{1, -1, 0\}$, а (τ, n) — множество возможных истинностных значений, что представляется рекуррентным соотношением

$$(\tau, n) = \{\langle 1,\, n+1 \rangle, \langle -1,\, n+1 \rangle, \langle 0,\, n+1 \rangle\} \cup (\tau,\, n+1).$$

Это означает, что ДСМ-метод автоматического порождения гипотез образует процедурную семантику для итеративного порождения гипотез и их истинностных значений. В этом смысле ДСМ-логика является итеративной логикой, множество истинностных значений которой порождается динамически, уменьшая при этом неопределенность высказываний из базы фактов, оценкой которых является $(\tau, 0)$. Очевидно, что факты имеют истинностные значения $\langle\nu, 0\rangle$, где $\nu \in \{1, -1, 0\}$ или оценку $(\tau, 0)$ — недоопределенность, а гипотезы имеют истинностные значения $\langle\nu, n\rangle(\nu \in \{1, -1, 0\})$ или оценку (τ, n), где $n > 0$, представляющую множество возможных истинностных значений порождаемых гипотез.

В ДСМ-методе автоматического порождения гипотез [8], как было отмечено выше, истинностные значения $\langle\nu, n\rangle(\nu \in \{1, -1, 0\})$ и множества истинностных значений (τ, n), представляющие неопределенность, содержат параметр n, где $n \in N$ (множество натуральных чисел). Параметр n представляет степень правдоподобия истинностных значений порождаемых гипотез посредством ДСМ-метода АПГ. Эти истинностные значения подчинены принципу: чем больше n, тем меньше степень правдоподобия порождаемых гипотез. В силу этого введем определения для ν, $\mu \in \{1, -1, 0\}$:

$\langle\nu, n\rangle \,\&_2^{(4)} \langle\mu, m\rangle = \langle\nu \,\&_2^{(4)} \mu, max(n, m)\rangle$,

$\langle\nu, n\rangle \vee_2^{(4)} \langle\mu, m\rangle = \langle\nu \vee_2^{(4)} \mu, min(n, m)\rangle$,

$\langle\nu, n\rangle \,\&_2^{(4)} (\tau, m) = \{\langle\nu \,\&_2^{(4)} 1, max(n, m+1)\rangle, \langle\nu \,\&_2^{(4)} -1, max(n, m+1)\rangle, \langle\nu \,\&_2^{(4)} 0, max(n, m+1)\rangle\} \cup (\nu \,\&_2^{(4)} \tau, max(n, m+1))$,

$\langle\nu, n\rangle \vee_2^{(4)} (\tau, m) = \{\langle\nu \vee_2^{(4)} 1, min(n, m+1)\rangle, \langle\nu \,\&_2^{(4)} -1, min(n, m+1)\rangle, \langle\nu \vee_2^{(4)} 0, min(n, m+1)\rangle\} \cup (\nu \vee_2^{(4)} \tau, min(n, m+1))$[4].

Предположим теперь, что логики аргументации $A_{4,i}^{(4)}$ являются базисными конечнозначными логиками, истинностными значениями которых являются типы истинностных значений ν, μ соответственно в $\langle\nu, n\rangle$ и (τ, m), принадлежащих бесконечнозначной логике ДСМ-метода АПГ. Проведем эвристические рассуждения для выяснения адекватности истинностных таблиц для $\&_2^{(4)}$ и $\vee_2^{(1)}$ ДСМ-метода АПГ.

(1) $\nu = 1$:

$\langle 1, n\rangle \,\&_2^{(4)} (\tau, m) = \{\langle 1 \,\&_2^{(4)} 1, max(n, m+1)\rangle, \langle 1 \,\&_2^{(4)} -1, max(n, m+1)\rangle, \langle 1 \,\&_2^{(4)} 0, max(n, m+1)\rangle\} \cup (1 \,\&_2^{(4)} \tau, max(n, m+1)) =$

[4]Напомним, что в $\langle\nu, n\rangle$ и (τ, m) — n и m обозначают число применений правил правдоподобного вывода (индукции и аналогии) [8].

$\{\langle 1, max(n, m+1)\rangle, \langle 0, max(n, m+1)\rangle, \langle 0, max(n, m+1)\rangle\} \cup (\tau, max(n, m+1)) = (\tau, max(n, m))$, так как $\{\langle 1, max(n, m+1)\rangle, \langle 0, max(n, m+1)\rangle\}$ представляют неопределенность с возможными типами истинностных значений «1» или «0».

(2) $\nu = -1$:

$\langle -1, n\rangle \&_2^{(4)} (\tau, m) = \{\langle -1 \&_2^{(4)} 1, max(n, m+1)\rangle, \langle -1 \&_2^{(4)} -1, max(n, m+1)\rangle, \langle -1 \&_2^{(4)} 0, max(n, m+1)\rangle\} \cup (-1 \&_2^{(4)} \tau, max(n, m+1)) = \{\langle 0, max(n, m+1)\rangle, \langle -1, max(n, m+1)\rangle, \langle 0, max(n, m+1)\rangle\} \cup (\tau, max(n, m+1)) = (\tau, max(n, m))$.

(3) $\nu = 0$:

$\langle 0, n\rangle \&_2^{(4)} (\tau, m) = \{\langle 0 \&_2^{(4)} 1, max(n, m+1)\rangle, \langle 0 \&_2^{(4)} -1, max(n, m+1)\rangle, \langle 0 \&_2^{(4)} 0, max(n, m+1)\rangle\} \cup (0 \&_2^{(4)} \tau, max(n, m+1)) = \{\langle 0, max(n, m+1)\rangle, \langle 0, max(n, m+1)\rangle, \langle 0, max(n, m+1)\rangle\} \cup \langle 0, max(n, m+1)\rangle = \langle 0, max(n, m)\rangle$.

(4) $\nu = \tau$:

$(\tau, n) \&_2^{(4)} (\tau, m) = (\tau, max(n, m))$.

Таким образом, адекватны равенства $1 \&_2^{(4)} \tau = \tau$, $-1 \&_2^{(4)} \tau = \tau$, $0 \&_2^{(4)} \tau = \tau$ и $\tau \&_2^{(4)} \tau = \tau$.

Соответственно, положим, что $1 \&_2^{(4)} 1 = 1$, $1 \&_2^{(4)} -1 = 0$, $p \&_2^{(4)} q = q \&_2^{(4)} p$ и $0 \&_2^{(4)} q = 0$. Тогда $\&_2^{(4)}(p, q)$ и ее n-арное расширение $\&_n^{(4)}(p_1, \ldots, p_n)$ адекватны итеративному порождению истинностных значений бесконечнозначной логики A_∞ ДСМ-метода АПГ.

Аналогично проверим адекватность истинностной таблицы $\vee_2^{(1)}$ ДСМ-методу АПГ.

(1) $\nu = 1$:

$\langle 1, n\rangle \vee_2^{(4)} (\tau, m) = \{\langle 1 \vee_2^{(4)} 1, min(n, m+1)\rangle, \langle 1 \vee_2^{(4)} -1, min(n, m+1)\rangle, \langle 1 \vee_2^{(4)} 0, min(n, m+1)\rangle\} \cup (\tau \vee_2^{(4)} 1, min(n, m+1)) = \{\langle 1, min(n, m+1)\rangle, (\tau, min(n, m+1)), \langle 1, min(n, m+1)\rangle\} \cup \{\langle 1, min(n, m+1)\rangle\} = \{\langle 1, min(n, m+1)\rangle, (\tau, min(n, m+1))\} = \langle 1, min(n, m+1)\rangle\}$, так как $1 \vee_2^{(4)} \tau = 1$.

(2) $\nu = -1$:

$\langle -1, n\rangle \vee_2^{(4)} (\tau, m) = \{\langle -1 \vee_2^{(4)} 1, min(n, m+1)\rangle, \langle -1 \vee_2^{(4)} -1, min(n, m+1)\rangle, \langle -1 \vee_2^{(4)} 0, min(n, m+1)\rangle\} \cup (\tau \vee_2^{(4)} -1, min(n, m+1)) = \{(\tau, min(n, m+1)), \langle -1, min(n, m+1)\rangle, \langle -1, min(n, m+1)\rangle\} \cup \{\langle -1, min(n, m+1)\rangle\} = \{(\tau, min(n, m+1)), \langle -1, min(n, m+$

$1))\} = \langle -1, min(n, m+1)\rangle$, так как $\tau \vee_2^{(4)} -1 = -1$.

(3) $\nu = 0$:

$\langle 0, n\rangle \vee_2^{(4)} (\tau, m) = \{\langle 0 \vee_2^{(4)} 1, min(n, m+1)\rangle, \langle 0 \vee_2^{(4)} -1, min(n, m+1)\rangle, \langle 0 \vee_2^{(4)} 0, min(n, m+1)\rangle\} \cup (0 \vee_2^{(4)} \tau, min(n, m+1)) = \{\langle 1, min(n, m+1)\rangle, \langle -1, min(n, m+1)\rangle, \langle 0, min(n, m+1)\rangle\} \cup (\tau, min(n, m+1)) = (\tau, max(n, m+1))$, так как $0 \vee_2^{(4)} \tau = \tau$ и в силу определения $(\tau, min(n, m+1))$.

(4) $\nu = \tau$:

$(\tau, n) \vee_2^{(4)} (\tau, m) = \{(\tau \vee_2^{(4)} 1, min(n+1, m+1)), (\tau \vee_2^{(4)} -1, min(n+1, m+1)), (\tau \vee_2^{(4)} 0, min(n+1, m+1))\} \cup (\tau \vee_2^{(4)} \tau, min(n+1, m+1)) = \{\langle 1, min(n+1, m+1)\rangle, \langle -1, min(n+1, m+1)\rangle, (\tau, min(n+1, m+1))\} = (\tau, min(n+1, m+1)))$, так как $1 \vee_2^{(4)} -1 = \tau$.

(5) $\langle 1, n\rangle \vee_2^{(4)} \langle -1, m\rangle = \langle 1 \vee_2^{(4)} -1, min(n, m)\rangle = (\tau, min(n, m))$, так как $1 \vee_2^{(4)} -1 = \tau$.

(6) Аналогично: $\langle -1, n\rangle \vee_2^{(4)} \langle 1, m\rangle = (\tau, min(n, m))$ в силу коммутативности $\vee_2^{(4)}$.

Так как $\langle \nu, n\rangle \&_2^{(4)} \langle \mu, m\rangle$ и $\langle \nu, n\rangle \vee_2^{(4)} \langle \mu, m\rangle$ при ν, $\mu \in \{1, -1, 0\}$ определяются посредством $\langle \nu \&_2^{(4)} \mu, max(n, m)\rangle$ и $\nu \vee_2^{(4)} \mu, min(n, m)\rangle$ соответственно установлена адекватность определения $\&_2^{(4)}$ и $\vee_2^{(4)}$ для $A_{4,i}^{(4)}$ и ее бесконечнозначных расширений $A_{\infty,i}^{(4)}$, являющихся вариантом ДСМ-логик с конструктивно порождаемым множеством истинностных значений. Базисной логике аргументации $A_{4,1}^{(4)}$ соответствует $A_{\infty,1}^{(4)}$ с множеством выделенных истинностных значений $V_{d,1}^{(\infty)} = \{\langle 1, n\rangle\}_{n\in N}$, а базисной логике аргументации $A_{4,2}^{(4)}$ соответствует $A_{\infty,2}^{(4)}$ с $V_{d,2}^{(\infty)} = \{\langle 1, n\rangle, \langle -1, n\rangle\}_{n\in N}$, где N — множество натуральных чисел.

Базисными логиками аргументации для бесконечнозначных ДСМ-логик $A_{\infty,i}^{(4)}$ являются логики $A_{4,i}^{(4)}$ такие, что истинностными значениями являются типы истинностных значений ν, входящие в качестве первой компоненты в $\langle \nu, n\rangle$ — истинностные значения логик $A_{\infty,i}^{(4)}$ $(i = 1, 2)$.

Сигнатурой $A_{\infty,i}^{(4)}$ является $\sim$, $\supset$, $\{\&_n^{(4)}\}_{n\in N}$, $\{\vee_n^{(4)}\}_{n\in N}$, где $\&_n^{(4)}$ и $\vee_n^{(4)}$ определяются для типов истинностных значений ниже следующим образом $(n \geq 2)$.

Обозначим посредством $v[\varphi]$ функцию оценки формул φ логик $A^{(4)}_{4,i}$.

$\&^{(4)}_n(\varphi_1, \dots, \varphi_n)$ и $\vee^{(4)}_n(\varphi_1, \dots, \varphi_n)$ соответственно обозначают n-членные конъюнкции и дизъюнкции.

(1) $v[\&^{(4)}_n(\varphi_1, \dots, \varphi_n)] = 1$, если и только если $v[\varphi_1] = v[\varphi_2] = \dots = v[\varphi_n] = 1$.

(2) $v[\&^{(4)}_n(\varphi_1, \dots, \varphi_n)] = -1$, если и только если $v[\varphi_1] = v[\varphi_2] = \dots = v[\varphi_n] = -1$.

(3) $v[\&^{(4)}_n(\varphi_1, \dots, \varphi_n)] = 0$, если и только если $\exists i \exists j(v[\varphi_i] = 1 \,\&\, v[\varphi_j] = -1) \vee \exists h(v[\varphi_h] = 0)$.

(4) $v[\&^{(4)}_n(\varphi_1, \dots, \varphi_n)] = \tau$, если и только если $\exists i(v[\varphi_i] = \tau) \,\&\, \forall j(v[\varphi_j] \neq 0) \,\&\neg \exists h \exists m(v[\varphi_h] = 1 \,\&\, v[\varphi_m] = -1)$.

(5) $v[\vee^{(4)}_n(\varphi_1, \dots, \varphi_n)] = 1$, если и только если $\exists i(v[\varphi_i] = 1) \,\&\, \forall j(v[\varphi_j] \neq -1)$.

(6) $v[\vee^{(4)}_n(\varphi_1, \dots, \varphi_n)] = -1$, если и только если $\exists i(v[\varphi_i] = -1) \,\&\, \forall j(v[\varphi_j] \neq 1)$.

(7) $v[\vee^{(4)}_n(\varphi_1, \dots, \varphi_n)] = 0$, если и только если $v[\varphi_1] = v[\varphi_2] = \dots = v[\varphi_n] = 0$.

(8) $v[\vee^{(4)}_n(\varphi_1, \dots, \varphi_n)] = \tau$, если и только если $\exists i \exists j((v[\varphi_i] = 1 \,\&\, v[\varphi_j] = -1) \,\&\, \forall h(h \neq i \,\&\, h \neq j) \supset (v[\varphi_h] = 0 \vee (v[\varphi_h] = \tau)) \vee \exists m(v[\varphi_m] = \tau \,\&\, \forall k(v[\varphi_k] = \tau \vee v[\varphi_j] = 0))$.

Рассмотрим некоторые функциональные свойства логик $A^{(4)}_{4,i}$.

Определим логическую связку эквиваленции аналогично [7]: $(p \equiv q) \rightleftharpoons \&^{(4)}_n((p \supset q), (q \supset p), (\sim p \supset \sim q), (\sim q \supset \sim p))$, где $\rightleftharpoons$ — знак равенства по определению. Легко показать, что

$$(p \equiv q) = \begin{cases} 1, \text{если } v[p] = v[q] \\ 0, \text{если } v[p] \neq v[q] \end{cases}.$$

Следовательно, для любой оценки v $v[(\varphi \equiv \psi)] = 1$ тогда и только тогда, когда $v[\varphi] = v[\psi]$[5].

Пусть $\nabla(p_1, \ldots, p_n)$ — четырехзначная n-арная логическая связка, пусть, далее, φ — формула, содержащая вхождение переменных $p_1, \ldots, p_n$ и логических связок $A^{(4)}_{4,i}$ (т.е. $\sim$, $\supset$, $\{\&^{(4)}_n\}_{n \in N}$, $\{\vee^{(4)}_n\}_{n \in N}$) и не содержащая вхождений ∇. Тогда будем говорить, что $\nabla(p_1, \ldots, p_n)$ выразима в $A^{(4)}_{4,i}$, если и только если для любой оценки v имеет место $v[\nabla(p_1, \ldots, p_n) \equiv \varphi] = 1$, т.е. для любой оценки v $v[\nabla(p_1, \ldots, p_n)] = v[\varphi]$.

Легко показать, что константы 1, -1, 0, τ выразимы в $A^{(4)}_{4,i}$:

$1 \equiv (p \supset p), -1 \equiv \sim (p \supset p), 0 \equiv \&^{(4)}_2((p \supset p), \sim (p \supset p)), \tau \equiv \vee^{(4)}_2((p \supset p), \sim (p \supset p))$.

Очевидно также, что $(p \equiv q)$ выразима в $A^{(4)}_{4,i}$, так как

$(p \equiv q) \equiv \&^{(4)}_4((p \supset q), (q \supset p), (\sim p \supset \sim q), (\sim q \supset \sim p))$.

Пусть $V^{(i)}_d$ — множества выделенных истинностных значений для логик $A^{(4)}_{4,1}$ и $A^{(4)}_{4,2}$ соответственно, тогда тавтологией $A^{(4)}_{4,i}$ будем называть формулу φ такую, что для всякой оценки v $v[\varphi] \in V^{(i)}_d$, где $V^{(1)}_d = \{1\}$, а $V^{(2)}_d = \{1, -1\}$.

Тавтологии и доказуемые формулы будем обозначать посредством $\models \varphi$ и $\vdash \varphi$ соответственно, где $\models$ — обозначение тавтологичности, а $\vdash$ — обозначение доказуемости формулы φ соответственно.

Очевидно следующее

УТВЕРЖДЕНИЕ 1. *В логике $A^{(4)}_{4,2}$ имеются тавтологии трех типов таких, что они принимают истинностные значения только «1», только «-1» и «1,-1».*

Пусть $\models_1$, $\models_2$ и $\models_3$ обозначают тавтологичность трех приведенных выше типов соответственно, тогда

$\models_1 (p \supset p), \models_2 (\sim (p \supset p)), \models_3 ((p \vee^{(4)}_2 \sim (p \supset p)) \supset (\sim p \supset \sim (p \supset p)))$.

Таким образом,

[5]Обратим внимание на тот факт, что в трехзначной логике Д.А. Бочвара логическая связка эквивалентности $\equiv$ определяется аналогично: $(p \equiv q) \rightleftharpoons (p \rightarrow q) \widehat{\cap} (q \rightarrow p) \widehat{\cap} (\sim p \supset \sim q) \widehat{\cap} (\sim q \supset \sim p)$, где $\widehat{\cap}$ и $\rightarrow$ соответственно внутренняя конъюнкция и внешняя импликация B_3 [3, 6].

$\models_1 \varphi \rightleftharpoons \forall v(v[\varphi] = 1)$,
$\models_2 \varphi \rightleftharpoons \forall v(v[\varphi] = -1)$,
$\models_3 \varphi \rightleftharpoons \forall v(v[\varphi] \subseteq \{1, -1\})$.
В самом деле,

p	$p \vee_2^{(4)} 0$	$\sim p$	$\sim p \vee_2^{(4)} 0$	$p \vee_2^{(4)} 0 \supset (\sim p \vee_2^{(4)} 0)$
1	1	-1	-1	-1
-1	-1	1	1	1
0	0	0	0	1
τ	τ	τ	τ	1

Таблица A

Согласно методу аналитических таблиц [15] построим классификацию формул логик $A_{4,i}^{(4)}$, особенностью которой будет введение параметра n — числа различных переменных, входящих в данную формулу φ.

Определим непомеченные формулы $A_{4,i}^{(4)}$ стандартным образом. Пусть φ — формула, тогда $J_1\varphi$, $J_{-1}\varphi$, $J_0\varphi$, $J_\tau\varphi$ будем называть помеченными формулами.

$$J_\nu\varphi = \begin{cases} t, \text{если } v[\varphi] = \nu \\ f, \text{если } v[\varphi] \neq \nu, \end{cases}$$

где t, f — истина и ложь двузначной логики соответственно.

Классификацию формул построим для помеченных формул $A_{4,i}^{(4)}$. Эта классификация учитывает наличие (отсутствие) и характер ветвления следствий, получаемых из посылок правил вывода, что соответствует определению оценки $v[\varphi]$ для формул $\sim \varphi, (\varphi \supset \psi), \&_n^{(4)}(\varphi_1, \dots, \varphi_n), \vee_n^{(4)}(\varphi_1, \dots, \varphi_n)$.

$\alpha^{(n)}$ — формулы ($n = 1, 2, \dots$):
$J_\nu(\sim \varphi)$, где $\nu \in \{1, -1, 0, \tau\}$, а $n = 1$;
$J_1(\&_n^{(4)}(\varphi_1, \dots, \varphi_n))$, $J_{-1}(\&_n^{(4)}(\varphi_1, \dots, \varphi_n))$, $J_0(\vee_n^{(4)}(\varphi_1, \dots, \varphi_n))$.
$\beta_1^{(2)}$ — формулы: $J_0(\varphi_1 \supset \varphi_2)$, $\beta_2^{(2)}$ — формулы: $J_\tau(\varphi_1 \supset \varphi_2)$;
$\beta_3^{(3)}$ — формулы: $J_{-1}(\varphi_1 \supset \varphi_2)$;
$\beta_4^{(4)}$ — формулы: $J_1(\varphi_1 \supset \varphi_2)$.
$\gamma^{(n)}$ — формулы: $J_0(\&_n^{(4)}(\varphi_1, \dots, \varphi_n))$.
$\delta^{(n)}$ — формулы: $J_1(\vee_n^{(4)}(\varphi_1, \dots, \varphi_n))$, $J_{-1}(\vee_n^{(4)}(\varphi_1, \dots, \varphi_n))$.

$\mu^{(n)}$ — формулы: $J_\tau(\vee_n^{(4)}(\varphi_1,\ldots,\varphi_n))$.

$\eta^{(n)}$ — формулы: $J_\tau(\&_n^{(4)}(\varphi_1,\ldots,\varphi_n))$.

Можно представить число ветвлений в правилах вывода формул соответствующего типа. Например, $\mathbf{B}_{\tau,n}^{\&(4)}$ обозначает число ветвлений для $\eta^{(n)}$ — формул.

Соответственно получаем $\mathbf{B}_{1,n}^{\vee(4)} = \mathbf{B}_{-1,n}^{\vee(4)} = \tilde{A}_3^n - \tilde{A}_2^n = 3^n - 2^n$ для $\delta^{(n)}$ — формул, где $\tilde{A}_m^k$ — число размещений с повторениями из m элементов по k элементам.

$\mathbf{B}_{0,n}^{\&(4)}$ для $\gamma^{(n)}$ — формул: $\mathbf{B}_{0,n}^{\&(4)} = \tilde{A}_3^n - 2\tilde{A}_2^n + n + 1 = 3^n - 2^{n+1} + n + 1$, а также

$\mathbf{B}_{\tau,n}^{\vee(4)} = A_n^2 \cdot \tilde{A}_2^{n-2} + \tilde{A}_2^n - 1 = n(n-1)2^{n-2} + 2^n - 1$, где A_n^2 — число размещений из n элементов по 2 для $\mu^{(n)}$ — формул; для $\eta^{(n)}$ — формул: $\mathbf{B}_{\tau,n}^{\&(4)} = 2\tilde{A}_2^n - 3 = 2^{n+1} - 3$.

В соответствии с классификацией формул логик $A_{4,i}^{(4)}$ приведем пример правил для числа $n = 1$ и $n = 2$.

$$\alpha^{(1)}$$

$$\frac{J_1(\sim\varphi)}{J_{-1}\varphi},\quad \frac{J_{-1}(\sim\varphi)}{J_1\varphi},\quad \frac{J_0(\sim\varphi)}{J_0\varphi},\quad \frac{J_\tau(\sim\varphi)}{J_\tau\varphi};$$

$$\alpha^{(2)}$$

$$\frac{J_1(\&_2^{(4)}(\varphi_1,\varphi_2))}{J_1\varphi_1, J_1\varphi_2},\quad \frac{J_{-1}(\&_2^{(4)}(\varphi_1,\varphi_2))}{J_{-1}\varphi_1, J_{-1}\varphi_2},\quad \frac{J_0(\vee_2^{(4)}(\varphi_1,\varphi_2))}{J_0\varphi_1, J_0\varphi_2};$$

$$\beta_1^{(2)} \qquad\qquad \beta_2^{(2)}$$

$$\frac{J_0(\varphi_1\supset\varphi_2)}{J_1\varphi_1,\ J_0\varphi_2 \mid J_\tau\varphi_1, J_0\varphi_2},\qquad \frac{J_\tau(\varphi_1\supset\varphi_2)}{J_1\varphi_1,\ J_\tau\varphi_2 \mid J_0\varphi_1, J_\tau\varphi_2},$$

$$\beta_3^{(3)}$$

$$\frac{J_{-1}(\varphi_1\supset\varphi_2)}{J_1\varphi_1,\ J_{-1}\varphi_2 \mid J_0\varphi_1, J_{-1}\varphi_2 \mid J_\tau\varphi_1, J_{-1}\varphi_2};$$

$$\beta_4^{(4)}$$

$$\frac{J_1(\varphi_1\supset\varphi_2)}{J_{-1}\varphi_1 \mid J_1\varphi_2 \mid J_0\varphi_1, J_0\varphi_2 \mid J_\tau\varphi_1, J_\tau\varphi_2};$$

$$\gamma^{(2)}$$

$$\frac{J_0(\&_2^{(4)}(\varphi_1,\varphi_2))}{J_0\varphi_1 \mid J_0\varphi_2 \mid J_1\varphi_1, J_{-1}\varphi_2 \mid J_{-1}\varphi_1, J_1\varphi_2};$$

$$\delta^{(2)}$$

$$\frac{J_1(\vee_2^{(4)}(\varphi_1,\varphi_2))}{J_1\varphi_1, J_1\varphi_2 \mid J_1\varphi_1, J_0\varphi_2 \mid J_1\varphi_1, J_\tau\varphi_2}$$

$$J_0\varphi_1, J_1\varphi_2 \mid J_\tau\varphi_1, J_1\varphi_2$$

$$\frac{J_{-1}(\vee_2^{(4)}(\varphi_1,\varphi_2))}{J_{-1}\varphi_1, J_{-1}\varphi_2 \mid J_{-1}\varphi_1, J_0\varphi_2 \mid J_{-1}\varphi_1, J_\tau\varphi_2}$$

$$J_0\varphi_1, J_{-1}\varphi_2 \mid J_\tau\varphi_1, J_{-1}\varphi_2$$

$$\mu^{(2)}$$

$$\frac{J_\tau(\vee_2^{(4)}(\varphi_1,\varphi_2))}{J_1\varphi_1, J_{-1}\varphi_2 \mid J_{-1}\varphi_1, J_1\varphi_2 \mid J_0\varphi_1, J_\tau\varphi_2}$$

$$J_\tau\varphi_1, J_0\varphi_2 \mid J_\tau\varphi_1, J_\tau\varphi_2$$

$$\eta^{(2)}$$

$$\frac{J_\tau(\&_2^{(4)}(\varphi_1,\varphi_2))}{J_1\varphi_1, J_\tau\varphi_2 \mid J_{-1}\varphi_1, J_\tau\varphi_2 \mid J_\tau\varphi_1, J_1\varphi_2}$$

$$J_\tau\varphi_1, J_{-1}\varphi_2 \mid J_\tau\varphi_1, J_\tau\varphi_2$$

Приведем пример $\mu^{(3)}$ — правила вывода для $n = 3$ членов дизъюнкции $\vee_3^{(n)}$:

$$J_\tau(\vee_3^{(4)}(\varphi_1,\varphi_2,\varphi_3))$$

$J_1\varphi_1, J_{-1}\varphi_2, J_0\varphi_3$	$J_0\varphi_1, J_1\varphi_2, J_{-1}\varphi_3$	$J_1\varphi_1, J_0\varphi_2, J_{-1}\varphi_3$
$J_{-1}\varphi_1, J_0\varphi_2, J_1\varphi_3$	$J_1\varphi_1, J_{-1}\varphi_2, J_\tau\varphi_3$	$J_\tau\varphi_1, J_1\varphi_2, J_{-1}\varphi_3$
$J_1\varphi_1, J_\tau\varphi_2, J_{-1}\varphi_3$	$J_{-1}\varphi_1, J_\tau\varphi_2, J_1\varphi_3$	$J_\tau\varphi_1, J_\tau\varphi_2, J_0\varphi_3$
$J_\tau\varphi_1, J_0\varphi_2, J_\tau\varphi_3$	$J_0\varphi_1, J_\tau\varphi_2, J_\tau\varphi_3$	$J_0\varphi_1, J_0\varphi_2, J_\tau\varphi_3$
$J_0\varphi_1, J_\tau\varphi_2, J_0\varphi_3$	$J_\tau\varphi_1, J_0\varphi_2, J_0\varphi_3$	$J_\tau\varphi_1, J_\tau\varphi_2, J_\tau\varphi_3$

В соответствии с классификацией $\alpha^{(n)}$-, $\beta_i^{(2)}$-, $\beta_3^{(3)}$-, $\beta_4^{(4)}$-, $\gamma^{(n)}$-, $\delta^{(n)}$-, $\mu^{(n)}$-, $\eta^{(n)}$-формул и определением числа разветвлений в правилах вывода $\mathbf{B}_{0,n}^{\&^{(4)}}$ для $\gamma^{(n)}$-формул, $\mathbf{B}_{\pm1,n}^{\vee^{(4)}}$ для $\delta^{(n)}$-формул, $\mathbf{B}_{\tau,n}^{\vee^{(4)}}$ для $\mu^{(n)}$-формул, $\mathbf{B}_{\tau,n}^{\&^{(4)}}$ для $\eta^{(n)}$-формул, а также в соответствии с определением числа разветвлений в правилах вывода построим соответствующую таблицу

Тип формул	Число разветвлений	Логические связки
$\alpha^{(n)}$	0	$J_\nu(\sim\varphi)$, $\nu\in\{1,-1,0,\tau\}$, $J_1(\&_n^{(4)})$, $J_{-1}(\&_n^{(4)})$, $J_0(\vee_n^{(4)})$
$\beta_1^{(2)}$,$\beta_2^{(2)}$	2	$J_0(\supset)$,$J_\tau(\supset)$
$\beta_3^{(3)}$	3	$J_{-1}(\supset)$
$\beta_4^{(4)}$	4	$J_1(\supset)$
$\gamma^{(n)}$	$\tilde{A}_3^n - 2\tilde{A}_2^n + 1 + n = 3^n - 2^{n+1} + n + 1$	$J_0(\&_n^{(4)})$
$\delta^{(n)}$	$\tilde{A}_3^n - \tilde{A}_2^n = 3^n - 2^n$	$J_1(\vee_n^{(4)})$,$J_{-1}(\vee_n^{(4)})$
$\mu^{(n)}$	$A_2^n\cdot\tilde{A}_2^{n-2} + \tilde{A}_2^n - 1 = n(n-1)2^{n-2} + 2^n - 1$	$J_\tau(\vee_n^{(4)})$
$\eta^{(n)}$	$2\tilde{A}_2^n - 3 = 2^{n+1} - 3$	$J_\tau(\&_n^{(4)})$

Таблица B

$A_2^n = n(n-1)$ — число размещений из n по 2, $\tilde{A}_m^n = m^n$ — число размещений с повторениями из m по n.

УТВЕРЖДЕНИЕ 2. *Числа разветвлений в правилах вывода логик $A_{4,i}^{(4)}$ $(i = 1, 2)$ определяются согласно таблице B.*

Блоком следствий правила вывода будем называть элемент разветвлений. Например, для $\beta_3^{(3)}$-формул имеем 3 блока $J_1\varphi_1$, $J_{-1}\varphi_2$; $J_0\varphi_1$, $J_{-1}\varphi_2$; $J_\tau\varphi_1$, $J_{-1}\varphi_2$ для посылки $J_{-1}(\varphi_1 \supset \varphi_2)$.

Для $\gamma^{(n)}$, $\delta^{(n)}$, $\mu^{(n)}$, $\eta^{(n)}$-формул определяются соответствующие правила вывода (аналогично [7] такие, что в каждом блоке (для $\delta^{(n)}$-, $\mu^{(n)}$-, $\eta^{(n)}$-правил) имеется n элементов). Всего же элементов в следствиях этих правил $B \cdot n$, где B — число блоков правил вывода. Например, число элементов в следствиях $\delta^{(n)}$-правил есть $\mathbf{B}_{\pm 1,n}^{\&(4)} \cdot n = (3^n - 2^n)n$. Число же элементов в следствиях $\gamma^{(n)}$-правил есть $(3^n - 2^{n+1} + 1)n + n$. Число элементов в следствиях $\alpha^{(n)}$-правил равно n.

Представление правил вывода логик аргументации является делом трудоемким, хотя для каждого конкретного n, используя определение $v[\varphi]$ и таблицу B, это сделать несложно. Из таблицы B видно, что $A_{4,i}^{(4)}$ имеют комбинаторную природу[6], что требует вычислительных ресурсов современных компьютеров, ибо человеческие ресурсы ограничены, по-видимому, для $n > 6$. В этом смысле можно говорить о компьютерной осуществимости логик $A_{4,i}^{(4)}$.

10 Доказуемость формул в $A_{4,i}^{(4)}$ $(i = 1, 2)$

Аналогично [7] сформулируем схемы правил вывода для помеченных формул логик $A_{4,i}^{(4)}$. Напомним, что формулой (непомеченной формулой) называется правильно построенное выражение для сигнатуры $p, q, r, \ldots$ (быть может, с нижними индексами, $\sim, \supset$, $\{\&_n^{(4)}\}_{n \in N}$, $\{\vee_n^{(4)}\}_{n \in N}$). Если φ — формула, то $J_\nu\varphi$ — помеченная формула, где $\nu \in \{1, -1, 0, \tau\}$.

В схемах правил посылки $\alpha^{(n)}$-формул будут представлены посредством $\alpha^{(n)}$, где $n \geq 1$, а следствие — посредством $\alpha_1, \ldots, \alpha_n$. В схемах $\beta_i^{(j)}$-формул $(i = 1, 2, 3, 4, j = 1, 2, 3, 4)$ посылки будут представлены посредством $\beta_i^{(j)}$, где i — номер вида правила, а j — число разветвлений (блоков) в следствии правила. Компонентами блоков будут $\beta_{k,m}^{(i)}$, где i — номер вида правила, k —

[6]Разумеется, в смысле комбинаторики, а не комбинаторной логики.

номер блока, а m — номер компоненты в k-том блоке. Таким образом, имеем следующие схемы правил вывода:

$$\frac{\alpha^{(n)}}{\alpha_1, \dots, \alpha_n}$$

$$\frac{\beta_1^{(2)}}{\beta_{11}^{(1)}, \beta_{12}^{(1)} \mid \beta_{21}^{(1)}, \beta_{22}^{(1)}} \qquad \frac{\beta_2^{(2)}}{\beta_{11}^{(2)}, \beta_{12}^{(2)} \mid \beta_{21}^{(2)}, \beta_{22}^{(2)}}$$

$$\frac{\beta_3^{(3)}}{\beta_{11}^{(3)}, \beta_{12}^{(3)} \mid \beta_{21}^{(3)}, \beta_{22}^{(3)} \mid \beta_{31}^{(3)}, \beta_{32}^{(3)}}$$

$\beta_1^{(2)}$ представляет $J_0(\varphi_1 \supset \varphi_2)$, а $\beta_2^{(2)}$ представляет $J_\tau(\varphi_1 \supset \varphi_2)$; соответственно $\beta_3^{(3)}$ представляет $J_{-1}(\varphi_1 \supset \varphi_2)$.

$\beta_4^{(4)}$ представляет $J_1(\varphi_1 \supset \varphi_2)$, а следствие этой посылки состоит из четырех блоков $\beta_1^{(4)}$; $\beta_2^{(4)}$; $\beta_{31}^{(4)}$, $\beta_{32}^{(4)}$; $\beta_{41}^{(4)}$, $\beta_{42}^{(4)}$.

Таким образом, получаем

$$\frac{\beta_4^{(4)}}{\beta_1^{(4)} \mid \beta_2^{(4)} \mid \beta_{31}^{(4)}, \beta_{32}^{(4)} \mid \beta_{41}^{(4)}, \beta_{42}^{(4)}}$$

В схемах правил посылки $\gamma^{(n)}$-формул будут представлены посредством $\gamma^{(n)}$, где $n \geq 2$, а следствия — посредством блоков, число которых $\mathbf{B}_{0,n}^{\&(4)} = \tilde{A}_3^n - 2\tilde{A}_2^n + 1 + n = 3^n - 2^{n+1} + n + 1$; т.е. $\mathbf{B}_{0,n}^{\&(4)} = B_{\gamma^{(n)}} + n$, где $B_{\gamma^{(n)}} = 3^n - 2^{n+1} + 1$.

В силу определения $v[\&_n^{(4)}(\varphi_1, \dots, \varphi_n)]$ и $\mathbf{B}_{0,n}^{\&(4)}$ из утверждения 2 получаем следующую схему $\gamma^{(n)}$-правила

$$\frac{\gamma^{(n)}}{\gamma_1 \mid \dots \mid \gamma_n \mid \gamma_{11}, \dots, \gamma_{1n} \mid \dots \mid \gamma_{B_{\gamma^{(n)}1}}, \dots, \gamma_{B_{\gamma^{(n)}n}}}$$

В схемах правил для $\delta^{(n)}$-формул посылки будут представлены посредством $\delta^{(n)}$, а следствия — посредством $\mathbf{B}_{\pm 1,n}^{\vee(4)} = \tilde{A}_3^n - \tilde{A}_2^n = 3^n - 2^n$.

Таким образом, получаем следующую схему $\delta^{(n)}$-правил

$$\frac{\delta^{(n)}}{\delta_{11},\dots,\delta_{1n}\;\Big|\;\dots\;\Big|\;\delta_{(B^{\vee(4)}_{\pm 1,n})1},\dots,\delta_{(B^{\vee(4)}_{\pm 1,n})n}}$$

Аналогично получаем схемы правил вывода для $\mu^{(n)}$- и $\eta^{(n)}$-формул:

$$\frac{\mu^{(n)}}{\mu_{11},\dots,\mu_{1n}\;\Big|\;\dots\;\Big|\;\mu_{(B^{\vee(4)}_{\tau,n})1},\dots,\mu_{(B^{\vee(4)}_{\tau,n})n}},$$

$$\frac{\eta^{(n)}}{\eta_{11},\dots,\eta_{1n}\;\Big|\;\dots\;\Big|\;\eta_{(B^{\&(4)}_{\tau,n})1},\dots,\eta_{(B^{\&(4)}_{\tau,n})n}},$$

где $\mathbf{B}^{\vee(4)}_{\tau,n} = \tilde{A}^n_2 \cdot \tilde{A}^{n-2}_2 + \tilde{A}^n_2 - 1 = n(n-1)2^{n-2} + 2^n - 1$, а $\mathbf{B}^{\&(4)}_{\tau,n} = 2\tilde{A}^n_2 - 3 = 2^{n+1} - 3$.

Согласно [15] аналитическая таблица двузначной логики высказываний есть ориентированное дихотомическое дерево такое, что его вершинами являются α- и β-формулы, растущее вниз от корня к листьям, которыми являются элементарные формулы (атомарные или их отрицания). Обобщение этого определения для логики аргументации A_4 содержится в [7]. Аналогично определим аналитическую таблицу для логик $A^{(4)}_{4,i}$.

Аналитической таблицей для логик высказываний $A^{(4)}_{4,i}$ $(i = 1, 2)$ будем называть растущее вниз (от корня к листьям) ориентированное дерево с разветвлениями, равными 0, 2, 3, 4, $\mathbf{B}^{\&(4)}_{0,n}$, $\mathbf{B}^{\vee(4)}_{\pm 1,n}$, $\mathbf{B}^{\vee(4)}_{\tau,n}$, $\mathbf{B}^{\&(4)}_{\tau,n}$ такое, что его корнем является помеченная формула $J_\nu\varphi$, где $\nu \in \{1, -1, 0, \tau\}$, а каждая вершина (отличная от корня) порождена применением $\alpha^{(n)}$-, $\beta^{(2)}_1$-, $\beta^{(2)}_2$-, $\beta^{(3)}_3$-, $\beta^{(4)}_4$-, $\gamma^{(n)}$-, $\delta^{(n)}$-, $\mu^{(n)}$- и $\eta^{(n)}$-правилами вывода.

Аналогично [7] определяются завершенная ветвь, замкнутая и открытая ветвь аналитической таблицы (а.т.) $\Im_{J_\nu\varphi}$, где $J_\nu\varphi$ — корень, а также замкнутая а.т. $\Im_{J_\nu\varphi}$.

Будем говорить, что непомеченная формула φ доказуема в $A^{(4)}_{4,1}$, если и только если а.т.$\Im_{J_{-1}\varphi}$ $\Im_{J_0\varphi}$, и $\Im_{J_\tau\varphi}$ являются замкнутыми. Соответственно, для доказуемой в $A^{(4)}_{4,1}$ формулы φ введем обозначение $\vdash_{A^{(4)}_{4,1}} \varphi$.

Будем говорить, что непомеченная формула φ доказуема в $A_{4,2}^{(4)}$, если и только если а.т. $\Im_{J_0\varphi}$, и $\Im_{J_\tau\varphi}$ являются замкнутыми. Соответственно, для доказуемой в $A_{4,2}^{(4)}$ формулы введем обозначение $\vdash_{A_{4,2}^{(4)}} \varphi$.

Очевидно, что имеет место

УТВЕРЖДЕНИЕ 3. *Если* $\vdash_{A_{4,1}^{(4)}} \varphi$, *то* $\vdash_{A_{4,2}^{(4)}} \varphi$.

Аналогично [7] определяются множества Хинтикки для логик $A_{4,i}^{(4)}$.

11 Некоторые утверждения о логике высказываний $A_{4,1}^{(4)}$

Для $A_{4,1}^{(4)}$ имеет место

ТЕОРЕМА 4 (О корректности $A_{4,1}^{(4)}$). *Если* $\vdash_{A_{4,1}^{(4)}} \varphi$, *то* $\models_1 \varphi$.

Напомним, что $\models_1 \varphi \rightleftharpoons \forall v(v[\varphi] = 1)$, а множество выделенных истинностных значений $A_{4,1}^{(4)}$ $V_d^{(1)} = \{1\}$.

Аналогично [15] доказываются две леммы:

ЛЕММА 5. *Если* $\Im_{j+1}$ *— непосредственное расширение а.т.* $\Im_j$ *и* $\Im_j$ *— истинная а.т., то* $\Im_{j+1}$ *— истинная а.т.*

ЛЕММА 6. *Пусть* $J_\nu\varphi$ *— корень а.т.* $\Im_{J_\nu\varphi}$, *если* $v[J_\nu\varphi] = t$, *то* $\Im_{J_\nu\varphi}$ *— истинная а.т.* ($\nu \in \{1, -1, 0, \tau\}$).

Аналитическая таблица $\Im_{J_\nu\varphi}$ называется истинной, если в ней существует истинная ветвь θ, то есть. множество всех вершин θ Set (θ) является таким, что $\exists v \forall \psi((\psi \in Set(\theta)) \supset v[\psi] = t)$, где ψ — помеченные формулы, имеющие вид $\psi = J_\mu\psi_1$, где ψ_1 — непомеченная формула $A_{4,1}^{(4)}$.

Лемма 5 доказывается разбором случаев $\alpha^{(n)}$, $\beta_1^{(2)}$, $\beta_2^{(2)}$, $\beta_3^{(3)}$, $\beta_4^{(4)}$, $\gamma^{(n)}$, $\delta^{(n)}$, $\mu^{(n)}$ и $\eta^{(n)}$. Лемма 6 доказывается индукцией по сложности формулы $J_\nu\varphi$, а шагом индукции является лемма 5.

Доказательство. Пусть неверно, что $\models_1 \varphi$, тогда $\exists v(v[\varphi] = \mu \,\&\, \mu \neq 1)$. Следовательно, $\mu \in \{0, -1, \tau\}$, но в силу $\vdash_1 \varphi$ имеем замкнутость $\Im_{J_{-1}\varphi}$, $\Im_{J_0\varphi}$, $\Im_{J_\tau\varphi}$. Из леммы 6 следует, что в а.т. $\Im_{J_\mu\varphi}$ существует открытая ветвь θ, что противоречит замкнутости $\Im_{J_{-1}\varphi}$, $\Im_{J_0\varphi}$ и $\Im_{J_\tau\varphi}$. Q.E.D.

Имеет место также

ТЕОРЕМА 7 (О слабой полноте). *Если* $\models_1 \varphi$, *то* $\vdash_{A_{4,1}^{(4)}} \varphi$.

Доказательство теоремы 7 аналогично доказательству теоремы о полноте логики A_4 в [7] с использованием определения множеств Хинтикки для $A_{4,1}^{(4)}$.

Рассмотрим теперь логику JA_4, имеющую семантику логики $A_{4,1}^{(4)}$ и являющуюся расширением двузначной логики [9].

12 Логика высказываний JA_4

Пропозициональные переменные $p, q, r, \ldots$ (быть может с нижними индексами).

Логические связки: J_ν, где $\nu \in \{1,\ -1,\ 0,\ \tau\}$, &, $\vee$, $\to$.

$V[p] \in \{1,\ -1,\ 0,\ \tau\}$; &, $\vee$, $\to$ — логические связки двузначной логики высказываний.

1°. $p, q, r, \ldots$ — квазиформулы;

2°. если φ — квазиформула, то $J_\nu\varphi$ — формула, где $\nu \in \{1,\ -1,\ 0,\ \tau\}$;

3°. если φ, ψ — формулы, то $(\varphi \,\&\, \psi), (\varphi \vee \psi), (\varphi \to \psi)$ — формулы;

4°. других формул нет.

$$J_\nu p = \begin{cases} t, \text{если } v[p] = \nu \\ f, \text{если } v[p] \neq \nu, \end{cases}$$

Помеченные формулы: $t\varphi, f\varphi$, где φ — формула.

Контрарные пары: $t\varphi, f\varphi$ и $J_\nu p, J_\mu p$, где $\nu \neq \mu$.

Правила вывода JA_4

$$\alpha\colon \quad \frac{t(\varphi \,\&\, \psi)}{t\varphi, t\psi}, \qquad \frac{f(\varphi \vee \psi)}{f\varphi, f\psi}, \qquad \frac{f(\varphi \to \psi)}{t\varphi, f\psi};$$

$$\beta\colon \quad \frac{f(\varphi \,\&\, \psi)}{f\varphi \mid f\psi}, \qquad \frac{t(\varphi \vee \psi)}{t\varphi \mid t\psi}, \qquad \frac{t(\varphi \to \psi)}{f\varphi \mid t\psi};$$

$$\xi\colon \quad \frac{tJ_\nu p}{J_\nu p}, \text{ где } \nu \in \{1,\ -1,\ 0,\ \tau\};$$

$$\lambda: \quad \frac{fJ_1p}{J_{-1}p \mid J_0p \mid J_\tau p}, \quad \frac{fJ_\tau p}{J_1p \mid J_{-1}p \mid J_0p},$$
$$\frac{fJ_{-1}p}{J_1p \mid J_0p \mid J_\tau p}, \quad \frac{fJ_0p}{J_1p \mid J_{-1}p \mid J_\tau p}.$$

Аналитической таблицей логики JA_4 будем называть ориентированное триадическое дерево, корнем которого является помеченная формула, а вершинами, следующими за корнем, являются формулы, порожденные применением α-, β-, ξ-, и λ-правил вывода.

Аналитическую таблицу будем называть замкнутой, если все ее ветви замкнуты, т. е. содержат контрарные пары.

Будем говорить, что фомула φ доказуема в JA_4, если а.т. $\Im_{f\varphi}$ с корнем $f\varphi$ является замкнутой.

Таким образом, $\vdash_{JA_4} \varphi \rightleftharpoons \Im_{f\varphi}$ — замкнутая а.т.

Для JA_4 имеют место теоремы о корректности и слабой полноте[7].

Множество формул $\Sigma = \{\varphi_1, \ldots, \varphi_n\}$ будем называть противоречивым, если а.т. $\Im$ с началом

$$\left.\begin{array}{l} t\varphi_1 \\ \vdots \\ f\varphi_n \end{array}\right\} \Im$$

является замкнутой.

Пример: $\Sigma = \{(J_1p \to J_1q), J_1p \,\&\, J_{-1}q)\}$, покажем, что Σ — противоречивое множество формул.

$$\begin{array}{l} \mathrm{t}(J_1p \to J_1q) \\ \mathrm{t}(J_1p \,\&\, J_{-1}q) \\ \quad \mathrm{t}(J_1p) \\ \quad \mathrm{t}(J_{-1}q) \\ \begin{array}{c|c} fJ_1p & tJ_1q \\ & J_1q \\ & J_{-1}q \end{array} \end{array}$$

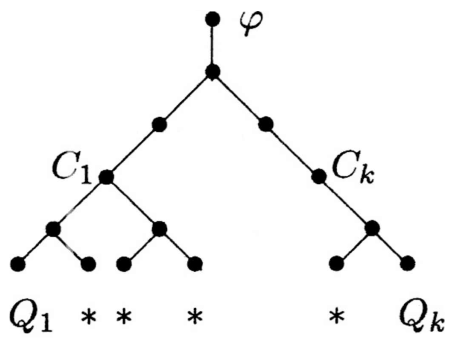
tJ_1p, fJ_1p и J_1q, $J_{-1}q$ соответственно — контрарные пары.

---

[7] JA_4 используется для распознавания рациональности мнений в интеллектуальных системах для анализа социологических данных [9].

Установим теперь некоторую связь между $A^{(4)}_{4,1}$ и JA_4. Для этого используем следующую простую идею.

Рассмотрим формулу двузначной логики высказываний такую, что она не является противоречием. Построим аналитическую таблицу $\Im_\varphi$ с корнем φ:



Пусть $Q_1, \ldots, Q_k$ — все открытые ветви (замкнутые ветви отметим *), пусть далее, $C_1, \ldots, C_k$ — элементарные конъюнкции, соответствующие ветвям $Q_1, \ldots, Q_k$. Таким образом C_i — конъюнкция всех элементарных формул, принадлежащих $Set(Q_i)$, где $Set(Q_i)$ — множество всех формул ветви Q_i. Тогда имеет место следующее:

$\models (\varphi \equiv (C_1 \vee \cdots \vee C_k))$, т.е. $(C_1 \vee \ldots C_k)$ есть дизъюнктивная нормальная формула (д.н.ф.)φ. Следовательно, в силу теоремы о слабой полноте

$\vdash (\varphi \equiv (C_1 \vee \cdots \vee C_k))$.

Воспользуемся этой идеей для помеченной формулы $J_1\varphi$ логики $A^{(4)}_{4,1}$. Пусть $\Im_{J_1\varphi}$ — а.т. с корнем $J_1\varphi$ логики $A^{(4)}_{4,1}$ и пусть $\exists v(v[\varphi] = 1)$.

Рассмотрим множество всех открытых ветвей $Q_1, \ldots, Q_k$ а.т. $\Im_{J_1\varphi}$. Пусть $C_1, \ldots, C_k$ — конъюнкции, образованные элементарными формулами вида J_μp, где $\mu \in \{1, -1, 0, \tau\}$. Тогда имеет место следующая

ЛЕММА 8. *$\models (J_1\varphi \leftrightarrow (C_1 \vee \cdots \vee C_k))$, где $(p \leftrightarrow q) \rightleftharpoons ((p \to q) \,\&\, (q \to p))$, а «$\to$» — импликация двузначной логики.*

Таким образом, для $\forall v(v[(J_1\varphi \leftrightarrow (C_1 \vee \cdots \vee C_k))] = t)$.

Формула $(C_1 \vee \cdots \vee C_k)$ является формулой JA_4[8]. Введем обозначение $\pi J_1\varphi = (C_1 \vee \cdots \vee C_k)$, $\pi J_1\varphi$ — перевод помеченной формулы $J_1\varphi$ в JA_4.

[8]Формулы логик $A^{(4)}_{4,i}$ являются J-определимыми в смысле [11].

Рассмотрим формулу
$\varphi = ((\vee_2^{(4)}(p, \sim (p \supset p))) \supset (\vee_2^{(4)}(\sim p, \sim (p \supset p))))$ (см. также Таблицу A). Можно показать, что:
$\pi J_1\varphi = (J_{-1}p \vee J_0 p \vee J_\tau p)$,
$\pi J_{-1}\varphi = J_1 p$,
$\pi J_1\varphi \vee \pi J_{-1}\varphi$ есть $(J_1 p \vee J_{-1}p \vee J_0 p \vee J_\tau p)$, а $(J_1 p \vee J_{-1}p \vee J_0 p \vee J_\tau p) \leftrightarrow t$ (закон исключенного пятого для $A_{4,i}^{(4)}$).

Имеет место

ТЕОРЕМА 9. *$\vdash_{A_{4,1}^{(4)}} \varphi$ тогда и только тогда, когда $\vdash_{JA_4} \pi J_1\varphi$, т.е. а.т. $\Im_{f\pi_{J_1\varphi}}$ является замкнутой.*

Доказательство. Использование леммы 8 и обратимости правил вывода для а.т. Q.E.D.

Аналогично случаю $A_{4,1}^{(4)}$ формулируются соответственно лемма 10 и лемма 11 со следующими изменениями. В лемме 10 рассматриваются две а.т. $\Im_{J_1\varphi}$ и $\Im_{J_{-1}\varphi}$ с корнями $J_1\varphi$ и $J_{-1}\varphi$ соответственно. Как для $A_{4,1}^{(4)}$, так и для $A_{4,2}^{(4)}$ ветвь θ а.т. называется истинной, если $\forall v\exists\psi((\psi \in Set(\theta)) \supset (v[\psi] = t))$, где ψ — помеченная формула. $\Im_i$ — истинная а.т., если в ней существует истинная ветвь θ (обозначение: $T_\nu(\theta)$ — истинная ветвь, а $T_\nu(\Im_i)$ — истинная а.т. $\Im_i$).

ЛЕММА 10. *Если $T_v(\Im_i)$, то $T_v(\Im_{i+1})$, где $\Im_{i+1}$ — непосредственное расширение а.т. $\Im_i$, полученное применением одного из правил вывода $A_{4,2}^{(4)}$.*

ЛЕММА 11. *Если $v[J_1\varphi] = t$ и $v[J_{-1}\varphi] = t$, то а.т. $T_v(\Im_{J_1\varphi})$ и $T_\nu(\Im_{J_{-1}\varphi})$, соответственно.*

Доказательство. Индукцией, шагом которой является утверждение леммы 10.

Очевидно, что случаи $\models_1 \varphi$ и $\models_2 \varphi$ сводятся к соответствующим рассуждениям для $A_{4,1}^{(4)}$. Поэтому рассмотрим случай, когда $\models_3 \varphi$ и $\Im_{J_1\varphi}$ и $\Im_{J_{-1}\varphi}$ незамкнутые а.т. Q.E.D.

ТЕОРЕМА 12 (О корректности $A_{4,2}^{(4)}$). *Если $\vdash_{A_{4,2}^{(4)}} \varphi$, то $\models_3 \varphi$.*

Напомним, что $\models_3 \varphi \rightleftharpoons \forall v(v[\varphi] \subseteq \{1, -1\})$, где $V_d^{(2)} = \{1, -1\}$.

Доказательство. Пусть неверно, что $\models_3 \varphi$, тогда $\exists v(v[\varphi] = \mu \,\&\, (\mu \in \{0, \tau\}))$; так как $\vdash_{A^{(4)}_{4,2}} \varphi$ по условию теоремы, то $\Im_{J_0\varphi}$, $\Im_\tau\varphi$ — замкнутые а.т. Из леммы 11 следует, что в а.т. $\Im_{J_\mu\varphi}$ существует открытая ветвь $\theta(\mu \in \{0, \tau\})$, что противоречит замкнутости а.т. $\Im_{J_0\varphi}$, $\Im_{J_\tau}\varphi$. Q.E.D.

Имеет место

ТЕОРЕМА 13 (О слабой полноте логики $A^{(4)}_{4,2}$). *Если* $\models_3 \varphi$, *то* $\vdash_{A^{(4)}_{4,2}}$.

$\models_3 \varphi \rightleftharpoons \forall v(v[\varphi] \in \{1, -1\})$, а $\vdash_{A^{(4)}_{4,2}} \varphi$ означает, что а.т. $\Im_{J_0\varphi}$ и $\Im_{J_\tau}\varphi$ замкнуты. Доказательство теоремы 13 аналогично доказательству теоремы о полноте логики аргументации A_4 [7] с использованием определений множеств Хинтикки для $A^{(4)}_{4,2}$.

Рассмотрим теперь связь логик $A^{(4)}_{4,2}$ и JA_4. Имеет место

УТВЕРЖДЕНИЕ 14. $\models_3 \varphi$ *тогда и только тогда, когда* $(\pi J_1\varphi \vee \pi J_{-1}\varphi) \leftrightarrow t$.

$\pi J_\nu\varphi$, где $\nu = \pm 1$, являются переводами помеченной формулы $J_\nu\varphi$ логики $A^{(4)}_{4,2}$ в язык логики JA_4. Эти переводы реализуются посредством а.т. $J_1\varphi$ и $J_{-1}\varphi$ соответственно, с использованием соответствующих д.н.ф.

Имеет место

ТЕОРЕМА 15. $\vdash_{A^{(4)}_{4,2}} \varphi$ *тогда и только тогда, когда* $\vdash_{JA_4} (\pi J_1\varphi \vee \pi J_{-1}\varphi)$, *т.е.* $\Im_{f(\pi_{J_1\varphi} \vee \pi_{J_{-1}\varphi})}$ *является замкнутой.*

Доказательство теоремы использует утверждение 14. Очевидно, что отрицание формулы $(\pi J_1\varphi \vee \pi J_{-1}\varphi)$ логики JA_4 является тождественно ложным.

Очевидно также следующее

УТВЕРЖДЕНИЕ 16. *Если* $\vdash_{A^{(4)}_{4,2}} \varphi$, *то* $\Im_{t\pi J_0\varphi}$, $\Im_{t\pi J_\tau\varphi}$ — *замкнутые аналитические таблицы.*

Пусть φ — формула $A^{(4)}_{4,2}$ такая, что $\models_1 \varphi$, т.е. $\forall v(v[\varphi] = 1)$, тогда $\models_2 (\sim \varphi)$, так как $\forall v(v[\varphi] = -1)$. В силу теоремы 13 получаем, что и $(\vdash_{A^{(4)}_{4,2}} \varphi)$ и $\vdash_{A^{(4)}_{4,2}} \sim \varphi$.

Однако формула $\&^{(4)}_2(\varphi, \sim \varphi)$ недоказуема, так как

$\forall v(v[\&_2^{(4)}(\varphi, \sim \varphi)] = 0)$, то в силу теоремы 12 $\&_2^{(4)}(\varphi, \sim \varphi)$ недоказуема в $A_{4,2}^{(4)}$. Следовательно, имеет место

УТВЕРЖДЕНИЕ 17. *Логика аргументации $A_{4,2}^{(4)}$ является паранепротиворечивой четырехзначной логикой*[9].

Легко видеть, что $((\&_2^{(4)}(\varphi, \sim \varphi)) \supset \varphi)$ доказуема тогда и только тогда, когда $\models_1 \varphi$, т.е. $\forall v(v[\psi] = 1)$, что следует из определения $(p \supset q)$. Если ψ есть $\vee_2^{(4)}(p, \sim p)$, то $v[\&_2^{(4)}(\varphi, \sim \varphi) \supset \vee_2^{(4)}(p, \sim p)] = 0 \supset \tau = \tau$, следовательно, эта формула недоказуема.

13 Замечание о ДСМ-логиках $A_{\infty,i}^{(4)}$

В [8] было показано, что ДСМ-метод автоматического порождения гипотез реализует синтез трех познавательных процедур — индукции, аналогии и абдукции. Взаимодействие этих процедур формализуется посредством ДСМ-рассуждений, которые являются конструктивной аргументацией в том смысле, что аргументируются формулы вида $J_{(\tau,2m)}(C \Rightarrow_1 A)$, аргументами же являются формулы вида $J(\tau, 2m+1)(C_i \Rightarrow_2 A_i)$, где $\nu \in \{1, -1, 0\}$, а результатом аргументации являются формулы вида $J_{\langle\mu,2m+2\rangle}(C \Rightarrow_1 A)$ такие, что $\mu \in \{1, -1, 0, \tau\}$, а $C_i \subset C$, $A_i \subseteq A$. В ДСМ-рассуждениях истинностные значения $\langle\nu, n\rangle$, $\nu \in \{1, -1, 0\}$ порождаются конструктивно посредством применения амплиативных правил вывода первого и второго рода — индукции и аналогии соответственно. Следовательно, теоретически ДСМ-логика является бесконечнозначной логикой аргументации с четырьмя типами истинностных значений $1, -1, 0, \tau$ (соответственно: фактическая истина, фактическая ложь, фактическое противоречие и неопределенность). Каждому типу истинного значения $\nu \in \{1, -1, 0, \tau\}$ соответствует тип правила правдоподобного вывода индукции и аналогии). Эти амплиативные правила вывода являются генераторами и гипотез и их оценок — истинностных значений $\overline{\nu} = \langle\nu, n\rangle, \nu \in \{1, -1, 0\}$, или множества возможных истинностных значений $(\tau, n) = \{\langle 1, n+1\rangle, \langle -1, n+1\rangle, \langle 0, n+1\rangle\} \cup (\tau, n+1)$, где τ представляет динамически уменьшаемую неопределенность. Следовательно, ДСМ-

[9] Обзор паранепротиворечивых логик содержится в [12].

логика является итеративной логикой, логикой «раскрытия» (возможного уменьшения) неопределенностей, конструктивной нечеткой логикой, ибо ее истинностные значения вида $\overline{\nu} = \langle \nu, n \rangle$, где $n = 0, 1, 2, \dots$, содержат степень правдоподобия n (число применений правил правдоподобного вывода); и, наконец, как было сказано выше, ДСМ-логики являются логиками конструктивной аргументации. Так как ДСМ-логики являются бесконечнозначными логиками с конечным числом типов истинностных значений [1, 2] (их минимальное число равно 4), то введем для них обозначение $A^{(4)}_{\infty,i}$, где $i = 1, 2$. $A^{(4)}_{\infty,i}$ — обозначение для ДСМ-логик с четырьмя типами истинностных значений $\{1, -1, 0, \tau\}$ такими, что выделенными истинностными значениями являются 1 или 1 и -1, т.е. $i = 1, 2$. Истинностные значения ДСМ-логик информативны и конструктивно интерпретируемы, ибо посредством индукции порождаются гипотезы о причинно-следственных зависимостях как позитивных (вызывающих исследуемый эффект), так и негативных (запрещающих наличие эффекта). Когда $i = 2$, то $\overline{\nu} = \langle \pm 1, n \rangle$ в $A^{(4)}_{4,2}$ — равноправные выделенные истинностные значения, соответствующие симметричному ДСМ-методу автоматического порождения гипотез. В этом случае имеются два генератора гипотез — предикаты M^+_n и M^-_n.

Для несимметричного же ДСМ-метода, предложенного Д.В. Виноградовым, адекватна логика $A^{(4)}_{4,1}$, а множество выделенных истинностных значений $V^{(1)}_d = \{1\}$.

Следует обратить внимание на тот факт, что ДСМ-метод автоматического порождения гипотез формулируется с использованием формальных языков двух уровней — внутреннего и внешнего языков представления знаний [8]. В [3] была развита важная для многозначных логик идея, используемая при анализе логических и семантических парадоксов. Логические связки трехзначной логики Д.А. Бочвара $\mathbf{B}_3$ сформулированы в соответствии с принципом отделимости. Внутренние связки $\sim$, $\widehat{\cap}$, $\supset$ (отрицание, конъюнкция и импликация соответственно) определены так, что если $v[p] = \tau$, где τ — интерпретируется как «бессмыслица», а пропозициональная переменная p входит в формулу φ, построенную посредством $\sim$, $\widehat{\cap}$, $\supset$, то имеет место $v[\varphi] = \tau$. Внешние связки J_t, J_f, J_τ, &, $\vee$, $\to$ областью определения имеют $\{t, f, \tau\}$ — логическую истину, логическую ложь и бессмыслицу соответственно; областью значений этих связок является множество $\{t, f\}$. Во внутреннем языке $\mathbf{B}_3$ формулы построены из переменных и логических связок $\sim$, $\widehat{\cap}$, $\supset$; во внешнем языке формулы построены из внутренних и внешних связок, но каждая переменная находится в сфере действия внешней связки (такие формулы называются внешними). Примерами базисов для логики $\mathbf{B}_3$ являются $\sim$, $\widehat{\cap}$, J_t и $\sim$, $\widehat{\cap}, \rightarrow$, где J_t — одна из J-связок: $J_\nu p = \begin{cases} t, \text{если } v[p] = \nu \\ f, \text{если } v[p] \neq \nu, \end{cases} \quad \nu \in \{t, f, \tau\}$.

Согласно идее Д.А. Бочвара, во внутреннем языке $\mathbf{B}_3$ выражаются факты, но доказательства утверждений о них в нем невыразимы и не существуют тавтологии; во внешнем языке логики $\mathbf{B}_3$ существуют тавтологии и выразимы доказательства как об утверждениях о фактах, представленных во внутреннем языке, так и об утверждениях об утверждениях внешнего языка. Следовательно, тавтологии во внутреннем языке не определимы, но они определимы лишь во внешнем языке.

Логики $A_{4,i}^{(4)}$ (и вообще рассмотренные в данной статье логики аргументации) формулируются во внутреннем языке с логическими связками $\sim$, $\&_n^{(4)}$, $\vee_n^{(4)}$, $\supset$, без использования внешних связок — J_ν-операторов. Однако в отличие от $\mathbf{B}_3$ в $A_{4,i}^{(4)}$ существуют тавтологии (точнее, формулы, областью значений которых является $V_d^{(i)}$ — множество выделенных истинностных значений). Теория доказательств $A_{4,i}^{(4)}$ и других логик аргументации (стандартных и нестандартных), рассмотренных в данной статье, построенная посредством метода аналитических таблиц, использует для определения помеченных формул J-операторы J_ν, $\nu \in \{1, -1, 0, \tau\}$.

Аналогичная конструкция может быть реализована и для бесконечнозначных ДСМ-логик $A_{\infty,i}^{(4)}$, $i = 1, 2$ с сигнатурой $\sim$, $\{\&_n^{(4)}\}_{n \in N}$, $\{\vee_n^{(4)}\}_{n \in N}$, $\supset$ и со счетным множеством J-операторов: $\{J_{\langle \nu, n \rangle}\}_{n \in N}, \nu \in \{\pm 1, 0\}$, и операторами $J_{(\tau, n)}$; все эти операторы используются для определения помеченных формул логик $A_{\infty,i}^{(4)}$. Логики $A_{\infty,i}^{(4)}$ являются внутренними логиками в том смысле, что в них представимо знание о фактах и гипотезах (при

$n > 0$ в $\overline{\nu} = \langle \nu, n \rangle$), а также возможно представление зависимостей между ними, выраженных посредством формул с главной связкой импликации ($\supset$).

В [11] рассмотрены логические языки бесконечнозначных ДСМ-логик, которые являются J-определимыми, т.е. J-операторы могут быть применены к атомарным формулам. Этот вариант ДСМ-логик адекватен для формализации как процедур порождения гипотез, так и для дедуктивной имитации правдоподобных рассуждений типа ДСМ, т.е. для ДСМ-метода автоматического порождения гипотез [1, 2].

Отметим также, что простым примером J-определимой логики является JA_4, рассмотренная в данной статье.

Автор выражает благодарность Д.В. Виноградову и И.Е. Явчуновской-Беловой за полезные замечания.

Литература

[1] *Аншаков О.М., Скворцов Д.П., Финн В.К.* Логические средства экспертных систем типа ДСМ // Семиотика и информатика. 1986. Вып. 28. С. 65–101.

[2] *Аншаков О.М., Скворцов Д.П., Финн В.К.* О дедуктивной имитации некоторых вариантов ДСМ-метода автоматического порождения гипотез // Семиотика и информатика. 1993. Вып. 33. С. 164–233.

[3] *Бочвар Д.А.* Об одном трехзначном исчислении и его применении к анализу парадоксов расширенного функционального исчисления // Математический сборник. 1938. Т. 4. № 2. С. 287–308.

[4] *Вагин В.Н., Головина Е.Ю., Загорянская А.А., Фомина М.В.* Достоверный и правдоподобный вывод в интеллектуальных системах М.: Физматлит, 2004.

[5] *Поппер К.Р.* Объективное знание. М.: УРСС, 2002.

[6] *Финн В.К.* Аксиоматизация некоторых трехзначных исчислений высказываний и их алгебр // Философия и логика. М.: Наука, 1974. С. 398–438.

[7] *Финн В.К.* Об одном варианте логики аргументации // НТИ. Сер. 2. 1996. № 5–6. С. 3–19.

[8] *Финн В.К.* Синтез познавательных процедур и проблема индукции // НТИ. Сер. 2. 1999. № 1–2. С. 8–45.

[9] *Финн В.К., Михеенкова М.А.* О логических средствах концептуализации мнений // НТИ. Сер. 2. 2002. № 6. С. 4–22.

[10] *Финн В.К.* Об интеллектуальном анализе данных // Новости искусственного интеллекта. 2004. № 3. С. 3–18.

[11] *Anshakov O.M., Finn V.K., Skvortsov D.P.* On axiomatization of many-valued logics associated with formalization of plausible reasoning // Studia Logica. 1989. XLVIII. № 4. P. 423–447. Имеется русская версия: *Аншаков О.М., Скворцов Д.П., Финн В.К.* Об аксиоматизируемости многозначных логик, связанных с формализацией правдоподобных рассуждений // Логические исследования. М.: Наука, 1993. С. 222–247.

[12] *Arruda A.I.* A survey of paraconsistent logic // Mathematical Logic in Latin America. 1980. North-Holland Publ. Co. P. 1–40.

[13] *van Benthem O.F, van Elmeren F.H., Grootendrost R. and Veltman F. (Eds.)* // Logic and Argumentation. Amsterdam. North-Holland, 1996.
[14] *Prakken H., Vreeswijk G.* Logic for defeasible argumentation // Handbook of philosophical Logic. Vol. 4. Kluwer Academic Publishers. Dordrecht, 2001.
[15] *Smullyan R.M.* First-Order Logic // Springer-Verlag. New York Inc., 1968.
[16] *Willard C.A.* Theory of Argumentation. Tuscaloosa and London: The University of Alabama Press, 1989.

Свойства ординалов в теории множеств с интуиционистской логикой

В.Х. Хаханян

ABSTRACT. We prove that some properties of ordinals do not take place in intuitionistic set theory and metamathematics of our proof is weaker than that which is in heyting-values models.

Одним из наиболее важных понятий в аксиоматических системах теории множеств является понятие ординала. Существует несколько эквивалентных с классической точки зрения определений понятия ординала в теории множеств. Ряд этих определений требует использования закона исключенного третьего при доказательстве основных свойств ординалов. Поэтому не все определения ординала, которые имеются в теории множеств с подлежащей классической логикой, можно прямо перенести в интуиционистскую теорию множеств. В качестве примера работ, в которых даются определения понятия ординала, а также приводятся контрпримеры для ряда других (классически верных) основных свойств ординалов, можно назвать работы [1, 5, 3]. Последняя из цитируемых работ лежит несколько в стороне от наших исследований, тем не менее представляет интерес, так как в ней дается определение ординала, для которого все классические свойства (т.е. свойства, при доказательстве которых необходимо было бы использовать закон исключенного третьего), могут быть доказаны и в интуиционистской теории множеств, например, свойства ординала-последователя (формулировки свойств даны ниже). В первых из двух названных работ дается следующее, приемлемое и классически, определение ординального числа: ординал есть транзитивное множество транзитивных множеств. Такое определение ординала дает возможность легко доказать, что ординал-последователь есть также ординал и что объединение любого множества ординалов также есть ординал. Кроме того, в первых двух из цитированных работ даются определения порядков разных видов: частичных, линейных, фундированных и полных порядков (или вполне упорядочений). В [5] доказано (частично), что приведенное выше определение ординала дает возможность доказать трансфинитную индукцию и трансфинитную рекурсию по ординалам. Приведенное выше определение ординала используется для построения кумулятивной иерархии R_α в интуиционистской теории множеств и (важный момент!) для определения ранга множества x так, что $x \in R_{rk(x)+1}$. Конечно, при таком способе определения понятия ординала последний является вполне фундированным множеством (см. [1]), но не является вполне упорядоченным множеством, так как принцип существования наименьшего элемента влечет полный закон искюченного третьего, т.е. превращает интуиционистскую теорию множеств в ее классический аналог (для доказательства этого факта см.[1] или [2]). Используя данное выше определение ординального числа, можно определить также понятие кардинального числа и развить форсинг, т.е. обсудить на интуиционистском уровне теории множеств континуум-гипотезу. Можно определить множество натуральных чисел и понятие транзитивного замыкания множества (см. [5]).

Работа [1] посвящена построению в интуиционистской теории множеств гейтингозначного универсума множеств как одной из основных моделей для аксиоматических систем теории множеств ZFIR и ZFIC. Точная формулировка этих двух основных аксиоматических систем теории множеств с подлежащей интуиционистской логикой в стандартном (односортном) языке первого порядка приведена, например, в [8]. Эти две аксиоматические системы теории множеств имеют различную дедуктивную силу, так как схема аксиом «collection» не выводится из схемы аксиом подстановки (для доказательства см. [6]; цитированный результат явился решением одной из наиболее трудных проблем из [7]). Однако доказательство того факта, что приведенный универсум является моделью отмеченных систем теорий множеств, внешним образом требует использования каждый раз теории ZFIC. В [9] было доказано, что при использовании моделей типа реализуемости достаточно внешним образом (конечно, в случае только системы ZFIR) использовать ту же самую теорию ZFIR, что усиливает результат Грайсона из [1]. Этот результат был анонсирован автором еще в 1982 г. в [4]. Используя гейтингозначный универсум, в [1] Грайсон приводит строгие контрпримеры для ряда свойств ординалов (см. также формулировки ниже), которые не выполняются в модели гейтингозначного универсума для отмеченных выше теорий множеств при приведенном ранее определении ординала (и, следовательно, не выводятся в самих теориях).

Дальнейший план изложения будет такой: сначала будет сформулирован ряд свойств ординалов и отмечено, какие из них верны в аксиоматических системах интуиционистских теорий множеств ZFIR и ZFIC, а какие нет (более точно: какие из них влекут полный закон исключенного третьего). Поскольку ряд свойств ординалов, не являющихся интуиционистски верными, влекут полный закон исключенного третьего (последнее будет доказано также и для тех свойств ординалов, для которых это не сделано в [1]), и поскольку каждая из отмеченных выше аксиоматических систем теорий множеств совместна с тезисом Чёрча (см., например, [8] или [9]), то соответствующие свойства ординалов не выводятся в отмеченных выше теориях, но метаматематика нашего доказательства окажется слабее, чем в [1].

Теорема

А) следующие свойства ординалов верны (выводятся) в ZFIR:

(i) $\alpha < \beta \Leftrightarrow \alpha^+ \leq \beta$

(ii) $\bigcup A \leq \beta \Leftrightarrow \forall \alpha \in A. \alpha \leq \beta$

(iii) $\alpha < \beta \leq \gamma \Rightarrow \alpha < \gamma$

Доказательства утверждений пункта А достаточно рутинны и оставляются читателю в качестве упражнений.

Б) следующие, классически верные, свойства ординалов влекут полный закон исключенного третьего:

1. $\alpha < \beta \vee \alpha = \beta \vee \alpha > \beta$
2. $\alpha \leq \beta \vee \beta \leq \alpha$
3. $\alpha \leq \beta \Rightarrow \alpha < \beta \vee \alpha = \beta$
4. $\alpha < \beta \Rightarrow \alpha^+ < \beta \vee \alpha^+ = \beta$
5. $\alpha \leq \beta < \gamma \Rightarrow \alpha < \gamma$

Следуя [1], дадим следующие определения. Ординал α есть ординал-последователь, если $\exists\beta.\alpha = \beta^+$. Ординал называется слабо предельным, если $\forall\beta \in \alpha.\exists\gamma \in \alpha.\beta \in \gamma$. Ординал α называется сильно предельным, если $\forall\beta \in \alpha.\beta^+ \in \alpha$.

Следующие, классически верные, свойства ординалов также (каждое в отдельности) влекут полный закон исключенного третьего:

а) каждый ординал есть 0, или ординал-последователь, или слабо предельный;

б) все слабо предельные ординалы являются сильно предельными.

Приведем полные доказательства всех сформулированных выше утверждений об ординалах в пунктах Б), а) и б).

1. Полагаем: $\alpha = 0, \beta = \{x : x = 0 \wedge \varphi\} = 1'$. Если верен первый член дизъюнкции, то $0 \in 1'$, т.е. имеем φ и $\varphi \vee \neg\varphi$. Если выполнен второй член дизъюнкции, то $\beta = \alpha = 0$, а тогда имеем $\neg\varphi$ и также $\varphi \vee \neg\varphi$. Заметим, что неверно, что $\beta \in \alpha$ и поэтому снова имеем $\varphi \vee \neg\varphi$.

2. Полагаем $\alpha = \{0, 1', \{0, 1'\}\}, \beta = \{0, 1\}$. Если $\alpha \leq \beta$, то $1' = 0$ или $1' = 1$, а тогда в любом случае получаем $\varphi \vee \neg\varphi$. Если же $\beta \leq \alpha$, то тогда $1 = 1'$ или $1 = \{0, 1'\}$ и снова имеем $\varphi \vee \neg\varphi$.

3. В этом случае полагаем $\alpha = 1, \beta = \{x : x = 0 \vee (x = 1 \wedge \varphi)\}$. Очевидно, что $\alpha \subseteq \beta$. Если $1 \in \beta$, то тогда выполнено φ и, следовательно, $\varphi \vee \neg\varphi$. Если же $\{x : x = 0\} = 1 = \{x : x = 0 \vee (x = 1 \wedge \varphi)\}$, то тогда имеем $\neg\varphi$. В обоих случаях получаем $\varphi \vee \neg\varphi$.

4. Для этого случая полагаем $\alpha = 0; \alpha^+ = 0 \bigcup \{0\} = \{x : x = 0\} = 1; \beta = \{x : x = 0 \vee (x = 1 \wedge \varphi)\}$. Понятно, что $0 \in \beta$. Если теперь $1 \in \beta$, то имеем φ и, как и обычно, $\varphi \vee \neg\varphi$. Если же $1 = \beta$, то тогда получаем $\neg\varphi$ и опять, по законам логики, $\varphi \vee \neg\varphi$.

5. В этом случае полагаем $\alpha = 1', \beta = 1, \gamma = \{0, 1\}$. Ясно, что $\alpha \subseteq \beta$ и $\beta \in \gamma$. Но если $\alpha \in \gamma$, то либо $1' = 0$, а тогда $\neg\varphi$, либо $1' = 1$, а тогда φ и в любом случае имеем опять $\varphi \vee \neg\varphi$.

Докажем теперь утверждение а). Для этого полагаем $\alpha = 1'$. Если теперь $\alpha = 0$, то получаем $\neg\varphi$. Если $\alpha = \beta^+$, то $\beta \in \alpha$, т.е. $\beta = 0$ и φ и $\varphi \vee \neg\varphi$. Наконец, α не может быть предельным ординалом по определению, так как содержит не более одного элемента (это очевидное утверждение). Во всех вариантах получаем $\varphi \vee \neg\varphi$.

Дадим, следуя наметкам из [1], доказательство б). Пусть $2' = \{0, 1'\}$ и пусть $\alpha = \{0, 1', 2', (2')^+, (2')^{++}, ...\}$. Ясно, что α — слабо предельный ординал (заметим, что всякий сильно предельный ординал является слабо предельным просто прямо по определению), так как $0 \in \alpha$ и $0 \in 2'$ и $2' \in \alpha$, а для остальных ординалов из α это видно непосредственно. Если же α является сильно предельным, то, поскольку $0 \in \alpha$, то и 0^+ также должен принадлежать α, но $0^+ = 1$ может быть равен только $1'$, а тогда необходимо следует φ и $\varphi \vee \neg\varphi$.

Так как во всех предыдущих рассуждениях формула φ выбиралась всегда произвольно, то мы доказали, что каждое из утверждений (1)–(5) (а) и (б) влечет полный закон исключенного третьего.

В заключение отметим следующее: в наших доказательствах активно использовались интуиционистская логика предикатов и аксиома объемности.

Как уже отмечалось ранее, в [9] было дано полное доказательство того факта, что тезис Чёрча CT совместен с теорией ZFIR, причем (и это важный момент!) доказательство внешним образом проводится в рамках аксиоматической теории множеств ZFIR. Таким образом, приведенный результат сильнее в метаматематическом плане, чем результат Грайсона из [1].

Литература

[1] *Grayson R.* Heyting-valued models for intuitionistic set theory // Lecture Notes in mathematics. V. 753. 1979. P. 402-414.

[2] *Myhill J.* Some properties of intuitionistic Zermelo-Fraenkel set theory // Lecture Notes in Mathematics. V. 337. 1973. P. 206-231.

[3] *Taylor P.* Intuitionistic sets and ordinals // The Journal of Symbolic Logic. V. 61, n. 3, September 1996. P. 705-744.

[4] *Хаханян В.Х.* Интуиционистская теория множеств // Логика и основания математики. Тезисы VIII Всесоюзной конференции «Логика и методология науки». Паланга 26-28 сентября 1982. С. 91-94.

[5] *Powell W.* Extending Gödel's negative interpretation to ZF// The Journal of Symbolic Logic. V. 40, n. 2. 1975. P. 221-229.

[6] *Friedman H., Scedrov A.* The lack of definable witnesses and provably recursive functions in intuitionistic set theories // Advances in Mathematics. V. 57, n. 1. 1985. P. 1-13.

[7] *Friedman H.* One hundred and two problems in mathematical logic // The Journal of Symbolic Logic. V. 40, n. 2. 1975. P. 113-130.

[8] *Хаханян В.Х.* Интуиционистская теория множеств: модели и метаматематика. М.: МИИТ, 2003.

[9] *Хаханян В.Х.* Интуиционистское доказательство совместности тезиса Чёрча с теорией множеств // Известия вузов. Серия «Математика». 1993. № 3. С. 81-83.

Функциональная алгебраическая модель для S-реализуемости

В.Х. Хаханян

abstract. We present here the functional algebraic model for so-called «s-realizability» that is a modification of well-known Kleene's realizability.

В [1] (см. также [2]) А.Г. Драгалин предложил класс интерпретаций для интуиционистской арифметики в виде функциональных алгебраических моделей (ФАМ). Изложение в [1] и [2] сопровождается рядом примеров, хотя ряд очевидных деталей опущен. В [3] было доказано, что для штрих-реализуемости Клини эквивалентной ей ФАМ не существует, т.е. не всякая модель арифметики может быть представлена как ФАМ. В каждом конкретном случае, т.е. для каждой конкретной модели арифметики, вопрос о представлении ее виде ФАМ необходимо решать заново, но зато дальнейшие результаты о совместности и независимости для интуиционистской арифметики, для получения которых и была построена рассматриваемая конкретная модель арифметики, уже автоматически становятся верными.

Основной целью А.Г. Драгалина как автора ФАМ было, вероятно, получение, в первую очередь, представления в виде ФАМ хорошо известных моделей типа реализуемости (С.К. Клини, В.А. Лифшица, М. Бизона и др.).

В настоящей заметке будет построена ФАМ, эквивалентная так называемой специальной реализуемости (для точного описания последней см. [2, с.64-65]). Эта реализуемость была использована в [2] для доказательства совместности с HA и CT принципа P (для формулировки последнего принципа см. также [2]). Теория HA+CT+P носит название «антитрадиционный конструктивизм». Принципы P и M противоречат друг другу в теории HA+CT (см. для доказательства [2]). В случае построения модели для теории HA+CT+P используются не все частично-рекурсивные функции, а только часть из них, что отражает некоторую специальную, узкоконструктивную, точку зрения.

Здесь мы не приводим хорошо известные свойства ФАМ для интуиционистской арифметики (все необходимые сведения можно найти в [1] или [2]). Следуя [1], мы определим только набор $\mathbf{B}, \mathbf{F}, \widehat{\mathbf{Pr}}$ (см. [1, с. 189]), т.е. псевдобулеву алгебру, функциональную псевдобулеву алгебру или множество форм и оценку в последней для атомарных формул нашего языка арифметики.

Итак, пусть $\hat{x}\varphi$ — вид, где φ — формула, а x — переменная ($\hat{x}$ играет роль квантора). Если $\hat{x}\varphi$ — вид и t — терм, то $t \in \widehat{x\varphi}$ есть результат подстановки терма t в формулу φ, т.е. $\varphi(x|t)$. Каждый вид можно рассматривать как функцию относительно операции замещения ее параметров объектами из области $\mathbf{D}$ (напомним, см. также [1], что область $\mathbf{D}$ для арифметики состоит из констант для натуральных чисел $\overline{1}, \overline{2}, \ldots$ и счетного множества каналов [x], [y],..., которые интуитивно изображают натуральные числа, о которых ничего не известно). Мы будем рассматривать упорядоченные пары $< a, b >$, где a и b будут видами, при этом будет выполняться, что $\forall x(x \in b \Rightarrow x \in a)$, где a и b как виды будут формами относительно операции замещения параметров. Наша функциональная псевдобулева алгебра $\mathbf{F}$ будет состоять из описанных выше упорядоченных пар. Элементами же псевдобулевой алгебры $\mathbf{B}$ будут значения этих форм на элементах области $\mathbf{D}$, т.е. множество всех оцененных пар $< a, b >$, где пара $< a, b >$ есть элемент $\mathbf{F}$ (для более подробного и детального описания видов и алгебр см. [1, с. 189-191] или [2, с. 215-218, пп. 6 и 7]).

Зададим теперь отношение $\leq$ в алгебре $\mathbf{B}$ (как и в цитируемой литературе [1] и [2], мы не будем факторизовать это отношение, рассматривая все дальнейшие операции в ПБА $\mathbf{B}$ с точностью до следующего естественного отношения эквивалентности $\approx$: $< a, b > \approx < c, d > \Leftrightarrow [< a, b > \leq < c, d >$ и $< c, d > \leq < a, b >)$. Отношение же $< a, b > \leq < c, d >$ определим покомпонентно, в точности так, как это сделано в [1, с.189]. Напомним это определение. Предположим, что a и c — две первых (или вторых) компоненты элементов ПБА $\mathbf{B}$, т.е. имеют вид $a([x_1],...,[x_n])$ и $c([x_1],...,[x_n])$, где $[x_1],...,[x_n]$ — полный список каналов, встречающихся в этих видах. Выберем новые переменные $y_1,...,y_n$ и положим $\acute{a} = a(y_1,...,y_n), \acute{c} = c(y_1,...,y_n)$. Мы говорим в этом случае, что $\acute{a}$ и $\acute{c}$ получены из a и c путем согласованного превращения каналов в переменные. Ясно, что $\acute{a}$ и $\acute{c}$ уже суть неоцененные виды. Определим теперь $a \leq c$ тогда и только тогда, когда существует такое натуральное число m, что в стандартной арифметической модели выполняется $\exists zv(T_n(m, y_1,...,y_n, z) \wedge (v = Uz) \wedge R[\acute{a}, \acute{c}, v])$.

Здесь $R[a, c, e]$ есть следующее отношение (a и c — виды, а e — новая переменная): $R[a, b, e] \rightleftharpoons \forall u((u \in a) \Rightarrow \exists zv(T(e, u, z) \wedge (v = Uz) \wedge (v \in b)))$. Комментарий для отношения $R[a, c, e]$ дан в [1] на с. 189.

Теперь добавим такое условие: наша функция сводимости, задаваемая отношением $R[a, c, e]$, определена всюду на множестве $\{x : x \in a\}$ и, следовательно, на множестве $\{x : x \in b\}$ и элементы первого множества функция сводимости переводит в множество $\{x : x \in c\}$, а элементы второго множества — в множество $\{x : x \in d\}$.

Отметим, что все наши содержательные рассуждения можно (см. [1] и [2]) формализовать в НА.

Теперь определим функцию $\widehat{\mathbf{Pr}}$ и операции в ПБА $\mathbf{B}$.

Если φ — атомарная формула, то ее значением является форма $< \widehat{x}(x = x), \widehat{y}\varphi(x_1,...,x_n) >$.

Наконец, определим в ПБА операции покомпонентно, сначала для первых компонент наших оцененных пар, а затем и для вторых компонент. Итак, пусть заданы пары из ФПБА $< a, c >$ и $< b, d >$.

Определение операций для первых членов пар:
$a \wedge c \rightleftharpoons \widehat{x}\exists uv(x = j(u, v) \wedge u \in a \wedge v \in c)$;
$a \vee c \rightleftharpoons \widehat{x}\exists uv(x = j(u, v) \wedge j_1(v) \in a \wedge j_2(v) \in c)$;
$a \to c \rightleftharpoons \widehat{x}\forall u(u \in a \Rightarrow !\{x\}(u) \wedge \{x\}(u) \in c)$;
$\forall xa \rightleftharpoons \widehat{x}\forall y(!\{x\}(y) \wedge \{x\}(y) \in a)$;
$\exists xa \rightleftharpoons \widehat{x}\exists uv(x = j(u, v) \wedge u \in a)$; .

Нетрудно индукцией по построению вида показать, что $\forall a \exists n. n \in a$.

Определение операций для вторых членов пар:

$b \wedge d \rightleftharpoons \widehat{x}\exists uv(x = j(u,v) \wedge u \in b \wedge v \in d)$;
$b \vee d \rightleftharpoons \widehat{x}(x \in (a \vee c) \wedge j_1(x) = 0 \Rightarrow j_1 j_2(x) \in b) \wedge (j_1(x) \neq 0 \Rightarrow j_2 j_2(x) \in d)))$;
$b \rightarrow d \rightleftharpoons \widehat{x}(x \in a \rightarrow c) \wedge \forall y(y \in b \Rightarrow !\{x\}(y) \wedge \{x\}(y) \in d)$;
$\forall yb \rightleftharpoons \widehat{x}(x \in \forall ya \wedge \forall z(!\{x\}(z) \wedge \{x\}(z) \in b))$;
$\exists yb \rightleftharpoons \widehat{x}\exists uv(x = j(u,v) \wedge j_1(u) \in b)$.
Определение операций в ПБА **B** закончено.

ЛЕММА 1. *Если φ — формула языка теории HA, x — переменная, не входящая в данную формулу, то $||\varphi||$ в нашей модели есть следующая форма $< \widehat{x}(x \in \varphi), \widehat{x}(xs\varphi) >$ (см. также для сравнения определение из [2] на с. 64).*

Доказательство леммы 1 проводится несложной индукцией по построению формулы.

ТЕОРЕМА 2. *Пусть φ — предложение языка теории HA. Тогда $||\varphi|| = 1 \Leftrightarrow \exists x(xs\varphi \wedge x \in \varphi)$ (т.е. x — специально реализует формулу φ и x есть кандидат в реализаторы этой же формулы φ (сравни в [2], с. 64)).*

Доказательство теоремы 2 легко следует из леммы 1.

Литература

[1] *Драгалин А.Г.* Функциональные алгебраические модели // Семиотика и информатика. М.: ВИНИТИ, 1979. Т. XIII. С. 184–195.

[2] *Драгалин А.Г.* Математический интуиционизм. Введение в теорию доказательств. М.: Наука, 1979. С. 64, 215–218.

[3] *Хаханян В.Х.* Функциональная алгебраическая модель, эквивалентная штрихреализуемости Клини // Математические заметки, 2004. Т. 75. Вып. 1. С. 155–156.

К вопросу о конечности конечно-порожденных импликативных полуструктур

В.И. Хомич, А.И. Федосеев

ABSTRACT. In this paper we study finitely generated implicative semilattices. We obtain the criteria of finiteness for finitely generated implicative semilattices with a least element.

1 Введение

Настоящая статья посвящена изучению конечно-порожденных импликативных полуструктур.

Известно (см., например, [1–6]), что псевдобулевы алгебры, импликатуры, импликативные полуструктуры и импликативные структуры являются моделями для интуиционистской пропозициональной логики и ее фрагментов. Для решения многих задач дедуктивного характера, возникающих при исследовании этой логики, применяются алгебраические методы, использующие результаты, касающиеся упомянутых выше алгебр. В работах [5, 6] эти алгебры называются ν-алгебрами, где ν — набор логических пропозициональных знаков, содержащий знак импликации и определяющий вид алгебры. В дальнейшем мы будем пользоваться обоими названиями этих алгебр.

В исследованиях псевдобулевых алгебр, импликатур, импликативных полуструктур и структур значительное место занимает изучение конечных и конечно-порожденных алгебр. Очевидно, что конечная алгебра является конечно-порожденной. Известно [7], что существует бесконечная псевдобулева алгебра с одним образующим элементом. Возникает вопрос: при каких условиях конечно-порожденная алгебра будет конечной?

В работах [8, 9] получены критерии конечности конечно-порожденных псевдобулевых алгебр. Согласно теореме Попеля –

Диего [10, 11] конечно-порожденная ν-алгебра, где ν не содержит знака дизъюнкции, является конечной. В данной работе получен критерий конечности для конечно-порожденных импликативных полуструктур с нулем (т.е. $\supset\vee\neg$-алгебр). Для доказательства этого результата получен ряд других результатов, касающихся конечно-порожденных импликативных полуструктур. Отметим, что некоторые из них представляют и самостоятельный интерес.

2 Предварительные сведения

Напомним необходимые в дальнейшем сведения. Интуиционистское пропозициональное исчисление [4], заданное десятью аксиомами и двумя правилами вывода (подстановка и модус поненс), будем обозначать через $\mathbf{H}$, а суперинтуиционистское пропозициональное исчисление, получающееся из $\mathbf{H}$ путем добавления в список аксиом исчисления $\mathbf{H}$ пропозициональной формулы X, называемой его дополнительной аксиомой, — через $\mathbf{H}+X$. Исчисления $\mathbf{H}+X$ и $\mathbf{H}+Y$ называются равнообъемными, если множество формул, выводимых в $\mathbf{H}+X$, совпадает с множеством формул, выводимых в $\mathbf{H}+Y$. Пропозициональные переменные и формулы будем обозначать строчными и заглавными латинскими буквами (возможно, с индексами) соответственно.

Пусть μ — какой-нибудь набор логических пропозициональных знаков. Пропозициональную формулу назовём μ-формулой, если она не содержит логических знаков, отличных от знаков набора μ; μ-формула называется μ-выводимой в $\mathbf{H}$, если в $\mathbf{H}$ существует ее вывод, каждая формула которого является μ-формулой.

Согласно результатам работы [5] аксиомы исчисления $\mathbf{H}$ можно выбрать так, что оно будет отделимым, т.е. будет удовлетворять следующим условиям:

1) каждая его аксиома содержит не более двух логических знаков, причем если их два, то один из них — импликация;

2) всякая μ-формула, выводимая в $\mathbf{H}$, будет $\mu\cup\{\supset\}$-выводимой в нем.

В дальнейшем будем считать, что $\mathbf{H}$ является отделимым исчислением.

Запись $Y_1, \dots, Y_m \vdash Z$ ($Y_1, \dots, Y_m \models Z$) будет означать, что формула Z выводима в $\mathbf{H}$ из формул $Y_1, \dots, Y_m$ с помощью обоих правил (с помощью правила модус поненс и выводимых в $\mathbf{H}$ формул), а запись $\vdash X$ — что формула X выводима в $\mathbf{H}$. Пропозициональную формулу $X_n \supset (\dots \supset (X_1 \supset Y)\dots)$ условимся записывать в виде $\{X_1, \dots X_n\} \supset Y$.

Пусть ν — набор логических пропозициональных знаков, содержащий знак импликации. Напомним определение ν-алгебры, введенное в работе [5] для изучения фрагментов исчисления $\mathbf{H}$. Операции ν-алгебр будем обозначать так же, как и соответствующие им (интерпретируемые ими) логические пропозициональные связки. По сути, ν-алгебра — это множество, на котором заданы операции псевдобулевой алгебры, определяемые набором ν. Точнее говоря, множество Ξ назовем ν-алгеброй, если в нем указан выделенный элемент, обозначаемый через $\mathbf{1}$, и заданы соответствующие знакам набора ν операции, удовлетворяющие следующим условиям:

1) $(\forall \xi \in \Xi)(\mathbf{1} \supset \xi = \mathbf{1} \Rightarrow \xi = \mathbf{1})$;

2) $(\forall \xi, \eta \in \Xi)(\xi \supset \eta = \mathbf{1} \wedge \eta \supset \xi = \mathbf{1}) \Rightarrow \xi = \eta$;

3) для каждой ν-аксиомы X (т.е. аксиомы, являющейся ν-формулой) исчисления $\mathbf{H}$ значение всякого выражения, получающегося из X путем замены переменных формулы X элементами из Ξ, а логических знаков — соответствующими им операциями Ξ, равно выделенному элементу.

Определение ν-алгебры можно найти также в работах [12, 13]. Если ν содержит все четыре логических пропозициональных знака, то ν-алгебра является псевдобулевой алгеброй. В дальнейшем ν-алгебры и их элементы будем обозначать заглавными и строчными греческими буквами (возможно, с индексами) соответственно.

Часто $\supset$-алгебру называют импликатурой, $\supset\vee$-алгебру — импликативной полуструктурой и $\supset\vee\neg$-алгебру — импликативной полуструктурой с нулем. Операции $\supset$, $\vee$ и $\neg$ этих алгебр называют относительным псевдодополнением, объединением и псевдодополнением соответственно.

Элементы $\xi_1, \ldots, \xi_n$ ν-алгебры Ξ называются ее образующими элементами, если для любого элемента η из Ξ существует терм $T(\xi_1, \ldots, \xi_n)$, построенный из $\xi_1, \ldots, \xi_n$ с помощью операций ν-алгебры Ξ и удовлетворяющий в Ξ равенству $\eta = T(\xi_1, \ldots, \xi_n)$. Если в ν-алгебре Ξ существует конечное число образующих (не более, чем n образующих) элементов, то Ξ называется конечно-порожденной (n-порожденной) ν-алгеброй.

Пропозициональная ν-формула X называется общезначимой в ν-алгебре Ξ, если значения каждого выражения (терма), получающегося из X путем замены переменных ν-формулы X элементами из Ξ, а логических знаков — соответствующими им операциями ν-алгебры Ξ, равно ее выделенному элементу. Если X не является общезначимой в Ξ, то X называется опровержимой в Ξ.

Пусть Θ — какая-либо ν-алгебра, $\xi, \eta, \zeta_1, \ldots, \zeta_n$ — какие-нибудь ее элементы и Φ — ее подмножество. На Θ можно задать отношение частичного порядка, положив $\xi \leqslant \eta$ в том и только в том случае, когда $\xi \supset \eta = \mathbf{1}$. Элемент σ множества Φ назовем его минимальным элементом, если в Θ из соотношений $\tau \in \Phi$ и $\tau \leqslant \sigma$ следует, что $\tau = \sigma$. Множество всех минимальных элементов множества Φ будем обозначать через $\mathfrak{M}(\Phi)$, терм $\zeta_n \supset (\cdots \supset (\zeta_1 \supset \xi) \ldots)$ — через $\{\zeta_1, \ldots, \zeta_n\} \supset \xi$ и наименьший элемент ν-алгебры Θ (если он имеется) — через $\mathbf{0}$. Число элементов конечного множества Ψ будем обозначать через $|\Psi|$.

В дальнейшем мы будем часто пользоваться леммой 1 работы [14]. Для удобства чтения данной статьи сформулируем эту лемму.

ЛЕММА 1. *([14, лемма 1]) Каковы бы ни были ν-формулы Q и ν-алгебра Θ, если $\vdash Q$, то Q общезначима в Θ.*

Докажем следующую вспомогательную лемму.

ЛЕММА 2. *Пусть $p, q, s, t, w_1, \ldots, w_k$ — пропозициональные переменные. Тогда верны следующие утверждения:*

1. $\vdash (q \vee (q \supset s)) \supset ((p \vee (p \supset q)) \supset ((p \supset q) \vee ((p \supset q) \supset s)))$;

2. $\vdash (p \vee (p \supset s)) \supset ((q \vee (q \supset s)) \supset ((p \vee q) \vee ((p \vee q) \supset s)))$;

3. $\vdash (p \vee \neg p) \supset ((q \vee \neg q) \supset ((p \supset q) \vee \neg (p \supset q)))$;

4. $\vdash (p \vee \neg p) \supset ((q \vee \neg q) \supset ((p \vee q) \vee \neg(p \vee q)))$;

5. $\vdash (p \vee \neg p) \supset (\neg p \vee \neg\neg p)$;

6. $\vdash \neg\neg(\{w_1, \dots, w_k\} \supset p) \supset (\{\neg\neg w_1, \dots, \neg\neg w_k\} \supset \neg\neg p)$;

7. $\vdash (\{\neg\neg w_1, \dots, \neg\neg w_k\} \supset \neg\neg p) \supset \neg\neg(\{w_1, \dots, w_k\} \supset p)$;

8. $\vdash (\{w_1, \dots, w_k\} \supset q) \supset (\{w_1, \dots, w_k\} \supset (p \supset q))$;

9. $\vdash (\{w_1, \dots, w_k\} \supset p) \supset (\{w_1, \dots, w_k\} \supset (p \vee q))$;

10. $\vdash (\{w_1, \dots, w_k\} \supset p) \supset ((\{w_1, \dots, w_k\} \supset (p \supset q)) \supset (\{w_1, \dots, w_k\} \supset q))$;

11. $\vdash (p \supset s) \supset ((p \supset t) \supset ((s \supset (t \supset q)) \supset (p \supset q)))$.

Доказательство. Докажем утверждение (1). Нетрудно проверить, что $q \supset s$, p, $p \supset q \vDash s$. Тогда $q \supset s$, $p \vDash (p \supset q) \supset s$ и поэтому имеем $q \supset s$, $p \vDash (p \supset q) \vee ((p \supset q) \supset s)$.

Поскольку $q \supset s$, $p \supset q \vDash p \supset q$, имеем $q \supset s$, $p \supset q \vDash (p \supset q) \vee ((p \supset q) \supset s)$. Следовательно, $q \supset s$, $p \vee (p \supset q) \vDash (p \supset q) \vee ((p \supset q) \supset s)$. Значит, $q \supset s \vDash (p \vee (p \supset q)) \supset ((p \supset q) \vee ((p \supset q) \supset s))$.

Легко видеть, что $q \vDash (p \supset q)$. Тогда $q \vDash (p \supset q) \vee ((p \supset q) \supset s)$ и поэтому имеем $q \vDash (p \vee (p \supset q)) \supset ((p \supset q) \vee ((p \supset q) \supset s))$. Следовательно, $q \vee (q \supset s) \vDash (p \vee (p \supset q)) \supset ((p \supset q) \vee ((p \supset q) \supset s))$.

В результате получаем, что $\vdash (q \vee (q \supset s)) \supset ((p \vee (p \supset q)) \supset ((p \supset q) \vee ((p \supset q) \supset s)))$.

Докажем утверждение (2). Так как $p \vDash p \vee q$, то $p \vDash (p \vee q) \vee ((p \vee q) \supset s)$ и поэтому имеем $p \vDash (q \vee (q \supset s)) \supset ((p \vee q) \vee ((p \vee q) \supset s))$.

Поскольку $p \supset s$, $q \vDash p \vee q$, имеем $p \supset s$, $q \vDash (p \vee q) \vee ((p \vee q) \supset s)$. Так как $p \supset s$, $q \supset s$, $p \vDash s$ и $p \supset s$, $q \supset s$, $q \vDash s$, то $p \supset s$, $q \supset s$, $p \vee q \vDash s$ и поэтому имеем $p \supset s$, $q \supset s \vDash (p \vee q) \supset s$. Значит, $p \supset q$, $q \supset s \vDash (p \vee q) \vee ((p \vee q) \supset s)$. Тогда $p \supset s$, $q \vee (q \supset s) \vDash (p \vee q) \vee ((p \vee q) \supset s)$ и поэтому имеем $p \supset s \vDash (q \vee (q \supset s)) \supset ((p \vee q) \vee ((p \vee q) \supset s))$. Следовательно, $p \vee (p \supset s) \vDash (q \vee (q \supset s)) \supset ((p \vee q) \vee ((p \vee q) \supset s))$. В результате получаем, что $\vdash (p \vee (p \supset s)) \supset ((q \vee (q \supset s)) \supset ((p \vee q) \vee ((p \vee q) \supset s)))$.

Докажем утверждение (3). Так как $q \vDash p \supset q$, то $q \vDash (p \supset q) \vee \neg(p \supset q)$ и поэтому имеем $p \vee \neg p$, $q \vDash (p \supset q) \vee \neg(p \supset q)$. Поскольку

$p,\ \neg q,\ p \supset q \vDash q$ и $p,\ \neg q,\ p \supset q \vDash \neg q$, имеем $p,\ \neg q \vDash \neg(p \supset q)$. Значит, $p,\ \neg q \vDash (p \supset q) \vee \neg(p \supset q)$. Так как $\neg p,\ \neg q,\ p \vDash q$, то $\neg p,\ \neg q \vDash p \supset q$ и поэтому имеем $\neg p,\ \neg q \vDash (p \supset q) \vee \neg(p \supset q)$. Тогда $p \vee \neg p,\ \neg q \vDash (p \supset q) \vee \neg(p \supset q)$. Следовательно, $p \vee \neg p,\ q \vee \neg q \vDash (p \supset q) \vee \neg(p \supset q)$.

В результате получаем, что $\vdash (p \vee \neg p) \supset ((q \vee \neg q) \supset ((p \supset q) \vee \neg(p \supset q)))$.

Докажем утверждение (4). Так как $p \vDash p \vee q$, то $p \vDash (p \vee q) \vee \neg(p \vee q)$ и поэтому имеем $p,\ q \vee \neg q \vDash (p \vee q) \vee \neg(p \vee q)$. Так как $q \vDash p \vee q$, то $q \vDash (p \vee q) \vee \neg(p \vee q)$ и поэтому имеем $\neg p,\ q \vDash (p \vee q) \vee \neg(p \vee q)$. Поскольку $\neg p,\ \neg q,\ p \vDash \neg(p \vee q)$ и $\neg p,\ \neg q,\ q \vDash \neg(p \vee q)$, имеем $\neg p,\ \neg q,\ (p \vee q) \vDash \neg(p \vee q)$. Тогда $\neg p,\ \neg q \vDash \neg(p \vee q)$ и поэтому имеем $\neg p,\ \neg q \vDash (p \vee q) \vee \neg(p \vee q)$. Значит, $\neg p,\ q \vee \neg q \vDash (p \vee q) \vee \neg(p \vee q)$. Следовательно, $p \vee \neg p,\ q \vee \neg q \vDash (p \vee q) \vee \neg(p \vee q)$. В результате получаем, что $\vdash (p \vee \neg p) \supset ((q \vee \neg q) \supset ((p \vee q) \vee \neg(p \vee q)))$.

Докажем утверждение (5). Так как $p \vDash \neg p \vee \neg\neg p$ и $\neg p \vDash \neg p \vee \neg\neg p$, то $p \vee \neg p \vDash \neg p \vee \neg\neg p$ и поэтому имеем $\vdash (p \vee \neg p) \supset (\neg p \vee \neg\neg p)$.

Из выводимости 60i теоремы 7 монографии [4] с помощью теоремы 6 из [4] получаем верность выводимостей 6 и 7.

Докажем утверждение (8). Нетрудно проверить, что $\{w_1, \ldots, w_k\} \supset q,\ w_1,\ \ldots,\ w_k \vDash q$. Тогда $\{w_1, \ldots, w_k\} \supset q,\ w_1,\ \ldots,\ w_k \vDash p \supset q$ и поэтому имеем $\vdash (\{w_1, \ldots, w_k\} \supset q) \supset (\{w_1, \ldots, w_k\} \supset (p \supset q))$.

Докажем утверждение (9). Нетрудно проверить, что $\{w_1, \ldots, w_k\} \supset p,\ w_1,\ \ldots,\ w_k \vDash p$. Тогда $\{w_1, \ldots, w_k\} \supset p,\ w_1,\ \ldots,\ w_k \vDash p \vee q$ и поэтому имеем $\vdash (\{w_1, \ldots, w_k\} \supset p) \supset (\{w_1, \ldots, w_k\} \supset (p \vee q))$.

Докажем утверждение (10). Нетрудно проверить, что $\{w_1, \ldots, w_k\} \supset p,\ \{w_1, \ldots, w_k\} \supset (p \supset q),\ w_1,\ \ldots,\ w_k \vDash p$ и $\{w_1, \ldots, w_k\} \supset p,\ \{w_1, \ldots, w_k\} \supset (p \supset q),\ w_1,\ \ldots,\ w_k \vDash p \supset q$. Тогда $\{w_1, \ldots, w_k\} \supset p,\ \{w_1, \ldots, w_k\} \supset (p \supset q),\ w_1,\ \ldots,\ w_k \vDash q$ и поэтому имеем $\vdash (\{w_1, \ldots, w_k\} \supset p) \supset ((\{w_1, \ldots, w_k\} \supset (p \supset q)) \supset (\{w_1, \ldots, w_k\} \supset q))$.

Докажем утверждение (11). Нетрудно проверить, что $p \supset s,\ p \supset t,\ s \supset (t \supset q),\ p \vDash q$. Поэтому имеем $\vdash (p \supset s) \supset ((p \supset t) \supset ((s \supset (t \supset q)) \supset (p \supset q)))$. Q.E.D.

Следующие две леммы содержат равенства, которыми мы будем пользоваться в дальнейшем.

ЛЕММА 3. *В любой $\supset\vee$-алгебре Θ для любых ее элементов ξ, η и ρ верны равенства* $(\eta \vee (\eta \supset \rho)) \supset ((\xi \vee (\xi \supset \eta)) \supset ((\xi \supset \eta) \vee ((\xi \supset$

$\eta)\supset\rho))) = \mathbf{1}$ *и* $(\xi\vee(\xi\supset\rho))\supset((\eta\vee(\eta\supset\rho))\supset((\xi\vee\eta)\vee((\xi\vee\eta)\supset\rho))) = \mathbf{1}$.

Доказательство. Пусть задана $\supset\vee$-алгебра Θ и ее элементы ξ, η и ρ. Согласно пунктам (1) и (2) леммы 2 имеем $\vdash (q\vee(q\supset s))\supset((p\vee(p\supset q))\supset((p\supset q)\vee((p\supset q)\supset s)))$ и $\vdash (p\vee(p\supset s))\supset((q\vee(q\supset s))\supset((p\vee q)\vee((p\vee q)\supset s)))$, где p,q и s — пропозициональные переменные. Тогда в силу леммы 1 эти $\supset\vee$-формулы общезначимы в Θ. Подставив в них вместо p,q и s элементы ξ, η и ρ соответственно, получим, что $(\eta\vee(\eta\supset\rho))\supset((\xi\vee(\xi\supset\eta))\supset((\xi\supset\eta)\vee((\xi\supset\eta)\supset\rho))) = \mathbf{1}$ и $(\xi\vee(\xi\supset\rho))\supset((\eta\vee(\eta\supset\rho))\supset((\xi\vee\eta)\vee((\xi\vee\eta)\supset\rho))) = \mathbf{1}$. Q.E.D.

ЛЕММА 4. *Пусть Θ — какая-нибудь $\supset\vee\neg$-алгебра, а ξ,η, и $\rho_1,\dots,\rho_k$ — какие-либо ее элементы. Тогда в Θ имеют место следующие равенства:*

1. $(\xi\vee\neg\xi)\supset((\eta\vee\neg\eta)\supset((\xi\supset\eta)\vee\neg(\xi\supset\eta))) = \mathbf{1}$;
2. $(\xi\vee\neg\xi)\supset((\eta\vee\neg\eta)\supset((\xi\vee\eta)\vee\neg(\xi\vee\eta))) = \mathbf{1}$;
3. $(\xi\vee\neg\xi)\supset(\neg\xi\vee\neg\neg\xi) = \mathbf{1}$;
4. $\neg\neg(\xi\vee\neg\xi) = \mathbf{1}$;
5. $(\xi\vee\neg\xi)\supset(\neg\neg\xi\supset\xi) = \mathbf{1}$;
6. $\neg\neg(\{\rho_1,\dots,\rho_k\}\supset\xi) = \{\neg\neg\rho_1,\dots,\neg\neg\rho_k\}\supset\neg\neg\xi$.

Доказательство. Пусть задана $\supset\vee\neg$-алгебра Θ и ее элементы ξ, η и $\rho_1,\dots,\rho_k$. Пусть p,q и $w_1,\dots,w_k$ — пропозициональные переменные. Согласно пунктам (3), (4) и (5) леммы 2 имеем, $\vdash (p\vee\neg p)\supset((q\vee\neg q)\supset((p\supset q)\vee\neg(p\supset q)))$, $\vdash (p\vee\neg p)\supset((q\vee\neg q)\supset((p\vee q)\vee\neg(p\vee q)))$ и $\vdash (p\vee\neg p)\supset(\neg p\vee\neg\neg p)$. Согласно пунктам 51a и 49c теоремы 7 из [4], имеем $\vdash \neg\neg(p\vee\neg p)$ и $(p\vee\neg p)\supset(\neg\neg p\supset p)$. Тогда в силу леммы 1 эти $\supset\vee\neg$-формулы общезначимы в Θ. Подставив в них вместо p, q элементы ξ, η соответственно, получим равенства (1)–(5).

Из выводимостей (6) и (7) леммы 2 аналогичными рассуждениями получаем, что $\neg\neg(\{\rho_1,\dots,\rho_k\}\supset\xi)\supset(\{\neg\neg\rho_1,\dots,\neg\neg\rho_k\}\supset$

$\neg\neg\xi) = \mathbf{1}$ и $(\{\neg\neg\rho_1, \ldots, \neg\neg\rho_k\} \supset \neg\neg\xi) \supset \neg\neg(\{\rho_1, \ldots, \rho_k\} \supset \xi) = \mathbf{1}$. Тогда $\neg\neg(\{\rho_1, \ldots, \rho_k\} \supset \xi) \leqslant \{\neg\neg\rho_1, \ldots, \neg\neg\rho_k\} \supset \neg\neg\xi$ и $\{\neg\neg\rho_1, \ldots, \neg\neg\rho_k\} \supset \neg\neg\xi \leqslant \neg\neg(\{\rho_1, \ldots, \rho_k\} \supset \xi)$, а поэтому равенство (6) имеет место. Q.E.D.

3 Конечно-порожденные импликативные полуструктуры

В этом параграфе докажем теорему, дающую критерий конечности для конечно-порожденных импликативных полуструктур с нулем (т.е. $\supset\vee\neg$-алгебр). Этот критерий является аналогом критерия конечности, полученного в работах [8, 9] для конечно-порожденных псевдобулевых алгебр. При получении критерия из [8, 9] важную роль играло наличие в псевдобулевых алгебрах операции пересечения. Так как в $\supset\vee\neg$-алгебрах нет операции пересечения, то его нельзя автоматически перенести на конечно-порожденные $\supset\vee\neg$-алгебры. Поэтому критерий конечности конечно-порожденных $\supset\vee\neg$-алгебр получим другими методами.

Докажем следующую лемму.

ЛЕММА 5. *В любой конечно-порожденной импликативной полуструктуре (т.е. $\supset\vee$-алгебре) Θ для любых ее образующих элементов $\xi_1, \ldots, \xi_n$ верно соотношение $\mathfrak{M}(\Theta) \subseteq \{\xi_1, \ldots, \xi_n\}$.*

Доказательство. Пусть заданы $\supset\vee$-алгебра Θ и ее образующие элементы $\xi_1, \ldots, \xi_n$. Пусть $\eta \in \mathfrak{M}(\Theta)$. Тогда существует терм X, построенный из элементов $\xi_1, \ldots, \xi_n$ с помощью операций $\supset\vee$-алгебры Θ и удовлетворяющий в Θ равенству $X = \eta$. Пусть $X = Y \circ Z$, где Y и Z — термы, построенные из элементов $\xi_1, \ldots, \xi_n$ с помощью операций $\supset\vee$-алгебры Θ, а $\circ$ — один из знаков $\supset$ или $\vee$. Поскольку $Z \leqslant Y \circ Z = X = \eta$ и $\eta \in \mathfrak{M}(\Theta)$, имеем $Z = \eta$. Так как Z является собственным подтермом терма X, то, повторив такое рассуждение конечное число раз, получим, что $\eta = \xi_i$ для некоторого i $(1 \leqslant i \leqslant n)$. Тогда имеем $\eta \in \{\xi_1, \ldots, \xi_n\}$. Следовательно, $\mathfrak{M}(\Theta) \subseteq \{\xi_1, \ldots, \xi_n\}$. Q.E.D.

Пусть Θ — $\supset\vee\neg$-алгебра, а $\xi_1, \ldots, \xi_n$ — ее образующие элементы. Тогда в Θ верны соотношения $\mathfrak{M}(\Theta) = \{\mathbf{0}\}$ и $\neg(\xi_i \supset \xi_i) = \mathbf{0}$, где $1 \leqslant i \leqslant n$ и $\mathbf{0}$ — ее наименьший элемент. Поэтому если $n > 1$, то элементы множества $\{\xi_1, \ldots, \xi_n\} \setminus \{\mathbf{0}\}$ будут образующими $\supset\vee\neg$-алгебры Θ. Таким образом, для конечно-порожденных

$\supset\vee\neg$-алгебр аналог леммы 5, вообще говоря, не верен. Однако, если конечно-порожденную $\supset\vee\neg$-алгебру рассматривать как $\supset\vee$-алгебру, то для нее лемма 5 верна и поэтому ее наименьший элемент содержится среди образующих элементов этой $\supset\vee$-алгебры.

Пусть Θ — конечно-порожденная $\supset\vee$-алгебра, а $\xi_1, \ldots, \xi_n$ — ее образующие элементы. Положим $\mathfrak{F}_\Theta = \{\xi_i \vee (\xi_i \supset \xi_j) | 1 \leqslant i \leqslant n, 1 \leqslant j \leqslant n\}$, а $\mathfrak{C}_\Theta = \{\zeta \big| \mathfrak{F}_\Theta \supset \zeta = \mathbf{1}\}$. Нетрудно проверить, что $\mathfrak{F}_\Theta \subseteq \mathfrak{C}_\Theta$.

Пусть Φ — конечно-порожденная $\supset\vee\neg$-алгебра, а $\xi_1, \ldots, \xi_n$ — ее образующие. Положим $\mathfrak{F}_\Phi = \{\xi_i \vee \neg\xi_i | 1 \leqslant i \leqslant n\}$, а $\mathfrak{C}_\Phi = \{\zeta \big| \mathfrak{F}_\Phi \supset \zeta = \mathbf{1}\}$. Нетрудно проверить, что $\mathfrak{F}_\Phi \subseteq \mathfrak{C}_\Phi$.

Докажем следующую лемму.

ЛЕММА 6. *Пусть ν — один из наборов логических знаков $\supset\vee$ или $\supset\vee\neg$, а Θ — конечно-порожденная ν-алгебра. Тогда имеют место следующие утверждения:*

1) *подмножество $\mathfrak{C}_\Theta$ $\supset\vee$-алгебры Θ вместе с ее операциями $\supset$ и $\vee$ является $\supset\vee$-подалгеброй ν-алгебры Θ;*

2) *если $\sigma \in \mathfrak{C}_\Theta$, $\tau \in \Theta$ и $\sigma \supset \tau \in \mathfrak{C}_\Theta$, то $\tau \in \mathfrak{C}_\Theta$;*

3) *если $\sigma \in \mathfrak{C}_\Theta$, $\tau \in \Theta$ и $\sigma \leqslant \tau$, то $\tau \in \mathfrak{C}_\Theta$.*

Доказательство. Пусть задана конечно-порожденная ν-алгебра Θ. Пусть $\xi_1, \ldots, \xi_n$ — ее образующие элементы. Положим $k = |\mathfrak{F}_\Theta|$. Докажем утверждение (1). Для этого достаточно показать, что подмножество $\mathfrak{C}_\Theta$ замкнуто в ν-алгебре Θ относительно ее операций $\supset$ и $\vee$.

Пусть $\rho, \eta \in \mathfrak{C}_\Theta$. Покажем, что $\rho \supset \eta \in \mathfrak{C}_\Theta$ и $\rho \vee \eta \in \mathfrak{C}_\Theta$. Согласно пунктам (8) и (9) леммы 2, имеем $\vdash (\{w_1, \ldots, w_k\} \supset q) \supset (\{w_1, \ldots, w_k\} \supset (p \supset q))$ и $\vdash (\{w_1, \ldots, w_k\} \supset p) \supset (\{w_1, \ldots, w_k\} \supset (p \vee q))$, где $p, q, w_1, \ldots, w_k$ — пропозициональные переменные. Тогда в силу леммы 1 эти $\supset\vee$-формулы общезначимы в ν-алгебре Θ. Подставив в них вместо $p, q, w_1, \ldots, w_k$ соответственно ρ, η и элементы множества $\mathfrak{F}_\Theta$, получим, что $(\mathfrak{F}_\Theta \supset \eta) \supset (\mathfrak{F}_\Theta \supset (\rho \supset \eta)) = \mathbf{1}$ и $(\mathfrak{F}_\Theta \supset \rho) \supset (\mathfrak{F}_\Theta \supset (\rho \vee \eta)) = \mathbf{1}$. Поскольку $\rho, \eta \in \mathfrak{C}_\Theta$, имеем $\mathfrak{F}_\Theta \supset \rho = \mathbf{1}$ и $\mathfrak{F}_\Theta \supset \eta = \mathbf{1}$. Значит, $\mathfrak{F}_\Theta \supset (\rho \supset \eta) = \mathbf{1}$ и $\mathfrak{F}_\Theta \supset (\rho \vee \eta) = \mathbf{1}$. Следовательно, $\rho \supset \eta \in \mathfrak{C}_\Theta$ и $\rho \vee \eta \in \mathfrak{C}_\Theta$.

Докажем утверждение (2). Пусть $\sigma \in \mathfrak{E}_\Theta$, $\tau \in \Theta$ и $\sigma \supset \tau \in \mathfrak{E}_\Theta$. Согласно пункту (10) леммы 2 имеем $\vdash (\{w_1,\dots,w_k\} \supset p) \supset ((\{w_1,\dots,w_k\} \supset (p \supset q)) \supset (\{w_1,\dots,w_k\} \supset q))$, где $p, q, w_1, \dots, w_k$ — пропозициональные переменные. Тогда в силу леммы 1 эти $\supset\vee$-формулы общезначимы в ν-алгебре Θ. Подставив в нее вместо $p, q, w_1, \dots, w_k$ соответственно σ, τ и элементы множества $\mathfrak{F}_\Theta$, получим, что

$$(\mathfrak{F}_\Theta \supset \sigma) \supset ((\mathfrak{F}_\Theta \supset (\sigma \supset \tau)) \supset (\mathfrak{F}_\Theta \supset \tau)) = \mathbf{1}.$$

Поскольку $\sigma \in \mathfrak{E}_\Theta$ и $\sigma \supset \tau \in \mathfrak{E}_\Theta$, имеем $\mathfrak{F}_\Theta \supset \sigma = \mathbf{1}$ и $\mathfrak{F}_\Theta \supset (\sigma \supset \tau) = \mathbf{1}$. Тогда $\mathfrak{F}_\Theta \supset \tau = \mathbf{1}$ и, следовательно, $\tau \in \mathfrak{E}_\Theta$.

Докажем утверждение (3). Пусть $\sigma \in \mathfrak{E}_\Theta$, $\tau \in \Theta$ и $\sigma \leqslant \tau$. Тогда $\sigma \supset \tau = \mathbf{1}$. Поэтому в силу пункта (1) этой леммы верно соотношение $\sigma \supset \tau \in \mathfrak{E}_\Theta$. А тогда, согласно пункту (2) этой леммы, имеем $\tau \in \mathfrak{E}_\Theta$. Q.E.D.

Из доказательства пункта (1) леммы 6 видно, что $\rho \supset \eta \in \mathfrak{E}_\Theta$, если $\eta \in \mathfrak{E}_\Theta$ и $\rho \in \Theta$, а $\rho \vee \eta \in \mathfrak{E}_\Theta$, если $\rho \in \mathfrak{E}_\Theta$ и $\eta \in \Theta$ или $\rho \in \Theta$ и $\eta \in \mathfrak{E}_\Theta$.

Докажем следующую лемму.

ЛЕММА 7. *В любой конечно-порожденной $\supset\vee$-алгебре Ψ для любых ее элементов η и φ имеет место соотношение $\eta \vee (\eta \supset \varphi) \in \mathfrak{E}_\Psi$.*

Доказательство. Пусть задана конечно-порожденная $\supset\vee$-алгебра Ψ. Пусть $\xi_1, \dots, \xi_n$ — ее образующие элементы. Пусть $\eta, \varphi \in \Psi$. Тогда существуют термы T и U, построенные из элементов $\xi_1, \dots, \xi_n$ с помощью операций $\supset\vee$-алгебры Ψ и удовлетворяющие в Ψ равенствам $T = \eta$ и $U = \varphi$. Докажем, что $\eta \vee (\eta \supset \varphi) \in \mathfrak{E}_\Psi$. Доказательство будем вести индукцией по построению термов T и U. Пусть $T = \xi_k$ и $U = \xi_l$, где $1 \leqslant k \leqslant n$ и $1 \leqslant l \leqslant n$. Тогда $\eta \vee (\eta \supset \varphi) \in \mathfrak{F}_\Psi$. Поскольку $\mathfrak{F}_\Psi \subseteq \mathfrak{E}_\Psi$, имеем $\eta \vee (\eta \supset \varphi) \in \mathfrak{E}_\Psi$.

Пусть $T = \xi_k$ и $U = X \circ Y$, где $1 \leqslant k \leqslant n$, $\circ$ — один из знаков $\supset$ или $\vee$, а X и Y — термы, построенные из элементов $\xi_1, \dots, \xi_n$ с помощью операций $\supset\vee$-алгебры Ψ. Тогда в Ψ существуют такие элементы ρ и τ, что $X = \rho$ и $Y = \tau$. Поэтому $\varphi = \rho \circ \tau$. По индуктивному предположению имеем $\xi_k \vee (\xi_k \supset \tau) \in \mathfrak{E}_\Psi$. Так как $\tau \leqslant \rho \circ \tau = \varphi$, то $\xi_k \supset \tau \leqslant \xi_k \supset \varphi$ и поэтому имеем

$$\xi_k \vee (\xi_k \supset \tau) \leqslant \xi_k \vee (\xi_k \supset \varphi).$$

Тогда, согласно пункту (3) леммы 6, имеем $\xi_k \vee (\xi_k \supset \varphi) \in \mathfrak{E}_\Psi$. Следовательно, $\eta \vee (\eta \supset \varphi) \in \mathfrak{E}_\Psi$.

Пусть теперь $T = W \circ Z$, где $\circ$ — один из знаков $\supset$ или $\vee$, а W и Z — термы, построенные из элементов $\xi_1, \ldots, \xi_n$ с помощью операций $\supset\!\vee$-алгебры Ψ. Тогда в Ψ существуют такие элементы ω и σ, что $W = \omega$ и $Z = \sigma$. Поэтому $\eta = \omega \circ \sigma$. По индуктивному предположению имеем $\omega \vee (\omega \supset \sigma) \in \mathfrak{E}_\Psi$, $\omega \vee (\omega \supset \varphi) \in \mathfrak{E}_\Psi$ и $\sigma \vee (\sigma \supset \varphi) \in \mathfrak{E}_\Psi$. В силу леммы 3 в Ψ верны соотношения $(\sigma \vee (\sigma \supset \varphi)) \supset ((\omega \vee (\omega \supset \sigma)) \supset ((\omega \supset \sigma) \vee ((\omega \supset \sigma) \supset \varphi))) = \mathbf{1}$ и $(\omega \vee (\omega \supset \varphi)) \supset ((\sigma \vee (\sigma \supset \varphi)) \supset ((\omega \vee \sigma) \vee ((\omega \vee \sigma) \supset \varphi))) = \mathbf{1}$. Тогда, согласно лемме 6, имеем $(\omega \circ \sigma) \vee ((\omega \circ \sigma) \supset \varphi) \in \mathfrak{E}_\Psi$. Следовательно, $\eta \vee (\eta \supset \varphi) \in \mathfrak{E}_\Psi$. Q.E.D.

ЛЕММА 8. *В любой конечно-порожденной $\supset\!\vee\!\neg$-алгебре Ψ для любого ее элемента η имеет место соотношение $\eta \vee \neg\eta \in \mathfrak{E}_\Psi$.*

Доказательство. Пусть задана конечно-порожденная $\supset\!\vee\!\neg$-алгебра Ψ. Пусть $\xi_1, \ldots, \xi_n$ — ее образующие элементы. Пусть $\eta \in \Psi$. Тогда существует терм T, построенный из элементов $\xi_1, \ldots, \xi_n$ с помощью операций $\supset\!\vee\!\neg$-алгебры Ψ и удовлетворяющий в Ψ равенству $T = \eta$.

Докажем, что $\eta \vee \neg\eta \in \mathfrak{E}_\Psi$. Доказательство будем вести индукцией по построению терма T. Пусть $T = \xi_m$, где $1 \leqslant m \leqslant n$. Тогда $\eta \vee \neg\eta \in \mathfrak{F}_\Psi$. Поскольку, $\mathfrak{F}_\Psi \subseteq \mathfrak{E}_\Psi$, имеем $\eta \vee \neg\eta \in \mathfrak{E}_\Psi$.

Пусть $T = W \circ Z$, где $\circ$ — один из знаков $\supset$ или $\vee$, а W и Z — термы, построенные из элементов $\xi_1, \ldots, \xi_n$ с помощью операций $\supset\!\vee\!\neg$-алгебры Ψ. Тогда в Ψ существуют такие элементы ω и σ, что $W = \omega$ и $Z = \sigma$. Поэтому $\eta = \omega \circ \sigma$. По индуктивному предположению имеем $\omega \vee \neg\omega \in \mathfrak{E}_\Psi$ и $\sigma \vee \neg\sigma \in \mathfrak{E}_\Psi$. В силу пунктов (1) и (2) леммы 4 в Ψ верно соотношение $(\omega \vee \neg\omega) \supset ((\sigma \vee \neg\sigma) \supset ((\sigma \circ \omega) \vee \neg(\sigma \circ \omega))) = \mathbf{1}$. Тогда, согласно лемме 6, имеем $(\sigma \circ \omega) \vee \neg(\sigma \circ \omega) \in \mathfrak{E}_\Psi$. Следовательно, $\eta \vee \neg\eta \in \mathfrak{E}_\Psi$.

Пусть $T = \neg W$, где W — терм, построенный из элементов $\xi_1, \ldots, \xi_n$ с помощью операций $\supset\!\vee\!\neg$-алгебры Ψ. Тогда в Ψ существует такой элемент ω, что $W = \omega$. Поэтому $\eta = \neg\omega$. По индуктивному предположению имеем $\omega \vee \neg\omega \in \mathfrak{E}_\Psi$. В силу пункта

(3) леммы 4 в Ψ верно соотношение $(\omega \vee \neg\omega) \supset (\neg\omega \vee \neg\neg\omega) = \mathbf{1}$. Тогда, согласно лемме 6, имеем $\neg\omega \vee \neg\neg\omega \in \mathfrak{E}_\Psi$. Следовательно, $\eta \vee \neg\eta \in \mathfrak{E}_\Psi$. Q.E.D.

Двухэлементную булеву алгебру, задающую классическую пропозициональную логику [4] и являющуюся также псевдобулевой алгеброй, обозначим через Λ_2, а трехэлементную линейно упорядоченую псевдобулеву алгебру (см., например, [15, 16]) — через Λ_3.

Пусть ν — один из наборов логических знаков $\supset\vee$ или $\supset\vee\neg$. Построим ν-формулу Q_ν, положив Q_ν равной формуле $p \vee (p \supset q)$ или $p \vee \neg p$, где p и q — пропозициональные переменные, в зависимости от того, равен ν набору $\supset\vee$ или набору $\supset\vee\neg$.

ЛЕММА 9. *Пусть ν — один из наборов логических знаков $\supset\vee$ или $\supset\vee\neg$, а Ψ — n-порожденная ν-алгебра. Тогда если ν-формула Q_ν общезначима в Ψ, то $|\Psi| \leqslant 2^{2^n}$.*

Доказательство. Пусть задана n-порожденная ν-алгебра Ψ. Пусть $\xi_1, \ldots, \xi_n$ — ее образующие элементы. Нетрудно проверить, что формула Q_ν общезначима в псевдобулевой алгебре Λ_2 и опровержима в псевдобулевой алгебре Λ_3. По теореме 1 из [16] исчисление $\mathbf{H} + Q_\nu$ равнообъемно классическому пропозициональному исчислению [4], задающему классическую пропозициональную логику. Так как ν-формула Q_ν общезначима в ν-алгебре Θ, то в Θ общезначима каждая ν-формула, выводимая в $\mathbf{H} + Q_\nu$.

Пусть $\eta \in \Psi$. Тогда существует терм T, построенный из элементов $\xi_1, \ldots, \xi_n$ с помощью операций ν-алгебры Ψ и удовлетворяющий в Ψ равенству $T = \eta$. Пусть $q_1, \ldots, q_n$ — различные пропозициональные переменные. Построим ν-формулу X_η, заменив в T элементы $\xi_1, \ldots, \xi_n$ переменными $q_1, \ldots, q_n$ соответственно, а операции ν-алгебры Ψ — соответствующими им логическими знаками. Формула X_η задает булеву (т.е. истинностную) функцию f_η от n переменных [4].

Таким образом, каждому элементу η из Ψ поставлена в соответствие булева функция f_η от n переменных. Покажем, что различным элементам сопоставляются различные функции.

Пусть $\rho, \tau \in \Psi$ и $\rho \neq \tau$. Тогда верно хотя бы одно из неравенств $\rho \supset \tau \neq \mathbf{1}$ или $\tau \supset \rho \neq \mathbf{1}$. Пусть $\rho \supset \tau \neq \mathbf{1}$. Тогда ν-формула

$X_\rho \supset X_\tau$ опровержима в Ψ при оценке $g(q_i) = \xi_i$, где $1 \leqslant i \leqslant n$. Поэтому ν-формула $X_\rho \supset X_\tau$ не выводима в исчислении $\mathbf{H}+Q_\nu$ и тем самым опровержима в Λ_2. Пусть h — опровержение формулы $X_\rho \supset X_\tau$ в Λ_2. Тогда $h(X_\rho) \neq h(X_\tau)$ и поэтому имеем $f_\rho(h(q_1), \dots, h(q_n)) \neq f_\tau(h(q_1), \dots, h(q_n))$. Следовательно, $f_\rho \neq f_\tau$. Если $\tau \supset \rho \neq \mathbf{1}$, то аналогичными рассуждениями получаем, что $f_\rho \neq f_\tau$. Так как число различных булевых функций от n аргументов равно 2^{2^n}, то $|\Psi| \leqslant 2^{2^n}$. Q.E.D.

Пусть ν — один из наборов логических знаков $\supset\vee$ или $\supset\vee\neg$, а Θ — конечно-порожденная ν-алгебра. Согласно пункту (1) леммы 6 подмножество $\mathfrak{E}_\Theta$ является $\supset\vee$-подалгеброй ν-алгебры Θ. На ν-алгебре Θ зададим бинарное отношение $\sim$. Пусть $\xi, \eta \in \Theta$. Отношение $\xi \sim \eta$ верно на Θ, если $\xi \supset \eta \in \mathfrak{E}_\Theta$ и $\eta \supset \xi \in \mathfrak{E}_\Theta$. Нетрудно проверить, что оно рефлексивно, симметрично и транзитивно и тем самым является отношением эквивалентности на Θ. Это отношение задает конечно-порожденную ν-алгебру классов эквивалентности [3], которую обозначим через $\Theta/\mathfrak{E}_\Theta$. Докажем, что ν-алгебра $\Theta/\mathfrak{E}_\Theta$ имеет конечное число классов эквивалентности, т.е. конечное число элементов.

ТЕОРЕМА 10. *Пусть ν — один из наборов логических знаков $\supset\vee$ или $\supset\vee\neg$, а Θ — конечно-порожденная ν-алгебра. Тогда конечно-порожденная ν-алгебра $\Theta/\mathfrak{E}_\Theta$ конечна.*

Доказательство. Пусть задана конечно-порожденная ν-алгебра Θ. Как и выше, положим Q_ν равной формуле $p \vee (p \supset q)$ или $p \vee \neg p$, где p и q — пропозициональные переменные, в зависимости от того, равен ν набору $\supset\vee$ или набору $\supset\vee\neg$. Так как Θ — конечно-порожденная ν-алгебра, то и ν-алгебра $\Theta/\mathfrak{E}_\Theta$ будет конечно-порожденной. Согласно леммам 7 и 8 и определению ν-алгебры $\Theta/\mathfrak{E}_\Theta$, ν-формула Q_ν общезначима в ν-алгебре $\Theta/\mathfrak{E}_\Theta$. Тогда по лемме 9 ν-алгебра $\Theta/\mathfrak{E}_\Theta$ конечна, т.е. имеет конечное число классов эквивалентности. Q.E.D.

Докажем следующую лемму.

ЛЕММА 11. *Пусть Ψ — конечно-порожденная $\supset\vee\neg$-алгебра, а $\sim$ — отношение эквивалентности на Ψ, определенное выше. Тогда имеют место следующие утверждения:*

1) если $\eta \in \mathfrak{E}_\Psi$, *то* $\neg\neg\eta = \mathbf{1}$;

2) если $\rho \in \Psi$, *то* $\mathfrak{F}_\Psi \supset \rho = \neg\neg\rho$;

3) если $\rho, \tau \in \Psi$ *и* $\rho \sim \tau$, *то* $\neg\neg\rho = \neg\neg\tau$.

Доказательство. Пусть задана конечно-порожденная $\supset\vee\neg$-алгебра Ψ. Пусть $\xi_1, \ldots, \xi_n$ — ее образующие элементы. Докажем утверждение (1). Пусть $\eta \in \mathfrak{E}_\Psi$. Тогда $\mathfrak{F}_\Psi \supset \eta = \mathbf{1}$. Следовательно, $\neg\neg(\mathfrak{F}_\Psi \supset \eta) = \neg\neg\mathbf{1} = \mathbf{1}$. Согласно построению множества $\mathfrak{F}_\Psi$, имеем $\mathfrak{F}_\Psi = \{\xi_i \vee \neg\xi_i | 1 \leqslant i \leqslant n\}$. Тогда с помощью леммы 4 получаем, что $\mathbf{1} = \neg\neg(\mathfrak{F}_\Psi \supset \eta) = \{\neg\neg(\xi_i \vee \neg\xi_i) | 1 \leqslant i \leqslant n\} \supset \neg\neg\eta = \mathbf{1} \supset \neg\neg\eta = \neg\neg\eta$.

Докажем утверждение (2). Пусть $\rho \in \Psi$. В силу леммы 8 верно соотношение $\rho \vee \neg\rho \in \mathfrak{E}_\Psi$, а в силу пункта (5) леммы 4 верно неравенство $(\rho \vee \neg\rho) \leqslant (\neg\neg\rho \supset \rho)$. Тогда согласно пункту (3) леммы 6 $\neg\neg\rho \supset \rho \in \mathfrak{E}_\Psi$ и поэтому имеем $\mathfrak{F}_\Psi \supset (\neg\neg\rho \supset \rho) = \mathbf{1}$. Значит, $\neg\neg\rho \supset (\mathfrak{F}_\Psi \supset \rho) = \mathbf{1}$. Следовательно, $\neg\neg\rho \leqslant \mathfrak{F}_\Psi \supset \rho$.

Согласно пункту 60g теоремы 7 из [4], имеем $\vdash (p \supset \neg\neg q) \supset (\neg\neg p \supset \neg\neg q)$ и $\vdash (\neg\neg p \supset \neg\neg q) \supset (p \supset \neg\neg q)$, где p и q — пропозициональные переменные. Тогда в силу леммы 1 эти $\supset\vee\neg$-формулы общезначимы в $\supset\vee\neg$-алгебре Ψ. Подставив в них вместо p и q соответственно $\mathfrak{F}_\Psi \supset \rho$ и ρ, получим, что $((\mathfrak{F}_\Psi \supset \rho) \supset \neg\neg\rho) \supset (\neg\neg(\mathfrak{F}_\Psi \supset \rho) \supset \neg\neg\rho) = \mathbf{1}$ и $(\neg\neg(\mathfrak{F}_\Psi \supset \rho) \supset \neg\neg\rho) \supset ((\mathfrak{F}_\Psi \supset \rho) \supset \neg\neg\rho) = \mathbf{1}$. Поэтому имеем $(\mathfrak{F}_\Psi \supset \rho) \supset \neg\neg\rho \leqslant \neg\neg(\mathfrak{F}_\Psi \supset \rho) \supset \neg\neg\rho$ и $\neg\neg(\mathfrak{F}_\Psi \supset \rho) \supset \neg\neg\rho \leqslant (\mathfrak{F}_\Psi \supset \rho) \supset \neg\neg\rho$. Следовательно, $(\mathfrak{F}_\Psi \supset \rho) \supset \neg\neg\rho = \neg\neg(\mathfrak{F}_\Psi \supset \rho) \supset \neg\neg\rho$.

Согласно построению множества $\mathfrak{F}_\Psi$, имеем $\mathfrak{F}_\Psi = \{\xi_i \vee \neg\xi_i | 1 \leqslant i \leqslant n\}$. Тогда с помощью леммы 4 получаем, что $(\mathfrak{F}_\Psi \supset \rho) \supset \neg\neg\rho = \neg\neg(\mathfrak{F}_\Psi \supset \rho) \supset \neg\neg\rho = (\{\neg\neg(\xi_i \vee \neg\xi_i) | 1 \leqslant i \leqslant n\} \supset \neg\neg\rho) \supset \neg\neg\rho = (\mathbf{1} \supset \neg\neg\rho) \supset \neg\neg\rho = \neg\neg\rho \supset \neg\neg\rho = \mathbf{1}$. Значит, $\mathfrak{F}_\Psi \supset \rho \leqslant \neg\neg\rho$. Поскольку $\neg\neg\rho \leqslant \mathfrak{F}_\Psi \supset \rho$, имеем $\mathfrak{F}_\Psi \supset \rho = \neg\neg\rho$.

Докажем утверждение (3). Пусть $\rho, \tau \in \Psi$ и $\rho \sim \tau$. Тогда $\rho \supset \tau \in \mathfrak{E}_\Psi$ и $\tau \supset \rho \in \mathfrak{E}_\Psi$, а поэтому имеем $\mathfrak{F}_\Psi \supset (\rho \supset \tau) = \mathbf{1}$ и $\mathfrak{F}_\Psi \supset (\tau \supset \rho) = \mathbf{1}$. Положим $k = |\mathfrak{F}_\Psi|$. Согласно пункту (10) леммы 2, имеем $\vdash (\{w_1, \ldots, w_k\} \supset p) \supset ((\{w_1, \ldots, w_k\} \supset (p \supset q)) \supset (\{w_1, \ldots, w_k\} \supset q))$, где $p, q, w_1, \ldots, w_k$ — пропозициональные формулы. Тогда в силу леммы 1 эти $\supset\vee\neg$-формулы общезначимы в $\supset\vee\neg$-алгебре Ψ. Подствив в нее вместо $p, q, w_1, \ldots, w_k$ первый раз соответственно

ρ, τ и элементы множества $\mathfrak{F}_\Psi$, а второй раз соответственно τ, ρ и элементы множества $\mathfrak{F}_\Psi$, получим, что $(\mathfrak{F}_\Psi \supset \rho) \supset ((\mathfrak{F}_\Psi \supset (\rho \supset \tau)) \supset (\mathfrak{F}_\Psi \supset \tau)) = \mathbf{1}$ и $(\mathfrak{F}_\Psi \supset \tau) \supset ((\mathfrak{F}_\Psi \supset (\tau \supset \rho)) \supset (\mathfrak{F}_\Psi \supset \rho)) = \mathbf{1}$. Поскольку $\mathfrak{F}_\Psi \supset (\rho \supset \tau) = \mathbf{1}$ и $\mathfrak{F}_\Psi \supset (\tau \supset \rho) = \mathbf{1}$, имеем $(\mathfrak{F}_\Psi \supset \rho) \supset (\mathfrak{F}_\Psi \supset \tau) = \mathbf{1}$ и $(\mathfrak{F}_\Psi \supset \tau) \supset (\mathfrak{F}_\Psi \supset \rho) = \mathbf{1}$. Значит, $\mathfrak{F}_\Psi \supset \rho \leqslant \mathfrak{F}_\Psi \supset \tau$ и $\mathfrak{F}_\Psi \supset \tau \leqslant \mathfrak{F}_\Psi \supset \rho$. Следовательно, $\mathfrak{F}_\Psi \supset \rho = \mathfrak{F}_\Psi \supset \tau$. Тогда, согласно пункту (2) этой леммы, имеем $\neg\neg\rho = \neg\neg\tau$. Q.E.D.

Докажем теорему, дающую критерий конечности для конечно-порожденных $\supset\!\vee\!\neg$-алгебр.

ТЕОРЕМА 12. *Конечно-порожденная $\supset\!\vee\!\neg$-алгебра Ψ конечна в том и только том случае, когда конечна ее $\supset\!\vee$-подалгебра $\mathfrak{E}_\Psi$.*

Доказательство. Пусть задана конечно-порожденная $\supset\!\vee\!\neg$-алгебра Ψ. Если Ψ — конечна, то конечна и ее $\supset\!\vee\!\neg$-подалгебра $\mathfrak{E}_\Psi$.

Докажем обратное утверждение. Пусть $\supset\!\vee$-подалгебра $\mathfrak{E}_\Psi$ $\supset\!\vee\!\neg$-алгебры Ψ конечна. По теореме 10 $\supset\!\vee\!\neg$-алгебра $\Psi/\mathfrak{E}_\Psi$ — конечна, т.е. имеет конечное число классов эквивалентности. Поэтому для доказательства конечности $\supset\!\vee\!\neg$-алгебры Ψ достаточно показать, что конечен каждый класс эквивалентности.

Пусть $\xi \in \Psi$, а $[\xi]$ — класс эквивалентности, порожденный элементом ξ. Пусть $\zeta \in [\xi]$. Согласно лемме 8, имеем $\zeta \vee \neg\zeta \in \mathfrak{E}_\Psi$. Элементу ζ из $[\xi]$ поставим в соответствие элемент $\zeta \vee \neg\zeta$ из $\mathfrak{E}_\Psi$. Покажем, что если $\rho, \eta \in [\xi]$ и $\rho \neq \eta$, то $\rho \vee \neg\rho \neq \eta \vee \neg\eta$. Предположим, что $\rho \vee \neg\rho = \eta \vee \neg\eta$. Нетрудно проверить, что $\rho \supset (\rho \vee \neg\rho) = \mathbf{1}$, $\rho \supset \neg\neg\rho = \mathbf{1}$, $\eta \supset (\eta \vee \neg\eta) = \mathbf{1}$ и $\eta \supset \neg\neg\eta = \mathbf{1}$. Согласно пункту (5) леммы 4, имеем $(\rho \vee \neg\rho) \supset (\neg\neg\rho \supset \rho) = \mathbf{1}$ и $(\eta \vee \neg\eta) \supset (\neg\neg\eta \supset \eta) = \mathbf{1}$. Так как $\rho, \eta \in [\xi]$, то $\rho \sim \xi$ и $\eta \sim \xi$, а следовательно, $\rho \sim \eta$. Тогда в силу пункта (3) леммы 11 верно равенство $\neg\neg\rho = \neg\neg\eta$. Поскольку $\rho \vee \neg\rho = \eta \vee \neg\eta$, имеем $\eta \supset (\rho \vee \neg\rho) = \mathbf{1}$, $\eta \supset \neg\neg\rho = \mathbf{1}$ и $(\rho \vee \neg\rho) \supset (\neg\neg\rho \supset \eta) = \mathbf{1}$.

Согласно пункту (11) леммы 2, имеем $\vdash (p \supset s) \supset ((p \supset t) \supset ((s \supset (t \supset q)) \supset (p \supset q)))$, где p, q, s и t — пропозициональные переменные. Тогда в силу леммы 1 эта $\supset\!\vee\!\neg$-формула общезначима в $\supset\!\vee\!\neg$-алгебре Ψ. Подставив в нее вместо p, q, s и t первый раз соответственно ρ, η, $\rho \vee \neg\neg\rho$ и $\neg\neg\rho$, а второй раз соответственно η, ρ, $\rho \vee \neg\neg\rho$ и $\neg\neg\rho$, получим, что $(\rho \supset (\rho \vee \neg\neg\rho)) \supset ((\rho \supset \neg\neg\rho) \supset (((\rho \vee \neg\neg\rho) \supset (\neg\neg\rho \supset \eta)) \supset (\rho \supset \eta))) = \mathbf{1}$ и $(\eta \supset (\eta \vee \neg\neg\rho)) \supset ((\eta \supset$

$\neg\neg\rho)\supset(((\rho\vee\neg\neg\rho)\supset(\neg\neg\rho\supset\rho))\supset(\eta\supset\rho))) = \mathbf{1}$. Отсюда с помощью доказанных выше равенств получим, что $\rho\supset\eta = \mathbf{1}$ и $\eta\supset\rho = \mathbf{1}$. Тогда $\rho \leqslant \eta$ и $\eta \leqslant \rho$, а поэтому имеем $\rho = \eta$. Противоречие. Следовательно, $\rho \vee \neg\rho \neq \eta \vee \neg\eta$.

Таким образом, мы доказали, что если $\rho, \eta \in [\xi]$ и $\rho \neq \eta$, то $\rho \vee \neg\rho \neq \eta \vee \neg\eta$, $\rho \vee \neg\rho \in \mathfrak{C}_\Psi$ и $\eta \vee \neg\eta \in \mathfrak{C}_\Psi$. Так как $\supset\vee$-подалгебра $\mathfrak{C}_\Psi$ $\supset\vee\neg$-алгебры Ψ конечна, то конечен и класс $[\xi]$. Следовательно, Ψ конечна. Q.E.D.

Литература

[1] *Биркгоф Г.* Теория структур. М.: Иностранная литература, 1952.

[2] *Карри Х.Б.* Основы математической логики. М.: Мир, 1969.

[3] *Расева Е., Сикорский Р.* Математика метаматематики. М.: Наука, 1972.

[4] *Клини С.К.* Введение в метаматематику. М.: Иностранная литература, 1957.

[5] *Horn A.* The separation theorem of intuitionist propositional calculus // Journal of Symbolic Logic. 1962. V. 27. № 4. P. 391–399.

[6] *Хомич В.И.* Об отделимых суперинтуиционистских пропозициональных исчислениях и о конъюнктивно неразложимых элементах в импликативных полуструктурах // Zeitschrift für mathematische Logik und Grundlagen der Mathematik. 1986. Bd. 32. № 2. S. 149–180.

[7] *Nishimura I.* On formulas of one veriable in intuitionistic propositional calculus // Journal of Symbolic Logic. 1960. V. 25. № 4. P. 327–331.

[8] *Кузнецов А.В.* О конечно-порожденных псевдобулевых алгебрах и финитно аппроксимируемых многообразиях // XII Всесоюзный алгебраический коллоквиум. Тезисы сообщений. Свердловск, 1973. С. 255–256.

[9] *Циткин А.И.* Структурально полные суперинтуиционистские логики и примитивные многообразия псевдобулевых алгебр // Математические исследования. Неклассические логики. 1987. Вып. 98. С. 134–151.

[10] *Diego A.* Sur les algebrès de Hilbert // Trand. de lèspangnol. Paris, 1966.

[11] *Янков В.А.* Конъюнктивно неразложимые формулы в пропозициональных исчислениях // Известия АН СССР. Серия математическая. 1969. Т. 33. № 1. С. 18–38.

[12] *Хомич В.И.* О свойствах суперинтуиционистских пропозициональных исчислений // Сибирский математический журнал. 1990. Т. 31. № 6. С. 158–175.

[13] *Хомич В.И.* О вложимости некоторых обобщений псевдобулевых алгебр // Доклады РАН. 1996. Т. 350. № 2. С. 174–177.

[14] *Хомич В.И.* О свойстве суперинтуиционистских пропозициональных исчислений, связанном с отделимостью этих исчислений // Математические вопросы кибернетики. 1998. № 7. С. 227–242.

[15] *Янков В.А.* О некоторых суперконструктивных исчислениях высказываний // Доклады АН СССР. 1963. Т. 151. № 4. С. 796–798.

[16] *Янков В.А.* О расширении интуиционистского пропозиционального исчисления до классического и минимального — до интуиционистского // Известия АН СССР. Серия математическая. 1968. Т. 32. № 1. С. 208–211.

Алгоритмическая проблема финитарного семантического следования пропозициональных формул I: контекст и постановка задачи[1]

А.В. Чагров

ABSTRACT. Different (nonequivalent) notions of the semantic consequence of propositional formulas, among which the notion of finitary semanic consequence is selected, are described. Some statements which are based on certain folklore proofs have been given. The example is Kuznetsov's observation which allows to prove the following unexpected statement: there is not an algorithm which, given a recursive (that is, decidable) set of propositional formulas, recognizes the presence at least of one invalid formula. But the aim of discussion in this paper is the setting of an algorithmic problem of finitary semantic consequence for various nonclassical propositional logics, such as modal, intuitionistic ones, Visser's logics. Solutions of these problems will be given in the following papers of series.

Эта статья — первая из статей, целью которых является доказательство того, что не существует алгоритма, который по двум произвольным пропозициональным формулам φ и ψ выяснял бы, истинна ли формула ψ в тех *конечных* шкалах Крипке, в которых истинна формула φ; другими словами, наша цель — доказательство неразрешимости *финитарного семантического следования*. При этом пропозициональные формулы мы понимаем достаточно широко — это, например, и модальные формулы, и интуиционистские формулы; кроме того, нас интересуют не столько формулы сами по себе, сколько их подразумеваемая интерпретация. Скажем, интуиционистские формулы, то есть формулы, построенные из пропозициональных переменных и константы $\perp$ («ложь») с помощью пропозициональных связок

[1]Работа поддержана РФФИ. Гранты № 06-06-80380-а и № 06-06-80292-а.

$\wedge$ (конъюнкция), $\vee$ (дизъюнкция), $\rightarrow$ (импликация) и обычных сокращений вроде отрицания $\neg\varphi = \varphi \rightarrow \bot$, могут пониматься как и в самом деле интуиционистскими с обычной семантикой Крипке, в которой отношение достижимости является частичным порядком (то есть транзитивным, рефлексивным, антисимметричным отношением), так и формулами языка базисной и пропозициональной логик А. Виссера [34], когда требования на шкалы Крипке иные: для базисной логики шкалы транзитивны, для формальной логики — транзитивны и не содержат бесконечных возрастающих цепей[2].

Для случая, когда φ и ψ — модальные формулы, соответствующее доказательство приводилось в [9] и в [12], однако в этих источниках доказательство упомянутого результата либо было технической деталью при решении иных задач (в [9] это неразрешимость первопорядковой определимости модальных формул на конечных шкалах), либо предварялось технически довольно насыщенным текстом доказательств иных результатов, что не может не затруднять перенос идеи этого доказательства на интуиционистский, базисный и формальный (по А. Виссеру) случаи. Кроме того, в последние годы возрос интерес к упомянутым логикам, близким по семантическому описанию к интуиционистской, например — к базисной и формальной логикам А. Виссера [34], для которых вопрос финитарного семантического следования представляет естественный интерес, поскольку, например, семантика формальной логики в [34] задавалась именно конечными шкалами, а потому в качестве первого шага рассмотрения этой новой проблематики разумно разобрать интуиционистский случай, детали которого до сих пор не были опубликованы.

В соответствии со сказанным одна из целей данной статьи — вводная.

Что значит «Из совокупности формул Γ семантически следует формула φ» ($\Gamma \models \varphi$, символически)?

Ответ на обозначенный вопрос существенно зависит от выбора языка[3], в котором заданы формулы, вида рассматриваемых семантических конструкций и т.д.

[2] В случае конечных шкал вместо отсутствия бесконечных возрастающих цепей можно использовать требование иррефлексивности.

[3] Подчеркнем, что нас будут интересовать только пропозициональные языки, хотя рассматриваемая проблематика представляет интерес и для

В частности, если формулы из Γ и формула φ являются формулами классической пропозициональной логики, то одно из возможных уточнений понятия семантического следования состоит в следующем: из формул (множества) Γ семантически следует формула φ, если при любой классической[4] истинностной оценке в соответствии с классическими таблицами истинности как только все формулы Γ принимают значение И, то же самое значение принимает и формула φ. Хорошо известна довольно простая теорема компактности для классической пропозициональной логики, в соответствии с которой согласно приведенному определению справедливо следующее утверждение (обратное ему утверждение тривиально): *если для всякого конечного подмножества Δ множества формул Γ и формулы φ существует оценка, при которой все формулы из Δ истинны, а φ ложна, то существует и такая оценка, при которой все формулы из Γ истинны, а φ ложна.* Поскольку всякое конечное множество формул эквивалентно (во всех смыслах) конъюнкции формул этого множества, можно всегда считать множество Δ одноэлементным. Ясно, что в этом случае утверждение $\Delta \models \varphi$ равносильно тому, что формула[5] $\Delta \to \varphi$ является тождественно истинной ($\models \Delta \to \varphi$, символически), и тому, что формула $\Delta \to \varphi$ выводима в классическом исчислении высказываний (подходящего вида). Таким образом, в случае классической пропозициональной логики семантическое следование в сформулированном выше смысле «вырождается» в выводимость некоторой формулы в классическом исчислении высказываний.

Второй возможный ответ связан с пониманием формул как схем суждений (рассуждений, высказываний). В этом случае наш вопрос может быть переформулирован так: «В каком случае можно утверждать, что из справедливости схемы суждений φ следует справедливость схемы суждений ψ?». Надо иметь в

языков более высокого уровня, однако для них имеются некоторые ответы на этот вопрос, см. обсуждение далее.

[4]То есть на множестве $\{\text{И}, \text{Л}\}$ с обычными классическими условиями распространения оценки с подформул на всю формулу, выраженными в таблицах истинности.

[5]В этой формуле для множества формул $\Delta = \{\delta\}$ традиционно опущены множественные фигурные скобки, то есть запись $\Delta \to \varphi$ означает $\delta \to \varphi$. Этой традиции мы придерживаемся и в дальнейшем, не оговаривая особо.

виду, что в классической логике высказываний все высказывания разделены на два вида — истинные и ложные, не взирая на какие-либо сопутствующие высказываниям обстоятельства и/или содержательные свойства самих высказываний, а потому в этом случае мы можем получать из схемы суждений конкретное высказывание (по существу *истину* или *ложь*), подставляя вместо переменных в качестве значений только элементы множества $\{$*истина*, *ложь*$\}$. В классической логике мы принимаем схему высказываний (формулу), если при любой такой подстановке в результате вычислений по таблицам истинности мы получаем *истину* (то есть формула тождественно истинна). В итоге вместо вопроса «В каком случае можно утверждать, что из справедливости схемы суждений φ следует справедливость схемы суждений ψ?» мы получаем вопрос «следует ли из тождественной истинности формулы φ тождественная истинность формулы ψ?». А вот этот вопрос решается совсем тривиально: ответ на него положителен ровно в том случае, когда формула φ не тождественно истинна или же формула ψ тождественно истинна.

Ситуация меняется, оказываясь не столь простой, когда мы переходим от классической логики к неклассическим, скажем, модальным, интуиционистской и т.п. Теперь у нас нет таблиц истинности, однако имеются, как правило, совокупности семантических конструкций, в определенном смысле их заменяющие. В этой статье мы рассматриваем только один вид таких семантических конструкций — *шкалы Крипке* (будем часто говорить просто *шкалы*, поскольку другие виды шкал мы здесь не обсуждаем). Факт истинности формулы φ на шкале F обозначаем $F \models \varphi$; контекстность использования значка $\models$ позволяет легко отличить в обозначениях семантическое следование формул и истинность формулы на шкале.

Пусть C — некоторый класс[6] шкал, φ и ψ — формулы языка, соответствующего этому классу: модальные формулы — модальные шкалы, интуиционистские формулы — интуиционистские шкалы, и т.д. Говорим, что *формула ψ является* (*семантическим*) *следствием формулы φ на классе шкал C* (другими сло-

[6]Мы не будем делать различий между понятиями множества и класса, считая эти термины синонимами.

вами, ***формула φ (семантически) влечет формулу ψ на классе шкал $\mathcal{C}$***; символически, $\varphi \models_{\mathcal{C}} \psi$), если для каждой шкалы F из $\mathcal{C}$ справедливо, что если φ истинна на шкале F, то и ψ истинна на F. Отметим, что если класс $\mathcal{C}$ состоит из одной одноэлементной интуиционистской шкалы, то семантическое следование на $\mathcal{C}$ есть не что иное, как то, что выше названо «вторым ответом» для классической логики высказываний. Рассмотрим другие примеры.

Как известно, интуиционистская логика **Int** может быть задана как множество формул истинных на всех шкалах из:

- класса $\mathcal{C}_1$ всех *конечных* интуиционистских шкал,
- класса $\mathcal{C}_2$ всех *счетных* интуиционистских шкал,
- класса $\mathcal{C}_3$ всех *континуальных* интуиционистских шкал,
- класса $\mathcal{C}_4$ всех интуиционистских шкал, *имеющих мощность*[7] *больше континуума.*

То есть справедливо, что

$$\mathbf{Int} = \{\varphi : \forall F \in \mathcal{C}_i\, F \models \varphi\}$$

при $1 \leq i \leq 4$. Здесь классы $\mathcal{C}_i$ приведены лишь для примера. Разумных классов шкал, семантически определяющих интуиционистскую логику, довольно много. Однако в данной статье нас будет интересовать в основном класс $\mathcal{C}_1$. Отметим, что тот факт, что $\forall F \in \mathcal{C}_i\, F \models \varphi$, в уже введенных обозначениях можно изобразить символически через $\emptyset \models_{\mathcal{C}_i} \varphi$, то есть это по существу семантическое следование из пустого множества формул. Нас же интересует общий случай, то есть ситуации следования $\Gamma \models_{\mathcal{C}_i} \varphi$ при произвольных Γ и φ.

Отметим, что все отношения $\models_{\mathcal{C}_i}$ при $1 \leq i \leq 4$ не обладают компактностью, то есть аналогами свойства, указанного выше для классического случая. В качестве примеров укажем [27] и [5], где это доказано по существу для модальных аналогов отношений $\models_{\mathcal{C}_i}$ при $1 \leq i \leq 4$ ([27] — для временно́й и модальной

[7]Мощностью шкалы называется мощность множества миров этой шкалы.

логик; [5] — для модальной логики **S4**, точнее, класса модальных транзитивных и рефлексивных шкал); для интуиционистских случаев, насколько мне известно, соответствующие доказательства не публиковались. Кроме того, легко заметить, что отношения $\Gamma \models_{\mathcal{C}_i} \varphi$ при рассмотрении непустых множеств Γ уже оказываются различными при разных i. Приведем сначала некоторые примеры таких различий для $i \neq 1$ (повторюсь, случай $i = 1$ нас будет интересовать особо).

Хотя целью исследования, как уже сказано, являются интуиционистские[8] формулы и их семантика Крипке, относящаяся к ним проблематика близка и к иным неклассическим формулам и их семантике Крипке; более того, близкими оказываются порой не только проблемы, но и идеи их решения. Поэтому мы приведем некоторые уместные здесь факты в хронологическом порядке, а не упорядочивая их по типам языков и/или семантик неклассических логик.

В обзоре [22] в списке проблем оказалась следующая[9]: всякая ли суперинтуиционистская[10] логика аппроксимируема счетными шкалами Крипке? Для переформулировки этой проблемы в случае временных логик[11] расширенный отрицательный ответ был получен в [28]. Для уточнения этого ответа нам понадобятся некоторые определения, связанные с мощностями множеств (кардиналами или кардинальными числами). Обозначим $\kappa_0 = \aleph_0$, $\kappa_{\alpha+1} = 2^{\kappa_\alpha}$, $\kappa_\alpha = \lim\{\kappa_\beta \mid \beta < \alpha\}$ для предельного ординала α. Так вот, в соответствии с [28] для всякого ордина-

---

[8]Еще раз оговорим, что мы называем интуиционистскими формулы из определенного множества, но семантика их может быть и не интуиционистской, как в случае логик А. Виссера.

[9]Отметим, что во время написания [22] примеры неполных по Крипке пропозициональных суперинтуиционистских логик не были известны. Их существование — также вопрос, сформулированный в [22], хотя его в то время уже можно было отнести к фольклорным, поскольку он (скажем, для случая модальных логик) интересовал многих логиков. Первая неполная по Крипке суперинтуиционистская (конечно-аксиоматизируемая!) логика была построена в [13].

[10]Добавим в соответствии с примечанием 9: полная по Крипке.

[11]Более точно, многомодальных логик, в которых каждая модальность имеет сопряженную. В частном случае получается и обычная временная логика, которая является бимодальной логикой с сопряженными модальностями.

ла α, такого что $\alpha < 2\omega$, существует непротиворечивая полная по Крипке временнáя логика, все шкалы Крипке которой имеют мощность не менее κ_α.

Отрицательный ответ на вопрос [22] в его изначальной формулировке был получен в [15], где построены континуальная шкала F (то есть мощность F есть $\kappa_1 = 2^{\aleph_0}$) и формулы φ, ψ со свойствами: $\varphi \models_{\mathcal{C}_2} \psi$, но $\varphi \not\models_{\mathcal{C}_3} \psi$, причем последнее условие обосновывается с помощью шкалы F, то есть выполняются условия $F \models \varphi$ и $F \not\models \psi$. Таким образом, подходящим контрпримером к отмеченному вопросу [22] является множество формул, истинных в этой шкале, то есть суперинтуиционистская логика $L(F)$. Кроме этого, результат [15] показывает различие отношений $\models_{\mathcal{C}_2}$ и $\models_{\mathcal{C}_3}$, причем это различие получено уже для случая одноэлементных (или, что то же самое, конечных) левых частей отношений семантического следования.

Упомянутый результат [28] невозможно перенести с временны́х логик на нормальные модальные логики, поскольку по теореме Макинсона [26] (теорема 8.67 в [12]) всякая непротиворечивая нормальная модальная логика имеет по крайней мере одну из двух возможных шкал с одним лишь миром — рефлексивным или иррефлексивным. Однако, если снять требование нормальности, то есть замкнутости логики относительно правила Геделя $\varphi/\Box\varphi$, то ограничение в виде теоремы Макинсона перестает действовать. Это обстоятельство удалось использовать в [10], где построено непротиворечивое расширение модальной логики **K4** (не замкнутое по правилу Геделя, естественно), обладающее свойствами: оно полно по Крипке (по существу просто-напросто задается некоторой шкалой Крипке с выделенными мирами[12]), всякая шкала имеет мощность не менее κ_ω. Естественными изменениями приведенной в [10] конструкции для всякого n, $n \leq \omega$, легко получается модальная логика, которая задается шкалой

[12]Это не слишком обременительное расширение класса шкал Крипке: для нормальных модальных логик и, скажем, суперинтуиционистских логик можно всегда считать, что множество выделенных миров совпадает со множеством всех миров. Отметим, что и сам С. Крипке в своей основополагающей статье [15] (см. перевод этой статьи в [2]) рассматривал только (!) шкалы с множествами выделенных миров, причем всегда множество выделенных миров было одноэлементно и выделенный мир назывался действительным.

мощности κ_n и не аппроксимируется шкалами меньших мощностей; для случая $n = \omega$ соответствующее доказательство приведено в [12] (см. теорему 6.30 [12]). Стоит отметить, что для упомянутых построений в [10] совершенно неслучайно рассматривались расширения **K4**, попытки перенести результат этих построений, скажем, на случай (всех, не обязательно замкнутых по правилу Геделя) расширений логики **S4** к успеху не приведут, поскольку для них справедлив следующий аналог теоремы Макинсона: всякое непротиворечивое расширение **S4** и даже **D** среди своих шкал имеет одноэлементную рефлексивную шкалу; аналогична ситуация и с временны́ми логиками, содержащими формулы $P\top$ и $F\top$ (то есть «что-то было» и «что-то будет» соответственно).

Основная идея упомянутой конструкции [10] перенесена на суперинтуиционистский случай в [11] для усиления результата [15]. А именно в [11] приведен пример суперинтуиционистской логики, которая задается шкалой мощности κ_ω, но не аппроксимируется шкалами меньших мощностей. Таким образом, различия отношений вида $\models_{C_i}$, $1 < i \leq 4$, (эти отношения, напомню, связаны со счетностью, континуальностью и гиперконтинуальностью используемых в определениях семантического следования шкал) можно в интуиционистском случае распространять и на отношения, получающиеся при рассмотрении классов шкал мощностей κ_n, $n \leq \omega$. Вообще же результаты и [15], и [11] связаны с опубликованным в [15] следующим вопросом А. В. Кузнецова: «Для каких кардиналов k k-аппроксимируемость суперинтуиционистской логики (или нормального расширения **S4**) неравносильна k^+-аппроксимируемости? В частности, какова верхняя грань множества всех таких k?» То, что такая верхняя грань существует, простое наблюдение самого А.В. Кузнецова: требуемый факт следует из того, что логик «всего» континуум, а формул, проверяемых на принадлежность полной по Крипке логике, «совсем мало» — множество формул счетно, так что достаточно взять мощность объединения всех шкал (множеств их миров) $F_{L,\varphi}$, где $F_{L,\varphi}$ — какая-нибудь шкала, отделяющая формулу φ от логики L, если φ от логики L действительно какой-нибудь шкалой отделяется.

Последнее известное мне существенное продвижение на пути расширения ответов на рассматриваемый вопрос [22] получено в [24]. Однако в [24] рассматриваются произвольные нормальные модальные логики и не видно, как можно было бы перенести полученные там результаты на случай логик с транзитивными шкалами, скажем — суперинтуиционистские, нормальные расширения **K4**.

Наконец, обратимся к отношению $\models_{\mathcal{C}_1}$. Напомню, что $\mathcal{C}_1$ — класс конечных шкал Крипке. Семантически, точнее — по способности опровергать формулы, конечные шкалы Крипке и конечные псевдобулевы алгебры эффективно семантически эквивалентны для интуиционистских формул: по всякой конечной шкале Крипке F можно построить[13] конечную псевдобулеву алгебру F^+, такую что

$$\{\varphi \mid F \models \varphi\} = \{\varphi \mid F^+ \models \varphi\},$$

и наоборот, по всякой конечной псевдобулевой алгебре A можно построить конечную шкалу Крипке A_+, такую что

$$\{\varphi \mid A \models \varphi\} = \{\varphi \mid A_+ \models \varphi\}.$$

(Этот и даже более сильные хорошо известные факты, в частности — конкретизация построений (операторов), выраженных здесь индексами $^+$ и $_+$, могут быть найдены, например, в монографии [12] и отчасти в [4][14].) Таким образом, в определении отношения $\models_{\mathcal{C}_1}$ мы можем заменить класс $\mathcal{C}_1$ классом конечных псевдобулевых алгебр, причем эта замена эффективна в указанном выше смысле. Нам эта замена здесь важна, поскольку

---

[13]Этимология слова «построить» подразумевает наличие некоторого *способа* построения, то есть в рассматриваемом контексте *алгоритма* построения.

[14]Здесь приведены лишь широко доступные российскому читателю источники: книга [4] в русском переводе издана достаточно большим тиражом, чтобы до сих пор быть в наличии в большинстве научных библиотек, а [12], хотя и не может считаться финансово доступной, без какого-либо участия авторов и издателей в электронном виде довольно свободно распространяется в Интернете. Заметим только, что монография [4] писалась до широкого распространения семантики Крипке, в частности, там полностью отсутствует реляционная семантика неклассических логик, хотя имеются необходимый аппарат в виде теорем о представлении.

первое отличие отношения $\models_{\mathcal{C}_1}$ от остальных отношений $\models_{\mathcal{C}_i}$, $1 < i \leq 4$, было получено именно в терминах конечных псевдобулевых алгебр: в [17] было показано, что не все суперинтуиционистские логики являются финитно аппроксимируемыми, причем в соответствующем доказательстве использовались псевдобулевы алгебры конечной ширины (ширины 3, если быть точными), а суперинтуиционистские логики, задаваемые псевдобулевыми алгебрами конечной ширины, полны по Крипке, см. [6][15]. Другими словами, существуют такие множество формул Γ и формула φ, что $\Gamma \models_{\mathcal{C}_1} \varphi$ (в терминологии А.В. Кузнецова формулу φ невозможно отделить от Γ конечными средствами), но $\Gamma \not\models_{\mathcal{C}_i} \varphi$ при $i \neq 1$ — достаточно воспользоваться алгебрами Линденбаума и/или каноническими шкалами (в последнем случае используется конечность ширины). В статье [17] логика, не обладающая свойством финитной аппроксимируемости, оказалась побочным продуктом решения совершенно другой задачи — обоснования континуальности семейства суперинтуиционистских логик, поэтому оставался открытым вопрос о существовании суперинтуиционистских исчислений, то есть логик с конечными аксиоматизациями, без финитной аппроксимируемости. Примеры таких исчислений были обнаружены в [2], причем вновь были использованы алгебры конечной ширины. Таким образом, отличие отношения $\Gamma \models_{\mathcal{C}_1} \varphi$ от других справедливо уже для конечных (одноэлементных) множеств Γ.

Обратимся теперь к алгоритмической проблематике семантического следования, то есть вопросу эффективного выяснения по множеству формул Γ и формуле φ, верно ли, что из Γ семантически следует φ. Конечно, для каждого из отношений семантического следования это свой отдельный вопрос, причем в случае, если вопрос решается положительно, то есть имеется алгоритм соответствующего «выяснения», то следует ожидать, что сами решения проблемы должны быть разными из-за различий отношений семантического следования.

---

[15] В [6] использован термин «конечномерные» по отношению к рассматриваемым там суперинтуиционистским логикам. В настоящее время термин «многомерная логика» (причем здесь «много» означает «конечно много») в теории неклассических логик широко используется в ином значении, поэтому в связи с [6] предпочтительнее говорить о суперинтуиционистских логиках конечной ширины, тем более что нужный нам результат о полноте следует уже из [21], где говорится о логиках конечной ширины.

Прежде всего, поскольку нас интересует вопрос существования алгоритмов, нам нужно условиться, что должно подаваться на вход этих алгоритмов. Естественным требованием представляется эффективность описания Γ и φ. Для φ это требование выполнено автоматически, поскольку формула является конечным объектом, но как быть с эффективным описанием Γ? Имеются три варианта ответа на этот вопрос:

а) множество Γ *рекурсивно перечислимо*, то есть Γ пусто или же существует всюду определенный алгоритм A (а тем самым и его эффективное (конечное!) описание в виде программы, его реализующей), действующий из множества натуральных чисел во множество формул, который последовательно перечисляет множество Γ, то есть

$$\Gamma = \{\mathsf{A}(0), \mathsf{A}(1), \mathsf{A}(2), \dots, \mathsf{A}(n), \dots\};$$

б) множество Γ *рекурсивно* (*разрешимо* в другой терминологии), то есть существует алгоритм A (и опять-таки его эффективное описание в виде реализующей программы), который по произвольной формуле распознает ее принадлежность множеству Γ, то есть по всякому слову X в алфавите, в котором задаются интуиционистские формулы, дает ответ на вопрос «Верно ли, что X принадлежит Γ?»:

$$\mathsf{A}(X) = \begin{cases} \underline{\textbf{Да}}, & \textit{если } X \in \Gamma \\ \underline{\textbf{Нет}} & \textit{в противном случае}; \end{cases}$$

в) множество формул Γ *конечно.*

Эти варианты не являются взаимоисключающими, более того, очевидно, что справедливы импликативные соотношения

$$\text{в)} \Rightarrow \text{б)} \Rightarrow \text{а)}.$$

С обратными импликациями, точнее — с импликацией а) $\Rightarrow$ б), ситуация не столь проста.

В теории алгоритмов приводятся примеры множеств конструктивных объектов[16], которые рекурсивно перечислимы, но не

[16]Типичным и наиболее простым примером конструктивных объектов являются записи натуральных чисел в алфавите $\{|\}$: $|$, $||$, $|||$, ... Интуиционистские, скажем, пропозициональные формулы также являются конструктивными объектами.

рекурсивны. Однако нас интересуют не просто множества, а множества формул, описывающих множества шкал: рассматривая, к примеру, соотношение вида $\Gamma \models_{\mathcal{C}_1} \varphi$, мы по существу интересуемся вопросом истинности формулы φ на всех шкалах из множества $\{F \mid F \models_{\mathcal{C}_1} \Gamma\}$. Будем для краткости говорить о последнем множестве, что это *множество шкал из класса* $\mathcal{C}_1$, *аксиоматизированное* (*аксиоматизируемое*) *множеством формул* Γ (или, другими словами, *множество шкал, аксиоматизированное* (*аксиоматизируемое*) *множеством формул* Γ *над классом шкал* $\mathcal{C}_1$), употребляя аналогичную терминологию и в случае других классов шкал, то есть не обязательно $\mathcal{C}_1$.

Хорошо известно, см. [20] или теорему 16.10 в [12], что всякая рекурсивно перечислимо аксиоматизируемая логика является рекурсивно аксиоматизируемой (обратное практически очевидно). Аналогом этого наблюдения [20] является

ТЕОРЕМА 1. *Для всяких классов шкал* $\mathcal{C}$ *и* $\mathcal{D}$ *следующие условия эквивалентны:*

- *класс шкал* $\mathcal{D}$ *аксиоматизируем над классом* $\mathcal{C}$ *некоторым рекурсивно перечислимым множеством формул* Γ_1,
- *класс шкал* $\mathcal{D}$ *аксиоматизируем над классом* $\mathcal{C}$ *некоторым рекурсивно перечислимым множеством формул* Γ_2,

причем здесь переходы от Γ_1 *к* Γ_2 *и от* Γ_2 *к* Γ_1 *можно осуществлять эффективно.*

Доказательство этого утверждения практически не отличается от доказательства [20]. Приведем его для полноты изложения, тем более что оно довольно коротко. Кроме того, доказательство покажет границы его применимости.

Ясно, что доказательства требует только случай, когда $\Gamma_1 \neq \emptyset$ и/или $\Gamma_2 \neq \emptyset$.

Пусть Γ_1 — рекурсивно перечислимое множество формул, аксиоматизирующее $\mathcal{D}$ над $\mathcal{C}$. В частности, существует некоторый алгоритм A_1 такой, что

$$\Gamma_1 = \{\mathsf{A}_1(0), \mathsf{A}_1(1), \mathsf{A}_1(2), \ldots, \mathsf{A}_1(n), \ldots\}.$$

Введем обозначение γ_n:

$$\gamma_n = \underbrace{\mathsf{A}_1(n) \wedge \mathsf{A}_1(n) \wedge \cdots \wedge \mathsf{A}_1(n)}_{n+1 \text{ раз } \mathsf{A}_1(n)}$$

(единица добавлена, чтобы учесть случай $n = 0$). Теперь определяем множество формул Γ_2:

$$\Gamma_2 = \{\gamma_n \mid n \geq 0\}.$$

Нам надо показать, что: i) Γ_2 аксиоматизирует тот же класс шкал, что и Γ_1, ii) множество Γ_2 разрешимо.

Пункт i) очевиден. В самом деле, формула $\chi_1 \wedge \chi_2$ истинна в какой-либо шкале в точности тогда, когда в этой шкале истинны обе формулы χ_1 и χ_2. Таким образом, формула $\mathsf{A}_1(n)$ истинна в шкале тогда и только тогда, когда в этой шкале истинна формула γ_n, а потому формулы из Γ_1 и Γ_2 истинны в одних и тех же шкалах.

Для обоснования пункта ii) опишем соответствующий алгоритм A_2.

Нам нужно по произвольному слову X в алфавите интуиционистских пропозициональных формул выяснить, верно ли, что $X \in \Gamma_2$.

По слову X выясняем, прежде всего, является ли оно формулой. Если не является, даем ответ **Нет**. Если же X — формула, то всеми возможными способами представляем ее в виде $Y \wedge Y \wedge \cdots \wedge Y$ (здесь, в частности, используется ассоциативность конъюнкции). Таких представлений лишь конечное число ввиду конечности всякой формулы; отметим попутно, что одним из таких представлений является сама формула X как кратная конъюнкция с одним конъюнктивным членом, 0-кратную конъюнкцию, то есть константу $\top$, в расчет не берем. По каждому из полученных представлений $\underbrace{Y \wedge Y \wedge \cdots \wedge Y}_{n \text{ раз } \mathrm{Y}}$ проделываем следующее: вычисляем $\mathsf{A}_1(n-1)$ и сравниваем результат с Y. Если оказалось, что $\mathsf{A}_1(n-1) = Y$, а тем самым $X = \gamma_{n-1}$, говорим **Да** и работу прекращаем. Если же ни для одного из полученных представлений ответа **Да** не получилось, то говорим **Нет** и прекращаем работу.

Пусть теперь Γ_2 — рекурсивное множество формул, аксиоматизирующее $\mathcal{D}$ над $\mathcal{C}$, а A_2 — соответствующий разрешающий алгоритм, то есть

$$\mathsf{A}_2(X) = \begin{cases} \underline{\textbf{Да,}} & \textit{если } X \in \Gamma_2 \\ \underline{\textbf{Нет}} & \textit{в противном случае} \end{cases}$$

для всякого слова X в алфавите интуиционистских пропозициональных формул.

Описываем требуемый алгоритм A_1, перечисляющий множество Γ_2, считая $\Gamma_1 = \Gamma_2$. Фактически нам достаточно эффективно описать начальные отрезки последовательности γ_0, γ_1, γ_2, ... такой, что $\Gamma_2 = \{\gamma_0, \gamma_1, \gamma_2, \dots\}$, а затем положить, что $\mathsf{A}_1(n) = \gamma_n$. Напомним, что множество Γ_2 непусто, то есть $\delta \in \Gamma_2$ для некоторой формулы δ; формула δ будет использоваться.

Выписываем последовательно все непустые слова X_0, X_1, X_2, ... , X_n, ... в алфавите интуиционистских пропозициональных формул (он конечен[17]!), например, сначала выписав все однобуквенные слова, затем все двухбуквенные, затем все трехбуквенные и т.д.[18] По ходу выписывания с каждым из получающихся слов X_n проделываем следующее.

Проверяем, является ли X_n формулой. Если X_n формулой не является, то полагаем, что $\gamma_n = \delta$. Если же X_n — формула, то с помощью алгоритма A_2 выясняем, принадлежит ли она множеству Γ_2. Если принадлежит, то полагаем, что $\gamma_n = X_n$, в противном случае полагаем, что $\gamma_n = \delta$.

Теорема 1 доказана.

Сделаем несколько замечаний о границах применимости доказательства теоремы 1.

Прежде всего, та часть доказательства, где переделывался алгоритм A_2 в алгоритм A_1 (последние три абзаца доказательства),

---

[17]Не будем забывать, что хотя пропозициональных переменных бесконечно много, они являются словами вида *буква* + *индекс*, где буквы достаточно и одной, а для индексов (записей натуральных чисел) используются символы из конечного алфавита, например — привычного $\{0, 1, \dots, 9\}$.

[18]Конечно, нужно определиться, в каком порядке выписывать слова с одинаковым количеством букв. Можно для такой определенности воспользоваться лексико-графическим методом, то есть фактически тем, который используется в словарях.

никакого отношения к логикам не имеет; по существу доказывался простой факт из теории алгоритмов: всякое рекурсивное множество (конструктивных объектов) является рекурсивно перечислимым. А вот переделка алгоритма A_1 в алгоритм A_2 существенно использовала «логическую» специфику. Здесь кавычки использованы потому, что существуют логические (или «логикообразные») системы, не обладающие нужными свойствами.

Главное использованное свойство заключается в том, что у нас есть возможность, не меняя свойств формулы по существу, изменить ее так, что в результате в эту формулу окажется встроенной числовая информация: мы переделывали формулу $\mathsf{A}_1(n)$, в которой *a priori* никакой информации про число n нет[19], в формулу $\underbrace{\mathsf{A}_1(n) \wedge \mathsf{A}_1(n) \wedge \cdots \wedge \mathsf{A}_1(n)}_{n+1 \text{ раз } \mathsf{A}_1(n)}$, которая уже содержит числовую информацию (в виде количества одинаковых конъюнктивных членов).

Отметим, что ассоциативность конъюнкции была использована «не по делу»; чтобы ее не использовать, можно было положить, что

$$\gamma_n = \underbrace{\mathsf{A}_1(n) \wedge (\mathsf{A}_1(n) \wedge (\cdots \wedge (\mathsf{A}_1(n) \wedge \mathsf{A}_1(n))\ldots))}_{n+1 \text{ раз } \mathsf{A}_1(n)},$$

немного изменив соответственно описание алгоритма A_2. Более точно, мы использовали на самом деле не конъюнкцию, а кратную конъюнкцию, что соответствует установившейся традиции; использование обычной, то есть не более чем двучленной, конъюнкции даже упрощает ситуацию, позволяя обойтись без поиска для испытуемой формулы представлений вида $Y \wedge Y \wedge \cdots \wedge Y$.

Использование именно конъюнкции для внесения в формулу числовой информации также не является обязательным — дизъюнкция (с тем же замечанием про ассоциативность) справляется с этой задачей не хуже: можно положить, например, что

$$\gamma_n = \underbrace{\mathsf{A}_1(n) \vee \mathsf{A}_1(n) \vee \cdots \vee \mathsf{A}_1(n)}_{n+1 \text{ раз } \mathsf{A}_1(n)}$$

---

[19] То, что она получена в результате работы какого-то алгоритма над каким-то числом, к самой формуле отношение имеет такое же, какое имеет пекарь к буханке хлеба — обычному едоку важны свойства хлеба, а не то, кто его испек.

или

$$\gamma_n = \mathsf{A}_1(n) \vee \underbrace{\bot \vee \bot \vee \cdots \vee \bot}_{n+1 \text{ раз } \bot}.$$

Да и импликация может быть использована: можно положить, что

$$\gamma_n = \underbrace{\top \to (\top \to (\cdots \to (\top}_{n+1 \text{ раз } \top} \to \mathsf{A}_1(n))\ldots)).$$

Наконец, можно для внесения числовой информации вообще не использовать свойства логических связок и/или констант, обойдясь переменными. (Ведь при оценке в шкалах Крипке переменные важны не сами по себе, а важно их различие при определении конкретной оценки; так, с семантической точки зрения формулы $p_2 \to (p_3 \vee (p_3 \to \bot)) \wedge p_2$ и $p_{20062006} \to (p_{2006} \vee (p_{2006} \to \bot)) \wedge p_{20062006}$ ничем не отличаются. Поэтому, в частности, переменные всегда можно переименовывать (лишь бы разные переменные были переименованы в разные) и всегда можно считать, что все входящие в какую-либо формулу переменные образуют начальный отрезок последовательности $p_0, p_1, \ldots, p_m, \ldots$) Пусть, например, формула $\mathsf{A}_1(n)$ содержит в точности переменные из списка $p_0, p_1, \ldots, p_m$ и первым по ходу (скажем, слева направо) вхождением переменной является вхождение p_m (если это не так, то можно опять-таки переменные переименовать подходящим образом). Теперь в качестве аналога формулы γ_n можно взять результат замены в формуле $\mathsf{A}_1(n)$ (с учетом предыдущих манипуляций) всех вхождений переменной p_m на p_{m+n}.

Конечно, есть и масса иных вариантов внесения числовой информации. Зачем нам такая вариативность конструкции? Дело в том, что теорема 1 (или ее аналог) справедлива для очень широкого класса логических систем, например — не использующих те или иные логические связки (но использующие, быть может, какие-то иные, то есть отличающиеся языком — (поли)модальные, релевантные и т.д.), задаваемые не семантически, а синтаксически, то есть аксиомами и правилами вывода, и т.п. Для подавляющего большинства разумных видов логических систем удается подобрать подходящую модификацию доказательства утверждения типа теоремы 1.

Вернемся к импликациям между пунктами а), б) и в) со страницы 226. Как следует из теоремы 1, пункты а) и б) эффективно эквивалентны, а потому алгоритмическую проблему семантического следования φ из Γ (в разных вариантах) можно одновременно рассматривать и для случая рекурсивно перечислимых множеств Γ, и для случая рекурсивных множеств Γ, фактически не различая эти случаи. Однако пункт в) (нефиксированное множество Γ конечно) не может быть эквивалентен (и тем более эффективно эквивалентен) ни пункту а), ни пункту б), поскольку существуют полные по Крипке рекурсивно аксиоматизируемые логики без конечной аксиоматизации. Это следует уже из доказательства континуальности семейства суперинтуиционистских логик, данного в [17].

Значит, при алгоритмическом рассмотрении семантического следования мы обязаны рассматривать случаи из пунктов а), б) и пункта в) отдельно.

Рассматриваем пункты а) и б). Здесь ситуация оказывается алгоритмически «безнадежной» ввиду наблюдения, сделанного (но им самим не опубликованного) А.В. Кузнецовым. Впервые, насколько мне известно, это наблюдение (будем далее в этой статье называть его и близкие теоремы теоремой Кузнецова[20]) было опубликовано в приложении к статье [12] со ссылкой на информацию, полученную от Л.Л. Максимовой. Кроме того, теорема Кузнецова опубликована в [12]. В исходной формулировке (так, как в [2] и в [12]) речь в ней идет о свойствах алгоритмически задаваемых логик (то есть *рекурсивно аксиоматизируемых*, или *рекурсивно перечислимо аксиоматизируемых*, или простонапросто *рекурсивно перечислимых*): *всякое такое нетривиальное свойство рекурсивно перечислимых логик алгоритмически неразрешимо.*

[20]Идейно, да и по формулировке, теорема Кузнецова близка к теореме Райса—Успенского (часто говорят «теорема Райса») из теории алгоритмов: всякое нетривиальное инвариантное свойство программ алгоритмически неразрешимо. Здесь: нетривиальность — это программы как с этим свойством, так и без него; инвариантность — программы, вычисляющие одну и ту же функцию, либо одновременно обладают, либо одновременно не обладают этим свойством. Примером нетривиального инвариантного свойства является свойство «срабатывать хотя бы на одном входе», см. с. 234.

Приведем вариант теоремы Кузнецова для отношений семантического следования. При этом в формулировке мы не будем стремиться к самой большой общности, поскольку идея доказательства настолько проста, что любой заинтересованный исследователь легко модифицирует ее для интересующего его случая.

ТЕОРЕМА 2 (теорема Кузнецова). *Пусть* $\models$ *означает любое из семантических следований* $\models_{C_i}$, $1 \leq i \leq 4$. *Тогда не существует алгоритма, который по произвольным рекурсивно перечислимому множеству формул* Γ *и формуле* φ *выяснял бы, верно ли, что* $\Gamma \models \varphi$.

Для доказательства этой теоремы нам понадобятся три общеизвестных факта из теории алгоритмов. Отметим, что второй и третий факты связаны с тезисом Черча, без которого, собственно, и теории алгоритмов нет.

Первый факт — довольно простой. Он состоит в том, что можно алгоритмически перенумеровать пары натуральных чисел натуральными числами, так что каждая пара чисел $\langle s, t\rangle$ получит ровно один натуральный номер $N(s,t)$ и каждое натуральное число n окажется номером ровно одной пары чисел $\langle s,t\rangle = \langle L(n), R(n)\rangle$, причем функции N, L, R эффективно вычислимы (то есть задаются алгоритмами) и являются всюду определенными[21]. Из огромного множества возможностей определения такого рода нумераций выберем наиболее часто используемый вариант. В [1] получающиеся в этом варианте функции записаны в явном виде, но нам этот вид не понадобится, поэтому просто опишем, как вычислять нужные нам функции. Читатель может проверить, что описываемые далее функции можно определить как суперпозиции элементарных функций (детальное решение этого упражнения см. в [1]), например: $N(s,t) = \frac{(s+t)(s+t+1)}{2} + s$.

Прежде всего, расположим все пары натуральных чисел в эффективную последовательность так: сначала выписываем все пары чисел, у которых сумма первой и второй компонент равна 0 (такая пара одна — $\langle 0, 0\rangle$), затем — все пары чисел, у которых

---

[21] Таким образом, всегда $L(N(s,t)) = s$ при любом t, $R(N(s,t)) = t$ при любом s, $N(L(n), R(n)) = n$. Обозначения функций в общем-то традиционны и связаны с первыми буквами английских слов *Number* (номер), *Left* (левый), *Right* (правый).

сумма первой и второй компонент равна 1 (таких пар две — $\langle 0,1\rangle$ и $\langle 1,0\rangle$), затем — все пары чисел, у которых сумма первой и второй компонент равна 2 (вновь таких пар столько же, какова зафиксированная сумма компонент), и т.д.; для упорядочивания пар с одинаковыми суммами компонент придерживаемся правила — выписывать пару с меньшей первой компонентой раньше. Начало этой последовательности будет таким:

$$\langle 0,0\rangle\,,\langle 0,1\rangle\,,\langle 1,0\rangle\,,\langle 0,2\rangle\,,\langle 1,1\rangle\,,\langle 2,0\rangle\,,$$

$$\langle 0,3\rangle\,,\langle 1,2\rangle\,,\langle 2,1\rangle\,,\langle 3,0\rangle\,,\langle 0,4\rangle\,,\ldots.$$

Теперь в качестве номера $N(s,t)$ пары $\langle s,t\rangle$ возьмем номер этой пары в этой последовательности, то есть, в частности, получаем $N(0,0)=0$, $N(0,1)=1$, $N(1,0)=2$, $N(0,2)=3$, $N(1,2)=4$, $N(2,1)=5$, $N(3,0)=6$, $N(0,4)=7$ и т.д.

Функция N определена. Как теперь вычислять $L(n)$ и $R(n)$? Естественным образом: выписываем нашу последовательность пар до тех пор, пока не дойдем до пары с номером n, тогда первая компонента этой пары и есть $L(n)$, а вторая компонента — $R(n)$.

Второй факт посложней, а потому мы не будем его здесь обосновывать, а отошлем читателя к любой книге по теории алгоритмов[22]: *не существует алгоритма, который по произвольной программе давал бы ответ на вопрос: существует ли хотя бы один вход (натуральное число), на котором программа сработает*, то есть выдаст какой-нибудь результат, а не зациклится или «зависнет»? Будем ссылаться на этот факт как на *неразрешимость проблемы непустоты* (имеется в виду непустота множества результатов вычислений).

Наконец, третий факт — все программы можно записывать в эффективную последовательность, то есть алгоритмически строимую последовательность, элементами которой являются программы, причем всякая программа в ней обязательно встретится. Считаем, что язык программирования фиксирован и достаточно выразителен, чтобы на нем можно было запрограммировать любую вычислимую функцию. Детали нам здесь не важны;

[22] Несмотря на относительную сложность этого факта отметим, что он является непосредственным следствием теоремы Райса—Успенского, см. сноску 20.

главное, что все разумные языки программирования имеют четко очерченный синтаксис, точнее, программа — это некоторое слово в фиксированном конечном алфавите, причем по произвольному слову в этом алфавите можно эффективно выяснить, является ли это слово программой.

Теперь мы готовы приступить к доказательству теоремы Кузнецова.

Напомним, что $\models$ обозначает любое из рассматриваемых семантических следований.

Проводя дальнейшее доказательство методом «от противного», *допустим, что проблема* $\Gamma \models \varphi$ *разрешима*, то есть существует алгоритм, который по алгоритмически заданным Γ и φ отвечает на вопрос: «Верно ли, что $\Gamma \models \varphi$?» Покажем, что в этом случае можно было бы решать и проблему непустоты, что противоречило бы ее неразрешимости.

Пусть дана произвольная программа $\boldsymbol{P}$. Определяем по ней следующую эффективную последовательность (рекурсивно перечислимое множество, другими словами) формул $\Gamma(\boldsymbol{P}) = \{\gamma_n \mid n \geq 0\}$:

$$\gamma_n = \begin{cases} p \vee \neg p, & \textit{если } \boldsymbol{P} \textit{ не срабатывает за } L(n) \textit{ шагов,} \\ & \textit{начав работать на аргументе } R(n) \\ \bot & \textit{в противном случае.} \end{cases}$$

В качестве формулы φ возьмем константу $\bot$.

ЛЕММА 3. *Для всякой программы* $\boldsymbol{P}$ *справедлива следующая эквивалентность:*

программа $\boldsymbol{P}$ *не срабатывает ни на одном входе*

$$\Updownarrow$$

$$\Gamma(\boldsymbol{P}) \not\models \bot$$

Утверждение почти очевидно, однако выпишем детали.

Направление ($\Downarrow$). Пусть справедливо

программа $\boldsymbol{P}$ *не срабатывает ни на одном входе.*

Это означает, что какое бы число t ни было подано на вход программе $\boldsymbol{P}$ и какое бы число шагов s программа $\boldsymbol{P}$ после этого ни сделала, это вычисление не было бы результативным. Здесь пара чисел $\langle s, t\rangle$ оказывается произвольной и мы с учетом свойств введенных функций можем говорить о произвольном числе n, подразумевая, что $s = L(n)$, $t = R(n)$. Значит, мы можем утверждать, что

для любого числа n программа $\boldsymbol{P}$,
начав работать на числе $R(n)$,
не срабатывает за $L(n)$ шагов.

Теперь, в соответствии с определением формул γ_n мы имеем

$$\gamma_n = p \vee \neg p \textit{ для любого числа } n.$$

Другими словами, по существу $\Gamma(\boldsymbol{P}) = \{p \vee \neg p\}$. Взяв одноэлементную шкалу F, мы получаем тогда $F \models \Gamma(\boldsymbol{P})$, хотя, конечно, $F \not\models \bot$, то есть для любого отношения[23] $\models$ справедливо, что

$$\Gamma(\boldsymbol{P}) \not\models \bot.$$

Направление ($\Uparrow$). Допустим, что

$$\Gamma(\boldsymbol{P}) \not\models \bot.$$

Это значит, в частности, что есть некоторая шкала F такая, что $F \models \Gamma(\boldsymbol{P})$. Из этого следует, что во множестве $\Gamma(\boldsymbol{P})$ нет формулы $\bot$ или, иначе,

$$\gamma_n = p \vee \neg p \textit{ для любого числа } n.$$

По определению формул γ_n получаем тогда, что

для любого числа n программа $\boldsymbol{P}$,
начав работать на числе $R(n)$,
не срабатывает за $L(n)$ шагов,

[23] Хотя взята одноэлементная шкала, ее мощность можно сделать любой, положив, что шкала состоит из множества миров нужной мощности, которые рефлексивны, но не связаны. Такая шкала семантически эквивалентна, разумеется, одноэлементной рефлексивной шкале. Для случая, когда класс шкал не содержит рефлексивных шкал, как класс, например, шкал формальной логики А. Виссера, вместо одноэлементной шкалы можно взять двухэлементную цепь.

а это означает, что

программа $\boldsymbol{P}$ не срабатывает ни на одном входе.

Лемма доказана.

Для завершения доказательства теоремы (получения нужного в соответствии с используемым методом «от противного» противоречия) нам остается заметить, что множество $\Gamma(\boldsymbol{P})$ строилось по программе $\boldsymbol{P}$ эффективно. То есть, чтобы выяснить ответ на вопрос «Пусто ли множество результатов работы программы $\boldsymbol{P}$?», мы можем перейти к множеству формул $\Gamma(\boldsymbol{P})$, заменив в соответствии с леммой этот вопрос вопросом «Верно ли, что $\Gamma(\boldsymbol{P}) \models \bot$?», а на этот вопрос мы можем ответить с помощью нашего гипотетического алгоритма. Таким образом, проблема непустоты оказывается разрешимой, что противоречит, конечно же, ее неразрешимости.

Доказательство теоремы 2 закончено.

Извлечем из предъявленного доказательства мораль.

Помимо непосредственного подтверждения теоремы мы получаем неожиданный факт: если взять в качестве класса шкал $\mathcal{C}$ класс, состоящий из одной одноэлементной рефлексивной шкалы, а вместо интуиционистской пропозициональной логики — классическую пропозициональную логику, во всем доказательстве не произойдет ни одного сбоя, а значит, и утверждение теоремы 2 можно переформулировать в виде «*Пусть $\models$ означает классическое семантическое следование, то есть $\Gamma \models \varphi$ означает, что среди формул из множества есть не тождественно истинная или формула φ тождественно истинна. Тогда не существует алгоритма, который по произвольным рекурсивно перечислимому множеству формул Γ и формуле φ выяснял бы, верно ли, что $\Gamma \models \varphi$*». Более того, здесь в качестве φ достаточно взять одну фиксированную формулу — константу $\bot$, которая заведомо не является тождественно истинной. Тогда мы получаем два еще более удручающих утверждения: «*Не существует алгоритма, который по произвольному рекурсивно перечислимому множеству формул определял бы наличие в этом множестве хотя бы одной не тождественно истинной формулы*» и «*Не существует алгоритма, который по произвольному рекурсивному множеству формул определял бы наличие в этом* *множестве хотя бы одной не тождественно истинной формулы».*

Таким образом, алгоритмическое рассмотрение семантических отношений вида $\Gamma \models \varphi$ при бесконечных множествах Γ оказывается бессмысленным, поскольку в этом случае все зависит от алгоритмов описания Γ, а не логических свойств формул из Γ.

Обратимся к случаю конечных множеств Γ, то есть пункту в) со страницы 226. При этом, конечно же, мы можем полагать, что множество Γ не более чем одноэлементно (всякое непустое конечное множество формул эквивалентно (во всех смыслах!) конъюнкции его элементов).

Сразу отметим, что отношение $\varphi \models_C \psi$ может быть очень сложным. Так, в [28] доказано, что для случая временны́х пропозициональных логик это отношение крайне сложно алгоритмически, даже если *подходящим образом* зафиксировать формулу φ. Для точности изложения процитируем формулировку теоремы 1 [28]: *“There is a categorical formula γ such that $\{\alpha \mid \gamma \models \alpha\}$ is a complete Π^1_1 set.”* Поясню, что категоричность формулы означает, что все шкалы с корнем[24], в которых она истинна, изоморфны, то есть по существу такая шкала одна.

Характеризация множества $\{\alpha \mid \gamma \models \alpha\}$ в утверждении процитированной теоремы как полного Π^1_1-множества показывает его огромную алгоритмическую сложность: не вдаваясь в подробности и существенно ослабляя комментируемое утверждение, скажем, что это означает, в частности, что это множество не только не разрешимо, но и не является даже рекурсивно перечислимым или дополнением рекурсивно перечислимого множества. Уместно заметить, что *при всех* естественных определениях отношения выводимости $\vdash$ (то есть в эффективно задаваемых аксиомах и правилах вывода, когда по произвольной записи можно алгоритмически судить, является ли эта запись выводом) и *любой* формуле γ множество $\{\alpha \mid \gamma \vdash \alpha\}$ рекурсивно перечислимо.

[24]То есть миром, из которого все остальные миры шкалы достижимы за конечное число шагов по отношениям достижимости (их объединению, если говорить точно); во временно́м случае, напомню, для каждого отношения достижимости имеется ему обратное.

Естественно задаться вопросом, а нельзя ли распространить утверждение теоремы 1 [28] на иные классы логик. Автор [28] в кратком добавлении к этой работе со ссылкой на возможность использования формульных переводов из [29] и [31] говорит о том, что результаты его статьи — теорема 1 и теорема 2, которую мы обсуждали на странице 221, — справедливы и для модального случая. Учитывая теорему Макинсона (см. обсуждение на странице 222), можно высказать сомнения в точности сказанного. Однако является правдоподобным случай такого распространения теоремы 1 на модальные логики при снятии условия категоричности формул. Аналогичное предположение можно сделать и для случая интуиционистских формул, однако конструкции [28] на интуиционистский случай не переносятся (для конструкции [28] весьма важно отсутствие требования транзитивности шкал). Автор данных строк склонен считать это предположение весьма правдоподобным, но технически обоснование этой гипотезы может оказаться существенно более громоздким, нежели и так довольно изощренные доказательства [28]; впрочем, часто бывает, что пионерские работы в какой-либо области значительно технически упрощаются последующими исследователями.

Обратимся к доказанным (точнее — имеющим опубликованное доказательство) алгоритмическим результатам об отношениях $\models$ для модального и интуиционистского случая. При этом оговоримся, что под опубликованностью мы понимаем то, что опубликовано доказательство какого-либо утверждения, такого, что из этого доказательства *извлекается* и утверждение о $\models$, хотя, быть может, явно это и не отмечается.

Так, в [23] было построено неразрешимое нормальное модальное исчисление[25], а в [14] (детальное доказательство см. в [16]) — неразрешимое суперинтуиционистское исчисление высказываний. Идея доказательства в самых общих чертах состояла в следующем. Выбиралась программа $\boldsymbol{P}$ (в [23] — машины Минского, в [14] и [16] — подходящей модификации машины Тьюринга),

[25] Справедливости ради отметим, что еще раньше неразрешимое нормальное модальное исчисление было построено в [30], но построение производилось не непосредственно, а с помощью нескольких синтаксических переводов, что для наших целей не очень подходит.

по которой невозможно алгоритмически ответить на вопрос о ее работе над некоторыми входными данными (можно считать, что над некоторым входным словом $\boldsymbol{a}$, например — изображением натурального числа), скажем — сработает когда-нибудь или нет $\boldsymbol{P}$, начав работать на входном слове $\boldsymbol{a}$. Далее, по программе $\boldsymbol{P}$ и входным данным вида $\boldsymbol{a}$ строились (алгоритмически!) формула $Ax\boldsymbol{P}$ и формулы $d(\boldsymbol{a})$, обладающие нужными свойствами. А именно оказывались эквивалентными условия (обозначение пунктов отчасти отражает их суть — вычисление, выводимость, семантика):

(Com) программа $\boldsymbol{P}$ срабатывает на входных данных $\boldsymbol{a}$;

(Ded) $Ax\boldsymbol{P} \vdash d(\boldsymbol{a})$;

(Sem) $Ax\boldsymbol{P} \models d(\boldsymbol{a})$.

Эквивалентность пунктов (Com) и (Ded) и показывает, что исчисление с дополнительной (к базовой логике — модальной логике $\mathbf{K}$, интуиционистской логике $\mathbf{Int}$) аксиомой $Ax\boldsymbol{P}$ неразрешимо. В самом деле, если бы оно было разрешимым, что мы могли бы выяснять справедливость условия (Ded), что в свою очередь позволило бы решать неразрешимую проблему (Com). Условие (Sem) здесь оказывается лишь технической деталью (но очень важной деталью и в [23], и в [14, 16]). Однако для нас эта деталь становится главной, поскольку попутно дает неразрешимость условия (Sem), а тем самым и самого семантического следования $\models$.

Отметим, что в этом доказательстве неразрешимости отношения $\models$ не конкретизировался класс шкал, на котором оно определялось, точнее — для модального случая рассматривались все модальные шкалы, для интуиционистского — все интуиционистские шкалы. Однако в случаях, когда нас интересуют классы C_i, $1 < i \leq 4$, все рассуждения [23, 14, 16] сохранят свою силу: хотя там реально участвовали лишь счетные шкалы, их легко увеличивать до нужной мощности, вводя «двойники» некоторых миров в нужном количестве. То есть в [23, 14, 16] попутно доказана

ТЕОРЕМА 4. *Справедливы следующие утверждения.*

1. *Отношения $\varphi \models_{\mathcal{C}_i} \psi$ при $1 < i \leq 4$ неразрешимы, то есть не существует алгоритмов, которые по произвольным формулам φ и ψ выясняли бы, верно ли что $\varphi \models_{\mathcal{C}_i} \psi$.*

2. *Для всякого i, $1 < i \leq 4$, существует формула φ, такая, что множество формул $\{\psi \mid \varphi \models_{\mathcal{C}_i} \psi\}$ неразрешимо.*

3. *Для всякого i, $1 < i \leq 4$, существует формула ψ, такая, что множество формул $\{\varphi \mid \varphi \models_{\mathcal{C}_i} \psi\}$ неразрешимо.*

О доказательстве пункта 2 мы уже по существу говорили. В самом деле, в качестве формулы φ достаточно взять $Ax\boldsymbol{P}$ для подходящим образом подобранной программы $\boldsymbol{P}$: если бы множество $\{\psi \mid \varphi \models_{\mathcal{C}_i} \psi\}$ оказалось разрешимым, то разрешимым оказалось бы и множество $\{\boldsymbol{a} \mid Ax\boldsymbol{P} \models_{\mathcal{C}_i} d(\boldsymbol{a})\}$, что дало бы разрешимость проблемы «*Срабатывает ли программа* $\boldsymbol{P}$ *на входных данных* $\boldsymbol{a}$*?*», которая неразрешима по выбору программы $\boldsymbol{P}$.

Пункт 1 непосредственно следует из пункта 2: если бы была разрешима проблема семантического следования $\models_{\mathcal{C}_i}$, то есть по существу разрешимо множество пар $\{\langle\varphi, \psi\rangle \mid \varphi \models_{\mathcal{C}_i} \psi\}$, то, зафиксировав произвольным образом первую компоненту φ рассматриваемых пар, мы получили бы разрешимость всех множеств вида $\{\psi \mid \varphi \models_{\mathcal{C}_i} \psi\}$, а это противоречит пункту 2.

Наконец, пункт 3. Воспользуемся теоремой Райса—Успенского[26]. Возьмем произвольные входные данные $\boldsymbol{a}$. Свойство программ «*срабатывать на входных данных* $\boldsymbol{a}$» является нетривиальным (ясно, что есть программы, которые на $\boldsymbol{a}$ срабатывают — достаточно взять программу, которая ничего не делает, а сразу останавливается, есть и программы, которые на $\boldsymbol{a}$ не срабатывают — такова, например, программа, которая не срабатывает ни на каком входе) и инвариантно (эквивалентные программы либо обе срабатывают на $\boldsymbol{a}$, либо обе не срабатывают), а потому по теореме Райса—Успенского множество программ $\boldsymbol{P}$, срабатывающих на $\boldsymbol{a}$, неразрешимо. Теперь достаточно для обоснования пункта 3 взять формулу $d(\boldsymbol{a})$ (подчеркнем, что $\boldsymbol{a}$ произвольно, то есть для наших целей годится любая формула вида $d(\boldsymbol{a})$!): если бы множество $\{\varphi \mid \varphi \models_{\mathcal{C}_i} d(\boldsymbol{a})\}$ оказалось

[26]Мы ее формулировали в сноске 20.

разрешимым, то и множество $\{\boldsymbol{P} \mid \boldsymbol{P} \models_{\mathcal{C}_i} d(\boldsymbol{a})\}$ было бы разрешимым, что в силу указанной выше эквивалентности дало бы разрешимость неразрешимого множества программ

$$\{\boldsymbol{P} \mid \boldsymbol{P} \text{ срабатывает на } \boldsymbol{a}\}.$$

Итак, с разрешимостью отношений семантического следования $\models_{\mathcal{C}_i}$ при $1 < i \leq 4$ «разобрались»: все они неразрешимы.

Какова ситуация с отношением $\models_{\mathcal{C}_1}$, то есть семантическим следованием на конечных шкалах? Поскольку далее мы будем интересоваться только отношением такого вида, изменим символику и будем писать $\models_{fin}$ вместо $\models_{\mathcal{C}_1}$, класс шкал (модальные ли, интуиционистские ли шкалы, и т.п.), из которого выбираются конечные шкалы, всегда будет ясен из контекста.

Заметим, что для доказательства неразрешимости отношения $\models_{fin}$ общая идея, использованная выше для обоснования неразрешимости иных отношений семантического следования, связанная с обоснованием неразрешимости специально построенных исчислений (сиречь конечно-аксиоматизируемых логик), вряд ли подойдет в силу известной теоремы Харропа (см. [12], теорема 16.13): *если логика имеет конечную аксиоматизацию и финитно аппроксимируема*[27], *то она разрешима.* Доказательство этой теоремы несложно, хотя именно простота этого доказательства приводила иногда к заблуждениям[28]. Кратко наме-

[27]Финитная аппроксимируемость в модальном и суперинтуиционистском случаях, как известно, эквивалентна аппроксимируемости конечными шкалами Крипке.

[28]Так, некоторые весьма уважаемые авторы явно по недосмотру формулировали теорему Харропа (часто ее называют «критерий Харропа») в чрезмерно общем виде (ставшим, к сожалению, фольклорным): *если логика рекурсивно аксиоматизируема (рекурсивно-перечислимо аксиоматизируема) и финитно аппроксимируема, то она разрешима.* Контрпримеры к такому утверждению с начала 80-х годов прошлого века приводились неоднократно. Так, в [32] построен такой контрпример в виде довольно абстрактной модальной логики и задан вопрос о существовании контрпримеров среди нормальных расширений **S4**; в [9] дан расширенный ответ на этот вопрос, точнее — там замечено, что существование таких контрпримеров следует из результатов А. В. Кузнецова, см. его ванкуверский доклад [1]: все суперинтуиционистские логики конечных слоев финитно аппроксимируемы и логик каждого слоя, начиная с третьего, — континуум, причем континуальность обосновывается приведением примера рекурсивной последовательности ин-

тим доказательство теоремы Харропа для случая суперинтуиционистских логик; для иных логик изменения незначительны.

Конечная аксиоматизируемость логики позволяет утверждать ее рекурсивную перечислимость[29], то есть мы можем строить алгоритмически, например — с помощью некоторого алгоритма A, последовательность $\mathsf{A}(0)$, $\mathsf{A}(1)$, $\mathsf{A}(2)$, ... , $\mathsf{A}(n)$, ..., элементами которой являются в точности выводимые формулы. Кроме того, можно алгоритмически, скажем — с помощью некоторого алгоритма B, строить последовательность $\mathsf{B}(0)$, $\mathsf{B}(1)$, $\mathsf{B}(2)$, ... , $\mathsf{B}(m)$, ..., элементами которой являются в точности невыводимые формулы. Алгоритм B может работать, к примеру, следующим образом. Поскольку совокупность формул рекурсивно перечислима (она даже разрешима, но нам нужна именно перечислимость), мы можем считать, что имеется некий всюду определенный алгоритм C, который и осуществляет это перечисление, то есть множество формул предстает в виде последовательности

$$\mathsf{C}(0),\ \mathsf{C}(1),\ \mathsf{C}(2),\ \ldots\ ,\ \mathsf{C}(m),\ \ldots.$$

Кроме того, у нас есть возможность перечислять все конечные шкалы рассматриваемой логики. В самом деле, шкала представляет собой непустое конечное множество (можно считать, что это множество $\{1, \ldots, n\}$ при некотором натуральном $n > 0$) с бинарным отношением на нем, то есть некоторым подмножеством множества пар $\{\langle s,t\rangle \mid 1 \leq s,t \leq n\}$. Все такие множества с бинарными отношениями можно алгоритмически выписать для всякого n. Более того, легко из этих множеств выбрать интуиционистские шкалы: совершенно ясно, что проверка транзитивности и рефлексивности (и, если таково определение, антисимметричности) бинарного отношения на конечном множестве *не составляет труда*[30]. Однако среди них нужно выбрать

туиционистских формул, ни одна из которых не следует из остальных на шкалах высоты 3, то есть можно взять рекурсивно перечислимую, но не рекурсивную подпоследовательность, а затем применить наблюдение [20], см. страницу 227. Переход от суперинтуиционистского контрпримера к контрпримеру в области нормальных расширений **S4** не составляет труда.

[29]Мы уже отмечали сей факт на странице 238.

[30]То есть труд-то конечно довольно кропотливый и громоздкий, но рутинный, нетворческий, который можно «поручить» компьютеру. Именно в этом смысле мы здесь и далее употребляем оборот «не составляет труда».

именно шкалы нашей логики. Вот здесь полезной оказывается конечная аксиоматизируемость нашей логики: нам для принятия к рассмотрению конечной шкалы достаточно (и необходимо, конечно) убедиться в том, что на этой шкале истинна аксиома, дополнительная к **Int** (то есть конъюнкция таких аксиом). Проверка истинности формулы на конечной шкале алгоритмична, то есть может производиться некоторым алгоритмом, поскольку, несмотря на то, что задавая оценку, мы должны оценить каждую (!) переменную из бесконечного множества, а значит, даже на конечной шкале мы имеем бесконечную совокупность возможных оценок, нас не интересует полное описание той или иной оценки — достаточно знать, как оценены переменные, входящие в тестируемую формулу (аксиому) φ, а потому мы можем не различать оценки, совпадающие на переменных формулы φ, точнее — задавая оценку лишь для этих переменных. Сколько таких оценок, несложно оценить. Если миров в шкале n, переменных в формуле φ — m, то различаемых нами оценок не более $2^{m \cdot n}$: задавая оценку, мы для каждого из n миров должны для каждой из m переменных сказать, является ли эта переменная истинной в этом мире или нет, то есть ответить на $m \cdot n$ вопросов, требующих один из двух ответов — «Да» или «Нет». Конечно, не все из $2^{m \cdot n}$ возможностей обязаны реализоваться в интуиционистском случае, поскольку интуиционистская оценка должна удовлетворять условию наследственности, которое *не составляет труда* проверить. Как только мы взяли конкретную оценку на интересующей нас шкале, то есть задали на этой шкале модель, дальнейшие действия состоят в том, что мы по построению подформул формулы φ в соответствии с определением истинности формулы в точке модели выясняем истинность этих подформул до тех пор, пока не дойдем до самой формулы φ. В том случае, когда φ оказалась неистинной хотя бы в одном мире шкалы, мы отбрасываем эту шкалу из рассмотрения, а если φ оказалась истинной во всех мирах, то переходим к следующей нерассмотренной оценке, а если все оценки исчерпаны, то заносим шкалу в последовательность шкал нашей логики в качестве очередного члена. Так у нас возникает эффективная последовательность всех конечных шкал нашей логики

$$\mathsf{D}(0),\ \mathsf{D}(1),\ \mathsf{D}(2),\ \ldots,\ \mathsf{D}(m),\ \ldots.$$

Ясно, что последовательность шкал $\mathsf{D}(m)$ можно строить одновременно с последовательностью формул $\mathsf{C}(m)$, например: начинаем одну последовательность, потом начинаем другую, затем удлинняем на единицу первую последовательность, потом — вторую, затем вновь удлинняем на единицу первую последовательность, потом — вторую, и т.д. На каждом из этапов такого построения у нас оказываются две конечные последовательности —

$$\mathsf{C}(0),\ \mathsf{C}(1),\ \mathsf{C}(2),\ \dots,\ \mathsf{C}(m)$$

и

$$\mathsf{D}(0),\ \mathsf{D}(1),\ \mathsf{D}(2),\ \dots,\ \mathsf{D}(m).$$

Так вот, на каждом из этих этапов мы проверяем истинность всех формул $\mathsf{C}(j)$ $(0 \le j \le m)$ на всех шкалах $\mathsf{D}(j)$ $(0 \le j \le m)$ аналогично тому, как мы выше проверяли истинность формулы φ на конечной шкале. В тех случаях, когда какая-либо из формул $\mathsf{C}(j_1)$ опровергается на какой-либо из шкал $\mathsf{D}(j_2)$, мы заносим $\mathsf{C}(j_1)$ в строимую последовательность так опровергаемых формул. В силу финитной аппроксимируемости логики каждая из непринадлежащих ей формул когда-нибудь так опровергнется, а тем самым и будет занесена нами в строимую последовательность.

В результате мы получили для логики две эффективные последовательности:

$$\mathsf{A}(0),\ \mathsf{A}(1),\ \mathsf{A}(2),\ \dots,\ \mathsf{A}(m),\ \dots.$$

и

$$\mathsf{B}(0),\ \mathsf{B}(1),\ \mathsf{B}(2),\ \dots,\ \mathsf{B}(m),\ \dots.$$

Первая последовательность состоит в точности из формул, принадлежащих логике, а вторая — из непринадлежащих.

Теперь для выяснения принадлежности формулы логике нам достаточно использовать следующий алгоритм. Выписываем одновременно последовательности $\mathsf{A}(m)$ и $\mathsf{B}(m)$ (аналогично тому, как мы одновременно выписывали последовательности $\mathsf{C}(m)$ и $\mathsf{D}(m)$) и ждем, где появится интересующая нас формула. (Она обязательно появится в одной из последовательностей и не может оказаться в обеих.) Если формула появилась в первой последовательности, то она принадлежит нашей логике, а если во второй — то не принадлежит.

Теорема Харропа доказана. Отметим, что попутно мы доказали такой факт.

ТЕОРЕМА 5. *Если логика задается разрешимой совокупностью конечных шкал (моделей), то множество не принадлежащих ей формул рекурсивно перечислимо.*

Доказательство — см. построение последовательности формул $\mathsf{B}(m)$ в доказательстве теоремы Харропа. Внимательное прослеживание этого доказательства дает и следующий результат.

ТЕОРЕМА 6. *Дополнение отношения финитарного семантического следования* $\models_{fin}$, *то есть множество пар формул* $\{\langle\varphi,\psi\rangle \mid \varphi \not\models_{fin} \psi\}$, *рекурсивно перечислимо.*

В результате, теорема Харропа если и не запрещает использовать конструкции построения неразрешимых исчислений для обоснования неразрешимости отношений семантического следования на конечных шкалах, то во всяком случае является серьезным предупреждением об опасностях такого использования.

Итак, мы стоим перед вопросом выяснения разрешимости проблемы семантического следования на конечных шкалах. Этот вопрос был известен довольно давно, но в опубликованном виде мне встретился впервые только в [33] (точнее, еще в препринте этой статьи). Приведем соответствующую цитату (см. [33, с. 28]; указанный в цитате источник [27] в списке литературы данной статьи является [31]): «... *valid frame consequence* is highly complex in general (cf. [27]), but on the finite structure; as general types its complexity goes down to at most Π^0_1. An open question is if it even becomes *decidable*». Отметим, что упоминание Π^0_1 здесь есть не что иное, как ссылка на утверждение теоремы 6.

Как было сказано в начале статьи, наши дальнейшие цели — приведение детальных доказательств неразрешимости финитарного семантического следования для различных случаев пропозициональных формул и их семантик. Уместно заметить, что сами эти факты близки по своей сути теореме Трахтенброта [7] о неразрешимости множества формул первого порядка, истинных во всех конечных моделях.

Литература

[1] *Kuznetsov A.V.* On superintuitionistic logics // Proc. Internat. Congr. of Mathematicians. Vancouver, 1974. Montreal, 1975. P. 243–249. (Русский перевод:

Кузнецов А.В. О суперинтуиционистских логиках // Математические исследования (Кишинёв). 1975. Т. 10. N 2. С. 150–158.)

[2] *Кузнецов А.В., Герчиу В.Я.* О суперинтуиционистских логиках и финитной аппроксимируемости // Доклады АН СССР. 1970. Т. 195. N 5. С. 1029–1032. (Исправление опечаток: там же. 1971. Т. 199. N 6. С. 1222.)

[3] *Мальцев А.И.* Алгоритмы и рекурсивные функции. М.: Наука, 1986.

[4] *Расёва Е. и Сикорский Р.* Математика метаматематики. М.: Наука, 1972.

[5] *Рыбаков В.В.* Некомпактные расширения логики **S4** // Алгебра и логика. 1977. Т. 16. N 4. С. 472–490.

[6] *Соболев С.К.* О конечномерных суперинтуиционистских логиках // Известия АН СССР, Сер. матем. 1977. Т. 41. N 5. С. 963–986.

[7] *Трахтенброт Б.А.* Невозможность алгорифма для проблемы разрешимости на конечных классах // Доклады АН СССР. 1950. Т. 70. С. 569–572.

[8] *Фейс Р.* Модальная логика. М.: Наука, 1974.

[9] *Чагров А.В.* Простые примеры неразрешимых рекурсивно аксиоматизируемых финитно аппроксимируемых эквациональных логик // Восьмая Всесоюзная конференция по математической логике. М., 1986. С. 206.

[10] *Чагров А.В.* Многообразия логических матриц // Алгебра и логика. 1985. Т. 24. N 4. С. 426–489. (Англ. перев.: Algebra and Logic, Т. 24. С. 278–325.)

[11] *Чагров А.В.* Нижняя оценка мощности аппроксимирующих шкал Крипке // Логические методы построения эффективных алгоритмов. Калинин: КГУ, 1986. С. 96–125.

[12] *Чагров А.В.* Неразрешимые свойства суперинтуиционистских логик // Математические вопросы кибернетики. Вып. 5: Сб. статей под ред. С.В. Яблонского. М.: Физматлит, 1994. С. 62–108.

[13] *Шехтман В.Б.* О неполных логиках высказываний // Доклады АН СССР. 1977. Т. 235. N 3. С. 542–545.

[14] *Шехтман В.Б.* Неразрешимое суперинтуиционистское исчисление // Доклады АН СССР. 1978. Т. 240. N 3. С. 549–553.

[15] *Шехтман В.Б.* О счётной аппроксимируемости суперинтуиционистских и модальных логик // Исследования по неклассическим логикам и формальным системам. М.: ВИНИТИ, 1983. С. 287–299.

[16] *Шехтман В.Б.* Неразрешимые исчисления высказываний // Неклассические логики и их применение. Вопросы кибернетики. М.: Наука, 1982. С. 74–115.

[17] *Янков В.А.* Построение последовательности сильно независимых суперинтуиционистских исчислений // Доклады АН СССР. 1968. Т. 181. N 1. С. 33–34.

[18] *Chagrov A.V., Chagrova L.A.* Algorithmic problems concerning first-order definability of modal formulas on the class of all finite frames // Studia Logica. 1995. V. 55. No. 3. P. 421–448.

[19] *Chagrov A., Zakharyaschev M.* Modal Logic. Oxford University Press, 1997.

[20] *Craig W.* On axiomatizability within a system // The Journal of Symbolic Logic. V. 18. P. 30–32.

[21] *Fine K.* Logics containing $K4$, Part I. // The Journal of Symbolic Logic. 1974. V. 39. No 1. P. 31–42.

[22] *Hosoi T. and Ono H.* Intermediate propositional logics (A survey) // J. Tsuda College. 1973. V. 5. P. 67–82.

[23] *Isard S.* A finitely axiomatizable undecidable extension of K // Theoria. 1977. V. 43. P. 195–202.

[24] *Kracht M.* Modal Logics that Need Very Large Frames // Notre Dame Journal of Formal Logic. 1999. V. 40. No. 2. P. 141–173.

[25] *Kripke S.* Semantical analysis of modal logic, Part I // Zeitschrift für Mathematische Logik und Grundlagen der Mathematik. 1963. Bd. 9. S. 67–96.

[26] *Makinson D.* Some embedding theorems for modal logic // Notre Dame Journal of Formal Logic. 1971. V. 12. P. 252–254.

[27] *Thomason S.K.* Noncompactness in propositional modal logic // The Journal of Symbolic Logic. 1972. V. 37. P. 716–720.

[28] *Thomason S.K.* The logical consequence relation of propositional tense logic // Zeitschrift für Mathematische Logik und Grundlagen der Mathematik. 1975. Bd. 21. S. 29–40.

[29] *Thomason S.K.* Reduction of tense logic to modal logic, I // The Journal of Symbolic Logic. 1974. V. 39. P. 549–551.

[30] *Thomason S.K.* Reduction of tense logic to modal logic II // Theoria. 1975. V. 41. P. 154–169.

[31] *Thomason S.K.* Reduction of second-order logic to modal logic // Zeitschrift für Mathematische Logik und Grundlagen der Mathematik. 1975. Bd. 21. S. 107–114.

[32] *Urquhart A.* Decidability and the finite model property // J. Phil. Log. 1981. V. 10. No. 3. P. 367–370.

[33] *J.A.F.K. van Benthem.* Notes on modal definability // Notre Dame Journal of Formal Logic. 1989. V. 39. P. 20–39.

[34] *Visser A.* A propositional logic with explicit fixed points // Studia Logica. 1981. V. 40. P. 155–175.

Крах алгоритмической проблематики теории соответствия?[1]

А.В. Чагров, Л.А. Чагрова

ABSTRACT. Three key problems of the Correspondence Theory are considered: given a modal propositional formula and a first-order formula, to recognize, whether they are equivalent in Kripke frames (the correspondence problem); given a modal propositional formula, to recognize, whether there is a first-order formula which is equivalent to it in Kripke frames (the problem of first-order definability of modal propositional formulas), given a first-order formula, to recognize, whether there is a modal propositional formula which is equivalent to it in Kripke frames (the problem of modal definability of first-order formulas). For all of these problems concise proofs of algorithmic undecidability have been given.

1 Постановка проблем

Нижеследующий текст является изложением материала устного выступления авторов на конференции «Успехи модальной логики», которая в очередной, точнее — шестой, раз проводилась в 2006 году. Волею обстоятельств сам доклад был сделан не нами, а нашим близким другом Михаилом Викторовичем Захарьящевым. Таким образом, в природе имеются три текста материалов этого доклада: предлагаемый ниже; устный[2] текст выступления М.В. Захарьящева на рабочем (английском) языке конференции, которое лишь основывалось на варианте предлагаемого здесь текста, но несомненно не совпадало с ним по многим причинам; текст [10], опубликованный в материалах упомянутой конференции, имеющий непустое, конечно, пересечение с предыдущими двумя, но не содержащий по причине жестких редакторских требований на объем многих моментов, фольклорных

[1]Работы поддержана РФФИ. Грант № 06-06-80380-а.

[2]Мы предполагаем, что он не материализован ни в каком более-менее полном виде — слайды не в счет.

утверждений и доказательств. Кроме того, мы учитывали и состав участников конференции, так что все три текста между собой существенно различны, хотя во всех них рассматривается алгоритмическая проблематика теории соответствия, теории, в которой сравниваются возможности описания свойств реляционных структур средствами разных языков. Имеется в виду, что вполне удовлетвлорительный для большинства (хотя и не всех!) практических потребностей такого описания язык первого порядка не является удовлетворительным именно из-за своей большой выразительности, делающей даже очень простые вопросы «риторическими», точнее — оставляющей их без эффективного ответа в силу теоремы Чёрча, которую можно понимать как отсутствие эффективного ответа на вопрос «Верно ли, что данная формула описывает тривиальное свойство (не выделяет никаких моделей, истинна во всех)?» Модальные пропозициональные формулы в этом отношении более просты. Многие проблемы, с ними связанные, алгоритмически разрешимы; такова, к примеру, проблема истинности формулы во всех моделях.

Конечно, трудно себе представить, как бы среагировал Готфрид Вильгельм Лейбниц с его идеей использования возможных миров для истолкования модальностей на современное состояние исследований по модальной логике, не говоря уж об Аристотеле, чья не очень точно сформулированная модальная силлогистика явилась отправной точкой многовекового изучения модальностей, но в последние два-три десятилетия важнейшей составной частью этого направления логики стало изучение возможностей модальных и близких к ним языков для описания свойств реляционных структур.

Мы выражаем надежду, что через какое-то время исследователи обратятся к модальным истокам и вспомнят, что семантика возможных миров (реляционная семантика, окрестностная семантика и их варианты) для модальных операторов была предложена в качестве рабочего инструмента, позволяющего перевести некоторые содержательные обсуждения модальных операторов — их свойств, взаимозависимостей и т.д. — на более точный язык. Этот «более точный» язык не претендует и не может претендовать на абсолютную адекватность предмету обсуждения, но во многих случаях позволяет обойтись без длинных малопродуктивных дискуссий. Однако здесь мы будем следовать нынешнему основному направлению.

С технической стороны язык пропозициональной модальной логики при описании реляционных структур предоставляет довольно существенные преимущества по сравнению, скажем, с классическим языком первого порядка. Он может быть эффективнее в двух, по крайней мере, аспектах. Модальные пропозициональные формулы могут быть более выразительными, чем формулы первого порядка, — то есть они имеют определенные второпорядковые черты (нюансы). С другой стороны, модальные пропозициональные формулы более доступны алгоритмическому изучению (освоению): для них многие проблемы разрешимы, причем либо соответствующие алгоритмы имеют вполне допустимую сложность, либо для снижения сложности этих алгоритмов более-менее ясны необходимые ограничения.

Здесь представлены хорошо известные хрестоматийные примеры описаний и отсутствия описаний свойств реляционных структур:

формула первого порядка	**модальная формула**
$\forall x\, xRx$	$\Box p \to p$
$\forall x\, \forall y\, \forall z\, (xRy \;\&\; yRz \Rightarrow xRz)$	$\Box p \to \Box\Box p$
$\forall x\, \exists y\, yRx$	нет
$\forall x\, \forall y\, xRy$	нет
нет	$\Box\Diamond p \to \Diamond\Box p$
нет	$\Box(\Box p \to p) \to \Box p.$

Эти и другие примеры можно с подробным обсуждением найти в [7, 8, 12]. Попутно отметим, что упомянутый в названии данной статьи раздел современной модальной логики[3] является просто дословным переводом названия обзорной статьи [8].

Поскольку переход от первопорядковых (или других мощных классических) описаний свойств реляционных структур к мо-

[3]Среди исследователей довольно распространено мнение, что современная модальная логика «покоится на трех китах», вот их английские «имена»: *completeness theory*, *correspondence theory*, *duality theory*.

дальным описаниям преследует повышение эффективности, разумно его (переход) ставить (или хотя бы пытаться ставить) в алгоритмические рамки.

К сожалению, как было обнаружено в конце 80-х годов (XX-го, разумеется, века), алгоритмическая часть теории соответствия в основном отрицательна. То есть практически все алгоритмические проблемы теории соответствия оказываются неразрешимыми. Это является определенной платой за стремление к выразительности используемых языков.

Однако среди исследователей в связи с указанным «отрицательным» обстоятельством распространены различные мифы. Например, считается, что доказательство неразрешимости первопорядковой определимости модальных формул либо очень трудно технически, либо малопонятно. Кроме того, при изложении алгоритмической части теории соответствия[4] практически всегда[5] ограничиваются неразрешимостью модальной определимости формул первого порядка, считая, по-видимому, что модальная определимость формул первого порядка имеет больше отношение к модальной логике, чем, скажем, первопорядковая определимость модальных формул. Здесь мы ставим целью опровержение некоторых из таких мифов.

Для начала скажем, что в упомянутом «мифотворчестве» во многом «виноваты» докладчики, особенно Л.А. Чагрова. А именно результаты о неразрешимости ключевых алгоритмических проблем в теории соответствия были получены в ее диссертации [6] 1989 года, текст которой по российской «традиции» практически недоступен, а их доказательства доступны лишь в виде депонированных в ВИНИТИ статей на русском языке, которые не находятся в свободном обороте. Кроме того, в указанной диссертации рассматривалась технически более сложная теория соответствия — ее вариант для интуиционистских пропозициональных формул. Не вдаваясь в подробности, скажем, что там приводится фактически <u>одно</u> длинное (более 100 с лишним страниц плотного текста!) доказательство,

---

[4]Нам неизвестны монографические изложения; речь идет о лекционных курсах, о программе которых мы можем судить по выложенной в интернете информации и ее обсуждению в интернете же.

[5]Собственно, мы иного не встречали.

которое при небольших вариациях дает следующие результаты:

1) проблема первопорядковой определимости интуиционистских формул неразрешима;

2) проблема первопорядковой определимости интуиционистских формул на счетных шкалах неразрешима;

3) множество интуиционистских формул, которые не являются первопорядково определимыми, но первопорядково определимы на счетных шкалах, неразрешимо;

4) проблема интуиционистской пропозициональной определимости первопорядковых формул неразрешима;

5) проблема соответствия интуиционистских пропозициональных формул и формул первого порядка неразрешима.

Конечно, параллельно доказательствам этих фактов легко получить и их аналоги для модального случая, хотя модальный случай и предоставляет некоторые технические преимущества по сравнению с интуиционистским.

Схема доказательств из диссертации Чагровой принципиально громоздка. В частности, там строится неразрешимое суперинтуиционистское исчисление с первопорядково определимой аксиоматикой. Представление об этой схеме можно получить из статьи авторов [9], где она (схема) применяется для доказательства неразрешимости первопорядковой определимости модальных формул на классе конечных шкал. Стоит заметить, что кроме этого применения неизбежным представляется и использование этой схемы для третьего факта (пункта 1) о неразрешимости из перечисленных выше пяти.

Несколько упрощенное доказательство неразрешимости первопорядковой определимости интуиционистских формул было опубликовано Л.А. Чагровой в Журнале символической логики в 1991 году, то есть в [13]. Использованная здесь схема доказательства была несколько ранее разработана для модального случая в [3, 4].

Но и в этом случае не было дано прямого (и более простого!) доказательства неразрешимости первопорядковой определимости для модального случая. Добавим, что один из анонимных рецензентов счел приведенный в статье Л.А. Чагровой текст доказательства «non-friendly».

Обсуждая в последнее время с нашими коллегами алгоритмическую проблематику теории соответствия, мы поняли, что необходимость предоставления прозрачных доказательств назрела. Кроме того, надежда на то, что вслед за пионерскими доказательствами Л.А. Чагровой последуют более простые (как это часто бывает в математике), не оправдывается; создается даже впечатление о неизбежной громоздкости доказательств даже тех фактов, которые на самом деле получаются «почти бесплатно».

Наведением порядка в этой области мы и займемся.

Сначала дадим несколько необходимых определений. В соответствии с нашими пропедевтическими целями мы не будем рассматривать проблематику во всей возможной общности. Например, мы не будем использовать локальный вариант определимости, не будем считать класс рассматриваемых шкал параметром (то есть для нас определимость будет определимостью над классом **всех** шкал), не будем всерьез рассматривать иные пропозициональные языки, кроме одномодального, и т.д.

Итак.

Структура вида $F = \langle W, R\rangle$ (F — от английского термина *Frame* с установившимся сейчас переводом *шкала*) может пониматься как:

mf модельная структура (терминология С. Крипке [15], см. перевод этой статьи в [2]) для модальных пропозициональных формул;

cm модель для формул первого порядка в смысле классической теории моделей, сигнатура формул состоит из бинарного отношения достижимости R и равенства;

- модель для формул второго порядка в смысле классической теории моделей, сигнатура формул состоит из бинарного отношения достижимости R, равенства и неинтерпретированных одноместных предикатов.

Конечно, здесь можно добавить и другие пункты. Например:

- модельная структура для временны́х пропозициональных формул: R — для разговоров о «будущем», R^{-1} — о «прошлом».

Нас будут интересовать только пункты (**mf**) (**m**odal **f**rame) и (**cm**) (**c**lassical **m**odel), поскольку в кратком изложении невозможно охватить всю сопутствующую проблематику, а кроме того, значительная часть используемого нами технического аппарата без особого труда может быть приспособлена и в других ситуациях. Ограничимся лишь самыми общими замечаниями об описании классов структур (реляционных структур, более точно) формулами различных языков.

Пусть $\mathcal{L}_1$ и $\mathcal{L}_2$ — два языка, для которых структуры вида $F = \langle W, R \rangle$ являются модельными или просто являются моделями.

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 1. Формулы φ из языка $\mathcal{L}_1$ и Φ из языка $\mathcal{L}_2$ называем эквивалентными (семантически эквивалентными), если

$$F \models \varphi \Leftrightarrow F \models \Phi \text{ (для любой } F).$$

Собственно, эквивалентность в этом определении и есть то самое *соответствие*, теория которого нас здесь интересует. Первая естественная проблема:

Алгоритмическая проблема соответствия для языков $\mathcal{L}_1$ и $\mathcal{L}_2$. *Существует ли алгоритм, который по произвольным формулам φ из языка $\mathcal{L}_1$ и Φ из языка $\mathcal{L}_2$ выяснял бы, являются ли они эквивалентными.*

Эта проблема осмысленна даже в том случае, когда $\mathcal{L}_1 = \mathcal{L}_2$, то есть когда рассматривается один язык. Чуть позже разовьем эту тему, а сейчас дадим определение, которое оказывается нетривиальным только для случая различия языков $\mathcal{L}_1$ и $\mathcal{L}_2$.

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 2. Формула φ из языка $\mathcal{L}_1$ называется $\mathcal{L}_2$-определимой, если существует формула Φ из языка $\mathcal{L}_2$, которая эквивалентна φ.

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 3. Формула Φ из языка $\mathcal{L}_2$ называется $\mathcal{L}_1$-определимой, если существует формула φ из языка $\mathcal{L}_1$, которая эквивалентна Φ.

Конечно, поскольку языки $\mathcal{L}_1$ и $\mathcal{L}_2$ произвольны, то эти два определения ничем не отличаются (поэтому о них можно было говорить в единственном числе). Однако отличия появятся, если мы будем иметь в виду конкретные языки $\mathcal{L}_1$ и $\mathcal{L}_2$.

Далее полагаем:

- $\mathcal{L}_1 = \mathcal{MPL}$ — модальный пропозициональный язык;
- $\mathcal{L}_2 = \mathcal{FOL}$ — первопорядковый язык (классически понимаемый).

Формулы языка $\mathcal{MPL}$ будем для краткости называть модальными, а языка $\mathcal{FOL}$ — первопорядковыми.

В этом случае приведенные выше определения обретают следующий вид.

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 4. Модальная формула φ называется первопорядково определимой, если существует первопорядковая формула, которая эквивалентна φ.

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 5. Первопорядковая формула Φ называется модально определимой, если существует модальная формула, которая эквивалентна Φ.

Конкретизацией интересующих нас далее алгоритмических проблем являются следующие пять проблем.

Алгоритмическая проблема первопорядковой определимости. *Существует ли алгоритм, который по произвольной модальной формуле φ выяснял бы, является ли φ первопорядково определимой.*

Алгоритмическая проблема модальной определимости. *Существует ли алгоритм, который по произвольной первопорядковой формуле Φ выяснял бы, является ли Φ модально определимой.*

Кроме того, уместно сформулировать и следующие алгоритмические проблемы соответствия.

Алгоритмическая проблема соответствия МОДАЛЬНЫХ формул. *Существует ли алгоритм, который по произвольным модальным формулам выяснял бы, являются ли они эквивалентными.*

Алгоритмическая проблема соответствия МОДАЛЬНЫХ и ПЕРВОПОРЯДКОВЫХ формул. *Существует ли алгоритм, который по произвольным модальной формуле φ и* *первопорядковой формуле* Φ *выяснял бы, являются ли они эквивалентными.*

Алгоритмическая проблема соответствия ПЕРВОПОРЯДКОВЫХ формул. *Существует ли алгоритм, который по произвольным первопорядковым формулам выяснял бы, являются ли они эквивалентными.*

Конечно, две из проблем — алгоритмическая проблема соответствия МОДАЛЬНЫХ формул и алгоритмическая проблема соответствия ПЕРВОПОРЯДКОВЫХ формул — не имеют прямого отношения к теории соответствия. Мы их приводим потому, что они укладываются в контекст обсуждения и много места не потребуют.

Теперь мы готовы к тому, чтобы приступить к изложению нашего основного материала. Мы по существу будем демонстрировать, что все указанные проблемы решаются отрицательно. Однако нас будут интересовать не только (и даже не столько!) сами отрицательные ответы, сколько доступность получения этих ответов. Более того, мы намеренно не будем акцентировать внимание на некоторых фактах неразрешимости, которые можно найти в [10].

Теперь будем рассматривать сформулированные проблемы в порядке усложнения их решений; этот порядок случайно оказался обратным порядку предыдущих формулировок. Формулировки проблем соответственно будут повторены. Эпитет «алгоритмическая» будет часто опускаться. Будем для легкости чтения делать и другие сокращения, легко восстановимые по контексту, например: формулировка теоремы *проблема модальной определимости неразрешима* восстанавливается до *проблема модальной определимости первопорядковых формул алгоритмически неразрешима* или, совсем уже точно, — до *алгоритмическая проблема модальной определимости первопорядковых формул имеет отрицательное решение, то есть требуемый алгоритм не существует.*

2 Алгоритмическая проблема соответствия первопорядковых формул

Проблема: *Существует ли алгоритм, который по произвольным первопорядковым формулам Φ и Ψ выяснял бы, являются ли они эквивалентными.*

Неразрешимость этой проблемы — это по существу теорема Чёрча о неразрешимости логики первого порядка: положим $\Psi = \top$, то есть Ψ — константа «истина» (или любая формула, ее «изображающая», если язык не содержит этой констаты, например, формула $p \to p$). Мы опускаем стандартные ссылки на источники, где теорема Чёрча доказывается для случая сигнатуры из одного бинарного отношения (двуместной предикатной буквы).

ТЕОРЕМА 6 (Теорема Чёрча). *Проблема соответствия первопорядковых формул неразрешима.*

3 Алгоритмическая проблема соответствия модальных и первопорядковых формул

Проблема: *существует ли алгоритм, который по произвольным модальной формуле φ и первопорядковой формуле Φ выяснял бы, являются ли они эквивалентными.*

Доказательство неразрешимости в этом случае мало чем отличается от предыдущего. Положим, что $\varphi = \top$, и получаем из теоремы Чёрча требуемое. Правда, теперь $\top$ — модальная формула, но это не меняет дела, поскольку модальная $\top$ и первопорядковая $\top$ истинны в одних и тех же (более точно, во всех!) шкалах.

ТЕОРЕМА 7 (Теорема Чёрча). *Проблема соответствия модальных и первопорядковых формул неразрешима.*

4 Алгоритмическая проблема соответствия модальных формул

Проблема: *Существует ли алгоритм, который по произвольным модальным формулам φ_1 и φ_2 выяснял бы, являются ли они эквивалентными.*

В этом случае, конечно, теорема Чёрча (точнее — ее доказательство) нам помочь не может, поскольку относится не к модальному языку. Однако и для модального пропозиционального языка есть хорошо известные результаты, которые способны на такую помощь. Одним из них является построение неразрешимого модального исчисления в работе [14]. Там была предложена формула (конъюнкция аксиом, дополнительных к аксиоматике логики $\mathbf{K}$) α, такая что проблема "$\mathbf{K} \oplus \alpha \vdash \beta$?" неразрешима, причем в доказательстве в качестве формул β брались формулы из некоторого разрешимого множества $\{\beta_i : i \in \omega\}$ и в том случае, когда $\mathbf{K} \oplus \alpha \nvdash \beta_i$, этот факт устанавливался с помощью подходящей шкалы. Таким образом, мы имеем

$$\mathbf{K} \oplus \alpha \vdash \beta_i$$

$$\Updownarrow$$

формулы α и $\alpha \wedge \beta_i$ эквивалентны.

Значит, справедлива

ТЕОРЕМА 8 (Изард, 1977). *Проблема соответствия модальных формул неразрешима.*

5 Алгоритмическая проблема модальной определимости

Проблема: *существует ли алгоритм, который по произвольной первопорядковой формуле Φ выяснял бы, является ли Φ модально определимой.*

Для этой проблемы нам понадобится вариант теоремы Чёрча. Более точно, мы будем использовать в качестве исходной неразрешимой проблемы неразрешимость теории строгого частичного порядка "без первого элемента".

ЛЕММА 9. *Теория первого порядка с аксиомами*

- $TRANS = \forall x, y, z\,(xRy \;\&\; yRz \Rightarrow xRz)$,
- $IRR = \forall x \neg xRx$,
- $\forall x \exists y\, yRx$

неразрешима.

Доказательство этой леммы является стандартной учебной задачей на доказательство теоремы Чёрча.

Рассмотрим теперь формулу

$$TRANS \,\&\, IRR \,\&\, \forall x \exists y\, yRx \,\&\, \neg\Theta,$$

где Θ — произвольная замкнутая формула первого порядка.

Несложно понять, что справедлива следующая эквивалентность:

$$TRANS \,\&\, IRR \,\&\, \forall x \exists y\, yRx \vdash \Theta$$

$$\Updownarrow$$

формула $TRANS \,\&\, IRR \,\&\, \forall x \exists y\, yRx \,\&\, \neg\Theta$ модально определима.

Направление $\Downarrow$ вполне очевидно: если

$$TRANS \,\&\, IRR \,\&\, \forall x \exists y\, yRx \vdash \Theta,$$

то формула $TRANS \,\&\, IRR \,\&\, \forall x \exists y\, yRx \,\&\, \neg\Theta$ эквивалентна модальной формуле $\bot$, то есть модально определима ею.

Обоснуем направление $\Uparrow$ рассуждением «от противного».

Предположим, что

$$TRANS \,\&\, IRR \,\&\, \forall x \exists y\, yRx \nvdash \Theta,$$

но формула $TRANS \,\&\, IRR \,\&\, \forall x \exists y\, yRx \,\&\, \neg\Theta$ определима некоторой модальной формулой φ.

Из того, что $TRANS \,\&\, IRR \,\&\, \forall x \exists y\, yRx \nvdash \Theta$, по теореме Геделя о полноте следует, что существует модель (она же шкала) F, такая, что

$$F \models TRANS \,\&\, IRR \,\&\, \forall x \exists y\, yRx \,\&\, \neg\Theta.$$

Поскольку формулы φ и $TRANS \,\&\, IRR \,\&\, \forall x \exists y\, yRx \,\&\, \neg\Theta$ эквивалентны, мы получаем тогда

$$F \models \varphi.$$

Теперь воспользуемся «модальной спецификой» формулы φ, более точно — тем, что истинность модальных формул сохраняется при взятии порожденных подшкал. Этот «модальный» факт совершенно тривиален: для истинности (да и неистинности) модальной формулы в точке шкалы важны лишь те точки, которые из данной точки достижимы за какое-нибудь число шагов[6], а потому если мы с каждой точкой в подшкалу заносим и все достижимые из нее (это и есть *порождение*), то формула в подшкале окажется вновь истинной, если была таковой в точках (точке) исходной шкалы.

Возьмем в качестве шкалы F' произвольную подшкалу шкалы F, порожденную какой-либо ее точкой w, то есть множеством точек F' будет

$$W' = \{w\} \cup \{w' : wR^n w' \text{ для некоторого } n \in \omega\},$$

где $xR^n y$, как обычно, означает, что в шкале есть точки $z_1, \ldots, z_{n-1}$ такие, что $xRz_1Rz_2R \ldots Rz_{n-1}Ry$, а отношение достижимости R' шкалы F' индуцировано отношением достижимости R шкалы F:

$$R' = R \cap (W' \times W'),$$

то есть для точек множества W' соотношение $xR'y$ выполняется в точности тогда, когда xRy.

Поскольку φ — модальная формула, мы имеем $F' \models \varphi$, то есть по ее выбору, в частности,

$$F' \models TRANS \;\&\; IRR \;\&\; \forall x \exists y\, yRx.$$

В силу того, что $F \models TRANS \;\&\; IRR$, точка w не достижима из себя ни за какое число шагов, а потому она в шкале F' не имеет предшественников, то есть нет ни одной такой точки u, что $uR'w$, а это противоречит тому, что $F' \models \forall x \exists y\, yRx$.

Полученное противоречие показывает, что допущенное нами верным быть не может, а тем самым справедливость доказываемого нами утверждения $\Uparrow$ установлена.

В результате мы свели неразрешимую по лемме проблему к проблеме модальной определимости, то есть доказана

[6] Количество этих шагов можно даже ограничить модальной глубиной испытуемой формулы, но тогда нужный нам факт останется справедливым, но его обоснование уже потребует некоторых, хоть и несложных, вспомогательных рассуждений.

ТЕОРЕМА 10. *Проблема модальной определимости неразрешима.*

В приведенном доказательстве «модальная специфика» использована в двух обстоятельствах: одна конкретная модальная формула, а именно $\perp$, и сохранение истинности модальных формул при взятии порожденных подшкал. Поэтому попутно с доказательством интересующего нас утверждения были получены доказательства и многого другого, в частности: доказательства неразрешимости свойств формул первого порядка «сохранять свою истинность при взятии порожденных подшкал», «быть определимой модальной формулой $\perp$». Сформулируем эти и другие утверждения, поскольку они оказались доказанными, в виде теорем.

ТЕОРЕМА 11. *Проблема определимости первопорядковых формул модальной формулой $\perp$ неразрешима.*

Формула $\perp$ константна, а потому в эквивалентности $\Updownarrow$ обоснование направления $\Downarrow$ можно было бы закончить словами *эквивалентна константной модальной формуле* $\perp$ вместо *эквивалентна модальной формуле* $\perp$, а в обосновании направления $\Uparrow$ от противного заметить, что раз формула не является модально определимой, то она не является определимой константными модальными формулами. Тем самым получена

ТЕОРЕМА 12. *Проблема определимости первопорядковых формул константными модальными формулами неразрешима.*

Заметив, что мы отметили лишь одно свойство модальной формулы $\perp$, а их много, получаем следующую схему теорем.

МУЛЬТИТЕОРЕМА 13. Проблема определимости модальными формулами, обладающими свойством ..., неразрешима.

Здесь вместо многоточия можно поставить, например, «быть позитивной формулой», «быть салквистовой формулой», «иметь длину 1». Конечно, при получении утверждения для конкретного свойства формулировка должна быть «причесана». Так, вместо *Проблема определимости модальными формулами, обладающими свойством «быть позитивной формулой», неразрешима* следует писать *Проблема определимости позитивными модальными формулами неразрешима.*

Конечно, свойствами формулы $\perp$ исчерпываются, мягко говоря, далеко не все интересные свойства модальных формул. Однако приведенное доказательство легко модифицируется, хотя вдаваться здесь в подробности в наши планы не входит. Некоторые факты читатель может найти в [10].

Теперь обратимся к операции взятия порожденной подшкалы. Как уже отмечено, нами доказана

ТЕОРЕМА 14. *Не существует алгоритма, который по произвольной формуле первого порядка давал бы ответ на вопрос, верно ли, что истинность этой формулы сохраняется при взятии порожденных подшкал.*

Имеются и другие операции над шкалами, сохраняющие истинность модальных формул. Таковы, например, p-морфизмы, дизъюнктные объединения. Походящими модификациями нашего доказательства (по сути, нужно лишь подходящим образом изменить первопорядковую теорию в формулировке леммы) несложно[7] установить справедливость аналогов только что сформулированной теоремы, получающихся заменой слов *взятии порожденных подшкал* на *p-морфизм* и т.п.

Завершим этот раздел замечанием, что, хотя здесь и были слова «модальная формула» и им сопутствующие, мы занимались свойствами формул первого порядка (!), то есть рассмотренные задачи относились скорее к алгоритмической проблематике классической логики первого порядка.

6 Алгоритмическая проблема первопорядковой определимости

Как видно из предыдущих разделов, неразрешимость почти всех алгоритмических проблем теории соответствия обосновывается довольно просто, да и имеет мало отношения к теории соответствия. Исключением является следующая проблема: *существует ли алгоритм, который по произвольной модальной формуле выяснял бы, является ли она первопорядково определимой.*

Основным результатом по этой проблеме является

[7] Однако не будем рисковать называть это упражнение тривиальным.

ТЕОРЕМА 15. *Проблема первопорядковой определимости модальных формул неразрешима.*

Подробное и вполне обозримое (менее восьми страниц) доказательство этой теоремы содержится в [10]. Использованная нами схема доказательства та же, что и в [3, 4, 13, 12, 16]. В явной форме эта схема лаконично описана в [11]. Для читателей «Логических исследований» отметим, что по сути она была использована в [5].

Здесь мы ограничимся лишь общим описанием доказательства, хотя не пропустим ни одного важного, ключевого момента, так что заинтересованный читатель сможет восстановить опущенные рутинные подробности.

Для доказательства нам понадобятся следующие ингредиенты:

1) $\mathcal{P}$ — некоторая машина Минского с неразрешимой проблемой остановки (см., например, [1] или [5]);

2) модальная формула

$$\neg H = \neg\Diamond(\Box^2\bot \wedge \Diamond\neg p \wedge \Diamond p) \quad (= \Box(\Box^2\bot \to \Box p \vee \Box\neg p)),$$

имеющая в качестве эквивалента первопорядковую формулу

$$\neg\exists x\, \exists y\, (xRy \wedge \neg\exists z\, yR^2z \wedge \exists u\exists v(yRu \wedge yRv \wedge u \neq v));$$

3) модальная формула (формула Лёба)

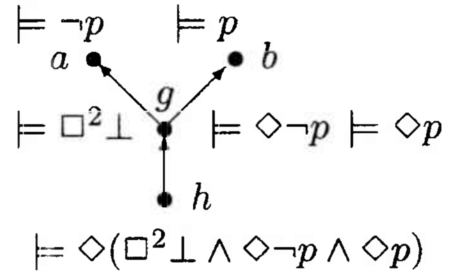
$$\boldsymbol{la} = \Box(\Box q \to q) \to \Box q,$$

не имеющая первопорядкового эквивалента.

Конечно, обе модальные формулы были выбраны авторами по их собственному вкусу, имеются и другие подходящие формулы. В частности, авторам оказалось удобным использовать то обстоятельство, что формула $\boldsymbol{la}$ ***истинна на всех транзитивных шкалах, не имеющих бесконечных возрастающих цепей***, то есть цепей вида $z_0Rz_1R\ldots Rz_{n-1}Rz_nR\ldots$.

Поясним, почему указанные в пункте 6 формулы эквивалентны.

В самом деле, попытка опровергнуть формулу $\neg H$ приводит нас к шкале, изображенной на рисунке



$$h \not\models \neg\Diamond(\Box^2\bot \wedge \Diamond\neg p \wedge \Diamond p)$$

причем должно быть справедливо, что $\forall z\, \neg gR^2z$. Рядом с точками шкалы написаны некоторые формулы (точнее, подформулы формулы $\neg H$), которые в этих точках являются истинными.

Таким образом, для опровержения этой формулы должны выполняться следующие условия (прослеживаем шаг за шагом):

$$gRa \wedge gRb \wedge a \neq b$$
$$g \models \Diamond\neg p \wedge \Diamond p;$$

$$\exists u \exists v (gRu \wedge gRv \wedge u \neq v)$$
$$g \models \Diamond\neg p \wedge \Diamond p;$$

$$\neg\exists z\, gR^2z \wedge \exists u \exists v (gRu \wedge gRv \wedge u \neq v)$$
$$g \models \Box^2\bot \wedge \Diamond\neg p \wedge \Diamond p;$$

$$hRg \wedge \neg\exists z\, gR^2z \wedge \exists u \exists v (gRu \wedge gRv \wedge u \neq v)$$
$$h \models \Diamond(\Box^2\bot \wedge \Diamond\neg p \wedge \Diamond p);$$

$$\exists x \exists y\, (xRy \wedge \neg\exists z\, yR^2z \wedge \exists u \exists v (yRu \wedge yRv \wedge u \neq v))$$
$$\not\models \neg\Diamond(\Box^2\bot \wedge \Diamond\neg p \wedge \Diamond p).$$

Подчеркнем, что мы только что приводили не доказательство, а пояснения, которые легко восполнимы до доказательства.

С помощью указанных ингредиентов так определяем теперь модальные формулы $Ax\mathcal{P}$ и β_i (i — входные данные машины $\mathcal{P}$), что

1. $Ax\mathcal{P} \vdash \beta_i$ в точности тогда, когда $\mathcal{P}$ завершает свою работу, начав ее на входных данных i,

и

условие $Ax\mathcal{P} \not\vdash \beta_i$ может быть установлено с помощью некоторой ***транзитивной шкалы, не содержащей возрастающих цепей***;

2. $\neg H \vdash Ax\mathcal{P}$.

Далее. Определяем формулу

$$Ax\mathcal{P} \wedge (\beta_i \to \neg H) \wedge (\neg H \vee \boldsymbol{la}).$$

Главным нужным нам свойством этой формулы является следующая эквивалентность:

$$Ax\mathcal{P} \wedge (\beta_i \to \neg H) \wedge (\neg H \vee \boldsymbol{la}) \text{ первопорядково определима}$$

$$\Updownarrow$$

$$\mathcal{P} \text{ завершает свою работу, начав ее на входе } i.$$

Для обоснования стрелки $\Uparrow$ замечаем, что если $\mathcal{P}$ завершает свою работу, начав ее на входе i, то наша формула эквивалентна формуле $\neg H$, которая первопорядково определима.

Чтобы обосновать стрелку $\Downarrow$ (точнее, ее контрапозицию), воспользуемся свойствами формулы Лёба $\boldsymbol{la}$.

Нам понадобятся некоторые детали, относящиеся к моделированию работы машин Минского средствами модальных формул.

Чтобы не вводить новых алфавитов, будем использовать старые символы — β, i и др. — в новом смысле. Контекстность использования символов позволяет избежать какой-либо путаницы.

Вместо записей данных i будем теперь использовать тройки натуральных чисел $\langle \alpha, m, n\rangle$, $\langle \beta, k, l\rangle$ («нам нужно перейти с помощью машины $\mathcal{P}$ от тройки $\langle \alpha, m, n\rangle$ к тройке $\langle \beta, k, l\rangle$»).

Напомним, что машиной Минского (ее программой) $\mathcal{P}$ является конечное множество инструкций для преобразования троек; каждая инструкция имеет один из четырех видов (в книге [1] обсуждается чуть иное, но эквивалентное определение):

- $s \to \langle t, 1, 0\rangle$ (если первой компонентой тройки является s, мы должны заменить ее на t, добавить 1 ко второй компоненте, а третью компоненту не менять);

- $s \to \langle t, 0, 1 \rangle$ (если первой компонентой тройки является s, мы должны заменить ее на t, добавить 1 к третьей компоненте, а вторую компоненту не менять);

- $s \to \langle t, -1, 0 \rangle\, (\langle t', 0, 0 \rangle)$ (если первой компонентой тройки является s и вторая компонента больше 0, мы должны заменить первую компоненту на t, вычесть 1 из второй компоненты, а третью компоненту не менять, а если первой компонентой тройки является s и вторая компонента равна 0, то нужно заменить первую компоненту на t', не меняя ничего во второй и третьей компонентах);

- $s \to \langle t, 0, -1 \rangle\, (\langle t', 0, 0 \rangle)$ (если первой компонентой тройки является s и третья компонента больше 0, мы должны заменить первую компоненту на t, вычесть 1 из третьей компоненты, а вторую компоненту не менять, а если первой компонентой тройки является s и третья компонента равна 0, то нужно заменить первую компоненту на t', не меняя ничего во второй и третьей компонентах).

Компоненты троек можно понимать так: первая компонента — номер инструкции, а вторая и третья — информация в двух (соответственно, первом и втором) счетчиках. Иногда описанные машины Минского называют регистровыми машинами с двумя регистрами.

ПРИМЕР 16. Если у нас в программе $\mathcal{P}$ имеется инструкция

$$s \to \langle t, 0, -1 \rangle\, (\langle t', 0, 0 \rangle),$$

то за один шаг с ее помощью производятся такие вычисления:

$$\mathcal{P} : \langle s, 5, 3 \rangle \to \langle t, 5, 2 \rangle$$

и

$$\mathcal{P} : \langle s, 5, 0 \rangle \to \langle t', 5, 0 \rangle .$$

Тот факт, что по программе $\mathcal{P}$ из тройки $\langle \alpha, m, n \rangle$ за некоторое конечное число шагов получается тройка $\langle \beta, k, l \rangle$, будем записывать аналогично:

$$\mathcal{P} : \langle \alpha, m, n \rangle \to \langle \beta, k, l \rangle .$$

Договоримся, что все программы детерминированные, то есть в программе не может быть двух разных инструкций с одинаковыми левыми частями. (Эта договоренность несущественна.)

Основная неразрешимая проблема: *не существует алгоритма, который по данной программе* $\mathcal{P}$ *и тройкам* $\langle\alpha, m, n\rangle$, $\langle\beta, k, l\rangle$ *мог бы выяснить, верно ли, что справедливо* $\mathcal{P} : \langle\alpha, m, n\rangle \to \langle\beta, k, l\rangle$.

Неразрешимость проблемы второй тройки: *существуют такие программа* $\mathcal{P}$ *и тройка* $\langle\alpha, m, n\rangle$, *что не существует алгоритма, способного выяснить по произвольной тройке* $\langle\beta, k, l\rangle$, *верно ли, что* $\mathcal{P} : \langle\alpha, m, n\rangle \to \langle\beta, k, l\rangle$.

Фиксируем такие программу $\mathcal{P}$ и тройку $\langle\alpha, m, n\rangle$.

На следующей иррефлексивной транзитивной шкале F_i (см. рис. 1) мы представляем множество

$$\{\langle\beta, k, l\rangle : \mathcal{P} : \langle\alpha, m, n\rangle \to \langle\beta, k, l\rangle\}.$$

Здесь три последовательности точек

$$a_0^0,\ a_1^0,\ a_2^0, \dots\ , a_\beta^0, \dots$$

$$a_0^1,\ a_1^1,\ a_2^1, \dots\ , a_k^1, \dots$$

$$a_0^2,\ a_1^2,\ a_2^2, \dots\ , a_l^2, \dots$$

изображают возможные компоненты троек.

Полагаем по определению, что в шкале F_i точки вида $s(\beta, k, l)$ образуют множество

$$\{s(\beta, k, l) : \mathcal{P} : \langle\alpha, m, n\rangle \to \langle\beta, k, l\rangle\}.$$

Точки a, b, g, h позволяют получить опровержение формулы $\neg H$: достаточно (впрочем, и необходимо) положить

$$a \models p,\ b \not\models p \text{ или } a \not\models p,\ b \models p.$$

Точки шкалы F_i могут быть описаны формулами от одной переменной p следующим образом.

Полагаем, что оценка выбрана так, что $a \models p$, $b \not\models p$ (случай $a \not\models p$, $b \models p$ аналогичен).

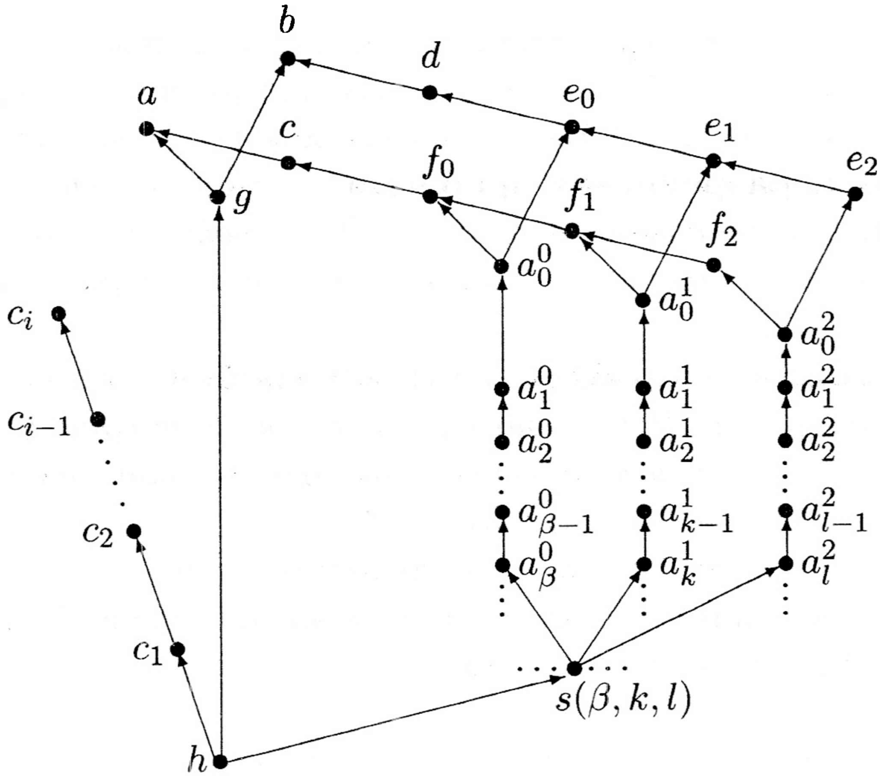


Рис. 1. Шкала F_i

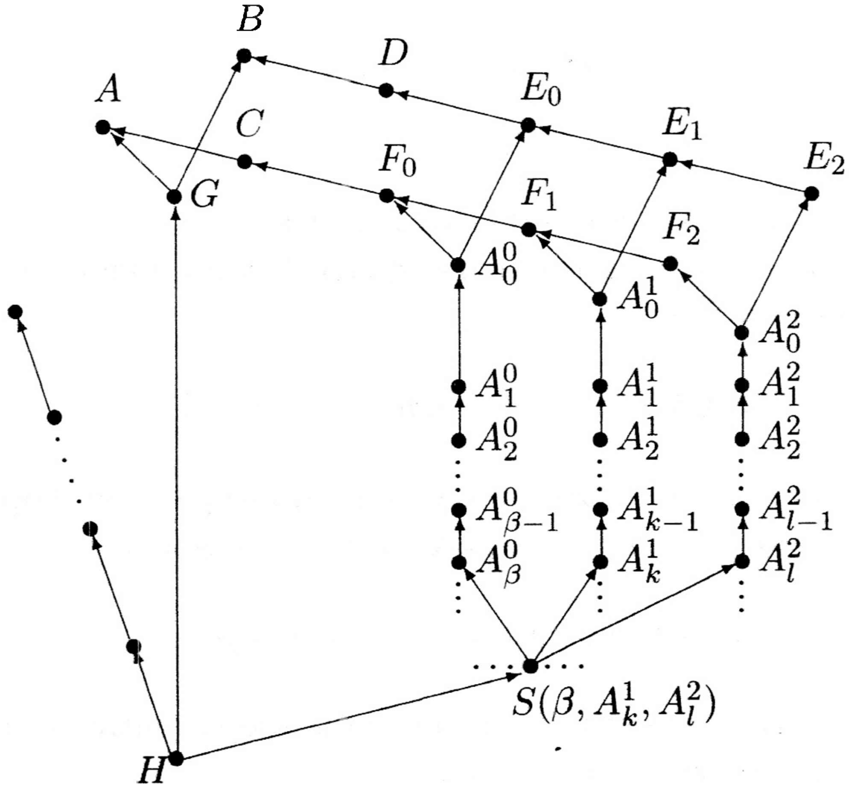


Рис. 2. Шкала F_i и формулы, описывающие ее точки

При выбранной оценке на рис. 2 происходит упомянутое описание: каждая формула находится около той единственной точки, в которой истинна.

Сами формулы таковы:

$$A = \Box\bot \wedge p,\ B = \Box\bot \wedge \neg p,$$

$$C = \Diamond A \wedge \neg\Diamond\Diamond A \wedge \neg\Diamond B,\ D = \Diamond B \wedge \neg\Diamond\Diamond B \wedge \neg\Diamond A,$$

$$G = \Box^2\bot \wedge \Diamond\neg p \wedge \Diamond p,\ H = \Diamond G,$$

$$E_0 = \Diamond D \wedge \neg\Diamond\Diamond D,\ E_1 = \Diamond E_0 \wedge \neg\Diamond\Diamond E_0 \wedge \neg\Diamond C,$$

$$E_2 = \Diamond E_1 \wedge \neg\Diamond\Diamond E_1 \wedge \neg\Diamond C,\ F_0 = \Diamond C \wedge \neg\Diamond\Diamond C,$$

$$F_1 = \Diamond F_0 \wedge \neg\Diamond\Diamond F_0 \wedge \neg\Diamond D,\ F_2 = \Diamond F_1 \wedge \neg\Diamond\Diamond F_1 \wedge \neg\Diamond D,$$

$$A_0^0 = \Diamond E_0 \wedge \Diamond F_0 \wedge \neg\Diamond\Diamond E_0 \wedge \neg\Diamond\Diamond F_0,$$

$$A_0^1 = \Diamond E_1 \wedge \Diamond F_1 \wedge \neg\Diamond\Diamond E_1 \wedge \neg\Diamond\Diamond F_1,$$

$$A_0^2 = \Diamond E_2 \wedge \Diamond F_2 \wedge \neg\Diamond\Diamond E_2 \wedge \neg\Diamond\Diamond F_2,$$

$$A_{j+1}^i = \Diamond A_j^i \wedge \neg\Diamond^2 A_j^i \wedge \bigwedge_{i \neq k=0}^{2} \neg\Diamond A_0^k,$$

где $i \in \{0,1,2\}$, $j \geq 0$, и

$$S(\beta, A_k^1, A_l^2) = \Diamond A_\beta^0 \wedge \neg\Diamond A_{\beta+1}^0 \wedge \Diamond A_k^1 \wedge \neg\Diamond\Diamond A_k^1 \wedge \Diamond A_l^2 \wedge \neg\Diamond\Diamond A_l^2$$

для произвольных β, k и l.

Легко видеть, что

- $F_i \models H \wedge S(\alpha, A_m^1, A_n^2) \to H \wedge S(\beta, A_k^1, A_l^2) \Leftrightarrow \mathcal{P} : \langle\alpha, m, n\rangle \to \langle\beta, k, l\rangle$.

По данной программе машины Минского $\mathcal{P}$ можно построить (стандартное упражнение, см. указанные выше источники) формулу $Ax\mathcal{P}$ со свойствами:

- $F_i \models Ax\mathcal{P}$;
- $\neg H \vdash Ax\mathcal{P}$;

- справедлива эквивалентность:

$$AxP \vdash H \wedge S(\alpha, A^1_m, A^2_n) \to H \wedge S(\beta, A^1_k, A^2_l)$$
$$\Updownarrow$$
$$P : \langle \alpha, m, n \rangle \to \langle \beta, k, l \rangle \, .$$

Упоминавшаяся выше формула $AxP \wedge (\beta_i \to \neg H) \wedge (\neg H \vee \boldsymbol{la})$ принимает следующий конкретный вид

$$AxP \wedge ((H \wedge S(\alpha, A^1_m, A^2_n) \to H \wedge S(\beta, A^1_k, A^2_l)) \to \neg H) \wedge (\neg H \vee \boldsymbol{la})$$

и мы имеем по построению

$$F_i \models AxP \wedge ((H \wedge S(\alpha, A^1_m, A^2_n) \to H \wedge S(\beta, A^1_k, A^2_l)) \to \neg H) \wedge$$
$$(\neg H \vee \boldsymbol{la}).$$

В самом деле,

- $F_i \models AxP$ как было отмечено выше;
- $F_i \models (H \wedge S(\alpha, A^1_m, A^2_n) \to H \wedge S(\beta, A^1_k, A^2_l)) \to \neg H$, поскольку если $F_i \not\models^V \neg H$ (V — некоторая оценка переменных), то h является единственной точкой со свойством $h \models^V H$, а кроме того, выполняется $h \models^V H \wedge S(\alpha, A^1_m, A^2_n)$, но $h \not\models^V H \wedge S(\beta, A^1_k, A^2_l)$;
- $F_i \models \neg H \vee \boldsymbol{la}$, поскольку шкала F_i транзитивна и не содержит бесконечных возрастающих цепей.

Допустим теперь, что формула Φ является первопорядковым эквивалентом формулы

$$AxP \wedge ((H \wedge S(\alpha, A^1_m, A^2_n) \to H \wedge S(\beta, A^1_k, A^2_l)) \to \neg H) \wedge (\neg H \vee \boldsymbol{la}).$$

Тогда $F_i \models \Phi$.

Пусть F' — произвольное ультрапроизведение всех шкал F_i по какому-нибудь неглавному ультрафильтру над $\omega - \{0\}$. Легко понять (то есть показать с помощью формул первого порядка, описывающих устройство шкал F_i, а истинность формул первого порядка сохраняется при ультрапроизведениях), что шкала устроена так, как показано на рис. 3.

Но теперь в шкале (по-прежнему транзитивной, иррефлексивной) появилась бесконечная возрастающая цепь. Значит, мы имеем

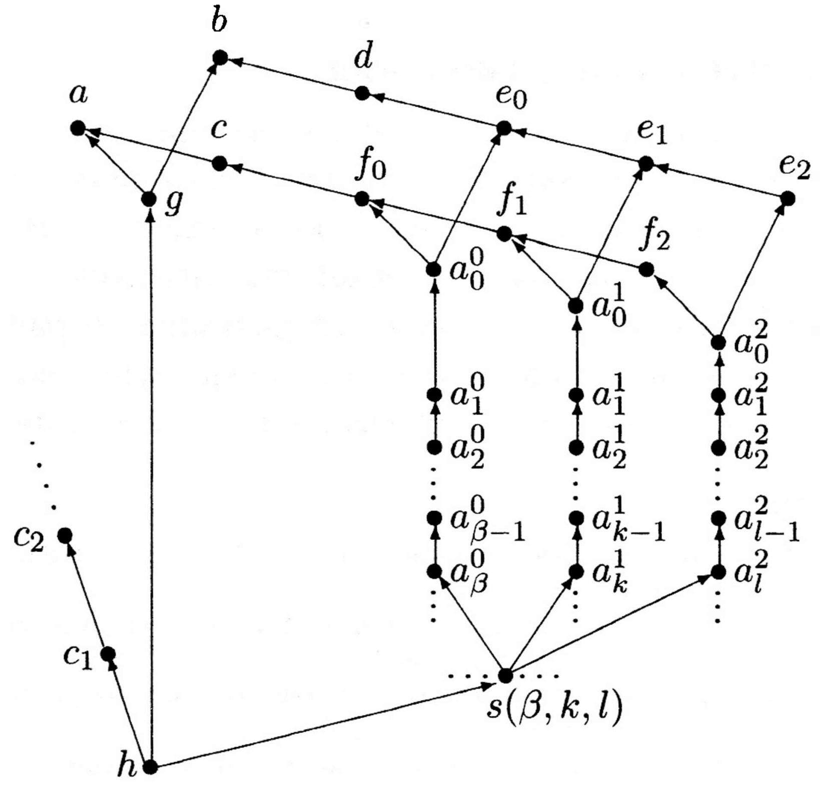


Рис. 3. Шкала F'

- $F' \models \Phi$, поскольку Φ является формулой первого порядка;
- $F' \not\models \neg H \vee \boldsymbol{la}$, поскольку при всякой оценке V, такой что
  - $x \models p$ в точности тогда, когда $x = a$, и
  - $x \models q$ в точности тогда, когда $x \notin \{h, c_1, c_2, \dots\}$ (с помощью свойств ультрапроизведений легко показать, что цепь $c_1Rc_2Rc_3R\dots$ в F' бесконечна),

  мы имеем

  - $h \not\models \neg H$ и
  - $h \not\models \boldsymbol{la}$.

Таким образом, $F' \models \Phi$ и $F' \not\models \boldsymbol{la}$, что противоречит тому, что они эквивалентны.

Полученное противоречие показывает, что допущенное нами неверно, то есть формула не имеет первопорядкового эквивалента.

Доказательство теоремы этого раздела закончено.

7 Заключительные замечания

Ну, что же. Мы показали, что вроде бы знак вопроса в названии статьи можно убрать. Однако нам этого делать не хотелось бы. Необходимо, на наш взгляд, просто отдавать себе отчет, что при рассмотрении алгоритмической проблематики в теории соответствия необходимы изначальные разумные ограничения при постановке задач. Надеемся, что приведенные доказательства помогут исследователям находить эти ограничения.

Литература

[1] *Мальцев А.И.* Алгоритмы и рекурсивные функции. М.: Наука, 1986.

[2] *Фейс Р.* Модальная логика. М.: Наука, 1974.

[3] *Чагров А.В.* Неразрешимые свойства расширений логики доказуемости // Алгебра и логика. 1990. Т. 29. N 3. С. 350–367.

[4] *Чагров А.В.* Неразрешимые свойства расширений логики доказуемости. II // Алгебра и логика. 1990. Т. 29. N 5. С. 613–623.

[5] *Чагров А.В.* Алгоритмическая проблема аксиоматизации табличной нормальной модальной логики // Логические исследования. Вып 9. М.: Наука, 2002. С. 251–263.

[6] *Чагрова Л.А.* О проблеме определимости пропозициональных формул интуиционистской логики формулами классической логики первого порядка. Калинин: КГУ, 1989. (Диссертация на соискание ученой степени кандидата физико-математических наук, защищенная в Институте математики с вычислительным центром АН МССР, Кишинев.)

[7] *van Benthem J.A.F.K.* Modal Logic and Classical Logic. Bibliopolis, Napoli, 1983.

[8] *van Benthem J.A.F.K.* Correspondence Theory // D.M.Gabbay, F.Guenthner (eds.). Handbook of Philosophical Logic. 2nd Edition, Vol. 3. Kluwer Academic Publishers, 2001. P. 325–408.

[9] *Chagrov A.V., Chagrova L.A.* Algorithmic problems concerning first-order definability of modal formulas on the class of all finite frames // Studia Logica. 1995. Vol. 55. No. 3. P. 421–448.

[10] *Chagrov A.V., Chagrova L.A.* The Truth About Algorithmic Problems in Correspondence Theory // Advances in Modal Logic. Vol. 6. College Publications, 2006. P. 121–138.

[11] *Chagrov A., Zakharyashchev M.* The undecidability of the disjunction property of propositional logics and other related problems // Journal of Symbolic Logic. 1993. Vol. 58. P. 967–1002.

[12] *Chagrov A., Zakharyashchev M.* Modal Logic. Oxford University Press, 1997.

[13] *Chagrova L.A.* An undecidable problem in correspondence theory // Journal of Symbolic Logic. 1991. Vol. 56. P. 1261–1272.

[14] *Isard S.* A finitely axiomatizable undecidable extension of K // Theoria. 1977. Vol. 43. P. 195–202.

[15] *Kripke S.* Semantical analysis of modal logic, Part I // Zeitschrift für Mathematische Logik und Grundlagen der Mathematik. 1963. Bd. 9. S. 67–96.

[16] *Zakharyaschev M., Wolter F. and Chagrov A.* Advanced Modal Logic // D.M.Gabbay, F.Guenthner (eds.). Handbook of Philosophical Logic. 2nd Edition. Vol. 3. Kluwer Academic Publishers, 2001. P. 83–266.

Альтернативное определение логического следования[1]

В.И. Шалак

ABSTRACT. In this paper we provide analysis of the philosophical origins of Tarskian definition of logical consequence. We show that there exist a close connection between the Tarskian notion of logical consequence and the views of Plato and Aristotle on the aims of human cognition. We also propose an alternative, «model-free», definition of logical consequence for the boolean logic.

В работах Я. Хинтикки [12, 13] сделано интересное наблюдение.

> «В текстах и трактатах по истории философии мы обычно находим информацию лишь о том, какие тезисы или мнения отстаивали те или иные философы в разные времена. Все еще слишком редко встречаются сколько-нибудь интересные попытки показать, почему философы принимали именно такие воззрения и почему им казалось важным подчеркивать эти воззрения в качестве составных частей своих учений... Часто, хотя и не всегда, ответы на эти вопросы зависят от выявления концептуальных допущений, которые явно или неявно принимает тот или иной мыслитель. Эти концептуальные допущения и склонность к использованию определенных понятий часто разделяются всеми или большинством мыслителей определенного периода или даже целой культуры» (с. 355).

и далее:

> «Общее утверждение о широком распространении каких-либо неявных предпосылок неизбежно связано с риском. Если такое общее утверждение справедливо, то предпосылки, о которых оно говорит, принимаются подавляющим большинством философов и простых людей — представителей некоторой культуры. В этом случае чрезвычайно трудно подвергнуть сомнению эти предпосылки, обсудить их и даже четко выявить. В таких обстоятельствах отнюдь не просто получить прямые свидетельства в пользу существования такого рода предпосылок» (с. 392).

[1]Работа поддержана РГНФ. Грант № 04-03-02660.

Эти слова могут быть обращены не только к историкам философии, но и к логикам. Среди них сейчас уже вряд ли можно найти хотя бы одного, кто одинаково хорошо ориентировался бы во всех разделах современной логики и постоянно был в курсе полученных в них результатов. Время таких энциклопедистов от логики прошло. Единственное, что нас объединяет и не дает развалиться самому зданию логики, — это ее основания. Мы разделяем друг с другом ряд общих строго уточненных понятий и стараемся строить, исходя из них, всю нашу науку. Поэтому можно применить сказанное Хинтиккой именно к этим понятиям — тем, что лежат в основании логики. Насколько естественно то, что мы принимаем как само собой разумеющееся? *Почему вообще мы приняли именно эти определения базисных понятий логики?* Что они нам дают и чего лишают? Такую обеспокоенность разделяют многие ученые. В статье А.С. Карпенко [5] читаем:

> «...мы должны обратить внимание на главную тенденцию развития логики в конце XX и начале XXI века. Как сто лет назад остро встал вопрос об основаниях математики, так сейчас стоит вопрос об основаниях самой логики, в связи с чем обсуждаются следующие проблемы:
>
> (i) Что есть логическое следование?
>
> (ii) Что есть логические понятия (операции)?
>
> (iii) Что есть логическая система?
>
> (iv) Что есть логика?» (с. 71)

Критерий истинности, сформулированный Платоном в диалоге «Кратил» [9] словами «...тот, кто говорит о вещах в соответствии с тем, каковы они есть, говорит истину, тот же, кто говорит о них иначе, — лжет...» и Аристотелем в «Метафизике» [3] «...говорить о сущем, что его нет, или о не-сущем, что оно есть, — значит говорить ложное; а говорить о том, что сущее есть и не-сущее не есть, — значит говорить истинное», считается классическим и был, по историческим меркам относительно недавно, уточнен А. Тарским. С использованием этого критерия был доказан ряд фундаментальных теорем, но все-таки не он и не само понятие истины является ядром логики.

Понимая логику как науку, изучающую законы правильных рассуждений, центральным ее понятием справедливо считается понятие логического следования. В 1936 году оно также было уточнено А. Тарским [15]. Именно это отношение определяет то, какие способы рассуждений принимаются в качестве правильных, а какие не удостаиваются этого звания. Логический статус этого понятия столь велик, что «Логику можно определить как науку о хороших способах рассуждений. Под “хорошими” способами рассуждений при этом можно понимать такие, при которых из верных исходных положений получаются верные результаты» [7, с. 5].

Трудно переоценить значение, которое имеет принимаемое понятие логического следования, для развития не только науки, но и всей человеческой культуры. Хотелось бы, чтобы принимаемое нами это понятие было в определенном смысле *единственно верным*. Ведь от того, какие виды умозаключений считаются доказательными, зависят способы аргументации в судах, способы общения в учебных классах, способы передачи знания от одного поколения к другому, способы формулировки научных теорий и пр. Если мы в чем-то ошиблись при выборе отношения логического следования, то в нашей культуре обязательно должны были появиться изъяны, которых мы просто не имеем возможности увидеть из-за принятой понятийной сетки.

В классической логике некоторое умозаключение считается правильным, если и только если при истинности посылок оно гарантирует истинность заключений. Вроде бы ничего разумного возразить против этого нельзя. Действительно, кому придет в голову пользоваться рассуждениями, которые могут привести от истины ко лжи? Сформулируем классическое определение следования более строго: *Из множества формул Σ следует формула A, если и только если в каждой модели M, в которой истинны все формулы множества Σ, будет истинна и формула A.* Кратко, с использованием общепринятой логической символики, это можно записать в виде:

$$\Sigma \models A \Longleftrightarrow \forall M(\forall B(B \in \Sigma \Longrightarrow M[B] = true) \Longrightarrow M[A] = true),$$

где $M[A] = true$ означает, что в модели M истинна формула A.

Трудно согласиться с тем, что «Понятие истины напрямую связано с пониманием логического следования, данного Тарским, а это, в свою очередь, приводит к объектам, которые мы называем “логическими законами”: последние суть сохраняю-

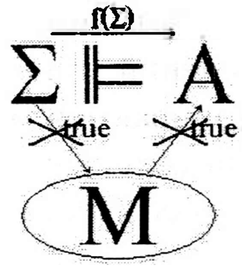


Рис. 1. Классическое следование

щие истину выводы» [5]. Из принимаемого критерия истинности предложений вовсе не следует, что мы должны принять именно такое определение отношения логического следования. Есть основания подозревать, что это всего лишь некритически усвоенная догма, которую с первых лекций втолковывают студентам и в которой они уже просто не могут усомниться — настолько естественной и подкрепленной многовековой научной практикой она им кажется. Специфической чертой данного определения следования является то, что отношение между Σ и A устанавливается *не напрямую*, а посредством их соотнесения с моделью M. Непосредственная связь между множеством формул Σ и формулой A разрывается и вводится *посредник* — свойство *быть истинным в модели* M.

Натренированный глаз логика сразу замечает, что благодаря такому разрыву в случае несуществования ни одной модели, в которой истинны все формулы множества Σ, из него логически следует любая формула. Мы к этому уже как-то привыкли и даже считаем почти естественным. Нас уже давно не удивляет, что из $2 + 2 = 5$ следует, что *Луна сделана из зеленого сыра*.

Принятое в классической логике определение логического следования имеет еще один скрытый недостаток. *В метаязыке этого основополагающего определения мы уже принимаем классическую логику, правила которой как раз и хотим обосновать.* То есть имеются основания подозревать нечто похожее на порочный круг в определении.

Попробуем понять, откуда взялось такое определение следования? Попытка такого понимания не будет иметь доказательной силы, но может подсказать некоторые новые идеи.

Следование, будучи по своей природе семантическим обоснованием правильных рассуждений, может быть объяснено из того, каким целям должны служить правильные рассуждения и к каким объектам они могут быть применены. Это уже сугубо философский вопрос и ответ на него можно получить лишь проанализировав философские взгляды родоначальников той логики, которая нас интересует.

Вряд ли необходимо лишний раз напоминать, что греческая культура и, в частности, философия оказали определяющее влияние на развитие европейской мысли. Генезис многих понятий современной логики мы можем проследить в глубь веков вплоть до античности. А.М. Анисов [1] пишет:

> «Возникновение древнегреческой философии и доказательной науки — процесс уникальный как во времени, так и в пространстве. Никогда и нигде он больше не повторился. ...всякий раз, когда в какой-либо цивилизации прошлого историки отмечали использование идеи математического доказательства, обнаруживалось ее греческое происхождение. В литературе для обозначения описываемых событий применяется термин "греческое чудо" — редкий пример, когда ученые используют слово "чудо" в положительном смысле» (с. 17).

Заметим, что греческое чудо может иметь и другое, прямо противоположное толкование. Зададимся вопросом, почему никакие другие цивилизации не повторили путь греков? Почему идея математического доказательства имеет исключительно греческое происхождение? Ведь если эта идея универсальна, имеет необходимый характер, к ней просто должны были прийти независимо такие, например, великие цивилизации, как индийская и китайская. Не хватило времени? Это не аргумент. Китайской цивилизации вполне хватило времени, чтобы создать замечательную систему медицины, которая до сих пор во многом превосходит европейскую. Может быть, причина просто в том, что греческие достижения отнюдь не универсальны, а являются всего лишь прямым следствием их философских взглядов со всеми достоинствами и недостатками? Распространение же этих достижений заслуга не ученых, а воинов Александра Македонского.

Из древнегреческих философов в наиболее полном объеме до нас дошли труды Платона и Аристотеля. Патристика в философии донесла до нас взгляды Платона, а схоласты преуспели в канонизировании Аристотеля, труды которого были для них второй Библией. Как и Библию, написанное Аристотелем можно было толковать, но нельзя было сомневаться в истинности сказанного. Отсюда огромный авторитет. Если к этому еще вспомнить об исторически первой стройной и законченной логической системе, построенной Аристотелем, то становится ясным, почему в итоге их взгляды по многим вопросам вошли в плоть и кровь всей европейской культуры.

Вспомним, что Платон с его теорией идей и Аристотель находились под сильным впечатлением от стройности и красоты математического знания. Они считали, что именно математическое знание является образцом того, что вообще можно называть знанием. Это привело их к различению знания и мнения, которые представляют собой не только разные способности, но и направлены на разные объекты. Если знание имеет своим объектом умопостигаемое, существующее само по себе, вечное, вневременное, то объектами мнения является данное в ощущениях и потому изменчивое. Парадокс лжеца, апории Зенона как бы служили подтверждением тому, что попытки рассуждать о мире явлений приводят к противоречиям. Вот как пишет об этом Б. Рассел [9], излагая теорию идей Платона:

> «Человек, обладающий знанием, имеет знание о чем-то, то есть о чем-то, что существует, так как то, что не существует, есть ничто. Таким образом, знание непогрешимо, поскольку логически невозможно, чтобы оно было ошибочным. Но мнение может быть ошибочным. Как же это возможно? Не может быть мнения о том, чего нет, потому что это невозможно; не может быть мнения о том, что есть, так как это было бы знанием. Поэтому мнение должно быть одновременно о том, что есть и чего нет. ...Все отдельные чувственные объекты, как утверждает Платон, обладают этим противоречивым характером; они являются, таким образом, промежуточными между бытием и небытием и пригодны в качестве предметов мнения, но не знания» (с. 167-168).

Об этом же говорит и Я. Хинтикка, анализируя взгляды Платона и Аристотеля на познание и его объекты.

> «Хотя позиция Аристотеля по отношению к различию между знанием и верой [мнением] совершенно отлична от платоновской, он тоже приходит к выводу о том, что знание и вера [мнение] должны иметь различные объекты, если мы хотим избежать двусмысленности...
>
> Поэтому вполне понятны явные утверждения Аристотеля, что мы можем иметь знание лишь о том, что неуничтожимо и неизменно» [12, с. 368].
>
> «...здесь мы действительно имеем дело с тенденцией, общей многим греческим мыслителям.

Наиболее характерной чертой этой тенденции является широкое распространение среди греков учения о том, что подлинное знание возможно только о том, что вечно или, по крайней мере, неизменно» [13, с. 404].

«... Аристотель утверждает, что Платон принимал учение Гераклита о том, что "все чувственно воспринимаемое постоянно течет, а знания о нем нет". Справедливо это или нет, однако в сочинениях самого Платона можно обнаружить похожие рассуждения» [13, с. 409-410].

«Аристотель также соглашается с тем, что если бы все вещи находились в покое, то "одно и то же было бы всегда истинным и одно и то же – всегда ложным ... А если все находится в движении, то ничто не было бы истинным; тогда, значит, все было бы ложно..."» [13, с. 410].

«...становится понятным также значение неизменности форм для Платона. Одна из наиболее важных функций форм состояла в том, что они служили абсолютно неизменными объектами познания и благодаря этому обеспечивали возможность подлинного знания» [13, стр. 411].

«...между внешне различными и даже противоположными проблемами, которые беспокоили Платона и Аристотеля, имеется тесная связь. С одной стороны, они уделяют большое внимание той идее, что "познание есть восприятие"... С другой стороны, их привлекала та идея, что мы можем иметь знание лишь о том, что никогда не изменяется» [13, с. 411].

Эти сложности подтверждает и А.М. Анисов [2, с. 129].

«Как только знание стало объектом философской рефлексии, возобладала позиция, согласно которой знание об изменяющихся вещах невозможно. Это хорошо известный факт. Как-то меньше внимания обращается на то, что отсюда следует вывод о неизменности знания. Меняются мнения, а не знания, соответствующие неподвижному бытию. Можно знать больше или меньше, но нельзя назвать знанием то, что требует исправления, коррекции, внесения изменений. Можно добавить к имеющемуся знанию и можно забыть то, что знал раньше, но знания остаются сами собой. Вспомнив забытое, мы вспомним то же самое, а не иное».

Остановимся на этих цитатах. Из них становится совершенно ясно, почему отношение логического следования понималось Платоном и Аристотелем именно как отношение, сохраняющее истинность от посылок к заключениям. Лишь рассуждения, обладающие этим свойством, позволяли оставаться в сфере неизменного знания. Если бы вдруг в ходе рассуждения мы от истины пришли ко лжи, это означало бы, что случилось пренеприятное событие — мы вышли из сферы знания в сферу мнений, которые лишь и могут быть как истинны, так и ложны.

Отсюда сразу становится понятным смысл уже привычных нам теорем о непротиворечивости и полноте логических исчислений. Если знание возможно лишь о том, что вечно и неизменно, то принимаемые нами способы рассуждений должны гарантировать его сохранение — это теорема о непротиворечивости. В свою очередь теорема о полноте гарантирует, что принимаемые нами способы рассуждений позволяют нам извлечь потенциально все возможные следствия из постигнутой вечной и вневременной истины. Следующая цитата из известной книги А. Тарского [11, с. 185-186]:

> «Всякая дисциплина, даже если она построена совершенно правильно во всех методологических отношениях, теряет в наших глазах свою ценность, если у нас есть основания подозревать, что не все утверждения этой дисциплины истинны. С другой стороны, ценность дисциплины будет тем выше, чем больше будет количество истинных высказываний, доказуемых в этой системе. С этой точки зрения, идеальной дисциплиной может считаться такая, которая среди установленных ею положений содержит все истинные высказывания, относящиеся к этой теории, и не содержит ни одного ложного. ...дедуктивная теория, конечно, не достигает нашего идеала, если она не сочетает в себе непротиворечивости и полноты».

Парадоксальная ситуация. Мы живем в мире, пронизанном временем и наполненным изменяющимися явлениями, но почему-то пользуемся логикой, которая позволяет рассуждать лишь о неизменном, вневременном. Могут возразить, что классическая логика с успехом применяется и для рассуждений об изменчивом мире, и привести ряд убедительных примеров. Никто с этим не спорит. Речь идет о другом — об адекватности используемого логического аппарата.

Классическая логика в том виде, какой мы ее сейчас знаем, является необходимым условием принятия платоновско-аристотелевского взгляда на цели познания. Отсюда вовсе не следует, что она будет столь же идеальным инструментом в случае принятия какой-либо другой точки зрения на цели человеческого познания.

Долгое время математика понималась как наука о вечных неизменяемых истинах. Не будет большого преувеличения, если сказать, что такая точка зрения и ныне разделяется большинством математиков. В то же время в естественных науках такого постоянства не наблюдалось с самого начала. В физике, в химии, в других науках, изучающих изменчивый мир, одна теория сменяла другую. При этом логика, как ни странно, оставалась прежней. Имела место своеобразная эклектика методов, покоящихся на разных философских основаниях, которая сохранилась и до настоящего времени. Нельзя быть одновременно платоником и эмпириком.

С серьезной критикой логики и форм современной ему науки выступил Фрэнсис Бэкон. В «Новом органоне» [4] он пишет:

«Как науки, которые теперь имеются, бесполезны для новых открытий, так и логика, которая теперь имеется, бесполезна для открытия знаний».

«Логика, которой теперь пользуются, скорее, служит укреплению и сохранению заблуждений, имеющих свое основание в общепринятых понятиях, чем отысканию истины. Поэтому она более вредна, чем полезна».

«Силлогизм не приложим к принципам знаний, он бесплодно прилагаем к средним аксиомам, так как далеко не соответствует тонкости природы. Поэтому он подчиняет себе мнения, а не предметы»(с. 13).

Не испытывал Ф. Бэкон почтения и к Аристотелю, полагая, что его авторитет нанес большой вред развитию философии и науки.

«Люди полагают, что философия Аристотеля, во всяком случае, принесла большее единогласие, ибо, после того как она появилась, более древние философии прекратили свой рост и были преданы забвению, а в те времена, которые за нею последовали, не было открыто ничего лучшего; так что эта философия столь хорошо построена и обоснована, что покорила себе и прошедшее и будущее время. Но, во-первых, ложно то, что люди думают о прекращении древних философий после выхода трудов Аристотеля. Еще долго после того, до самых времен Цицерона и до последовавших за ними веков, существовали труды древних философов. Но позднее, когда по причине нашествия варваров на Римскую империю человеческая наука потерпела как бы кораблекрушение, тогда-то философии Аристотеля и Платона были сохранены потоком времени, как доски из более легкого и менее твердого материала. Обманулись люди и относительно единогласия, если рассмотреть дело внимательнее. Ибо истинное единогласие состоит в совпадении свободных суждений после того, как вопрос исследован. Но величайшее большинство тех, кто пришел к согласию с философией Аристотеля, подчинилось ей по причине составленного заранее решения и авторитета других. Это, скорее, послушание и подчинение, чем согласие. Но если бы даже это было истинное и широкое согласие, то согласие не только не должно считаться надежным авторитетом, а, наоборот, служит сильным доводом в пользу противного мнения. Общее согласие — самое дурное предзнаменование в делах разума, исключая дела божественные и политические, где есть право подачи голоса. Ибо большинству нравится только то, что поражает воображение и охватывает ум сплетением обычных понятий, как сказано выше» (с. 40).

«Существуют, наконец, идолы, которые вселились в души людей из разных догматов философии, а также из превратных законов доказательств. Их мы называем идолами театра, ибо мы считаем, что, сколько есть принятых или изобретенных философских систем, столько поставлено и сыграно комедий, представляющих вымышленные и искусственные миры. Мы говорим это не только о философских системах, которые существуют сейчас или существовали некогда, так как сказки такого рода могли бы быть сложены и составлены во множестве; ведь вообще у весьма различных ошибок бывают почти одни и те же причины. При этом мы разумеем здесь не только общие философские учения, но и многочисленные начала и аксиомы наук, которые получили силу вследствие предания, веры и беззаботности» (с. 19).

Один из действительно сильных ударов по наследию Платона и Аристотеля был нанесен появлением геометрии Лобачевского. Оказалось, что математические истины, служившие идеалом человеческого знания, вовсе не являются незыблемыми. Следующим потрясением был кризис в математике, когда в ее основаниях вдруг обнаружили противоречия. Окончательный крест на вечных истинах был поставлен теоремами Геделя и Тарского, из которых следует, что даже если бы мир идей, мир вечных форм существовал, то мы принципиально не могли бы его постичь. В дополнение к этому существует порог сложности, переступив который, мы уже никогда не можем быть уверены в том, что наше знание непротиворечиво, а потому и стремление к идеалу, в конце концов, упирается в принципиально непробиваемую стену.

Несмотря на все это, огромные усилия математиков были направлены на поддержание пошатнувшейся логической доктрины. Их труды не пропали даром. Была развита теория множеств — аналог той самой первой истины, к которой можно свести все остальное. Правда, оказалось, что одной-единственной теории множеств не существует, а имеется ряд альтернатив, и определить, какая из них *истиннее*, невозможно. К тому же нет никакой уверенности, что сами эти теории непротиворечивы. Одновременно с этим оказалось, что многие вроде бы хорошо известные теории имеют нестандартные модели. На фоне всех этих открытий скомпрометировавшую себя классическую логику, философскими основаниями которой являются платоновско-аристотелевские взгляды на цели познания, продолжают и далее использовать в изменчивом мире. С практической точки зрения это вполне объяснимо. Одним из условий существования науки является преемственность. Чем больше накоплено научных результатов, тем труднее от них отказаться. И тем не менее определенную брешь во всем этом пробило появление и бурное развитие теории вычислимости. В ней основной задачей является не построение идеальных конструкций, с помощью которых можно все описать и объяснить, а нахождение конкретных алгоритмов, позволяющих вычислять те или иные функции.

В настоящей работе мы не собираемся отвергать классическое определение условий истинности предложений, но хотим пересмотреть определение логического следования, которое является фундаментом логики, семантическим обоснованием способов рассуждений, принимаемых в качестве правильных и единственно допустимых. В логике философия присутствует главным образом не в синтаксисе, а в семантике. Если классическое понимание истинности предложений представляется достаточно естественным, то отсюда еще не следует, что принятое определение следования так же естественно.

Попробуем ответить на вопрос, какие способы умозаключений следует считать правильными, приемлемыми, полезными? *В классической логике истинность посылок является достаточным условием истинности заключения.* Но это слишком сильное и ограничительное требование. Более слабым могло бы быть требование, чтобы *правильные способы умозаключений просто не приводили нас к ошибочным выводам, к заблуждениям.* Но для этого достаточно, чтобы, придя к некоторому заключению, мы были в состоянии определить его истинностное значение. Иными словами, *форма умозаключения является правильной, если знание истинностных значений посылок является достаточным условием знания истинностного значения заключения.* Отличие от классического понимания минимально — слово *истинность* мы заменяем на *истинностное значение.* Совершенно не важно, будет ли это истинностное значение *истиной* или *ложью.* Главное то, что если это значение — *истина*, то мы должны знать, что оно — *истина*, а если — *ложь*, то мы должны знать, что оно — *ложь.*

Это приводит нас к следующему определению логического следования: «Из множества формул $\Sigma = \{B_1, \ldots, B_k\}$ следует формула A, если и только если существует функция f, которая позволяет по истинностным значениям формул множества Σ вычислить истинностное значение формулы A».

$$\{B_1, \ldots, B_k\} \models A \Longleftrightarrow \exists f \forall v (v(A) = f(v(B_1), \ldots, v(B_k))),$$

где v — это приписывание истинностных значений формулам языка.

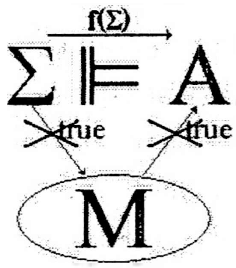


Рис. 2. Альтернативное следование

Обращает на себя внимание естественность этого определения. К нему в гораздо большей степени подходит термин *следование*, чем к определению, данному Тарским. В нем действительно идет речь о связи между формулами, и посредничество модели оказывается излишним. Если попытаться провести аналогию с воззрениями Платона и Аристотеля на природу знания, то мы определили следование для *изменяющегося мира явлений*, а не для вечных существующих вне времени истин.

Интересной особенностью данного определения является то, что в метаязыке мы используем не логические понятия, а понятие вычислимости как более основополагающее. То есть *порочный круг* первоначального классического определения разорван.

Хоть это и не было нашей целью, но из определения непосредственно видно, что следование «$2 + 2 = 5$»$\models$ «*Луна сделана из зеленого сыра*» не имеет места.

Логика для так определенного отношения следования построена в другой нашей статье [4].

Литература

[1] *Анисов А.М.* Современная логика. М., 2002.
[2] *Анисов А.М.* Темпоральный универсум и его познание. М., 2000.
[3] *Аристотель.* Метафизика // Аристотель. Сочинения: В 4 т. Т. 1. М, 1975.
[4] *Бэкон Ф.* Новый органон // Бэкон Ф. Сочинения: В 2 т. Т. 2. М., 1978.
[5] *Карпенко А.С.* Современные исследования в философской логике // Логические исследования. Вып.10. М.: Наука, 2003.
[6] *Карпенко А.С.* Предмет логики в свете основных тенденций ее развития // Логические исследования. Вып.11. М.: Наука, 2004.
[7] *Марков А.А.* Элементы математической логики// Под ред. А.Г.Драгалина. М.: Изд-во Моск. ун-та, 1984.
[8] *Платон.* Кратил // Платон. Сочинения: В 3 т. Т. 1. М., 1968.

[9] *Рассел Б.* История западной философии. В 3 кн. 3-е изд., испр./ Подгот. текста В.В. Целищева. Новосибирск: Сиб. унив. изд-во; Изд-во Новосиб. ун-та, 2001.
[10] *Стяжкин Н.И.* Формирование математической логики. М.: Наука, 1967.
[11] *Тарский А.* Введение в логику и методологию дедуктивных наук. Биробиджан: ИП «ТРИВИУМ», 2000.
[12] *Хинтикка Я.* Познание и его объекты у Платона // Логико-эпистемологические исследования. М., 1980.
[13] *Хинтикка Я.* Время, истина и познание у Аристотеля и других греческих философов // Логико-эпистемологические исследования. М., 1980.
[14] *Шалак В.И.* Логика альтернативного отношения следования // Логические исследования. Вып.13. М.: Наука, 2007.
[15] *Tarski A.* On the Concept of Logical Consequence // A.Tarski. Logic, Semantics, Metamathematics. Second edition. Indianapolis: Hacket, 1983. P. 409-420.

Логика альтернативного отношения следования[1]

В.И. Шалак

ABSTRACT. In the present paper we present the logic corresponding to our alternative definition of logical consequence. We prove soundness and completeness theorems for this logic.

В настоящей статье будет построена логика **ACL**, являющаяся аксиоматизацией альтернативного отношения логического следования, определенного в [4].

1 Логика ACL

Фиксируем язык:

1. Var — множество пропозициональных переменных;

2. $\wedge, \vee, \neg$ — логические связки.

Определение формулы — обычное.

Пусть $Val = \{0,1\}^{Var}$ — множество приписываний истинностных значений пропозициональным переменным нашего языка. Обычным образом мы распространяем функции приписывания истинностных значений на все формулы языка:

1. $v(\neg A) = 1 - v(A)$;

2. $v(A \wedge B) = \min(v(A), v(B))$;

3. $v(A \vee B) = \max(v(A), v(B))$.

[1]Работа поддержана РГНФ. Грант № 04-03-02660.

По определению вводим связки:

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 1. $A \supset B = \neg A \vee B$

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 2. $A \equiv B = (A \supset B) \& (B \supset A)$

Теперь мы хотим определить на семантическом уровне отношение *следования* $\Gamma \models A$.

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 3. Из множества формул $\Gamma = \{B_1, \dots, B_k\}$ следует формула A ($\Gamma \models A$), если и только если существует булева функция $f : \{0,1\}^k \longrightarrow \{0,1\}$, которая позволяет для произвольного приписывания $v \in Val$ на основании оценок $v(B_1), \dots, v(B_k)$ вычислить оценку $v(A)$, то есть $v(A) = f(v(B_1), \dots, v(B_k))$.

$$\{B_1, \dots, B_k\} \models A \Longleftrightarrow \exists f \forall v (v(A) = f(v(B_1), \dots, v(B_k)))$$

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 4. Выводимостью будем называть выражение вида $\Gamma \Vdash A$, где A — формула, а $\Gamma = \{B_1, \dots, B_k)$ — конечное множество формул логики высказываний. Будем называть множество формул Γ посылками выводимости, а формулу A — заключением.

Аксиоматизацию отношения следования представим в виде набора выводимостей и правил перехода от одних выводимостей к другим. Формулы, доказуемые в классической логике высказываний, будем обозначать посредством $\vdash A$.

A.1 $A \vee \neg A$

A.2 $A, B \Vdash A \wedge B$

A.3 $A \Vdash \neg A$

R.1 $\vdash A \equiv B \Longrightarrow A \Vdash B$

R.2 $\Gamma \Vdash A$ и $A, \Delta \Vdash B \Longrightarrow \Gamma, \Delta \Vdash B$

Заметим, что в правиле R.1 мы используем ссылку на доказуемую в классической логике эквивалентность. Эта ссылка позволила нам дать компактную аксиоматизацию, но не является обязательной. С равным успехом мы могли бы оставить одно лишь правило R.2, а R.1 заменить на несколько аксиом, соответствующих аксиомам булевой алгебры, по правилу: если $A = B$ — аксиома булевой алгебры, то к набору наших аксиом-выводимостей мы добавляем две новые — $A \Vdash B$ и $B \Vdash A$.

Дадим определение доказательства в нашем исчислении.

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 5. Доказательством называется непустая конечная последовательность, каждый из элементов которой является либо доказуемой формулой классического исчисления высказываний вида $A \equiv B$, либо аксиомой-выводимостью А.1–А.3, либо выводимостью, полученной из предыдущих элементов последовательности по правилам R.1–R.2. Доказанной считается выводимость, являющаяся конечным элементом последовательности.

Покажем непротиворечивость построенного исчисления. Для этого нам надо показать, что всякая доказуемая выводимость обладает свойством следования.

ТЕОРЕМА 6. ***Логика*** $\boldsymbol{ACL}$ ***непротиворечива***. *Если* $\Gamma \Vdash A$, *то* $\Gamma \models A$.

Доказательство. Для начала проверим аксиомы А.1–А.3.

А.1 $v(A \vee \neg A) = \max(v(A), v(\neg A)) = \max(v(A), 1 - v(A)) = 1$.

А.2 $v(A\&B) = \min(v(A), v(B))$.

А.3 $v(\neg A) = 1 - v(A)$.

Теперь проверим, что правила R.1–R.2 сохраняют свойство следования.

Если $\Gamma = \{B_1, \ldots, B_k\}$, то $v(\Gamma)$ будет служить сокращением для $< v(B_1), \ldots, v(B_k) >$

R.1

+1. $\vdash A \equiv B$

2. $v(B) = v(A)$ - из 1 по определению v

R.2

+1. $v(A) = f(v(\Gamma))$

+2. $v(B) = g(v(A), v(\Delta))$

3. $v(B) = g(f(v(\Gamma)), v(\Delta))$ - из 1, 2 подстановкой

Покажем, что построенное нами исчисление нетривиально, то есть существуют выводимости, которые в нем недоказуемы. Для этого достаточно привести пример выводимости, не обладающей свойством следования. Самый простой пример такой выводимости — это $\varnothing \Vdash p$. Так как множество $\varnothing$ пусто, то значение $v(p)$

должно быть константным во всех моделях, что очевидным образом не имеет места. Q.E.D.

Доказанная выше теорема хоть и названа нами теоремой о непротиворечивости, но это скорее дань традиции, так как ни о какой непротиворечивости в объектном языке речь не идет. Мы всего лишь показали, что аксиомы обладают свойством вычислимости истинностного значения заключения на основании истинностных значений посылок, и правила вывода сохраняют это свойство.

Доказательство теоремы о непротиворечивости интересно тем, что оно более глубоко раскрывает суть предложенной семантики. Каждой из аксиом A.1–A.3 мы сопоставили свою функцию (свой алгоритм) вычисления истинностного значения заключения на основании истинностных значений посылок. Аксиоме A.1 мы сопоставили константную функцию, которая может принимать лишь значение 1. Аксиоме A.2 мы сопоставили стандартную функцию, которая вычисляет истинностное значение формулы конъюнктивного вида на основании истинностных значений конъюнктов — $\min(x, y)$. Аксиоме A.3 мы сопоставили функцию, вычисляющую значение формулы, главный знак которой отрицание — $1-x$. Правилу R.1 мы сопоставили тождественную функцию $id(x) = x$, а правило R.2 — это правило суперпозиции функций, позволяющее строить из простых функций более сложные, или, если говорить об алгоритмах, это правило их сочленения. Семантическим коррелятом любой доказуемой выводимости всегда будет некоторая суперпозиция исходных функций. Ни о какой истинности аксиом речь не идет и вообще идти не может. Функции и алгоритму нельзя сопоставить никакого истинностного значения. Каждый алгоритм правилен по определению, так как он позволяет вычислять именно то, что он вычисляет. Истинными или ложными могут быть лишь утверждения о свойствах алгоритмов. Например, действительно ли они позволяют вычислять то, к чему их хотят применить, но это уже совершенно другой вопрос.

Теорема о непротиворечивости имеет очевидное, но очень важное следствие.

СЛЕДСТВИЕ 7. *По всякому доказательству* $\Gamma \Vdash A$ *в логике* ACL *мы можем синтезировать функцию, которая вычисляет истинностную оценку формулы* A *на основании истинностных оценок формул, входящих в* Γ.

Смысл этого следствия в том, что каким бы сложным ни было рассуждение, построенное в рамках этой логики, *знание истинностных значений посылок является достаточным условием знания истинностного значения заключения*, к которому это рассуждение привело.

ЛЕММА 8. *Следующие выводимости доказуемы в логике* $\boldsymbol{ACL}$.

Доказательство.

T.1 $A \Vdash A$

T.2 $\vdash A \Longrightarrow \Vdash A$

T.3 $\vdash A \Longrightarrow (\Gamma, A \Vdash B \Longrightarrow \Gamma \Vdash B)$

T.4 $\vdash \neg A \Longrightarrow (\Gamma, A \Vdash B \Longrightarrow \Gamma \Vdash B)$

T.5 $\vdash A \equiv B \Longrightarrow (\Gamma \Vdash A \Longrightarrow \Gamma \Vdash B)$

T.6 $\vdash A \equiv B \Longrightarrow (\Gamma, B \Vdash C \Longrightarrow \Gamma, A \Vdash C)$

T.7 $\Gamma, A \Vdash B \Longleftrightarrow \Gamma, \neg A \Vdash B$

T.8 $\Gamma \Vdash A \Longleftrightarrow \Gamma \Vdash \neg A$

T.9 $A, B \Vdash A \vee B$

T.10 $\Gamma \Vdash A \Longrightarrow \Gamma, B \Vdash A$

T.1 $A \Vdash A$

1. $\vdash A \equiv A$	- КИВ
2. $A \Vdash A$	- из 1 по R.1

T.2 $\vdash A \Longrightarrow \Vdash A$

+1. $\vdash A$	
2. $\vdash (A \vee \neg A) \equiv A$	- из 1 по КИВ
3. $A \vee \neg A \Vdash A$	- из 2 по R.1
4. $\Vdash A$	- из 3, A.1 по R.2

$T.3 \vdash A \Longrightarrow (\Gamma, A \Vdash B \Longrightarrow \Gamma \Vdash B)$

$+1. \vdash A$

$+2. \Gamma, A \Vdash B$

$3. \Vdash A$ - из 1 по T.2

$4. \Gamma \Vdash B$ - из 2, 3 по R.2

$T.4 \vdash \neg A \Longrightarrow (\Gamma, A \Vdash B \Longrightarrow \Gamma \Vdash B)$

$+1. \vdash \neg A$

$+2. \Gamma, A \Vdash B$

$3. \Vdash \neg A$ - из 1 по T.2

$4. \Vdash \neg\neg A$ - из 3, A.3 по R.2

$5. \vdash \neg\neg A \equiv A$ - КИВ

$6. \neg\neg A \Vdash A$ - из 5 по R.1

$7. \Vdash A$ - из 4, 6 по R.2

$8. \Gamma \Vdash B$ - из 2, 7 по R.2

$T.5 \vdash A \equiv B \Longrightarrow (\Gamma \Vdash A \Longrightarrow \Gamma \Vdash B)$

$+1. \vdash A \equiv B$

$+2. \Gamma \Vdash A$

$3. A \Vdash B$ - из 1 по R.1

$4. \Gamma \Vdash B$ - из 2, 3 по R.2

$T.6 \vdash A \equiv B \Longrightarrow (\Gamma, B \Vdash C \Longrightarrow \Gamma, A \Vdash C)$

$+1. \vdash A \equiv B$

$+2. \Gamma, B \Vdash C$

$3. A \Vdash B$ - из 1 по R.1

$4. \Gamma, A \Vdash C$ - из 3, 2 по R.2

T.7 $\Gamma, A \Vdash B \Longleftrightarrow \Gamma, \neg A \Vdash B$

+1. $\Gamma, A \Vdash B$

2. $\neg A \Vdash \neg\neg A$ - A.3

3. $\vdash \neg A \equiv \neg\neg A$ - КИВ

4. $\neg A \Vdash A$ - из 2, 3 по T.5

5. $\Gamma, \neg A \Vdash B$ - из 4, 1 по R.2

+1. $\Gamma, \neg A \Vdash B$

2. $A \Vdash \neg A$ - A.3

3. $\Gamma, A \Vdash B$ - из 2, 1 по R.2

T.8 $\Gamma \Vdash A \Longleftrightarrow \Gamma \Vdash \neg A$

+1. $\Gamma \Vdash A$

2. $A \Vdash \neg A$ - A.3

3. $\Gamma \Vdash \neg A$ - из 1, 2 по R.2

+1. $\Gamma \Vdash \neg A$

2. $\neg A \Vdash \neg\neg A$ - A.3

3. $\vdash A \equiv \neg\neg A$ - КИВ

4. $\neg A \Vdash A$ - из 2, 3 по T.5

5. $\Gamma \Vdash A$ - из 1, 4 по R.2

T.9 $A, B \Vdash A \vee B$

1. $\neg A, \neg B \Vdash \neg A \wedge \neg B$ - A.2

2. $\neg A, \neg B \Vdash \neg(\neg A \wedge \neg B)$ - из 1 по T.8

3. $\vdash \neg(\neg A \wedge \neg B) \equiv A \vee B$ - КИВ

4. $\neg A, \neg B \Vdash A \vee B$ - из 3 по T.5

5. $A, B \Vdash A \vee B$ - из 4 по T.7

T.10 $\Gamma \Vdash A \Longrightarrow \Gamma, B \Vdash A$

+1. $\Gamma \Vdash A$	
2. $A, B \vee \neg B \Vdash A\&(B \vee \neg B)$	- A.2
3. $\vdash A\&(B \vee \neg B) \equiv A$	-КИВ
4. $A, B \vee \neg B \Vdash A$	- из 2, 3 по T.5
5. $B, \neg B \Vdash B \vee \neg B$	- T.9
6. $B \Vdash B \vee \neg B$	- из 5 по T.7
7. $A, B \Vdash A$	- из 4, 6 по R.2
8. $\Gamma, B \Vdash A$	- из 1, 7 по R.2

Лемма доказана. Q.E.D.

Следующая теорема дает ответ на вопрос о том, достаточны ли принятые нами способы умозаключений для представления всех возможных выводов, которые согласуются с новым понятием следования?

ТЕОРЕМА 9. ***Логика ACL полна.*** *Если* $\Gamma \models A$, *то* $\Gamma \Vdash A$.

Доказательство. Пусть $\Gamma = \{B_1, \ldots, B_k\}$, и существует такая булева функция f, что для произвольного приписывания истинностных значений v имеет место $v(A) = f(v(B_1), \ldots, v(B_k))$. Это означает, что существует состоящая из формул $B_1, \ldots, B_k$ булева комбинация A', которая эквивалентна A.

Доказательство будем проводить индукцией по степени формулы A', рассматривая формулы $B_1, \ldots, B_k$ как атомарные.

Возможны четыре случая:

[1] $A' = B_i$	$f(v(\Gamma)) = v(B_i)$
1. $B_i \Vdash B_i$	- T.1
2. $B_1, \ldots, B_k \Vdash B_i$	- из 1 по T.10

[2] $A' = \neg B$	$f(v(\Gamma)) = 1 - g(v(\Gamma))$
+1. $\Gamma \Vdash B$	- инд. доп
2. $\Gamma \Vdash \neg B$	- из 1 по T.8

[3] $A' = B\&C$	$f(v(\Gamma)) = \min(g(v(\Gamma)), h(v(\Gamma)))$
+1. $\Gamma \Vdash$ B	- инд. доп.
+2. $\Gamma \Vdash$ C	- инд. доп.
3. $B, C \Vdash B\&C$	- A.2
4. $\Gamma \Vdash B\&C$	- из 1, 2, 3 по R.2

[4] $A' = B \vee C$	$f(v(\Gamma)) = \max(g(v(\Gamma)), h(v(\Gamma)))$
+1. $\Gamma \Vdash B$	- инд. доп.
+2. $\Gamma \Vdash C$	- инд. доп.
3. $B, C \Vdash B \vee C$	- T.9
4. $\Gamma \Vdash B \vee C$	- из 1, 2, 3 по R.2

Теорема доказана. Q.E.D.

Возможна натуральная **ACN** формулировка логики.
Правила вывода:
N.1 $\Longrightarrow A \vee \neg A$
N.2 $A \Longrightarrow \neg A$
N.3 $A, B \Longrightarrow A\&B$
N.4 $(\vdash A \equiv B$ и $A) \Longrightarrow B$

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 10. Выводом из множества формул Γ формулы A в логике **ACN** называется непустая конечная последовательность формул $< A_1, A_2, \ldots, A_k >$, каждая из которых либо принадлежит множеству Γ, либо получена из предыдущих формул последовательности по одному из правил вывода N.1–N.3, либо классически эквивалентна одной из предыдущих формул последовательности N.4, и конечным элементом последовательности является формула A $(A_k = A)$.

Доказательство эквивалентности двух формулировок не представляет никакой трудности. Легко показать, что выводимость $\Gamma \Vdash A$ доказуема в **ACL**, е. т. е. существует натуральный вывод формулы A из множества формул Γ в логике **ACN**.

Мы специально не называем множество формул Γ множеством гипотез, так как понятие гипотезы несет ненужную смысловую нагрузку, предполагая, по крайней мере, веру в ее истинность. Для нас же истинностные значения формул множества Г не важны.

2 Теории на основе логики ACL

Ценность классической логики заключается не столько в ней самой, сколько в том, что на ее основе мы можем строить теории, принимая в качестве дополнительных аксиом формулы, не являющиеся логически общезначимыми. Возможны ли аналогичные построения на основе логики **ACL**? Да, возможны. Для построения теорий на базе логики **ACL** мы добавляем к логическим аксиомам-выводимостям дополнительные постулаты-выводимости, а на уровне семантики каждому такому постулату сопоставляем свою булеву функцию, позволяющую вычислить истинностное значение заключения на основе истинностных значений посылок.

$$
\begin{array}{ll}
\Sigma_1 \Vdash A_1 & -\forall v(v(A_1) = f_1(v(\Sigma_1)) \\
\Sigma_2 \Vdash A_2 & -\forall v(v(A_2) = f_2(v(\Sigma_2)) \\
\dots & \\
\Sigma_n \Vdash A_n & -\forall v(v(A_n) = f_n(v(\Sigma_n))
\end{array}
$$

Если сравнить это построение с построением теорий в классической логике, то можно провести следующее различие. В классической логике, добавляя новые аксиомы, мы ограничиваем множество моделей, в которых они истинны, и тем самым увеличиваем информативность теории. В логике **ACL** ситуация несколько иная. Каждая новая аксиома в ней содержит информацию о том, как связать булевой функцией посылки и заключение. Если теории на базе классической логики можно назвать теориями знания, то теории на базе **ACL** являются теориями умений. Каждая новая аксиома-выводимость фиксирует некоторое умение. **ACL**-теория — это некоторое множество алгоритмов, а не множество формул, которые могут быть истинными или ложными. Относительно набора внелогических постулатов-выводимостей имеет смысл лишь вопрос о том, действительно ли сопоставленные им алгоритмы решают именно те задачи, которые им атрибутируются?

Рассмотрим теорию, состоящую из следующих постулатов-выводимостей:

P.1 $p \Vdash q \quad -v(q) = id(v(p))$

P.2 $p \Vdash s \quad -v(s) = id(v(p))$

P.3 $s \Vdash q \quad -v(q) = 1 - v(s)$

Очевидно, что в ней мы можем вывести $p \Vdash q$ двумя способами. В первом случае вывод состоит из одного шага — это просто постулат P.1. Во втором случае наш вывод будет состоять из применения правила R.2 к постулатам P.2 и P.3. При этом в первом случае мы имеем $v(q) = id(v(p))$, а во втором — $v(q) = 1 - id(v(p))$. Налицо явное противоречие. Тем не менее, оно не является критическим, т.е. не разрушает всю теорию. В этой теории мы не можем вывести все что угодно, в частности, мы не выведем ни $q \Vdash s$, ни $q \Vdash p$. Противоречие остается локальным и всего лишь сигнализирует о том, что на семантическом уровне постулаты P.1–P.3 не слишком хорошо согласованы друг с другом и требуют уточнения. То есть теория остается, а требуется изменить семантику. Можно привести живой пример для иллюстрации сказанного. Когда-то каждый врач умел делать кровопускание, которое, как считалось, помогает чуть ли не при всех болезнях. Позже обнаружилось, что в некоторых случаях кровопускание может ухудшить состояние больного. В результате были уточнены те условия, при которых кровопускание приносит пользу или вред, и его применение было продолжено, но в ограниченных случаях.

Попробуем проанализировать данный пример с более общих позиций. В случае чистой логики **ACL** семантическая связь между посылками и заключением выводимости основана исключительно на булевых функциях, соответствующих логическим связкам, и потому проблем не возникает. Легко показать, что для каждой доказуемой выводимости вида $B_1, \ldots, B_k \Vdash A$ формула A эквивалентна некоторой булевой комбинации формул $B_1, \ldots, B_k$. Поэтому истинностное значение формулы A однозначно определяется исходя из значений формул $B_1, \ldots, B_k$, а если быть более точным, то исходя из истинностных значений, приписанных пропозициональным переменным, входящим в эти формулы. Если же мы переходим к построению теорий на базе логики **ACL**, то ситуация меняется, так как формула заключения постулата-выводимости, как правило, не является логически эквивалентной никакой булевой комбинации посылок. Простой пример — постулат P.1. Поэтому смысл доказуемых выводимостей в теориях меняется. На уровне семантики мы можем рассматривать лишь частичные функции приписывания истинностных значений, достаточные для того, чтобы означить все формулы посылок. Заключение же постулата-выводимости на семантическом уровне говорит нам о том, как эта частичная функция может быть расширена. В случае применения постулата P.1 нам достаточно рассмотреть лишь две частичные функции приписывания истинностных значений v_1 и v_2, которые определены лишь на переменной p и сопоставляют ей $v_1(p) = 1$ и $v_2(p) = 0$. Семантика данного постулата требует расширить эти функции до v_{1_2} и v_{2_2} и определить их на переменной q таким образом, что $v_{1_2}(q) = v_{1_2}(p) = v_1(p) = 1$ и $v_{2_2}(q) = v_{2_2}(p) = v_2(p) = 0$. В этом смысле логика умений действительно дает приращение информации от посылок к заключениям, что классической логике несвойственно.

Возможны и более сложные случаи. Рассмотрим пример со следующим постулатом:

P.4 $p \Vdash q\&s$ - $v(q\&s) = id(v(p))$

Даны две частичные функции v_1 и v_2, которые определены лишь на переменной p таким образом, что $v_1(p) = 1$ и $v_2(p) = 0$. В этом случае расширение функции v_1 до функции v_{1_2}, определенной также на переменных q и s, определено однозначно $v_{1_2}(q) = v_{1_2}(s) = v_{1_2}(p) = v_1(p) = 1$. Функция v_2 имеет три возможных расширения v_{2_2}, v_{2_3} и v_{2_4}:

1. $v_{2_2}(q) = v_{2_2}(p) = v_2(p) = 0, \quad v_{2_2}(s) = 1$
2. $v_{2_3}(s) = v_{2_3}(p) = v_2(p) = 0, \quad v_{2_3}(q) = 1$
3. $v_{2_4}(q) = v_{2_4}(s) = v_{2_4}(p) = v_2(p) = 0$

Все четыре функции v_{1_2}, v_{2_2}, v_{2_3} и v_{2_4} удовлетворяют семантическому условию для данного постулата.

Теперь становится понятным, когда постулаты теории могут вступать в противоречие друг с другом. Это случается тогда, когда не существует ни одного приписывания истинностных значений, которое одновременно удовлетворяло бы семантическим условиям всех постулатов.

Приведем примеры из реальной человеческой практики, которая может быть охарактеризована с точки зрения логики умений. Самый яркий пример — это современная медицина. Она представляет собой гигантскую по объему накопленного опыта и очень важную область деятельности, которую до сих пор невозможно описать и систематизировать с точки зрения логики. Как заметил несколько лет назад В.А. Смирнов, единственным теоретическим достижением в медицине является вакцинация с целью выработки иммунитета против различных инфекционных заболеваний. Все остальное — это просто набор рецептов или умений для различных конкретных случаев. Медицинские вузы не готовят профессиональных врачей. Полноценными врачами становятся лишь после многих лет ежедневной практики, с накоплением опыта в своей конкретной области. При этом опыт одного врача может вступать в явное противоречие с опытом другого врача, хотя в то же время оба могут похвастать хорошими результатами в диагностике и лечении заболеваний. С этим фактом уже столкнулись разработчики медицинских экспертных систем. Они знают, что для получения хорошей базы знаний лучше прибегнуть к опыту одного среднего специалиста, чем работать и консультироваться с несколькими высококлассными. Зачастую врачи даже не могут четко объяснить, почему в том или ином конкретном случае они принимают определенное решение. Они просто принимают решение — и все. Их частный опыт свидетельствует, что в этой ситуации данное решение наиболее оптимально. Полезно сравнить европейскую медицину с восточной. Там есть теория и есть однозначные правила объяснения, почему в тех или иных случаях необходимо поступать так, а не иначе. Европейская медицина очень неохотно пользуется опытом восточной из-за очень спекулятивных и неясных предпосылок, которые лежат в ее основе. Но факт остается фактом — практически вся европейская медицина — это набор умений, но не знаний, как мы их привыкли понимать.

В связи с этим уместно опять обратиться к книге А.М. Анисова [1], где он пишет о так называемой рецептурой математике.

«...математические знания на Древнем Востоке добывали и обосновывали без строгих рассуждений, т.е. без доказательств! Вместо доказательств учащиеся должны были усваивать разнообразные инструкции по решению математических задач. Это были своего рода рецепты получения ответов, поэтому такую математику и называют рецептурной»(с. 13).

Создается впечатление, что автор преклоняется перед красотой доказательной математики и забывает о том, что равное право на существование имеет вычислительная математика. Возможно, если бы влияние эллинизма не было исторически столь сильным и подавляющим, на Востоке развилась бы именно вычислительная математика, тем более что к этому уже были практические предпосылки. Читаем дальше:

«...числа древними представлялись наглядно, например, как ряды камешков или наборы геометрических точек. Результат сложения чисел n и m мог быть получен путем подсчета соответствующего числа камешков или точек»(с. 13).

Заметим, что если числа представлялись камешками или точками, то это уже была некоторая абстракция числа. То есть конкретный материальный носитель не был важен, он всего лишь служил для наглядного представления числа. Результат, полученный с помощью камешков, затем переносился на яблоки, рабов, мешки с мукой и пр. Как тут не вспомнить машину Тьюринга, в которой числа представляются посредством черточек на бумаге, и *результат сложения чисел n и m получается путем подсчета соответствующего числа черточек.* Не нужно было мешать их операциям с камешками. Для них это было естественно. Вот как описываются в книге [2] правила вычисления на абаке — древнем вычислительном устройстве, появившемся у греков в IV веке до нашей эры, то есть именно во времена походов Александра Македонского.

«...будем представлять себе “обычные” компьютеры устроенными примитивно, на уровне каменного века. Его регистры мы представляем себе как емкие нумерованные ящики, способные вместить произвольное число камешков — ни одного, один, два и т.д., так что [n] есть число камешков в ящике с номером n. В роли “машины” действует человек, способный к выполнению двух видов операций:

- добавить один камешек к их груде, лежащей в ящике с номером n, и

- забрать один камешек из груды, лежащей в ящике с номером n, если там вообще есть хоть что-нибудь»(с. 82).

Далее в [2] показывается, что с помощью такого «примитивного» устройства вычислимы все (!) рекурсивные функции. Народам Древнего Востока нужно было и дальше упражняться в счете на абаке, но на их беду пришли эллины со своими взглядами на то, что достойно внимания «истинного» ученого, а что — нет, и занятие счетом было прервано. Ученые рассуждали о вечных идеях, а счет был отдан людям более низкого звания — купцам и торговцам. Греки, находясь под гипнозом идей своих великих философов, оказались просто неспособны увидеть в абаке большее, нежели простое перекладывание камешков для вычисления $n + m$. Понадобилось пройти тысячелетиям, чтобы искусство счета вновь стало предметом научного анализа, возникла теория вычислимых функций и появились компьютеры.

Следующее утверждение А.М. Анисова [1] весьма неоднозначно:

> «Одним из отличительных признаков научного знания является доказательность. Отсюда получается, что рецептурное знание, в частности, рецептурная математика Древнего Востока, науки не образует и наукой не является. Математика стала наукой лишь тогда, когда древние греки открыли идею математического доказательства»(с. 15).

Если в качестве одного из обязательных признаков научного знания принять его доказательность в том же смысле, как понимал его Аристотель, и понимают его последователи вплоть до сегодняшнего дня, то вполне естественно, что математика Древнего Востока наукой не является. Но выше мы уже показали, что классическое определение отношения следования базируется на вполне определенных и давно устаревших философских предпосылках, имеет много недостатков и никоим образом не может претендовать на роль Богом данного и единственно правильного. В основе рецептурной математики лежит логика, аналогичная построенной нами логике **ACL**, отношение следования в которой имеет вычислительную природу. Путем построения выводов в такой логике легко синтезировать правила сложных вычислений на основе набора более простых. Вряд ли можно оспаривать тезис о том, что наука должна быть доказательной, но не следует сводить при этом понятие доказательства к тому специальному виду, как его понимали древние греки. Возможно, в данном случае более уместно было бы говорить не о доказательствах, а о дедукции, как более общем понятии.

В связи с этим в заключение мы хотели бы обратиться к работе В.А. Смирнова [3], в которой он рассматривает генетический метод построения научной теории. Дело в том, что развиваемый нами подход, если говорить о его идейной стороне, далеко не нов. К этому же в разное время, каждый по-своему, обращались и многие другие исследователи. В.А. Смирнова интересуют общие принципы построения таких теорий, суть которых он видит в следующем.

> «При генетическом подходе отправляются как от исходного от некоторых налично данных объектов и некоторой системы допустимых действий над объектами. В генетической теории процесс рассуждения представлен в "форме мысленного эксперимента о предметах, которые взяты как конкретно наличные"»(с. 423).

Он задается вопросом «Существует ли вообще аксиоматическое исчисление, полностью формализующее генетическую систему мышления»? Возможным ответом является логическое представление теории рекурсивных функций.

> «Но такой путь уточнения генетического метода построения научных теорий приводит нас к необходимости расширить область логического и сделать предметом изучения логики такие элементы, как действия, аналогично тому, как это имело место с отношениями, и такие формы мысли, как предписания и системы предписаний (алгоритмы). В этой связи ясно, что системы общерекурсивных функций (или эквивалентные им уточнения, как нормальные алгорифмы Маркова, машины Тьюринга и т.д.) являются логическми формализмами, т.е. формализмами, представляющими логический процесс в широком смысле. В таком случае под логическим мы понимаем не только доказательство (обоснование одних высказываний посредством других), но и процесс сведения одних "стратагем действия" к другим»(с. 430).

В.А. Смирнов делает интересное наблюдение.

> «Если мы обратимся к истории, то увидим, что так же как и аксиоматический, генетический метод имеет далекую родословную. В частности, мы считаем, что метод "Начал" Евклида и дедуктивный метод Декарта ближе к генетической форме дедуктивного метода, чем к аксиоматической.
>
> Обращаясь к античному миру, — а в нем умозрительный, дедуктивный метод был господствующим, — мы обнаруживаем не одну, а три концепции дедуктивного метода, три теории доказательств: платоновскую, аристотелевскую

и евклидову. Первые две можно рассматривать как прототипы современного аксиоматического метода. Но концепция, проводимая в "Началах" Евклида, скорее является прототипом генетического метода, чем аксиоматического, хотя впоследствии "Начала" Евклида толковались в духе аксиоматического метода. Тот факт, что "Начала" Евклида не являются прототипом осуществления аксиоматического метода, осознается рядом логиков и математиков.

...Для Евклида изучаемые геометрические объекты не имеют идеального существования. Он не предписывал геометрическим объектам идеального существования, как это делал Платон.

Евклид исходит из элементарных объектов (точки, отрезки) и определенных операций, посредством которых образуются из первичных элементов объекты теории. Постулаты и выражают возможность осуществления определенных операций»(с. 431).

В конце статьи В.А. Смирнов перечисляет ряд выводов, к которым он пришел. Мы процитируем три из них.

«2. В основе генетической системы мышления лежат рекурсивные (алгоритмически развертывающиеся) процессы. Процессы умозаключения мы рассматриваем как один из видов логических процессов, причем сами умозаключения обосновываются алгоритмическими процессами над объектами теории.

6. В настоящее время актуальны разработка генетического метода с общелогических позиций, а также анализ возможностей его применения вне проблем обоснований математики. Актуальность этих проблем диктуется во многом развитием вычислительной техники и ее применениями.

7. Наконец, анализ генетического метода приводит вплотную к задачам создания конструктивной семантики и рассмотрения теории алгоритмов как части логики»(с. 435-436).

Мы не уверены, что В.А. Смирнов согласился бы с нами во всем, и потому не будем утверждать, что развиваем его идеи. Мы сами не во всем с ним согласны, и это нормально. Наши возможные ошибки и заблуждения — это именно наши возможные ошибки и заблуждения. В то же время, очевидно, что проблематика, которую затронул в своей статье В.А. Смирнов, теснейшим образом связана с тем, что интересует и нас. До сих пор логика развивалась в основном как дескриптивная в своей основе, лишь относительно недавно с возникновением интуиционизма и конструктивного направления в математике был совершен отход от этого. Тем не менее, предлагаемые ими решения, на наш взгляд, половинчаты, так как они всего лишь пытаются использовать результаты теории вычислимости, а не включают ее в себя. Генетический же подход и подход логики умений, как мы ее назвали, непосредственно включают в себя теорию вычислимости.

Все сказанное выше о логике **ACL** не предполагает, что ее построение завершено и на этом можно остановиться. Наоборот, естественным образом возникает целый ряд задач, решение которых может привести к новым интересным результатам. Перечислим часть этих задач.

- Провести анализ принципов построения теорий на базе **ACL**. В частности, имеет смысл подумать над обобщением определения понятия следования для теорий.

- Построить теорию дедукции.

- Построить обобщение логики **ACL**, в котором семантические условия постулатов-выводимостей задаются не всюду определенными, а частичными функциями. Если вспомнить правило modus ponens из классической логики, то семантически это частичная функция, определенная лишь для того случая, когда обе посылки истинны. Лишь при этом мы имеем право перейти от A и $A \supset B$ к B.

- Построить расширение **ACL** с пропозиционального уровня до уровня логики предикатов.

- Рассмотреть другие возможные обобщения логики **ACL**.

История не знает сослагательного наклонения, но если бы Платону и Аристотелю не было свойственно пренебрежительное отношение к изменяющемуся миру явлений, и если бы последующие поколения не были склонны столь послушно принимать все, что было сказано их предшественниками, пусть даже и великими, то и будущее развитие науки и культуры могло бы пойти совсем в другом направлении. Нас бы сейчас не волновали многие псевдопроблемы теории множеств и арифметики — существования бесконечных множеств, полноты и непротиворечивости (возможно, что теория множеств вообще не была бы создана, ибо она является порождением платонистического взгляда на мир), а волновали бы совсем другие проблемы, те, которые изучаются в рамках теории вычислимых функций —

существования вычислимых функций, сложности вычислений и др. Но об этом можно только гадать, так как история не знает сослагательного наклонения.

Литература

[1] *Анисов А.М.* Современная логика. М., 2002.

[2] *Булос Дж., Джеффри Р.* Вычислимость и логика. Пер. с англ. М., Мир, 1994.

[3] *Смирнов В.А.* Генетический метод построения научной теории // Логико-философские руды В.А. Смирнова/ под ред. В.И. Шалака. М.: Эдиториал УРСС, 2001.

[4] *Шалак В.И.* Альтернативное определение логического следования // Логические исследования. Вып. 13. М.: Наука, 2007.

Содержание

Table of contents

Научное издание

ЛОГИЧЕСКИЕ ИССЛЕДОВАНИЯ

Вып. 13

Утверждено к печати
Институтом философии РАН

Зав. редакцией *Г.И. Чертова*

Редактор *Е.А. Жукова*
Художественный редактор *Т.В. Болотина*

Компьютерный набор выполнен
в Институте философии РАН
Компьютерная верстка
Д. Шкатов, О. Григорьев, Н. Томова

Подписано к печати 16.01.2007
Формат 60 × 90 $^{1}/_{16}$. Гарнитура Таймс
Печать офсетная
Усл.печ.л. 19,5. Усл.кр.-отт. 19.8. Уч.-изд.л. 17,8
Тип. зак. 74

Издательство "Наука"
117997, Москва, Профсоюзная ул., 90

E-mail: secret@naukaran.ru
www.naukaran.ru

ППП "Типография "Наука"
121099, Москва, Шубинский пер., 6

АДРЕСА КНИГОТОРГОВЫХ ПРЕДПРИЯТИЙ ТОРГОВОЙ ФИРМЫ "АКАДЕМКНИГА" РАН

Магазины "Книга-почтой"

121099 Москва, Шубинский пер., 6; 241-02-52 **www.LitRAS.ru** E-mail: info@litras.ru
197345 Санкт-Петербург, ул. Петрозаводская, 7«Б»; (код 812) 235-40-64

Магазины "Академкнига" с указанием букинистических отделов и "Книга-почтой"

690088 Владивосток, Океанский проспект, 140 ("Книга-почтой"); (код 4232) 45-27-91 antoli@mail.ru
620151 Екатеринбург, ул. Мамина-Сибиряка, 137 ("Книга-почтой"); (код 3433) 50-10-03 kniga@sky.ru
664033 Иркутск, ул. Лермонтова, 298 ("Книга-почтой"); (код 3952) 42-96-20 aknir@irlan.ru
660049 Красноярск, ул. Сурикова, 45; (код 3912) 27-03-90 akademkniga@ krasmail.ru
220012 Минск, просп. Независимости, 72; (код 10375-17) 292-00-52, 292-46-52, 292-50-43 www.akademkniga.by
117312 Москва, ул. Вавилова, 55/7; 124-55-00 akadkniga@nm.ru; (Бук. отдел 125-30-38)
117192 Москва, Мичуринский проспект, 12; 932-74-79
127051 Москва, Цветной бульвар, 21, строение 2; 621-55-96 (Бук. отдел)
117997 Москва, ул. Профсоюзная, 90; 334-72-98 akademkniga@naukaran.ru
101000 Москва, Б. Спасоглинищевский пер., 8 строение 4; 624-72-19 (Бук. отдел)
630091 Новосибирск, Красный проспект, 51; (код 3832) 21-15-60 akademkniga@mail.ru
630090 Новосибирск, Морской проспект, 22 ("Книга-почтой"); (код 3833) 30-09-22 akdmn2@mail.nsk.ru
142290 Пущино Московской обл., МКР "В", 1 ("Книга-почтой"); (код 277) 3-38-80
191104 Санкт-Петербург, Литейный проспект, 57; (код 812) 272-36-65 ak@akbook.ru (Бук. отдел)
199034 Санкт-Петербург, Васильевский остров, 9-я линия, 16; (код 812) 323-34-62
634050 Томск, Набережная р. Ушайки, 18; (код 3822) 51-60-36 akademkniga@mail.tomsknet.ru
450059 Уфа, ул. Р. Зорге, 10 ("Книга-почтой"); (код 3472) 23-47-62, 23-47-74 akademkniga@ufacom.ru
450025 Уфа, ул. Коммунистическая, 49; (код 3472) 72-91-85

Коммерческий отдел, г. Москва
Телефон для оптовых покупателей: 241-03-09
www.LitRAS.ru
E-mail: info@litras.ru
zakaz@litras.ru
Склад, телефон 291-58-87
Факс 241-02-77

По вопросам приобретения книг
государственные организации
просим обращаться также
в Издательство по адресу:
117997 Москва, ул. Профсоюзная, 90
тел. факс (495) 334-98-59
E-mail: initsiat @ naukaran.ru
www.naukaran.ru