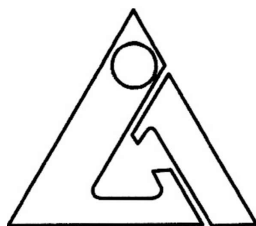

РОССИЙСКАЯ АКАДЕМИЯ НАУК
ИНСТИТУТ ФИЛОСОФИИ



LOGICAL INVESTIGATIONS

Volume 14



MOSCOW NAUKA 2007

ЛОГИЧЕСКИЕ ИССЛЕДОВАНИЯ

Выпуск 14



МОСКВА НАУКА 2007

УДК 16
ББК 87.4
Л69

Редколлегия:

*Карпенко А.С. (отв. редактор),
Анисов А.М., Бежанишвили М.Н., Васюков В.Л.,
Ивлев Ю.В., Маркин В.И., Непейвода Н.Н., Павлов С.А.,
Шкатов Д.П. (отв. секретарь),
Попов В.М., Смирнова Е.Д., Успенский В.А.,
Финн В.К., Чагров А.В., Шаляк В.И.*

Editor-in-Chief:

Alexander S. Karpenko
Institute of Philosophy, Russian Academy of Sciences, Moscow

Логические исследования / [отв. ред. А.С. Карпенко]; Ин-т философии РАН. М. : Наука, 1993. – . –

Вып. 14. – 2007. – 324 с. – ISBN 978-5-02-035860-7 (в пер.)

В данный сборник включены наиболее важные результаты, полученные в различных областях логики за последнее время. Обратим внимание на работы, имеющие большую логико-философскую значимость. Это статья Н.Н. Непейводы “Интеллектуальные вирусы” и статья И.А. Горбунова и М.Н. Рыбакова “Континуальные семейства логик”. В данный сборник включены три статьи, анализирующие релейно-контактную интерпретацию классической пропозициональной логики. Обсуждается вопрос о приоритете в этой области.

Сборник предназначен для всех интересующихся современной логикой, ее приложениями и историей.

Темплан 2007-II-27

ISBN 978-5-02-035860-7

© Российская академия наук
и издательство “Наука”,
продолжающееся издание
“Логические исследования”
(разработка, оформление), 1993
(год основания), 2007
© Редакционно-издательское
оформление.
Издательство “Наука”, 2007

Классическая вычислимость и признаки индетерминизма¹

А. М. АНИСОВ

ABSTRACT. Converse to the common belief, the theory of classic deterministic computability allow ambiguous interpretations as it is shown in this paper. It is due to the uncertainty of the theory's fundamental notions of finiteness and natural series. Actually focus is made on effects of the emergence and development of the non-standard analysis on the theory of computability.

Распространенное в научном сообществе представление о вычислении как о жестко детерминированной последовательности шагов, выполняемых согласно точному предписанию (алгоритму), не охватывает всех аспектов идеи вычислимости. Подобно тому как попытки избежать фаталистических выводов из доктрины детерминизма привели к созданию новой ветви логики — многозначной логики, — так и теория вычислимости нуждается в обобщениях, допускающих недетерминированные вычисления. Это важно не только в плане развития самой теории, но, в еще большей степени, в аспекте приложений теории вычислимости к моделированию реальности. В последнее время предпринимаются усилия по созданию вычислительных концепций тех или иных сфер реальности или даже всего универсума в целом. Если при этом пользоваться только стандартной теорией детерминированной вычислимости, картина реальности также окажется полностью детерминированной, со всеми вытекающими отсюда неприятными философскими следствиями. В таких условиях задача построения альтернативных теорий вычислимости, допускающих в той или иной форме элементы индетерминизма, становится особенно актуальной.

Однако в философских исследованиях в нашей стране и за рубежом идея недетерминированной вычислимости не находит

¹Работа выполнена при поддержке РГНФ, грант № 07-03-00203а.

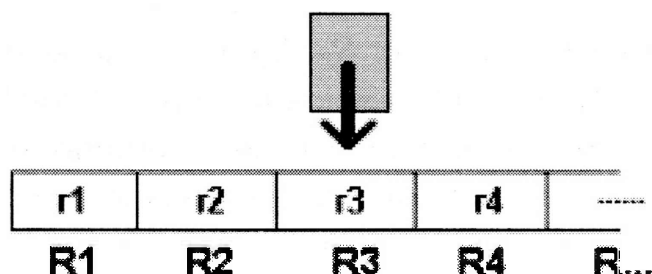
заметного применения. Причина, по-видимому, заключается в том, что философы либо довольствуются традиционной теорией детерминированной вычислимости, либо объявляют решаемые ими задачи принципиально невычислимыми. Так, в философии ИИ уже долгое время идет дискуссия между сторонниками и противниками вычислительного подхода. Первые возлагают надежды на компьютеры нетрадиционной архитектуры (параллельные машины, клеточные автоматы, квантовые компьютеры и др.), вторые не без оснований указывают, что подобные компьютеры не выводят нас за границы классической вычислимости. Например, хотя квантовые вычисления в ряде случаев оказываются эффективнее вычислений по Тьюрингу, они не выходят за границы класса стандартных вычислимых функций. Согласно выдающемуся математику и физику Р. Пенроузу, «все, что в принципе можно получить с помощью квантового компьютера, можно в принципе получить и с помощью соответствующей машины Тьюринга, снабженной генератором случайных чисел» [8, с. 546].

1 Теория классической МНР-вычислимости

Как известно, аксиоматический метод задания теорий состоит в принятии ряда утверждений в качестве аксиом с последующим выводением следствий из них. Теория при таком подходе представляет собой множество высказываний, замкнутое относительно выводимости. Существует альтернативный метод получения теорий, когда исходят не из высказываний, а из некоторого строго заданного набора объектов, с которыми разрешается проводить точно определенные операции. Это так называемый *генетический метод* построения теорий. При построении теорий вычислимости, как правило, используют генетический метод. Мы кратко рассмотрим основные элементы варианта теории классической вычислимости или эффективной вычислимости, изложенной в книге [7], с несущественными отличиями от первоисточника. Эта генетическая теория весьма подходит для наших целей. Исходными объектами здесь являются натуральные числа, а операции с ними осуществляет просто устроенный логический компьютер, все допустимые действия которого будут строго описаны. Множество натуральных чисел (т.е. множе-

ство целых положительных чисел, к которому добавлено число 0) обозначим через N .

Идеальный компьютер, с которым нам предстоит работать, называется *машиной с неограниченными регистрами (МНР)*; его также называют *адресной машиной (РАМ)*. МНР содержит бесконечное число регистров или ячеек памяти, обозначаемых через $R_1, R_2, R_3, \dots, R_n, \dots$. Каждый из регистров R_i в любой момент времени содержит некоторое натуральное число, обозначаемое через переменную r_i . Кроме того, имеется пишущая головка, которая, перемещаясь от регистра к регистру, может изменять содержимое регистра, выполняя некоторые команды или инструкции. Графически МНР изображена на приведенном рисунке.



Команды, или инструкции, выполняемые пишущей головкой, очень просты и сводятся к следующим типам.

Команда обнуления. Для каждого $n > 0$ может быть выполнена команда обнуления $Z(n)$. Команда $Z(n)$ заменяет содержимое регистра R_n на 0 и не затрагивает содержимое других регистров. Действие МНР в ответ на команду $Z(n)$ обозначим через $r_n := 0$ (читается « r_n становится 0» или « r_n присваивается 0»).

Команда прибавления единицы. Для каждого $n > 0$ выполняется команда $S(n)$. Результат применения команды состоит в увеличении на 1 содержимого регистра R_n . Другие регистры не затрагиваются. В этом случае пишем $r_n := r_n + 1$.

Команда переадресации. Для всех $m, n > 0$ имеется команда (m, n) . Ответом МНР на эту команду является замена содержимого регистра R_n содержимым регистра R_m , т.е. перенос числа r_m в регистр R_n . Другие регистры (включая R_m) не затрагиваются. Результат (m, n) записываем как $r_n := r_m$. (В действи-

тельности эта команда избыточна и в МНР-вычислениях без нее можно обойтись.)

Команда условного перехода. Для всех $m > 0$, $n > 0$ и $q \geq 0$ имеется команда $J(m, n, q)$. Встретив эту команду в программе, МНР сравнивает содержимое регистров R_m и R_n . Если $r_m = r_n$, то МНР переходит к выполнению команды q ; если команда с номером q отсутствует, МНР завершает работу. Если же $r_m \neq r_n$, МНР переходит к выполнению следующей по порядку команды программы (если таковая имеется; в противном случае МНР останавливается).

На этом перечень типов МНР-команд закончен. Команды первых трех типов называются *арифметическими*.

Вычисления на МНР-машине начинаются с *начальной конфигурации* — последовательности чисел $r_1, r_2, r_3, \dots$, содержащихся в соответствующих регистрах $R_1, R_2, R_3 \dots$ до вычисления. При этом предполагается, что в каждой начальной конфигурации содержится лишь конечное количество отличных от нуля чисел, включая случай, когда таких чисел вообще нет (тогда $r_i = 0$ для всех $i \geq 1$). Отсюда вытекает, что либо во всех регистрах содержатся одни нули, либо существует $n \geq 1$ такое, что в регистре R_n содержится число $r_n \neq 0$, тогда как в бесконечной последовательности регистров $R_{n+1}, R_{n+2}, \dots$ содержатся одни нули.

МНР-программа — это конечная непустая последовательность команд (инструкций) $I_1, I_2, \dots, I_n$ перечисленных выше типов.

Примером МНР-программы будет следующий набор команд π^- .

1. $J(1, 2, 6)$
2. $S(2)$
3. $S(3)$
4. $J(1, 2, 6)$
5. $J(1, 1, 2)$
6. $T(3, 1)$

МНР начинает выполнение программы с первой команды (это всегда инструкция I_1). Выполнив очередную команду I_j , если она не последняя и не была командой условного перехода, МНР переходит к выполнению команды I_{j+1} , расположенной ниже в наборе команд. Если выполняемая команда оказалась командой условного перехода $J(r_m, r_n, q)$ и $r_m \neq r_n$, то опять-таки МНР выполняет следующую по порядку команду (если таковая существует). Если же $r_m = r_n$, МНР переходит к выполнению команды с номером q . МНР-вычисление останавливается тогда и только тогда, когда либо нет следующей команды в наборе команд (выполнена последняя инструкция I_n в последовательности $I_1, I_2, \dots, I_n$), либо при выполнении команды условного перехода требуется перейти на команду, номер которой отсутствует в последовательности инструкций $I_1, I_2, \dots, I_n$. Например, выполнение команды $J(1, 1, 0)$ обязательно приведет к остановке машины, а выполнение команды $J(1, 1, 1)$ в любой ситуации вернет вычисление к первой инструкции I_1 .

В случае остановки вычислений содержимое $r_1, r_2, r_3, \dots$ регистров $R_1, R_2, R_3 \dots$ называется *заключительной конфигурацией*. В заключительной конфигурации лишь конечное количество регистров могут содержать ненулевые значения. Разумеется, вычисления не обязательно заканчиваются.

Пусть π — программа и $r_1, r_2, r_3, \dots$ — начальная конфигурация. Через $\pi(r_1, r_2, r_3, \dots)$ будем обозначать вычисления по программе π с начальной конфигурацией $r_1, r_2, r_3, \dots$; запись $\pi(r_1, r_2, r_3, \dots) \downarrow$ означает, что вычисление π на входе $r_1, r_2, r_3, \dots$ в конце концов останавливается; запись $\pi(r_1, r_2, r_3, \dots) \uparrow$ означает, что вычисление π на входе $r_1, r_2, r_3, \dots$ никогда не останавливается. Часто говорят, что останавливающееся вычисление *сходится*, а никогда не останавливающееся — *расходится*.

Так как начальная конфигурация может, по определению, содержать лишь конечное количество отличных от нуля членов, будем использовать выражение вида $\pi(x_1, x_2, \dots, x_n)$ с индивидуальными переменными $x_1, x_2, \dots, x_n$ для указания на то, что программа π может применяться к *любой* начальной конфигурации, в которой регистры $R_{n+1}, R_{n+2}, \dots$ содержат одни нули. Отсюда содержание регистров $R_1, \dots, R_n$ может быть любым, что оправдывает применение в записи индивидуальных переменных

по натуральным числам. Запись вида $\pi(a_1, a_2, \dots, a_n)$ означает, что π применяется к *конкретной* начальной конфигурации $r_1, r_2, \dots, r_n, 0, 0, 0, \dots$. В этом случае $a_1, a_2, \dots, a_n$ играют роль индивидуальных констант. Конечно, должно быть разрешено и смешанное применение индивидуальных переменных и индивидуальных констант. Например, $\pi(y, z, b, x, a)$, где (применяя привычные обозначения) y, z, x — переменные, а b, a — константы. Индивидуальные переменные и индивидуальные константы назовем *термами*. Для термов будем использовать обозначения $t, t_1, t_2, \dots, t_n, \dots$. Это позволяет применять наиболее общую форму записи $\pi(t_1, t_2, \dots, t_n)$, где каждый терм t_i ($1 \leq i \leq n$) является либо переменной, либо константой, а порождаемые выражением $t_1, t_2, \dots, t_n$ начальные конфигурации объединены общим условием $r_{n+1} = 0, r_{n+2} = 0, \dots$.

Та же самая программа π , т. е. та же самая последовательность команд, может применяться к начальным конфигурациям любой длины. Поэтому при $n \neq m$ записи $\pi(t_1, t_2, \dots, t_n)$ и $\pi(t_1, t_2, \dots, t_m)$ правомерны. Это означает, что *начальная конфигурация готовится независимо от программы*.

Предположим, $f(t_1, t_2, \dots, t_n)$ — функция (тотальная или частичная), определенная на натуральных числах. Точнее, область определения $Dom(f)$ функции $f(t_1, t_2, \dots, t_n)$ представляет собой декартово произведение множеств $D_1 \times D_2 \times \dots \times D_n$, где $D_i = \mathbf{N}$, если t_i является индивидуальной переменной, и $D_i = \{\mathbf{n}\}$, если t_i есть индивидуальная константа, обозначающая конкретное натуральное число $\mathbf{n}$. Что означает выражение «функция $f(t_1, t_2, \dots, t_n)$ вычислима на МНР»? Естественно представлять себе вычисление значения $f(r_1, r_2, \dots, r_n)$ для конкретных натуральных чисел $r_1, r_2, \dots, r_n$ как выполнение некоторой программы π с начальной конфигурацией $r_1, r_2, \dots, r_n, 0, 0, 0, \dots$, т. е. вычисление $\pi(r_1, r_2, \dots, r_n)$. Если такое вычисление останавливается, условимся считать *результатом вычислений* содержимое регистра R_1 . Содержимое других регистров тогда будет содержать избыточную информацию. Если $\pi(r_1, r_2, \dots, r_n) \downarrow$ и после остановки $r_1 = b$, то пишем $\pi(r_1, r_2, \dots, r_n) \downarrow b$ и говорим, что вычисление $\pi(r_1, r_2, \dots, r_n)$ *сходится* к b . Если $f(r_1, r_2, \dots, r_n) = b$ и $\pi(r_1, r_2, \dots, r_n) \downarrow b$, то ясно, что программа π правильно вычисляет значение функции f на аргументах $r_1, r_2, \dots, r_n$. В случае,

если f — частичная функция, значение которой не определено на $r_1, r_2, \dots, r_n$, то программа, вычисляющая f , не должна сходиться к какому-либо числу. Следовательно, должно иметь место $\pi(r_1, r_2, \dots, r_n) \uparrow$. Дадим теперь точное определение.

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 1. Программа $\pi(t_1, t_2, \dots, t_n)$ *МНР-вычисляет* $f(t_1, t_2, \dots, t_n)$, если для всех $\langle r_1, r_2, \dots, r_n \rangle$ из $Dom(f)$ и для каждого $b \in \mathbb{N}$ выполняются следующие утверждения: во-первых, $\pi(r_1, r_2, \dots, r_n) \downarrow b$ тогда и только тогда, когда $f(r_1, r_2, \dots, r_n) = b$, и, во-вторых, $\pi(r_1, r_2, \dots, r_n) \uparrow$ тогда и только тогда, когда значение $f(r_1, r_2, \dots, r_n)$ не определено.

По определению, функция $f(t_1, t_2, \dots, t_n)$ является *МНР-вычислимой*, если существует программа $\pi(t_1, t_2, \dots, t_n)$, которая МНР-вычисляет $f(t_1, t_2, \dots, t_n)$.

Вернемся к первому и пока единственному примеру МНР-программы π^- . Какую функцию она вычисляет? Ответ зависит от длины начальной конфигурации, подаваемой на вход π^- . Оказывается, если положить $\pi^-(x, y)$, то это будет двухместная функция h , заданная следующим образом:

$$h(x, y) = \left\{ \begin{array}{l} x - y, \text{ если } x \geq y \\ \text{в противном случае значение не определено} \end{array} \right\}.$$

Иными словами, эта *частичная* функция осуществляет вычитание на множестве натуральных чисел. Взяв $\pi^-(x)$, получим вычисление *тотальной* тождественной функции $h(x) = x$. Аналогично разбирается случай $\pi^-(x, y, z)$, который снова дает *частичную* функцию $h(x, y, z)$:

$$h(x, y, z) = \left\{ \begin{array}{l} (x - y) + z, \text{ если } x > y \\ z, \text{ если } x = y \\ \text{в противном случае значение не определено} \end{array} \right\}.$$

Однако дальнейшее увеличение длины начальной конфигурации к новым функциям не приводит, так как программа π^- в ходе выполнения затрагивает только три первых регистра. В результате $\pi^-(x, y, z)$ и $\pi^-(x, y, z, x_1, x_2, \dots, x_n)$ вычисляют одну и ту же функцию, так что получаем либо $h(x, y, z) = h(x, y, z, x_1, x_2, \dots, x_n)$, либо обе эти функции не определены.

Пусть $R(x_1, x_2, \dots, x_n)$ — числовой n -местный предикат и $f_R(x_1, x_2, \dots, x_n, c_1, c_2, \dots, c_m)$ (здесь $n \geq 1$ и $m \geq 0$) — тотальная числовая n -местная функция², определенная следующим образом: для любых натуральных $r_1, r_2, \dots, r_n$

$$f_R(r_1, r_2, \dots, r_n, c_1, c_2, \dots, c_m) = \left\{ \begin{array}{l} 1, \text{ если } R(r_1, r_2, \dots, r_n) \\ \text{истинно} \\ 0, \text{ если } R(r_1, r_2, \dots, r_n) \\ \text{ложно} \end{array} \right\}.$$

Функция $f_R(x_1, x_2, \dots, x_n, c_1, c_2, \dots, c_m)$ называется *характеристической функцией* предиката $R(x_1, x_2, \dots, x_n)$. Предикат $R(x_1, x_2, \dots, x_n)$ называется *разрешимым*, если какая-либо его характеристическая функция $f_R(x_1, x_2, \dots, x_n, c_1, c_2, \dots, c_m)$ МНР-вычислима.

Предположим, для предиката $R(x_1, x_2, \dots, x_n)$ нашлась следующая частичная функция $f_R(x_1, x_2, \dots, x_n, c_1, c_2, \dots, c_m)$, оказавшаяся МНР-вычислимой:

$$f_R(r_1, r_2, \dots, r_n, c_1, c_2, \dots, c_m) = \left\{ \begin{array}{l} 1, \text{ если } R(r_1, r_2, \dots, r_n) \\ \text{истинно} \\ \text{не определена, если} \\ R(r_1, r_2, \dots, r_n) \text{ ложно} \end{array} \right\}.$$

Тогда назовем предикат $R(x_1, x_2, \dots, x_n)$ *полуразрешимым*. В теории МНР-вычислимости доказано, что всякий разрешимый предикат полуразрешим, но обратное неверно.

Наконец, возможен случай, когда предикат $R(x_1, x_2, \dots, x_n)$ не является ни разрешимым, ни полуразрешимым; в таком случае предикат $R(x_1, x_2, \dots, x_n)$ *неразрешим*.

Примеры разрешимых, полуразрешимых и неразрешимых предикатов хорошо известны. Так, после надлежащей кодировки (гёделизации) формул и конечных последовательностей формул языков классических исчислений высказываний и предикатов и формальной арифметики предикат на множестве гёделевых номеров формул логики высказываний *Тавтология*(x) окажется

²Напомним, что местность предиката или функции определяется числом свободных индивидуальных переменных.

разрешимым, предикат на множестве гёделевых номеров первопорядковых формул *Общезначима*(x) — полурешимым, но не разрешимым, и предикат на множестве гёделевых номеров арифметических формул *Истинна*(x) — неразрешимым.

Значение введенных понятий и конструкций заключается в следующем. Оказалось, что все попытки уточнить понятие вычислимости приводят к эквивалентным результатам. Так, понятие МНР-вычислимости эквивалентно любому другому уточненному понятию вычислимости. В частности, понятию вычислимости на так называемых машинах Тьюринга. Опираясь на этот факт, А. Чёрч выдвинул до сих пор никем не опровергнутый тезис, носящий его имя, согласно которому все, что вычислимо с интуитивной точки зрения, вычислимо и в смысле уточненного понятия вычислимости, и, наоборот, все, что вычислимо в уточненном смысле, вычислимо и интуитивно. Видимо, интуитивное понятие вычислимости сформировалось в математике и логике так, что оно не допускало двусмысленных толкований. Поэтому разнообразные и порой очень не похожие друг на друга уточнения этого понятия и оказались эквивалентными.

Следствием тезиса Чёрча является вывод: любая функция f будет вычислима тогда и только тогда, когда она МНР-вычислима. Таким образом, результаты любого вычисления могут быть повторены на МНР-машине. Например, вычисления любого физически существующего компьютера может повторить (своими средствами) МНР-машина. На самом деле МНР-компьютер мощнее всех существующих в мире компьютеров вместе взятых! Ведь он обладает бесконечной памятью и не имеет никаких ограничений по времени выполнения программ, в отличие от реальных компьютеров, существенно ограниченных по памяти и времени.

Развертывание генетической теории МНР-вычислимости состоит в эффективном построении требуемых объектов и доказательствах утверждений о них. Скажем, приведенные утверждения о связанных с разрешимостью свойствах доказываются в этой теории в виде теорем. И не только в ней. После соответствующих переформулировок аналоги этих теорем доказуемы и в других теориях классической вычислимости, поскольку при всем разнообразии подходов к эффективной вычислимости все они оказались эквивалентными в смысле совпадения определя-

емых в них классов вычислимых функций. А согласно тезису Чёрча вообще все не только имеющиеся, но и будущие теории эффективной вычислимости приведут к этому же классу. Для нас эти общеизвестные в логическом сообществе факты послужат основанием для рассмотрения вопроса о детерминизме лишь в отношении теории МНР-вычислимости, поскольку если тут есть проблемы с детерминизмом, то они так или иначе возникнут и в других эквивалентных ей теориях эффективной вычислимости.

2 Детерминированны ли МНР-вычисления?

Следуя идеям Марио Бунге, выдвинутым в книге [2], определим **детерминизм** как принцип, согласно которому все существующее, во-первых, чем-то *однозначно обусловлено* и, во-вторых, во всем *полностью определено*. Отсюда **недетерминизм** означает либо неоднозначную обусловленность, либо неполную определенность, или и то, и другое вместе. Крайней формой недетерминизма является **индетерминизм** — допущение существования чего-либо ничем не обусловленного или полностью неопределенного.

МНР-программы $z(t_1, t_2, \dots, t_n) \downarrow$, останавливающиеся на любом входе (любой начальной конфигурации) длины n , естественно считаются примерами *детерминированных* вычислений, однозначно ведущих к полностью определенной заключительной конфигурации за строго определенное число шагов. Программы, не останавливающиеся на некоторых начальных конфигурациях, должны быть признаны *недетерминированными*. Порождаемые ими расходящиеся вычисления не определены в отношении их результата. Однако даже в них расходящиеся вычисления (не говоря уже о сходящихся) однозначно обусловлены начальной конфигурацией и конкретным набором команд программы. При той же начальной конфигурации и том же наборе команд на любых двух МНР-машинах будут порождаться одинаковые последовательности шагов вычислений. Различной, с классической точки зрения, может быть разве что скорость работы МНР-компьютеров, и только. Что касается *индетерминизма*, то стандартные представления об эффективной вычислимости полностью исключают этот феномен.

При решении некоторых задач (моделирование зависящих от случайностей физических процессов, творческой деятельности, игровых ситуаций и т.д.) возникает потребность в заканчивающихся недетерминированных вычислениях. На практике предпочитают обходиться лишь имитацией недетерминизма, прибегая к вычислению очередного значения последовательности псевдослучайных чисел, которые в действительности появляются друг за другом однозначно предсказуемым образом.

Рассмотрим пример программы на Паскале, которая псевдослучайным образом осуществляет перестановку множества чисел $0 \dots 65535$. Последовательно получаем $fatum(0) = 13849$, $fatum(1) = 39022$, $fatum(2) = 64195, \dots, fatum(3915) = 0, \dots, fatum(9541) = 2, \dots, fatum(33870) = 65535, \dots, fatum(39496) = 1, \dots, fatum(64195) = 7896$ и т.д., что создает впечатление случайности результатов (подробнее см. [4, с. 127–130]), тогда как на самом деле вычисления детерминированы и результаты однозначно предсказуемы. Разумеется, функцию *fatum* можно воспроизвести средствами и МНР, позаботившись о том, чтобы при $i > 65535$ эта функция (как и в программе на Паскале) не имела значения.

```
var i : word; {word : 0 ... 65535}
function fatum(i : word) : word;
const
    mult = 25173;
    addi = 13849;
    modul = 65536;
begin
    fatum := (mult*i + addi)modmodul;
end;
begin
    WriteLn('Порождение псевдослучайного числа по
введенному числу ');
    WriteLn('Введите  $-1 < i < 65536$ . Выход за интервал
завершает программу ');
    Repeat
        WriteLn;
        Readln(i);
        WriteLn(fatum(i));
```

UntilFalse;

end.

В рассматриваемом примере и в аналогичных случаях мы сталкиваемся с *мнимым недетерминизмом*. Другое дело, если встроить в вычислительный процесс числа, действительно появляющиеся случайно. В простейшей ситуации можно подбрасывать монету, и, отождествив цифру с нулем, а герб с единицей (или наоборот), получать случайно ноль или единицу и затем вручную вводить полученное число в компьютер. Если указанный ввод влияет на ход последующих компьютерных вычислений, мы получим действительно недетерминированный вычислительный процесс, результат которого заранее не предсказуем. В принципе ничто не мешает встроить в компьютер настоящий генератор случайных, а не псевдослучайных, чисел, автоматизировав тем самым ввод таких чисел в исполняемую программу. Описанную разновидность недетерминизма можно назвать *статистическим недетерминизмом*.

Статистический недетерминизм в действительности не расширяет класс вычислимых функций. Неопределенность имеется лишь в отношении входных данных — начальная конфигурация задается случайным образом. Сами же МНР-вычисления остаются детерминированными, и только в ситуации расхождения вычислений вновь возникает недетерминизм, как об этом уже было сказано. Строго говоря, введение генератора случайных чисел в МНР-компьютер потребует расширения языка МНР-программирования, поскольку возникнет необходимость в командах, считывающих случайные числа и передающих их в программу. Но это несущественное расширение. Момент ввода в исполняемую программу случайного числа или нескольких случайных чисел следует рассматривать как формирование *новой начальной конфигурации*. Иными словами, выполнение программы $\pi(t_1, t_2, \dots, t_n)$ может сопровождаться появлением случайных чисел только в регистрах $R_1, \dots, R_n$. Такое появление будет означать переход к обычному детерминированному на каждом очередном шаге вычислению некоторой функции, вплоть до следующего ввода случайного числа. Обобщение понятия начальной конфигурации (например, начальные конфигурации с разрывами, начинающиеся не с первого регистра, и т. д.) приве-

дет только к лишним сложностям, но ничего в плане увеличения вычислительной мощности не даст.

В действительности статистический недетерминизм ближе к детерминизму, чем к индетерминизму. Появление в регистрах случайных чисел позволяет осуществлять хотя бы вероятностные предсказания, и в этом определенное сходство с детерминированными процессами, обеспечивающими возможность однозначных предсказаний. Но изначальная ситуация с формированием начальных конфигураций фактически *индетерминирована*, ибо неопределенна и ничем не обусловлена внутри теории МНР-вычислимости. Фигурально выражаясь, для МНР-компьютера она как бы падает с небес в виде почти что чуда. МНР-вычисление начинается только тогда, когда «чудо» непостижимым для теории образом свершится. Представим наблюдателя, следящего за работой МНР-машины. *После* того как вычисления начались, все действия компьютера детерминированы и потому однозначно предсказуемы наблюдателем. А вот *до* того ситуация индетерминирована. Если начальные конфигурации формируются с использованием генератора случайных чисел, то имеет место статистический недетерминизм и возможность осуществления наблюдателем вероятностных предсказаний. Если же формирование начальных конфигураций не обусловлено даже вероятностно, ситуация с ними полностью не определена и потому вообще не предсказуема. Здесь наблюдатель не может сказать ничего определенного и будет вынужден ждать появления неизвестно какой начальной конфигурации.

Таким образом, классическая трактовка МНР-вычислимости связана с тремя типами недетерминизма. В ней не только принимается недетерминизм в «мягкой» форме неопределенности итогового результата вычислений³ и случайности появления начальных конфигураций, но и допускается «жесткий» недетерминизм в виде настоящего элемента индетерминизма, имеющего место в силу неопределенности и необусловленности процесса получения начальных конфигураций без генератора случайных чисел. Если бы МНР-машины были воплощены в мате-

³Кстати говоря, сложившееся понятие алгоритма как полностью детерминированного предписания по однозначному решению задач исключает возможность неостанавливающихся вычислений.

рии, то им был бы присущ еще один тип недетерминизма, связанный с возможностью неправильной работы: такие компьютеры могли бы завершать вычисления раньше времени, могли бы зависать, неверно выполнять команды и т.д. Однако в теории МНР-вычислимости ничего подобного не может случиться в принципе.

3 МНР-вычислимость в нестандартном универсуме

Под нестандартным универсумом понимается модель арифметики, в которой наряду с обычными конечными имеются бесконечно большие с *внешней* точки зрения натуральные числа. **Бесконечные** объекты — это те, которые не являются конечными. А какие объекты конечны? Имеется два наиболее распространенных определения конечного множества. Согласно первому определению, **конечным**₁ называется множество, кардинал которого является натуральным числом. Сами натуральные числа тогда естественно также считать конечными, независимо от того, являются они множествами или имеют другую природу. Согласно второму определению, множество будет **конечным**₂, если его нельзя взаимнооднозначно отобразить ни на какое его собственное подмножество.

Применяя первое определение конечного множества *внутри* нестандартного универсума $\mathbf{N}^*$, получаем, что множество натуральных чисел M является конечным, даже если $|M| = N$, где $N \in \mathbf{N}^* \setminus \mathbf{N}$. Будучи элементом теоретико-множественной разности между нестандартным и стандартным универсумами натуральных чисел, такое число N внешне бесконечно, но внутри нестандартного универсума — это обычное конечное натуральное число в ряду всех других натуральных чисел. Более того, множество всех подмножеств 2^M внешне бесконечного множества M с внутренней точки зрения также останется конечным, так как $|2^M| = 2^N$, где 2^N снова конечное натуральное число из $\mathbf{N}^* \setminus \mathbf{N}$. Если нестандартный универсум $\mathbf{N}^*$ внешне счетен, то внешне счетно и множество M . Тогда множество 2^M внешне несчетно. Тем не менее внутри нестандартного универсума 2^M все равно конечно в силу равенства $|2^M| = 2^N$ — различие между счетным и несчетным пропадает.

В любом случае ни M , ни 2^M нельзя средствами универсума взаимнооднозначно отобразить ни на какое собственное их подмножество, ибо для $K \subset M$, $K \neq M$ имеем в нестандартном универсуме $|K| = L$, где $L < N$. Тогда и $2^L < 2^M$. Это означает, что первое определение конечного влечет второе, точно так же, как и в стандартном универсуме. Поэтому далее в этом разделе *конечное* будет означать *конечное*₁.

Говоря о стандартном и нестандартном универсумах чисел, мы следовали принятому современному словоупотреблению. Однако, если считать универсум натуральных чисел изначальным (а не полученным как производный объект внутри более мощной теории, например, теории множеств), то становится не понятным, что представляет собой стандартный универсум, почему он непременно должен быть изоморфен ординалу ω из аксиоматической теории множеств ZF. С тем же основанием за исходный можно взять универсум $\mathbf{N}^*$.

Как скажется такой выбор на идее МНР-вычислимости? Очевидно, что теперь в регистрах МНР-компьютера может находиться любое число из $\mathbf{N}^*$, что ряд регистров должен быть последовательно пронумерован числами из $\mathbf{N}^*$, что начальные конфигурации могут быть любой стандартной или нестандартной длины, что в командах необходимо разрешить использовать какие угодно числа из $\mathbf{N}^*$, а число самих команд в программах также может измеряться любым числом из $\mathbf{N}^*$. Соответственно число шагов в сходящихся вычислениях должно равняться некоторому числу из $\mathbf{N}^*$, тогда как расходящиеся вычисления будут по числу шагов превышать любое наперед заданное число из $\mathbf{N}^*$.

Отсюда следует, что расходящееся вычисление «внутри» натурального ряда $\mathbf{N}^*$ невозможно, например, невозможно вычисление с бесконечным числом шагов, соответствующих стандартному ряду $1, 2, 3, \dots$. Всякое МНР-вычисление либо завершится на некотором шаге $n \in \mathbf{N}^*$, либо продолжится за границы любого $n \in \mathbf{N}^*$. Иными словами, ряд $\mathbf{N}^*$ надлежит рассматривать как настоящий ряд натуральных чисел, а вычислимость на нем должна осуществляться без всяких индетерминированных аномалий. Это позволяет сохранить все ранее данные определения, в том числе связанные с проблемой разрешимости.

Конечно, не все так просто. Предвижу недоумения, вызванные вопросом: как все-таки проводимое последовательно, шаг за шагом (начиная с первого), вычисление может «выскочить» за границы стандартного универсума $\mathbf{N}$ и оказаться в области $\mathbf{N}^* \setminus \mathbf{N}$? Нет ли здесь явного индетерминизма, подобного индетерминизму тезиса о творении из ничего? Уклончиво отвечу, что постулированная МНР-вычислимость в универсуме $\mathbf{N}^*$ со столь необычными свойствами, по-видимому, все же не ведет к противоречиям, если принимать необходимые меры предосторожности.

Например, нет никаких оснований сомневаться, что если программа $\pi(r_1, r_2, \dots, r_n)$ для любых $r_1, r_2, \dots, r_n \in \mathbf{N}$ останавливается за некоторое $m \in \mathbf{N}$ шагов, то все ее действия в нестандартном универсуме будут точно такими же, как и в стандартном. А если на вход такой программы π подать числа из $\mathbf{N}^* \setminus \mathbf{N}$ — что будет тогда? Или, если вычисления по программе $\pi(r_1, r_2, \dots, r_n)$ для конкретных $r_1, r_2, \dots, r_n \in \mathbf{N}$ расходятся в стандартном универсуме $\mathbf{N}$, то будут ли они расходиться и в нестандартном универсуме $\mathbf{N}^*$?

Обстоятельное обсуждение теории МНР-вычислимости в нестандартных универсумах находится за рамками данной работы. Ограничимся лишь одним аспектом этой теории, касающимся проблемы совместимости стандартных и нестандартных вычислений. Будем рассматривать только такие МНР-программы, длина которых равна n для некоторого $n \in \mathbf{N}$. Иными словами, это будут программы *стандартной длины*. Примем следующую аксиому совместимости.

АКСИОМА. Для всякой программы π стандартной длины и любых $r_1, r_2, \dots, r_n \in \mathbf{N}$, если $\pi(r_1, r_2, \dots, r_n) \uparrow$ в $\mathbf{N}$, то $\pi(r_1, r_2, \dots, r_n) \uparrow$ в $\mathbf{N}^*$.

Аксиома совместимости утверждает, что всякое расходящееся при данном входе вычисление в стандартном универсуме останется расходящимся и в нестандартном универсуме при том же входе. Это весьма правдоподобное утверждение, но можно ли его доказать? Как уже отмечалось, симметричное высказывание «Для всякой программы π стандартной длины и любых $r_1, r_2, \dots, r_n \in \mathbf{N}$, если $\pi(r_1, r_2, \dots, r_n) \downarrow$ в $\mathbf{N}$, то $\pi(r_1, r_2, \dots, r_n) \downarrow$ в $\mathbf{N}^*$ » в доказательстве не нуждается, настолько оно очевидно.

Назовем предикат $P(x_1, x_2, \dots, x_n) \subset \mathbf{N} \times \mathbf{N} \times \dots \times \mathbf{N}$ (n раз) *стандартным*, если утверждение $\langle r_1, r_2, \dots, r_n \rangle \notin P$ означает, что $r_1, r_2, \dots, r_n \in \mathbf{N}$. Проще говоря, на вход стандартного предиката разрешено подавать только n -ки стандартных чисел.

Между МНР-вычислимостью в стандартном и нестандартном универсумах имеется значительное различие в вычислительной мощности, как показывает следующая теорема.

ТЕОРЕМА 2. *Всякий полуразрешимый в $\mathbf{N}$ стандартный предикат $P(x_1, x_2, \dots, x_n)$ разрешим в $\mathbf{N}^*$.*

Доказательство. Рассмотрим МНР-программу $\pi_P(x_1, x_2, \dots, x_n, c_1, c_2, \dots, c_m)$, вычисляющую в $\mathbf{N}$ соответствующую частичную функцию $f_P(x_1, x_2, \dots, x_n, c_1, c_2, \dots, c_m)$ (напомним, что $n > 0$ и $m \geq 0$). Это будет стандартная программа, имеющая стандартную длину, скажем $l \in \mathbf{N}$, в которой все константы начальных конфигураций (если они вообще имеются) являются стандартными числами и $c_1, c_2, \dots, c_m \in \mathbf{N}$. Преобразуем программу π_P следующим образом. Во-первых, освободим от операций регистр R_{n+m+1} . Для этого в командах из π_P увеличим на единицу все упоминания о регистрах, если их номер $i \geq n + m + 1$. Получим программу π_P^* . Во-вторых, заменим в π_P^* все ссылки q в командах условного перехода на $3q$: $J(i, j, q)$ заменяется командой $J(i, j, 3q)$. Например, если в π_P^* имелась команда $J(i, j, 10)$, то в π_P^{**} она должна быть заменена командой $J(i, j, 30)$. Возникнет промежуточная программа π_P^{**} . В-третьих, найдем наибольший номер mt упоминаемого в программе π_P^{**} регистра. Затем перед каждой командой из π_P^{**} вставим две: либо $J(n + m + 1, mt + 1, 3l + 2)$ и $S(mt + 1)$, если $n + m + 1 \neq mt + 1$, либо $J(n + m + 1, mt + 2, 3l + 2)$ и $S(mt + 2)$, если $n + m + 1 = mt + 1$. В любом случае годится второй вариант $J(n + m + 1, mt + 2, 3l + 2)$ и $S(mt + 2)$, им и воспользуемся. В результате число команд вырастет втрое и станет равным $3l$. Обозначим полученную программу через π_P^{***} . Наконец, в-четвертых, допишем к концу π_P^{***} еще две команды: $3l + 1. J(1, 1, 0)$ и $3l + 2. Z(1)$. Это и будет итоговая программа π_P^{****} .

Программа π_P^{****} останавливается на любом входе $x_1, x_2, \dots$,

$x_n, c_1, c_2, \dots, c_m, c_{m+1}$. Действительно, из построений видно, что программа $\pi_P^{***}(x_1, x_2, \dots, x_n, c_1, c_2, \dots, c_m, c_{m+1})$ осуществляет вычисления по исходной программе π_P , используя разве что другие регистры. Операции условного перехода $J(n+m+1, mm+2, 3l+2)$ и увеличения на единицу $S(mm+2)$ содержимого регистра R_{mm+2} на эти исходные вычисления никак не влияют, если не достигнуто равенство $r_{n+m+1} = r_{mm+2}$. Если равенство $r_{n+m+1} = r_{mm+2}$ получено, переход к последней команде $Z(1)$ с номером $3l+2$ обнулит первый регистр и закончит вычисления. В противном случае продолжится выполнение вычислений в соответствии с предписаниями π_P . Если эти вычисления закончатся раньше, чем будет получено равенство $r_{n+m+1} = r_{mm+2}$, в первом регистре будет содержаться единица. Таким образом, либо вычисление остановится из-за $\pi_P(x_1, x_2, \dots, x_n, c_1, c_2, \dots, c_m) \downarrow$, либо остановится из-за достижения равенства $r_{n+m+1} = r_{mm+2}$. Но указанное равенство будет непременно достигнуто в том случае, если имеет место $\pi_P(x_1, x_2, \dots, x_n, c_1, c_2, \dots, c_m) \uparrow$.

В стандартном универсуме $\mathbf{N}$ вычисления по программе $\pi_P^{***}(x_1, x_2, \dots, x_n, c_1, c_2, \dots, c_m, c_{m+1})$ не приведут к чему-то интересному. Другое дело нестандартный универсум $\mathbf{N}^*$. Достаточно взять в качестве константы c_{m+1} нестандартное число $N \in \mathbf{N}^* \setminus \mathbf{N}$, чтобы получить разрешающую предикат $P(x_1, x_2, \dots, x_n)$ процедуру. Если n -ка $\langle r_1, r_2, \dots, r_n \rangle \in P$, то $r_1, r_2, \dots, r_n \in \mathbf{N}$ (так как предикат P стандартен) и вычисление $\pi_P^{***}(r_1, r_2, \dots, r_n, c_1, c_2, \dots, c_m, N)$ закончится с результатом $r_1 = 1$ на каком-то шаге k , где $k \in \mathbf{N}$. Если же $\langle r_1, r_2, \dots, r_n \rangle \notin P$, то вновь $r_1, r_2, \dots, r_n \in \mathbf{N}$ по причине стандартности P и $\pi_P(r_1, r_2, \dots, r_n, c_1, c_2, \dots, c_m) \uparrow$ в $\mathbf{N}$. В силу аксиомы совместимости $\pi_P(r_1, r_2, \dots, r_n, c_1, c_2, \dots, c_m) \uparrow$ верно и для $\mathbf{N}^*$. Однако вычисление $\pi_P^{***}(r_1, r_2, \dots, r_n, c_1, c_2, \dots, c_m, N)$ в этом случае закончится по достижению равенства $N = r_{mm+2}$, причем с $r_1 = 0$. Это и дает МНР-вычислимость искомой характеристической функции $f_P(x_1, x_2, \dots, x_n, c_1, c_2, \dots, c_m, N)$ стандартного предиката $P(x_1, x_2, \dots, x_n)$, что и требовалось. Q.E.D.

В частности, в нестандартном универсуме будет разрешим упоминавшийся выше классически полурешимый, но не разрешимый предикат на множестве гёделевых номеров первопорядковых формул *Общезначима*(x).

4 МНР-вычислимость в уличенном универсуме

Термин «уличенный универсум» (a witnessed universe) взят из книги [3] в переводе с английского А.Г. Драгалина. В самом общем смысле он означает большой, но все же конечный в классическом измерении универсум, который изнутри рассматривается как бесконечный. Ситуация обратная в сравнении с нестандартным универсумом: в последнем внешне бесконечное внутри оказывается конечным, а в уличенном универсуме, наоборот, внешне конечное предстает как внутренне бесконечное. Построим конкретный уличенный универсум в форме арифметики с конкретными конечными и бесконечными числами.

Пусть $L_A = \{+, \times, ^+, 0\}$ — язык арифметики. Будем говорить, что формула *арифметическая*, если все ее дескриптивные символы принадлежат языку L_A . Следующие аксиомы обычны.

1. $0 \neq x^+$ (число 0 не имеет предшествующего элемента);
2. $x^+ = y^+ \rightarrow x = y$ (функция $^+$ взаимнооднозначна);
3. $x + 0 = x$;
4. $x + y^+ = (x + y)^+$ (A3 и A4 — рекурсивное определение сложения через 0 и $^+$);
5. $x \times 0 = 0$;
6. $x \times y^+ = (x \times y) + x$ (A5 и A6 — рекурсивное определение умножения через 0, $^+$ и $+$);
7. $(A(0) \ \& \ \forall x(A(x) \rightarrow A(x^+))) \rightarrow \forall x A(x)$, где — арифметическая формула (схема аксиом индукции; пункт об арифметичности необходим, как будет видно из дальнейшего).

Следующие аксиомы сформулированы в расширенном языке $L = L_A \cup \{F, T, f\}$, где F и T — одноместные предикатные символы для выражения неарифметических свойств «быть конечным (финитным) числом» и «быть бесконечным (трансфинитным) числом», а f — функция с достаточно быстрым ростом значений.

8. $F(0)$ (разумеется, 0 — конечное число);

9. $F(x) \rightarrow F(x^+)$ (если x конечно, то и следующее за x число x^+ также конечно; поскольку А9 — не арифметическая формула, нельзя индукцией доказать, что все числа конечны);
10. $T(x) \rightarrow T(x^+)$ (аналогично А9: если x бесконечно, то и x^+ бесконечно);
11. $F(x) \rightarrow \neg T(x)$ (конечные числа не являются бесконечными; по контрапозиции $\neg \neg T(x) \rightarrow \neg F(x)$ и снятию двойного отрицания имеем $T(x) \rightarrow \neg F(x)$, т.е. бесконечные числа не конечны);
12. $F(x) \vee T(x)$ (каждое число либо конечно, либо бесконечно);
13. $f(0) = 0^{+++++} = 10$;
14. $f(x^+) = f(x)^{10}$, где $f(x)^{10}$ равно по определению $f(x) \times f(x) \times f(x) \times f(x) \times f(x) \times f(x) \times f(x) \times f(x) \times f(x)$ (заметим, что нам не потребовалось общее определение степени x^y);
15. $T(f(10))$ ($f(10)$ — конкретное бесконечное число).

Построенная теория противоречива, но противоречие достигается за огромное число шагов, которое в нашей аксиоматике считается бесконечным. Так как доказательство — это конечная последовательность формул⁴, классическое выведение противоречия не является доказательством в нашем смысле, поэтому в этом понимании данная теория является непротиворечивым расширением арифметики.

Заменяя аксиомы 13-15 утверждением

$$13' . \exists x(T(x)),$$

получим классически непротиворечивую теорию. Действительно, пусть N — бесконечное число, существование которого утверждается, т.е. $T(N)$. Поскольку теоремами являются $\neg T(0)$, $\neg T(1), \dots, \neg T(n), \dots$, имеем теоремы $0 < N, 1 < N, \dots, n < N \dots$

⁴Отметим, что формулы, оперирующие бесконечными числами, могут оставаться конечными в смысле нашей теории, как это имеет место в аксиоме 15.

Но для каждого n цепочка утверждений $0 < N, 1 < N, \dots, n < N$ непротиворечива. Значит, по теореме компактности, непротиворечива и вся теория. Эта теория, однако, будет ω -противоречивой ввиду теоремы $\neg \forall x \neg T(x)$.

Число $f(10)$ — это единица с десятью миллиардами нулей. Даже записать такое число вручную в одиночку невозможно. Но это возможно с помощью современной вычислительной техники. Однако на самом деле здесь мы принимаем сокращенную запись числа $f(10)$. Собственно говоря, выражение « $f(10)$ » — не что иное, как еще большее сокращение (в отличие от предыдущего, легко реализуемое вручную) записи рассматриваемого числа. Каноническое представление $f(10)$ в виде $0^{++++\dots++++}$ невозможно, поскольку потребует значков $+$ больше, чем частиц в Метагалактике (в которой, по уверениям физиков, содержится примерно $10^{80} - 1$ с 80-ю нулями — частиц ([9, с. 113])).

Да и времени для канонического представления потребуется несусветно много. В самом деле, в году примерно 31536000 секунд. Наша Метагалактика, опять же по уверениям физиков, существует примерно 10 миллиардов лет (особая точность нам в этом случае не нужна). Стало быть, от так называемого «Большого взрыва» прошло что-то около 315360×10^{12} секунд (315 квадрильонов 360 триллионов секунд). Даже если бы мы с момента этого взрыва располагали устройством, записывающим по 10^{12} (по триллиону) значков $+$ в секунду (что само по себе невероятно), мы имели бы на сегодняшний день лишь $315360 \times 10^{12} \times 10^{12} = 315360 \times 10^{24}$ значков, то есть в десятичной записи — число 315360 с последующими 24 нулями. А нам необходимо получить десять миллиардов нулей! Сколько же еще ждать? Эти рассуждения показывают, что построенная здесь арифметика связана с космологией.

Космологические ограничения должны быть наложены и на теорию МНР-вычислимости в уличенном универсуме. В классическом случае допускалась двоякого рода бесконечность: актуально бесконечное число регистров и потенциальная бесконечность числа шагов вычислений и помещаемых в регистры чисел. Аналогичным образом, уличенная теория МНР-вычислимости в рассматриваемом конкретном варианте предполагает *внутренне актуально бесконечную* ленту регистров $R_1, R_2, R_3, \dots$

$R_{f(10)}$. Потенциальная бесконечность чисел и шагов вычислений моделируется их *физической реализуемостью*: числа до 10^{80} будут физически реализуемы. Быть может, и гораздо большие числа, скажем, 10^{1000} , тоже найдут физическую интерпретацию. Но нет никакой надежды записать в регистры начальную конфигурацию с актуально бесконечными числами или добраться в ходе МНР-вычислений до таких чисел, хотя в нашем уличенном универсуме они все же существуют. Обозначим описанную модель уличенного универсума через U .

Сравнивая, как и в случае нестандартной вычислимости, уличенную вычислимость с классической, приходим к очевидному выводу, что МНР-вычислимость в U значительно слабее классической. Для подтверждения сказанного приведем следующую теорему.

ТЕОРЕМА 3. *Всякий разрешимый в N предикат $P(x_1, x_2, \dots, x_n)$ неразрешим в U .*

Доказательство. Ясно, что числа в окрестности $f(10)$, не говоря уже о больших числах, даже не могут быть записаны в регистры уличенного МНР-компьютера. Q.E.D.

Например, разрешимое в N свойство гёделевых номеров формул логики высказываний *Тавтология*(x) будет неразрешимым в U по причине неограниченного роста этих номеров в N . Тем не менее МНР-вычислимость в U превосходит все мыслимые возможности реальных компьютеров.

Литература

- [1] Анисов А.М. Вычислительная метамодель реальности и проблема истины // Логические исследования. Вып. 13. М., 2006.
- [2] Бунге М. Причинность. Место принципа причинности в современной науке. М., 1962.
- [3] Вopenка П. Математика в альтернативной теории множеств. М., 1983.
- [4] Грогоно П. Программирование на языке Паскаль. М., 1982.
- [5] Девис М. Прикладной нестандартный анализ. М., 1980.
- [6] Драгалин А.Г. Конструктивная теория доказательств и нестандартный анализ. М., 2003.
- [7] Катленд Н. Вычислимость. Введение в теорию рекурсивных функций. М., 1983.
- [8] Пенроуз Р. Тени разума: в поисках науки о сознании. Москва — Ижевск, 2005.
- [9] Хокинг С. От большого взрыва до черных дыр. М., 1990.

Жизненный и научный путь Виктора Ивановича Шестакова — создателя логической теории релейно-контактных схем¹

Б. В. Бирюков, И. С. Верстин, В. И. Левин

ABSTRACT. The course of life of the creator of the relay logic theory — V.I. Shestakov, is shown, including the questions of priority. The paper presents the stages of his varied and complicated scientific activity.

1 Введение

Взаимодействие логики и техники принадлежит к числу великих достижений научной мысли XX века. Ныне понятно, что техника, прежде всего техника переработки информации в электрических и электронных сетях, ставит перед логической мыслью новые и важные задачи. Вместе с тем прогресс логики — логики математической, представленной в самых разных ее исчислениях, влечет прогресс в технологических инновациях информатики.

Российская наука — вместе с трудами зарубежных авторов — стоит у истоков этого научного направления, возникшего в 30-е годы прошлого века. И первое имя, которое здесь следует назвать, — это Виктор Иванович Шестаков (1907–1987). Впрочем, идея о связи (алгебро)логического и технического родилась двадцатью годами раньше: в 1910 г. идею применения логики к технике, а именно к схемам из последовательно и параллельно соединенных элементов электрических цепей, высказал русский физик П. Эренфест в рецензии на русский перевод книги Л. Кутюра «Алгебра логики». В. И. Шестаков отталкивался именно от его идей, хотя, по его словам, «не был знаком в то

¹Работа выполнена при поддержке РФФИ, проект № 05-06-80382.

время с рецензией Эренфеста» [1]. Примечательно, что замысел В. И. не сразу был оценен его коллегами-физиками, но с самого начала был поддержан логиками; на первое место здесь надо поставить имя Валерия Ивановича Гливенко.

Свои пионерские идеи Виктор Иванович выдвинул еще в 1933–1935 годах, будучи студентом, но они не получили поддержки у его руководителя физика. В результате В. И. вел свои исследования не столько в сообществе физиков, сколько математиков и логиков. Работая более полувека, Виктор Иванович разработал множество вариантов анализа и синтеза электрических (потом электронных) схем различного типа — от простейших переключательных и мостиковых цепей до более сложных схем передачи и переработки информации по электрическим сетям, содержащим различного рода элементы переключения, запоминания и распределения электрических сигналов. То же самое касается и логики: от двузначной логики он перешел к трехзначной, при этом он использовал логический аппарат Д. А. Бочвара и Яна Лукасевича. Стремясь расширить применимость своего подхода, он применил логические методы в теории размерностей и т. д. Он все время получал новые результаты, что не могло не вызвать чего-то вроде чувства зависти даже у тех, кто стоял гораздо выше него в формальной научной иерархии.

Беспартийный, он вполне испытал трудности, выпавшие на долю людей его времени. Он не сразу поступил на физический факультет МГУ: сначала учился в Высшем химико-технологическом училище и лишь по окончании первого курса этого вуза был переведен на второй курс физического отделения физико-математического факультета Государственного Московского университета, тогда «имени М. Н. Покровского» [2].

Прокладывая новый путь в науке, В. И. неизбежно вступал в коллизии со своими коллегами-современниками. Первая коллизия касается приоритета открытия той формы приложения логики к технике, которая впоследствии оказалась связанной с его именем. Рядом с Виктором Ивановичем называют имена К. Шеннона и А. Накашимы. Некоторые документы утверждают, что первые результаты были получены В. И. Шестаковым в 1935 г., но опубликование их сильно задержалось. «Еще в аспирантуре НИИФ МГУ в 1934 г. он впервые в СССР начал зани-

маться вопросами применения алгебры Буля к теории релейных схем, — читаем в документе [3], подписанном заместителем декана физфака МГУ А. А. Кузовниковым. — Уже в 1935 году, за три года до появления статьи К. Э. Шеннона “Символический анализ релейных и переключательных схем” в США, Шестаковым были получены важные результаты в этой области, легшие в основу его кандидатской диссертации». 24 февраля 1983 г. газета “Московский университет” вышла с заметкой без подписи «Чего не увидели другие» [4], где в том же ключе утверждается бесспорность приоритета В. И. Шестакова в разработке метода расчета релейно-контактных схем на основе математической логики; 13 марта 1983 г. В. И. Шестаков написал «Письмо в редакцию газеты “Московский университет”» [5], где указывал на некоторые неточности в заметке. Наиболее существенная ошибка, по мнению Виктора Ивановича, содержится в утверждении, что Клод Эдуард Шеннон опубликовал аналогичную статью год спустя после Шестакова. Виктор Иванович уточняет, что рукопись статьи американского специалиста сдана 1 марта 1938 г. Его же собственная диссертация 28 сентября 1938 г. была лишь защищена, а публикация ее части была осуществлена в 1941 году. Та же хронологическая ошибка, по мнению В. И. Шестакова, имела место и в случае с японским ученым А. Накашимой, который опубликовал цикл своих статей с описанием контактных схем с помощью функции алгебры логики в 1938 году.

Если исходить из приведенных и других подобных материалов, то надо признать, что Виктор Иванович опередил Клода Шеннона. В. И. Левин, исследовавший вопрос приоритета с помощью количественных критериев, пришел к следующим результатам: «Большинство исследователей в мире, особенно на Западе, считают единоличным первооткрывателем К. Шеннона. Меньшинство же полагает, что пальма первенства должна быть поделена поровну между двумя учеными — К. Шенноном и В. И. Шестаковым или всеми тремя учеными — А. Накашимой, К. Шенноном и В. И. Шестаковым. Однако при этом не используются никакие определенные количественные критерии, по которым следует решать вопрос о приоритете. Между тем, такие критерии можно предложить, и на их основе вопрос о приоритете в рассматриваемом открытии может решаться стро-

го и однозначно. Конечно, при таком подходе решение вопроса зависит от выбора критерия приоритета. При этом оказывается, что в области “Теории электрических схем общего вида (релейно-контактных и бесконтактных)”, в зависимости от выбора критерия приоритета, возможны такие порядки следования конкурентов: 1. Накашима, Шеннон, Шестаков, т.е. лидирует Накашима — обладатель приоритета в открытии, а Шеннон и Шестаков получают почетные второе и третье места (критерий А, основанный на учете только даты первой журнальной публикации по теме; критерий С, основанный на учете даты первой журнальной публикации или дат представления и защиты диссертации по теме; критерий D, основанный на учете интервала дат от первой до последней журнальной публикации, включая даты защит (представления) диссертаций); 2. Накашима — лидер, Шеннон и Шестаков делят второе и третье места (критерий В, основанный на учете даты первой журнальной публикации или даты защиты диссертации по теме); 3. Накашима и Шестаков делят лидерство, а Шеннон занимает третье место (критерий Е, отличающийся от D дополнительным учетом содержания результатов — новизны, продвинутоści и т.д.). Далее, в области собственно “теории релейно-контактных схем” лидирует Накашима, а Шеннон и Шестаков занимают второе и третье места (при любом из критериев А, В, С, D, Е). Наконец, в области собственно “теории бесконтактных электрических схем” единоличным участником и, следовательно, лидером оказывается Шестаков (при любом из критериев А, В, С, D, Е).

Иногда при рассмотрении вопроса о приоритете участников данного открытия используется такой фактор, как время, когда это открытие было впервые сформулировано в устной или рукописной форме. Так, указано, что В. И. Шестаков сформулировал суть открытия раньше Шеннона — в 1935 году [2]. Такая информация не может играть какой-либо роли в решении вопроса о приоритете, поскольку о других фигурантах спора (в данном случае) она может быть неизвестна. Еще важнее то, что научная работа, изложенная в рукописной, а тем более в устной форме, не считается в мировой практике зафиксированной по содержанию и дате выполнения и потому не может учитываться при решении вопроса о приоритете» [6].

Другая коллизия падает на 1940 год, когда приоритет В.И. Шестакова пытался оспорить советский инженер В.А. Розенберг, не имея на то, по мнению Шестакова, достаточных оснований. Хронологию событий восстанавливают следующие документы.

Дневник [7] Виктора Ивановича в общей тетради на 26 листах, охватывающий период с 22. 04 по 11. 07. 1940 г., который начинается фразой: «Утром прочел в только что вышедшем №1 за 1940 г. журнале “Автоматика и телемеханика” статью Розенберга В. А. Очень большое совпадение содержания с содержанием II-й части моей диссертации. Еще большее совпадение с моей рукописью “Реле и релейные схемы”»;

копия письма в редакцию журнала «Автоматика и телемеханика» [8] В. И. Шестакова, где автор сопоставляет цитаты из напечатанной в журнале статьи В.А. Розенберга «Задача о блокировке и преобразовании контактных групп» и из своей диссертации;

копия письма ответственному редактору журнала «Автоматика и телемеханика» В.И. Коваленкову от директора НИИФ декана МГУ А.С. Предводителя и профессора МГУ К.Ф. Теодорчика от 27. 04. 1940 г. с просьбой о размещении в журнале этого письма и предлагаемого письма Виктора Ивановича, ибо «диссертация В.И. Шестакова не могла быть неизвестной редакции журнала, так как в марте 1938 г. она была направлена к Вам с предложением выступить оппонентом» [9];

копия ответа ответственного секретаря журнала «Автоматика и телемеханика» А.С. Предводителю от 05. 05. 1940 г. о том, что «редакция не имеет возражений против опубликования писем В.И. Шестакова и А.С. Предводителя, однако считает, что предварительно необходимо получить объяснения по существу вопроса от автора упомянутой статьи В.А. Розенберга» [10];

копия ответа В.А. Розенберга [11] редакции журнала «Автоматика и телемеханика» от 17. 05. 1940 г., где главный инженер Ленинградской проектной конторы «Севзапэлектромонтаж» отрицает свое знакомство с работами Виктора Ивановича и просит опубликовать свое письмо в том случае, если редакция сочтет необходимым напечатать обличающие его в плагиате письма;

копия ответа редакции журнала «Автоматика и телемехани-

ка» Виктору Ивановичу от 21. 10. 1940 г. с отказом в опубликовании его письма о совпадении содержания, «так как вопрос о приоритете в данном случае является спорным и, по мнению редакции, мог бы быть разрешен лишь в судебном порядке» [12]. Статью же «Алгебра А-схем» редакция могла бы опубликовать при условии сокращения ее объема;

копия от 9. 12. 1940 г. «Заявление в президиум АН СССР» [13] В.И. Шестакова о помощи в защите его приоритета в вопросе применения алгебры Буля к электрическим схемам и указании редакции подведомственного им журнала «Автоматика и телемеханика» о необходимости напечатать письмо Виктора Ивановича с приведенными сопоставлениями цитат из его диссертации и статьи В.А. Розенберга.

Третья коллизия возникла между ним и журналом «Автоматика и телемеханика», где Виктор Иванович печатал свои статьи. В редакции журнала, по мнению В.И. Шестакова, придерживали его рукописи, пропуская вперед статьи М.А. Гаврилова и других авторов, уже понявших простоту и изящество шестаковских идей и старавшихся поскорее «вскопать поле» логики и техники. Об этих событиях свидетельствует письмо Виктора Ивановича от 28. 04. 1954 г. ответственному редактору журнала «Автоматика и телемеханика» В.А. Трапезникову [14].

Будучи больным туберкулезом, Виктор Иванович не мог участвовать в войне с Германией, но его докторская диссертация (диссертацию на ученую степень кандидата физико-математических наук он защитил еще в 1938 г.), подготовленная им в 1953 г., не была защищена, по его словам, потому, что наряду с открытыми материалами содержала и материалы закрытые, то есть имевшие государственную ценность: В.И. Шестаков, как мог, старался внести свой вклад в укрепление обороноспособности России.

Виктор Иванович активно участвовал в работе научных семинаров в Московском университете — был в их руководстве, выступал с докладами (в частности на семинаре, которым руководили академик АН СССР П.С. Новиков и профессор С.А. Яновская), в 70–80-х годах он докладывал о своих результатах на семинаре по логике и методологии науки, которым руководили профессор Б.В. Бирюков и доцент А.С. Кузичев.

Виктор Иванович участвовал во многих общесоюзных и меж-

дународных научных конференциях, много лет реферировал зарубежные публикации по своей тематике в РЖ «Математика». Научное наследие В.И. Шестакова показывает, что в сфере приложений логики к внелогическим областям наша наука не только не отставала от зарубежной, но во многих случаях опережала ее. В отзыве «О научных трудах В.И. Шестакова» [15] 16 июня 1982 года профессора Б.В. Бирюков, В.А. Горбатов, В.Г. Лазарев и доцент Г.Н. Поваров зафиксировали следующие достижения ученого. Он:

установил возможность и показал плодотворность технических приложений математической логики в прикладной математике, вычислительной технике и кибернетике;

разработал первые логические методы анализа и синтеза релейных схем;

рассматривал логическую алгебру релейных схем как предельный случай особой алгебры линейных электрических цепей («алгебры А-схем»), также им построенной и упрощающей их расчет;

положил начало математическому проектированию дискретных технических устройств, что дало мощный толчок развитию самой математической логики, в особенности таких ее разделов, как булева алгебра, исчисление высказываний, многозначные логики;

разработал теорию многотактных релейных схем, оказавшую значительное влияние на формирование более общей теории конечных автоматов, явившись одним из основателей этой важной отрасли современной дискретной математики;

внес большой вклад в развитие молодого искусства программирования цифровых вычислительных машин;

получил ряд интересных результатов в области многозначных логик и их технических приложений;

предложил новые методы алгебраического представления и расчета линейных электрических цепей.

Дочь создателя логической теории релейно-контактных схем Ирина Викторовна Самохвалова передала в распоряжение группы исследователей архив своего отца. Архив имеет большую научную ценность, так как содержит уникальные материалы, собранные этим выдающимся русским ученым. Наше изложе-

ние опирается на этот архив. В нем приведены уникальные документы: манускрипты автора, отзывы на его работы (включая заключения таких математических логиков, как академик П.С. Новиков, профессора В.И. Гливенко и С.А. Яновская), многообразные материалы как личного, так и официального и полуофициального характера.

Перед исследователями наследия В.И. Шестакова стоял целый ряд задач.

Прежде всего следовало выявить основные этапы научного пути В.И. Шестакова в контексте бытия научного сообщества его времени и с учетом широкой проблемы «логика и техника»; роль в этом развитии как «технократической», так и логико-философской составляющих. Библиография трудов В.И., в необходимых случаях сопровождаемая комментариями, позволила наметить раскрытие запутанной проблемы — приоритета в открытии приложений логики к технике. Дело в том, что вопрос, как возникла логическая теория релейно-контрактных схем (потянувшая за собой целый веер последующих задач и разработок) — да и вообще вопрос об истоках применения логики к технике и физике — до сих пор остается не проясненным. Известно лишь, что здесь должны быть названы по крайней мере три упомянутые выше имени: В.И. Шестаков, К.Э. Шеннон и А. Накашима. Но когда и как каждый из них сказал свое слово — на этот вопрос более или менее ясный ответ можно дать лишь в отношении американского ученого. Причем бросается в глаза необычный для техники характер подхода Шеннона: он оперировал понятием *непроводимости* (*сопротивления*) электрической схемы, что для электротехника звучит странно: ведь его заботит проводимость сигнала и вопрос о минимизации потребных для этого средств.

Конечно, проводимость и непроводимость — понятия двойственные — и физически, и логически. Но почему К. Шеннон пошел нетрадиционным путем? Чтобы отличить свой подход от какого-то другого подхода? — Какого же? Что касается А. Накашима, то вопрос о его подходе — в сопоставлении с подходами В.И. и К.Ш. — тоже ждет прояснения. Кстати сказать, Накашима, как и Шеннон, оперировал понятием непроводимости (*сопротивления*).

В литературе бытует мнение, будто В.И. — это прежде всего создатель теории релейно-контактных схем. Между тем он ушел далеко вперед в своих разработках. Во-первых, он охватил своим научным взором задачи анализа и синтеза, минимизации и оптимизации широкого класса электрических (электронных) схем, включая схемы, содержащие запоминающие элементы, элементы задержки сигнала и т.п. Во-вторых, он не ограничился классической двузначной логикой — привлек трехзначную и иные логические исчисления. В-третьих, он попытался применить логику не только к технике, но и к физике. Все эти стороны его деятельности также должны быть изучены.

Взаимодействие отечественной науки с зарубежной у нас освещено мало, а между тем в этой области В.И. было сделано очень много. Интересны и его доклады на международных конференциях, и личные контакты с иностранными коллегами (например, с академиком Румынской АН Г. Моисилом), и виртуозные рефераты работ по той тематике, которая его интересовала. Интересно также, в каких семинарах участвовал В.И., о чем он рассказывал, например, на семинаре на философском факультете МГУ в 70–80-х годах.

В настоящей статье мы попытались дать ответ на некоторые из этих вопросов.

2 Начало жизненного пути. Черты личности В.И. Шестакова

Первопроходец приложений логики к технике Виктор Иванович Шестаков родился 15 октября 1907 г. (по старому стилю) в г. Москве, о чем свидетельствует выписка из метрической церковной книги [16]. Родителями его, как там сказано, являлись Иван Васильевич Шестаков — крестьянин Курской губернии и его жена Мария Бонифатьевна, «оба православного вероисповедания». Иван Васильевич (1880 г. рождения) с 1903 г. до конца своих дней работал слесарем главных железнодорожных мастерских Белорусско-Балтийской (Александровской) железной дороги. Мать, в девичестве Понкратьева, родилась в г. Двинске в 1876 г. и до смерти своего мужа в 1918 г. была домашней хозяйкой, после чего пошла чернорабочей в те же мастерские (ныне вагоноремонтный завод «Памяти Революции 1905 го-

да») [17], где работал ее муж. Став вдовой и имея на руках двух сыновей (старший — Владимир родился в 1906 г.), она была вынуждена перевести младшенького Виктора из начальной школы железнодорожного поселка станции Юдино (ныне ст. Перхушково) бывшей Александровской железной дороги, где он учился с 1915 г., в интернат 1-й Трудовой опытно-показательной школы Наркомпроса, где он находился до окончания девятого класса, то есть до 1926 г. [18].

Здоровьем Витя Шестаков не блистал [19, с. 3] — был рекордсменом по болезням среди ребят: болели, главным образом, дыхательные пути (круппозный ларингит, несколько раз воспаление легких и, наконец, туберкулезный бронхоаденит). В результате с 1923 г. шестнадцатилетний подросток попал под наблюдение туберкулезного диспансера № 2. К тому времени (1920 г.) умерла от туберкулеза его мама, ей было тогда 43 года. Став сиротой, Витя болел, по его признанию, чуть ли не каждую зиму, вплоть до окончания девятого класса интерната в 1926 г. Во время ученья, по выражению самого юноши, он проявил большую склонность и некоторые способности к технике, физике и математике [19, с. 1]. В школе много занимался — теоретически и экспериментально — электричеством и радио, что дало ему знания физики, превышавшие программу средней школы; но самое важное, по мнению самого В.И. Шестакова, была «привычка мыслить физически и работать самостоятельно по физике и применять в этой области математику» [19, с. 2]. (Отзыв школы по поводу успеваемости по физике и математике — третьего ученика в классе даже грешит преувеличением.) В дальнейшем у него не было ни одного провала по физике и математике [19, с. 2].

Учитывая свои наклонности, В.И. уже в 1926 г. предпринял первую попытку поступить на электротехнический факультет МВТУ. Он выдержал довольно трудный конкурс по письменной математике (на котором «провалились» 425 человек), но сам «завалил» политическую экономию [19, с. 2–3].

Неудача с «походом в студенты» привела к тому, что в 1926–1927 гг. он стал техническим служащим «Института методов внешкольной работы» (ИМВР), а затем чернорабо-

чим Механического завода им. Дзержинского (1927–1928 гг.). С марта 1928 г. он безработный (живет на пособие по безработице), а затем (1928–29 гг.) перебивается временной работой по путевкам Биржи труда (являясь членом профсоюза с 1927 г.). В 1928 г. Виктор совершает новую попытку поступить в МГУ — на этот раз на физико-математический факультет, но не проходит по конкурсу [18].

Но тут ему вдруг повезло: по дополнительному приему среди года (для ускорения задачи химизации страны) его принимают (1929 г.) на химический факультет МВТУ [20]. Однако здесь здоровье новоиспеченного студента, которое после окончания школы-интерната несколько поправилось (как он считал, благодаря улучшению питания), начало ухудшаться: работа в лабораториях, на практике, на химических заводах расстроила организм: Виктор температурил, почти каждый вечер болела грудь — у него был плеврит. Однажды, когда у него была температура в 38 градусов, он покинул Макеевку, где была практика [19, с. 5]. Получив справку из диспансера о туберкулезном бронхоадените [21], он был рад, что это хотя бы не туберкулез легких.

Учение на ненавистном химическом факультете продолжалось в течение двух лет. Шестаков «плавал» там, где требовалось знание химического материала, там же, где требовалась логика рассуждений, графическое построение (чемпион по составлению структурных формул изомеров!) [19, с. 7], соображение, вывод — «там я чувствовал себя лучше», вспоминает он: математикой на 1-м курсе я занимался удовлетворительно, аналитическую геометрию (в векторном изложении) изучал по Соколовскому, теоретическую механику (в векторном изложении) сдавал по Бухгольцу. На втором курсе триумф был уже за Шестаковым: «прошел» электричество на первом месте в группе — спорил с преподавателем, хотя вся группа стояла на другой точке зрения; занимался с отстающими по физике. В конце второго курса на химическом факультете МВТУ В.И. дважды выдвигался в аспирантуру — по химии и по диалектическому материализму. Однако, вспоминает

Виктор Иванович, «это не отвечало моим физико-математическим наклонностям». Проба пера в математике и физике состоялась в самостоятельных ученических штудиях: по физике это был вывод формул распространения электростатического поля для заряженной прямой проволоочки (бесконечно длинной), заряженной бесконечной плоскости, для заряда, равномерно распределенного по объему (использовался закон Кулона). Он предложил математическое доказательство отсутствия поля внутри заряженного шара. Начало второго курса химфака МВТУ (1929/30 уч. год) ознаменовалось несколькими работами по математике: изложение дифференциального и интегрального исчисления, в том числе разложение определенных интегралов в ряд Тейлора и приближенное вычисление определенных интегралов любых кратностей; занимался он и вопросами дифференциальной геометрии. Комментируя свои студенческие научные труды, Виктор Иванович писал: «Это не научные открытия, не открытие “Америки”, а просто самостоятельные работы, на которые я с удовольствием трачу свое время и энергию» [19, с. 12]. Крик души прирожденного математика и физика прозвучал в его ходатайстве о переводе на физико-математический факультет 1-го МГУ: «Дайте мне возможность заниматься этим делом не урывками, а как основной работой. Ничего подобного не наблюдается в химии: за 1,5 года у меня ни одной мысли не мелькнуло по химии» [19, с. 12].

Этот «крик души» был услышан, и будущий специалист по физической интерпретации математического аппарата для конструирования физических систем был переведен в 1930 г. из Высшего Химико-технологического училища с потерей курса на второй курс физического отделения физико-математического факультета Московского государственного университета им. М.Н. Покровского (так тогда назывался нынешний МГУ им. М.В. Ломоносова). Но пребывание в химической отрасли не прошло даром — здоровье дало сбой: в мае 1930 года Виктора берут под наблюдение в туберкулезном диспансере как страдающего туберкулезным бронхоаденитом. Это явилось печальным результатом его работы как практиканта с 24 апреля по 23 мая 1930 г. на Макеевском коксобензольном заводе, где у него, к тому же, была «отнята хлебная карточка» [22].

3 На физическом отделении физико-математического факультета Московского государственного университета. Проблема приоритета

В МГУ творческий гений Виктора Ивановича Шестакова тут же дал себя знать: уже 8 февраля 1932 г. он подает заявку в Комитет по изобретательству при Совете труда и обороны на изобретение счетной машины. 31 марта 1934 г. ему было выдано авторское свидетельство № 35435 на изобретение счетной машины типа Однера, предназначенной для производства арифметических действий не только с положительными, но и с отрицательными числами [23]. В 1936 г. талантливый студент в то время уже физического факультета защитил на «отлично» дипломную работу на тему «Теоретическое исследование спектра гармонического осциллятора при наличии случайных скачков фазы (задача Лоренца)» [24], выполненную под руководством проф. М.А. Леонтовича, и получил квалификацию научного работника второго разряда по специальности «Колебания» и преподавателя вуза и втуза, а также преподавателя техникумов, рабфаков и старших классов средней школы [25]. Осенью того же 1934 г. он становится аспирантом НИИФ МГУ (лаборатория колебаний) и получает комнату в общежитии МГУ.

Но В.И. хотел идти своим путем. По отзыву его научного руководителя, квалифицированного специалиста по физической теории колебаний, профессора Горелика аспирант В.И. Шестаков в течение трех месяцев не начинал работу по экспериментальной проверке теории затухания, создаваемого в колебательных системах случайными толчками, — теории, над которой он работал в прошлом под руководством известного физика, специалиста по теории колебаний профессора С.Э. Хайкина. Молодой ученый заявил о своем нежелании вести работу по первоначально намеченной теме. Руководство лаборатории предложило ему на выбор ряд тем, из которых он выбрал тему, касающуюся возможности обнаружения дисперсии звука в газах при слышимых частотах и при пониженных давлениях (тема, предложенная академиком Л.И. Мандельштамом). Виктор, аспирант первого года обучения, ознакомился с литературой и начал предварительные опыты, но не проявил большого энтузиаз-

ма в работе над новой темой. Его главное внимание, по мнению научного руководителя, по-видимому, направлено в сторону вопросов, лежащих далеко от общего круга интересов лаборатории: Шестаков по собственной инициативе разрабатывает идею, состоящую в том, что к теории схем сложных реле может быть с успехом применена алгебра логики. «Я считаю, — писал руководитель, — что выполнение плана своей аспирантской работы тов. Шестаковым должно быть признано неудовлетворительным» [26]. «Исследования Шестакова в области применения алгебры логики к схемам реле ... не гарантируют защиту им кандидатской диссертации», — заключает научный руководитель проф. Горелик.

Профессор Горелик оказался прав. Действительно, в конце 1934 — начале 1935 г. Виктор занимался подтверждением предположения о возможности построения алгебры релейно-контактных схем на базе логики, впервые высказанного в 1910 г. физиком Эренфестом в рецензии на русский перевод книги Кутюра «Алгебра логики». Неуправляемый аспирант, как мы указывали выше, не был знаком с рецензией Эренфеста, но установление соответствия между операциями над контактами и логическими операциями позволило ему сформулировать общий метод составления схем (однотактных), срабатывающих от заданных сочетаний сигналов. Эти результаты были изложены в январе 1935 г. в первой работе «Алгебра релейных схем» [27] (где, по мнению П.С. Новикова [28], сформулированы принципы нового расчета релейных схем) — дата существенна, так как 1 марта 1938 г. Клод Шеннон сдал в редакцию журнала реферат диссертации на соискание степени магистра, посвященной применению символической логики к анализу и синтезу релейных схем. (Саму диссертацию Шеннон представил руководству Массачусетского технологического института 10. 08. 1937 г. Точная дата получения им основных результатов в рукописной форме неизвестна.) В дальнейшем, по мнению некоторых российских ученых (С.А. Яновская, П.С. Новиков и др.), особая роль в науке Виктора Ивановича проявилась, в частности, в том, что он первый ввел в технику метод расчета путем установления аналогии между областями, казалось бы, со-

вершенно далекими и тем самым явился основоположником нового направления в технических науках.

Таким образом, уже в 1935 г. за три года до появления в США статьи К.Э. Шеннона «Символический анализ релейных и переключательных схем» [29] В.И. Шестаковым в этой области были получены важные результаты, легшие в основу его кандидатской диссертации. Кроме того, в 1935–1937 гг. в иностранных журналах был опубликован ряд статей японского ученого А. Накашимы, посвященных символическим методам представления структуры релейно-контактных схем и применения алгебры логики в качестве математического аппарата анализа и синтеза таких схем [30]. Работа «Алгебра релейных схем», как мы уже сказали, не была опубликована, так как В.И. сначала написал заявление в дирекцию НИИФ с просьбой считать его работу диссертацией, а потом, как ни странно, забрал ее обратно. В этой работе обращено внимание на параллель между соединениями двухполюсников и логическими операциями. Это соответствие автор использовал для того, чтобы применить алгебру логики для расчета релейных конструкций. Позднее (22. 10. 1949) доктор технических наук профессор М.А. Гаврилов, оценивая работу Виктора Ивановича в период 1935–1938 гг., напишет, что В.И. Шестаков — пионер по применению математического аппарата теоретической логики к решению задач синтеза и анализа релейно-контактных схем, представленных как вырожденные электрические схемы [31]. Логическая алгебра релейных схем рассматривалась Виктором Ивановичем как предельный случай особой алгебры линейных электрических цепей («алгебры А-схем»), также им построенной и упрощавшей их расчет.

4 Формирование главной идеи. В.И. Гливенко

В феврале 1935 г. у Виктора Ивановича обострился туберкулез и он ушел в академический отпуск, продолжавшийся до осени 1935 г. В это время он женится на Гене Абрамовне Гурфинкель и переезжает жить в 18-метровую комнату к теще — Эмилии Соломоновне Гурфинкель.

Однако его творческая натура не отдыхала: «С осени 1935 года я вновь приступил к работе. К этому времени у меня созрела мысль о возможности применения алгебры Буля для констру-

ирования и упрощения релейных схем», — писал он [18]. Для расширения области применения алгебры Буля (для конструирования и упрощения релейных схем) им к началу 1936 г. — уже под руководством нового научного руководителя, известного математика, выдающегося специалиста по алгебре, логике и теории вероятностей, доктора физико-математических наук профессора В.И. Гливенко — было сделано обобщение алгебры Буля и написана статья «Числовая интерпретация алгебры Буля»; ее рукопись была передана В.И. Гливенко для редактирования, однако Валерий Иванович потерял статью, и у автора на руках осталось только «Введение» [32, с. 1]. Через год (1936) статья была восстановлена и получила название «Обобщение алгебры Буля и обобщение структуры». По ней им был сделан доклад на семинаре по символической логике в НИИФ МГУ; семинар рекомендовал сделать этот доклад математическим введением к диссертации.

Отзыв профессора В.И. Гливенко от 6 октября 1936 года о работе своего аспиранта за I полугодие 1935-36 гг.: «Работа В.И. Шестакова по подготовке к кандидатской диссертации заключается в разработке найденного им математического аппарата для аналитического выражения электрических схем с последовательными и параллельными соединениями. Этот аппарат дает возможность автоматически решать задачу о получении простейших статических схем для некоторых классов релейных схем <...> Непосредственно по кандидатской диссертации В.И. Шестаковым сделано следующее: а) разработан до конца математический аппарат для аналитического выражения схем двухполюсников в предельном случае бесконечно малых и бесконечно больших сопротивлений; б) разрабатывается и получен ряд результатов для схем двухполюсников в непредельном случае конечных сопротивлений; в) найдена математическая формулировка задачи об упрощении схем двухполюсников. Ближайшей очередной работой является решение этой последней задачи. Вся работа ведется В.И. Шестаковым систематично, постановка и решение вопросов свидетельствуют о приобретении им умения вести исследовательскую работу, позволяющего рассчитывать на успешное доведение работы до конца» [33]. Позднее бывший декан физического факультета МГУ А.С. Предводителев

отметит, что отзыв Гливенко точно фиксирует идейную сторону исследований Шестакова, которые по своему содержанию и предложенным методам решения практических задач перекликаются со многими работами советских и зарубежных ученых, и продолжит: «В связи с задержкой публикаций исследований В.И. Шестакова (они не сразу были встречены радушно) роль Виктора Ивановича в применении алгебры логики Дж. Буля недостаточно четко отмечается в советской и зарубежной литературе» [34].

1936 г. стал плодотворным для Виктора Ивановича не только в научной, но и в семейной жизни — у него родилась дочь Ирина. А продолжением научных изысканий В.И. явилась (весной 1937 г.) работа над кандидатской диссертацией. Срок аспирантуры был продлен на четыре месяца, что дало ему возможность закончить диссертацию 9 января 1938 г. Она носила название «Некоторые математические методы конструирования и упрощения двухполюсных электрических схем класса А». В ней В.И. Шестаков первый в СССР и один из первых в мире осуществил идею применения к расчету электрических схем аппарата алгебры логики. Начались поиски оппонентов [32, с. 2]: профессор С.А. Лебедев отказался, однако сотрудник его лаборатории Д.И. Марьяновский согласился, но он не был доктором наук! — поиск пошел заново: сначала профессор член-корреспондент АН СССР В.И. Коваленков согласился выступить оппонентом по диссертации и, будучи ответственным редактором журнала «Автоматика и телемеханика», обещал напечатать часть рукописи; в марте 1938 г. диссертация ему была представлена, однако через 1,5 месяца он вернул диссертацию. Опубликовать диссертацию и стать по ней оппонентом он отказался. В результате первым оппонентом был приглашен доктор технических наук Лаврентьев из Наркомтяжпрома, а вторым — профессор И.И. Жегалкин, старейший русский математический логик. 28 сентября 1938 г. диссертация была успешно защищена. В ней были выяснены физические основания замеченного ранее соискателем соответствия между соединениями реле и логическими операциями. За это в 1939 г. В.И. Шестакову была присуждена ученая степень кандидата физико-математических наук. В это время он уже работал ассистентом на кафедре об-

щей физики физического факультета Московского ордена Ленина государственного университета им. М.В. Ломоносова, о чем в трудовой книжке, выданной ему 13. 01. 1939 г., была сделана запись «Научный работник физического факультета МГУ». Впоследствии (1947 г.) П.С. Новиков дал следующее заключение о диссертации В.И. Шестакова в деканат физического факультета МГУ: «Сущность этой работы состоит в применении к расчету электрических схем аппарата алгебры логики. Тов. Шестаков является первым из авторов в СССР и одним из первых в мире, кто осуществил эту идею: применение математической логики к различным техническим вопросам. Можно указать ряд авторов: Шеннон, Накашима и др., в СССР — Гаврилов, работы которых идут в указанном направлении. В настоящее время из диссертации тов. Шестакова опубликована лишь незначительная часть. Однако диссертация содержит много ценного материала, который не удалось покрыть последующими работами. Ввиду этого считаю, что необходимо поскорее опубликовать диссертацию тов. Шестакова. Опубликовать ее можно в любом издании, посвященном общим вопросам физики и техники, в частности в «Ученых записках Университета». Ввиду значительного промежутка времени, прошедшего с момента защиты, требуется некоторое редактирование этой работы» [35].

5 Спор с В. Розенбергом

Январь 1940 г. преподнес Виктору Ивановичу два сюрприза: появился первый опубликованный в печати отзыв на его диссертацию, который содержался в реферате Д.И. Марьяновского на статью инж. В.А. Розенберга «Задача о блокировке и преобразование контактных групп», опубликованном в физико-математическом реферативном журнале [36], и второй — менее приятный сюрприз — в первом номере журнала «Автоматика и телемеханика» за 1940 г. появилась сама статья В.А. Розенберга, совпадающая по содержанию, как показалось В.И., с его диссертацией, которая в 1938 г. находилась полтора месяца у ответственного редактора журнала, после чего автору было отказано в ее опубликовании. Возмущенный действиями, которые он считал несправедливостью, Виктор Иванович в апреле 1940 г. вместе со статьей «Алгебра А-схем» отправляет в редакцию письмо о сов-

падении содержания его кандидатской диссертации со статьей В.А. Розенберга [8]. 27 апреля того же года письмо аналогичного содержания пишут в редакцию этого журнала директор НИИФ член-корреспондент АН СССР профессор А.С. Предводителей и доктор физико-математических наук профессор К.Ф. Теодорчик [9]. 5 мая руководство Института физики получает ответ из редакции: сообщается о возможности публикации их письма (при необходимой корректировке текста) и ответа на него В.А. Розенберга, после его получения. 17 мая редакция получает письмо от В.А. Розенберга [11], а 23 мая — вторичное письмо от А.С. Предводителя, в котором произведена коррекция текста, которую требовала редакция. После этого наступает длительный перерыв в переписке — до осени 1940 г.

В своем письме в редакцию главный инженер Ленинградской проектной конторы «Сев.-зап. электромонтаж» В.А. Розенберг разъясняет, что содержание работ Виктора Ивановича ему неизвестно, что алгебры Буля он не знает, а изобрел ее сам, с трудами Эйлера¹ знаком частично, а отмеченные Шестаковым совпадения считает нормальным явлением для специалистов, занимающихся в одной и той же области.

Ничего не зная об этом письме Розенберга и отчаявшись ждать, Виктор Иванович 11 октября 1940 г. вновь отправляет письмо в редакцию [37], предварительно заверив его у нотариуса [38]. Редакция тоже занимает формально юридическую позицию, отказав в двадцатых числах октября как В.И. Шестакову, так и А.С. Предводителю в опубликовании их писем, так как, ввиду неочевидности плагиата вопрос о приоритете требует судебного разбирательства [12]. Чтобы смягчить впечатление от отказа, редакция предлагает опубликовать статью «Алгебра А-схем» в переработанном виде, которую она и получает 20 ноября. Исчерпав все возможности в ходе переписки с лукавым, по его мнению, руководством журнала «Автоматика и телемеханика», Виктор Иванович 6 декабря 1940 г. обращается с письмом в Президиум АН СССР [13] с просьбой о защите его приоритета в вопросе применения алгебры Буля к электрическим схемам. В

¹По-видимому, имеются в виду использовавшиеся Эйлером «круговые схемы», служившие для наглядного представления операций над классами (объемами понятий).

это время Виктор Иванович пребывал в должности ассистента МГУ. «Службу в рядах Советской Армии (В.И.) не проходил по состоянию здоровья» [39]. В начале 1941 г. его переводят на должность доцента, а чуть позже утверждают в этом ученом звании [40]. В этом качестве 13. 10. 1941 г. он и получает удостоверение об эвакуации из Москвы с семьей из трех человек в г. Ашхабад, где МГУ в это время находился по постановлению Правительства [41].

6 Публикация основополагающих результатов

Начало 1941 г. ознаменовалось выходом первой научной работы В.И. Шестакова «Алгебра двухполюсных схем, построенных исключительно из двухполюсников (Алгебра А-схем)» [42]. Работа представляла собой извлечения из его кандидатской диссертации 1938 г. и была посвящена применению математической логики к релейной технике. Оказалось, что непосредственное применение уже готового аппарата исчисления высказываний к релейно-контактным схемам возможно лишь для выделенного В.И. Шестаковым случая схем класса А, не содержащих «мостиковых» соединений. Реферат на статью впоследствии был опубликован за рубежом [43]. Также в начале 1941 г. в «Журнале технической физики» появилась его одноименная статья [44], представлявшая собой расширенную версию предыдущей. Здесь были даны точные определения и доказательства всех формул, содержащихся в первоначальной статье.

Все эти годы, начиная с 1938 г. в Москве, затем в Ашхабаде, позднее в Свердловске [45], куда перевели МГУ, и, наконец, снова в Москве Виктор Иванович интенсивно занимался реферированием научных работ, доведя их к 1955 г. до 54, среди которых были два перевода с языка оригинала [46]. В «Ученых записках МГУ» за 1944 г. появилась его статья «Об одном символическом исчислении, применимом к теории релейных электрических схем» [47] — краткая версия двух предыдущих статей, реферат на которую потом появился за рубежом [48].

После возвращения В.И. Шестакова из эвакуации в 1943 г. его семья получает 19-метровую комнату в Пушкинском студенческом городке в деревянном стандартном доме, построенном по

коридорной системе [49]. В нем отсутствовали водопровод, канализация, центральное отопление, и вся эта «благодать» находилась в 1,5 часах езды от работы. Здесь семья Шестаковых прожила до 1954 г., когда по ходатайству ректора МГУ была предоставлена 21,8-метровая комната в коммуналке на Ломоносовском проспекте, что явилось исправлением «допущенной по отношению ко мне вопиющей несправедливости» со стороны деканата физического факультета, уже вторично не включившего В.И. в список на получение квартиры в 14-этажном доме МГУ, в то время как деканат находил возможность включать в список на получение квартир во вторую очередь сотрудников, которым уже ранее предоставлены были благоустроенные квартиры — так писал Виктор Иванович в своем заявлении ректору [50]. Удивительно, но ни в одном ходатайстве В.И. Шестакова не встречается ссылка на состояние здоровья, хотя уже 20. 12. 1945 г. в справке туберкулезного диспансера констатировались «активный туберкулез легких и необходимость в получении карточки “ТБ”» [51].

Несмотря на неважное состояние здоровья и плохие бытовые условия, Виктор Иванович продолжал свою научную работу; он печатает статью «Представление характеристических функций предложений посредством выражений, реализуемых релейно-контактными схемами» [52], где указывает возможность технических приложений многозначных логик. В августе 1946 г. он получает Извещение редакции журнала «Математический сборник» о получении и принятии к рассмотрению его статьи «О возможности моделирования операций трехзначной логики посредством трехпозиционных коммутаторов» [53], в которой излагается способ представления функций, определенных на множестве из трех элементов и принимающих значения из этого же множества, посредством операций обыкновенной алгебры логики и при том такой, что полученные представления уже можно реализовать при помощи электрических схем. Далее он показывает, что сфера применения аппарата алгебры логики чрезвычайно широка. Она охватывает все устройства дискретного действия, особенно такие, в которых параметры могут принимать только два значения. Для него стало ясно, что применение указанного аппарата будет весьма полезно и для конструирования

ния счетных машин дискретного действия [54]. В 1952 г. Виктор Иванович переводит с английского главу XIII «Арифметические элементы» из книги «Быстродействующие вычислительные машины». Он также вносит свой вклад в развитие молодого искусства программирования ЦВМ и участвует в написании первой отечественной монографии по этому искусству. За работу в области вычислительной математики «Решение математических задач на автоматических цифровых машинах. Программирование для электронных счетных машин» он совместно с М.Р. Шура-Бура, А.А. Абрамовым и членом-корреспондентом АН СССР Л.А. Люстерником получил в 1953 г. премию Президиума АН СССР [55].

В мае этого же года выходит приказ министра высшего образования о прикомандировании в докторантуру МГУ В.И. Шестакова для выполнения докторской диссертации на тему «Алгебраические методы анализа и синтеза систем с конечным числом устойчивых состояний» [56] с 5. 05. 1952 г. по 5. 11. 1953 г. (включая отпуск). Научным консультантом утверждается доктор физико-математических наук профессор К.Ф. Теодорчик. Приказ обязывал докторанта представить краткий отчет о состоянии работы над диссертацией к 10. 01. 1953 г., а окончательный отчет о результатах выполнения докторской диссертации и о ее защите — по окончании срока пребывания в докторантуре.

Основной целью диссертации являлось [57] исследование и разработка алгебраических методов анализа и синтеза таких релейных систем дискретного действия, реле которых работают в некоторой последовательности, определяемой либо внешними воздействиями, либо структурой системы и начальными условиями. План докторской диссертации [58] включал Введение, две части и Заключение. Пять глав первой части посвящались анализу и синтезу систем, построенных из элементов, имеющих только два устойчивых состояния. Три главы второй части должны были осветить проблему анализа и синтеза систем, имеющих конечное число устойчивых состояний. Отчет за 11 месяцев работы над докторской диссертацией, адресованный ректору МГУ [59], гласил: написана работа объемом 200 машинописных страниц, которая

является теоретической частью докторской диссертации; не осуществлена вторая часть, посвященная вопросам практического применения полученных автором результатов в области вычислительных машин, что связано с неясностью вопроса о секретности этой части диссертации. В окончательном отчете ректору о причинах невыполнения плана пребывания в докторантуре Виктор Иванович сетует на бытовые проблемы в студгородке Останкино и отсутствие поддержки МГУ в публикации его результатов.

В это время [60], с 1949 по 1953 г. Виктор Иванович работает по совместительству сначала младшим, а с 1950 г. старшим научным сотрудником по специальности «вычислительная техника» в Институте точной механики и вычислительной техники АН СССР, где разрабатывает новую в то время область прикладной математики — программирование и решение математических задач на АВМ и готовит статью «Моделирование операций исчисления предложений посредством простейших четырехполюсных схем» [61]. Статья состояла из двух разделов. В разделе I излагались результаты работ автора по алгебре двухполюсных схем [44] и моделированию операций исчисления предложений посредством двухполюсных схем [62]. Раздел II был посвящен моделированию операций исчисления предложений посредством четырехполюсных схем, где под четырехполюсником понималась электрическая цепь с двумя входными и двумя выходными полюсами, причем токи через полюсы каждой из этих пар равны и противоположны. Работа была доложена в марте 1949 г. в Институте точной механики и вычислительной техники на общеинститутском семинаре, а также в МГУ на семинаре по математической логике, руководимом П.С. Новиковым и С.А. Яновской, и на семинаре А.Г. Куроша и Л.А. Люстерника по прикладной алгебре. Когда встал вопрос о публикации этой работы — а уже прошло три года, — возникла необходимость некоторой ее переработки. В частности, она была пополнена примером схемы двоичного сумматора с одновременным переносом во все разряды. Синтез электронных вычислительных и управляющих схем настолько заинтересовал Виктора Ивановича, что в 1954 г. он перевел с английского и отредактировал книгу под этим названием.

7 «Школа» М.А. Гаврилова «теснит» первооткрывателя

В 50-е годы Виктор Иванович разрабатывает теорию многотактных релейных схем и публикует ряд исследований по их анализу и синтезу [15]. Он публикует статью «Алгебраический метод анализа автономных систем двухпозиционных реле» [63], в которой «Исследуются процессы, возможные в автономной системе реле с одинаковыми запаздываниями при срабатывании и отпуске. <...> Предлагается метод анализа автономных систем, основанный на разложении ее функции на конститuenty единицы и нахождении состояний системы, обращающих конститuenty в 1, что позволяет найти анализируемые процессы простым обозрением формулы разложения функции. В качестве примеров анализируются схема из книги М.А. Гаврилова (Теория релейно-контактных схем. М.-Л.: 1950) и схема из статьи В.А. Розенберга (Автоматика и телемеханика, 1939. №1)» [64, реф. 2422]. В статье «Алгебраический метод синтеза автономных систем двухпозиционных реле» [65] Шестаков приводит «пять примеров применения предложенного метода синтеза. В заключение этот метод сравнивается с методами, основанными на представлении процессов в релейных системах с помощью графиков (временных диаграмм) и с помощью таблиц включений. Вывод таков, что все различные способы представления процесса работы автономной системы реле, используемые в сравниваемых методах, совершенно равносильны и отличаются друг от друга лишь различной степенью сложности и наглядности. По мнению автора, предложенный в статье алгебраический способ записи процесса является наиболее компактным, а способ, использующий временные диаграммы, — наиболее наглядным» [64, реф. 2423]. Эти статьи по просьбе редакции журнала «Автоматика и телемеханика» от 17. 11. 1952 г. были написаны в декабре 1952 г. и разрешены к опубликованию экспертной комиссией физического факультета МГУ; 10. 01. 1953 г. статьи были сданы в редакцию, с апреля по октябрь 1953 г. они находились у члена редколлегии профессора М.А. Гаврилова, который в начале октября вернул их без отзыва, а 9 октября 1953 г. представил собственную статью «Основные формулы синтеза релейных схем». Опубликование же статей В.И. Шестакова было от-

ложено до 1954 года. Виктор Иванович письменно потребовал от ответственного редактора журнала справедливого решения вопроса об опубликовании главной его статьи, посвященной синтезу релейных схем, который ставился почему-то в зависимость от его отзыва на выше названную статью члена редколлегии М.А. Гаврилова. Ранее, в апреле 1951 г. подобная просьба редакции написать рецензию на книгу М.А. Гаврилова «Теория релейно-контактных схем» (1950 г.) удовлетворилась Шестаковым без всяких условий. В 1954 г. история с задержкой публикации повторилась уже в журнале «Доклады АН СССР» со статьей В.И. «Алгебраический метод синтеза автономных релейных систем», на которую 18. 05. 1954 г. была получена справка физического факультета об отсутствии государственной тайны [66]. Будущий академик АН СССР П.С. Новиков [67] направил главному редактору «Докладов АН СССР» два письма в поддержку статьи В.И. Шестакова (14. 05 и 09. 06. 1954 г.), и тем не менее ее публикация задержалась настолько, что появился новый, более общий вариант статьи, содержащий решение общего вопроса о синтезе как автономных, так и неавтономных релейных систем.

Исследования В.И. Шестакова по теории многотактных релейных схем оказали значительное влияние на формирование более общей теории конечных автоматов, что сделало его одним из основателей этой важной отрасли современной дискретной математики.

8 Доклад на совещании по теории устройств релейного действия. Поддержка С.А. Яновской

Обобщением и распространением на неавтономные релейные системы того метода, который был ранее предложен автором для синтеза автономных систем (работа «Анализ и синтез релейных систем, построенных из элементов, имеющих только два устойчивых состояния»), явился метод, изложенный Виктором Ивановичем в работе «Алгебраический метод синтеза многотактных релейных систем» [68]. Здесь задача синтеза решена в предположении, что все реле рассматриваемой системы имеют одинаковое запаздывание как при срабатывании, так и при отпуске, и что изменения всех параметров совершаются прак-

тически мгновенно и синхронно. «Описанный метод, — писала в отзыве руководитель семинара по алгебре логики и ее техническим приложениям в МГУ профессор С.А. Яновская, — представляет интерес как для инженеров, работающих в области автоматики и телемеханики, так и для математиков <...> Ценность этого метода определяется тем, что операции булевой алгебры легко реализуются, как известно, посредством релейных схем» [69], а известный ученый-кибернетик Г.Н. Поваров в реферате на статью отмечал, что в ней «Излагается векторно-алгебраический метод синтеза многотактных релейных систем, не требующий применения каких-либо таблиц или графиков и представляющий собой обобщение и распространение на неавтономные релейные системы метода, предложенного автором для синтеза автономных релейных систем (РЖМ, 1955, 2424). Отмечается применимость этого метода, в частности, для синтеза синхронных цифровых вычислительных машин в смысле Рида (РЖМ, 1954, 4614) [64, реф. 2904]. Для апробации своих идей в 1957 г. на Всесоюзном совещании по теории устройств релейного действия В.И. Шестаков делает доклад «Об алгебраическом методе анализа и синтеза многотактных релейных схем» [70]. В этот же период Виктор Иванович высказался о границах области применения булевой алгебры для синтеза релейно-контактных схем класса «П» [71].

Изложенный в вышеуказанных работах векторно-алгебраический метод синтеза систем двухпозиционных реле позволяет всегда по заданным последовательностям состояний реле синтезируемой системы и заданным последовательностям внешних воздействий на эту систему получать булевы функции, описывающие условия работы каждого из реле синтезируемой системы. Резюме по этому поводу — «Векторно-алгебраический метод анализа и синтеза многотактных релейных систем» опубликовано В.И. Шестаковым в «Трудах III Всесоюзного математического съезда» [72]. Там же излагается резюме «Математическая проблематика структурной теории релейных схем» [73] в соавторстве с М.А. Гавриловым, Г.Н. Поваровым, В.Н. Рогинским и А.Д. Харкевичем. В 1957 г. в «Докладах АН СССР» Виктор Иванович предлагает «Алгебраический метод синтеза многотактных схем r -позиционных реле» [74] — этот векторно-

алгебраический метод синтеза многотактных релейных систем из r -позиционных реле не требует построения таблиц включений. «Метод является обобщением метода синтеза релейных систем из двухпозиционных реле, предложенного ранее автором (РЖМ. 1955. 2904) <...> Алгоритм синтеза системы, построенной из r -значных реле, аналогичен алгоритму синтеза систем, построенных из двухпозиционных реле, и в данном случае основывается на использовании операций многозначной логики — алгебры Вебба» [75]. В журнале «Математика в школе» печатается его статья [76], где в популярной форме излагаются «основные понятия и идеи алгебры контактных схем, а также соотношение между исчислением высказываний, алгеброй контактных схем и двоичной алгеброй Буля» [77]. «Приводятся примеры синтеза релейно-контактных схем и электронно-ламповых релейных схем. Описываются принципы работы запоминающих и арифметических устройств вычислительных машин. Рассматривается в общих чертах проблема минимизации релейных схем. Указываются перспективы развития автоматизации, обусловленные использованием методов математической логики и теории вероятностей» [78]. Простейшими способами механизации вычислений булевых функций явились предложенные Виктором Ивановичем «Перфокарточный метод синтеза многотактных релейных систем» [79] и «Перфокарточный метод синтеза многотактных систем многопозиционных реле» [80], опубликованные в журнале «Автоматика и телемеханика». С декабря 1953 г. по декабрь 1956 г. В.И. Шестаков работал внештатным редактором отдела «Алгебра (Математическая теория) электрических цепей» реферативного журнала «Математика» [81]. Также в 1953–1954 гг. Виктор Иванович являлся одним из руководителей семинара «Алгебра логики и релейно-контактных схем» на механико-математическом факультете МГУ. Другой постоянный семинар — по техническим приложениям математической логики — начал свою работу в октябре 1955 г. в МГУ по инициативе профессора С.А. Яновской. Доцент физического факультета В.И. Шестаков был соруководителем и этого семинара. В 1955–1957 гг. на семинаре обсуждались, главным образом, проблемы структурного анализа и синтеза контактных и бесконтактных релейных схем [82]. В 1957–1958 гг. работы участников семина-

ра касались, главным образом, методов анализа и синтеза релейных схем упомянутого типа [83].

9 В.И. Шестаков — руководитель собственного научно-исследовательского семинара

В 1950–1960 гг. Виктор Иванович становится руководителем собственного семинара по теории релейных схем в МГУ, прекрасного, по словам его участников. Семинар работал сначала при кафедре истории математики, руководимой С.А. Яновской, а затем при кафедре общей физики, собирая многочисленных участников из разных учреждений; он сыграл большую роль в развитии и пропаганде новых методов разрабатывавшейся Шестаковым теории. Результатом этой деятельности явилась работа «Анализ и синтез релейных систем, построенных из элементов, имеющих только два устойчивых состояния». В отзыве на нее 28 октября 1953 г. доктор физико-математических наук профессор С.А. Яновская писала: «Представляется имеющей важное значение Гл. III, посвященная автономным и неавтономным системам. Проблема анализа и синтеза таких систем, последующие состояния которых определяются их предшествующими состояниями, представляет особый интерес с точки зрения технических приложений для математических вычислений. С этой же точки зрения, особенно имея в виду электрические системы, представляется вполне естественным выбор автором в качестве математического аппарата операций булевой алгебры. Тщательно, вплоть до деталей, разработанные В.И. Шестаковым методы анализа и синтеза соответствующих релейных систем дают в руки ученого и практика простые, легко применимые и общие приемы, позволяющие значительно упрощать задание функции для реализации ее с помощью релейной схемы. Об этом прежде всего свидетельствуют многочисленные, разобранные автором примеры. Поставленные в этой связи автором общие вопросы об упрощении задания примитивно-рекурсивных функций для их технической реализации имеют и самостоятельный теоретический интерес» [84]. В докладе Виктора Ивановича «Карточный метод синтеза многотактных релейных систем» (27. 09. 1957 г.) был изложен предложенный автором векторно-алгебраический метод синтеза систем двухпозиционных реле посредством спе-

циальных перфокарт. Доклад стал основой уже упоминавшейся статьи в журнале «Автоматика и телемеханика», в автореферате которой сказано: «Излагается перфокарточный метод синтеза автономных и неавтономных многотактных систем двухпозиционных реле, являющийся развитием векторно-алгебраического метода автора (РЖМ. 1955. Реф. 2423, 2424, 2904).<...> Процедура синтеза неавтономной системы аналогична процедуре синтеза автономной системы <...> Комплекты карт, предназначенных для синтеза систем, построенных из реле и зависящих от независимых параметров, можно применять также и для синтеза систем, построенных из любого меньшего числа независимых параметров. В частности перфокарты, предназначенные для синтеза неавтономных многотактных систем, могут быть использованы и для синтеза автономных систем» [85].

10 Использование исчисления Д.А. Бочвара.

Расцвет творческой деятельности

В.И. Шестакова

Вопросам моделирования операций трехзначного исчисления высказываний посредством трехпозиционных релейно-коммутаторных схем был посвящен доклад В.И. Шестакова (22. 11. 1957 г.) «Моделирование операций исчисления Д.А. Бочвара посредством трехпозиционных коммутаторов» [86]. Этот метод моделирования изложен также в статье «Моделирование операций исчисления высказываний посредством релейно-контактных схем» [87], в реферате которой говорится: «В первой части статьи излагаются результаты предыдущих работ автора (Изв. АН СССР. Сер. Матем., 1946. 10; РЖМат. 1955. 2095), посвященных моделированию операций исчисления предложений посредством двухполюсных и четырехполюсных релейно-контактных (р.-к.) схем, и вводятся новые («безрелейные») обозначения для одноконтных р.-к. схем нормального типа.<...> Во второй части рассматривается моделирование операций трехзначного исчисления высказываний — исчисления Бочвара (Матем. сб. 1938. 4(46); 1943. 12(54)) посредством трехпозиционных коммутаторов.<...> Подробно рассматривается моделирование различных функций трехзначного исчисления высказываний посредством двух- и трехпозиционных коммутаторов и их каскадных

соединений. Указываются некоторые возможности упрощения схем, моделирующих рассматриваемые функции» [88]. Той же теме посвящен и доклад (26. 11. 1957 г.) «Об одной арифметической интерпретации трехзначного исчисления Д.А. Бочвара» [89]. Основное внимание в этих статьях уделено исследованию общих принципов моделирования операций исчисления высказываний посредством релейно-контактных схем. Оказалось, что моделирование логических исчислений является важным источником методов анализа и синтеза релейных схем и имеет первостепенное значение для создания логических машин. В 1958–1959 гг. часть докладов на семинаре В.И. Шестакова касалась общих вопросов математической логики, возникших из потребности ее технических приложений, но имеющих и самостоятельное теоретическое значение. В 1959–1960 гг. состоялось еще 17 заседаний этого действовавшего с 1955 г. под руководством Виктора Ивановича семинара по техническим приложениям математической логики, инициированного в свое время одним из старейших профессоров Московского университета Софьей Александровной Яновской.

Нормальных условий для работы ни на факультете, ни дома у Виктора Ивановича в те годы не было. «На факультете у меня нет даже отдельного письменного стола, — писал он в 1958 г. в заявлении заведующей кафедрой, — хотя я веду научную работу теоретического характера в новом, начатом мною впервые в Советском Союзе, направлении <... > В домашних условиях работать мне также очень трудно. Кроме моей семьи в квартире, где я сейчас проживаю, еще три больших семьи, все с маленькими детьми. На четыре комнаты — прописанных жильцов 17 человек, не считая временно проживающих. В квартире всегда очень тесно и шумно, нет покоя ни днем, ни ночью. Может быть, не требует особых объяснений и то обстоятельство, что находиться родителям в одной комнате со взрослой дочерью-студенткой также не очень удобно» [49]. Отдельная комната, хотя и меньшей площади (19 кв.м.), в 1962 г. была все-таки получена на Ломоносовском проспекте, и лишь в 1963 г. на 56-м году жизни всемирно известный ученый получает впервые отдельную двухкомнатную квартиру площадью 31,6 кв.м. на улице Лобачевского [90].

Все работы Виктора Ивановича в те годы в той или иной

степени связаны с вопросами синтеза электрических схем. Так, в 1960 г. в журнале «Автоматика и телемеханика» он опубликовал рецензию на книгу В.Н. Рогинского «Элементы структурного синтеза релейных схем управления» [91]. Автор прислал письмо в редакцию, ответом на которое стала статья Виктора Ивановича [92], в которой он привлек для расчета релейных схем аппарат алгебры логики, остававшейся до этого времени только на почве чисто отвлеченных вопросов, не связанных с практикой, и статья «К вопросу о синтезе смешанных релейно-контактных схем класса П» [93], в которой «рассматривается проблема синтеза релейно-контактных схем класса П (р.-к. П-схем) и исследуются границы применимости булевой алгебры для анализа и синтеза схем этого класса. Разделимыми (или сепарабельными) названы n -релейные П-схемы, которые можно разложить на непересекающиеся однорелейные двухполюсные подсхемы таким образом, чтобы при подключении каждой из них к отдельному источнику ЭДС реле в них работали так же, как и в исходной схеме. Утверждается, что булева алгебра достаточна для анализа и синтеза разделимых П-схем. Несущественно неразделимыми названы П-схемы, получаемые из разделимых П-схем заменой некоторых реле чисто релейными П-схемами, содержащими не менее 2 реле. Анализ и синтез несущественно неразделимых П-схем тривиальным образом сводятся к анализу и синтезу разделимых П-схем. Утверждается, что для анализа и синтеза существенно неразделимых р.-к. П-схем булева алгебра недостаточна. В заключение высказываются критические замечания о работах В.Н. Рогинского по теории синтеза «смешанных» р.-к. П-схем (РЖМ. 1958. Реф. 4556, 7554). Особенностью изложения является систематическое использование алгебры двухполюсных П-схем, что позволило заменить чертежи схем их алгебраическими выражениями» [94]. В статье «Об одной теории синтеза смешанных релейно-контактных схем класса П» [95] Виктором Ивановичем «критикуются работы В.Н. Рогинского по теории синтеза смешанных релейно-контактных схем класса П (РЖМ. 1958. 4556, 7554; 1960. 10120 К; Сб. научных работ по проводной связи. АН СССР. 1957. Вып.6). Автор возражает против предложенного В.Н. Рогинским понятия “порядок проводимости” и связанных с ним схемных преобразований.

Утверждается, что “в настоящее время проблема создания математического аппарата, настолько же адекватного для анализа и синтеза любых р.-к. П-схем, насколько адекватной является булева алгебра для анализа и синтеза контактных П-схем, еще не решена”» [96]. В ответе [97] на эту статью Виктора Ивановича В.Н. Рогинский «отклоняет возражения В.И. Шестакова против понятия “порядок проводимости” и связанных с ним схемных преобразований, считая, что эти возражения основаны на смешении понятия “порядок проводимости” с понятием “величина проводимости”. Выражается пожелание, чтобы специалисты высказали свое мнение по затронутым вопросам» [98]. Виктор Иванович, в свою очередь, пишет «Ответ на письмо в редакцию В.Н. Рогинского (“О теории синтеза смешанных релейно-контактных схем класса П”» [99], из которого следует, что «продолжается дискуссия по двум вопросам: 1) Какой смысл, количественный или качественный, имеют символы проводимости в книге В.Н. Рогинского (РЖМ. 1960. 10120 К)? 2) Имеет ли практическую ценность понятие “порядка проводимости”, введенное в той же книге? Отмечается ряд противоречий между утверждениями “письма” Рогинского (РЖМ. 1961. 12А368) и его книги» [100].

В.И. Шестаков явился основоположником нового направления — синтеза электрических схем. В 1962 г. вышла его статья «Синтез одноконтурного сумматора двоичных чисел, построенного из двухполюсных переключателей и поляризованных реле» [101]. В реферате статьи говорилось: «В работе осуществлен синтез многоразрядного двоичного сумматора из коммутаторов (четыреполюсных переключательных схем, содержащих в данном случае по четыре контакта) и поляризованных реле. Построенный сумматор обладает той особенностью, что сложение двух чисел в нем производится за один такт срабатывания реле. Полученная автором схема содержит на два контакта меньше (на каждый разряд сумматора), чем наиболее простая из предложенных до сих пор контактных схем одноконтурных сумматоров, реализованная в вычислительной машине Марк - II. Автор в процессе синтеза пользовался своими предыдущими результатами в теории релейно-контактных схем и исчислении предложений» [102]. В 1964 г. появилась другая статья

В.И. — «О взаимоотношении некоторых трехзначных логических исчислений» [103], в реферате которой читаем: «Рассматриваются некоторые трехзначные логические исчисления, порождаемые соответствующими операциями. <...> Рассматривается также интерпретация трехзначного исчисления, предложенная Д.А. Бочваром. <...> Доказывается, что исчисления Клини, Клини–Бочвара и трехзначная логика Лукасевича <...> функционально эквивалентны, а поскольку последняя функционально неполна, то оба исчисления Клини и Клини–Бочвара функционально неполны. Каждое из этих исчислений может быть расширено до функционально полного добавлением функции Слупецкого $U(P) = U$ » [104]. В это же время В.И. совместно с Б.В. Бирюковым и Л.А. Калужниным опубликовал статью «Логические машины» [105].

Пионерские исследования Виктора Ивановича положили начало математическому проектированию дискретных технических устройств, что дало мощный толчок развитию самой математической логики, в особенности таких ее разделов, как булева алгебра, исчисление высказываний, многозначные логики. Результатом его участия в международном симпозиуме по теории релейных устройств и конечных автоматов (Синтез релейных структур) в 1962 и в 1965 гг. явились соответственно доклады «Алгебра релейно-коммутаторных схем» [106] и «Алгебра коммутаторных схем (Алгебра четырехполюсников, соединенных двухпозиционными коммутаторами)» [107]. В этих докладах Виктор Иванович говорил о реализации булевых функций посредством схем, построенных из двухпозиционных коммутаторов и поляризованных реле, а также о реализации основных операций трехзначного исчисления Клини — Бочвара посредством релейно-контактных схем и об основных законах алгебры релейно-контактных схем, построенных из трехпозиционных реле и коммутаторов. В статье «О некоторых расширениях исчислений Бочвара и Клини до функционально полных трехзначных исчислений» [108] В.И. Шестаков показал, что «любое исчисление, функционально эквивалентное трехзначному исчислению Лукасевича, можно расширить до функционально полного трехзначного исчисления, добавляя к числу его основных операций любую унарную небочварову операцию, т.е. операцию, не содер-

жащуюся в исчислении Бочвара. Показано также, что содержащиеся в трехзначном исчислении Лукасевича, но функционально не эквивалентные ему исчисления — регулярное исчисление Клини и исчисление, названное в статье классическим исчислением Бочвара, — могут быть расширены до функционально полных трехзначных исчислений посредством пополнения их унарными небочваровыми операциями: “псевдооперациями” P и $\bar{P}$ соответственно. В заключение рассматриваются два изоморфа трехзначного исчисления Вебба, в которых операции регулярного исчисления Клини и классического исчисления Бочвара определяются совершенно аналогично» [109].

Значение работ В.И. Шестакова в этой сфере отмечалось А.С. Предводителевым в статье «К истории применения алгебры Буля в технике» [1]. К этой же проблематике относится статья Виктора Ивановича «Об одном фрагменте исчисления Д.А. Бочвара» [110]. В статье «Трехзначная логика» [111] мы читаем, что «Исчисление Клини — Бочвара советский логик В.И. Шестаков, используя функцию Вебба, расширил до функционально полного трехзначного исчисления высказываний <...> Двойная арифметическая интерпретация трехзначного исчисления высказываний, предложенная В.И. Шестаковым, используется при моделировании этого исчисления посредством релейно-контактных схем».

В 1960-е гг., занимаясь проблемами многозначных логик и их технических приложений и получив ряд интересных результатов, Виктор Иванович постоянно следит за зарубежными публикациями: в 1961 г. редактирует [112] книгу Г.К. Моисила «Алгебраическая теория дискретных автоматических устройств» [113] и рецензирует книгу Whitesitt J.E. «Булева алгебра и ее приложения» [114], а в 1964 г. публикует рецензии на книгу Goodstein R.L. «Булева алгебра» [115] и на книгу Flegg H.G. «Булева алгебра и ее приложения» [116]. К середине 1960 г. Виктор Иванович заключает договоры с Физматгизом на написание справочника «Методы функционального анализа и структурного синтеза релейных систем» [117] и на написание книги «Математическая логика в теории релейных схем», а с Учпедгизом — на написание брошюры «Математическая логика и автоматизация вычислений» [118]. Однако эти книги написаны не были.

11 Поддержка Научного совета по кибернетике при Президиуме АН СССР

К середине 1965 г. развитие работ в области теории релейных устройств и конечных автоматов приняло такой размах, что потребовалось заключение Научного совета по комплексной проблеме «Кибернетика» при Президиуме АН СССР (от 22. 05. 1965 г.) о проведении мероприятий по развитию исследований в области теории релейных устройств и конечных автоматов, по внедрению теории релейных устройств и по развитию преподавания теории релейных устройств и конечных автоматов во ВТУЗах [119]. В рамках этой программы состоялась научная командировка [3] В.И. Шестакова в Бельгию на Международный симпозиум «Логические системы, их теория и применение» [120] (15. 09.–20. 09. 1969 г.), где он выступил с докладом «Использование булевых, лугасевичевых и бочваровых операций в теории логических систем» [121].

В 1970-е и начале 1980-х годов В.И. Шестаков вернулся к алгебре линейных электрических цепей и предложил новые методы их представления и расчета. Этим вопросам посвящены статьи в журнале «Вестник Московского университета»: «О матричных представлениях каскадных соединений четырехполюсников» [122]; «Об одном универсальном методе символического представления каскадных соединений двухпроводных цепей» [123]; «Об одном методе символического представления каскадных и параллельных соединений нормальных n -проводных цепей» [124]; «Операции обращения и инверсии комплексных физических величин» [125]; «Метод символического представления параллельных соединений N -полюсных цепей» [126]; «Основные законы алгебры параллельных соединений N -полюсников» [127] и «О применении трехзначной логики для анализа отношений между физическими величинами» [128]. Однако ходатайство руководства физического факультета в редакцию журнала «Доклады АН СССР» от 29. 06. 1978 г. об опубликовании статьи В.И. Шестакова «Об одном обобщении булевой алгебры» [129] не встретило понимания.

Всего у В.И. Шестакова, согласно его собственным спискам, насчитывается 32 публикации [130] (по данным В.И. Левина их 40), авторское свидетельство [23] и 76 рефератов в физико-

математическом реферативном журнале и в реферативном журнале «Математика» и, кроме того, три перевода рефератов [46].

12 Неопубликованное

Неопубликованными при жизни В.И. Шестакова остались несколько рукописей, и в их числе: 1935 г. — «Реле и релейные схемы» (разделы «Типы реле», «Алгебра релейных схем», «Общий метод составления схем», «Пример»); 20. 03. 1963 г. — «Релейное устройство автономное» (т. е. релейное устройство, не имеющее приемных элементов и, следовательно, входов), предназначенное, по-видимому, для какого-то справочника; 24. 05. 1978 г. — «Об одном обобщении булевой алгебры»; 29. 06. 1978 г. — «Расширение структуры (решетки) и частичнобулевы алгебры»; 18. 03. 1986 г. — «О применении трехзначной логики в теории размерностей физических величин», где общие вопросы теории размерностей, методика их постановки, представляющие интерес не только для специалистов, но и для широкого круга физиков, разрабатываются в продолжение серии работ автора, опубликованных ранее: «Моделирование операций исчисления высказываний посредством релейно-контактных схем» [131], «Операции обращения и инверсии комплексных физических величин» [125] и «О применении трехзначной логики для анализа отношений между физическими величинами» [128], где автором удачно использована логика Д.А. Бочвара для анализа отношений между физическими величинами; 5. 06. 1986 г. — «Об эквивалентности пассивных двухполюсников» [132], где определяется в терминах и символах исчисления высказываний трехзначной логики Д.А. Бочвара отношение эквивалентности пассивных двухполюсников и выводятся основные свойства этого отношения; 3. 04. 1987 г. — «О применении исчисления высказываний в теории пассивных двухполюсников» [133], где рассматривался вопрос о применении исчисления высказываний трехзначной логики B_3 (логики Д.А. Бочвара) для анализа отношений эквивалентности и неэквивалентности пассивных двухполюсников и отношений равенства и неравенства их параметров, действительных и комплексных; особое внимание уделялось использованию операций исчисления предложений — частному случаю исчисления высказываний логи-

ки B_3 . Работы «О применении трехзначной логики для анализа отношений между физическими величинами» и «Об эквивалентности пассивных двухполюсников» были опубликованы посмертно в «Вестнике Московского университета» (Сер. 3. Т. 28. 1987. № 3).

13 Признание заслуг — приходит

Признание работ ученого неоднократно отмечалось в литературе: С.А. Яновская в статье «Основания математики и математическая логика» говорит, в частности, что «применениям аппарата математической логики в теории релейно-контактных схем был посвящен ряд работ, принадлежащих В.И. Шестакову и М.А. Гаврилову» [134]. Об этом пишут М.А. Гаврилов в книге «Теория релейно-контактных схем» [135], А.Г. Лунц в диссертации «Теория многополюсников» [136], Г.Н. Поваров в статье «Логика на службе автоматизации и технического прогресса» [137], А.С. Предводителей в упоминавшейся статье «К истории применения алгебры Буля в технике» [1].

В статье, написанной А.А. Марковым и помещенной в Большой Советской Энциклопедии, говорится, что «В 1938 К. Шеннон (США), а в 1941 В.И. Шестаков (СССР) показали возможность использования для синтеза и анализа релейно-контактных схем аппарата математической логики. Тем самым было положено начало развитию современной теории автоматов» [139] и что математическая логика «имеет глубокую принципиальную связь с теорией построения автоматов, в частности с “машинной математикой”». Советским ученым В.И. Шестаковым было открыто в 30-х гг. важное применение классического исчисления высказываний к релейно-контактным схемам, широко используемым в автоматических устройствах. Рассматривая двухполюсные релейно-контактные схемы, Шестаков заметил, что всякая такая схема в следующем смысле *моделирует* некоторую формулу U классич. исчисления высказываний. Если схема управляется n реле, то столько же различных логических переменных содержит U , и, если обозначать через P_i суждение « i -е реле сработало», то цепь будет тогда и только тогда замкнута, когда будет верен результат подстановки суждений $P_1, \dots, P_n$ вместо соответствующих логических переменных в U . Построение такой

моделируемой формулы, описывающей “условия работы” схемы, оказывается особенно простым для так называемых П-схем, получаемых из неразветвленных одноконттактных элементарных цепей путем многократных параллельных и последовательных соединений. Это связано с тем, что параллельное и последовательное соединение цепей моделирует соответственно дизъюнкцию и конъюнкцию суждений. В самом деле цепь, полученная путем параллельного (последовательного) соединения двух цепей C_1 и C_2 , тогда и только тогда замкнута, когда замкнута цепь C_1 или (и) замкнута цепь C_2 . Применение исчисления высказываний к релейно-конттактным схемам открыло плодотворный подход к ряду важных проблем современной техники. Поскольку моделирование логических связей играет существенную роль и при построении современных электронных счетных машин, логика математическая имеет значение и для этой области» [139]. Положительные отзывы о работах Виктора Ивановича давали самые известные и авторитетные советские ученые: В.М. Глушков (70-е гг.), Н. Колмогоров (1946 г.), А.А. Марков (1954), А.А. Ляпунов (1959), П.С. Новиков (13. 07. 1946, 15. 10. 1949, 14. 05 и 9. 06. 1954, 21. 03. 1947), М.А. Гаврилов (22. 10. 1949), С.А. Яновская (28. 10. 1953, 1959), Б.В. Бирюков (16. 06. 1982), В.И. Гливенко (1936), Л. Соболев, М.А. Леонтович, В.С. Кулебакин, А.С. Предводителей, К.Ф. Теодорчик, Г.Н. Поваров, В.Г. Лазарев (1982), В.А. Горбатов (1982), О.П. Кузнецов (1964). Содержатся они и в ряде статей и книг румынских авторов, почти во всех учебниках и научных статьях по алгебро-логической теории релейных схем.

В «Логическом словаре-справочнике» (сост. Н.И. Кондаков) написано, что «Математическое доказательство применимости алгебры Буля в теории и практике конттактных и конттактно-релейных схем было дано в 1938 г. русским ученым В.И. Шестаковым и американским инженером К.Э. Шенноном» [140] и что «Исчисление Клини — Бочвара советский логик В.И. Шестаков (известный специалист по алгебраическим проблемам логики, телемеханики и автоматики) [141], используя функцию Вебба, расширил до функционально полного трехзначного исчисления высказываний $\langle \dots \rangle$ Двойная арифметическая интерпретация трехзначного исчисления высказываний, предложен-

ная В.И. Шестаковым, используется при моделировании этого исчисления посредством релейно-контактных схем» [142].

Выйдя на пенсию, Виктор Иванович дважды — в 1971 и 1978 гг. становится слушателем факультета повышения квалификации МГУ по специальности «общая физика» [143], в 1982 и 1983 гг. он подает заявление [144] о зачислении его и.о. доцента на родную кафедру для ведения практических занятий со студентами [145], а в 1984 г. — заявление о зачислении его — доцента! — на физический факультет уже в качестве ассистента [146].

К пенсионному возрасту состав семьи Виктора Ивановича сильно изменился: в 1941 г. на войне погиб его брат Владимир Иванович Шестаков. Дочь Ирина Викторовна вышла замуж за Виктора Васильевича Самохвалова, и в 1963 г. подарила отцу внука Евгения. В 1977 г. не стало тещи В.И. Шестакова Эмилии Соломоновны Гурфинкель. Изменились и жилищные условия [147]: в 1971 г. Виктор Иванович покупает в ЖСК однокомнатную квартиру площадью 16,7 кв.м. [148] на ул. 26 Бакинских комиссаров и переезжает туда с женой и тещей Эмилией Соломоновной (которой не стало в 1977 г.), оставив семье дочери свою двухкомнатную квартиру на ул. Лобачевского. В конце пути, после потери супруги Гени Абрамовны в 1984 г., семидесятивосьмилетнему ученому пришлось съехаться с семьей дочери, оставив кооперативную квартиру внуку [149]. Последнее пристанище наш выдающийся соотечественник Виктор Иванович Шестаков нашел 3 мая 1987 года [150].

Жизненный и научный путь Виктора Ивановича Шестакова нашел отражение в художественной литературе. Он стал прототипом одного из героев романа советского писателя-фантаста, популяризатора науки Ю.Г. Вебера «Когда приходит ответ» [151]. Этот герой, Василий Игнатьевич Шестопапов, предлагает практиканту результаты своих исследований, изложенных им в диссертации «Алгебра двухполюсных схем». И есть в этой книге такие слова: «Почему он, почему этот университетский затворник, Василий Игнатьевич Шестопапов, совсем никому не известный в области релейных схем, почему же он сумел подсмотреть то, чего не увидели до сих пор те, кто годами варился в этой области...» [4, 151].

Литература

- [1] *Предводителев А.С.* К истории применения алгебры Буля в технике // Вестник Московского университета. Серия 3. Физика. Астрономия. 1968. №5.
- [2] Просьба канцелярии 1-го МГУ в канцелярию ВХТУ о пересылке документов Шестакова // Архив В. И. Шестакова. Раздел «Учебные дела».
- [3] Обоснование командировки доцента В. И. Шестакова в Бельгию. 1969 г. // Архив В. И. Шестакова. Раздел «Учебные дела».
- [4] Чего не увидели другие // Московский университет. 1983. 24 февраля.
- [5] *Шестаков В.И.* Письмо в редакцию газеты «Московский университет». 1983. 13 марта (рукопись).
- [6] *Левин В.И.* История открытия логического моделирования технических устройств // Вестник Тамбовского университета. Серия: Естественные и технические науки. 2004. Т. 9. Вып. 4.
- [7] Дневник В. И. Шестакова // Архив В. И. Шестакова. Раздел «Научные мероприятия».
- [8] *Шестаков В.И.* Письмо в редакцию журнала «Автоматика и телемеханика» от 27. 04. 1940 г. // Архив В. И. Шестакова. Раздел «Жизненные коллизии».
- [9] *Предводителев А.С., Теодорчик К.Ф.* Письмо отв. редактору журнала «Автоматика и телемеханика» В.И. Коваленкову от 27. 04. 1940 г. // Архив В.И. Шестакова. Раздел «Жизненные коллизии».
- [10] Ответ отв. секретаря журнала «Автоматика и телемеханика» А.С. Предводителю от 01. 01. 1940 г. // Архив В.И. Шестакова. Раздел «Жизненные коллизии».
- [11] *Розенберг В.А.* Ответственному редактору журнала «Автоматика и телемеханика» от 17. 05. 1940 г. (фотокопия письма) // Архив В.И. Шестакова. Раздел «Жизненные коллизии».
- [12] Ответ редакции журнала «Автоматика и телемеханика» В.И. Шестакову от 21. 10. 1940 г. // Архив В.И. Шестакова. Раздел «Жизненные коллизии».
- [13] «Заявление в президиум АН СССР» от 9. 12. 1940 г. // Архив В. И. Шестакова. Раздел «Жизненные коллизии».
- [14] Письмо отв. редактору журнала «Автоматика и телемеханика» В.А. Трапезникову от 28. 04. 1954 г. // Архив В. И. Шестакова. Раздел «Жизненные коллизии».
- [15] *Бирюков Б.В., Горбатов В.А., Лазарев В.Г., Поваров Г.Н.* О научных трудах В.И. Шестакова. 16. 06. 1982 г. // Архив В.И. Шестакова. Раздел «Отзывы о научных работах».
- [16] «Выпись из Метрической книги, часть первая, о родившихся, за 1907 годъ» // Архив В.И. Шестакова. Раздел «Биографические материалы».
- [17] Справка на Шестакову М.Б. с Вагоно-Ремонтного завода от 24. 10. 1935 г. // Архив В.И. Шестакова. Раздел «Биографические материалы».
- [18] Автобиография // Архив В.И. Шестакова. Раздел «Биографические материалы».
- [19] Рукописное письмо некоему «Борису Владимировичу». С.3 // Архив В.И. Шестакова. Раздел «Учебные дела».
- [20] Справка Объединенной Комиссии по дополнительному приему на химфак МВТУ от 8. 01. 1929 г. // Архив В.И. Шестакова. Раздел «Учебные дела».
- [21] Справка из 2-го Красно-Пресненского диспансера при Туберкулезном Институте от 28. 05. 1930 г. // Архив В.И. Шестакова. Раздел «Состояние здоровья».
- [22] Справка Макеевского Коксобензольного завода от 30. 05. 1930 г. // Архив В.И. Шестакова. Раздел «Биографические материалы».

- [23] Авторское свидетельство на изобретение № 35435 от 31. 03. 1934 г. и Описание счетной машины к авторскому свидетельству В.И. Шестакова, заявленному 8. 02. 1932 г. (справка № 103062) // Архив В.И. Шестакова. Раздел «Творческие достижения».
- [24] Объяснительная записка к дипломной работе «Теоретическое исследование спектра гармонического осциллятора при наличии случайных скачков фазы (задача Лоренца)» // Архив В.И. Шестакова. Раздел «Учебные дела».
- [25] Копия диплома Московского государственного университета им. М.Н. Покровского, выданного В.И. Шестакову 5. 08. 1936 г. // Архив В.И. Шестакова. Раздел «Учебные дела».
- [26] Отзыв о работе аспиранта Шестакова за 1-ое полугодие 1934–35 гг. Проф. Горелик. 04. 02. 1935 г. // Архив В.И. Шестакова. Раздел «Учебные дела».
- [27] Работа «Алгебра релейных схем» (1935 г.) не была опубликована // Математика в СССР за тридцать лет (1917-1947). Т. II. М.;Л., 1948. С. 41.
- [28] Отзыв П.С. Новикова о работах Виктора Ивановича от 15. 10. 1949 г. // Архив В.И. Шестакова. Раздел «Отзывы о научных работах».
- [29] *Shannon C.* Symbolic Analysis of Relay and Switching Circuits // Trans. of the Amer. Institute of Electr. Engineers. 1938. Vol. 57.
- [30] *Nakasima A.* Theory of relay circuits composition // Journal of the Institute of Electrical Communication Engineers of Japan. 1935. № 150 (Sept.) (япон.), Nippon Electr. Commun. Engineering. 1936. № 3 (англ. перевод); *Nakasima A., Hanzawa M.* Theory of equivalent transformation of simple partial paths of relay circuits // Journal of the Institute of Electrical Communication Engineers of Japan. 1936. № 165 (Dec), 1937. № 167 (Febr) (япон.), Nippon Electr. Commun. Engineering. 1938. № 9 (англ. перевод).
- [31] Отзыв о работах к. ф.-м. н. В.И. Шестакова. Проф. М.А. Гаврилов. 22. 10. 1949 г. // Архив В.И. Шестакова. Раздел «Отзывы о научных работах».
- [32] Рукописный листок, написанный В.И. Шестаковым // Архив В.И. Шестакова. Раздел «Учебные дела».
- [33] Отзыв В.И. Гливенко от 6 октября 1936 года о работе В.И. Шестакова за 1-ое полугодие 1935-36 гг. // Архив В.И. Шестакова. Раздел «Учебные дела».
- [34] Отдельная машинописная стр. под № 2, написанная бывшим «деканом физического факультета» // Архив В.И. Шестакова. Раздел «Учебные дела».
- [35] *Новиков П.С.* Заключение о диссертации В.И. Шестакова «Некоторые математические методы конструирования и упрощения двухполюсных электрических схем класса А» // Архив В.И. Шестакова. Раздел «Учебные дела».
- [36] *Марьяновский Д.И.* Реферат статьи В.А.Розенберга «Задача о блокировке и преобразование контактных групп» // Физико-математический реферативный журнал. 1940. Том IV. Вып. 2.
- [37] *Шестаков В.И.* Письмо в редакцию журнала «Автоматика и телемеханика» от 11. 10. 1940 г. (машиноп. копия) // Архив В.И. Шестакова. Раздел «Жизненные коллизии».
- [38] *Шестаков В.И.* Заявление в 1-ю Московскую городскую нотариальную контору (машиноп. копия) // Архив В.И. Шестакова. Раздел «Жизненные коллизии».
- [39] Справка, выданная Октябрьским райвоенкоматом г. Москвы 16. 06. 1941 для психоневрологического диспансера (копия) // Архив В.И. Шестакова. Раздел «Состояние здоровья».
- [40] Аттестат доцента (копия) // Архив В.И. Шестакова. Раздел «Учебные дела».
- [41] Удостоверение об эвакуации из Москвы // Архив В.И. Шестакова. Раздел «Биографические материалы».

- [42] Шестаков В.И. Алгебра двухполюсных схем, построенных исключительно из двухполюсников (Алгебра А-схем) // Автоматика и телемеханика. Т. VI. 1941. № 2.
- [43] Algebra of two-pole circuits, constructed exclusively from two-pole switches (algebra of A-circuits). S'estakov V. I. // Mathematical Reviews. 1948. P. 366.
- [44] Шестаков В.И. Алгебра двухполюсных схем, построенных исключительно из двухполюсников (Алгебра А-схем) // ЖТФ. Т. XI. 1941. Вып. 6.
- [45] Справка отдела кадров МГУ в военкомат г. Свердловска 1. 09. 1942 // Архив В.И. Шестакова. Раздел «Трудовая деятельность».
- [46] Шестаков В.И. Список рефератов. 26. 02. 1955 // Архив В.И. Шестакова. Раздел «Исследовательская деятельность».
- [47] Ученые записки МГУ. Вып. 73 (Математика). 1944. Кн. 5.
- [48] Wallman H. Sur une calcul symbolique applicable à la théorie des schèmes électriques de relais. Schestakoff W. // Mathematical Reviews. 1947. MF 15193.
- [49] Шестаков В.И. Заявление зав. кафедрой общей физики для физического факультета проф. В.И. Ивероновой // Архив В.И. Шестакова. Раздел «Жилищные условия».
- [50] Шестаков В.И. Заявление ректору МГУ акад. Г.И. Петровскому от 21. 05. 1954 г. // Архив В.И. Шестакова. Раздел «Жилищные условия».
- [51] Справка Туберкулезного диспансера №2 от 20. 12. 1945 г. // Архив В.И. Шестакова. Раздел «Состояние здоровья».
- [52] Известия АН СССР. Серия «Математика» Т. 10. 1946. № 6.
- [53] Извещение редакции журнала «Математический сборник» от 12. 08. 1946 г. // Архив В.И. Шестакова. Раздел «Трудовая деятельность».
- [54] Новиков П. Отзыв о работе В.И. Шестакова «О возможности моделирования операций трехзначной логики посредством трехпозиционных коммутаторов» от 13. 07. 1946 г. // Архив В.И. Шестакова. Раздел «Отзывы о научных работах».
- [55] Удостоверение Президиума АН СССР № 4 от 2. 06. 1953 г. // Архив В.И. Шестакова. Раздел «Творческие достижения».
- [56] Приказ министра высшего образования СССР № 715 от 5. 05. 1952 г. // Архив В.И. Шестакова. Раздел «Учебные дела».
- [57] Объяснительная записка к плану докторской диссертации В.И. Шестакова // Архив В.И. Шестакова. Раздел «Учебные дела».
- [58] План докторской диссертации В.И. Шестакова // Архив В.И. Шестакова. Раздел «Учебные дела».
- [59] Ректору МГУ акад. И.Г. Петровскому. «Отчет о состоянии работы над диссертацией на 10. 01. 1953 г.».
- [60] Шестаков В.И. Краткие сведения о научной работе. 26. 05. 1960 г. // Архив В.И. Шестакова. Раздел «Исследовательская деятельность».
- [61] Моделирование операций исчисления предложений посредством простейших четырехполюсных схем // Вычислительная математика и вычислительная техника. М.: 1953. Вып. 1.
- [62] Шестаков В.И. Представление характеристических функций предложений посредством выражений, реализуемых релейно-контактными схемами // Известия АН СССР. Серия: Математика. Т. X. 1946. № 6.
- [63] Автоматика и телемеханика. Т. XV. 1954. № 2.
- [64] Поваров Г.Н. Алгебраический метод анализа автономных систем двухпозиционных реле. Шестаков В.И. // РЖ «Математика». 1955.
- [65] Автоматика и телемеханика. Т. XV. 1954, № 4.

- [66] Справка физического факультета от 18. 05. 1954 г., выданная В.И. Шестакову, автору статьи «Алгебраический метод синтеза автономных релейных систем» // Архив В.И. Шестакова. Раздел «Учебные дела».
- [67] Новиков П.С. Письма главному редактору журнала «Доклады АН СССР» от 14. 05 и 9. 06. 1954 г. // Архив В.И. Шестакова. Раздел «Отзывы о научных работах».
- [68] Доклады АН СССР. Новая серия. Т. 99. 1954. № 6.
- [69] Яновская С.А. Отзыв о работе В.И. Шестакова «Алгебраический метод синтеза многотактных релейных систем» от 1954 г. // Архив В.И. Шестакова. Раздел «Отзывы о научных работах».
- [70] Шестаков В.И. Аннотационный отчет по теме № 110 // Архив В.И. Шестакова. Раздел «Научные мероприятия»; Шестаков В.И. Об алгебраическом методе анализа и синтеза многотактных релейных систем // Материалы Всесоюзного Соперования по теории устройств релейного действия. М.: 3-9 октября 1957 г.
- [71] Шестаков В.И. К вопросу о синтезе смешанных релейно-контактных схем класса «П» // Известия высших учебных заведений. Радиофизика. Т. III. Горький: 1960; Он же: О двойной арифметической интерпретации трехзначного исчисления высказываний, используемой при моделировании этого исчисления посредством релейно-коммутаторных схем // Применение логики в науке и технике. М., 1960.
- [72] Шестаков В.И. Векторно-алгебраический метод анализа и синтеза многотактных релейных систем // Труды III Всесоюзного математического съезда. Т. II. М.: 1956; РЖ «Математика». М., 1957. Реф. 7727.
- [73] Гаврилов М.А., Поваров Г.Н., Рогинский В.Н., Харкевич А.Д., Шестаков В.И. Математическая проблематика структурной теории релейных схем // Труды III Всесоюзного математического съезда. Т. II. М., 1956.
- [74] Шестаков В.И. Алгебраический метод синтеза многотактных схем r -позиционных реле // Доклады АН СССР. Т. 112. М., 1957. № 1.
- [75] Лазарев В.Г. Алгебраический метод синтеза многотактных схем r -позиционных реле. Шестаков В.И. // РЖ «Математика». М., 1958. Реф. 1045.
- [76] Шестаков В.И. Математическая логика и автоматика // Математика в школе. 1958. № 6, 1959. № 1.
- [77] Медведев Ю.Т. Математическая логика и автоматика. Шестаков В.И. // РЖ «Математика». М., 1959. № 11. Реф. 10750.
- [78] Медведев Ю.Т. Математическая логика и автоматика. Шестаков В.И. // РЖ «Математика». М., 1960. № 8. Реф. 8698.
- [79] Шестаков В.И. Перфокарточный метод синтеза многотактных релейных систем // Автоматика и телемеханика. Т. XIX. 1958. № 6.
- [80] Шестаков В.И. Перфокарточный метод синтеза многотактных систем многопозиционных реле // Автоматика и телемеханика. Т. XX. 1959. № 11.
- [81] Справка редакции РЖ «Математика» // Архив В.И. Шестакова. Раздел «Трудовая деятельность».
- [82] Семинар по техническим приложениям математической логики (1955–1957 гг.) // Автоматика и телемеханика. Т. XVIII. 1957. № 10.
- [83] Семинар по техническим приложениям математической логики (1957–1958 гг.) // Автоматика и телемеханика. Т. XX. 1959. № 1.
- [84] Яновская С.А. Отзыв о работе В.И. Шестакова «Анализ и синтез релейных систем, построенных из элементов, имеющих только два устойчивых состояния» // Архив В.И. Шестакова. Раздел «Отзывы о научных работах».
- [85] Шестаков В.И. Перфокарточный метод синтеза многотактных релейных систем. Автореферат // РЖ «Математика». М., 1959. № 9. Реф. 8888.

- [86] Шестаков В.И. Моделирование операций исчисления Д.А. Бочвара посредством трехпозиционных коммутаторов. Доклад 22. 11. 1957 г. // Автоматика и телемеханика. Т. XX. 1959. № 1.
- [87] Шестаков В.И. Моделирование операций исчисления высказываний посредством релейно-контактных схем // Логические исследования. Вып. 2. М., 1959.
- [88] Казаков В.Д. Моделирование операций исчисления высказываний посредством релейно-контактных схем. В.И. Шестаков // РЖ «Математика». М., 1960. № 6. Реф. 6262.
- [89] Шестаков В.И. Об одной арифметической интерпретации трехзначного исчисления Д.А. Бочвара. Доклад 26. 11. 1957 г. // Автоматика и телемеханика. Т. XX. 1959. № 1.
- [90] Справка-заявление // Архив В.И. Шестакова. Раздел «Жилищные условия».
- [91] Шестаков В.И. Рецензия на книгу В.Н. Рогинского «Элементы структурного синтеза релейных схем управления» // Автоматика и телемеханика. Т. 21. 1960. № 7.
- [92] Шестаков В.И. О теории синтеза смешанных релейно-контактных схем класса П // Вестник Московского университета. Серия III: Физика, астрономия. 1961. № 4.
- [93] Известия высших учебных заведений. Радиофизика. Вып. III. М.: 1960. № 3.
- [94] Поваров Г.Н. К вопросу о синтезе смешанных релейно-контактных схем класса П. Шестаков В.И. // РЖ «Математика». М., 1961. Реф. 12 A366.
- [95] Шестаков В.И. Об одной теории синтеза смешанных релейно-контактных схем класса П // Вестник Московского университета. Серия: Математика, механика, астрономия, физика, химия. 1959. № 6.
- [96] Поваров Г.Н. Об одной теории синтеза смешанных релейно-контактных схем класса П. Шестаков В.И. // РЖ «Математика». М., 1961. Реф. 12 A367.
- [97] Рогинский В.Н. Письмо в редакцию // Вестник Московского университета. Серия: Физика, астрономия. 1960. № 6.
- [98] Поваров Г.Н. Письмо в редакцию. Рогинский В.Н. // РЖ «Математика». М., 1961. Реф. 12 A368.
- [99] Шестаков В.И. Ответ на письмо в редакцию В.Н. Рогинского («О теории синтеза смешанных релейно-контактных схем класса П» // Вестник Московского университета. Серия: Физика, астрономия. 1961. № 4.
- [100] Таланцев А.Д. Ответ на письмо в редакцию В.Н. Рогинского («О теории синтеза смешанных релейно-контактных схем класса П» Шестаков В.И. // РЖ «Математика». М., 1962. Реф. 5 B332.
- [101] Вопросы теории математических машин. Т. 2. М.: 1962.
- [102] Храпченко В. Синтез однотактного сумматора двоичных чисел, построенного из двухполюсных переключателей и поляризованных реле. Шестаков В.И. // РЖ «Математика». М., 1963. Реф. 10 B219.
- [103] Успехи математических наук. Т. 19. 1964. Вып. 2.
- [104] Мучник А. О взаимоотношении некоторых трехзначных логических исчислений. Шестаков В.И. // РЖ «Математика». М., 1965. Реф. 3 B116.
- [105] Бирюков Б.В., Калужнин Л.А., Шестаков В.И. Логические машины // Философская энциклопедия. Т. 3. 1964 г.
- [106] См. Программу международного симпозиума по теории релейных устройств и конечных автоматов (Синтез релейных структур). М., 1962.
- [107] См. Программу международного симпозиума по теории релейных устройств и конечных автоматов (Синтез релейных структур). М., 1965.
- [108] Научно-техническая информация. Серия 2: Информационные процессы и системы. М., 1967. № 12.
- [109] Шестаков В.И. Из резюме автора // РЖ «Математика». М., 1968. Р. 6 A111.

- [110] Информационные вопросы семиотики, лингвистики и автоматического перевода. Вып. 1. М.: 1971.
- [111] «Трехзначная логика» // Логический словарь-справочник. Изд. II. М., 1975 г.
- [112] Соглашение № 7473 от 21. 04. 1961 г. с Издательством иностранной литературы // Архив В.И. Шестакова. Раздел «Просьбы о рецензиях. Приглашения на конференции».
- [113] *Moysil G.K.* Алгебраическая теория дискретных автоматических устройств (перевод с румынского В.М. Остиану). М., 1963.
- [114] *Whitesitt J.E.* Булева алгебра и ее приложения // Новые книги за рубежом. Серия А. М., 1963. № 7.
- [115] *Goodstein R.L.* Булева алгебра // Новые книги за рубежом. Серия А. М., 1964. № 2.
- [116] *Flegg H.G.* Булева алгебра и ее приложения // Новые книги за рубежом. Серия А. М., 1964. № 9.
- [117] *Шестаков В.И.* Методы функционального анализа и структурного синтеза релейных систем. М., 1960.
- [118] *Шестаков В.И.* Математическая логика и автоматизация вычислений. М., 1960.
- [119] Мероприятия по развитию работ в области теории релейных устройств и конечных автоматов. Секция технической кибернетики Научного совета по кибернетике при Президиуме АН СССР. 22. 05. 1965 г. // Архив В.И. Шестакова. Раздел «Просьбы о рецензиях. Приглашения на конференции».
- [120] План научной командировки в Бельгию доц. В.И. Шестакова // Архив В.И. Шестакова. Раздел «Учебные дела».
- [121] *Шестаков В.И.* Доклад «Использование булевых, лугасевичевых и бочваровых операций в теории логических систем» // Международный симпозиум «Логические системы, их теория и применение» в Бельгии. 15. 09–20. 09. 1969 г.
- [122] Вестник Московского университета. Серия: Физика, астрономия. М.: 1976, № 2.
- [123] Вестник Московского университета. Серия: Физика, астрономия. Т. 18. М.: 1977, № 2.
- [124] Вестник Московского университета. Серия: Физика, астрономия. Т. 20. М.: 1979. № 4.
- [125] Вестник Московского университета. Серия: Физика, астрономия. Т. 20. М.: 1979. № 6.
- [126] Вестник Московского университета. Серия: Физика, астрономия. Т. 23. М.: 1982. № 1.
- [127] Вестник Московского университета. Серия: Физика, астрономия. Т. 24. М.: 1983. № 2.
- [128] Вестник Московского университета. Серия: Физика, астрономия. Т. 23. М.: 1983. № 4.
- [129] Просьба физического факультета от 29. 06. 1978 г. в редакцию журнала «Доклады Академии Наук СССР» напечатать статью В.И. Шестакова «Об одном обобщении булевой алгебры» // Архив В.И. Шестакова. Раздел «Научные мероприятия».
- [130] *Шестаков В.И.* Список научных трудов // Архив В.И. Шестакова. Раздел «Исследовательская деятельность».
- [131] Логические исследования. М., 1959.
- [132] *Шестаков В.И.* Об эквивалентности пассивных двухполюсников. 1986 // Архив В.И. Шестакова. Раздел «Исследовательская деятельность».
- [133] *Шестаков В.И.* О применении исчисления высказываний в теории пассивных двухполюсников. 1987 // Архив В.И. Шестакова. Раздел «Исследовательская деятельность».

- [134] Яновская С.А. Основания математики и математическая логика // Математика в СССР за тридцать лет (1917-1947). Т. II. М.;Л., 1948. С. 41.
- [135] Гаврилов М.А. Теория релейно-контактных схем. М.;Л., 1950.
- [136] Луиц А.Г. Теория многополюсников. Автореферат диссертации на соискание ученой степени кандидата физико-математических наук. Л., 1951.
- [137] Поваров Г.Н. Логика на службе автоматизации и технического прогресса // Вопросы философии. 1959. № 10.
- [138] Глушков В.М. Кибернетика // Большая Советская Энциклопедия. III изд. М., 1973.
- [139] Марков А.А. Логика математическая // Большая Советская Энциклопедия. II изд. М., 1954.
- [140] Алгебра Буля // Кондаков Н.И. Логический словарь-справочник. II изд. М., 1975. С. 27.
- [141] ШЕСТАКОВ Виктор Иванович // Кондаков Н.И. Логический словарь-справочник. II изд. М., 1975. С. 671.
- [142] Трехзначная логика // Кондаков Н.И. Логический словарь-справочник. II изд. М., 1975. С. 618.
- [143] Удостоверения № 5067 от 31. 12. 1971 г. и № 17138 от 15. 06. 1978 г., выданные ФПК МГУ // Архив В.И. Шестакова. Раздел «Биографические материалы».
- [144] Копия Трудовой книжки В.И. Шестакова // Архив В.И. Шестакова. Раздел «Трудовая деятельность».
- [145] Шестаков В.И. Заявление декану физического факультета МГУ. 1982 // Архив В.И. Шестакова. Раздел «Трудовая деятельность».
- [146] Шестаков В.И. Заявление декану физического факультета МГУ. 1984 // Архив В.И. Шестакова. Раздел «Трудовая деятельность».
- [147] Заявление об обмене жилой площади. Рукопись // Архив В.И. Шестакова. Раздел «Жилищные условия».
- [148] Справка ЖСК «Солнечный» // Архив В.И. Шестакова. Раздел «Жилищные условия».
- [149] Заявления об обмене жилой площади. На бланках. 14. 06 и 1. 07. 1985 г. // Архив В.И. Шестакова. Раздел «Жилищные условия».
- [150] Свидетельство о смерти. Копия // Архив В.И. Шестакова. Раздел «Биографические материалы».
- [151] Вебер Ю.Г. Когда приходит ответ. М., 1964.

Первые приложения логики к технике: Эренфест, Герсеванов и Шестаков. От применения логики к расчету сооружений и релейным схемам к логической теории размерностей физических величин¹

Б.В. БИРЮКОВ, В.И. ШАХОВ

ABSTRACT. We show that the idea of applying logic to technology, proposed at the beginning of the 20th century by the theoretical physicist P. Erenfest, has not, at the time it was put forward, found a following. The work, published in 1923, of the Russian scientist N. V. Gersevanov, the founder of the Russian school of ground mechanics, which applied the algebra of logic developed in the book by L. Couturat to the construction of buildings, was not influenced by Erenfest's ideas. We also show that the ideas that guided the research of Viktor I. Shestakov, the founder of the logical theory of relay schemes, were different from those of Gersevanov; to wit, Shestakov followed in the steps of Erenfest, and he went on from an application of logic to technology, the theory of relay schemes, to applying logic to physics. Lastly, we show why Shestakov needed a three-valued logic to express relationships between physical entities and their measurements.

Идея о возможности приложения алгебры логики (булевой алгебры) к электрическим «распределительным сетям» была впервые высказана профессором Санкт-Петербургского университета Павлом Эренфестом². Это был физик-теоретик широкого диапазона научных интересов, автор работ по термодинамике, статистической механике, теории относительности, квантовой

¹Работа выполнена при поддержке РФФИ, проект № 05-06-80-382. Авторы выражают благодарность И.С. Верстину за помощь, оказанную им при подготовке данной статьи.

²Пауль Эренфест (1880–1938), уроженец Вены, в 1907–1912 гг. служил в России, в 1912 г. переехал в Нидерланды. В 1924 г. Эренфест был избран иностранным членом Российской академии наук.

теории. То, что он заинтересовался логикой, а именно книгой французского философа, логика и математика Леона Кутюра об алгебре логики, вышедшей в 1909 г. в русском переводе [14], и даже написал на нее рецензию [30, с. 382–287]³, является свидетельством того, что идеи математической логики стали уже прочно закрепляться в российском научном сообществе. В рецензии П. Эренфеста на пяти страницах кратко изложен логический аппарат, содержащийся в книге французского философа, включая преобразования логических равенств и вывод с их помощью силлогистических модусов. На шестой странице своего отзыва-реферата Эренфест писал:

«Символическая формулировка [посылка умозаключения] дает возможность “вычислять” следствия из таких сложных систем посылок, в которых при словесном изложении почти или совершенно невозможно разобраться.

К счастью, уже отвыкли требовать от каждой математической спекуляции прежде всего “практической пользы”. Тем не менее, быть может, уместно коснуться вопроса о том, не встречаются ли в физике или технике в самом деле такие сложные системы посылок. *Мне думается, что на этот вопрос следует ответить утвердительно.* Пример: пусть имеется проект схемы проводов автоматической телефонной станции. Нужно определить: 1) будет ли она правильно функционировать при любой комбинации, могущей встретиться в ходе деятельности станции; 2) не содержит ли она излишних усложнений.

Каждая такая комбинация является посылкой, каждый маленький коммутатор есть логическое “или-или”, воплощенное в эбоните и латуни; все вместе — система чисто качественных (в сети слабого тока именно не количественных) “посылок”, ничего не оставляющая желать [лучшего] в отношении сложности и запутанности.

Следует ли при решении этих вопросов раз навсегда удовлетвориться <...> способом *пробования на графике*?

Правда ли, что несмотря на существование уже разработанной “алгебры логики” своего рода “алгебра распределительных схем” должна считаться утопией?» [30, с. 387].

³Книга содержит два приложения: одно по просьбе Слешинского написано С.О. Шатуновским, другое — самим переводчиком.

Подобная постановка вопроса поражает своей ясностью, и можно лишь удивляться, что логики (а потом и техники) обратили на нее внимание лишь спустя почти тридцать лет.

В историографии отечественной логики утвердился взгляд, будто первым, кто в нашей стране занялся приложениями логики к задачам технического характера, был Виктор Иванович Шестаков. Однако, как выяснилось, этот взгляд ошибочен: первым проблему начал разрабатывать Николай Михайлович Герсеванов, занимавшийся теоретическими и практическими вопросами строительного дела, а также прикладной математикой⁴.

В 1923 г. в издании Госстройиздата Герсеванов опубликовал статью «Применение математической логики к расчету сооружений», тираж которой был всего 300 экземпляров. Эта статья вошла в первый том собрания сочинений Герсеванова [11], и автор в Предисловии к данному тому отмечал, что в нем собраны работы, которые имели «непосредственное отношение к развитию теоретической стороны строительного дела». В томе была перепечатана упомянутая выше статья Н.М., причем автор особо отметил, что в томе она стоит «совершенно особняком» [11, с. 5]⁵. Отметив, что начало математической логики положено в 1846 году⁶, Герсеванов в Предисловии, помещенном в первом томе, писал:

«Применение этой дисциплины [математической логики] дает возможность рассчитывать сооружения на прочность и устойчивость в тех случаях, когда система не поддается расчету при помощи строительной механики. Результаты расчета в зависимости

⁴Николай Михайлович Герсеванов (1879–1950), основатель отечественной научной школы механики грунтов, ученый, занимавшийся прикладной математикой и много размышлявший о взаимодействии в технической области теории и практики. В 1939 г. Н.М. был избран членом-корреспондентом АН СССР, в 1948 г. получил Сталинскую премию.

⁵Удивляет, что авторы, писавшие об истории развития приложений логики к технике, например Г.Н. Поваров, весьма глухо говорят о Герсеванове, ставя его на одну доску с Эренфестом как ученого, который «впервые указал» на возможность подобного приложения (ср. [18, с. 14]). К сожалению, В.А. Бажанов в своей книге [1, с. 283] без всякой проверки повторяет слова Поварова.

⁶Очевидно, Герсеванов имел в виду основополагающие для алгебры логики труды Дж. Буля и А. де Моргана. Он ошибался, однако, относительно года их появления: они вышли в 1847 г.

от примененной логической схемы могут быть получены с любым запасом устойчивости, почему такие расчеты мы называли *условными*. Особенно замечательны логические схемы, приводящие к логическому равенству: в этих случаях результаты расчета ничем не отличаются от результатов расчета по правилам строительной механики. Приложение математической логики открывает большие возможности для исследований, которые, однако, никем не предпринимались <...> За рубежом нет ни одной работы, хотя бы косвенно похожей на эту» [11, с. 6].

Ход мысли Герсеванова таков: в практике встречаются случаи, когда при расчете сооружений невозможно ограничиться применением строительной механики, и тогда на практике применяется прием, обходящий ее методы; заключается он во введении условий или гипотез, подтверждающих устойчивость рассчитываемого сооружения. При этом

«... расчет, имеющий целью подтвердить устойчивость сооружения, может достигнуть этого лишь образованием логической цепи умозаключений или суждений, а положения строительной механики привлекаются лишь как привходящий элемент, дающий материал для составления больших и малых посылок в образуемой цепи суждений, наряду с включенными в расчет условными положениями» [11, с. 129]⁷.

Правда, отмечает Герсеванов, условные расчеты, построенные на простейших логических схемах, как показывает практика, приводят обычно к результатам с громадным запасом устойчивости, а потому крайне несовершенны. Поэтому при такого рода вычислениях, чтобы приблизиться к возможному минимуму запаса устойчивости, приходится проводить расчет по весьма сложным логическим схемам. «В этих случаях легко впасть в ошибку, так как последовательно включенные условные положения могут оказаться друг с другом в противоречии, или же можно незаметно для себя совершить логический круг в цепи последовательных умозаключений». Для устранения этого недостатка и представляется полезным использование «алгебраической логики» [11].

⁷Здесь и далее цитируется статья «Применение математической логики к расчету сооружений».

Логический аппарат, который применяется далее, основан на известной книге Луи Кутюра «Алгебра логики»⁸. Аппарат этот описывается в первом параграфе статьи, причем применение его к задачам, возникающим при расчете гидротехнических сооружений, поясняется на примерах. В первом из них речь идет об устойчивости фундамента весом Q , имеющего площадь основания ω , опущенного в грунт на глубину h , при удельном весе грунта Δ . Далее Герсевичев пишет:

«Обозначим буквой A суждение — “фундамент устойчив”, и выразим логической схемой расчет этого фундамента, основанный на введении гипотезы жидких свойств грунта. Обозначим буквой B суждение — “фундамент весом Q , имеющий площадь ω и опущенный на глубину h в жидкий грунт удельного веса Δ , не может опуститься глубже в этот грунт. Суждение B может быть также выражено следующей математической формулой: $Q \leq \Delta \omega h$. — В таком случае мы имеем следующее логическое взаимоотношение между этими двумя суждениями:

$$A > B. \quad (2)$$

Логическая формула (2) показывает, что осуществление зависимости B есть условие достаточное для того, чтобы мы имели A . Другими словами, если удовлетворить зависимость B , то можно показать, что вышеозначенный фундамент действительно устойчив. Но, вместе с тем, формула (2) показывает, что B отнюдь не есть необходимое условие по отношению к A ; другими словами, если зависимость, выраженная гидростатической формулой, не выполнена и суждение B не имеет места, то отсюда вовсе не следует, что суждение A также не имеет места и фундамент не является устойчивым. Это показывает, что условный расчет, типичной схемой которого является логическая формула (2), есть расчет с некоторым запасом устойчивости, величина которого остается неизвестной» [11, с. 130].

Через $A > B$ (формулу (2)) обозначается условное суждение «Если есть A , то есть B »; суждение $A < B$ (формула (1) в нумерации Герсевичева) выражает обратное условное суждение

⁸Н.М. работал с французским оригиналом: [34]. Как мы знаем, русский перевод этой книги вышел лишь в 1909 году. Не исключено, что Герсевичев был знаком с этой рецензией.

« A есть при условии, что есть B »⁹. Эта система прямой и обратной (материальных) импликаций в последующем примере используется для введения операции, ныне называемой эквиваленцией. Ее Герсеванов обозначает с помощью знака равенства $=$ и указывает на то, что формула $A = B$ (формула (3)) есть типичная логическая схема для расчетов, основанных на методах строительной механики. «Она показывает, что строительная механика заботится о выяснении *необходимых и достаточных* условий устойчивости и прочности конструкций, а следовательно, дает результаты без запаса устойчивости» [11, с. 131].

Автор труда «Применение математической логики к расчету сооружений» подчеркивает принципиальное различие между условными расчетами, выражающимися формулой (2), и методами строительной механики, представляемыми формулой (3). Первые дают результаты с неопределенным запасом устойчивости, результаты вторых – без запаса устойчивости; и если мы все же хотим его ввести, то сделать это надо уже от себя. Обращаясь к пути, по которому должно идти совершенствование условных расчетов с целью смягчения неудобств, вызываемых формулой (2), он отмечает: бывают такие условные расчеты, которые в конечном результате приводят к формуле (3). Подобные случаи «поистине замечательны; условный расчет, построенный таким образом и дающий результат без запаса устойчивости, достигает наибольшего своего совершенства и в этом смысле должен быть поставлен на одну доску с методами строительной механики» [11].

Обращаясь далее к логической технике, Герсеванов приводит, в качестве допустимого, умозаключение по схеме силлогизма: из $A > B$ и $B > C$ следует $C > D$. Однако если рассуждение по схеме силлогизма нарушается, т. е. в ней появляется хотя бы одно обратное условное суждение, например, если имеется соотношение суждений, выражаемое формулами $A > B$, $B < C$, $C > D$, то между A и D нельзя установить никакого логического

⁹Стоит заметить, что в книге Л. Кутюра, на которую опирается Герсеванов, условное суждение передается с помощью знака $<$; а не знака $>$, который использовал русский ученый; знак $>$ в книге Кутюра вообще не используется.

соотношения. Это элементарное правило в практических расчетах, говорит он, часто нарушается, и приводит соответствующий пример.

Во втором параграфе статьи «Основные принципы расчета сооружений» происходит дальнейшее развертывание логического аппарата, нужного для решения соответствующих задач, например, почленное «перемножение» логических неравенств. Этот логический прием иллюстрируется на примере доказательства прочности неразрезанной балки, нагруженной заданной равномерной нагрузкой.

Мы не станем описывать далее, как Герсевичев применял алгебру логики (которую он называл алгебраической логикой) к тем задачам, которые возникали в механике грунтов. Заметим только, что в проводимых им доказательствах устойчивости сооружений в полной мере использовался алгебро-логический аппарат, вплоть до разложения логических формул на конституенты и их упрощения. Особый параграф статьи был посвящен доказательству устойчивости сооружений «с помощью антитезиса». Герсевичев писал:

«... иногда расчет бывает гораздо проще построить, исходя из отрицательных суждений (антитезиса), т.е. из суждений: “сооружение неустойчиво”. В этом случае логическая схема должна выяснить необходимые условия существования такого отрицательного суждения и, если необходимые условия не выполнены, то это докажет, что вышеозначенное отрицательное суждение ложно и, следовательно, сооружение устойчиво» [11, с. 138].

Естественно, что здесь вводятся отрицательные суждения и законы, к ним относящиеся, в частности законы противоречия и исключенного третьего. В особом параграфе рассматривается метод приведения формул к логическому равенству и показывается, как он применяется при определении устойчивости сооружений. Наконец, весь алгебро-логический аппарат применяется при «проверке устойчивости глубоких фундаментов» [11, параграф 25].

Логическое построение Герсевичева — и особенно его применение — заслуживает более детального рассмотрения, для которого в данной статье нет места. Заметим только, что разработанный этим русским ученым подход, насколько нам известно,

не получил развития ни в других его работах, ни в созданной им научной школе.

Работа Герсевича, впервые опубликованная в 1923 г. в малотиражном издании, не была известна В.И. Шестакову; а когда она в 1948 г. была переиздана, для него она была уже не интересна, так как Виктор Иванович уже шел своим собственным путем.

В статье о жизненном и творческом пути создателя логической теории релейно-контактных схем [5] отмечается, что отечественный ученый достаточно быстро перешел от использования двухзначной логики высказываний (алгебры логики, булевой алгебры), которой ограничивался Герсевич, к применению — в тех же целях — логики трехзначной, а потом и многозначной. В этом — одно из отличий разрабатывавшейся В.И. Шестаковым теории от сходных построений К. Шеннона и А. Накашимы, которые, как известно, независимо от Шестакова и друг друга также пришли к приложению логики к задачам электротехники.

Сравнительная оценка вклада трех названных ученых в разработку проблемы «логика и техника» приводит к вопросам приоритета, которым посвящен ряд статей, в написании которых принимал участие и один из авторов этих строк [6, 4]. Не касаясь тех выводов, к которым пришли их авторы, мы отметим другую публикацию на данную тему — тезисы В.А. Бажанова и Л.И. Волгина, в которых утверждается, что «Шестаков сформулировал теорию релейно-контактных схем раньше Шеннона, в январе 1935 г. (по свидетельству С.А. Яновской), хотя диссертации (соответственно, кандидатскую и магистерскую) он защитил в 1938 г.» [2, с. 297]¹⁰.

Документы подтверждают эту точку зрения. Не останавливаясь детальнее на вопросе о приоритете В.И. Шестакова в создании логической теории релейно-контактных схем, сошлемся на «Письмо в редакцию» Вестника Московского университета, подписанное профессором А.С. Предводителевым, членом-корреспондентом АН СССР. Бывший декан физического факультета¹¹ пишет в 1968 году, что реализация мысли Эренфеста

¹⁰Эта же мысль повторяется в книге [1, гл. 2.5]

¹¹Александр Саввич Предводителев был деканом физфака МГУ в 1937-1946 гг.

«к чести физического факультета» была осуществлена аспирантом В.И. Шестаковым. «А он не был знаком в то время с рецензией Эренфеста». Работа Шестакова, продолжает Предводителей, относится к 1935 г. и получила свое завершение в кандидатской диссертации, защищенной им в 1938 г. Имеются документальные данные, продолжает автор письма, подтверждающие приоритет Шестакова, и среди них отзыв профессора В.И. Гливенко, относящийся к 1935 году. Далее приводится главное из этого отзыва:

«Работа В.И. Шестакова по подготовке кандидатской диссертации заключается в разработке найденного им математического аппарата для аналитического выражения электрических схем с последовательными и параллельными соединениями. Этот аппарат дает возможность автоматически решать задачу о получении простейших статических схем для некоторых классов релейных схем.

Для успешной разработки найденного аппарата необходима математическая подготовка в области: а) математической логики, из которой заимствуется основной алгоритм аппарата, б) топологии, как общего учения о геометрической стороне конфигураций, в) абстрактной алгебры, г) теории чисел ...

Непосредственно по кандидатской диссертации В.И. Шестаковым сделано следующее: а) разработан до конца математический аппарат для аналитического выражения схем двухполюсников в предельном случае бесконечно малых и бесконечно больших сопротивлений; б) разрабатывается и получен ряд результатов для схем двухполюсников в неопредельном случае конечных сопротивлений; в) найдена математическая формулировка задачи об упрощении схем двухполюсников. Ближайшей очередной работой является решение этой последней задачи ...» [19].

Конечно, идеи применения (математической) логики к технике уже в начале XX века носились в воздухе. В.А. Бажанов и Л.И. Волгин повторяли мысль о том, что «еще в 1910 г. П. Эренфест в рецензии на книгу “Алгебра логики” Л. Кутюра (Одесса, Mathesis, 1910)... предугадывал возможность создания “алгебры распределительных схем” и возможность применения для конструирования и упрощения “распределительных схем” аппарата алгебры Буля» [19, с. 297–298]¹². В их тезисах утвержда-

¹²См. также книгу [1, гл. 2.5]

лось, что аналогичные идеи, «сформулированные существенно менее определенно», высказывал Н.М. Герсевич в 1923 году¹³ и А. Накашима в 1936 году.

Эти слова нуждаются в пояснении и исправлении. Как мы видели, В.И. Шестаков узнал об идее Эренфеста уже после того, как пришел к замыслу применения логики к определенным задачам электротехники. Что касается А. Накашимы, то он совершенно определенно — и не исключено, что даже раньше Шеннона и Шестакова, — развил интересующую нас теорию. Но авторы тезисов справедливо указали на то, что открытая Шестаковым логико-алгебраическая модель электрических двухполюсников (а потом и трех- и многополюсников), двухполюсные элементы которых — сопротивления, конденсаторы, индуктивности, а главное, контакты, управляемые реле — соединены последовательно либо параллельно, распространялась им на схемы, проводимость которых оценивалась на множестве положительных вещественных чисел. На этом основании авторы тезисов [2] видят в Шестакове первооткрывателя континуальной логики.

Следует, однако, признать, что в разработке этой логики Виктор Иванович не преуспел, и главную его заслугу надо видеть в разработке «дискретных» логических моделей электротехнических схем, начиная со случая, когда схема представляет собой двухполюсник, который либо проводит ток (т.е. когда электрическое сопротивление схемы равно нулю) либо не проводит его (тогда считается, что схема имеет «бесконечное» сопротивление); логической моделью подобных схем в этом случае оказывается булева алгебра. Но если Шеннон не очень углублялся в проблему, посвятив ей всего несколько публикаций (и, по-видимому, то же справедливо и относительно Накашимы), то В.И. непрерывно расширял виды электрических (а потом и электронных) схем, для которых им разрабатывались логические модели. Он без сомнения гораздо глубже вошел в данный аспект проблемы «логика и техника», чем его американский и японский коллеги.

К сожалению, достижения В.И. не всегда получали должный отклик даже в отечественной науке; об этом подробно рассказано в статье [11].

¹³Как мы видели выше, идеи Герсевича были вовсе не «аналогичны» идеям создателей логики переключательных схем.

Тем более это касается науки зарубежной. Есть все основания согласиться со взглядом, что объясняется это «периферийным положением русскоязычных изданий в массиве научно-технической литературы, невозможностью широкого «паблисити» оригинальных идей русского ученого» [2, с. 299]. Правда, основной результат В.И. был изложен в статье С.А. Яновской, помещенной в издании о развитии математики в Советском Союзе за тридцать лет [32] и других ее публикациях, известных за рубежом. Кроме того, некоторые статьи В.И. были напечатаны в переводе на английский, французский и румынский языки. Но всего этого было недостаточно для утверждения имени Шестакова в мировой науке.

Между тем на протяжении всей своей творческой жизни В.И. получал новые результаты в однажды избранной исследовательской области. Шеннон же был ученым с гораздо более широким кругом научных интересов — внес выдающийся вклад в становление теории информации, в теорию конечных автоматов, в программирование электронных цифровых машин и пр. [24].

Мы уже имели случай отметить, что работы Шестакова находили понимание не столько у инженеров-электротехников, сколько у математических логиков. Заметим, что поначалу Виктор Иванович избегал говорить о логике — речь у него шла о применении алгебры Буля. Объяснялось это тем, что в 40-х годах в отечественной марксистской философской литературе велась резкая (и неквалифицированная) критика математической логики. Но в 50-х гг., в послесталинское время, особенно же после появления первых томов «Философской Энциклопедии» (1960, 1962), в которых было помещено много математико-логических статей, причем некоторые были очень велики по объему, философское значение логико-математической мысли получило в СССР всеобщее признание. И теперь В.И. Шестаков мог уже не маскировать используемые им методы алгебраической терминологией¹⁴, тем более что все расширявшийся им класс электрических (электронных) схем требовал решения задач, для которых приходилось обращаться ко все новым логическим средствам.

¹⁴Это проявилось, в частности, в явной формулировке в заголовках его работ используемых им логических средств и в публикации статей в логических изданиях. См., например: [26, 25].

Это было нужно, когда в рассмотрение вводились мостиковые схемы и многополюсники, многопозиционные реле и многотактные релейные схемы, а в числе элементов схем оказывались не только контакты (последовательное и параллельное соединение которых представимо операциями конъюнкции и дизъюнкции), но и, например, запоминающие элементы и элементы задержки сигнала.

Исходной проблематикой логической теории релейно-контактных схем являются задача построения логической формулы по заданной электрической схеме и обратная задача — восстановление электросхемы на основе заданной логической формулы. Это важно как для техники, так и для логики. И на первое место тут выходят задачи минимизации.

Как известно, под минимизацией понимается построение такой схемы, которая функционально эквивалентна заданной, но наиболее проста в определенном смысле. Упрощение может касаться числа контактов, управляемых данным реле, числа самих реле, числа размыкающих или замыкающих контактов и т.п. В соответствующих логических формулах это сводится к элиминации каких-либо букв или к уменьшению числа вхождений одинаковых букв и/или их отрицаний¹⁵. Отсюда роль логики как средства анализа и синтеза схем, и значение электротехники как источника проблем, которые ставятся и решаются в логике.

Как мы уже говорили, работая в избранном направлении «логика и техника», В.И. непрерывно расширял круг электротехнических задач (и задач электроники), распространяя логические методы их решения, например, на многополюсники и многопозиционные переключатели; это требовало расширения логического аппарата. Неудивительно, что В.И. достаточно скоро обратился к трехзначной логике (Лукаsevича и Бочвара), а потом и к логике с большим числом значений истинности. При этом проблемы, которые он ставил и обсуждал в своих работах, нередко служили развитию самой логики. Как отмечала С.А. Яновская, внимание математических логиков к упрощению средств пред-

¹⁵В логической формуле буква соответствует замыкающему, а отрицание буквы — размыкающему контакту; одинаковые буквы (соответственно одинаковые буквы с отрицанием) соответствуют контактам, управляемым одним и тем же реле.

ставления функций алгебры логики и оценки того, в какой мере этого можно добиться, вызывалось не только развитием самой логики, но и теми вопросами, которые возникали в технике. Здесь свою роль сыграли, в частности, доклады Шестакова, с которыми он выступал на математико-логических семинарах в МГУ [33, с. 111–112].

В воспоминаниях Бориса Абрамовича Трахтенброта рассказано о письме, датированном 4 декабря 1951 г., которое он получил от Яновской. Сообщая о тематике только что прошедшего заседания семинара, руководимого П.С. Новиковым и С.А. Яновской, последняя упомянула тему «Новые результаты в теории релейно-контактных схем» [20, с. 111]. Тема эта весьма показательна и для семинара (впоследствии получившего неофициальное название «великого»), и для интересов С.А. Проблемой «логика и техника» тогда интересовались и Яновская, и Новиков, и Колмогоров. В упомянутом письме С.А. писала Трахтенброту:

«На семинаре мы обсуждали доклады В.И. Шестакова об автоколебательных релейно-контактных схемах, А.В. Кузнецова о мостиковых соединениях; речь шла о необходимом и достаточном условии для того, чтобы релейно-контактные схемы некоторого класса, представляемые функцией от n независимых контактов, были представимы в виде суперпозиции функций от меньшего числа аргументов; в частности, об установлении точного критерия для решения вопроса о том, является ли в данной схеме (рассмотренного класса) “мостик”¹⁶ устранимым или нет (Саша¹⁷ предложил очень простое и остроумное решение) <...> На прошлом заседании Математического общества А.Н. Колмогоров сделал большой обзорный доклад о релейно-контактных схемах» [20, с. 119–120].

На упоминаемый Софьей Александровной доклад В.И. Шестакова свет проливает упоминавшаяся выше его статья «Моде-

¹⁶Речь идет о *мостиковых схемах*, т.е. таких схемах, состоящих из контактов — двухполюсников или резисторов, что в них имеется так называемый мостик; мостик — это элемент схемы, через который электрический ток в зависимости от состояний контактов схемы (замкнут — разомкнут) либо величины входящих в схему электрических сопротивлений может идти либо в одном либо в другом направлении либо не идти вовсе. Мостиковые схемы, исключая специальные случаи, не могут быть описаны «стандартным» аппаратом логической теории релейно-контактных схем.

¹⁷С.А. имела в виду Александра Владимировича Кузнецова.

лирование операций исчисления предложений посредством простейших четырехполюсных схем», где автор (в подстрочном примечании) говорит, что его работа была доложена в марте 1949 г. в Институте точной механики и вычислительной техники, в МГУ — на семинаре по математической логике П.С. Новикова и С.А. Яновской, а также на семинаре по прикладной алгебре А.Г. Куроша и Л.А. Люстерника. Думается, что март месяц 1949 года относится только к первому из указанных докладов Виктора Ивановича — в Институте точной механики, а другие его доклады происходили в последующие месяцы и последующие годы, и один из них как раз и был тем докладом, о котором писала С.А.

Год 1951 был временем «борьбы против идеализма», когда надо было предъявлять научно выверенную и вместе с тем приемлемую с точки зрения господствовавшей идеологии оценку сложившихся на Западе направлений в философии математики и в логике. Вместе с тем это было время послевоенного восстановления и развития, когда от прогресса техники и ее научного обеспечения во многом зависела и экономика, и обороноспособность страны. В этом контексте понятно, почему проблематика применения логики к теории электрических цепей привлекала внимание самых разных отечественных специалистов — от инженеров-прикладников до математиков, занятых самыми «абстрактными» разделами своей науки. Один из авторов этой статьи — Б. Бирюков помнит, что с лекцией на тему «логика и техника» в 1952 г. в «Лектории МГУ» выступал П.С. Новиков. Он рассказывал, как алгебро-логический аппарат можно применить к задаче оптимизации управления лифтами: лекция была популярной и на высокую науку не претендовала, но давала понять, как логические понятия переводятся на язык техники.

В.И. Шестаков с 1942 г. и до конца дней был доцентом физфака МГУ (кафедра общей физики для физического факультета), и другой автор этой статьи — В. Шахов занимался в учебном семинаре, которым руководил Виктор Иванович; на физфаке работы Шестакова должной оценки не получали: считалось, видимо, что они к физике не имеют отношения — к этому вопросу мы еще вернемся. Тем примечательнее статьи Шестакова, посвященные логическому представлению отношений между физиче-

скими величинами и их размерностями [29, 27, 28]¹⁸. Статьи эти интересны тем, что ясно показывают, как внелогическая проблематика толкала к применению «неклассических» логических средств. Ниже мы сосредоточимся на статьях 1983 и 1987 гг.

Как уже было сказано, в архиве В.И. сохранился машинописный подлинник статьи 1987 года; к нему были подколоты два отзыва на нее, и мы позволим себе их здесь привести.

В первом отзыве, в частности, говорилось:

«Автором рассматривается применение усовершенствованного им исчисления высказываний трехзначной логики Д.А. Бочвара B_3 для анализа отношений между физическими величинами. Одним из аспектов этой проблемы является размерность физических величин. В данной статье, исходя из основного постулата теории размерностей и используя [исчисление] B_3 , автор дает оригинальный вывод основных формул теории размерностей. Статья заканчивается сравнительным анализом систем размерностей Гаусса и СИ».

Во втором отзыве читаем:

«Как известно, в системе трехзначного исчисления высказываний, предложенной Д.А. Бочваром, переменные высказывания принимают значения из множества, содержащего три элемента: истина, ложь, бессмыслица. Логика Д.А. Бочвара удачно использована В.И. Шестаковым для анализа отношений между физическими величинами. В работе определены достаточные условия бессмысленности равенств и неравенств скалярных и векторных физических величин, а также достаточные условия истинности равенств размерностей этих величин, что является определенным вкладом в математическую теорию размерностей. Полученные результаты существенны для анализа вида формул, выражающих зависимость между физическими величинами. Данная статья является продолжением исследований автора в теории трехзначного исчисления высказываний и моделирования операций исчисления высказываний посредством релейно-контактных схем».

Мы не знаем, кем были составлены эти отзывы. В хранящихся в архиве В.И. машинописных копиях этих отзывов та часть

¹⁸ Последняя статья в машинописном виде сохранилась в архиве автора и датирована 18 марта 1986 г. Виктор Иванович скончался 3 мая 1987 г. Таким образом, тема «логика и физика» была, по-видимому, одной из завершающих в научном творчестве Шестакова.

страниц, где фигурировали подписи рецензентов, была отрезана и удалена: очевидно, рецензенты Серии физики и астрономии «Вестника МГУ» были «закрыты» для авторов рецензируемых работ. Содержание отзывов, особенно второго, ясно говорит, что их авторы были достаточно компетентны в вопросах логики (как, впрочем, и в физике).

Замысел «физических» статей Шестакова состоял в логической формализации отношения между двумя равенствами — равенством физических величин и равенством их размерностей. В.И. Шестаков показал, что выяснение этого вопроса требует трехзначной логики: как было отмечено в приведенных выше отзывах на статью 1987 г., кроме оценок «истинно» и «ложно» здесь нужна оценка «бессмысленно». В статье 1983 г. ход мысли В.И. начинается с утверждения (1), согласно которому равенство $W = V$ значений физических величин W и V считается бессмысленным, если утверждение о равенстве $[W] = [V]$ их размерностей $[W]$ и $[V]$ в одной и той же системе физических величин неверно.

Для построения искомой формализации В.И. использовал пропозициональную часть логического исчисления, предложенного Д.А. Бочваром для решения логических антиномий [8, 7]. В этом исчислении пропозициональные переменные могут пробегать по высказываниям, принимающим три истинностных значения — «истинно» (T), «ложно» (F) и «бессмысленно» (N), и тогда речь идет об исчислении высказываний. Если высказывания принимают только значения T и F , то они называются предложениями. Таким образом, предложения являются частным случаем высказываний; это значит, что «исчисление предложений» относится к классической логике, а объемлющее его «исчисление высказываний» — к логике неклассической.

Логике предложений Шестаков строит, используя единственную операцию — антидизъюнкцию (отрицание дизъюнкции, иначе называемую штрихом Нико). В дальнейшем мы не будем во всем следовать обозначениям Шестакова, в частности антидизъюнкцию будем обозначать знаком $\uparrow$. Как известно, через антидизъюнкцию выразимы все классические пропозициональные функции — эта операция функционально полна: отрицание ($\sim$) предложения A , т.е. $\sim A$, равно $A \uparrow A$.

«Логику высказываний» Бочвар получает путем введения одноместной операции «внешнего утверждения» $\vdash$, которая для значений T и F (истинности и ложности) сохраняет эти значения, а «бессмыслицу» (N) переводит в ложь; помимо «внутреннего отрицания» ($\sim$) вводится «внешнее отрицание» ($\neg$), определяемое как $\neg A =_{Df} \vdash \sim A$, где $=_{Df}$ есть знак «равенства по определению»; Шестаков читает его как « A ложно». Что касается формулы $\sim \vdash A$, то она получает название «опровержения», обозначается путем помещения над A горизонтальной черты и читается Шестаковым как « A неверно».

Построение нужной для Шестакова логики завершается определением оператора бессмыслицы: $\downarrow A =_{Df} \vdash A \uparrow \neg A$, которое означает, что высказывание A бессмысленно тогда и только тогда, когда неверна дизъюнкция утверждения высказывания A и утверждения его (классического) отрицания. Смысл этого определения выясняется, если «расшифровать» операцию $\neg A$; тогда $\downarrow A$ будет означать недопустимость выбора между $\vdash A$ и $\vdash \sim A$.

Собственно говоря, единственной независимой от классической логики операцией является (внешнее) утверждение $\vdash$; операции же опровержения, «утверждения отрицания» $\neg$ и оператор бессмыслицы выразимы через внешнее утверждение и операции классической пропозициональной логики — классическое отрицание ($\sim$) и дизъюнкцию ($\vee$); в выкладках Шестакова используется и (классическая) конъюнкция, знак которой мыслится в виде точки между двумя частями конъюнктивной формулы (точка не выписывается, а подразумевается — это обычный способ записи в алгебре логики).

Как Шестаков применяет этот логический язык, видно из приводимых им формул. Так, операция эквиваленции в (неклассическом) исчислении высказываний представима следующим образом:

$$A \equiv B =_{Df} \vdash A \vdash B \vee \neg A \neg B \vee \downarrow A \downarrow B.$$

Шестаков не стал аккуратно строить нужный ему фрагмент трехзначной логики Бочвара (например, не определил понятие формулы в рассматриваемой им логике), отослав читателя к работам Дмитрия Анатольевича¹⁹; «расширение» же этой логики

¹⁹Заметим, что изложение Шестаковым используемого им пропозицио-

за счет отношений равенства и неравенства физических величин и их размерностей он счел, по-видимому, понятным и без дальнейших пояснений. Что касается правила вывода в (неклассическом) «исчислении высказываний», то им служит логический переход:

$$\frac{\Phi, \vdash \Phi \supset \vdash \Psi}{\Psi},$$

где $\supset$ есть знак материальной импликации классической пропозициональной логики (т.е. «логики предложений» в том смысле, в каком выше использовалось это понятие). Разумеется, это правило — *modus ponens*, принимаемое в (неклассической) «логике высказываний», действует и в классической «логике предложений».

Теперь можно выразить утверждение (1), с которого В.И. начинает свои рассуждения. Оно имеет вид:

$$\overline{[W] = [V] \supset \downarrow (W = V)}, \quad (2)$$

что читается: «если равенство размерностей величин W и V , т.е. $[W] = [V]$, неверно, то равенство величин W и V бессмысленно». Так, из того, что равенство $[\text{метр}] = [\text{секунда}]$ неверно, следует, что $\downarrow (s = t)$, т.е. что нельзя отождествлять длину пути, проходимого неким телом за определенное время, с самим этим временем.

Формулу (2), пишет Шестаков, можно считать одним из основных постулатов теории размерностей физических величин, и она обычно неявно используется при проверке размерностей:

«Проверка любого равенства $W = V$, полученного при решении какой-либо физической задачи, обычно начинается с проверки равенства $[W] = [V]$ размерностей $[W]$ и $[V]$ величин W и V . Если в результате этой проверки окажется, что равенство $[W] = [V]$ неверно, то $\langle \dots \rangle$ приходят к выводу, что $W = V$ бессмысленно» [27, с. 42].

нального исчисления Бочвара содержит вещи, которые ему попросту не нужны. Таково, например, определение доказуемой формулы неклассического исчисления высказываний Бочвар (формула доказуема тогда, и только тогда, когда при любых истинностных значениях (T, F, N) входящих в нее переменных ее истинностное значение есть T , и она противоречива, если ни при каких значениях переменных не принимает значения T).

Шестаков замечает, что равенство (значений) $W = V$ двух произвольных величин может оказаться бессмысленным и тогда, когда равенство их размерностей $[W] = [V]$ верно в некоторой системе физических величин, как это имеет место для работы и момента силы, представляющих собой разные физические величины, хотя утверждение о равенстве их размерностей верно в любых применяемых системах физических величин.

Равенство размерностей двух произвольных физических величин — только достаточное условие равенства либо неравенства значений самих величин. Для равенства же размерностей физических величин достаточно, чтобы равенство либо неравенство значений величин имело смысл. Ибо из имплицативной формулы (2), используя законы контрапозиции и снятия двойного отрицания, действующие в «логике высказываний», получается имплицативная формула

$$\sim \downarrow (W = V) \supset \vdash ([W] = [V]), \quad (3)$$

которая читается: «для равенства размерностей двух физических величин достаточно, чтобы равенство значений самих величин имело смысл (не было бессмысленным)». Заметим, что при ложности антецедента этой формулы, т.е. тогда, когда о равенстве значений величин W и V говорить бессмысленно (величины несравнимы), из формулы (3) не следует, что их размерности не могут быть равными.

Опираясь на формулу (3) и определив неравенство значений двух произвольных физических величин как (классическое) отрицание их равенства, а также используя справедливое в исчислении Бочвара равенство (логическую эквивалентность) формул $\downarrow (W = V)$ и $\downarrow (W \neq V)$, Шестаков получает формулы (4), (5) и (6):

$$\sim \downarrow (W \neq V) \supset \vdash ([W] = [V]), \quad (4)$$

$$\overline{[W] = [V]} \supset \downarrow (W = V), \quad (5)$$

и

$$\overline{[W] = [V]} \supset \downarrow (W \neq V). \quad (6)$$

Эти формулы означают, что если равенство размерностей двух произвольных физических величин (Шестаков оговаривает, что физические величины могут принимать значение на множестве

действительных или комплексных чисел) неверно, то бессмысленно как равенство, так и неравенство значений соответствующих величин; а из осмысленности равенства либо неравенства двух физических величин вытекает равенство их размерностей.

Далее полученные соотношения распространяются на кортежи (конечные последовательности) W и V любых физических величин. В теории Шестакова учитываются и безразмерные физические величины. Далее следуют случаи векторного и матричного представления величин и их размерностей. При этом принимаются во внимание и ситуации, когда такого рода представления имеют неодинаковую размерность. Для матриц как пример приводятся матрицы импедансов и адмиттансов четырехполюсников²⁰, и Шестаков показывает, как на них в этом случае можно распространить действие формул (3)–(6). Выкладки Шестакова завершаются замечанием, что используемая автором логика в случае отношений между кортежами и матрицами с элементами различной размерности «требуется особого рассмотрения» [27, с. 45].

В статье 1987 г. В.И. продолжает свои выкладки. Он показывает, что в его теории естественно возникает равенство размерностей физических величин V и αV (где α — безразмерный числовой множитель); он охватывает своим подходом как вещественные, так и комплексные физические величины; показывает, что в его теории сохраняются все известные закономерности, касающиеся физических размерностей, в частности, их умножение и деление; например, рассматривая умножение размерностей, он показывает, что размерность произведения двух физических величин равна произведению их размерностей; что из ассоциативности и коммутативности физических величин следуют аналогичные свойства их размерностей; он показывает, далее, как при его подходе получается такое известное в теории размерностей²¹ свойство комплексных физических величин, что множество их размерностей образует абелеву группу относительно операции умножения их размерностей.

Как мы уже говорили, В.И. Шестаков был доцентом физиче-

²⁰ *Импеданс* — полное сопротивление цепи (активное и реактивное); *адмиттанс* — полная проводимость электрической цепи.

²¹ Здесь следует ссылка на монографию [35].

ского факультета МГУ, и один из авторов этой статьи (В.И. Шахов) в 1947 г., после демобилизации из Советской армии поступил на первый курс физфака, и первые два года семинарские занятия в группе, в которую он входил, вел Виктор Иванович. Шестаков был немногословен, сдержан, доброжелателен. Если на занятиях у студентов возникали какие-либо вопросы, он не торопился давать на них ответ — ждал, когда «умные головы» в группе найдут решение. Если этого не случалось, В.И. немногословно разрешал возникавшие затруднения.

О своих научных интересах В.И. Шестаков студентам никогда не рассказывал, не упоминал свои публикации — учитывал, видимо, что для учащихся первых курсов это мало интересно, что все их внимание направлено на изучаемый учебный материал. Только в аспирантуре, а потом в ходе работы на физфаке В.И. Шахов стал разбираться в научных направлениях, представленных на факультете, и понимать, кто из профессоров и преподавателей факультета занимается той или иной проблематикой.

В 50–60-е годы на физфаке выделялось два главных теоретических направления: вычислительная техника и атомная физика. По этим направлениям проходило большинство научных семинаров и конференций; именно ученые, которые работали в этих областях, получали те или иные премии. Учитывая все это, мы понимаем, почему работы Шестакова не выделялись из общего вала «научной продукции» факультета; замкнутый характер Виктора Ивановича мог этому только способствовать. Между тем его исследования представляли непосредственный интерес для вычислительной техники и программирования ЭВМ. Университетские физики этого не видели — тем более что им было известно: этой областью научных исследований интенсивно занимаются на механико-математическом факультете. В те годы началось создание в университете вычислительного центра, который со временем превратился в факультет вычислительной техники и кибернетики; в двухэтажном здании, где зарождалось новое направление, впоследствии остался только вычислительный центр МГУ.

Как известно, первые ЭВМ конструировались на электронных лампах и занимали большие помещения; функционирова-

ние первых электронных цифровых машин требовало громоздких охлаждающих устройств. Затем наступил недолгий период, когда цифровая электроника базировалась на магнитно-релейных схемах, но прогресс был столь стремителен, что вскоре вся вычислительная техника перешла к использованию пленочно-полупроводниковых схем промышленного типа.

Заметим, что в эти годы в нашей стране началась интенсивная разработка теории программирования ЭВМ, содержащая важные логические компоненты. Таковой была, например, методика построения операторных логических схем, разработанная в 1953 г. в Институте математики АН СССР А.А. Ляпуновым [17, 16, 15]. Поскольку в рамках концепции *кибернетики*, развитой Алексеем Андреевичем, как мы увидим, научная проблематика, разрабатывавшаяся В.И. Шестаковым, нашла определенное место, нам придется остановиться на соответствующих вопросах.

Следуя идеям Норберта Винера, А.А. Ляпунов трактовал кибернетику как область знания, в которой математическими (и логическими) методами изучаются процессы управления и контроля в машинах и живых организмах. Он писал:

«Вычислительная машина и мышление представляют собой две управляющие системы с очень широкими и гибкими возможностями, в некотором смысле крайних типов: вычислительная машина — это управляющая система, действующая *строго формально, по заранее заданному алгоритму*, тогда как мышление — это управляющая система, функционирование которой *совсем не формально*» [16, с. 6]²².

²²Мы не останавливаемся здесь на проблеме соотношения машины и мышления, а также на вопросах, связанных с ослаблением требования строго формального описания процессов, протекающих в управляющих системах, разработка которых привела впоследствии к *эвристическому программированию* и возникновению направления *искусственного интеллекта*. Проблема «ЭВМ и человек» явилась предметом размышлений Алана Тьюринга, русскому переводу основополагающей статьи которого (см. [21]) С.А. Яновская предпослала глубокое предисловие. Не касаемся мы и вопросов построения «самосовершенствующихся» алгоритмов и самоорганизующихся систем (этими вопросами занимался Дж. фон Нейман, русский перевод статьи которого «Общая и логическая теория автоматов» помещена в упомянутой книжке А. Тьюринга). Что касается «искусственного интеллекта», то хорошее представление о его современном состоянии дает книга [22].

Критерием того, что функционирование управляющей системы, т.е. то, как в ней происходит переработка информации, изучено, продолжал Ляпунов, служит возможность моделирования ее на ЭВМ, что равносильно ее модельному представлению в машине Тьюринга с ограниченной памятью²³, т.е. ее алгоритмизации. Изучение функционирования произвольной управляющей системы сводится к ее описанию при помощи некоторого алгоритма и затем к вопросу о его материальной реализации. Для описания такого рода алгоритмов Ляпунов предложил аппарат *логических схем алгоритмов*.

В алгоритмах, о которых идет речь, имеются операторы — арифметические и логические операции и предикаты, а также операции «передачи управления», реализуемые в общем случае путем проверки логических условий. В схемных записях алгоритмов отвлекаются от содержательного смысла операторов: подобно схемам формул в логике после замены в них знаков операторов и логических переменных конкретными операциями и предикатами возникают конкретные алгоритмы переработки информации.

Логическая схема алгоритма состоит из операторов и логических условий, записываемых друг за другом; она определяет порядок работы операторов в зависимости от результатов проверки входящих в нее логических условий, требующих ответа «да» или «нет». Ляпунов показывает [16, с. 9], как из операторов A , B , C и логических условий p и q можно составлять логические схемы, в которых «передача управления» выражается с помощью стрелок; примером может служить логическая схема:

$$\begin{array}{ccccccc} & 2 & & 1 & & 1 & & 2 \\ & \downarrow & & \uparrow & & \downarrow & & \uparrow \\ & A p & & B & & q & & C; \end{array}$$

знаки $\uparrow$, $\downarrow$ мыслятся как одна стрелка²⁴, если они имеют один и тот же номер, то плучают следующий смысл: если проверка логического условия p приводит к ответу «нет», то оператор B не выполняется, и надлежит произвести проверку условия q (в слу-

²³Машина Тьюринга с неограниченной («бесконечной») памятью представляет собой, как известно, одно из уточнений понятия алгоритма, или вычислимой функции.

²⁴Излишне, пожалуй, говорить, что стрелки у Ляпунова имеют совершенно другой смысл, чем у В.И. Шестакова.

чае же ответа «да» вслед за оператором A следует выполнение оператора B); аналогично «управляет» порядком выполнения операторов A , B , C и логическое условие q .

Запись алгоритмов в виде логических схем использовалась Ляпуновым для того, чтобы решать вопросы синтеза алгоритмов, имитирующих изучаемый процесс управления и переработки информации, а также для изучения различных способов тождественного преобразования алгоритмов, для чего использовались операции классической пропозициональной логики — отрицание, конъюнкция, дизъюнкция, импликация и эквивалентность [31, с. 78 и далее]. Для нашего изложения важно, что в качестве примера научных проблем, для которых существенную роль играют методы синтеза алгоритмов, Алексей Андреевич указал теорию релейно-контактных схем. Он писал:

«Рассмотрим вопросы проектирования релейно-контактных схем, т.е. устройств, реализующих определенные функции алгебры логики. Эти функции реализуются с помощью контактов и реле заданных типов, причем требуется экономно расходовать имеющиеся материальные средства <...> Существенно сочетать быстроту синтеза, универсальность метода и его экономичность. <...> Рассматривая вопрос о синтезе схемы, реализующей некоторую определенную функцию алгебры логики, мы должны подыскивать некоторый класс функций, для которого разработан метод синтеза и в который входит наша функция. Вообще говоря, чем шире выбранный класс функций, тем большими возможностями обладает соответствующий алгоритм синтеза и тем менее он учитывает специальные особенности синтезируемых функций в целях экономии числа деталей. Требования экономичности и универсальности метода синтеза являются в некотором отношении противоречивыми. Чем более универсален метод, т.е. чем для более широкого класса функций он пригоден, тем к большему расходу деталей он ведет в каждом отдельном случае. Поэтому часто бывает целесообразно подыскивать сравнительно узкий класс, содержащий интересующие нас функции, и вырабатывать специальный метод синтеза, годный только для этого класса <...> Применение такой точки зрения часто позволяет для особенно важных индивидуальных функций получать выгодные схемные реализации <...> На этой почве возникла очень содержательная ветвь математической проблематики, широко использующая методы математической логики» [16, с. 11].

Далее Ляпунов утверждал, что некоторые общие приемы син-

теза релейно-контактных схем, выработанные на этом пути, нашли широкое применение в технике.

Здесь напрашивается ссылка на работы В.И. Шестакова, но у Ляпунова ее нет — автор вообще не называет никаких научных источников²⁵. Мы не знаем, были ли известны Ляпунову *первые* работы Шестакова, в которых в том или ином отношении содержался подход к ответам на некоторые вопросы, поставленные Алексеем Андреевичем. Думается, что нет, так как в статье М.Л. Цетлина²⁶, которая начинается с упоминания методов синтеза релейно-контактных схем, первой указана монография М.А. Гаврилова [9], а из работ Шестакова указаны только две его статьи, опубликованные в 1954 г.; в статье Ю.И. Янова, где рассматриваются преобразования логических схем алгоритмов с использованием методики упрощения логических выражений в стиле теории релейно-контактных схем, вообще нет ссылок на работы, к этой теории относящихся. Заметим, что обе статьи помещены в том же выпуске «Проблем кибернетики», что и статьи А.А. Ляпунова.

В конце 80-х годов один из авторов этих строк подготовил и выпустил в академической серии «Кибернетика — неограниченные возможности и возможные ограничения» сборник, посвященный истории кибернетики [12]. Можно только сожалеть, что в открывающей его статье [3] о Шестакове было сказано лишь вскользь. Правда, в следовавшей за ней публикации М.Г. Гаазе-Рапопорта о вкладе Виктора Ивановича в теорию релейно-контактных схем — и о первенстве его в открытии этой теории — говорилось достаточно ясно [10, с. 56, 89]. Но приходится констатировать, что в школе Ляпунова (и таких ученых, как М.Л. Цетлин) работы Шестакова как бы не замечались. В Москве с 1955 по 1962 год работал руководимый А.А. Ляпуновым научно-исследовательский семинар по кибернетике — Большой семинар, как его называли, так как он носил фактически всесоюзный характер, и на нем ни разу не выступал Виктор Иванович²⁷. В Научном совете по комплексной проблеме «Кибернетика» при

²⁵То же касается и второй статьи Алексея Андреевича.

²⁶Она носила название «О непримитивных схемах».

²⁷Это следует из Приложения «Доклады, прочитанные и обсужденные на заседаниях Большого семинара А.А. Ляпунова в Московском университете», которое помещено в статье М.Г. Гаазе-Рапопорта [10].

Президиуме АН СССР, созданном в 1959 году и руководимом академиком А.И. Бергом, насколько нам известно, Шестаков тоже не выступал. Это и понятно, так как Секцией технической кибернетики в этом Научном совете руководил М.А. Гаврилов, «конкурент» Шестакова в разработке теории релейных схем. Неудивительно, что Виктор Иванович настороженно относился к кибернетике и кибернетикам, хотя поддерживал тесные связи с логиками. В частности, по приглашению руководителей Научно-исследовательского семинара по логике и методологии науки²⁸ — Б.В. Бирюкова и А.С. Кузичева Виктор Иванович Шестаков выступил на нем с рядом докладов.

Выше мы привели отрывок из статьи А.А. Ляпунова, в котором один из первопроходцев науки о процессах управления и переработке информации говорил о теории релейно-контактных схем. Обратим внимание на то, что А.А. имел в виду классическую алгебру логики, хотя и предусматривал расширение используемого класса функций. Шестаков же с самого начала предполагал возможность выхода за пределы классического алгебро-логического представления релейных и иных электротехнических (а потом и электронных) устройств. Обращение к трехзначной логике, да еще имеющей «двухэтажную» структуру — яркий тому пример. И здесь мы возвращаемся к тому, как для уточнения отношений между физическими величинами и их размерностями Шестаков использовал исчисление B_3 Бочвара.

Обращение Шестакова, ранее уже применявшего в своих работах трехзначную логику, к такому важному разделу физики, как теория размерностей, вполне понятно: именно в нем существенную роль играет вопрос об осмысленности или бессмысленности выражений языка. «Третье значение» в трехзначной логике обычно истолковывается как отвержение смысла — в отличие от истинности и ложности, признаваемых вполне осмысленными.

Как мы видели, для выяснения соотношения, связывающего физические величины и их размерности, В.И. использовал один из вариантов трехзначной логики. Он продемонстрировал, как можно логически обосновать то, что равенство размерно-

²⁸Семинар работал при кафедре логики философского факультета и кабинета истории математики мехмата МГУ в 70-х и начале 80-х годов.

стей двух произвольных физических величин является необходимым, но не достаточным условием равенства самих этих величин. Для равенства размерностей двух физических величин достаточно (но не необходимо), чтобы имело место равенство (численных) значений последних. Условие это четко выражено формулой (3). Осмысленность равенства значений двух физических величин есть *достаточное* условие равенства их размерностей; а последнее *необходимо* для того, чтобы признать осмысленным вопрос о равенстве либо неравенстве их значений.

Будучи физиком, В.И. показывает, как конкретно выглядят выявленные им соотношения. В качестве примера в статье 1983 г. рассматриваются такие физические величины, как электрические и магнитные поля, представленные в системах СИ и СГС. Поскольку в соотношениях, связывающих физические величины и их размерности, важную роль выполняют системы единиц, поясним смысл этих систем.

Система единиц СИ — международная (принята в 1960 г.), ныне она широко используется в науке и технике. Основные (образующие) ее единицы: длина в метрах L , масса в килограммах (кг) M , время в секундах (сек) T , сила тока в амперах I , сила света в канделах J , температура в кельвинах K , количество вещества в молях N . Система СГС (система Гаусса — Вебера) основывается на единицах: один сантиметр (L), один грамм (M), одна секунда (T), единичный электрический заряд (q), единичная магнитная масса (M_m). Значения параметров L, M, T, I, J, K, N и L, M, T, q, M_m определяют в каждой из систем размерности тех или иных физических величин.

В системе СИ мы имеем:

$$[E] = LMT^{-3}I^{-1}; [D] = L^{-2}TI; [H] = L^{-1}I; [B] = MT^{-2}I^{-1}, \quad (K_1)$$

а в системе СГС:

$$[E] = [D] = [H] = [B] = L^{-1/2}M^{1/2}T^{-1}, \quad (K_2)$$

где E — напряженность и D — индукция электрических полей, а H — напряженность и B — индукция магнитных полей.

Из выражения (K_1) следует, что каждой размерности однозначно соответствует определенная физическая величина — вы-

полняется условие (3). В выражении (K_2) фигурируют различные физические величины, но их объединяет одна и та же размерность. Условие (3) для случая (K_2) непосредственно не выполняется; это связано с особенностью системы СГС, что ниже будет пояснено. Это как раз тот оговоренный выше случай, когда antecedent формулы (3) ложен, поскольку величины E , D , H и B несравнимы.

В.И. Шестаков метко заметил, что система СИ обладает «большой разрешающей способностью». Однако и в этой системе возможны случаи, когда различные физические величины обладают одной и той же размерностью. Например, работа (энергия) A и вращающий момент (момент силы) N в системе СИ имеют одинаковую размерность:

$$[A] = [N] = L^2MT^{-2}. \quad (K_3)$$

Как мы уже говорили, в работе Шестакова 1983 г. показано, что соответствие между физическими величинами и их размерностями (формула (3)) может быть представлено и в векторной форме²⁹. В самом деле, рассмотрев движение материальной точки m по окружности радиуса $\mathbf{R}$ под действием силы $\mathbf{F}$ в случае работы A и момента силы $\mathbf{N}$, мы получим следующие выражения³⁰:

$$A = \mathbf{F} \bullet s, \mathbf{N} = \mathbf{R} \times \mathbf{F}; \quad (K_4)$$

это — движение в декартовой системе координат (x, y, z) , где $\mathbf{R}$ направлено по оси x , $\mathbf{F}$ параллельно оси y и перемещение s коллинеарно $\mathbf{F}$. Тогда в проекциях на координатные оси мы имеем:

$$A_y = F \bullet s; N_z = R_x F_y \cos \alpha (\cos \alpha = 1). \quad (K_5)$$

Запишем соотношение (K_5) через соответствующие им физические размерности, выражая их через координатные компоненты. Мы получим:

$$[A_y] = [L_y MT^{-2}] L_y = [L_y^2 MT^{-2}],$$

$$[N_z] = [L_x MT^{-2}] L_y = [L_x L_y MT^{-2}].$$

²⁹Известные нам работы, где эти вопросы подробно рассматриваются, это труд [23] и публикация [36].

³⁰Полужирным шрифтом набраны векторные величины.

Приведенные ранее формулы размерности величин работы и момента сил совпадали с (K_3), — теперь они различаются, так как имеют различные проекции по координатным осям. Это дает возможность признать осмысленность вопроса о равенстве или неравенстве соответствующих физических величин.

Чтобы оценить вклад В.И. Шестакова в теорию размерностей, приведем некоторые положения последней.

Теорией размерностей физических величин физики занимались начиная с Ньютона. Впервые наиболее последовательно этот вопрос был рассмотрен Ж. Фурье (1822). Он фактически ввел понятия формулы размерности (а) и однородности по размерностям (b); согласно (а) каждой физической величине должна соответствовать единственная размерность (это фактически условие (3)), а условие (b) выражает тот факт, что все размерности одинакового вида в данном уравнении должны иметь одинаковые степенные показатели. Затем важный шаг был сделан К. Гауссом (1832) и В.Э. Вебером (1851). Их работы и позволили построить систему СГС.

Особенность системы СГС состоит в том, что между электрическими и магнитными единицами, применяемыми для измерений, отсутствует непосредственная связь. Это приводит к тому, что в этой системе разные величины могут иметь одинаковые размерности (случай (K_2)), и чтобы перейти от магнитных единиц к электрическим и обратно, необходимо использование дополнительных условий.

Как в СИ, так и в СГС выбор основных (образующих) единиц системы определяется характером изучаемых явлений. В системе СИ электрические и магнитные единицы взаимосвязаны, но различаются в своем проявлении, что и приводит, говоря словами Шестакова, к их «большой разрешающей способности».

В основе теории размерностей физических величин, как уже упоминалось, лежат такие понятия, как «формула размерностей», «однородность по размерностям», а также, естественно, безразмерный числовой множитель (коэффициент). Используя эти понятия и выражая исследуемое уравнение в символах размерностей, мы можем судить о соответствии данного уравнения изучаемым физическим процессам. Открывается также возможность решать физические задачи путем составления требуемых

уравнений, причем без проведения экспериментов. Примером может служить вывод формулы «голубого цвета неба», произведенный Рэлеем в 1875 г.

Несмотря на почтенный возраст теории размерностей и интенсивное ее применение, теория эта, как уже было сказано, есть результат обобщения практического опыта. Поэтому понятно замечание Г. Хантли о том, что «теория размерности нуждается в философском пояснении» [23, с. 42, 170]. Теперь мы можем сказать более определенно: нуждается в логико-математическом обосновании, что и было сделано В.И. Шестаковым.

Безусловно, в теории размерностей физических величин, как и в любой теории, кроме вопросов, связанных с ее общим обоснованием, возникает ряд других важных проблем, и в их числе вопрос о том, что считать исходными, «первичными» данными при ее построении и как на основе последних строить «вторичные» данные, относящиеся к физическим величинам. На эти вопросы до сих пор нет строго обоснованного ответа. Возможно, здесь может помочь «теория физических структур» — новая теоретическая концепция, разрабатываемая Ю.И. Кулаковым [13]. Но эти вопросы выходят за рамки наших рассмотрений.

Статьи В.И. Шестакова о применении логики к теории физических величин и их размерностей, будучи независимыми от других его работ по приложениям логического аппарата к внелогическому содержанию, хорошо демонстрируют, как основательно их автор подходил к исследованию интересовавших его проблем.

Литература

- [1] Бажанов В.А. История логики в России и СССР (Концептуальный контекст университетской философии). М.: КАНОН, 2007.
- [2] Бажанов В.А., Волгин Л.И. В.И. Шестаков и К. Шеннон: различные судьбы авторов одной красивой идеи // Современная логика: проблемы теории, истории и применения в науке. Материалы VII Общероссийской научной конференции. СПб., 2002.
- [3] Бирюков Б. В. Кибернетика, информатика, вычислительная техника, автоматика: проблемы становления и развития. Вклад отечественной науки // Кибернетика: прошлое для будущего. Этюды по истории отечественной кибернетики. Теория управления. Автоматика. Биокибернетика. Научная редакция Б.В.Бирюкова. М.: Наука, 1989.
- [4] Бирюков Б.В., Борисова О.А., Левин В.И. О вкладе Виктора Ивановича Шестакова в создание логической теории релейных схем // «Вопросы философии» (в печати).

- [5] Бирюков Б.В., Верстин И.С., Левин В.И. О приоритете В.И. Шестакова в создании логической теории релейных схем // Логические исследования. Вып. 13. М., 2006.
- [6] Бирюков Б.В., Левин В.И. Еще раз об открытии логических моделей технических устройств // Вестник Моск. ун-та. Серия 7: философия (в печати).
- [7] Бочвар Д.А. К вопросу о непротиворечивости одного трехзначного исчисления // Математич. сб. 1943. Т. 12(54), вып. 1.
- [8] Бочвар Д.А. Об одном трехзначном исчислении и его применении к анализу парадоксов классического расширенного функционального исчисления // Математич. сб. 1938. Т. 4(46), вып. 2.
- [9] Гаврилов М.А. Теория релейно-контактных схем. М.: Изд-во АН СССР, 1950.
- [10] Гаазе-Рапопорт М.Г. О становлении кибернетики в СССР // Кибернетика: прошлое для будущего. Этюды по истории отечественной кибернетики. Теория управления. Автоматика. Биокибернетика. Научная редакция Б.В.Бирюкова. М.: Наука, 1989.
- [11] Герсевич Н.М. Собр. соч. Том I. М.: Стройвоенмориздат, 1948.
- [12] Кибернетика: прошлое для будущего. Этюды по истории отечественной кибернетики. Теория управления. Автоматика. Биокибернетика. Научная редакция Б.В.Бирюкова. М.: Наука, 1989.
- [13] Кулаков Ю.И. Теория размерностей физических величин // Вычислительные системы. Вып. 118: Машинный анализ сложных структур. Новосибирск, 1986.
- [14] Кутюра Л. Алгебра логики / Пер. с франц. с прибавлениями проф. И.Слешинского. Одесса: Изд-во Mathesis, 1909.
- [15] Ляпунов А.А. О логических схемах программ // Проблемы кибернетики Под ред. А.А. Ляпунова. Вып. 1, М.: Физматгиз, 1958.
- [16] Ляпунов А.А. О некоторых общих вопросах кибернетики // Проблемы кибернетики / Под ред. А.А. Ляпунова. Вып. 1. М.: Физматгиз, 1958.
- [17] Ляпунов А.А., Шестопал Г.А. Об алгоритмическом описании процессов управления // Математическое просвещение. Вып. 2. М.: Гостехиздат, 1957.
- [18] Поваров Г.Н. Предисловие редактора перевода // Э.Беркли. Символическая логика и разумные машины / Перев. с англ. Под ред. и с предисловием Г.Н. Поварова. М.: ИЛ, 1961.
- [19] Предводителев А.С. К истории применения алгебры Буля в технике. Письмо в редакцию // Вестн. МГУ. Серия 5: Физика, астрономия. № 5, 1968.
- [20] Трахтенброт Б.А. Памяти С.А. Яновской // Историко-математические исследования. Вып. 2 (37), 1997. С. 111.
- [21] Тьюринг А. Может ли машина мыслить? М.: Физматгиз, 1960.
- [22] Финн В.К. Интеллектуальные системы и общество. М., 2001.
- [23] Хантли Г. Анализ размерностей. М., 1970.
- [24] Шеннон К. Работы по теории информации и кибернетике / Перев. с англ. с предисловием А.Н.Колмогорова. М.: ИЛ, 1963.
- [25] Шестаков В.И. Моделирование операций исчисления высказываний посредством релейно-контактных схем // Логические исследования. Сб. статей. Редакция: Э.Кольман, Г.Н. Поваров, П.В. Таванец и С.А. Яновская. М.: Изд-во АН СССР, 1959.
- [26] Шестаков В.И. Моделирование операций исчисления предложений посредством простейших четырехполюсных схем // Вычислительная математика и вычислительная техника. Вып. 1. М., 1953.
- [27] Шестаков В.И. О применении трехзначной логики для анализа отношений между физическими величинами // Там же. 1983. Т. 24, № 4.
- [28] Шестаков В.И. О применении трехзначной логики в теории размерностей физических величин // Там же. 1987. Т. 28, № 3.

- [29] *Шестаков В.И.* Операции обращения и инверсии комплексных физических величин // Вестн. Моск. ун-та. Серия 3: Физика. Астрономия. 1979. Т. 20, № 6.
- [30] *Эренфест П.* Рецензия на книгу Л.Кутюра «Алгебра логики» // Журнал русск. физико-химич. общ-ва, 1910. Т. 42, отделение 2. Вып. 10.
- [31] *Янов Ю.И.* О логических схемах алгоритмов // Вопросы кибернетики. Вып. 1. Физматгиз, 1958.
- [32] *Яновская С.А.* Основания математики и математическая логика // Математика в СССР за тридцать лет (1917-1947). М.;Л., Физматгиз, 1947.
- [33] *Яновская С.А.* Математическая логика и основания математики // Математика в СССР за сорок лет. 1917-1957. Том 1: Обзорные статьи. М.: Физматгиз, 1959.
- [34] *Couturat L.* L'Algèbre de la logique. Paris, 1906 (второе издание).
- [35] *Fleischmann R.* Einführung in die Physik. Weinheim, 1973.
- [36] *Spencer Moon* Jnl. Franklin Inst. Dec. 1949.

Проблема контекста интерпретации в универсальной логике¹

В. Л. ВАСЮКОВ

ABSTRACT. In [1] some categorical constructions were introduced which describe the inner structure of the category of logical systems. But detailed analysis reveals the problems which turn out to be caused by the insufficient account of the context of the investigation. Those defects are repaired and it is shown that all categorical constructions from [1] would be exploited up to equivalence introduced to reflect the practice of the mutual interpretations of logical systems.

1 Введение

В работе [1] было проведено исследование природы и структуры общего универсума возможных комбинаций всех логических систем, основываясь на концепции *универсальной логики* (см. [5, 6]), позволившее выдвинуть гипотезу относительно структуры подобного универсума. Универсальная логика представляет собой общую теорию логик, рассматриваемых как особая разновидность математических структур, по аналогии с тем, как универсальная алгебра рассматривает конкретные алгебраические системы. Теоретико-категорный подход, когда логические системы объединяются в категорию специального вида, снабжает нас некоторым фундаментом для исследования универсума универсальной логики. В рамках этого подхода удастся ввести категорные конструкции, которые наряду с копроизведениями, лежащими в основе расслоения логик, описывают внутреннюю структуру категории логических систем. Как оказалось, универсум универсальной логики оказывается *паранепротиворечивым дополняющим топосом*.

¹Работа выполнена при поддержке РГНФ в рамках научно-исследовательского проекта РГНФ («Проблема контекста в философской теории интерпретации»), проект № 07-03-00345а.

Однако полученные результаты нуждаются в корректировке, вызванной недостаточным учетом множественности контекста взаимной интерпретации логических систем, влияющим на результат исследований. Проблемы, которые возникли при рассмотрении теоретико-категорных конструкций, описывающих структуру универсума универсальной логики², можно охарактеризовать следующим образом.

Кратко категорию сигнатур **Sig**, над которой надстраивается категория логических систем **Log**, можно определить следующим образом:

- *Объекты*: функции $\Sigma \rightarrow \mathbb{N}$, где Σ интуитивно понимается как множество связок, а функции — как ассоциирующие со связкой ее арность;
- *Морфизмы*: морфизм $\Sigma \rightarrow \Sigma'$ представляет собой гомоморфизм между абсолютно свободными алгебрами над Σ и Σ' соответственно. Иначе их можно описать как отображения $\Sigma \rightarrow F(\Sigma')$, сопоставляющие примитивной n -арной связке возможную производную n -арную связку.

Категория сигнатур в дальнейшем отождествляется с хорошо известной категорией **Set**/ $\mathbb{N}$. Однако подобное сопоставление не совсем корректно. Объекты этих категорий действительно одни и те же, но этого нельзя сказать о морфизмах. Морфизмом между $f : \Sigma \rightarrow \mathbb{N}$ и $g : \Sigma' \rightarrow \mathbb{N}$ в **Set**/ $\mathbb{N}$ будет функция $h : \Sigma \rightarrow \Sigma'$ (которая очевидным образом заставляет коммутировать треугольную диаграмму функций, т.е. имеет место $g \circ h = f$). Это означает, что связки из Σ не могут быть сопоставлены производным связкам, но только лишь исходным связкам из Σ' . В качестве примера рассмотрим случай, когда классическая логика представлена двумя наборами примитивных связок: $\{\neg, \wedge\}$ и $\{\neg, \vee\}$ соответственно. Морфизм в **Sig** должен сопоставить бинарной связке $\wedge$ другую бинарную связку, производную от примитивных связок из $\{\neg, \vee\}$. Если мы сопоставим $\wedge$

²Автор обязан Питеру Арендту указанием на возникающие теоретико-категорные трудности.

комбинацию $\neg(\neg(-) \vee \neg(-))$, то получим перевод между двумя представлениями классической логики, который будет изоморфизмом в категории **Log**, как этого следовало ожидать. С другой стороны, морфизм $f : \{\neg, \wedge\} \rightarrow \{\neg, \vee\}$ в **Set/N** должен сопоставлять примитивные связки из $\{\neg, \wedge\}$ примитивным связкам из $\{\neg, \vee\}$ и таким образом, учитывая арность, должен сопоставить связку $\wedge$ связке $\vee$. Рассматривая отношение следования классической логики в языках, порожденных $\{\neg, \wedge\}$ и $\{\neg, \vee\}$ соответственно, мы видим, что на самом деле мы не получили перевода, поскольку, например, имеем $\{A \wedge B\} \vdash A$, но не $\{f(A \wedge B)\} = \{A \vee B\} \vdash A = f(A)$, где A, B — пропозициональные переменные. Таким образом, в категории логических систем **Log**, надстроенной над категорией сигнатур, вообще не существует морфизма между рассмотренными представлениями классической логики. Точно так же обычный $\neg\neg$ -перевод классической логики в интуиционистскую не является морфизмом в **Set/N**, но лишь в **Sig**.

При отождествлении **Sig** с **Set/N** возникает и ряд других затруднений. Так, например, в этом случае в **Sig** не существует терминальный объект. Действительно, чтобы можно было получить морфизм из любой сигнатуры в терминальный объект, терминальная сигнатура Σ должна содержать по меньшей мере одну связку каждой арности. Отсюда в Σ должна существовать бинарная связка $*$, которая порождает две различные производные тернарные связки $(- * (- * -))$ и $((- * -) * -)$. Рассмотрим теперь сигнатуру Σ' , состоящую из одной тернарной связки $\star$. Имеется по меньшей мере два различных морфизма из Σ в Σ' , а именно один, отображающий $\star$ в $(- * (- * -))$, и другой, отображающий $\star$ в $((- * -) * -)$ соответственно. Следовательно, Σ не будет терминальным объектом ввиду неединственности рассмотренного морфизма. Как следствие, категория **Log**, надстроенная над **Sig**, не может быть дополняющим топосом.

Чтобы преодолеть возникшие трудности, необходимо принять во внимание то обстоятельство, что неоднозначность представления логических систем является неустранимой их характеристикой. Как следствие, переводы одних логических систем в другие (их взаимная интерпретация) не единственны, и в тех случаях, когда требуется именно единственность перевода, при-

ходится довольствоваться, следуя логической практике, конструкциями, справедливыми лишь с относительной точностью (точностью до некоторого условия). С этой целью на множестве переводов вводится отношение эквивалентности, позволяющее рассматривать категорные конструкции с точностью до введенной эквивалентности. Это позволяет выбирать в качестве требуемого той или иной конструкцией перевода один из класса эквивалентных переводов, часто не различая (как это обычно имеет место в практике теоретико-категорных рассуждений, например, в [10]) перевод и класс эквивалентных ему переводов. Таким образом, переводимость логических систем требует от нас учета конкретной ситуации с имеющимися переводами между логическими системами, делая неустранимым влияние контекста этих переводов на получаемый результат. Структура универсума логических систем в универсальной логике оказывается контекстуально обусловленной.

Прежде чем приступить к систематическому изложению полученных результатов, во втором параграфе напомним понятие категории **Log** логических систем, которая будет использоваться в качестве основного инструмента на всем протяжении исследования.

В третьем параграфе рассматриваются *копроизведения* в **Log**, чья конструкция лежит в основании техники расслоения логических систем. Доказано, что *неограниченные расслоения* являются, по сути дела, копроизведениями в **Log**. При этом показывается, что все конструкции строятся лишь с точностью до эквивалентности, вводимой в результате специального рассмотрения.

Действуя дуально предыдущему случаю копроизведений, в четвертом параграфе введем понятие *произведений*, специальный случай требуемой нам конструкции расслоенного произведения, и понятие уравнивателя (все с точностью до эквивалентности). Доказывается, что *неограниченные индексирования* представляют собой произведения в **Log**.

В пятом параграфе рассматривается конструкция экспоненциала и *коэкспоненциала*, дуального обычному экспоненциалу в декартовых категориях. Вводится понятие *возможной переводимости*, основанное на аналогии с техникой семантики воз-

можной переводимости, и доказываем, что неограниченные возможные переводимости представляют собой коэкспоненциалы в **Log**, в то время как ограниченные возможные переводимости дают нам экспоненциалы в **Log**. В качестве примера подобного подхода рассматривается возможная переводимость трехзначной логики $\mathbf{P}^1$ в классическую логику.

Наконец, путем использования понятия *дополняющего классификатора*, разработанного К. Мортенсенем, показывается, что **Log** является одновременно и топосом, и *дополняющим топосом*, т.е. декартово замкнутой и декартовой козамкнутой категорией с обычным и дополняющим классификатором подобъектов.

2 Логические системы и пространства теорий

Напомним основной формализм, служащий фундаментом дальнейших исследований. Следуя [1, р. 101–103], рассмотрим логический язык, который свободно порожден некоторой сигнатурой, включающей в себя, как это обычно делается, конструкторы различной местности.

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 1. Сигнатура представляет собой индексированное множество $\Sigma = \{\Sigma^n\}_{n \in \mathbb{N}}$, где каждое Σ^n является n -арным конструктором.

Будем считать, что множество пропозициональных переменных включено в Σ^0 .

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 2. Язык над данной сигнатурой Σ , который будет обозначаться L_Σ , строится индуктивно обычным способом:

- $\Sigma^0 \subseteq L_\Sigma$;
- если $n \in \mathbb{N}$, $\varphi_1, \dots, \varphi_n \in L_\Sigma$ и $c \in \Sigma^n$, то $c(\varphi_1, \dots, \varphi_n) \in L_\Sigma$.

Будем называть Σ -формулами элементы L_Σ , или просто формулами, когда Σ ясно из контекста.

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 3. Логическая система является парой $\mathcal{L} = \langle \Sigma, \vdash \rangle$, где Σ есть сигнатура, а $\vdash$ представляет собой оператор присоединения следствий в L_Σ (в смысле Тарского, см. [15]), то

есть $\vdash: 2^{L_\Sigma} \rightarrow 2^{L_\Sigma}$ является функцией, обладающей следующими свойствами для любых $\Gamma, \Phi \subseteq L_\Sigma$:

Экстенсивность: $\Gamma \subseteq \Gamma^+$;

Монотонность: если $\Gamma \subseteq \Phi$, то $\Gamma^+ \subseteq \Phi^+$;

Идемпотентность: $(\Gamma^+)^+ \subseteq \Gamma^+$.

Здесь Γ^+ есть множество следствий Γ . Для сохранения общности не будем требовать здесь и в дальнейшем, чтобы оператор присоединения следствий был финитным, и тем более структурным.

Поскольку нам потребуется принимать во внимание выразительную силу данной логической системы, нам придется ссылаться на ее логические связки (примитивные или производные). Будем считать раз и навсегда зафиксированным множество $\Xi = \{\xi_i\}_{i \in \mathbb{N}}$ метапеременных. Для данной сигнатуры Σ и $k \in \mathbb{N}$ будем рассматривать множество L_Σ^k определенным индуктивно:

- $\{\xi_1, \dots, \xi_k\} \subseteq L_\Sigma^k$;
- $\Sigma^0 \subseteq L_\Sigma^k$;
- если $n \in \mathbb{N}$, $\varphi_1, \dots, \varphi_n \in L_\Sigma^k$ и $c \in \Sigma^n$, то $c(\varphi_1, \dots, \varphi_n) \in L_\Sigma^k$.

Очевидным образом $L_\Sigma = L_\Sigma^0$. Для данного $\varphi_n \in L_\Sigma^k$ будем записывать как $\varphi(\xi_1 \setminus \psi_1, \dots, \xi_k \setminus \psi_k)$ формулу, получаемую из φ одновременной заменой каждого вхождения ξ_i в φ на ψ_i для каждого $i \leq k$.

Производная связка местности $k \in \mathbb{N}$ является λ -термом $d = \lambda \xi_1, \dots, \xi_k. \varphi$, где $\varphi \in L_\Sigma^k$. Обозначим через DC_Σ^k множество всех производных k -местных над Σ . Отметим, что если $c \in \Sigma^n$ является примитивной связкой, то она также может рассматриваться как производная связка $c = \lambda \xi_1, \dots, \xi_k. c(\xi_1, \dots, \xi_k)$. Для данной производной связки $d = \lambda \xi_1, \dots, \xi_k. \varphi$ будем писать $d(\psi_1, \dots, \psi_n)$ вместо $\varphi(\xi_1 \setminus \psi_1, \dots, \xi_k \setminus \psi_k)$.

Различные языки, порожденные различными сигнатурами, могут переводиться друг в друга с помощью понятия морфизма, когда примитивные связки одной сигнатуры отображаются в производные связки другой сигнатуры с сохранением соответствующей местности.

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 4. Для данных сигнатур Σ_1 и Σ_2 , морфизм сигнатур $h : \Sigma_1 \rightarrow \Sigma_2$ является $\mathbb{N}$ -индексированным семейством функций $h = \{h^n : \Sigma_1^n \rightarrow DC_{\Sigma_2}^n\}_{n \in \mathbb{N}}$.

Для данного морфизма сигнатур $h : \Sigma_1 \rightarrow \Sigma_2$ определяем его свободные расширения $h : L_{\Sigma_1}^k \rightarrow L_{\Sigma_2}^k$ для $k \in \mathbb{N}$ следующим образом:

- $h(\xi_i) = \xi_i$, если $\xi_i \in \Xi$;
- $h(c) = h^0(c)$, если $c \in \Sigma_1^0$;
- $h(c(\varphi_1, \dots, \varphi_n)) = h^0(c)(h(\varphi_1), \dots, h(\varphi_n))$, если $c \in \Sigma_1^n$.

Функцию перевода h , удовлетворяющую вышеизложенным требованиям, будем называть *унифицированной*.

Сигнатуры и их морфизмы образуют категорию **Sig** с тождествами $id_{\Sigma} : \Sigma_1 \rightarrow \Sigma_2$, такими, что $id_{\Sigma}^n(c) = \lambda \xi_1, \dots, \xi_k. c(\xi_1, \dots, \xi_k)$ для каждого $n \in \mathbb{N}$ и $c \in \Sigma^n$, а композиция морфизмов сигнатур $f : \Sigma_1 \rightarrow \Sigma_2$ и $g : \Sigma_2 \rightarrow \Sigma_3$ будет определяться как $g \circ f : \Sigma_1 \rightarrow \Sigma_3$, такая, что $(g \circ f)^n(c) = \xi_1, \dots, \xi_n. g(\varphi)$, полагая, что $f^n(c) = \lambda \xi_1, \dots, \xi_n. \varphi$.

Удобство использования унифицированных переводов сказывается при формулировке понятия морфизма между логическими системами. Для данной функции $h : L_{\Sigma_1} \rightarrow L_{\Sigma_2}$ с $\Phi \subseteq L_{\Sigma_1}$ мы будем рассматривать множество $h[\Phi] = \{h(\varphi) : \varphi \in \Phi\}$.

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 5. Пусть $\mathcal{L}_1 = \langle \Sigma_1, \vdash_1 \rangle$ и $\mathcal{L}_2 = \langle \Sigma_2, \vdash_2 \rangle$ будут логическими системами. Морфизм логических систем $h : \mathcal{L}_1 \rightarrow \mathcal{L}_2$ представляет собой морфизм сигнатур $h : \Sigma_1 \rightarrow \Sigma_2$, такой, что $h[\Phi^{\vdash_1}] \subseteq h[\Phi]^{\vdash_2}$ для каждого $\Phi \subseteq L_{\Sigma_1}$.

Логические системы и их морфизмы образуют конкретную категорию **Log** над **Sig**. Уместно напомнить следующую хорошо известную полезную лемму.

ЛЕММА 6. Пусть $\mathcal{L}_1 = \langle \Sigma_1, \vdash_1 \rangle$ и $\mathcal{L}_2 = \langle \Sigma_2, \vdash_2 \rangle$ будут логическими системами, а $h : \mathcal{L}_1 \rightarrow \mathcal{L}_2$ — **Log**-морфизмом. Тогда $h[\Phi^{\vdash_1}]^{\vdash_2} = h[\Phi]^{\vdash_2}$ для каждого $\Phi \subseteq L_{\Sigma_1}$.

Теорией логической системы $\mathcal{L} = \langle \Sigma, \vdash \rangle$ является, как обычно, множество $\Phi \subseteq L_{\Sigma}$, такое, что $\Phi^{\vdash} = \Phi$. Обозначим как

$Th(\mathcal{L})$ множество всех теорий $\mathcal{L}$. Хорошо известно, что множество $Th(\mathcal{L})$, упорядоченное по отношению включения, всегда является полной решеткой.

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 7. *Пространство теорий* есть полная решетка $tsp = \langle Th, \leq \rangle$, то есть частичный порядок $\leq$ на множестве Th такой, что каждое $T \subseteq Th$ имеет наименьшую верхнюю грань (или пересечение) $\bigvee T$.

В частности, для данной логической системы $\mathcal{L} = \langle \Sigma, \vdash \rangle$ структура $tsp_{\mathcal{L}} = \langle Th(\mathcal{L}), \subseteq \rangle$ всегда будет пространством теорий (см., напр., [9]). Более того, переводы языков, ассоциированные с морфизмами логических систем, всегда действуют на операторы присоединения следствий таким образом, что в соответствующих пространствах теорий сохраняются пересечения.

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 8. Пусть $tsp_1 = \langle Th_1, \leq_1 \rangle$ и $tsp_2 = \langle Th_2, \leq_2 \rangle$ будут пространствами теорий. *Морфизм пространств теорий* $h : tsp_1 \rightarrow tsp_2$ представляет собой функцию $h : Th_1 \rightarrow Th_2$, такую, что $h(\bigvee_1 T) = \bigvee_2 h[T]$ для каждого $T \subseteq Th_1$.

Следующая формулировка представляет собой хорошо известную полезную лемму.

ЛЕММА 9. Пусть $tsp_1 = \langle Th_1, \leq_1 \rangle$ и $tsp_2 = \langle Th_2, \leq_2 \rangle$ будут пространствами теорий и $h : tsp_1 \rightarrow tsp_2$ будет морфизмом пространств теорий. Тогда h сохраняет порядок, то есть для каждого $\Phi, \Gamma \in Th_1$, если $\Phi \leq_1 \Gamma$, то $h(\Phi) \leq_2 h(\Gamma)$.

Пространства теорий и их морфизмы образуют категорию **Tsp** с обычными тождествами и композицией функций. Более того, определение пространства теорий, индуцированного логической системой, может быть расширено на случай функтора.

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 10. Отображения

- $Th(h : \mathcal{L}_1 \rightarrow \mathcal{L}_2) : tsp_1 \rightarrow tsp_2$, с $Th(h)(\Phi) = h[\Phi]^{\vdash_2}$ в $\mathcal{L}_2 = \langle \Sigma_2, \vdash_2 \rangle$ для каждого $\Phi \in Th(\mathcal{L}_1)$

образуют функтор $Th : \mathbf{Log} \rightarrow \mathbf{Tsp}$.

Нетрудно показать, что Th представляет собой сопряженный функтор, но более интересно для нас понятие *эквивалентности*, основанное на Th (см. [5, р. 107]), которое позволяет опи-

сать «сходство» логических систем. Но вначале напомним характеристику изоморфизма в категории сигнатур **Sig**.

УТВЕРЖДЕНИЕ 11. *Две сигнатуры Σ_1 и Σ_2 изоморфны тогда и только тогда, когда семейство биекций $h = \{h^n : \Sigma_1^n \rightarrow \Sigma_2^n\}_{n \in \mathbb{N}}$.*

В свою очередь, характеристика изоморфизма в **Log** следующая.

УТВЕРЖДЕНИЕ 12. *Две логические системы $\mathcal{L}_1 = \langle \Sigma_1, \vdash_1 \rangle$ и $\mathcal{L}_2 = \langle \Sigma_2, \vdash_2 \rangle$ изоморфны тогда и только тогда, когда существует изоморфизм сигнатур $h : \Sigma_1 \rightarrow \Sigma_2$, такой, что $h[\Phi^{\vdash_1}] = h[\Phi]^{\vdash_2}$ для каждого $\Phi \subseteq L_{\Sigma_1}$.*

Наконец, с помощью следующего определения можно ввести понятие эквивалентности:

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 13. *Две логические системы $\mathcal{L}_1 = \langle \Sigma_1, \vdash_1 \rangle$ и $\mathcal{L}_2 = \langle \Sigma_2, \vdash_2 \rangle$ эквивалентны, если существуют **Log**-морфизмы $h : \mathcal{L}_1 \rightarrow \mathcal{L}_2$ и $g : \mathcal{L}_2 \rightarrow \mathcal{L}_1$, такие, что $Th(h)$ и $Th(g)$ устанавливают изоморфизм между $tsp_{\mathcal{L}_1}$ и $tsp_{\mathcal{L}_2}$ в случае $Th(h) = Th(g)^{-1}$.*

Фактически изоморфизмы в **Log** образуют специальный случай эквивалентности и эквивалентные логические системы всегда требуются для определения изоморфности логических пространств. Более того, можно дать альтернативную характеристику эквивалентности в терминах внутреннего понятия логической эквивалентности каждой логической системы $\mathcal{L} = \langle \Sigma, \vdash \rangle$ следующим образом. Говорят, что две формулы $\varphi, \psi \in L_\Sigma$ логически эквивалентны в $\mathcal{L}$, $\varphi \equiv_{\mathcal{L}} \psi$, если одновременно имеет место $\varphi \in \{\psi\}^{\vdash}$ и $\psi \in \{\varphi\}^{\vdash}$, или, что равносильно, если $\{\varphi\}^{\vdash} = \{\psi\}^{\vdash}$. Следующая лемма из [1, р. 108] показывает, что теории системы $\mathcal{L}$ фактически независимы, по модулю логически эквивалентных формул, от способа их представления.

ЛЕММА 14. *Пусть $\Phi, \Gamma \subseteq L_\Sigma$. Тогда $\Phi^{\vdash} = \Gamma^{\vdash}$ всякий раз, когда выполняются следующие два условия:*

- для каждой $\varphi \in \Phi$ существует $\varphi' \in \Gamma$, такая, что $\varphi \equiv_{\mathcal{L}} \varphi'$;
- для каждой $\psi \in \Gamma$ существует $\psi' \in \Phi$, такая, что $\psi \equiv_{\mathcal{L}} \psi'$.

Альтернативная характеристика понятия эквивалентности может быть дана с помощью следующего определения [1, р. 108].

УТВЕРЖДЕНИЕ 15. Пусть $\mathcal{L}_1 = \langle \Sigma_1, \vdash_1 \rangle$ и $\mathcal{L}_2 = \langle \Sigma_2, \vdash_2 \rangle$ являются логическими системами. Тогда $\mathcal{L}_1$ и $\mathcal{L}_2$ эквивалентны тогда и только тогда, когда существуют **Log**-морфизмы $h : \mathcal{L}_1 \rightarrow \mathcal{L}_2$ и $g : \mathcal{L}_2 \rightarrow \mathcal{L}_1$, такие, что выполняются следующие два условия:

- $\varphi \equiv_{\mathcal{L}_1} g(h(\varphi))$ для каждой $\varphi \in L_{\Sigma_1}$;
- $\psi \equiv_{\mathcal{L}_2} h(g(\psi))$ для каждой $\psi \in L_{\Sigma_2}$.

3 Копроизведения и расслоения в Log

Во многих работах категория **Sig** определяется иначе, чем это было сделано в предыдущем разделе, при $h = \{h^n : \Sigma_1^n \rightarrow \Sigma_2^n\}_{n \in \mathbb{N}}$ в качестве морфизма сигнатур. В этом случае часто отмечается (см., напр., [4, р. 153]), что такая категория **Sig*** является хорошо известной категорией $\mathbb{N}$ -индексированных множеств и сохраняющих индексы отображений **Set**/ $\mathbb{N}$. Как следствие, для **Sig*** справедливо следующее:

УТВЕРЖДЕНИЕ 16. Категория **Sig** является (малой) копольной категорией.

В частности, в **Sig** имеются копроизведения и амальгамы³. Первые позволяют нам объединить две сигнатуры с различными конструкторами, в то время как последние могут быть использованы для объединения конструкторов. Но имеются ли у нас такие конструкции в **Sig***? На первый взгляд кажется, что это не так. Действительно, мы можем попробовать определить копроизведения, характеризуя их следующим образом:

УТВЕРЖДЕНИЕ 17. Копроизведение двух сигнатур Σ_1 и Σ_2

является сигнатурой $\Sigma_1 \oplus \Sigma_2$, наделенной инъекциями $i_1 : \Sigma_1 \rightarrow \Sigma_1 \oplus \Sigma_2$ и $i_2 : \Sigma_2 \rightarrow \Sigma_1 \oplus \Sigma_2$, такими, что для каждого $k \in N$:

³Термин «амальгама» взят из книги Р. Гольдблатта «Топосы. Категорный анализ логики» [2]. В русском переводе книги С. Маклейна «Категории для работающего математика» (М., 2004) употребляется термин «универсальный квадрат», в то время как в англоязычной литературе употребляется термин «direct image», что можно перевести как «прямой образ».

- $(\Sigma_1 \oplus \Sigma_2)^k$ есть дизъюнктивное объединение Σ_1^k и Σ_2^k ;
- i_1^k и i_2^k являются инъекциями Σ_1^k и Σ_2^k на $(\Sigma_1 \oplus \Sigma_2)^k$ соответственно.

Главная проблема при доказательстве этого утверждения связана с единственностью стрелки $[f, h] : \Sigma_1 \oplus \Sigma_2 \rightarrow \Sigma$ (для произвольной пары морфизма сигнатур $f : \Sigma_1 \rightarrow \Sigma, h : \Sigma_2 \rightarrow \Sigma$), которая требуется для того, чтобы $\Sigma_1 \oplus \Sigma_2$ представляла собой копроизведение. Ясно, что никакой гарантии этой единственности не существует, поскольку конструкция морфизма сигнатур в **Sig** использует множество производных связок в качестве области значения, в отличие от случая **Sig*** со множеством примитивных связок в качестве области определения. В качестве примера напомним рассмотренный во введении случай двух представлений классической логики.

Единственным выходом для нас является введение понятия эквивалентности морфизмов. С этой целью воспользуемся следующим определением.

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 18. Эквивалентностью **Sig**-морфизмов является наименьшее отношение эквивалентности $\equiv$ между морфизмами, такое, что

- $f \equiv g$ тогда и только тогда, когда $\text{dom}(f) \cong \text{dom}(g)$ и $\text{codom}(f) \cong \text{codom}(g)$, т.е. Σ_1 и Σ_2 изоморфны, так же как и Σ'_1 и Σ'_2 , для морфизмов сигнатур $f : \Sigma_1 \rightarrow \Sigma_2, f' : \Sigma'_1 \rightarrow \Sigma'_2$;
- $gf = h$ влечет $gf \equiv h$;
- $f \equiv f'$ и $g \equiv g'$ влечет $gf \equiv g'f'$;
- $f \text{id}_{\Sigma_1} \equiv f \equiv \text{id}_{\Sigma_2} f$;
- $(hg)f \equiv h(gf)$

для всех $f, f' : \Sigma_1 \rightarrow \Sigma_2, g, g' : \Sigma_2 \rightarrow \Sigma_3, h : \Sigma_3 \rightarrow \Sigma_4$.

Первое условие мы, согласно Утверждению 11, можем переписать как $f \equiv g$ тогда и только тогда, когда существует семейство биекций $h = \{h^n : \Sigma_1^n \rightarrow \Sigma_2^n\}_{n \in \mathbb{N}}$ наряду с семейством

биекций $h' = \{h'^n : \Sigma_2^n \rightarrow \Sigma_2^{n'}\}_{n \in \mathbb{N}}$ для морфизмов сигнатур $f : \Sigma_1 \rightarrow \Sigma_2, f' : \Sigma'_1 \rightarrow \Sigma'_2$. Таким образом, не требуя единственности стрелки $[f, h] : \Sigma_1 \oplus \Sigma_2 \rightarrow \Sigma$, мы можем сказать, что $[f, h]$ определяется с точностью до эквивалентности и что копроизведения в **Sig** также определяются с точностью до эквивалентности. Фактически Определение 18 следует расширить следующим образом:

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 19. Отношение эквивалентности $\equiv$ между **Sig**-морфизмами, рассмотренное выше, должно также удовлетворять следующим условиям:

- если $[f, g] = h$, то $[f, g] \equiv h$ и т.д.;
- если $f \equiv f'$ и $g \equiv g'$, то $[gf] \equiv [g'f']$;
- $[f, g]i_1 \equiv f, [f, g]i_2 \equiv g$ и т.д.

для всех $f, f' : \Sigma_1 \rightarrow \Sigma_3, g, g' : \Sigma_2 \rightarrow \Sigma_3$.

УТВЕРЖДЕНИЕ 20. Амальгама двух инъективных морфизмов сигнатур с одним и тем же началом $f_1 : \Sigma \rightarrow \Sigma_1$ и $f_2 : \Sigma \rightarrow \Sigma_2$ есть сигнатура $\Sigma_1 \oplus^{f_1 \Sigma f_2} \Sigma_2$, наделенная морфизмами $g_1 : \Sigma_1 \rightarrow \Sigma_1 \oplus^{f_1 \Sigma f_2} \Sigma_2$ и $g_2 : \Sigma_2 \rightarrow \Sigma_1 \oplus^{f_1 \Sigma f_2} \Sigma_2$, такими, что для каждого $k \in \mathbb{N}$:

- $(\Sigma_1 \oplus^{f_1 \Sigma f_2} \Sigma_2)^k$ есть $\Sigma^k \cup i_1^k(\Sigma_1^k \setminus f_1(\Sigma^k)) \cup i_2^k(\Sigma_2^k \setminus f_2(\Sigma^k))$;
- $g_1^k(c_1) = \begin{cases} i_1^k(c_1) & \text{если } c_1 \notin f_1^k(\Sigma^k) \\ (f_1^k)^{-1}(c_1) & \text{в противном случае} \end{cases}$, и аналогично для g_2^k .

Доказательство. Очевидным образом $g_1^k f_1^k = g_2^k f_2^k$. Второе требование, чтобы для любых $h : \Sigma_1 \rightarrow \Sigma_3$ и $j : \Sigma_2 \rightarrow \Sigma_3$, таких, что $h f_1 = j f_2$, существовал единственный $q : \Sigma_1 \oplus^{f_1 \Sigma f_2} \Sigma_2 \rightarrow \Sigma_3$, удовлетворяющий $h^k = q^k g_1^k$ и $j^k = q^k g_2^k$, может быть выполнено только с точностью до эквивалентности. То есть мы можем выбрать q только с точностью до эквивалентности и соответственно имеем $h \equiv g_1 q$ и $j \equiv g_2 q$. Q.E.D.

УТВЕРЖДЕНИЕ 21. Коуравнителем двух морфизмов сигна-

тур с одним и тем же началом и концом $f, g : \Sigma \rightarrow \Sigma_1$ является сигнатура $\Sigma_1 / \equiv^{f,g}$, снабженная морфизмом $q : \Sigma_1 \rightarrow \Sigma_1 / \equiv^{f,g}$, таким, что

- $(\Sigma_1 / \equiv^{f,g})^k$ есть фактор-множество $\Sigma_1^k (\equiv^{f,g})^k$, где $(\equiv^{f,g})^k$ является наименьшим отношением эквивалентности на Σ_1^k , содержащим $\{\langle f^k(c), g^k(c) \rangle : c \in \Sigma^k\}$;
- $q^k(c_1)$ является $(\equiv^{f,g})^k$ -классом эквивалентности для $c_1 \in \Sigma_1^k$.

Доказательство. Отношение $(\equiv^{f,g})^k$ может быть определено на основе $\equiv$, поскольку $f \equiv g$ предполагает $h = \{h^n : \Sigma_1^n \rightarrow \Sigma_1^n\}_{n \in \mathbb{N}} = \{h^n : f[\Sigma^n] \rightarrow g[\Sigma^n]\}_{n \in \mathbb{N}}$. Q.E.D.

В дальнейшем полезным будет следующий факт: амальгама двух морфизмов $f_1 : \Sigma \rightarrow \Sigma_1$ и $f_2 : \Sigma \rightarrow \Sigma_2$ может быть получена вначале конструированием копроизведения $\Sigma_1 \oplus \Sigma_2$, снабженного инъекциями $i_1 : \Sigma_1 \rightarrow \Sigma_1 \oplus \Sigma_2$ и $i_2 : \Sigma_2 \rightarrow \Sigma_1 \oplus \Sigma_2$, а затем нахождением коуравнителя $i_1 \circ f_1$ и $i_2 \circ f_2$.

Для рассмотрения неограниченных расслоений в **Log** мы используем конструкторы и операторы присоединения следствий из обеих логических систем. Заметим, что метAPERЕМЕННЫЕ играют важную роль в получении точной конструкции.

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 22. Пусть $\mathcal{L}_1 = \langle \Sigma_1, \vdash_1 \rangle$ и $\mathcal{L}_2 = \langle \Sigma_2, \vdash_2 \rangle$ будут логическими системами. Тогда их неограниченным расслоением является логическая система $\langle \Sigma_1, \vdash_1 \rangle \oplus \langle \Sigma_2, \vdash_2 \rangle = \langle \Sigma_1 \oplus \Sigma_2, \vdash_{1 \oplus 2} \rangle$, где $\vdash_{1 \oplus 2}$ есть оператор присоединения следствий $\vdash_{1 \oplus 2} : 2^{L_{i_1(\Sigma_1) \cup i_2(\Sigma_2)}} \rightarrow 2^{L_{i_1(\Sigma_1) \cup i_2(\Sigma_2)}}$, такой, что

- $\Gamma \vdash_i \varphi$ влечет $\Gamma \vdash_{1 \oplus 2} \varphi$ для всех $\Gamma \cup \{\varphi\} \in L_{\Sigma_i} (i = 1, 2)$;

и i_1, i_2 являются инъекциями копроизведения $\Sigma_1 \oplus \Sigma_2$.

Теперь, поскольку мы будем иметь дело с **Log**, то мы должны перейти от $\equiv$ к соответствующему отношению (которое мы также будем обозначать $\equiv$), основанному на эквивалентности логических систем вместо изоморфизма сигнатур.

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 23. Тождество **Log**-морфизмов представляет собой наименьшее отношение эквивалентности $\equiv$ между морфизмами, такое, что

- $f \equiv g$ тогда и только тогда, когда $\text{dom}(f)$ эквивалентна $\text{dom}(g)$ и $\text{codom}(f)$ эквивалентна $\text{codom}(g)$, т.е. $\mathcal{L}_1$ и $\mathcal{L}_2$ эквивалентны, так же как и $\mathcal{L}'_1$ эквивалентна $\mathcal{L}'_2$, для морфизмов логических систем $f : \mathcal{L}_1 \rightarrow \mathcal{L}_2, f' : \mathcal{L}'_1 \rightarrow \mathcal{L}'_2$;
- $gf = h$ влечет $gf \equiv h$;
- $f \equiv f'$ и $g \equiv g'$ влечет $gf \equiv g'f'$;
- $f \text{id}_{\Sigma_1} \equiv f \equiv \text{id}_{\Sigma_2} f$;
- $(hg)f \equiv h(gf)$

для всех $f, f' : \mathcal{L}_1 \rightarrow \mathcal{L}_2, g, g' : \mathcal{L}_2 \rightarrow \mathcal{L}_3, h : \mathcal{L}_3 \rightarrow \mathcal{L}_4$.

Согласно Утверждению 15 $\mathcal{L}_1$ и $\mathcal{L}_2$ эквивалентны тогда и только тогда, когда существуют **Log**-морфизмы $h : \mathcal{L}_1 \rightarrow \mathcal{L}_2$ и $g : \mathcal{L}_2 \rightarrow \mathcal{L}_1$, такие, что $\varphi \equiv_{\mathcal{L}_1} g(h(\varphi))$ для всякой $\varphi \in L_{\Sigma_1}$ и $\psi \equiv_{\mathcal{L}_2} h(g(\psi))$ для всякой $\psi \in L_{\Sigma_2}$. Отсюда первое условие Определения 23 может быть переписано как $f \equiv g$ тогда и только тогда, когда имеются, во-первых, **Log**-морфизмы $h : \mathcal{L}_1 \rightarrow \mathcal{L}'_1$ и $g : \mathcal{L}'_1 \rightarrow \mathcal{L}_1$, такие, что $\varphi \equiv_{\mathcal{L}_1} g(h(\varphi))$ для любой $\varphi \in L_{\Sigma_1}$ и $\psi \equiv_{\mathcal{L}'_1} h(g(\psi))$ для любой $\psi \in L_{\Sigma'_1}$, и, во-вторых, **Log**-морфизмы $h' : \mathcal{L}_2 \rightarrow \mathcal{L}'_2$ и $g' : \mathcal{L}'_2 \rightarrow \mathcal{L}_2$, такие, что $\varphi \equiv_{\mathcal{L}_2} g'(h'(\varphi))$ для любой $\varphi \in L_{\Sigma_2}$ и $\psi \equiv_{\mathcal{L}'_2} h'(g'(\psi))$ для любой $\psi \in L_{\Sigma'_2}$.

УТВЕРЖДЕНИЕ 24. *Неограниченные расслоения являются копроизведениями в **Log**.*

Доказательство. 1) Инъекции i_1 и i_2 являются морфизмами в **Log** согласно определению 5.

2) *Универсальность.*

Пусть $h_1 : \langle \Sigma_1, \vdash_1 \rangle \rightarrow \langle \Sigma_3, \vdash_3 \rangle, h_2 : \langle \Sigma_2, \vdash_2 \rangle \rightarrow \langle \Sigma_3, \vdash_3 \rangle$ будут произвольными морфизмами в **Log**. Пусть $k_1 : \Sigma_1 \oplus \Sigma_2 \rightarrow \Sigma_3, k_2 : \Sigma_1 \oplus \Sigma_2 \rightarrow \Sigma_3$ будут морфизмами в **Sig**, такими, что $k_1 \equiv k_2, k_1 i_1 = h_1$ и $k_2 i_2 = h_2$. Тогда k_1, k_2 являются морфизмами в **Log**, $k_1 \equiv k_2$ и они таковы, что $k_1 i_1 = h_1$ и $k_2 i_2 = h_2$. Следовательно, неограниченные расслоения являются копроизведениями в **Log** с точностью до эквивалентности $\equiv$. Q.E.D.

Теперь Определение 23 должно быть расширено следующим образом:

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 25. Отношение эквивалентности $\equiv$ между **Log**-морфизмами, рассмотренное выше, должно также удовлетворять следующим условиям:

- если $[f, g] = h$, то $[f, g] \equiv h$, и т.д.;
- если $f = f'$ и $g \equiv g'$, то $[gf] \equiv [g'f']$;
- $[f, g]i_1 \equiv f$, $[f, g]i_2 \equiv g$, и т.д.

для всех $f, f' : \mathcal{L}_1 \rightarrow \mathcal{L}_2, g, g' : \mathcal{L}_2 \rightarrow \mathcal{L}_3$.

Когда надо совместно использовать (объединить) конструкторы, то расслоение ограничивается за счет введения какого-то взаимодействия между двумя логическими системами. Техника подъема морфизмов по кодекартовому квадрату снабжает нас средствами получения объединения, определенного на уровне сигнатур.

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 26. Пусть $\mathcal{L} = \langle \Sigma, \vdash \rangle$, $\mathcal{L}_1 = \langle \Sigma_1, \vdash_1 \rangle$ и $\mathcal{L}_2 = \langle \Sigma_2, \vdash_2 \rangle$ будут логическими системами и $f_1 : \Sigma \rightarrow \Sigma_1, f_2 : \Sigma \rightarrow \Sigma_2$ будут инъективными морфизмами сигнатур. Тогда их ограниченным совмещенным расслоением является $\mathcal{L}_{1\oplus 2} = \langle \Sigma_1, \vdash_1 \rangle \oplus^{f_1 \Sigma f_2} \langle \Sigma_2, \vdash_2 \rangle = \langle \Sigma_1 \oplus^{f_1 \Sigma f_2} \Sigma_2, \vdash_{(1\oplus 2)} \rangle = q(\langle \Sigma_1, \vdash_1 \rangle \oplus \langle \Sigma_2, \vdash_2 \rangle)$, где

- морфизм сигнатур $q : \Sigma_1 \oplus \Sigma_2 \rightarrow \Sigma_1 \oplus^{f_1 \Sigma f_2} \Sigma_2$ является коуравнителем $i_1 \circ f_1 : \Sigma \rightarrow \Sigma_1 \oplus \Sigma_2$ и $i_2 \circ f_2 : \Sigma \rightarrow \Sigma_1 \oplus \Sigma_2$;
- $\vdash_{1\oplus 2}$ есть оператор присоединения следствий $\vdash_{1\oplus 2} : 2^{L_{\Sigma \cup i_1(\Sigma_1 \setminus f_1(\Sigma)) \cup i_2(\Sigma_2 \setminus f_2(\Sigma))}} \rightarrow 2^{L_{\Sigma \cup i_1(\Sigma_1 \setminus f_1(\Sigma)) \cup i_2(\Sigma_2 \setminus f_2(\Sigma))}}$;
- $\mathcal{L}_{1\oplus 2}$ является наименьшей системой для $tsp_{\mathcal{L}_{1\oplus 2}} = \langle Th(\mathcal{L}_{1\oplus 2}), \subseteq \rangle$, в которой $\Gamma \vdash_i \varphi$ влечет $\Gamma \vdash_{1\oplus 2} \varphi$ для каждого $\Gamma \cup \{\varphi\} \in L_{\Sigma_i} (i = 1, 2)$.

УТВЕРЖДЕНИЕ 27. Ограниченные расслоения являются амальгамами в **Log**.

Доказательство. 1) f_1 и f_2 являются инъективными морфизмами в **Log** согласно Определению 5.

2) Универсальность.

Пусть $h_1 : \langle \Sigma_1, \vdash_1 \rangle \rightarrow \langle \Sigma_3, \vdash_3 \rangle$ будет морфизмом в **Log**, таким, что $\Gamma \vdash_1 \varphi$ влечет $\Gamma \vdash_3 \varphi$ для каждого $\Gamma \cup \{\varphi\} \in L_{\Sigma_1}$. Пусть $k_1 : \Sigma_1 \oplus \Sigma_2 \rightarrow \Sigma_3$ будет морфизмом в **Sig**, таким, что $k_1 i_1 = h_1$. Тогда k_1 представляет собой морфизм в **Log**, такой, что $k_1 i_1 = h_1$. Поскольку q есть коуравнитель $i_1 f_1$ и $i_2 f_2$ в **Sig**, то всегда существует (с точностью до эквивалентности) морфизм $l : \Sigma_1 \oplus^{f_1 \Sigma f_2} \Sigma_2 \rightarrow \Sigma_3$. Очевидным образом это влечет, что имеется **Log**-морфизм $l : \mathcal{L}_{1 \oplus 2} \rightarrow \langle \Sigma_3, \vdash_3 \rangle$, поскольку $\mathcal{L}_{1 \oplus 2}$ представляет собой наименьшую систему для $tsp_{\mathcal{L}_{1 \oplus 2}}$ со свойством, что $\Gamma \vdash_1 \varphi$ влечет $\Gamma \vdash_{1 \oplus 2} \varphi$ для каждого $\Gamma \cup \{\varphi\} \in L_{\Sigma_1}$. Следовательно, ограниченные расслоения являются амальгамами в **Log** (с точностью до эквивалентности $\equiv$). Q.E.D.

Совмещение логических операторов отражается, в первую очередь, на синтаксисе расслоенной логики. Но поскольку допускается совмещение как пропозициональных символов, так и логических операторов, то совмещение логических операторов дает нам способ наложения ограничений путем постулирования взаимодействия между двумя логиками. Примеры (внося соответствующие изменения) можно найти в [14].

4 Произведения и индексирования в Log

Известно, что в категории **Sig**^{*} имеются произведения и обратные образы. Действуя дуально случаю копроизведений, определим произведения, специальный случай требуемых нам обратных образов и уравнитель (с точностью до изоморфизма) следующим образом.

УТВЕРЖДЕНИЕ 28. *Произведение двух сигнатур Σ_1 и Σ_2 представляет собой сигнатуру $\Sigma_1 \otimes \Sigma_2$, снабженную проекциями $pr_1 : \Sigma_1 \otimes \Sigma_2 \rightarrow \Sigma_1$ и $pr_2 : \Sigma_1 \otimes \Sigma_2 \rightarrow \Sigma_2$, такими, что для каждого $k \in \mathbb{N}$:*

- $(\Sigma_1 \otimes \Sigma_2)^k$ есть $\Sigma_1^k \times \Sigma_2^k$;
- pr_1^k и pr_2^k являются инъективными проекциями $(\Sigma_1 \otimes \Sigma_2)^k$ в Σ_1^k и Σ_2^k , соответственно.

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 29. *Обратный образ двух инъективных морфизмов сигнатур с одинаковым концом $f_1 : \Sigma_1 \rightarrow \Sigma$ и $f_2 :$*

$\Sigma_2 \rightarrow \Sigma$ есть сигнатура $\Sigma_1 \otimes^{f_1 \Sigma f_2} \Sigma_2$, снабженная морфизмами $g_1 : \Sigma_1 \otimes^{f_1 \Sigma f_2} \Sigma_2 \rightarrow \Sigma_1$ и $g_2 : \Sigma_1 \otimes^{f_1 \Sigma f_2} \Sigma_2 \rightarrow \Sigma_2$, такими, что для каждого $k \in \mathbb{N}$:

- $(\Sigma_1 \otimes^{f_1 \Sigma f_2} \Sigma_2)^k$ есть $\{\langle pr_1^k(\langle c_1, c_2 \rangle), pr_2^k(\langle c_1, c_2 \rangle) \rangle : f_1^k(c_1) = f_2^k(c_2)\}$
- $g_1^k(\langle c_1, c_2 \rangle) = c_1, g_2^k(\langle c_1, c_2 \rangle) = c_2$.

Вновь мы должны принять во внимание, что это предложение будет верным только с точностью до эквивалентности, и мы должны расширить Определение 19 следующим образом:

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 30. Отношение эквивалентности $\equiv$ между **Sig**-морфизмами, рассмотренное выше, должно также удовлетворять следующим условиям::

- если $\langle f, g \rangle = h$, то $\langle f, g \rangle \equiv h$, и т.д.;
- если $f \equiv f'$ и $g \equiv g'$, то $\langle gf \rangle \equiv \langle g'f' \rangle$;
- $pr_1 \langle f, g \rangle \equiv f, pr_2 \langle f, g \rangle \equiv g$, и т.д.

для всех $f, f' : \Sigma_1 \rightarrow \Sigma_2, g, g' : \Sigma_1 \rightarrow \Sigma_3$.

УТВЕРЖДЕНИЕ 31. Обратным образом двух инъективных морфизмов сигнатур с одинаковым концом $f_1 : \Sigma_1 \rightarrow \Sigma$ и $f_2 : \Sigma_2 \rightarrow \Sigma$ является сигнатура $\Sigma_1 \otimes^{f_1 \Sigma f_2} \Sigma_2$, снабженная морфизмами $g_1 : \Sigma_1 \otimes^{f_1 \Sigma f_2} \Sigma_2 \rightarrow \Sigma_1$ и $g_2 : \Sigma_1 \otimes^{f_1 \Sigma f_2} \Sigma_2 \rightarrow \Sigma_2$, такими, что для каждого $k \in \mathbb{N}$:

- $(\Sigma_1 \otimes^{f_1 \Sigma f_2} \Sigma_2)^k$ есть $\{\langle pr_1^k(\langle c_1, c_2 \rangle), pr_2^k(\langle c_1, c_2 \rangle) \rangle : f_1^k(c_1) = f_2^k(c_2)\}$
- $g_1^k(\langle c_1, c_2 \rangle) = c_1, g_2^k(\langle c_1, c_2 \rangle) = c_2$.

Доказательство. Очевидным образом $f_1^k g_1^k = f_2^k g_2^k$. Второе требование, чтобы для любых $h : \Sigma_3 \rightarrow \Sigma_1$ и $j : \Sigma_3 \rightarrow \Sigma_2$, таких, что $f_1 h = f_2 j$, существует единственный $q : \Sigma_3 \rightarrow \Sigma_1 \otimes^{f_1 \Sigma f_2} \Sigma_2$, удовлетворяющий $h^k = f_1^k q^k$ и $j^k = f_2^k q^k$, может быть выполнено только с точностью до эквивалентности. То есть мы можем выбрать q лишь с точностью до эквивалентности и соответственно имеем $h \equiv f_1 q$ и $j \equiv f_2 q$. Q.E.D.

УТВЕРЖДЕНИЕ 32. Уравнитель двух сигнатур с одинаковым началом и концом $f, g : \Sigma_1 \rightarrow \Sigma_2$ является сигнатурой Σ , снабженной морфизмом $q : \Sigma \rightarrow \Sigma_1$, таким, что

- Σ^k является множеством $\{c \in \Sigma_1^k : f^k(c_1) = g^k(c_1)\}$;
- $f^k q^k = g^k q^k$.

Доказательство. Нам нужно лишь убедиться, что для любого морфизма сигнатур $h : \Sigma' \rightarrow \Sigma_1$, удовлетворяющего условию $f^k h^k = g^k h^k$, имеется (с точностью до эквивалентности) морфизм $j : \Sigma' \rightarrow \Sigma$, такой, что $h^k \equiv q^k j^k$. Но это очевидно. Q.E.D.

Следующий факт пригодится в дальнейшем: обратный образ двух морфизмов $f_1 : \Sigma_1 \rightarrow \Sigma$ и $f_2 : \Sigma_2 \rightarrow \Sigma$ может быть получен вначале построением произведения $\Sigma_1 \otimes \Sigma_2$, снабженного проекциями $pr_1 : \Sigma_1 \otimes \Sigma_2 \rightarrow \Sigma_1$ и $pr_2 : \Sigma_1 \otimes \Sigma_2 \rightarrow \Sigma_2$, а затем получением уравнителя $f_1 \circ pr_1$ и $f_2 \circ pr_2$.

Рассмотрение неограниченного индексирования (*unconstrained labelling*) в **Log** (понятие индексированных дедуктивных систем см. в [12]) требует использования конструкторов и операторов присоединения следствий из обеих логических систем. Заметим, что использование метапеременных необходимо для точности конструкции.

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 33. Пусть $\mathcal{L}_1 = \langle \Sigma_1, \vdash_1 \rangle$ и $\mathcal{L}_2 = \langle \Sigma_2, \vdash_2 \rangle$ будут логическими системами. Тогда их неограниченным индексированием является $\langle \Sigma_1, \vdash_1 \rangle \otimes \langle \Sigma_2, \vdash_2 \rangle = \langle \Sigma_1 \otimes \Sigma_2, \vdash_{1 \otimes 2} \rangle$, где $\vdash_{1 \otimes 2}$ есть оператор присоединения следствий $\vdash_{1 \otimes 2} : 2^{L_{pr_1(\Sigma_1 \otimes \Sigma_2)} \times pr_2(\Sigma_1 \otimes \Sigma_2)} \rightarrow 2^{L_{pr_1(\Sigma_1 \otimes \Sigma_2) \times pr_2(\Sigma_1 \otimes \Sigma_2)}}$, такой, что

- $\langle \Gamma_1, \Gamma_2 \rangle \vdash_{1 \otimes 2} \langle \varphi_1, \varphi_2 \rangle$ влечет $\Gamma_i \vdash_i \varphi_i$ для каждого $\Gamma_i \cup \{\varphi_i\} \in L_{\Sigma_i} (i = 1, 2)$;

а pr_1, pr_2 являются проекциями произведения $\Sigma_1 \otimes \Sigma_2$.

УТВЕРЖДЕНИЕ 34. Неограниченные индексирования являются произведениями в **Log**.

Доказательство. 1) Проекции pr_1 и pr_2 являются морфизмами в **Log** согласно определению 5.

2) *Универсальность.*

Пусть $h_1 : \langle \Sigma_3, \vdash_3 \rangle \rightarrow \langle \Sigma_1, \vdash_1 \rangle$, $h_2 : \langle \Sigma_3, \vdash_3 \rangle \rightarrow \langle \Sigma_2, \vdash_2 \rangle$ будут произвольными морфизмами в **Log**. Пусть $k_1 : \Sigma_3 \rightarrow \Sigma_1 \otimes \Sigma_2$, $k_2 : \Sigma_3 \rightarrow \Sigma_1 \otimes \Sigma_2$ будут морфизмами в **Sig**, такими, что $k_1 \equiv k_2$, $pr_1 \circ k_1 = h_1$ и $pr_2 \circ k_2 = h_2$. Тогда k_1, k_2 являются морфизмами в **Log** и они таковы, что $k_1 \equiv k_2$, $pr_1 \circ k_1 = h_1$ и $pr_2 \circ k_2 = h_2$. Следовательно, неограниченные индексирования являются произведениями в **Log** с точностью до эквивалентности $\equiv$. Q.E.D.

Теперь определение $\equiv$ в **Log** следует расширить следующим образом:

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 35. Отношение эквивалентности $\equiv$ между **Log**-морфизмами, рассмотренное выше, должно также удовлетворять следующим условиям:

- если $\langle f, g \rangle = h$, то $\langle f, g \rangle \equiv h$, и т.д.;
- если $f \equiv f'$ и $g \equiv g'$, то $\langle gf \rangle \equiv \langle g'f' \rangle$;
- $pr_1 \langle f, g \rangle \equiv f$, $pr_2 \langle f, g \rangle \equiv g$, и т.д.

для всех $f, f' : \mathcal{L}_1 \rightarrow \mathcal{L}_2$, $g, g' : \mathcal{L}_2 \rightarrow \mathcal{L}_3$.

Если нам нужно отождествить конструкторы, то мы накладываем ограничение на индексирование с помощью введения взаимодействия между двумя данными логическими системами. Средствами получения отождествления на уровне сигнатур снабжает нас техника подъема морфизмов по декартовому квадрату.

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 36. Пусть $\mathcal{L}_1 = \langle \Sigma_1, \vdash_1 \rangle$ и $\mathcal{L}_2 = \langle \Sigma_2, \vdash_2 \rangle$ будут логическими системами и $f_1 : \Sigma_1 \rightarrow \Sigma$, $f_2 : \Sigma_2 \rightarrow \Sigma$ будут инъективными морфизмами сигнатур. Тогда их *ограниченным индексированием* является

$$\mathcal{L}_{1 \otimes 2} = \langle \Sigma_1, \vdash_1 \rangle \otimes^{f_1 \Sigma f_2} \langle \Sigma_2, \vdash_2 \rangle = \langle \Sigma_1 \otimes^{f_1 \Sigma f_2} \Sigma_2, \vdash_{1 \otimes 2} \rangle = q(\langle \Sigma_1, \vdash_1 \rangle \otimes \langle \Sigma_2, \vdash_2 \rangle), \text{ где}$$

- $q : \Sigma_1 \otimes^{f_1 \Sigma f_2} \Sigma_2 \rightarrow \Sigma$ является уравнителем $f_1 pr_1 : \Sigma_1 \otimes \Sigma_2 \rightarrow \Sigma$ и $f_2 pr_2 : \Sigma_1 \otimes \Sigma_2 \rightarrow \Sigma$;
- $\vdash_{1 \otimes 2}$ есть оператор присоединения следствий $\vdash_{1 \otimes 2} : 2^{\mathcal{L}_{\Sigma_1 \otimes f_1 \Sigma f_2 \Sigma_2}} \rightarrow 2^{\mathcal{L}_{\Sigma_1 \otimes f_1 \Sigma f_2 \Sigma_2}}$;

- $\mathcal{L}_{1\otimes 2}$ есть наименьшая система для $tsp_{\mathcal{L}_{1\otimes 2}} = \langle Th(\mathcal{L}_{1\otimes 2}), \subseteq \rangle$, в которой

$\langle \Gamma_1, \Gamma_2 \rangle \vdash_{1\otimes 2} \langle \varphi_1, \varphi_2 \rangle$ влечет $\Gamma_i \vdash_i \varphi_i$ для каждого $\Gamma_i \cup \{\varphi_i\} \in L_{\Sigma_i} (i = 1, 2)$.

УТВЕРЖДЕНИЕ 37. *Ограниченные индексирования являются обратными образами в **Log**.*

Доказательство. 1) f_1 и f_2 являются инъективными морфизмами в **Log** согласно Определению 5.

2) *Универсальность.*

Пусть $h_1 : \langle \Sigma_3, \vdash_3 \rangle \rightarrow \langle \Sigma_1, \vdash_1 \rangle$ будет морфизмом в **Log**, таким, что $\Gamma \vdash_3 \varphi$ влечет $\Gamma \vdash_1 \varphi$ для каждого $\Gamma \cup \{\varphi\} \in L_{\Sigma_1}$. Пусть $k_1 : \Sigma_3 \rightarrow \Sigma_1 \otimes \Sigma_2$ будет морфизмом в **Sig**, таким, что $pr_1 k_1 = h_1$. Тогда k_1 является морфизмом в **Log**, таким, что $pr_1 k_1 = h_1$. Поскольку q является уравнителем $f_1 pr_1$ и $f_2 pr_2$ в **Sig**, то всегда существует (с точностью до эквивалентности) морфизм $l : \Sigma_3 \rightarrow \Sigma_1 \otimes^{f_1 \Sigma f_2} \Sigma_2$. Очевидным образом это влечет, что существует **Log**-морфизм $l : \langle \Sigma_3, \vdash_3 \rangle \rightarrow \mathcal{L}_{1\otimes 2}$, поскольку $\mathcal{L}_{1\otimes 2}$ является наименьшей системой для $tsp_{\mathcal{L}_{1\otimes 2}}$, такой, что $\langle \Gamma_1, \Gamma_2 \rangle \vdash_{1\otimes 2} \langle \varphi_1, \varphi_2 \rangle$ влечет $\Gamma_1 \vdash_1 \varphi_1$ для каждого $\Gamma_1 \cup \{\varphi_1\} \in L_{\Sigma_1}$. Следовательно, ограниченные индексирования являются обратными образами в **Log** (с точностью до эквивалентности $\equiv$). Q.E.D.

Отождествление логических операторов прежде всего отражается на синтаксисе логики с индексированием. Но поскольку мы допускаем отождествление как пропозициональных символов, так и логических операторов, то отождествление логических операторов может снабдить нас способом формулировки некоторого взаимодействия между двумя логиками. Примеры (внося соответствующие изменения) можно найти в [1].

5 Коэкспоненциалы, экспоненциалы и возможные переводимости в **Log**

Техника семантики возможной переводимости (см. [8]) подсказывает нам, как получить конструкцию коэкспоненциала в **Log**, проводя синтаксическую параллель с основной идеей этой семантики. В этом случае, заменяя $\models$ на $\vdash$, мы получаем формулировку понятия *возможной переводимости* в следующем виде: для логических систем $\mathcal{L}_1 = \langle \Sigma_1, \vdash_1 \rangle$ и $\mathcal{L}_2 = \langle \Sigma_2, \vdash_2 \rangle$ имеет

место $\Gamma \vdash_1^* \varphi$ тогда и только тогда, когда $g[\Gamma] \vdash_2 g(\varphi)$ для всех переводов $g : \mathcal{L}_1 \rightarrow \mathcal{L}_2$. Таким образом, чтобы рассмотреть *возможные переводы* в **Log**, нам потребуются конструкторы и операторы присоединения следствий из обеих логических систем. Вновь использование метAPERЕМЕННЫХ существенно для точности конструкции.

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 38. Пусть $\mathcal{L}_1 = \langle \Sigma_1, \vdash_1 \rangle$ и $\mathcal{L}_2 = \langle \Sigma_2, \vdash_2 \rangle$ будут логическими системами. Тогда неограниченная возможная переводимость $\mathcal{L}_2$ в $\mathcal{L}_1$ есть система ${}^{\mathcal{L}_2}\mathcal{L}_1 = \langle \Sigma_1, \vdash_{1 \Leftarrow 2} \rangle$, где $\vdash_{1 \Leftarrow 2}$ означает $\vdash_{1 \Leftarrow 2} : 2^{L_{\Sigma_1}} \rightarrow 2^{L_{\Sigma_1}}$, такое, что

- $\Gamma \vdash_{1 \Leftarrow 2} \varphi$ тогда и только тогда, когда $g[\Gamma] \vdash_2 g(\varphi)$ для всех **Log**-морфизмов $g : \mathcal{L}_1 \rightarrow \mathcal{L}_2$.

Напомним, что категория допускает коэкспоненцирование, если в ней существует копроизведение любых двух объектов и для любых двух объектов a, b имеется объект ${}^a b$, называемый коэкспоненциалом, и стрелка $ev^\circ : b \rightarrow {}^a b + a$ (стрелка кооценки), такая, что для любого объекта c и стрелки $g : b \rightarrow c + a$ имеется единственная стрелка $\check{g} : {}^a b \rightarrow c$, такая, что $(\check{g} + id_a) \circ ev^\circ = g$. Если в качестве примера категории с экспоненцированием обычно берут алгебру Гейтинга, рассматриваемую категорно (т.е. как категорию предпорядка с произведениями и копроизведениями), где экспоненциалом будет импликация Гейтинга, являющаяся псевдодополнением a относительно b (см. [2]), то в качестве примера категории с коэкспоненцированием в этом случае можно рассматривать алгебру Брауэра, где в роли коэкспоненциала выступает брауэровская импликация $a \Leftarrow b$, являющаяся псевдоразностью b и a (см., напр., [3]). Наконец, примером категории с экспоненцированием и коэкспоненцированием будет так называемая алгебра Гейтинга–Брауэра, представляющая собой алгебру Гейтинга, пополненную брауэровской импликацией (см. [13]).

УТВЕРЖДЕНИЕ 39. *Неограниченные возможные переводимости являются коэкспоненциалами в Log.*

Доказательство. Нам нужно рассмотреть морфизм кооценки $ev^\circ : \mathcal{L}_1 \rightarrow {}^{\mathcal{L}_1}\mathcal{L}_2 \oplus \mathcal{L}_2$, морфизмы $\check{g} : {}^{\mathcal{L}_1}\mathcal{L}_2 \rightarrow \mathcal{L}_3$, $g : \mathcal{L}_1 \rightarrow \mathcal{L}_3 \oplus \mathcal{L}_2$ и условия коммутирования диаграммы коэкспоненци-

рования (с точностью до эквивалентности). Поскольку согласно определению $\mathcal{L}_1 \mathcal{L}_2$ мы имеем, что $\vdash_1 \Leftarrow_2$ максимально отражает $\vdash_1$ (для всех возможных морфизмов $g : \mathcal{L}_2 \rightarrow \mathcal{L}_1$ мы получаем $g[\Gamma^{\vdash_2}] \subseteq g[\Gamma]^{\vdash_1} = g[\Gamma^{\vdash_2}]^{\vdash_1}$ и, таким образом, $\Gamma^{\vdash_1 \Leftarrow_2}$ будет больше, чем $\Gamma^{\vdash_2}$), то конструкция $\check{g}$ всегда будет давать нам возможность максимального отображения $\mathcal{L}_1$ в $\mathcal{L}_3$. В частности, это может быть предельным случаем полного перевода $\mathcal{L}_1$, т.е. $g(\mathcal{L}_1) = \check{g}(\mathcal{L}_1 \mathcal{L}_2) \subseteq \mathcal{L}_3$, так же как предельный случай $g(\mathcal{L}_1) = ev^\circ(\mathcal{L}_1) \subseteq \mathcal{L}_2$. Q.E.D.

Мы можем улучшить и сделать более точной переводимость, налагая некоторые ограничения на свободные расширения морфизмов между двумя данными логическими системами.

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 40. Пусть $\mathcal{L}_1 = \langle \Sigma_1, \vdash_1 \rangle$ и $\mathcal{L}_2 = \langle \Sigma_2, \vdash_2 \rangle$ будут логическими системами. Тогда ограниченной возможной переводимостью $\mathcal{L}_2$ в $\mathcal{L}_1$ является система $\mathcal{L}_1^{\mathcal{L}_2} = \langle \Sigma_1, \vdash_{2 \Rightarrow 1} \rangle$, где $\vdash_{2 \Rightarrow 1}$ означает $\vdash_{2 \Rightarrow 1} : 2^{L_{\Sigma_1}} \rightarrow 2^{L_{\Sigma_1}}$, такой, что

- $\Gamma \vdash_{2 \Rightarrow 1} \varphi$ если и только если существуют **Log**-морфизмы $h : \mathcal{L}_2 \rightarrow \mathcal{L}_1$ and $g : \mathcal{L}_1 \rightarrow \mathcal{L}_2$, такие, что $h(g[\Gamma]) \vdash_1 h(g(\varphi))$.

Очевидным образом, если $\mathcal{L}_1$ и $\mathcal{L}_2$ аксиоматизируемы (т.е. существуют такие Γ_1 и Γ_2 соответственно, что для любых $\varphi \in L_{\Sigma_1}, \psi \in L_{\Sigma_2}$ и $\Delta \subseteq L_{\Sigma_1}, \Phi \subseteq L_{\Sigma_2}$ мы имеем, что если $\varphi \in (\Delta)^{\vdash_1}, \psi \in (\Phi)^{\vdash_2}$, то $\varphi \in (\Gamma_1)^{\vdash_1}, \psi \in (\Gamma_2)^{\vdash_2}$), то в определении выше $\Gamma \vdash_{2 \Rightarrow 1} \varphi$ всякий раз, когда $h(g(\varphi)) \in (\Gamma_1)^{\vdash_1}$. Заметим, что в случае неограниченных возможных переводимостей мы используем только **Log**-морфизмы из $\mathcal{L}_1$ в $\mathcal{L}_2$.

УТВЕРЖДЕНИЕ 41. Ограниченные возможные переводимости являются экспоненциалами в **Log**.

Доказательство. Нам нужно рассмотреть морфизм оценки $ev : \mathcal{L}_1^{\mathcal{L}_2} \otimes \mathcal{L}_2 \rightarrow \mathcal{L}_1$, морфизмы $\hat{g} : \mathcal{L}_3 \rightarrow \mathcal{L}_1^{\mathcal{L}_2}, g : \mathcal{L}_3 \otimes \mathcal{L}_2 \rightarrow \mathcal{L}_1$ и условия коммутирования диаграммы экспоненцирования (с точностью до эквивалентности). Мы имеем, что $L_{\mathcal{L}_1^{\mathcal{L}_2} \otimes \mathcal{L}_2}$ должна характеризоваться парами $\langle h(\varphi), \varphi \rangle$ и, таким образом, $ev(\langle h(\varphi), \varphi \rangle)$, в свою очередь, будет $h(\varphi)$. Для $\hat{g}$ мы всегда получаем

$\hat{g}[\Phi^{\vdash 3}]^{2 \Rightarrow 1} = \hat{g}[\Phi]^{2 \Rightarrow 1}$ и, следовательно, $\hat{g}(\psi)$ будет отвечать $h(\varphi) \in L_{\mathcal{L}_1^{\mathcal{L}_2}}$. Остальное очевидно. Q.E.D.

ПРИМЕР 42. *Возможная переводимость трехзначной логики $\mathbf{P}^1$ в классическую логику.*

- $\mathcal{L}_{\mathbf{P}^1} = \langle \Sigma_{\mathbf{P}^1}, \vdash_{\mathbf{P}^1} \rangle$ (трехзначное паранепротиворечивое исчисление $\mathbf{P}^1$ из [8]), где $\Sigma_{\mathbf{P}^1}^0$ является множеством пропозициональных переменных, $\Sigma_{\mathbf{P}^1}^1 = \{\neg_{\mathbf{P}^1}\}$, $\Sigma_{\mathbf{P}^1}^2 = \{\supset_{\mathbf{P}^1}, \wedge_{\mathbf{P}^1}, \vee_{\mathbf{P}^1}\}$ и $\vdash_{\mathbf{P}^1}$ есть оператор присоединения следствий трехзначной логики $\mathbf{P}^1$, такой, что

1. $\varphi \wedge_{\mathbf{P}^1} \psi \vdash_{\mathbf{P}^1} \varphi$ и $\varphi \wedge_{\mathbf{P}^1} \psi \vdash_{\mathbf{P}^1} \psi$;
2. $\varphi \vee_{\mathbf{P}^1} \psi \vdash_{\mathbf{P}^1} \varphi, \psi$;
3. $\varphi \supset_{\mathbf{P}^1} \psi, \varphi \vdash_{\mathbf{P}^1} \psi$;
4. $\vdash_{\mathbf{P}^1} \varphi, \neg_{\mathbf{P}^1} \varphi$.

- $\mathcal{L}_{PC} = \langle \Sigma_{PC}, \vdash_{PC} \rangle$ (классическая логика), где Σ_{PC}^0 есть множество пропозициональных переменных, $\Sigma_{PC}^1 = \{\neg_{PC}\}$, $\Sigma_{PC}^2 = \{\supset_{PC}, \wedge_{PC}, \vee_{PC}\}$ и $\vdash_{PC}$ есть оператор присоединения следствий классической логики, такой, что

1. $\varphi \wedge_{PC} \psi \vdash_{PC} \varphi$ и $\varphi \wedge_{PC} \psi \vdash_{PC} \psi$;
2. $\varphi \vee_{PC} \psi \vdash_{PC} \varphi, \psi$;
3. $\varphi \supset_{PC} \psi, \varphi \vdash_{PC} \psi$;
4. $\vdash_{PC} \varphi, \neg_{PC} \varphi$;
5. $\varphi, \neg_{PC} \varphi \vdash_{PC}$.

Нетрудно видеть, что ограниченной возможной переводимостью $\mathcal{L}_{PC}$ в $\mathcal{L}_{\mathbf{P}^1}$ будет $\mathcal{L}_{\mathbf{P}^1}^{PC} = \langle \Sigma_{\mathbf{P}^1}, \vdash_{PC \Rightarrow \mathbf{P}^1} \rangle$, где $\vdash_{PC \Rightarrow \mathbf{P}^1}$ такое, что $\varphi, \neg_{\mathbf{P}^1} \varphi \vdash_{PC \Rightarrow \mathbf{P}^1}$ тогда и только тогда, когда $\varphi^*, \neg_{PC} \varphi^* \vdash_{PC}$, где φ^* получается замещением $\mathbf{P}^1$ -связок классическими (классический изоморф в $\mathbf{P}^1$).

6 Log как топос и дополняющий топос

На основании предыдущего рассмотрения мы можем прийти к выводу, что **Log** является по крайней мере биполной категорией, допускающей экспоненцирование и коэкспоненцирование. Однако что мы можем принять в качестве терминального объекта? Рассмотрим в этом качестве логическую систему $\mathcal{L}_\top = \langle \Sigma_\top, \vdash_\top \rangle$, где $\Sigma_\top^0 = \{\top\}$, и $\Sigma_\top^k = \{\top^k\}$ для $k > 0$, где $\top^k$ есть k -местная постоянная функция (т.е. бинарная, тернарная и т.д.), а $\vdash_\top$ является максимальным оператором присоединения следствий (позволяющим вывести все что угодно). Конечно, $\mathcal{L}_\top$ будет терминальным объектом лишь с точностью до эквивалентности. В качестве начального объекта можно использовать логическую систему с пустой сигнатурой. Таким образом, фактически **Log** является декартово бизамкнутой категорией.

УТВЕРЖДЕНИЕ 43. *Log является топосом.*

Доказательство. Положим $\Omega = \langle \Sigma_\Omega, \vdash_\Omega \rangle$, где $\Sigma_\Omega^0 = \{\top, \perp\}$, $\Sigma_\Omega^k = \{\top^k, \perp^k\}$ для $k > 0$ и $\vdash_\Omega$ является одновременно максимальным $\top$ -отношением присоединения следствий (позволяющим вывести все что угодно из $\top$ и $\top^k$) и максимальным $\perp$ -отношением присоединения следствий (позволяющим вывести все что угодно из $\perp$ и $\perp^k$). В качестве классификатора подобъектов *true* мы имеем $true(\Sigma_\top) = \Sigma_\top \subseteq \Sigma_\Omega$ и $true(\vdash_\top) = \vdash_\top \subseteq \vdash_\Omega$, т.е. *true* сохраняет $\top$ -максимальность. Q.E.D.

Тем не менее это еще не окончательный результат, несмотря на то что декартова козамкнутость **Log**, по-видимому, закрывает дорогу для дальнейшего продвижения в нужном нам направлении. Но здесь на помощь приходит интересный факт, касающийся классификатора подобъектов: К. Мортенсен в [11] ввел понятие *дополняющего* классификатора как инструмента рассмотрения паранепротиворечивости в теории топосов. Его определение выглядит следующим образом.

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 44. В категории $\mathcal{C}$ *дополняющий классификатор* является $\mathcal{C}$ -стрелкой $false : 1 \rightarrow \Omega$, где для любой монострелки $f : a \rightarrow b$ имеется одна и только одна $\mathcal{C}$ -стрелка $b \rightarrow \Omega$, обозначаемая $\bar{\chi}_f$, превращающая следующую диаграмму в амальгамирование в $\mathcal{C}$,

$$\begin{array}{ccc}
 a & \xrightarrow{f} & b \\
 \downarrow & & \downarrow \bar{\chi}_f \\
 1 & \xrightarrow{false} & \Omega
 \end{array}$$

Мортенсен показал, что дополняющий классификатор в топосе **Set** неотличим (с помощью теоретико-категорных методов) от стандартного классификатора подобъектов, что они изоморфны. Таким образом, в **Set** всегда присутствует паранепротиворечивость ввиду наличия обоих типов классификаторов подобъектов. Более того, справедливо следующее утверждение.

УТВЕРЖДЕНИЕ 45. *Дополняющие топосы отвечают паранепротиворечивой логике, основывающейся на брауэровой алгебре, аналогично тому как топосы отвечают интуиционистской логике, основывающейся на алгебре Гейтинга.*

Поскольку топосы отвечают интуиционистской логике, отражая структуру алгебры Гейтинга в строении классификатора подобъектов, то в дополняющем топосе дополняющий классификатор отражает соответственно структуру брауэровой алгебры. Допуская коэкспоненциальность, категория **Log** должна также быть дополняющим топосом, что подразумевает декартово козамкнутую категорию с дополняющим классификатором. Как следствие нам нужно рассмотреть только диаграмму дополняющего классификатора Мортенсена.

УТВЕРЖДЕНИЕ 46. ***Log** является дополняющим топосом.*

Доказательство. Для дополняющего классификатора объектов $false$ мы имеем $false(\Sigma_{\top}) = \Sigma_{\perp} \subseteq \Sigma_{\Omega}$ и $false(\vdash_{\top}) = \vdash_{\perp} \subseteq \vdash_{\Omega}$, т.е. $false$ преобразует максимальное $\top$ -отношение присоединения следствий в максимальное $\perp$ -отношение присоединения следствий. Остальное очевидно. Q.E.D.

Выражаясь более точно, **Log** будет *паранепротиворечивым дополняющим топосом*. Фактически глобальные структуры топоса и дополняющего топоса накладываются на универсум универсальной логики, если мы в качестве последней подразумеваем общую теорию логических систем. Заметим, что эти струк-

туры контекстуально обусловлены введенным отношением эквивалентности.

Литература

- [1] *Васюков В.Л.* Проблема структуры универсальной логики // *Логические исследования*. Вып. 13. М., 2006. С.95-114.
- [2] *Голдблатт Р.* Топосы. Категорный анализ логики. М., 1983.
- [3] *Расева Е., Сикорский Р.* Математика метаматематики. М., 1972.
- [4] *Baader F. and Schulz K. U.* (eds.). *Frontiers of combining systems* // *Applied Logic Series*. Vol. 3. Kluwer Academic Publishers, Dordrecht, 1996. Papers from the First International Workshop (FroCoS'96) held in Munich, March 26-29, 1996.
- [5] *Béziau J.-Y., de Freitas R.P., Viana J.P.* What is Classical Propositional Logic? (A Study in Universal Logic) // *Logical Investigations*. Vol. 8. 2001. P. 266-277.
- [6] *Béziau J.-Y.* From Consequence Operator to Universal Logic: A Survey of General Abstract Logic // *Logica Universalis* / *J.-Y. Béziau* (ed.). Basel, 2005. P. 3-18.
- [7] *Caleiro C., Gonçalves R.* Equipollent Logical Systems // *Logica Universalis* / *J.-Y. Béziau* (ed.). Basel, 2005. P. 99-111.
- [8] *Carnielli W.* Possible-Translations Semantics for Paraconsistent Logics // *Frontiers of Paraconsistent Logic* / *D. Batens et al* (eds.). Research Studies Press Ltd., Baldock, Herfordshire, 2000. P.149-163.
- [9] *J.M. Font, R. Jansana, D. Pigozzi.* A Survey of Abstract Algebraic Logic // *Studia Logica*. Vol. 74, No 1/2. 2003. P.13-97.
- [10] *Lambek J., Scott P.J.* Introduction to higher order categorical logic. Cambridge, 1986.
- [11] *Mortensen C.* Inconsistent Mathematics. Dordrecht, 1995.
- [12] *Rasga J., Sernadas A., Sernadas C., and Viganò L.* Fibring labelled deduction systems // *Journal of Logic and Computation*. Vol. 12, № 3. 2002. P. 443-473.
- [13] *Rauszer C.* A Formalization of the Propositional Calculus of H-B-logic // *Studia Logica*. Vol. 33. № 1. 1973. P. 23-34.
- [14] *Sernadas A., Sernadas C., Caleiro C.* Fibring of Logics as a Categorical Construction // *Journal of Logic and Computation*. Vol. 9. № 2. 1999. P. 149-179.
- [15] *Wójcicki R.* Theory of Logical Calculi // *Synthese Library*. Vol. 199. Dordrecht, 1988.

Континуальные семейства логик¹

И. А. ГОРБУНОВ, М. Н. РЫБАКОВ

ABSTRACT. General methods of constructing classes containing continuum of logics are described. It is shown how to prove that there exist chains and antichains consisting of continuum of logics; the proofs are applicable to **Int**, **K**, **K4**, **GL**, and many others. We put some questions about existence of classes with certain properties containing continuum of logics.

1 Введение

Сегодня уже мало кого удивит континуальностью того или иного семейства логик. Более того, в исследованиях довольно часто ставится вопрос не просто о континуальности семейства расширений некоторой логики, а о континуальности множества расширений, обладающих (или не обладающих) определенным свойством, например, полнотой по Посту, интерполяционным свойством и т. д. При этом вопросы о «внутреннем» устройстве соответствующих континуальных семейств логик обычно не рассматриваются. Тем не менее, подобные вопросы возникают при исследованиях некоторых свойств логик и свойств семейств логик, а потому представляют интерес.

Так, например, некоторое время назад один из авторов столкнулся со следующей ситуацией. Исследовался вопрос о возможности построения континуального семейства логик, не имеющих независимой аксиоматизации. Было установлено, что континуальное семейство таких логик (если оно вообще существует) не может содержать континуальных цепей, т. е. если в решетке расширений некоторой логики все максимальные цепи счетны, то континуального семейства логик, обладающих этим свойством, в ней не существует.

¹Работа выполнена при поддержке РФФИ, гранты № 06-06-80380, № 07-06-00318.

Попытки построить семейства таких логик привели нас к вопросам о возможном устройстве континуальных семейств логик вообще. Мы приведем здесь эти вопросы, но прежде покажем, как *обычно* строятся континуальные семейства логик и какие следствия можно извлечь из соответствующей конструкции. Отметим, что приводимые ниже факты, касающиеся континуальных семейств логик, известны из теории решеток (см., например, [1]) и справедливы не только для логик; мы приводим их для логик, сопровождая доказательствами.

2 Обозначения

Ниже мы будем обозначать посредством $\mathbb{N}$ множество натуральных чисел, считая наименьшим элементом множества число 0; множество натуральных чисел без нуля будем обозначать посредством $\mathbb{N}^+$. Мощность счетного множества будем обозначать посредством $\aleph_0$, т. е. $\aleph_0 = \text{card}\mathbb{N}$.

Мы будем использовать два отношения включения множеств: отношение строгого включения и отношение нестрогого включения. Если A строго включается в B , то мы будем писать « $A \subset B$ », если нестрого, то « $A \subseteq B$ ».

3 Независимые множества формул

Обычно доказательства континуальности семейств расширений тех или иных логик основаны на построении бесконечных независимых множеств формул. Опишем этот метод точнее. Везде ниже мы будем понимать под *логикой* множество формул некоторого языка, замкнутое относительно некоторого множества правил. Пусть R — некоторое множество правил вывода², L — логика, Δ — некоторое множество формул. Обозначим че-

²В случае большинства логик можно считать, что среди правил из R имеются подстановка и *modus ponens*. В общем случае R может и не содержать этих правил, тем более что в литературе можно встретить как логики, не замкнутые относительно подстановки (например, *public announcement logic*) — хотя, на наш взгляд, в этом случае естественней говорить не о логиках, а о теориях, — так и логики, не замкнутые относительно *modus ponens* (например, логика «интуиционистской» шкалы Крипке, состоящей из одного иррефлексивного мира). Поскольку наличие или отсутствие каждого из этих правил не влияет на суть изложения, мы не будем требовать их наличия в R .

рез $L +_R \Delta$ минимальное по включению множество формул, содержащее $L \cup \Delta$ и замкнутое относительно правил из R .

Множество формул Γ называется *независимым над L относительно R* , если для всякой формулы $\varphi \in \Gamma$

$$\varphi \notin L +_R \Gamma \setminus \{\varphi\},$$

т. е. если никакая формула $\varphi \in \Gamma$ не выводима из множества формул $L \cup (\Gamma \setminus \{\varphi\})$ с помощью правил из R .

Пусть теперь $\{\varphi_n : n \in \mathbb{N}\}$ — счетное множество формул, независимое над L относительно R . Для всякого $I \subseteq \mathbb{N}$ определим логику $L(I)$ следующим образом:

$$L(I) = L +_R \{\varphi_n : n \in I\}.$$

Ясно, что в этом случае справедлива эквивалентность

$$\varphi \in L(I) \iff n \in I,$$

а следовательно, для любых $I, J \subseteq \mathbb{N}$

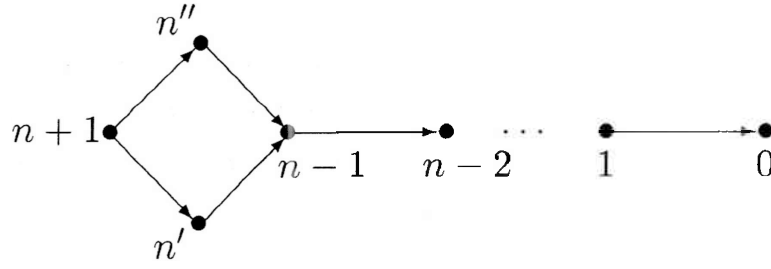
$$I = J \iff L(I) = L(J).$$

Таким образом, мы установили взаимно однозначное соответствие между множеством логик $\{L(I) : I \subseteq \mathbb{N}\}$ и множеством всех подмножеств множества $\mathbb{N}$. Поскольку множество всех подмножеств множества натуральных чисел континуально, то и построенное семейство логик континуально. Следовательно,

если существует бесконечное множество формул, независимое над логикой L относительно множества правил R , то в совокупности расширений логики L существует континуальное семейство логик, замкнутых относительно R .

Используя это наблюдение, несложно обосновать континуальность семейства расширений таких логик, как **Int**, **BPL**, **K**, **K4**, **GL** и др.: достаточно для каждой из них построить бесконечное независимое множество формул (относительно соответствующих правил вывода).

Приведем пример множества формул, независимого над логикой Гёделя–Лёба **GL**. Описание **GL**, а также необходимые

Рис. 1. Шкала $\mathfrak{F}_n$

факты о **GL** читатель может найти, например, в [2]; в рассматриваемом примере мы будем придерживаться обозначений, используемых в [2]. Для всякого $n \in \mathbb{N}^+$ определим следующие формулы:

$$\begin{aligned}\alpha_n &= \Diamond^n \top \wedge \Box^{n+1} \perp; \\ \beta_n &= \Box(\alpha_n \rightarrow p) \vee \Box(\alpha_n \rightarrow \neg p),\end{aligned}$$

где p — пропозициональная переменная. Покажем, что множество формул $\{\beta_n : n \in \mathbb{N}^+\}$ независимо над **GL** относительно множества правил, содержащего подстановку, modus ponens и правило Гёделя (правило необходимости). Для этого достаточно показать, что для всякого $n \in \mathbb{N}^+$ существует шкала Крипке $\mathfrak{F}_n$ логики **GL** такая, что для всякого $k \in \mathbb{N}^+$

$$\mathfrak{F}_n \not\models \beta_k \iff k = n.$$

Эта шкала изображена на рис. 1; отношение достижимости в этой шкале иррефлексивно и транзитивно.

Чтобы опровергнуть в $\mathfrak{F}_n$ формулу β_n , достаточно взять оценку, при которой переменная p истинна в мире n' и опровергается в мире n'' . Поскольку в каждом из миров n' и n'' истинна формула α_n , мы получаем, что в мире n' при такой оценке опровергается формула $\alpha_n \rightarrow \neg p$, а в мире n'' — формула $\alpha_n \rightarrow p$, следовательно, в мире $(n+1)$ в этом случае опровергается β_n . Теперь заметим, что для опровержения формулы β_k требуется существование как минимум двух миров, в которых истинна формула α_k (в одном из них переменная p должна быть истинна, а в другом — ложна), а при $k \neq n$ в шкале $\mathfrak{F}_n$ таких двух миров нет: при $k = n+1$ или $k < n$ такой мир только один (это мир k), а при $k > n+1$ миров, в которых была бы истинна формула α_k ,

в шкале $\mathfrak{F}_n$ нет вообще. Таким образом, для любых $n, k \in \mathbb{N}^+$

$$\mathfrak{F}_n \not\models \beta_k \iff k = n,$$

и следовательно, множество формул $\{\beta_n : n \in \mathbb{N}^+\}$ независимо над **GL** относительно перечисленных правил.

Таким образом, как семейство нормальных³, так и семейство квазинормальных⁴ расширений логики **GL** континуально. Обратим внимание, что мы заодно обосновали континуальность семейства расширений любой логики, для которой **GL** является ее расширением, в частности, мы обосновали континуальность семейства расширений любой логики из интервала $[\mathbf{K}, \mathbf{GL}]$. Отметим, что в приведенном доказательстве мы использовали формулы из [2], определенные в доказательстве теоремы 6.1. Отметим также, что в [2] можно найти описание независимых множеств формул и для других логик, например, для **Int**.

Вернемся к рассмотрению множества $\{L(I) : I \subseteq \mathbb{N}\}$. Как было показано выше, оно континуально. Но нас интересует другое: свойства отношения включения, определенного на этом множестве. Опишем некоторые из них. В целях удобства чтения обозначим множество $\{L(I) : I \subseteq \mathbb{N}\}$ посредством **L**.

Прежде всего заметим, что $\langle \mathbf{L}, \subseteq \rangle$ — булева решетка с наименьшим⁵ элементом $L(\emptyset)$ и наибольшим элементом $L(\mathbb{N})$. Покажем, что эта решетка содержит особые континуальные семейства логик.

4 Континуальные антицепи логик

Покажем, что в решетке $\langle \mathbf{L}, \subseteq \rangle$ существуют континуальные антицепи. Напомним, что множество X называется *антицепью* относительно нестрогого частичного порядка $\preceq$, если любые различные $a, b \in X$ не сравнимы по отношению $\preceq$, т.е. $a \not\preceq b$ и $b \not\preceq a$.

Для построения континуальной антицепи в $\langle \mathbf{L}, \subseteq \rangle$ разобьем множество $\mathbb{N}$ на множество четных чисел и множество нечетных

³Замкнутых относительно правила Гёделя.

⁴Для которых не требуется замкнутость относительно правила Гёделя.

⁵Если логика L замкнута относительно правил из R , то $L(\emptyset) = L$. Если же L не замкнута относительно правил из R , то L не содержится в решетке $\langle \mathbf{L}, \subseteq \rangle$.

чисел:

$$\begin{aligned} 2\mathbb{N} &= \{2n : n \in \mathbb{N}\} && \text{— множество четных чисел;} \\ 2\mathbb{N} + 1 &= \{2n + 1 : n \in \mathbb{N}\} && \text{— множество нечетных чисел.} \end{aligned}$$

Для всякого подмножества I множества $\mathbb{N}$ определим множества $2I$ и $2I + 1$:

$$\begin{aligned} 2I &= \{2n : n \in I\}; \\ 2I + 1 &= \{2n + 1 : n \in I\}. \end{aligned}$$

Для каждого $I \subseteq \mathbb{N}$ определим логику

$$L^a(I) = L((2\mathbb{N} \setminus 2I) \cup (2I + 1))$$

и рассмотрим семейство логик

$$\mathbf{L}^a = \{L^a(I) : I \subseteq \mathbb{N}\}.$$

По определению $L^a(I)$ получаем, что $\mathbf{L}^a \subset \mathbf{L}$. Кроме того, для всякого $n \in \mathbb{N}$

$$\begin{aligned} \varphi_{2n} \in L^a(I) &\Leftrightarrow \varphi_{2n} \in L((2\mathbb{N} \setminus 2I) \cup (2I + 1)) \\ &\Leftrightarrow 2n \in (2\mathbb{N} \setminus 2I) \cup (2I + 1) \\ &\Leftrightarrow 2n \in 2\mathbb{N} \setminus 2I \\ &\Leftrightarrow 2n \notin 2I \\ &\Leftrightarrow n \notin I; \\ \varphi_{2n+1} \in L^a(I) &\Leftrightarrow \varphi_{2n+1} \in L((2\mathbb{N} \setminus 2I) \cup (2I + 1)) \\ &\Leftrightarrow 2n + 1 \in (2\mathbb{N} \setminus 2I) \cup (2I + 1) \\ &\Leftrightarrow 2n + 1 \in 2I + 1 \\ &\Leftrightarrow n \in I. \end{aligned}$$

Эквивалентности

$$\begin{aligned} \varphi_{2n} \in L^a(I) &\Leftrightarrow n \notin I, \\ \varphi_{2n+1} \in L^a(I) &\Leftrightarrow n \in I \end{aligned}$$

гарантируют, что для любых $I, J \subseteq \mathbb{N}$

$$I = J \Leftrightarrow L^a(I) = L^a(J),$$

а последняя эквивалентность позволяет определить взаимно однозначное соответствие между множеством $\mathbf{L}^a$ и множеством

подмножеств множества $\mathbb{N}$, поэтому $\mathbf{L}^a$ имеет континуальную мощность.

Покажем, что логики из $\mathbf{L}^a$ образуют антицепь по включению. Для этого достаточно убедиться, что если $I, J \subseteq \mathbb{N}$ и $I \neq J$, то $L^a(I) \not\subseteq L^a(J)$ и $L^a(J) \not\subseteq L^a(I)$.

Итак, пусть $I, J \subseteq \mathbb{N}$ и $I \neq J$. Без ограничений общности можем считать, что существует m такое, что $m \in I$, $m \notin J$. Имеем следующее:

$$\left. \begin{array}{l} m \in I \Rightarrow \varphi_{2m+1} \in L^a(I) \\ m \notin J \Rightarrow \varphi_{2m+1} \notin L^a(J) \end{array} \right\} \Rightarrow L^a(I) \not\subseteq L^a(J);$$

$$\left. \begin{array}{l} m \in I \Rightarrow \varphi_{2m} \notin L^a(I) \\ m \notin J \Rightarrow \varphi_{2m} \in L^a(J) \end{array} \right\} \Rightarrow L^a(J) \not\subseteq L^a(I),$$

т. е. логики $L^a(I)$ и $L^a(J)$ не сравнимы по включению, и $\mathbf{L}^a$ действительно образует антицепь. Следовательно,

если существует бесконечное множество формул, независимое над логикой L относительно множества правил R , то в совокупности расширений логики L существует континуальная антицепь логик, замкнутых относительно R .

Мы построили одну континуальную антицепь, но несложно показать, что таких континуальных антицепей в $\langle \mathbf{L}, \subseteq \rangle$ континуум. Чтобы сделать это, проведем небольшой анализ описанной выше конструкции. Заметим, что мы смогли построить континуальную антицепь, разбив множество натуральных чисел на два бесконечных непересекающихся подмножества: в нашем случае это были четные и нечетные числа. В целом же выбор подобного разбиения может быть «почти произвольным».

Итак, пусть A — бесконечное подмножество множества натуральных чисел с бесконечным дополнением $\bar{A}$. Так как A и $\bar{A}$ — бесконечные подмножества множества натуральных чисел, то они счетны, в частности, равномощны. Последнее означает, что существует взаимно однозначное соответствие $f : A \rightarrow \bar{A}$, т. е. изоморфизм между A и $\bar{A}$. Для всякого подмножества I множества A определим множество I^* следующим образом:

$$I^* = \{f(n) : n \in I\}.$$

Так как f — это изоморфизм между A и $\bar{A}$, то для всякого $n \in \mathbb{N}$

$$n \in A \Leftrightarrow f(n) \in \bar{A}, \quad n \in \bar{A} \Leftrightarrow f^{-1}(n) \in A.$$

Теперь для всякого подмножества I множества A определим логику $L^A(I)$ следующим образом:

$$L^A(I) = L((A \setminus I) \cup I^*).$$

Попутно заметим, что для определенных ранее логик вида $L^a(I)$ справедливо равенство

$$L^a(I) = L^{2\mathbb{N}}(2I),$$

где в качестве соответствующего изоморфизма f между множествами $2\mathbb{N}$ и $2\mathbb{N} + 1$ выступает функция прибавления единицы, т. е. $f(2n) = 2n + 1$.

Вернемся к логикам вида $L^A(I)$. Пусть

$$\mathbf{L}^A = \{L^A(I) : I \subseteq A\}.$$

Аналогично тому, как это было сделано выше для $\mathbf{L}^a$, можно показать, что если $I, J \subseteq A$ и $I \neq J$, то $L^A(I) \not\subseteq L^A(J)$ и $L^A(J) \not\subseteq L^A(I)$, т. е. $\mathbf{L}^A$ является антицепью в $\langle \mathbf{L}, \subseteq \rangle$. Соответствующую детальную проверку мы оставляем читателю.

В результате мы приходим к выводу, что различных антицепей в решетке $\langle \mathbf{L}, \subseteq \rangle$ существует не меньше, чем различных бесконечных подмножеств множества $\mathbb{N}$, имеющих бесконечное дополнение. А семейство таких множеств континуально, так как конечные подмножества множества $\mathbb{N}$ и подмножества множества $\mathbb{N}$ с конечным дополнением образуют лишь счетную совокупность. Следовательно,

если существует бесконечное множество формул, независимое над логикой L относительно множества правил R , то в совокупности расширений логики L существует континуум континуальных антицепей, состоящих из логик, замкнутых относительно R .

Обратим внимание на то, что описанная выше конструкция позволяет извлечь еще одно следствие: в решетке $\langle \mathbf{L}, \subseteq \rangle$ существует бесконечно много максимальных антицепей, имеющих

континуальную мощность. Напомним, что антицепь называется *максимальной*, если она не содержится ни в какой другой антицепи. Приведем обоснование того, что в решетке $\langle \mathbf{L}, \subseteq \rangle$ существует как минимум счетное семейство максимальных антицепей, являющихся континуальными. Для этого заметим, что если A и B — бесконечные подмножества множества $\mathbb{N}$, имеющие бесконечные дополнения, и при этом $A \cap B = \emptyset$, $B \neq \overline{A}$, то множество $\mathbf{L}^A \cup \mathbf{L}^B$ не является антицепью в $\langle \mathbf{L}, \subseteq \rangle$. Действительно, пусть f — изоморфизм между A и $\overline{A}$. Так как $B \subset \overline{A}$, то существует подмножество I множества A такое, что

$$B = \{f(n) : n \in I\} = I^*.$$

Значит, $B \subseteq (A \setminus I) \cup I^*$, а так как $B \neq \overline{A}$, то $B \subset (A \setminus I) \cup I^*$. Из последнего включения получаем, что $L^B(\emptyset) \subset L^A(I)$, т. е. $\mathbf{L}^A \cup \mathbf{L}^B$ не является антицепью в решетке $\langle \mathbf{L}, \subseteq \rangle$.

Теперь воспользуемся тем, что любое счетное множество можно представить в виде объединения счетного семейства попарно непересекающихся счетных множеств (ясно, что в этом случае каждое из них имеет счетное дополнение). Пусть эти множества образуют семейство $\{A_i : i \in \mathbb{N}\}$. Согласно лемме Цорна, каждая из антицепей $\mathbf{L}^{A_i}$ содержится в некоторой максимальной антицепи, а согласно доказанному выше, если $i \neq j$, то антицепи $\mathbf{L}^{A_i}$ и $\mathbf{L}^{A_j}$ не могут содержаться одновременно ни в какой — в том числе максимальной — антицепи решетки $\langle \mathbf{L}, \subseteq \rangle$. Следовательно,

если существует бесконечное множество формул, независимое над логикой L относительно множества правил R , то в совокупности расширений логики L существует как минимум счетное множество максимальных континуальных антицепей, состоящих из логик, замкнутых относительно R .

Можно показать, что семейство максимальных континуальных антицепей в решётке $\langle \mathbf{L}, \subseteq \rangle$ имеет мощность континуума; мы сделаем это несколько позже, при рассмотрении вопроса о существовании континуальных цепей в решётке $\langle \mathbf{L}, \subseteq \rangle$.

5 Континуальные цепи логик

Напомним, что множество X называется *цепью* относительно нестрогого частичного порядка $\preceq$, если любые элементы $a, b \in X$ сравнимы по отношению $\preceq$, т. е. $a \preceq b$ или $b \preceq a$.

Из теории булевых решеток известно, что булева решетка всех подмножеств некоторого множества бесконечной мощности A содержит цепь мощности 2^A (в качестве ссылки мы можем указать [1], правда, доказательство этого утверждения в [1] не приводится: оно оставлено читателю в качестве упражнения). Покажем, как можно построить континуальные цепи логик в решетке $\langle \mathbf{L}, \subseteq \rangle$. Для этого сначала заметим, что для любых подмножеств I и J множества $\mathbb{N}$ справедлива эквивалентность

$$I \subset J \Leftrightarrow L(I) \subset L(J).$$

Таким образом, для того чтобы построить континуальную цепь логик, достаточно построить континуальную цепь, состоящую из подмножеств множества натуральных чисел. Покажем, как это сделать.

Пусть A и B — некоторые множества натуральных чисел, причем $A \subseteq B$ и множество $B \setminus A$ бесконечно. Построим счетное плотное семейство множеств, образующих цепь по включению, каждое из которых содержит A , содержится в B и отличается от любого другого множества из этого семейства бесконечным числом элементов. Множества этого семейства будем нумеровать с помощью положительных рациональных чисел из отрезка $[0, 1]$, знаменатель которых является степенью двойки.

Для того чтобы построить цепь с указанными свойствами, определим вложенные друг в друга цепи $\mathbf{C}_0, \mathbf{C}_1, \mathbf{C}_2, \dots$, образованные подмножествами множества $\mathbb{N}$, где каждая цепь $\mathbf{C}_k$ содержит $(2^k + 1)$ элементов, соответствующих дробям из отрезка $[0, 1]$, имеющим знаменатель 2^k , т. е. дробям

$$\frac{0}{2^k}, \frac{1}{2^k}, \dots, \frac{2^k}{2^k},$$

при этом мы будем следить за тем, чтобы любые два различных множества из $\mathbf{C}_k$ отличались друг от друга счетным множеством элементов.

При $n = 0$ имеем две дроби указанного вида, а именно

$$\frac{0}{2^0} \text{ и } \frac{2^0}{2^0},$$

т. е. числа 0 и 1. Положим $C(0) = A$, $C(1) = B$, определив тем самым цепь $\mathbf{C}_0$:

$$\mathbf{C}_0 = \{C(0), C(1)\}.$$

Предположим, что для некоторого $n \in \mathbb{N}$ мы уже определили семейство

$$\mathbf{C}_n = \left\{ C\left(\frac{m}{2^n}\right) : 0 \leq m \leq 2^n \right\},$$

причем для всякого $m \in \{0, \dots, 2^n - 1\}$ имеют место отношения

$$C\left(\frac{m}{2^n}\right) \subseteq C\left(\frac{m+1}{2^n}\right), \quad \text{card}\left[C\left(\frac{m+1}{2^n}\right) \setminus C\left(\frac{m}{2^n}\right)\right] = \aleph_0.$$

Определим семейство $\mathbf{C}_{n+1}$.

Пусть $m \in \{0, \dots, 2^{n+1}\}$. Если m четно, т. е. для некоторого натурального k имеет место равенство $m = 2k$, то

$$\frac{m}{2^{n+1}} = \frac{2k}{2 \cdot 2^n} = \frac{k}{2^n},$$

поэтому множество $C(m/2^{n+1})$ уже определено. Пусть m нечетно, т. е. $m = 2k + 1$ для некоторого натурального k . Рассмотрим множество

$$D\left(\frac{m}{2^{n+1}}\right) = C\left(\frac{k+1}{2^n}\right) \setminus C\left(\frac{k}{2^n}\right).$$

По условию это множество содержит счётное число элементов, поэтому мы можем занумеровать их натуральными числами (например, в порядке возрастания):

$$D\left(\frac{m}{2^{n+1}}\right) = \{a_0, a_1, a_2, \dots\}.$$

Разобьем это множество на два бесконечных непересекающихся подмножества:

$$D_0\left(\frac{m}{2^{n+1}}\right) = \{a_{2k} : k \in \mathbb{N}\};$$

$$D_1\left(\frac{m}{2^{n+1}}\right) = \{a_{2k+1} : k \in \mathbb{N}\}.$$

Теперь положим

$$C\left(\frac{m}{2^{n+1}}\right) = C\left(\frac{k}{2^n}\right) \cup D_1\left(\frac{m}{2^{n+1}}\right).$$

Наконец, пусть

$$\mathbf{C}_{n+1} = \left\{ C\left(\frac{m}{2^{n+1}}\right) : 0 \leq m \leq 2^{n+1} \right\}.$$

Покажем, что семейство множеств $\mathbf{C}_{n+1}$ удовлетворяет всем нужным нам условиям.

Пусть $m \in \{0, \dots, 2^{n+1} - 1\}$.

Для m возможны два случая: m — четное число и m — нечетное число. Если m четно, то

$$C\left(\frac{m+1}{2^{n+1}}\right) = C\left(\frac{m}{2^{n+1}}\right) \cup D_1\left(\frac{m+1}{2^{n+1}}\right),$$

а если m нечетно, то

$$C\left(\frac{m+1}{2^{n+1}}\right) = C\left(\frac{m}{2^{n+1}}\right) \cup D_0\left(\frac{m}{2^{n+1}}\right).$$

И в том, и в другом случае получаем, что

$$C\left(\frac{m}{2^{n+1}}\right) \subseteq C\left(\frac{m+1}{2^{n+1}}\right),$$

в частности, $\mathbf{C}_{n+1}$ является цепью по включению множеств.

Теперь заметим, что если m четно, то

$$C\left(\frac{m+1}{2^{n+1}}\right) \setminus C\left(\frac{m}{2^{n+1}}\right) = D_1\left(\frac{m+1}{2^{n+1}}\right),$$

а если m нечетно, то

$$C\left(\frac{m+1}{2^{n+1}}\right) \setminus C\left(\frac{m}{2^{n+1}}\right) = D_0\left(\frac{m}{2^{n+1}}\right).$$

И в том и в другом случае получаем, что

$$\text{card}\left[C\left(\frac{m}{2^{n+1}}\right) \setminus C\left(\frac{m+1}{2^{n+1}}\right)\right] = \aleph_0.$$

Итак, последовательность цепей $C_0, C_1, C_2, \dots$ определена. Положим

$$C = \bigcup_{n=0}^{\infty} C_n.$$

По построению C представляет собой счетное плотное семейство множеств, образующих цепь по включению, каждое из которых содержит A , содержится в B и отличается от любого другого множества из C бесконечным числом элементов.

Расширим цепь C до некоторой континуальной цепи C^* .

Пусть α — произвольное действительное число из полуинтервала $[0, 1)$, т. е. $0 \leq \alpha < 1$. Представим α в двоичной записи, т. е. в виде $\alpha = 0, \alpha_1 \alpha_2 \alpha_3 \dots$, где α_i — цифра «0» или цифра «1», $i \in \mathbb{N}$. Иначе говоря,

$$\alpha = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\alpha_n}{2^n}.$$

Без ограничений общности можем считать, что в двоичной записи числа α имеется бесконечно много нулей⁶. Для всякого $n \in \mathbb{N}^+$ определим число β_n следующим образом:

$$\beta_n = 0, \alpha_1 \dots \alpha_n = \sum_{k=1}^n \frac{\alpha_k}{2^k}.$$

Заметим, что

$$\beta_n = \sum_{k=1}^n \frac{\alpha_k}{2^k} = \sum_{k=1}^n \frac{\alpha_k \cdot 2^{n-k}}{2^k \cdot 2^{n-k}} = \sum_{k=1}^n \frac{\alpha_k \cdot 2^{n-k}}{2^n},$$

т. е. β_n является дробью со знаменателем 2^n , а значит, для β_n определено множество $C(\beta_n)$, в частности, $C(\beta_n) \in C_n$. Теперь

⁶Если это не так, то, как известно, такое число имеет два двоичных представления, одно из которых удовлетворяет соответствующему требованию. Действительно, пусть существует наибольшее n , для которого $\alpha_n = 0$. Тогда для всех k , больших n , имеет место равенство $\alpha_k = 1$. Поскольку $\sum_{k=n+1}^{\infty} (1/2^k) = 1/2^n$, мы можем заменить имеющуюся двоичную запись числа α на запись, отличающуюся от данной в каждом знаке, начиная с n -го, т. е. положить $\alpha_n = 1$ и для всякого k , большего n , положить $\alpha_k = 0$. Получившаяся запись будет определять то же действительное число, что и исходная.

определим множество $C^*(\alpha)$, положив

$$C^*(\alpha) = \bigcup_{n=1}^{\infty} C(\beta_n).$$

Пусть также $C^*(1) = C(1) = B$. Наконец, пусть

$$\mathbf{C}^* = \{C^*(\alpha) : 0 \leq \alpha \leq 1\}.$$

Покажем, что множество $\mathbf{C}^*$ является цепью по включению. Для этого достаточно показать, что если α, α' — числа из отрезка $[0, 1]$ и $\alpha \leq \alpha'$, то $C^*(\alpha) \subseteq C^*(\alpha')$. Пусть $\alpha, \alpha' \in [0, 1]$ и $\alpha \leq \alpha'$. Пусть

$$\alpha = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\alpha_n}{2^n}, \quad \alpha' = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\alpha'_n}{2^n}$$

и пусть также для всякого $n \in \mathbb{N}^+$

$$\beta_n = \sum_{k=1}^n \frac{\alpha_k}{2^k}, \quad \beta'_n = \sum_{k=1}^n \frac{\alpha'_k}{2^k}.$$

Из того, что $\alpha \leq \alpha'$, получаем, что для всякого $n \in \mathbb{N}^+$ должно выполняться неравенство $\beta_n \leq \beta'_n$. В этом случае по построению семейства множеств $\mathbf{C}$ получаем, что $C(\beta_n) \subseteq C(\beta'_n)$, поэтому

$$\bigcup_{n=1}^{\infty} C(\beta_n) \subseteq \bigcup_{n=1}^{\infty} C(\beta'_n),$$

т. е. $C^*(\alpha) \subseteq C^*(\alpha')$, а значит, $\mathbf{C}^*$ является цепью.

Покажем, что множество $\mathbf{C}^*$ континуально. Для этого достаточно показать, что если α, α' — числа из отрезка $[0, 1]$ и $\alpha \neq \alpha'$, то $C^*(\alpha) \neq C^*(\alpha')$. Пусть $\alpha, \alpha' \in [0, 1]$ и $\alpha \neq \alpha'$. Без ограничений общности можем считать, что $\alpha < \alpha'$. Воспользуемся введенными выше обозначениями. Тогда для всякого $n \in \mathbb{N}^+$ имеет место неравенство $\beta_n \leq \beta'_n$, причем, учитывая, что $\alpha \neq \alpha'$, получаем, что существует $n_0 \in \mathbb{N}^+$ такое, что для всех n , больших n_0 , имеет место неравенство $\beta_n \neq \beta'_n$, т. е. $\beta_n < \beta'_n$. Пусть $m > n_0$. Рассмотрим множество

$$D = C(\beta'_m) \setminus C(\beta_m).$$

По построению цепи $\mathbf{C}_m$ множество D бесконечно. Пусть a_0 — наименьший элемент в D . Тогда по построению $\mathbf{C}_{m+k}$ получаем, что $a_0 \notin D_1(\beta_{m+k})$ для всех $k \in \mathbb{N}^+$, откуда несложно сделать вывод, что $a_0 \notin C(\beta_n)$ для всех $n \in \mathbb{N}^+$. Следовательно,

$$a_0 \notin \bigcup_{n=1}^{\infty} C(\beta_n),$$

т. е. $a_0 \notin C^*(\alpha)$. С другой стороны, $a_0 \in C(\beta'_m)$, а следовательно, $a_0 \in C^*(\alpha')$. Таким образом, $C^*(\alpha) \neq C^*(\alpha')$, и цепь $\mathbf{C}^*$ континуальна.

Пусть $\mathbf{L}[\mathbf{C}^*] = \{L(I) : I \in \mathbf{C}^*\}$. Поскольку мы установили взаимно однозначное соответствие между подмножествами множества $\mathbb{N}$ и логиками из $\mathbf{L}$, сохраняющее отношение строгого включения, именно

$$I \subset J \Leftrightarrow L(I) \subset L(J),$$

то, ввиду континуальности цепи $\mathbf{C}^*$, получаем, что, во-первых, семейство логик $\mathbf{L}[\mathbf{C}^*]$ является цепью, а во-вторых, оно континуально. Следовательно,

если существует бесконечное множество формул, независимое над логикой L относительно множества правил R , то в совокупности расширений логики L существует континуальная цепь, состоящая из логик, замкнутых относительно R .

Обратим внимание на то, что цепь $\mathbf{L}[\mathbf{C}^*]$ является непрерывной. Напомним, что множество X с нестрогим линейным порядком $\preceq$ называется *непрерывным*, если для всякого $a \in X$

- (1) множество $X \setminus \{x \in X : a \preceq x\}$ не содержит наибольшего элемента;
- (2) множество $X \setminus \{x \in X : x \preceq a\}$ не содержит наименьшего элемента,

т. е. при естественном определении по нестрогему порядку $\preceq$ строгого порядка $\prec$ множество $\{x \in X : x \prec a\}$ не имеет наибольшего элемента, а множество $\{x \in X : a \prec x\}$ — наименьшего.

Так как отрезок $[0, 1]$ с отношением $\leq$ образует непрерывное множество и так как семейство логик $\mathbf{L}(\mathbf{C}^*)$ изоморфно отрезку $[0, 1]$, причем для всяких $\alpha, \alpha' \in [0, 1]$

$$\alpha < \alpha' \Leftrightarrow C^*(\alpha) \subset C^*(\alpha') \Leftrightarrow L(C^*(\alpha)) \subset L(C^*(\alpha')),$$

то заключаем, что цепь логик $\mathbf{L}[\mathbf{C}^*]$ является непрерывной. Следовательно,

если существует бесконечное множество формул, независимое над логикой L относительно множества правил R , то в совокупности расширений логики L существует континуальная непрерывная цепь, состоящая из логик, замкнутых относительно R .

Имея континуальную цепь логик $\mathbf{L}[\mathbf{C}^*]$, несложно доказать, что в решетке $\langle \mathbf{L}, \subseteq \rangle$ существует континуум максимальных континуальных антицепей логик (напомним, что выше мы показали, что существует как минимум счетное множество таких антицепей). Покажем это.

6 Число максимальных континуальных антицепей

Пусть A и B — бесконечные подмножества множества $\mathbb{N}$ такие, что $A \subseteq B$, причем множества $B \setminus A$, $\overline{A}$, и $\overline{B}$ бесконечны (например, в качестве B можно взять множество четных натуральных чисел, а в качестве A — множество натуральных чисел, кратных четырем). Используя A и B , построим континуальную цепь $\mathbf{C}^*$ описанным выше способом.

Обратим внимание на тот факт, что в этом случае для всякого действительного числа α из отрезка $[0, 1]$ множество $C^*(\alpha)$ бесконечно, так как $C^*(\alpha)$ содержит A , и имеет бесконечное дополнение, так как $C^*(\alpha)$ содержится в B . Следовательно, для каждого действительного числа α из отрезка $[0, 1]$, как показано выше, определена континуальная антицепь $\mathbf{L}^{C^*(\alpha)}$. Осталось заметить, что если $\alpha < \alpha'$, то $\mathbf{L}^{C^*(\alpha)} \cup \mathbf{L}^{C^*(\alpha')}$ не является антицепью, так как в этом случае $C^*(\alpha) \subset C^*(\alpha')$, и следовательно, $L^{C^*(\alpha)}(\emptyset) \subset L^{C^*(\alpha')}(\emptyset)$, откуда следует, что антицепи $\mathbf{L}^{C^*(\alpha)}$ и $\mathbf{L}^{C^*(\alpha')}$ не могут содержаться в одной и той же максимальной антицепи. Таким образом, в $\langle \mathbf{L}, \subseteq \rangle$ существует континуум максимальных континуальных антицепей. Итак,

если существует бесконечное множество формул, независимое над логикой L относительно множества правил R , то в совокупности расширений логики L существует континуум максимальных континуальных антицепей, состоящих из логик, замкнутых относительно R .

Вернемся к рассмотрению континуальных цепей логик в решетке $\langle \mathbf{L}, \subseteq \rangle$.

7 Континуальные цепи логик (продолжение)

Мы остановились на том, что показали, как получить континуальную — и даже непрерывную — цепь логик во множестве расширений L . Теперь покажем, что в $\langle \mathbf{L}, \subseteq \rangle$ таких цепей существует континуум.

Рассмотрим антицепь $\mathbf{L}^a$, которую мы построили выше. Напомним, что эта антицепь образована логиками вида $L^a(I)$, где

$$L^a(I) = L((2\mathbb{N} \setminus 2I) \cup (2I + 1)),$$

а I — произвольное подмножество множества $\mathbb{N}$. Заметим, что каково бы ни было множество I , множество $(2\mathbb{N} \setminus 2I) \cup (2I + 1)$ бесконечно, причем его дополнение в $\mathbb{N}$ тоже бесконечно. Поэтому, если взять

$$\begin{aligned} A &= (2\mathbb{N} \setminus 2I) \cup (2I + 1), \\ B &= \mathbb{N}, \end{aligned}$$

то, используя описанный выше способ, мы можем построить континуальную (и при этом непрерывную) цепь логик между $L(A)$ и $L(B)$. Так как имеется континуум способов выбрать множество A , то в решетке $\langle \mathbf{L}, \subseteq \rangle$ получаем континуум континуальных (и непрерывных) цепей логик, причем любые две из этих цепей таковы, что ни одна из них не содержится целиком в другой. Значит,

если существует бесконечное множество формул, независимое над логикой L относительно множества правил R , то в совокупности расширений логики L существует континуум континуальных непрерывных цепей, ни одна из которых не содержится целиком ни в какой другой, состоящих из логик, замкнутых относительно R .

Поскольку в любых двух из указанных цепей можно выбрать по элементу, которые будут несравнимы между собой по отношению включения, мы можем сделать вывод, что максимальных континуальных антицепей в $\langle \mathbf{L}, \subseteq \rangle$ имеется тоже континуум. Следовательно,

если существует бесконечное множество формул, независимое над логикой L относительно множества правил R , то в совокупности расширений логики L существует континуум максимальных континуальных цепей, состоящих из логик, замкнутых относительно R .

Мы хотим обратить внимание читателя на тот факт, что мы не требуем в последней формулировке, чтобы максимальные континуальные цепи логик были непрерывными. И тому есть причины. Покажем, что цепь $\mathbf{L}[\mathbf{C}^*]$ можно расширить до другой цепи, причем получившаяся в результате цепь логик уже не будет непрерывной, и даже больше — она не будет содержать ни одного непрерывного интервала.

Для каждого натурального числа $n \in B \setminus A$ определим множества $C_l(n)$ и $C_r(n)$ следующим образом:

$$C_l(n) = \bigcup_{\substack{I \in \mathbf{C}^* \\ n \notin I}} I, \quad C_r(n) = \bigcap_{\substack{I \in \mathbf{C}^* \\ n \in I}} I.$$

Отметим, что из определения множеств $C_l(n)$ и $C_r(n)$ следует, что $C_l(n) \subset C_r(n)$ и что $C_r(n) \setminus C_l(n) = \{n\}$.

Определим семейство множеств $\mathbf{C}^\#$ как расширение цепи $\mathbf{C}^*$, получающееся добавлением к $\mathbf{C}^*$ множеств $C_l(n)$ и $C_r(n)$, где n пробегает множество $B \setminus A$:

$$\mathbf{C}^\# = \mathbf{C}^* \cup \{C_l(n), C_r(n) : n \in B \setminus A\}.$$

Определенное таким образом семейство множеств $\mathbf{C}^\#$ является цепью; проверку этого факта мы оставляем читателю. Эта цепь «порождает» в $\langle \mathbf{L}, \subseteq \rangle$ следующую цепь логик:

$$\mathbf{L}[\mathbf{C}^\#] = \{L(I) : I \in \mathbf{C}^\#\}.$$

Цепь логик $\mathbf{L}[\mathbf{C}^\#]$, хоть и содержит в себе непрерывную цепь логик $\mathbf{L}[\mathbf{C}^*]$, сама является «всюду разрывной», или *слабоатомной*, т. е. для любых логик $L_1, L_2 \in \mathbf{L}[\mathbf{C}^\#]$ таких, что $L_1 \subset L_2$, существуют логики $L', L'' \in \mathbf{L}[\mathbf{C}^\#]$ такие, что

$$L_1 \subseteq L' \subset L'' \subseteq L_2,$$

причем в цепи логик $\mathbf{L}[\mathbf{C}^\#]$ не существует логики L''' такой, что $L' \subset L''' \subset L''$, т. е. логика L' является непосредственным предшественником логики L'' в цепи $\mathbf{L}[\mathbf{C}^\#]$. Действительно, если $L_1 = L(I)$, $L_2 = L(J)$ для некоторых $I, J \in \mathbf{C}^\#$, то в качестве L' и L'' можно взять соответственно логики $L(C_l(n))$ и $L(C_r(n))$, где n — произвольный элемент из множества $J \setminus I$. Следовательно,

если существует бесконечное множество формул, независимое над логикой L относительно множества правил R , то в совокупности расширений логики L существует континуум слабоатомных континуальных цепей, содержащих в себе непрерывные континуальные цепи, состоящие из логик, замкнутых относительно R .

Отметим, что логика $L(C_l(n))$ является непосредственным предшественником логики $L(C_r(n))$ не только в цепи $\mathbf{L}[\mathbf{C}^\#]$, но и в решетке $\langle \mathbf{L}, \subseteq \rangle$, поскольку $C_r(n) \setminus C_l(n) = \{n\}$, поэтому мы получаем, что в решетке $\langle \mathbf{L}, \subseteq \rangle$ существуют *максимальные слабоатомные континуальные цепи*, содержащие в себе континуальные непрерывные цепи логик.

Если же говорить о решетке расширений логики L вообще, то в ней между логиками $L(C_l(n))$ и $L(C_r(n))$ цепи $\mathbf{L}[\mathbf{C}^\#]$, вообще говоря, могут быть другие логики (не принадлежащие множеству $\mathbf{L}$), так как вся решетка расширений логики L , замкнутых относительно правил из R , может и не совпадать с решеткой $\langle \mathbf{L}, \subseteq \rangle$. Тем не менее в случае, когда множество правил R содержит только финитарные⁷ правила, любая максимальная цепь в решетке расширений логики L является слабоатомной. Покажем это.

Пусть $\mathbf{X} = \{L_\alpha : \alpha \in X\}$ — максимальная цепь логик, являющихся расширениями L и замкнутых относительно правил

⁷То есть такие, множество посылок которых конечно.

из R , где X — индексное множество; пусть при этом R содержит только финитарные правила. Пусть L_α и L_β — две логики из этой цепи такие, что $L_\alpha \subset L_\beta$. Покажем, что в $\mathbf{X}$ существуют логики L' и L'' такие, что

$$L_\alpha \subseteq L' \subset L'' \subseteq L_\beta,$$

причем не существует логики $L''' \in \mathbf{X}$ такой, что $L' \subset L''' \subset L''$.

Из того, что $L_\alpha \subset L_\beta$, получаем, что существует формула $\varphi \in L_\beta \setminus L_\alpha$. Пусть

$$L' = \bigcup_{\substack{\gamma \in X \\ \varphi \notin L_\gamma}} L_\gamma, \quad L'' = \bigcap_{\substack{\sigma \in X \\ \varphi \in L_\sigma}} L_\sigma.$$

Множество L'' является логикой, замкнутой относительно правил из R , так как L'' — пересечение логик, замкнутых относительно правил из R . Что касается L' , то L' — тоже логика, поскольку она является объединением логик некоторой цепи, причём она тоже замкнута относительно правил из R , так как, во-первых, она получена объединением логик, замкнутых относительно правил из R , а во-вторых, в силу того, что R содержит только финитарные правила. Действительно, предположим, что ψ принадлежит замыканию L' по правилам из R . Тогда, в силу финитарности правил вывода, в выводе формулы ψ используется лишь конечное множество формул. Пусть L_γ — наименьшая логика цепи $\mathbf{X}$, которой принадлежат все эти формулы; тогда $\psi \in L_\gamma$, а следовательно, $\psi \in L'$.

Из определения логик L' и L'' получаем, что $L' \subseteq L''$. Кроме того, $\varphi \in L''$, $\varphi \notin L'$, поэтому $L' \subset L''$. Теперь заметим, что для всякого $\delta \in X$ либо $\varphi \notin L_\delta$, и тогда $L_\delta \subseteq L'$, либо $\varphi \in L_\delta$, и тогда $L'' \subseteq L_\delta$. Таким образом, каждая логика цепи $\mathbf{X}$ либо содержится в L' , либо содержит L'' , а значит, в цепи $\mathbf{X}$ нет логик, находящихся строго между L' и L'' . Осталось заметить, что если L' и L'' добавить к цепи $\mathbf{X}$, то мы снова получим цепь; в силу максимальности цепи $\mathbf{X}$ это означает, что $L', L'' \in \mathbf{X}$. Таким образом, цепь $\mathbf{X}$ является слабоатомной. Итак,

если существует бесконечное множество формул, независимое над логикой L относительно множества фини-

тарных правил R , то в совокупности расширений логики L существует континуум максимальных слабоатомных континуальных цепей, содержащих в себе непрерывные континуальные цепи, состоящие из логик, замкнутых относительно R . Кроме того, всякая максимальная цепь, состоящая из расширений логики L , замкнутых относительно R , является слабоатомной.

На этом мы закончим перечисление следствий, возникающих в результате использования независимых множеств формул; при этом еще раз обратим внимание читателя на то, что континуальные семейства логик — цепи, антицепи, — обладающие описанными выше свойствами, существуют в расширениях почти всех «стандартных» неклассических логик — **Int**, **K**, **K4**, **GL** и др., — так как для каждой из этих логик существует независимое над ней множество формул.

Перейдем к вопросам, которые мы хотели сформулировать, учитывая перечисленные выше утверждения о континуальных семействах логик.

8 Вопросы

ПРОБЛЕМА 1. Существует ли логика (эквациональная теория, квазиэквациональная теория), множество расширений которой континуально и не содержит континуальных антицепей по включению?

ПРОБЛЕМА 2. Существует ли логика (эквациональная теория, квазиэквациональная теория), множество расширений которой континуально и не содержит континуальных цепей по включению?

ПРОБЛЕМА 3. Существует ли логика (эквациональная теория, квазиэквациональная теория), множество расширений которой содержит максимальные континуальные непрерывные цепи по включению?

Литература

- [1] Гретцер Г. Общая теория решёток. М., Мир, 1982.
- [2] Chagrov A., Zakhar'yashev M. Modal Logic. Oxford University Press, 1997.

Поиск натурального вывода в системах негативной силлогистики

А. В. КРАСНЕНКОВА

ABSTRACT. The paper presents an algorithm, dealing with process of natural deduction in the systems of negative syllogistic of different styles, i.e. Aristotelian, fundamental, traditional, etc. The rules of inference in a system under investigation are defined by the user. Thus the algorithm can be considered as a synthesis of so called proof checkers and automatic systems of natural deduction. Such an approach allows using genetic method to make the proposed algorithm applicable to a wide class of formal syllogistics.

В данной работе дается описание алгоритма, осуществляющего автоматический поиск выводов и доказательств в натуральных системах негативной силлогистики (НС), базирующихся на аксиоматических силлогистических системах, построенных В.А. Бочаровым и В.И. Маркиным, и вместе с тем приводится генетическое описание процесса автоматического поиска доказательств.

Построенный алгоритм является своего рода синтезом алгоритмов, приведенных в [1] и [2].

Если обобщить все используемые алгоритмом системы, то язык, с которым он работает, можно сформулировать следующим образом:

1. $S, P, M, Q, S_1, P_1, M_1, Q_1, S_2 \dots$ — список индивидуальных силлогистических переменных общего типа.
2. a, e, i, o — логические(силлогистические) константы.
3. $\&, \vee, \supset, \neg$ — логические(пропозициональные) константы.
4. $\sim$ — логическая (силлогистическая) константа.
5. $(,)$ — технические символы.

Будем использовать в качестве метапеременных, пробегающих по множеству индивидуальных силлогистических переменных общего типа, бесконечный список вида $X, Y, Z, X_1, Y_1, Z_1, X_2, \dots$

Будем использовать в качестве метапеременных, пробегающих по множеству силлогистических формул, бесконечный список вида $A, B, C, A_1, B_1, C_1, A_2, \dots$

Эту же символику предполагается использовать для записи правил вывода той или иной силлогистической системы, предназначенной для нашего алгоритма.

Теперь введем понятие *силлогистического термина* и *силлогистической формулы* для допустимых силлогистических систем.

1. Любая индивидуальная силлогистическая переменная общего типа есть силлогистический терм.
2. Если X — силлогистический терм, то $\sim X$ — силлогистический терм.
3. Ничто иное не есть силлогистический терм.

Понятие *силлогистической формулы*.

1. Если X — терм и Y — терм, то XaY, XeY, XiY, XoY — силлогистические формулы.
2. Если A — силлогистическая формула, то $\neg A$ — силлогистическая формула.
3. Если A, B — силлогистические формулы, то $A \& B, A \vee B, A \supset B$ — силлогистические формулы.
4. Ничто иное не является силлогистической формулой.

Формулы, задаваемые пунктом 1, называются простыми силлогистическими формулами; формулы, определяемые пунктами 2–3, договоримся называть сложными, или пропозициональными, формулами.

Внешние формульные скобки договоримся опускать.

На настоящий момент алгоритм может работать в таких системах негативной силлогистики, как традиционная негативная силлогистика, фундаментальная негативная силлогистика, негативная силлогистика Аристотеля, Больцано и Кэрролла. Также

ведутся исследования по работе алгоритма в сингулярных негативных силлогистиках оккамовского и аристотелевского типов.

1 Общая характеристика алгоритма

На мой взгляд, значимым фактом является то, что правила поиска вывода практически не отличаются от правил вывода в исследуемых натуральных силлогистических исчислениях. Это экономящее время работы алгоритма и делающее его более компактным отличие основано на значительном сокращении множества меток. Метки, введенные и используемые в [2], не применяются. Таким образом, у нас в качестве меток используется конечное подмножество множества целых чисел, а также метка «-», которая применяется при «вычерпывании» из множества формул вывода только тех формул, которые необходимы и достаточны для вывода или доказательства.

Алгоритм принципиально строится как открытая система, к которой пользователь может приложить потенциально бесконечное множество текстовых пакетов, содержащих иные силлогистические правила вывода. К данным пакетам предъявляется только одно требование: все они должны быть написаны на указанном выше стандартном формализованном языке, чтобы алгоритм смог их прочесть и начать корректную работу в предложенных ему дедуктивных системах. Помимо открытого уровня дедуктивных правил в нашем алгоритме существует еще один открытый уровень — уровень сложности используемых программой эвристик.

Эвристики позволяют «просеивать» формулы, создающие пространства состояний, и «высаживать» в поисковое поле программы только полезные, «творческие» формулы, отбрасывая те, которые «прорастут сорняками», т.е. формулы лишние и тормозящие работу компьютера.

Разъясним данное утверждение. Если у нас в произвольной системе есть правило, которое позволяет наращивать термную сложность заключения по сравнению с термной сложностью посылок, то такое правило позволяет строить потенциально бесконечные объекты, если его ничем не ограничить сверху. Например, возьмем правила $XaY \vdash Xe \sim Y$ и $XY \vdash X \sim Y$ и посылку SaM . С помощью этих правил получаем такой ряд

конструктивных объектов: $Se \sim M$, $S \sim\sim M$, $Se \sim\sim\sim M$, $Sa \sim\sim\sim\sim M$ и т. п. Очевидно, что данный ряд стремится к бесконечности и делает невозможной работу любого алгоритма. Помня о том, что не следует умножать сущности без необходимости, мы можем ввести следующее аналитическое ограничение на объекты такого вида: глубина данных объектов не должна превышать некоторого заданного значения специальной переменной. Обозначим указанную специальную переменную как n . Она может принимать значения от 0 до k , $k \in N$. Тогда нулевое значение переменной n будет означать самое простое, минимальное пространство состояний, на котором проводится поиск вывода или доказательства (или соответственно, опровержения некорректной формулы); на правила построения конструктивных объектов указанного типа налагается запрет. При $n = 1$ данное пространство состояний расширяется и в него включаются формулы первого уровня повышенной термной сложности (т.е. формулы, полученные в результате однократного применения таких конструктивных правил и содержащие не более 1 символа термного отрицания). При $n = 2$ поисковое пространство состояний расширяется еще больше, и теперь допускается использование формул второго уровня термной сложности. Вообще, при $n = k$ в зону поиска включаются формулы k -ого уровня сложности, построенные с помощью правил описанного выше типа. В программной реализации алгоритма пользователю автоматически предлагаются эвристики уровня 0–2 в виде флажков выбора. Если данных эвристик недостаточно, пользователь может сам задать эвристику необходимого термного уровня сложности. В принципе, можно индуктивно доказать лемму о том, что максимальная термная сложность, необходимая и достаточная для вывода, доказательства или опровержения формулы, будет равна $m + k$, где m — максимальное количество термных отрицаний у некоторого терма, входящего в состав исследуемой формулы, а k — соответственно количество термных отрицаний в заключении того из правил вывода, повышающих термную сложность формулы, которое имеет наибольшее число термных отрицаний.

Использование данных эвристических приемов позволяет существенно уменьшить перебор на поисковом пространстве со-

стояний и тем самым значительно повысить эффективность программы. Обработка правил вывода системы, введенных пользователем в текстовый редактор — Блокнот или MS Word, — происходит согласно концепции В.А. Смирнова. Это означает, что правила вывода той или иной системы делятся на *аналитические* и *синтетические*. Напомним, что аналитические правила вывода конструируют вспомогательные подвыводы на базе основного вывода, а синтетические правила позволяют добавлять в основной вывод новые формулы, и таким образом данные правила осуществляют синтез. Данное деление происходит по следующей схеме: в группу аналитических правил автоматически заносятся правила, в которых *пропозициональная* сложность посылок выше или равна пропозициональной сложности заключения, а в группу синтетических правил, — наоборот, те правила, где пропозициональная сложность заключения выше пропозициональной сложности посылок.

Раскроем понятие пропозициональной сложности формулы, так как оно несколько отличается от общепринятого. Похожая трактовка приведена в [3].

Обозначим функцию оценки пропозициональной сложности произвольной силлогистической формулы буквой φ . Пусть ее аргументами будут произвольные формулы, а значениями — элементы множества рациональных чисел.

Определим данную функцию индуктивно:

1. $\varphi(A) = 0$, где A — произвольная простая силлогистическая формула любой степени силлогистической сложности.
2. $\varphi(\neg A) = \varphi(A) + 0,5$;
3. $\varphi(A \supset B) = \varphi(A \& B) = \varphi(A) + \varphi(B) + 1$;
4. $\varphi(A \vee B) = \varphi(A) + \varphi(B) + 1,5$.

Определим отношение порядка $<$ на множестве формул. Для этого введем функцию Trunc (от англ. truncate — «срезать верхушку», «усекать»), находящую целую часть от аргумента, которая от любого числа с дробным «хвостом» оставляет только целую часть.

Итак, $A < B \Leftrightarrow \text{Trunc}(\varphi(A)) < \text{Trunc}(\varphi(B))$, где A и B — произвольные формулы.

Например, оценим при помощи введенных функций пропозициональное правило вывода $\neg(A \vee B) \vdash A \& B$. $[Trunc(\varphi(\neg(A \vee B))) = Trunc(\varphi(A \vee B) + 0, 5) = Trunc(\varphi(A) + \varphi(B) + 1, 5 + 0, 5) = Trunc(0 + 0 + 1, 5 + 0, 5) = Trunc(2) = 2] = [Trunc(\varphi(\neg A \& \neg B)) = Trunc(\varphi(\neg A) + \varphi(\neg B) + 1) = Trunc(\varphi(A) + \varphi(B) + 0, 5 + 0, 5 + 1) = Trunc(0 + 0 + 0, 5 + 0, 5 + 1) = Trunc(2) = 2]$. Следовательно, согласно введенному нами критерию, это правило алгоритма включается в группу аналитических правил вывода. Рассмотрим еще один пример — правило $XaY \vdash \neg XoY$. $[Trunc(\varphi(XaY)) = Trunc(0) = 0] = [Trunc(\varphi(\neg XoY)) = Trunc(\varphi(XoY) + 0, 5) = Trunc(0 + 0, 5) = Trunc(0, 5) = 0]$. Таким образом, данное правило тоже оценивается алгоритмом как аналитическое, что позволяет сохранить логику «естественного» вывода, а также избежать введения лишних целей.

Теперь введем функцию оценки термной сложности произвольной силлогистической формулы. Данная функция понадобится нам для использования специальных эвристик, о которых будет сказано ниже. Обозначим указанную функцию через ψ .

Определим ее индуктивно:

1. $\psi(X \circ Y) = 0$, где X, Y — простые силлогистические термы, $\circ$ — одна из допустимых силлогистических констант;
2. $\psi(\alpha \circ \sim \beta) = \psi(\alpha \circ \beta) + 1$, где α, β — произвольные силлогистические термы;
3. $\psi(\neg \alpha \circ \beta) = \psi(\alpha \circ \beta) + 1$;
4. $\psi(\neg A) = \psi(A)$, где A — произвольная силлогистическая формула;
5. $\psi(A \& B) = \psi(A \supset B) = \psi(A \vee B) = \psi(A) + \psi(B)$, где A и B — произвольные силлогистические формулы.

Для примера оценим при помощи функции ψ формулу $Sa \sim \sim P$. $\psi(Sa \sim \sim P) = \psi(Sa \sim P) + 1 = \psi(SaP) + 1 + 1 = 0 + 1 + 1 = 2$.

После разделения правил на аналитические и синтетические с помощью функции φ , оценивающей пропозициональную сложность формулы, алгоритм проводит дополнительный анализ правил внутри группы синтетических и аналитических правил вывода (далее сокращенно — п.в.). Данный анализ необходим для корректного поиска выводов и доказательств.

Суть его для синтетических п.в. состоит в следующем: синтетические правила вывода дополнительно подразделяются на прямые и не прямые. Делается это чисто формальным способом: алгоритм «смотрит», входит ли в заключение правила подформула C , которая заранее, до начала работы алгоритма, является условным обозначением подформулы, входящей только в не прямые правила вывода. Пользователь может по своему желанию переопределить символические обозначения для выражений подобного рода.

Все правила вывода, не имеющие подформулы C , автоматически классифицируются как прямые правила вывода.

Аналитические правила вывода, в свою очередь, делятся на правила вывода с посылками и беспосылочные правила вывода (беспосылочным, к примеру, является правило вывода $\vdash XaX$).

Затем алгоритм формирует две последовательности формул — *стек целей* и *стек вывода*, на которых базируется вся дальнейшая работа.

Стек вывода (далее СВ) представляет собой натуральный вывод в той или иной допустимой силлогистической системе. Здесь следует указать, что полученный таким образом вывод является избыточным, т.е. ряд применений правил НС (в особенности это касается так называемых силлогистических правил, т.е. правил, работающих с внутренней структурой элементарных, или простых, формул) является лишним, порождая неиспользуемые в процессе дедукции формулы. Такая ситуация возникает в силу того, что алгоритм должен рассмотреть все допустимые варианты для получения максимально точного и корректного результата.

Контроль над построением вывода и связанных с ним подвыводов осуществляется стеком целей. *Стек целей* (далее СЦ) строится благодаря синтетическим правилам поиска вывода. Цель, стоящая первой в стеке целей, называется главной целью, а остальные — вспомогательными. Главная цель представляет собой формулу, которую требуется вывести или доказать. В последнем случае формула называется теоремой рассматриваемой системы. Цель, обрабатываемая алгоритмом в некоторый момент программного

времени, называется текущей. Главная цель тоже может быть текущей.

2 Алгоритмические процедуры

Процедура 1, или процедура достижимости

Проверяет достижимость текущей цели. Если текущая цель является формулой, то для того чтобы считать ее достигнутой, необходимо, чтобы некоторая неисключенная формула из стека вывода графически совпадала с ней. Если текущая цель является противоречием, то с ней работает процедура 2, или процедура унификации.

Процедура 2, или процедура унификации

Работает с текущей целью, содержащей метапеременные. Процедура 2 пытается найти формулу или кортеж формул, являющийся результатом правильной подстановки в выражение, содержащее метапеременные. Например, когда текущей целью является противоречие, записываемое как « $\neg B, B$ », процедура 2 ищет в СВ пары формул, являющиеся результатом правильной подстановки в « $\neg B, B$ », например $\langle \neg SaP, SaP \rangle$. В случае неудачи процедура 2 возвращает пустой кортеж.

Процедура 3, или процедура применения беспосылочных аналитических правил вывода

Процедура 3 применяет беспосылочные правила вывода, последовательно подставляя все простые термы обосновываемой выводимости или теоремы в беспосылочные правила и добавляя полученные формулы в СВ. Например, применяя правило $\vdash a$ к теореме $\vdash SaP \supset Se \sim P$ в системе традиционной негативной силлогистики, мы добавляем в СВ формулы SaS и PaP .

Чтобы избежать вхождения в цикл, каждый терм используется ровно один раз. Контроль за использованием термов осуществляется с помощью специально введенной строки термов, из которой термы вычеркиваются по мере их обработки. Когда строка становится пустой, действие процедуры 3 заканчивается.

Процедура 4, или процедура применения аналитических правил с посылками

Заключается в последовательном применении всех аналитических правил, имеющих посылки, ко всем неисключенным формулам СВ. Чтобы избежать образования циклов, вводится спе-

циальный счетчик, который запрещает добавлять более одного раза ту же самую формулу в СВ. После каждой серии применения данной группы аналитических правил вычисляется приращение числа формул СВ. Когда это приращение становится равным 0, работа процедуры 4 завершается.

Здесь также действуют описанные выше эвристики допустимого уровня сложности формулы. Когда при помощи функции ψ алгоритм обнаружил правило, попадающее в зону действия этих эвристик, то он оценивает результат применения данного правила посредством функции ψ , и если ее значение превышает допустимое целочисленное значение для заданного пользователем типа эвристик, то полученная формула удаляется. Если формула, полученная по произвольному аналитическому п.в., добавляется в СВ, то номер этого правила записывается в специальную аналитическую строку *Static*, с помощью которой идет построение результирующего вывода.

Процедура 5, или процедура порождения новых целей с помощью синтетических правил вывода

Данная процедура строит новые цели меньшей степени пропозициональной сложности, чем формулы-цели, предшествующие ей. Процедура 5 начинает свою работу, когда главная цель — теорема или формула, которую необходимо вывести из посылок, — не достижима непосредственно, при помощи процедур 3 и 4. Процедура 5 меняет местами посылки и заключение в синтетических п.в. и затем пытается последовательно применить данные «обращенные» правила к текущей цели. Если некоторое синтетическое п.в. оказалось применимо к текущей цели, то результат его применения, являющийся либо формулой, либо кортежем формул, либо записью с метатермами, добавляется в СЦ, а на рассматриваемую цель ставится метка с номером примененного синтетического п.в.

Использование меток — целых чисел — необходимо, чтобы вести контроль за полным и последовательным применением данной группы п.в.

Если алгоритм идентифицировал применяемое правило как не прямое, то дополнительно в СВ добавляется подформула текущей цели, которая соответствует метатерму *C* непрямого правила (о данном метатерме говорилось выше). *C* добавленной в

СВ подформулой ассоциируется некоторый объект (термин из языка программирования), чтобы обеспечить корректную субординацию главного вывода и всех его подвыводов.

После каждого применения процедуры 5 применяется процедура 1 для проверки достижимости новой текущей цели. Если она оказывается достигнутой, то происходит обрыв работы процедуры 5; в противном случае процедура продолжает анализ СЦ. В случае применения непрямого п.в., когда в СВ, по сути, начинается построение нового подвывода, в действие включается также процедура 4.

Анализ СЦ, в случае недостижимости текущей цели, осуществляется процедурой 5 до тех пор, пока новой текущей целью не станет выражение, содержащее метатермы.

Процедура 6, или процедура построения новых целей по формулам СВ

Процедура 6 формирует новые вспомогательные цели на базе формул СВ и аналитических правил вывода с количеством посылок, превосходящим или равным 2 (обычно это правила исключения импликации и дизъюнкции). Процедура 6 включается в работу, когда процедура 5 естественным образом остановилась. Последняя цель, полученная данной процедурой, фиксируется алгоритмом. Сам алгоритм не ставит на нее никакой метки, но мы для удобства изложения обозначим ее знаком $\oplus$. Значок $\oplus$ разделяет цели, полученные по «обращенным» синтетическим правилам вывода, и цели, добавленные в СЦ с помощью аналитических правил вывода. Данное разделение необходимо для корректной работы алгоритма.

Процедура 6 просматривает аналитические правила вывода и, как я уже упоминала, отбирает те из них, где число посылок равно или больше 2. Затем при помощи функции φ данная процедура выбирает посылку наименьшей пропозициональной сложности и делает ее новой текущей целью (например, при работе с правилом исключения дизъюнкции вида $A \vee B, \neg A \vdash B$ такой целью становится формула $\neg A$).

Если на основе исследуемого аналитического правила можно сформировать несколько новых целей, то данные цели рассматриваются последовательно, по мере необходимости (например, если с помощью первой цели мы не достигли желаемого резуль-

тата, то мы добавляем в СЦ вторую по счету цель и т.п.). Каждая добавляемая в СЦ цель тестируется специальными счетчиками: она не должна находиться в СЦ ниже $\oplus$, а также не должна находиться в СВ, даже будучи исключенной. Указанные ограничения помогают избежать лишних циклов при работе алгоритма. Данные действия производятся алгоритмом до тех пор, пока приращение формул СВ не станет нулевым.

Если в процедуру 6 поступил сигнал о том, что текущая цель достигнута, происходит остановка ее работы.

Если же в результате работы процедуры 6 мы получили пустой кортеж формул или перебор новых целей, полученных с помощью аналитических правил вывода, не дал результата, то процедура 6 естественным образом заканчивает свою работу.

Процедура 7, или процедура работы с достигнутыми целями

Процедура 7 оперирует с достигнутыми целями СЦ.

Если текущая цель является формулой, то алгоритм анализирует крайнюю правую метку, стоящую на данной цели. Если эта метка является номером прямого синтетического правила вывода, то формула освобождается от меток и добавляется в СВ; параллельно она удаляется из СЦ, и алгоритм переходит к следующей цели. Если же указанная метка является номером непрямого синтетического п.в., то к текущей цели применяется данное п.в. так, как мы привыкли при «естественном» построении вывода. Здесь играют важную роль *объекты*, ассоциированные с посылками, полученными по непрямым п.в. Когда в программу поступает сигнал о необходимости применения непрямого правила вывода, то процедура 7 находит в СВ среди формул, которым сопоставлен объект, формулу с максимальным номером, разрушает связанный с ней объект, отмечает вертикальной чертой как заблокированные все формулы, начиная с указанной и заканчивая последней в СВ, а затем добавляет в СВ результат применения данного непрямого правила. Текущая цель удаляется из СЦ, и алгоритм обрабатывает новую текущую цель.

Если текущая цель является кортежем формул, то из данного списка удаляется первый элемент, а следующий за ним элемент объявляется новой текущей целью, к которой применяется процедура достижимости. Если она выдала положительный резуль-

тат, то дальше процедура 7 работает согласно описанной выше схеме. В противном случае происходит выход из процедуры 7.

Если текущая цель является противоречием, то применяется процедура унификации. Если данная процедура на выходе дала непустой кортеж формул, то цель считается достигнутой. После чего данная цель удаляется из СЦ, и алгоритм приступает к работе со следующей целью.

Во всех случаях, когда происходит пополнение СВ новыми формулами, в специальную строку *Static* записываются номера примененных синтетических п.в., для того чтобы обеспечить корректное построение результирующего вывода.

Если алгоритм добавил в СВ главную цель и СЦ представляет собой пустой список, то теорема объявляется доказанной (выводимость обоснованной), и программа переходит к построению результирующего вывода.

Процедура 8, или процедура работы с недостигнутыми целями

Процедура 8 начинает свою работу, когда текущая цель считается недостигнутой алгоритмом. Если текущая цель является противоречием, то она сразу же удаляется из СЦ. При этом происходит удаление из СВ связанного с ней подвывода, т.е. всех формул, начиная с первой с конца формулы СВ, которой сопоставлен некоторый объект (т.е. начиная с последнего допущения в выводе), и заканчивая последней формулой СВ. При этом связанный с указанным допущением объект разрушается. Из *Static* вычеркиваются номера всех удаленных формул. Происходит переход к следующей цели.

Если текущая цель является кортежем формул, то она удаляется из СЦ. Алгоритм переходит к следующей цели.

Если текущая цель является формулой, то алгоритм работает следующим образом. Если данная формула была получена по непрямому п.в., то из СВ удаляется связанный с ним подвывод по схеме, описанной выше. Если нет, то алгоритм с помощью меток, стоящих на формуле-цели, проверяет, все ли синтетические п.в. были применены к ней. Если не все, то происходит обрыв работы процедуры 8 (алгоритм попытается получить данную цель по другим синтетическим п.в.). Если же к данной цели были применены все допустимые синтетические правила вывода, то

текущая цель удаляется из СЦ. Происходит переход к следующей цели.

В общем, процедура 8 тестирует все возможные варианты получения некоторой цели (обычно при работе со сложными дизъюнктивными целями), строя, таким образом, древовидную структуру целей. Тупиковые ветви удаляются из СЦ и СВ.

Если алгоритм удалил главную цель, то формула объявляется опровергнутой. Происходит выход из алгоритма.

Процедура 9, или процедура построения результирующего вывода

Процедура 9 строит результирующий вывод из исходного по методу, напоминающему работу в секвенциальных исчислениях. Вначале процедура 9 помечает меткой «-» последнюю формулу СЦ. Затем она выбирает из *Static* соответствующее ей число (т.е. номер правила, по которому она была получена; заметим, что между элементами *Static* и формулами СЦ существует взаимнооднозначное соответствие), находит по нему синтетическое п.в., «обращает» его и применяет к отмеченной формуле.

На выходе мы получаем либо кортеж формул, либо кортеж выражений с метапеременными.

В первом случае алгоритм поэлементно анализирует кортеж и отмечает знаком «-» формулы СВ, эквиморфные исследуемому элементу.

Во втором случае алгоритм применяет процедуру унификации. Если процедура унификации, в свою очередь, на выходе предложила несколько вариантов кортежей формул (т.е. данный переход в выводе может быть осуществлен несколькими способами), то алгоритм выбирает из них самый экономный, т.е. такой, элементы которого имеют самые маленькие номера и наименьшую структурную сложность.

Далее выбранный кортеж (или, если полученный кортеж изначально единственный, то он не подвергается процедуре отбора) обрабатывается описанным выше способом.

Процедура 9 прорабатывает все «-»-отмеченные формулы до тех пор, пока они не закончатся.

Затем отмеченные формулы отбираются, с них снимаются метки «-», а полученной последовательности формул сопостав-

ляется анализ, и данная формульная последовательность с анализом объявляется результирующим выводом.

Заметим, что у нас не может возникнуть такой ситуации, когда «обращенное» п.в. или процедура унификации дала на выходе пустую строку, или какой-либо элемент кортежа не был найден в СВ, так как в *Static* были записаны только номера реально примененных к формулам СВ правил, заключения которых были добавлены в СВ (сам смысл записи в *Static* говорит о том, что некоторая формула, полученная по некоторому п.в., была добавлена в СВ). Посылки же и допущения записываются в *Static* под нулевым номером.

Справедливость указанного факта можно доказать методом возвратной математической индукции.

3 Общее описание алгоритма

Сначала алгоритм сортирует, как уже было сказано выше, выбранные или введенные пользователем правила вывода. Затем он формирует **стек вывода** и **стек целей** и формулу, стоящую справа от знака выводимости $\vdash$, добавляет в СЦ. Если слева от знака выводимости $\vdash$ находится последовательность формул (т.е. у нас имеется не доказательство теоремы, а выводимость), то алгоритм добавляет каждую посылку в СВ.

Также алгоритм фиксирует выбранную пользователем эвристику допустимого уровня термной сложности формул. По умолчанию используется эвристика минимального уровня сложности.

- I. Затем применяется процедура 1, или процедура достижения. Если она дала положительный результат, то переход к VIII.
- II. Если результат применения процедуры 1 отрицательный, то применяется процедура 3. После применения данной процедуры начинает вновь действовать процедура 1. Переход к I. Процедура 3 работает до тех пор, либо пока текущая цель не будет достигнута, либо пока она естественным образом не остановится (т.е. мы больше не можем применять данную процедуру). В последнем случае переход к III.

- III. Применяется процедура 4. После естественного окончания ее работы осуществляется переход к I. Как уже было сказано выше, процедура 4 в случае недостижимости текущей цели работает до тех пор, пока приращение числа формул СВ не станет равным нулю. В этом случае осуществляется переход к IV.
- IV. В действие вступает процедура 5. Как мы уже упоминали, после каждого ее применения осуществляется переход к I, а в случае, когда она добавляет в СВ посылку нового подвывода по непрямому п.в., алгоритм переходит к III. В случае недостижимости текущей цели процедура 5 работает до тех пор, пока текущей целью не станет противоречие. Тогда алгоритм переходит к V.
- V. Применяется процедура 2. Если процедура 2 обнаружила в СВ противоречие, то переход к VIII. В противном случае переход к VI.
- VI. Начинает свою работу процедура 6 так, как было описано выше. После каждого пополнения СЦ алгоритм переходит к IV. Если текущая цель не достигнута, то процедура 6 применяется до тех пор, пока все возможные варианты новых целей не будут исчерпаны. Тогда осуществляется переход к VII.
- VII. В действие включается процедура 8. Как мы уже говорили, если к цели, имеющей вид формулы, были применены не все допустимые правила, то алгоритм переходит к IV. В противном случае она работает до тех пор, пока либо не найдет конструктивную ветвь построения вывода (доказательства), либо пока не удалит главную цель из СЦ. Тогда процедура 8 прекращает свою работу, а алгоритм объявляет теорему не доказуемой или выводимость необоснованной.
- VIII. В данном пункте описывается действие процедуры 7. Когда текущая цель является формулой, то она автоматически считается достигнутой, и она либо просто добавляется

в СВ, либо сначала применяется соответствующее п.в., после чего происходит добавление данной формулы в СВ (об условиях данного разделения см. выше).

Напомним, что после каждого пополнения СВ осуществляется переход к III.

В случае наличия цели-противоречия алгоритм переходит к V. Когда цель является кортежем формул, то новой целью становится его первый элемент и осуществляется переход к I.

Если применение процедуры 7 зашло в тупик (она не может больше применяться, а главная цель не достигнута), то алгоритм переходит к IV. Когда алгоритм обнаружил, что главная цель является достигнутой, то он переходит к IX.

IX. Применяется процедура 9 так, как мы описали выше.

На этом краткое описание алгоритма завершено.

4 Пример работы алгоритма

Докажем теорему $\vdash ((SaM \vee \neg SiS) \& (MaP \vee \neg MiM)) > (Se \sim P \vee \neg SiS)$ в системе негативной силлогистики Больцано.

Ниже курсивом выделены номера правил, которые алгоритм отсортировал как *синтетические*, а полужирным курсивом — как *синтетические не прямые* правила. Остальные правила являются *аналитическими*.

Вместо импликации будем использовать знак $>$.

Итак, пусть правилами вывода в этой системе будут:

- | | |
|--|----------------------------|
| 1. $B \vdash C > B,$ | 10. $\neg\neg A \vdash A,$ |
| 2. $A \vdash A \vee B,$ | 11. $XeY \vdash \neg XiY,$ |
| 3. $B \vdash A \vee B,$ | 12. $XeY \vdash XiX,$ |
| 4. $A \& B \vdash A,$ | 13. $XoY \vdash \neg XaY,$ |
| 5. $A \& B \vdash B,$ | 14. $XoY \vdash XiX,$ |
| 6. $A, B \vdash A \& B,$ | 15. $XiY \vdash XaX,$ |
| 7. $A \vee B, \neg A \vdash B,$ | 16. $XaY \vdash XiY,$ |
| 8. $A > B, A \vdash B,$ | 17. $XiY \vdash YiX,$ |
| 9. $\neg(A \vee B) \vdash \neg A \& \neg B,$ | 18. $XeY \vdash YeX,$ |

- | | |
|----------------------------------|---------------------------------|
| 19. $XaY \vdash Xe \sim Y,$ | 26. $\neg XeY, XiX \vdash XiY,$ |
| 20. $Xe \sim Y \vdash XaY,$ | 27. $\neg XoY, XiX \vdash XaY,$ |
| 21. $Xa \sim \sim Y \vdash XaY,$ | 28. $\neg XiY, XiX \vdash XeY,$ |
| 22. $Xo \sim \sim Y \vdash XoY,$ | 29. $\neg XaY, XiX \vdash XoY,$ |
| 23. $Xe \sim \sim Y \vdash XeY,$ | 30. $XaZ, ZaY \vdash XaY,$ |
| 24. $Xi \sim \sim Y \vdash XiY,$ | 31. $XaZ, ZeY \vdash XeY,$ |
| 25. $\neg B, B \vdash \neg C,$ | 32. $Xi \sim Y \vdash XoY.$ |

Выберем эвристику нулевого уровня сложности (от выбранной эвристики зависит количество шагов вывода и время работы программы).

Вот что на выходе нам выдала программа:

- | | | |
|-----|------------------------------------|--|
| 1. | $(SaM \vee \neg SiS) \&$ | |
| | $(MaP \vee \neg MiM)$ | Assump. |
| 2. | $SaM \vee \neg SiS$ | $A \& B \vdash A, 1$ |
| 3. | $MaP \vee \neg MiM$ | $A \& B \vdash B, 1$ |
| 4. | $\neg (Se \sim P \vdash \neg SiS)$ | Assump. |
| 5. | $\neg Se \sim P \& \neg \neg SiS$ | $\neg (A \vee B) \vdash \neg A \& \neg B, 4$ |
| 6. | $\neg Se \sim P$ | $A \& B \vdash A, 5$ |
| 7. | $\neg \neg SiS$ | $A \& B \vdash B, 5$ |
| 8. | SiS | $\neg \neg A \vdash A, 7$ |
| 9. | $Si \sim P$ | $\neg XeY, XiX \vdash XiY, 6, 8$ |
| 10. | SoP | $Xi \sim Y \vdash XoY, 9$ |
| 11. | $\neg SaP$ | $XoY \vdash \neg XaY, 10$ |
| 12. | $\neg \neg SaM$ | Assump. |
| 13. | SaM | $\neg \neg A \vdash A, 12$ |
| 14. | SiM | $XaY \vdash XiY, 13$ |
| 15. | MiS | $XiY \vdash YiX, 14$ |
| 16. | MaM | $XiY \vdash XaX, 15$ |
| 17. | MiM | $XaY \vdash XiY, 16$ |
| 18. | $\neg \neg MaP$ | Assump. |
| 19. | MaP | $\neg \neg A \vdash A, 18$ |
| 20. | SaP | $XaZ, ZaY \vdash XaY, 13, 19$ |
| 21. | $\neg \neg \neg MaP$ | $\neg B, B \vdash \neg C, 11, 20$ |
| 22. | $\neg MaP$ | $\neg \neg A \vdash A, 21$ |
| 23. | $\neg MiM$ | $A \vee B, \neg A \vdash B, 3, 22$ |
| 24. | $\neg \neg \neg SaM$ | $\neg B, B \vdash \neg C, 23, 17$ |

25.	$\neg SaM$	$\neg\neg A \vdash A, 24$
26.	$\neg SiS$	$A \vee B, \neg A \vdash B, 2, 25$
27.	$\neg\neg(Se \sim P \vee \neg SiS)$	$\neg B, B \vdash \neg C, 26, 8$
28.	$Se \sim P \vee \neg SiS$	$\neg\neg A \vdash A, 27$
29.	$((SaM \vee \neg SiS) \&$ $(MaP \vee \neg MiM)) >$ $(Se \sim P \vee \neg SiS)$	$B \vdash C > B, 28$

Сокращение «Assump.» обозначает допущение.

Как видно из анализа вывода, программа построила 4 дополнительных подвывода. Первый подвывод образован посредством «обращенного» правила введения импликации (правило 1 из вышеуказанного списка), соответственно, допущение — это антецедент доказываемой теоремы. Текущей же целью стал ее консеквент. Анализируя вывод, мы замечаем, что алгоритм сумел применить к данному первому допущению только аналитические п.в., отмеченные в списке правил номерами 4 и 5. Затем он попытался доказать первый дизъюнкт консеквента теоремы. Однако, двигаясь в этом направлении, алгоритм зашел в тупик, и поэтому все вспомогательные подцели и подвыводы были удалены из СЦ и СВ. То же самое произошло и при попытке доказать второй дизъюнкт. Поэтому программа взяла в качестве допущения отрицание всей дизъюнкции (в построенном выводе оно — второе допущение). В силу того, что у нас есть правило 9, СВ пополнился формулой, пронумерованной в выводе 5. Из данной конъюнкции мы получили ряд полезных для дальнейшей дедукции формул. Так как без вспомогательных целей текущая цель не могла быть обоснована, алгоритм, используя перестроенное правило 7, ввел две дополнительные цели и, соответственно, две дополнительные посылки — $\neg\neg SaM$ и $\neg\neg MaP$ (третий и четвертый подвыводы). Последовательно применяя аналитические правила 10 и 33, мы получили противоречие — 11-й и 20-й шаги в СВ. Затем алгоритм применил правило введения отрицания (правило 28) и с помощью формул, полученных по аналитическим п.в., в том числе и на более ранних этапах дедукции, завершил и третий подвывод (получив $\neg\neg\neg SaM$). Но у нас в СВ осталось еще две противоречащих друг другу формулы — SiS и $\neg SiS$. Таким образом, мы исключаем второе на-

ше допущение и вскоре переходим к непосредственно введению импликации и достижению главной цели вывода. Теорема объявляется доказанной. Строится результирующий вывод, из СВ удаляются все лишние формулы, а оставшиеся формулы образуют замыкание по отношению зависимости, определенному в [2]. К данным формулам строится анализ, и результат выводится на экран. Время, потраченное на доказательство, — 23,5 сек. Эта длительность работы алгоритма объясняется, во-первых, тем, что алгоритм строится на метауровне, позволяющем описывать разные силлогистики, а потому каждый раз необходимо время на приспособление к выбранной системе, а во-вторых, тем, что в силлогистике имеется большое число правил, которые выдают излишние формулы.

5 О программной реализации

Программа написана на языке Object Pascal (система программирования Delphi). Данная система обладает богатыми программистскими возможностями и обширными динамическими библиотеками программных средств, позволяющими создавать приложения, работающие не только под ОС Windows, но и под ОС Linux, что не может не рассматриваться как положительный момент данной системы программирования.

Программная реализация активно опирается на понятие *генетического алгоритма*.

Под генетическим алгоритмом обычно подразумевается такой алгоритм, который моделирует своеобразный «эволюционный процесс». Делается это следующим образом: сначала вычисляется желательный результат (пусть в нашем случае таким результатом будет текущая цель) и общий критерий останова алгоритма; затем берется некоторое количество исходных формул — «начальная популяция» (в нашем случае это формулы СВ или СЦ, находящиеся в стеке на момент применения «генетической» процедуры). Следует отметить, что формулы СВ и СЦ рассматриваются как знаки некоторых организмов, а цели-противоречия — как знаки отношений, в которых находится определенная группа организмов (например, выражение $\neg B$, B может рассматриваться как кодировка отношения конкуренции).

Из «особей» начальной популяции выбираются только репродуктивные, т.е. способные давать потомство организмы, — в нашем случае алгоритм не задействует заблокированные, или пострепродуктивные формулы.

Репродуктивные «особи» исходной популяции подвергаются оценке с использованием так называемой «функции приспособленности». Числовое значение, возвращенное данной функцией, рассматривается как вероятность выживания организма, представленного некоторой формулой. «Особь», чья «приспособленность» ниже определенного вычисляемого программой критерия (организмы не «дозрели» до репродукции), удаляются из популяции. В нашем алгоритме критерием полезности служит пропозициональная либо термная оценка правила вывода, применяемая к «популяции формул» на текущий момент программного времени. Формулы с пропозициональной или термной (в зависимости от типа используемого правила) сложностью ниже указанного критерия временно изымаются из «генетического фонда».

Описанные механизмы выбора продуктивных индивидов обычно называют селекцией. У нас это будет первичная селекция.

Под вторичной селекцией будем подразумевать отбор среди репродуктивных организмов, т.е. мы отбираем «особей» для «скрещивания» — применения правил вывода.

Сначала алгоритм тестирует «особей» на предмет «генетической совместимости» с заданным критерием (критерий — применяемое правило вывода; «генетическая совместимость» — возможность применить подстановку в заключение данного правила). Данное тестирование происходит в два этапа. На первом отбираются организмы, обладающие строением того же типа, что и критерий скрещивания, т.е. их логическая структура — пропозициональная или термная — должна быть гомоморфна логической структуре посылок правила. Так мы установили «внешнее» соответствие. На втором этапе мы проверяем «внутреннее» соответствие критерия отбора из выбранного кортежа «особей»-формул: они должны обладать гомоморфной структурой входящих в их состав терминов. Проще говоря, алгоритм проверяет, имеют ли выбранные

«особи» и посылки правила-критерия одинаковую логическую форму.

Прошедшие селекцию организмы допускаются к скрещиванию. Под «скрещиванием» мы подразумеваем подстановку в заключение применяемого правила вывода. Подстановка здесь понимается как «генетический оператор», т.е. как оператор, порождающий «потомство».

Заметим, что в отличие от большинства генетических алгоритмов, где используется только некоторое количество репродуктивных «особей», но не все (так называемый вероятностный подход), мы отбираем абсолютно все годящиеся для «скрещивания» «организмы», так как в силу поставленной задачи нам важна абсолютная точность результата.

Полученное «потомство» (результат применения того или иного правила вывода), в свою очередь, оценивается на «жизнеспособность» (в ряде случаев, например при работе процедуры 4, «жизнеспособные организмы» должны соответствовать по термной сложности уровню выбранной пользователем эвристики или не содержать метатермов любого типа).

«Жизнеспособное потомство» создает следующее «поколение». Особи следующего поколения также, в свою очередь, оцениваются, селекционируются, скрещиваются между собой и с особями старших поколений, порождают поколение следующего уровня и т.д. Таким образом, моделируется «эволюционный процесс», продолжающийся несколько жизненных циклов (поколений), пока не будет достигнут желаемый результат эволюции (достигнута текущая цель) или не выполнится общий критерий останова алгоритма.

Данный критерий таков:

1. Исчерпание числа поколений, отпущенных на эволюцию (например, приращение формул СЦ равно нулю при применении процедуры 6 — число участвующих в эволюции поколений исчерпано и т.п.).
2. Возникла «кризисная ситуация» — т.е. «особи» перестали размножаться и начали «выяснять отношения» (получение цели с метатермами при работе процедуры 5).

В последнем случае, когда эволюция временно прекратилась,

необходимо «антикризисное» решение — например, нахождение и исключение из числа репродуктивных организмов особей и их потомства, вступающих в конфликт с основным генетическим фондом популяции (применение процедуры 6 — добавление новых перспективных особей для скрещивания и, как следствие, правил введения отрицания и блокировка соответствующих формул СВ; тут же следует отметить, что целая группа поколений *принципиально* объявляется пострепродуктивной в случае применения *любого* непрямого п.в.). Если путь выхода из кризиса так и не будет найден, то придется объявить популяцию непродуктивной и не годящейся для полноценной эволюции, а теорему или выводимость — недоказуемой или необосновываемой. В частном случае (когда тупиковой является только одна ветвь доказательства) непродуктивным объявляется одно из поколений, входящих в популяцию.

Аналогичным образом работает механизм построения результирующего вывода из исходного. Программа строит «родословную» теоремы или выводимости, отбирая только те «организмы», которые действительно участвовали в процессе ее порождения. В случае, когда образуется ветвление, т.е. у формулы обнаруживается несколько потенциальных «предков», алгоритм выбирает те из них, которые обладают по возможности самыми экономными характеристиками, другими словами, сами имеют наименьшее число «предков» («жадный алгоритм»).

Таким образом, у нас задан эффективный критерий выбраковки «организмов» и отбора действительно полезных и продуктивных «особей», ведущих к вершине эволюционного процесса — доказательству теоремы или обоснованию выводимости.

Также мы достигаем по возможности оптимальной и эффективной работы нашего алгоритма, облегчая поиск решений на очень больших и сложных пространствах поиска.

6 Метатеоретические свойства алгоритма и перспективы его развития

В дальнейшем предполагается дать доказательство главных метатеоретических свойств построенного алгоритма: синтаксической и семантической непротиворечивости и полноты. При доказательстве данных фактов планируется опираться на

методы, используемые В.О. Шангиным в [8] и [3] и Е.Д. Смирновой в [7].

Но уже сейчас можно утверждать, что данный алгоритм является *абсолютно непротиворечивым* в том смысле, что не все формулы произвольной силлогистической системы являются теоремами. Подробнее об этом см. [6].

Предполагается доказательство дедуктивной эквивалентности натуральных силлогистических исчислений, прилагающихся к программе в качестве текстовых пакетов, и соответствующих им аксиоматических систем. Также мы планируем улучшить эффективность работы алгоритма и устранить возможные неполадки в его работе. Дело в том, что при очень объемных пространствах поиска (например, при попытке обосновать заключение сорита из двенадцати посылок), при значительном количестве правил вывода (более 30), наличия правила или правил, увеличивающих термную сложность формул, и при необходимом выборе эвристики выше первого уровня термной сложности «биосистема» не выдерживает такого энергетического подъема и «зависает». Поэтому хотелось бы повысить порог терпимости алгоритма к скачкам в численности «особей»-формул. Однако «терпимость» системы во многом зависит от формулировки ее правил вывода, в особенности от того, является ли данная формулировка не только полной, но и *минимальной*. Например, когда у нас имеется избыточное количество правил построения формул, вызывающих «зависание» программы, то достаточно часто ситуацию можно исправить, переформулировав правила вывода таким образом, что количество правил построения формулы уменьшится, а полученная система будет дедуктивно эквивалентна исходной.

Правила вывода той или иной системы пользователь по желанию может легко изменять, а также задавать собственные системы негативной силлогистики.

Построенную программу предполагается использовать для обучающих целей, а также в качестве вспомогательного средства при работе с различными силлогистическими системами.

Литература

- [1] Буркова И.А., Деменкова Т.А., Семенов Н.В., Харитонов А.Ш., Чумакова Е.И. Страшны ли роботам фреймы? Философия и будущее цивилиза-

- ции // Тезисы докладов и выступлений IV Российского философского конгресса (Москва 24-28 мая 2005 г.). Том 1. М.: «Современные тетради», 2005.
- [2] Глушков В.М. Введение в кибернетику. Киев: Издательство Академии Наук Украинской ССР, 1964.
- [3] Горчаков А.Е., Макаров В.В., Спирин С.В. О некоторых особенностях построения компьютерной реализации алгоритма автоматического доказательства теорем в натуральном исчислении. [http:// www.logic.ru](http://www.logic.ru) (Логические исследования). М., 1998.
- [4] Логика и компьютер. Вып. 3. Доказательство и его поиск (курс логики и компьютерный практикум). М.: Наука, 1996.
- [5] Логика и компьютер. Вып. 5. Пусть докажет компьютер. М.: Наука, 2004.
- [6] Маркин В.И. Силлогистические теории в современной логике. М.: Издательство Московского университета, 1991.
- [7] Смирнова Е.Д. Логика и философия // Сер. «Научная философия». М.: РОССПЭН, 1996.
- [8] Чёрч А. Введение в математическую логику. Том 1. Глава I. § 17. М.: Издательство иностранной литературы, 1960.
- [9] Шангин В.О. Автоматических поиск натурального вывода в классической логике предикатов. Диссертация на соискание ученой степени кандидата философских наук. Специальность 09.00.07 — Логика. М., 2004.

Генетический тип дедукции — альтернатива традиционно понимаемой дедукции как выводу из аксиом

А. А. Крушинский

ABSTRACT. In present paper the constructive type of deductive reasoning is contrasted with traditional (i.e. based on the notion of axiomatic system) form of deduction. The main thesis of the paper is that the logico-methodological thought of ancient China demonstrates the most advanced (in ancient world) historical realization of constructive approach to logic. The key pattern of logical entailment in China (the so called “reasoning according with a standard”) was ideologically close and formally equivalent to the method of mathematical induction.

В.А. Смирнов еще в начале шестидесятых годов прошлого века справедливо отмечал, что неправомерно отождествлять всякую строго построенную научную теорию лишь с аксиоматической системой — ведь помимо аксиоматического способа задания теорий исторически известен и другой, не менее строгий, чем аксиоматический, способ построения научной теории. Он имел в виду генетический метод построения научной теории. О генетическом методе как альтернативе аксиоматическому методу построения математической теории писали и до В.А. Смирнова — С.А. Яновская в СССР, Д. Гильберт и С. Клини — за рубежом. Однако у смирновских предшественников речь при этом шла преимущественно о математике (или о метаматематике). Он первым четко и недвусмысленно вывел данную оппозицию из ее традиционного проблемного горизонта (задачи обоснования различных разделов математики) и поставил вопрос об исторической альтернативе аксиоматическому методу **во всей его общности** — как общелогическую проблему: «В настоящее время актуальны разработка генетического метода с общелогических

позиций, а также анализ возможностей его применения вне проблем обоснования математики» [4, с. 436].

Выделяя и фиксируя характерные признаки генетического метода в самом общем виде, В.А. Смирнов формулирует в качестве важнейшего отличия логический приоритет **объектов** над **утверждениями** об этих объектах: «При генетическом подходе отправляются как от исходного от некоторых налицо данных *объектов* и некоторой системы допустимых действий *над объектами*... Объекты теории задаются через указание исходных объектов и процедур получения из данных объектов новых» [4, с. 423].

Свидетельством в пользу решающего значения именно выделения объектов служит тот факт, что их конструирование понимается В.А. Смирновым как существенное расширение сферы логического: «... в *аксиоматической* системе... допустимыми действиями являются только логические умозаключения, т.е. *действия над высказываниями*; в генетической теории допускаются *действия над объектами* теории» [4, с. 430]. В каком смысле можно говорить о логическом приоритете **объектов** над **утверждениями** об этих объектах? Имеется в виду радикальное семантическое отличие дескриптивности аксиоматического подхода от конструктивности, составляющей сущность генетического теоретизирования. В самом деле, дескриптивный характер всякого рода аксиоматизма особенно отчетлив при **формальной** аксиоматизации¹ (впервые систематически проведенной Д. Гильбертом в его «Основаниях геометрии»). В такого рода аксиоматике «область предметов, относительно которых строится теория, не берется за нечто исходное; за исходное берут некоторую систему *высказываний*, описывающих некоторую область объектов, и систему логических действий *над высказываниями* теории» [4, с. 423].

Подобный выбор в качестве отправной точки для теоретизирования **высказываний**, сформулированных в том или ином формальном языке, кульминирует в идеологии теории моделей, когда в качестве объекта аксиоматического описания выступает уже не вполне независимая от языка этого описания действи-

¹ Относительно разницы между содержательной и формальной аксиоматикой см., напр., [4, с. 419].

тельность (как это имело место в случае **содержательной** аксиоматики), а ровно наоборот. На первый план окончательно выходит дескрипция (в лице формальной теории), а статус аксиоматизируемых фрагментов математической действительности низводится до статуса моделей данной системы аксиом. В противоположность этому примат объектов в генетической теории означает кардинально иную расстановку акцентов, когда ударение делается не на фиксированную систему **предложений** определенного языка, описывающую некую предзаданную предметную область (как это происходит в содержательной аксиоматике)², а на экстралингвистическое конструирование **самых объектов** рассмотрения.

Что касается способа рассуждений, используемого в теориях генетического типа, то он согласован с конструктивной (а не с экзистенциальной, как при теоретико-множественном стиле мышления) природой универсума этих теорий. Соответственно характеристическая черта дедукции генетического типа состоит в том, что она базируется на правилах построения объектов — как известно, конструктивные объекты вводятся посредством фундаментального индуктивного определения. Именно способ индуктивного порождения объектов оправдывает рассуждения методом математической индукции (далее, ради краткости — просто индукции), которая является главным способом доказательства общих утверждений при генетическом теоретизировании. Важно подчеркнуть, что этот тип доказательства очевидным образом выходит за рамки традиционной логики³, а стало быть, представляет собой принципиальную альтернативу стандартному — по крайней мере, в историко-научных рассмотре-

² Или, напротив, задающую соответствующую математическую реальность — модель данной формальной аксиоматики.

³ По справедливому замечанию известного переводчика и комментатора евклидовых начал Д. Д. Мордухай-Болтовского, поскольку в индукции узакониваются выводы «через бесконечный ряд силлогизмов» — в то время как античными мыслителями признавались только те выводы, в которых прослежены **все** посылки и заключения, — постольку этот принцип, взятый в качестве логической аксиомы, не только не был бы для них очевиден, но, более того, был бы признан совсем не имеющим смысла, ибо относится к тому, что невозможно [3, с. 153-154]. Вместе с тем сама идея индукции была известна им с давних пор, о чем свидетельствует аргументация парадокса «Куча» и др. аналогичных парадоксов.

ниях — пониманию дедукции как выводу из аксиом по законам логики⁴.

Д. Гильберт в «Основаниях математики» вопреки укоренившемуся предрассудку совершенно справедливо утверждает, что метод аксиоматики — вовсе не есть первоначальный метод математики. У Евклида, например, аксиомы не имеют экзистенциальной формы, точки и прямые у него не мыслятся как постоянные области индивидуумов. Поэтому он устанавливает не аксиомы существования, но постулаты конструкции⁵.

По-видимому, лишь впоследствии стихийный «конструктивизм» античной математической мысли был вытеснен идеалом аксиоматической организации математического дискурса — стремлением представить доказательство в виде такой цепи утверждений, в которой переход от одного звена к следующему не оставлял бы места сомнению и таким образом доказательство завоевало бы всеобщее признание. Д. Д. Мордухай-Болтовский усматривал причину подобной тяги к аксиоматизму в софистической критике. «Математик эпохи Платона–Евклида терроризирован софистами: он каждую минуту боится попасть в расставленные последними силки, и строит укрепления против нападений по всем правилам ими же самими выработанного искусства. ... В самом ходе доказательства он (софист. — А. К.) будет придирается к самым казалось бы бесспорным и простым истинам, будет утверждать субъективность понятия очевидного (что очевидно для одного, может не быть очевидным для другого) и т. д. Поэтому геометр должен прежде всего заставить согласиться со своими аксиомами и постулатами, причем для этого, конечно, желательно, по возможности, сократить их

⁴ «Несомненно, самым важным открытием древних греков в области математики было понятие *доказательства*, что превращало математику в дедуктивную науку. Каждая теорема φ должна иметь доказательство из множества T более или менее ясно сформулированных предложений или *аксиом*. Доказательство должно показать, что заключение φ следует из аксиом T только по законам логики» [1, с. 30]. Однако при этом не стоит забывать, что на протяжении почти всей истории логики — у «древних греков» уж во всяком случае — эти «законы логики» ограничивались исключительно пределами аристотелевской логики.

⁵ «Возможность существования прямой, круга и т.д. обуславливалась признанием возможности производящего их акта, мы сказали бы — построения» [2, с. 238].

число...» [2, с. 263]. В итоге аксиоматизм утвердился в качестве эталона математической строгости (причем не только в математике). Напротив, в древнем Китае генетический характер теоретизирования⁶ сохранялся в неприкосновенности (в том числе и в математике) и продолжал развиваться⁷. Поэтому логико-методологическая мысль древнего Китая представляет собой исторически наиболее полную (для своего времени) реализацию генетического метода. Неудивительно, что основным приемом дедукции явился способ рассуждений идейно близкий (и формально эквивалентный) индуктивному методу и названный мной «рассуждениями на основании образца» или — более коротко — «рассуждениями по образцу» (далее — РПО).

Вкратце остановлюсь на специфике китайского метода. Главное отличие⁸ от привычных нам форм принципа индукции состоит в большей общности китайской версии этого принципа. Так, в фундаментальном индуктивном определении (на котором основывается РПО) обычно дается лишь базисный пункт определения⁹ и отсутствует индуктивный пункт — какое-либо упоминание о переходе от предшествующего (предшествую-

⁶Конечно, в случае логико-методологических теорий древнего Китая нельзя говорить о научной теории в современном смысле слов «наука» и «теория», но их вполне можно рассматривать как прототипы современных генетических форм дедуктивного метода. В этом отношении они подобны таким прототипам генетической системы мышления, каковыми, по мнению В.А. Смирнова, являлись в античности метод евклидовых «Начал» и в Новое время метод дедукции Декарта.

⁷В силу различных факторов, в числе которых, без сомнения, значительно меньшая, нежели в классической Греции, распространенность практики публичных дискуссий.

⁸Не считая акцента на задание **объектов** (т.е. на индуктивные определения), а не на собственно отношения логического следования — такую связь **утверждений**, при которой гарантировано сохранение истинности при переходе от посылок к заключению. Причина ясна: все та же разнонаправленность установок — дескриптивистской и конструктивистской. В полном соответствии с пафосом генетического метода — ударение ставится опять-таки на объекты, в данном случае на такой способ введения объектов, при котором они сохраняют нужное свойство «по построению», так что истинность утверждения о наличии этого свойства у любого из них достаточно очевидна.

⁹В котором предъясняется модельный пример — образец — вводимых в рассмотрение объектов.

щих¹⁰) члена/ов последовательности к **непосредственно следующему за ним** (ними) члену. Кроме того, вместо указания на конкретный способ порождения нового объекта из непосредственно предшествующих ему объектов выставляется более общее требование **воспроизведения** начального — и потому позиционируемого в качестве образца — члена s_1 , возглавляющего последовательность S всевозможных воспроизведений данного образца s_1 . То есть, во-первых, снимается условие непременно последовательного — осуществляемого шаг за шагом — перехода от n -го к ближайшему от него $n + 1$ -му члену выстраиваемой последовательности. Во-вторых, явный алгоритм порождения нового объекта из уже построенных заменяется, так сказать, «**схемой**» такого рода алгоритма — установкой на сохранение некоторого выделенного свойства образца s_1 в каждом из его возможных воспроизведений¹¹. Возможность стандартной индукции от n к $n + 1$ применительно к сохраняемому таким образом свойству в общем случае обеспечивается вполне упорядоченностью (по типу N) последовательности S всевозможных воспроизведений данного образца s_1 ¹² — обладателей данного свойства.

Итак, сохранность свойства, задаваемого образцом, гарантируется для всех его последующих воспроизведений самим построением последовательности этих воспроизведений. Эта наследуемость свойств позволяла китайским ученым древности проводить с такими последовательностями рассуждения по схеме, близкой схеме индукции. Хотя, конечно же, ход рассуждений не выписывался ими пошагово. Так или иначе, но мы все же имеем тут полноценные дедуктивные рассуждения.

Элементарный пример подобной дедуктивной аргументации дает рассуждение, обосновывающее взаимозэквивалентность потенциально бесконечных (различных) числовых представлений дроби $1/2$, с помощью таких дробей, в которых и числитель, и знаменатель является степенью двойки: $2/4, 4/8, \dots, 2^{n-1}/2^n, \dots$

¹⁰ Не считая, конечно, первого — «образцового» — члена последовательности, указание на который обязательно.

¹¹ Конкретные способы предполагаемого воспроизведения могут варьироваться и, во всяком случае, являются предметом последующих специальных уточнений.

¹² Об этом ниже.

В частности, их эквивалентности исходному образцу — несократимой дроби¹³. Другими словами, в установлении эквивалентности дроби $1/2$ всем остальным числам возглавляемого ей ряда неявно предполагается рассуждение по индукции. Только таким образом можно реконструировать апеллирующее к правилу сокращения дробей обоснование возможности замены всех потенциально бесконечных (различных) представлений дроби $1/2$ членами последовательности степеней двойки **простейшим** из таких представлений.

Причина, по которой индукция присутствует здесь лишь в неявном виде, состоит, скорее всего, в том, что целью дискурса является не обобщение, не установление всеобщности, что обычно бывает задачей индуктивного рассуждения. В центре внимания находится само наследуемое свойство (быть эквивалентным числу $1/2$). Задачей является отыскание наиболее компактного и оперативного выражения этого свойства. Поскольку же все члены рассматриваемой последовательности дробей обладают им в равной мере, постольку есть возможность выбрать наиболее экономное его выражение посредством простейшей (т. е. несократимой) дроби, являющейся начальным и потому **образцовым** членом последовательности¹⁴. В результате число $1/2$ становится обозначением одновременно не только самого этого конкретного числа, но и всей потенциально бесконечной последовательности эквивалентных $1/2$ дробей с числителями и знаменателями, представляющими собой ту или иную степень числа два¹⁵.

Гносеологическую процедуру такого рода в современной ло-

¹³ Утверждается, что, напр., последовательным сокращением числителя и знаменателя дробей $4/8$ и $2/4$ на двойку (оставляющим сокращаемую дробь неизменной) можно вернуться к исходной (т.е. образцовой) дроби $1/2$. Поэтому тот же самый способ последовательного сокращения можно применить к сколь угодно усложненной версии дроби $1/2$.

¹⁴ Эта операция сокращения на наибольший общий делитель — так же как и фундирующий ее общий логико-методологический прием представления последовательности объектов произвольной природы с помощью начального члена этой последовательности — терминологизировалась в математической и логико-методологической мысли древнего Китая иероглифом 约 («сокращение»).

¹⁵ А также любого из потенциально бесконечных членов этой последовательности.

гике принято квалифицировать как репрезентативную абстракцию. Важно подчеркнуть, что в китайском случае всегда предполагалась вполне упорядоченность множества обобщаемых объектов, что и обеспечивало возможность проведения индуктивных рассуждений относительно элементов этого множества. Поэтому главная трудность таких построений состояла в упорядочении объектов по типу натурального ряда. О необычайной изобретательности китайских ученых в этом отношении убеждает нас следующий пример задания последовательности воспроизведений предзаданного образца. Он гораздо более богатый, чем первый, и поэтому уже заметно менее простой.

В круге проблем, понятий и алгоритмов, центрируемых теоремой Пифагора, основанием всего последующего моего анализа будет тот факт, что так называемый «египетский треугольник» (т.е. прямоугольный треугольник, длины сторон которого равны 3, 4 и 5), согласно малой теореме Ферма¹⁶, является в некотором смысле **наименьшим** из числа всех целочисленных прямоугольных треугольников. Точнее, множество произведений трех компонент каждой из целочисленных пифагоровых троек образует множество кратных числа 60, а произведение тройки, четверки и пятерки есть **наименьший** элемент этого множества.

Получается, что благодаря, во-первых, своеобразной арифметизации (кодированию целочисленных прямоугольных треугольников произведениями, отвечающих им пифагоровых чисел) и, во-вторых, удачно выбранному модулю сравнения, целочисленные прямоугольные треугольники упорядочиваются по типу натурального ряда, и ситуация с ними оказывается полностью аналогичной положению с представлением

¹⁶Так как одним из следствий малой теоремы Ферма, утверждающей, что если p — простое число и a — целое число, не делящееся на p , то $a^{p-1} - 1$ делится на p (т.е. a^{p-1} сравнимо с 1 по модулю p), является следующая замечательная теорема: произведение длин сторон пифагорова треугольника делится на 60. Иначе говоря, произведение длин сторон любого целочисленного прямоугольного треугольника сравнимо с нулем по модулю 60. Ясно, что египетский треугольник, произведение длин сторон которого как раз равно 60, в этом смысле будет **наименьшим** среди всех целочисленных прямоугольных треугольников.

рациональных чисел простыми дробями, описанному выше. Благодаря этому треугольник со сторонами 3, 4, 5 получает возможность представлять за **все** целочисленные прямоугольные треугольники, тем самым обобщая их (в смысле репрезентативной абстракции)¹⁷, точно таким же образом, как $1/2$ обобщает класс эквивалентных ей дробей, имеющих вид $1/2 \cdot (2/2)^{(n-1)}$.

Нетрудно сообразить, что представление всех целочисленных прямоугольных треугольников с помощью наименьшего из них мотивировалось потребностями дедуктивного вывода. Самоочевидным примером подобной дедукции является китайское доказательство теоремы Пифагора. Ван дер Варден авторитетно утверждает, что «доказательство (теоремы Пифагора в самом раннем из дошедших до нас китайских математических трактатов — «Чжоуском гномоне». — А.К.) осуществлено только для треугольника (3, 4, 5), но идея доказательства обладает полной общностью» [6, р. 26-27]. Вторая часть этого утверждения (насчет «общности идеи доказательства»), несомненно, справедлива. Но вот первая его часть грешит серьезным недопониманием особенности китайского доказательства, основанного на РПО. Поскольку упомянутый треугольник является обобщением (в смысле репрезентативной абстракции) всех целочисленных прямоугольных треугольников, постольку обоснование верности теоремы Пифагора только для частного — с нашей точки зрения — случая целочисленных прямоугольных треугольников (египетского треугольника), представленное в изначальном китайском доказательстве этой теоремы, справедливо рассматривалось китайскими учеными как доказательство теоремы Пифагора в **общем** виде. Документальным подтверждением четкого осознания этой общ-

¹⁷ Недаром, по утверждению одного из крупнейших конфуцианских философов Сюнь-цзы (III в. до н. э.): «Пятивершковый угольник исчерпывает квадраты Поднебесной» [5, с. 120]. Традиционный комментарий вполне однозначно растолковывает эту фразу отсылкой к теореме Пифагора. Причем из контекста приведенной фразы понятно, что конкретная пифагорова тройка (представленная своей третьей компонентой, т.е. числом 5) трактуется здесь именно как «обобщение» (буквально — юэ, «сокращение») всего бесконечного множества всех целочисленных прямоугольных треугольников.

ности может служить упомянутая выше *сюньцзыева* ссылка на обобщение целочисленных прямоугольных треугольников посредством египетского треугольника. Более того. Данный, казалось бы, специально математический пример позиционируется *Сюнь-цзы* в качестве общеметодологической парадигмы дедуктивных рассуждений на основании образца.

Подытожим сказанное. Убедительным подтверждением тезиса об альтернативности генетического метода теоретизирования аксиоматическому методу служит китайское логико-методологическое наследие, где генетическое теоретизирование представлено с наибольшей (для Древнего мира) полнотой. В частности, проанализированные выше примеры логического вывода, характерного для китайской мысли (т. е. имеющие вид РПО¹⁸), свидетельствуют в пользу наличия в древнем Китае осознанных (на что, указывает — среди прочего — существование специальной терминологии) приемов дедуктивного рассуждения, согласованного с конструктивно-генетическим типом практиковавшегося там теоретизирования¹⁹.

Литература

- [1] Барвайз Дж. Введение в логику первого порядка // Справочная книга по математической логике. Ч. 1. Пер. с англ. М.: Наука, 1982.
- [2] Мордухай-Болтовский Д.Д. Комментарии // Начала Евклида. Книги I — VI. Москва; Ленинград: Государственное издательство технико-теоретической литературы, 1950.
- [3] Мордухай-Болтовский Д.Д. Философия. Психология. Математика. М.: Серебряные нити, 1998.

¹⁸Обоснование взаимозэквивалентности потенциально бесконечных (различных) числовых представлений дроби $1/2$ и обоснование полной общности доказательства теоремы Пифагора, проведенного лишь для одного треугольника специального вида.

¹⁹Что заставляет, кстати сказать, серьезно усомниться в обоснованности популярной историко-научной догмы, прокламирующей чуть ли не греческую монополию на логику — уж во всяком случае, приоритет — древнегреческой мысли в открытии дедуктивного метода сравнительно с другими великими цивилизациями древности. Хотя бы потому, что напрямую заявляемое или молчаливо подразумеваемое при этом отождествление дедукции с выводом из аксиом (в духе А. Тарского, Я. Лукасевича и проч. представителей львовско-варшавской школы) является к настоящему времени изжившим себя анахронизмом.

- [4] Смирнов В.А. Генетический метод построения научной теории // Логико-философские труды В. А. Смирнова / Под ред. В.И. Шалака. М.: Эдиториал УРСС, 2001.
- [5] Сюнь-цзы цзицзе (Сюнь-цзы с собранием разъяснений) // ЧЦЦЧ. Т.2. Пекин, 1988.
- [6] Waerden B.L. Geometry and Algebra in Ancient Civilizations. Berlin; Heidelberg; New-York, 1983.

Акира Накашима и логическое моделирование дискретных схем

В. И. ЛЕВИН

ABSTRACT. First in the world literature the scientific biography of the issued Japanese scientist with the analysis of his main works is presented. The reasons are resulted that he was pioneer of logic modelling of the discrete schemes.



Акира Накашима. 1960-е гг.

1 Введение

Теория переключательных (дискретных) схем сегодня является фундаментом для проектирования разнообразных логических цепей. Таким образом, она служит важнейшим средством построения современных цифровых вычислительных и управляющих устройств. Кроме того, она способствовала появлению ряда новых наук — кибернетики, информатики, искусственного интеллекта. Эта теория была открыта в далекие от нас 1930-е годы в виде теории релейных схем. Впоследствии вместо

реле в качестве логических элементов в дискретных схемах стали использовать вакуумные трубки, диоды и транзисторы. Пока логические элементы были дорогими, а различные цепи с использованием этих элементов проектировались в небольших количествах, их логическое проектирование производилось вручную. В этих условиях интуиция и опыт человека имели большее значение, чем математическая теория проектирования. Однако затем прогресс в области полупроводниковых технологий привел к созданию БИС и СБИС. СБИС содержат слишком много вентиляей, для того чтобы их можно было проектировать вручную. Так что в эпоху СБИС необходимость перехода от ручного проектирования к автоматизированному проектированию с использованием компьютеров стала очевидной. В связи с этим резко возросло значение теории дискретных схем. Именно об этой теории и истории ее создания, а также о вкладе в нее и жизненном пути выдающегося японского ученого Акиры Накашима пойдет речь ниже.

Выдающийся японский ученый Акира Накашима — первооткрыватель применения математической логики для представления, анализа, синтеза и проектирования переключательных (дискретных) схем, широко применяемых в цифровых вычислительных и управляющих устройствах. Несмотря на весьма короткий период времени, в течение которого он реально занимался данной областью научных исследований (1934–1940 гг.), он успел сделать очень много: открыл адекватность аппарата булевой алгебры логики релейно-контактным переключательным схемам; разработал методы формализованного анализа, синтеза и проектирования таких схем с помощью указанного аппарата; создал японскую научную школу по теории переключательных схем, из которой вышли классные ученые, обеспечившие Японии значительную независимость от Запада в создании отечественных цифровых — вычислительных и управляющих устройств. По результатам своих исследований А. Накашима опубликовал 13 научных статей — все в японских журналах (по-японски). Всего 10 из этих статей были переведены на английский язык, да и то часть (4 статьи, причем в сильно сокращенном виде) опубликована в японских же журналах. Американские, европейские и советские (российские) ученые, как правило, не интересова-

лись работами А. Накашимы и не ссылались (или ссылались неподобающим образом) на него. А ведь в этих работах не только впервые открыто то, что впоследствии было повторено, в той или иной форме, другими — логическая теория переключательных (релейно-контактных) схем, — но и сделано кое-что иное, до чего последующие ученые так и не дошли (например, начала динамики переключательных схем). Поэтому изучение и критический анализ работ А. Накашимы сегодня представляются весьма актуальными. Ниже в краткой форме представлены результаты такого изучения и анализа.

2 История появления пионерских работ А. Накашимы

В современной истории науки уже свыше полувека идет спор о том, кто же открыл применение логики для представления и проектирования дискретных вычислительных и управляющих устройств: американец К.Э. Шеннон (так считает большинство западных ученых) или русский В.И. Шестаков (так думают многие русские исследователи). Между тем вполне возможно, что первооткрывателями не являются ни тот, ни другой, а им был выдающийся, но скромный и ныне почти забытый японский ученый по имени Акира Накашима.

Акира Накашима родился 5 января 1908 года в Токио. В 1930 году он окончил электротехнический факультет инженерного института Токийского Императорского университета. Сразу после окончания университета он поступил на службу в Японскую Электрическую Компанию. Здесь его направили в Исследовательский отдел, возглавлявшийся Шимазу Ясуширо. Этот отдел занимался проектированием релейных схем для использования в телемеханике и телерегистрации данных, в автоматических телефонных коммутаторах и т.д. В те далекие времена проектирование релейных схем в Японии, да и не только в ней, выполнялось на основе особого рода вдохновения талантливых инженеров-проектировщиков. Поэтому в области проводной связи инженеры-проектировщики релейных схем для коммутационной техники считались темпераментными артистами, в отличие от чистых инженеров-связистов, которых считали интеллектуальными людьми. Находясь в этой среде, Накашима

попытался сделать существовавшую практику проектирования релейно-контактных схем некоей теорией, путем определения основных свойств таких схем и изложения этих свойств в подходящей математической форме.

Накашима начал свое исследование с детального изучения множества разнообразных релейных схем, спроектированных его предшественниками, и установления, на основе соответствующего анализа проектов, общих образцов схем и подходящих общих методов проектирования. Он начал строить свою теорию, исходя из того очевидного факта, что каждый контакт реле имеет сопротивление, которое является функцией времени, множество значений которой ограничено: это ноль или бесконечность. Он обозначил сопротивления контактов реле символами: A , B и C . Далее он стал обозначать сопротивление двух контактов A и B , соединенных последовательно, в виде $A + B$, а соединенных параллельно — в виде $A \cdot B$. Он ввел также символ $=$ для обозначения эквивалентности двух функций, зависящих от сопротивлений. Путем принятия символов $+$ и $\cdot$, которые представляют соединения арифметических операторов, он пришел к схемной алгебре на этих операторах, в которой арифметические правила действий совершенно отличались от правил действий в традиционных алгебрах. Спустя несколько лет Накашима понял, что построенная им алгебра является булевой алгеброй логики. С помощью этих новых правил (логических законов) он построил теорию эквивалентных преобразований одних двухполюсных релейных схем в другие.

Летом 1934 года Накашима, полностью разобравшийся в проблеме, начал реализацию большого проекта — систематическую публикацию своих идей и результатов в серии статей и выступлений под общим названием «Теория и практика релейных схем». Эти публикации появились на страницах «Журнала Японской Электрической Компании» в период с ноября 1934-го по сентябрь 1935 года. Уже в сентябре 1935 года в «Журнале Института инженеров телеграфии и телефонии Японии» — органе Телеграфного и Телефонного общества Японии — появилась его первая большая научная статья с многообещающим названием «Теория построения релейных схем» [1]. Это была первая в мире научная публикация, в которой автор предпринял успешную по-

пытку превратить проектирование релейных схем из искусства в науку. В статье впервые в качестве математического аппарата, служащего для описания релейных схем, использовались (правда, в неявной форме) некоторые положения булевой алгебры логики. Тогда же, в сентябре 1935 года, Накашима выступил с докладом о теории синтеза релейных цепей на техническом совещании Телеграфного и Телефонного общества Японии. Это было первое в мире публичное выступление по данной тематике перед инженерно-технической общественностью. В докладе были представлены необходимые определения и основы теории переключательных схем, включая логическую теорию де Моргана. Доклад перекликался с вышеупомянутой статьей автора. Впоследствии эта статья (доклад) в сокращенном виде была переведена на английский язык и опубликована в англоязычном японском журнале «Японская техника электросвязи», издаваемом Телеграфным и Телефонным обществом Японии [2].

Вскоре после начала его исследований, в 1936 году, Накашима был переведен в отдел, занимавшийся чистой техникой связи. Ему пришлось теперь продолжать свои «родные» исследования в области теории релейных схем лишь по ночам у себя дома. В этой работе его поддерживали старший инженер Японской Электрической компании Нива Ясуширо и один из его бывших коллег в области релейной коммутационной техники Масао Ханзава. А. Накашима совместно с М. Ханзавой разработали метод проектирования переключательных цепей с использованием алгебры, основы которой были заложены перед тем А. Накашимой. Они обозначали последовательное соединение контактов реле через $+$ (логическое ИЛИ) и параллельное соединение через $\cdot$ (логическое И). Они интерпретировали схемы релейных цепей в форме логических уравнений, с использованием двух указанных символов и установленных ими дистрибутивного закона и закона исключения, и выполняли преобразование логических уравнений с помощью этих законов и теорем де Моргана. Они опубликовали статью, содержащую изложение полученных ими результатов, в «Журнале Института инженеров телеграфии и телефонии Японии» в декабре 1936 года (теория) и в том же, но переименованном «Журнале Института инженеров электросвязи Японии» в феврале 1937 года (примеры), ко-

торый издавался Телеграфным и Телефонным обществом Японии [3]. Сильно сокращенный английский перевод этой статьи был опубликован в уже упоминавшемся выше журнале «Японская техника электросвязи» Телеграфного и Телефонного общества Японии [4]. В 1939 году немецкая исследовательница Ханси Пиш продолжила исследование Накашимы, сославшись на его работы в своей статье «Принципы общей техники переключательных схем» [5]. Это была первая в мире ссылка на работы по логической теории переключательных (дискретных) схем, причем этими работами оказались именно работы Накашимы.

Впоследствии, когда Япония вступила во Вторую мировую войну (сентябрь 1940 года), Накашима был еще раз перемещен на новую работу — на этот раз в отдел радаров и техники беспроводной связи. Здесь ему пришлось работать очень напряженно, в том числе сверхурочно и даже во время отпусков, так что он уже не мог продолжать дальше в какой бы то ни было форме свои исследования по теории переключательных схем. В общей сложности А. Накашима занимался исследованиями в области теории переключательных (дискретных) схем лишь с 1934 по 1940 год, т.е. в течение 6 лет.

После Второй мировой войны А. Накашима как крупный организатор исследований и разработок был назначен управляющим директором Японской электрической компании. Впоследствии он был переведен на должность президента Электрической компании Андо — одной из дочерних фирм Японской электрической компании. В этой должности он оставался до конца своей жизни. А. Накашима скончался 29 октября 1970 года, в возрасте 62 лет.

3 Реакция научного сообщества

Несмотря на столь очевидное первенство А. Накашимы, научная судьба его самого и его работ была несчастливой. Прежде всего, поскольку большая часть его научных работ (7 из 13) была опубликована в полном объеме только на японском языке, а обмен научными журналами накануне и в ходе Второй мировой войны был затруднен, мировая научная общественность не была вовремя и в достаточной степени проинформирована об этих работах. В результате единоличным первооткрывателем логи-

ческой теории переключательных схем в западном мире был признан американский ученый К.Э. Шеннон — просто потому, что главная его работа в этой области «Символический анализ релейных и переключательных схем», опубликованная в июне 1938 года на английском языке в широко известном американском журнале [6], оказалась гораздо более доступной ученым мира. И это при том, что данная работа Шеннона использовала те же логико-алгебраическое представление переключательных схем и булеву алгебру логики для их анализа и синтеза, что и работы Накашимы, опубликованные на 2–3 года раньше. Аналогичные представления переключательных схем использовал советский ученый В.И. Шестаков, первая публикация которого появилась лишь в 1941 году [7], спустя 5–6 лет после первой публикации А. Накашимы. Заметим, что, несмотря на вышеуказанные трудности с обменом научными журналами, главные японские научные журналы, в том числе те, в которых публиковался А. Накашима, в предвоенные годы исправно доставлялись в ведущие библиотеки европейских стран, включая СССР, а также США. В этих условиях от ученых требовалась лишь добросовестность и корректность в работе с научной литературой и другими источниками, чтобы воссоздать правду истории науки. К сожалению, этих качеств не всегда хватало, даже у выдающихся ученых. Так, даже в 1949 году, уже во второй своей работе по теории переключательных схем [8] К.Э. Шеннон следующим образом впервые сослался на работы Накашимы: «Интерпретация булевой алгебры в терминах переключательных схем очень проста (Shannon C. A Symbolic Analysis of Relay and Switching Circuits. Trans. AIEE, 57 (1938); Nakashima A. ... различные статьи в Nippon Electrical Communication Engineering, Apr, Sept, Nov, Dec. 1938. ...». Здесь нет ни одной ссылки на первоначальные публикации А. Накашимы, содержавшие основополагающие результаты по логической теории переключательных схем и появившиеся в 1935, 1936 и 1937 годах [1]–[4], т.е. до появления первой работы самого Шеннона в 1938 году [6]. Кроме того, Шеннон ссылается не на оригинальные японские публикации, а на их английские переводы, которые выходили с задержкой до одного года и больше. Что же касается В.И. Шестакова, то он вообще никогда не ссылался на работы А. Накашимы (как,

впрочем, и на работы Шеннона), хотя и знал их. Далее, в 1948 году в своем обзоре «Основания математики и математическая логика» [9] советский историк математики и логики С.А. Яновская написала: «Эти результаты (возможность построения алгебры релейно-контактных схем на базе алгебры логики. — *В.Л.*) были изложены в работе «Алгебра релейных схем», написанной В.И. Шестаковым в январе 1935 г. Работа не была опубликована, но легла в основу кандидатской диссертации Шестакова... наиболее существенная часть диссертации была опубликована в 1941 г... Дата (1935 г.) существенна, так как в 1938 г. в иностранных журналах был опубликован ряд статей по символическим методам представления структуры релейно-контактных схем и применению алгебры логики в качестве математического аппарата анализа и синтеза таких схем (см. статьи Nakasima в *Nippon Electr. Comm. Eng.* №№ 9, 10, 13, 14 (1938)). Здесь, в попытках доказать приоритет отечественного ученого, Яновская совершает невероятное — сравнивает рукопись Шестакова, которую научная общественность не могла видеть, с опубликованными работами Накашимы! При этом, как и у Шеннона, ссылки даются не на оригинальные японские публикации, а на их более поздние английские переводы; если же говорить об оригинальных публикациях, то первая из них появилась не в 1938, а уже в 1935 году — том самом, в котором у Шестакова предположительно была только рукопись! Большим контрастом с двумя приведенными примерами ссылок на работы А. Накашимы выглядит цитирование работ этого и других ученых в статьях Ханси Пиш [5]: «Эта работа родилась из: 1. Неопубликованных работ О. Плехля (Вена). 2. Трактата «Теория эквивалентного преобразования простых частичных путей в релейных схемах» Накасима А. и Ханзава М. // *Nippon Electr. Comm. Eng.* 9 (Febr. 1938). S. 32». Напомним, что эти огромные (больше 3 печатных листов) статьи немецкого ученого были представлены в журнал «Архив электротехники» для опубликования в феврале 1939 года, следовательно, писались не позже лета 1938 года, т.е. спустя всего 4 месяца после выхода в свет цитируемой английской версии статьи Накашимы и практически одновременно с поступлением журнала с этой статьей в немецкие публичные библиотеки. В этих условиях Х. Пиш могла и не ссылаться на А. Накашиму, и

никто бы не упрекнул ее в этом. Однако профессиональная добросовестность и корректность заставили ее сделать эту ссылку. К сожалению, подавляющее большинство исследователей, работавших в области теории переключательных схем, никогда не ссылались на А. Накашиму — ни в 1930-е годы, когда его статьи стали появляться в научных журналах, ни спустя десятилетия, а если изредка ссылались, то делали это неподобающим образом (см. два приведенных выше примера). Причем так вели себя не только западные и советские ученые (что еще как-то можно понять — как-никак, патриотизм!), но и японские!

4 Анализ первой работы А. Накашимы (сентябрь 1935 года)

Первая важная научная работа А. Накашимы «Теория построения релейных схем» представляет собой статью очень большого объема (свыше 5 издательских листов), больше похожую на монографию [1]. Позже сокращенная версия этой статьи (объемом 2,5 издательских листа) в переводе на английский язык появилась в издававшемся тем же обществом англоязычном японском журнале «Японская техника электросвязи» [2]. Эта статья была первой в мире работой, в которой для описания релейных схем использовались (пока еще в неявной форме) некоторые элементы булевой алгебры логики.

Статья содержит 9 глав. В главе 1 рассматривается фундаментальная идея релейных схем, вопросы формирования структуры схем, виды реле и их характеристики, общие характеристики релейных схем, функции релейных схем, особенности электромагнитных релейных схем. В главе 2 изучаются свойства и назначение элементов реле, способы управления энергией в реле, реализуемые в реле виды функции времени. В главе 3 описываются виды контактов релейно-контактных схем и их символические обозначения, взаимоотношения между различными видами контактов, даются различные определения, относящиеся к контактам, а также формулируются 4 теоремы, связывающие процессы функционирования контактов различных видов. В главе 4 — самой большой — вводится понятие простого частичного пути из контактов релейно-контактной схемы, дается классификация путей с соответствующими определениями, со-

отношение различных типов путей, а также формулируется 14 теорем, описывающих зависимость процессов функционирования путей различных типов. В главе 5 рассматриваются сложные частичные пути и даются общие соображения, позволяющие свести изучение функционирования сложных путей к изучению функционирования простых путей. В главе 6 рассмотрены вопросы анализа путей передачи энергии в релейно-контактной схеме — таких путей в общем случае может быть несколько. В главе 7 дается классификация возможных видов базовых (релейных) функций реле и их временных функций. В главе 8 приведены некоторые типовые релейные схемы, заимствованные из практики проектирования схем. В главе 9 подведены итоги проведенного исследования и сделаны выводы. Весь этот огромный материал отразил четырехлетний (1930–1934 гг.) опыт работы А. Накашима в исследовательском отделе Японской Электрической компании, который занимался проектированием релейных схем. Однако нас из всего этого материала будут интересовать только главы 3 и 4, посвященные вопросам формализации изучения структур релейно-контактных схем, поскольку именно эта формализация и привела автора статьи к использованию аппарата алгебры логики для изучения релейных схем.

А. Накашима выделяет два возможных состояния контакта реле: замкнутое (электрическое сопротивление между полюсами контакта равно 0, обозначение состояния 0) и разомкнутое (сопротивление равно ∞ , обозначение состояния 1). Аналогично выделяются два возможных состояния двухполюсной релейно-контактной схемы: замкнутое (сопротивление между полюсами схемы равно 0, обозначение состояния 0) и разомкнутое (сопротивление равно ∞ , обозначение состояния 1). Далее вводится понятие рабочей функции контакта — двоичной функции двоичного аргумента, определяющей зависимость состояния контакта от воздействия на него (воздействие есть — 1, воздействия нет — 0). Так, для размыкающего контакта рабочая функция $y = x$, а для замыкающего $y = 1 - x$. Здесь x — воздействие, y — состояние контакта. Если разделять состояния контакта реле не на проводящие $y = 0$ и непроводящие $y = 1$, а на рабочие (y замыкающего контакта $y = 0$, y размыкающего $y = 1$) и нерабочие (соответственно $y = 1$ и $y = 0$), то для каждого контакта по-

лучаются две функции, описывающие его поведение: функция включения $y_{\text{вкл}}$ и функция выключения $y_{\text{выкл}}$. При этом для размыкающего контакта $y_{\text{р,вкл}} = x$, $y_{\text{р,выкл}} = 1 - x$, а для замыкающего $y_{\text{з,вкл}} = 1 - x$, $y_{\text{з,выкл}} = x$. В общем случае контакты реле конструкционно могут быть сложнее простых замыкающих и размыкающих контактов, однако функционально (т.е. по виду их рабочих функций, а также функций включения и выключения) они ведут себя лишь одним из следующих двух способов: как замыкающий контакт или как размыкающий контакт. Это позволяет вводить классы контактов реле и изучать свойства этих классов и их отношений, опираясь на понятия указанных функций. Так, два контакта называются эквивалентными, если их рабочие функции, а также функции включения и выключения соответственно совпадают. Аналогично, два контакта называются взаимно обратными, если их рабочие функции, а также функции включения и выключения соответственно противоположны по значению (т.е. если функция одного контакта равна $1(0)$, то соответствующая функция второго контакта равна $0(1)$). Свойства введенных классов контактов содержатся в следующих утверждениях статьи.

ТЕОРЕМА 1. *Функция включения одного из двух взаимно обратных контактов равна функции выключения другого контакта.*

ТЕОРЕМА 2. *Любой контакт может быть заменен эквивалентным ему контактом или эквивалентной ему (по всем функциям поведения) двухполюсной схемой.*

ТЕОРЕМА 3. *Любой контакт, взаимно обратный с данным, имеет эквивалентный контакт или эквивалентную (по всем функциям поведения) двухполюсную схему.*

ТЕОРЕМА 4. *Два контакта a и b , эквивалентные двум взаимно обратным контактам A и B , взаимно обратны.*

Накашима не приводит доказательств этих теорем. Но это нетрудно сделать. Справедливость теоремы 2 очевидна. Справедливость теоремы 1 следует из того, что по определению взаимной обратности контактов $y_{1,\text{вкл}} = 1 - y_{2,\text{вкл}}$, $y_{1,\text{выкл}} = 1 - y_{2,\text{выкл}}$, а соотношение между функциями включения и выключения одного и того же контакта таково (см. выше): $y_{1,\text{вкл}} =$

$1 - y_{1,\text{вкл}}, y_{2,\text{вкл}} = 1 - y_{2,\text{выкл}}$. Из выписанных соотношений получаем: $y_{1,\text{вкл}} = y_{2,\text{выкл}}, y_{1,\text{выкл}} = y_{2,\text{вкл}}$, что и требовалось доказать. Справедливость теоремы 3 следует из того, что любой контакт B , взаимно обратный с данным контактом A , имеет реализованную рабочую функцию $y_{B,\text{раб}} = 1 - y_{A,\text{раб}}$, которую точно так же можно реализовать еще раз в точно таком же или эквивалентно преобразованном виде, получив новый контакт C с рабочей функцией $y_{C,\text{раб}} = y_{B,\text{раб}}$, эквивалентный контакту B . Справедливость теоремы 4 вытекает из того, что по условию эквивалентности $y_{a,\text{раб}} = y_{A,\text{раб}}, y_{b,\text{раб}} = y_{B,\text{раб}}$, а по условию взаимной обратности $y_{B,\text{раб}} = 1 - y_{A,\text{раб}}$. В результате получаем $y_{b,\text{раб}} = 1 - y_{a,\text{раб}}$, что доказывает взаимную обратность контактов a и b .



Рис. 1

Все перечисленные теоремы — и это очень важно — имеют логическую природу, могут быть выведены логическими методами и записаны в логической форме. Начнем с теоремы 1. Используем логическую булеву операцию отрицания $y = \bar{x} = 1$ (при $x = 0$) или 0 (при $x = 1$). Тогда четыре соотношения в вышеприведенном доказательстве теоремы 1 можно записать в логической форме: $y_{1,\text{вкл}} = \bar{y}_{2,\text{вкл}}, y_{1,\text{выкл}} = \bar{y}_{2,\text{выкл}}, y_{1,\text{вкл}} = \bar{y}_{1,\text{выкл}}, y_{2,\text{вкл}} = \bar{y}_{2,\text{выкл}}$. Записанным логическим соотношениям взаимнооднозначно соответствует логический граф (рис. 1), в котором функции, расположенные в одной вершине, равны, а расположенные в разных вершинах, связаны операцией логического булева отрицания. Из графа видно, что $y_{1,\text{вкл}} = y_{2,\text{выкл}}, y_{1,\text{выкл}} = y_{2,\text{вкл}}$. Это и доказывает, что функция включения (выключения)

одного контакта равна функции выключения (включения) другого контакта, т.е. теорема 1 верна. Теперь о теореме 2. По определению, эквивалентные контакты имеют совпадающие рабочие функции $y_{\text{раб}}$. Но по логическому закону тождества $y_{\text{раб}} \equiv y_{\text{раб}}$. Так что если в некоторой релейно-контактной схеме произвольный контакт с какой-либо рабочей функцией $y_{\text{раб}}$ заменить эквивалентным ему контактом с точно такой же рабочей функцией $y_{\text{раб}}$, поведение схемы не изменится. Значит, такая замена возможна, что и доказывает теорему. Перейдем к теореме 3. Пусть данный контакт A имеет рабочую функцию $y_{A,\text{раб}}$. Тогда любой взаимно обратный с A контакт B имеет рабочую функцию $y_{B,\text{раб}} = 1 - y_{A,\text{раб}} = \bar{y}_{A,\text{раб}}$, где $\bar{y}$ — булево логическое отрицание y . Полученную логическую функцию $y_{B,\text{раб}}$ можно реализовать многими способами, получая каждый раз контакт или релейно-контактную схему, эквивалентные исходному контакту B . Что и требовалось доказать. Наконец, о теореме 4. По условию эквивалентности контактов a и A , b и B имеем $y_{a,\text{раб}} = y_{A,\text{раб}}$, $y_{b,\text{раб}} = y_{B,\text{раб}}$, а по условию взаимной обратности A и B получается $y_{B,\text{раб}} = 1 - y_{A,\text{раб}} = \bar{y}_{A,\text{раб}}$. Соединяя предыдущие и последнее равенство, находим $y_{b,\text{раб}} = \bar{y}_{a,\text{раб}}$, что и доказывает взаимную обратность контактов a и b .

Продемонстрированная логическая сущность теорем 1–4 означает, что эти, по существу логические, утверждения были сформулированы А. Накашимой не на их естественном логико-алгебраическом языке, а на инженерно-техническом языке проектировщиков переключательных (релейно-контактных) схем, среди которых он работал. Конечно, их логическая сущность от этого не изменилась. Сказанное также полностью относится к излагаемым ниже теоремам 5–16 рассматриваемой статьи.

А. Накашима рассматривает только два типа соединений контактов — последовательные и параллельные. В соответствии с этим он выделяет в релейно-контактных схемах простые частичные пути из контактов, представляющие собой полностью однотипные соединения контактов — последовательное (простой последовательный частичный путь) или параллельное (простой параллельный частичный путь). Если же в последовательном соединении контактов встречаются также блоки из параллельно соединенных контактов, такой путь называется сложным после-

довательным частичным путем. Аналогично, если в параллельном соединении контактов есть ветви с последовательно соединенными контактами, имеем сложный параллельный частичный путь. Два простых частичных пути называют взаимно обратными по контактам, если один получен из другого путем замены всех контактов соответствующими обратными контактами. Два простых частичных пути называют взаимно обратными по связи, если один получен из другого заменой простого последовательного частичного пути простым параллельным частичным путем из тех же контактов или наоборот. Два простых частичных пути называют дважды взаимно обратными, если они взаимно обратны и по контактам, и по связи. Рабочие функции, а также функции включения и выключения путей вводятся аналогично этим функциям контактов. Свойства введенных отношений простых частичных путей релейно-контактных схем сохраняются в следующих утверждениях.

ТЕОРЕМА 5. Функция включения простого частичного пути равна функции выключения другого простого частичного пути, взаимно обратного с первым по контактам.

ТЕОРЕМА 6. Простой частичный путь, взаимно обратный по контактам с некоторым простым частичным путем, и простой частичный путь, взаимно обратный по связи с ним же, дважды взаимно обратны.

ТЕОРЕМА 7. Простой частичный путь, взаимно обратный по контактам с некоторым простым частичным путем, и простой частичный путь, дважды взаимно обратный с ним же, взаимно обратны по связи.

ТЕОРЕМА 8. Простой частичный путь, взаимно обратный по связи с некоторым простым частичным путем, и простой частичный путь, дважды взаимно обратный с ним же, взаимно обратны по контактам.

ТЕОРЕМА 9. Рабочие функции дважды взаимно обратных простых частичных путей сопряжены друг с другом (т.е. противоположны по значению).

ТЕОРЕМА 10. Функции включения и выключения взаимно обратных по связи простых частичных путей взаимно сопряже-

ны (т.е. функция включения одного пути сопряжена с функцией выключения другого).

ТЕОРЕМА 11. Пусть имеются две пары простых частичных путей, которые попарно дважды взаимно обратны. Тогда, взяв два набора простых частичных путей, так чтобы в каждом наборе оказалось по одному пути из каждой пары, и, соединив два пути каждого набора в один путь инверсно (в одном наборе — последовательно, в другом — параллельно), получим два соединенных пути, дважды взаимно обратных друг другу.

ТЕОРЕМА 12. Порядок следования контактов из имеющегося набора контактов в любом простом частичном пути может быть произвольным образом изменен — рабочая функция пути от этого не изменится.

ТЕОРЕМА 13. Включение (выключение) простого частичного пути последовательного типа, состоящего только из замыкающих контактов, происходит в момент включения последнего по времени (первого по времени) контакта.

ТЕОРЕМА 14. Включение (выключение) простого частичного пути параллельного типа, состоящего только из замыкающих контактов, происходит в момент включения первого по времени (последнего по времени) контакта.

ТЕОРЕМА 15. В простом частичном последовательном или параллельном пути, состоящем из одинаковых контактов, порядок срабатывания контактов (с учетом моментов их срабатывания) можно произвольным образом изменить — рабочая функция от этого не изменится.

ТЕОРЕМА 16. В простом частичном последовательном или параллельном пути, состоящем из двух взаимно обратных контактов, обмен моментами срабатывания контактов совместно с операцией взаимно обратного преобразования пути по контактам не изменяет рабочую функцию пути.

Поскольку перечисленные теоремы 5–16 формально не были доказаны А. Накашимой, приведем эти доказательства. Используем опять логический метод. Начнем с теоремы 5. Пусть функция включения первого пути $y_{1, \text{вкл}} = f(a, b, c)$, где $f(a, b, c)$ — состояния контактов при включении. Ясно, что f — некоторая

булева логическая функция. Тогда функция включения второго пути, как взаимно обратного с первым по контактам, $y_{2,\text{вкл}} = f(\bar{a}, \bar{b}, \bar{c})$, где $\bar{a}, \bar{b}, \bar{c}$ — булевы логические отрицания a, b, c . Отсюда функция выключения второго пути $y_{2,\text{выкл}} = f(\bar{\bar{a}}, \bar{\bar{b}}, \bar{\bar{c}})$, что по закону двойного отрицания дает $y_{2,\text{выкл}} = f(a, b, c) = y_{1,\text{вкл}}$, что и требовалось. Теорема 6. Пусть исходный простой частичный путь — последовательный. Тогда его рабочая функция, очевидно, $y_{1,\text{раб}} = a \vee b \vee c$, где $\vee$ — булева логическая дизъюнкция. Обратный с ним по контактам простой частичный путь имеет рабочую функцию $y_{2,\text{раб}} = \bar{a} \vee \bar{b} \vee \bar{c}$, а обратный по связи путь — рабочую функцию $y_{3,\text{раб}} = a \wedge b \wedge c$, где $\wedge$ — булева логическая конъюнкция. Но по закону де Моргана $\overline{a \wedge b \wedge c} = \bar{a} \vee \bar{b} \vee \bar{c}$, так что $\bar{y}_{3,\text{раб}} = y_{2,\text{раб}}$, что и требовалось. Случай параллельного исходного простого пути рассматривается аналогично. Теоремы 7 и 8 доказываются аналогично теореме 6. Теорема 9. Пусть исходный простой частичный путь — последовательный; его рабочая функция $y_{1,\text{раб}} = a \vee b \vee c$. Находящийся с ним в дважды взаимно обратном соотношении простой частичный путь имеет, очевидно, рабочую функцию $y_{2,\text{раб}} = \bar{a} \wedge \bar{b} \wedge \bar{c}$. По закону де Моргана $\overline{\bar{a} \wedge \bar{b} \wedge \bar{c}} = a \vee b \vee c$, так что $\bar{y}_{1,\text{раб}} = y_{2,\text{раб}}$, что доказывает теорему. Теорема 10. Пусть простой частичный путь 1 последовательный. Тогда взаимно обратный с ним по связи путь 2 параллельный. Функции включения и выключения этих путей $y_{1,\text{вкл}} = a \vee b \vee c$, $y_{1,\text{выкл}} = \bar{a} \vee \bar{b} \vee \bar{c}$, $y_{2,\text{вкл}} = a \wedge b \wedge c$, $y_{2,\text{выкл}} = \bar{a} \wedge \bar{b} \wedge \bar{c}$. Отсюда с учетом соотношений теоремы де Моргана имеем $\bar{y}_{1,\text{вкл}} = y_{2,\text{выкл}}$, $\bar{y}_{2,\text{вкл}} = y_{1,\text{выкл}}$, что и требовалось. Теорема 11 доказывается аналогично теореме 9, на основе закона де Моргана, описывающего соотношения рабочих функций дважды взаимно обратных путей. Теорема 12. Ее содержание эквивалентно коммутативным законам для дизъюнкции и конъюнкции булевой алгебры логики, поскольку рабочая функция простого частичного последовательного (параллельного) пути описывается указанной дизъюнкцией состояний контактов пути, откуда и следует ее справедливость. Теорема 13. Справедливость теоремы следует из того, что рабочая функция указанного в ней пути есть дизъюнкция $y_{\text{раб}} = a \vee b \vee c$, которая становится равной 0 (равной 1) лишь когда все состояния контактов a, b, c стали равны 0 (когда состояние хотя бы одно-

го контакта a, b, c стало равно 1). Справедливость теоремы 14 следует из того, что рабочая функция параллельного пути есть конъюнкция $y_{\text{раб}} = a \wedge b \wedge c$, которая обращается в 0 (обращается в 1) лишь когда состояние хотя бы одного контакта a, b, c стало равно 0 (когда состояния всех контактов a, b, c стали равны 1). Справедливость теоремы 15 следует из того, что в простом последовательном или параллельном пути с одинаковыми контактами рабочая функция полностью определяется моментами первого и последнего срабатываний контактов, а эти моменты при указанных в теореме изменениях не меняются. Теорема 16 следует из того, что указанные в ней два преобразования пути взаимно уничтожаются, так что работа пути и, следовательно, его рабочая функция остаются неизменными. Заметим, что, в отличие от теорем 1–12, описывающих статику (установившееся поведение) релейно-контактных схем, теоремы 13–16 описывают их динамику (временное поведение).

Проведенный анализ показывает, что в статье [1] впервые в мире в развернутой форме показана принципиальная возможность адекватного формализованного моделирования структуры и функционирования в статическом режиме переключательных (релейно-контактных) схем средствами булевой алгебры логики. Соответствующие утверждения (теоремы 1–16) были сформулированы автором статьи [1] на техническом языке проектировщиков схем. Однако эти утверждения без труда переводятся на их естественный логико-алгебраический язык, что и сделано нами выше.

5 Анализ второй работы А. Накашимы (декабрь 1936 года)

Вторая важная научная работа А. Накашимы «Теория эквивалентного преобразования простых частичных путей в релейных схемах», как и первая, была написана по-японски и опубликована в том же «Журнале Института инженеров телеграфии и телефонии Японии» [3]. На этот раз работа была подготовлена в соавторстве с помощником и бывшим коллегой А. Накашимы по отделу релейных схем Масао Ханзавой. Эта работа относительно небольшого объема — около 2,5 печатных листов. Ее сильно сокращенная версия вышла в переводе на английский язык с

большой задержкой — лишь в феврале 1938 года — в том же, что и перевод первой статьи, англоязычном японском журнале «Японская техника электросвязи» [4]. В этой статье уже в явном виде применяется математический аппарат булевой алгебры логики для математического моделирования как структуры, так и функционирования переключательных (релейно-контактных) схем.

А. Накашима прежде всего строит схемную алгебру для моделирования схем. Вначале вводятся базовые алгебраические операции сложения и умножения двоичных 0, 1-переменных

$$(1) \quad X = A + B + C, \quad Y = A \cdot B \cdot C$$

для моделирования соответственно последовательного и параллельного соединений имеющих простых частичных путей с целью получения новых путей — простых или сложных. Ясно, что введенные операции должны адекватно отражать функционирование моделируемых соединений — последовательного и параллельного. Поэтому, так как последовательное соединение замкнуто, если замкнуты все его звенья, и разомкнуто, если разомкнуто хотя бы одно звено, а параллельное соединение замкнуто, если замкнуто хотя бы одно его звено, и разомкнуто, если разомкнуты все звенья, мы получаем единственно возможное определение вводимых операций (1). А именно сумма равна 1, если хотя бы одно слагаемое равно 1, и равна 0, если все слагаемые равны 0; произведение равно 0, если хотя бы один сомножитель равен 0, и равно 1, если все сомножители равны 1. Итак, введенные для адекватного моделирования последовательного и параллельного соединения путей операции суммирования X и умножения Y на самом деле являются булевыми логическими операциями дизъюнкции и конъюнкции. Отсюда автоматически вытекают все алгебраические законы, включающие две введенные операции и хорошо известные из булевой алгебры логики. Однако А. Накашима тогда еще не знал, что он в своей работе переоткрыл эту алгебру, и потому он доказывает для нее дистрибутивный закон

$$(2) \quad A \cdot (B + C) = AB + AC, \quad (A \cdot B) + C = (A + C) \cdot (B + C)$$

(методом подстановок), а в отношении других законов — ассоциативного и коммутативного — ограничивается замечанием, что они могут быть доказаны аналогично. Для всех этих законов приводятся их схемные аналоги, позволяющие выполнять эквивалентные преобразования релейно-контактных схем и их упрощение.

Далее формулируются и записываются в алгебраической форме другие логические законы:

— закон идемпотентности

$$(3) \quad A + A + \dots + A = A, \quad A \cdot A \cdot \dots \cdot A = A;$$

— закон исключенного третьего

$$(4) \quad A + \bar{A} = 1_p;$$

— закон противоречия

$$(5) \quad A \cdot \bar{A} = 0_s.$$

В (4) и (5) $\bar{A}$ означает, по А. Накашима, операцию перехода от одного простого частичного пути к другому — дважды взаимно обратному — и результат этого перехода в виде новой рабочей функции. Но согласно теореме 9 первой статьи А. Накашима (см. п. 4) новая рабочая функция противоположна по значению старой. Таким образом, $\bar{A}$ есть на самом деле булева логическая операция отрицания. Символ 1_p в (4) означает константу 1, а символ 0_s — в (5) — константу 0. Также приводятся в алгебраической форме законы поглощения

$$(6) \quad A \cdot B + A = A, \quad A \cdot (A + B) = A,$$

законы действий с константами

$$(7) \quad 1_p + B = 1_p, \quad 1_p \cdot B = B, \quad 0_s + B = B, \quad 0_s \cdot B = 0_s$$

и закон склеивания

$$(8) \quad A + \bar{A}B = A + B.$$

Для этих законов также даны схемные аналоги для выполнения эквивалентных преобразований и упрощения схем. Особое внимание уделено параллельно-последовательному и последовательно-параллельному преобразованиям схем с помощью первого и второго дистрибутивных законов (2).

В статье также рассмотрена методика алгебраического моделирования не параллельно-последовательных релейно-контактных схем (для которых при моделировании достаточно двух логико-алгебраических операций (1)), а так называемых мостиковых схем. Предложено преобразовывать такие схемы к параллельно-последовательной форме, отличающейся от стандартных форм этого типа лишь тем, что в различных ветвях схемы могут встречаться повторения одного и того же контакта, с последующим применением общей методики моделирования параллельно-последовательных схем. Из приведенных примеров вырисовывается еще один — прямой метод моделирования мостиковых схем, основанный на выделении всех параллельных путей между входным и выходным полюсами схемы, вычислении сопротивлений этих путей (все они последовательные, т.е. вычисления ведутся по первой формуле (1)) и последующем подсчете их произведения (в соответствии со второй формулой (1)). Столь раннее (это ведь 1936 год!) и вполне конструктивное рассмотрение А. Накашимой такого трудного научного и практического вопроса, как моделирование и расчет мостиковых схем, следует считать его важным достижением.

Еще одним важным достижением следует считать попытку А. Накашимы решить проблему моделирования динамики переключательных (релейно-контактных) схем. Уже в своей первой работе (см. п. 4) А. Накашима продемонстрировал явное понимание того факта, что моделирование статики релейно-контактных (и других переключательных) схем есть лишь часть проблем, стоящих перед разработчиками схем. Другая важная и очень трудная проблема — это моделирование динамики указанных схем. Первые робкие шаги в направлении решения этой проблемы чувствуются уже в первой работе (см. теоремы 13–16 из п. 4). Во второй же работе А. Накашима попытался алгебраизовать решение этой проблемы, подобно сделанной алгебраизации проблемы моделирования статики

схем. Ему удалось придумать приемлемые обозначения элементарных динамических процессов в релейных схемах, учитывающих как логическую, так и временную составляющие работы схем. Он также хорошо разобрался в физике динамических процессов в таких схемах, где решающее значение для времени срабатывания схемы имеет соотношение моментов срабатывания различных логических элементов. Однако ему не удалось найти адекватный математический аппарат, описывающий такие соотношения (подобно тому как аппарат булевой алгебры логики адекватно описывает соотношения статических состояний отдельных элементов и всей схемы). Лишь в 1971–72 годах такой аппарат (непрерывная логика) был найден В.И. Левиным [10], [11].

Проведенный анализ статьи показывает, что в ней впервые построена схемная двоичная алгебра с базовыми операциями сложения, умножения и отрицания и несущим множеством 0, 1, которая дает возможность адекватного математического моделирования структуры и функционирования в статическом режиме параллельно-последовательных переключательных (релейно-контактных) схем. А. Накашима не дает никакого названия построенной схемной алгебре, однако из ее построения и установленных для нее законов (правил эквивалентных преобразований) однозначно следует, что это булева алгебра логики. Кроме этого, в статье впервые в теории переключательных схем рассмотрены не параллельно-последовательные (так называемые мостиковые) схемы и описаны два метода их логического моделирования путем эквивалентного преобразования к специальному виду параллельно-последовательных схем. Наконец, в этой статье впервые в научной литературе в развернутом виде рассмотрена проблема математического моделирования динамики переключательных схем, описана суть этой проблемы, заключающаяся в необходимости учитывать наряду с логическими соотношениями статических состояний элементов и аналогичных состояний всей схемы также соотношения моментов срабатывания элементов и аналогичных моментов для схемы. Также был назван некоторый частный подход к решению данной проблемы и указаны подходящие обозначения динамических процессов в схемах.

6 Анализ третьей работы А. Накашима (декабрь 1937 года)

В статье «Теория двухполюсного полного сопротивления пассивных цепей в релейных схемах» А. Накашима идет дальше двух предыдущих своих работ и строит теорию и методы логико-математического моделирования, при помощи аппарата булевой алгебры логики, структуры и функционирования переключа-тельных (релейно-контактных) схем самого общего вида, т.е. не только параллельно-последовательных или мостиковых двухполюсников, но и двухполюсников и даже многополюсников с произвольно сложной конфигурацией путей между полюсами, на-кладывающимися друг на друга.

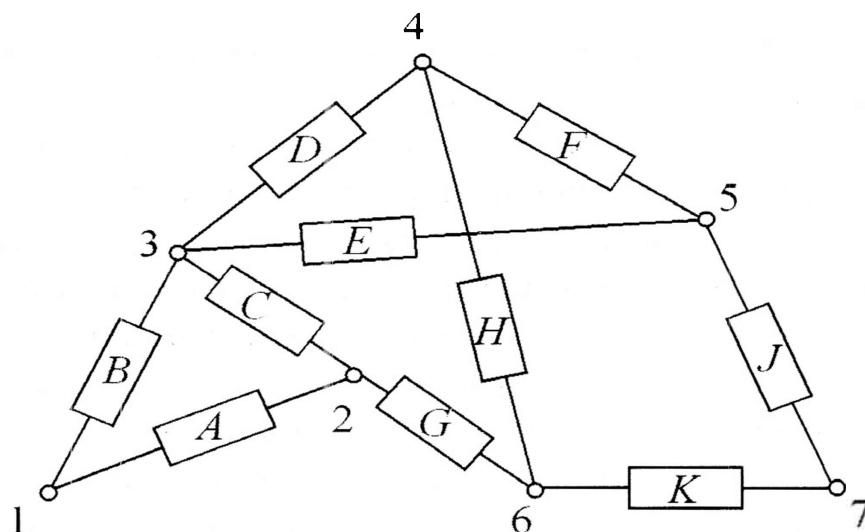


Рис. 2

В центре внимания статьи находится проблема логико-математического моделирования переключа-тельных многополюсников с множественными, частично совпадающими на отдельных участках путями, соединяющими каждую пару полюсов. Эти пути являются либо простыми частичными путями либо их последовательными соединениями. Изучаемый многополюсник задается в виде неориентированного графа, вершины которого соответствуют полюсам многополюсника, а ребра — простым частичным путям, соединяющим отдельные пары полюсов. Таким образом, любой возможный путь между двумя полюсами

многополюсной релейно-контактной схемы на соответствующем схемном графе представляется либо ребром (которому соответствует простой частичный путь, соединяющий эти полюса) либо последовательностью ребер (которой соответствует последовательность простых частичных путей, соединяющая эти полюса). Так, на рис. 2 показан многополюсник в виде графа с вершинами (полюсами) 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7 и ребрами (простыми частичными путями) $A, B, C, D, E, F, G, H, J, K$. Здесь буквами $A, B, \dots, K$ обозначены как ребра (простые частичные пути), так и их сопротивления. Структура многополюсника, как обычно, моделируется логическим выражением, взаимнооднозначно соответствующим этой структуре, а функционирование многополюсника в статическом режиме — булевой логической функцией, выражающей его состояние через состояния входящих в него простых частичных путей. Для совмещения обоих видов моделирования в качестве логического выражения структуры многополюсника берется выражение булевой логической функции его состояния. Находить эту функцию предлагается по следующему простому алгоритму: 1) выбирается пара вершин, сопротивление между которыми считается состоянием многополюсника; 2) перебираются все возможные пути без повторения вершин, соединяющие выбранную пару вершин; 3) для каждого пути образуется булева сумма сопротивлений входящих в него ребер (простых частичных путей); 4) берется произведение всех образованных сумм — это и будет булева логическая функция состояния многополюсника. Справедливость данного алгоритма очевидна: ведь булево суммирование сопротивлений каких-либо элементов дает сопротивление последовательного пути из таких элементов, а произведение сопротивлений каких-либо путей дает сопротивление параллельного соединения этих путей (см. шаги 3,4). В нашем случае эти пути не всегда являются параллельными, однако, как и параллельные пути, они всегда соединяют одну и ту же заданную пару вершин и потому функционально эквивалентны параллельным путям. Описанный метод нахождения функции состояния многополюсника А. Накашима назвал «законом наложения двухполюсных полных сопротивлений». Более правильно его следовало назвать «методом путей».

В статье рассмотрен пример многополюсника (графа), показанного на рис. 2. Для него по изложенному алгоритму получается: 1) выбранная пара вершин — 1, 7; 2) все возможные пути без повторения вершин, соединяющие вершины 1, 7: (A, G, K) , (A, G, H, F, J) , (A, G, H, D, E, J) , (A, C, D, H, K) , (A, C, D, F, J) , (A, C, E, J) , (A, C, E, F, H, K) , (B, C, G, K) , (B, C, G, H, F, J) , (B, E, J) , (B, E, F, H, K) , (B, D, F, J) , (B, D, H, K) ; 3) суммы сопротивлений входящих в пути ребер:

$$\begin{array}{ll}
 A + G + K & B + C + G + K \\
 A + G + H + F + J & B + C + G + H + F + J \\
 A + G + H + D + E + J & B + E + J \\
 (9) \quad A + C + D + H + K & B + E + F + H + K \\
 A + C + D + F + J & B + D + F + J \\
 A + C + E + J & B + D + H + K \\
 A + C + E + F + H + K &
 \end{array}$$

4) произведение всех образованных сумм, дающее булеву логическую функцию состояния многополюсника (точнее, сопротивление между его полюсами 1, 7:

$$\begin{aligned}
 Z = & (A + G + K) \cdot (A + G + H + F + J) \cdot \\
 & \cdot (A + G + H + D + E + J) \cdot (A + C + D + H + K) \cdot \\
 & \cdot (A + C + D + F + J) \cdot (A + C + E + J) \cdot \\
 (10) \quad & \cdot (A + C + E + F + H + K) \cdot (B + C + G + K) \cdot \\
 & \cdot (B + C + G + H + F + J) \cdot (B + E + J) \cdot \\
 & \cdot (B + E + F + H + K) \cdot (B + D + F + J) \cdot \\
 & \cdot (B + D + H + K).
 \end{aligned}$$

Напомним, что операции $+$ и $\cdot$ в формуле (10) по смыслу являются булевыми логическими операциями дизъюнкции и конъюнкции (см. п. 5). Таким образом, формула (10) выражает булеву логическую функцию состояния многополюсника в виде конъюнктивной нормальной формы булевой алгебры логики. При этом дизъюнкциям в различных скобках отвечают сопротивления различных путей, соединяющих пару вершин (1, 7) в схеме рис. 2 (например, дизъюнкция $A + G + K$ отвечает сопротивлению пути $1 \rightarrow 2 \rightarrow 6 \rightarrow 7$ в схеме рис. 2), а заключительной конъюнкции этих дизъюнкций — полное (итоговое) сопротивление между вершинами 1 и 7 указанной схемы.

Помимо общих принципиальных вопросов, связанных с возможностью логико-математического моделирования переключательных многополюсников, в статье также изучена проблема размерности многополюсника, т.е. возможности вычисления логической функции состояния многополюсника при большом числе полюсов в нем. Для этого сопротивление между выбранными двумя полюсами многополюсника (т.е. его логическая функция состояния) представляется в виде каскадного соединения четырехполюсников с двумя входными и двумя выходными полюсами, являющихся частями указанного многополюсника. При этом структура многополюсника декомпозируется на составляющие четырехполюсники, а искомое сопротивление многополюсника выражается через сопротивления четырехполюсников. Последовательное применение этой процедуры сводит задачу вычисления логической функции состояния многополюсника к аналогичным задачам для простых по структуре четырехполюсников, благодаря чему и разрешается проблема размерности заданного многополюсника. Описанный подход потребовал от А. Накашимы разработки теории релейно-контактных цепей в виде соединений многополюсников, аналогичной по своим задачам теории электрических цепей, что и было им сделано, причем впервые в мире.

Анализ статьи [12], представленный выше, устанавливает, что в ней впервые предложены регулярные методы логико-математического моделирования релейно-контактных многополюсников произвольной структуры, в дополнение и развитие к предложенному раньше (см. [1]–[4]) аналогичному моделированию релейно-контактных двухполюсников параллельно-последовательного или мостикового типа. При этом помимо разработки указанных методов, позволяющих принципиально выполнять моделирование многополюсников, в статье предложена методика решения проблемы размерности многополюсников при их моделировании, что открывает возможность анализа схем с большим числом полюсов.

7 Вклад в теорию дискретных схем

Анализ публикаций Акиры Накашимы позволяет однозначно и определенно зафиксировать следующий его вклад в теорию

переключательных схем. Во-первых, это показанная им впервые принципиальная возможность формализованного моделирования структуры и функционирования дискретных (релейно-контактных) схем с помощью математической логики. Во-вторых, это построенная впервые схемная двоичная алгебра с операциями сложения, умножения и отрицания на множестве $0, 1$, которая и дает реально указанную возможность. Построенная алгебра, как выяснилось через несколько лет, была булевой алгеброй логики, которая, таким образом, оказалась адекватным проблеме математическим аппаратом, что и обеспечивало моделирование схем. В-третьих, впервые рассмотрена проблема моделирования простейших не параллельно-последовательных, а так называемых мостиковых схем, и предложено ее решение путем преобразования мостиковой схемы к параллельно-последовательной форме с повторяющимися элементами (в релейно-контактной схеме — контактами). В-четвертых, впервые предложены логические методы моделирования дискретных схем произвольной, а не только параллельно-последовательной или мостиковой структуры, причем впервые предусмотрены специально разработанные для этого методы преодоления «проклятия размерности» схемы, путем ее подходящего разложения на подсхемы. Наконец, в-пятых, впервые ясно указано, что существующие методы формализованного моделирования дискретных схем (в частности, логические) относятся лишь к проблеме изучения статики схем. В связи с этим впервые рассмотрена проблема математического моделирования динамики схем, причем верно ухвачена суть этой проблемы — необходимость учитывать наряду с логическими соотношениями статических состояний элементов и аналогичных состояний всей схемы также соотношения моментов срабатывания элементов и аналогичных моментов всей схемы.

Своими открытиями А. Накашима определенно опередил своих конкурентов — как по времени их совершения, так и по их содержанию. Например, первая в западном мире статья по моделированию релейно-контактных схем с помощью математической логики, написанная К.Э. Шенноном, вышла в свет только в июне 1938 года [6], в то время как аналогичная статья А. Накашимы появилась еще в сентябре 1935 года [1], а разви-

вавшая ее статья [3] (в которой содержался также материал по моделированию динамики схем, отсутствовавший даже спустя много лет у Шеннона и других авторов) — в декабре 1936 года. Другой важный пример. Первая в Восточной Европе, включая СССР, серьезная статья по указанной тематике, принадлежащая В.И. Шестакову, вышла в свет лишь в марте-апреле 1941 г. [7], причем в ней отсутствовал материал по моделированию мостиковых схем, а также по моделированию динамики различных релейно-контактных схем, имевшийся в гораздо более ранних публикациях А. Накашима [1], [3]. К сказанному необходимо добавить, что ни К.Э. Шеннон, ни В.И. Шестаков не занимались теорией многополюсных переключательных схем, которую А. Накашима разработал в значительной степени еще в декабре 1937 года [12] (у Шестакова есть 4 работы по четырех- и n -полюсникам, выполненные в 1960-е — 1980-е годы, т.е. спустя 30-50 лет после Накашима). Разумеется, у К.Э. Шеннона и В.И. Шестакова были также результаты, отсутствовавшие в более ранних публикациях А. Накашима, например, разложимость релейно-контактной схемы по входам, вытекающая из разложимости булевой логической функции по аргументам (К.Э. Шеннон [6]), возможность моделирования обычных (не релейных) электрических схем с помощью специальной (не булевой) алгебры логики (В.И. Шестаков [7]). Отрыв А. Накашима от других исследователей (Х. Пиш [5], В.А. Розенберг [14], А. Риттер [15], О. Плехль [16] и др.) как по времени их появления, так и по содержанию был еще большим.

8 Заключение

При жизни А. Накашима и его труды в области теории переключательных схем не были адекватно оценены и признаны ни мировым, ни хотя бы японским научным сообществом, а он сам не был удостоен каких-либо научных наград или почетных титулов — в отличие от К.Э. Шеннона, удостоившегося множества самых разных наград и титула «отца цифровой эры». Более того, даже смерть А. Накашима в 1970 году прошла незамеченной! А ведь открытие А. Накашима сродни подвигу: совершенно не зная логики (в отличие от К.Э. Шеннона и В.И. Шестакова), он самостоятельно переоткрыл булеву алгебру логики как особую

схемную алгебру, адекватно представляющую переключательные схемы. И все же, несмотря на эти печальные факты, жизнь замечательного ученого и организатора научных исследований отнюдь не была напрасной. Одних его работы подвигли к занятиям наукой в новой, перспективной области научных исследований, для других эти работы оказались необычайно ценны безотносительно к их тематике — просто как образец доступного, точного и ясного изложения полученных научных результатов, исходящего из имеющейся практики инженерных решений. Для Японии непреходящее значение деятельности А. Накашима было еще и в том, что он создал японскую научную школу исследований в области переключательных схем и компьютеров. Его ученики и последователи, работавшие в Японской электротехнической лаборатории: Мочинори Гото, Ясуо Комамия, Каничи Охашаи и другие, развили его логическую теорию переключательных схем и перенесли ее с комбинационных на последовательностные схемы. На основе этих теорий они разработали первые японские релейные вычислительные машины «ЭТЛ Марк 1» и «ЭТЛ Марк 2», а впоследствии и современные высокопроизводительные компьютеры [17].

И в современном международном положении Японии как второго в мире (после США) государства по уровню развития финансов, промышленности и технологий есть весомая частица труда скромного и вместе с тем выдающегося человека по имени Акира Накашима.

Полный список оригинальных публикаций Акиры Накашима на японском языке

1. Nakashima Akira. The Theory and Practice of Relay Circuit Engineering // NEC Journal. 1934. Nov. — 1935. Sept. (серия статей).
2. Nakashima Akira. The Theory of Relay Circuit Composition // Journal of ITTE of Japan. 1935. № 150. Sept.
3. Nakashima Akira. On Reziprozitaetsgesetze // NEC Journal. 1936. Jan.

4. Nakashima Akira. Some Properties of the Group of Simple Partial Paths in the Relay Circuit // Journal of ITTE of Japan. 1936. № 155. Feb.
5. Nakashima Akira, Hanzawa Masao. The Theory of Simple Partial Paths in the Relay Circuit (Part 1) // Journal of ITTE of Japan. 1936. № 165. Dec.
6. Nakashima Akira, Hanzawa Masao. The theory of Simple Partial Paths in the Relay Circuit (Part 2) // Journal of IECE of Japan. 1937. № 167. Feb.
7. Nakashima Akira. The Theory of Four-Terminal Passive Networks in Relay Circuit // Journal of IECE of Japan. 1937. № 169. Apr.
8. Nakashima Akira. Algebraic Expressions Relative to Simple Partial Paths in the Relay Circuit // Journal of IECE of Japan. 1937. № 173. Aug.
9. Nakashima Akira. The Theory of Two-Point Impedance of Passive Networks in the Relay Circuit (Part 1) // Journal of IECE of Japan. 1937. № 177. Dec.
10. Nakashima Akira. The Theory of Two-Point Impedance of Passive Networks in the Relay Circuit (Part 2) // Journal of IECE of Japan. 1938. № 178. Jan.
11. Nakashima Akira. The Transfer Impedance of Four-Terminal Passive Networks in the Relay Circuit // Journal of IECE of Japan. 1938. № 179. Feb.
12. Nakashima Akira, Hanzawa Masao. Expansion Theorem and Design of Two-Terminal Relay Networks (Part 1) // Journal of IECE of Japan. 1940. № 206. May.
13. Nakashima Akira, Hanzawa Masao. Expansion Theorem and Design of Two-Terminal Relay Networks (Part 2) // Journal of IECE of Japan. 1940. № 209. Aug.

Принятые сокращения:

NEC — Nippon Electrical Company

ITTE — the Institute of Telegraph and Telephone Engineers

IECE — the Institute of Electrical Communication Engineers

**Полный список переводов оригинальных
публикаций Акиры Накашимы на английский
язык**

14. Nakashima Akira. The Theory of Relay Circuit Composition // NECE. 1936. № 3. May.
15. Nakashima Akira. Some Properties of the Group of Simple Partial Paths in the Relay Circuit // NECE. 1937. Mar.
16. Nakashima Akira, Hanzawa Masao. The Theory of Simple Partial Paths in the Relay Circuit (Parts 1, 2) // NECE. 1938. № 9. Feb (значительно сокращенный перевод).
17. Nakashima Akira. The Theory of Four-Terminal Passive Networks in Relay Circuit // NECE. 1938. Apr (опубликована только аннотация).
18. Nakashima Akira. Algebraic Expressions Relative to Simple Partial Paths in the Relay Circuit // NECE. 1938. Sept.
19. Nakashima Akira. The Theory of Two-Point Impedance of Passive Networks in the Relay Circuit (Parts 1, 2) // NECE. 1938. № 13. Nov (значительно сокращенный перевод).
20. Nakashima Akira. The Transfer Impedance of Four-Terminal Passive Networks in the Relay Circuit // NECE. 1938. Dec.
21. Nakashima Akira, Hanzawa Masao. Expansion Theorem and Design of Two-Terminal Relay Networks (Part 1) // NECE. 1941. Apr.
22. Nakashima Akira, Hanzawa Masao. Expansion Theorem and Design of Two-Terminal Relay Networks (Part 2) // NECE. 1941. Okt.

Принятое сокращение:

NECE — Journal «Nippon Electrical Communication Engineers»

Литература

- [1] *Nakashima A. The Theory of Relay Circuits Composition* // Journal of the Institute of Telegraph and Telephone Engineers of Japan. 1935. № 150 (Sept) (япон. оригинал).
- [2] *Nakashima A. The Theory of Relay Circuits Composition* // Nippon Electrical Communication Engineers. 1936. № 3 (May) (сокращ. англ. перевод статьи [1]).
- [3] *Nakashima A., Hanzawa M. The Theory of Equivalent Transformation of Simple Partial Paths of Relay Circuits. Parts 1, 2* // Journal of the Institute of Telegraph and Telephone Engineers of Japan. 1936. № 165 (Dec), Journal of the Institute of Electrical Communication Engineers of Japan. 1937. № 167 (Feb) (япон. оригинал).
- [4] *Nakashima A., Hanzawa M. The Theory of Equivalent Transformation of Simple Partial Paths of Relay Circuits* // Nippon Electrical Communication Engineers. 1938. № 9 (Feb) (сильно сокращ. англ. перевод статьи [3]).
- [5] *Piesch H. Begriff der allgemeinen Schaltungstechnik* // Archiv für Elektrotechnik. 1939. В. 33. № 10 (Okt), № 11 (Nov).
- [6] *Shannon C.E. A Symbolic Analysis of Relay and Switching Circuits* // Trans. of the American Institute of Electrical Engineers. 1938. Vol. 57 (June).
- [7] *Шестаков В.И. Алгебра двухполюсных схем, построенных исключительно из двухполюсников (алгебра А-схем)* // Автоматика и телемеханика. 1941. № 2 (апр).
- [8] *Shannon C.E. The Synthesis of Two-Terminal Switching Circuits* // Bell Systems Technical Journal. 1949. Vol. 28. № 1.
- [9] *Яновская С.А. Основания математики и математическая логика* // Математика в СССР за 30 лет (1917–1947). Т. 2. М.;Л., 1948.
- [10] *Левин В.И. Анализ надежности асинхронных устройств* // Пути повышения надежности промышленных АСУ. Часть 1. Тезисы докладов республиканского семинара. Киев: Изд-во Укр. республик. правления НТО Приборпром, 1971.
- [11] *Левин В.И. Бесконечнозначная логика и переходные процессы в конечных автоматах* // Автоматика и вычислительная техника. 1972. № 6.
- [12] *Nakashima A. The Theory of Two-Point Impedance of Passive Networks in the Relay Circuits* // Journal of the Institute of Electrical Communication Engineers of Japan. 1937. № 177 (Dec), 1938. № 178 (Jan) (япон. оригинал).
- [13] *Nakashima A. The Theory of Two-Point Impedance of Passive Networks in the Relay Circuits* // Nippon Electr. Commun. Eng. 1938. № 13 (Nov) (сильно сокращ. англ. перевод статьи [7]).
- [14] *Розенберг В.А. Задача о блокировке и преобразование контактных групп* // Автоматика и телемеханика. 1940. № 1.
- [15] *Ritter A. Beitrage zur Schaltlehre. Dissertation. Wien, 1938.*
- [16] *Plechl O. Die Kombinatorik der strompfade elektrotechnischer Schaltungen. Dissertation. Wien, 1943.*
- [17] *Yamada A. History of Research on Switching Theory in Japan* // IEEEJ Trans. FM. 2004. Vol. 24. № 8 (япон.).

Об одном варианте динамической логики знания¹

Е. Е. Ледников

ABSTRACT. In the paper the logic of knowledge, conviction, grounding, trust, belief, doubt and refuting are proposed. Such logic, named the dynamic logic of knowledge, (L_{dyn} -logic), is formulated in the axiomatic form and in the form of analytical tableaux. L_{dyn} -logic preserves intuitive properties of notions under discussion.

Логический анализ знания становится более глубоким и содержательным, когда познание рассматривается как динамический многоэтапный процесс достижения истины. А для этого уместно характеризовать его не только в понятиях знания и мнения (как это сделал еще в начале 60-х годов прошлого столетия Я. Хинтиikka [8]), но и с привлечением родственных знанию понятий убежденности, доказательства (подтверждения), веры, сомнения и опровержения. Ведь каждый отдельный акт познания, как правило, начинается с сомнения в имеющихся знаниях, в некотором известном положении, побуждающего субъекта познания к попыткам его опровержения с помощью теоретических аргументов или эмпирических свидетельств. Одновременно субъект высказывает мнение о подлинном положении дел в исследуемой им области, нередко подкрепляемое верой в его истинность. Мнение переходит в убежденность, когда подкрепляется дедуктивным доказательством, индуктивным обобщением или какой-либо формой подтверждения. И, в конечном итоге, убежденность, выдержавшая испытание временем, в том числе критику научного сообщества, трансформируется в новое знание, в новую истину, поступающую в распоряжение познающего субъекта.

¹Работа выполнена при поддержке РГНФ, проект № 07-03-00335а.

Рассмотрение степеней, «состояний» знания имеет давнюю философскую традицию, берущую начало в рассуждениях Сократа [5], который полагал, что между незнанием (невежеством в его терминологии) и полным знанием лежат промежуточные состояния знания — ошибочное мнение и правильное мнение. И. Кант, также выделявший степени знания (мнение, веру и собственно знание), мнение понимал как «сознательное признание чего-либо истинным, недостаточное как с субъективной, так и с объективной стороны», а веру — как «признание истинности суждения», достаточное с субъективной, но недостаточное с объективной стороны. Знанием же, по Канту, является субъективно и объективно достаточное признание истинности суждения [1].

И. Кант не оставил разъяснений, что считать субъективной или же объективной достаточностью истинности, полагая данные понятия «столь ясными», что здесь вроде как нечего и обсуждать. В действительности все не так просто, как это представлялось Канту. Мы не будем следовать букве кантовских рассуждений, хотя предложенное нами понимание знания и остальных понятий, по-видимому, не противоречит тому, что писал И. Кант.

Единственную попытку предложить логику степеней знания можно найти в работе В.Н. Костюка [2]. Мы также попытались сформулировать логику знания и близких ему понятий в [3], но там ограничились понятиями знания, веры, мнения и сомнения. В данной работе мы намерены предложить вариант пропозициональной логики всех перечисленных выше понятий, понимая их как модальные понятия (личностные модальные операторы), характеризующие пропозициональные установки² субъекта. Назовем подобную логику динамической логикой знания (L_{dyn}) и будем руководствоваться интуитивно приемлемым пониманием знания, убежденности, доказательства, веры, мнения, сомнения и опровержения, предложенным выше.

Обозначим через $K_\varphi, C_\varphi, G_\varphi, T_\varphi, B_\varphi, D_\varphi, R_\varphi$ личностные модальные операторы «субъект φ знает, что...», «субъект φ убежден в том, что...», «субъект φ доказывает, что...», «субъект φ верит, что...», «субъект φ полагает, что...», «субъект φ сомневается в том, что...», «субъект φ опровергает, что...», соот-

²О понятии пропозициональных установок см. [6].

ветственно. Так что если A — произвольная формула классической логики высказываний или L_{din} -логики, φ — индивидуальный символ для обозначения субъекта знания, убежденности, доказывания, веры, мнения, сомнения или опровержения, то $K_\varphi A$, $C_\varphi A$, $G_\varphi A$, $T_\varphi A$, $B_\varphi A$, $D_\varphi A$, $R_\varphi A$ — формулы рассматриваемой логики.

Каковы дедуктивные особенности динамической логики знания? Очевидно, что в ней должны быть истинными следующие формулы:

- 1) $K_\varphi A \supset A$ (знание — это знание истины),
- 2) $K_\varphi A \supset K_\varphi K_\varphi A$ (зная нечто, субъект знает, что он это знает),
- 3) $K_\varphi A \supset C_\varphi A$ (знание имплицирует убежденность в истине того, что известно),
- 4) $K_\varphi A \supset G_\varphi A$ (знание имплицирует доказанность того, что известно),
- 5) $K_\varphi A \supset T_\varphi A$ (знание имплицирует веру в истинность того, что известно),
- 6) $K_\varphi A \supset B_\varphi A$, (знание имплицирует мнение),
- 7) $K_\varphi A \supset \sim D_\varphi A$ (знание логически несовместимо с сомнением в истинности того, что известно),
- 8) $K_\varphi A \supset \sim R_\varphi A$, (знание логически несовместимо с опровержением того, что известно),
- 9) $C_\varphi A \supset G_\varphi A$ (убежденность в истинности имплицирует ее доказанность),
- 10) $C_\varphi A \supset T_\varphi A$ (убежденность в истинности имплицирует веру в нее),
- 11) $C_\varphi A \supset B_\varphi A$ (убежденность имплицирует мнение),
- 12) $C_\varphi A \supset \sim D_\varphi A$ (убежденность в истинности логически несовместима с сомнением в ней),

- 13) $C_\varphi A \supset \sim R_\varphi A$ (убежденность в истинности логически несовместима с ее опровержением),
- 14) $G_\varphi A \supset T_\varphi A$ (доказанность имплицирует веру в доказанное),
- 15) $G_\varphi A \supset B_\varphi A$ (доказанность имплицирует мнение),
- 16) $G_\varphi A \supset \sim D_\varphi A$ (доказанность истины логически несовместима с сомнением в ней),
- 17) $G_\varphi A \supset \sim R_\varphi A$ (доказанность истины логически несовместима с ее опровержением),
- 18) $T_\varphi A \supset B_\varphi A$ (вера имплицирует мнение),
- 19) $T_\varphi A \supset \sim D_\varphi A$ (вера в нечто логически несовместима с сомнением в объект веры),
- 20) $T_\varphi A \supset \sim R_\varphi A$ (вера в нечто логически несовместима с опровержением объекта веры),
- 21) $D_\varphi A \supset G_\varphi A \vee R_\varphi A$ (сомнение в чем-то имплицирует попытки его доказательства или опровержения).

При аксиоматической формулировке L_{dyn} -логики к аксиомам классической логики высказываний [4] можно присоединить в качестве аксиом формулы (1)–(21). Что же касается правил вывода, то их должно быть два — *modus ponens* и следующее правило введения эпистемической необходимости: если $\vdash A$, где A — модализированная формула, то $\vdash K_\varphi A$. Содежательный смысл последнего правила в том, что субъект знания осознает все свои состояния, в которых может находиться в процессе познания.

Аналитико-табличная формулировка L_{dyn} -логики может быть получена в духе идей М. Фиттинга [7] с помощью соответствующих правил редукции, добавленных к правилам классической пропозициональной логики (α -правилам и β -правилам).

Правила удаления сильных модальностей:

$[(K)\nu/\nu_0]K_\varphi A/A$ — правило удаления для сильной эпистемической модальности;

правила удаления для сильных модальностей убежденности $[(C)\nu/\nu_0]$, доказываемости $[(G)\nu/\nu_0]$, веры $[(T)\nu/\nu_0]$, мнения

$[(B)\nu/\nu_0]$, сомнения $[(D)\nu/\nu_0]$ и опровержения $[(R)\nu/\nu_0]$ отсутствуют.

А вот как будут выглядеть правила удаления соответствующих слабых модальностей:

$[(K)\pi/\pi_0] \sim K_\varphi A / \sim A$ (но сначала из столбца вычеркиваются все формулы, кроме $(K)\nu$ -формул);

$[(C)\pi/\pi_0] \sim C_\varphi A / \sim A$ (но сначала из столбца вычеркиваются все формулы, кроме $(K)\nu$ -формул и $(C)\nu$ -формул, а $(C)\nu$ -формулы заменяют $(C)\nu_0$ -формулами);

$[(G)\pi/\pi_0] \sim G_\varphi A / \sim A$ (но сначала из столбца вычеркиваются все формулы, кроме $(K)\nu$ -формул, $(C)\nu$ -формул и $(G)\nu$ -формул, а $(C)\nu$ -формулы и $(G)\nu$ -формулы заменяют $(C)\nu_0$ -формулами и $(G)\nu_0$ -формулами);

$[(T)\pi/\pi_0] \sim T_\varphi A / \sim A$ (но сначала из столбца вычеркиваются все формулы, кроме $(K)\nu$ -формул, $(C)\nu$ -формул, $(G)\nu$ -формул и $(T)\nu$ -формул, а $(C)\nu$ -формулы, $(G)\nu$ -формулы и $(T)\nu$ -формулы заменяют $(C)\nu_0$ -формулами, $(G)\nu_0$ -формулами и $(T)\nu_0$ -формулами);

$[(B)\pi/\pi_0] \sim B_\varphi A / \sim A$, (но сначала из столбца вычеркиваются все формулы, кроме $(K)\nu$ -формул, $(C)\nu$ -формул, $(G)\nu$ -формул, $(T)\nu$ -формул и $(B)\nu$ -формул, а $(C)\nu$ -формулы, $(G)\nu$ -формулы, $(T)\nu$ -формулы и $(B)\nu$ -формулы заменяют $(C)\nu_0$ -формулами, $(G)\nu_0$ -формулами, $(T)\nu_0$ -формулами и $(B)\nu_0$ -формулами);

$[(R)\pi/\pi_0] \sim R_\varphi A / \sim A$ (но сначала из столбца вычеркиваются все формулы, кроме $(D)\nu$ -формул, а $(D)\nu$ -формулы заменяют $(D)\nu_0$ -формулами);

правило удаления слабой модальности сомнения $[(D)\pi/\pi_0]$ отсутствует.

Столбец аналитической таблицы является замкнутым, если он содержит пару формул вида $(A, \sim A)$, либо $(K_\varphi A, D_\varphi A)$, либо $(K_\varphi A, R_\varphi A)$, либо $(C_\varphi A, D_\varphi A)$, либо $(C_\varphi A, R_\varphi A)$, либо $(G_\varphi A, D_\varphi A)$, либо $(G_\varphi A, R_\varphi A)$, либо $(T_\varphi A, D_\varphi A)$, либо $(T_\varphi A, R_\varphi A)$.

По методу М. Фиттинга [7] легко доказать теорему о существовании модели для подобной табличной формулировки L_{dyn} -логики. Из этой теоремы следует непротиворечивость и полнота данного варианта динамической логики знания.

Литература

- [1] Кант И. Критика чистого разума. М., Мысль 1994. С. 481.
- [2] Костюк В.Н. Элементы модальной логики. Киев: Наукова Думка, 1978. С. 129–133.
- [3] Ледников Е.Е. Логика знания и родственных ему понятий // Логические исследования. М.: Наука, 2006. Вып. 13. С. 132–135.
- [4] Мендельсон Э. Введение в математическую логику. М.: Наука, 1971. С. 38.
- [5] Платон. Менон //Собрание сочинений: В 4 т. Т. 1. М.: Мысль, 1990. С. 575–612.
- [6] Рассел Б. Исследование значения и истины. М.: «Идея-пресс», 1999. С. 19.
- [7] Fitting M. Model existence theorems for modal and intuitionistic logics // The journal of symbolic logic. V. 36, n. 4, Dec., 1973. P. 613–627.
- [8] Hintikka J. Knowledge and belief. Ithaca, 1962.

Прагматические предикаты и эпистемическая динамика в логике смысла (I)¹

И. Б. МИКИРТУМОВ

ABSTRACT. The article discusses the elements of the logic of intensional entities, which is constructed at the crossroad of general intensional logic, epistemic logic and pragmatics. The crucial point of the article is the concept of semantical oracles, which represents the subject's ability to distinguish between semantical compositional and non-compositional.

Интенциональные сущности появляются в логике как средство дифференциации значения выражений в тех случаях, когда прямых референтов для этого недостаточно. В отрыве от такого применения всякий разговор об интенционалиях неизбежно наталкивается на вопрос о том, не преумножены ли сущности без достаточных на то оснований. Чтобы избежать этого и дать логике интенционалий интуитивно приемлемое основание, ее следует строить в контексте эпистемических установок и речевых действий субъекта². Именно это сочетание дает возможность воспроизвести ту среду, в которой интенционалии нами обнаруживаются и в которой они могут быть должным образом исследованы. В настоящей статье мы рассмотрим ряд элементов логики интенциональных сущностей, в частности, эпистемические операторы, прагматические предикаты и их семантику, содержащую средства репрезентации эпистемической динамики.

¹Работа выполнена при поддержке РГНФ, грант № 06-03-00464а.

²Термин «субъект» означает «субъект пропозициональной установки» и не несет никаких дополнительных коннотаций.

1 Язык

Будем использовать язык, состоящий из следующих компонент:

- (1) Язык общей интенциональной логики (подробно он представлен в [1]), построенный на основе простой теории типов с интенциональной иерархией, получаемой с помощью синтаксического правила: если A — формула, то $(A)_1$ или A_1 — имя ее смысла (концепта). Если A — предложение, то A_1 будем называть пропозицией. Используется разветвленный предикат Δ , читаемый как «является смыслом».
- (2) Язык эпистемического расширения, образуемый константами $i, j, k, i_1, j_1, k_1, \dots$ для обозначения субъектов пропозициональных установок и операторами $\mathbf{k}$ — «знает, что», $\mathbf{b}$ — «полагает, что», $\mathbf{a}$ — «ответственно согласится с тем, что», определяемыми на парах вида $\langle i, A_1 \rangle$, где A замкнуто. Например, запись $\mathbf{k}(i)A_1$ читается « i знает, что A »³.
- (3) Прагматические предикаты **ass** — «утверждает, что», **dem** — «демонстрирует, что... (истинно)» также определены на парах вида $\langle i, A_1 \rangle$, где A замкнуто.

Опишем семантику языка содержательно. A_1 будем интерпретировать как реализуемую при тех или иных допущениях процедуру установления денотата A . При этом, если A — сложное выражение, то A_1 построено по принципу композициональности. Более того, каждой неинтенциональной сущности языка может быть сопоставлен композициональный смысл. Предикат Δ интерпретируется как $1 - n$ отношение между выражениями и их концептуализациями, поскольку таковых может быть несколько. Это связано с наличием теоретико-типовых средств дифференциации концептов, которые призваны предохранить систему от парадоксов и поэтому релятивизируют концептуализации выражений к контексту. Сами по себе семантические процедуры (семантические программы) мы здесь подробно описывать не будем. Степень их дифференциации такова, что $((\lambda x A)B)_1 \neq (A(x/B))_1$. Кроме того, различаются композициональные и

³Для фразы в кавычках не так важно, говорим мы о предложении A или о его смысле A_1 .

некомпозициональные смыслы. К числу последних относятся, в частности, смыслы парадоксальных выражений (об этом см. [1, 2]), рассматриваемые как непропозиции (см. [3]).

Установка «знать» вводит пропозиции, которые субъект рассматривает в качестве истинных на основании осуществленной им верификации, полагая, что ее процедура может быть воспроизведена другими субъектами. Это значит, что невозможно «знать» пропозицию с личностной прагматикой, например, выраженную предложением «У меня болит зуб», но можно знать что-либо относительно фактов, единственным свидетелем которых является субъект установки. Мы не рассматриваем возможность совершения субъектом ошибок при проверке пропозиций и предполагаем, что субъект, в пределах своей логико-семантической компетентности, всегда верно оценивает пропозиции как истинные или ложные. В сфере «знания» субъекта могут, таким образом, находиться только пропозиции, истинные при некоторых данных условиях.

Установка «полагать» вводит пропозиции, которые принимаются субъектом либо на основании недостаточных данных, либо без какой-либо проверки, т. е. в любом случае безответственно.

Установка «ответственно согласиться» вводит все пропозиции, которые субъект, в пределах своей компетентности, не сможет не признать истинными, если осуществит их верификацию (или если они будут ему предъявлены для верификации). Здесь не требуется, чтобы пропозиция была актуально принята или отвергнута субъектом, т. е. речь идет о вмененном или отсроченном знании. Это полезно при ослаблении эпистемической оценки пропозиции в ситуации замены тождественных. Если субъект «знает» A_1 и из A следует B , то вместо неверного «субъект знает B_1 , поскольку знает A_1 » мы сможем сказать «субъект не станет отрицать B_1 , поскольку знает, что A_1 и достаточно компетентен для оценки перехода от A к B ». Но можно вменить субъекту «ответственное согласие» с B_1 и без связи с каким бы то ни было переходом, например, если B_1 истинно, и субъект компетентен для его верификации.

Семантика прагматических предикатов в общем виде такова: «утверждение» субъектом i пропозиции A_1 имеет место тогда, когда он так или иначе дает понять другим субъектам, что счи-

тает A_1 истинным, что может находить отражение в их эпистемических состояниях, непосредственно наступающих вслед за утверждением, а «демонстрация» субъектом i истинности A_1 будет соответствовать такому его действию, в результате которого состояния знаний других субъектов изменяется за счет появления у них «знания» A_1 .

2 Эпистемические состояния

Значения формул, содержащих эпистемические операторы, определяются для каждого субъекта i относительно окрестностной структуры K и эпистемической структуры E , так что $K = \langle W, R^e \rangle$, где W — непустое множество возможных миров, R^e — отношение статической эпистемической достижимости (приемлемости), тип которого $W \rightarrow s(s(W))$. R^e обладает свойствами рефлексивности, дополнительности и объединения. Возможные миры можно представить как логически непротиворечивую совокупность фактов неэпистемического характера. Эпистемическая структура E определяется как пара $\langle ES, R \rangle$, где $ES = \{ES_i, ES_j, ES_k, \dots\}$, и ES_i — непустое множество эпистемических состояний $\{es, es_1, es_2, \dots\}$, каждое из которых соотнесено с некоторым миром. R есть 1– n -отношение динамической эпистемической достижимости (эпистемической динамики) на ES_i . На структуре K определяется *статическая* характеристика эпистемической установки субъекта, а на структуре E — ее *динамическая* характеристика.

Существуют два выделенных эпистемических состояния — es^0 , характеризующееся отсутствием каких-либо установок, и es^ω , соответствующее такому состоянию субъекта, когда дальнейшее расширение его знания невозможно. Если $esRes^*$, то es — предшественник, а es^* — преемник. Для любого es неверно, что $esRes^0$ и неверно, что $es^\omega Res$.

Эпистемическое состояние субъекта i включает в себя следующие компоненты: эпистемическое поле, буфер модификации знания es^{mod} , буфер проекции $es_i^{pro(j)}$, образуемый для каждого субъекта j , отличного от i .

Статическая характеристика эпистемического состояния es определяется его *эпистемическим полем*, которое подразделяется на сегменты, соответствующие различным эпистемическим

установкам. Эпистемическое поле не дает целостного и логически непротиворечивого образа мира и образовано наборами смыслов предложений (концептов), которые в данном эпистемическом состоянии находятся в тех или иных отношениях к субъекту. Принимается идеализация, согласно которой приписывание субъекту всех установок, проведенное на основе анализа его семантического поля, не может влечь противоречий. Это значит, что субъект может одновременно «полагать» A и «быть ответственно согласным» с тем, что не- A , но не может одновременно «полагать» и не «полагать», что A , т. е. «мир», воспроизводимый по установкам субъекта, может оказаться противоречивым, а констатация его установок таковой быть не может. Это значит, что если в мире w установки субъекта описываются эпистемическим состоянием es , то w — это всегда возможный мир, а по es можно сконструировать невозможный мир. В отношении установок «знания» и «полагания» будем придерживаться еще одной идеализации, согласно которой попадающие в их сферу сущности актуально осознаются, т. е. не могут быть забыты, искажены или подвергнуты иным психическим модификациям. Эти две сферы установок можно назвать эксплицитными [6, р. 12–14], в то время как потенциальная готовность субъекта «принять» новые установки как следствия уже имеющих определяет сферу имплицитных установок. Другими словами, при тех или иных условиях имплицитные установки могут быть субъекту вменены.

Трем видам установок соответствуют *know*-, *bel*- и *ag*-сегменты эпистемического поля. *know*-сегмент, содержит только истинные при данных условиях пропозиции, *bel*-сегмент содержит произвольные концепты, но они и их отрицания не могут находиться в *know*-сегменте, *ag*-сегмент порождается *know*-сегментом и множеством тавтологий, при необходимости с учетом уровня компетентности субъекта. Будем обозначать соответствующие сегменты эпистемического поля состояния es как es^{know} , es^{bel} и es^{ag} . Можно отождествлять сегменты эпистемического поля с множествами содержащихся в них пропозиций.

При статической характеристике эпистемического состояния присутствие в эпистемическом поле наряду с сегментами, отражающими актуальные установки субъекта, тех, которые опи-

сывают его потенциальные установки, не связано с описанием переходов от одного эпистемического состояния к другому, как это происходит в системах, репрезентирующих модификацию знания (*belief revision*). Статически рассматривается только возможность принятия или непринятия субъектом логических следствий его актуальных установок, а не приращение сфер его «знания» или «полагания» за счет новой информации о мире. Здесь решающей является основанная на имеющейся компетентности внутренняя необходимость принять установку.

3 Модель

Эвристическая модель определяется как четверка $M^e = \langle D, V, E, K \rangle$, где $E = \langle ES, R \rangle$ — эпистемическая структура. Опишем некоторые ее свойства. Отношение $\models$ ниже будет определено одновременно для эпистемических операторов и прагматических предикатов. Слева от $\models$ указываются модель и пара $\langle w, es_i \rangle$, которые вместе описывают совокупность неэпистемических фактов и соотносимых с ними установок субъекта.

R определено на ES_i , хотя фактически оказывается, что его можно считать определенным и на множестве пар вида $\langle w, es_i \rangle$. Такие пары получены в результате работы функций *эпистемического означивания* $e, e_1, e_2, \dots$, которые каждому индивиду i в каждом w сопоставляют эпистемическое состояние es . Функция e в соответствии со структурой es выполняет две задачи: во-первых, осуществляет подчиненное ряду условий заполнение эпистемического поля состояния es , помещая в его *know*-сегменте *ag*-сегменты некоторые, возможно, пустые, списки концептов, во-вторых, помещает некоторый концепт в буфер модификации es^{mod} . Эта работа функции e подчинена ряду требований, связанных как с интендируемыми свойствами установок, так и со свойствами M^e . Во-первых, предполагается, что отношение $\models$ уже определено относительно мира w для неэпистемических формул. Во-вторых, значение эпистемических формул в w определяется сопоставленным w состоянием es . Легко увидеть, что не всякая пара $\langle w, es \rangle$, логически «приемлема». Ниже будет описан ряд условий, которые должны выполняться при формировании таких пар.

Установки относительно концептуализаций эпистемических

формулы могут быть авто- или гетероэпистемическими. В первом случае те или иные комбинации эпистемических операторов признаются допустимыми в зависимости от предполагаемых свойств субъекта. Так, приемлемость сочетания $\mathbf{b}(i)(\mathbf{k}(i)B_1)_1$ зависит от умения субъекта забывать. Относительно своего уже сформированного «знания» субъект может иметь установку «полагать» только в том случае, если он не знает B_1 актуально, но предполагает, что «знал» раньше. Поскольку установка «знать» указывает на формирование достоверного знания, от которого неотделим его результат, мы принимаем идеализацию, согласно которой субъект постоянно контролирует информацию в сфере «знания» и обладает свойством, которое в литературе получило название *perfect recall*, т. е. «совершенная способность удерживать в памяти свои знания» [4]. Анализ установок субъекта, способного забывать, доступен в рамках нашего подхода, но мы оставляем его в стороне.

Может оказаться, что для реализации одним субъектом некоторой семантической программы потребуется интроспекция другого субъекта или учет недоступных ему прагматических условий. Определим, поэтому, свойства *изолированности* и *частичной изолированности* концепта (семантической программы):

- A_1 *изолирован* от субъекта j субъектом i тогда и только тогда, когда A_1 имеет вид $(\mathbf{k}(i)B_1)_1$, $(\mathbf{b}(i)B_1)_1$ или $(\mathbf{a}(i)B_1)_1$, и денотат A не может быть установлен j без анализа формул такого вида;
- A_1 *частично изолирован* от субъекта j субъектом i тогда и только тогда, когда
 - (1) он имеет собственную часть, изолированную от субъекта j субъектом i , или
 - (2) денотат A может быть установлен j без анализа изолированных от него формул.

В предположении, что отношение $\models$ определено, будем использовать следующие виды записи: запись $\text{true}_{M(e),e,\langle w, es \rangle}$ обозначает множество $\{A_1 : M^e, e, \langle w, es \rangle \models A_1 \approx T_1\}$, а запись $\text{true}_{M(e),e}$ — множество $\{A_1 : M^e, e, w \models A_1 \approx T_1\}$. По возможности, индексы M^e, e, w , а также индексы индивидов опускаем.

Пусть запись $\{par\}$ обозначает множество выражений вида

$$(\neg(C_1 \approx T_1) \wedge \neg(C_1 \approx F_1))_1$$

(сокращенно C_1 имеет вид $par(C_1)$), которые не являются пропозициями. Этот способ записи может служить контекстуальным определением парадоксальных интенциональных сущностей.

Условия (не всегда независимые друг от друга), которые должны выполняться функцией e для любой пары $\langle w, es \rangle$, таковы (индекс субъекта по возможности опускаем):

- (e-1) $\{es^0\}^{know} = \emptyset$;
- (e-2) $\{es^w\}^{know} = \{es^w\}^{ag} = true_{M,e,\langle w, es(w) \rangle}$;
- (e-3) $\{es^w\}^{bel} = \{par\}$;
- (e-4) $A_1 \in \{es^{know}\}$, только если $A_1 \in true_{M(e),e,\langle w, es \rangle}$;
- (e-5) если $A_1 \in \{es_i^{know}\}$, то A_1 не изолирован от i ;
- (e-6) если A_1 или $\neg A_1 \in \{es^{know}\}$, то A_1 и $\neg A_1 \notin \{es^{bel}\}$;
- (e-7) для любого A_1 неверно, что $A_1 \in \{es^{bel}\}$ и $\neg A_1 \in \{es^{bel}\}$;
- (e-8) $\{es^{ag}\} = \{B_1 : \text{существует } C_1 \in es^{know} \text{ или } es^{bel}, \text{ такая, что } (C_1 \approx T_1) \supset (B_1 \approx T_1) \in true_{M(e),e,\langle w, es \rangle}\}$.

Приведенные условия отражают основные статические характеристики эпистемического состояния.

4 Модификация знания и семантический оракул

В описании эпистемической динамики мы будем использовать идеи теории истины Крипке [7] и подходы теории модификации знания, развиваемой Герденфорсом и целым рядом других авторов [5]. Элементарным шагом модификации знания мы будем считать *переход к новому эпистемическому состоянию, направление которого определяется результатом попытки реализации некоторой семантической процедуры*, которую мы будем называть *основанием модификации*. Такая семантическая процедура может завершиться в конечное число шагов с результатом t или f (хотя возможность ее выполнения субъектом в

общем случае является идеализацией), а может и не завершиться. Для достаточно богатого языка, содержащего свой собственный предикат истинности, предсказать результат реализации семантической процедуры, основываясь на каком-либо алгоритме, нельзя. Это значит, что в случаях, когда невозможно сделать однозначный вывод о том, может ли данная процедура быть успешно реализована или нет, т. е. является ли она смыслом «нормального» предложения или «парадоксального», субъект дает оценку процедуре, основываясь, среди прочего, на интуиции, на заключениях по аналогии, на частных данных своего опыта или на иных неформальных соображениях. Модификация знания совершается субъектом осознанно и с привлечением всех доступных ему средств, поэтому будем считать, что если концепт, выступающий в роли основания модификации, не является пропозицией, т. е. не может быть успешно реализован при всех принимаемых идеализациях, то его оценка как непропозиции выносится субъектом на основании мнения *семантического оракула*. Так мы назовем совокупность всех неформализуемых или плохо формализуемых факторов, которые определяют оценку семантической процедуры субъектом в том случае, когда никакие попытки ее реализации не приводят к успеху.

Пусть процедура, описанная в [2], такова, что при построении концептуализаций неинтенциональных выражений нельзя получить парадоксальные концепты. Последние существуют на правах интенциональных сущностей соответствующего типа и являются нерепрезентированными. Они и попадают в ведение оракула, который может воплощать в себе, например, сам метод, реализуемый у Крипке [7]. Установление «необоснованности» предложения (в нашей терминологии — некомпозициональности его смысла) у Крипке происходит при достижении минимальной неподвижной точки, когда такое предложение попадает в число неистинных предложений и в дальнейшем остается в числе таковых. Невозможность присвоить значение такому предложению обнаруживается на трансфинитном уровне после прохождения всей иерархии метауровней. Некомпозициональность значения или зацикленность взаимореферентных ссылок достаточно легко обнаруживаются только в элементарных случаях, а в общем случае их обнаружение остается внутри скачка к непо-

движной точке, т. е. как семантический феномен, недоступный для формального описания. Иными словами, субъект, который владеет методом теории неподвижных точек, имеет дело, с одной стороны, с масштабными идеализациями, а с другой — с интуитивно усматриваемым содержанием некомпозициональности, которое воплощается в появлении неподвижной точки как результата действия «скрытых» механизмов, сумевших обнаружить парадоксальное и причислить его к неистинному. Метод Крипке может действовать только тогда, когда возможно разделение предложений на обоснованные (в терминологии Крипке) и необоснованные (парадоксальные), что соответствует дифференциации концептов на композиционные — репрезентированные, и некомпозиционные — нерепрезентированные. Логически эта возможность кажется не вызывающей сомнений, но поскольку мы рассматриваем пропозициональные установки субъектов, способность последних оценивать концепты указанным образом воплощена в добавляемом *ad hoc* семантическом оракуле.

Эпистемическая динамика, которую мы в общих чертах попытаемся описать, может быть представлена как движение субъекта от состояния полного неведения к состоянию устранения всякой неопределенности, когда он «знает» все пропозиции и имеет некоторые установки относительно непропозиций, т. е. нерепрезентированных концептов. Это конечное состояние, которое мы обозначили как es^w , сходно с понятием о минимальной неподвижной точке в теории Крипке. Отношение динамической достижимости R связывает миры, в которых субъекту сопоставлены эпистемические состояния, из которых второе является преемником первого. Множество эпистемических состояний можно уподобить сети, первым узлом которой является es^0 , а последним — es^w . Эта сеть «накладывается» на W с рядом ограничений, характер которых может пояснить пример: эпистемические состояния, в которых субъект «знает» B_1 , совместимы только с такими мирами, в которых B истинно. В то же время для «полагания» B_1 это условие не обязательно. Если субъект «будет ответственно согласен» с B_1 , то это значит, что в ходе эпистемической динамики начиная с какого-то мира субъект будет «знать» B_1 , и это знание разумно считать сохра-

няющимся за ним на всем его движении к es^w . Отметим, что эпистемическая динамика возможна как в рамках фиксированного мира w , так и при переходах от мира к миру. В первом случае эпистемическая динамика с первого шага и до достижения субъектом состояния es^w кумулятивно формирует «знание» доступных для него логических законов (выражаемых универсально общезначимыми формулами), а также фактов мира w и всех логических следствий из них. Во втором случае накопления знаний в сторону es^w может не происходить вовсе и даже идти в обратном направлении. В самом деле, если на каждом шаге модификации эпистемических состояний может происходить модификация мира, отменяющая что-то из того, что субъект уже «знает», кумулятивный эффект устраняется. Это затруднение можно решить двумя путями. Во-первых, можно потребовать, чтобы отношение R связывало пары $\langle w, es_i \rangle$ и $\langle v, es_i^* \rangle$, только если $es_i|^{know} \subseteq es_i^*|^{know}$, и тогда по мере накопления «знания» возможность варьировать миры будет с каждым шагом сокращаться, так что при достижении пары $\langle w, es_i \rangle$ мир w окажется полностью воспроизводимым по $es_i^w|^{know}$. Во-вторых, можно считать пределом динамики не достижение в es^w полного «знания» относительно некоторого w , а достижение полного «знания» некоторого нередуцируемого и нерасширяемого ни при каких переходах от мира к миру набора пропозиций. Так субъект придет к совокупности всех формул, общезначимых при данных условиях, т. е. к совокупности необходимых истин. Это последнее решение является правильным, поскольку все соотношения, которые могут быть верны относительно пар вида $\langle w, es_i \rangle$, могут быть представлены как импликации в едином для всех субъектов с одинаковым уровнем компетентности инвариантном множестве пропозиций, которое мы и будем обозначать как es^w или как пару W, es^w .

Определим понятие *редукционного множества концептов* для концепта A как множество ${}_1B_1, {}_1B_1, \dots, {}_nB_1, \dots$ концептов, соответствующих набору элементарных⁴ подпрограмм программы A_1 . Для реализации A_1 может оказаться достаточным использовать только некоторые из ее элементарных подпрограмм.

⁴То есть таких, никакая часть которых не является программой этого типа.

Очевидно, что редукционное множество репрезентированного концепта A_1 образовано репрезентированными концептами, а редукционное множество нерепрезентированного концепта содержит нерепрезентированные элементы. Возможность оперировать бесконечным редукционным множеством принимается как одна из идеализаций характеристик субъекта. Редукционное множество концепта A_1 будем обозначать как $^{Red}A_1$. Приведем некоторые тождества, поясняющие ход образования редукционных множеств:

$$^{Red}\neg A_1 = ^{Red}A_1,$$

$$^{Red}(A \wedge B)_1 = ^{Red}A_1 \cap ^{Red}B_1,$$

$$^{Red(1)}(A \vee B)_1 = ^{Red}A_1,$$

$$^{Red(2)}(A \vee B)_1 = ^{Red}B_1,$$

$$^{Red(3)}(A \vee B)_1 = ^{Red}A_1 \cup ^{Red}B_1,$$

$$^{Red}\forall x A_1 = ^{Red}(\lambda x \dots A)_1,$$

$$^{Red}(\mathbf{dem}(i)B)_1 = ^{Red}B_1,$$

$$^{Red}(\mathbf{k}(i)B)_1 = ^{Red}B_1,$$

$$^{Red}(\mathbf{a}(i)B)_1 = ^{Red}B_1.$$

Последние два случая соответствуют ситуации анализа авто-эпистемических установок субъекта. Такие установки будут изменяться при переходе от одного эпистемического состояния в другое, отражая ход эпистемической динамики. Заметим, что в $^{Red}(\mathbf{b}(i)B)_1$ и $^{Red}(\mathbf{ass}(i)B)_1$ не обязательно будет входить B_1 , поскольку для установления того, имеют ли место установка «полагать» и отношение «утверждать», не важны свойства полагемого и утверждаемого. Безответственное полагание и провокативное утверждение не несут обязательств относительно значения B_1 .

5 Уравновешивание эпистемического состояния

Модификация эпистемического состояния es субъекта i — это процедура, образованная следующими шагами:

Шаг 1. Если основанием модификации является концепт A_1 , помещаемый в буфер модификации es^{mod} функцией e , то помещаем в буфер модификации все концепты из $Red A_1$.

Шаг 2. Если в числе концептов, находящихся в es^{mod} , есть концепты, изолированные от субъекта i субъектами $j_1, j_2, j_3, \dots$, то концепты, являющиеся предметами этих установок, помещаются в определяемые ими сегменты проекций $es^{pro(j_1)}, es^{pro(j_2)}, es^{pro(j_3)}, \dots$ соответственно.

Шаг 3. Если $B_1 \in es^{pro(j)}$, то B_1 помещаем также в es^{mod} .

Шаг 4. Получаем решение семантического оракула, действующего в пределах компетентности субъекта, и если $C_1 \in es^{mod}$, то преобразуем es в es^+ в соответствии с правилами:

- (I) если C_1 истинно, то $es^+|^{know}$ содержит C_1 , или $(C_1 \approx T_1)_1$, или $(C = T)_1$;
- (II) если C_1 ложная пропозиция, то $es^+|^{know}$ содержит $\neg C_1$, или $(C_1 \approx F_1)_1$, или $(C = F)_1$;
- (III) если C_1 не является пропозицией, то

$$\begin{aligned}
 & es^+|^{bel} \text{ содержит } (\neg(C_1 \approx T_1) \wedge (C_1 \approx F_1))_1, \text{ а} \\
 & es^+|^{know} \text{ содержит } (\mathbf{b}(i)(\neg(C_1 \approx T_1) \wedge \neg(C_1 \approx F_1)))_1, \\
 & \text{или} \\
 & es^+|^{bel} \text{ содержит } (\neg \exists j(\mathbf{k}(j)C_1))_1, \text{ а} \\
 & es^+|^{know} \text{ содержит } (\mathbf{b}(i)(\neg \exists j(\mathbf{k}(j)C_1)))_1.
 \end{aligned}$$

Шаг 5. es^+ приводится в «уравновешенное» состояние относительно сопоставленного ему возможного мира w , в соответствии с описанными ниже правилами и превращается в es^* .

Альтернативой правилу (III) может служить правило:

- (IV) если C_1 не пропозиция, то $es^+|^{know}$ содержит $(\neg(C_1 \approx T_1) \wedge \neg(C_1 \approx F_1))_1$, или $(\neg \exists i(\mathbf{k}(i)C_1))_1$.

Различие (III) и (IV) очевидно и показательно. (IV) соответствует «некритичному» подходу субъекта к своим оценкам. В

самом деле, как уже говорилось выше, о парадоксальности концепта можно в общем случае судить по косвенным признакам, поскольку формальное обоснование может оказаться невозможным. Вместо «знания» о собственном не до конца обоснованном мнении появляется недостижимое в общем случае «знание» о парадоксальности. Выбор конкретной репрезентации «знания» в случаях (I)–(IV) не существен, поскольку варианты в (I) и (II) прямо эквивалентны, а варианты в (III) и (IV) связаны через эквивалентность:

$$\neg(C_1 \approx T_1) \wedge \neg(C_1 \approx F_1) \equiv \neg \exists i(k(i)C_1),$$

которая легко обосновывается семантически. Эта эквивалентность может быть понята либо как сообщение о нерепрезентированности C_1 , переданное эпистемическими средствами, либо, наоборот, как раскрытие того, что значит, что мы не можем «знать» C_1 . Решение о нерепрезентированности концепта выносит семантический оракул, основывающийся на некоторых конечных и не до конца определенных данных. Подчеркнем, что эта оценка в общем случае не является строго обоснованной, но появляется в результате интуитивно мотивированного решения субъекта, его *семантического* действия, устраняющего неопределенность.

Если модификация *es* порождает новое эпистемическое состояние *es**, являющееся преемником *es*, то мы будем считать, что состояния *es* и *es** находятся в отношении *R*. Состояние *es*⁺, полученное из *es* пополнением *know*- и *bel*-сегментов, используется только в технических целях для описания эпистемической динамики. Чтобы стать состоянием *es**, состояние *es*⁺ (в терминологии, принятой в системах модификации знания [5]) должно прийти в *равновесие*, т. е. новая информация должна быть некоторым образом совмещена со старой. Напомним, что принимается идеализация, согласно которой субъект обладает совершенной способностью удерживать в памяти свои знания.

Определение уравновешенного эпистемического поля: эпистемическое поле состояния *es* называется уравновешенным относительно *w* тогда и только тогда, когда множество $true_{M(e),e,\langle w, es \rangle}$ не влечет противоречия в качестве своего логического следствия.

Некоторые общие условия уравнивания таковы. Помещение концепта A_1 , не содержащего концептуализаций эпистемических операторов, в *know*-сегмент не может вызвать противоречий, поскольку этот сегмент содержит только истинные в данном мире пропозиции. Если *bel*-сегмент содержит концепт $(\neg A)_1$, то он элиминируется, т. е. мы делаем *bel*-сегмент чувствительным по отношению к модификациям *know*-сегмента. Например, помещение в *bel*-сегмент концепта, имеющего вид $(\neg \exists i(k(i)A_1))_1$, влечет элиминацию из *bel*-сегмента как $(A)_1$, так и $(\neg A)_1$, если мы имеем дело с достаточно компетентным субъектом, который отдает себе отчет в эпистемических последствиях принятия данного концепта даже в рамках установки «полагать». Иными словами, *bel*-сегмент адекватно реагирует на модификацию, но только в пределах своего актуального набора концептов, не затрагивая логических следствий их принятия, и в соответствии со свойствами субъекта установок. При этом действует условие (е-7), исключаяющее прямые противоречия в сфере полагания.

Приведение эпистемического состояния в равновесие проиллюстрируем несколькими *правилами уравнивания*, которые, безусловно, не образуют полного списка таких правил. Пусть состояние *es* уравновешено, а состояние es^+ получено в ходе реализации шагов 1–4 процедуры модификации *es*. Для получения эпистемического поля состояния es^* осуществляем преобразования, условия которых будут записываться над чертой, а результаты — под чертой. Буквами Γ, Σ, Π обозначаем множества концептов, а выражение вида $know|\Gamma, A_1|$ читается так: «концепты из списка и концепт A_1 находятся в *know*-сегменте». Аналогично будут читаться выражения, описывающие наполнение прочих сегментов эпистемического поля, а также буферов модификации и проекции. Условия и результаты применения правил, относящиеся к разным частям эпистемического поля, разделяем вертикальными линиями.

$$(Re1) \quad \frac{know|\Sigma, A_1| \quad | \quad bel|\Pi, (\neg A)_1| \text{ или } bel|\Pi, A_1|}{know|\Sigma, A_1| \quad | \quad bel|\Pi|}$$

(Re2)	$mod \Gamma, A_1 $	$bel \Pi, (\neg(A_1 \approx T) \wedge \neg(A_1 \approx F))_1, A_1 $
		или $bel \Pi, (\neg(A_1 \approx T) \wedge \neg(A_1 \approx F))_1,$ $\neg A_1 $ или $bel \Pi, (\neg(A_1 \approx T) \wedge \neg(A_1 \approx F))_1,$ $((A_1 \approx T) \vee (A_1 \approx F))_1 $
		$bel \Pi, (\neg(A_1 \approx T) \wedge \neg(A_1 \approx F))_1 $
(Re3)	$know \Gamma, (a(i)A_1)_1 $	$bel \Sigma, A_1 $ или $bel \Sigma, \neg A_1 $
	$know \Gamma, (a(i)A_1)_1 $	$bel \Sigma $
(Re4)	$know \Gamma, (b(i)A_1)_1 $	$bel \Sigma $ и $A_1 \notin \Sigma$
	$know \Gamma $	$bel \Sigma $
	$know \Gamma, (a(i)A_1)_1 $	$ag \Pi $ и $A_1 \notin \Pi$
	$know \Gamma $	$ag \Pi $

Приведенные правила уравнивания отражают общие свойства эпистемического состояния субъекта и путей его модификации. Так, правило (Re1) реализует свойство (е-6), правило (Re2) исключает мнения об истинности или ложности, а также о наличии значения у концепта, выступавшего в роли основания модификации и признанного непропозицией, правило (Re3) исключает из сферы полагания пропозицию, если субъект «знает», что «ответственно согласится» с ней. Правило (Re4) делает «знание» субъекта о сферах своих установок адекватным тем изменениям, которые имели место в процессе модификации.

Литература

- [1] Микиртумов И.Б. Композиционные и некомпозиционные типы в интенциональной логике // Логические исследования. Вып. 11. М., 2004. С. 200–214.
- [2] Микиртумов И.Б. Композициональная концептуализация в интенциональной логике // Логические исследования. Вып. 12. М., 2005. С. 211–224.
- [3] Aczel P. Frege Structures and the Notions of Proposition, Truth and Set // The Kleene Symposium / Eds. J. Barwise, H. J. Keisler, K. Kunen. Dordrecht, 1980. P. 31–59.
- [4] Fagin R., Halpern J.Y., Moses Y., Vardi M.Y. Common Knowledge Revisited // Annals of Pure and Applied Logic. 1996. Vol. 96. P. 89–105.
- [5] Gärdenfors P. Knowledge in Flux. Modeling the Dynamics of Epistemic States. Cambridge (Mass.); London, 1988.
- [6] Harman G. Change in View: Principles of Reasoning. Cambridge (Mass.), 1986.
- [7] Kripke S. Outline of a Theory of Truth // Journal of Philosophy. 1975. Vol. 72. P. 690–716.

Интеллектуальные вирусы

Н. Н. НЕПЕЙВОДА

ABSTRACT. Intellectual virus is a logical infection which invisibly spreads over a lot of works and accidentally leads to hardly diagnosed errors. Author is sure that now there is a lot of intellectual viruses but here only two of them are considered. Origins of these viruses are idols of market and idols of cave combined with semi-knowledge (self-confident semi-knowledge is the worst form of ignorance proving that really Ignorance is power).

Three scientific viruses («measurability» of definable functions, singular program functions suffice, types in functional languages are proofs) are considered here.

Last section is devoted to some anti-virus shields and infections infecting this immune systems acting like trojans in computers.

1 О темных воздействиях и психических вирусах

Слово «вирус» в последнее время в значительной мере вернулось к его средневековому пониманию: сущности, которая передается от (живого) существа к (живому) существу и переносит инфекцию. Однако существа теперь не только живые, но и такие, как, скажем, компьютер.

Но заметим, что отнюдь не каждое (даже недозволенное и полностью аморальное) информационное воздействие, влияющее на многих людей, является вирусом. Скажем, даже предельно нечестная предвыборная реклама не становится вирусом, пока зараженные ею люди не начинают зомбировать других. Ядом она, конечно, при этом остается. В случае, если незначительное меньшинство зараженных людей пытается заражать других, но степень их воздействия при этом весьма мала по сравнению с исходным воздействием, это еще не вирус. Ведь лучевая болезнь, скажем, заведомо не инфекционная, но человек, получивший изрядную дозу радиоактивного материала, сам становится радиоактивным. Таким образом, одна из ключевых особенностей вируса — неубывание заразности при переносе ее от вторичных источников заражения.

Даже очень сильно заразившее многих людей при соприкосновении с его непосредственным источником воздействие не является вирусом, поскольку дальше не распространяется. Даже первоначально очень слабое воздействие, проникшее в умы и души вторичных носителей и невидимо распространяемое, является им.

Заметим, что явно прокламируемые убеждения, которые не могут распространяться в латентной форме, вирусами называть не стоит. Хотя некоторые из них также похожи на инфекцию, но их распространение сравнительно легко локализовать при наличии воли и решимости, воздействуя на их носителей, которые их не скрывают. Таким образом, даже тоталитарная секта либо экстремистская организация чаще всего является темным воздействием, заразой, бедой, болезнью, но не вирусом.

Душевный либо интеллектуальный вирус — воздействие, которое невидимым образом передается от души к душе, от разума к разуму, захватывая не осознающих это и не провоцировавших это индивидуумов¹.

Интеллектуальный вирус в науке — (логическая) инфекция, которая передается (зачастую в скрытом виде) из работы в работу и тем самым порою заражает целые области, которые считаются по традиции абсолютно надежными.

2 Функциональный анализ, зараженный недопониманием логики

По традиции так называемые «практические математики» очень плохо знают логику. Во французских математических работах повторяется, скажем, перевод аристотелевского утверждения

(1) «Все A есть B »

как

(2) $\forall x (A(x) \& B(x))$.

Даже во французский школьный учебник проникло определение импликации следующим образом:

¹В этом отличие от, скажем, тоталитарной секты: человек, попавшийся на крючок, может не осознавать, что его программируют, но он сам, по своей воле, пошел в сообщество, где на него заведомо будут воздействовать.

(3) $A \Rightarrow B$ истинно, если A и B истинны.

Одна женщина-доцент по специальности «математический анализ» на дискуссии в Новосибирском государственном университете заявила:

— Что касается меня, то мне логика ни разу в жизни не понадобилась!

Лишь глянув на реакцию окружающих, она поняла, что ляпнула что-то не то.

В значительной степени именно с этим невежеством связана перемена, до сих пор не осознанная явно научным сообществом. В последние полвека математика потеряла статус науки с наиболее высокими требованиями к строгости и точности. Сейчас можно утверждать следующую качественную пропорцию степеней точности дисциплин.

$$(4) \quad \frac{\text{Физика}}{\text{Математика}} = \frac{\text{Математика}}{\text{Логика и теоретическая информатика}}$$

В частности, у информатиков вызывает недоверие предложение, зачастую встречающееся в математических работах:

«Поскольку ясно, как провести данную конструкцию, мы проводить ее не будем».

Они-то прекрасно знают, сколько скрытых трудностей возникает при реализации вроде бы совершенно ясного алгоритма.

А уж о встречающихся в практически каждой математической работе словах «очевидно», «подобно такому-то», «для простоты предположим, что» ходят даже анекдоты. Самый показательный из них следующий:

Профессор математики говорит: «Данное утверждение очевидно». Студенты спрашивают: «А почему?» Профессор математики глубоко задумался, вышел из аудитории и исчез. Через полчаса возвращается радостный: «Я проверил! Действительно очевидно! Двигаемся дальше».

Поскольку теорема не может быть доказана на 90%, такая неаккуратность математики должна была породить массу неприятных последствий. Автора в свое время поразил один случай, который он невольно спровоцировал.

ПРИМЕР 1. Известно, что в считающейся стандартом для современной «практической математики» теории множеств **ZF** доказывается, что существует неизмеримое множество действительных чисел. Приведем одну из имеющихся «конструкций» этого множества.

Возьмем окружность длины 1 или, что с точки зрения теории меры то же самое, полуотрезок $[0, 1) = \{x \mid 0 \leq x < 1\}$. Введем на нем отношение эквивалентности $x \simeq y \iff |x - y| \in \mathbb{Q}$, где $\mathbb{Q}$ — множество рациональных чисел. Выберем² по элементу из каждого класса эквивалентности и назовем получившееся множество X . Циклический сдвиг $X \uparrow a$ на отрезке $[0, 1)$ дает множество, конгруэнтное X на окружности, и, соответственно, если X измеримо, то его мера та же, что и мера $X \uparrow a$. Если $a \in \mathbb{Q}$, то X и $X \uparrow a$ не пересекаются. Более того,

$$\bigcup_{\substack{a \in [0, 1) \\ a \in \mathbb{Q}}} X \uparrow a = [0, 1).$$

Таким образом, мы представили отрезок в виде объединения счетного числа непересекающихся конгруэнтных множеств. Теперь к противоречию приводят оба возможных предположения относительно меры X : если она равна 0, то и мера $[0, 1)$ равна 0, а не 1. Если же она больше нуля, то мера $[0, 1)$ равна ∞ , а не 1.

Поскольку в данном «построении» никакого построения множества X нет, то возникает вопрос, а можно ли *построить* неизмеримое множество? В 1968 г. Р. Соловей (полное доказательство см. в [10]) доказал, что в стандартной теории множеств нельзя явно построить ни одного неизмеримого множества. Таким образом, теорема о существовании неизмеримого множества исключительно грязная³.

²Как???

³Мы пользуемся следующей классификацией теорем существования.

Сильно конструктивная или *реальная* теорема существования — такая, которая дает реализуемое построение объекта.

Конструктивная теорема существования — такая, из которой извлекается теоретический алгоритм построения объекта.

Но данный факт отнюдь не влечет того, что любое явно построенное множество измеримо. Еще в 1930 г. Н.Н. Лузин [4] построил пример явно определимого (проективного) множества, для которого никак не удавалось доказать его измеримость или опровергнуть ее. В 1970 г. Соловей и др. (изложение результатов смотри, например, в книге Йеха [2]) показали, что проблема измеримости лужинского множества неразрешима в $\mathbf{ZF}$. Более того, имеются два определимых множества, таких, что если одно из них измеримо, то неизмеримо другое (естественно, что для каждого из них проблема измеримости неразрешима).

Тем не менее среди математиков, занимающихся функциональным анализом, ходит глубоко укоренившийся и почтенный предрассудок⁴: *если множество либо функция определены явно, то доказывать их измеримость нет нужды*. Особенно страшно, что это ошибочное предположение в большинстве случаев невидимо. Даже если оно слегка заметно, оно маскируется под обычную математическую неаккуратность одного из перечисленных выше видов.

Эта ошибка в высшей степени заразна, поскольку крайне маловероятно, чтобы в одной и той же работе использовались два объекта, измеримость которых взаимно противоречива. Поэтому результат каждой отдельной работы выглядит весьма правдоподобно («истинным», как говорят математики), и он не хуже, чем неразрешим в теории множеств. Поэтому ссылки на работы, основанные на данном предрассудке, наследуют инфекцию уже невидимо, и цепочка таких наследований вполне может привести к тому (этот вопрос требует дополнительного исследования), что используются уже несовместимые результаты. Если даже полученный «с помощью» такой инфекции явно абсурдный ре-

Чистая (или эффективная по Пуанкаре [7]) теорема существования — та, из которой извлекается однозначное описание построенного объекта, но алгоритма она не дает.

Грязная теорема существования — такая теорема, которая даже в принципе не может дать построения объекта.

То, что в математической традиции называют чистыми теоремами существования, у конструктивистов называют грязными.

⁴Когда он возник, установить уже очень тяжело. Конечно же, в московской школе функционального анализа этот предрассудок не мог возникнуть раньше смерти Н.Н. Лузина, но уже к середине 60-х годов он был глубоко укоренившейся почтенной традицией.

зультат будет отброшен самоцензурой либо цензурой математиков, то, поскольку в каждой работе встречаются неаккуратности, вина за ошибку будет свалена на одну из них.

Самое трагичное то, что математики, занимающиеся функциональным анализом, восприняли результат Соловья о невозможности построения неизмеримого множества как *подтверждение* своего заблуждения⁵. Они слышали о неразрешимых проблемах, но по-прежнему верят в давно поверженного идола «математической истины» и слепо поклоняются ему. До сих пор в работах ведущих математиков встречаются вопросы типа: «Ну да, мы слышали, что гипотеза континуума неразрешима. Но *на самом деле* истинна она или нет?» Стоит накрепко запомнить, что *сама постановка вопроса об истинности утверждения в теории множеств абсурдна*.

Таким образом, одна из почтеннейших областей математики оказалась глубоко заражена интеллектуальным вирусом, и ныне невозможно обезвредить данный вирус без длительной и болезненной процедуры дезинфекции.

3 Информатика: функции от многих переменных

Несмотря на ранее высказанные положения о большей строгости современной теоретической информатики по сравнению с математикой, она также инфицирована. Правда, столь мощных, коварных и скрытых вирусов, как упомянутый ранее, автор в информатике не знает. Обычно инфекция в информатике возникает на границах между теорией и практикой, поэтому ее легче диагностировать и (в принципе) даже излечить.

Но по крайней мере один вирус возник внутри самой теоретической информатики и иногда почти невидимо распространяется.

Многие теоремы, характеризующие различные типы семантик, доказываются для программных функций в «принятом для

⁵ Автор со стыдом признается: я лично рассказывал специалистам по функциональному анализу о новых результатах теории множеств, и лишь намного позже узнал, как был воспринят доклад. А в самом докладе я «очевидной» для логика оговорки о том, что недоказуемость неизмеримости не означает измеримости, видимо, не сделал (правда, дальнейший опыт общения с математиками показал, что, даже если она была сделана, но один раз, она не была бы услышана).

простоты, без ограничения общности» предположении, что функции одноместны. Часто данное предположение даже не выписывается явно и может быть установлено лишь анализом всего текста работы. Законность такого предположения обосновывается двумя аргументами.

Во-первых, «очевидно», что n -ки можно заменить записями с n полями, а эти записи уже рассматривать как единый объект. Во-вторых, имеется преобразование, изобретенное российским математиком М. Шейнфинкелем и использованное Х. Карри (Curry), называемое в английском языке «currying». Это замена вызова n -местной функции последовательными вызовами функционалов высших порядков от одного аргумента:

$$(f\ a_1 \ \dots \ a_n) \implies (\dots (f\ a_1) \ \dots) a_n$$

Оба этих внешне безобидных преобразования начинают подводить, когда мы вводим в рассмотрение ошибки. А без понятия ошибки описать программистские функции нельзя. Функция от многих переменных может иногда сработать правильно, даже если один из ее аргументов ошибочен. Это и сами программисты повсю используют, поскольку в общераспространенных языках программирования логические связки определяются несимметрично. Скажем, $A \& B$ определяется как

if A then B else false fi.

Это дает возможность проверять условия вида $i > 0 \& i < n \& x[i] > a$, где значение $x[i]$ определено лишь для i от 0 до $n - 1$.

Этот эффект возможного игнорирования ошибок полностью исчезает при замене нескольких параметров на структуру данных. Структура данных ошибочна, если ошибочен хотя бы один ее компонент.

А при преобразовании Карри возникает еще более тонкий эффект. Параметры функции в приличном алгоритмическом языке вычисляются *совместно*, т.е. порядок, в котором они подаются в функцию, неизвестен. При преобразовании Карри мы подменяем совместное исполнение строго последовательным.

4 Типы как доказательства: легко обнаруживаемый вирус

Этот вирус весьма показателен как пример эффектов, возникающих на границе теории и практики. Он четко высвечивает причины возникновения таких эффектов. Это, во-первых, «прагматическое» отношение практиков к теории, как к молитве, которую нужно прочесть перед началом «реального» дела, а затем забыть о ней. Во-вторых, это полное опускание даже в лучших курсах математической информатики «неприятных» результатов⁶.

Это опускание отрицательных результатов связано с глубиной причиной. Англо-саксонское мышление «позитивно». Автоматический ответ западного человека: «Да». Русский же даже согласие выразит скорее всего словами: «Почему же нет?» Его автоматический ответ: «Нет». Обычно позитивное мышление рассматривается как хорошее, а негативное — как дурное. Но, как всегда, поскольку атрибут человека — ошибка, наиболее привлекательные решения содержат в себе наиболее коварные ошибки. Это не значит, что ими *нельзя* пользоваться. Но пользоваться ими, не осознавая «подводных камней», означает подвергать себя массе опасностей, интеллектуальная инфекция является всего лишь одной из них. А именно такое безоглядное поведение диктуется позитивным мышлением⁷.

Рассмотрим пример весьма популярного в кругах информатиков и «продвинутых в теории» программистов изоморфизма

$$\text{Proofs} \quad \Longleftrightarrow \quad \text{Types}$$

Этот изоморфизм стал известен после того, как он был опубликован в книге Карри и Ховарда [9] в 1968 г. В ней было показано, что типы исходных комбинаторов комбинаторной логики полностью совпадают с аксиомами гильбертовского исчисления

⁶Смотри, например, прекрасную книгу [8], в которой по поводу важнейших для приложений отрицательных результатов сказано: «They are only of limited theoretical interests and are of no use for practitioners».

⁷Итак, основная ошибка в нем неустранима (что само по себе не является пороком, поскольку недостатки и достоинства всегда продолжают друг друга) и заложена на метауровне (что исключительно опасно).

высказываний, содержащими одну лишь импликацию:

$$\begin{aligned} (\mathbf{K}^{(a \rightarrow (b \rightarrow a))} x^a y^b) &= x^a; \\ (\mathbf{S}^{((a \rightarrow (b \rightarrow c)) \rightarrow ((a \rightarrow b) \rightarrow (a \rightarrow c)))} x^{(a \rightarrow (b \rightarrow c))} y^{(a \rightarrow b)} z^a) &= \\ ((x^{(a \rightarrow (b \rightarrow c))} z^a)^{b \rightarrow c} (y^{(a \rightarrow b)} z^a)^b)^c. \end{aligned}$$

Таким образом, типы корректных выражений комбинаторной логики взаимнооднозначно совпадают с формулами, доказуемыми в чистой импликативной логике, а сами выражения — с выводами в гильбертовской системе, представленными как бинарные деревья.

Этот же изоморфизм сохраняется для λ -исчисления и импликативной логики в форме естественного вывода. Но с добавлением других логических связок изоморфизм начинает стремительно разрушаться, и для произвольных конструктивных логик становится гомоморфизмом. А простейший способ убить полностью и окончательно такой изо(гомо)морфизм — добавить комбинатор неподвижной точки

$$(\mathbf{Y} f) = (f (\mathbf{Y} f)).$$

Ижевские студенты впадали в неприличный приступ гомерического хохота после того, как они выводили тип данного комбинатора $((a \rightarrow a) \rightarrow a)$ и сопоставляли это с утверждениями, встречающимися практически во всех описаниях функциональных типизированных языков и учебных пособиях по этим языкам, что их структура типов настолько хорошо сконструирована, что само по себе присваивание типов значениям дает доказательство правильности программы.

Конечно же, при этом «скромно» умалчивалось о других структурах данных, присутствующих в таких языках, но одного комбинатора $\mathbf{Y}$, вставляемого во все эти языки, уже более чем достаточно.

Причиной такого добавления возможностей, убивающих декларируемые хорошие свойства, является то, что в «позитивном прогрессистском» мировоззрении «новый» и «сильный» безоговорочно оцениваются как позитивные эпитеты. А их нужно квалифицировать по-другому. «Новый» — это эпитет всего-на-всего скоропортящийся, «сильный» должен вызывать два вопроса: «Сильный в каком отношении?» и «А нужна ли для на-

ших задач эта сила?» Но эти вопросы уже являются признаком негативного мышления. . .

В программировании к этой сладкой парочке добавляется слово «универсальный», которое в нашей школе уже расценивается как неприличное.

5 Антивирусы

Прежде всего, практически любая полноценная религия предлагает такие антивирусы. В христианстве наиболее ценные защитные механизмы следующие.

1. Отказ поклоняться чему-то, что ниже Бога, и признавать этот отказ Истиной.
2. Четкое понятие греха. «Грех не есть непослушание или формальное нарушение воли божией. Грех есть прежде всего испытание человека свободой» (Н. А. Бердяев).
3. Четкое понимание недопустимости греховного поведения и одновременно того, что все равно человек грешен⁸, и что порок — не грех, а упорство в грехе.
4. Осознание, что грехи нужно прощать, а не осуждать с порога, и вместе с тем, прощая, порою надо судить, но любой суд человеческий не может быть полностью справедливым.
5. Регулярная молитва, покаяние и исповедь. Понимание того, что все эти три способа очищения бессильны, если исполняются чисто формально.
6. Молитвы об изгнании бесов как средство «полевой» самозащиты (отгнание злых духов и сохранение от дьявола, в православном молитвослове) и, конечно же, «Отче наш». Молитвы о даровании разума как средство собраться с духом⁹.

⁸ «Страшен не грех, но бесстыдство после греха» (Иоанн Златоуст).

⁹ Одна из них (молитва свт. Иоанна Златоуста) настолько четко и ясно выражает то, что необходимо для самозащиты и самосовершенствования интеллектуалам, что не могу удержаться от искушения привести ее полностью:

«Дай, Господи, сейчас моему недостойнству также благодать разума,

Мораль сама по себе также ставит четкие пределы главному искушению, на котором базируются духовные и интеллектуальные инфекции: «свободе». Вроде бы человека «убедили», а сердце ему не дает поступать «разумно». Вроде бы все «законно», а так нельзя. Вроде бы «противозаконно», но нужно¹⁰!

Практически убитое за XX век понятие *чести* также было мощной преградой на пути зомбирования¹¹.

В книге [1] на первый взгляд изложение концепции вирусов производится в лучшем стиле легковесной американской само-рекламы, но зато она рекламирует себя как антивирус. Сразу же видно, что эта книга внешне похожа на руководства для хакеров либо террористов, в которых на первой странице говорится, что данное руководство поможет вам спастись от атак, а далее подробно расписывается техника таких атак. Однако тот, кто стремится манипулировать и владеет техникой НЛП либо PR-технологий хотя бы на элементарном уровне, будет разочарован, прочтя эту книгу: он не найдет в ней ничего нового для себя. А книга на самом деле глубже: в нее встроены защиты от всех простейших антивирусов и от первоуровневого критического мышления.

Более того, эклектическое смешение понятий на самом деле маскирует тонкий момент: эта книга провоцирует снятие таких классических и проверенных защит, как религия, мораль, честь, ненавязчиво классифицируя их как разновидности вирусов. Таким образом, ее можно сравнить с известным трояном: «Кликни меня, чтобы скачать новейшую антивирусную программу».

Метод Норбекова [6] борьбы с психическими вирусами можно назвать *cleardisk*. Он основан на древней восточной техно-

чтобы распознавать приятное для Тебя, а для меня полезное, и не только распознавать, но и совершать, чтобы не увлекаться и не прилепляться к пустому, чтобы сострадать к страдающим и снисходить к грешникам».

¹⁰Все это показывает, что идея «правового государства» порочна в своей основе. От античной концепции благозакония, проверки закона моралью и обычаем и корректировки обычаев законом оставили лишь «законие», которое после этого автоматически перестает быть благом, поскольку законы создают законники, стряпчие, профессиональный навык которых выдавать черное за белое и наоборот, а проверки законов моралью нет (категория морали внезаконна!)

¹¹Вспомним хотя бы принцип русских офицеров: «Жизнь — царю, честь — никому».

логии максимальной активизации интуиции через отключение сознания и очищение подсознания. Полностью очистившись от мыслей, мы заодно очищаемся от вредных мыслей. А кратковременное отключение мыслей можно сравнить с перезагрузкой компьютера: после этого эффекты темных воздействий и даже неглубоко укоренившихся вирусов исчезают, что особенно полезно для защиты от воздействий толпы и рекламы.

Единственным чисто интеллектуальным средством иммунизации, известным автору является переход на уровень многоуровневого критического мышления в классификации сфер разума кн. Белосельского-Белозерского [5]. Но это уровень исключительно высокий, и удерживаться на нем трудно. Частичный иммунитет дает уже уровень метода, но в этой иммунной системе есть дыры, связанные с самообольщением человека, владеющего сильным методом. За счет крайнего консерватизма очень устойчив к таким инфекциям и разум, основанный на здравом смысле.

А вот сферы, промежуточные между сферой здравого смысла и сферой метода, наоборот, резко снижают сопротивляемость интеллекта вирусам, и на них единственной защитой являются рассмотренные выше средства.

Литература

- [1] Броди Р. Психические вирусы. Как программируют ваше сознание. М.: Поколение, 2006.
- [2] Йех Т. Теория множеств и метод форсинга. М.: Мир, 1973.
- [3] Лузин Н.Н. Лекции об аналитических множествах и их приложениях. М.: Гостехиздат, 1953.
- [4] Louzin N.N. Analogues entre les ensembles mesurables et les ensembles analitiques. // Fundamenta Mathematicae, 1930. V. 16. P. 48–76.
- [5] Непейвода Н.Н. Уровни знаний и умений // Труды научно-исследовательского семинара Логического центра Института философии РАН. Вып. XIV. М.: 2000. С. 9–35.
- [6] Норбеков М. Где зимует кузькина мать, или Как достать халявный миллион решений? М.: ООО «Издательство АСТ», 2003.
- [7] Пуанкаре А. О науке. М.: Наука, 1983.
- [8] Mitchell J.C. Foundations for programming languages. Cambridge, 1996.
- [9] Curry H.B., Howard R. Combinatory logic. Vol. 2. Amsterdam, 1968.
- [10] Solovay R. A model of set theory in which every set of reals is Lebesgue measurable. // Ann. Math., 1970. V. 92, № 1. P. 1–56.

Модифицированная семантика Фреге и функциональная интерпретация¹

С. А. ПАВЛОВ

ABSTRACT. Algebra of set as metalanguage for the modifications of Frege's semantics are proposed. Denotate (referent) truth exists but denotate falsehood non exist in modified Frege's semantics.

Целью статьи является установление соотношений между операциями алгебры множеств, логическими связками и сентенциональными функциями исходя из модифицированной семантики Фреге с единственным денотатом *истина*.

При построении семантики языка сентенциональной логики Г. Фреге рассматривал предложения как имена особого рода, денотатами (референтами) которых являются такие предметы, как истина либо ложь. К отождествлениям между собой предметов, денотатов, истины либо лжи он также присоединяет истинностные значения как значения сентенциональных функций [3, 4].

Пусть имеется язык классической сентенциональной логики L с отрицанием $\sim$ и конъюнкцией $\wedge$. Сентенциальные переменные: $p, q, p_1, q_1 \dots$. Правила построения формул стандартные. Пусть $A, \sim A, A \wedge B$ есть формулы этого языка.

Таблицы истинности строятся исходя из семантических правил. Приведем в виде таблиц некоторые из семантических утверждений, предшествующих построению таблиц истинности.

A обозначает истину	$\sim A$ обозначает ложь
A обозначает ложь	$\sim A$ обозначает истину

¹Работа выполнена при поддержке РГНФ, грант № 07-03-00242.

$(A \wedge B)$	B обозн. истину	B обозн. ложь
A обозн. истину	$(A \wedge B)$ обозн. истину	$(A \wedge B)$ обозн. ложь
A обозн. ложь	$(A \wedge B)$ обозн. ложь	$(A \wedge B)$ обозн. ложь

Для сопоставления алгебраических операций и логических связок возьмем в качестве метаязыка для семантики Фреге язык алгебры множеств. Этот метаязык отличается от метаязыка для языка логики L тем, что вместо приписываний значений переменным языка L в первом производится сопоставление семантическому отношению обозначения отношение принадлежности элемента множеству следующим образом.

Формуле A сопоставим множество, обозначаемое как $M(A)$.

Далее сопоставим семантическому утверждению, что формула A обозначает денотат d (или перефразируя: денотат d обозначается формулой A), утверждение алгебры множеств, что элемент d принадлежит множеству $M(A)$, т.е. $(d \in M(A))$.

Сопоставим денотату *истина* элемент *истина*, а денотату *ложь* элемент *ложь*.

Имеем множество $\{\text{истина}, \text{ложь}\}$.

Пусть, к примеру, A истинно. Тогда истинному предложению A , которое обозначает *истина*, сопоставлено множество $M(A)$, которому принадлежит элемент *истина*, т.е. $M(A) = \{\text{истина}\}$ и $(\text{истина} \in M(A))$.

В другом случае пусть A ложно. Тогда ложному предложению A , которое обозначает *ложь*, сопоставлено множество $M(A)$, которому принадлежит элемент *ложь*, т.е. $M(A) = \{\text{ложь}\}$ и $(\text{ложь} \in M(A))$.

В алгебре множеств имеет место соотношение:

$$((x \in M(A)) \wedge (x \in M(B))) = (x \in M(A \cap B)).$$

Можно поставить вопрос о сопоставлении конъюнкции $\wedge$ и операции пересечения множеств $\cap$, то есть сопоставлении формулы $(A \wedge B)$ и формулы $(M(A) \cap M(B))$, а также о сопоставлении отрицания и операции дополнения. Вопрос: имеет ли место соотношение

$$(A \wedge B) = (M(A) \cap M(B))?$$

Ответ отрицательный, что видно из сравнения таблицы, полученной из таблиц с семантическими утверждениями для конъюнкции

$M(A \wedge B)$	{ истина }	{ ложь }
{ истина }	{ истина }	{ ложь }
{ ложь }	{ ложь }	{ ложь }

с таблицей, полученной по законам алгебры множеств

$(M(A) \cap M(B))$	{ истина }	{ ложь }
{ истина }	{ истина }	{ }
{ ложь }	{ }	{ ложь }

Тогда поставим следующий вопрос: возможно ли так изменить семантику Фреге, чтобы имело место вышеупомянутое соотношение $M(A \wedge B) = (M(A) \cap M(B))$?

Ответ положительный. Достаточно модифицировать семантику Фреге так, что отбросить денотат ложь как несуществующий. Тогда в положениях учения Фреге об истинности и ложности:

всякое истинное предложение обозначает *истину*

всякое ложное предложение обозначает *ложь*

заменим второе положение на

всякое ложное предложение не обозначает *истину* (см. [1, 2]).

Тогда таблицы семантических утверждений модифицируются следующим образом.

A обозначает истину	$\sim A$ не обозначает истину
A не обозначает истину	$\sim A$ обозначает истину

$(A \wedge B)$	B обозн. истину	B не обозн. истину
A обозн. истину	$(A \wedge B)$ обозн. истину	$(A \wedge B)$ не обозн. истину
A не обозн. истину	$(A \wedge B)$ не обозн. истину	$(A \wedge B)$ не обозн. истину

Отметим, что полученная семантика нефункциональна, так как таблицы истинности для сентенциальных функций с истинностными значениями построить нельзя.

Далее модифицируем соответствующие соглашения в сопоставлении семантических утверждений с формулами алгебры множеств.

Сопоставляем денотату *истина* элемент *истина*.

Имеем множество $\{\text{истина}\}$.

Пусть, к примеру, A ложно. Тогда ложному предложению A , которое не обозначает *истину*, сопоставлено множество $M(A)$, которое является пустым, т.е. $M(A) = \{\}$ и $\neg(\text{истина} \in M(A))$.

Тогда имеет место соотношение

$M(A \wedge B) = (M(A) \cap M(B))$, так как

$(A \wedge B)$	$\{\text{истина}\}$	$\{\}$
$\{\text{истина}\}$	$\{\text{истина}\}$	$\{\}$
$\{\}$	$\{\}$	$\{\}$

$(M(A) \cap M(B))$	$\{\text{истина}\}$	$\{\}$
$\{\text{истина}\}$	$\{\text{истина}\}$	$\{\}$
$\{\}$	$\{\}$	$\{\}$

Также имеет место соотношение $(\{\text{истина}\} \setminus M(A) = M(\sim A))$, устанавливающее связь между отрицанием и дополнением.

Теперь, исходя из того, что для множеств $\{\text{истина}\}$ и $\{\}$ их мощность равна 1 и 0 соответственно, т.е. $Card(\{\text{истина}\}) = 1$ и $Card(\{\}) = 0$, можно задать функции на множестве $\{1, 0\}$.

Будем рассматривать формулу $Card(M(A) \cap M(B))$ как двухместную функцию $\varphi_{\wedge}(x, y)$:

$\varphi_{\wedge}(Card(M(A), Card(M(B))) =_{df} Card(M(A) \cap M(B))$ и получаем

$$\varphi_{\wedge}(Card(M(A), Card(M(B))) = Card(M(A \wedge B))$$

соотношение между двухместной функцией и логической связкой.

Также устанавливаем соотношения между одноместной функцией $\varphi_{\sim}(x)$ и отрицанием $\sim$.

$\varphi_{\sim}(Card(M(A))) =_{df} Card(\{\text{истина}\} \setminus M(A))$, откуда получаем

$$\varphi_{\sim}(Card(M(A))) = Card(M(\sim A)).$$

Отметим, что полученные функции соответствуют операциям булевой алгебры.

Таким образом, установлены соотношения между функциями и соответствующими им логическими связками в рамках модифицированной семантики Фреге. Чтобы эти соотношения и функции можно было рассматривать как функциональную интерпретацию языка логики L , необходимо продолжить модификацию семантики Фреге. Коррекция будет состоять в отказе от отождествления значений функций, интерпретирующих сентенциональные связки, с денотатами соответствующих формул. Вместо последних в качестве аргументов и значений функций будем брать элементы из множества $\{1, 0\}$.

Данный подход может быть распространен и на неклассические случаи. Тогда имеет смысл использовать бисентенциональную семантику, в которой рассматриваются пары формул $\langle A, \sim A \rangle$, каждая из которых независимо одна от другой может обозначать либо не обозначать *истину*.

Таким образом, рассмотрены теоретико-множественные и функциональные соотношения, связывающие синтаксические, семантические и онтологические аспекты сентенциональной логики.

Литература

- [1] Павлов С.А. Термины «истинность» и «ложность» в языке // IV Российский философский конгресс: Философия и будущее цивилизации. Тезисы докладов и выступлений IV Российского философского конгресса. Том I. М., 2005. С. 525.
- [2] Павлов С.А. Модификации семантики Фреге и семантики Данна для сентенциональных логик // Логические исследования. Вып. 13. М., 2006. С. 136-140.
- [3] Фреге Г. О смысле и значении // Логика и логическая семантика. М., 2000. С. 230-246.
- [4] Фреге Г. Функция и понятие // Логика и логическая семантика. М., 2000. С. 215-229.

Две последовательности простых паранепротиворечивых логик¹

В. М. Попов

ABSTRACT. The infinite sequences $I_{1,1}, I_{1,2}, I_{1,3}, \dots, I_{1,\omega}$ and $Int_{1,1}, Int_{1,2}, Int_{1,3}, \dots, Int_{1,\omega}$ of simple paraconsistent logics are defined. The sequent systems axiomatizing these logics are described.

Определяются две такие бесконечные строго убывающие по включению последовательности $I_{1,1}, I_{1,2}, I_{1,3}, \dots$ и $Int_{1,1}, Int_{1,2}, Int_{1,3}, \dots$ простых паранепротиворечивых логик, что пересечение всех членов первой последовательности есть простая паранепротиворечивая логика $I_{1,\omega}$, а пересечение всех членов второй последовательности есть простая паранепротиворечивая логика $Int_{1,\omega}$.

Язык L , являющийся языком всех рассматриваемых в предлагаемой работе логик, есть стандартно определяемый пропозициональный язык, алфавиту которого принадлежат только следующие символы: $p_1, p_2, p_3, \dots$ (пропозициональные переменные языка L), $\&, \vee, \supset$ (бинарные логические связки языка L), $\neg$ (унарная логическая связка языка L), левая и правая круглые скобки. Определение L -формулы индуктивно:

- (1) всякая пропозициональная переменная языка L есть L -формула,
- (2) если A и B являются L -формулами, то $(A \& B)$, $(A \vee B)$, $(A \supset B)$ и $(\neg A)$ являются L -формулами,
- (3) ничто другое не является L -формулой.

Квазиэлементарной L -формулой называем L -формулу, в которую не входит ни одна бинарная логическая связка языка L .

¹Исследование поддержано РФФИ, грант № 06-06-80292-а.

Длиной квазиэлементарной L -формулы называем число всех вхождений $\neg$ в эту L -формулу. Ясно, что для всякой квазиэлементарной L -формулы существует единственная длина этой квазиэлементарной L -формулы, и что длина всякой квазиэлементарной L -формулы есть целое неотрицательное число. Обозначаем правило *modus ponens* в L через MP , а правило подстановки L -формулы в L -формулу вместо пропозициональной переменной языка L обозначаем через Sub . Логикой называем непустое множество L -формул, замкнутое относительно MP и Sub . Теорией логики L называем множество L -формул, включающее логику L и замкнутое относительно MP . Множество всех L -формул называем тривиальной теорией. Противоречивой теорией логики L называем такую теорию T логики L , что для некоторой L -формулы A верно следующее: $A \in T$ и $\neg A \in T$. Паранепротиворечивой теорией логики L называем такую противоречивую теорию T логики L , что T не есть тривиальная теория. Простой паранепротиворечивой теорией логики L называем такую паранепротиворечивую теорию T логики L , что для всякой L -формулы A верно следующее: если A и $(\neg A)$ принадлежат теории T , то A есть квазиэлементарная L -формула. Паранепротиворечивой логикой называем такую логику L , что существует паранепротиворечивая теория логики L . Простой паранепротиворечивой логикой называем такую паранепротиворечивую логику L , что всякая паранепротиворечивая теория логики L является простой паранепротиворечивой теорией логики L . Определим исчисления $HInt_{1,1}$, $HInt_{1,2}$, $HInt_{1,3}, \dots$, $HInt_{1,\omega}$, $HI_{1,1}$, $HI_{1,2}$, $HI_{1,3}, \dots$, $HI_{1,\omega}$. Все эти исчисления являются исчислениями гильбертовского типа, язык каждого из которых есть L . Каждое из этих исчислений имеет единственное правило вывода — правило MP . Таким образом, для определения любого из этих исчислений остается задать множество всех его аксиом. Множеству всех аксиом исчисления $HInt_{1,i}$ (i есть целое неотрицательное число) принадлежат все те и только те L -формулы, каждая из которых имеет хотя бы один из следующих видов (A , B , C и D есть L -формулы, при этом D не является квазиэлементарной L -формулой длины меньшей i):

$$(I) ((A \supset B) \supset ((B \supset C) \supset (A \supset C))),$$

- (II) $(A \supset (A \vee B))$,
- (III) $(B \supset (A \vee B))$,
- (IV) $((A \supset C) \supset ((B \supset C) \supset ((A \vee B) \supset C)))$,
- (V) $((A \& B) \supset A)$,
- (VI) $((A \& B) \supset B)$,
- (VII) $((C \supset A) \supset ((C \supset B) \supset (C \supset (A \& B))))$,
- (VIII) $((A \supset (B \supset C)) \supset ((A \& B) \supset C))$,
- (IX) $((A \& B) \supset C) \supset ((A \supset (B \supset C)))$,
- (X) $((A \supset (\neg(B \supset B))) \supset (\neg A))$,
- (XI) $((\neg D) \supset (D \supset A))$.

Множеству всех аксиом исчисления $HInt_{1,\omega}$ принадлежат все те и только те L -формулы, каждая из которых имеет хотя бы один из видов (I)–(XI), или имеет вид $((\neg E) \supset (E \supset A))$, где E есть L -формула, не являющаяся квазиэлементарной L -формулой. Для всякого n из $\{0, 1, 2, \dots\}$ множество всех аксиом исчисления $HI_{1,n}$ равно объединению множества всех аксиом исчисления $HInt_{1,n}$ с множеством всех L -формул вида $((A \supset B) \supset A) \supset A$, где A и B являются L -формулами. Заметим, что множество всех L -формул, каждая из которых доказуема в $HInt_{1,0}$, равно множеству всех интуиционистских тавтологий в языке L , а множество всех L -формул, каждая из которых доказуема в $HI_{1,0}$, равно множеству всех классических тавтологий в языке L . Условимся, что для всякого n из $\{0, 1, 2, \dots\}$ $Int_{1,n}$ есть множество всех L -формул, доказуемых в $HInt_{1,n}$ и $I_{1,n}$ есть множество всех L -формул, доказуемых в $HI_{1,n}$. Доказаны следующие теорема 1 и теорема 2.

ТЕОРЕМА 1. Для всякого n из $\{0, 1, 2, \dots\}$ $Int_{1,n}$ и $I_{1,n}$ являются простыми паранепротиворечивыми логиками.

ТЕОРЕМА 2. Последовательность $Int_{1,1}, Int_{1,2}, Int_{1,3}, \dots$ и последовательность $I_{1,1}, I_{1,2}, I_{1,3}, \dots$ строго убывают по включению, пересечение всех членов первой последовательности равно

$Int_{1,\omega}$, а пересечение всех членов второй последовательности равно $I_{1,\omega}$.

Определим исчисления $GInt_{1,1}, GInt_{1,2}, GInt_{1,3}, \dots, GInt_{1,\omega}, GI_{1,1}, GI_{1,2}, GI_{1,3}, \dots, GI_{1,\omega}$. Все эти исчисления являются секвенциальными исчислениями, выводы в которых строятся обычным для этого типа исчислений способом. Для всякого целого положительного числа k формулировка исчисления $GInt_{1,k}$ (соответственно формулировка исчисления $GI_{1,k}$) получается из предложенной в [1] формулировки исчисления GI (соответственно из предложенной в [1] формулировки исчисления GK) исключением правил для кванторов (при надлежащей модификации языка) и наложением на правила введения негации слева ограничения: боковая формула этого правила есть L -формула, не являющаяся квазиэлементарной L -формулой, длина которой меньше k . Формулировка исчисления $GInt_{1,\omega}$ (соответственно формулировка исчисления $GI_{1,\omega}$) получается из формулировки исчисления GI , данной в [1] (соответственно из формулировки исчисления GK , данной в [1]), исключением правил для кванторов (при надлежащей модификации языка) и наложением на правила введения негации слева ограничения: боковая формула этого правила есть L -формула, не являющаяся квазиэлементарной L -формулой. Для каждого исчисления $GInt_{1,k}$ и $GI_{1,k}$ ($k \in \{1, 2, \dots, \omega\}$) доказана теорема об устранимости сечения. Для любого исчисления $GInt_{1,k}$ ($k \in \{1, 2, \dots, \omega\}$) доказательства теоремы об устранимости сечения можно построить аналогично данному в [1] доказательству теоремы об устранимости сечения для GI , а для любого исчисления $GI_{1,k}$ ($k \in \{1, 2, \dots, \omega\}$) доказательство теоремы об устранимости сечения можно построить аналогично данному в [1] доказательству теоремы об устранимости сечения для GK . С использованием факта устранимости сечения для каждого исчисления $GInt_{1,k}$ и $GI_{1,k}$ ($k \in \{1, 2, \dots, \omega\}$) и методов работы [1] доказаны следующие теоремы 3 и 4.

ТЕОРЕМА 3. Для всякого k из $\{0, 1, 2, \dots, \omega\}$ и для всякой L -формулы A верно следующее:

- (1) $A \in Int_{1,k}$ тогда и только тогда, когда секвенция $\rightarrow A$ выводима в $GInt_{1,k}$;

(2) $A \in I_{1,k}$ тогда и только тогда, когда секвенция $\rightarrow A$ выводима в $GI_{1,k}$.

ТЕОРЕМА 4. Для всякого k из $\{0, 1, 2, \dots, \omega\}$ исчисления $GInt_{1,k}$ и $GI_{1,k}$ разрешимы.

СЛЕДСТВИЕ 5. (Следствие теорем 3 и 4) Для всякого k из $\{0, 1, 2, \dots, \omega\}$ логики $Int_{1,k}$ и $I_{1,k}$ разрешимы.

Литература

- [1] Генцен Г. Исследования логических выводов // Математическая теория логического вывода. М., 1967. С. 9–74.

Четыре простые паралогики: семантики и секвенциальные формулировки¹

В. М. Попов

ABSTRACT. The semantics adequate to a paraconsistent logic $I_{1,\omega}$, a paracomplete logic $I_{2,\omega}$, a paranormal logics $I_{0,\omega}$ and $I_{3,\omega}$ are constructed. The sequent systems axiomatizing these logics are described. The embeddings of classical propositional logic into $I_{0,\omega}$, $I_{1,\omega}$, $I_{2,\omega}$ and $I_{3,\omega}$, are defined.

Строятся семантика, адекватная нетабличной простой паранепротиворечивой логике $I_{1,\omega}$, семантика, адекватная нетабличной простой параконсептивной логике $I_{2,\omega}$, семантика адекватной нетабличной простой паранормальной логике $I_{0,\omega}$, и семантика, адекватная нетабличной простой паранормальной логике $I_{3,\omega}$. Предлагаются секвенциальные формулировки этих логик, удовлетворяющие условию эффективности поиска доказательства. Определяются отображения, погружающие классическую пропозициональную логику в логики $I_{0,\omega}$, $I_{1,\omega}$, $I_{2,\omega}$, $I_{3,\omega}$.

1 Некоторые определения

Язык L , являющийся языком изучаемых здесь логик, есть стандартно определяемый пропозициональный язык, алфавиту которого принадлежат только следующие символы: $p_1, p_2, p_3, \dots$ (пропозициональные переменные языка L), $\&$, $\vee$, $\supset$ (бинарные логические связки языка L), $\neg$ (унарная логическая связка языка L), левая и правая круглые скобки. Определение L -формулы индуктивно:

- (1) всякая пропозициональная переменная языка L является L -формулой;

¹Работа выполнена при поддержке РФФИ, грант № 06-06-80292а.

- (2) если A и B являются L -формулами, то $(A \& B)$, $(A \vee B)$, $(A \supset B)$ и $(\neg A)$ являются L -формулами;
- (3) ничто другое не является L -формулой.

Квазиэлементарной L -формулой называем L -формулу, в которую не входит ни одна бинарная логическая связка языка L . Логикой называем непустое множество L -формул, замкнутое относительно правила подстановки в L и правила *modus ponens* в L . Теорией логики L называем множество L -формул, которое включает L и замкнуто относительно правила модус поненс в L . Ясно, что множество всех L -формул есть теория любой логики. Для всякой логики L тривиальной теорией логики L называем множество всех L -формул. Противоречивой теорией логики L называем такую теорию T логики L , что для некоторой L -формулы A верно следующее: $A \in T$ и $(\neg A) \in T$. Паранепротиворечивой теорией логики L называем такую противоречивую теорию T логики L , что T не есть тривиальная теория логики L . Паранепротиворечивой логикой называем такую логику L , что существует паранепротиворечивая теория логики L . Простой паранепротиворечивой логикой называем такую паранепротиворечивую логику L , что для всякой паранепротиворечивой теории T логики L верно следующее: если $A \in T$ и $(\neg A) \in T$, то A есть квазиэлементарная L -формула. Полной теорией логики L называем такую теорию T логики L , что для всякой L -формулы A верно следующее: $A \in T$ или $(\neg A) \in T$. Параконной теорией логики L называем такую теорию T логики L , что T не является полной теорией логики L и всякая полная теория логики L , включающая T , есть тривиальная теория логики L . Параконной логикой называем такую логику L , что существует параконная теория логики L . Простой параконной логикой называем такую параконную логику L , что для всякой параконной теории T логики L верно следующее: существует такая квазиэлементарная L -формула e , что $e \notin T$ и $(\neg e) \notin T$. Простой паралогикой называем логику которая является простой паранепротиворечивой логикой или простой параконной логикой. Простой паранормальной логикой называем логику, которая является простой паранепротиворечивой логикой и простой параконной логикой. Нетабличной логикой называем (следуя А. В. Кузнецову) ло-

гику, для которой не существует конечной характеристической матрицы.

2 Исчисления $HI_{0,\omega}$, $HI_{1,\omega}$, $HI_{2,\omega}$, $HI_{3,\omega}$ и логики $I_{0,\omega}$, $I_{1,\omega}$, $I_{2,\omega}$, $I_{3,\omega}$

Исчисления $HI_{0,\omega}$, $HI_{1,\omega}$, $HI_{2,\omega}$, $HI_{3,\omega}$ являются исчислениями гильбертовского типа. Язык каждого из этих исчислений есть L . Множеству всех аксиом исчисления $HI_{0,\omega}$ принадлежат все те и только те L -формулы, каждая из которых имеет хотя бы один из следующих видов (здесь и далее A , B и C являются L -формулами, а D есть L -формула, не являющаяся квазиэлементарной L -формулой):

- (I) $((A \supset B) \supset ((B \supset C) \supset (A \supset C)))$,
- (II) $(A \supset (A \vee B))$,
- (III) $(B \supset (A \vee B))$,
- (IV) $((A \supset C) \supset ((B \supset C) \supset ((A \vee B) \supset C)))$,
- (V) $((A \& B) \supset A)$,
- (VI) $((A \& B) \supset B)$,
- (VII) $((C \supset A) \supset ((C \supset B) \supset (C \supset (A \& B))))$,
- (VIII) $((A \supset (B \supset C)) \supset ((A \& B) \supset C))$,
- (IX) $((A \& B) \supset C) \supset ((A \supset (B \supset C)))$,
- (X) $((A \supset (\neg(B \supset B))) \supset (\neg A))$,
- (XI) $((\neg D) \supset (D \supset A))$.

Множеству всех аксиом исчисления $HI_{1,\omega}$ принадлежат все те и только те L -формулы, каждая из которых имеет хотя бы один из видов (I)–(XI) или имеет вид $((B \supset (\neg(A \supset A))) \supset (\neg B))$. Множеству всех аксиом исчисления $HI_{2,\omega}$ принадлежат все те и только те L -формулы, каждая из которых имеет хотя бы один из видов (I)–(X), или имеет вид (XII), или имеет вид $((\neg B) \supset (B \supset A))$. Множеству всех аксиом исчисления $HI_{3,\omega}$ принадлежат все те и только те L -формулы, каждая из которых есть аксиома

исчисления $HI_{0,\omega}$ или имеет вид $((A \& (\neg A)) \supset (B \vee (\neg B)))$. Правило *modus ponens* в L является единственным правилом вывода любого из исчислений $HI_{0,\omega}$, $HI_{1,\omega}$, $HI_{2,\omega}$, $HI_{3,\omega}$. Выводы (в частности, доказательства) в каждом из этих исчислений строятся обычным для гильбертовского исчисления образом. Для любого из этих исчислений определение L -формулы, доказуемой в нем, стандартно. Итак, исчисления $HI_{0,\omega}$, $HI_{1,\omega}$, $HI_{2,\omega}$, $HI_{3,\omega}$ заданы. Условимся об обозначениях: для всякого k из $\{0, 1, 2, 3\}$ обозначаем через $I_{k,\omega}$ множество всех L -формул, доказуемых в $HI_{k,\omega}$, а через CLP обозначаем множество всех классических тавтологий в языке L . Доказана следующая теорема 1.

ТЕОРЕМА 1. $I_{0,\omega}$ есть простая паранормальная логика, $I_{1,\omega}$ есть простая паранепротиворечивая логика, не являющаяся парapolной логикой, $I_{2,\omega}$ есть простая парapolная логика, не являющаяся паранепротиворечивой логикой, $I_{3,\omega}$ есть простая паранормальная логика, CLP есть логика, не являющаяся паралогикой.

3 Семантическая характеристика логик $I_{0,\omega}$, $I_{1,\omega}$, $I_{2,\omega}$, $I_{3,\omega}$

$I_{0,\omega}$ -оценкой называем отображение множества всех квазиэлементарных L -формул во множество $\{0, 1\}$. Учитывая, что для всякой квазиэлементарной L -формулы e квазиэлементарной L -формулой является $(\neg e)$, даем определение $I_{1,\omega}$ -оценки, определение $I_{2,\omega}$ -оценки, определение $I_{3,\omega}$ -оценки и определение CLP -оценки. $I_{1,\omega}$ -оценкой называем такую $I_{0,\omega}$ -оценку v , что для всякой квазиэлементарной L -формулы e верно следующее: $v(e) = 1$ или $v((\neg e)) = 1$. $I_{2,\omega}$ -оценкой называем такую $I_{0,\omega}$ -оценку v , что для всякой квазиэлементарной L -формулы e верно следующее: $v(e) = 0$ или $v((\neg e)) = 0$. $I_{3,\omega}$ -оценкой называем такую $I_{0,\omega}$ -оценку, которая является $I_{1,\omega}$ -оценкой или $I_{2,\omega}$ -оценкой. CLP -оценкой называем $I_{0,\omega}$ -оценку, которая является $I_{1,\omega}$ -оценкой и $I_{2,\omega}$ -оценкой. Можно доказать, что для всякой $I_{0,\omega}$ -оценки v существует единственное отображение $| \cdot |_v$ множества всех L -формул во множество $\{0, 1\}$, удовлетворяющее условиям:

- (а) для всякой квазиэлементарной L -формулы e верно, что $|e|_v = v(e)$;

- (б) для всякой L -формулы A , не являющейся квазиэлементарной L -формулой, верно, что $|(\neg A)|_v = 1$ тогда и только тогда, когда $|A|_v = 0$;
- (в) для всяких L -формул A и B верно, что $|(A \& B)|_v = 1$ тогда и только тогда, когда $|A|_v = 1$ и $|B|_v = 1$, $|(A \vee B)|_v = 1$ тогда и только тогда, когда $|A|_v = 1$ или $|B|_v = 1$, $|(A \supset B)|_v = 1$ тогда и только тогда, когда $|A|_v = 0$ или $|B|_v = 1$.

С использованием надлежащих модификаций леммы Линденбаума о расширении теории доказана следующая теорема 2.

ТЕОРЕМА 2. Для всякого k из $\{0, 1, 2, 3\}$ и всякой L -формулы A верно следующее:

- (1) $A \in I_{k,\omega}$ тогда и только тогда, когда для всякой $I_{k,\omega}$ -оценки v $|A|_v = 1$,
- (2) $A \in CLP$ тогда и только тогда, когда для всякой CLP -оценки v $|A|_v = 1$.

Опираясь на определения логик $I_{0,\omega}$, $I_{1,\omega}$, $I_{2,\omega}$, $I_{3,\omega}$ и CLP и теорему 2, нетрудно установить соотношения между указанными логиками: $I_{0,\omega} \subseteq I_{3,\omega}$, $I_{0,\omega} \neq I_{3,\omega}$, $I_{3,\omega} = I_{1,\omega} \cap I_{2,\omega}$, $I_{1,\omega} \subseteq CLP$, $I_{2,\omega} \subseteq CLP$, $I_{1,\omega}$ не включается в $I_{2,\omega}$, $I_{2,\omega}$ не включается в $I_{1,\omega}$. Теорема 2 лежит в основе семантического доказательства разрешимости всех рассматриваемых здесь простых паралогик. Теорему 2 удобно применять при доказательстве сформулированных ниже утверждения 3 и утверждения 4, которые использованы при доказательстве нетабличности логик $I_{0,\omega}$, $I_{1,\omega}$, $I_{2,\omega}$ и $I_{3,\omega}$.

УТВЕРЖДЕНИЕ 3. Для всякого k из $\{0, 1, 2, 3\}$ верно, что $(p_1 \supset p_1) \in I_{k,\omega}$.

Предваряя формулировку утверждения 4, условимся об обозначении. Заметим, что для всякой пропозициональной переменной p языка L и всякого целого неотрицательного числа m существует единственная квазиэлементарная L -формула, число вхождений логической связки $\neg$ в которую равно m и в которую входит p . Поэтому корректно следующее обозначение: для всякой пропозициональной переменной p языка L и всякого целого

неотрицательного числа m обозначаем через $\neg^{(m)}p$ L -формулу, число вхождений логической связки $\neg$ в которую равно m и в которую входит p .

УТВЕРЖДЕНИЕ 4. Для всякого k из $\{0, 1, 2, 3\}$, для всякого целого неотрицательного числа m и для всякого целого положительного числа n верно, что $(\neg^{(m)}p_1 \supset \neg^{(m+n)}p_1) \notin I_{k,\omega}$ или $(\neg^{(m+n)}p_1 \supset \neg^{(m)}p_1) \notin I_{k,\omega}$.

ТЕОРЕМА 5. Для всякого k из $\{0, 1, 2, 3\}$ верно, что $I_{k,\omega}$ есть нетабличная логика.

Используя определение логики и определение нетабличной логики и учитывая, что $I_{k,\omega}$ есть логика при всяком k из $\{0, 1, 2, 3\}$, можно доказать теорему 5, опираясь на утверждение 3, утверждение 4 и нижеследующую лемму.

ЛЕММА 6. Если M есть такое множество L -формул, что $(p_1 \supset p_1) \in M$, и для всякого целого неотрицательного числа m , и для всякого целого положительного числа n верно, что $(\neg^{(m)}p \supset \neg^{(m+n)}p_1) \notin M$ или $(\neg^{(m+n)}p_1 \supset \neg^{(m)}p) \notin M$, то M не имеет конечной характеристической матрицы.

Доказательство этой леммы базируется на том известном факте, что множество всех отображений конечного множества в себя, конечно.

4 Секвенциальные исчисления $GI_{0,\omega}$, $GI_{1,\omega}$, $GI_{2,\omega}$, $GI_{3,\omega}$

Секвенции имеют вид $\pi \rightarrow \rho$, где π и ρ — конечные последовательности L -формул (конечной последовательностью L -формул являются, в частности, пустое множество и любая L -формула). Для всякого k из $\{0, 1, 2\}$ множество всех основных секвенций секвенциального исчисления $GI_{k,\omega}$ есть множество всех секвенций вида $A \rightarrow A$, где A есть L -формула. Множеству всех основных секвенций секвенциального исчисления $GI_{3,\omega}$ принадлежат все те и только те секвенции, каждая из которых есть основная секвенция секвенциального исчисления $GI_{0,\omega}$ или имеет вид A , $(\neg A) \rightarrow B$, $(\neg B)$. Правилами вывода исчисления $GI_{0,\omega}$ являются все формулируемые ниже секвенциальные правила вывода R_1 – R_{17} и только они. Далее везде предполагаем, что Γ , Δ , Σ и Θ — конечные последовательности L -формул.

$$\begin{aligned}
R_1: & \frac{\Gamma, A, B, \Delta \rightarrow \Theta}{\Gamma, B, A, \Delta \rightarrow \Theta}, & R_2: & \frac{\Gamma \rightarrow \Delta, A, B, \Theta}{\Gamma \rightarrow \Delta, B, A, \Theta}, \\
R_3: & \frac{A, A, \Gamma \rightarrow \Theta}{A, \Gamma \rightarrow \Theta}, & R_4: & \frac{\Gamma \rightarrow \Theta, A, A}{\Gamma \rightarrow \Theta, A}, \\
R_5: & \frac{\Gamma \rightarrow \Theta}{A, \Gamma \rightarrow \Theta}, & R_6: & \frac{\Gamma \rightarrow \Theta}{\Gamma \rightarrow \Theta, A}, \\
R_7: & \frac{\Gamma \rightarrow \Delta, A \quad B, \Sigma \rightarrow \Theta}{(A \supset B), \Gamma, \Sigma \rightarrow \Delta, \Theta}, & R_8: & \frac{A, \Gamma \rightarrow \Theta, B}{\Gamma \rightarrow \Theta, (A \supset B)}, \\
R_9: & \frac{A, \Gamma \rightarrow \Theta}{(A \& B), \Gamma \rightarrow \Theta}, & R_{10}: & \frac{B, \Gamma \rightarrow \Theta}{(A \& B), \Gamma \rightarrow \Theta}, \\
R_{11}: & \frac{\Gamma \rightarrow \Theta, A \quad \Gamma \rightarrow \Theta, B}{\Gamma \rightarrow \Theta, (A \& B)}, & R_{12}: & \frac{\Gamma \rightarrow \Theta, A}{\Gamma \rightarrow \Theta, (A \vee B)}, \\
R_{13}: & \frac{\Gamma \rightarrow \Theta, B}{\Gamma \rightarrow \Theta, (A \vee B)}, & R_{14}: & \frac{A, \Gamma \rightarrow \Theta \quad B, \Gamma \rightarrow \Theta}{(A \vee B), \Gamma \rightarrow \Theta}, \\
R_{15}: & \frac{\Gamma \rightarrow \Theta, D}{(\neg D), \Gamma \rightarrow \Theta} & & \text{(здесь } D \text{ есть } L\text{-формула, не являющаяся квазиэлементарной } L\text{-формулой)} \\
R_{16}: & \frac{D, \Gamma \rightarrow \Theta}{\Gamma \rightarrow \Theta, (\neg D)} & & \text{(здесь } D \text{ есть } L\text{-формула, не являющаяся квазиэлементарной } L\text{-формулой)} \\
R_{17}: & \frac{\Gamma \rightarrow \Delta, A \quad A, \Sigma \rightarrow \Theta}{\Gamma, \Sigma \rightarrow \Delta, \Theta} & & \text{(правило сечения)}
\end{aligned}$$

Правилами вывода исчисления $GI_{3,\omega}$ являются все правила вывода исчисления $GI_{0,\omega}$ и только они. Секвенциальное правило вывода

$$\frac{\Gamma \rightarrow \Theta, A}{(\neg A)\Gamma \rightarrow \Theta}$$

обозначаем через R_{18} , а секвенциальное правило вывода

$$\frac{A, \Gamma \rightarrow \Theta}{\Gamma \rightarrow \Theta, (\neg A)}$$

обозначаем через R_{19} . Правилами вывода исчисления $GI_{1,\omega}$ являются все секвенциальные правила R_1 – R_{15} , R_{17} и R_{19} и только

они, а правилами вывода исчисления $GI_{2,\omega}$ являются все секвенциальные правила R_1 – R_{14} , R_{16} – R_{18} и только они. Выводы во всех исчислениях $GI_{0,\omega}$, $GI_{1,\omega}$, $GI_{2,\omega}$ и $GI_{3,\omega}$ строятся обычным для секвенциальных исчислений образом (см. [1, 2]). Для всякого из этих исчислений определение выводимой в нем секвенции стандартно (см. [1, 2]). Итак, секвенциальные исчисления $GI_{0,\omega}$, $GI_{1,\omega}$, $GI_{2,\omega}$ и $GI_{3,\omega}$ заданы. Теорема об устранимости сечения (для каждого из этих исчислений) и нижеследующие теоремы 7 и 8 доказаны с использованием методов работы [1].

ТЕОРЕМА 7. *Для всякого k из $\{0, 1, 2, 3\}$ и всякой L -формулы A верно следующее: $A \in I_{k,\omega}$ тогда и только тогда, когда $\rightarrow A$ есть выводимая в $GI_{k,\omega}$ секвенция.*

ТЕОРЕМА 8. *Для всякого k из $\{0, 1, 2, 3\}$ секвенциальное исчисление $GI_{k,\omega}$ разрешимо.*

Из теорем 7 и 8 следует, что для каждого k из $\{0, 1, 2, 3\}$ паралогика $I_{k,\omega}$ разрешима.

5 Логики $I_{0,\omega}$, $I_{1,\omega}$, $I_{2,\omega}$, $I_{3,\omega}$ и логика CLP

С использованием теоремы 7 и результатов работы [1] доказано, что для всякого k из $\{0, 1, 2, 3\}$ позитивный фрагмент логики $I_{k,\omega}$ равен позитивному фрагменту логики CLP . Доказаны также теоремы 5 и 6 о погружении логики CLP в логики $I_{0,\omega}$, $I_{1,\omega}$, $I_{2,\omega}$ и $I_{3,\omega}$.

ТЕОРЕМА 9. *Пусть $I \in \{I_{0,\omega}, I_{1,\omega}, I_{2,\omega}, I_{3,\omega}\}$ и φ есть вычисляемое отображение множества всех пропозициональных переменных языка L во множество всех L -формул, удовлетворяющее условиям:*

- (1) $\varphi(p)$ не есть пропозициональная переменная языка L ни для какой пропозициональной переменной p языка L ,
- (2) для всякой пропозициональной переменной p языка L ($p \supset \varphi(p)$) и ($\varphi(p) \supset p$) принадлежат I .

Пусть h есть такое отображение множества всех L -формул в себя, что для всякой пропозициональной переменной p языка L и всяких L -формул B и C выполняются следующие условия:

- (a) $h_\varphi(p) = \varphi(p)$,

$$(b) \ h_{\varphi}((B \bullet C)) = (h_{\varphi}(B) \bullet h_{\varphi}(C)), \text{ где } \bullet \in \{\&, \vee, \supset\},$$

$$(c) \ h_{\varphi}((\neg B)) = (\neg h_{\varphi}(B)).$$

Тогда для всякой L -формулы $A : A \in CLP$ тогда и только тогда, когда $h_{\varphi}(A) \in I$.

ТЕОРЕМА 10. Пусть $I \in \{I_{0,\omega}, I_{1,\omega}, I_{2,\omega}, I_{3,\omega}\}$ и g есть такое отображение множества всех L -формул в себя, что для всякой пропозициональной переменной p языка L и всяких L -формул B и C выполняются следующие условия:

$$(1) \ g(p) = p,$$

$$(2) \ g((B \bullet C)) = (g(B) \bullet g(C)), \text{ где } \bullet \in \{\&, \vee, \supset\},$$

$$(3) \ g((\neg B)) = (g(B) \supset (\neg(p_1 \supset p_1))).$$

Тогда для всякой L -формулы $A : A \in CLP$ тогда и только тогда, когда $g(A) \in I$.

Используя теорему 10, можно доказать, что для всякой логики I из $\{I_{0,\omega}, I_{1,\omega}, I_{2,\omega}, I_{3,\omega}\}$ и всякой L -формулы A , всякое вхождение логической связки в которую имеет вид $s_1 \dots s_m (* \neg * (p_1 \supset p_1)) r_1 \dots r_n$ (где m и n — целые неотрицательные числа, $s_1, \dots, s_m, r_1, \dots, r_n$ — символы, принадлежащие алфавиту языка L , а $*$ — вхождениеобразующий символ), верно следующее: $A \in CLP$ тогда и только тогда, когда $A \in I$.

Литература

- [1] Генцен Г. Исследования логических выводов // Математическая теория логического вывода. М., 1967. С. 9–74.
- [2] Смирнов В. А. Формальный вывод и логические исчисления // Смирнов В. А. Теория логического вывода. М., 1999. С. 16–233.

Теоретико-познавательные и логико-семантические основания парадоксов¹

Е. Д. Смирнова

ABSTRACT. Non-standard, system approach to analysis of paradoxes — in a context of theories — is proposed. Semantics paradoxes are considered and two approaches to the Liar Paradox are offered. The first one presupposes revision of treatment of sentence values; the second includes certain aspects of coherent truth conception on the basis of such concepts as scopes $\varphi_T A$ and anti-scopes $\varphi_F A$ of sentences. In both cases Tarski's scheme is reconsidered.

Мы остановимся на анализе некоторых семантических парадоксов. Обычно, анализируя парадоксы, выделяют отдельные предпосылки, условия их возникновения, устранение которых ставит «барьер» на пути парадокса. Я хочу выделить позитивную роль, которую выполняют парадоксы в познавательной деятельности, показать ее. Дело не в том, чтобы блокировать парадоксы. На мой взгляд, решить проблему парадокса не значит просто устранить парадокс. Важно выяснить, о какой несогласованности в нашей познавательной деятельности говорит парадокс. Принимаемая логика, допускаемые способы рассуждения, концептуальный аппарат теорий, способы введения понятий, допускаемые абстракции и идеализации, типы объектов рассматриваемой теории — все это составляет единую систему, стороны которой взаимозависимы. Парадоксы играют роль того окошечка в доменной печи, которое позволяет заглянуть в скрытую от поверхностного взгляда лабораторию нашей познавательной деятельности, выявить взаимодействие моментов, аспектов этой деятельности.

¹Работа выполнена при поддержке РГНФ, грант № 06-03-00276а.

Р. Смаллиан отмечал, что некто охарактеризовал парадокс как истину, поставленную с ног на голову, решение его приносит новые важные истины. Действительно, во многих случаях парадоксы содержат идеи, которые после незначительной модификации приводят к значительным открытиям.

Остановимся на анализе известного парадокса Ришара. Парадокс выявляет особую роль языка в познавательной деятельности, связан с исследованием выразительных возможностей языков и теорий. Мы, как правило, говорим о языке как средстве коммуникативной деятельности, как средстве хранения и переработки информации, как непосредственной действительности мысли и т.д. Но есть еще один аспект, одна важная функция языка — язык как аналитический метод, как средство, инструмент познавательной деятельности.

В своей «Логике» аббат Кондильяк отмечал, что язык — не только средство общения, но и аналитический метод. «Если бы люди заметили, что языки также являются аналитическими методами, было бы не трудно найти правила искусства рассуждать». Наш способ умозаключения совершенствуется с совершенствованием языка [3]. Особый аспект идеи языка как аналитического метода неожиданно раскрывается и получает дальнейшее развитие в связи с анализом парадокса Ришара.

Б. Рассел полагал, что «проклятые парадоксы» возникают из известного принципа, близкого принципу порочного круга. Этот порочный круг возникает в силу того, что принимается, что множество предметов может содержать в качестве элементов предметы, которые сами могут быть определены только посредством ссылки на это множество как целое. Речь идет фактически о непредикативных определениях. Более того, если дана некоторая множественность предметов, образующих, по предположению, совокупность, и в то же время допускается, что эта совокупность может содержать элементы, предполагающие саму эту совокупность как целое, в таком случае эта множественность не может, согласно Расселу, образовать совокупность, т.е. класс предметов.

В известном канторовском доказательстве несчетности множества одностепенных арифметических функций строится диагональная функция. Принимается допущение, что множество

одноместных арифметических функций счетно. Диагональная функция определяется ссылкой на этот пересчет: это функция, которая для любого натурального числа n принимает значение на единицу большее того значения, которое принимает для этого числа функция за номером n в пересчете функций: $f(n) \rightleftharpoons fn(n) + 1$. Поскольку сама эта функция одноместная и арифметическая, она попадает в пересчет. Как следствие получаем противоречие, однако парадокса нет. Следует только, что принятое допущение неверно. Рассел сказал бы в этом случае, что множественность одноместных арифметических функций не образует совокупности.

В случае парадокса Ришара мы начинаем с языка. Множество выражений языка, репрезентирующих одноместные арифметические функции, счетно (как подмножество всех выражений данного языка). Пересчет самих одноместных функций образуем в соответствии с пересчетом репрезентирующих их выражений. Выражение языка, описывающее диагональную функцию, попадает в пересчет выражений и, соответственно, в пересчет попадает диагональная функция. Получаем противоречие, парадокс.

Мы видим, что дело не в использовании непредикативного определения (диагональной функции). Очевидно, может быть непредикативность «пагубная» и «непагубная» — в зависимости от *условий введения* непредикативных определений.

Парадокс Ришара ведет к исследованию этих условий и, соответственно, к исследованию выразительных возможностей языков и теорий — к экспликации понятия «выразимость в языке». Речь идет об экспликации понятий выразимости (определимости) свойств, отношений, функций в языке с точно заданной структурой.

Обобщенное, оригинальное понятие определимости свойств, отношений и функций дает А. Мостовский [5]. Так, пусть K — непротиворечивый и замкнутый класс формул рассматриваемого языка L , учитываются только эти характеристики класса K . n -местный предикат P^n K -определим в L , если в языке найдется такая формула A , содержащая столько свободных переменных $a_1, \dots, a_n$, сколько местен предикат P , и отвечающая следующим условиям: для любой n -ки объектов $k_1, \dots, k_n$ имеет место:

$(P(k_1, \dots, k_n) \supset A(\Delta k_1, \dots, \Delta k_n) \in K) \& (\neg P(k_1, \dots, k_n) \supset \sim A(\Delta k_1, \dots, \Delta k_n) \in K)$, где $\Delta k_1, \dots, \Delta k_n$ — термы, обозначающие соответствующие объекты. Формула A в этом случае называется K -определяющей предикат P^n .

Если в качестве непротиворечивого и замкнутого класса формул возьмем класс истинных предложений языка — Tr , т.е. вместо K в определении подставим Tr , получим введенное А. Тарским понятие *семантической определимости* предиката. А если возьмем класс теорем T , получим введенное К. Гёделем понятие T -определимости, или *рекурсивной определимости*. Экспликация понятий выразимости (определимости) в языке позволяет получить ряд важнейших результатов, характеризующих выразительные возможности языков и теорий. Так, если в качестве рассматриваемой теории возьмем достаточно богатую теорию, например первопорядковую арифметику $\mathbf{P}$ (или системы ее содержащие), то окажется, что синтаксис этой теории (т.е. понятия: терм, предложение, вывод, доказательство и т.д.) выразим (в смысле по крайней мере семантической определимости) в самой теории $\mathbf{P}$, т.е. в языке самой первопорядковой арифметики. Сказанное, кстати, относится к вопросу сравнимости-несравнимости теорий, их языков. Только в данном случае вопрос этот поставлен ясно и даны критерии.

В силу теоремы Тарского о неопределимости высказывания $\mathbf{P}$ в языке самой системы $\mathbf{P}$ (класс Tr систем $\mathbf{P}$ не определим семантически в $\mathbf{P}$) мы получаем интересное развитие идеи языка как аналитического метода. Любой рекурсивно перечислимый предикат (семантически) определим в $\mathbf{P}$, соответственно, если предикат семантически не определим в $\mathbf{P}$, он не является эффективно (рекурсивно) перечислимым. Выразимость в языке (с точно заданной структурой) становится важной характеристикой эффективной заданности предиката (класса).

Если предикат рекурсивен, он T -определим в $\mathbf{P}$, и обратно: если он T -определим в $\mathbf{P}$, он — рекурсивен. Так выразимость в языке становится средством установления эффективности (эффективной заданности) свойств, отношений, классов.

Парадокс *Лжеца* связан с трактовкой понятия истинности, его экспликацией в логической семантике. В основе такой экс-

пликации лежит определенная философская *концепция истинности*.

Так, известная схема Тарского является экспликацией классического, аристотелевского понятия истинности, т.е. реализуется в рамках корреспондентской концепции истинности: $X \in \text{Ист} \equiv p$, где вместо X подставляется имя высказывания, а вместо p — высказывание, фиксирующее определенное положение дел в действительности.

Схема, естественно, не является определением понятия истинности, она только эксплицирует условие применения предиката истинности к (рассматриваемому) высказыванию — устанавливает условие адекватности вводимого по определению понятия истинности.

Как уже отмечалось, на базе такого классического понятия истинности были получены важные результаты. Однако в связи со схемой возникает ряд вопросов, ряд трудностей. Во-первых, отметим неразрывную связь смысла (осмысленности) высказывания и условий его истинности. Если мы понимаем высказывание, мы можем указать верифицирующее его положение дел, и обратно: «Der Schnee ist weiß» — $\text{Ист} \equiv \text{снег бел}$.

Однако вопрос осмысленности высказываний не является столь однозначным. Не всегда понимать высказывание — значит знать условие его истинности, например в случае высказываний типа «Гамлет черноволос», или в случае утверждения Лжеца, или в случае утверждений о бесконечно удаленной точке в проективной геометрии и т.д.

Рассел рассматривал высказывания обо всех высказываниях как лишенные смысла (senseless) в силу приведенных выше мотивов. Так, высказывание, что все высказывания истинны или ложны, лишено смысла. Аналогично, предложение Лжеца мы понимаем, но его истинностная оценка ведет к противоречию.

Далее, встает вопрос о трактовке «действительности» в схеме. Дело в том, что схема релятивизирована к одному-единственному миру — w_0 . Однако истинность высказывания может зависеть от моментов времени, положений дел в них и от других «точек соотнесения», которые должны учитываться при установлении верифицирующего положения дел — p . Что считать, например, верифицирующим положением дел p в случае

истинностной оценки модальных, интенциональных и т.д. высказываний?

Наконец, в схеме идет речь об условиях истинностной оценки отдельного, изолированного высказывания, взятого вне контекста. Однако условия истинностных оценок высказываний могут зависеть от истинности (ложности) связанных с ними высказываний (пресуппозиций высказываний). В рассмотрение вступают определенные аспекты *когерентной* концепции истинности. Более того, некоторые высказывания получают смысл в контексте всей теории. Таковыми, по мысли Д. Гильберта, являются идеальные высказывания математики (высказывания об «идеальных элементах»).

Указанные трудности и ряд других ставят вопрос о необходимости пересмотра схемы Тарского так, чтобы охватывался более широкий круг высказываний и учитывались определенные аспекты когерентной концепции истинности.

Я предлагаю две линии пересмотра схемы Т. Первая из них связана с трактовкой значений предложений — в частности предложения p схемы и, соответственно, с отказом от двужначности.

Предложение p утверждает некоторую соответствующую предложению X ситуацию. Г. Фреге рассматривал предложения как десигнативные выражения. Смысл предложения составляет выражаемая им мысль, задающая соответствующую ситуацию, а значением предложения выступает фактически сама ситуация. Но если рассматривать только значения предложений, отвлекаясь от их смысла, то от соответствующих предложениям ситуаций остаются два параметра — наличествующая или отсутствующая ситуация. С моей точки зрения, это и есть фрегевские значения — *das Wahre* и *das Falsche* (обратим внимание на наличие артикля *das*). В дальнейшем они стали обозначаться как t и f .

В схеме $X \in \text{Ист} \equiv p$ p означает, с нашей точки зрения, не утверждение чего-то, утверждение само по себе не может быть условием приписывания предложению X предиката истинности Tr . Если p означает (относится) наличествующую ситуацию (*das Wahre*), предложению X схемы приписывается предикат Tr . Наличие ситуации в действительности (принимаемом

универсуме) становится условием приписывания предиката истинности соответствующему высказыванию. В случае $X \in F \equiv p$ p относится к отсутствующей ситуации (*das Falsche*). При наличии в семантике двух ситуаций — *das Wahre* и *das Falsche* — имеем: $X \notin Tr \equiv X \in F$, предложение ложно (F), если оно не истинно.

Но если отказаться от двузначности, будем приписывать p в качестве значений, например значения t , f , u , то предикаты Tr и F вводятся независимо: $X \notin Tr \not\equiv X \in F$. Кроме ситуаций t и f вводится ситуация u , при этом u может трактоваться как «неизвестно», «неопределенно», «отсутствует информация», см. [2, с. 237]².

При данном подходе пересмотр схемы **T** идет по линии пересмотра трактовки эквивалентности в схеме. Нам представляется, что в качестве эквивалентности как наиболее адекватную нужно принять клиниевскую слабую эквивалентность $A \cong B$. Последнее играет особую роль в случае анализа парадокса Лжеца.

$$B \rightarrow$$

A	t	f	u
t	t	f	f
f	f	t	f
u	f	f	t

При этом из $A \cong B$ не следует $A \& \sim B$.

Тарский, анализируя парадокс Лжеца, выделял два условия его возникновения: 1. Применяется не вызывающая нареканий обычная классическая логика; 2. Имеет место семантическая замкнутость рассматриваемого языка, от которой он отказывается, вводя иерархию языков.

В предлагаемом подходе в силу пересмотра трактовки значений предложений меняется логика. Так, меняется трактовка отрицания, появляются два отрицания: исключения и выбора.

²При этом с онтологической точки зрения u не особая ситуация наряду с *das Wahre* и *das Falsche*, но ситуация, о которой мы не имеем информации, имеет ли она место, или не имеет, или нет метода установления ее наличия (верности) или отсутствия (неверности).

A	$\sim A$
t	f
f	t
u	u

При этом принцип исключенного третьего ($A \in T \vee \sim A \in T$) не действует. Формула ($A \vee \sim A$) не является общезначимой (Гамлет черноволос $\vee$ Гамлет не черноволос).

A	$\bar{A}$
t	f
f	t
u	t

В этом случае принцип исключенного третьего действует. Формула ($A \vee \bar{A}$) общезначима (Гамлет черноволос или неверно, что он черноволос).

Напомним, что из ($A \cong \sim A$) не следует противоречие ($A \& \sim A$).

В случае парадокса Лжеца (обозначим выражение «утверждение Лжеца» — $\mathbf{Л}$) подстановка в схему дает: $\mathbf{Л} \in Tr \cong \mathbf{Л} \notin Tr$ (где предложение p имеет вид $\mathbf{Л} \notin Tr$). Но $X \notin Tr$ означает, что p относится к ситуациям f или u . Но само предложение Лжеца « $\mathbf{Л} \notin Tr$ » не означает ни ситуацию t (наличествующую), ни ситуацию f (отсутствующую, *das Falsche*), соответственно она имеет значение u . В силу условий истинности эквиваленции $\cong$ предложение $\mathbf{Л} \in Tr$ также принимает значение u (аналогично тому, как если утверждение «Гамлет не черноволос» — ни t , ни f , то утверждение «Гамлет черноволос» принимает значение u).

Другой предлагаемый нами подход к анализу парадокса Лжеца связан с введением понятий областей и антиобластей предложений и соответственно предполагает учет определенных аспектов когерентной концепции истинности. Пусть $\varphi_T(A)$ — область предложения A , класс миров, в которых A имеет место. $\varphi_T(A) \subseteq W$.

а) Важная трактовка W (обстоятельств).

b) $\varphi_T(A)$ — условия, подтверждающие, верифицирующие A (это могут быть пресуппозиции A , методы подтверждения и A т.д.).

$\varphi_F(A)$ — антиобласть предложения, условия, опровергающие A (в рамках этих обстоятельств A не имеет места). $\varphi_F(A) \subseteq W$.

Схема при данном подходе имеет вид:

1. $A \in Tr \equiv \varphi_T(A) \neq \emptyset$. A истинно, но с учетом условий; при определенных рассматриваемых обстоятельствах оно имеет место.
2. $A \in F \equiv \varphi_F(A) \neq \emptyset$. Имеются опровергающие A обстоятельства.
3. $A \notin Tr \equiv \varphi_T(A) = \emptyset$. Если при этом $\varphi_T(A) \cup \varphi_F(A) = W$, то $\varphi_T(A) = \emptyset \equiv \varphi_F(A) = W$. Но $\varphi_T(A) \cap \varphi_F(A) = \emptyset$.

Но если принимается условие $\varphi_T(A) \cup \varphi_F(A) \neq W$, то $A \notin Tr \equiv \varphi_T(A)' = W$. Но при этом не следует, что $A \in F$, не следует, что $\varphi_F(A) \neq \emptyset$.

Но если $\varphi_F(A) = \emptyset$ (A опровержимо) имеет при этом место, имеем $(A \notin Tr) \& (A \notin F)$, т.е. A индетерминированное высказывание (A не подтверждается и не опровергается рассматриваемыми обстоятельствами W)³.

Предложение Лжеца именно таково: нет обстоятельств (условий) его верифицирующих — $\varphi_T(\mathbf{Л} \notin Tr) = \emptyset$, нет обстоятельств, его фальсифицирующих — $\varphi_F(\mathbf{Л} \notin Tr) = \emptyset$. $\mathbf{Л} \notin Tr$ и $\mathbf{Л} \notin F$. В этом смысле $\mathbf{Л}$ — индетерминированное высказывание. $A \in Tr \cup A \notin Tr$ — закон, но $A \in Tr \cup A \in F$ таковым не является.

И при первом предложенном выше подходе и при втором предложение Лжеца выступает как *индетерминированное*. Но основания индетерминированности *разные*. В первом случае речь идет о значениях предложений, об отказе от двужначности, связанной с введением двух ситуаций в семантике в качестве значений предложений. Во втором — об учете обстоятельств, подтверждающих предложение A , — $\varphi_T(A)$, и обстоятельств, опровергающих A , — $\varphi_F(A)$. В качестве таковых могут выступать

³Возможно, $\varphi_T(A) \neq \emptyset$ и $\varphi_F(A) \neq \emptyset$, но при этом $\varphi_T(A) \cap \varphi_F(A) = \emptyset$.

обстоятельства различного типа — в том числе и контексты использования высказываний. Тем самым мы отходим от трактовки истинности высказывания как просто соответствия определенному положению дел — p , трактовки, задаваемой схемой Тарского.

Таким образом, нет единого подхода к «решению» парадокса Лжеца. В разных условиях познавательной деятельности, с учетом разных ее аспектов, подходы будут разные. Может приниматься единственная, классическая, логика, но могут вводиться иные логики, могут учитываться разного типа обстоятельства, пресуппозиции. Соответственно в семантике вводятся разного типа объекты — вроде значений предложений или областей предложений и т.д. В основе лежат идеальные связи, и речь идет о необходимости абстрактных сущностей в семантическом анализе.

Как видим, в связи с парадоксом Лжеца встает вопрос о единственности логики или о принятии многих логик.

Известно, что И. Кант считал формальную логику единственной и завершенной. Э. Гуссерль полагал, что в основе логических законов лежат связи идеальные, не зависящие от субъекта, от способа их реализации в сознании. Отметим, что в принципе такая трактовка не ведет к единственности логики, так как связи эти могут быть разного типа.

В целом встает вопрос о единственности «нашей» логики или о возможности иных логик, отличных от «нашей». Не носит ли в таком случае логика, логические законы субъективный или конвенциональный характер?

Возможность существования иных логик с отличными от «нашей» логики законами и принципами связывалась в случае анализа парадокса Лжеца, с одной стороны, с онтологическими предпосылками — с характером объектов рассмотрения, с другой — с предпосылками гносеологического порядка. В первом случае речь идет о включении в рассмотрение «воображаемых», возможных миров.

Согласно Н. Васильеву, мы можем вообразить мир осуществленного противоречия, где «обобщения опыта, а, значит, логика, будут иными, чем у нас» [1, с. 57]⁴.

⁴ «Я прекрасно осознаю, — писал Васильев, — что защищаемая

Так, в воображаемом мире осуществленного противоречия логика свободна от закона противоречия. Меняется трактовка отрицания. В этом мире наряду с утвердительными и отрицательными суждениями имеют место и «индифферентные» суждения вида « S есть и не есть P ». В силу сказанного логик, по Васильеву, «может быть много» — в зависимости от положения дел в мирах. Другое дело законы металогики, они — стабильны.

При предложенном нами первом подходе к анализу *Лжеца* в мире допускались ситуации t , f , u , возникало два отрицания. Формулы $(A \& \sim A)$, $(A \& \neg A)$, $(A \cup \sim A)$, $(A \cup \bar{A})$ соответственно могут быть или не быть законами (общезначимыми формулами) логики. Логика не единственна.

Но иные логики, как было показано, могут возникать по иным мотивам — в связи с пересмотром самих принципов логики (независимо от «онтологии» мира), но в связи с пересмотром понятий истинности, ложности, отношений между ними, трактовкой логического следования. Это составляет основу второго подхода к анализу *Лжеца*.

В [6] предлагается особого рода подход к построению семантики. Понятия истинности и ложности вводятся независимым образом. Центральными понятиями являются понятия областей и антиобластей предложений. На этой основе вводится не одно, а целый класс отношений логического следования. Отметим, что области и антиобласти не зависят от свойств объектов в мирах.

Между областями и антиобластями в принципе могут устанавливаться различные отношения, и это детерминирует различного типа семантики. Так, от принятия или непринятия положений $\varphi_T(A) \cup \varphi_F(A) = W$ и $\varphi_T(A) \& \varphi_F(A) = \emptyset$ зависит возникновение различного типа семантик: классическая, семантика с истиннозначными провалами (*gap*), пресыщенными оценками (*glut*), релевантная семантика; см. подробнее [6, гл. 5, § 2-3].

Логики детерминируются при этом подходе: 1) принимаемым отношением следования и 2) отношениями между областями и антиобластями предложений. Речь идет именно о различных типах логик, а не о множественности логических формализмов, последнее — вопрос комбинаторики.

здесь мысль об иной логике противоречит тысячелетнему опыту человека...» [1, с. 93].

При данном подходе изменяются принципы металогики (в отличие от Васильева). Именно от этого зависят принимаемые логики, допустимые способы рассуждений. Предложение парадокса Лжеца попадает при втором подходе в число индетерминированных высказываний именно на основании изменения метапринципов.

Вопрос о единой логике или многих логиках, как нам представляется, становится прозрачным, если учесть упомянутый в начале системный подход к логике, ее месту и принципам: не просто механическое изменение законов логики и каких-то ее основоположений — отказ от одних и принятие других (речь идет не о логических формализмах), а ее место в определенной системе познавательной деятельности с ее особенностями и принципами. Тем самым логика не есть нечто абсолютное, «присущее нашему уму». Принимаемые явным или неявным образом определенные абстракции и идеализации, определенные нормы и принципы познавательной деятельности — вот что детерминирует те идеальные связи, которые лежат в основе логики, ее законов. Мы это видим в связи с анализом условий и предпосылок парадокса Лжеца.

Отметим, что введение таких идеальных объектов, как классы, в качестве объемов понятий, идеальные отношения между ними детерминируют рассуждения силлогистического типа [4, § 6]. Аналогично введение понятий возможных миров, областей и антиобластей высказываний на их основе, отношения между ними детерминируют определенные типы рассуждений, законы, детерминируют истиннозначный провал (gar) в случае парадокса Лжеца. При иных предпосылках анализ *Лжеца* идет по иным путям.

Литература

- [1] *Васильев Н.А.* Воображаемая логика. М., 1957.
- [2] *Клини С.* Введение в метаматематику. М., 1957.
- [3] *Кондильяк Э.* Логика, или начала искусства мыслить. М., 1983.
- [4] *Лукаевич Я.* Аристотелевская силлогистика с точки зрения современной формальной логики. М., 1959.
- [5] *Mostowski A.* Sentences undecidable in formalized arithmetic. An exposition of the theory of Kurt Gödel. Amsterdam, 1952.
- [6] *Смирнова Е.Д.* Логика и философия. М., 1996.

Интуиционистская арифметика с принципами Маркова и Р

В. Х. ХАХАНИЯН

ABSTRACT. We consider the theory $HA+M+P$, where M is Markov's principle (any, see [1]), P is the following, classically true, principle $(\neg\varphi \rightarrow \exists x\psi(x)) \rightarrow \exists x(\neg\varphi \rightarrow \psi(x))$ (also see [1]). We prove that such theory has numerical existentiality (and, of course, disjunctivity) and get some corollaries from this fact.

В [1] были рассмотрены следующие расширения интуиционистской арифметики: традиционный конструктивизм А.А. Маркова и антитрадиционный (нетрадиционный) конструктивизм. Было доказано, что оба расширения интуиционистской арифметики непротиворечивы относительно базисной системы интуиционистской арифметики с добавленным к ней в первом случае принципом Маркова (для простоты можно метаматематически использовать просто формальную арифметику Пеано FA). Оба расширения обладают свойством нумерической экзистенциальности и дизъюнктивности (см. [1]). Если рассмотреть интуиционистскую арифметику с принципами Чёрча (любым), Маркова (любым) и P , то такая теория уже будет противоречивой (см. [1]). Поэтому представляет интерес исследовать расширение интуиционистской арифметики с принципами Маркова и P . Ниже будет приведена модель типа реализуемости для доказательства свойств дизъюнктивности и экзистенциальности теории $HA+M+P$.

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 1. Пусть φ есть формула языка арифметики. Определим понятие $r\varphi$ (формула φ реализуема) индукцией по построению формулы (это понятие было введено С.К. Клини, см., например, [2]).

1. $r(t = q) \iff t = q$ истинно в стандартной модели арифметики (здесь t и q являются арифметическими термами); сюда

входит и формула $\perp$, так как это атомарная формула; по определению $\neg\varphi \equiv \varphi \rightarrow \perp$;

2. $r(\varphi \wedge \psi) \equiv (r\varphi \wedge r\psi)$;
3. $r(\varphi \vee \psi) \equiv (r\varphi \wedge \vdash \varphi) \vee (r\psi \wedge \vdash \psi)$;
4. $r(\varphi \rightarrow \psi) \equiv ((r\varphi \wedge \vdash \varphi) \Rightarrow r\psi)$;
5. $r(\forall x\varphi(x)) \equiv \forall nr\varphi(n)$; здесь n есть нумерал, изображающий в теории НА натуральное число n ;
6. $r(\exists x\varphi(x)) \equiv \exists n(r\varphi(n) \wedge \vdash \varphi(n))$.

Индукцией по выводу формулы в теории $НА+М+P^+$ доказывается

ТЕОРЕМА 2. *Если в теории $НА+М+P^+$ выводима формула φ , то эта формула реализуема. Здесь P^+ получается из P заменой формулы вида $\neg\varphi$ на произвольную формулу языка арифметики.*

Как следствие, получаем:

- а) теории $НА+М+P^+$, $НА+М+P$, $НА+P^+$, $НА+P$, $НА+М$, обладающие свойствами нумерической экзистенциальности и дизъюнктивности;
- б) все отмеченные в пункте а) теории не совпадают с формальной арифметикой Пеано FA .

ЗАМЕЧАНИЯ 3.

1. Принцип Маркова не выводим в интуиционистской арифметике (первоначальное доказательство было дано Г. Крайзелем, см. [3]; однако этот результат следует из непротиворечивости теории $НА+СТ+P$, так как в случае выводимости M эта теория была бы противоречивой (см. выше); аналогично, принцип Маркова не выводим в теории $НА+P^+$;
2. В интуиционистской арифметике не выводится принцип P (и, конечно, P^+) (аналогично результату выше, так как теория $НА+М+СТ$ непротиворечива); в теории $НА+М$ также не выводимы принципы P и P^+ .

3. Все доказательства даны в предположении непротиворечивости или ω -непротиворечивости базисной теории НА; для доказательства выполнимости в приведенной модели принципа М внешним образом используется принцип М; при доказательстве выполнимости в модели принципа Р внешним образом используется принцип P^+ . Также легко видеть, что достаточно потребовать простой непротиворечивости НА, так как эта теория также обладает свойствами дизъюнктивности и нумерической экзистенциальности.

Литература

- [1] Драгалин А.Г. Математический интуиционизм. Введение в теорию доказательств. М., 1979.
- [2] Kleene S.C. Realizability: a retrospective survey // Lecture Notes in Mathematics. 1973. № 337. P. 95–112 (см. стр. 96).
- [3] Kreisel G. The non-derivability $\neg(x)A(x) \rightarrow ((Ex)A(x), A$ primitive recursive, in intuitionistic formal systems (abstract) // The Journal of Symbolic Logic. 1958. Vol. 23. № 4. P. 456–457.

Логика термов

В. И. ШАЛАК

ABSTRACT. In the paper we construct logic of signs as more basic in contrast to traditional approach of logic of sentences.

«...если логик даже одного класса континуум, а людей (разумных существ) всего конечное число и пусть каждый рассуждает по-своему, то что же тогда представляет собой Логика как таковая?»

Карпенко А.С.

"Логика на рубеже тысячелетия".

1 Введение

«Логика — это нормативная наука о формах и приемах интеллектуальной познавательной деятельности, осуществляемой с помощью языка». Хорошее определение, но требует дальнейших уточнений. В первую очередь это касается языка как *«...знаковой системы, предназначенной для фиксации, хранения, переработки и передачи информации».* В свою очередь необходимо добавить, что *«всякий язык состоит из знаков. Знаком называется материальный объект, который для некоторого интерпретатора (субъекта) выступает в качестве представителя какого-то другого предмета. [...] Важнейшими характеристиками знаков являются смыслы и значения»* [1].

Казалось бы, теперь мы должны перейти к определению основных форм, в которых фиксируются результаты интеллектуальной познавательной деятельности. Но, говоря о формах, мы неизбежно будем ссылаться на наш предшествующий опыт, который по очевидным причинам ограничен. В связи с тем, что логика является нормативной наукой, нас подстерегает опасность привнести в нее совершенно неоправданные ограничения на те формы, в которые будут облекаться результаты нашей деятель-

ности. То, что это не выдуманные страхи, легко проиллюстрировать на примере традиционной логики.

Как известно, ее предложения имеют субъектно-предикатную структуру. Такой язык требует описывать мир в терминах вещей и их свойств. В философии это привело к появлению понятия субстанции, в физике — к понятию абсолютного пространства. В языке традиционной логики не выразимо ни одно отношение, даже такое простое, как отношение больше. С этой проблемой сталкивается Сократ в диалогах Платона «Федон» и «Теэтет». Требование к ученым облекать свои новые теории в формы, предписываемые традиционной логикой, объективно тормозило развитие науки. Современная логика, в отличие от традиционной, — это общая теория отношений. Чтобы убедиться в этом, достаточно посмотреть на ее язык и определение модели. Теперь логика предписывает формулировать научные теории в терминах объектов и отношений между ними. Но и это не решает всех проблем. Например, если мы хотим говорить о движении объекта, то вынуждены сводить его к последовательности статичных состояний, которые внутренне никак между собой не связаны. Точно так же статично и время, когда мы пытаемся говорить о нем в терминах отношения порядка на моментах времени.

Логика не должна навязывать ничего, что выходит за рамки ее компетенции.

Обратимся к языку как знаковой системе. Вместо того чтобы оперировать смыслами и значениями, мы можем оперировать самими знаками. Так, например, список сотрудников Института философии в определенных ситуациях может замещать самих сотрудников. Другой пример. Если известно, сколько яблок в одном мешке и сколько яблок в другом мешке, мы можем вычислить, сколько всего яблок в двух мешках. Для этого нам не нужно высыпать их в одну кучу и заново пересчитывать, а достаточно воспользоваться арифметической операцией сложения. В процессе оперирования знаками мы переходим от одних выражений языка к другим. Это и есть рассуждение в самом общем виде. При этом мы не имеем права ограничиваться рассмотрением выражений лишь какой-то одной семантической категории в ущерб другим. В рассуждении мы выделяем исходные выражения (посылки) и конечный результат (заключение).

Хорошими, или правильными, являются те рассуждения, которые позволяют на основании значений (смыслов) посылок определить значение (смысл) заключения. В этом суть рассуждения как познавательной операции. Задача логики заключается в анализе и классификации хороших способов рассуждений.

При таком понимании логики никакая предустановленная онтология не навязывается, а существует исключительно виртуально всего лишь как возможность соотнести знаки языка с чем-то ему внеположным. В зависимости от конкретных познавательных задач онтология может наполняться конкретным содержанием. Задача логики — дать возможность правильно рассуждать о ней независимо от будущего наполнения.

2 Определение следования

Перейдем к более строгому обоснованию и построению логики, которую назовем логикой термов. В первом приближении определение семантического отношения следования для нее выглядит следующим образом:

Из посылок Σ следует заключение A , если и только если на основании значений посылки Σ мы можем определить значение заключения A .

Значение заключения A мы определяем не путем его непосредственного соотнесения с внеязыковой реальностью, а на основании определенной связи со значениями посылок Σ . Эта связь должна быть осознана и представлена в виде некоторого правила f . Любой, кому известно это правило, может повторить рассуждение и убедиться в его корректности.

Из посылок Σ следует заключение A , если и только если существует такое правило f , которое позволяет на основании значений посылок Σ определить значение заключения A .

Поскольку правило f применяется не к самим знакам, а к тому, что им сопоставлено, введем для этого специальные обозначения. Пусть Val будет множеством функций, осуществляющих возможные сопоставления выражениям языка их значений или

смыслов. Будем считать, что правило f осуществляет функциональную связь, т.е. результат его применения определен однозначно. Ограничение функциональными связями не является существенным, но принято в данной работе лишь для определенности.

Из посылок $B_1, \dots, B_n$ ($n \geq 0$) следует заключение A , если и только если существует такая функция f , которая позволяет для всякого соответствия $v \in Val$ на основании $v(B_1), \dots, v(B_n)$ определить $v(A)$, т. е. $v(A) = f(v(B_1), \dots, v(B_n))$.

С использованием привычной логической символики последнее определение можно записать еще более кратко.

$$\{B_1, \dots, B_n\} \Vdash A \iff \exists f \forall v \in Val (v(A) = f(v(B_1), \dots, v(B_n))),$$

где $\{B_1, \dots, B_n\} \Vdash A$ служит обозначением для отношения следования.

Данное определение не налагает никаких ограничений на типы фигурирующих в нем языковых выражений. Они не сводятся к одним лишь предложениям языка, как это принято в привычной нам логике. Если познавательный смысл рассуждений заключается в том, чтобы заменить оперирование с реальными объектами оперированием со знаками, то у нас нет никаких оснований ограничивать свои познавательные возможности. **Рост нашего знания напрямую связан с накоплением функций f , позволяющих осуществлять оперирование реальными объектами на знаковом уровне.**

Приведем несколько конкретных примеров отношения следования, удовлетворяющих нашему определению. Пусть t и s — два числовых терма. Тогда имеет место следование $\{t, s\} \Vdash t+s$, так как существует арифметическая функция сложения, позволяющая по любым двум числам вычислить их сумму. Благодаря существованию арифметической операции вычитания будет иметь место следование $\{t, t+s\} \Vdash s$. Нашему определению следования будет удовлетворять отношение $\{t, s\} \Vdash t=s$, где слева стоят два терма, а справа — предложение, так как для любых

двух чисел мы можем определить, равны они или не равны, и тем самым вычислить истинностное значение предложения $t = s$. Точно так же будет иметь место $\{t, s\} \models t \neq s$, обоснование которого аналогично предыдущему. Последний пример — это следование $\{t = s\} \models t \neq s$. Если мы знаем истинностное значение предложения $t = s$, то мы всегда можем вычислить истинностное значение предложения $t \neq s$.

С точки зрения классической логики, ни одно из этих отношений не является следованием. Поэтому интересно ответить на вопрос, как соотносится наше определение следования с хорошо знакомым классическим определением?

Из множества посылок Σ следует предложение A , если и только если всякий раз, когда истинны все посылки Σ , будет истинно и предложение A .

Это определение вообще не может считаться определением следования. Дело в том, что если множество Σ противоречиво, то в классической логике для любой формулы A имеет место следование $\Sigma \models A$. Но в этом случае не может существовать правила **f**, которое позволяло бы определить значение A на основании значений предложений Σ . Точно так же мы ничего не можем сказать об A в модели, в которой хотя бы одна из посылок Σ ложна. Это заставляет усомниться в логической адекватности классического определения. Ведь если оно не позволяет заменить оперирование с реальными объектами оперированием с соответствующими языковыми выражениями, то в чем его смысл?

При кажущейся простоте наше определение является по своей сути интенциональным. Поскольку всякая функция соответствия $v \in Val$ однозначным образом сопоставляет выражениям языка их значения, получаем, что каждое выражение A задает некоторую определенную на множестве Val функцию $\mathbf{A}(v) =_{def} v(A)$. Поэтому мы можем переписать определение следующим образом.

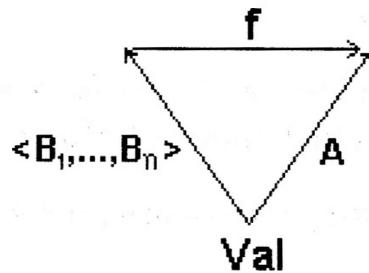
$$\{B_1, \dots, B_n\} \models A \iff \exists f \forall v \in Val (\mathbf{A}(v) = f(\mathbf{B}_1(v), \dots, \mathbf{B}_n(v))).$$

Выражение $\forall v \in Val(A(v) = f(B_1(v), \dots, B_n(v)))$ в правой части определения в свою очередь можно упростить, так как оно означает всего лишь равенство функций A и $f(B_1, \dots, B_n)$.

$$\{B_1, \dots, B_n\} \models A \iff \exists f(A = f \circ \langle B_1, \dots, B_n \rangle).$$

Это позволяет записать его на языке диаграмм.

Из множества формул $B_1, \dots, B_n$ следует формула A , если и только если существует такая функция f , что следующая диаграмма коммутативна:



Если множество Val рассматривать как множество возможных миров, то выражения языка интерпретируются не статичными объектами, а функциями, приписывающими им конкретные значения в каждом из этих миров. Эти функции можно понимать как законы, определяющие поведение объектов, которые сопоставлены языковым выражениям. Если Val — множество моментов времени, то, например, индивид понимается как функция, идентифицирующая его в каждый из моментов.

При таком определении следования появляется возможность включить в одну общую теорию дедукции такие формы выражения мысли, как вопросы, императивы, инструкции. Одного этого уже достаточно, чтобы обратить на него внимание.

3 Логика термов

Перейдем к формальному построению логики термов. Вышеприведенная диаграмма наводит на мысль, что адекватным математическим аппаратом для задания семантики может послужить теория категорий. Напомним определение.

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 1. Категория C состоит из:

- Объектов $obj(C) = a, b, c, \dots$
- Стрелок $arr(C) = f, g, h, \dots$
- Каждой из стрелок f сопоставлены два объекта $dom(f)$ и $cod(f)$. Запись $f : a \rightarrow b$ означает, что $dom(f) = a$ и $cod(f) = b$.
- Для любых двух стрелок $f : a \rightarrow b$ и $g : b \rightarrow c$ существует стрелка $g \circ f : a \rightarrow c$, называемая их композицией.
- Каждому объекту a сопоставлена стрелка $1_a : a \rightarrow a$, называемая единичной.
- Для любых трех стрелок $f : a \rightarrow b$, $g : b \rightarrow c$ и $h : c \rightarrow d$ имеет место закон ассоциативности $h \circ (g \circ f) = (h \circ g) \circ f$.
- Для любой стрелки $f : a \rightarrow b$ имеют место равенства $1_b \circ f = f \circ 1_a = f$.

Так как выражениям языка сопоставляются не статичные объекты, а функции, аналогом которых в теории категорий являются стрелки, нам понадобятся категории специального вида, называемые относительными.

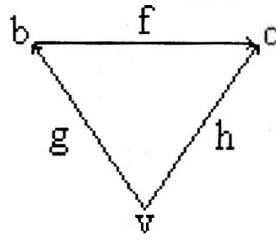
Пусть дана категория C . Определение относительной категории $C \uparrow v$ выглядит следующим образом.

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 2. Относительная категория $C \uparrow v$:

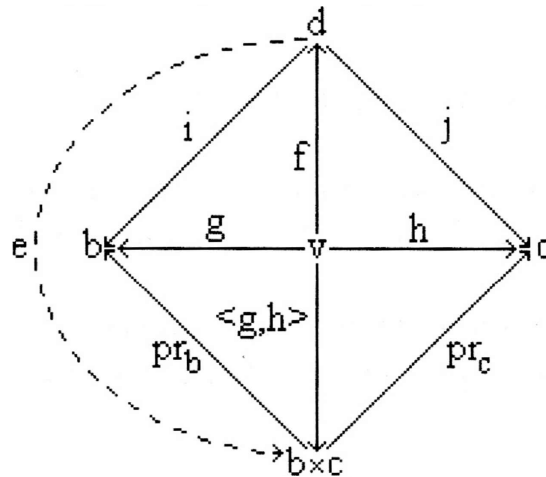
- $obj(C \uparrow v) = \{f \in arr(C) \mid dom(f) = v\}$
- $arr(C \uparrow v) = \{f \in arr(C) \mid \exists g \in obj(C \uparrow v) \exists h \in obj(C \uparrow v) (f \circ g = h)\}$

Объектами этой категории являются стрелки исходной категории C с началом в v , а стрелками в свою очередь являются такие стрелки категории C , которые делают приведенную выше диаграмму коммутативной, т.е. выполняется равенство $f \circ g = h$.

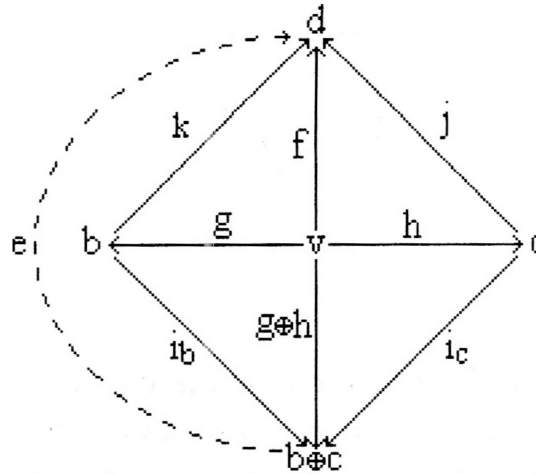
Чтобы определить все интересующие нас логические конструкции, в категории $C \uparrow v$ должны существовать произведения и копроизведения ее объектов.



ОПРЕДЕЛЕНИЕ 3. В относительной категории $C \uparrow v$ объект $\langle g, h \rangle: v \rightarrow b \times c$ вместе с двумя называемыми *проекциями* стрелками $pr_b: \langle g, h \rangle \rightarrow g$ и $pr_c: \langle g, h \rangle \rightarrow h$ называется *произведением* объектов $g: v \rightarrow b$ и $h: v \rightarrow c$, если и только если для любого другого объекта $f: v \rightarrow d$ и любых двух стрелок $i: f \rightarrow g$ и $j: f \rightarrow h$ существует единственная стрелка $e: f \rightarrow \langle g, h \rangle$, такая, что $pr_b \circ e = i$ и $pr_c \circ e = j$.



ОПРЕДЕЛЕНИЕ 4. В относительной категории $C \uparrow v$ объект $g \oplus h: v \rightarrow b \oplus c$ вместе с двумя называемыми *инъекциями* стрелками $i_b: g \rightarrow g \oplus h$ и $i_c: h \rightarrow g \oplus h$ называется *копроизведением* объектов $g: v \rightarrow b$ и $h: v \rightarrow c$, если и только если для любого другого объекта $f: v \rightarrow d$ и любых двух стрелок $k: g \rightarrow f$ и $j: h \rightarrow f$ существует единственная стрелка $e: g \oplus h \rightarrow f$, такая, что $e \circ i_b = k$ и $e \circ i_c = j$.



Поскольку в определении следования могут участвовать любые языковые выражения, нам понадобится многосортный язык.

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 5. Язык $L_T = \langle Sort, Var_{Sort}, Fun, Op \rangle$

- $Sort$ — множество сортов $A, B, C, \dots$;
- Var_{Sort} — семейство счетных множеств индивидуальных переменных $Var_A = \{x_i | i < \omega\}$ для каждого $A \in Sort$;
- Fun — множество функциональных символов $f, g, h, \dots$, каждому из которых сопоставлен его тип $f : A_1 \times \dots \times A_n \rightarrow B$;
- $Op = \{\wedge, \vee\}$ — операции $Sort \times Sort \rightarrow Sort$.

Все выражения нашего языка являются термами. Выделять в отдельный класс предложения нет никакой необходимости, так как они не играют никакой особой роли и используются наравне с другими выражениями. Именно по этой причине мы и не стали вводить отдельный сорт истинностных значений. Его всегда можно ввести, если в этом возникнет необходимость, в общем же случае он не нужен. Необходимы лишь некоторые комментарии, относящиеся к использованию функциональных символов

при определении сложных термов и к использованию логических связок $\wedge$ и $\vee$. Если для функциональных символов заранее фиксированы типы аргументов и тип значения, то связки являются термообразующими операторами. Это означает, что они применимы к термам любых типов и в результате порождают терм нового сложного типа.

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 6. Термы

- Если x — индивидуальная переменная сорта A , то $x : A$ — терм сорта A
- Если $f : A_1 \times \dots \times A_n \rightarrow B$ — функциональный символ и $t_1 : A_1, \dots, t_n : A_n$ — термы, то $f(t_1, \dots, t_n) : B$ — терм сорта B ;
- Если $t_1 : A_1, t_2 : A_2$ — термы, то $(t_1 \wedge t_2) : A_1 \times A_2$ — терм сорта $A_1 \times A_2$, $(t_1 \vee t_2) : A_1 \oplus A_2$ — терм сорта $A_1 \oplus A_2$.
- Ничто другое термом не является.

Определение интерпретации комментариев не требует.

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 7. Категорная интерпретация языка L_T есть пара $I = \langle C \uparrow v, [\cdot] \rangle$

- $C \uparrow v$ — относительная категория с конечными произведениями и копроизведениями объектов;
- $[\cdot]$ — отображение $Sort \rightarrow obj(C)$, сопоставляющее каждому сорту A языка некоторый объект $[A]$ категории C ;
- $[\cdot]$ — отображение $Var_{Sort} \rightarrow obj(C \uparrow v)$, сопоставляющее каждой переменной $x : A$ некоторый объект $[x] : v \rightarrow [A]$ категории $C \uparrow v$;
- $[\cdot]$ — отображение $Fun \rightarrow arr(C \uparrow v)$, сопоставляющее каждому функциональному символу $f : A_1 \times \dots \times A_n \rightarrow B$ стрелку $[f] : [A_1] \times \dots \times [A_n] \rightarrow [B]$ категории C .

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 8. Значение терма t при категорной интерпретации $I = \langle C \uparrow v, [\cdot] \rangle$

- $t = x : A \rightarrow [t] = [x] : v \rightarrow [A]$
- $t = f(t_1, \dots, t_n) : B \rightarrow [t] = [f] \circ \langle [t_1], \dots, [t_n] \rangle : v \rightarrow [A_1] \times \dots \times [A_n] \rightarrow [B]$
- $t = (t_1 \wedge t_2) : A_1 \times A_2 \rightarrow [t] = \langle [t_1], [t_2] \rangle : v \rightarrow [A_1] \times [A_2]$
- $t = (t_1 \vee t_2) : A_1 \oplus A_2 \rightarrow [t] = [t_1] \oplus [t_2] : v \rightarrow [A_1] \oplus [A_2]$

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 9. Терм $t : A$ следует из конечной последовательности термов $t_1 : A_1, \dots, t_n : A_n$ при категорной интерпретации $I = \langle C \uparrow v, [\cdot] \rangle$, если и только если существует такая стрелка h категории $C \uparrow v$, что $[t] = h \circ \langle [t_1], \dots, [t_n] \rangle$.

$$t_1 : A_1, \dots, t_n : A_n \Vdash_I t : A \iff \exists h \in \text{arr}(C \uparrow v) ([t] = h \circ \langle [t_1], \dots, [t_n] \rangle)$$

Следующее определение является категорным определением отношения логического следования в логике термов.

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 10. Терм $t : A$ следует из конечной последовательности термов $t_1 : A_1, \dots, t_n : A_n$, если и только если он следует при всякой категорной интерпретации $I = \langle C \uparrow v, [\cdot] \rangle$.

$$t_1 : A_1, \dots, t_n : A_n \Vdash t : A \iff \forall I (t_1 : A_1, \dots, t_n : A_n \Vdash_I t : A)$$

Основные свойства, которыми обладает наше определение следования, перечислены в следующей лемме.

ЛЕММА 11. Если Σ и Δ — последовательности термов (возможно пустые), то определенное нами отношение следования обладает следующими свойствами:

a) $t : A \Vdash t : A$

b) $\Sigma, t : A \Vdash t : A$

- c) $t_1 : A_1, \dots, t_n : A_n \Vdash t : A \implies t_{i1} : A_{i1}, \dots, t_{in} : A_{in} \Vdash t : A$
- d) $\Sigma \Vdash t : A \implies \Sigma, t_1 : A_1 \Vdash t : A$
- e) $\Sigma, t_1 : A_1, t_1 : A_1 \Vdash t : A \implies \Sigma, t_1 : A_1 \Vdash t : A$
- f) $\Sigma \Vdash t_1 : A_1; \Delta, t_1 : A_1 \Vdash t : A \implies \Delta, \Sigma \Vdash t : A$
- g) $\Sigma \Vdash t_1 : A_1; \Sigma \Vdash t_2 : A_2 \implies \Sigma \Vdash (t_1 \times t_2) : A_1 \times A_2$
- h) $\Sigma \Vdash (t_1 \times t_2) : A_1 \times A_2 \implies \Sigma \Vdash t_1 : A_1$
- i) $\Sigma, t_1 : A_1, t_2 : A_2 \Vdash t : A \implies \Sigma, (t_1 \times t_2) : A_1 \times A_2 \Vdash t : A$
- j) $t_1 : A_1 \Vdash t : A; t_2 : A_2 \Vdash t : A \implies (t_1 \oplus t_2) : A_1 \oplus A_2 \Vdash t : A$
- k) $\Sigma \Vdash t_1 : A_1 \implies \Sigma \Vdash (t_1 \oplus t_2) : A_1 \oplus A_2$

А как же импликация? Почему мы не включили ее в наш язык? Ответ прост. Можно показать, что при нашем определении следования не существует такой логической связки, для которой выполнялись бы *modus ponens* и теорема дедукции. В то же время это вовсе не означает, что ни для одной конкретной категории ее нельзя определить. Преимущество категорной интерпретации заключается в том, что она задает логическое ядро, которое сохраняется для каждой конкретной категории, но может приобретать и новые свойства. Например, в общем случае не выполняется закон дистрибутивности для дизъюнкции и конъюнкции, но это вовсе не означает, что он не будет выполняться ни для одной конкретной категории.

4 Пример теории в логике термов

Мы не будем подробно рассматривать аксиоматизацию логики термов, отметив лишь, что она задается в виде секвенций. Так как ценность логики определяется ее приложениями, дадим набросок того, как построить на базе логики термов дедуктивную теорию примитивно-рекурсивной арифметики.

Язык ее состоит из:

- счетного множества переменных $x_1, \dots, x_i, \dots$ сорта N ;

- нульместного функционального символа $0 : N$;
- одноместного функционального символа $S : N \rightarrow N$;
- функциональных символов $pr_n^i : N \times \dots \times N \rightarrow N$ для каждого $n > 0$ и $0 < i \leq n$.

В качестве знака секвенции будем использовать $\Vdash$. К числу основных секвенций добавляем:

- 1) $\Vdash 0$
- 2) $x \Vdash S(x)$
- 3) счетное множество секвенций вида $x_i \Vdash pr_k^i(x_1, \dots, x_k)$ для каждого $k > 0$ и $0 < i \leq k$
- 4) схему секвенций $G_1(x_1, \dots, x_k), \dots, G_m(x_1, \dots, x_k) \Vdash F(G_1(x_1, \dots, x_k), \dots, G_m(x_1, \dots, x_k))$, где вместо $G_1, \dots, G_m, F$ могут стоять любые функциональные символы языка местности $k \geq 0$ и $m \geq 1$.

Также мы добавляем правило расширения языка новыми функциональными символами.

Если в языке уже имеется k -местный функциональный символ f и $k+2$ -местный функциональный символ g , то мы можем добавить в язык новый $k+1$ -местный функциональный символ h , правила оперирования которым задаются двумя новыми основными секвенциями:

- 5) $f(x_1, \dots, x_k) \Vdash h(x_1, \dots, x_k, 0)$
- 6) $g(x_1, \dots, x_k, y, h(x_1, \dots, x_k, y)) \Vdash h(x_1, \dots, x_k, S(y))$

Чтобы семантически обосновать построенную теорию, мы должны показать, как на основании значений арифметических термов, стоящих слева от знака секвенции, вычислить значение терма, стоящего справа.

- Обоснованием аксиомы $\Vdash 0$ является константная функция 0 .

- Обоснованием аксиомы $x \Vdash S(x)$ является функция следования за **S** (прибавления единички, добавления к кучке камешков еще одного, рисования палочки на песке).
- Обоснованием аксиом вида $x_i \Vdash pr_k^i(x_1, \dots, x_k)$ является тождественная функция $\mathbf{Id}(\mathbf{x})=\mathbf{x}$.
- Обоснованием схемы аксиом $G_1(x_1, \dots, x_k), \dots, G_m(x_1, \dots, x_k) \Vdash F(G_1(x_1, \dots, x_k), \dots, G_m(x_1, \dots, x_k))$ является само определение следования в логике термов.
- Обоснованием двух аксиом, соответствующих правилу введения новых функциональных символов, также является тождественная функция $\mathbf{Id}(\mathbf{x})=\mathbf{x}$.

В итоге для семантического обоснования построенной теории нам понадобилась лишь константная функция **0**, функция следования за **S** и тождественная функция **Id**. Примитивно-рекурсивная арифметика на базе логики термов предстает не как теория свойств множества натуральных чисел, а как теория счета. Идеальный объект под названием «множество натуральных чисел» в ней отсутствует, он просто не нужен, как ненужным оказалось и понятие истины.

Заключение

Может сложиться впечатление, что целью автора было убедить читателя в том, что вся современная логика неправильна, а правильным является его подход. Это неверно. Действительной целью было показать, что природа логики гораздо более глубока, чем принято считать. Она проявляется уже на уровне теории знаков, а не на уровне позднейших наслоений в виде теории истины и пр. На уровне теории знаков логика еще свободна от обременительных предпосылок, принимаемых в связи с теми или иными философскими взглядами на природу бытия. Любые философские теории являются отражением успехов в познании природы для конкретного периода истории. Логика не должна быть к ним привязанной. Лишь тогда ее действительно можно будет назвать органом. В этом и заключается ответ на постав-

ленный в эпиграфе вопрос, *что же представляет собой Логика как таковая?*

Литература

- [1] Бочаров В.А., Маркин В.И. Основы логики. Учебник. М.: Космополис, 1994. С. 9–10.

О понятии доказательства

В. И. ШАЛАК

ABSTRACT. In the paper we compare two well known definitions of proof in axiomatic systems and demonstrate that these definitions need different metalanguages. It is most interesting that they allow give different definitions of theory.

Современная логика в своем развитии достигла таких заоблачных высей, что может возникнуть иллюзия, будто ее основные понятия изучены досконально и ничего интересного обнаружить в них уже невозможно. Это не так.

Пусть нам дана аксиоматическая формулировка классической логики высказываний со схемами аксиом и единственным правилом вывода — *modus ponens*. Стандартное определение доказательства выглядит следующим образом:

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 1. Доказательством формулы A называется непустая конечная последовательность формул $\langle A_1, \dots, A_n \rangle$, каждая из которых есть либо аксиома, либо получена из предшествующих формул последовательности по правилу *modus ponens*, и последняя формула этой последовательности A_n есть A .

Изучающим логику обычно сообщают, что мы получим тот же класс доказуемых формул, если слегка изменим определение доказательства:

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 2. Доказательством формулы A называется непустая конечная последовательность формул $\langle A_1, \dots, A_n \rangle$, каждая из которых есть либо аксиома, либо ранее доказанная теорема, либо получена из предшествующих формул последовательности по правилу *modus ponens*, и последняя формула этой последовательности A_n есть A .

Очевидно, что всякое доказательство, удовлетворяющее определению 2, можно легко преобразовать в доказательство, удо-

влетворяющее определению 1. В то же время определение 1 является частным случаем определения 2. Удобство использования второго определения объясняется тем, что не нужно каждый раз заново доказывать ранее полученные теоремы, а можно просто включать их в новое доказательство, что позволяет значительно сократить его длину. Этим постоянно пользуются в своей практике не только профессиональные логики, но и люди, занимающиеся математикой и другими науками.

Можно сказать, что последовательность формул, удовлетворяющая определению 1, обладает вневременным существованием. Даже если мы захотим рассматривать пошаговый процесс ее построения, то время, производное от этого построения, будет внутренним временем последовательности. Следствием этого является то, что класс доказуемых формул обладает вневременным существованием, т.е. дан нам актуально. В этом случае естественным является определение теории по Тарскому как дедуктивно замкнутого множества формул.

Иначе обстоит дело с определением 2, в котором фигурирует выражение «ранее доказанная теорема», являющееся ссылкой на содержимое памяти логического субъекта. Память всегда бывает о чем-то, что было в прошлом. Это означает, что в определении 2 неявным образом присутствует понятие времени. Всякое доказательство в соответствии с определением 2, в котором используется ссылка на ранее доказанные теоремы, является правильным лишь относительно результатов предыдущей деятельности, а не безотносительно к ней, как это имеет место в случае определения 1. В этом случае класс теорем дан нам лишь потенциально. Будем отождествлять состояния памяти со всевозможными подмножествами множества формул Frm .

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 3. $Met = 2^{Frm}$.

Переформулируем определение 2, сделав неявное явным.

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 4. Доказательством формулы A при состоянии памяти $M \in Met$ называется такая непустая конечная последовательность формул $\langle A_1, \dots, A_n \rangle$, что для всякого $1 \leq i \leq n$ либо A_i есть аксиома, либо $A_i \in M$, либо A_i получена из предшествующих формул последовательности по правилу *modus ponens*, последняя формула этой последовательности A_n

есть A и новым состоянием памяти является $M' = M \cup \{A_n\}$.

Поскольку понятие доказательства связано с переходом от одних состояний памяти к другим, оно задает бинарное отношение $Proof \subseteq Mem \times Mem$, которое можно определить следующим образом:

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 5. $Proof = \{\langle M_1, M_2 \rangle \mid \text{существует такое доказательство } \langle A_1, \dots, A_n \rangle \text{ при состоянии памяти } M_1, \text{ что } M_2 = M_1 \cup \{A_n\}\}$.

Отношение $Proof$ представляет простую модель для дискретной временной логики. Возможными мирами в этой модели являются состояния памяти логического субъекта, который занимается построением доказательств. Естественным было бы принять дополнительное ограничение на эти состояния, допустив, что они конечны, и существовал такой начальный момент времени, когда память была пуста. В этом случае временной порядок конечен в прошлое и бесконечен в будущее. Начальный момент времени соответствует такому состоянию логического субъекта, когда им еще не была доказана ни одна теорема.

Таким образом, в случае определения 4 используемый нами метаязык базируется на временной логике. В этом метаязыке определение теории по Тарскому уже не выглядит естественным. Лишь Богу доступны все возможные следствия аксиом, но не конкретному логическому субъекту, для которого они существуют лишь потенциально. Поэтому при соответствующем расширении определения 4 теорию можно определить как множество нелогических аксиом и правил вывода, а состояния знания логического субъекта отождествлять с состояниями памяти. Такое понимание теории лучше согласуется с научной практикой и в то же время доступно для анализа строгими логическими методами.

Полезным следствием нового понимания теории является то, что возможная противоречивость аксиом уже не несет такой угрозы, как в случае теории по Тарскому. Появление противоречий в реальной научной практике является не столь уж и редким событием, но пока что ни разу не приводило к краху нашей системы знания. Когда они обнаруживались, это приводило к пересмотру теорий при сохранении их позитивного содержания.

В качестве примера можно привести обнаружение противоречий в наивной теории множеств Кантора, и их разрешение в теории множеств Цермело–Френкеля за счет принятия ограничений на образование множеств. То есть в реальной научной практике выработаны механизмы поддержания непротиворечивости знания. Такие механизмы можно включить в определение понятия доказательства.

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 6. Доказательством формулы A при состоянии памяти $M \in \text{Мет}$ называется такая непустая конечная последовательность формул $\langle A_1, \dots, A_n \rangle$, что для всякого $1 \leq i \leq n$ либо A_i есть аксиома, либо $A_i \in M$, либо A_i получена из предшествующих формул последовательности по правилу *modus ponens*. Если $A_n = B \wedge \neg B$, то новым состоянием памяти является $M' = (M \setminus \{A_{j1}, \dots, A_{jk}\}) \cup \{\neg A_{j1} \vee \dots \vee \neg A_{jk}\}$, где $A_{j1}, \dots, A_{jk}$ — список всех входящих в последовательность формул памяти M , и $A = \neg A_{j1} \vee \dots \vee \neg A_{jk}$; в противном случае $A = A_n$ и новое состояние памяти есть $M' = M \cup \{A_n\}$.

Смысл данного определения очевиден. Всякий раз, когда мы получаем противоречие, мы удаляем из памяти те формулы, которые были использованы в доказательстве, и вместо этого добавляем в память дизъюнкцию их отрицаний. Принятие определения 6 означает переход к использованию метаязыка на основе динамической логики, операторы которой могут быть представлены конечными последовательностями формул. Мы не станем подробно развивать эту тему, а лишь укажем на ее очевидную связь с адаптивными логиками Д. Батенса [1]–[6].

Осознанное использование метаязыка на базе временной или динамической логики позволяет по-новому подойти к решению многих известных задач, среди которых — парадоксы всеведения в эпистемической логике, методы построения паранепротиворечивых и немонотонных логик, построение логики индукции.

Литература

- [1] Batens D. Dynamic Semantics Applied to Inconsistency-Adaptive Logics // Логические исследования. Вып.5. М.: Наука, 1998.
- [2] Batens D. A Universally Abnormality-Adaptive Logic // Логические исследования. Вып.8. М.: Наука, 2001.
- [3] Batens D. Towards the Unification of Inconsistency Handling Mechanisms // Logic and Logical Philosophy, 2000. Appeared 2003.

- [4] *Batens D.* A General Characterisation of Adaptive Logics // *Logique et Analyse*, 2001. Appeared 2003.
- [5] *Batens D.* The Need for Adaptive Logics in Epistemology // D. Gabbay, S. Raham, J. Symons & J.P.V. Bendegem, eds. *Logic, Epistemology and the Unity of Science*. Dordrecht: Kluwer, 2004.
- [6] *Batens D., Haesaert L.* On Classical Adaptive Logics of Induction // *Logique et Analyse*, 2001. Appeared 2003.

Моделирование логических знаний и знаниевого вывода средствами СУБД

Т. А. Шиян

ABSTRACT. It is considered in the paper abilities of automatic conclusions of knowledge about formal theories, these abilities base on Relational Database Management System and offered by author theoretical model of representation of knowledge about formal theories. It is considered some abilities of pseudo-deduction based on the model and the structure of representation of knowledge. It is described some ways of production of new theories and knowledge about them.

1 Введение

Идея моделирования баз знаний (БЗ) и знаниевого вывода на них средствами СУБД не столь нелепа, как представляют апологеты «знаниевой» инженерии. Во-первых, у такого подхода есть экономическая подоплека: право доступа к некоторой реляционной СУБД и к интерпретатору некоторого серверного языка программирования входит обычно в минимальный пакет услуг хост-провайдеров, тогда как создание и поддержка в сети СУБЗ может потребовать значительных финансовых вложений. Во-вторых, различие между БД и БЗ в значительной степени принадлежит области идеологии. Основное различие (принимаемое в ИИ) между данными и знаниями — связанность. Данное — это относительно элементарный текст, фиксирующий некоторую информацию о предметной области. Простые данные можно объединять в более сложные. Знания — это структура, состоящая из элементарных (относительно данной структуры) данных и многочисленных и разнородных связей между ними. На основании этих связей мы можем из одних данных «выводить» другие. Но современная методология проектирования реляционных БД подразумевает разбиение данных на

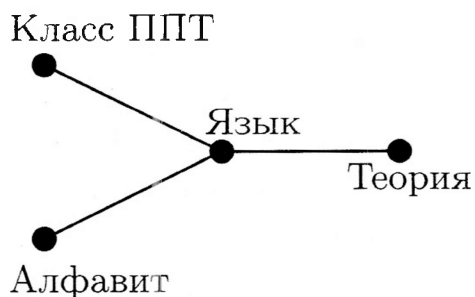
достаточно простые фрагменты, объединяемые средствами таблиц и межтабличных связей. В каждой реляционной СУБД реализована полнофункциональная реляционная алгебра, благодаря чему мы имеем возможность манипулировать данными и осуществлять необходимые выводы. Таким образом, единственными реальными (но не принципиальными) различиями между СУБД и СУБЗ являются, во-первых, необязательность автоматического поддержания связности БД (реализовано в некоторых коммерческих СУБД) и, во-вторых, хранение в БЗ не только «хорошо структурированных данных» о предметной области, но и сведений о вычислительных процедурах, посредством которых из одних данных можно получать другие. Второе отличие также не принципиально, поскольку в СУБД часто предусматриваются средства определения собственных процедур и функций, что позволяет свести роль внешнего интерфейса только к операции приложения некоторой функции к соответствующему набору данных-аргументов.

Описав предметную область как структуру взаимосвязанных объектов и представив ее в виде реляционной БД, мы получаем не только положительный ответ на вопрос о разрешимости рассуждений о данной предметной области, но и машинно реализованный механизм осуществления этих рассуждений. Ниже описывается теоретическая модель представления логических знаний о формальных теориях, положенная в основу информационной системы по логике *Theo.ru*. Из сказанного выше следует, что все рассматриваемые выводы эффективно вычисляемы средствами реализованной в СУБД реляционной алгебры. При этом акцент делается не на вопросах технической реализации теоретической модели средствами реляционной СУБД, а на вычислительных возможностях вывода знаний о предметной области в рамках данной теоретической модели и некоторых ее уточнений.

2 Классы базовых объектов и их взаимосвязи

Базовая модель содержит четыре класса объектов: «формальные теории», «формальные языки, или классы формул (ППФ)», «классы термов (ППТ)», «формальные алфавиты». Обозначу эти классы объектов через *Theor*, *Lang*, *Term* и *Alph*. Меж-

ду объектами разных классов заданы перекрестные отношения: «теория — язык», «язык — класс ППТ», «язык — алфавит», так что элементарная структура предметной области имеет следующий вид:



Класс ППТ и алфавит понимаются как атрибуты (в терминологии объектно-ориентированного подхода) языка, а язык — как атрибут теории. Поскольку это отношения типа много — один, то можно представить их в виде функций:

- $L(T)$ — язык теории T ;
- $A(L)$ — алфавит языка L ;
- $Tr(L)$ — класс термов языка L .

Такое представление данных отношений вполне соответствует способу их задания (в описании каждого объекта явно указывается значение соответствующего атрибута). Суперпозицией трех базовых функций (A , Tr и L) можно определить еще две:

- $A_t(T) =_{df} A(L(T))$ — алфавит теории T ;
- $Tr_t(T) =_{df} Tr(L(T))$ — класс термов теории T ;

Через описанные функции (отношения) можно задать ряд классификаций объектов модели. Для языков это — классификации по множеству ППТ и по алфавиту, а для теорий — классификации по языку, по множеству ППТ и по алфавиту. Знания о классификации объектов можно представить различными способами. В *Theo.ru* реализованы три стратегии представления таких знаний. Базовый подход основан на вычислении следующих функций:

- $C_{lang-a}(A) =_{df} \{x / A(x) = A\}$ — множество языков в алфавите A ;
- $C_{lang-t}(Tr) =_{df} \{x / Tr(x) = Tr\}$ — множество языков с классом термов Tr ;
- $C_{theor-l}(L) =_{df} \{x / L(x) = L\}$ — множество теорий в языке L ;
- $C_{theor-a}(A) =_{df} \{x / A_t(x) = A\}$ — множество теорий в алфавите A ;
- $C_{theor-t}(Tr) =_{df} \{x / Tr_t(x) = Tr\}$ — множество теорий с классом термов Tr .

Второй подход задается следующими функциями:

- $K_{lang-a}(L) =_{df} C_{lang-a}(A(L)) = \{x / A(x) = A(L)\}$ — множество языков в том же алфавите, что и язык L ;
- $K_{lang-t}(L) =_{df} C_{lang-t}(Tr(L)) = \{x / Tr(x) = Tr(L)\}$ — множество языков с тем же классом термов, что и язык L ;
- $K_{theor-l}(T) =_{df} C_{theor-l}(L(T)) = \{x / L(x) = L(T)\}$ — множество теорий в том же языке, что и теория T ;
- $K_{theor-a}(T) =_{df} C_{theor-a}(A_t(T)) = \{x / A_t(x) = A_t(T)\}$ — множество теорий в том же алфавите, что и теория T ;
- $K_{theor-t}(T) =_{df} C_{theor-t}(Tr_t(T)) = \{x / Tr_t(x) = Tr_t(T)\}$ — множество теорий с тем же классом термов, что и теория T .

Третий способ представления знаний о классификации можно получить введением отношения эквивалентности и последующей факторизацией классифицируемого множества.

- $L_1 \sim_a L_2 \Leftrightarrow_{df} A(L_1) = A(L_2)$ — отношение эквивалентности языков по алфавиту;
- $L_1 \sim_t L_2 \Leftrightarrow_{df} Tr(L_1) = Tr(L_2)$ — отношение эквивалентности языков по классу термов;

- $T_1 \sim_l T_2 \Leftrightarrow_{df} L(T_1) = L(T_2)$ — отношение эквивалентности теорий по языку;
- $T_1 \sim_{ta} T_2 \Leftrightarrow_{df} A_t(T_1) = A_t(T_2)$ — отношение эквивалентности теорий по алфавиту;
- $T_1 \sim_{tt} T_2 \Leftrightarrow_{df} Tr_t(T_1) = Tr_t(T_2)$ — отношение эквивалентности теорий по классу термов.

В результате факторизации по этим отношениям получаем следующие разбиения (классификации) множеств *Lang* и *Theor*: $[Lang]_{\sim_a}$, $[Lang]_{\sim_t}$, $[Theor]_{\sim_l}$, $[Theor]_{\sim_{ta}}$, $[Theor]_{\sim_{tt}}$.

В заключение хочу еще раз отметить, что все выводы, рассмотренные в данном параграфе, основаны (кроме реализованной в СУБД реляционной алгебры) всего лишь на трех базовых функциях (отношениях) *A*, *Tr* и *L*, задаваемых в таблицах БД при определении языков и теорий.

3 Отношения порядка на классах базовых объектов

Первоначальной основной целью разработки *Theo.ru* было создание системы автоматической 3D-визуализации соотношений формальных теорий по дедуктивной силе. Поэтому в модель исходно было введено отношение частичного строгого порядка, соответствующее соотношению формальных теорий по дедуктивной силе. Поскольку формальная теория понимается как множество формул, доказуемых в данной теории, то отношение по дедуктивной силе (для теорий с непустым множеством теорем) совпадает с отношением «быть подмножеством». Это отношение представлено в БД своей диаграммой Хассе (транзитивной редукцией), т.е. перечислением всех пар только ближайших объектов (отношение R_{Theor}). Поэтому первая задача — установление по диаграмме Хассе полного отношения порядка. Транзитивное замыкание отношения *R*, произвольно упорядочивающего некоторое множество, можно получить, используя операцию умножения отношений, определяемую следующим образом [1]:

- $R_1 \circ R_2 = \{ \langle x, y \rangle / \exists z (\langle x, z \rangle \in R_1 \ \& \ \langle z, y \rangle \in R_2) \}.$

Если некоторое отношение *R* умножается само на себя, то говорят о возведении этого отношения в степень:

1. $R^1 = R$;
2. $R^{n+1} = R^n \circ R$.

Операция транзитивного замыкания R определяется как объединение всех степеней отношения R :

$$\bullet \text{ } Trans(R) = \bigcup_{i=1} R^i.$$

Поскольку рассматриваемые множества конечны и R — редукция отношения строгого порядка (т.е. не содержит петель и циклов), то транзитивное замыкание R получается конечным объединением первых n степеней отношения R , причем, n — меньше мощности самого множества — носителя R :

$$\bullet \text{ } Trans(R) = \bigcup_{i=1}^n R^i,$$

где n — степень последнего не пустого R^i . Для получения нестрогого частичного порядка $Trans(R)$ необходимо объединить с соответствующим диагональным отношением.

Наоборот, из отношения строгого (полного и некоторых случаев неполного) порядка R можно получить его транзитивную редукцию (диаграмму Хассе) по формуле:

$$\bullet \text{ } R \setminus R^2.$$

Основным типом задач, который приходится решать системе *Theo.ru* в процессе ее работы, является вывод из знаний о порядке на некотором классе объектов знаний о порядке на некоторой произвольной выборке объектов из этого класса. Рассмотрим подробнее проводимые при этом вычисления. Пусть на множестве M задано отношение строгого порядка R и имеется описание упорядоченного множества $\langle M, R \rangle$ в виде системы $\langle M, R' \rangle$, где R' — транзитивная редукция R . Пусть также задана произвольная выборка из M , обозначим ее — M_1 . Задача — построить описание $\langle M_1, R'_1 \rangle$ упорядоченного множества, которое получается из $\langle M, R \rangle$ за счет сокращения M до M_1 . Поскольку множество M_1 уже задано, то остается найти отношение R_1 . Эта задача решается следующим алгоритмом.

1. $R = Trans(R')$ — восстанавливаем R' до R ;
2. $R_1 = (M_1 \times M_1) \cap R$ — получаем ограничение порядка R на множество M_1 ;
3. $R_1' = R_1 \setminus (R_1 \circ R_1)$ — получаем искомую транзитивную редукцию порядка R_1 .

Поскольку объекты остальных классов также понимаются как множества (множество букв, множество термов и множество формул), то и на них определяется отношение порядка, совпадающее с отношением «быть подмножеством» (соответствующие транзитивные редукции, хранимые в БД: R_{Lang} , R_{Term} , R_{Alph}). Причем, эти отношения таковы, что функции A , Tr , L , A_t , Tr_t задают гомоморфизмы относительно соответствующих нестрогих порядков:

- $T_1 \subseteq T_2 \Rightarrow L(T_1) \subseteq L(T_2)$;
- $L_1 \subseteq L_2 \Rightarrow A(L_1) \subseteq A(L_2)$;
- $L_1 \subseteq L_2 \Rightarrow Tr(L_1) \subseteq Tr(L_2)$;
- $T_1 \subseteq T_2 \Rightarrow A_t(T_1) \subseteq A_t(T_2)$;
- $T_1 \subseteq T_2 \Rightarrow Tr_t(T_1) \subseteq Tr_t(T_2)$.

Таким образом, имея описание порядка на *Theor* и функции A , Tr , L (A_t и Tr_t — производны), можно вывести некоторые знания о порядках на *Lang*, *Term* и *Alph*:

- $T_1 \subseteq T_2 \ \& \ L(T_1) \neq L(T_2) \Rightarrow L(T_1) \subset L(T_2)$;
- $L_1 \subseteq L_2 \ \& \ A(L_1) \neq A(L_2) \Rightarrow A(L_1) \subset A(L_2)$;
- $L_1 \subseteq L_2 \ \& \ Tr(L_1) \neq Tr(L_2) \Rightarrow Tr(L_1) \subset Tr(L_2)$;
- $T_1 \subseteq T_2 \ \& \ A_t(T_1) \neq A_t(T_2) \Rightarrow A_t(T_1) \subset A_t(T_2)$;
- $T_1 \subseteq T_2 \ \& \ Tr_t(T_1) \neq Tr_t(T_2) \Rightarrow Tr_t(T_1) \subset Tr_t(T_2)$.

Правда, эти знания могут оказаться недостаточными, поэтому в *Theo.ru* реализована частично избыточная модель со всеми четырьмя изначально заданными отношениями порядка.

Все знания о порядке на одном классе объектов можно вывести из знаний о порядке на другом классе, если гомоморфизм (из второго класса в первый) обладает полнотой относительно этих порядков. Пусть имеются два произвольно упорядоченных множества $\langle M_1, R_1 \rangle$ и $\langle M_2, R_2 \rangle$ и функция φ из M_1 в M_2 , являющаяся гомоморфизмом относительно R_1 и R_2 , тогда φ — сильный гомоморфизм, если выполнено условие (1):

- $(\forall x_1, x_2 \in M_2)(\exists y_1, y_2 \in M_1)((x_1 R_2 x_2 \ \& \ \varphi(y_1) = x_1 \ \& \ \varphi(y_2) = x_2) \Rightarrow y_1 R_1 y_2)$.

Из этого условия следует, что любой изоморфизм будет сильным гомоморфизмом, но не наоборот. Если отношение R_2 транзитивно, то для вычисления R_2 по R_1 достаточно соблюдения «более слабого» условия (2):

- Для всех x_1 и x_2 из M_2 , ближайших относительно R_2 , $(\exists y_1, y_2 \in M_1)((x_1 R_2 x_2 \ \& \ \varphi(y_1) = x_1 \ \& \ \varphi(y_2) = x_2) \Rightarrow y_1 R_1 y_2)$.
- Гомоморфизм буду называть полным, если для него выполнено хотя бы одно из условий (1) и (2).

Для вполне упорядоченных относительно R_2 множеств (в том числе и для всех конечных) из условия (1) следует условие (2), но это неверно для более общего случая (например, для естественных порядков на множествах рациональных и действительных чисел). Поскольку в нашей модели R_1 и R_2 — транзитивные редукции отношений порядка, то условия (1) и (2) совпадают.

Гомоморфизм L из *Theor* в *Lang* можно сделать полным, вводя в *Theor* тривиальные (совпадающие с множеством ППФ) теории для каждого языка из *Lang*. Гомоморфизмы A (из *Lang* в *Alph*) и Tr (из *Lang* в *Term*) не являются полными ни логически, ни фактически, поскольку в БД *Theo.ru* имеются такие языки, алфавиты и классы термов, что:

- $A(L_1) \subset A(L_2) \ \& \ \neg(L_1 \subset L_2)$;

- $Tr(L_1) \subset Tr(L_2) \ \& \ \neg(L_1 \subset L_2)$.

Иллюстрацией для обоих случаев могут быть языки негативных сингулярных силлогистик оккамовского и аристотелевского типа, описанные в [2]. Фактической полноты гомоморфизмов A и Tr можно добиться, подбирая *ad hoc* и вводя в БД новые языки, отвечающие условиям полноты для A и Tr .

4 Возможности псевдодедукции

Каждый из объектов рассмотренных классов является точкой соотнесения некоторого набора текстов, фиксирующих наши сведения о данном объекте. Дальнейшего развития базовой модели и появления новых возможностей знаниевого вывода можно добиться путем структурирования сведений, представленных в этих текстах.

Например, для каждой формальной теории кроме языка указывается множество схем аксиом и правил вывода, посредством которых можно задать данную теорию. Пусть **Rules** — класс множеств правил вывода и **R** — функция, сопоставляющая теории T множество правил вывода Rl , фигурирующих в определении теории и относительно которых она замкнута. Пусть **Axiom** — множество схем формул, фигурирующих в БД в качестве схем аксиом при определении теорий; R_{ax} — бинарное отношение между элементами **Theor** и **Axiom**. Тогда аксиоматика теории T есть $Ax(T) = \{x / R_{ax}(T, Ax)\}$. Такое представление знаний об аксиоматике теорий предоставляет целый ряд интересных дополнительных возможностей знаниевого вывода. В частности, у нас появляется возможность вывода знаний о том, в какой теории доказуема некоторая формула и какие формулы доказуемы в некоторой теории. Возможность этих выводов основана на знании:

- $F \in T_1 \ \& \ T_1 \subseteq T_2 \Rightarrow F \in T_2$,

что аналогично:

- $T_1 \vdash F \ \& \ T_1 \subseteq T_2 \Rightarrow T_2 \vdash F$.

На основании этого общего знания имеем более частное:

- если F используется в качестве аксиомы T_1 и $T_1 \subseteq T_2$, то $T_2 \vdash F$.

Соответственно, снимая квантор всеобщности либо по F , либо по T_2 , получаем знания:

- формула доказуема во всех теориях, в формулировках которых она используется в качестве аксиомы, и в расширениях этих теорий;
- в теории доказуемы все формулы, которые используются в качестве аксиом в ее формулировке или в формулировках ее подтеорий.

Определение множества теорий, в которых доказуема некоторая формула, и определение множества формул, которые доказуемы в некоторой теории, названы здесь псевдодедукцией, поскольку они осуществляются не на основе дедуктивных рассуждений внутри исследуемых теорий, а на основе некоторых внешних знаний о теориях и их соотношениях. Соответственно, поскольку исходные знания касаются соотношений объектов из *Theor* и *Axiom*, то и новые выведенные знания касаются соотношений объектов этих же классов.

5 Алгоритмы порождения новых теорий

Анализируемый способ представления знаний о формальных теориях позволяет осуществлять еще ряд интересных выводов, пока не реализованных в *Theo.ru*. Автоматическое замыкание БД относительно некоторых из этих алгоритмов привело бы к нарушению полноты системы относительно порядка на *Theor*. Это связано с тем, что добавление каждой новой теории к БД требует выяснения ее отношений по дедуктивной силе с теориями, уже находящимися в БД. Но процедуры сравнения теорий по дедуктивной силе не автоматизированы и в общем виде автоматизированы быть не могут в силу проблемы разрешимости (иначе путем сравнения теорий T и $T + A$ решался бы вопрос о доказуемости или не доказуемости в T произвольной формулы A из языка этой теории). Тем не менее, сама возможность осуществления таких выводов важна с теоретической точки зрения

и может найти применение в дальнейшем. Рассмотрим несколько возможных групп алгоритмов порождения знаний о новых формальных теориях на основе уже имеющихся в БД знаний.

Порождение тривиальных теорий. Как было указано выше, можно добиться полноты гомоморфизма L из $Theor$ в $Lang$, введя в $Theor$ тривиальные теории (совпадающие с классами ППФ) для каждого языка из $Lang$. Такие теории можно получать автоматически, приняв в качестве правила вывода: $A \vdash B$. Для языков с импликацией этого же можно добиться, приняв в качестве аксиомы схему формул $(A \supset B)$, а в качестве правила вывода — *modus ponens*. Возможны и некоторые другие частные алгоритмы, учитывающие возможность наличия различных правил вывода (поскольку множество формул является формальной теорией не само по себе, а относительно некоторого дедуктивного замыкания). Эта группа алгоритмов позволяет отслеживать место порожденных теорий относительно R_{Theor} , поскольку созданная так теория будет максимальной для данного языка, а отношения между максимальными (тривиальными) теориями совпадают с отношениями между их классами ППФ.

Порождение теорий путем пропозиционального замыкания. При формулировке пропозициональных теорий мы не учитываем структуру простых предложений. Но если мы пропозициональные параметры заменим на элементарные предикатные формулы, то получим формулировку исходной пропозициональной теории в новом языке. Таким образом, если в $Lang$ есть пропозициональный язык L_1 и предикатный язык L_2 такие, что множества логических (не дескриптивных) знаков в них совпадают (способ описания алфавитов позволяет это проверять), то для каждой теории T_i в L_1 можно получить ее формулировку в L_2 : значения функций Ax и R для новой теории остаются как у теории T_i , а значение L меняется на L_2 . Возможны модификации алгоритма, учитывающие варианты дедуктивных замыканий (множеств правил вывода) теорий в L_1 и в L_2 , уже имеющихся в $Theor$. Алгоритмы этой группы в основном позволяют отслеживать место порожденных теорий относительно R_{Theor} , но это требует учета множества частных случаев. Введение некоторых дополнительных ограничений «на целостность» БД позволяет уменьшить число возможных случаев и обеспе-

читать возможность автоматического определения места каждой вновь порожденной теории относительно R_{Theor} .

Объединение теорий. Объединение двух формальных теорий (относительно замыкания Cn) в одном и том же языке на базе КЛВ определяется формулой [3]:

$$\bullet T_1 + T_2 = Cn(\{T_1\} \cup \{T_2\}).$$

При задании теорий некоторыми исчислениями (с одним и тем же множеством правил вывода) мы получаем $(T_1 + T_2)$ простым объединением аксиом (схем аксиом) этих исчислений. Таким образом, основным алгоритмом порождения этого частного вида объединений теорий будет:

$$\bullet L(T_1) = L(T_2) \ \& \ R(T_1) = R(T_2) \Rightarrow L(T_1 + T_2) = L(T_1) \ \& \ R(T_1 + T_2) = R(T_1) \ \& \ Ax(T_1 + T_2) = Ax(T_1) \cup Ax(T_2).$$

Этот алгоритм не позволяет для всех случаев точно определять местоположения новой теории относительно R_{Theor} . Выводимые о местоположении новой теории знания таковы:

- Если в $Theor$ не существует такой теории T_3 , чтобы $(\langle T_1, T_3 \rangle, \langle T_2, T_3 \rangle \in R_{Theor})$, то можно добавить в $Theor$ теорию T_3 такую, что $T_3 = (T_1 + T_2)$, а в R_{Theor} — пары теорий $\langle T_1, T_3 \rangle$ и $\langle T_2, T_3 \rangle$.
- $\exists T_3(\langle T_1, T_3 \rangle, \langle T_2, T_3 \rangle \in R_{Theor}) \Rightarrow$
 1. $(T_1 + T_2) \subseteq T_3$,
 2. $L(T_1) \neq L(T_3) \Rightarrow (T_1 + T_2) \subset T_3$.

Пересечение теорий. Этот алгоритм не реализуем средствами только реляционной алгебры и требует использования символьных операций (осуществляются средствами организации интерфейса между БД и пользователем). Пересечение двух формальных теорий (относительно замыкания Cn) в одном и том же языке на базе КЛВ совпадает с их пересечением как множеств. Но получить из формулировок T_1 и T_2 формулировку $(T_1 \cap T_2)$ сложнее. Если язык этих теорий содержит конъюнкцию и дизъюнкцию, то для конечно аксиоматизируемых теорий (других теорий в БД нет) мы имеем [3]:

- $(T_1 \cap T_2) = Cn(K_{T_1} \vee K_{T_2})$, где K_{T_1} и K_{T_2} — конъюнкции аксиом теорий T_1 и T_2 .

Поскольку $((A \wedge B) \vee (A \wedge C)) = A \wedge (B \vee C)$, то получаем следующий алгоритм порождения пересечений теорий:

- $L(T_1) = L(T_2) \ \& \ R(T_1) = R(T_2) \Rightarrow L(T_1 \cap T_2) = L(T_1) \ \& \ R(T_1 \cap T_2) = R(T_1) \ \& \ Ax(T_1 \cap T_2) = \{K_{T_1} \vee K_{T_2}\} = (Ax(T_1) \cap Ax(T_2)) \cup \{C_{T_1} \vee C_{T_2}\}$, где C_{T_1} и C_{T_2} — конъюнкции аксиом теорий T_1 и T_2 , не вошедших в $Ax(T_1) \cap Ax(T_2)$.

Этот алгоритм также не позволяет для всех случаев точно определять местоположения новой теории относительно R_{Theor} . Выводимые о местоположении новой теории знания таковы:

- Если в *Theor* не существует такой теории T_3 , чтобы $(\langle T_3, T_1 \rangle, \langle T_3, T_2 \rangle \in R_{Theor})$, то можно добавить в *Theor* теорию T_3 такую, что $T_3 = (T_1 \cap T_2)$, а в R_{Theor} — пары теорий $\langle T_3, T_1 \rangle$ и $\langle T_3, T_2 \rangle$;
- $\exists T_3 (\langle T_3, T_1 \rangle, \langle T_3, T_2 \rangle \in R_{Theor}) \Rightarrow$
 1. $T_3 \subseteq (T_1 \cap T_2)$,
 2. $L(T_1) \neq L(T_3) \Rightarrow T_3 \subset (T_1 \cap T_2)$.

Существуют и другие способы порождения новых теорий. При этом встают две группы задач. Во-первых, задача выбора алгоритмов, порождающих хотя бы условно значимые теории. Во-вторых, определение места каждой вновь порожденной теории в уже существующем на *Theor* порядке R_{Theor} .

6 Заключение

В первой части статьи описана базовая модель $\langle O, \mathfrak{R} \rangle$ ($O = \{Theor, Lang, Term, Alph\}$, $\mathfrak{R} = \{= L, = A, = Tr; R_{Theor}, R_{Lang}, R_{Term}, R_{Alph}\}$), служащая в качестве онтологии для синтеза знаний о формальных теориях, рассмотрены выводы, осуществимые в рамках базовой модели. Во второй части — описан один из возможных (реализованный в *Theo.ru*) способов представления знаний об аксиоматике формальных теорий и возможности знаниевого вывода, открываемые таким способом

представления. Поскольку описание формальной теории включает и другие блоки данных (в том числе описание языка, алфавита и класса термов), то, используя структурное, а не чисто текстовое представление других блоков, можно получить в рамках системы и новые возможности вывода знаний о формальных теориях. Кроме обычного отношения по множеству теорем между формальными теориями существуют и многие другие отношения. Учет этой информации также может существенно расширить информационные возможности системы.

Литература

- [1] Лисовский К.Ю., Марков А.С. Базы данных. Введение в теорию и методологию. М., 2004.
- [2] Маркин В.И. Силлогистические теории в современной логике. М., 1991.
- [3] Смирнов В.А. Логические методы анализа научного знания. М., 2002.

Содержание

А.М. АНИСОВ	
Классическая вычислимость и признаки индетерминизма	5
Б.В. БИРЮКОВ, И.С. ВЕРСТИН, В.И. ЛЕВИН	
Жизненный и научный путь Виктора Ивановича Шестакова — создателя логической теории релейно- контактных схем	27
Б.В. БИРЮКОВ, В.И. ШАХОВ	
Первые приложения логики к технике: Эренфест, Герсеванов и Шестаков. От применения логики к рас- чету сооружений и релейным схемам к логической тео- рии размерностей физических величин	73
В.Л. ВАСЮКОВ	
Проблема контекста интерпретации в универсальной логике	105
И.А. ГОРБУНОВ, М.Н. РЫБАКОВ	
Континуальные семейства логик	131
А.В. КРАСНЕНКОВА	
Поиск натурального вывода в системах негативной силлогистики	152
А.А. КРУШИНСКИЙ	
Генетический тип дедукции — альтернатива tradi- ционно понимаемой дедукции как выводу из аксиом	176

В.И. ЛЕВИН	
Акира Накашима и логическое моделирование дискретных схем	187
Е.Е. ЛЕДНИКОВ	
Об одном варианте динамической логики знания	218
И.Б. МИКИРТУМОВ	
Прагматические предикаты и эпистемическая динамика в логике смысла (I)	224
Н.Н. НЕПЕЙВОДА	
Интеллектуальные вирусы	240
С.А. ПАВЛОВ	
Модифицированная семантика Фреге и функциональная интерпретация	252
В.М. ПОПОВ	
Две последовательности простых паранепротиво- речивых логик	257
В.М. ПОПОВ	
Четыре простые паралогики: семантики и секвенциальные формулировки	262
Е.Д. СМИРНОВА	
Теоретико-познавательные и логико-семантические основания парадоксов	271
В.Х. ХАХАНЯН	
Интуиционистская арифметика с принципами Маркова и Р	283
В.И. ШАЛАК	
Логика термов	286
В.И. ШАЛАК	
О понятии доказательства	301
Т.А. ШИЯН	
Моделирование логических знаний и знаниевого вывода средствами СУБД	306

Table of contents

A. ANISOV	
Classical computability and indicators of non-determinism	5
B. BIRYUKOV, I. VERSTIN, V. LEVIN	
Life and career of Victor Ivanovich Shestakov, the creator of the logical theory of relay schemes	27
B. BIRYUKOV, V. SHAKHOV	
Early application of logic to technology: Ehrenfest, Gersevanov, and Shestakov. From the applications of logic to civil engineering and relay schemes to the logical theory of the measurement of physical quantities	73
V. VASYUKOV	
The problem of context of interpretation in universal logic	105
I. GORBUNOV, M. RYBAKOV	
Continuum classes of logics	131
A. KRASNENKOVA	
Proof search in the natural deduction systems for negative syllogistics	152
A. KRUSHINSKY	
Genetic deduction as an alternative to the traditional concept of deduction as inference from the axioms	176

V. LEVIN Akira Nakashima and logical modelling of discrete schemes	187
E. LEDNIKOV On one variant of dynamic-epistemic logic	218
I. MIKIRTUMOV Pragmatic predicates and epistemic dynamic in logic of sense I	224
N. NEPEIVODA Intellectual viruses	240
S. PAVLOV Modified Fregean semantics and functional interpretation ..	252
V. POPOV Two sequences of paraconsistent logics	257
V. POPOV Four simple paralogics: semantics and sequent calculi	262
E. SMIRNOVA Epistemological and logico-semantical foundations of paradoxes	271
V. KHAKHANYAN Intuitionistic arithmetic with Markov principles and P	283
V. SHALACK A logic of terms	286
V. SHALACK On the concept of proof	301
T. SHIYAN Modelling of logical knowledge and knowledge-based deduction by means of databases	306

Logical Investigations. – Vol. 14. – M.: Nauka, 2007. – 324 p. – ISBN 978-5-02-035860-7

The present volume of “Logical Investigations” reports on the most important results recently obtained in various research areas in logic. Some of the papers are of considerable logico-philosophical importance: cases in point are a paper by N. Nepeivoda on intellectual viruses and a joint paper by I. Gorbunov and M. Rybakov on continuums of logics. Three papers in the volume are concerned with the relay-scheme interpretation of the classical propositional logic; the question of priority in this research area is discussed.

The publication is addressed to logicians, philosophers, mathematicians, and those interested in logic and its applications.

Научное издание

**ЛОГИЧЕСКИЕ
ИССЛЕДОВАНИЯ**

Вып. 14

*Утверждено к печати
Ученым советом
Института философии РАН*

Компьютерный набор выполнен
в Институте философии РАН

Компьютерная верстка
Н.Е. Томова

Зав. редакцией *Г.И. Чертова*
Редактор *Е.А. Жукова*
Художественный редактор *Т.В. Болотина*

Подписано к печати 04.12.2007
Формат 60 × 90¹/₁₆. Гарнитура Таймс
Печать офсетная
Усл.печ.л. 20,5. Усл.кр.-отт. 20,8. Уч.-изд.л. 19,5
Тип. зак. 2512

Издательство “Наука”
117997, Москва, Профсоюзная ул., 90
E-mail: secret@naukaran.ru
www.naukaran.ru

ППП “Типография “Наука”
121099, Москва, Шубинский пер., 6

**АДРЕСА КНИГОТОРГОВЫХ ПРЕДПРИЯТИЙ
ТОРГОВОЙ ФИРМЫ "АКАДЕМКНИГА" РАН**

Магазины "Книга-почтой"

- 121099 Москва, Шубинский пер., 6; (код 495) 241-02-52 Сайт: www.LitRAS.ru
E-mail: info@litrass.ru
197110 Санкт-Петербург, ул. Петрозаводская, 7 "Б"; (код 812) 235-40-64
ak@akbook.ru

**Магазины "Академкнига" с указанием букинистических отделов
и "Книга-почтой"**

- 690002 Владивосток, Океанский проспект, 140 ("Книга-почтой");
(код 4232) 45-27-91 antoli@mail.ru
620151 Екатеринбург, ул. Мамина-Сибиряка, 137 ("Книга-почтой");
(код 343) 350-10-03 kniga@sky.ru
664033 Иркутск, ул. Лермонтова, 289 ("Книга-почтой"); (код 3952) 42-96-20
aknir@irlan.ru
660049 Красноярск, ул. Сурикова, 45; (код 3912) 27-03-90 akademkniga@bk.ru
220012 Минск, просп. Независимости, 72; (код 10375-17) 292-00-52, 292-46-52,
292-50-43 www.akademkniga.by
117312 Москва, ул. Вавилова, 55/7; (код 495) 124-55-00 akadkniga@nm.ru;
(Бук. отдел 125-30-38)
117192 Москва, Мичуринский проспект, 12; (код 495) 932-74-79
127051 Москва, Цветной бульвар, 21, строение 2; (код 495) 621-55-96
(Бук. отдел)
117997 Москва, ул. Профсоюзная, 90; (код 495) 334-72-98
akademkniga@naukaran.ru
105062 Москва, Б. Спасоглинищевский пер., 8 строение 4; (код 495) 624-72-19
(Бук. отдел)
630091 Новосибирск, Красный проспект, 51; (код 383) 221-15-60
akademkniga@mail.ru
630090 Новосибирск, Морской проспект, 22 ("Книга-почтой");
(код 383) 330-09-22 akdmn2@mail.nsk.ru
142290 Пушкино Московской обл., МКР "В", 1 ("Книга-почтой");
(код 49677) 3-38-80
191104 Санкт-Петербург, Литейный проспект, 57; (код 812) 272-36-65
ak@akbook.ru (Бук. отдел)
199034 Санкт-Петербург, Васильевский остров, 9-я линия, 16;
(код 812) 323-34-62 (Бук. отдел)
634050 Томск, Набережная р. Ушайки, 18;
(код 3822) 51-60-36 akademkniga@mail.tomsknet.ru
450059 Уфа, ул. Р. Зорге, 10 ("Книга-почтой"); (код 3472) 23-47-62,
23-47-74 akademkniga@ufacom.ru
450025 Уфа, ул. Коммунистическая, 49; (код 3472) 72-91-85 (Бук. отдел)

Коммерческий отдел, Академкнига. г. Москва

Телефон для оптовых покупателей: (код 495) 241-03-09

Сайт: www.LitRAS.ru

E-mail: info@litrass.ru

Склад, телефон (код 499) 795-12-87

Факс (код 495) 241-02-77

*По вопросам приобретения книг
государственные организации
просим обращаться также
в Издательство по адресу:
117997 Москва, ул. Профсоюзная, 90
тел. факс (495) 334-98-59
E-mail: initsiat@naukaran.ru
www.naukaran.ru*
