РОССИЙСКАЯ АКАДЕМИЯ НАУК
ИНСТИТУТ ФИЛОСОФИИ

LOGICAL INVESTIGATIONS

Volume 15

MOSCOW NAUKA 2009

ЛОГИЧЕСКИЕ ИССЛЕДОВАНИЯ

Выпуск 15

МОСКВА НАУКА 2009

УДК 16
ББК 87.4
Л69

Логические исследования / [отв. ред. А.С. Карпенко] ; Ин-т философии РАН. М. : Наука, 1993–. –
Вып. 15. – 2009. – 319 с. – ISBN 978-5-02-036826-2 (в пер.).

В данный сборник включены наиболее важные результаты, полученные в различных областях логики за последнее время. Основное внимание уделено развитию неклассических логик. Продолжены исследования по истории отечественной логики. Это издание рукописи В.И. Шестакова, утверждающей отечественный приоритет в открытии логической теории релейно-контактных схем. Также впервые издается на русском языке работа М.И. Шейнфинкеля, положившая начало развитию комбинаторной логики. Особый интерес представляет работа Ю.И. Манина об истинности и работа В.И. Шалака об основаниях логики.

Для логиков, философов, математиков и всех, кто интересуется различными приложениями логики.

Темплан 2009-I-18

Logical Investigations. – Vol. 15. – M. : Nauka, 2009. – 319 p. – ISBN 978-5-02-036826-2.

The present volume includes the most important results recently obtained in a number of research areas in logic. The majority of publications are devoted to non-classical logics. Some papers are devoted to the study of the history of Russian logical tradition: the publications of the manuscript by V.I. Shestakov, which confirms the priority of the Russian school in the study of contact-relay schemes. Also, for the first time, we publish in Russian a paper by M.I. Sheinfinkel that lay foundations for the development of combinatory logic. Of particular importance are the papers by Y. Manin on the notion of truth and by V. Shalack on the foundations of logic.

The volume is of interest to logicians, philosophers, mathematicians and to all those who has interest in applications of logic.

ISBN 978-5-02-036826-2

Недетерминированная вычислимость: философские основания[1]

А. М. Анисов

abstract. The paper consists of three parts. The first one dwells on a comparison of deterministic and nondeterministic computability and defines two kinds of nondeterministic computabilities: global and local. The second part considers the sources of nondeterministic computations. The third part touches upon the problems of computational modelling of causal relationships.

Ключевые слова: детерминированная вычислимость, недетерминированная вычислимость, линейная дискретность, глобальный недетерминизм, локальный недетерминизм, оракулы, производительная причинность.

1 Детерминированная и недетерминированная вычислимость

Детерминированная вычислимость ограничена вычислением *функций*. В теориях вычислимости применяется несколько отличное от обычного теоретико-множественного понятие функции. Зафиксируем произвольное непустое множество U в качестве универсума. Любое подмножество F^n множества U^n (здесь U^n есть n-кратное ($n \geq 1$) декартово произведение множества U, т.е. множество всех упорядоченных n-ок элементов из U) называется *n-местным отношением* на U.

В том случае, если $n+1$-*местное отношение* F^{n+1} на U удовлетворяет условию

$(\forall < x_1, x_2, \ldots, x_n, x_{n+1} >\in F^{n+1})(\forall < y_1, y_2, \ldots, y_n, y_{n+1} >\in F^{n+1})$

$((< x_1, x_2, \ldots, x_n >=< y_1, y_2, \ldots, y_n >) \to (x_{n+1} = y_{n+1}))$,

F^{n+1} называется *n-местной функцией* на U.

[1]Работа выполнена при поддержке РГНФ, грант №07-03-00203а.

Функция F^{n+1} является *тотальной* на U, если $F^{n+1} = U \times U \times \cdots \times U \times P$, где $P \neq \varnothing$ и $P \subset U$. Функция F^{n+1} будет *частичной* на U, если $F^{n+1} = F_1 \times F_2 \times \cdots \times F_n \times P$, где $P \subset U$, для всех F_j $(1 \leq j \leq n)$ $F_j \subset U$ и для хотя бы одного F_j $(1 \leq j \leq n)$ имеет место $F_j \neq U$. Ясно, что каждая функция на U будет либо тотальной, либо частичной. Содержательно, тотальная функция имеет значение x_{n+1} для любой n-ки $< x_1, x_2, \ldots, x_n > \in U^n$, тогда как частичная функция хотя бы для одной такой n-ки не определена. Выделенным случаем частичной функции является пустая функция $\varnothing$.

В теории множеств нет нужды различать понятия тотальной и частичной функции. При фиксированном U тотальная и частичная функции на U будут просто функциями с разными областями определения. Но в теории вычислимости выделение данных понятий имеет важное значение. Вычислимой тотальной функции соответствует процедура, заканчивающаяся на любом входе, тогда как вычислимой частичной функции сопоставляется процедура, процесс выполнения которой на некоторых входах не имеет последнего шага выполнения. Как известно, проблема останова является неразрешимой: доказано, что не существует алгоритма, отделяющего программы, вычисляющие тотальные функции, от программ, вычисляющих час тичные функции. Поэтому разница между тотальными и частичными вычислимыми функциями становится принципиальной.

Следуя идеям Марио Бунге, выдвинутым в книге [5], определим **детерминизм** как принцип, согласно которому все существующее, во-первых, чем-то *однозначно обусловлено*, и, во-вторых, во всем *полностью определено*. Отсюда **недетерминизм** означает либо неоднозначную обусловленность, либо неполную определенность, или и то и другое вместе. Крайней формой недетерминизма является **индетерминизм** — допущение существования чего-либо ничем не обусловленного или полностью неопределенного.

В работе [1] было показано, что классическая трактовка вычислимости связана с тремя типами недетерминизма. Во-первых, в ней принимается недетерминизм в «мягкой» форме неопределенности итогового результата вычислений и случайности появления начальных данных. Во-вторых, допускается «жесткий» недетерминизм в виде настоящего элемента индетерминизма, имеющего место в силу неопределенности и необусловленности процесса получения начальных данных без использования случайного процесса. В-третьих, если бы теоретические вычислительные устройства были воплощены в материи, то им был бы присущ еще один тип недетерминизма, связанный с возможностью неправильной работы: такие компьютеры могли бы завершать вычисления раньше времени, зависать, неверно выполнять команды и т.д. Однако в теориях классической вычислимости ничего подобного не может случиться в принципе.

Но если отвлечься от этих форм недетерминизма, классически понимаемая вычислимость (машины Тьюринга, МНР-компьютеры, нормальные алгорифмы Маркова и т.д.) оказывается полностью детерминированной в следующем смысле. Если введены начальные или промежуточные данные, результат следующего шага по их обработке оказывается однозначным. Тем самым классические вычисления, во-первых, полностью обусловлены предшествующими данными и, во-вторых, полностью предопределены в отношении последующих результатов. Это остается верным, даже если конкретный вычислительный процесс никогда не завершается: все равно каждый шаг вычислений и в такой ситуации является обусловленным и определенным. Речь идет, таким образом, не о глобальной, а о *локальной* детерминированности. В целом же не завершающийся вычислительный процесс следует признать *глобально* недетерминированным, поскольку отсутствует определенный результат такого вычисления.

Сказанное требует уточнения. Делать это можно по-разному, но мы будем исходить из следующих положений. Всякое вычисление предполагает наличие допустимых для обработки данных и соответствующих преобразующих эти данные *объектных* операций или команд. Могут также иметься *управляющие* операции или команды, определяющие порядок применения (или не применения) других операций в ходе вычислений и не затрагивающие обрабатываемые данные. В любом случае результатом применения команды будет наступление некоторого *события*. Назовем **вычислительным процессом** (или, короче, **вычислением**) *любое реализуемое в рамках некоторой теории вычислений линейное дискретное множество событий.*

По определению, *линейное дискретное множество* — это множество M, упорядоченное отношением R, удовлетворяющим следующим аксиомам.

1. $\forall x \forall y \neg (xRy)$ — антирефлексивность.
2. $\forall x \forall y \forall z ((xRy \& yRz) \to xRz)$ — транзитивность.
3. $\forall x \forall y (xRy \vee yRx \vee x = y)$ — линейность.
4. $\forall x \forall y (xRy \to \exists z (xRz \& (zRy \vee z = y) \& \neg \exists v (xRv \& vRz)))$ — дискретность справа.
5. $\forall x \forall y (xRy \to \exists z (zRy \& (xRz \vee z = x) \& \neg \exists v (zRv \& vRy)))$ — дискретность слева.

Кванторы ограничены множеством M: $\forall x$ распишется как $\forall x (x \in M \to$, а $\exists x$ как $\exists x (x \in M \&$. Поэтому пустое множество и любой синглетон (т.е. одноэлементное множество) будут вырожденными примерами линейных дискретных множеств (при этом будем иметь $R = \varnothing$).

В теориях классической вычислимости каждый вычислительный процесс может быть представлен либо в виде конечной последовательности (возможно, повторяющихся) событий

$S_1, S_2, \ldots, S_n,$

либо в виде бесконечной последовательности (не исключено, повторяющихся конечное или бесконечное число раз) событий

$S_1, S_2, \ldots, S_n, \ldots$.

Очевидно, что такие последовательности событий являются простейшими примерами линейных дискретных множеств. Кроме того, они *реализуемы* в рамках классической теории вычислимости. Конечные последовательности соответствуют здесь заканчивающемуся на данном входе или *сходящемуся* вычислению, тогда как бесконечная последовательность представляет никогда не завершающееся или *расходящееся* вычисление. Каждый переход $S_S \longmapsto S_{S+1}$ полностью детерминирован, так что все классические вычисления локально детерминированы. Расходящиеся вычисления глобально недетерминированы в силу неопределенности итогового результата. Кстати говоря, сложившееся понятие алгоритма как полностью детерминированного предписания по однозначному решению задач исключает возможность не останавливающихся вычислений.

В получивших известность обобщениях теории классической вычислимости и теориях неклассической вычислимости не могут быть реализованы вычислительные процессы, наглядно представленные следующими линейно дискретно упорядоченными множествами событий:

$\ldots, S_{-n}, \ldots, S_{-2}, S_{-1},$

$\ldots, S_{-n}, \ldots, S_{-2}, S_{-1}, S_0, S_1, S_2, \ldots, S_n, \ldots$.

Этим множествам соответствуют вычислительные процессы, не имеющие первого шага выполнения. Еще одним примером классически не реализуемого процесса будет множество событий, упорядоченное по типу ординала $\omega + 1$:

$S_1, S_2, \ldots, S_n, \ldots S_\omega$.

Зато в некоторых неклассических теориях принимается так называемое ω-правило, позволяющее от бесконечной ω-последовательности посылок $\varphi(1), \varphi(2), \ldots, \varphi(n), \ldots$ на $\omega+1$-шаге переходить к заключению $\forall x \varphi(x)$. Более того, в теории α-рекурсии (см. [16]) допускается вычислимость до любых подходящих ординалов, превышающих ординал ω. Однако в нашем смысле трансфинитная $\omega + 1$-последовательность событий $S_1, S_2, \ldots,$ $S_n, \ldots S_\omega$, не говоря уже о трансфинитных α-последовательностях, в которых $\alpha > \omega + 1$, просто не будет представлением никаких вычислительных процессов. В самом деле, в таких последовательностях нарушается аксиома 5 дискретности слева, согласно которой каждый элемент, имеющий предшественника, имеет и непосредственного предшественника. Но уже первый выход за пределы ординала ω приводит к тому, что у элемента S_ω предшественники есть, а непосредственного соседа слева нет.

Отметим, что для α-последовательностей аксиома 4 дискретности справа выполняется. Обратная ситуация, когда 5 выполняется, а 4 нет, возникнет, например, в следующем случае. Рассмотрим множество событий

$S_{\omega*} \ldots, S_{-n}, \ldots, S_{-2}, S_{-1}$.

(Здесь $\omega*$ является порядковым типом, соответствующим стандартному порядку на множестве отрицательных чисел.)

Такое множество имеет первый и последний элементы, однако за первым событием $S_{\omega*}$ непосредственно следующего нет, что обусловливает нарушение аксиомы 4. Но каждый имеющий предшественника элемент имеет и непосредственного предшественника, так что аксиома 5 выполняется.

Наконец, объединяя последние две ситуации, получим множество событий

$S_{\omega*} \ldots, S_{-n}, \ldots, S_{-2}, S_{-1}, S_1, S_2, \ldots, S_n, \ldots S_\omega,$

которое не будет дискретным множеством по причине нарушения обеих аксиом 4 и 5. И вновь таким множествам, согласно принятому определению, не соответствуют никакие вычислительные процессы.

Против упомянутого определения вычислительного процесса напрашиваются два принципиальных возражения. Во-первых, требование линейности исключает рассмотрение ветвящихся процессов. Между тем, именно такие процессы являются одним из главных видов недетерминированных вычислений. Во-вторых, аксиомы дискретности блокируют идею непрерывных процессов, которая хорошо укладывается в материал естествознания, в первую очередь физики. Кроме того, блокируется возможность обобщения теории вычислимости на подходящие трансфинитные ординалы, превышающие ординал ω.

Уточнение идеи вычислительного процесса основывалось на определенных философских представлениях. Дискретность вычислений позволяет нам подключить интуицию процессуальности, ибо все, что требуется от вычислительного процесса с незамутненной интуитивной точки зрения, — это возможность разложения его на отдельные шаги, причем на каждом шаге (если этот шаг не первый и не последний в серии процессуальных актов) можно указать непосредственно предшествующий и непосредственно следующий шаги. Те, у кого интуиция иная, обязаны этим обстоятельством вошедшим в привычку искусственным желанием втиснуть реальный мир в модели, существенным образом использующие идею непрерывности или, по крайней мере, идею плотности.

Наиболее ярко это проявляется в господствующих в точном естествознании моделях времени. В них моменты времени отождествляются с действительными числами, а временн*о*е отношение «раньше, чем» — со стандартным порядком «меньше, чем» на таких числах. Как известно, данный порядок является линейным и непрерывным. Последнее свойство влечет *плотность* данного порядка, т.е. выполняется формула

$\forall x \forall y (x < y \to \exists z (x < z \& z < y \& z \neq x \& z \neq y))$.

Обычным образом упорядоченное множество рациональных чисел оказывается плотным, хотя и не является непрерывным. Но этого достаточно, чтобы покончить с идеей осуществляющегося шаг за шагом процесса. Ведь свойство плотности несовместимо с дискретностью. Рассмотренные нарушающие дискретность структуры $S_1, S_2, \ldots, S_n, \ldots S_\omega$ и $S_{\omega *} \ldots, S_{-n}, \ldots, S_{-2}, S_{-1}$ осуществляют это нарушение за счет следующего уподобления свойству плотности:

$\forall S_j (S_j R S_\omega \to \exists S_k (S_j R S_k \& S_k R S_\omega \& S_k \neq S_j \& S_k \neq S_\omega))$,

$\forall S_j (S_{\omega *} R S_j \to \exists S_k (S_{\omega *} R S_k \& S_k R S_j \& S_k \neq S_j \& S_k \neq S_{\omega *}))$.

Между тем, никем, никогда и нигде не было приведено ни одного примера реально существующей плотной структуры. Напротив, чем больше мы узнаем об окружающей действительности, тем больше на первый план выходит идея дискретности природных процессов. Достаточно в связи с этим упомянуть квантовую физику. Но и первоначально, до появления новоевропейского естествознания, в науке и в ориентированной на науку философии преобладало представление о дискретности реальности. Затем восприятие реальности было искажено возобладавшими в науке (особенно в физике) описаниями действительности средствами непрерывных моделей. Такое развитие событий не было случайностью. Недаром закончилась ничем попытка античных атомистов создать атомистическую математику. Теперь стало ясным, что дискретное моделирование реальности с логической и математической точек зрения идейно и технически оказалось более сложным, чем применение в этих же целях привычного и хорошо разработанного аппарата классической математики. (Представление о возникающих тут проблемах можно получить, обратившись, например, к книге [13]).

Самым знаменитым проявлением парадоксальности идеи дискретного процесса явились появившиеся еще на заре философии и науки апории Зенона Элейского о движении. Зенон не сомневается в том, что движение не может быть ничем иным, как некой дискретной последовательностью актов или шагов. Но апории говорят о том, что при всех возможных вариантах описания движения в виде такой последовательности возникают неустранимые противоречия. Отсюда вывод — движения нет. Нововременная наука справилась с описанием движения ценой отказа от идеи его дискретности. Тем самым в жертву была принесена естественная интуиция дискретности процесса движения. Но самое удивительное в том, что в массовом масштабе воспитанные в традиционной парадигме физики просто не видят здесь проблемы. Стандартное образование ломает естественную интуицию! Апории Зенона для них — не более, чем остроумные, но неверные донаучные рассуждения или даже софизмы. Этот круг вопросов подробно рассматривается в книге [2].

Мы попытались кратко ответить на второе принципиальное возражение, касающееся дискретности. Теперь обратимся к первому, связанному с линейностью. Вновь в основе принятия идеи линейности лежат философские соображения. Представим себе житейскую ситуацию: человек принимает решение, жениться ему или не жениться. В пользу того или иного решения он может привести серьезные в его глазах доводы. Предположим также, что любое решение реально осуществимо. Означает ли это, что описанная ситуация может быть представлена ветвящимся процессом? Если принять во внимание наличествующие *возможности*, то «да». Если же имеется в виду лишь то, что *реализуемо*, то «нет». Эти две возможности исключают совместную реализацию. Реализация потребует сделать выбор в пользу лишь одного решения.

Обозначим этап раздумий посредством α, через β — событие женитьбы, через $\neg\beta$ — событие отказа от женитьбы. Стрелки $\nearrow$ и $\searrow$ выражают элементарный одношаговый процесс — акт перехода от события к событию. Представим утвердительный ответ схемой $\alpha\begin{smallmatrix}\nearrow\beta\\ \searrow\neg\beta\end{smallmatrix}$. Не только по философским соображениям, но и лингвистически неудачно называть эту схему единым процессом. На самом деле мы вольно или невольно выделяем *два* далее неразложимых элементарных возможных процесса: $\alpha \longrightarrow \beta$ и $\alpha \longrightarrow \neg\beta$, которые к тому же несовместимы между собой по итоговому результату. Люди так и рассуждают, когда говорят о будущих альтернативах: возможно как β, так и $\neg\beta$, но не то и другое вместе.

В отношении ветвления процессов в прошлое вывод еще более категоричен: такого не следует допускать даже в возможности, так как ничто в реальности схеме, подобной ${}^{\beta\searrow}_{\gamma\nearrow}\alpha$, не соответствует. Не может быть единой истории вычислений или единой истории чего-угодно с двумя различными прошлыми. Допустим, вычислено, что эквиваленция $A \leftrightarrow B$ истинна (событие α). Это означает, что прежде имело место либо A и B одновременно истинны (событие β), либо A и B одновременно ложны (событие γ). Но это, конечно, не означает, что в прошлом события β и γ реализовались одновременно. Было либо одно, либо другое, но что-то одно.

Таким образом, *актуально* реализующих ветвление в прошлое или в будущее процессов не бывает. Также есть все основания ввести ветвление будущих возможностей, относя каждую возможность при каждом пункте ветвления к отдельному процессу (в примере возможен как процесс женитьбы, так и процесс отказа от женитьбы). Но ветвлений процессов в прошлое быть не может ни в каком смысле. Разными могут быть лишь наши представления об одном и том же прошлом.

Высказанные соображения приводят к мысли о том, что отдельные вычислительные процессы сами по себе мало что могут дать для экспликации идеи недетерминизма. Рассматривая процессы $\alpha \longrightarrow \beta$ и $\alpha \longrightarrow \neg\beta$ по отдельности, мы не сможем увидеть проявление недетерминизма. Соединяя их единой схемой $\alpha^{\nearrow\beta}_{\searrow\neg\beta}$, попадаем, как было показано, в философски неприемлемую ситуацию. Но выход есть. Он состоит в переходе от рассмотрения отдельных процессов к анализу *множеств процессов*. В используемом примере вместо двух отдельных процессов и вместо объединяющей их схемы можно предложить теоретико-множественную пару $\{\alpha \longrightarrow \beta, \alpha \longrightarrow \neg\beta\}$. Однако пока это сугубо формальный прием. Необходимо придать ему смысл.

Для этого введем понятие программы. **Программой** *будем называть непустую конечную последовательность команд.* Выполнение программы π на компьютере @ порождает некоторый вычислительный процесс α. Возможна ситуация, когда $\alpha = \varnothing$. Это произойдет в том случае, если ни одна из команд программы π не была выполнена компьютером @ либо по причине его маломощности, либо из-за логической невозможности выполнения. Ассоциируем с каждой парой $(\pi, @)$ *множество* $\Theta_\pi^@$ *всех вычислительных процессов, которые могут быть порождены компьютером* @ *при выполнении программы* π.

Отметим следующий факт.

ТЕОРЕМА 1. *Для любых* π *и* @ *множество* $\Theta_\pi^@$ *не пусто:* $\Theta_\pi^@ \neq \varnothing$.

Доказательство. Если в результате выполнения программы π компьютером @ будет выполнена одна или более команд, возникнет непустой вычислительный процесс $\alpha \neq \varnothing$, $\alpha \in \Theta_\pi^@$. Если же никаких команд при попытке выполнить π выполнено не будет, получим пустой вычислительный процесс $\alpha = \varnothing$, $\alpha \in \Theta_\pi^@$. Q.E.D.

Введем следующие обозначения. Запись $\downarrow \alpha$ указывает, что процесс α имеет первый шаг выполнения. Формула $\uparrow \alpha$ означает, что процесс α не имеет начала. Аналогичным образом, записи $\alpha \downarrow$ и $\alpha \uparrow$ указывают, соответственно, на наличие последнего шага выполнения для α и отсутствие последнего шага для α. Возникают четыре комбинации стрелок, имеющие очевидный смысл: $\downarrow \alpha \downarrow$, $\downarrow \alpha \uparrow$, $\uparrow \alpha \downarrow$, $\uparrow \alpha \uparrow$.

Но есть еще одна проблема — проблема *аварийного останова* или, короче, *авоста*. Имеется в виду не техническая проблема поломки компьютера, а *логический авост*. Процесс α может логически «зависнуть», когда реализующий его компьютер, выполнив непустой ряд команд, не сможет выполнить очередную команду из-за логической невозможности ее выполнить. В этом случае процесс α не пуст, но в то же время не подпадает ни под одну из перечисленных разновидностей процессов. То же самое касается и пустого процесса: ведь при $\alpha = \varnothing$ нельзя сказать ни того, что процесс α начался и закончился (каким событием начался и каким закончился?), ни того, что он никогда не начинался и никогда не закончится (что предполагает бесконечный в обе стороны ряд событий, которых здесь заведомо нет). Будем применять запись $\alpha = \beta\varnothing$ в знак того, что процесс α успешно выполнялся на имеющем последнее событие S_j подпроцессе β (т.е.имело место $\beta \downarrow$), но при вычислении следующего события S_{j+1} возник логический авост. Если же такого успешного этапа β

не было и сразу наступил авост, просто имеем $\alpha = \varnothing$. Формально есть еще запись вида $\varnothing\beta$. Но это бессмысленная формула. Логическое «зависание» не может быть для чего-то началом, не может породить выполнение каких бы то ни было команд и соответствующей цепочки событий. Оно всегда фатально и безысходно.

В итоге получаем следующие семь разновидностей вычислительных процессов:

$\downarrow \alpha \downarrow, \downarrow \alpha \uparrow, \uparrow \alpha \downarrow, \uparrow \alpha \uparrow, \downarrow \alpha\varnothing, \uparrow \alpha\varnothing, \varnothing$.

Лишь вычислительные процессы типа $\downarrow \alpha \downarrow$ могут быть отнесены к детерминированным, точнее, *глобально детерминированным.* Вычислительные процессы остальных шести типов будут *глобально недетерминированными* из-за возникающих в связи с ними неопределенностей.

Это дает мотивировку для принятия следующего определения. *Множество вычислительных процессов* $\Theta_\pi^@$ **глобально детерминировано**, *если* $\forall\alpha(\alpha \in \Theta_\pi^@ \rightarrow \downarrow \alpha \downarrow)$. Поскольку по теореме $\Theta_\pi^@ \neq \varnothing$, отсюда вытекает, что хотя бы один процесс $\alpha \in \Theta_\pi^@$ и при этом $\downarrow \alpha \downarrow$. *Множество вычислительных процессов* $\Theta_\pi^@$ **глобально недетерминировано**, *если оно не не является глобально детерминированным.*

Множество вычислительных процессов $\Theta_\pi^@$ **локально детерминировано**, *если мощность* $\Theta_\pi^@$ *равна единице*: $|\Theta_\pi^@| = 1$. Иными словами, локальная детерминированность связана с тем, что любое выполнение компьютером @ программы π всегда порождает один и тот же вычислительный процесс α. *Если же* $|\Theta_\pi^@| > 1$, *то в этом случае* $\Theta_\pi^@$ **локально недетерминировано**. Могут подумать, что локальная недетерминированность обязательно связана с тем, что выполнение хотя бы одной команды из программы π неоднозначно в отношении наступления следующего события. Однако, как будет показано, это не так.

Очевидно, что глобальная детерминированность зависит от типа реализуемых вычислительных процессов, тогда как локальная детерминированность от типов реализуемых процессов не зависит и может быть определена только на множествах процессов. Ответ на вопрос, какие типы вычислительных процессов из семи возможных реализуемы, и на вопрос, имеются ли локально недетерминированные вычисления, определяется соответствующей теорией вычислимости. Например, теории классической вычислимости, как уже отмечалось, допускают глобальную, но не локальную недетерминированность.

2 Источники недетерминированных вычислений

В самом общем плане источниками недетерминированности могут быть как *внешние*, так и *внутренние* факторы. Разница здесь фундаментальная — такая же, как между учением о том, что мир создан Богом, и концепцией, согласно которой мир самодостаточен и существует сам по себе. В [1] проблема внешнего индетерминизма обсуждалась применительно к классической теории МНР-вычислимости, в которой начальные конфигурации, с которых начинаются вычисления, появляются неизвестно откуда, поистине чудесным образом. Здесь же мы будем рассматривать только внутренние механизмы как детерминированных, так и недетерминированных вычислений. Идею внутренних факторов реализуем при помощи принятия следующей *аксиомы существования.*

АКСИОМА 2. *Каждое событие в вычислительном процессе является результатом выполнения какой-либо команды программы.*

Пусть, например, в языке программирования имеется оператор присваивания $:=$ и индивидная константа c. Аксиома существования запрещает считать программой конструкцию $1.x := y$, поскольку неизвестно, откуда взялось значение y, т.е. отсутствует команда, реализующая событие присваивания значения этой переменной. Но конструкции $1.\, y := c$ и $1.\, y := c; 2.\, x := y$ вполне законны. Нарушает эту аксиому ввод данных с клавиатуры, поскольку события нажатия клавиш чисто внешние и не являются следствиями каких-либо компьютерных команд. Короче говоря, не допускается никакое внешнее вмешательство в вычислительный процесс.

Принятие аксиомы существования позволяет уйти от вопросов о детерминированности или недетерминированности внешних источников событий в вычислительном процессе. Например, если в ходе выполнения программы требуется ввести данные с клавиатуры, то нажимающий на клавиши субъект может решить действовать как детерминированно (скажем, всегда нажимать одну и ту же клавишу), так и недетерминированно (допустим, нажимать клавиши наугад). Понятное дело, сама выполняемая программа эти события никак не контролирует. Было бы неразумно включать в обсуждение вопросов вычислимости проблему свободы воли нажимающего на клавиши субъекта. Но аксиома существования не запрещает наличия команд, имитирующих ввод данных с клавиатуры. В этом случае такие команды должны быть точно синтаксически семантически описаны, что позволит однозначно решить вопрос об их детерминированности или недетерминированности.

Выделенные в литературе внутренние источники недетерминированной вычислимости, по сути, сводятся к трем разновидностям выходов за пределы детерминизма: вычислимость на отношениях (вместо функций), вероятностные правила вычислений (важный частный случай вычислимости на отношениях) и вычислимость с использованием оракулов. Наличие не взаимнооднозначных функций не рассматривается как проявление недетерминизма. Например, получив в результате выполнения команды $x + y$ число 8, мы остаемся в неведении относительно значений переменных x и y. Однако в реальных вычислениях эти значения будут определены однозначно. Ведь в противном случае выполнить операцию сложения невозможно. Более того, значения переменных x и y сохранятся в памяти компьютера и после выполнения команды сложения, что позволяет, например, повторить эту команду с тем же результатом.

Другое дело, если результат вычислений на определенном входе до выполнения команды остается неопределенным. Любое не функциональное отношение является моделью такой ситуации. Пусть значение переменной x не определено. Тогда команда выполнить предикат $x \leq 8$, рассматриваемая как требование присвоить x значение, меньшее или равное 8, может быть реализована несколькими способами, так что ее результат не однозначен. Это приводит к ситуации $|\Theta^{@}_{\pi}| > 1$ и, таким образом, возникает локальная недетерминированность. Вообще, если команда вычисляет не сингулярное свойство $F(x)$, где $F \subset U$ и $|F| > 1$, выбирая такое x, что $F(x)$, имеем $|\Theta^{@}_{\pi}| > 1$. Аналогичным образом, если вычисляется многоместное отношение F^{n+1} на U, удовлетворяющее отрицанию условия функциональности

$\neg(\forall < x_1, x_2, \ldots, x_n, x_{n+1} >\in F^{n+1})(\forall < y_1, y_2, \ldots, y_n, y_{n+1} >\in F^{n+1})$

$((< x_1, x_2, \ldots, x_n >=< y_1, y_2, \ldots, y_n >) \to (x_{n+1} = y_{n+1}))$, вновь имеем $|\Theta_\pi^@| > 1$, поскольку при $< x_1, x_2, \ldots, x_n >= < y_1, y_2, \ldots, y_n >$ значение $n+1$ компоненты вычисляется (по крайней мере, хотя бы в одном случае) неоднозначно.

В реальных вычислительных устройствах не удается реализовать даже простейший случай бинарной недетерминированности, когда требуется осуществить ни от чего не зависящий выбор одного из двух событий, типа перехода $\alpha\genfrac{}{}{0pt}{}{\nearrow\beta}{\searrow\neg\beta}$. Однако выбор становится реализуемым, если поставить его в зависимость от вероятности наступления одного из двух (или более) событий. Это требует включения в состав компьютера генератора случайных чисел, работающего в зависимости от какого-то случайного физического процесса (например, замер времени между щелчками счетчика Гейгера рядом с образцом изотопа рубидия-85, снятие параметров с нестабильных электрических цепей и т.п.). Формально невероятностная недетерминированность и вероятностная недетерминированность описываются, например, посредством недетерминированной и вероятностной машин Тьюринга. Этот круг вопросов хорошо описан в литературе.

Менее ясна в философском отношении ситуация с использованием в вычислениях оракулов. Применительно к МНР-вычислимости обобщение состоит в переходе к МНРО-вычислимости, где МНРО есть сокращения для «машина с неограниченными регистрами и оракулом». В МНРО наряду со стандартными МНР-командами (обнуления $Z(n)$, прибавления единицы $S(n)$, переадресации $T(m, n)$ и условного перехода $J(m, n, q)$) имеется команда обращения к оракулу $O_\xi(n)$. Встретив эту команду в программе, МНРО текущее содержимое r_n регистра R_n заменяет на значение функции $\xi(r_n)$, где ξ — какая-либо тотальная одноместная функция из N в N. Иными словами, в результате выполнения команды $O_\xi(n)$ осуществляется присваивание $r_n := \xi(r_n)$ (см. [9]). Тем самым стандартная вычислимость обобщается до ξ-*вычислимости* (см. также [15]).

В том случае, если функция ξ является вычислимой, класс вычислимых функций не меняется, т.е. любое МНРО-вычисление с обращениями к оракулу можно превратить в МНР-вычисление без использования оракула. Но если функция ξ, на которой основывается оракул, оказывается не вычислимой, класс ξ-вычислимых функций окажется шире класса вычислимых в стандартном смысле функций. Например, пусть ξ есть функция, которая определяется следующим образом.

$$\xi(n) = \left\{ \begin{array}{l} 1, \text{ если } n \text{ — гёделев номер истинной формулы} \\ \quad \text{арифметики} \\ 0, \text{ в противном случае} \end{array} \right\}$$

Как известно, множество гёделевых номеров истинных в стандартной модели арифметических формул не только не рекурсивно, но даже не является рекурсивно перечислимым. Однако МНРО-программа π_ξ

1. $O_\xi(1)$

осуществит требуемый пересчет всех арифметических истин в языке формальной арифметики. Достаточно запускать программу π_ξ с начальными конфигурациями $n, 0, 0, 0, \ldots$, где n последовательно принимает значения $0, 1, 2, 3, \ldots$.

Возникает ощущение, что программы, существенно использующие обращения к оракулам, основанным на не вычислимых функциях, демонстрируют недетерминированное поведение. Однако это не так, как показывает следующая теорема.

ТЕОРЕМА 3. *Для всякой тотальной функции ξ из N в N и любой МНРО-программы π_ξ, содержащей команды вида $O_\xi(n)$, имеем $|\Theta^{MHPO}_{\pi_\xi}| = 1$.*

Доказательство. Доказательство основано на том, что функция ξ тотальна, и потому любое применение команды вида $O_\xi(n)$ приведет к однозначному результату на любом шаге вычислений. Q.E.D.

Таким образом, согласно этой теореме, МНРО-вычислимость является локально детерминированной. Но требовать глобальной детерминированности было бы неразумно, поскольку применение команд обращения к оракулу не влияет на возможность появления расходящихся вычислений. Зато теорема заставляет усомниться в адекватности понятия локальной детерминированности. Когда не вычислимая функция ξ выдает значение, то делает она это непостижимым путем, поистине близким к чуду. А разве чудеса имеют что-то общее с детерминизмом? Вопрос риторический.

Представляется, что здесь мы сталкиваемся с проблемой недетерминизма на двух уровнях: *онтологическом* и *эпистемологическом*. Там и тогда, когда процессы описываются на языке функций, они, с нашей точки зрения, оказываются полностью онтологически детерминированными. Другой вопрос, что многие функциональные процессы (такие, как колебания маятника, преобразование пекаря, образование ячеек Бенара, МНРО-вычислимость и т.д.) невозможно описать в доступных познанию деталях. Это и приводит к эпистемологическому недетерминизму. Малейшая неточность в определении исходных данных (начальных условий) может за короткое время исключить всякую надежду на адекватное предвидение хода процесса. Или, как в случае МНРО-вычислимости, исходные данные точны, но у познающего субъекта в принципе нет общего метода, позволяющего предсказывать результаты МНРО-вычислений. Наши познавательные возможности объективно ограничены — вот в чем суть. Даже если на онтологическом уровне все детерминировано, это еще не означает, что детерминированными будут и познавательные процессы. Разумеется, остается возможность распространить недетерминизм и на онтологический уровень. Достаточно, например, в определении оракула заменить функцию ξ не функциональным отношением или не тотальной функцией.

И все же нам, по-видимому, психологически легче смириться с наличием недетерминированных переходов типа $\alpha\begin{smallmatrix}\nearrow\beta\\ \searrow\neg\beta\end{smallmatrix}$, чем с оракулом O_ξ, основанным на детерминированной, но не вычислимой функции ξ. Ведь недетерминированные переходы мы можем делать сами в уверенности, что обладаем свободой воли. Но проимитировать поведение не вычислимой и потому весьма сложной функции ξ нам не под силу. Как бы там ни было, мы здесь оставим дальнейшее обсуждение проблем эпистемологического недетерминизма, сосредоточившись на онтологическом уровне.

Существует еще один источник возникновения недетерминизма, доселе ускользавший от внимания исследователей. Речь идет о возможностях исполняющего команды компьютера. Рассмотрим следующую элементарную программу π_G.

1. $GOTO1$

Ясно, что выполнение программы π_G порождает уходящий в бесконечность вычислительный процесс, так что глобально этот процесс не будет детерминированным. Столь же ясным представляется ответ на вопрос, будет ли это выполнение локально детерминированным. Конечно, будет, так как единственно возможной реализацией программы π_G является бесконечная ω-последовательность повторения одного и того же события $S_1, S_2, \ldots, S_n, \ldots$. То есть имеем $S_i = S_j$ при любых i и j, поскольку ничего другого, кроме события безусловного перехода к выполнению первой команды программы, произойти не может. В результате получаем $|\Theta^{@}_{\pi_G}| = 1$. Однако это рассуждение верно лишь при условии, что выбран такой компьютер @, который порождает единственный вычислительный процесс при повторных запусках. Но логически возможен компьютер @, который приводит к неравенству $|\Theta^{@}_{\pi_G}| > 1$! В самом деле, ничто не препятствует предположению, что кроме процесса $S_1, S_2, \ldots, S_n, \ldots$ посредством более мощного компьютера @ может реализоваться не имеющий первого шага выполнения процесс $\ldots, S_{-n}, \ldots, S_{-2}, S_{-1}, S_0, S_1, S_2, \ldots, S_n, \ldots$, упорядоченный по типу $\omega * + \omega$.

Или даже могут реализоваться трансфинитные процессы типа $\omega + \omega * + \omega$, $\omega * + \omega + \omega * + \omega$ и т.п. Что действительно логически невозможно в ходе выполнения π_G, так это завершение вычислительного процесса. Ведь никаких логических оснований, коль скоро рассматриваются не изнашивающиеся и не ломающиеся идеальные компьютеры, для завершения выполнения π_G нет. Логически невозможны также процессы, содержащие особые нарушающие дискретность события, например, упорядочения типа $\omega + \omega$, как об этом уже говорилось в предыдущем параграфе.

Могут сказать, что невозможно представить, как процесс, порождающий шаг за шагом неограниченный ряд ω, может оказаться в области событий из $\omega *$. Ведь ряд вида $S_0, S_1, S_2, \ldots, S_n, \ldots, S_{-n}, \ldots, S_{-2}, S_{-1}$, упорядоченный по типу $\omega + \omega *$, обладает тем свойством, что любые два события S_j и S_{-j} разделяет бесконечное число шагов! Согласен, *представить* это нельзя. Но с *абстрактной* точки зрения ничего логически невозможного здесь нет. Просто не надо думать, что каждый шаг вычислений требует затрат какого-то отличного от нуля времени. А если допустить, что время выполнения каждой отдельной команды на сверхмощном компьютере равно нулю?

3 Причинность, вычислимость и производительность

В ходе философского осмысления человеческого опыта и результатов наук накапливается все больше проблем, обсуждение которых требует привлечения альтернативных теорий вычислимости. Возьмем старую философскую проблему причинности. Победоносное шествие юмовского подхода к причинности как функции, при котором проблема производительной причинности (в смысле причина *производит* следствие) объявляется псевдопроблемой, обусловлено отсутствием надлежащего концептуального аппарата. В подходящей альтернативной теории вычислимости понятию «производительной причинности» можно придать точный смысл.

В свое время Платон определил причину как «то, что творит». Представление о том, что причина творит, порождает или производит следствие, господствовало в течение веков до тех пор, пока Д. Юм не обрушился на него с уничтожающей критикой. Взгляды Юма на причинность разделялись философами и учеными позитивистской направленности, развившими аргументацию английского философа. Согласно неопозитивистам, в математических формулировках научных теорий фиксируется неизменная последовательность состояний природных явлений во времени, и это все, что остается от причинной связи. Подчеркивается, что в математическом аппарате научных теорий нет ничего, даже отдаленно напоминающего производительность. Более того, само понятие причинности иногда объявляется не только излишним, но и вредным для науки (Б. Рассел). Точка зрения Рассела состояла в том, что понятие причинности должно уступить место понятию функции. Однако, как примирительно заметил Г.Х. фон Вригт, хотя «понятие причины не играет важной роли в ведущих теоретических науках и в этих науках вполне можно использовать функциональную терминологию вместо каузальной, остается фактом, что каузальное мышление как таковое не изгоняется из науки подобно злому духу, а следовательно, философские проблемы причинности остаются центральными в философии науки»([7, С. 73-74]).

Для М.Бунге (см. [5]) неопозитивистская трактовка математического инструментария науки неприемлема, так как он под причинностью имеет в виду не просто следование явлений во времени, а производство одних явлений другими. Бунге справедливо указывает, что без производительного аспекта понятие причинности теряет смысл. Но в используемых в науке математических формулах нет и намека на производительность. Кстати говоря, именно последнее обстоятельство служит основанием позитивистской позиции в большей степени, чем что-либо другое. Ведь если бы удалось в математическом формализме науки найти адекватное выражение идеи производительной причинности, то позитивизм столкнулся бы с серьезными проблемами. Но чего нет, того нет: логика и математика (по крайней мере, до самого последнего времени) не имели средств для описания того, как одно явление производит или порождает другое.

Этому факту имеется объяснение. Стандартное научное описание природных явлений основывается на математическом понятии функции. Функциональный язык способен выразить идею изменений в форме «Всякий раз, когда имеет место явление A, имеет место (тут же или с запаздыванием во времени) явление B». Но не в форме «Явление A производит явление B», т.е. не в форме описания процесса производства или порождения одним явлением другого. Выражения типа «функция F, будучи примененной к аргументу x, дает в результате y» могут при поверхностном подходе навести на мысль, что функция F каким-то образом порождает y из x. На самом деле ничего подобного нет. Мы, конечно, можем сказать, что $F(x) = y$ и тогда, когда, как мы считаем, явление, обозначенное через x, действительно порождает явление, обозначенное через y. Но в самом «механизме» функционального описания процесс порождения никак не представлен. Можно утверждать лишь то, что представлены начальный (аргумент функции) и конечный (значение функции) результаты некоторого процесса. Но можно этого и не утверждать, отбросив процессуальную терминологию как излишнюю, коль скоро мы удовлетворяемся функциональными описаниями. Лишь в последнее время всерьез начинают рассматривать возможность описания не функции, связывающей изучаемые явления, а описание алгоритма, лежащего в основе связи явлений. Программный, алгоритмический язык богаче функционального, поскольку для каждой вычислимой функции F такой, что $F(x) = y$, имеется бесконечно много способов получить (произвести!) y из x, выбрав соответствующую компьютерную программу. Иными словами, для каждой вычислимой функции имеется бесконечный класс программ, которые ее вычисляют. Функция будет одной и той же, а процесс порождения из аргумента соответствующего значения может существенно отличаться по важным параметрам (например, скорости выполнения) для разных программ ее вычисления.

Приведенные (конечно, слишком краткие) доводы показывают, что классический функциональный математический аппарат науки просто не обладает достаточной выразительной силой, чтобы описать в адекватной форме идею производительной причинности. Конечно, если в реальной науке нет производящей причинности, то незачем вводить ее извне. Если же мы настаиваем на порождающей причинности по философским соображениям, от нас имеют право потребовать объяснить в точных терминах, что мы под этим понимаем. Впрочем, кажется, что есть шансы на введение производящей причинности в науку, что нами связывается с утверждением представления о наличии у реальности вычислительного (производящего!) аспекта. В настоящее время в науке все более широкое распространение получает идея о том, что реальность можно описывать средствами теории вычислений. Компьютерные модели реальности вызывают возрастающий интерес, особенно в биологии и физике.

Назовем утверждение о событии Q *фактуальным*, если Q может быть как истинным, так и ложным в зависимости от наступления или не наступления данного события. Пусть фактуальное утверждение P является истинным до начала выполнения программы π, и программа π начинает выполняться компьютером @. Запишем это высказывание как (P, π) и назовем P *предусло-*

вием программы π. Пусть, далее, выполнение программы π обязательно заканчивается (обозначим это как $\pi \downarrow$), и фактуальное утверждение S о каком-то событии истинно после выполнения программы π. В этом случае пишем (π, S) и назовем S *постусловием* программы π. Точнее, надо было бы писать $(\pi \downarrow, S)$, однако в этом параграфе нас будут интересовать только такие программы π, для которых верно $\pi \downarrow$, ибо в противном случае понятие постусловия делается бессмысленным. Аналогичным образом, если процесс выполнения π не имеет первого шага, т.е. если $\uparrow \pi$, бессмысленным делается понятие предусловия. Так что стрелки $\uparrow$ и $\downarrow$ можно не использовать. Если исключить также возможность авоста, то сказанное означает, что *причинные связи глобально детерминированы.*

Возможно, что (P, π) и затем (π, S) при каком-то выполнении программы π, однако при локально недетерминированном выполнении программы π компьютером @ в следующий раз при наличии (P, π) мы можем получить $(\pi, \neg S)$. Назовем программу π *корректной* относительно высказываний P и S (P и S берутся в указанном порядке), если истинность (P, π) влечет истинность (π, S) при любом варианте выполнения программы π компьютером @. Утверждение о корректности программы π относительно предусловия P и постусловия S будем записывать в виде $P\{\pi\}S$.

Введем отношение эквивалентности на множестве программ. Программы π и τ *эквивалентны* ($\pi \equiv \tau$), если и только если для любых высказываний о событиях P и S имеет место $(P\{\pi\}S \leftrightarrow P\{\tau\}S)$. Иными словами, программы эквивалентны, если они корректны для одних и тех же пар пред- и постусловий. В том, что приведенное определение действительно задает отношение эквивалентности, легко убедиться, используя свойства логической связки $\leftrightarrow$. Во многих случаях достаточно рассматривать программы с точностью до эквивалентных.

Некоторые программы могут выполняться последовательно, одна за другой. Такое последовательное выполнение иногда возможно даже в тех случаях, когда первая программа порождает процесс, не имеющий последнего шага, а вторая — первого шага выполнения, как об этом говорилось в предыдущем параграфе. Опуская здесь такие случаи, ограничимся ситуацией, когда обе программы порождают только процессы, имеющие первый и последний шаги выполнения. При этом допущении мы вправе писать $(\pi;\tau)$ (читается: «выполнить π, затем выполнить τ»), считая, что $(\pi;\tau)$ также является программой.

Для анализа каузальности в первую очередь важны имеющие начало и когда-либо завершающиеся процессы. Действительно, если мы хотим вести речь о причинах и их следствиях, то должны быть события, имевшие место до начала программы, и события, наступившие после ее завершения. Однако мы отказываемся от традиционной точки зрения, рассматривавшей в качестве причин и следствий только события. Наша позиция, коротко говоря, состоит в том, что события сами по себе не могут быть причинами других событий или их следствиями. Если Д. Юм и те, кто приняли его теорию причинности (точнее, отсутствия причинности), настаивали именно на этом, то с ними можно согласиться. Но если затем принимался (явно или неявно) тезис, согласно которому проблема причинности сводится к отношениям между событиями и только, то этот тезис неверен.

Появление или исчезновение событий — результат действия происходящих в природе и обществе процессов, причем процессы производят не только события, но и другие процессы. Это с одной стороны. С другой стороны, события оказывают влияние на происходящие процессы, вплоть до блокирования одних процессов и инициирования других. Таким образом, необходимо исследовать отношения событий и процессов к событиям и процессам. Одним из ключевых отношений здесь оказывается отношение причинной связи. В рамках сформулированной идеи возможны различные формальные подходы к каузальности, что должно стать предметом дальнейшего исследования. Здесь мы ограничимся (используя ранее введенные понятия и соглашения) кратким изложением исходных шагов построения одной конкретной теории причинности, которая, на наш взгляд, заслуживает внимания.

Будем говорить, что (P,π) *является* **причиной** (τ,S) и использовать запись $(P,\pi) \Longrightarrow (\tau,S)$, *если существуют фактуальные утверждения* Q *и* R *такие, что* $Q \leftrightarrow R$, $P\{\pi\}Q$ *и* $R\{\tau\}S$.

С содержательной точки зрения смысл данного определения в том, что событие, зафиксированное в предложении P, инициирует процесс выполнения π, который завершается событием, фиксируемом предложением Q. Чтобы не громоздить обозначения, мы будем обозначать события теми же символами, что и предложения, их фиксирующие. Поскольку Q и R эквивалентны, они указывают (по принимаемому допущению) на близкие по сути события, так что событие Q, завершившее процесс выполнения π, приводит к наступлению события R, запускающего процесс выполнения программы τ, который, в свою очередь, завершается событием S. Поэтому, чтобы получить процесс выполнения τ и событие S, достаточно иметь событие P и процесс выполнения π. Одного события P или одной программы π по отдельности, вообще говоря, недостаточно ни для запуска выполнения программы τ, ни для получения S. Можно (в принципе) проследить шаг за шагом, каким образом P и π производят τ и S, существуют ли более эффективные в том или ином смысле способы порождения τ и S, какие побочные следствия возникают в ходе протекания рассматриваемых процессов и тому подобное. При функциональном подходе все эти и подобные вопросы, по меньшей мере, неуместны или даже бессмысленны.

При описании причинных связей удобно иметь в своем распоряжении процесс, который ничего не меняет (аналог 0 в алгебре). Постулируется, что имеется элементарный процесс $skip$, такой, что для любого предложения о событиях P имеет место $P\{skip\}P$.

ТЕОРЕМА 4. *Для любой программы π, для которой имеет место $\downarrow \pi \downarrow$, верны следующие эквивалентности: $\pi \equiv (skip; \pi)$ и $\pi \equiv (\pi; skip)$.*

Доказательство очевидное. Отметим, однако, что пункты о первом и последнем шаге существенны. Если процесс выполнения π не имеет начала, то конструкция $(skip; \pi)$ не является вычислительным процессом, поскольку не является линейной дискретной последовательностью шагов (нарушается условие 4). Аналогичным образом, $(\pi; skip)$ также не процесс в случае, если выполнение π не имеет последнего шага (нарушается условие 5).

ТЕОРЕМА 5. *Если $P\{\pi\}S$, то $(P, skip) \Longrightarrow (\pi, S)$ и $(P, \pi) \Longrightarrow (skip, S)$.*

Доказательство. Допустим, что верно $P\{\pi\}S$. Поскольку $P\{skip\}P$ и $P \leftrightarrow P$, получаем $(P, skip) \Longrightarrow (\pi, S)$. Аналогичным образом, $P\{\pi\}S$ и $S\{skip\}S$ дают $(P, \pi) \Longrightarrow (skip, S)$. Q.E.D.

ТЕОРЕМА 6. *Отношение* $\Longrightarrow$ *не является ни рефлексивным, ни симметричным, ни транзитивным.*

Доказательство. Действительно, запись вида $A \Longrightarrow A$ не верна синтаксически. Точно так же из двух форм $A \Longrightarrow B$ и $B \Longrightarrow A$, по крайней мере, одна нарушает синтаксические правила записи о причинных связях. То же самое верно в отношении записей вида $A \Longrightarrow B, B \Longrightarrow C \dots$. Q.E.D.

Если в отношении свойств рефлексивности и симметричности последний факт, по-видимому, не будет вызывать возражений, то отсутствие свойства транзитивности причинных связей может отвергаться по интуитивным соображениям. Однако интуиция здесь — плохой советчик. Запись вида $\dots \Longrightarrow B$ указывает на завершение некоторого процесса, а запись вида $B \Longrightarrow \dots$ — на начало некоторого процесса. Поэтому одно и то же B не может фигурировать и в качестве следствия, и в качестве причины. Причинно-следственные цепочки строятся иначе. Прежде чем вернуться к обсуждаемому вопросу, сделаем одно отступление.

ТЕОРЕМА 7. *Если* $(P, \pi) \Longrightarrow (\tau, S)$, *то* $P\{\pi; \tau\}S$.

Доказательство. По определению причинности, существуют предложения Q и R, такие, что $Q \leftrightarrow R$, $P\{\pi\}Q$ и $R\{\tau\}S$. Из этого следует, что событие P начинает процесс выполнения π, который завершается событием Q, и, в силу эквивалентности Q и R, также событием R, которое инициирует процесс выполнения τ, завершающийся событием S, что и требовалось. Q.E.D.

Следующий факт является своего рода аналогом транзитивности.

ТЕОРЕМА 8. *Пусть* $(P, \pi) \Longrightarrow (\sigma, Q)$ *и* $(Q, \varsigma) \Longrightarrow (\tau, S)$. *Тогда* $(P, \pi; \sigma) \Longrightarrow (\varsigma; \tau, S)$.

Доказательство. По только что доказанному имеем $P\{\pi;\sigma\}Q$ и $Q\{\varsigma;\tau\}S$. Применяя определение причинности, получаем $(P,\pi;\sigma) \Longrightarrow (\varsigma;\tau,S)$. Q.E.D.

При этом сохраняется возможность традиционного неточного словоупотребления: коль скоро речь идет только о событиях, в случае, если P причина Q и Q причина S, будет иметь место P причина S. Однако такой способ речи, упускающий из виду процессуальную сторону причинной связи, возвращает нас к функциональному взгляду на каузальность, при котором теряется специфическая особенность причинности — производительность.

ТЕОРЕМА 9. *Для любых @, P, S , π и τ, если $(P,\pi) \Longrightarrow (\tau,S)$, то множества $\Theta^{@}_{\pi}$ и $\Theta^{@}_{\tau}$ глобально детерминированы, но для некоторых @, P, S , π и τ при $(P,\pi) \Longrightarrow (\tau,S)$ множество $\Theta^{@}_{\pi}$ или множество $\Theta^{@}_{\tau}$ локально недетерминировано.*

Доказательство. Глобальная детерминированность множеств вычислительных процессов $\Theta^{@}_{\pi}$ и $\Theta^{@}_{\tau}$ является прямым следствием определений. Что касается возможной локальной недетерминированности, то она может быть вызвана недетерминированой командой одной из программ, как показывает следующий пример.

Пусть P есть сокращение для $x < 1$, π — присваивание $x := 1$, τ — присваивание $x := 2\ OR\ x := 3$, выполняемое компьютером @ недетерминированым образом, и S есть $x > 1$. В качестве как Q, так и R возьмем $x = 1$. Отсюда имеем $Q \leftrightarrow R$, $P\{\pi\}Q$ и $R\{\tau\}S$, что дает $(P,\pi) \Longrightarrow (\tau,S)$. Однако, очевидном образом, имеем $|\Theta^{@}_{\tau}| > 1$. Q.E.D.

Этот факт оправдывает утвердившийся в философии науки термин «вероятностная причинность», позволяя придать ему точный процедурный смысл. В рассматриваемом примере достаточно приписать двум возможным результатам выполнения команды из τ, скажем, равные вероятности. Да и на обыденном уровне люди рассуждают о причинах и следствиях в условиях неоднозначной связи между ними. Так, родители естественным образом выступают в качестве порождающей причины своих детей, но пол будущего ребенка заранее не определен.

Литература

[1] *Анисов А.М.* Классическая вычислимость и признаки индетерминизма // Логические исследования. Вып. 14. М., 2007.
[2] *Анисов А.М.* Темпоральный универсум и его познание. М., 2000.
[3] *Брауэр В.* Введение в теорию конечных автоматов. М., 1987.
[4] *Булос Дж., Джеффри Р.* Вычислимость и логика. М., 1994.
[5] *Бунге М.* Причинность. Место принципа причинности в современной науке. М., 1962.
[6] *Верещагин Н.К., Шень А.Х.* Лекции по математической логике и теории алгоритмов. Ч. 3. Вычислимые функции. М., 2002.
[7] *Вригт Г.Х. фон.* Логико-философские исследования. М.,1986.
[8] *Гэри М., Джонсон Д.* Вычислительные машины и труднорешаемые задачи. М.: Мир, 1982.
[9] *Катленд Н.* Вычислимость. Введение в теорию рекурсивных функций. М., 1983.
[10] *Китаев А.Ю., Шень А.Х., Вялый М.Н.* Классические и квантовые вычисления. М., 1999.
[11] *Кузюрин Н.Н., Фомин С.А.* Эффективные алгоритмы и сложность вычислений. Версия от 17.06.2008. 348 стр. http://discopal.ispras.ru/ru.book-advanced-algorithms.htm.
[12] *Маслов С.Ю.* Теория дедуктивных систем и ее применения. М., 1986.
[13] *Хармут Х.* Применение методов теории информации в физике. М., 1989.
[14] *Хоар Ч.* Взаимодействующие последовательные процессы. М., 1989.
[15] *Шенфилд Дж.* Степени неразрешимости. М., 1977.
[16] *Шор Р.* Теория α-рекурсии // Справочная книга по математической логике: В 4 частях. Ч. III. Теория рекурсии. М., 1982.
[17] *Якобс К.* Машины Тьюринга и случайные 0-1-последовательности // Машины Тьюринга и рекурсивные функции. М., 1972.

К проблеме приоритета в открытии логической теории релейно-контактных схем. Документ из архива Виктора Ивановича Шестакова

Б. В. Бирюков

abstract. The article of V.I. Shestakov, 1935 is published, indicating that the logical theory of relay schemes was already developed by author.

Ключевые слова: алгебра логики, логика и техника, релейные схемы, научный приоритет.

Вопрос о том, кому следует отдать пальму первенства в открытии приложений логики к технике, до сих пор привлекает к себе внимание историков науки. В. И. Левин предложил ряд критериев определения приоритета научного открытия. Один из них — время появления первой публикации по данной теме; другой — учитывающий не только время первопубликации, но и даты представления и защиты диссертации; еще один — когда учитывается содержание первых публикаций с точки зрения их научной продвинутости [3][1]. В. И. Левин высказал взгляд, согласно которому «научная работа, изложенная в рукописной, а тем более в устной форме, не считается в мировой практике зафиксированной по содержанию и дате выполнения и потому не может учитываться при решении вопроса о приоритете»[1]. С подобным формальным подходом в истории науки, я думаю, делать нечего. Изучая историко-научный процесс, надлежит учитывать все — и публикации, и сообщения на научно-исследовательских семинарах, и манускрипты, свидетельствующие о достигнутых

[1] См. также статью [1], где на с. 29–30 коротко изложены выдвинутые В. И. Левиным критерии.

результатах ученого, и отзывы на его работы, в том числе и неопубликованные.

Учитывая сказанное, мы обязаны с должным вниманием отнестись к недавно открытому машинописному тексту работы В.И. Шестакова, который публикуется ниже. Дело в том, что хорошо известные много раз высказывавшиеся С.А. Яновской утверждения о том, что приложение логики к переключательным схемам было разработано В.И. уже к 1935 г., опирается на знание, которым располагали члены московского математико-логического сообщества, да на имеющиеся отзывы о научных работах В.И., и в том числе его научного руководителя — В.И. Гливенко. Иными данными С.А. не располагала. Теперь у нас есть текст, ясно свидетельствующий, что Шестаков в 1935 г. изложил свою теорию в отдельной статье и что теория эта полностью отвечала задаче применения булевой алгебры к переключательным схемам.

Тот факт, что публикуемый ниже текст не был напечатан ни в одном из научных изданий, не должен нас удивлять. Во-первых В.И. был в то время всего лишь аспирантом Научно–исследовательского института физики МГУ. Но ни предложенная ему тема (по теории колебаний), ни научное руководство со стороны профессора Горелика не устраивали Виктора Шестакова: он был весь поглощен идеей применения булевой алгебры к релейно–контактным схемам. Во-вторых, вопросы, которые В.И. намеревался разрабатывать, совершенно не интересовали физиков, почему он и тянулся к математическим логикам, и вскоре его руководителем стал математик В. И. Гливенко. В-третьих, В.И. считал разработанный им логический подход к электрическим устройствам дискретного действия лишь первым шагом к задуманной им более глубокой теории. Большого значения шагу этому он не придавал.

Поскольку в тексте В.И., предлагаемому вниманию читателя, встречаются небрежности, свидетельствующие о том, что его автор, судя по всему, не считал его окончательным, публикатор внес в этот текст некоторые редакционные изменения стилистического характера.

Оригинал статьи находится в архиве Шестакова, хранящемся у его дочери Ирины Викторовны Самохваловой[2].

Шестаков В.И. 1935 [3]

РЕЛЕ И РЕЛЕЙНЫЕ СХЕМЫ

1 Типы реле

Условимся называть всякое реле, которое включает (или выключает) ток в схеме при действии на него некоторого импульса, *реле прерывного действия*, когда величина тока, включаемого посредством реле, не зависит от величины управляющего импульса. Если же реле изменяет ток пропорционально *командному* току (более обще — если величина управляемого тока (напряжения) есть непрерывная функция величины командного тока), то реле будем называть *реле непрерывного действия*. Примером реле первого типа являются электромагнитные реле; катодные лампы представляют собой реле второго типа.

В самом деле, большинство электронных реле включают (выключают) ток, как только ток в цепи возбуждения становится больше известной величины, и выключают его при падении тока в цепи возбуждения ниже определенной величины. Иначе говоря, даже в том случае, когда ток в цепи возбуждения изменяется непрерывно, ток в управляемой цепи изменяется скачками: то он есть, то его нет.

Будем, далее, различать реле, возвращающиеся в *нормальное положение* при устранении воздействующей на них причины, и реле, *остающиеся в том положении*, в которое их привел командный импульс. Первый род реле мы назовем реле *без последействия*, а второй — с *последействием*. Катодные лампы

---

[2]Пользуюсь случаем, чтобы обратить внимание читателя на опечатки в формулах, допущенные в [2]. А именно в формулах (2), (5) и (6) на с. 90 и 91 отрицания (передаваемые горизонтальной чертой, помещаемой над формулой) должны распространяться только на антецеденты названных формул. В формуле (K_5) — страница 100 — в двух случаях утрачены нижние индексы «y»при буквах F и s. Кроме того, разбирая формульный текст на с. 99–100, читателю следует учитывать разнобой, допущенный при наборе некурсивных, курсивных и полужирных букв.

[3]Написано от руки. Здесь и далее подстрочные примечания принадлежат публикатору текста Шестакова.

и телеграфные реле представляют собой примеры реле первого рода, а защитные реле и тиратроны, питаемые постоянным током, — примеры реле второго рода.

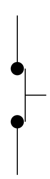
Схемы, содержащие исключительно реле без последействия, мы назовем схемами без последействия. Схемы без последействия и содержащие лишь реле прерывного действия мы назовем одноактными схемами. Одноактные схемы характеризуются тем, что свою работу они совершают за один прием (одним актом) и по окончании действия командного импульса возвращаются в нормальное положение.

2 Алгебра релейных схем

В дальнейшем мы будем рассматривать лишь следующий довольно узкий класс схем: релейные схемы *без последействия* (это одноактные реле, которые могут действовать при одновременном сочетании нескольких агентов: $a, b, c, \ldots$), схемы, которые меняют свое состояние при воздействии нескольких сигналов (вызванных различными причинами и пришедших по различным каналам связи: по нескольким различным цепям — обычным или фантомным) либо пришедшим по одной цепи на различных частотах и т. п.

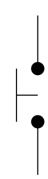
Рассмотрим сначала релейные схемы прерывного действия, например схемы с электромагнитными реле. Условимся обозначать контакты, замыкающиеся под действием агента a той же буквой, а контакты, размыкающиеся под действием агента a, той же буквой, но со штрихом: a'; если воспользоваться условными обозначениями, принятыми при изображении телемеханических схем, то мы получим:

a



контакт, замыкающий цепь при действии a

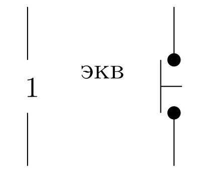
a'

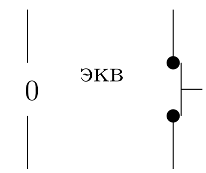


контакт, размыкающий цепь при действии a

Условимся далее при изображении схем не чертить условных изображений контактов, а обозначать их цифрами[4]:

[4]На рисунке «экв» — сокращение слова «эквивалентна».

1 — размыкающий контакт, т. е. 

0 — замыкающий, т. е. 

Кроме того, как это принято, будем все схемы чертить в нормальном положении (т. е. нерабочем состоянии). Далее условимся все контакты, срабатывающие в результате воздействия одного и того же агента, располагать на схеме на одной горизонтально расположенной строке, и тогда вместо того, чтобы помещать буквы у каждого контакта, выписывать их лишь в начале каждого ряда контактов. Так, например, все контакты, срабатывающие под действием агента a, мы можем расположить в первой строке, а в ее начале (слева) поместить букву a; все контакты, находящиеся под действием агента b, расположить во второй строке, в начале которой слева выписав букву b, и т. д. Приборы, которыми управляет релейная схема, мы будем обозначать большими буквами латинского алфавита: $A, B, C, \ldots$ и изображать их на схеме заключенными в кружок. Источников тока мы изображать не будем, так же как и электромагнитов, замыкающих контакты релейной схемы.

Схему, изображенную согласно этим условиям, мы будем называть *структурной* схемой (структурной формулой) релейной схемы. Примером может служить схема, изображенная на рисунке 1,

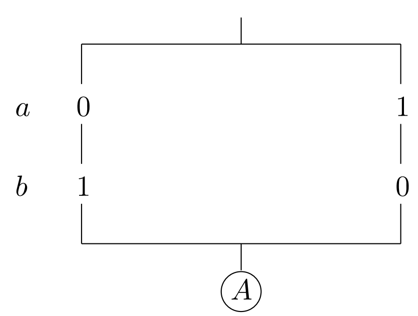


Рис. 1

которая включает прибор A, когда срабатывает a или b, но не оба контакта вместе. В нормальном положении цепь, как легко видеть, разомкнута.

Условимся записывать параллельное соединение контактов a и b (контактных промежутков) в виде *суммы*: $a + b$, а последовательное — в виде произведения: ab (рис. 2).

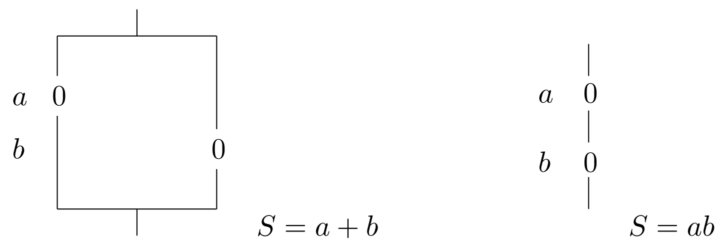


Рис. 2

Тогда, если $b = a'$, то получатся схемы (рис. 3):

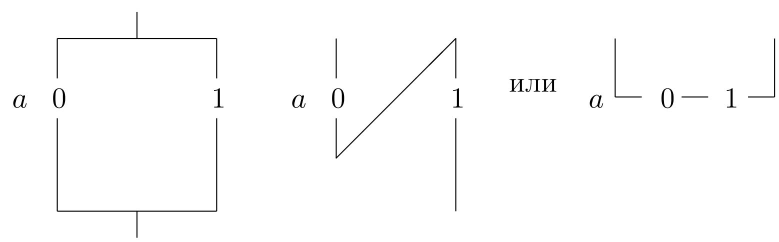


Рис. 3

Если вернуться к обозначению контактов буквами, то сумму $a + b$ и произведение ab можно записывать в виде более наглядных схем (рис. 4):

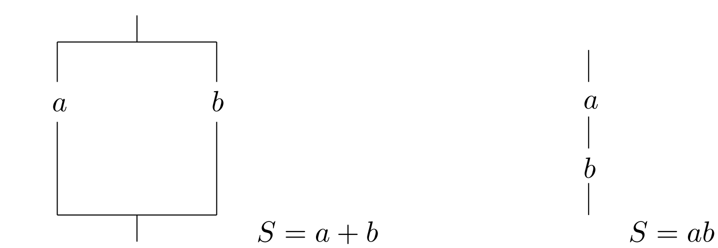


Рис. 4

При $b = a'$ получаем (рис. 5):

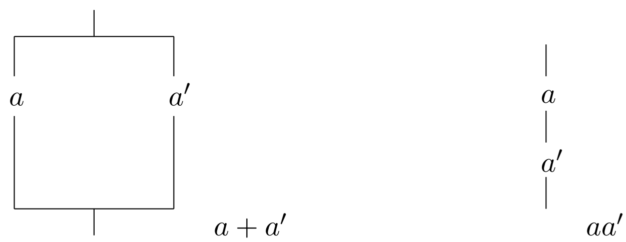


Рис. 5

Можно показать, что определенные таким образом сумма и произведение обладают свойствами *логического сложения* и *логического умножения*. Прежде всего, для них справедлив *закон коммутативности*:

$$a + b = b + a \qquad\qquad ab = ba, \tag{1}$$

т. е. действие схемы не изменяется от перестановки контактов реле как при их параллельном, так и последовательном соединении (рис. 6). Очевидно, что:

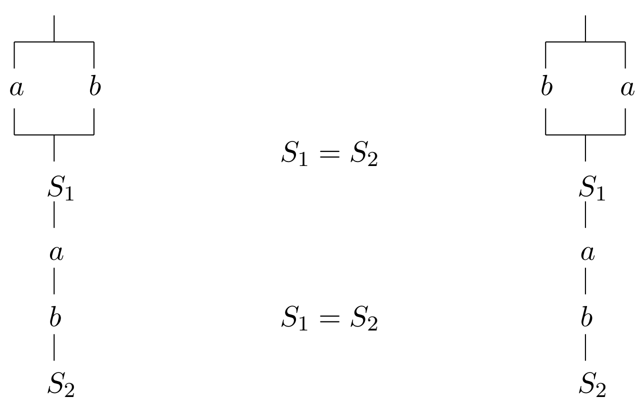


Рис. 6

Нетрудно видеть, что это справедливо не только для релейных схем, но и для *любых электрических схем*, что бы a и b ни обозначали: контакты реле, параметры схемы, какие-либо другие схемы и т.п.

Для контактов a, b, c имеет место и сочетательный закон[5]

$$ab + ac = a(b + c) \tag{2}$$

Сочетательный закон утверждает эквивалентность следующих схем (рис. 7):

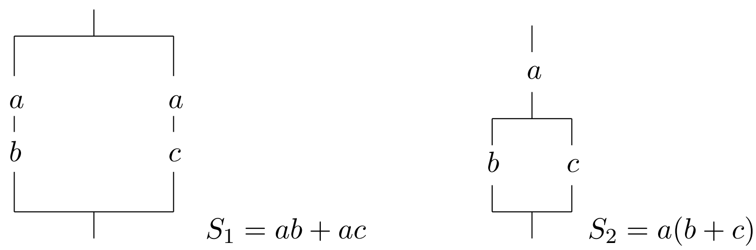


Рис. 7

или (рис. 8):

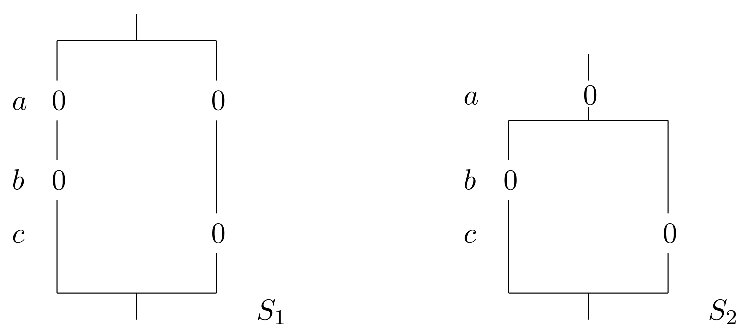


Рис. 8

[5]На самом деле автор имеет в виду *закон дистрибутивности* (распределительности) умножения относительно сложения. Заметим, что в описываемой Шестаковым алгебре справедлив и двойственный закон — закон дистрибутивности (логического) сложения относительно (логического) умножения. Что касается «сочетательного» закона, то этот термин применяется в качестве синонима *закона ассоциативности*, о котором автор говорит ниже.

В самом деле, когда нет сигналов: a, b, c, тогда обе схемы S_1 и S_2 разомкнуты (0 — символизирует разрыв цепи). Работают обе эти схемы лишь в трех случаях:

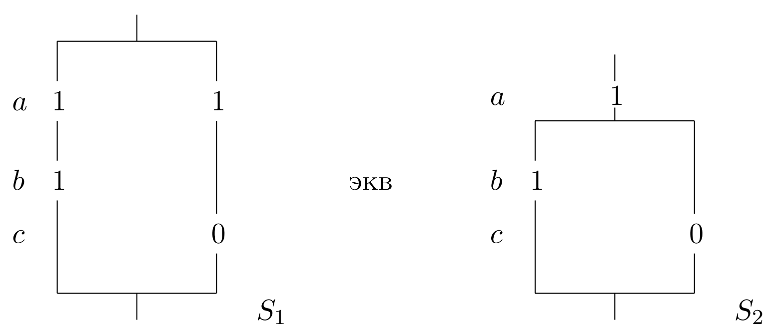
1) когда срабатывают a и b,

2) когда срабатывают a и c,

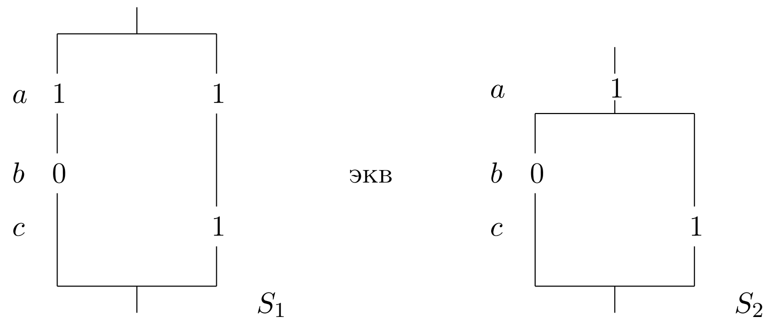
3) когда срабатывают a, b и c.

Чтобы сократить запись, я позволяю себе воспользоваться языком алгебры логики. Так, чтобы сказать, что на схему действует агент a, я буду писать $s = a$; чтобы сказать, что на схеме срабатывают контакты a и b, я буду записывать логическое произведение: $s = ab$; чтобы сказать, что на схему S действует сигнал s, исходящий или от a, или от b, или от a и b вместе, я заменю слово «или» знаком $+$, а слово «и» — знаком умножения $\bullet$. Тогда три случая, при которых срабатывает данная схема, будут представлены: 1) $s_1 = ab$, 2) $s_2 = ac$, 3) $s_3 = abc$ (см. рис. 9).

1) $s_1 = ab$



2) $s_2 = ac$



3) $s_3 = abc$

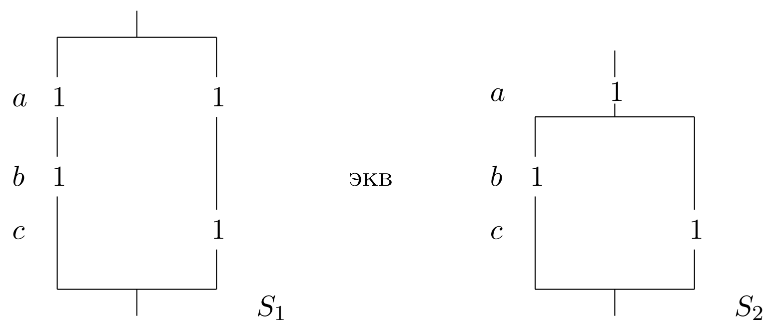


Рис. 9

3 Схемы в рабочем состоянии[6]

Как видим, схемы S_1 и S_2 срабатывают при одних и тех же сигналах s_1, s_2, s_3; замкнутые во время работы части схемы изображаются последовательно включенной цепью элементов; те ветви схем, в которых встречаются последовательно включенные элементы и нули, размыкают цепь в том месте, где они стоят. Схемы

[6]Если над схемой помещена формула сигнала, то это значит, что изображенная под ней схема находится в том рабочем состоянии, в котором она пребывает все время, пока действует данный сигнал, 1 — символизирует контакт, находящийся под током (замкнутый в данный момент), а 0 — разомкнутый в данный момент. Изображение схемы в рабочем состоянии получают из схемы, изображенной в нормальном состоянии, заменяя в последней 0 на 1, 1 на 0 в тех горизонтальных строках, которые соответствуют элементам a, b, c сигнала. (Примечание Шестакова. —*Б.Б.*).

показывают, что разомкнутыми они оказываются при одинаковых сочетаниях элементов a, b, c, т. е. когда не работает схема S_1, не работает и схема S_2, и обратно. Таким образом, они эквивалентны с точки зрения их работы, и мы можем написать: $S_1 = S_2$, т. е. $ab + ac = a(b + c)$. Ассоциативный закон для сложения и умножения настолько очевиден, что я не буду его иллюстрировать схемами, выпишу лишь его формульное представление:

$$a+(b+c) = (a+b)+c = a+b+c \qquad (ab)c = a(bc) = abc \quad (3)$$

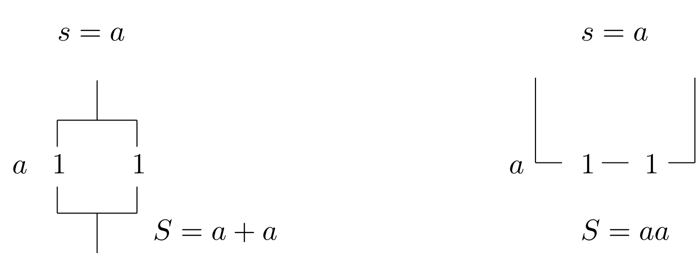
Замечу, что ассоциативный закон не специфичен для данных схем, а справедлив для любых электрических схем.

Кроме ассоциативного и коммутативного законов для сложения и умножения и кроме дистрибутивного закона справедливы еще такие законы, которые не имеют места для обычного алгебраического сложения и умножения, — они специфичны именно для *алгебры логики*. Это так называемые *закон тавтологии* и *закон поглощения*.

Закон тавтологии имеет вид:

$$a + a = a \qquad aa = a \quad (4)$$

и может быть представлен следующими структурными формулами (рис. 10).



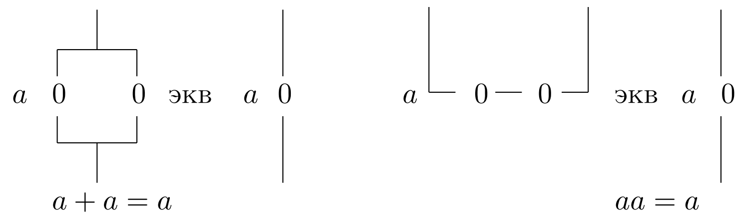


Рис. 10

На словах закон тавтологии можно выразить так:

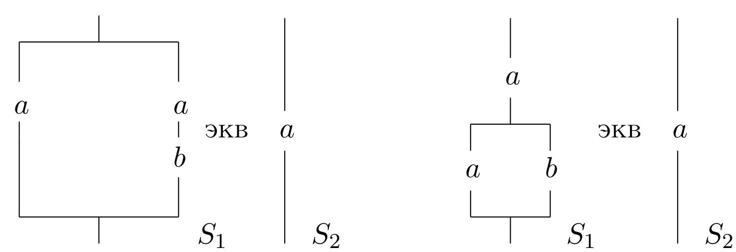
1) включить в схему параллельно друг другу два одинаковых реле (и срабатывающих от одной и той же причины a) — это все равно, что включить одно из них.

2) включить в схему последовательно друг за другом два одинаковых реле (и срабатывающих под воздействием одного и того же агента a) — это все равно, что включить одно из них.

Этот закон настолько очевиден и настолько наглядно представлен схемами, изображенными как в нормальном, так и в рабочем состоянии ($s = a$), что в излагаемом здесь наброске теории его вряд ли стоит доказывать.

Закон поглощения имеет вид (рис. 11):

$$a + ab = a \qquad a(a + b) = a \tag{5}$$



или

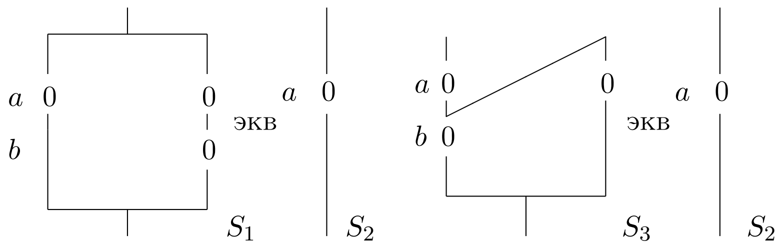


Рис. 11

Как видно из приведенных структурных схем — схема S_1 реагирует на a, а на b — нет; точно так же и S_3 отзывается лишь на a, т. е. схемы S_1 и S_3 эквивалентны схеме, реагирующей заведомо лишь на a (т.е. схеме S_2).

Если подан сигнал $s_1 = a$, то в схемах S_1 и S_3 контакт реле b закорачивается при работе реле a, так что будет ли сигнал b или его не будет, на работу схем это не повлияет (рис.12).

1) $s_1 = a$

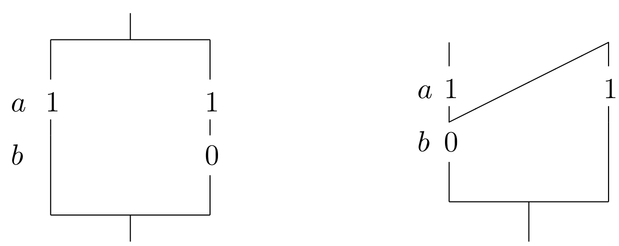


Рис. 12

С другой стороны, если имеется сигнал $s_2 = b$, то схемы S_1 и S_2 не смогут работать, так как оказываются разомкнутыми контактами реле a: схемы S_1 и S_3 замыкаются лишь при срабатывании реле a.

2) $s_2 = b$

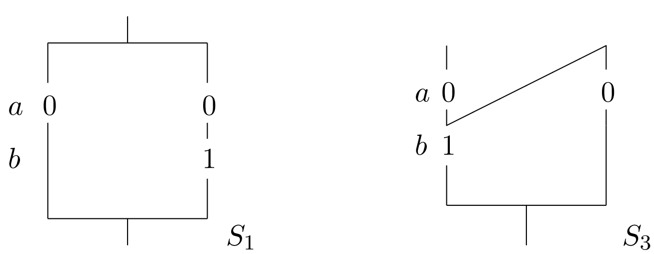


Рис. 13

Таким образом, схемы S_1 и S_3 оказываются эквивалентными схеме S_2, содержащий лишь один замыкающей контакт a. На словах закон поглощения можно выразить так: параллельное присоединение к реле a последовательно включенных реле a и b эквивалентно реле a; последовательное подключение к реле a комбинации из параллельно соединенных реле a и b эквивалентно срабатыванию реле a.

Мы дали определение понятия суммы контактов реле $a+b$ и произведения их $a \bullet b$ и показали, что эта сумма и это произведение обладают свойствами *логического сложения* и *логического умножения*. Нетрудно распространить понятие суммы и произведения на схемы $S_1, S_2, \ldots$, состоящие из любого конечного числа контактов различных реле, включенных параллельно и последовательно, и показать, что сумма $S_1 + S_2$ и произведение $S_1 S_2$ схем S_1 и S_2 также обладают свойствами логической суммы и логического произведения.

Мы не станем доказывать это, а заметим лишь, что контакты реле $a, b, \ldots$ можно также рассматривать как элементарные схемы и рассматривать сумму и произведение контактов a и b, т.е. $a+b$ и $a \bullet b$ как частный случай суммы и произведения релейных схем.

4 Определения логической суммы и логического произведения для релейных схем

Дадим теперь более строгие определения введенных понятий. Суммой двух релейных схем $S_1 + S_2$ условимся называть релейную схему S, полученную при параллельном соединении двух данных схем S_1 и S_2 (рис. 14).

$$S = S_1 + S_2 \qquad (1)$$

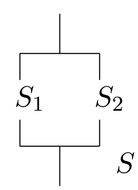


Рис. 14

Произведением релейных схем S_1 и S_2 назовем схему S полученную в результате последовательного соединения двух данных схем (рис. 15).

$$S = S_1 S_2 \qquad (2)$$

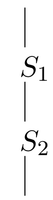


Рис. 15

Условимся, далее, обозначать множество сигналов: $s_1, s_2, s_3, \ldots$ (представляющих собой сочетания одновременного действия агентов: $a_1, a_2, a_3, \ldots$), при поступлении которых срабатывает данная релейная схема S_i, той же буквой S_i, а множество всех сочетаний из $a_1, a_2, a_3, \ldots$, на которые схема S_i не реагирует, — буквой S_i' (очевидно, что $S_i + S_i' = 1$).

Очевидно также, что множество сигналов S_i, равно $S_i = \sum_i s$, если сумму понимать как логическую сумму. Тогда структурные схемы суммы и произведения будут иметь вид (рис. 16):

$$S = S_1 + S_2 \qquad\qquad S = S_1 S_2 \qquad (3)$$

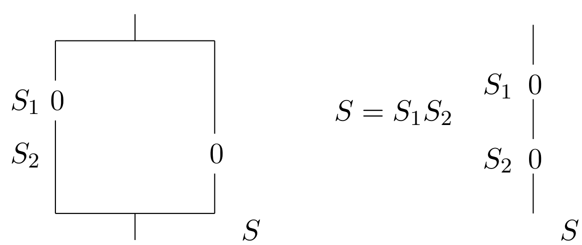


Рис. 16

где S, помещенное под изображениями схем справа, является их обозначением, а S_1 и S_2 слева от схем обозначают множества S_1 и S_2 сигналов, при которых срабатывают схемы S_1 и S_2.

Обе структурные схемы S, как было принято нами, изображены в *нормальном* состоянии, 0 и 1 обозначают схемы — всегда разомкнутую и, соответственно, всегда замкнутую в нормальном состоянии.

При изображении схем в рабочем состоянии мы помещаем над схемой формулу «сигнала», при котором данная схема изображена, и заменяем в схеме, изображенной в нормальном состоянии, 0 на 1 и обратно, 1 на 0 (в тех горизонтальных строках, которые соответствуют агентам, сочетание которых образовало сигнал). Очевидно, сумма схем S_1 и S_2 срабатывает или когда есть сигналы из множества S_1 или когда есть сигналы из множества S_2, т. е. сумма всех $S_1 + S_2$ срабатывает от суммы множеств $S_1 + S_2$ сигналов. Точно так же произведение схем S_1S_2 срабатывает лишь при сигналах, которые общи для обеих схем, т. е. произведение схем S_1S_2 срабатывает от произведения множеств S_1S_2 сигналов. Это обстоятельство оправдывает то, что мы условились обозначать множество сигналов, от которых срабатывают схемы, посредством тех же букв, что и схемы, срабатывающие от этих множеств сигналов.

Конечно, при тонких исследованиях все же лучше применять различные обозначения для множеств сигналов и для схем, реагирующих на эти множества: например, оставив применяемые нами буквы для обозначения схем, употреблять для обозначения множеств сигналов эти же буквы, но готического шрифта. Но в нашем наброске теории это не требуется; наоборот, совпадение обозначений для действий над схемами и действиями над множествами сигналов только подчеркивает согласованность действий над схемами и действий над множествами сигналов.

5 Определение нуля и единицы

Условимся называть нулем разрыв схемы, который не замыкается никаким реле ни в нормальном, ни в рабочем состоянии схемы, а единицей — короткое замыкание, т.е закорачивание схемы (или ее части), независимо от того, в каком состоянии находится схема — нормальном или рабочем.

Очевидно:

$$\begin{array}{ll} 0 + S = S & 0 \bullet S = 0 \\ 1 + S = 1 & 1 \bullet S = S, \end{array} \tag{6}$$

где S — любая релейная схема (см. рис. 17).

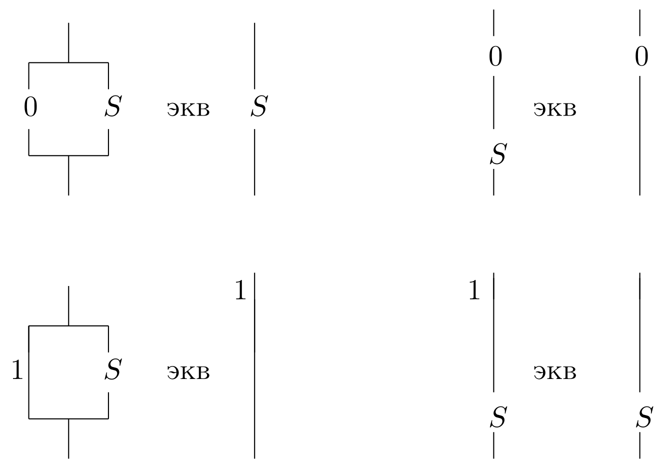


Рис. 17

Равенства (6) можно принять, ввиду их очевидности, в качестве определений, считая, что 0 — такая схема, параллельное присоединение которой к любой схеме S не изменяет ее работу, а последовательное — превращает любую схему S в абсолютно не работающую, т. е. не работающую ни при каких сигналах; 1 — такая схема, которая при последовательном присоединении ее к любой схеме S не меняет ее работу, а при параллельном присоединении превращает ее во *всегда работающую* (т. е. такую, через которую ток проходит *всегда*, независимо от наличия каких-либо сигналов). Отсюда мы и приходим к первоначальному определению нуля и единицы: 0 есть схема, *никогда* не находящаяся под током, т. е. *разомкнутая всегда*, при любом сигнале, а 1 — это схема, находящаяся *всегда под током*, т. е. какова бы ни была схема, она находится в состоянии короткого замыкания. Таким образом, схемы 0 и 1 соответствуют логическому нулю и логической единице. От схемы-нуль и схемы-единицы следует отличать те 0 и 1, которые мы до сих пор употребляли в структурных формулах схем, так как хотя и там нуль обозначал разомкнутый контакт (или схему), а единица — замкнутый контакт (или схему), относилось это к *данному моменту времени*. Различие заключается в том, что схема-0 и схема-1 символизируют размыкание и замыкание, *длящееся сколько угодно долго* (т.е. все время пока существует схема); в структурных же схемах 0 и 1 символизируют лишь *временное* размыкание контакта (схемы), длящееся лишь то время, в течение которого схема пребывает в данном состоянии (нормальном или рабочем).

Изменение состояния схемы изображается на структурной схеме заменой 0 на 1 и 1 на 0 (в строках, соответствующих элементам сигнала). А состояния схемы-0 и схемы-1 ни от каких сигналов не зависят.

Возможность путаницы устраняется тем обстоятельством, что мы никогда не будем чертить схемы-0 и схемы-1, а будем употреблять лишь их аналитические выражения; и наоборот: 0 и 1 структурных схем будут у нас встречаться лишь в их изображениях и никогда не будут встречаться в соответствующих им алгебраических формулах.

6 Определение отрицания схемы

Введение понятий схемы-0 и схемы-1 позволяет определить отрицание схемы. Схема S' называется отрицанием схемы S, если она удовлетворяет следующим равенствам:

$$S + S' = 1 \qquad\qquad S \bullet S' = 0 \tag{7}$$

Это ситуация, соответствующая рис. 18:

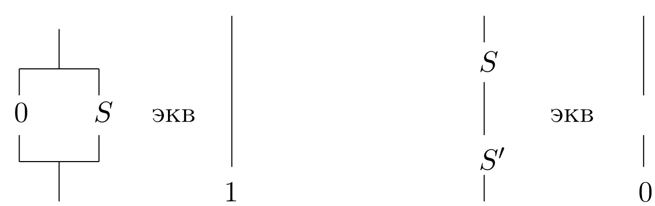


Рис. 18

Отрицание схемы S — это такая схема S', которая работает во всех тех случаях, когда S находится в нормальном (спокойном) состоянии, и обратно — схема S' находится в спокойном, нормальном состоянии во всех тех случаях, когда работает схема S. Так, если замыкающий контакт a рассматривать как частный случай схемы S, то размыкающий контакт a' будет являться отрицанием схемы $S = a$, т. е. $a' = S'$.

В самом деле:

$$aa' = 0 \qquad \text{и} \qquad a + a' = 1 \tag{7'}$$

На словах определение отрицания схемы S (т.е. схемы не-S) можно выразить так: схемой не-S называется такая схема S', которая при последовательном соединении со схемой S образует схему-0, т. е. образует *всегда разомкнутую схему*, а при ином, параллельном подсоединении схемы S' к схеме S образует схему-1, т. е. *всегда замкнутую схему.*

Для иллюстрации мы приведем структурные схемы для формул (7′) (см. рис. 19).

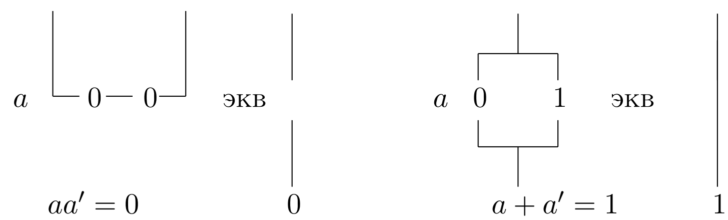


Рис. 19

Таким образом, 1) последовательное соединение замыкающего и размыкающего контактов реле a эквивалентно постоянному разрыву схемы; 2) параллельное соединение замыкающего и размыкающего контактов одного и того же реле a эквивалентно постоянному закорачиванию схемы.

Итак, мы показали, что сумма, произведение и отрицание схемы (и отдельного реле) производится по правилам логического суммирования, умножения и отрицания. Кроме того, мы установили, что действия над *сигналами* производятся также по правилам алгебры логики и притом в *полном соответствии* с действиями над схемами, реагирующими на эти сигналы.

Таким образом, найден тот математический аппарат, применяя который, мы, задав аналитически условия задачи (т.е. те сигналы, при которых должна срабатывать релейная схема), можем путем алгебраических преобразований получить *формулу схемы*, которую можно начертить и которая дает решение задачи. Довольно трудоемкий *процесс придумывания*, изобретения схемы мы *заменяем* значительно менее трудоемким и поддающимся механизации *процессом*, так сказать, *структурного расчета* схемы.

Я не утверждаю, что алгебра логики предоставляет *достаточный* математический аппарат для такого *структурного* (топологического) расчета релейных схем. Наоборот, в дальнейшем будут приведены примеры, показывающие недостаточность этого аппарата, свидетельствующие о том, что существуют релейные схемы (рассматриваемого нами типа), которые не могут быть выражены аналитической формулой в символах алгебры логики и которые, возможно, проще получить путем вычисления. Но, несмотря на это, применение алгебры логики для расчета релейных схем имеет смысл — по крайней мере до того, пока не будет разработан более адекватный математический аппарат, так как все решения задач, поставленных аналитически, хотя они не всегда приводят к самым простым схемам, являются *всегда правильными* решениями.

Перейдем теперь к применению установленных нами определений и изложим общий метод расчета схем. Прежде всего напомню, к какому классу релейных схем применим этот метод расчета. Он относится (по крайней мере, в разработанном до сих пор виде) лишь к *одноактным* релейным схемам *без последействия*, работающим от сочетаний одновременного действия нескольких агентов: $a, b, c, \ldots$ Он может быть не приложим к *схемам с последействием*, каковой является, например, следующая схема (см. рис. 20),

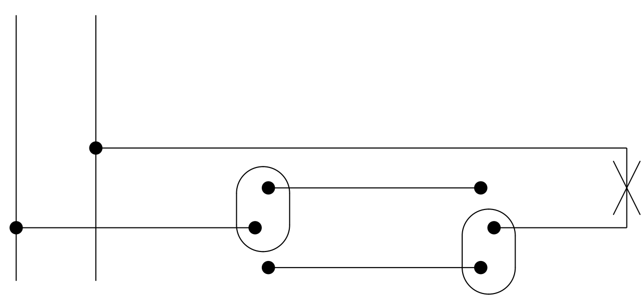


Рис. 20

и вообще ко всем тем схемам, которые содержат выключатели, переключатели и контакты, остающиеся в том положении, в которое они пришли в результате действия какого-либо агента. Предлагаемый метод применим для расчета лишь таких схем, которые возвращаются в начальное положение, как только прекращается действие «раздражителя».

Пусть на схему действуют n различных агентов: $a, b, c, \ldots$ Так как мы разбираем схемы, реагирующие на сочетания одновременных воздействий нескольких из них, то число различных сигналов равно сумме всех сочетаний из n элементов по 1, по 2, по 3, ... и, наконец, по n элементов, т. е. $2^n - 1$. Так, при $n = 5$ имеется возможность передать $2^5 - 1 = 31$ различный сигнал. Условимся записывать сочетания агентов в виде произведения тех букв, которые входят в данное сочетание, и отрицания тех букв, которые в это сочетание не входят, причем для определенности будем записывать сочетание букв в алфавитном порядке *справа налево*. Например, если имеется пять различных агентов: a, b, c, d, e, то сочетание a и c мы запишем в виде $e'd'cb'a$.

Множество подобным образом записываемых сочетаний можно однозначно перенумеровать, считая номером сочетания то двоичное число, которое получается при замене в данном сочетании букв на единицы, а отрицаний букв на нули. Так, в нашем примере заменяя буквы a и c на 1, а b', d' и e' на 0, мы вместо сочетания $e'd'c\,b'a$ получим двоичное число 00101 равное 5, которое мы и можем счесть номером нашего сочетания. Таким образом, вместо того чтобы говорить, что нам дано сочетание a и c, мы можем сказать, что нам дано пятое сочетание. Нулевое сочетание, очевидно, будет состоять из одних отрицаний: $e'd'c'b'a'$.

Номер сочетания, заключенный в круглые скобки, мы условимся читать как сочетание, имеющее данный номер. Так, в нашем примере $(5) = e'd'cb'a$; нулевое сочетание: $(0) = e'd'c'b'a'$. Вообще, задав номер n сочетания, мы однозначно задаем и само сочетание. Так, если $n = 8$, то записав восьмерку в виде двоичного числа: 8=01000, мы тем самым находим, что заданное сочетание есть $(8) = e'dc'b'a'$, т. е. получаем сочетание, состоящее из одного d. Если же нам дано, что сочетания образуются не из пяти элементов, а из четырех, тогда то же сочетание запишется в виде: $(8) = dc'b'a'$. Мы будем называть d первой *значащей* буквой. Как мы видим, номер сочетания не зависит от того, сколько отрицаний стоит до первой значащей буквы.

Нумерация сочетаний значительно упрощает запись задач, которые мы собираемся решать. Так, мы имеем теперь возможность не выписывать каждый раз состав того сочетания, о котором идет речь, — мы можем ограничиться указанием номера этого сочетания.

Номером сигнала мы будем называть номер сочетания, образующего этот сигнал, и условимся записывать этот номер в виде нижнего индекса при обозначении сигнала. Поэтому обозначение $s_n = (n)$ означает сигнал, являющийся n-ым сочетанием из заданных агентов: $a, b, c, \ldots$ Прибор в некоторой схеме, который должен реагировать на сочетание (n), мы будем обозначать через A_n. Релейную схему, срабатывающую от сочетания (n), мы будем обозначать через S_n.

Для того чтобы прибор A_n реагировал на сигнал s_n, необходимо, очевидно, включить его *последовательно* с релейной схемой S_n, т. е. схема должна иметь вид (рис. 21):

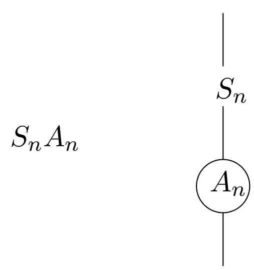


Рис. 21

Предположим, мы хотим получить схему телеграфа (пишущей машины), работающего при одновременных сочетаниях (аккорде) частот, пришедших, например, на пяти различных частотах. Задача состоит в том, чтобы получить релейную схему, которая при получении сигнала $s_n (n = 1, 2, 3, \ldots, 31)$ вызывала бы работу электромагнита A_n, отпечатывающего букву, переданную сочетанием (n). Аналитически условия этой задачи мы можем, на основании принятых нами обозначений, выразить так: при $s_n = 1 (n = 1, 2, 3, \ldots, 31)$ должно быть S_nA_n, что можно прочитать так: когда есть сигнал s_n должна срабатывать схема S_nA_n и притом только она одна.

В сущности мы уже имеем решение этой задачи. В самом деле, поскольку реле мы условились обозначать теми же буквами, что и действующие на них агенты, то получается, что $S_n = (n)$ и, следовательно,

$$S_nA_n = (n)A_n \qquad (n = 1, 2, 3, \ldots, 31).$$

Придавая n все возможные в этом случае значения, получаем все схемы, реагирующие на каждый из сигналов s_n; при

$$\begin{array}{ll}
n = 1 & S_1A_1 = (1)A_1 = e'd'c'b'aA_1 \\
n = 2 & S_2A_2 = (2)A_2 = e'd'c'ba'A_2 \\
n = 3 & S_3A_3 = (3)A_3 = e'd'c'ba\,A_3 \\
\ldots\ldots & \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\
n = 31 & S_{31}A_{31} = (31)A_{31} = edcbaA_{31}
\end{array}$$

то есть (см. рис. 22):

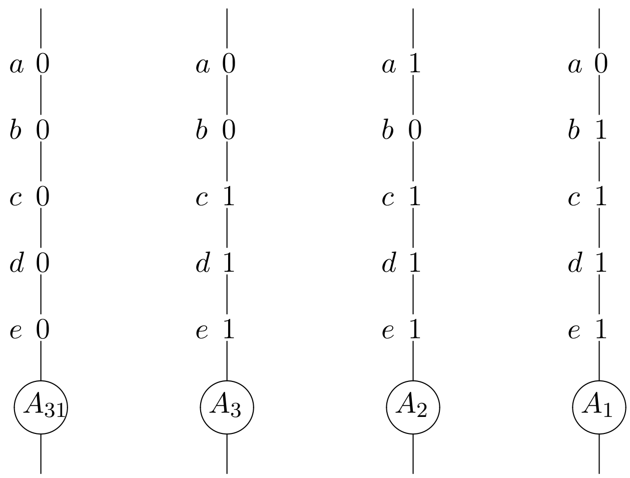


Рис. 22

Если теперь мы захотим объединить все эти схемы в одну схему, которая питается от одного источника тока, то мы, как легко видеть, должны попросту *сложить* все эти схемы, т. е. соединить их все параллельно. Полученная схема S будет срабатывать (т. е. включаться) или от сигнала s_1, или от s_2, или $s_3, \ldots$, или от s_{31}, т. е. от логической суммы сигналов.

Итак, схема $S = \sum_{n=1}^{31} S_nA_n$ срабатывает от сигнала $s = \sum_{n=1}^{31} s_n$. Каждое же слагаемое суммы схем срабатывает от слагаемых суммы сигналов $S = \sum_{n=1}^{31} S_nA_n = \sum_{n=1}^{31}(n)A_n = (1)A_1 + (2)A_2 + (3)A_3 + \cdots + (31)A_{31} = e'd'c'b'aA_1 + e'd'c'ba'A_2 + e'd'c'baA_3 + {} + e'd'cb'a'A_4 + e'd'cb'aA_5 + e'd'cba'A_6 + e'd'cbaA_7 + e'dc'b'a'A_8 + {} + e'dc'b'aA_9 + e'dc'ba'A_{10} + e'dc'baA_{11} + e'dcb'a'A_{12} + e'dcb'aA_{13} + {} + e'dcba'A_{14} + e'dcbaA_{15} + ed'c'b'a'A_{16} + ed'c'b'aA_{17} + ed'c'ba'A_{18} +$

$+ed'c'baA_{19} + ed'cb'a'A_{20} + ed'cb'aA_{21} + ed'cba'A_{22} + ed'cbaA_{23} + +edc'b'a'A_{24} + edc'b'aA_{25} + edc'ba'A_{26} + edc'baA_{27} + edcb'a'A_{28} + +edcb'aA_{29} + edcba'A_{30} + edcbaA_{31}$. Полученная схема S уже имеет не 31 различных источников питания, а всего лишь один, но она все же довольно сложна (имеет $5 \cdot 31 = 155$ контактов).

Схему S можно упростить (уменьшить число контактов), и притом сделать это путем чисто аналитическим, применяя алгебру логики:

$S = e'\{d'c'b'A_1 + d'c'ba'A_2 + d'c'baA_3 + d'cb'a'A_4 + d'cb'aA_5 + d'cba'A_6 + d'cbaA_7 + dc'b'a'A_8 + dc'b'aA_9 + dc'ba'A_{10} + dc'baA_{11} + dcb'a'A_{12} + dcb'aA_{13} + dcba'A_{14} + dcbaA_{15}\} + e\{d'c'b'aA_{17} + d'c'ba'A_{18} + d'c'baA_{19} + d'cb'a'A_{20} + d'cb'aA_{21} + d'cba'A_{22} + d'cbaA_{23} + dc'b'a'A_{24} + dc'b'aA_{25} + dc'ba'A_{26} + dc'baA_{27} + dcb'a'A_{28} + dcb'aA_{29} + dcba'A_{30} + dcbaA_{31}\}$.

Окончательно получаем:

$S = e'\{d'\{c'[b'aA_1 + b(a'A_2 + aA_3)] + c[b'(a'A_4 + aA_5) + b(a'A_6 + aA_7)]\} + d\{c'[b'(a'A_8 + aA_9) + b(a'A_{10} + aA_{11})] + c[b'(a'A_{12} + aA_{13}) + b(a'A_{14} + aA_{15})]\}\} + e\{d'\{c'[b'(a'A_{16} + aA_{17}) + b(a'A_{18} + aA_{19})] + c[b'(a'A_{20} + aA_{21}) + b(a'A_{22} + aA_{23})]\} + d\{c'[b'(a'A_{24} + aA_{25}) + b(a'A_{26} + aA_{27})] + c[b'(a'A_{28} + aA_{29}) + b(a'A_{30} + aA_{31})]\}\}$.

Эта схема эквивалентна первоначальной, но содержит всего лишь 61 контакт (число контактов в схеме равно числу букв в ее алгебраической формуле).

Пользуясь этой формулой, мы можем начертить схему (рис. 23):

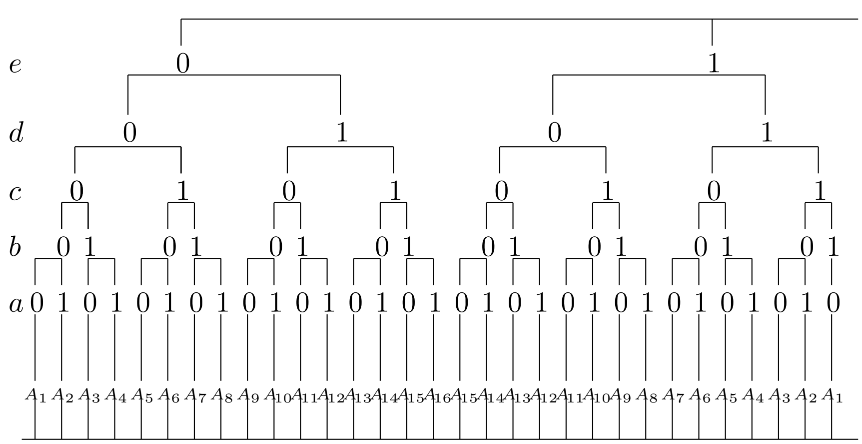


Рис. 23

Схема эта является схемой, однозначно реагирующей на все возможные сочетания различных элементов (в данном случае их пять).

Еще несколько примеров подобного расчета схем: Пусть мы хотим «придумать» схему, которая срабатывала бы, лишь когда есть a, или когда есть b, но не тогда, когда они *совмещаются*, т. е. действуют вместе. Аналитически эти условия можно записать так:

$$(a+b=1)(ab=0)=(ab+ab'+a'b=1)(ab=0)=(ab'+a'b=1).$$

Логическая единица нашей схемы — это $S=ab'+a'b$ (логической единицей является в сущности формула того «сигнала», при котором срабатывает данная схема). Таким образом, формула нашей схемы и есть $S=ab'+a'b$, и ее структурная схема имеет вид (рис. 24):

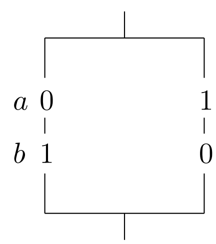


Рис. 24

Эту схему мы будем называть *альтернативной*, так как она реагирует только или на a, или на b, но не на ab (b становится здесь отрицанием a).

Если обозначать сочетания элементов, как мы уже условились, двоичными числами, то формулу, соответствующую нашей схеме, можно записать в виде:

$$S_{(1)+(2)}=01+10=(1)+(2)=\sum_{n=1}^{2}(n),$$

что читается так: схема $S_{(1)+(2)}$ реагирует или на 1-ое сочетание, либо на 2-ое сочетание, но не на какие-либо другие; она является поэтому суммой схем S_1 и S_2. И в буквенной формуле мы можем пользоваться теми же индексами, т. е. записать эту формулу в виде $S = ab' + a'b$.

Для упрощения записи мы в дальнейшем схему, реагирующую на сумму (в логическом смысле) сочетаний элементов, будем обозначать следующим образом: $S_{l,m,n}$ — это сумма, реагирующая на сигнал $s = (l) + (m) + (n)$. Очевидно, что

$$S_{m,n} = S_m + S_n,$$

т. е. схема, реагирующая на логическую сумму сочетаний $(m) + (n)$, равна логической сумме схем S_m и S_n, реагирующих на слагаемые сочетания (m) и (n).

Этим свойством мы уже воспользовались, когда выводили формулу схемы пишущей машины.

7 Общий метод составления схем

Его можно описать так. Определяем, от скольких различных агентов должна работать схема. Затем из этих агентов составляем все возможные сочетания и приравниваем к единице те из них, от которых должна срабатывать данная схема, и нулю – – те, при которых схема не должна срабатывать. Сложив все сочетания, равные 1, получаем схему, срабатывающую лишь от этих сочетаний; путем алгебраических преобразований ее можно привести к простейшему виду.

ПРИМЕР 1. Предположим, что схема S должна срабатывать от совмещений агентов ab или ac или bc, т. е. должно быть, чтобы $ab + ac + bc = 1$; потребуем, чтобы каждое из слагаемых регистрировалось отдельно: прибор, реагирующий на ab, не должен реагировать ни на какие другие сочетания; прибор, реагирующий на ac, должен реагировать только на это сочетание; и точно так же прибор, реагирующий на bc, должен реагировать исключительно на это сочетание.

Итак, имеется три различных элемента: a, b, c. Составляем из них все возможные сочетания и приравниваем единице те из них, которые должны вызывать работу схемы S:

$$
\begin{aligned}
(1) &= c'b'a = 0\\
(2) &= c'ba' = 0\\
(3) &= c'ba \ \ = 1\\
(4) &= cb'a' = 0\\
(5) &= cb'a \ \ = 1\\
(6) &= cba' \ \ = 1\\
(7) &= cba \ \ \ = 1.
\end{aligned}
$$

От каждого сочетания, равного единице, должен, согласно условиям задачи, срабатывать свой прибор. Помножая каждое сочетание на прибор, регистрирующий его, и складывая полученные логические произведения, получаем схему:

$$abc'A_3 + ab'cA_5 + a'bcA_6 + abc = S$$

или

$$S = a(bc'A_3 + b'cA_5) + a'bcA_6 + abc.$$

Можно тот же расчет произвести, не прибегая к буквенным выражениям:

$$S = (3)A_3 + (5)A_5 + (6)A_6 + (7) =$$
$$011A_3 + 101A_5 + 110A_6 + 111 = 011A_3 + 1101A_5 + 10A_6 + 111.$$

Литература

[1] *Бирюков Б.В., Верстин И.С., Левин В.И.* Жизненный и научный путь Виктора Ивановича Шестакова — создателя логической теории релейно-контактных схем //Логические исследования. Вып. 14. М.: Наука, 2007.

[2] *Бирюков Б.В., Шахов В.И.* Первые приложения логики к технике: Эренфест, Герсеванов и Шестаков. От применения логики к расчету сооружений и релейным схемам к логической теории размерностей физических величин //Логические исследования. Вып. 14. М.: Наука, 2007.

[3] *Левин В.И.* История открытия логического моделирования технических устройств // Вестник Тамбовского университета. Серия: Естествознание и технические науки. 2004. Том 9. Вып. 4.

Внутренняя логика универсальной логики[1]

В. Л. Васюков

ABSTRACT. Early in [1] some categorical constructions were introduced which describe the inner structure of the category of logical systems. Since this structure both the topos and complemented topos were featured by, then following Benabou-Mitchell's approach the inner language is introduced which is not a standard topos language but an extended one rendering the construction of the language for so-called H-B-logic whose algebraic models are semi-Boolean algebras. McLarty's sequential version of topos logic is extended to the case of the category of logical systems and the final inner logic formulation is based on the sequential formulation of H-B-logic.

Ключевые слова: внутренний язык топоса, дуальный внутренний язык, логика топоса, категрия логических систем, H-B-логика.

1 Введение

Как известно, универсальная логика представляет собой общую теорию логик, рассматриваемых как особая разновидность математических структур, по аналогии с тем, как универсальная алгебра рассматривает конкретные алгебраические системы (см. [4, с. 6]). Теоретико-категорный подход, когда логические системы объединяются в категорию специального вида, снабжает нас некоторым фундаментом для исследования универсума универсальной логики. В рамках этого подхода удается ввести категорные конструкции, которые наряду с копроизведениями, лежащими в основе расслоения логик, описывают внутреннюю структуру категории логических систем. Как оказалось, подобный универсум универсальной логики обладает структурой как топоса, так и *паранепротиворечивого дополняющего топоса*, что было продемонстрировано в работах [2, 9].

[1]Исследование выполнено при финансовой поддержке РГНФ в рамках научно-исследовательского проекта РГНФ № 06-03-00195а «Структура универсальногй логики».

Последнее обстоятельство свидетельствует о том, что для структуры универсума универсальной логики характерно наличие и интуиционистской и паранепротиворечивой (брауэровой) структуры. «Внутренняя логика» топоса, как известно, является интуиционистской логикой, что же касается внутренней логики дополняющего топоса, то здесь, по-видимому, следует ожидать наличие антиинтуиционистской (брауэровой) логики. Подобные металогические системы могут послужить удобным средством для получения утверждений о логических системах и их переводах. Сама по себе система универсальной логики представляет, по сути дела, систему универсальной металогики — логики логических систем и их переводов.

В настоящей работе предпринимается попытка точного описания этой внутренней логики универсальной логики. Показано, что она основывается на секвенциальной формулировке Н-В-логик.

В общем виде сами теоретико-категорные конструкции, описывающие структуру универсума универсальной логики, можно охарактеризовать следующим образом. Категорию сигнатур **Sig,** над которой надстраивается категория логических систем **Log**, можно определить следующим образом:

- *Объекты*: функции $\Sigma \to \mathbb{N}$, где Σ интуитивно понимается как множество связок, а функции — как ассоциирующие со связкой ее арность;

- *Морфизмы*: морфизм $\Sigma \to \Sigma'$ представляет собой гомоморфизм между абсолютно свободными алгебрами над Σ и Σ'соответственно. Иначе их можно описать как отображения $\Sigma \to F(\Sigma')$, сопоставляющие примтивной n-арной связке возможную *производную* n-арную связку.

Кратко категория **Log** логических систем, которая будет использоваться в качестве основного инструмента исследования, описывается во втором параграфе.

В третьем параграфе рассматривается внутренний язык категории **Log**. Вначале строится обычный внутрнний язык топоса (поскольку **Log** обладает структурой топоса), затем строится дуальный ему внутренний язык (поскольку **Log** обладает структурой и дополняющего топоса) и, наконец, формулируется внутренний язык, основывающийся на конструкции языка для так называемой H-B-логики, чьими алгебраическими моделями являются полубулевы алгебры.

В четвертом параграфе описывается внутренняя логика категории **Log**, дается секвенциальная формулировка внутренней логики **Log**. Эта формулировка является, с одной стороны, расширением секвенциальной формулировки внутреннего языка топоса (в версии Маклэрти), а сдругой стороны, основывается на секвенциальной формулировке H-B-логики, предложенной Ц. Раушер.

2 Категория логических систем Log

Приведем краткое описание формализма, служащего фундаментом построения категории логичесих систем. Как и в [1, с.109–114] будем иметь дело с логическим языком, который свободно порожден некоторой сигнатурой, включающей в себя, как это обычно делается, конструкторы различной местности.

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 1. Сигнатура представляет собой индексированное множество $\Sigma = \{\Sigma^n\}_{n\in\mathbb{N}}$, где каждое Σ^n является n-арным конструктором.

Будем считать, что множество пропозициональных переменных включено в Σ^0.

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 2. *Язык* над данной сигнатурой Σ, который будет обозначаться L_Σ, строится индуктивно обычным способом:

- $\Sigma^0 \subseteq L_\Sigma$;
- *если* $n \in \mathbb{N}$, $\varphi_1, \ldots, \varphi_n \in L_\Sigma$ *и* $c \in \Sigma^n$, *то* $c(\varphi_1, \ldots, \varphi_n) \in L_\Sigma$.

Будем называть Σ-*формулами* элементы L_Σ, или просто *формулами,* когда Σ ясно из контекста.

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 3. *Логическая система* является парой $\mathcal{L} = \langle\Sigma, \vdash\rangle$, где Σ есть сигнатура, а $\vdash$ представляет собой оператор присоединения следствий в L_Σ (в смысле Тарского, см. [10]), т. е. $\vdash\colon 2^{L_\Sigma} \to 2^{L_\Sigma}$ является функцией, обладающей следующими свойствами для каждых $\Gamma, \Phi \subseteq L_\Sigma$:

- *Экстенсивность*: $\Gamma \subseteq \Gamma^{\vdash}$;
- *Монотонность*: *если* $\Gamma \subseteq \Phi$, *то* $\Gamma^{\vdash} \subseteq \Phi^{\vdash}$;
- *Идемпотентность*: $(\Gamma^{\vdash})^{\vdash} \subseteq \Gamma^{\vdash}$.

Здесь $\Gamma^{\vdash}$ есть множество следствий Γ. Для сохранения общности не будем требовать здесь и в дальнейшем, чтобы оператор присоединения следствий был финитным, и тем более структурным.

Поскольку нам потребуется принимать во внимание выразительную силу данной логической системы, нам придется ссылаться на ее логические связки (примитивные или производные). Будем считать раз и навсегда зафикисированным множество $\Xi = \{\xi_i\}_{i \in \mathbb{N}}$ метапеременных. Для данной сигнатуры Σ и $k \in \mathbb{N}$ будем рассматривать множество L_Σ^k определенным индуктивно:

- $\{\xi_1, \ldots, \xi_k\} \subseteq L_\Sigma^k$;
- $\Sigma^0 \subseteq L_\Sigma^k$;
- если $n \in \mathbb{N}, \varphi_1, \ldots, \varphi_n \in L_\Sigma^k$ и $c \in \Sigma^n$, то $c(\varphi_1, \ldots, \varphi_n) \in L_\Sigma^k$.

Очевидным образом $L_\Sigma = L_\Sigma^0$. Для данного $\varphi_n \in L_\Sigma^k$ будем записывать как $\varphi(\xi_1 \backslash \psi_1, \ldots, \xi_k \backslash \psi_k)$ формулу, получаемую из φ одновременной заменой каждого вхождения ξ_1 в φ на ψ_i для каждого $i \leq k$.

Производная связка местности $k \in \mathbb{N}$ является λ-термом $d = \lambda\xi_1, \ldots, \xi_k.\varphi$, где $\varphi \in L_\Sigma^k$. Обозначим через DC_Σ^k множество всех производных k-местных связок над Σ. Отметим, что если $c \in \Sigma^n$ является примитивной связкой, то она также может рассматриваться как производная связка $c = \lambda\xi_1, \ldots, \xi_k.c(\xi_1, \ldots, \xi_k)$. Для данной производной связки $d = \lambda\xi_1, \ldots, \xi_k.\varphi$ будем писать $d(\psi_1, \ldots, \psi_n)$ вместо $\varphi(\xi_1 \backslash \psi_1, \ldots, \xi_k \backslash \psi_k)$.

Различные языки, порожденные различными сигнатурами, могут переводиться друг в друга с помощью понятия морфизма, когда примитивные связки одной сигнатуры отображаются в производные связки другой сигнатуры с сохранением соответствующей местности.

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 4. Для данных сигнатур Σ_1 и Σ_2 *морфизм сигнатур* $h : \Sigma_1 \to \Sigma_2$ является $\mathbb{N}$-индексированным семейством функций $h = \{h^n : \Sigma_1^n \to DC^n_{\Sigma_2}\}_{n \in \mathbb{N}}$.

Для данного морфизма сигнатур $h : \Sigma_1 \to \Sigma_2$ определяем его свободные расширения $h : L^k_{\Sigma_1} \to L^k_{\Sigma_2}$ для $k \in \mathbb{N}$ следующим образом:

- $h(\xi_i) = \xi_i$, если $\xi_i \in \Xi$;
- $h(c) = h^0(c)$, если $c \in \Sigma_1^0$;
- $h(c(\varphi_1, \ldots, \varphi_n)) = h^0(c)(h(\varphi_1), \ldots, h(\varphi_n))$, если $c \in \Sigma_1^n$.

Функцию перевода h, удовлетворяющую вышеизложенным требованиям, будем называть *унифицированной*.

Сигнатуры и их морфизмы образуют категорию **Sig** с тождествами $id_\Sigma : \Sigma_1 \to \Sigma_2$, такими, что $id^n_\Sigma(c) = \lambda\xi_1, \ldots, \xi_k.c(\xi_1, \ldots, \xi_k)$ для каждого $n \in \mathbb{N}$ и $c \in \Sigma^n$, а композиция морфизмов сигнатур $f : \Sigma_1 \to \Sigma_2$ и $g : \Sigma_2 \to \Sigma_3$ будет определяться как $g \circ f : \Sigma_1 \to \Sigma_3$, такая, что $(g \circ f)^n(c) = \xi_1, \ldots, \xi_n.g(\varphi)$, полагая, что $f^n(c) = \lambda\xi_1, \ldots, \xi_n.\varphi$.

Удобство использования унифицированных переводов сказывается при формулировке понятия морфизма между логическими системами. Для данной функции $h : L_{\Sigma_1} \to L_{\Sigma_2}$ с $\Phi \subseteq L_{\Sigma_1}$ мы будем рассматривать множество $h[\Phi] = \{h(\varphi) : \varphi \in \Phi\}$.

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 5. Пусть $\mathcal{L}_1 = \langle \Sigma_1, \vdash_1 \rangle$ и $\mathcal{L}_2 = \langle \Sigma_2, \vdash_2 \rangle$ будут логическими системами. *Морфизм логических систем* $h : \mathcal{L}_1 \to \mathcal{L}_2$ представляет собой морфизм сигнатур $h : \Sigma_1 \to \Sigma_2$, такой, что $h[\Phi^{\vdash_1}] \subseteq h[\Phi]^{\vdash_2}$ для каждого $\Phi \subseteq L_{\Sigma_1}$.

Логические системы и их морфизмы образуют конкретную категорию **Log** над **Sig**.

Теорией логической системы $\mathcal{L} = \langle \Sigma, \vdash \rangle$ является, как обычно, множество $\Phi \subseteq L_\Sigma$, такое, что $\Phi^\vdash = \Phi$. Обозначим как $Th(\mathcal{L})$ множество всех теорий $\mathcal{L}$. Хорошо известно, что множество $Th(\mathcal{L})$, упорядоченное по отношению включения, всегда является полной решеткой.

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 6. *Пространство теорий* есть полная решетка $tsp = \langle Th, \leq \rangle$, т. е. частичный порядок $\leq$ на множестве Th, такой, что каждое $T \subseteq Th$ имеет наименьшую верхнюю грань (или пересечение) $\bigvee T$.

В частности, для данной логической системы $\mathcal{L} = \langle \Sigma, \vdash \rangle$ структура $tsp_{\mathcal{L}} = \langle Th(\mathcal{L}), \subseteq \rangle$ всегда будет пространством теорий (см., напр., [5]). Более того, переводы языков, ассоциированные с морфизмами логических систем, всегда действуют на операторы присоединения следствий таким образом, что в соответствующих пространствах теорий сохраняются пересечения.

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 7. Пусть $tsp_1 = \langle Th_1, \leq_1 \rangle$ и $tsp_2 = \langle Th_2, \leq_2 \rangle$ будут пространствами теорий. *Морфизм пространств теорий* $h : tsp_1 \to tsp_2$ представляет собой функцию $h : Th_1 \to Th_2$ такую, что $h(\bigvee_1 T) = \bigvee_2 h[T]$ для каждого $T \subseteq Th$.

Пространства теорий и их морфизмы образуют категорию **Tsp** с обычными тождествами и композицией функций. Более того, определение пространства теорий, индуцированного логической системой, может быть расширено на случай функтора.

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 8. Отображения

- $Th(h : \mathcal{L}_1 \to \mathcal{L}_2) : tsp_1 \to tsp_2$, с $Th(h)(\Phi) = h[\Phi]^{\vdash_2}$ *в* $\mathcal{L}_2 = \langle \Sigma_2, \vdash_2 \rangle$ *для каждого* $\Phi \in Th(\mathcal{L}_1)$,

образуют функтор Th :**Log**$\to$**Tsp**.

Нетрудно показать, что Th представляет собой сопряженный функтор, но более интересно для нас понятие *эквиполлентности*, основанное на Th (см. [5, p. 107]), которое позволяет описать «сходство» логических систем. Но вначале напомним характеристику изоморфизма в категориях сигнатур **Sig** и **Log**.

УТВЕРЖДЕНИЕ 9. *Две сигнатуры* Σ_1 *и* Σ_2 *изоморфны тогда и только тогда, когда существует семейство биекций* $h = \{h^n : \Sigma_1^n \to \Sigma_1^n\}_{n \in \mathbb{N}}$.

УТВЕРЖДЕНИЕ 10. *Две логические системы* $\mathcal{L}_1 = \langle \Sigma_1, \vdash_1 \rangle$ *и* $\mathcal{L}_2 = \langle \Sigma_2, \vdash_2 \rangle$ *изоморфны тогда и только тогда, когда существует изоморфизм сигнатур* $h : \Sigma_1 \to \Sigma_2$ *такой, что* $h[\Phi^{\vdash_1}] = h[\Phi]^{\vdash_2}$ *для каждого* $\Phi \subseteq L_{\Sigma_1}$.

Наконец, с помошью следующего определения можно ввести понятие *эквиполлентности*:

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 11. Две логические системы $\mathcal{L}_1 = \langle \Sigma_1, \vdash_1 \rangle$ и $\mathcal{L}_2 = \langle \Sigma_2, \vdash_2 \rangle$ эквиполлентны, если существуют **Log**-морфизмы $h : \mathcal{L}_1 \to \mathcal{L}_2$ и $g : \mathcal{L}_2 \to \mathcal{L}_1$ такие, что $Th(h)$ и $Th(g)$ устанавливают изоморфизм между $tsp_{\mathcal{L}_1}$ и $tsp_{\mathcal{L}_2}$ в случае $Th(h) = Th(g)^{-1}$.

Фактически изоморфизмы в **Log** образуют специальный случай эквиполлентности и эквиполлентные логические системы всегда требуются для определения изоморфности логических пространств. Более того, можно дать альтернативную характеристику эквиполлентности в терминах внутреннего понятия логической эквивалентности каждой логической системы $\mathcal{L} = \langle \Sigma, \vdash \rangle$ следующим образом. Говорят, что две формулы $\varphi, \psi \in L_\Sigma$ *логически эквивалентны* в $\mathcal{L}$, $\varphi \equiv_\mathcal{L} \psi$, если одновременно имеет место $\varphi \in \{\psi\}^\vdash$ и $\psi \in \{\varphi\}^\vdash$, или, что равносильно, если $\{\varphi\}^\vdash = \{\psi\}^\vdash$. Следующа лемма из [5, p.108] показывает, что теории системы $\mathcal{L}$ фактически независимы, по модулю логически эквивалентных формул, от способа их представления.

ЛЕММА 12. *Пусть $\Phi, \Gamma \subseteq L_\Sigma$. Тогда $\Phi^\vdash = \Gamma^\vdash$ всякий раз, когда выполняются следующие два условия:*

- *для каждой $\varphi \in \Phi$ существует $\varphi' \in \Gamma$ такая, что $\varphi \equiv_\mathcal{L} \varphi'$;*
- *для каждой $\psi \in \Gamma$ существует $\psi' \in \Phi$ такая, что $\psi \equiv_\mathcal{L} \psi'$.*

Альтернативная характеристика понятия эквиполлентности может быть дана с помощью следующего определения [5, p. 108].

УТВЕРЖДЕНИЕ 13. *Пусть $\mathcal{L}_1 = \langle \Sigma_1, \vdash_1 \rangle$ и $\mathcal{L}_2 = \langle \Sigma_2, \vdash_2 \rangle$ являются логическими системами. Тогда $\mathcal{L}_1$ и $\mathcal{L}_2$ эквиполлентны тогда и только тогда, когда существуют **Log**-морфизмы $h : \mathcal{L}_1 \to \mathcal{L}_2$ и $g : \mathcal{L}_2 \to \mathcal{L}_1$ такие, что выполняются следующие два условия:*

- *$\varphi \equiv_{\mathcal{L}_1} g(h(\varphi))$ для каждой $\varphi \in L_{\Sigma_1}$;*
- *$\psi \equiv_{\mathcal{L}_2} h(g(\psi))$ для каждой $\psi \in L_{\Sigma_2}$.*

Как показано в [1], в категории **Log** существуют копроизведения, которые можно охарактеризовать с помощью следующего определения:

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 14. Пусть $\mathcal{L}_1 = \langle \Sigma_1, \vdash_1 \rangle$ и $\mathcal{L}_2 = \langle \Sigma_2, \vdash_2 \rangle$ будут логическими системами. Тогда их копроизведением является логическая система $\langle \Sigma_1, \vdash_1 \rangle \oplus \langle \Sigma_2, \vdash_2 \rangle = \langle \Sigma_1 \oplus \Sigma_2, \vdash_{1\oplus 2} \rangle$, где $\vdash_{1\oplus 2}$ есть оператор присоединения следствий $\vdash_{1\oplus 2}$: $2^{L_{i_1(\Sigma_1)\cup i_2(\Sigma_2)}} \to 2^{L_{i_1(\Sigma_1)\cup i_2(\Sigma_2)}}$ такой, что

- $\Gamma \vdash_i \varphi$ *влечет* $\Gamma \vdash_{1\oplus 2} \varphi$ *для всех* $\Gamma \cup \{\varphi\} \in L_{\Sigma_i} (i = 1, 2)$

и i_1, i_2 *являются инъекциями копроизведения* $\Sigma_1 \oplus \Sigma_2$.

Однако в **Log** единственность стрелок соответствующих диаграмм имеет место лишь с точностью до отношения эквивалентности $\equiv$, основанном на эквиполлентности логических систем.

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 15. Тождество **Log**-морфизмов представляет собой наименьшее отношение эквивалентности $\equiv$ между морфизмами, такое, что

- $f \equiv g$ *тогда и только тогда, когда* $dom(f)$ *эквиполлентна* $dom(g)$ *и* $codom(f)$ *эквиполлентна* $codom(g)$, т. е. $\mathcal{L}_1$ *и* $\mathcal{L}_2$ *эквиполлентны, так же как и* $\mathcal{L}'_1$ *эквиполлентна* $\mathcal{L}'_2$, *для морфизмов логических систем* $f : \mathcal{L}_1 \to \mathcal{L}_2, f' : \mathcal{L}'_1 \to \mathcal{L}'_2$;
- $gf = h$ *влечет* $gf \equiv h$;
- $f \equiv f'$ *и* $g \equiv g'$ *влечет* $gf \equiv g'f'$;
- $fid_{\Sigma_1} \equiv f \equiv id_{\Sigma_2} f$;
- $(hg)f \equiv h(gf)$

для всех $f, f' : \mathcal{L}_1 \to \mathcal{L}_2, g, g' : \mathcal{L}_2 \to \mathcal{L}_3, h : \mathcal{L}_3 \to \mathcal{L}_4$.

$\mathcal{L}_1$ и $\mathcal{L}_2$ эквиполлентны тогда и только тогда, когда существуют **Log**-морфизмы $h : \mathcal{L}_1 \to \mathcal{L}_2$ и $g : \mathcal{L}_2 \to \mathcal{L}_1$, такие, что $\varphi \equiv_{\mathcal{L}_1} g(h(\varphi))$ для всякой $\varphi \in L_{\Sigma_1}$ и $\psi \equiv_{\mathcal{L}_2} h(g(\psi))$ для всякой $\psi \in L_{\Sigma_2}$. Отсюда первое условие может быть переписано как $f \equiv g$ тогда и только тогда, когда имеются, во-первых, **Log**-морфизмы $h : \mathcal{L}_1 \to \mathcal{L}'_1$ и $g : \mathcal{L}'_1 \to \mathcal{L}_1$ такие,что $\varphi \equiv_{\mathcal{L}_1} g(h(\varphi))$ для любой $\varphi \in L_{\Sigma_1}$ и $\psi \equiv_{\mathcal{L}'_1} h(g(\psi))$ для любой $\psi \in L_{\Sigma'_1}$, и, во-вторых, **Log**-морфизмы $h' : \mathcal{L}_2 \to \mathcal{L}'_1$ и $g' : \mathcal{L}'_2 \to \mathcal{L}_2$ такие, что $\varphi \equiv_{\mathcal{L}_2} g(h(\varphi))$ для любой $\varphi \in L_{\Sigma_2}$ и $\psi \equiv_{\mathcal{L}'_2} h(g(\psi))$ для любой $\psi \in L_{\Sigma'_2}$.

Отсюда определение 15 должно быть расширено следующим образом:

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 16. Отношение эквивалентности $\equiv$ между **Log**-морфизмами, рассмотренное выше, должно также удовлетворять следующим условиям:

- *если* $[f, g] = h$, *то* $[f, g] \equiv h$, *и т.д.;*
- *если* $f \equiv f'$ *и* $g \equiv g'$, *то* $[gf] \equiv [g'f']$;
- $[f, g]i_1 \equiv f, [f, g]i_2 \equiv g$, *и т.д.*

для всех $f, f' : \mathcal{L}_1 \to \mathcal{L}_2, g, g' : \mathcal{L}_2 \to \mathcal{L}_3$.

Конструкция амальгам в категории **Log** выглядит следующим образом:

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 17. Пусть $\mathcal{L} = \langle \Sigma, \vdash \rangle, \mathcal{L}_1 = \langle \Sigma_1, \vdash_1 \rangle$ и $\mathcal{L}_2 = \langle \Sigma_2, \vdash_2 \rangle$ будут логическими системами и $f_1 : \Sigma \to \Sigma_1, f_2 : \Sigma \to \Sigma_2$ будут инъективными морфизмами сигнатур. Тогда их амальгамой является $\mathcal{L}_{1\ominus 2} = \langle \Sigma_1, \vdash_1 \rangle \oplus^{f_1 \Sigma f_2} \langle \Sigma_2, \vdash_2 \rangle = \langle \Sigma_1 \oplus^{f_1 \Sigma f_2} \Sigma_2, \vdash_{(1\ominus 2)} \rangle = q(\langle \Sigma_1, \vdash_1 \rangle \oplus \langle \Sigma_2, \vdash_2 \rangle)$, где

- *морфизм сигнатур* $q : \Sigma_1 \oplus \Sigma_2 \to \Sigma_1 \oplus^{f_1 \Sigma f_2} \Sigma_2$ *является коуравнителем* $i_1 \circ f_1 : \Sigma \to \Sigma_1 \oplus \Sigma_2$ *и* $i_2 \circ f_2 : \Sigma \to \Sigma_1 \oplus \Sigma_2$*;*
- $\vdash_{1\ominus 2}$ *есть оператор присоединения следствий* $\vdash_{1\ominus 2}$: $2^{L_{\Sigma \cup i_1(\Sigma_1 \setminus f_1(\Sigma)) \cup i_2(\Sigma_2 \setminus f_2(\Sigma))}} \to 2^{L_{\Sigma \cup i_1(\Sigma_1 \setminus f_1(\Sigma)) \cup i_2(\Sigma_2 \setminus f_2(\Sigma))}}$;
- $\mathcal{L}_{1\ominus 2}$ *является наименьшей системой для* $tsp_{\mathcal{L}_{1\ominus 2}} = \langle Th(\mathcal{L}_{1\ominus 2}), \subseteq \rangle$, *в которой* $\Gamma \vdash_i \varphi$ *влечет* $\Gamma \vdash_{1\ominus 2} \varphi$ *для каждого* $\Gamma \cup \{\varphi\} \in L_{\Sigma_i} (i = 1, 2)$.

В **Log** существуют также произведения и обратные образы, конструкция которых дается следующими определениями.

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 18. Пусть $\mathcal{L}_1 = \langle \Sigma_1, \vdash_1 \rangle$ и $\mathcal{L}_2 = \langle \Sigma_2, \vdash_2 \rangle$ — логические системы. Тогда их произведением является $\langle \Sigma_1, \vdash_1 \rangle \otimes \langle \Sigma_2, \vdash_2 \rangle = \langle \Sigma_1 \otimes \Sigma_2, \vdash_{1\otimes 2} \rangle$, где $\vdash_{1\otimes 2}$ есть оператор присоединения следствий $\vdash_{1\otimes 2}$: $2^{L_{pr_1(\Sigma_1 \otimes \Sigma_2) \times pr_2(\Sigma_1 \otimes \Sigma_2)}} \to 2^{L_{pr_1(\Sigma_1 \otimes \Sigma_2) \times pr_2(\Sigma_1 \otimes \Sigma_2)}}$ такой, что

- $\langle \Gamma_1, \Gamma_2 \rangle \vdash_{1\otimes 2} \langle \varphi_1, \varphi_2 \rangle$ *влечет* $\Gamma_i \vdash_i \varphi_i$ *для каждого* $\Gamma_i \cup \{\varphi_i\} \in L_{\Sigma_i} (i = 1, 2)$;

а pr_1, pr_2 *являются проекциями произведения* $\Sigma_1 \otimes \Sigma_2$.

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 19. Пусть $\mathcal{L}_1 = \langle \Sigma_1, \vdash_1 \rangle$ и $\mathcal{L}_2 = \langle \Sigma_2, \vdash_2 \rangle$ будут логическими системами и $f_1 : \Sigma_1 \to \Sigma, f_2 : \Sigma_2 \to \Sigma$ будут инъективными морфизмами сигнатур. Тогда их *обратным образом* является
$\mathcal{L}_{1 \odot 2} = \langle \Sigma_1, \vdash_1 \rangle \otimes^{f_1 \Sigma f_2} \langle \Sigma_2, \vdash_2 \rangle = \langle \Sigma_1 \otimes^{f_1 \Sigma f_2} \Sigma_2, \vdash_{1 \odot 2} \rangle = q(\langle \Sigma_1, \vdash_1 \rangle \otimes \langle \Sigma_2, \vdash_2 \rangle)$, *где*

- $q : \Sigma_1 \otimes^{f_1 \Sigma f_2} \Sigma_2 \to \Sigma_1 \otimes \Sigma_2$ *является уравнителем* $f_1 pr_1 : \Sigma_1 \otimes \Sigma_2 \to \Sigma$ *и* $f_2 pr_2 : \Sigma_1 \otimes \Sigma_2 \to \Sigma$;

- $\vdash_{1 \odot 2}$ *есть оператор присоединения следствий* $\vdash_{1 \odot 2}$: $2^{L_{\Sigma_1 \otimes^{f_1 \Sigma f_2} \Sigma_2}} \to 2^{L_{\Sigma_1 \otimes^{f_1 \Sigma f_2} \Sigma_2}}$;

- $\mathcal{L}_{1 \odot 2}$ *есть наименьшая система для* $tsp_{\mathcal{L}_{1 \odot 2}} = \langle Th(\mathcal{L}_{1 \odot 2}), \subseteq \rangle$, *в которой*

  $\langle \Gamma_1, \Gamma_2 \rangle \vdash_{1 \odot 2} \langle \varphi_1, \varphi_2 \rangle$ *влечет* $\Gamma_i \vdash_i \varphi_i$ *для каждого* $\Gamma_i \cup \{\varphi_i\} \in L_{\Sigma_i} (i = 1, 2)$.

При этом определение $\equiv$ в **Log** следует расширить следующим образом:

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 20. Отношение эквивалентности $\equiv$ между **Log**-морфизмами, определенное выше, должно также удовлетворять следующим условиям:

- *если* $\langle f, g \rangle = h$, *то* $\langle f, g \rangle \equiv h$, *и т.д.;*

- *если* $f \equiv f'$ *и* $g \equiv g'$, *то* $\langle gf \rangle \equiv \langle g' f' \rangle$;

- $pr_1 \langle f, g \rangle \equiv f, pr_2 \langle f, g \rangle \equiv g$, *и т.д.*

для всех $f, f' : \mathcal{L}_1 \to \mathcal{L}_2, g, g' : \mathcal{L}_2 \to \mathcal{L}_3$.

Наконец, в **Log** существуют экспоненциалы и коэкспоненциалы, определеяемые следующим образом.

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 21. Пусть $\mathcal{L}_1 = \langle \Sigma_1, \vdash_1 \rangle$ и $\mathcal{L}_2 = \langle \Sigma_2, \vdash_2 \rangle$ будут логическими системами. Тогда коэкспоненциал $\mathcal{L}_2$ в $\mathcal{L}_1$ есть система ${}^{\mathcal{L}_2}\mathcal{L}_1 = \langle \Sigma_1, \vdash_{1 \Leftarrow 2} \rangle$, где $\vdash_{1 \Leftarrow 2}$означает $\vdash_{1 \Leftarrow 2}$: $2^{L_{\Sigma_1}} \to 2^{L_{\Sigma_1}}$, такое, что

- $\Gamma \vdash_{1 \Leftarrow 2} \varphi$ *тогда и только тогда, когда* $g[\Gamma] \vdash_2 g(\varphi)$ *для всех* **Log**-*морфизмов* $g : \mathcal{L}_1 \to \mathcal{L}_2$.

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 22. Пусть $\mathcal{L}_1 = \langle \Sigma_1, \vdash_1 \rangle$ и $\mathcal{L}_2 = \langle \Sigma_2, \vdash_2 \rangle$ будут логическими системами. Тогда экспоненциалом $\mathcal{L}_2$ в $\mathcal{L}_1$ является система $\mathcal{L}_1^{\mathcal{L}_2} = \langle \Sigma_1, \vdash_{2\Rightarrow 1} \rangle$, где $\vdash_{2\Rightarrow 1}$означает $\vdash_{2\Rightarrow 1}$: $2^{L_{\Sigma_1}} \to 2^{L_{\Sigma_1}}$ такой, что

- $\Gamma \vdash_{2\Rightarrow 1} \varphi$, *если и только если существуют* **Log**-*морфизмы* $h : \mathcal{L}_2 \to \mathcal{L}_1$ *and* $g : \mathcal{L}_1 \to \mathcal{L}_2$ *такие, что* $h(g[\Gamma]) \vdash_1 h(g(\varphi))$.

Очевидным образом, если $\mathcal{L}_1$ и $\mathcal{L}_2$ аксиоматизируемы (т. е. существуют такие Γ_1 и Γ_2 соответственно, что для любых $\varphi \in L_{\Sigma_1}, \psi \in L_{\Sigma_2}$ и $\Delta \subseteq L_{\Sigma_1}, \Phi \subseteq L_{\Sigma_2}$ мы имеем, что если $\varphi \in (\Delta)^{\vdash_1}, \psi \in (\Phi)^{\vdash_2}$ и $\varphi \in (\Gamma_1)^{\vdash_1}, \psi \in (\Gamma_2)^{\vdash_2}$), то в определении выше $\Gamma \vdash_{2\Rightarrow 1} \varphi$ всякий раз, когда $h(g(\varphi)) \in (\Gamma_1)^{\vdash_1}$.

Все рассмотренные конструкции позволяют получить доказательство следующего утверждения:

УТВЕРЖДЕНИЕ 23. ***Log*** *является топосом и дополняющим топосом.*

При этом в качестве терминального объекта выступает логическая система $\mathcal{L}_{\mathsf{T}} = \langle \Sigma_{\mathsf{T}}, \vdash_{\mathsf{T}} \rangle$, где $\Sigma^0_{\mathsf{T}} = \{\top\}$, и $\Sigma^k_{\mathsf{T}} = \{\top^k\}$ для $k > 0$, где $\top^k$ есть k-местная постоянная функция (т. е. бинарная, тернарная и т.д.), а $\vdash_{\mathsf{T}}$ является максимальным оператором присоединения следствий (позволяющим вывести все что угодно). Конечно, $\mathcal{L}_{\mathsf{T}}$ будет терминальным объектом лишь с точностью до эквивалентности. В качестве начального объекта можно использовать логическую систему $\mathcal{L}_{\perp} = \langle \Sigma_{\perp}, \vdash_{\perp} \rangle$, где $\Sigma^0_{\perp} = \{\perp\}$, и $\Sigma^k_{\perp} = \{\perp^k\}$ для $k > 0$, где $\perp^k$ есть k-местная постоянная функция (т. е. бинарная, тернарная и т.д.), а $\vdash_{\perp}$ является максимальным оператором присоединения следствий (позволяющим вывести все что угодно). Что же касается классифицирующего объекта, то определяем его как $\Omega = \langle \Sigma_{\Omega}, \vdash_{\Omega} \rangle$, где $\Sigma^0_{\Omega} = \{\top, \perp\}, \Sigma^k_1 = \{\top^k, \perp^k\}$ для $k > 0$ и $\vdash_{\Omega}$является одновременно максимальным $\top$-отношением присоединения следствий (позволяющим вывести все что угодно из $\top$ и $\top^k$) и максимальным $\perp$-отношением присоединения следствий (позволяющим вывести все что угодно из $\perp$ и $\perp^k$). В качестве классификатора подобъектов $true$ мы имеем $true(\Sigma_{\mathsf{T}}) = \Sigma_{\mathsf{T}} \subseteq \Sigma_{\Omega}$ и $true(\vdash_{\mathsf{T}}) = \vdash_{\mathsf{T}} \subseteq \vdash_{\Omega}$, т. е. $true$ сохраняет $\top$-максимальность. Для дополняющего классификатора объектов $false$ мы имеем $false(\Sigma_{\mathsf{T}}) = \Sigma_{\perp} \subseteq \Sigma_{\Omega}$ и

$false(\vdash_{\top}) = \vdash_{\bot} \subseteq \vdash_{\Omega}$, т. е. $false$ преобразует максимальное $\top$-отношение присоединения следствий в максимальное $\bot$-отношение присоединения следствий.

3 Внутренний язык Log

Как известно, каждому топосу можно сопоставить язык, который можно использовать как удобное средство для построения высказываний об объектах и морфизмах данного топоса или даже доказательства теорем о них (см. [3, с. 172]). Воспользуемся версией построения внутреннего языка, принадлежащей К. Маклэрти [6, p. 126], для описания внутреннего языка **Log** как топоса.

Внутренний язык типизирован, в качестве типов принимаются объекты **Log**[2]. Термы и их типы определяются индуктивно:

(LT1) Каждому **Log**-объекту $\mathcal{L}$ сопоставляется список переменных $x_1, x_2, x_3, \ldots$ Каждая переменная над $\mathcal{L}$ является термом типа $\mathcal{L}$.

(LT2) Для каждого морфизма $f : \mathcal{L}_1 \to \mathcal{L}_2$ и терма s типа $\mathcal{L}_1$ выражение fs является термом типа $\mathcal{L}_2$. Каждый морфизм $c : \top \to \mathcal{L}$ с $\top$ в качестве области определения сам является термом типа $\mathcal{L}$ (будем называть его константой типа $\mathcal{L}$). Пусть ! означает константу тождественного морфизма для $\top$.

(LT3) Для каждого терма s_1 типа $\mathcal{L}_1$ и s_2 типа $\mathcal{L}_2$ имеется терм $\langle s_1, s_2 \rangle$ типа $\mathcal{L}_1 \otimes \mathcal{L}_2$.

(LT4) Для каждого терма s типа $\mathcal{L}_2$ и переменной y типа $\mathcal{L}_1$ имеется терм $(\lambda y)s$ типа $\mathcal{L}_2^{\mathcal{L}_1}$.

Переменная x *свободна*, если только она не связана лямбда-оператором (λx). Будем писать $(\lambda x.\mathcal{L}_1)$, чтобы отметить тип переменной. Терм без свободных переменных является *замкнутым*. Переменные на самом деле представляют собой не что иное, как теории $\mathcal{L}$.

---

[2] Маклэрти рассматривает не типы, а сорта, но мы, следуя обычной практике, будем говорить о типах.

Для данной переменной x и терма v того же самого типа будем обозначать $s(x/v)$ терм, возникающий в результате подстановки v вместо каждого свободного вхождения x в s. Если ни одна из свободных переменных v не становится связанной в $s(x/v)$, то будем говорить, что *v свободна для x* в s.

Предположим, что терм s имеет тип $\mathcal{L}'$ и все его свободные переменные находятся в списке $y_1, \ldots, y_k$, где все y-ки являются переменными над $\mathcal{L}_1, \ldots, \mathcal{L}_k$ соответственно. Тогда s соответствует морфизм $|s| : \mathcal{L}_1 \otimes \cdots \otimes \mathcal{L}_k \to \mathcal{L}'$, который мы будем называть интерпретацией s. Интуитивно это означает, что приписывание значения каждой переменной, дающее каждой y_i значение в $\mathcal{L}_i$, определяет значение s. Поскольку морфизм $|s|$ действительно зависит от списка соответствующих переменных, следует указывать список в записи.

Будем использовать $\bar{x}$ для сокращенного обозначения списка $x_1, \ldots, x_n$. В этом случае $\mathcal{L}_1, \ldots, \mathcal{L}_n$ будет представлять собой список типов переменных того же самого порядка. Переменная может появляться в списке только однажды, но объект $\mathcal{L}$ будет появляться столько раз, сколько имеется переменных над $\mathcal{L}$ в списке. Для терма s типа $\mathcal{L}'$ и списка $\bar{x}$, включающего в себя все свободные переменные из s, будем писать $|s|_{\bar{x}} : \mathcal{L}_1 \otimes \cdots \otimes \mathcal{L}_k \to \mathcal{L}'$ для *интерпретации* относительно списка $\bar{x}$. Мы всегда будем предполагать, что наши списки переменных включают в себя все те переменные, которые свободны в термах, к которым мы их применяем. Если s не содержит свободных переменных, то $\bar{x}$ может представлять собой пустой список переменных, и, конечно, произведение пустого списка типов есть $\top$.

Определим теперь индуктивно интерпретацию относительно списков:

(I1) Для любого списка $\bar{x}$ и переменных x_i из списка $|x_i|_{\bar{x}}$ будет представлять собой проекцию $\mathcal{L}_1 \otimes \cdots \otimes \mathcal{L}_n \to \mathcal{L}_i$.

(I2) Для любого морфизма $f : \mathcal{L}' \to \mathcal{L}''$,если s является термом типа $\mathcal{L}'$, то $|fs|_{\bar{x}}$ будет $\mathcal{L}_1 \otimes \cdots \otimes \mathcal{L}_n \xrightarrow{|s|_{\bar{x}}} \mathcal{L}' \xrightarrow{f} \mathcal{L}''$. Для любой константы c интерпретацией $|c|_{\bar{x}}$ будет $\mathcal{L}_1 \otimes \cdots \otimes \mathcal{L}_n \to \top \xrightarrow{c} \mathcal{L}''$.

(I3) Для любых термов s_1 типа $\mathcal{L}'$ и s_2 типа $\mathcal{L}''$ $|\langle s_1, s_2\rangle|_{\bar{x}}$ представляет собой морфизм пары в $\mathcal{L}' \otimes \mathcal{L}''$, индуцированный $|s_1|_{\bar{x}}$ и $|s_2|_{\bar{x}}$.

(I4) Для любого терма s типа $\mathcal{L}''$, если переменной y над $\mathcal{L}'$ нет в списке $\bar{x}$, то $|(\lambda y)s|_{\bar{x}}$ является *транспозицией* $|s|_{\bar{x},y} : \mathcal{L}_1 \otimes \cdots \otimes \mathcal{L}_n \otimes \mathcal{L}' \to \mathcal{L}''$, т. е. морфизмом $\overline{|s|_{\bar{x},y}} : \mathcal{L}_1 \otimes \cdots \otimes \mathcal{L}_n \to \mathcal{L}''^{\mathcal{L}'}$. Если же связанная переменная y имеется в списке $\bar{x}$, то это нерелевантное совпадение. Тогда мы замещаем y в $(\lambda y)s$ какой-нибудь переменной над $\mathcal{L}'$, не содержащейся ни в s, ни в списке $\bar{x}$.

Согласно (LT2) для любых термов g типа $\mathcal{L}_2^{\mathcal{L}_1}$ и s типа $\mathcal{L}_1$ имеется терм $ev(\langle g, s\rangle)$, который будем записывать сокращенно как $g(s)$. Будем также использовать классообразующий оператор, записывая $\{x.\mathcal{L}_1 : s\}$ вместо $(\lambda x.\mathcal{L}_1)s$, когда s имеет тип Ω. Для терма P типа $\otimes^{\mathcal{L}_1}$ будем писать $x \in P$ вместо $ev(\langle P, x\rangle)$, а также часто будем опускать угловые скобки, записывая $f(x, y)$ вместо $f(\langle x, y\rangle)$.

Формулы будут представлять собой термы типа Ω. Согласно (LT2) для любых формул φ и ψ существуют формулы $\wedge(\varphi, \psi)$ и $\to (\varphi, \psi)$. Будем записывать это как $\varphi \wedge \psi$ и $\varphi \to \psi$. Имеются также формулы $\bot, \neg\varphi$.

Для любой формулы φ и переменной y над объектом $\mathcal{L}_1$ мы определяем формулу $(\forall y.\mathcal{L}_1)\varphi$ как сокращение для $\forall_{\mathcal{L}_1}\{y.\mathcal{L}_1 : \varphi\}$, откуда $(\forall y.\mathcal{L}_1)\varphi$ является утверждением, что само множество $\{y.\mathcal{L}_1 : \varphi\}$ типа $\mathcal{L}_1$. Интерпретация данной формулы для списка переменных $\bar{x}$ следует определению, т. е. представляет собой $\mathcal{L}_1 \otimes \cdots \otimes \mathcal{L}_n \xrightarrow{\overline{|\varphi|_{\bar{x},y}}} \Omega^{\mathcal{L}'} \xrightarrow{\forall_{\mathcal{L}'}} \Omega$, если переменная y не появляется в списке $\bar{x}$. Если же она есть в этом списке, то вначале она заменяется на какую-нибудь новую переменную. Заметим, что y связана в $(\forall y.\mathcal{L}_1)\varphi$.

Для любых a_1 термов и a_2 типа $\mathcal{L}_1$ стрелка $\delta_{\mathcal{L}_1} : \mathcal{L}_1 \otimes \mathcal{L}_1 \to \Omega$ дает терм $\delta_{\mathcal{L}_1}(a_1, a_2)$, который сокращенно записываем как $a_1 = a_2$. Отсюда следует, что $|a_1 = a_2|_{\bar{x}}$ является классифицирующей стрелкой уравнителя $|a_1|_{\bar{x}}$ и $|a_2|_{\bar{x}}$.

Наконец, для любых мономорфизмов $i : \mathcal{L}' \rightarrowtail \mathcal{L}_1$ и $r : \mathcal{L}'' \rightarrowtail \mathcal{L}_1 \otimes \mathcal{L}_2$ будем записывать формулы $\mathcal{L}'(s)$ и $\mathcal{L}'' s_1 s_2$ как сокращения для $\chi_i(s)$ и $\chi_r(s_1, s_2)$, где s и s_1 являются любыми термами типа $\mathcal{L}_1$ и s_2 является любым термом типа $\mathcal{L}_2$.

Однако наше построение языка **Log** на этом не заканчивается, поскольку **Log** является не только топосом, но и дополняющим топосом. Мы пополняем список определений типов и термов следующими пунктами:

(LT5) Для каждого морфизма $f : \mathcal{L}_1 \to \mathcal{L}_2$ и котерма s типа $\mathcal{L}_1$ выражение $(fs)^o = f^o s$ является котермом типа $\mathcal{L}_1$. Каждый морфизм $c : \mathcal{L} \to\perp$ с $\perp$ в качестве области значения сам является котермом типа $\mathcal{L}$ (будем называть его коконстантой типа $\mathcal{L}$). Пусть ? означает коконстанту тождественного морфизма для $\perp$.

(LT6) Для каждого котерма s_1 типа $\mathcal{L}_1$ и s_2 типа $\mathcal{L}_2$ имеется котерм $[s_1, s_2]$ типа $\mathcal{L}_1 \oplus \mathcal{L}_2$.

(LT7) Для каждого котерма s типа $\mathcal{L}_2$ и переменной y типа $\mathcal{L}_1$ имеется котерм $s(\lambda y)$ типа ${}^{\mathcal{L}_1}\mathcal{L}_2$.

Для котерма s типа $\mathcal{L}'$ и списка $\bar{x}$, включающего в себя все свободные переменные из s, будем писать $||s||_{\bar{x}} : \mathcal{L}' \to \mathcal{L}_1 \oplus \cdots \oplus \mathcal{L}_k$ для *коинтерпретации* относительно списка $\bar{x}$. Определение интерпретации относительно списков пополняется теперь следующими пунктами коинтерпретации:

(I5) Для любого списка $\bar{x}$ и переменных x_i из списка $||x_i||_{\bar{x}}$ будет представлять собой инъекцию $\mathcal{L}_i \to \mathcal{L}_1 \oplus \cdots \oplus \mathcal{L}_n$.

(I6) Для любого морфизма $f : \mathcal{L}' \to \mathcal{L}''$,если s является котермом типа $\mathcal{L}''$, то $||f^o s||_{\bar{x}}$ будет $\mathcal{L}'' \stackrel{f^{-1}}{\to} \mathcal{L}' \stackrel{||s||_{\bar{x}}}{\to} \mathcal{L}_1 \oplus \cdots \oplus \mathcal{L}_n$. Для любой коконстанты c коинтерпретацией $||c||_{\bar{x}}$ будет $\mathcal{L}'' \stackrel{c^O}{\to}\perp\to \mathcal{L}_1 \oplus \cdots \oplus \mathcal{L}_n$.

(I7) Для любых котермов s_1 типа $\mathcal{L}'$ и s_2 типа $\mathcal{L}''$ $||[s_1, s_2]||_{\bar{x}}$ представляет собой морфизм пары из $\mathcal{L}' \oplus \mathcal{L}''$, индуцированный $||s_1||_{\bar{x}}$ и $||s_2||_{\bar{x}}$.

(I8) Для любого котерма s типа $\mathcal{L}''$, если переменной y над $\mathcal{L}'$ нет в списке $\bar{x}$, то $||s(\lambda y)||_{\bar{x}}$ является *котранспозицией* $||s||_{\bar{x},y} : \mathcal{L}'' \to \mathcal{L}_1 \oplus \cdots \oplus \mathcal{L}_n \oplus \mathcal{L}'$, т. е. морфизмом

$\overline{\overline{||s||_{\bar{x},y}}} :^{\mathcal{L}'} \mathcal{L}'' \to \mathcal{L}_1 \oplus \cdots \oplus \mathcal{L}_n$. Если же связанная переменная y имеется в списке $\bar{x}$, то это нерелевантное совпадение. Тогда мы замещаем y в $s(\lambda y)$ какой-нибудь переменной над $\mathcal{L}'$, не содержащейся ни в s, ни в списке $\bar{x}$.

Согласно (LT5) для любых котермов g типа ${}^{\mathcal{L}_1}\mathcal{L}_2$ и s типа $\mathcal{L}_1$ имеется котерм $ev^o([g, s])$, который будем записывать сокращенно как $g^o s$. Будем также использовать коклассообразующий оператор, записывая $\{x.\mathcal{L}_1 : s\}^o$ вместо $s(\lambda x.\mathcal{L}_1)$, когда s имеет тип Ω. Для терма P типа ${}^{\mathcal{L}_1}\otimes$ будем писать $x \in^o P$ вместо $ev^o([P, x])$, а также часто будем опускать угловые скобки, записывая $f^o(x, y)$ вместо $f^o([x, y])$.

Формулы будут представлять собой котермы типа Ω. Согласно (LT5) для любых формул φ и ψ существуют формулы $\vee(\varphi, \psi)$ и $\leftarrow (\varphi, \psi)$. Будем записывать это как $\varphi \vee \psi$ и $\varphi \leftarrow \psi$. Имеются также формулы $\top, \ulcorner \varphi$.

Обратим, однако, внимание на тот факт, что в случае **Log** и для термов и для котермов используются одни и те же переменные (т. е. теории), а также одни и те же категорные конструкции (произведения, копроизведения). Это наводит на мысль переопределить (LT7) и (I8) следующим образом:

(LT7') Для каждого терма s типа $\mathcal{L}_2$ и переменной y типа $\mathcal{L}_1$ имеется терм $s(\lambda y)$ типа ${}^{\mathcal{L}_1}\mathcal{L}_2$.

Это следует понимать в том смысле, что

(I8') Для любого терма s типа $\mathcal{L}''$, если переменной y над $\mathcal{L}'$ нет в списке $\bar{x}$, то $|s(\lambda y)|_{\bar{x}}$ является *дополняющей транспозицией* $||s||_{\bar{x},y} : \mathcal{L}'' \to \mathcal{L}_1 \oplus \cdots \oplus \mathcal{L}_n \oplus \mathcal{L}'$, т. е. морфизмом $\widehat{|s|_{\bar{x},y}} : \mathcal{L}_1 \otimes \cdots \otimes \mathcal{L}_n \to^{\mathcal{L}'} \mathcal{L}''$, таким, что $f = \overline{\overline{||s||_{\bar{x},y}}} \circ \widehat{|s|_{\bar{x},y}}$, где $f : \mathcal{L}_1 \otimes \cdots \otimes \mathcal{L}_n \to \mathcal{L}_1 \oplus \cdots \oplus \mathcal{L}_n$. Если же связанная переменная y имеется в списке $\bar{x}$, то это нерелевантное совпадение. Тогда мы замещаем y в $s(\lambda y)$ какой-нибудь переменной над $\mathcal{L}'$, не содержащейся ни в s, ни в списке $\bar{x}$.

В этом случае мы получаем внутренний язык **Log**, в котором существуют одновременно для любых формул φ и ψ формулы $\varphi \wedge \psi, \varphi \to \psi, \bot, \neg\varphi, \varphi \vee \psi, \varphi \leftarrow \psi, \top, \ulcorner \varphi$. Подобный язык представляет собой не что иное, как язык для так называемой H-B-логики, чьей алгебраической моделью являются *полубулевы* алгебры (абстрактная алгебра $(A, \wedge, \vee, \to, \leftarrow, \neg, \ulcorner)$ называется полубулевой алгеброй,, если $(A, \wedge, \vee, \to, \neg)$ является алгеброй Гейтинга, а $(A, \wedge, \vee, \leftarrow, \ulcorner)$ — брауэровой алгеброй [8, p. 8].

4 Внутренняя логика Log

Перейдем теперь к построению внутренней логики **Log**, используя вначале схему построния логики топоса, рассмотренную К. Маклэрти. Экстенсионалом φ по списку $\bar{x}$ является подобъект $\mathcal{L}_1 \otimes \cdots \otimes \mathcal{L}_n$, классифицируемый $|\varphi|_{\bar{x}}$. Будем записывать этот экстенсионал как $[\bar{x} : \varphi]$ и читать эту запись как «все $\bar{x}$, такие, что φ». Например, мы получаем

$$[\bar{x} : \top] = \mathcal{L}_1 \otimes \cdots \otimes \mathcal{L}_n$$
$$[\bar{x} : \varphi \& \psi] = [\bar{x} : \varphi] \cap [\bar{x} : \psi]$$
$$[\bar{x} : \varphi \to \psi] = [\bar{x} : \varphi] \Rightarrow [\bar{x} : \psi]$$
$$[\bar{x} : \varphi \leftarrow \psi] = [\bar{x} : \varphi] \Leftarrow [\bar{x} : \psi]$$

и $[\bar{x} : (\forall y)\varphi]$ представляет собой универсальную квантификацию $[\bar{x}, y : \varphi]$ по проекции, соответствующей y. Здесь $\Rightarrow$ есть импликация, а $\Leftarrow$ является коимпликацией (псевдоразностью или импликацией Брауэра).

Формула φ называется *истинной*, если ее экстенсионалом являются в точности $\mathcal{L}_1 \otimes \cdots \otimes \mathcal{L}_n$, когда $\bar{x}$ пробегает по всем свободным переменным φ, т. е. по всем теориям $\mathcal{L}_1 \otimes \cdots \otimes \mathcal{L}_n$.

Будем говорить, что формула φ влечет ψ, если ее экстенсионал содержится в экстенсионале ψ. Более того, для любого конечного множества формул Γ будем записывать $[\bar{x} : \Gamma]$ для пересечения экстенсионалов над $\bar{x}$ всех формул в Γ. В частности, $[\bar{x} :] = \mathcal{L}_1 \otimes \cdots \otimes \mathcal{L}_n$ для пустого множества формул. Будем говорить, что Γ *влечет* φ тогда и только тогда, когда $[\bar{x} : \Gamma] \subseteq [\bar{x} : \varphi]$ и $\bar{x}$ есть список в точности всех свободных переменных из Γ и φ.

Секвенция представляет собой выражение $\Gamma : \varphi$, где Γ является конечным (возможно пустым) множеством формул и φ есть формула. Будем понимать $\Gamma : \varphi$ как утверждение, что формулы из Γ влекут φ. Секвенция *истинна* тогда и только тогда, когда Γ действительно влечет φ. В частности, секвенция $: \varphi$ с пустой левой частью истинна тогда и только тогда, когда $[\bar{x} : \varphi]$ состоит из всех x из $\mathcal{L}_1 \otimes \cdots \otimes \mathcal{L}_n$ и таким образом тогда и только тогда, когда φ истинна. Если нам известно, что секвенция $\Gamma : \varphi$ истинна, то мы можем записать $\Gamma \vdash \varphi$.

Логика топоса, как известно [6, p. 129], может быть сформулирована в виде списка правил вывода для подобных секвенций, т. е. с помощью правил, действующих таким образом, что применяя их к истинным секвенциям, мы получаем истинные секвенции. Однако в нашем случае, как это явствует из построенного нами ранее языка для **Log**, наша логика, полученная подобным способом, должна быть двойственной, отражая наличие двух алгебр в **Log** — алгебры Гейтинга и алгебры Брауэра. Отсюда подходящей секвенциальной системой у нас может быть секвенциальная формулировка H-B-логики, которую можно найти в [7, c. 25].

$$\frac{*}{\varphi : \varphi} \qquad \frac{*}{: \top} \qquad \frac{*}{\bot : \varphi}$$

$$\frac{\Gamma : \Delta}{\Gamma : \Delta, \varphi}(\text{: ослабление}) \quad \frac{\Gamma : \varphi}{\Gamma, \psi : \varphi}(\text{ослабление :})$$

$$\frac{\Gamma : \Delta, \varphi, \varphi}{\Gamma : \Delta, \varphi}(\text{: сокращение}) \quad \frac{\Gamma, \psi, \psi : \varphi}{\Gamma, \psi : \varphi}(\text{сокращение :})$$

$$\frac{\theta : \Gamma, \varphi, \psi, \Delta}{\theta : \Gamma, \psi, \varphi, \Delta}(\text{: перестановка}) \quad \frac{\Gamma, \varphi, \psi, \Delta : \theta}{\Gamma, \psi, \varphi, \Delta : \theta}(\text{перестановка :})$$

$$\frac{\Gamma : \Theta, \varphi \quad \varphi, \Delta : \Sigma}{\Gamma, \Delta : \Theta, \Sigma}(\text{сечение}) \quad \begin{array}{l}(\text{если каждая переменная, свободная в } \varphi,\\ \text{свободна в } \Gamma \text{ или в } \varphi)\end{array}$$

$$\frac{\Gamma : \varphi, \Delta}{\Gamma(x/s) : \varphi(x/s), \Delta(x/s)}(\text{подстановка}) \quad \begin{array}{l}(\text{для любого терма } s, \text{ свободного}\\ \text{по } x \text{ во всех формулах})\end{array}$$

$$\frac{\Gamma : \varphi}{\Gamma : \varphi \vee \psi}(: \vee 1) \quad \frac{\Gamma : \psi}{\Gamma : \varphi \vee \psi}(: \vee 2) \quad \frac{\theta : \Gamma, \varphi, \psi}{\theta : \Gamma, \varphi \vee \psi}(: \vee 3)$$

$$\frac{\Gamma, \varphi : \Delta \quad \Gamma, \psi : \Delta}{\Gamma, \varphi \vee \psi : \Delta}(\vee :) \quad \frac{\Gamma : \Delta, \varphi \quad \Gamma : \Delta, \psi}{\Gamma : \Delta, \varphi \wedge \psi}(: \wedge)$$

$$\frac{\Gamma, \varphi, \psi : \theta}{\Gamma, \varphi \wedge \psi : \theta}(\wedge :1) \quad \frac{\varphi : \Gamma}{\varphi \wedge \psi : \Gamma}(\wedge :2) \quad \frac{\psi : \Gamma}{\varphi \wedge \psi : \Gamma}(\wedge :3)$$

$$\frac{\Gamma, \varphi : \psi}{\Gamma : \varphi \to \psi}(: \to) \quad \frac{\Gamma, \Delta : \varphi \quad \psi, \Gamma, \Delta : \theta}{\varphi \to \psi, \Gamma, \Delta : \theta}(\to :)$$

$$\frac{\theta : \Gamma, \Delta, \varphi \qquad \psi : \Gamma, \Delta}{\theta : \Gamma, \Delta, \varphi \leftarrow \psi}(: \leftarrow) \quad \frac{\varphi : \Gamma, \psi}{\varphi \leftarrow \psi : \Gamma}(\leftarrow :)$$

$$\frac{\Gamma, \varphi :}{\Gamma : \neg\varphi}(:\neg) \quad \frac{\Gamma : \Delta, \varphi}{\neg\varphi, \Gamma : \Delta}(\neg:)$$

$$\frac{\Gamma, \varphi : \Delta}{\Gamma : \Delta, \ulcorner\varphi}(:\ulcorner) \quad \frac{: \Gamma, \varphi}{\neg\varphi : \Gamma}(\ulcorner:)$$

Антецедент и сукцедент секвенций в вышеприведенных правилах не могут быть одновременно более чем одноэлементными. Например, в правиле ($\vee$:), если Δ есть (непустое) множество формул, то Γ пусто, а если Γ есть (непустое) множество формул, то Δ состоит не более чем из одной формулы. При этом, если в Γ и в Δ формулы в качестве главных связок содержат $\leftarrow$ и $\ulcorner$ ($\rightarrow$ и $\neg$), то сначала следует применять правила вывода к формулам в Γ (Δ).

Таким образом, внутренний язык категории логических систем **Log** представляет собой язык, позволяющий рассуждать как в стандартном категорном (интуиционистском) ключе о различных построениях составных логических систем, так и в рамках паранепротиворечивой логики (логики Брауэра), когда секвенции можно рассматривать как доказательства альтернатив, исходя из какой-либо гипотезы.

Литература

[1] *Васюков В.Л.* Проблема контекста интерпретации в универсальной логике // Логические исследования. Вып. 14. М., 2007. С.105-130.

[2] *Васюков В.Л.* Металогика универсальной логики // Современная логика: проблемы теории, истории и применения в науке. Материалы IX Общероссийской научной конференции. Санкт-Петербург, 22-24 июня 2006 г. Спб.ГУ, 2006. С. 345-347.

[3] *Джонстон П.Т.* Теория топосов. М.: Наука, 1986.

[4] *Béziau J.-Y.* From Consequence Operator to Universal Logic: A Survey of General Abstract Logic // Logica Universalis / J.-Y. Béziau (ed.). Basel, 2005. P. 3-18.

[5] *Caleiro C., Gonçalves R.* Equipollent Logical Systems // Logica Universalis / J.-Y. Béziau (ed.). Basel, 2005. P. 99-111.

[6] *McLarty C.* Elementary Categories, Elementary Toposes. Oxford: Clarendon Press, 1992.

[7] *Rauszer C.* A Formalization of the Propositional Calculus of H-B-logic // Studia Logica. 1973. Vol. 33. №1. P. 23-34.

[8] *Rauszer C.* An algebraic and Kripke-style appraoach to a certain extension of intuionistic logic // Dissertationes Mathematicae, CLXVII. PWN, Warszawa, 1980.

[9] *Vasyukov V.L.* Structuring the Universe of Universal Logic // Logica Universalis. 2007. Vol. 1-2. P. 277-294.

[10] *Wójcicki R.* Theory of Logical Calculi // Synthese Library. Vol. 199. Dordrecht, 1988.

Независимая базируемость дедуктивных пропозициональных систем[1]

И. А. Горбунов

ABSTRACT. Some questions concerned the existence of independent bases for consequence operations and sentential calculi are considered in the present paper.

Ключевые слова: дедуктивные пропозициональные системы, независимая базируемость, компактность.

1 Введение

Понятие *дедуктивной системы* возникло в качестве некоторого «дополнительного» к понятию *логики* способа описания некоторых свойств естественной логики. Понимание, в математической логике, логики как некоторого множества формул акцентирует наше внимание на способности некоторых форм высказываний сохранять свою истинность вне зависимости от их интерпретации, в силу самой их формы. Понятие же дедуктивной системы обращает наше внимание на тот факт, что логика позволяет нам выводить одни положения из других, т. е. акцентирует внимание на логическом следовании. Этот подход возник, видимо, в работах Я. Лукасевича и А. Тарского, подробнее об этом можно узнать, например, из [1] и [2]. Поскольку число публикаций, находящихся в рамках этого подхода и изданных на русском языке мало́, то автор частично использовал терминологию из интересного обзора А.С. Карпенко [2] и частично ту, которая сложилась при обсуждении им этих вопросов с участниками семинара по математической логике в Тверском госуниверситете. Основными источниками определений и некоторых фактов послужили работы Р. Вуйцицкого [3] и [4].

[1]Работа выполнена при поддержке РФФИ, гранты 06–06–80380, 07–06–00318 и 08–06–00414.

Перейдем к точным определениям.

Пропозициональным алфавитом будем называть пару $\langle V, \Sigma \rangle$, где V — счетное множество символов, называемых *пропозициональными переменными*, а Σ — не более чем счетное множество конечноместных функциональных символов, называемых *пропозициональными связками* алфавита. Всякий терм, построенный из символов алфавита $\langle V, \Sigma \rangle$, будем называть *формулой*. *Языком* $\mathcal{L}$ будем называть множество всех формул алфавита $\langle V, \Sigma \rangle$. Функцию $Cn : 2^{\mathcal{L}} \to 2^{\mathcal{L}}$ будем называть *операцией присоединения следствий* над языком $\mathcal{L}$, или, для краткости (и экономии бумаги), просто *следованием*, если для любых $X, Y \in 2^{\mathcal{L}}$

A1. $X \subseteq Cn(X)$,

A2. $Cn(X) = Cn(Cn(X))$,

A3. $X \subseteq Y \Rightarrow Cn(X) \subseteq Cn(Y)$.

Подстановкой будем называть отображение $\varepsilon : \mathcal{L} \to \mathcal{L}$, которое является продолжением отображения $\varepsilon : V \to \mathcal{L}$. Обозначим через $\mathbf{E}$ множество всех подстановок. Следование Cn будем называть *структурным*, если для любой подстановки ε и любого множества формул X выполняется условие

A4. $\varepsilon(Cn(X)) \subseteq Cn(\varepsilon(X))$.

Пару $\langle \mathcal{L}, Cn \rangle$, где Cn — структурная операция присоединения следствий, будем называть *пропозициональной дедуктивной системой*. Поскольку не пропозициональных дедуктивных систем мы рассматривать не будем, то далее пропозициональные дедуктивные системы будем называть дедуктивными системами. Если следование дедуктивной системы обладает некоторым свойством, то будем говорить, что этим свойством обладает дедуктивная система.

Следование будем называть *финитарным*, если для любого множества X верно, что $Cn(X) = \bigcup_{Y \subseteq X} Cn(Y)$, где Y — конечное множество. Следование будем называть *стандартным*, если оно структурно и финитарно.

Любое подмножество $\rho \subseteq 2^{\mathcal{L}} \times \mathcal{L}$ будем называть *правилом*, а любой элемент этого подмножества будем называть *схемой*. Правило ρ называем *структурным*, если для любого множества формул X и любой подстановки ε верно, что если $\langle X, \alpha \rangle \in \rho$, то $\langle \varepsilon(X), \varepsilon(\alpha) \rangle \in \rho$. Правило ρ будем называть *финитарным*, если для любой схемы $\langle X, \alpha \rangle \in \rho$ верно, что множество X конечно. Будем говорить, что правило ρ *порождено схемой* $\langle X, \alpha \rangle$, если $\rho = \{\langle \varepsilon(X), \varepsilon(\alpha) \rangle \mid \varepsilon \in \mathbf{E}\}$. Такое правило будем обозначать $\rho_{X/\alpha}$ (или, если это не будет вызывать недоразумений, просто X/α) и называть *секвенцией*. Секвенцию $\rho_{\varnothing/\alpha}$ будем называть *аксиоматическим правилом*, а элементы этого правила будем называть *аксиомами*. Правило будем называть *стандартным*, если оно является финитарной секвенцией, поэтому такое правило будем называть также *стандартной секвенцией*.

Множество $X \in 2^{\mathcal{L}}$ будем называть замкнутым относительно правила ρ, если для любого $Y \subseteq X$ и для любого $\alpha \in \mathcal{L}$ верно, что если $\langle Y, \alpha \rangle \in \rho$, то и $\alpha \in X$. Будем говорить, что следование C *базируется на множестве правил вывода* R (символически обозначать $C = Cn_R$), если для любого $X \in 2^{\mathcal{L}}$ множество $C(X)$ является наименьшим множеством, содержащим X и замкнутым относительно каждого правила из R. Множество правил R будем называть в этом случае *базисом следования* C. Базис R следования C будем называть *секвенциальным* (*стандартным*), если он состоит из секвенций (стандартных секвенций); мы также будем называть его *базисом дедуктивной системы* $\langle \mathcal{L}, C \rangle$.

В работе [3] доказано, что *следование Cn является структурным (стандартным) тогда и только тогда, когда оно имеет секвенциальный (стандартный) базис.*

Два базиса R и R' будем называть *эквивалентными* в том случае, если $Cn_R = Cn_{R'}$. Известно [3], что для каждого следования C существует такое множество правил вывода R, что $C = Cn_R$. Введем следующее обозначение: $Rl(C) = \bigcup\{Q : Cn_Q = C\}$. Элементы множества $Rl(C)$ будем называть правилами следования C. Очевидно, что множество $Rl(C)$ образует базис следования C. Для множества правил вывода R правила из множества $Rl(Cn_R)$ будем называть *правилами выводимыми из множества правил* R.

Множество правил вывода R будем называть *независимым базисом* следования C (дедуктивной системы $\langle \mathcal{L}, C \rangle$), если R является базисом C и для любого правила $\rho \in R$ верно, что $\rho \notin Rl(Cn_{R \setminus \{\rho\}})$. Очевидно, что объединение произвольного множества структурных (финитарных) правил является структурным (финитарным) правилом. Следовательно, если для некоторого структурного (финитарного) следования C мы объединим все структурные (финитарные) правила из $Rl(C)$, то получим структурное (финитарное) правило, которое будет являться независимым базисом этого следования. Таким образом, вопрос о независимости имеет смысл ставить только для секвенциальных базисов. Мы будем рассматривать вопрос о независимости только стандартных базисов. Поэтому далее везде секвенция — это финитарная секвенция, а дедуктивная система — это стандартная дедуктивная система.

2 Теорема о компактности

Здесь мы докажем теорему о дедуктивной компактности, т. е. о том, что в дедуктивных системах правила выводятся из конечного числа посылок. Этот факт доказан для многих частных случаев дедуктивных систем классических, интуиционистских и других логик. Однако автору не встречалось единое доказательство дедуктивной компактности, проведенное для любых дедуктивных систем. Вполне возможно, что это лишь следствие его недостаточной настойчивости в литературных штудиях.

Всякая секвенция $\rho = \alpha_1, \ldots, \alpha_n/\alpha$ определяет частичную функцию $f_\rho : \mathcal{P}_n(\mathcal{L}) \times \mathbf{E} \to \mathcal{L}$, где $\mathcal{P}_n(\mathcal{L})$ — это множество всех n-элементных подмножеств языка $\mathcal{L}$. Поскольку сложилась традиция посылки секвенции записывать в виде списка, то нам будет удобнее сопоставить этой функции функцию $f_\rho : \mathcal{L}^n \times \mathbf{E} \to \mathcal{L}$ такую, что $f_\rho(\alpha_1, \ldots, \alpha_n, \iota) = \alpha$ (где ι — тождественная подстановка) и для любой подстановки ε

$$\varepsilon f_\rho(\alpha_1, \ldots, \alpha_n, \iota) = f_\rho(\alpha_1, \ldots, \alpha_n, \varepsilon) = f_\rho(\varepsilon\alpha_1, \ldots, \varepsilon\alpha_n, \iota) = \varepsilon\alpha.$$

Для этой функции верно, что для любой перестановки σ последовательности $(\alpha_1, \ldots, \alpha_n)$

$$\langle(\alpha_1, \ldots, \alpha_n, \varepsilon), \varepsilon\alpha\rangle \in f_\rho \Leftrightarrow \langle(\sigma(\alpha_1, \ldots, \alpha_n), \varepsilon), \varepsilon\alpha\rangle \in f_\rho.$$

Множество всех таких функций, порожденных секвенциями языка $\mathcal{L}$, обозначим $F(\mathcal{L})$, а его подмножество, состоящее из функций $f : \mathcal{L}^n \times \mathbf{E} \to \mathcal{L}$, обозначим $F_n(\mathcal{L})$.

Будем рассматривать слова в алфавите, состоящем из следующих множеств:

- $\mathcal{SC} = \{f_1^0, f_2^0, \ldots, f_1^n, \ldots\}$ — множество функциональных символов, где верхний индекс i означает, что соответствующий функциональный символ имеет местность $i+1$;
- $\mathcal{F} = \{x_1, \ldots, x_n, \ldots\}$ — множество символов формульных переменных;
- $\mathcal{E} = \{e_1, \ldots, e_n, \ldots\}$ — множество символов подстановок;
- $\{(,)\}$ — множество вспомогательных символов.

Определим по индукции множество *термов вывода* $\mathcal{T}$:

- если $x \in \mathcal{F}$, то $x \in \mathcal{T}$;
- для любого $n \geq 0$ верно, что если $t_1, \ldots, t_n \in \mathcal{T}$, $e \in \mathcal{E}$ и $f^n \in \mathcal{SC}$, то $f^n(t_1, \ldots, t_n, e) \in \mathcal{T}$.

Для термов $t_1, \ldots, t_n$ через $\mathcal{SC}(t_1, \ldots, t_n)$ будем обозначать множество всех функциональных символов, через $\mathcal{F}(t_1, \ldots, t_n)$ — множество всех символов переменных, а через $\mathcal{E}(t_1, \ldots, t_n)$ — множество всех символов подстановок, входящих в эти термы.

Интерпретацией термов будем называть взаимнооднозначное вложение I множества символов, входящих в эти термы, которое удовлетворяет следующим условиям:

- если $x \in \mathcal{F}$, то $I(x) = \alpha \in \mathcal{L}$;
- если $f^n \in \mathcal{SC}$, то $I(f^n) \in F_n(\mathcal{L})$;
- если $e \in \mathcal{E}$, то $I(e) = \varepsilon \in \mathbf{E}$;
- для любого $n \geq 0$ верно, что если $t_1, \ldots, t_n \in \mathcal{T}$, $e \in \mathcal{E}$ и $f^n \in \mathcal{SC}$, то $I(f^n(t_1, \ldots, t_n, e)) = I(f^n)(I(t_1), \ldots, I(t_n), I(e))$.

Формулу α будем называть *значением терма* t (или его *интерпретантой*) при интерпретации I, если $I(t) = \alpha$. Для произвольного множества символов S и интерпретации I через $I(S)$ будем обозначать множество интерпретант символов из S.

Пусть Q — некоторое множество секвенций. Введем операцию $T_Q : \mathcal{P}(L) \to \mathcal{P}(L)$ следующим образом: $\alpha \in T_Q(X)$ если и только если существует такой терм вывода t и такая интерпретация I терма t, что при ней все формульные переменные этого терма принимают значения из X, все его функциональные символы принимают значения из Q и $\alpha = I(t)$. Операцию T_Q мы будем называть *операцией термального замыкания по множеству секвенций* Q.

Следующая лемма имеет техническое значение.

ЛЕММА 1. *Пусть* $t_1, \ldots, t_n$ *— термы,* $I_1, \ldots, I_n$ *— интерпретации такие, что* $\alpha_1 = I_1(t_1), \ldots, \alpha_n = I_n(t_n)$. *Тогда существуют термы* $t'_1, \ldots, t'_n$ *и интерпретация* I *такие, что* $\alpha_1 = I(t'_1), \ldots, \alpha_n = I(t'_n)$, *причем множество значений интерпретации* I *является объединением множеств значений интерпретаций* $I_1, \ldots, I_n$.

Доказательство. Если термы $t_1, \ldots, t_n$ не содержат вхождения одинаковых символов, кроме вспомогательных, или одинаковые символы в интерпретациях $I_1, \ldots, I_n$ интерпретируются одинаково, то полагаем $I = \bigcup\limits_{i=1}^{n} I_i$ и $t'_i = t_i$. Пусть некоторый символ l в интерпретациях $I_1, \ldots, I_n$ имеет m различных значений $(m > 1)$. Тогда заменяем каждое его вхождение в каждый из термов на один из символов $l'_1, \ldots, l'_m$ из того же множества символов алфавита, которому принадлежит l, не встречающихся ни в одном терме $t_1, \ldots, t_n$ (если $l \in \mathcal{SC}$, то местность новых символов совпадает с местностью l). Все вхождения l, имеющие одинаковое — скажем, j-ое значение, — заменяем символом l'_j. Символ l'_j интерпретируем так же, как и тот, который заменяли, т. е. полагаем $I'_i(l'_j) = I_i(l)$.

Также может оказаться, что входящие в разные термы разные символы, принадлежащие одному и тому же множеству символов алфавита, в разных интерпретациях принимают одно и то же значение. Тогда мы заменяем все вхождения таких символов на один и тот же символ и задаем новые интерпретации I''_i так, что каждая из них присваивает этому символу значение замененных символов.

В результате все одинаковые символы термов $t''_1, \ldots, t''_n$ при интерпретациях $I''_1, \ldots, I''_n$ будут интерпретироваться одинаково.

Тогда полагаем $I = \bigcup\limits_{i=1}^{n} I''_i$ и $t'_i = t''_i$. Q.E.D.

УТВЕРЖДЕНИЕ 2. *Для любого множества секвенций Q верно, что $T_Q = Cn_Q$.*

Доказательство. 1) Покажем, что T_Q является операцией присоединения следствий.

Так как формульная переменная является термом вывода, то $X \subseteq T_Q(X)$. Покажем, что $T_Q(T_Q(X)) = T_Q(X)$. Включение $T_Q(X) \subseteq T_Q(T_Q(X))$ выполняется по определению операции термального замыкания, поэтому нам достаточно доказать, что $T_Q(T_Q(X)) \subseteq T_Q(X)$.

Пусть $\alpha \in T_Q(T_Q(X))$. Тогда существует такой терм t и такая интерпретация I, что $I(t) = \alpha$, $I(\mathcal{SC}(t)) \subseteq Q$ и $I(\mathcal{F}(t)) \subseteq T_Q(X)$. Индукцией по построению терма докажем, что $\alpha \in T_Q(X)$.

Пусть $t = x_i$, тогда $I(x_i) = \alpha \in T_Q(X)$.

Пусть $t = f^n(t_1, \ldots, t_n, e)$ и верно, что существуют термы $t'_1, \ldots, t'_n$ и их интерпретации $I_1, \ldots, I_n$ такие, что для любого i $(1 \le i \le n)$ $I_i(t'_i) = I(t_i)$, причем $I_i(\mathcal{SC}(t'_i)) \subseteq Q$, а $I_i(\mathcal{F}(t'_i)) \subseteq X$. Тогда, в силу леммы 6, существуют термы $t''_1, \ldots, t''_n$ и интерпретация I' такие, что для любого i $(1 \le i \le n)$ $I_i(t'_i) = I'(t''_i)$, причем область значений интерпретации I' совпадает с объединением областей значений интерпретаций $I_1, \ldots, I_n$. Построим интерпретацию I'' следующим образом. Она совпадает с I' для всех символов из термов $t''_1, \ldots, t''_n$. Пусть $g^n \in \mathcal{SC}$, и $g^n \notin \mathcal{SC}(t''_1, \ldots, t''_n)$, и $e_k \in \mathcal{E}$, и $e_k \notin \mathcal{E}(t''_1, \ldots, t''_n)$, тогда положим $I''(g^n) = I(f^n)$ и $I''(e_k) = I(e)$. Рассмотрим значение терма $t' = g^n(t''_1, \ldots, t''_n, e_k)$ при интерпретации I''.

$$
\begin{aligned}
I''(t') &= I''(g^n(t''_1, \ldots, t''_n, e_k)) = \\
&= I''(g^n)(I''(t''_1), \ldots, I''(t''_n), I''(e_k)) = \\
&= I(f^n)(I'(t''_1), \ldots, I'(t''_n), I(e)) = \\
&= I(f^n)(I_1(t'_1), \ldots, I_n(t'_n), I(e)) = \\
&= I(f^n)(I(t_1), \ldots, I(t_n), I(e)) = \\
&= I(t) = \alpha.
\end{aligned}
$$

И при этом $I''(\mathcal{SC}(t')) \subseteq Q$ и $I''(\mathcal{F}(t')) \subseteq X$. Значит, $\alpha \in T_Q(X)$.

Теперь покажем, что если $Y \subseteq X$, то $T_Q(Y) \subseteq T_Q(X)$. Если $\alpha \in T_Q(Y)$, то существуют такой терм t и интерпретация I, что $I(t) = \alpha$ и $I(\mathcal{F}(t)) \subseteq Y$. Тогда $I(\mathcal{F}(t)) \subseteq X$, и значит, $\alpha \in T_Q(X)$.

2) Докажем, что для любого множества формул X имеет место следующее включение: $T_Q(X) \subseteq Cn_Q(X)$. Доказывать будем индукцией по строению терма.

Если формула $\alpha \in X$, то очевидно, что она принадлежит обоим множествам. Рассмотрим случай, когда $\alpha \notin X$.

Пусть $\alpha \in T_Q(X)$, поскольку существует интерпретация I терма $f^n((t_1, \ldots, t_n), e)$ (где $t_1, \ldots, t_n$ — термы) такая, что $I(f^n) \in Q$ и для любого i, $I(t_i) \in Cn_Q(X)$ (по индукционному предположению). Следовательно, во множестве Q существует такая секвенция $\rho = \gamma_1, \ldots, \gamma_n/\beta$, что для некоторой подстановки $\varepsilon = I(e)$ выполнено, что $\varepsilon\beta = \alpha$ и для любого i, $\varepsilon\gamma_i = I(t_i) \in Cn_Q(X)$. Множество $Cn_Q(X)$ замкнуто относительно секвенции ρ, поэтому из того, что $\langle\{\varepsilon\gamma_1, \ldots, \varepsilon\gamma_n\}, \varepsilon\beta\rangle \in \rho$, и для любого i верно, что $\varepsilon\gamma_i \in Cn_Q(X)$, следует, что $\alpha \in Cn_Q(X)$.

3) Докажем, что для любого множества формул X верно, что множество $T_Q(X)$ замкнуто относительно любого правила из Q.

Пусть в Q существует такая секвенция $\varnothing/\beta$, что для некоторой подстановки ε $\varepsilon\beta = \alpha$. Тогда существует интерпретация I терма $f^0(e)$ такая, что $I(f^0) = \varnothing/\beta$, $I(e) = \varepsilon$, и значит, формула $\alpha = I(f^0(e))$. Следовательно, $\alpha \in T_Q(X)$.

Пусть во множестве Q существует секвенция $\rho = \gamma_1, \ldots, \gamma_n/\beta$ такая, что для некоторой подстановки ε выполнено, что $\varepsilon\beta = \alpha$ и для любого i $\varepsilon\gamma_i \in T_Q(X)$. Следовательно, существуют термы $t_1, \ldots, t_n$ и их интерпретации $I_1, \ldots, I_n$ такие, что верны равенства $\varepsilon\gamma_1 = I_1(t_1), \ldots, \varepsilon\gamma_n = I_n(t_n)$, причем функциональные символы термов интерпретируются элементами множества Q, а символы формульных переменных принимают значения из множества X. Тогда, в силу леммы 6, существуют термы $t'_1, \ldots, t'_n$ и интерпретация I' такие, что $\varepsilon\gamma_1 = I'(t'_1), \ldots, \varepsilon\gamma_n = I'(t'_n)$, причем область значений интерпретации I' совпадает с объединением областей значений интерпретаций $I_1, \ldots, I_n$. Если секвенция ρ входит в область значений интерпретации I', то пусть f^n — функциональный символ такой, что $I'(f^n) = \rho$. Если секвенция ρ не входит в область значений I', то пусть f^n — функциональный символ, не входящий в термы $t'_1, \ldots, t'_n$, и пусть I — такая интерпретация, что она совпадает с I' для всех символов из термов $t'_1, \ldots, t'_n$, а также $I(f^n) = \rho$ и $I(e) = \iota$. Тогда $\varepsilon\gamma_1 = I(t'_1)$, …, $\varepsilon\gamma_n = I(t'_n)$, и значит,

$$I(f^n(t'_1, \ldots, t'_n, e)) = I(f^n)(I(t'_1), \ldots, I(t'_n), I(e)) = \\ = f_\rho(\varepsilon\gamma_1, \ldots, \varepsilon\gamma_n, \iota) = f_\rho(\gamma_1, \ldots, \gamma_n, \varepsilon) = \varepsilon\beta = \alpha.$$

Значит, $\alpha \in T_Q(X)$.

Таким образом, T_Q — это операция следования, замкнутая относительно всех правил из Q. Причем, в силу определения (стр. 80), для любого множества формул X множество $Cn_Q(X)$ является минимальным. Тогда из того, что $T_Q(X) \subseteq Cn_Q(X)$, следует, что $T_Q(X) = Cn_Q(X)$, и значит, $T_Q = Cn_Q$. Q.E.D.

Известно, что верно следующее утверждение ([3]).

УТВЕРЖДЕНИЕ 3. *Правило $\rho \in Rl(C)$, если и только если для любых X и α верно, что если $(X, \alpha) \in \rho$, то $\alpha \in C(X)$.*

Исходя из этого, несложно доказать следующее

УТВЕРЖДЕНИЕ 4. *Для любого множества секвенций Q верно, что секвенция $R = X/\alpha \in Rl(Cn_Q)$ тогда и только тогда, когда существуют такие терм t и его интерпретация I, что все функциональные символы терма интерпретируются элементами множества Q, а все формульные переменные интерпретируются формулами из X и $\alpha = I(t)$.*

Доказательство. ($\Rightarrow$) Как следует из утверждения 3 и определения секвенции, $\rho = X/\alpha \in Rl(Cn_Q)$ тогда и только тогда, когда для любой подстановки ε верно, что $\varepsilon\alpha \in Cn_Q(\varepsilon X) = T_Q(\varepsilon X)$. Значит, для тождественной подстановки имеем, что $\alpha \in T_Q(X)$, а по определению термального замыкания это и означает, что такой терм и интерпретация существуют.

($\Leftarrow$) Пусть такой терм и такая интерпретация существуют. Тогда $\alpha \in T_Q(X) = Cn_Q(X)$. Докажем, что в этом случае для любой подстановки ε $\varepsilon\alpha \in T_Q(\varepsilon X) = Cn_Q(\varepsilon X)$. Если $\alpha \in X$, то это очевидно.

Допустим, что $\alpha \notin X$. Пусть терм t имеет вид $f^n(t_1, \ldots, t_n, e)$ (где $t_1, \ldots, t_n$ — термы) и существует интерпретация I такая, что $I(t) = \alpha$, $I(\mathcal{F}(t)) \subseteq X$ и $I(f^n) \in Q$. Следовательно, во множестве Q существует такая секвенция $\rho = \gamma_1, \ldots, \gamma_n/\beta$, что для некоторой подстановки $\varepsilon_1 = I(e)$ выполнено, что для любого i, где $1 \leq i \leq n$, $\varepsilon_1\gamma_i = I(t_i) \in Cn_Q(X)$ и $\varepsilon_1\beta = \alpha \in Cn_Q(X)$. Тогда для любого i и для любой подстановки ε $\varepsilon I(t_i) \in Cn_Q(\varepsilon X)$ по индукционному предположению. Так как ρ — секвенция, то из того, что $\langle\{\varepsilon_1\gamma_1, \ldots, \varepsilon_1\gamma_n\}, \varepsilon_1\beta\rangle \in \rho$, следует, что для любой подстановки ε имеет место, что $\langle\{\varepsilon\varepsilon_1\gamma_1, \ldots, \varepsilon\varepsilon_1\gamma_n\}, \varepsilon\varepsilon_1\beta\rangle \in \rho$. Так как $\rho \in Q$ и $\varepsilon I(t_i) = \varepsilon\varepsilon_1\gamma_i \in Cn_Q(X)$, то отсюда следует, что $\varepsilon\varepsilon_1\beta \in Cn_Q(\varepsilon X)$, значит, $\varepsilon\alpha \in Cn_Q(\varepsilon X)$. Q.E.D.

Как следствие получаем теорему о компактности.

ТЕОРЕМА 5. *(О компактности) Пусть стандартная секвенция ρ выводима из множества стандартных секвенций R, тогда существует такое конечное подмножество $Q \subseteq R$, что ρ выводимо из Q.*

Доказательство. Если $\rho \in R$, то это очевидно.

Пусть $\rho \notin R$. Если секвенция ρ выводима из множества секвенций R, то, в силу предыдущего утверждения, существует соответствующий терм t и интерпретация I. Пусть множество $Q = \{\mu \in R | \exists f \in \mathcal{SC}(t)(\mu = I(f))\}$, тогда ρ выводимо из Q и $Q \subseteq R$. Так как число различных функциональных символов в терме конечно, то множество Q конечно. Q.E.D.

3 Независимая аксиоматизируемость и свойства решетки дедуктивных систем

Обозначим через $\mathcal{C}_\mathcal{L}$ множество всех операций присоединения следствий языка $\mathcal{L}$. Определим на этом множестве отношение $\leq$ следующим образом. Положим, что $C_1 \leq C_2$, если и только если для любого множества формул X верно, что $C_1(X) \subseteq C_2(X)$. Если $C_1 \leq C_2$, то будем говорить, что C_1 *не сильнее*, чем C_2, а C_2 *не слабее*, чем C_1. При этом верно следующее утверждение ([3]).

УТВЕРЖДЕНИЕ 6. *Произвольное следование C_1 не сильнее, чем произвольное следование C_2, если и только если верно, что $Rl(C_1) \subseteq Rl(C_2)$.*

Нетрудно заметить, что введенное выше отношение $\leq$, является отношением частичного порядка.

Напомним некоторые основные понятия теории частично упорядоченных множеств. Пусть на множестве A определен частичный порядок $\leq$. Подмножество $B \subseteq A$ будем называть *цепью*, если верно, что $\forall x, y \in A((x \leq y \vee y \leq x)$. Элемент $x \in A$ будем называть *верхней* (*нижней*) *гранью множества* B, если верно, что $\forall y \in B(y \leq x)(\forall y \in B(x \leq y))$. Элемент $x \in A$ будем называть *точной верхней гранью* (*супремумом*) *множества* B (соответственно, *точной нижней гранью* (*инфинумом*) *множества* B), если он является наименьшей (соответственно, наибольшей) верхней (нижней) гранью этого множества, т. е. для x верно, что $\forall z \in A(\forall y \in B(y \leq z) \to x \leq z)$ (соответственно, $\forall z \in A(\forall y \in B(z \leq y) \to z \leq x))$. Элемент $x \in B \subseteq A$ будем называть *максимальным* (*минимальным*) *во множестве* B, если верно что, $\forall y \in B(y \neq x \to x \nleq y)(\forall y \in B(y \neq x \to y \nleq x))$. В цепи ее максимальный (минимальный) элемент единственен и является ее супремумом (инфинумом). Частично упорядоченное множество будем называть *полной решёткой*, если любое его подмножество имеет инфинум и супремум.

Обозначим через $\mathcal{C}^s_{\mathcal{L}}$ частично упорядоченное множество всех стандартных следований данного языка $\mathcal{L}$. Известно, что оно образует полную решетку ([4]). Порядок $\leq$, введенный на следованиях фиксированного языка, индуцирует изоморфный порядок на множестве $D^s_{\mathcal{L}}$ всех дедуктивных систем данного языка. А именно считаем, что $\langle \mathcal{L}, C_1 \rangle \leq \langle \mathcal{L}, C_2 \rangle$, если и только если $C_1 \leq C_2$. Причем решетка $D^s_{\mathcal{L}}$ изоморфна решетке $\mathcal{C}^s_{\mathcal{L}}$, поэтому в дальнейшем мы их различать не будем.

Наше доказательство будет опираться на положение, известное как *лемма Цорна.* Будем говорить, что элемент $x \in A$ *мажорируется* элементом $y \in A$, если $x \leq y$.

ЛЕММА 7. *(Лемма Цорна) Каждый элемент непустого частично упорядоченного множества A, в котором каждая цепь B имеет верхнюю границу (говорят, что A индуктивно упорядочено), мажорируется некоторым максимальным во множестве A элементом.*

Положим, что $a < b \rightleftharpoons a \leq b \wedge a \neq b$. *Интервалом* частично упорядоченного множества A, заданным элементами $a, b \in A$, будем называть множество $(a, b) = \{x \in a \mid a < x < b\}$. Элемент $b \in A$ будем называть *непосредственным предшественни-*

ком элемента $a \in A$, если $a < b$ и $(a, b) = \varnothing$. Следование будем называть *финитно базируемым*, если оно имеет конечный базис.

ТЕОРЕМА 8. *(Односторонний критерий независимой базируемости) Пусть следование C_2 имеет независимый базис. Тогда для любого интервала (C_1, C_2) решётки $\mathcal{C}^s_{\mathcal{L}}$ верно, что если следование C_1 финитно базируемо, то следование C_2 имеет в этом интервале непосредственного предшественника.*

Доказательство. Пусть R — независимый базис следования C_2 и Q — конечный базис следования C_1. Тогда, в силу утверждения 6, верно, что $Q \subseteq Rl(C_2)$. По теореме о компактности, всякая секвенция множества Q выводима из некоторого конечного подмножества секвенций $S \subseteq R$. Положим, что множество $R \setminus S = \{\rho_1, \ldots, \rho_n, [\ldots]\}$. Обозначим через T_i следование с базисом $S \cup \{\rho_1, \ldots, \rho_{i-1}, \rho_{i+1}, \ldots, \rho_n, [\ldots]\}$. Если интервал (T_i, C_2) пуст, то следование T_i и является непосредственным предшественником следования C_2. Если же этот интервал не пуст, то всякая цепь этого интервала входит в состав некоторой максимальной в этом интервале цепи. В силу полноты решетки для любой максимальной цепи существует супремум всех ее элементов — следование C_{max}, — базис которого является объединением базисов всех элементов цепи. Таким образом, если секвенция ρ_i входит хоть в какой-нибудь базис следования C_{max}, то она выводима из некоторого конечного множества секвенций, входящих в базис некоторого следования C из данной максимальной цепи интервала (T_i, C_2). Но в этом случае $C = C_2$, и значит, $C_2 \in (T_i, C_2)$. Противоречие. Таким образом, $\rho_i \notin Rl(C_{max})$, и значит, $C_{max} < C_2$.

Докажем, что интервал $(C_{max}, C_2) = \varnothing$. Допустим, что C_{max} не является непосредственным предшественником следования C_2, т. е. существует следование C, такое, что $C_{max} < C < C_2$. В этом случае цепь, имеющая своим супремумом следование C_{max}, не является максимальной. Q.E.D.

4 Абсолютная независимая базируемость и относительная независимая базируемость

Базис следования будем также называть *абсолютным базисом* этого следования. Множество секвенций Q будем называть *от-*

носительным базисом следования C_2 *над следованием* C_1, если $C_2 = Cn_{Q \cup Rl(C_1)}$. Заметим, что если множество правил Q является базисом C_2 над C_1 и множество правил R является базисом следования C_1, то верно, что $C_2 = Cn_{Q \cup R}$. Независимое множество секвенций будем также называть *абсолютно независимым.* Множество секвенций Q будем называть *независимым над множеством правил* R, если для любой секвенции $\rho \in Q$ верно, что $\rho \notin Rl(Cn_{R \cup (Q \setminus \{\rho\})})$. Множество секвенций Q будем называть *независимым над следованием* C, если для любой секвенции $\rho \in Q$ верно следующее: $\rho \notin Rl(Cn_{Rl(C) \cup (Q \setminus \{\rho\})})$. Заметим, что и в этом случае, если множество правил R является базисом следования C и множество правил Q независимо над C, то оно независимо и над множеством R. Абсолютный абсолютно независимый базис следования будем называть его *абсолютно независимым базисом.* Множество секвенций Q будем называть *относительным независимым базисом следования* C_2 *над следованием* C_1, если множество Q является базисом следования C_2 над C_1 и оно независимо над C_1. Рассмотрим вопрос о взаимосвязи абсолютной и относительной независимыми базируемостями.

Нетрудно заметить, что верно следующее утверждение.

УТВЕРЖДЕНИЕ 9. *Если следование* C_1 *финитно базируемо и следование* C_2 *имеет над* C_1 *независимый базис, то* C_2 *является абсолютно независимо базируемым.*

Доказательство. Пусть множество секвенций R является финитным базисом следования C_1 и не пустое множество секвенций Q образует относительный независимый базис следования C_2 над C_1. Поскольку $C_1 < C_2$, то $R \subset Rl(Cn_{R \cup Q})$. Как замечено выше, $C_2 = Cn_{Q \cup R}$. Рассмотрим множество секвенций $S = \{\rho \mid \rho \in R \wedge \rho \notin Rl(Cn_{Q \cup R \setminus \{\rho\}})\}$. В силу того, что $S \cup Q \subseteq R \cup Q$, имеем включение $Cn_{S \cup Q} \subseteq Cn_{R \cup Q}$. С другой стороны, все правила из множества $R \cup Q \in Cn_{S \cup Q}$, и следовательно верно, что $Cn_{R \cup Q} \subseteq Cn_{S \cup Q}$. Значит, $Cn_{S \cup Q} = Cn_{R \cup Q} = C_2$. Таким образом, множество $S \cup Q$ — абсолютный базис следования C_2.

Докажем независимость этого множества. Допустим, что некоторая принадлежащая ему секвенция ρ выводима из множества секвенций $(S \cup Q) \setminus \{\rho\}$. Так как $Cn_{S \cup Q} = Cn_{R \cup Q}$, получаем, что

$Cn_{(S\cup Q)\setminus\{\rho\}} = Cn_{(R\cup Q)\setminus\{\rho\}}$. Следовательно, $\rho \in Rl(Cn_{(R\cup Q)\setminus\{\rho\}})$. Тогда секвенция $\rho \notin S$, в силу определения этого множества, и $\rho \notin Q$, в силу независимости последнего над C_1. Из того, что получено противоречие, следует, что наше предположение о выводимости секвенции ρ неверно.

Таким образом, множество секвенций $S\cup Q$ является абсолютно независимым базисом следования C_2. Q.E.D.

УТВЕРЖДЕНИЕ 10. *Если C_2 — абсолютно независимо базируемое следование и для финитно базируемого следования C_1 верно, что оно не сильнее следования C_2, то C_2 независимо базируемо над C_1.*

Доказательство. Если $C_1 = C_2$, то утверждение очевидно. Пусть $C_1 \neq C_2$ и конечное множество секвенций R — это базис следования C_1, а абсолютно независимое множество секвенций Q — это базис следования C_2.

1) Допустим, что множество Q конечно. Рассмотрим множество секвенций $P = Q \setminus Rl(C_1)$. Если P независимо над C_1, то P — искомый базис. Если же это не так, то определим следующую последовательность множеств. Перенумеруем все секвенции из списка P натуральными числами. Допустим, что список $P = \langle \rho_0, \ldots \rho_{m-1}\rangle$. Положим, что $S_0 = P$. Далее, для любого натурального i положим

$$S_{i+1} = \begin{cases} S_i \setminus \{\rho_i\}, & \text{если } \rho_i \in Rl(Cn_{R\cup(S_i\setminus\{\rho_i\})}), \\ S_i, & \text{если } \rho_i \notin Rl(Cn_{R\cup(S_i\setminus\{\rho_i\})}). \end{cases}$$

Множество S_m будет независимым над C_1 и не будет пустым, так как $C_1 \neq C_2$. Все секвенции множества Q выводимы из $S_m \cup R$, и значит, $C_2 \leq Cn_{S_m\cup R}$. Так как $C_1 \leq C_2$, то $S_m \cup R \subseteq Rl(C_2)$, и значит, $Cn_{S_m\cup R} \leq C_2$. Таким образом, $C_2 = Cn_{S_m\cup R}$. Следовательно, секванции списка S_m будут образовывать искомый базис.

2) Пусть множество Q бесконечно. В силу теоремы о компактности и конечности множества R существует такое минимальное по включению конечное множество секвенций P, что $P \subset Q$ и $R \subseteq Rl(Cn_P)$, и таким образом, $C_1 \leq Cn_P$. Множество секвенций $T = Q \setminus P$ независимо над C_1, так как это множество

независимо над Cn_P, а $C_1 \leq Cn_P$. Таким образом, T — независимый базис следования C_2 над Cn_P. Если $Cn_P = C_1$, то T — искомый базис.

Пусть $Cn_P \neq C_1$. Рассмотрим множество $P \cup T = Q$. Допустим, что оно не является независимым над C_1, т. е. хотя бы одна секвенция, скажем ρ, выводима из остальных. Тогда для этой секвенции верно одно из двух: $\rho \in T$ или $\rho \in P$.

Пусть $\rho \in T$. Тогда $\rho \in Rl(Cn_{(T \setminus \{\rho\}) \cup P \cup Rl(C_1)})$. В силу того, что $R \subseteq Rl(Cn_P)$, получаем, что $\rho \in Rl(Cn_{(T \setminus \{\rho\}) \cup Rl(Cn_P)})$. Это противоречит абсолютной независимости Q. Следовательно, $\rho \notin T$, и значит, $\rho \in P$. Тогда положим $S_0 = P$. В силу конечности множества P мы можем построить систему множеств $S_0, \ldots, S_n$, аналогичную той, которая построена в пункте 1) данного доказательства. Множество $S_n \cup T$ будет независимым над C_1. Так как все секвенции из $(P \setminus S_n) \subseteq Rl(Cn_{S_n \cup T \cup R})$, то $C_2 = Cn_{S_n \cup T \cup Rl(C_1)}$. Таким образом, множество $S_n \cup T$ и будет являться искомым независимым базисом C_2 над C_1. Q.E.D.

Из утверждений 9 и 10 непосредственно следует

ТЕОРЕМА 11. *Следование C_2 имеет абсолютный независимый базис тогда и только тогда, когда оно имеет независимый базис над любым финитно базируемым следованием, которое не сильнее C_2.*

Таким образом, свойства абсолютной независимой базируемости и относительной независимой базируемости над финитно базируемыми дедуктивными системами оказываются совпадающими.

5 Заключение (дедуктивные системы и логики)

Логикой языка $\mathcal{L}$ будем называть множество формул, замкнутое относительно любой подстановки и некоторого множества секвенций, называемых *постулированными* для данной логики правилами вывода. Рассмотрим взаимосвязь между так понимаемыми логиками и дедуктивными системами. Известно, что для всякой структурной операции присоединения следствий C множество $C(\varnothing)$ является замкнутым относительно любой подстановки, и значит, является логикой в вышеуказанном смысле. Постулированными для этой логики правилами вывода могут считаться секвенции из любого базиса следования C. Эту логику будем называть *базовой логикой* следования C.

Насколько известно автору, вопросы о взаимосвязи свойств дедуктивных систем и свойств их базовых логик недостаточно изучены. Касается это и свойства независимости.

Так, неизвестно, верно ли, что *если следование имеет абсолютно независимый базис, то и его базовая логика независимо аксиоматизируема*. Не исследована и верность обратного утверждения, не говоря уже о взаимосвязи свойств относительных аксиоматизируемости и базируемости. Таким образом, представляется интересным изучить взаимосвязи между свойствами логик и дедуктивных систем, поскольку это позволит связать между собой оба «дополнительных» подхода к описанию логики.

Литература

[1] *Czelakowski J. and Malinowski G.* Key Notions of Tarski's Methodology of Deductive Systems // Stadia Logica. 1985. V. 44. №4. P. 321-351.

[2] *Карпенко А.С.* Предмет логики в свете основных тенденций ее развития // Логические исследования. Вып. 11. 2004. С. 149-171.

[3] *Wojcicki R.* Matrix Approach In Methodology Of Sentential Calculi // Studia Logica. 1973. V. 32. P. 7-37.

[4] *Wojcicki R.* Theory of Logical Calculi: Basic Theory of Consequence Operations. Dordrecht: Kluwer, 1988.

$\boldsymbol{n}$-значные матрицы для классической логики высказываний

Л. Ю. Девяткин

abstract. This paper is devoted to the mutiple-valued logical matrices in which the class of tautologies is one of a classical propositional logic. A class of such matrices with a classical consequence relation is described. Moreover several classes of multiple-valued matrices of the type in question with a non-classical consequence relation are considered.

Ключевые слова: многозначные логики, классическая логика высказываний, логические матрицы, отношение логического следования.

Существует множество примеров логических матриц с трехэлементным множеством-носителем, являющихся характеристическими для классической логики [2, 4]. Более того, матрицы для многих известных многозначных логик содержат такие матрицы в качестве фрагментов. Особый интерес представляет тот факт, что существуют многозначные логики, равные классической по классу тавтологий, но с неклассическим отношением логического следования [3]. В настоящей работе будут описаны несколько обширных классов матриц, обладающих интересующими нас свойствами.

При формулировке и доказательстве теорем мы использовали пропозициональный язык $L_{\supset\neg}$.

Алфавит языка $L_{\supset\neg}$ содержит в точности следующие символы:

- Пропозициональные переменные: $\mathbf{p}$, $\mathbf{q}$, $\mathbf{r}$, $\mathbf{s}$, $\mathbf{p}_1$, $\mathbf{q}_1$, $\mathbf{r}_1$, $\mathbf{s}_1$, $\ldots$, $\mathbf{p}_n$, $\mathbf{q}_n$, $\mathbf{r}_n$, $\mathbf{s}_n$;
- пропозициональные связки: $\supset$, $\neg$;
- технические символы:), (.

Определение $L_{\supset\neg}$-формулы:

- Если $\mathbf{A}$ есть пропозициональная переменная, то $\mathbf{A}$ есть $L_{\supset\neg}$-формула;
- если $\mathbf{A}$ и $\mathbf{B}$ есть $L_{\supset\neg}$-формулы, то $(\mathbf{A} \supset \mathbf{B})$ и $(\neg\mathbf{A})$ есть $L_{\supset\neg}$-формулы;
- ничто иное не есть $L_{\supset\neg}$-формула.

Мы будем рассматривать матрицы вида $M =< U, \supset^*, \neg^*, D >$, где U – непустое множество истинностных значений, $\supset^*$ – бинарная операция на U, $\neg^*$ – унарная операция на U, D – множество значений, выделенных в M, причем $D \subset U$ и $\{0\} \notin D$.

В такой формулировке матрица для классической логики будет иметь следующий вид: $M_2 =< \{1, 0\}, \supset^2, \neg^2, \{1\} >$, где функции $\supset^2$ и $\neg^2$ – классические импликация и отрицание.

Оценку в матрице M определим как отображение множества пропозициональных переменных языка $L_{\supset\neg}$ в U.

Значение $L_{\supset\neg}$-формулы в матрице M при оценке v определяется индукцией по построению $L_{\supset\neg}$-формулы:

- $|\mathbf{p}|^M_v = v(\mathbf{p})$, если $\mathbf{p}$ есть пропозициональная переменная;
- если $\mathbf{B}$ и $\mathbf{C}$ есть $L_{\supset\neg}$-формулы, то $|(\mathbf{B} \supset \mathbf{C})|^M_v = |\mathbf{B}|^M_v \supset^* |\mathbf{C}|^M_v$;
- если $\mathbf{B}$ есть $L_{\supset\neg}$-формула, то $|(\neg\mathbf{B})|^M_v = \neg^*|\mathbf{B}|^M_v$.

Если существует оценка v в M такая, что $|\mathbf{A}|^M_v \in D$, будем говорить, что $\mathbf{A}$ выполнима в M.

Формула $\mathbf{A}$ называется общезначимой в M, е.т.е при всякой оценке v в M $\mathbf{A}$ принимает выделенное значение.

Классическое отношение логического следования определим следующим образом: в M из множества формул $\mathbf{\Gamma}$ логически следует формула $\mathbf{B}$ ($\mathbf{\Gamma} \models \mathbf{B}$), е.т.е не существует такой оценки v в M, что каждая формула $\mathbf{A}$ из $\mathbf{\Gamma}$ принимает выделенное значение и $\mathbf{B}$ не принимает выделенное значение. Будем говорить, что отношение логического следования в некоторой матрице является классическим, когда в этой матрице заключение логически следует из посылок в том и только том случае, когда оно логически следует из посылок в матрице для классической логики.

Под многозначным изоморфом классической пропозициональной логики будем понимать такую матрицу $M' =< U, \subset', \neg', D >$, что U' содержит не менее трех элементов и класс формул, общезначимых в M', равен классу формул, общезначимых в M_2. Изоморф M' называется нормальным, если отношение логического следования в M' является классическим. Изоморф называется C-расширяющим, если операции $\subset'$ и $\neg'$ совпадают с $\supset^2$ и $\neg^2$ соответственно на множестве $\{1, 0\}$.

При формулировке условий, которым должна отвечать матрица, чтобы являться изоморфом классической логики высказываний, и их доказательстве широко использовался подход, предложенный В.М. Поповым [1]. В его основе лежат понятия замещения оценки и отображения многоэлементного множества-носителя некоторой матрицы M на множество-носитель матрицы M_2 – $\{1, 0\}$.

Для всякого отображения v множества всех пропозициональных переменных языка $L_{\supset\neg}$ в многоэлементное множество-носитель U некоторой матрицы $M' =< U, \subset', \neg', D >$ назовем k-замещением отображения v такое отображение w множества всех пропозициональных переменных в $\{0, 1\}$, что для всякой пропозициональной переменной $\mathbf{p}$

$$w(\mathbf{p}) = \begin{cases} 1, \text{ если} v(\mathbf{p}) \in D; \\ 0, \text{ если} v(\mathbf{p}) \notin D. \end{cases}$$

Можно доказать, что для всякого отображения множества всех пропозициональных переменных в U существует единственное k-замещение этого отображения. Обозначим через $\tilde{v}$ k-замещение отображения v.

Определим φ_k как отображение множества U на множество $\{0, 1\}$ такое, что $\varphi_k(x) = 1$, если $x \in D$ и $\varphi_k(x) = 0$, если $x \notin D$.

ЛЕММА 1. *Пусть $M_n^m =< U, \supset_n, \neg_n, D >$ - n-элементная матрица с m выделенных значений, а $\supset_n$ и $\neg_n$ отвечают условиям:*

- *$x \supset_n y \in D$, е.т.е $x \notin D$ или $y \in D$;*
- *$\neg_n x \in D$, е.т.е $x \notin D$.*

Тогда $\forall \boldsymbol{A} \forall v$: если $\boldsymbol{A}$ есть $L_{\supset\neg}$-формула и v – оценка в M_n^m, то $\varphi_k |\boldsymbol{A}|_v^{M_n^m} = |\boldsymbol{A}|_{\tilde{v}}^{M_2}$.

Доказательство. Докажем Лемму индукцией по построению формулы.

Базис. Пусть $\mathbf{A}$ – пропозициональная переменная.

1. Неверно, что $\forall\mathbf{A}\forall v$: если $\mathbf{A}$ есть $L_{\supset\neg}$-формула и v – оценка в M_n^m, то $\varphi_k|\mathbf{A}|_v^{M_n^m} = |\mathbf{A}|_{\tilde{v}}^{M_2}$ (допущение).

2. $\exists\mathbf{A}\exists v$: $\mathbf{A}$ есть $L_{\supset\neg}$-формула и v – оценка в M_n^m и $\varphi_k|\mathbf{A}|_v^{M_n^m} \neq |\mathbf{A}|_{\tilde{v}}^{M_2}$ (из (1)).

3. Пусть $\mathbf{A}^*$ есть $L_{\supset\neg}$-формула и v^* – оценка в M_n^m и $\varphi_k|\mathbf{A}^*|_{v^*}^{M_n^m} \neq |\mathbf{A}^*|_{\tilde{v^*}}^{M_2}$ (из (2), исключение кванторов).

4. $\varphi_k|\mathbf{A}^*|_{v^*}^{M_n^m} \neq |\mathbf{A}^*|_{\tilde{v^*}}^{M_2}$ (из (3)).

5. $\varphi_k|\mathbf{A}^*|_{v^*}^{M_n^m} = 1$ и $|\mathbf{A}^*|_{\tilde{v^*}}^{M_2} = 0$ или $\varphi_k|\mathbf{A}^*|_{v^*}^{M_n^m} = 0$ и $|\mathbf{A}^*|_{\tilde{v^*}}^{M_2} = 1$ (из (4), в силу определений φ_k и $\tilde{v^*}$).

6. $\varphi_k|\mathbf{A}^*|_{v^*}^{M_n^m} = 0$ и $|\mathbf{A}^*|_{\tilde{v^*}}^{M_2} = 1$ (допущение).

7. $\varphi_k|\mathbf{A}^*|_{v^*}^{M_n^m} = 0$ (из (6)).

8. $|\mathbf{A}^*|_{v^*}^{M_n^m} \notin D$ (из (7), по определению φ_k).

9. $|\mathbf{A}^*|_{\tilde{v^*}}^{M_2} = 0$ (из (8), того факта, что A есть пропозициональная переменная языка $L_{\supset\neg}$ и определения $\tilde{v}$).

10. $|\mathbf{A}^*|_{\tilde{v^*}}^{M_2} = 0$ (из (6)).

11. Неверно, что (6) (из (9), (10)).

12. $\varphi_k|\mathbf{A}^*|_{v^*}^{M_n^m} = 1$ и $|\mathbf{A}^*|_{\tilde{v^*}}^{M_2} = 0$ (из (5), (11)).

13. $|\mathbf{A}^*|_{\tilde{v^*}}^{M_2} = 0$ (из (12)).

14. $|\mathbf{A}^*|_{v^*}^{M_n^m} \notin D$ (из (13), того факта, что A есть пропозициональная переменная языка $L_{\supset\neg}$ и определения $\tilde{v}$).

15. $\varphi_k|\mathbf{A}^*|_{v^*}^{M_n^m} = 0$ (из (14), по определению φ_k).

16. $\varphi_k|\mathbf{A}^*|_{v^*}^{M_n^m} = 1$ (из (12)).

17. Неверно, что (1) (из (15), (16)).

Базис индукции доказан.

Пусть $\varphi_k|\mathbf{A}|_v^{M_n^m} = |\mathbf{A}|_{\tilde{v}}^{M_2}$ имеет место для формул, которые содержат менее, чем n связок. Тогда достаточно доказать, что утверждение Леммы верно, если $L_{\supset\neg}$-формула $\mathbf{A}$ содержит в точности n вхождений связок и графически совпадает с формулой $(\neg\mathbf{C})$ либо $(\mathbf{D} \supset \mathbf{E})$.

Случай 1. Пусть $L_{\supset\neg}$-формула $\mathbf{A}$ содержит в точности n вхождений связок и графически совпадает с формулой $(\neg\mathbf{C})$.

1. Неверно, что $\forall(\neg\mathbf{C})\forall v$: если $(\neg\mathbf{C})$ есть $L_{\supset\neg}$-формула и v – оценка в M_n^m, то $\varphi_k|(\neg\mathbf{C})|_v^{M_n^m} = |(\neg\mathbf{C})|_{\tilde{v}}^{M_2}$ (допущение).
2. $\exists(\neg\mathbf{C})\exists v$: $(\neg\mathbf{C})$ есть $L_{\supset\neg}$-формула и v – оценка в M_n^m и $\varphi_k|(\neg\mathbf{C})|_v^{M_n^m} \neq |(\neg\mathbf{C})|_{\tilde{v}}^{M_2}$ (из (1)).
3. Пусть $(\neg\mathbf{C}^*)$ есть $L_{\supset\neg}$-формула и v^* – оценка в M_n^m и $\varphi_k|(\neg\mathbf{C}^*)|_{v^*}^{M_n^m} \neq |(\neg\mathbf{C}^*)|_{\tilde{v^*}}^{M_2}$ (из (2), исключение кванторов).
4. $\varphi_k|(\neg\mathbf{C}^*)|_{v^*}^{M_n^m} \neq |(\neg\mathbf{C}^*)|_{\tilde{v^*}}^{M_2}$ (из (3)).
5. $\varphi_k|(\neg\mathbf{C}^*)|_{v^*}^{M_n^m} = 1$ и $|(\neg\mathbf{C}^*)|_{\tilde{v^*}}^{M_2} = 0$ или $\varphi_k|(\neg\mathbf{C}^*)|_{v^*}^{M_n^m} = 0$ и $|(\neg\mathbf{C}^*)|_{\tilde{v^*}}^{M_2} = 1$ (из (4), в силу определений φ_k и $\tilde{v^*}$).
6. $\varphi_k|(\neg\mathbf{C}^*)|_{v^*}^{M_n^m} = 0$ и $|(\neg\mathbf{C}^*)|_{\tilde{v^*}}^{M_2} = 1$ (допущение).
7. $|(\neg\mathbf{C}^*)|_{\tilde{v^*}}^{M_2} = \neg_2|\mathbf{C}^*|_{\tilde{v^*}}^{M_2}$ (по определению значения $L_{\supset\neg}$-формулы).
8. $\neg_2|\mathbf{C}^*|_{\tilde{v^*}}^{M_2} = 1$ (из (6), (7)).
9. $|\mathbf{C}^*|_{\tilde{v^*}}^{M_2} = 0$ (из (8), по определению $\neg_2$).
10. $\varphi_k|\mathbf{C}^*|_{v^*}^{M_n^m} = |\mathbf{C}^*|_{\tilde{v^*}}^{M_2}$ (в силу индуктивного допущения).
11. $\varphi_k|\mathbf{C}^*|_{v^*}^{M_n^m} = 0$ (из (9), (10)).
12. $|\mathbf{C}^*|_{v^*}^{M_n^m} \notin D$ (из (11), по определению φ_k).
13. $\neg_n|\mathbf{C}^*|_{v^*}^{M_n^m} \in D$ (из (12), по определению $\neg_n$).

14. $\neg_n|\mathbf{C}^*|_{v^*}^{M_n^m} = |(\neg\mathbf{C}^*)|_{v^*}^{M_n^m}$ (по определению значения $L_{\supset\neg}$-формулы)).

15. $|(\neg\mathbf{C}^*)|_{v^*}^{M_n^m} \in D$ (из (13), (14)).

16. $\varphi_k|(\neg\mathbf{C}^*)|_{v^*}^{M_n^m} = 1$ (из (15), по определению φ_k).

17. $\varphi_k|(\neg\mathbf{C}^*)|_{v^*}^{M_n^m} = 0$ (из (6)).

18. Неверно, что (6) (из (16), (17)).

19. $\varphi_k|(\neg\mathbf{C}^*)|_{v^*}^{M_n^m} = 1$ и $|(\neg\mathbf{C}^*)|_{\tilde{v^*}}^{M_2} = 0$ (из (5), (18)).

20. $|(\neg\mathbf{C}^*)|_{\tilde{v^*}}^{M_2} = 0$ (из (19)).

21. $|(\neg\mathbf{C}^*)|_{\tilde{v^*}}^{M_2} = \neg_2|\mathbf{C}^*|_{\tilde{v^*}}^{M_2}$ (по определению значения $L_{\supset\neg}$-формулы).

22. $\neg_2|\mathbf{C}^*|_{\tilde{v^*}}^{M_2} = 0$ (из (20), (21)).

23. $|\mathbf{C}^*|_{\tilde{v^*}}^{M_2} = 1$ (из (22), по определению $\neg_2$).

24. $\varphi_k|\mathbf{C}^*|_{v^*}^{M_n^m} = |\mathbf{C}^*|_{\tilde{v^*}}^{M_2}$ (в силу индуктивного допущения).

25. $\varphi_k|\mathbf{C}^*|_{v^*}^{M_n^m} = 1$ (из (23), (24)).

26. $|\mathbf{C}^*|_{v^*}^{M_n^m} \in D$ (из (25), по определению φ_k).

27. $\neg_n|\mathbf{C}^*| \notin D$ (из (26), по определению $\neg_n$).

28. $\neg_n|\mathbf{C}^*|_{v^*}^{M_n^m} = |(\neg\mathbf{C}^*)|_{v^*}^{M_n^m}$ (по определению значения $L_{\supset\neg}$-формулы)).

29. $|(\neg\mathbf{C}^*)|_{v^*}^{M_n^m} \notin D$ (из (27), (28)).

30. $\varphi_k|(\neg\mathbf{C}^*)|_{v^*}^{M_n^m} = 0$ (из (29), по определению φ_k).

31. $\varphi_k|(\neg\mathbf{C}^*)|_{v^*}^{M_n^m} = 1$ (из (19)).

32. Неверно, что (1) (из (30), (31)).

Случай 2. Пусть $L_{\supset\neg}$-формула $\mathbf{A}$ содержит в точности n вхождений связок и графически совпадает с формулой $(\mathbf{D} \supset \mathbf{E})$.

1. Неверно, что $\forall(\mathbf{D} \supset \mathbf{E})\forall v$: если $(\mathbf{D} \supset \mathbf{E})$ есть $L_{\supset\neg}$-формула и v – оценка в M_n^m, то $\varphi_k|(\mathbf{D} \supset \mathbf{E})|_v^{M_n^m} = |(\mathbf{D} \supset \mathbf{E})|_{\tilde{v}}^{M_2}$ (допущение).

2. $\exists(\mathbf{D} \supset \mathbf{E})\exists v$: $(\mathbf{D} \supset \mathbf{E})$ есть $L_{\supset\neg}$-формула и v – оценка в M_n^m и $\varphi_k|(\mathbf{D} \supset \mathbf{E})|_v^{M_n^m} \neq |(\mathbf{D} \supset \mathbf{E})|_{\tilde{v}}^{M_2}$ (из (1)).

3. Пусть $(\mathbf{D}^* \supset \mathbf{E}^*)$ есть $L_{\supset\neg}$-формула и v^* – оценка в M_n^m и $\varphi_k|(\mathbf{D}^* \supset \mathbf{E}^*)|_{v^*}^{M_n^m} \neq |(\mathbf{D}^* \supset \mathbf{E}^*)|_{\tilde{v^*}}^{M_2}$ (из (2), исключение кванторов).

4. $\varphi_k|(\mathbf{D}^* \supset \mathbf{E}^*)|_{v^*}^{M_n^m} \neq |(\mathbf{D}^* \supset \mathbf{E}^*)|_{\tilde{v^*}}^{M_2}$ (из (3)).

5. $\varphi_k|(\mathbf{D}^* \supset \mathbf{E}^*)|_{v^*}^{M_n^m} = 1$ и $|(\mathbf{D}^* \supset \mathbf{E}^*)|_{\tilde{v^*}}^{M_2} = 0$ или $\varphi_k|(\mathbf{D}^* \supset \mathbf{E}^*)|_{v^*}^{M_n^m} = 0$ и $|(\mathbf{D}^* \supset \mathbf{E}^*)|_{\tilde{v^*}}^{M_2} = 1$ (из (4), в силу определений φ_k и $\tilde{v^*}$).

6. $\varphi_k|(\mathbf{D}^* \supset \mathbf{E}^*)|_{v^*}^{M_n^m} = 0$ и $|(\mathbf{D}^* \supset \mathbf{E}^*)|_{\tilde{v^*}}^{M_2} = 1$ (допущение).

7. $\varphi_k|(\mathbf{D}^* \supset \mathbf{E}^*)|_{v^*}^{M_n^m} = 0$ (из (6)).

8. $|(\mathbf{D}^* \supset \mathbf{E}^*)|_{v^*}^{M_n^m} \notin D$ (из (7), по определению φ_k)

9. $|(\mathbf{D}^* \supset \mathbf{E}^*)|_{v^*}^{M_n^m} = |\mathbf{D}^*|_{v^*}^{M_n^m} \supset_n |\mathbf{E}^*|_{v^*}^{M_n^m}$ (по определению значения $L_{\supset\neg}$-формулы).

10. $|\mathbf{D}^*|_{v^*}^{M_n^m} \supset_n |\mathbf{E}^*|_{v^*}^{M_n^m} \notin D$ (из (8), (9)).

11. $|\mathbf{D}^*|_{v^*}^{M_n^m} \in D$ и $|\mathbf{E}^*|_{v^*}^{M_n^m} \notin D$ (из (10), по определению $\supset_n$).

12. $\varphi_k|\mathbf{D}^*|_{v^*}^{M_n^m} = 1$ (из (11), по определению φ_k).

13. $|\mathbf{D}^*|_{\tilde{v^*}}^{M_2} = 1$ (из (12), в силу индуктивного допущения).

14. $\varphi_k|\mathbf{E}^*|_{v^*}^{M_n^m} = 0$ (из (11), по определению φ_k).

15. $|\mathbf{E}^*|_{\tilde{v^*}}^{M_2} = 0$ (из (14), в силу индуктивного допущения).

16. $|\mathbf{D}^*|_{\tilde{v^*}}^{M_2} \supset_2 |\mathbf{E}^*|_{\tilde{v^*}}^{M_2} = 0$ (из (13), (15), по определению $\supset_2$).

17. $|\mathbf{D}^*|_{\tilde{v^*}}^{M_2} \supset_2 |\mathbf{E}^*|_{\tilde{v^*}}^{M_2} = |(\mathbf{D}^* \supset \mathbf{E}^*)|_{\tilde{v^*}}^{M_2}$ (в силу определения значения $L_{\supset\neg}$-формулы).

18. $|(\mathbf{D}^* \supset \mathbf{E}^*)|^{M_2}_{\tilde{v^*}} = 0$ (из (16), (17)).

19. $|(\mathbf{D}^* \supset \mathbf{E}^*)|^{M_2}_{\tilde{v^*}} = 1$ (из (6)).

20. Неверно, что (6) (из (18), (19)).

21. $\varphi_k|(\mathbf{D}^* \supset \mathbf{E}^*)|^{M^m_n}_{v^*} = 1$ и $|(\mathbf{D}^* \supset \mathbf{E}^*)|^{M_2}_{\tilde{v^*}} = 0$ (из (5), (20)).

22. $|(\mathbf{D}^* \supset \mathbf{E}^*)|^{M_2}_{\tilde{v^*}} = 0$ (из (21)).

23. $|(\mathbf{D}^* \supset \mathbf{E}^*)|^{M_2}_{\tilde{v^*}} = |\mathbf{D}^*|^{M_2}_{\tilde{v^*}} \supset_2 |\mathbf{E}^*|^{M_2}_{\tilde{v^*}}$ (по определению значения $L_{\supset\neg}$-формулы).

24. $|\mathbf{D}^*|^{M_2}_{\tilde{v^*}} \supset_2 |\mathbf{E}^*|^{M_2}_{\tilde{v^*}} = 0$ (из (22), (23)).

25. $|\mathbf{D}^*|^{M_2}_{\tilde{v^*}} = 1$ и $|\mathbf{E}^*|^{M_2}_{\tilde{v^*}} = 0$ (из (24), по определению $\supset_2$).

26. $\varphi_k|\mathbf{D}^*|^{M^m_n}_{v^*} = 1$ (из (25), в силу индуктивного допущения).

27. $|\mathbf{D}^*|^{M^m_n}_{v^*} \in D$ (из (26), по определению φ_k).

28. $\varphi_k|\mathbf{E}^*|^{M^m_n}_{v^*} = 0$ (из (25), в силу индуктивного допущения).

29. $|\mathbf{E}^*|^{M^m_n}_{v^*} \notin D$ (из (28), по определению φ_k).

30. $|\mathbf{D}^*|^{M^m_n}_{v^*} \supset_n |\mathbf{E}^*|^{M^m_n}_{v^*} \notin D$ (из (27), (29), по определению $\supset_n$).

31. $|\mathbf{D}^*|^{M^m_n}_{v^*} \supset_n |\mathbf{E}^*|^{M^m_n}_{v^*} = |(\mathbf{D}^* \supset \mathbf{E}^*)|^{M^m_n}_{v^*}$ (по определению значения $L_{\supset\neg}$-формулы).

32. $|(\mathbf{D}^* \supset \mathbf{E}^*)|^{M^m_n}_{v^*} \notin D$ (из (30), (31)).

33. $\varphi_k|(\mathbf{D}^* \supset \mathbf{E}^*)|^{M^m_n}_{v^*} = 0$ (из (32), по определению φ_k).

34. $\varphi_k|(\mathbf{D}^* \supset \mathbf{E}^*)|^{M^m_n}_{v^*} = 1$ (из (21)).

35. Неверно, что (1).

Таким образом, $\forall \mathbf{A} \forall v$: если $\mathbf{A}$ есть $L_{\supset\neg}$-формула и v – оценка в M^m_n, то $\varphi_k|\mathbf{A}|^{M^m_n}_v = |\mathbf{A}|^{M_2}_{\tilde{v}}$. Q.E.D.

ЛЕММА 2. *$\forall v$: если v – оценка в M_2, то $v = \tilde{v}$.*

Доказательство.

В силу определения v есть отображение множества пропозициональных переменных на множество $\{1, 0\}$. По определению класса выделенных в M_2 значений $\{1\}$ всегда принадлежит D и $\{0\}$ никогда не принадлежит D. Следовательно, по определению k-замещения $\tilde{v}(\mathbf{p}) = 1$ если $v(\mathbf{p}) = 1$, и $\tilde{v}(\mathbf{p}) = 0$, если $v(\mathbf{p}) = 0$.

Q.E.D.

ТЕОРЕМА 3. *Пусть* $M_n^m =< U, \supset_n, \neg_n, D >$ - *n-элементная матрица с m выделенных значений и* $\supset_n$, *и* $\neg_n$ *отвечают условиям:*

- $x \supset_n y \in D$, *е.т.е* $x \notin D$ *или* $y \in D$;
- $\neg_n x \in D$, *е.т.е* $x \notin D$.

Тогда отношение логического следования в M_n^m *является классическим.*

Доказательство. Чтобы доказать Теорему 3, необходимо и достаточно доказать, что для всякого множества $L_{\supset\neg}$-формул $\mathbf{\Gamma}$ и для всякой $L_{\supset\neg}$-формулы $\mathbf{B}$, верны следующие утверждения:

- У1. Если $\mathbf{\Gamma} \vDash_{M_2} \mathbf{B}$, то $\mathbf{\Gamma} \vDash_{M_n^m} \mathbf{B}$;
- У2. Если $\mathbf{\Gamma} \vDash_{M_n^m} \mathbf{B}$, то $\mathbf{\Gamma} \vDash_{M_2} \mathbf{B}$.

Докажем У1.

1. Неверно, что У1 (допущение).
2. Для каждой оценки в M_2, для каждых $\mathbf{\Gamma}$ и $\mathbf{B}$ верно, что, если каждая формула из $\mathbf{\Gamma}$ принимает выделенное значение, то $\mathbf{B}$ принимает выделенное значение при этой оценке (из (1)).
3. Найдется такая оценка в M_n^m, множество посылок $\mathbf{\Gamma}$ и заключение $\mathbf{B}$, что все формулы из $\mathbf{\Gamma}$ примут выделенное значение и $\mathbf{B}$ примет невыделенное значение при этой оценке (из (1)).

4. Пусть v^* такая оценка в M_n^m, а $\mathbf{\Gamma}^*$ и $\mathbf{B}^*$ такие множество посылок и заключение, что все формулы из $\mathbf{\Gamma}^*$ принимают выделенное значение и $\mathbf{B}^*$ принимает невыделенное значение при v^*.

5. $\forall \mathbf{A}$: если $\mathbf{A} \in \mathbf{\Gamma}^*$, то $|\mathbf{A}|_{v^*}^{M_n^m} \in D$ (из (4)).

6. $\forall \mathbf{A}$: если $\mathbf{A} \in \mathbf{\Gamma}^*$, то $\varphi_k|\mathbf{A}|_{v^*}^{M_n^m} = 1$ (из (4), по определению φ_k).

7. $\forall \mathbf{A}$: если $\mathbf{A} \in \mathbf{\Gamma}^*$, то $|\mathbf{A}|_{\tilde{v^*}}^{M_2} = 1$ (из (5), по Лемме 1).

8. $|\mathbf{B}^*|_{\tilde{v^*}}^{M_2} = 1$ (из (2), (6)).

9. $|\mathbf{B}^*|_{v^*}^{M_n^m} \notin D$ (из (4)).

10. $\varphi_k|\mathbf{B}^*|_{v^*}^{M_n^m} = 0$ (из (9), по определению φ_k).

11. $|\mathbf{B}^*|_{\tilde{v^*}}^{M_2} = 0$ (из (10), по Лемме 1).

12. Неверно, что (1) (из (8), (11)).

У1 доказано. Докажем У2.

1. Неверно, что У2 (допущение).

2. Для каждой оценки в M_n^m, для каждых $\mathbf{\Gamma}$ и $\mathbf{B}$ верно, что если каждая формула из $\mathbf{\Gamma}$ принимает выделенное значение, то $\mathbf{B}$ принимает выделенное значение при этой оценке (из (1)).

3. Найдется такая оценка в M_2, множество посылок $\mathbf{\Gamma}$ и заключение $\mathbf{B}$, что все формулы из $\mathbf{\Gamma}$ примут выделенное значение и $\mathbf{B}$ примет невыделенное значение при этой оценке (из (1)).

4. Пусть v^* такая оценка в M_2, а $\mathbf{\Gamma}^*$ и $\mathbf{B}^*$ такие множество посылок и заключение, что все формулы из $\mathbf{\Gamma}^*$ принимают выделенное значение и $\mathbf{B}^*$ принимает невыделенное значение при v^*.

5. $\forall \mathbf{A}$: если $\mathbf{A} \in \mathbf{\Gamma}^*$, то $|\mathbf{A}|_{v^*}^{M_2} = 1$ (из (4)).

6. $\forall\mathbf{A}$: если $|\mathbf{A}|^{M_2}_{v^*} = 1$, то $|\mathbf{A}^*|^{M_2}_{\tilde{v^*}} = 1$ (по Лемме 2).
7. $\forall\mathbf{A}$: если $\mathbf{A} \in \mathbf{\Gamma}^*$, то $|\mathbf{A}|^{M_2}_{\tilde{v^*}} = 1$ (из (5), (6)).
8. $\forall\mathbf{A}$: если $\mathbf{A} \in \mathbf{\Gamma}^*$, то $\varphi_k|\mathbf{A}|^{M^m_n}_{v^*} = 1$ (из (7), по Лемме 1).
9. $\forall\mathbf{A}$: если $\mathbf{A} \in \mathbf{\Gamma}^*$, то $|\mathbf{A}|^{M^m_n}_{v^*} \in D$ (из (8), по определению φ_k).
10. $|\mathbf{B}^*|^{M^m_n}_{v^*} \in D$ (из (2), (9)).
11. $\varphi_k|\mathbf{B}^*|^{M^m_n}_{v^*} = 1$ (из (10), по определению φ_k).
12. $|\mathbf{B}^*|^{M_2}_{\tilde{v^*}} = 1$ (из (11), по Лемме 1).
13. $|\mathbf{B}^*|^{M_2}_{v^*} = 1$ (из (12), по Лемме 2).
14. $|\mathbf{B}^*|^{M_2}_{v^*} = 0$ (из (4)).
15. Неверно, что (1) (из (13), (14)).

Теорема доказана.

Q.E.D.

СЛЕДСТВИЕ 4. *Существуют многозначные изоморфы классической пропозициональной логики, не являющиеся С-расширяющими.*

СЛЕДСТВИЕ 5. *Можно вычислить количество матриц, отвечающих условию Теоремы 3 для каждых m и n при помощи следующей формулы:*

$$m^{n^2-(m+1)\times(n-m)} \times (n-m)^{m\times(n-m+1)}$$

Метод, использованный выше, также позволяет доказать несколько теорем, описывающих классы логических матриц, с классическим классом тавтологий и неклассическим отношением логического следования.

ТЕОРЕМА 6. *Если матрица M^m_n – С-расширяющая и является для характеристической для классической логики при $m = 1$, то M^m_n совпадает по классу тавтологий с матрицей для классической логики (M_2).*

ТЕОРЕМА 7. *Если M^m_n отвечает следующим условиям:*

- *формулы, не являющиеся элементарными, принимают в M_n^m только значения из {1, 0};*
- *существует матрица M_n^k , отличная от M_n^m лишь классом выделенных значений, и отношение логического следования в M_n^k является классическим,*

то M_n^m совпадает по классу тавтологий с M_2.

ТЕОРЕМА 8. *Если M_n^m отвечает следующим условиям:*

- *M_n^m является C-расширяющей;*
- *если $x \supset_n y = 1$, то $x = 0$ или $y = 1$; если $x \supset_n y = 0$, то $x = 1$ и $y = 0$; $\neg_n x = 1$ е.т.е. $x = 0$; $\neg_n x = 0$ е.т.е. $x = 1$,*

верно следующее: матрица M_n^{n-1} , отличная от M_n^m лишь классом выделенных значений, совпадает по классу тавтологий с M_2.

Литература

[1] *Девяткин Л. Ю., Карпенко А. С., Попов В. М.* Трехзначные характеристические матрицы классической пропозициональной логики // Труды научно-исследовательского семинара Логического центра Института философии РАН. Вып XVIII. М.: ИФ РАН, 2007. С. 50–62.

[2] *Epstein R. L.* The semantic foundations of logic. Vol. 1: Propositional logic. Dordrecht, 1990. P. 263–287.

[3] *Malinowski G.* On Many-Valuedness, Sentential Identity, Interference and Łukasiewicz Modalities // Logica Trianguli. Łodž, Nantes, Santiago de Compostella, 1997. Vol. 1. P. 61–71.

[4] *Rescher N.* Many-valued logic. N. Y., 1969. P 31–33.

Интуитивная семантика для релевантного следования

Д. В. Зайцев

ABSTRACT. In this paper, I return an old but fruitful idea suggested independently by J.M. Dunn and E.K. Voishvillo of true (relevant) entailment as a relation between premisses and conclusion when an information contained in conclusion as a part of information contained in premisses. In so doing I consider Belnap's famous logical and approximation lattices that form bilattice FOUR and prove that informational semantics for first-degree entailment can be developed on the basis of approximation lattice taken alone.

Ключевые слова: релевантное следование первого уровня, бирешетка, интуитивная семантика.

Среди множества исследовательских программ в области релевантной логики выделяется оригинальный подход, развиваемый Е.К. Войшвилло. Отличительными особенностями этого подхода можно считать относительную простоту предпринимаемых построений и ясную содержательную интерпретацию семантических понятий. Е.К. Войшвилло исходит из понимания логического следования, предложенного В. Аккерманом: $A \models B \Leftrightarrow$ логическое содержание B составляет часть логического содержания A. При этом, с точки зрения Е.К. Войшвилло, «логическое содержание высказывания естественно трактовать как информацию, которую содержит высказывание в силу своей логической формы, т. е. независимо от значений входящих в него дескриптивных терминов» [1, с. 70], т. е. «$A \models B \Leftrightarrow$ если и только если информация B составляет часть информации A» [3, с. 299]. Не будет преувеличением сказать, что информационная трактовка релевантного следования представляет собой ключевой момент в развиваемом Е.К. Войшвилло понимании релевантной логики (см., например, [2]).

Другой патриарх релевантной логики Дж. Майкл Данн, также не обошел вниманием интуитивно-информационную трактовку логического следования. Хорошо известна «интуитивная семантика» для первоуровневого релевантного следования, предложенная Данном в [10] и [11]. Базовым семантическим понятием оказывается понятие ситуации, а вместо *функции* приписывания значений предлагается использовать трехместное *отношение* между множеством высказываний, множеством ситуаций и множеством истинностных значений $\{\mathbf{t}, \mathbf{f}\}$. В результате получается, что для произвольного предложения существует четыре возможности: ему может быть приписано значение $\mathbf{t}$, ему может быть приписано значение $\mathbf{f}$, ему могут быть приписаны оба истинностных значения, и ему может быть не приписано ни одно из истинностных значений. Таким образом, абстрактные ситуации в интуитивной модели Данна могут быть противоречивыми и неполными.

В более ранней работе [9], представляющей собой докторскую диссертацию, Дж. Майкл Данн приходит к тому же результату, но другим способом. Для каждого высказывания вводится понятие «пропозиционального суррогата» как упорядоченной пары $< X, Y >$, компоненты которой представляют собой множества. Элементы X интуитивно трактуются как темы («topics»), относительно которых данное суждение (пропозиция) несет определенную информацию, соответственно, элементы Y — это темы, по которым определенную информацию несет отрицание данного суждения. Все эти темы образуют множество U, называемое «универсум рассуждений». Интерпретация в U — это функция I, приписывающая пропозициональный суррогат каждому высказыванию. Как замечают Шрамко и Ванзинг [18], введенное Данном понятие интерпретации представляет собой обобщение классического понятия функции приписывания истинностных значений.

Следующий шаг в развитии идей о связи релевантного следования и информации был сделан Нуэлем Д. Белнапом [7, 8], предложившим свою известную полезную логику для рассуждающего компьютера. Теперь возможные подмножества множества $\{\mathbf{t}, \mathbf{f}\}$ рассматриваются как самостоятельные истинностные значения, что приводит, по мнению Шрамко и Ванзинга, к обобщению уже самого понятия истинностного значения. Как известно, результатом интуитивных рассуждений Белнапа стало множество значений $\mathbf{4} = \{\mathbf{T}, \mathbf{F}, \mathbf{B}, \mathbf{N}\}$, на котором достаточно естественным образом определяется функция приписывания значений и задается отношение логического следования. С алгебраической точки зрения полезной логике Белнапа соответствует решетка с двумя отношениями порядка: логическим (или упорядочение по истинности) и информационным.

Еще через несколько лет Метью Гинзберг в [16] и [17] ввел понятие бирешетки и показал, что значения Белнапа образуют наименьшую нетрививальную бирешетку (см. рис. 1).

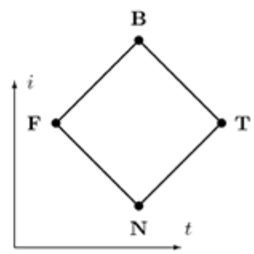


Рис. 1. Бирешетка $FOUR_2$.

Для дальнейшего изложения необходимо ввести некоторые важные понятия, касающиеся бирешеток. Эти алгебраические структуры активно изучались А. Авроном и М. Фиттингом [4, 5, 6, 12, 13, 14, 15]. Для определения бирешетки удобнее, следуя М. Фиттингу, начать с понятия пред-бирешетки.

Пред-бирешетка — это структура $B =< B, \leqslant_t, \leqslant_i >$, где B — непустое множество, а $\leqslant_t, \leqslant_i$ — отношения частичного порядка такие, что $< B, \leqslant_t >$ и $< B, \leqslant_i >$ представляют собой решетки. Пред-бирешетка является полной, если для каждого упорядочивания существуют объединение и пересечение.

Понятие пред-бирешетки не предполагает каких-либо дополнительных связей или отношений между двумя заданными на ней порядками. Соответственно, под *бирешеткой* (в широком смысле) Фиттинг понимает пред-бирешетку, на которой два отношения порядка каким-либо образом связаны. В исходном (узком) определении Гинзбурга, во-первых, рассматривались два не обязательно совпадающих множества, на которых были заданы отношения порядка, а во-вторых, указанная связь осуществлялась через отрицание, представляющее собой решеточный гомоморфизм. Полезно привести еще несколько связанных понятий.

Бирешетка является чередующейся (interlaced), если порождаемые каждым порядком операции объединения и пересечения являются монотонными по отношению к обоим порядкам (свойство чередования).

Бирешетка является дистрибутивной, если все возможные законы дистрибутивности (для четырех операций их оказывается двенадцать) выполняются. Всякая дистрибутивная решетка является чередующейся.

Операция отрицания (дополнения) на бирешетке предполагает, во-первых, сохранение i-порядка, во-вторых, обращение t-порядка, и в-третьих, выполнение свойства «двойного отрицания». В принципе это представляется вполне естественным, если интуитивно понимать i-порядок как порядок приращения знания. При такой интерпретации, если знание об A включается в знание о B, то знание об отрицании A не превышает знание об отрицании B.

Кроме того, на бирешетке может быть задана двойственная операция, сохраняющая t-порядок, «оборачивающая» i-порядок и также обладающая свойством «двойного дуального отрицания». Введем эти понятия строго.

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 1. Пусть $B =< B, \leqslant_t, \leqslant_i, - >$ бирешетка, тогда унарная операция $-$ обладает следующими свойствами:

b1. если $a \leqslant_t b$, то $-a \leqslant_t -b$;

b2. если $a \leqslant_i b$, то $-a \leqslant_i -b$;

b3. $- - a = a$.

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 2. Унарный оператор $\perp$ на бирешетке обладает следующими свойствами:

c1. если $a \leqslant_t b$, то $\perp a \leqslant_t \perp b$;

c2. если $a \leqslant_t b$, то $\perp a \leqslant_t \perp b$;

c3. $\perp\perp a = a$;

c4. $\perp -a = - \perp a$.

Задача данной статьи состоит в том, чтобы показать, что определенное стандартным образом в семантике Белнапа отношение логического следования соответствует информационной трактовке следования Е.К. Войшвилло, т. е. $A \models B$, если и только если $I(B) \subseteq I(A)$.

Будем исходить из понятия стандартного языка релевантной логики первого уровня со связками $\wedge, \vee, \neg$. Рассмотрим бирешетку $FOUR_2 =< \mathbf{4}, \leqslant_t, \cap, \cup, -, \leqslant_i, \prod, \coprod, * >$, где $\cap, \cup, -$ представляют собой пересечение, объединение и дополнение на решетке $< \mathbf{4}, \leqslant_t >$, а $\prod, \coprod, *$ — те же операции на решетке $< \mathbf{4}, \leqslant_i >$ Легко заметить, что унарная операция $*$ представляет собой, во-первых, охарактеризованный выше опреатор «двойственного отрицания» $\perp$, а во-вторых, представляет собой алгебраический анализ небезызвестной функции звезды («star-function» — $*$). Пусть данная бирешетка выступает в качестве модельной структуры. Зададим на ней две функции ν и i, понимаемые как функция приписывания значений и функция «информатизации», ставящая каждой формуле в соответствие ее информацию.

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 3. Пусть ν представляет собой отображение из множества пропозициональных переменных в множество $\mathbf{4}$, обладающее следующими свойствами:

$$\nu(A \wedge B) = \nu(A) \cap \nu(B);$$

$$\nu(A \vee B) = \nu(A) \cup \nu(B);$$

$$\nu(\neg A) = -\nu(A).$$

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 4. Для произвольных формул A и B $A \models B iff \forall \nu(\nu(A) \leqslant \nu(B))$.

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 5. Пусть i представляет собой отображение из множества пропозициональных переменных в множество $\mathbf{4}$, обладающее следующими свойствами:

$$i(A \wedge B) = i(A) \prod i(B);$$

$$i(A \vee B) = i(A) \coprod i(B);$$

$$i(\neg A) = *i(A).$$

Легко показать, что для произвольных формул A и B $i(A) \leqslant_i i(B) iff \forall i(i(A) \leqslant i(B))$.

Для решения поставленной задачи необходимо показать, что $A \models B \Leftrightarrow \forall i(i(B) \leqslant i(A))$, т. е. $\forall \nu(\nu(A) \leqslant_t \nu(B)) \Leftrightarrow \forall i(i(B) \leqslant i(A))$.

Начнем с формулировки двух лемм. Для упрощения дальнейших доказательств удобно рассматривать элементы **4** как элементы множества-степени $\{\mathbf{t}, \mathbf{f}\}$ — $\mathbf{T} = \{\mathbf{t}\}$, $\mathbf{F} = \{\mathbf{f}\}$, $\mathbf{B} = \{\mathbf{t}, \mathbf{f}\}$, $\mathbf{N} = \emptyset$.

ЛЕММА 6. $\forall i \exists \nu(\nu(A) \leqslant_t \nu(B) \Rightarrow i(B) \leqslant i(A))$

Прежде чем осуществить доказательство леммы, покажем, что по функции ν можно задать оценку i, обладающую искомыми свойствами.

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 7. Пусть $\vec{\nu}$ такова, что

$$\vec{\nu}(p) = \mathbf{F} iff i(p) = \mathbf{B};$$

$$\vec{\nu}(p) = \mathbf{B} iff i(p) = \mathbf{T};$$

$$\vec{\nu}(p) = \mathbf{T} iff i(p) = \mathbf{N};$$

$$\vec{\nu}(p) = \mathbf{N} iff i(p) = \mathbf{F};$$

Распространим функцию $\vec{\nu}$ на произвольную формулу языка стандартным образом по аналогии с определением 3. Покажем, что новая оценка $\vec{\nu}$ действительно является оценкой и для произвольной формулы языка выполняется условие, сформулированное в определении 7.

УТВЕРЖДЕНИЕ 8. *Для произвольной формулы A покажем, что*

$$\vec{\nu}(A) = \mathbf{F} iff i(A) = \mathbf{B};$$

$$\vec{\nu}(A) = \mathbf{B} iff i(A) = \mathbf{T};$$

$$\vec{\nu}(A) = \mathbf{T} iff i(A) = \mathbf{N};$$

$$\vec{\nu}(A) = \mathbf{N} iff i(A) = \mathbf{F};$$

Доказательство.

Доказательство данного утверждения достаточно тривиально. Рассмотрим схемы доказательства только для случаев, когда формула A имеет вид конъюнкции и отрицания. Здесь и далее для упрощения процедуры доказательства будем иметь в виду симметричность связок языка.

1. A есть $B \wedge C$.

1.1. Пусть $i(B \wedge C) = \mathbf{B}$. $i(B \wedge C) = \mathbf{B} \Leftrightarrow i(A) \coprod i(B) = \mathbf{B}$. Фактически это означает, что необходимо рассмотреть два случая: (1.1.1), когда одному из конъюнктов (пусть это будет $\mathbf{B}$) приписано значение $\mathbf{F}$, а другому $\mathbf{T}$, и (1.1.2), когда по крайней мере одному члену конъюнкции (опять $\mathbf{B}$) приписано значение $\mathbf{N}$, а значение другого члена конъюнкции выбирается произвольно.

1.1.1. По индуктивному допущению $\vec{\nu}(B) = \mathbf{N}$, а $\vec{\nu}(C) = \mathbf{B}$, это равносильно $\vec{\nu}(B \wedge C) = \mathbf{F}$, по определению $\vec{\nu}$.

1.1.2. По индуктивному допущению $\vec{\nu}(B) = \mathbf{F}$, тогда $\vec{\nu}(B \wedge C) = \mathbf{F}$, по определению $\vec{\nu}$.

Доказательство для случаев 1.2.–1.4. осуществляется аналогично.

2. A есть $\neg B$.

2.1. Пусть $i(\neg C) = \mathbf{B}$. $i(\neg C) = \mathbf{B} \Leftrightarrow *i(C) = \mathbf{B}$, следовательно $i(C) = \mathbf{N}$, по определению i. По индуктивному допущению $\vec{\nu}(C) = \mathbf{T}$. Следовательно, $\vec{\nu}(\neg C) = \mathbf{F}$.

Остальные случаи могут быть опущены, поскольку рассуждения ничем принципиально не отличаются от приведенных здесь.

Таким образом, утверждение 8 доказано. Q.E.D.

Докажем лемму 6.

Доказательство. Пусть $\vec{\nu}(A) \leqslant_t \vec{\nu}(B)$. Для произвольной формулы A здесь также возможны четыре случая, соответствующие четырем исходным значениям. Рассмотрим только два из них.

1. $\vec{\nu}(A) = \mathbf{F}$, тогда $\vec{\nu}(B)$ может быть любым. На основании утверждения 8 в этом случае $\vec{\nu}(A) = \mathbf{B}$. Следовательно, каким бы ни было значение $i(B)$, будет иметь место $i(B) \subseteq i(A)$.

2. $\vec{\nu}(A) = \mathbf{B}$, тогда $\vec{\nu}(B)$ равно $\mathbf{B}$ или $\mathbf{T}$. На основании утверждения 8 $i(A) = \mathbf{T}$.

2.1. Пусть $\vec{\nu}(B) = \mathbf{B}$, тогда $i(B) = \mathbf{T}$ — тривиальный случай.

2.2. Пусть $\vec{\nu}(B) = \mathbf{T}$, тогда $i(B) = \mathbf{N}$, т. е. пустому множеству. Очевидно, что $i(B) \subseteq i(A)$.

Таким образом, исходное допущение $\vec{\nu}(A) \leqslant_t \vec{\nu}(B)$ приводит к $i(B) \subseteq i(A)$. Отсюда введением импликации с последующим навешиванием кванторов существования и общности завершается доказательство леммы 6. Q.E.D.

ЛЕММА 9. $\forall\nu\exists i(i(A) \subseteq i(B) \Rightarrow \vec{\nu}(A) \leqslant_t \vec{\nu}(B))$.

Доказательство. Для этой леммы доказательство основывается на свойствах бирешетки и является значительно более простым.

Зададим функцию $i^\bullet$ следующим образом. $i^\bullet(p) = - * \nu(p)$.

Пусть $i^\bullet(B) \subseteq i^\bullet(A)$, т. е. $i^\bullet(A) \leqslant_t i^\bullet(B)$. Это значит, что $- * \nu(B) \leqslant_i - * \nu(A)$. По определению 2(c2), последнее влечет $* - *\nu(A) \leqslant_i * - *\nu(B)$. Используя определение 1(b2), получаем $- * - * \nu(A) \leqslant_t - * - * \nu(B)$. Теперь на основании определения 2 сначала по c4 к правой и левой частям равенства, а затем также симметрично применяя c3 и b3, приходим к искомому $\nu(A) \leqslant_t \nu(B)$. Дальнейшие шаги доказательства леммы тривиальны. Q.E.D.

Теперь можно перейти к доказательству основной метатеоремы.

МЕТАТЕОРЕМА. Для произвольных формул A и B $\forall\nu(\nu(A) \leqslant_t \nu(B)) \Leftrightarrow \forall i(i(B) \subseteq i(A))$.

Доказательство.

$\Rightarrow$: Пусть (1) $\forall\nu(\nu(A) \leqslant_t \nu(B))$ и (2) неверно, что $\forall i(i(B) \subseteq i(A))$. Последнее означает, что (3) существует такая функция информатизации, для которой неверно, что $i(B) \subseteq i(A)$. По лемме 6 $\forall i \exists \nu(\nu(A) \leqslant_t \nu(B) \Rightarrow i(B) \leqslant i(A))$. Удалив кванторы, получаем (4) $(\nu(A) \leqslant_t \nu(B) \Rightarrow i(B) \leqslant i(A))$. Снятием квантора общности из (1) получаем (5) $(\nu(A) \leqslant_t \nu(B))$. По modus ponens из (4) и (5) приходим к $(i(B) \subseteq i(A))$. В то же время из (3) удалением квантора существования получаем неверно, что $(i(B) \subseteq i(A))$. Противоречие. В одну сторону утверждение метатеоремы доказано.

В другую сторону доказательство метатеоремы строится аналогично с использованием леммы 9. Q.E.D.

Литература

[1] *Войшвилло Е.К.* Семантика релевантной логики и вопрос о природе логических законов // Разум и культура. Труды международного франко-советского коллоквиума. Лилль, 26-29 апреля 1978 г. М., 1983.

[2] *Войшвилло Е.К.* Философско-методологические аспекты релевантной логики. М., 1988.

[3] *Войшвилло Е.К., Дегтярев М.Г.* Логика как часть теории познания и научной методологии (фундаментальный курс), Кн. I. М., 1994.

[4] *Arieli O. and Avron A.* Logical bilattices and inconsistent data // Proceedings 9th IEEE Annual Symposium on Logic in Computer Science, IEEE Press, 1994. P. 468–476.

[5] *Arieli O. and Avron A.* Reasoning with logical bilattices // Journal of Logic, Language and Information. 1996. Vol. 5. P. 25–63.

[6] *Avron A.* The structure of interlaced bilattices // Mathematical Structures in Computer Science. 1996. Vol. 6. P. 287–299.

[7] *Belnap N. D.* A useful four-valued logic // J. M. Dunn and G. Epstein (eds.), Modern Uses of Multiple-Valued Logic, D. Reidel Publishing Company, Dordrecht, 1977.

[8] *Belnap N. D.* How a computer should think // G. Ryle (ed.), Contemporary Aspects of Philosophy, Oriel Press Ltd., Stocksfield, 1977. P. 30–55.

[9] *Dunn J. M.* The algebra of intensional logics, Doctoral Dissertation, University of Pittsburgh, Ann Arbor, 1966 (University Microfilms).

[10] *Dunn J.M.* An intuitive semantics for first degree relevant implications (abstract) // The Journal of Symbolic Logic. Vol. 36. P. 362–363.

[11] *Dunn J. M.* Intuitive semantics for first-degree entailment and ‘coupled trees’ // Philosophical Studies. 1976. Vol. 29.

[12] *Fitting M.* Bilattices and the theory of truth // Journal of Philosophical Logic.1989. Vol. 18. P. 225–256.

[13] *Fitting M.* Bilattices in logic programming // in G. Epstein (ed.), The Twentieth International Symposium on Multiple-Valued Logic, IEEE Press, 1990. P. 238–246.

[14] *Fitting M.* Bilattices and the semantics of logic programming // Journal of Logic Programming. 1991. Vol. 11. P. 91–116.

[15] *Fitting M.* Bilattices are nice things // in V. F. Hendricks, S. A. Pedersen and T. Bolander (eds.), Self-Reference, CSLI Publications, Cambridge University Press, 2004.

[16] *Ginsberg M.* Multi-valued logics, in Proceedings of AAAI-86 // Fifth National Conference on Artificial Intellegence, Morgan Kaufman Publishers, Los Altos, 1986. P. 243–247.

[17] *Ginsberg M.* Multivalued logics: A uniform approach to reasoning // AI, Computer Intelligence. 1988. Vol. 4. P. 256–316.

[18] *Shramko Y., and Wansing H.* Some useful sixteen-valued logics: How a computer network should think // Journal of Philosophical Logic. 2005. Vol. 34.

Функциональная взаимовыразимость регулярных логик Клини

Е. Ю. Комендантская

ABSTRACT. We consider the family of regular 3-valued logics, two of which were introduced by Kleene under the names “strong” and “weak” logics, and the two others have recently emerged. These newly emerged “Kleene” logics — **Lisp** and **TwinLisp** — are of particular interest. We consider algebraic properties of these two logics and show that there is a partial ordering (D-containment) under which the four Kleene logics form a lattice.[1]

Ключевые слова: трехзначные логики Клини, промежуточные регулярные логики.

1 Вступление

Идея создания многозначных регулярных логик принадлежит С. Клини [5]. Главное их достоинство — это простота и естественность в применении к логической формализации частично-рекурсивных функций, т. е. функций, чьи значения могут быть не всюду определены. Регулярность является необходимым условием для того, чтобы пропозициональные связки были частично-рекурсивными операторами. Очевидная и прямая связь логик Клини с теорией вычислимых функций является их уникальной чертой. Позднее эти логики были применены и в программировании, [11, 12].

Мы предварим эту статью кратким пояснением о том, что Клини вкладывал в понятие «логика» и «регулярность» в данном контексте. В свей знаменитой книге [5] Клини определил

[1]Эта сатья подготовлена по материалам моей дипломной работы «Регулярные Логики Клини» [6, 14] защищенной на кафедре логики МГУ. Я благодарна А.С. Карпенко за научное руководство и В.М. Попову за подробные обсуждения нескольких предварительных версий этой работы.

две регулярные логики — «слабую» и «сильную» логики Клини. Его определение этих логик заключалось в описании их связок с помощью истинностных таблиц. То есть в данном контексте логика — это набор истинностных функций. Простой взгляд на определения этих функций убедит читателя в том, что при одном выделенном истинностном значении 1, у этих логик нет тавтологий: любая связка дает значение $\frac{1}{2}$ при значении аргументов $\frac{1}{2}$. Поэтому логики Клини так никогда и не получили прямой аксиоматической или секвенциальной формулировки, и, в этом смысле, стоят в стороне от многозначных логик Лукасевича, которые могут быть аксиоматизированы, а значит — осмыслены с точки зрения теории доказательств. Такова была цена естественной вычислительной применимости логик Клини. Рассматривая эти логики, нам не остается ничего иного как разделить с Клини его понимание термина «логика». Заметим, что различные модификации логик Клини (в основном в стиле модальных логик) получили разнообразные аксиоматические и секвенциальные формулировки: [13, 16, 17].

Регулярность Клини определяет так. Таблицы для пропозициональных связок нужно выбирать регулярными в следующем смысле: данный столбец (строка) содержит 1 в строке (столбце) для $\frac{1}{2}$ только при условии, что этот столбец (эта строка) состоит целиком из 1; аналогично для 0. Это операциональное определение может быть проанализировано в общепринятых теоретических терминах монотонности и нормальности.

Многозначная истинностная функция является *нормальной*, если таблица истинности для этой функции полностью совпадает на классических истинностных значениях 1,0 с распределением значений в классичнской логике. Функция F является *монотонной*, если для всякой пары значений a и b, таких что $a \leq b$, соблюдается неравенство $F(a) \leq F(b)$.

Условимся, вслед за Клини, считать что трехзначные функции рассматриваемых логик должны принимать неклассическое значение $\frac{1}{2}$ как минимум на одном из распределений значений. То есть мы не рассматриваем связки содержащие в качестве значений только классические значения 1 или 0. В этом случае регулярность трехзначной логики Клини равнозначна нормальности и монотонности логики на порядке $\frac{1}{2} \leq 0$, $\frac{1}{2} \leq 1$, где 0 и

1 несравнимы. Такие свойства легко объяснимы в терминах рекурсивных функций: главное значение имеет то, остановилось ли вычисление значения рекурсивного предиката, и тогда при остановке мы получим 1 или 0 — что именно, это не важно с вычислительной точки зрения. Важность будет иметь тот факт, если вычисление не остановится и значение будет неопределено.

Помимо сильной и слабой регулярных логик Клини, существуют еще две промежуточные трехзначные регулярные логики. Таблицы для конъюнкции и дизъюнкции одной из них были предложены Фиттингом [10], он назвал ее **Lisp**. В секции 2, мы определим эту логику и введем еще одну, новую, промежуточную логику **TwinLisp**. Мы доказали в [6] что эти четыре логики — единственно возможные трехзначные регулярные логики Клини. В секции 3, мы рассмотрим их свойства в сравнении друг с другом.

Значительная часть интереса к логикам Клини вызвана не только свойствами каждой из них, но и тем, как эти логики соотносятся друг с другом, см. [6, 12]. В секции 4, мы обсудим, какие взаимоотношения могут быть установлены между произвольными многозначными логиками. С самого начала высказывалось несколько предположений о взамосвязи логик Клини. Так, Клини предположил, что его сильная логика является самым сильным регулярным расширением классической логики. Фиттинг предположил, что любая промежуточная регулярная логика будет иметь средние значения между сильной и слабой логиками Клини.

В секции 5 мы однозначно ответим на вопрос о том, какого рода включение возможно между этими логиками. Мы покажем, что семейство трехзначных регулярных логик Клини образует решетку по отношению D-включения, т. е. по отношению функциональной выразимости связок. Также, мы формально докажем, что сильная логика Клини является супремумом, а слабая логика Клини — инфинумом в этой решетке; а две логики **Lisp** и **TwinLisp** действительно являются промежуточными между ними в строго определенном смысле.

2 Регулярные Логики Клини

Все регулярные логики Клини разделяют одно классическое свойство, а именно: в каждой из них множества связок $\{\neg, \vee\}$ (равно как и $\{\neg, \wedge\}$) являются функционально полными. То есть связки $\wedge, \supset, \equiv$ выражаются посредством $\{\neg, \vee\}$ с помощью классических определений:

$$P \wedge Q = \neg(\neg P \vee \neg Q);$$

$$P \supset Q = \neg P \vee Q;$$

$$P \equiv Q = (P \supset Q) \wedge (Q \supset P).$$

Поэтому мы не будем следовать традиции и определять все 5 связок. Вместо этого ограничимся тремя: $\neg, \vee, \wedge$, взяв третью связку $\wedge$ в демонстрационных целях.

Сильная логика Клини $\mathbf{K}_3$ [5] была предложена первой:

p	$\sim p$
1	0
$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{2}$
0	1

$\vee$	1	$\frac{1}{2}$	0
1	1	1	1
$\frac{1}{2}$	1	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{2}$
0	1	$\frac{1}{2}$	0

$\wedge$	1	$\frac{1}{2}$	0
1	1	$\frac{1}{2}$	0
$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{2}$	0
0	0	0	0

Другой пример регулярных трехзначных таблиц — это так называемые **слабые связки Клини–Бочвара** [1, 5], которые определяют логику $\mathbf{K}_3^W$. Они получаются путем заполнения символом $\frac{1}{2}$ всех столбцов и строк, где хотя бы один раз встречается символ $\frac{1}{2}$.

p	$\sim p$
1	0
$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{2}$
0	1

$\cup$	1	$\frac{1}{2}$	0
1	1	$\frac{1}{2}$	1
$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{2}$
0	1	$\frac{1}{2}$	0

$\cap$	1	$\frac{1}{2}$	0
1	1	$\frac{1}{2}$	0
$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{2}$
0	0	$\frac{1}{2}$	0

В **логике Lisp [10] ($\mathbf{K}_3^{\rightarrow}$)**, оценка сложного выраженя ведется по простым выражениям, входящим в него. Например, мы оцениваем выражение $P \wedge^{\rightarrow} Q$ слева направо, так что предложение P мы оцениваем первым. Если P приписано значение «ложно», то работа по приписыванию значений останавливается и всему выражению $P \wedge^{\rightarrow} Q$ приписывается значение «ложь».

Если P имеет значение «истина», то далее проводится приписывание значений Q, и значение Q — становится значением всего выражения $P \wedge^{\rightarrow} Q$. Это ассиметричная или позиционная логика. Например, Если P — ложно, а Q — не определено ($\frac{1}{2}$), то выражение $P \wedge^{\rightarrow} Q$ — будет ложным, а $Q \wedge^{\rightarrow} P$ — примет значение $\frac{1}{2}$.

Связки логики **Lisp**, условимся обозначать ее $\mathbf{K}_3^{\rightarrow}$, могут быть представлены следующим образом.

p	$\sim p$
1	0
$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{2}$
0	1

$\vee^{\rightarrow}$	1	$\frac{1}{2}$	0
1	1	1	1
$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{2}$
0	1	$\frac{1}{2}$	0

$\wedge^{\rightarrow}$	1	$\frac{1}{2}$	0
1	1	$\frac{1}{2}$	0
$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{2}$
0	0	0	0

Следующую промежуточную логику мы назовем **«двойник Lisp»**, или **TwinLisp** ($\mathbf{K}_3^{\leftarrow}$): истинностные функции этих двух логик взаимовыразимы. Несмотря на это, их решеточные свойства различны.

p	$\sim p$
1	0
$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{2}$
0	1

$\vee$	1	$\frac{1}{2}$	0
1	1	$\frac{1}{2}$	1
$\frac{1}{2}$	1	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{2}$
0	1	$\frac{1}{2}$	0

$\wedge$	1	$\frac{1}{2}$	0
1	1	$\frac{1}{2}$	0
$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{2}$	0
0	0	$\frac{1}{2}$	0

Итак, мы определили 4 регулярные логики Клини. Две из них были определены Клини, одна (**Lisp**) — Фиттингом, и одна — впервые вводится в данной статье, см. также [6]. Мы показали в [6], что все эти логики нормальны, монотонны на порядке $\frac{1}{2} \leq 0$, $\frac{1}{2} \leq 1$, и регулярны. Более того, мы показали, что эти четыре логики — единственно возможнные нормальные монотонные трехзначные логики на заданном порядке истинностных значений.

3 Решеточные свойства регулярных трехзначных логик

Рассмотрим решеточные свойства четырех представленных логик.

Итак, логики $\mathbf{K}_3$, $\mathbf{K}_3^W$, $\mathbf{K}_3^{\rightarrow}$, $\mathbf{K}_3^{\leftarrow}$ идемпотентны:

(a) $x \vee x = x$

(b) $x \wedge x = x$

$\mathbf{K}_3$, $\mathbf{K}_3^W$ — коммутативны, но $\mathbf{K}_3^{\rightarrow}$ и $\mathbf{K}_3^{\leftarrow}$ не коммутативны, т. е. не выполняются соотношения:

(a) $x \vee y = y \vee x$

Так, например, для $\mathbf{K}_3^{\rightarrow}$, если $x = \frac{1}{2}$, а $y = 1$, то $x \vee^{\rightarrow} y$ примет значение 1, а $y \vee^{\rightarrow} x$ примет значение $\frac{1}{2}$.

(b) $x \wedge y = y \wedge x$

Так, если $x = 0$, а $y = \frac{1}{2}$, то значение $x \wedge^{\rightarrow} y$ будет равно 0, а $y \wedge^{\rightarrow} x$ — $\frac{1}{2}$.

Далее, в $\mathbf{K}_3$, $\mathbf{K}_3^W$, $\mathbf{K}_3^{\rightarrow}$, $\mathbf{K}_3^{\leftarrow}$ имеют место законы ассоциативности и дистрибутивности, в $\mathbf{K}_3$, $\mathbf{K}_3^{\rightarrow}$, $\mathbf{K}_3^{\leftarrow}$ проходит закон поглощения, в $\mathbf{K}_3$ и $\mathbf{K}_3^{\rightarrow}$ проходит закон Клини. Отметим, что в $\mathbf{K}_3^{\leftarrow}$ законы поглощения, а в $\mathbf{K}_3^{\rightarrow}$ закон Клини выполняются только при условии, что переставлены местами дизъюнктивные и конъюнктивные члены:

Ассоциативность:

(a) $x \vee (y \vee z) = (x \vee y) \vee z$

(b) $x \wedge (y \wedge z) = (x \wedge y) \wedge z$

Поглощение в $\mathbf{K}_3$, $\mathbf{K}_3^W$, $\mathbf{K}_3^{\rightarrow}$:

(a) $x \vee (x \wedge y) = x$

(b) $x \wedge (x \vee y) = x$

Поглощение в $\mathbf{K}_3^{\leftarrow}$:

(a) $(y \wedge^{\leftarrow} x) \vee^{\leftarrow} x = x$

(b) $(y \vee^{\leftarrow} x) \wedge^{\leftarrow} x = x$

Не претерпевают изменения законы дистрибутивности:

(a) $x \vee (y \wedge z) = (x \vee y) \wedge (x \vee z)$

(b) $x \wedge (y \vee z) = (x \wedge y) \vee (x \wedge z)$

Во всех перечисленных логиках сохраняется истинность законов *де Моргана*, так как для одноместного оператора $\sim$ (инволюция) выполняются тождества:

$\sim\sim x = x$

$\sim (x \vee y) =\sim x \wedge \sim y$

$\sim (x \wedge y) =\sim x \vee \sim y$.

А также имеет место закон Клини:

(K) $(x \wedge \sim x) \vee (y \vee \sim y) = y \vee \sim y$,

в $\mathbf{K}_3^{\rightarrow}$ при условии, что дизъюнктивные члены переставлены местами:

(K') $(y \wedge^{\rightarrow} \sim y) \vee^{\rightarrow} (x \vee^{\rightarrow} \sim x) = y \vee^{\rightarrow} \sim y$.

Таким образом, **Lisp** и **TwinLisp** являются **некоммутативными алгебрами Клини**.

Для сравнения: сильная логика Клини $\mathbf{K}_3$ удовлетворяет условиям алгебры Клини, в ней имеют место все вышеперечисленные законы. В слабой логике Клини $\mathbf{K}_3^W$ не имеют места законы поглощения и закон Клини, соответственно $\mathbf{K}_3^W$ является квазирешеткой. В $\mathbf{K}_3^{\rightarrow}$, в отличие от $\mathbf{K}_3^W$, проходят законы поглощения и закон Клини (в них переставлены местами дизъюнктивные члены), но не проходит коммутативность. В $\mathbf{K}_3^{\leftarrow}$ имеют место все законы что и в $\mathbf{K}_3$, кроме коммутативности, в том числе и поглощение и закон Клини без каких либо изменений.

4 Взаимоотношения регулярных трехзначных логик.

В этой секции мы рассмотрим возможные отношения включения на множествах многозначных логик. Мы обоснуем, почему именно D-включение было выбрано нами для анализа логик Клини, более того, мы объясним почему этот род включения наиболее оптимален в данном контексте.

Одна многозначная логика может содержаться в другой в нескольких разных смыслах, [12].

1. Множество тавтологий логики X может содержать множество тавтологий логики Y. В таком случае говорят, что X *Т-содержит* Y. Например, большинство многозначных логик Т-содержится в классической.

2. Логика X может содержать логику Y в следующем смысле. Все истинностные значения Y также являются истинностными значениями X и если в таблице истинности для X вычеркнуть или стереть все колонки и ряды, которые являются дополнительными к таблице истинности Y, то останется просто таблица истинности для Y.

   В таком случае говорят, что X *S-содержит* Y (от слова исключение (suppression)). Например, четырехзначная логика $\mathbf{K}_4$ S-содержит $\mathbf{K}_3$, а регулярные логики Клини S-содержат классическую, в силу своей нормальности.

3. Логика X также может содержать логику Y, если мы можем идентифицировать каждое истинностное значение X с каким-либо истинностным значением Y, возможно, теряя в ходе этого процесса какие-либо истинностные значения, имевшиеся в системе Y. В этом случае говорят, что система X *I-содержит* Y (в смысле отождествления (identification)).

   Существуют алгебраические эквиваленты для некоторых типов включения. Так, X *S-содержит* Y, если Y является субалгеброй X. X *I-содержит* Y, если Y — это гомоморфное отображение X.

4. D-включение имеет место, когда все связки одной логики могут быть выражены через связки другой. То есть включение одной логики в другую происходит посредством определения (definition) связок одной через связки другой.

   Так, $\mathbf{K}_3$ может быть определена через логику Лукасевича $\mathbf{L}_3$, т. е. $\mathbf{L}_3$ *D-содержит* $\mathbf{K}_3$.

Можно доказать следующие соотношения:

(1) S-включение влечет Т-включение, но не наоборот.

(2) I-включение в общем случае не влечет T-включения, и наоборот.

(3) S-включение не влечет I-включения, и, обратно, I-включение не влечет S-включения.

Перейдем теперь к рассмотрению отношений между регулярными трехзначными логиками.

Итак, были рассмотрены регулярные трехзначные логики $\mathbf{K}_3$, $\mathbf{K}_3^W$, $\mathbf{K}_3^{\rightarrow}$, $\mathbf{K}_3^{\leftarrow}$. Таблицы истинности этих логик таковы, что не может идти речи об S- или I-включении. Однако очевидно, что мы с легкостью находим T- и D-включения между регулярными трехзначными логиками.

Обсудим сначала отношение T-включения. Что касается тавтологий, то ни одна из перечисленных логик не имеет тавтологий при одном выделенном значении. Таким образом, их взаимное T-включение тривиально.

Рассмотрим отношение D-включения. Как было определено ранее, отношение D-включения имеет место, если связки одной системы представимы через связки другой. Мы посвятим остаток этой статьи установлению взаимоотношений D-включения между регулярными логиками Клини.

5 D-включение регулярных логик Клини

Одним из первых проблемой перевода связок одной системы в другую заинтересовался Шестаков В. М. [9], его результаты касались определения функционально полных систем связок для трехзначных логик, а также их взамовыразимости. Как известно, вслед за переводами Шестакова появился перевод слабых связок Клини–Бочвара посредством сильных связок Клини, осуществленный В. К. Финном [8]:

$$p \cap q = (p \wedge q) \vee (p \wedge \sim p) \vee (q \wedge \sim q).$$

Также было показано, что хотя слабые связки и выразимы через сильные, но обратное соотношение не имеет места. То есть было показано, что между $\mathbf{K}_3$ и $\mathbf{K}_3^W$ существует отношение D-включения. Покажем, что между всеми четырьмя логиками $\mathbf{K}_3$, $\mathbf{K}_3^W$, $\mathbf{K}_3^{\rightarrow}$, $\mathbf{K}_3^{\leftarrow}$ существует отношение D-включения, и таким образом докажем высказанное Фиттингом предположение о том, что все регулярные связки, отличные от $\mathbf{K}_3$, $\mathbf{K}_3^W$, являются промежуточными между $\mathbf{K}_3$ и $\mathbf{K}_3^W$.

ТЕОРЕМА 1. *Логика* **Lisp** *является промежуточной между сильной и слабой логиками Клини, т. е.* $\mathbf{K}_3^W$ *D-включается в* $\mathbf{K}_3^{\rightarrow}$, *а* $\mathbf{K}_3^{\rightarrow}$ *D-включается в* $\mathbf{K}_3$.

Доказательство. Для доказательства теоремы достаточно осуществить определения связок **Lisp** через сильные связки Клини и слабых связок через связки **Lisp**.

Определения могут быть осуществлены следующим образом:

$$p \cap q = (p \wedge^{\rightarrow} q) \vee^{\rightarrow} (q \wedge^{\rightarrow} p)$$

$$p \cup q = (p \vee^{\rightarrow} q) \wedge^{\rightarrow} (q \vee^{\rightarrow} p)$$

$$p \vee^{\rightarrow} q = (\sim p \wedge q) \vee p$$

$$p \wedge^{\rightarrow} q = (\sim p \vee q) \wedge p.$$

Итак, $\mathbf{K}_3^{\rightarrow}$ может быть выражена через $\mathbf{K}_3$, а $\mathbf{K}_3^W$ — через $\mathbf{K}_3^{\rightarrow}$.

Обратное же не имеет места, иначе можно было бы доказать, что $\mathbf{K}_3$ эквивалентно $\mathbf{K}_3^{\rightarrow}$, и $\mathbf{K}_3^W$ эквивалентно $\mathbf{K}_3^{\rightarrow}$, а, значит, и то, что $\mathbf{K}_3$ эквивалентно $\mathbf{K}_3^W$, что неверно. Q.E.D.

ТЕОРЕМА 2. *Логика* **TwinLisp** *является промежуточной между сильной и слабой логиками Клини. То есть* $\mathbf{K}_3^W$ *D-включается в* $\mathbf{K}_3^{\leftarrow}$, *и* $\mathbf{K}_3^{\leftarrow}$ *D-включается в* $\mathbf{K}_3$.

Доказательство. Для доказательства осуществим определения более слабых связок через более сильные и докажем, что противоположные переводы не могут быть осуществлены.

$$p \cap q = (p \wedge^{\leftarrow} q) \vee^{\leftarrow} (q \wedge^{\leftarrow} p)$$

$$p \cup q = (p \vee^{\leftarrow} q) \wedge^{\leftarrow} (q \vee^{\leftarrow} p)$$

$$p \vee^{\leftarrow} q = (p \wedge \sim q) \vee q$$

$$p \wedge^{\leftarrow} q = (p \vee \sim q) \wedge q.$$

Факт, что обратные определения невозможны, доказывается от противного. Если бы $\mathbf{K}_3$ можно было выразить через $\mathbf{K}_3^{\leftarrow}$, а $\mathbf{K}_3^{\leftarrow}$ через $\mathbf{K}_3^W$, то $\mathbf{K}_3$ было бы эквивалентно $\mathbf{K}_3^{\leftarrow}$, и $\mathbf{K}_3^W$ эквивалентно $\mathbf{K}_3^{\leftarrow}$, а, значит, $\mathbf{K}_3$ было бы эквивалентно $\mathbf{K}_3^W$, что неверно. Q.E.D.

Таким образом, **Lisp** и **TwinLisp** являются промежуточными логиками между сильной и слабой логиками Клини по отношению D-включения. Нам осталось показать взаимоотношения этих двух промежуточных логик.

ТЕОРЕМА 3. *Логики* **Lisp** *и* **TwinLisp** *функционально эквивалентны. То есть* $\mathbf{K}_3^{\rightarrow}$ *D-включается в* $\mathbf{K}_3^{\leftarrow}$, *и* $\mathbf{K}_3^{\leftarrow}$ *D-включается в* $\mathbf{K}_3^{\rightarrow}$.

Доказательство.

$$p \vee^{\rightarrow} q = q \vee^{\leftarrow} p$$

$$p \vee^{\leftarrow} q = q \vee^{\rightarrow} p$$

Аналогично для конъюнкций. Q.E.D.

Взаимосвязь рассмотренных логик можно иллюстрировать так:

$$\begin{tikzcd}
& \mathbf{K_3} & \\
\mathbf{K_3^{\leftarrow}} \arrow[ur, "\subseteq^D"] \arrow[rr, Leftrightarrow, "\equiv^D"] & & \mathbf{K_3^{\rightarrow}} \arrow[ul, "\subseteq^D"'] \\
& \mathbf{K_3^W} \arrow[ul, "\subseteq^D"] \arrow[ur, "\subseteq^D"'] \arrow[uu, "\subseteq^D"'] &
\end{tikzcd}$$

Итак, имеется четырехэлементное множество, элементами которого являются рассмотренные трехзначные логики, и для доказательства существования между этими логиками решеточного порядка необходимо доказать существование супремума и инфинума для любых двух элементов данного множества. Между логиками $\mathbf{K}_3$, $\mathbf{K}_3^W$, $\mathbf{K}_3^{\rightarrow}$, $\mathbf{K}_3^{\leftarrow}$ было обнаружено отношение порядка по отношению выразимости одного множества связок через другое. Это отношение действительно является отношением порядка, поскольку оно рефлексивно, антисимметрично и транзитивно. Обозначим отношение D-включения как $\subseteq^D$. Используя теоремы 1 и 2, покажем, что $\mathbf{K}_3$ является супремумом, а $\mathbf{K}_3^W$ — инфинумом. Итак, для всех рассмотренных логик, $\mathbf{K}_3$ и $\mathbf{K}_3^W$ являются верхней и нижней гранями соответсвенно: легко проверить, что $(\forall X(X \subseteq^D \mathbf{K}_3))$ и $(\forall X(\mathbf{K}_3^W \subseteq^D X))$. Поскольку здесь верхняя и нижняя грань единственны, факт что $\mathbf{K}_3$ — наименьшая верхняя грань, а $\mathbf{K}_3^W$ — наибольшая нижняя грань устанавливается тривиальным образом. Итак, доказано, что логики Клини образуют решетку.

Заметим, что простое теоретико-множественное объединение и пересечение множеств связок промежуточных логик позволяет нам упорядочить регулярные логики Клини таким образом: $\mathbf{K}_3^{\rightarrow} \bigcup \mathbf{K}_3^{\leftarrow} \subseteq^D \mathbf{K}_3$, а $\mathbf{K}_3^{\rightarrow} \bigcap \mathbf{K}_3^{\leftarrow} \subseteq^D \mathbf{K}_3^W$. Однако неверно, что $\mathbf{K}_3^{\rightarrow} \bigcup \mathbf{K}_3^{\leftarrow} \equiv^D \mathbf{K}_3$, а $\mathbf{K}_3^{\rightarrow} \bigcap \mathbf{K}_3^{\leftarrow} \equiv^D \mathbf{K}_3^W$. Покажем это.

УТВЕРЖДЕНИЕ 4. *Через множество связок, полученное путем объединения множества связок логики $\mathbf{K}_3^{\rightarrow}$ с множеством связок логики $\mathbf{K}_3^{\leftarrow}$, невозможно получить сильные связки логики $\mathbf{K}_3$.*

Доказательство. Допустим, что существует формула, представляющая выражение какой-либо двухместной связки $\mathbf{K}_3$ через связки $\mathbf{K}_3^{\rightarrow}$ и $\mathbf{K}_3^{\leftarrow}$. Но, поскольку логики $\mathbf{K}_3^{\rightarrow}$ и $\mathbf{K}_3^{\leftarrow}$ взаимовыразимы, то искомая формула может быть преобразована в формулу, содержащую только связки $\mathbf{K}_3^{\rightarrow}$ или $\mathbf{K}_3^{\leftarrow}$. И, таким образом, мы получили бы формулу, с помощью которой мы могли бы доказать эквивалентность системы связок $\mathbf{K}_3^{\rightarrow}$(или $\mathbf{K}_3^{\leftarrow}$) и $\mathbf{K}_3$. Но, как было показано в теоремах 1 и 2, это невозможно. Утверждение доказано. Q.E.D.

УТВЕРЖДЕНИЕ 5. *Через множество связок, полученное путем пересечения множества связок логики $\mathbf{K}_3^{\rightarrow}$ с множеством связок логики $\mathbf{K}_3^{\leftarrow}$, невозможно получить слабые связки логики Клини $\mathbf{K}_3^W$.*

Доказательство. Пересечение множеств связок логик $\mathbf{K}_3^{\rightarrow}$ и $\mathbf{K}_3^{\leftarrow}$ дает следующее множество связок: $\{\equiv, \sim\}$. Нужно отметить, что эквивалентность в логиках $\mathbf{K}_3$, $\mathbf{K}_3^W$, $\mathbf{K}_3^{\rightarrow}$, $\mathbf{K}_3^{\leftarrow}$ определяется с помощью таблиц истинности абсолютно одинаково. То есть искомый перевод $\mathbf{K}_3^{\rightarrow} \cap \mathbf{K}_3^{\leftarrow} \equiv^D \mathbf{K}_3^W$ должен был бы заключаться в определении всех связок $\mathbf{K}_3^W$ через $\{\equiv, \sim\}$. Но множество $\{\equiv, \sim\}$ не является полной системой связок даже для классической логики, т. е. любая возможная формула выразимости $\wedge$, $\vee$ или $\supset$ через $\{\equiv, \sim\}$ будет проваливаться как минимум на классических значениях. Утверждение доказано. Q.E.D.

6 Заключение

Таким образом, были рассмотрены все возможные регулярные трехзначные логики, были рассмотрены их решеточные свойства, в том числе было определено, что $\mathbf{K}_3$ — представляет собой решетку, а также модель алгебры Клини, $\mathbf{K}_3^W$ — квазирешетка, а $\mathbf{K}_3^{\rightarrow}$ и $\mathbf{K}_3^{\leftarrow}$ — некоммутативные алгебры Клини. Кроме того, было показано, что множество всех трехзначных регулярных логик образует решетку по отношению D-включения, причем $\mathbf{K}_3$ — является супремумом, а $\mathbf{K}_3^W$ — инфинумом.

Литература

[1] *Бочвар Д. А.* Об одном трёхзначном исчислении и его применении к анализу парадоксов классического расширенного функционального исчисления // Математический сборник. 1938. Т. 4. № 2. С. 287–308.

[2] *Бочвар Д. А.* К вопросу о непротиворечивости одного трехзначного исчисления // Математический сборник. 1944. Т. 12. № 3. С. 353–359.

[3] *Карпенко А. С.* Многозначные логики (монография). Логика и компьютер. Вып. 4. М.: Наука, 1997.

[4] *Клини С. К.* Введение в метаматематику. М.: ИЛ, 1957.

[5] *Лукьяновская (Комендантская) Е. Ю.* Дипломная работа «Регулярные логики Клини». Кафедра логики философского ф-та МГУ. 2003.

[6] *Финн В.К.* Аксиоматизация некоторых трехзначных исчислений высказываний и их алгебр// Философия в современном мире: Философия и логика. М., 1974. С. 398–438.

[7] *Шестаков В. И.* О взаимоотношениях некоторых трехзначных логических исчислений // Успехи математических наук. 1964. Т. 19. Вып. 2. № 116. С. 177–181.

[8] *Fitting M.* Kleene's Three Valued Logics and Their Children // Fundamenta informaticae. 1992. Vol. 20. P. 113–131.

[9] *Fitting M.* A Kripke-Kleene semantics for logic programs // Journal of Logic Programming. 1985. Vol. 2. P. 295–213.

[10] *Fitting M.* Tableaux for many-valued modal logics // Studia Logica. 1995. Vol. 55. № 1. P. 63–87.

[11] *Hitzler P. and Seda A.* Characterizations of Classes of Programs by Three-Valued Operators // Proc. LPNMR'99, LNAI. Vol. 1730. P. 357–371.

[12] *Kripke S. A.* Outline of a theory of truth // Journal of Philosophical Logic. 1975. Vol. 72. P. 690–716.

[13] *Lukyanovskaya E.* Kleene Regular Intermediate Three-Valued Logics // Proceedings of Smirnov Readings, 4th Interantional Conference. IPhRAS. 2003. P. 80–82.

[14] *Rescher N.* Many-valued logics. N.Y.,1969. P. 55–62, 71–76.

[15] *Turner R.* Truth and modality for knowledge representation. London, 1990.

Семантика первопорядковой динамической логики знания[1]

Е. Е. Ледников

ABSTRACT. In the paper the semantics for DK_{pr}-logic (first order dynamic logic of knowledge) are proposed. In such semantics some intuitive properties of possible worlds semantics are used.

Ключевые слова: семантика, модальность, интерпретация, модель, знание, убежденность, доказательство, вера, мнение, сомнение, опровержение.

В работах [1, 2] была сформулирована в аксиоматической форме и в виде аналитических таблиц первопорядковая динамическая логика знания (далее будем ее обозначать как DK_{pr}-логику). Сформулирована она в первопорядковом языке PL_d, содержащем счетное множество индивидных и предикатных переменных и исходные логические символы $\{\sim, \&, \vee, \supset, \equiv, \forall, \exists, =, K_\varphi, C_\varphi, G_\varphi, T_\varphi, B_\varphi, D_\varphi, R_\varphi\}$. Напомним, что модальные операторы языка PL_d, характеризующие ментальные состояния субъекта φ в процессе познавательной деятельности, означают, соответственно, «субъект φ знает, что...», «субъект φ убежден в том, что...», «субъект φ доказывает, что...», «субъект φ верит, что...», «субъект φ полагает, что...», «субъект φ сомневается в том, что...», «субъект φ опровергает, что...». Все формулы вида $K_\varphi A, C_\varphi A, G_\varphi A, T_\varphi A, B_\varphi A, D_\varphi A, R_\varphi A$ или их отрицания, где A — формула классической первопорядковой логики, являются формулами DK_{pr}-логики. Также формулами DK_{pr}-логики являются все формулы вида $(\forall x)B$ и $(\exists x)B$ и их отрицания, где B — формула вида $\nabla_\varphi A$, причем A — формула классической первопорядковой логики, ∇_φ — один из модальных операторов DK_{pr}-логики. Также формулами DK_{pr}-логики являются

[1]Исследование поддержано РГНФ, проект № 07-03-00335а.

все формулы вида $K_\varphi \nabla_\varphi A$, поскольку субъекту φ должно быть позволено осознавать все свои ментальные состояния.

Естественно возникает вопрос, какой может быть семантика подобной модальной логики. Воспользуемся хорошо известной идеей семантики возможных миров. Нам потребуются для каждого модального оператора наборы возможных миров с отношением достижимости на них. Что должны представлять собой подобные миры? Возьмем, например, оператор личностного знания K_φ. В этом случае возможные миры — это, говоря словами Я. Хинтикки, «эпистемические альтернативы» знаниям субъекта φ в «действительном» мире [3]. Но знания выражаются в высказываниях. Значит, все миры должны содержать наборы высказываний — от простых, т. е. пропозициональных переменных, до сложных, образованных с помощью логических связок и кванторов. Думается, что такую степень логической образованности для субъекта φ мы вправе допустить. В противном случае, какой вообще смысл гворить о логике рассуждений, основанной на его знаниях? Далее, запас знаний субъекта всегда конечен, хотя, с известной долей идеализации, можно допустить, что он может быть сколь угодно большим. Эти запасы знаний базируются на описаниях состояния [4], представляющих собой множества атомарных высказываний или их отрицаний. Но, в отличие от Р. Карнапа, исследовавшего алетические модальности и поэтому говорившего только о полных описаниях состояния, мы будем допускать в качестве эпистемически возможных миров и неполные описания состояния, т. е. такие, в которых отсутствуют как некоторые атомарные высказывания, так и их отрицания, а, значит, отсутствуют и сложные высказывания, которые можно было бы построить из отсутствующих атомарных. Данное допущение выглядит вполне уместным, поскольку реальный носитель знаний никогда не обладает полными, исчерпывающими знаниями. По-видимому, подобные эпистемические альтернативы должны удовлетворять условию непротиворечивости, т. е. ни одно атомарное высказывание не должно входить ни в один эпистемически возможный мир наряду со своим отрицанием.

Все сказанное относится и к другим наборам альтернатив, за исключением условия непротиворечивости. Например, в описания состояния, лежащие в основе доксатических альтернатив, вполне могут входить некоторые атомарные высказывания одновременно с их отрицанием. В самом деле, вполне мыслима, например, ситуация, когда субъект мнения полагает, что предсказывать судьбу невозможно, и при этом в сложных жизненных обстоятельствах он без колебаний обращается к гадалкам. Но подобная непоследовательность может быть характерной и для других умственных состояний субъекта φ. Скажем, субъекту позволительно верить во взаимоисключающие, несовместимые вещи — разве не с этим феноменом мы сталкиваемся в случае религиозной веры некоторых ученых?

Перейдем теперь к построению семантики DK_{pr}-логики. Моделью M будет $(U, H, W^k, W^c, W^g, W^t, W^b, W^d, W^r, R^k, R^\nabla, Val)$, где U — предметная область индивидов $a, b, c, d \ldots$ — универсум рассуждения, H — выделенный («реальный») мир, W^k, W^c, W^g, W^t, W^b, W^d, W^r — множества миров (альтернатив) соответствующей индексу динамической модальности, R^k — отношение достижимости на W^k (на эпистемических альтернативах), R^∇ — отношение достижимости на альтернативах остальных видов модальностей, Val — функция приписывания значений выражениям языка PL_d — функция означивания. Отношение R^k обладает свойствами рефлексивности и транзитивности, на отношение R^∇ не наложено никаких ограничений.

Для каждой пары множеств миров W^k, W^∇ существует множество S такое, что $\{S\} = \{p, q, r, \ldots A_1, \ldots A_m\} = \{W_1^k\} \cap \{W_2^k\} \cap \ldots \{W_j^k\}$ (где j — число элементов в W^k), причем $\{S\} \subseteq \{W_i^\nabla\}$ для произвольного возможного мира W_i^∇. Другими словами, множество S — это общая часть эпистемических альтернатив, которая является подмножеством множества высказываний произвольной альтернативы W_i^∇.

Охарактеризуем теперь с помощью определений функцию означивания Val:

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 1. $Val(x_i) = a \in U$, т. е. любой предметной переменной x_i эта функция сопоставляет некоторый индивид a из предметной области U.

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 2. $Val(P_i^n) = V(P_i^n) = \{\langle a_1, a_2, \ldots a_n \rangle, \langle b_1, b_2, \ldots b_n \rangle, \ldots\}$, т. е. любой n-местной предикатной переменной P_i^n

функция Val сопоставляет объем V, состоящий из множеств упорядоченных n-ок индивидов из U.

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 3. $Val(A) = И$ или $Val(A) = Л$. Другими словами, любой формуле A языка PL_d функция Val сопоставляет семантический объект «истина» или семантический объект «ложь». Эту же мысль можно выразить как $M, W_i \models A$ или $M, W_i \not\models A$ — как выполнимость (соответственно, невыполнимость) формулы A в возможном мире W_i модели M (разумеется, при функции означивания Val, входящей в определение модели M). Отношение выполнимости $\models$ определяется следующим образом:

1) для элементарного высказывания p или его отрицания $\sim p$: $M,\ W_i \models p\ (\sim p)$, если $p(\sim p) \in W_i$;

2) для отрицания произвольного неэлементарного высказывания A, содержащего только те элементарные высказывания, которые принадлежат к W_i : $M, W_i \models\sim A$, если, $M, W_i \not\models A$; $M, W_i \not\models\sim A$, если $M, W_i \models A$;

3) для конъюнкции $A_1 \& A_2$: $M, W_i \models A_1 \& A_2$, если $M, W_i \models A_1$ и $M, W_i \models A_2$; $M, W_i \not\models A_1 \& A_2$, если $M, W_i \not\models A_1$ или $M, W_i \not\models A_2$;

4) для дизъюнкции $A_1 \vee A_2$: $M, W_i \models A_1 \vee A_2$, если $M, W_i \models A_1$ или $M, W_i \models A_2$; $M, W_i \not\models A_1 \vee A2$, если $M, W_i \not\models A_1$ и $M, W_i \not\models A_2$;

5) для импликации $A_1 \supset A_2$: $M, W_i \models A_1 \supset A_2$, если $M, W_i \not\models A_1$ или $M, W_i \models A_2$; $M, W_i \not\models A_1 \supset A_2$, если $M, W_i \models A_1$ и $M, W_i \not\models A_2$;

6) для высказывания о знании $K_\varphi A$: $M, W_i^k \models K_\varphi A$, если $M, W_j^k \models A$ в каждом W_j^k таком, что $W_i^k R^k W_j^k$, иначе $M, W_i^k \not\models K_\varphi A$;

7) для высказывания о любом ином ментальном состоянии субъекта φ: $M, W_i^\nabla \models \nabla_\varphi A$, если $M, W_j^\nabla \models A$ в каждом W_j^∇ таком, что $W_i^\nabla R^\nabla W_j^\nabla$, иначе $M, W_i^\nabla, \not\models \nabla_\varphi A$;

8) для элементарной формулы исчисления предикатов $P^n(x_{1...}x_n)$: $M, W_i \models P^n(x_{1...}x_n)$, если $\langle Val(x_1), \ldots Val(x_n)\rangle \in V(P^n)$, в противном случае $M, W_i \not\models P^n(x_{1...}x_n)$;

9) для формулы с квантором общности $(\forall x)A(x)$: $M, W_i \models (\forall x)A(x)$, если для каждой функции Val', отличающейся от Val самое большее приписыванием значения для x в $A(x)$, $M, W_i, Val' \models A(x)$. В противном случае, $M, W_i \not\models (\forall x)A(x)$;

10) для формулы с квантором существования $(\exists x)A(x) : M$, $W_i \models (\forall x)A(x)$, если существует хотя бы одна функция Val', отличающаяся от Val самое большее приписыванием значения для x в $A(x)$, такая, что $M, W_i, Val' \models A(x)$. В противном случае, $M, W_i \not\models (\exists x)A(x)$.

Высказывание A общезначимо ($\models A$), если $M, H \models A$ во всех своих моделях M.

Теперь следует остановиться на особенностях квантификации в модальных контекстах, или, как раньше было принято говорить, на *de re* модальностях. Как избежать известных модальных парадоксов, связанных с подставимостью тождественного, $\forall$-введением и $\exists$-удалением? Ранее нами указывалось [5], что значениями квантифицируемых переменных в эпистемических контекстах должны быть «известные» индивиды, а в доксатических контекстах (контекстах мнения) — так сказать, «полагаемые» индивиды. Обобщая данную идею, нам следует сделать вывод, что при построении DK_{pr}-логики потребуются также индивиды, в существовани которых субъект φ убежден, существование которых он доказал или подтвердил эмпирическими исследованиями, в существование которых он верит, в существовании которых он сомневается и существование которых он опровергает. Весь спектр подобных индивидов можно задать в языке PL_d посредством соответствующих индивидных дескрипций. Их можно считать, в духе идей Б. Рассела, «неполными» символами. Но вводиться в язык они должны контекстуальными определениями, отличающимися от расселовских. С учетом специфики возникающих в DK_{pr}-логике модальных контекстов, каждый объект квантификации должен удовлетворять условию, так сказать, «модального» существования и единственности — он должен существовать в единственном экземпляре не только в выделенном «реальном мире», но и в соответствующих наборах возможных миров.

А именно каждый известный субъекту φ индивид должен характеризоваться индивидной дескрипцией вида:

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 4. $E_k!(\iota x)A =_{df} (\exists y)[K_\varphi(A(y) \mathbin{\&} (\forall z)(A(z) \equiv . z = y))]$, контекстуально элиминируемой с помощью определения:

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 5. $[(\iota x)A]B(\iota x)A =_{df} (\exists y)[K_\varphi(A(y) \mathbin{\&} (\forall z)(A(z) \equiv . z = y)) \mathbin{\&} B(y)]$. Индивид, в существовании которого субъект φ убежден, будет характеризоваться индивидной дескрипцией вида:

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 6. $E_c!(\iota x)A =_{df} (\exists y)[C_\varphi(A(y) \mathbin{\&} (\forall z)(A(z) \equiv . z = y))]$, контекстуально элиминируемой с помощью определения:

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 7. $[(\iota x)A]B(\iota x)A =_{df} (\exists y)[C_\varphi(A(y) \mathbin{\&} (\forall z)(A(z) \equiv . z = y)) \mathbin{\&} B(y)]$.

Данная схема контекстуальных определений и элиминации справедлива для контекстов любых динамических модальностей:

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 8. $E_\nabla!(\iota x)A =_{df} (\exists y)[\nabla_\varphi(A(y) \mathbin{\&} (\forall z)(A(z) \equiv . z = y))]$,

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 9. $[(\iota x)A]B(\iota x)A =_{df} (\exists y)[\nabla_\varphi(A(y) \mathbin{\&} (\forall z)(A(z) \equiv . z = y)) \mathbin{\&} B(y))]$.

Во всех приведенных определениях выражение $[(\iota x)A]B(\iota x)A$ обозначает модализированную формулу B, содержащую на одном из аргументных мест индивидную дескрипцию $[(\iota x)A]$, причем область действия этой дескрипции максимальна. Выражения $E_k!(\iota x)A, E_c!(\iota x)A$ и $E_\nabla!(\iota x)A$ — соответственно утверждения об известном субъекту φ существовании и единственности объекта $(\iota x)A$, о существовании и единственности объекта $(\iota x)A$, в котором субъект φ убежден, о существовании и единственности объекта $(\iota x)A$, на который направлено одно из остальных ментальных состояний субъекта φ.

Исходя из сказанного, правила для кванторов в модальных контекстах DK_{pr}-логики уместно, в отличие от классической логики предикатов, переформулировать следующим образом:

($\forall$-удаление). Если $\vdash (\exists y)[\nabla_\varphi(A(y) \,\&\, (\forall z)(A(z) \equiv \centerdot\, z = y))]$, то $\vdash (\forall w)B_1(w) \supset B_2(\iota x)A$. Здесь ∇_φ — тот из личностных модальных операторов DK_{pr}-логики, в области действия которого находится индивидная дескрипция $(\iota x)A$ в формуле B_2. При этом модализированная формула B_2 отличается от модализированной формулы B_1 только вхождением индивидной дескрипции $(\iota x)A$ на место свободного вхождения индивидной переменной w.

($\exists$-введение). $\vdash B_2(\iota x)A \supset (\exists w)B_1(w)$. Опять модализированная формула B_2 отличается от модализированной формулы B_1 только вхождением индивидной дескрипции $(\iota x)A$ на место свободного вхождения индивидной переменной w. Следует обратить внимание на то обстоятельство, что контекстуальные определения формулы $B_2(\iota x)A$ (определения 5, 7, 9) предполагают ее истинность только при соответствующем модальном существовании и единственности дескрипции $(\iota x)A$. Поэтому дополнительная посылка такого рода была бы излишней.

Еще одна проблема квантификации в DK_{pr}-логике связана с нарушением в модальных контекстах правила подставимости тождественного (хорошо известный парадокс «Утренней Звезды» и «Вечерней Звезды» связан как раз с этим нарушением). Чтобы подобного парадокса не возникало, достаточно принять следующие два правила:

a) (=-подставимость индивидной дескрипции на место свободного вхождения индивидной переменной). Если $\vdash (\exists y)[\nabla_\varphi(A(y) \,\&\, (\forall z)(A(z) \equiv \centerdot\, z = y))]$, то $\vdash (\iota x)A = w \supset \centerdot\, B_1(w) \equiv B_2(\iota x)A$. Модализированная формула B_2 отличается от модализированной формулы B_1 только вхождением индивидной дескрипции $(\iota x)A$ на место свободного вхождения индивидной переменной w;

b) (=-подставимость одной индивидной дескрипции на место другой). Если $\vdash (\exists z_1)[\nabla_\varphi(A_1(z_1) \,\&\, (\forall y_1)(A_1(y_1) \equiv \centerdot\, y_1 = z_1))], \vdash (\exists z_2)[\nabla_\varphi(A_2(z_2) \,\&\, (\forall y_2)(A_2(y_2) \equiv \centerdot\, y_2 = z_2))]$, то $\vdash (\iota x_1)A_1 = (\iota x_2)A_2 \supset \centerdot\, B_1(\iota x_1)A_1 \equiv B_2(\iota x_2)A_2$. Модализированная формула B_2 отличается от модализированной формулы B_1 только вхождением индивидной дескрипции $(\iota x_2)A_2$ на место вхождения индивидной дескрипции $(\iota x_1)A_1$.

Может показаться, что построение DK_{pr}-логики ведет к существенному усложнению синтаксических правил языка. Однако приведенные правила детерминируются предложеной семантикой, не оставляющей нам свободы в их формулировках.

Литература

[1] *Ледников Е.Е.* Об одном варианте динамической логики знания // Логические исследования. Вып. 14. М., 2007. С. 218–223.

[2] *Ледников Е.Е.* Набросок первопорядковой кванторной динамической логики знания // Современная логика: проблемы теории, истории и применения в науке. Материалы X Общероссийской научной конференции 26–28 июня 2008 г. Санкт-Петербург, 2008. С. 287– 289.

[3] *Хинтикка Я.* Семантика пропозициональных установок // Логико-эпистемологические исследования. М., 1980. С. 68–101.

[4] *Карнап Р.* Значение и необходимость. М., 2000. С. 38–39.

[5] *Ледников Е.Е.* Некоторые особенности первопорядковой кванторной логики знания и мнения // Логические исследования. Вып. 12. М., 2005. С. 207–210.

Позитивная силлогистика С3$^+$ с константой исчерпываемости[1]

В. И. Маркин

abstract. We set out the syllogistic system **OC3**$^+$ with standard constants **a**, **e**, **i**, **o** and new constants **u** and **q**: the statement of the form $S\mathbf{u}P$ means "Everything is either S or P"; the statement of the form $S\mathbf{q}P$ means "Something is neither S nor P". We demonstrate that **OC3**$^+$ is embedded into the predicate calculus under the following translation χ: $\chi(S\mathbf{a}P) = \forall x\,(Sx \supset Px)\ \&\ \exists xSx\ \&\ \exists x\neg Px$, $\chi(S\mathbf{e}P) = \forall x\,(Sx \supset \neg Px)\ \&\ \exists xSx\ \&\ \exists xPx$, $\chi(S\mathbf{i}P) = \exists x\,(Sx\ \&\ Px) \vee \neg\exists xSx \vee \neg\exists xPx$, $\chi(S\mathbf{o}P) = \exists x\,(Sx\ \&\ \neg Px) \vee \neg\exists xSx \vee \neg\exists x\neg Px$, $\chi(S\mathbf{u}P) = \forall x\,(\neg Sx \supset Px)\ \&\ \exists x\neg Sx\ \&\ \exists x\neg Px$, $\chi(S\mathbf{q}P) = \exists x\,(\neg Sx\ \&\ \neg Px) \vee \neg\exists x\neg Sx \vee \neg\exists x\neg Px$, $\chi(\neg\mathbf{A}) = \neg\chi(\mathbf{A})$, $\chi(\mathbf{A}\nabla\mathbf{B}) = \chi(\mathbf{A})\nabla\,\chi(\mathbf{B})$, where ∇ is any binary connective.

Ключевые слова: силлогистика, исчисление предикатов, погружающая операция.

В.А. Смирновым [3] был предложен следующий перевод формул позитивной силлогистики в язык логики предикатов:

$\chi(S\mathbf{a}P) = \forall x\,(Sx \supset Px)\ \&\ \exists xSx\ \&\ \exists x\neg Px$,

$\chi(S\mathbf{e}P) = \forall x\,(Sx \supset \neg Px)\ \&\ \exists xSx\ \&\ \exists xPx$,

$\chi(S\mathbf{i}P) = \exists x\,(Sx\ \&\ Px) \vee \neg\exists xSx \vee \neg\exists xPx$,

$\chi(S\mathbf{o}P) = \exists x\,(Sx\ \&\ \neg Px) \vee \neg\exists xSx \vee \neg\exists x\neg Px$,

$\chi(\neg\mathbf{A}) = \neg\chi(\mathbf{A})$,

$\chi(\mathbf{A}\nabla\mathbf{B}) = \chi(\mathbf{A})\nabla\,\chi(\mathbf{B})$ (∇ — произвольная бинарная связка).

Легко заметить, что в соответствии с данным переводом в истинных общих высказываниях — как утвердительных, так и отрицательных — оба термина должны быть непустыми и неуниверсальными. Таким образом, согласно переводу χ константа **a** трактуется как знак отношения включения объема непустого и неуниверсального субъекта в объем непустого и неуниверсального предиката, а константа **e** — как знак отношения несовме-

[1] Работа выполнена при поддержке РГНФ, грант № 07-03-00314а.

стимости по объему двух непустых и неуниверсальных терминов.

Ранее [1] мною была построена система позитивной силлогистики $\mathbf{C3}^+$, которая погружается в классическое исчисление предикатов посредством перевода χ. Сформулируем данную систему в несколько модифицированном виде. Схемами аксиом $\mathbf{C3}^+$ являются

A0. Схемы аксиом классического исчисления высказываний,

A1.	$(M\mathbf{a}P \,\&\, S\mathbf{a}M) \supset S\mathbf{a}P$,	**A5**.	$S\mathbf{e}P \supset S\mathbf{a}S$,
A2.	$(M\mathbf{e}P \,\&\, S\mathbf{a}M) \supset S\mathbf{e}P$,	**A6**.	$S\mathbf{i}S$,
A3.	$S\mathbf{e}P \supset P\mathbf{e}S$,	**A7**.	$S\mathbf{i}P \equiv \neg S\mathbf{e}P$,
A4.	$S\mathbf{a}P \supset (S\mathbf{a}S \& P\mathbf{a}P)$,	**A8**.	$S\mathbf{o}P \equiv \neg S\mathbf{a}P$.

Единственное правило вывода в $\mathbf{C3}^+$ — *modus ponens*.

Основная трудность в доказательстве погружаемости $\mathbf{C3}^+$ в исчисление предикатов посредством χ заключалась в том, что в переводах некоторых силлогистических формул фигурируют формулы первопорядкового языка $\exists x \neg Sx$ и $\neg\exists x \neg Sx$, несущие информацию о неуниверсальности и универсальности термина S. Подобная информация невыразима в рамках системы фундаментальной позитивной силлогистики, адекватной стандартному перводу, а также в рамках дефинициально эквивалентных ей силлогистик.

Для преодоления указанной трудности была использована построенная мною [2] система обобщенной фундаментальной силлогистики (исчисление **ОФС**). В силлогистический язык, наряду с обычными константами **a**, **i**, **e**, **o**, вводятся дополнительно две новые константы **u** и **q**. Силлогистическая константа **u** трактуется как аналог отношения исчерпываемости, а **q** — как аналог отношения неисчерпываемости универсума. Эти отношения трактуются следующим образом: объемы субъекта и предиката высказывания находятся в отношении исчерпываемости, если и только если их объединение совпадает с универсумом; в противном случае, они находятся в отношении неисчерпываемости.

В языке появляются два новых типа элементарных формул: $S\mathbf{u}P$ и $S\mathbf{q}P$. $S\mathbf{u}P$ может быть прочитано так: «Всякий объект есть S или P», а $S\mathbf{q}P$ — следующим образом: «Некий объект не есть ни S, ни P». В языке системы **ОФС**, таким образом, имеются формулы, содержащие информацию об универсальности и о неуниверсальности термина S, — это выражения $S\mathbf{u}S$ и $S\mathbf{q}S$ соответственно.

Постулатами исчисления **ОФС** являются:

Ф0.	Схемы аксиом классического исчисления высказываний,		
Ф1.	$(M\mathbf{a}P \,\&\, S\mathbf{a}M) \supset S\mathbf{a}P$,	**Ф9.**	$S\mathbf{o}P \supset S\mathbf{i}S$,
Ф2.	$(M\mathbf{e}P \,\&\, S\mathbf{a}M) \supset S\mathbf{e}P$,	**Ф10.**	$S\mathbf{q}P \supset S\mathbf{q}S$,
Ф3.	$M\mathbf{a}P \,\&\, S\mathbf{u}M) \supset S\mathbf{u}P$,	**Ф11.**	$S\mathbf{o}P \supset S\mathbf{q}S$,
Ф4.	$(M\mathbf{u}P \,\&\, S\mathbf{e}M) \supset S\mathbf{a}P$,	**Ф12.**	$S\mathbf{i}P \equiv \neg S\mathbf{e}P$.
Ф5.	$S\mathbf{e}P \supset (P\mathbf{e}S$,	**Ф13.**	$S\mathbf{o}P \equiv \neg S\mathbf{a}P$.
Ф6.	$S\mathbf{u}P \supset P\mathbf{u}S$,	**Ф14.**	$S\mathbf{q}P \equiv \neg S\mathbf{u}P$.
Ф7.	$S\mathbf{a}S$,	**Ф15.**	$S\mathbf{i}S \vee S\mathbf{q}P$.
Ф8.	$S\mathbf{i}P \supset S\mathbf{i}S$,	**R1.**	*modus ponens.*

В [2] доказана теорема о погружаемости обобщенной позитивной силлогистики **ОФС** в исчисление предикатов посредством «фундаментального» перевода * — стандартной интерпретации в первопорядковом языке категорических высказываний, естественным образом расширенной в связи с добавлением формул видов $S\mathbf{u}P$ и $S\mathbf{q}P$:

$$
\begin{array}{ll}
(S\mathbf{a}P)^* = \forall x(Sx \supset Px), & (S\mathbf{i}P)^* = \exists x(Sx \,\&\, Px), \\
(S\mathbf{e}P)^* = \forall x(Sx \supset \neg Px), & (S\mathbf{o}P)^* = \exists x(Sx \,\&\, \neg Px), \\
(S\mathbf{u}P)^* = \forall x(Sx \vee Px), & (S\mathbf{q}P)^* = \exists x(\neg Sx \,\&\, \neg Px), \\
(\neg \mathbf{A})^* = \neg \mathbf{A}^*, & (\mathbf{A} \nabla \mathbf{B})^* = \mathbf{A}^* \nabla \mathbf{B}^*.
\end{array}
$$

Системы обобщенной позитивной силлогистики имеют самостоятельную значимость. В них преодолевается ограниченность стандартных силлогистик, где не представляется возможным выразить некоторые важные объемные отношения между двумя терминами (например, отношение исчерпываемости). Известно также, что конструкции «Всякий объект есть S или P» и «Некий объект не есть ни S, ни P» предлагал ввести в язык логических теорий А. Де Морган, поэтому обобщенные силлогистики представляют определенный интерес и с историко-логической точки зрения.

В [2] было сформулировано обобщение в языке с константами $\mathbf{a}$, $\mathbf{i}$, $\mathbf{e}$, $\mathbf{o}$, $\mathbf{u}$ и $\mathbf{q}$ не только фундаментальной позитивной силлогистики, но и традиционного варианта последней, который с семантической точки зрения базируется на принятии исходной предпосылки о непустоте и неуниверсальности всех терминов.

Аналогичная работа может быть проделана и для системы $\mathbf{C3}^+$. В данной статье будет предложено ее расширение — исчисление $\mathbf{OC3}^+$ в языке обобщенной позитивной силлогистики.

Возникает вопрос об условиях истинности и ложности новых типов формул в силлогистике, базирующейся на $\mathbf{C3}^+$. Выше уже говорилось, что общие высказывания предполагают здесь непустоту и неуниверсальность своих терминов. В силу того, что $S\mathbf{u}P$ также является общим высказыванием, его естественно трактовать как утверждение о том, что объединение объемов непустых и неуниверсальных терминов S и P совпадает с универсумом. Что же касается $S\mathbf{q}P$, то оно должно быть истинным в том и только в том случае, когда истинно $S\mathbf{u}P$.

Расширим в соответствии с указанной трактовкой определение функции χ:

$\chi(S\mathbf{u}P) = \forall x(\neg Sx \supset Px) \,\&\, \exists x\neg Sx \,\&\, \exists x\neg Px$,

$\chi(S\mathbf{q}P) = \exists x(\neg Sx \,\&\, \neg Px) \vee \neg\exists x\neg Sx \vee \neg\exists x\neg Px$.

Обобщенная позитивная силлогистика, соответствующая расширенному переводу χ, может быть аксиоматизирована следующим образом — к дедуктивным постулатам $\mathbf{C3}^+$ добавляются следующие схемы аксиом:

A9.	$(M\mathbf{a}P \,\&\, S\mathbf{u}M) \supset S\mathbf{u}P$,	**A12**.	$S\mathbf{u}P \supset S\mathbf{a}S$,
A10.	$(M\mathbf{u}P \,\&\, S\mathbf{e}M) \supset S\mathbf{a}P$,	**A13**.	$S\mathbf{q}S$,
A11.	$S\mathbf{u}P \supset P\mathbf{u}S$,	**A14**.	$S\mathbf{q}P \equiv \neg S\mathbf{u}P$,

Назовем полученное исчисление $\mathbf{OC3}^+$.

В дальнейшей части статьи излагается доказательство погружаемости системы $\mathbf{OC3}^+$ в классическое исчисление предикатов посредством вышеуказанного обобщения перевода χ В.А. Смирнова.

Идея этого доказательства состоит в использовании обобщенной фундаментальной силлогистики **ОФС** в качестве «промежуточной» системы: предварительно демонстрируется погружаемость $\mathbf{OC3}^+$ в **ОФС**, причем погружающая операция выбирается таким образом, что ее композиция с «фундаментальным» переводом * оказывается равносильной в исчислении предикатов функции χ.

Зададим перевод ψ_1 из $\mathbf{OC3^+}$ в $\mathbf{О\Phi С}$ такой, что $\psi_1(\mathbf{A})^*$ эквивалентна в исчислении предикатов $\chi(\mathbf{A})$ для любой силлогистической формулы $\mathbf{A}$:

$$
\begin{array}{ll}
\psi_1(S\mathbf{a}P) = S\mathbf{a}P \,\&\, S\mathbf{i}S \,\&\, P\mathbf{q}P, & \psi_1(S\mathbf{i}P) = S\mathbf{i}P \vee S\mathbf{e}S \vee P\mathbf{e}P,\\
\psi_1(S\mathbf{e}P) = S\mathbf{e}P \,\&\, S\mathbf{i}S \,\&\, P\mathbf{i}P, & \psi_1(S\mathbf{o}P) = S\mathbf{o}P \vee S\mathbf{e}S \vee P\mathbf{u}P,\\
\psi_1(S\mathbf{u}P) = S\mathbf{u}P \,\&\, S\mathbf{q}S \,\&\, P\mathbf{q}P, & \psi_1(S\mathbf{q}P) = S\mathbf{q}P \vee S\mathbf{u}S \vee P\mathbf{u}P,\\
\psi_1(\neg\mathbf{A}) = \neg\psi_1(\mathbf{A}), & \psi_1(\mathbf{A} \nabla \mathbf{B}) = \psi_1(\mathbf{A}) \nabla \psi_1(\mathbf{B}).
\end{array}
$$

В процессе доказательства погружаемости одной силлогистической системы в другую будем использовать предложенный В.А. Смирновым критерий: перевод ψ_1 погружает исчисление $\mathbf{S_1}$ в исчисление $\mathbf{S_2}$, е.т.е. (1) для произвольной формулы $\mathbf{A}$ языка $\mathbf{S_1}$, если $\mathbf{A}$ доказуема в $\mathbf{S_1}$, то $\psi_1(\mathbf{A})$ доказуема в $\mathbf{S_2}$; и существует перевод ψ_2 из $\mathbf{S_2}$ в $\mathbf{S_1}$, такой что (2) для произвольной формулы $\mathbf{A}$ языка $\mathbf{S_2}$, если $\mathbf{A}$ доказуема в $\mathbf{S_2}$, то $\psi_2(\mathbf{A})$ доказуема в $\mathbf{S_1}$, и (3) для любой формулы $\mathbf{A}$ языка $\mathbf{S_1}$ формула $\mathbf{A} \equiv \psi_2(\psi_1(\mathbf{A}))$ является теоремой $\mathbf{S_1}$.

ТЕОРЕМА 1. *Перевод ψ_1 погружает* $\mathbf{OC3^+}$ *в* $\mathbf{О\Phi С}$.

Доказательство.

Покажем сначала, что перевод ψ_1 удовлетворяет первой части критерия В.А. Смирнова. Применяем индукцию по длине доказательства формулы $\mathbf{A}$ в системе $\mathbf{OC3^+}$. Продемонстрируем сначала доказуемость ψ_1-перводов всех ее аксиом в исчислении $\mathbf{О\Phi С}$.

A0. Переводы аксиом данного типа являются аксиомами $\mathbf{О\Phi С}$.

A1. $\psi_1((M\mathbf{a}P \,\&\, S\mathbf{a}M) \supset S\mathbf{a}P) = (M\mathbf{a}P \,\&\, M\mathbf{i}M \,\&\, P\mathbf{q}P \,\&\, S\mathbf{a}M \,\&\, S\mathbf{i}S \,\&\, M\mathbf{q}M) \supset (S\mathbf{a}P \,\&\, S\mathbf{i}S \,\&\, P\mathbf{q}P)$ выводится непосредственно из $\mathbf{\Phi 1}$ по правилам классической логики высказываний **(КЛВ)**.

Аналогично обосновываются аксиомы типов **A2**, **A3**, **A6**, **A9**, **A10**, **A11** и **A13**:

A2. $\psi_1((M\mathbf{e}P \,\&\, S\mathbf{a}M) \supset S\mathbf{e}P) = (M\mathbf{e}P \,\&\, M\mathbf{i}M \,\&\, P\mathbf{e}P \,\&\, S\mathbf{a}M \,\&\, S\mathbf{i}S \,\&\, M\mathbf{q}M) \supset (S\mathbf{e}P \,\&\, S\mathbf{i}S \,\&\, P\mathbf{e}P)$ выводится из $\mathbf{\Phi 2}$;

A3. $\psi_1(SP \supset P\mathbf{e}S) = (S\mathbf{e}P \,\&\, S\mathbf{i}S \,\&\, P\mathbf{i}P) \supset (P\mathbf{e}S \,\&\, P\mathbf{i}P \,\&\, S\mathbf{i}S)$ выводится из **Ф5**;

A6. $\psi_1(S\mathbf{i}S) = S\mathbf{i}S \vee S\mathbf{e}S \vee S\mathbf{e}S$ выводится из частного случая **Ф12** ($S\mathbf{i}S \equiv \neg S\mathbf{e}S$);

A9. $\psi_1((M\mathbf{a}P \,\&\, S\mathbf{u}M) \supset S\mathbf{u}P) = (M\mathbf{a}P \,\&\, M\mathbf{i}M \,\&\, P\mathbf{q}P \,\&\, S\mathbf{u}M \,\&\, S\mathbf{q}S \,\&\, M\mathbf{q}M) \supset (S\mathbf{u}P \,\&\, S\mathbf{q}S \,\&\, P\mathbf{q}P)$ выводится из **Ф3**;

A10. $\psi_1((M\mathbf{u}P \,\&\, S\mathbf{e}M) \supset S\mathbf{a}P) = (M\mathbf{u}P \,\&\, M\mathbf{q}M \,\&\, P\mathbf{q}P \,\&\, S\mathbf{e}M \,\&\, S\mathbf{i}S \,\&\, M\mathbf{i}M) \supset (S\mathbf{a}P \,\&\, S\mathbf{i}S \,\&\, P\mathbf{q}P)$ выводится из **Ф4**;

A11. $\psi_1(S\mathbf{u}P \supset P\mathbf{u}S) = (S\mathbf{u}P \,\&\, S\mathbf{q}S \,\&\, P\mathbf{q}P) \supset (P\mathbf{u}S \,\&\, P\mathbf{q}P \,\&\, S\mathbf{q}S)$ выводится из **Ф6**;

A13. $\psi_1(S\mathbf{q}S) = S\mathbf{q}S \vee S\mathbf{u}S \vee S\mathbf{u}S$ выводится из частного случая **Ф14** ($S\mathbf{q}S \equiv \neg S\mathbf{u}S$).

A4. $\psi_1(S\mathbf{a}P \supset (S\mathbf{a}S \,\&\, P\mathbf{a}P)) = (S\mathbf{a}P \,\&\, S\mathbf{i}S \,\&\, P\mathbf{q}P) \supset (S\mathbf{a}S \,\&\, S\mathbf{i}S \,\&\, S\mathbf{q}S \,\&\, P\mathbf{a}P \,\&\, P\mathbf{i}P \,\&\, P\mathbf{q}P)$

1.	$(P\mathbf{e}P \,\&\, S\mathbf{a}P) \supset S\mathbf{e}P$	**Ф2**
2.	$S\mathbf{e}P \supset P\mathbf{e}S$	**Ф5**
3.	$(P\mathbf{e}S \,\&\, S\mathbf{a}P) \supset S\mathbf{e}S$	**Ф2**
4.	$(P\mathbf{e}P \,\&\, S\mathbf{a}P) \supset S\mathbf{e}S$	1,2,3;**КЛВ**
5.	$P\mathbf{i}P \equiv \neg P\mathbf{e}P$	**Ф12**
6.	$S\mathbf{i}S \equiv \neg S\mathbf{e}S$	**Ф12**
7.	$(S\mathbf{a}P \,\&\, S\mathbf{i}S) \supset P\mathbf{i}P$	4,5,6;**КЛВ**
8.	$(S\mathbf{a}P \,\&\, S\mathbf{u}S) \supset S\mathbf{u}P$	**Ф3**
9.	$S\mathbf{u}P \supset P\mathbf{u}S$	**Ф6**
10.	$(S\mathbf{a}P \,\&\, P\mathbf{u}S) \supset P\mathbf{u}P$	**Ф3**
11.	$(S\mathbf{a}P \,\&\, S\mathbf{u}S) \supset P\mathbf{u}P$	8,9,10;**КЛВ**
12.	$S\mathbf{q}S \equiv \neg S\mathbf{u}S$	**Ф14**
13.	$P\mathbf{q}P \equiv \neg P\mathbf{u}P$	**Ф14**
14.	$(S\mathbf{a}P \,\&\, P\mathbf{q}P) \supset S\mathbf{q}S$	11,12,13;**КЛВ**
15.	$S\mathbf{a}S$	**Ф7**
16.	$P\mathbf{a}P$	**Ф7**
17.	$(S\mathbf{a}P \,\&\, S\mathbf{i}S \,\&\, P\mathbf{q}P) \supset (S\mathbf{a}S \,\&\, S\mathbf{i}S \,\&\, S\mathbf{q}S \,\&\, P\mathbf{a}P \,\&\, P\mathbf{i}P \,\&\, P\mathbf{q}P)$	7,14,15,16;**КЛВ**

A5. $\psi_1(S\mathbf{e}P \supset S\mathbf{a}S) = (S\mathbf{e}P \,\&\, S\mathbf{i}S \,\&\, P\mathbf{i}P) \supset (S\mathbf{a}S \,\&\, S\mathbf{i}S \,\&\, S\mathbf{q}S)$

1.	$(S\mathbf{e}P \,\&\, P\mathbf{a}S) \supset P\mathbf{e}P$	**Ф2**
2.	$P\mathbf{o}S \equiv \neg P\mathbf{a}S$	**Ф13**
3.	$P\mathbf{i}P \equiv \neg P\mathbf{e}P$	**Ф12**
4.	$(S\mathbf{e}P \,\&\, P\mathbf{i}P) \supset P\mathbf{o}S$	1,2,3;**КЛВ**
5.	$P\mathbf{o}S \supset S\mathbf{q}S$	**Ф11**
6.	$S\mathbf{a}S$	**Ф7**
7.	$(S\mathbf{e}P \,\&\, S\mathbf{i}S \,\&\, P\mathbf{i}P) \supset (S\mathbf{a}S \,\&\, S\mathbf{i}S \,\&\, S\mathbf{q}S)$	4,5,6;**КЛВ**

A7. $\psi_1(S\mathbf{i}P \equiv \neg S\mathbf{e}P) = (S\mathbf{i}P \vee S\mathbf{e}S \vee P\mathbf{e}P) \equiv \neg(S\mathbf{e}P \,\&\, S\mathbf{i}S \,\&\, P\mathbf{i}P)$

1.	$S\mathbf{i}P \equiv \neg S\mathbf{e}P$	**Ф12**
2.	$S\mathbf{i}S \equiv \neg S\mathbf{e}S$	**Ф12**
3.	$P\mathbf{i}P \equiv \neg P\mathbf{e}P$	**Ф12**
4.	$(S\mathbf{i}P \vee S\mathbf{e}S \vee P\mathbf{e}P) \equiv \neg(S\mathbf{e}P \,\&\, S\mathbf{i}S \,\&\, P\mathbf{i}P)$	1,2,3;**КЛВ**

A8. $\psi_1(S\mathbf{o}P \equiv \neg S\mathbf{a}P) = (S\mathbf{o}P \vee S\mathbf{e}S \vee P\mathbf{u}P) \equiv \neg(S\mathbf{a}P \,\&\, S\mathbf{i}S \,\&\, P\mathbf{q}P)$

1.	$S\mathbf{o}P \equiv \neg S\mathbf{a}P$	**Ф13**
2.	$S\mathbf{i}S \equiv \neg S\mathbf{e}S$	**Ф12**
3.	$P\mathbf{q}P \equiv \neg P\mathbf{u}P$	**Ф14**
4.	$(S\mathbf{i}P \vee S\mathbf{e}S \vee P\mathbf{e}P) \equiv \neg(S\mathbf{e}P \,\&\, S\mathbf{i}S \,\&\, P\mathbf{i}P)$	1,2,3;**КЛВ**

A12. $\psi_1(S\mathbf{u}P \supset S\mathbf{a}S) = (S\mathbf{u}P \,\&\, S\mathbf{q}S \,\&\, P\mathbf{q}P) \supset (S\mathbf{a}S \,\&\, S\mathbf{i}S \,\&\, S\mathbf{q}S)$

1.	$(S\mathbf{u}P \,\&\, S\mathbf{e}S) \supset S\mathbf{a}P$	**Ф4**
2.	$S\mathbf{u}P \supset P\mathbf{u}S$	**Ф6**
3.	$(S\mathbf{u}P \,\&\, S\mathbf{e}S) \supset (S\mathbf{a}P \,\&\, P\mathbf{u}S)$	1,2;**КЛВ**
4.	$(S\mathbf{a}P \,\&\, P\mathbf{u}S) \supset P\mathbf{u}P$	**Ф4**
5.	$(S\mathbf{u}P \,\&\, S\mathbf{e}S) \supset P\mathbf{u}P$	3,4;**КЛВ**
6.	$S\mathbf{i}S \equiv \neg S\mathbf{e}S$	**Ф12**
7.	$P\mathbf{q}P \equiv \neg P\mathbf{u}P$	**Ф14**
8.	$(S\mathbf{u}P \,\&\, P\mathbf{q}P) \supset S\mathbf{i}S$	5,6,7;**КЛВ**
9.	$S\mathbf{a}S$	**Ф7**
10.	$(S\mathbf{u}P \,\&\, S\mathbf{q}S \,\&\, P\mathbf{q}P) \supset (S\mathbf{a}S \,\&\, S\mathbf{i}S \,\&\, S\mathbf{q}S)$	8,9;**КЛВ**

A14. $\psi_1(S\mathbf{q}P \equiv \neg S\mathbf{u}P) = (S\mathbf{q}P \vee S\mathbf{u}S \vee P\mathbf{u}P) \equiv \neg(S\mathbf{u}P \,\&\, S\mathbf{q}S \,\&\, P\mathbf{q}P)$ доказывается аналогично переводу **A7** с использованием **Ф14.**

Из определения ψ_1 следует, что если $\psi_1(\mathbf{A} \supset \mathbf{B})$ и $\psi_1(\mathbf{A})$ доказуемы в **ОФС**, то $\psi_1(\mathbf{B})$ также доказуема в этой системе. Первая часть доказательства теоремы 1 завершена.

В качестве обратного перевода из **ОФС** в $\mathbf{OC3}^+$ рассмотрим функцию ψ_2:

$\psi_2(S\mathbf{a}P) = S\mathbf{a}P \vee P\mathbf{o}P,$	$\psi_2(S\mathbf{i}P) = S\mathbf{i}P,$
$\psi_2(S\mathbf{e}P) = S\mathbf{e}P,$	$\psi_2(S\mathbf{o}P) = S\mathbf{o}P \,\&\, P\mathbf{a}P,$
$\psi_2(S\mathbf{u}P) = S\mathbf{u}P \vee S\mathbf{o}S \vee P\mathbf{o}P,$	$\psi_2(S\mathbf{q}P) = S\mathbf{q}P \,\&\, S\mathbf{a}S \,\&\, P\mathbf{a}P,$
$\psi_2(\neg\mathbf{A}) = \neg\psi_2(\mathbf{A}),$	$\psi_2(\mathbf{A} \nabla \mathbf{B}) = \psi_2(\mathbf{A}) \nabla \psi_2(\mathbf{B}).$

Перевод ψ_2 играет чисто вспомогательную роль и не является погружающей операцией. Покажем, что он удовлетворяет второй части критерия В.А. Смирнова.

Снова применяем индукцию по длине доказательства формулы $\mathbf{A}$ — на этот раз в системе **ОФС**. Продемонстрируем сначала доказуемость ψ_2-переводов всех ее аксиом в исчислении $\mathbf{OC3}^+$.

Ф0. Переводы аксиом данного типа являются аксиомами $\mathbf{OC3}^+$.

Ф1. $\psi_2((M\mathbf{a}P \,\&\, S\mathbf{a}M) \supset S\mathbf{a}P) = ((M\mathbf{a}P \vee P\mathbf{o}P) \,\&\, (S\mathbf{a}M \vee M\mathbf{o}M)) \supset (S\mathbf{a}P \vee P\mathbf{o}P)$.

1.	$(M\mathbf{a}P \,\&\, S\mathbf{a}M) \supset S\mathbf{a}P$	**A1**
2.	$(M\mathbf{a}P \,\&\, S\mathbf{a}M) \supset (S\mathbf{a}P \vee P\mathbf{o}P)$	1;**КЛВ**
3.	$M\mathbf{a}P \supset (M\mathbf{a}M \,\&\, P\mathbf{a}P)$	**A4**
4.	$M\mathbf{o}M \equiv \neg M\mathbf{a}M$	**A8**
5.	$\neg(M\mathbf{a}P \,\&\, M\mathbf{o}M)$	3,4;**КЛВ**
6.	$(M\mathbf{a}P \,\&\, M\mathbf{o}M) \supset (S\mathbf{a}P \vee P\mathbf{o}P)$	5;**КЛВ**
7.	$P\mathbf{o}P \supset (S\mathbf{a}P \vee P\mathbf{o}P)$	закон **КЛВ**
8.	$((M\mathbf{a}P \vee P\mathbf{o}P) \,\&\, (S\mathbf{a}M \vee M\mathbf{o}M)) \supset (S\mathbf{a}P \vee P\mathbf{o}P)$	3,6,7;**КЛВ**

Ф2. $\psi_2((M\mathbf{e}P \,\&\, S\mathbf{a}M) \supset S\mathbf{e}P) = (M\mathbf{e}P \,\&\, (S\mathbf{a}M \vee M\mathbf{o}M)) \supset S\mathbf{e}P$.

1.	$(M\mathbf{e}P \,\&\, S\mathbf{a}M) \supset S\mathbf{e}P$	**A2**
2.	$M\mathbf{e}P \supset M\mathbf{a}M$	**A5**
3.	$M\mathbf{o}M \equiv \neg M\mathbf{a}M$	**A8**
4.	$\neg(M\mathbf{e}P \,\&\, M\mathbf{o}M)$	2,3;**КЛВ**
5.	$(M\mathbf{e}P \,\&\, M\mathbf{o}M) \supset S\mathbf{e}P$	4;**КЛВ**
6.	$(M\mathbf{e}P \,\&\, (S\mathbf{a}M \vee M\mathbf{o}M)) \supset S\mathbf{e}P$	1,5;**КЛВ**

Ф3. $\psi_2((M\mathbf{a}P \,\&\, S\mathbf{u}M) \supset S\mathbf{u}P) = ((M\mathbf{a}P \vee P\mathbf{o}P) \,\&\, (S\mathbf{u}M \vee S\mathbf{o}S \vee M\mathbf{o}M)) \supset (S\mathbf{u}P \vee S\mathbf{o}S \vee P\mathbf{o}P)$.

1.	$(M\mathbf{a}P \,\&\, S\mathbf{u}M) \supset S\mathbf{u}P$	**A9**
2.	$(M\mathbf{a}P \,\&\, S\mathbf{u}M) \supset (S\mathbf{u}P \vee S\mathbf{o}S \vee P\mathbf{o}P)$	1;**КЛВ**
3.	$(M\mathbf{a}P \,\&\, S\mathbf{o}S) \supset (S\mathbf{u}P \vee S\mathbf{o}S \vee P\mathbf{o}P)$	закон **КЛВ**
4.	$M\mathbf{a}P \supset (M\mathbf{a}M \,\&\, P\mathbf{a}P)$	**A4**
5.	$M\mathbf{o}M \equiv \neg M\mathbf{a}M$	**A8**
6.	$\neg(M\mathbf{a}P \,\&\, M\mathbf{o}M)$	4,5;**КЛВ**
7.	$(M\mathbf{a}P \,\&\, M\mathbf{o}M) \supset (S\mathbf{u}P \vee S\mathbf{o}S \vee P\mathbf{o}P)$	6;**КЛВ**
8.	$P\mathbf{o}P \supset (S\mathbf{u}P \vee S\mathbf{o}S \vee P\mathbf{o}P)$	закон **КЛВ**
9.	$((M\mathbf{a}P \vee P\mathbf{o}P) \,\&\, (S\mathbf{u}M \vee S\mathbf{o}S \vee M\mathbf{o}M)) \supset$ $(S\mathbf{u}P \vee S\mathbf{o}S \vee P\mathbf{o}P)$	2,3,7,8;**КЛВ**

Ф4. $\psi_2((M\mathbf{u}P \,\&\, S\mathbf{e}M) \supset S\mathbf{a}P) = ((M\mathbf{u}P \vee M\mathbf{o}M \vee P\mathbf{o}P) \,\&\, S\mathbf{e}M) \supset (S\mathbf{a}P \vee P\mathbf{o}P)$.

1.	$(M\mathbf{u}P \,\&\, S\mathbf{e}M) \supset S\mathbf{a}P$	**A10**
2.	$(M\mathbf{u}P \,\&\, S\mathbf{e}M) \supset (S\mathbf{a}P \vee P\mathbf{o}P)$	1;**КЛВ**
3.	$S\mathbf{e}M \supset M\mathbf{e}S$	**A3**
4.	$M\mathbf{e}S \supset M\mathbf{a}M$	**A5**
5.	$M\mathbf{o}M \equiv \neg M\mathbf{a}M$	**A8**
6.	$\neg(M\mathbf{o}M \,\&\, S\mathbf{e}M)$	3,4,5;**КЛВ**
7.	$(M\mathbf{o}M \,\&\, S\mathbf{e}M) \supset (S\mathbf{a}P \vee P\mathbf{o}P)$	6;**КЛВ**
8.	$P\mathbf{o}P \supset (S\mathbf{a}P \vee P\mathbf{o}P)$	закон **КЛВ**
9.	$((M\mathbf{u}P \vee M\mathbf{o}M \vee P\mathbf{o}P) \,\&\, S\mathbf{e}M) \supset (S\mathbf{a}P \vee$ $P\mathbf{o}P)$	2,7,9;**КЛВ**

Ф5. $\psi_2(S\mathbf{e}P \supset P\mathbf{e}S) = S\mathbf{e}P \supset P\mathbf{e}S$ — аксиома **A3** системы **ОС3**$^+$.

Ф6. $\psi_2(S\mathbf{u}P \supset P\mathbf{u}S) = (S\mathbf{u}P \vee S\mathbf{o}S \vee P\mathbf{o}P) \supset (P\mathbf{u}S \vee P\mathbf{o}P \vee S\mathbf{o}S)$ выводится непосредственно из **A11** по правилам классической логики высказываний.

Ф7. $\psi_2(S\mathbf{a}S) = S\mathbf{a}S \vee S\mathbf{o}S$ выводится из частного случая **A8** $(S\mathbf{o}S \equiv \neg S\mathbf{a}S)$.

Ф8. $\psi_2(S\mathbf{i}P \supset S\mathbf{i}S) = S\mathbf{i}P \supset S\mathbf{i}S$ выводится из **A6**.

Ф9. $\psi_2(S\mathbf{o}P \supset S\mathbf{i}S) = (S\mathbf{o}P \,\&\, P\mathbf{a}P) \supset S\mathbf{i}S$ выводится из **A6**.

Ф10. $\psi_2(S\mathbf{q}P \supset S\mathbf{q}S) = (S\mathbf{q}P \,\&\, S\mathbf{a}S \,\&\, P\mathbf{a}P) \supset (S\mathbf{q}S \,\&\, S\mathbf{a}S \,\&\, S\mathbf{a}S)$ выводится из **A13**.

Ф11. $\psi_2(S\mathbf{o}P \supset P\mathbf{q}P) = (S\mathbf{o}P \,\&\, P\mathbf{a}P) \supset (P\mathbf{q}P \,\&\, P\mathbf{a}P \,\&\, P\mathbf{a}P)$ выводится из частного случая **A13** $(P\mathbf{q}P)$.

Ф12. $\psi_2(S\mathbf{i}P \equiv \neg S\mathbf{e}P) = S\mathbf{i}P \equiv \neg S\mathbf{e}P$ — аксиома **A7** системы **ОС3**$^+$.

Ф13. $\psi_2(S\mathbf{o}P \equiv \neg S\mathbf{a}P) = (S\mathbf{o}P \,\&\, P\mathbf{a}P) \equiv \neg(S\mathbf{a}P \vee P\mathbf{o}P)$

1.	$S\mathbf{o}P \equiv \neg S\mathbf{a}P$	**A8**
2.	$P\mathbf{o}P \equiv \neg P\mathbf{a}P$	**A8**
3.	$(S\mathbf{o}P \,\&\, P\mathbf{a}P) \equiv \neg(S\mathbf{a}P \vee P\mathbf{o}P)$	1,2;**КЛВ**

Ф14. $\psi_2(S\mathbf{q}P \equiv \neg S\mathbf{u}P) = (S\mathbf{q}P \,\&\, S\mathbf{a}S \,\&\, P\mathbf{a}P) \equiv \neg(S\mathbf{u}P \vee S\mathbf{o}S \vee P\mathbf{o}P)$

1.	$S\mathbf{q}P \equiv \neg S\mathbf{u}P$	**A14**
2.	$S\mathbf{o}S \equiv \neg S\mathbf{a}S$	**A8**
3.	$P\mathbf{o}P \equiv \neg P\mathbf{a}P$	**A8**
4.	$(S\mathbf{q}P \,\&\, S\mathbf{a}S \,\&\, P\mathbf{a}P) \equiv \neg(S\mathbf{u}P \vee S\mathbf{o}S \vee P\mathbf{o}P)$	1,2,3;**КЛВ**

Ф15. $\psi_2(S\mathbf{i}S \vee S\mathbf{q}S) = S\mathbf{i}S \vee S\mathbf{q}S \,\&\, S\mathbf{a}S \,\&\, S\mathbf{a}S$ выводится из **A6**.

Из определения ψ_2 следует, что если $\psi_2(\mathbf{A} \supset \mathbf{B})$ и $\psi_2(\mathbf{A})$ доказуемы в **ОС3**$^+$, то $\psi_2(\mathbf{B})$ также доказуема в этой системе. Вторая часть доказательства теоремы 1 завершена.

Остается продемонстрировать доказуемость в **ОС3**$^+$ формулы $\mathbf{A} \equiv \psi_2(\psi_1(\mathbf{A}))$ для произвольной $\mathbf{A}$. Применяем индукцию по числу пропозициональных связок в $\mathbf{A}$.

Рассмотрим сначала случаи, когда $\mathbf{A}$ не содержит пропозициональных связок.

(1) **A** есть $S\mathbf{a}P$. Тогда $\psi_2(\psi_1(\mathbf{A})) = \psi_2(S\mathbf{a}P \,\&\, S\mathbf{i}S \,\&\, P\mathbf{q}P) = (S\mathbf{a}P \vee P\mathbf{o}P) \,\&\, S\mathbf{i}S \,\&\, P\mathbf{q}P \,\&\, P\mathbf{a}P \,\&\, P\mathbf{a}P$.

1.	$P\mathbf{o}P \equiv \neg P\mathbf{a}P$	**A8**
2.	$((S\mathbf{a}P \vee P\mathbf{o}P) \,\&\, P\mathbf{a}P) \supset S\mathbf{a}P$	1;**КЛВ**
3.	$((S\mathbf{a}P \vee P\mathbf{o}P) \,\&\, S\mathbf{i}S \,\&\, P\mathbf{q}P \,\&\, P\mathbf{a}P \,\&\, P\mathbf{a}P) \supset S\mathbf{a}P$	2;**КЛВ**
4.	$S\mathbf{i}S$	**A8**
5.	$P\mathbf{q}P$	**A13**
6.	$S\mathbf{a}P \supset (S\mathbf{a}S \,\&\, P\mathbf{a}P)$	**A4**
7.	$S\mathbf{a}P \supset ((S\mathbf{a}P \vee P\mathbf{o}P) \,\&\, S\mathbf{i}S \,\&\, P\mathbf{q}P \,\&\, P\mathbf{a}P \,\&\, P\mathbf{a}P)$	4,5,6;**КЛВ**
8.	$S\mathbf{a}P \equiv ((S\mathbf{a}P \vee P\mathbf{o}P) \,\&\, S\mathbf{i}S \,\&\, P\mathbf{q}P \,\&\, P\mathbf{a}P \,\&\, P\mathbf{a}P)$	1,2,3;**КЛВ**

(2) **A** есть $S\mathbf{e}P$. Тогда $\psi_2(\psi_1(\mathbf{A})) = \psi_2(S\mathbf{e}P \,\&\, S\mathbf{i}S \,\&\, P\mathbf{i}P) = S\mathbf{e}P \,\&\, S\mathbf{i}S \,\&\, P\mathbf{i}P$

1.	$S\mathbf{i}S$	**A6**
2.	$P\mathbf{i}P$	**A6**
3.	$S\mathbf{e}P \equiv (S\mathbf{e}P \,\&\, S\mathbf{i}S \,\&\, P\mathbf{i}P)$	1,2;**КЛВ**

(3) **A** есть $S\mathbf{u}P$. Тогда $\psi_2(\psi_1(\mathbf{A})) = \psi_2(S\mathbf{u}P \,\&\, S\mathbf{q}S \,\&\, P\mathbf{q}P) = (S\mathbf{u}P \vee S\mathbf{o}S \vee P\mathbf{o}P) \,\&\, S\mathbf{q}S \,\&\, S\mathbf{a}S \,\&\, S\mathbf{a}S \,\&\, P\mathbf{q}P \,\&\, P\mathbf{a}P \,\&\, P\mathbf{a}P$.

1.	$S\mathbf{o}S \equiv \neg S\mathbf{a}S$	**A8**
2.	$P\mathbf{o}P \equiv \neg P\mathbf{a}P$	**A8**
3.	$((S\mathbf{u}P \vee S\mathbf{o}S \vee P\mathbf{o}P) \,\&\, S\mathbf{a}S \,\&\, P\mathbf{a}P) \supset S\mathbf{u}P$	1,2;**КЛВ**
4.	$\psi_2(\psi_1(S\mathbf{u}P)) \supset S\mathbf{u}P$	3;**КЛВ**
5.	$S\mathbf{u}P \supset S\mathbf{a}S$	**A12**
6.	$S\mathbf{u}P \supset P\mathbf{u}S$	**A11**
7.	$P\mathbf{u}S \supset P\mathbf{a}P$	**A12**
8.	$S\mathbf{u}P \supset P\mathbf{a}P$	6,7;**КЛВ**
9.	$S\mathbf{q}S$	**A13**

10.	$P\mathbf{q}P$	**A13**
11.	$S\mathbf{u}P \supset \psi_2(\psi_1(S\mathbf{u}P))$	5,8,9,10;**КЛВ**
12.	$S\mathbf{u}P \equiv \psi_2(\psi_1(S\mathbf{u}P))$	4,11;**КЛВ**

(4)-(6) Случаи, когда **A** имеет вид $S\mathbf{i}P$, $S\mathbf{o}P$ и $S\mathbf{q}P$ сводятся соответственно к случаям (2), (1) и (3) в силу определений переводов ψ_1 и ψ_2, а также аксиом **A0**, **A8**, **A7** и **A14** системы $\mathbf{OC3}^+$.

Случаи, когда **A** содержит пропозициональные связки, легко обосновываются с использованием индуктивного допущения и определений переводов ψ_1 и ψ_2.

Поскольку все три части критерия погружаемости В.А. Смирнова справедливы для перевода ψ_1 и систем $\mathbf{OC3}^+$ и **ОФС**, теорема 1 доказана. Q.E.D.

ТЕОРЕМА 2. *Обобщенный перевод χ погружает силлогистику $\mathbf{OC3}^+$ в классическое исчисление предикатов.*

Доказательство. Из только что установленного факта погружаемости системы $\mathbf{OC3}^+$ в **ОФС** посредством перевода ψ_1 и доказанной в [2] теоремы о погружаемости силлогистики **ОФС** в классическое исчисление предикатов посредством перевода * вытекает, что $\mathbf{OC3}^+$ погружается в исчисление предикатов посредством композиции переводов ψ_1 и *. Таким образом, произвольная формула **A** языка обобщенной силлогистики доказуема в системе $\mathbf{OC3}^+$ тогда и только тогда, когда формула $\psi_1(\mathbf{A})^*$ доказуема в исчислении предикатов.

Индукцией по числу пропозициональных связок в силлогистической формула **A** несложно доказать, что $\psi_1(\mathbf{A})^*$ логически эквивалентна в исчислении предикатов формуле $\chi(\mathbf{A})$, т. е. композиция переводов ψ_1 и * равносильна расширенному переводу χ. Отсюда следует, что формула $\psi_1(\mathbf{A})^*$ является теоремой первопорядкового исчисления в том и только в том случае, когда его теоремой является формула $\chi(\mathbf{A})$.

Из сказанного выше вытекает, что формула **A** языка обобщенной силлогистики доказуема в системе $\mathbf{OC3}^+$ тогда и только тогда, когда формула $\chi(\mathbf{A})$ доказуема в исчислении предикатов. Погружаемость силлогистики $\mathbf{OC3}^+$ в исчисление предикатов доказана. Q.E.D.

Литература

[1] *Маркин В.И.* Системы силлогистики, адекватные двум переводам силлогистических формул в исчисление предикатов В.А.Смирнова // Труды научно-иследовательского семинара логического центра Института философии РАН 1997. М.: ИФ РАН, 1998.

[2] *Маркин В.И.* Обобщенная позитивная силлогистика // Логические исследования. Вып.6. М.: РОССПЭН, 1999.

[3] *Смирнов В.А.* Адекватный перевод утверждений силлогистики в исчисление предикатов // Актуальные проблемы логики и методологии науки. Киев: Наукова думка, 1980.

Реверсивные конструктивные логики

Н. Н. Непейвода

abstract. The subject of the inquiry is a new class of constructive logics: reversive ones. They are induced by class of problems where all actions are to be reversible (i. e. each sequence of actions can be undone). Those actions do not lose and do not add information. Semantic of reversive logic is based on amalgam of realizability and modified Girard's idea. Worlds and actions in their models are elements of the same group. It is shown that reversive logic is formalizable and stated some basic properties of reversive logic.

Ключевые слова: реверсивная вычислимость, конструктивная логика, обратимые действия.

1 Реверсивная вычислимость и ее логика

Еще в 1961 г. Р. Ландауэр [1] указал важный род вычислений, не исследовавшийся ранее и мало исследуемый (хотя и не забытый) до сих пор.

Рассмотрим технический пример, подобный примеру Ландауэра. Пусть у нас есть компьютер, составленный из сверхпроводящих элементов. Для сохранения сверхпроводимости он должен охлаждаться, например, жидким водородом, поскольку выделение тепла может полностью разрушить его структуру. Таким образом, возникает вопрос: если нет «информационного трения» при обработке информации, можно ли организовать ее так, чтобы при вычислениях не выделялось тепло? Р. Ландауэр показал, что выделение тепла физически неизбежно, если операции компьютера *необратимы.* Тем самым возник вопрос о вычислениях, в которых все операции обратимы. Совокупность вычислимых функций, замкнутую относительно композиции и взятия обратной функции, назовем *реверсивной.*

Базируясь на идее Ландауэра, С. Беннет [2] предложил в 1973 г. создать логически реверсивный булев компьютер. Т. Тоффоли и Э. Фредкин [3, 4] показали, что можно смоделировать полное множество булевых операций на сверхпроводящем компьютере без нарушения условий Ландауэра. Р. Меркле [5] предложил другой вариант булевых реверсивных вычислений.

Конечно же, задание исходных данных и чтение результатов по самой своей природе не реверсивные операции, так что полностью исключить выделение тепла никогда не удастся.

Но реверсивность вычислений является отнюдь не исключительным свойством сверхпроводников. Например, «квантовая вычислимость» также реверсивна по самой своей природе (задание исходных данных и чтение результатов и здесь являются неустранимыми исключениями). В редакторах было бы крайне желательно обеспечить возможность обратимости всех операций вплоть до явного подтверждения сделанных изменений. В бизнесе обратимыми являются заказы и счета вплоть до их утверждения. Более того, разные заказы и счета являются тут не просто обратимыми, а независимыми, и здесь мы имеем пример *коммутативных реверсивных* действий.

Таким образом, реверсивность не является частным свойством некоторых булевых операций. Она характеризует интересный и важный общий класс вычислений, и поэтому представляет интерес конструктивная логика такого класса вычислений.

Нет большой неожиданности в том, что данная логика весьма отлична от конструктивных логик других классов вычислений: функциональной (интуционистской)[1], линейной и нильпотентной логики. Эти логики также исключительно сильно различаются между собой.

Маленькое замечание о терминологии. Поскольку имеется постоянное недоразумение с порядком композиций, заметим, что у нас композиция функций $f \circ g$ означает $a \xrightarrow{f} b \xrightarrow{g} c$.

2 Группа как состояния и операторы. Язык и семантика

Поскольку все действия в реверсивных вычислениях обратимы,

[1]Предлагаем называть ее именно так, поскольку она соответствует чистому типовому функциональному программированию, а термин «интуиционистская» крайне неудачен во всех отношениях, кроме исторического.

естественно рассматривать пространство действий как *группу*. Выскажем следующую идею[2]:

Пространство состояний та же самая группа, что и группа действий.

Тогда каждой пропозициональной букве сопоставляется подмножество группы[3], каждый элемент группы α представляет функцию $\lambda x.\, x \circ \alpha$.

Лексемами языка чистой реверсивной логики являются пропозициональные символы A, B, C, …, пять логических связок классической логики $\supset, \equiv, \wedge, \vee, \neg$, называемых *дескриптивными связками*, и три конструктивные логические связки $\Rightarrow, \&, \sim$. $\neg$ и $\sim$ — одноместные связки, все остальные двухместные. Сигнатура Σ — непустое множество пропозициональных символов.

Классические связки читаются обычным образом, $\Rightarrow$ читается как «можно преобразовать», $A\&B$ как «последовательная конъюнкция» или «A, затем B»[4], $\sim A$ — превентивное отрицание, читаемое в разных контекстах как «отменить A», «воспрепятствовать A».

Как говорится в современной литературе по информатике, дескриптивные и конструктивные связки полностью интероперабельны, могут смешиваться произвольно. Формула называется *дескриптивной*, если все ее логические связки классические. Если в формуле нет ни одной классической связки, она называется *чисто конструктивной*. Таким образом, пропозициональные символы одновременно являются и дескриптивными, и чисто конструктивными формулами.

Основное семантическое понятие "элемент *a реализует* формулу A в интерпретации I" ($I \models a Ⓡ A$). В случае, если интерпретация фиксирована, упоминание о ней опускаем.

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 1. *Интерпретация* сигнатуры Σ — пара из группы G и функции $\zeta : \Sigma \to \mathbb{P}G$ из множества пропозициональных символов в множество подмножеств G. Подмножество,

[2]Впервые такая идея была предложена и успешно развита Ж.-И. Жираром в линейной логике.

[3]Внимание! Не обязательно подгруппа: в этом коренное отличие от квантовых и им подобных логик!

[4]Впрочем, можно читать и как «и» в смысле знаменитых клиниевских примеров: «Маша вышла замуж и родила ребенка»,«Маша родила ребенка и вышла замуж».

сопоставляемое A в интерпретации I, обозначим $\zeta_I(A)$. Если I фиксировано, индекс опускаем.

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 2. Реализация формулы в интерпретации I.

1. $a®A \triangleq a \in \zeta(A)$, если A — пропозициональный символ и $A \in \Sigma$.

2. $a®A \wedge B \triangleq a®A$ и $a®B$.

3. Для других классических связок определения также стандартны.

4. $a®A \Rightarrow B \triangleq \forall b \in G(b®A \supset b \circ a®B)$. Итак, a преобразует решения A в решения B.

5. $a \circ b®A\&B \triangleq a®A \wedge b®B$. Решение B применяется к решению A.

6. $a® \sim A \triangleq a^{-1}®A$. a аннулирует решение A либо препятствует ему.

Множество реализаций A обозначим $®A$.

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 3. A *истинно* в интерпретации I, если $\{a|a®A\} = G$. A *общезначимо*, если A истинно в любой интерпретации ее сигнатуры. Общезначимость формулы A обозначается $\models A$.
A *реализуемо* в интерпретации I, если $\{a|a®A\} \neq \emptyset$. A *тождественно реализуемо*, если A реализуемо в любой интерпретации ее сигнатуры.

(Примечание для невежественных рецензентов. То, что пространство состояний — группа, а не полугруппа, и наличие & принципиально отличает нашу логику от линейной логики Ж.-И. Жирара (идейное влияние которой, конечно же, есть). То, что у нас есть $\sim$ и &, принципиально отличает ее от «исчислений областей». И, наконец, еще одно коренное отличие от указанных выше двух аналогов: неуклонное следование принципу, давно осознанному в нашей научной школе и упорно игнорируемому большинством прикладных математиков и информатиков: худший враг хороших систем — лишние возможности. Мы стремились включить в логическую систему лишь самое необходимое, чтобы иметь надежду не просто на разрешимость, а на достаточно эффективные алгоритмы разрешения и поиска вывода.)

3 Некоторые результаты

Первые две теоремы дают минимальные условия того, чтобы реверсивная логика могла претендовать на звание логического исчисления.

ТЕОРЕМА 4. *Множества общезначимых и тождественно реализуемых формул перечислимы.*

Доказательство. Пусть $\mathbf{G}_\Sigma$ — элементарная теория групп с дополнительными одноместными предикатами для всех символов Σ. Для новых предикатов аксиом нет. Определим перевод $\mathbf{T}(A,x)$ формул реверсивной логики в формулы $\mathbf{G}_\Sigma$ с единственной свободной переменной x.

1. $\mathbf{T}(A,x) \triangleq A(x)$ для пропозиционального символа A.
2. $\mathbf{T}(A \wedge B,x) \triangleq \mathbf{T}(A,x) \wedge \mathbf{T}(B,x)$.
3. $\mathbf{T}(A \vee B,x) \triangleq \mathbf{T}(A,x) \vee \mathbf{T}(B,x)$.
4. $\mathbf{T}(A \supset B,x) \triangleq \mathbf{T}(A,x) \supset \mathbf{T}(B,x)$.
5. $\mathbf{T}(\neg A,x) \triangleq \neg\mathbf{T}(A,x)$.
6. $\mathbf{T}(A \Longrightarrow B,x) \triangleq \forall y(\mathbf{T}(A,y) \supset \mathsf{Subst}[\mathbf{T}(B,x), y \circ x])$.
7. $\mathbf{T}(A\&B,x) \triangleq \exists y \exists z(\mathbf{T}(A,y) \wedge \mathbf{T}(B,z) \wedge x = y \circ z)$.
8. $\mathbf{T}(\sim A,x) \triangleq \exists y(\mathbf{T}(A,y) \wedge x = y^{-1})$.

Формула A общезначима тогда и только тогда, когда $\forall x\mathbf{T}(A,x)$ истинно во всех моделях $\mathbf{G}_\Sigma$, и, значит, тогда и только тогда, когда $\forall x\mathbf{T}(A,x)$ доказуемо в $\mathbf{G}_\Sigma$.

Соответственно, формула A тождественно реализуема тогда и только тогда, когда $\exists x\mathbf{T}(A,x)$ доказуемо в $\mathbf{G}_\Sigma$. Q.E.D.

СЛЕДСТВИЕ 5. *Можно построить исчисления для общезначимых и для реализуемых формул реверсивной логики.*

ПРОБЛЕМА 6. Явно построить исчисления для реверсивной логики.

ТЕОРЕМА 7. *Множества всех общезначимых и тождественно реализуемых формул реверсивной логики замкнуты относительно операции подстановки произвольной формулы вместо пропозиционального символа.*

Доказательство. Теорема следует из леммы, доказываемой непосредственной индукцией по определению реализуемости.

ЛЕММА 8. *Если $A[B]$ — формула с выделенной подформулой B, p — пропозициональный символ, в нее не входящий, и $\zeta(p) = \{a \mid a\circledR B\}$, то*

$$\{a \mid a\circledR A[B]\} = \{a \mid a\circledR A[p]\}\,.$$

Q.E.D.

4 Некоторые свойства реверсивной логики

Рассмотрим теперь некоторые особенности и выразительные свойства реверсивной логики.

УТВЕРЖДЕНИЕ 9. *A реализуемо (истинно, тождественно реализуемо, тождественно истинно) тогда и только тогда, когда соответственное свойство выполнено для $\sim A$.*

Доказательство. Множество X непусто тогда и только тогда, когда множество $\{x \mid x^{-1} \in X\}$ непусто. Если же X совпадает со всей группой, то $\{x \mid x^{-1} \in X\}$ также совпадает со всей группой.

Q.E.D.

Таким образом, внешне наша логика выглядит несколько необычной: она предельно противоречива в том смысле, что любое утверждение имеет тот же статус, что и его превентивное отрицание. Но это не означает конструктивной эквивалентности утверждения и его превентивного отрицания.

ПРИМЕР 10. Рассмотрим мультипликативную группу рациональных чисел. Пусть значение p есть $\{1, 2, 3\}$. Тогда множество реализаций $\sim p$ есть $\{1, \frac{1}{2}, \frac{1}{3}\}$. Нет такого рационального числа, при умножении которого на элементы первого множества получались бы элементы второго. Таким образом, $A \Rightarrow\sim A$ не всегда реализуемо.

УТВЕРЖДЕНИЕ 11. *Дескриптивная формула общезначима тогда и только тогда, когда она тождественно реализуема, и тогда и только тогда, когда она классически общезначима.*

Доказательство. Вторая эквивалентность следует из того, что для проверки общезначимости достаточно рассмотреть формулу на единичной группе и задать всевозможные присваивания значений пропозициональным буквам. Первая из того, что если формула не является общезначимой, то есть интерпретация, где она тождественно ложна (также на единичной группе). Q.E.D.

ТЕОРЕМА 12. *Ни одна чисто конструктивная формула не является общезначимой. Ни для одной чисто конструктивной формулы не является общезначимым ее классическое отрицание.*

Доказательство. Достаточно заметить, что, если придать всем пропозициональным буквам множество реализуемости {e}, то множество реализуемости всей формулы также будет e. Q.E.D.

Общезначимые формулы

(1) $\sim\sim A \equiv A$

Закон двойного превентивного отрицания.

(2) $((A\&B)\&C) \equiv (A\&(B\&C))$

Ассоциативность последовательной конъюнкции.

(3) $$\begin{gathered} A\&(A \Longrightarrow B) \supset B; \\ A \supset B\& \sim (A \Longrightarrow B). \end{gathered}$$

Таким образом, $\sim (B \Longrightarrow A)$ может рассматриваться как другой вид конструктивной импликации. Обычную импликацию можно называть инъективной, поскольку функция $\lambda x.\, x \circ a$ является инъекцией A в B. Вторая импликация сюръективна, поскольку $\sim (B \Longrightarrow A)$ отображает A на все B (и, возможно, куда-либо еще). Сюръективную импликацию обозначим $\sqsupset$.

(4) $A \supset (B \Rightarrow A\&B)$

Ни одну из импликаций в данной формуле нельзя заменить на другую.

(5) $\sim (A\&B) \equiv \sim B\& \sim A$

Соответствует известному тождеству в группах $(a \circ b)^{-1} = b^{-1} \circ a^{-1}$.

Тождественно реализуемые формулы

(6) $A \Rightarrow A$

Эта формула представляет пример тождественно реализуемой, но не общезначимой, формулы. В самом деле, возьмем аддитивную группу целых чисел и $\{0\}$ в качестве интерпретации A. Тогда ®$A \Rightarrow A = \{0\}$. Реализация этой формулы обязательно включает в себя единицу группы e, но не обязательно сводится к ней.

УТВЕРЖДЕНИЕ 13. *$A \Rightarrow A$ истинна тогда и только тогда, когда либо истинна A, либо истинна $\neg A$.*

Доказательство. Часть «тогда» очевидна. «Только тогда» докажем от противного. Пусть есть элементы a, b, такие, что $a \in$ ®A, $b \notin$ ®A. Тогда $a^{-1} \circ b \notin$ ®A. В самом деле

$$a \circ (a^{-1} \circ b) = (a \circ a^{-1}) \circ b = b.$$

Q.E.D.

(7) $B \Rightarrow (A \Rightarrow A\&B)$.

Реализацией этой формулы является, в частности, e. Перестановка посылок невозможна.

Формулы, характеризующие некоторые важные свойства

Формула

(8) $A\&B \equiv B\&A$,

выполненная как логический закон, характеризует коммутативные группы. Их же характеризует и приведенный ниже конструктивный закон контрапозиции.

(9) $(A \Rightarrow B) \equiv (\sim B \sqsupset \sim A)$. (Contraposition)

ПРОБЛЕМА 14. Доказать либо опровергнуть следующее. RL+Contraposition является реверсивной логикой коммутативных групп.

Истинность формулы

(10) $A\&(A \vee \neg A)$

означает непустоту A. В самом деле, если в A есть хотя бы один элемент, он дает в данном произведении все элементы группы. Формулу (10) обозначим $\exists A$.

ПРОБЛЕМА 15. Из наличия предыдущей формулы следует, что из разрешимости множества общезначимых формул следует разрешимость множества тождественно реализуемых. Разрешимы ли множества общезначимых и (или) тождественно реализуемых формул?

ПРОБЛЕМА 16. Можно ли выразить непустоту, не используя связки &?

Установим несколько общезначимых формул.

(11) $\exists(A\&B) \equiv (\exists A \wedge \exists B)$.

(12) $\exists A \equiv \exists \sim A$.

(13) $(\exists A \wedge \exists \neg B) \equiv \exists \neg(A \Rightarrow B)$.

(14) $(\neg \exists A \vee \neg \exists \neg A) \equiv \neg \exists \neg(A \Rightarrow A)$.

Докажем важную формулу.

(15) $(\exists(A \Rightarrow B) \equiv \exists(B \Rightarrow A)) \equiv ((A \Rightarrow B) \equiv\sim (B \Rightarrow A))$.

Доказательство. В случае, когда обе формулы $\exists(A \Rightarrow B)$ и $\exists(B \Rightarrow A)$ ложны, оба множества реализуемости из заключения пусты.

В случае, если оба они непусты, и a®$(A \Rightarrow B)$, b®$(B \Rightarrow A)$, то $(b^{-1} \circ b) \circ a = b^{-1} \circ (b \circ a)$, и, значит, b^{-1}®$(A \Rightarrow B)$. Обратная импликация доказывается аналогично.

Если одно из этих множеств пусто, а второе нет, то ложность тождества в заключении очевидна. Q.E.D.

Истинность формулы

(16) $(A\&A \equiv A) \wedge (A \equiv\sim A) \wedge \exists A$

означает, что ®A есть подгруппа.

5 Расширенная реверсивная логика

Добавим к RL пропозициональную константу E, интерпретацией которой является множество $\{e\}$.

УТВЕРЖДЕНИЕ 17. *E невыразима в RL.*

Доказательство. Рассмотрим произвольную формулу RL и произвольную пару групп G_1, G_2, где G_1 является нетривиальной фактор-группой G_2. Возьмем некоторую интерпретацию I_1 пропозициональных букв на G_1. Определим $I_2(P, x)$ как $I_1(P, \hat{x})$. Тогда ®$_{I_2}A = \{x \mid \hat{x}$®$_{I_1}A\}$. Таким образом, если ®$_{I_1}A = \{e\}$, ®$_{I_2}A = \{x|\hat{x} = e\}$. Q.E.D.

Расширенный вариант RL обозначим ERL. Наши теоремы переносятся на ERL. В ERL выразимы некоторые свойства, невыразимые в RL. Одно из них — A истинно на единственном элементе. Определим $\exists_1 A$ как

(17) $\exists(A \Rightarrow E) \wedge \exists A$.

Доказательство того, что $\exists_1 A$ невыразимо в RL, совершенно аналогично предложению 4.

Контекст $A \Rightarrow E$ — единственный контекст, где E меняет значение конструктивных связок.

(18) $(E \Rightarrow A) \equiv A \qquad (E\&A) \equiv A \qquad (A\&E) \equiv A \qquad \sim E \equiv E$

6 Логическая теория групп

Рассмотрение реверсивной логики подводит к следующей математической теории, лежащей на грани между алгеброй и логикой, которая, насколько известно автору, не изучалась, поскольку алгебраисты «зациклились» на том, что основным и необходимым предикатом является равенство.

Рассмотрим некоторую пропозициональную сигнатуру Σ. Все пропозициональные буквы превратим в одноместные предикаты. Равенства нет. Имеются двухместная операция $\circ$ и одноместная операция $^{-1}$.

$\tilde{\forall}$ означает совокупность кванторов всеобщности по всем свободным переменным последующей формулы. Пусть $t[u]$ — терм с выделенным вхождением переменной u, а $t[r]$, соответственно, результат замены этого выделенного вхождения на терм r. Теория $\mathbf{G}^0_\Sigma$ состоит из всех аксиом вида

$$\begin{gathered}\tilde{\forall}\forall x, y, z(P(t[x \circ (y \circ z)]) \equiv P(t[(x \circ y) \circ z)]) \\ \tilde{\forall}\forall x, y(P(t[x \circ (y \circ y^{-1})]) \equiv P(t[x])) \\ \tilde{\forall}\forall x, y(P(t[(y \circ y^{-1}) \circ x]) \equiv P(t[x])) \\ \tilde{\forall}\forall x, y(P(t[y \circ y^{-1}]) \equiv P(t[x \circ x^{-1}]))\end{gathered} \tag{19}$$

для всех P из Σ.

Не любая модель данной теории является группой, но фактор-модель любой модели по отношению эквивалентности

$$\Big\{< a, b >\mid \forall t \in \mathrm{Term}, P \in \Sigma \models \tilde{\forall}(P(t[a]) \equiv P(t[b])))\Big\}$$

является группой. Здесь Term — множество всех термов, FV — множество свободных переменных терма. Таким образом, данная теория является полной логической теорией одноместных предикатов на группах. Понятие реализуемости формул реверсивной логики формулируется в данной теории.

ПРОБЛЕМА 18. Верно ли, что по выразительным способностям $\mathbf{G}^0_\Sigma$ и RL совпадают в следующем смысле:
Для каждой замкнутой формулы $\mathbf{G}^0_\Sigma$ можно построить формулу RL, истинную тогда и только тогда, когда истинна исходная формула?

ПРОБЛЕМА 19. Верно ли, что по выразительным способностям реализуемости $\mathbf{G}^0_\Sigma$ и RL совпадают в следующем смысле: Для каждой формулы $A(x)$ теории $\mathbf{G}^0_\Sigma$ с одной свободной переменной x можно построить формулу RL A, такую, что в любой интерпретации на группе

$$\{x \mid x \circledR A\} = \{x \mid \models A(x)\}?$$

Расширение логической теории групп для E включает следующее множество аксиом для всех $P \in \Sigma$.

$$\forall x\, E(x \circ x^{-1}) \qquad \forall x\, (\exists x(E(x) \wedge A(x)) \equiv A(x \circ x^{-1}))$$

Для этого расширения можно поставить задачи, аналогичные задачам 5 и 6.

7 Набросок альтернативного подхода: типизированная реверсивная логика

Десять лет назад автором была предложена первая система реверсивной логики, но она оказалась неудовлетворительной по многим критериям: как по практической приемлемости для задач анализа проблем информатики, так и по эстетическим и внутрилогическим критериям. Бестиповая реверсивная логика кажется намного лучше, но необходимо показать и возможность типового подхода.

Самым сильным предположением нашей реверсивной логики является то, что пространство состояний и действий — практически одно и то же: группа G и ее автоморфизмы вида $\lambda x.\, a \circ x$. Но у группы G могут быть и другие автоморфизмы, и даже вычислимые.

Второе предположение нашей логики — замена традиционной конъюнкции на последовательную конъюнкцию. Традиционная конъюнкция также прекрасно представима в теории групп, но в этом случае реализацией ее является уже другая группа: прямое произведение групп, реализующих ее члены.

А вот почему нет дизъюнкции, при таком подходе становится полностью понятно: в категории групп нет прямой суммы. В категории коммутативных групп она есть, но там она совпадает с прямым произведением. Так что отсутствие конструктивной дизъюнкции — фундаментальный феномен реверсивности.

Есть некоторый непустой подкласс групп, которые естественно назвать *логическими группами*: группы, изоморфные собственной группе автоморфизмов и прямому произведению самой на себя. *Слабо логическая группа* — группа G, изоморфная $G \times G$, и такая, что есть изоморфизм $\phi : G \leftrightarrow G \times G$, такой, что для всякой пары $\langle a, b\rangle$ имеется такое c, что

$$\phi \circ (\lambda x.\, x \circ \langle a, b\rangle) \circ \phi^{-1} = \lambda x.\, c \circ x.$$

На логических и слабо логических группах можно интерпретировать бестиповую реверсивную логику с двумя конъюнкциями: последовательной и почти традиционной.

Но классы логических и слабо логических групп не являются многообразиями, они очень узки и поэтому непонятно, будет ли соответствующая логика формализуемой.

Рассмотрим другую конструкцию.

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 20. Реверсивные типы и их изоморфность задаются следующим одновременным индуктивным определением.

1. 0 — тип.
2. $\tau \simeq \tau$, где τ — произвольный реверсивный тип.
3. Если $\tau \simeq \pi$, то $\pi \simeq \tau$.
4. Если $\tau \simeq \pi$ и $\pi \simeq \rho$, то $\tau \simeq \rho$.
5. Если τ и π — типы, то $(\tau \to \pi)$ — тип.
6. Если $\tau \simeq \rho$, то $(\tau \to \pi) \simeq (\rho \to \pi)$ и $(\pi \to \tau) \simeq (\pi \to \rho)$.
7. Если $\tau_1,\ \ldots, \tau_n$ — типы, $a_1,\ \ldots, a_n$ — различные слова, то $(a_1 : \tau_1 \times \cdots \times a_n : \tau_n)$ — тип.
8. $(a_1 : \tau_1 \times \cdots \times a_i : \tau_i \times a_{i+1} : \tau_{i+1} \times \cdots \times a_n : \tau_n) \simeq (a_1 : \tau_1 \times \cdots \times a_{i+1} : \tau_{i+1} \times a_i : \tau_i \times \cdots \times a_n : \tau_n)$, где $1 \leqslant i < n$.
9. Если $\tau \simeq \rho$, то

$$(a : \tau \times a_1 : \tau_1 \times \cdots a_n : \tau_n) \simeq (a : \rho \times a_1 : \tau_1 \times \cdots a_n : \tau_n).$$

Из этого определения очевидно следуют простейшие свойства $\simeq$.

$$((\tau \to \pi) \simeq (\tau_1 \to \pi_1)) \iff (\tau \simeq \tau_1) \wedge (\pi \simeq \pi_1);$$
$$((a : \tau \times b : \pi) \simeq (a : \tau_1 \times b : \pi_1)) \iff (\tau \simeq \tau_1) \wedge (\pi \simeq \pi_1);$$
$$((a : \tau \times b : \pi) \simeq (b : \pi_1 \times a : \tau_1)) \iff ((\tau \simeq \pi_1) \wedge (\pi \simeq \tau_1)).$$

Теперь определим естественный изоморфизм над любой парой изоморфных типов, предполагая, что функции и прямые произведения интерпретируются естественно. При этом не предполагается, что интерпретация функционального типа включает в себя *все* функции; но множество всех интерпретаций обязательно замкнуто относительно композиции.

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 21. Естественный изоморфизм $e_{(\tau \to \pi)}$ изоморфных типов.

1. $e_{(\tau \to \tau)} = \lambda x.\, x.$
2. $e_{((a_1:\tau_1 \times \cdots \times a_n:\tau_n) \to (a_1:\rho_1 \times \cdots \times a_n:\rho_n))} = (e_{(\tau_1 \to \rho_1)} \times \cdots \times e_{(\tau_n \to \rho_n)}).$
3. Для произведений
   $\tau = (\tau_1 \times \cdots \times a_n : \tau_n)$ и $\rho = (a_{\vartheta(1)} : \rho_{\vartheta(1)} \times \cdots \times a_{\vartheta(n)} : \tau_{\vartheta(n)})$,
   где ϑ — перестановка чисел $[1, \ldots, n]$,
   $e_{(\tau \to \rho)} = (e_{(\tau \to \tau_1)} \times e_{(\rho \to \rho_1)}) \circ \lambda x. \left\langle \mathrm{pr}_{\vartheta(1)}\ x,\ \ldots,\ \mathrm{pr}_{\vartheta(n)}\ x \right\rangle.$
4. $e_{((\tau \to \rho) \to (\tau_1 \to \rho_1))} = (e_{(\tau_1 \to \tau)} \circ e_{(\tau \to \rho)} \circ e_{(\rho \to \rho_1)}).$

Это определение корректно и удовлетворяет необходимому свойству стандартных изоморфизмов:

$$e_{(\tau \to \pi)} \circ e_{(\pi \to \rho)} = e_{(\tau \to \rho)}.$$

Оно же мотивирует введение меток членов прямого произведения: без меток невозможно однозначно определить стандартные изоморфизмы.

Пусть дан некоторый универсум состояний — группа S. Построим над ним башню групп. Интерпретации типов $\tau \to \tau$ в этой башне являются группами, остальные — просто множествами биекций.

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 22. Интерпретация типов.

1. $\mathfrak{I}\lfloor 0 \rfloor = S$.

2. Для каждого класса эквивалентности типов, имеющих вид $\tau \to \tau$, где τ имеет такую же форму, выберем некоторый представитель класса τ и для него определим $\mathfrak{I}\lfloor(\tau \to \tau)\rfloor$ как некоторую подгруппу Aut $\mathfrak{I}\lfloor\tau\rfloor$.

3. Для остальных типов, имеющих вид $\tau_1 \to \tau_2$, где τ_i имеют такую же форму (и по нашему определению должны быть эквивалентны), и ρ является представителем их класса эквивалентности, положим $\mathfrak{I}\lfloor(\tau_1 \to \tau_2)\rfloor =$ $\{\varphi \mid \exists\psi\,(\psi \in \mathfrak{I}\lfloor(\rho \to \rho)\rfloor \wedge \varphi = e_{(\tau_1 \to \rho)} \circ \psi \circ e_{(\rho \to \tau_2)}\}$.

4. Для произведений $\mathfrak{I}\lfloor(a_1 : \tau_1 \times \cdots \times a_n : \tau_n)\rfloor = \mathfrak{I}\lfloor a_1 : \tau_1\rfloor \times \cdots \times \mathfrak{I}\lfloor a_n : \tau_n\rfloor$. Если все эти типы являются группами, то *times* понимается как прямое произведение групп преобразований.

5. Для функций из произведения в произведение с одинаковыми метками и типами $\mathfrak{I}\lfloor((a_1 : \tau_1 \times \cdots \times a_n : \tau_n) \to (a_1 : \tau_1 \times \cdots \times a_n : \tau_n))\rfloor =$ $\mathfrak{I}\lfloor(a_1 : \tau_1 \to a_1 : \tau_1)\rfloor \times \cdots \times \mathfrak{I}\lfloor(a_n : \tau_n \to a_n : \tau_n)\rfloor$, где $\times$ понимается как прямое произведение групп преобразований.

6. Для остальных функций из произведения $\tau = (\tau_1 \times \cdots \times a_n : \tau_n)$ в произведение $\rho = (a_{\vartheta(1)} : \rho_{\vartheta(1)} \times \cdots \times a_{\vartheta(n)} : \tau_{\vartheta(n)})$, где ϑ — перестановка чисел $[1, \ldots, n]$, положим $\mathfrak{I}\lfloor(\tau \to \rho)\rfloor = \{\varphi \mid \exists\psi\,(\psi \in \mathfrak{I}\lfloor(\tau \to \tau)\rfloor) \wedge \varphi = \psi \circ e_{(\tau \to \rho)})\}$.

УТВЕРЖДЕНИЕ 23. *Для каждого типа $\tau \to \rho$ можно найти такой тип $\pi \to \pi$, что*

$$\mathfrak{I}\lfloor(\tau \to \rho)\rfloor = \{\varphi \mid \exists\psi\,(\psi \in \mathfrak{I}\lfloor(\pi \to \pi)\rfloor \wedge \varphi = e_{(\tau \to \pi)} \circ \psi \circ e_{(\pi \to \rho)})\}\,.$$

Легко доказывается индукцией по определению интерпретации.

Рассмотрим пропозициональную логику с конструктивными связками $\Rightarrow, \&, \&\&, \sim$ и обычными классическими связками. Связка && называется *параллельной конъюнкцией* и имеет неопределенную местность. Таким образом, $(A_1 \&\& \cdots \&\& A_n)$ не является сокращением.

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 24. Типы формул.
Определим отношение $\mathrm{Type}(A,\tau)$, читаемое «формула A имеет тип *tau*». Это отношение не является функцией.

1. Если A — элементарная формула, то $\mathrm{Type}(A,0)$.
2. Если $\mathrm{Type}(A,\tau)$ и $\mathrm{Type}(B,\pi)$, то $\mathrm{Type}((A \Rightarrow B),(\tau \to \pi)$.
3. Если $\mathrm{Type}(A,0)$, $\mathrm{Type}(B,0)$, то $\mathrm{Type}((A\&B),0)$.
4. Если $\mathrm{Type}(A,\tau)$, то $\mathrm{Type}(\sim A,\tau)$.
5. Если $\mathrm{Type}(A,\tau)$, $\mathrm{Type}(B,\rho))$, то $\mathrm{Type}((A \Rightarrow B),(\tau \to \rho))$.
6. Если $\mathrm{Type}(A,(\tau \to \pi))$, $\mathrm{Type}(B,(\pi \to \rho))$, то
$$\mathrm{Type}((A\&B),(\tau \to \rho)).$$
7. Если $\mathrm{Type}(A_1,\tau_1),\ldots,\mathrm{Type}(A_n,\tau_n))$, $a_1, \ldots, a_n$ — различные слова, то
$$\mathrm{Type}((A_1\&\&\cdots\&\&A_n),(a_1:\tau_1\times\cdots\times a_n:\tau_n)).$$
8. Классические связки типа не меняют.

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 25. Приписывание типов $\mathrm{TheType}(A[B])$ вхождениям подформулы B в формулу A. Это приписывание является функцией, причем, возможно, не всюду определенной. Эта функция определена *неоднозначно*.

1. Всем экземплярам одной и той же пропозициональной буквы L приписывается один и тот же тип.
2. Если в подформуле $B \Rightarrow C$ B и C приписаны изоморфные типы, то $\mathrm{TheType}(A[(B \Rightarrow C)])$ может быть либо типом B, либо типом C.
3. Точно так же для связок $\supset$, $\vee$, $\wedge$, $\equiv$.
4. Если выделена подформула $\sim B$, то
$$\mathrm{TheType}(A[\sim B]) = \mathrm{TheType}(A[B]).$$

5. Если выделена подформула $\neg B$, то

$$\mathrm{TheType}(A[\neg B]) = \mathrm{TheType}(A[B]).$$

6. Если выделена подформула $B\&C$, и $\mathrm{TheType}(A[B]) = (\tau \to \rho)$,
$\mathrm{TheType}(A[C]) = (\rho \to \pi)$, то $\mathrm{TheType}(A[B\&C]) = (\tau \to \pi)$.

7. Если выделена подформула $B\&C$, и $\mathrm{TheType}(A[B]) = 0$, $\mathrm{TheType}(A[C]) = 0$, то $\mathrm{TheType}(A[B\&C]) = 0$.

8. Если выделена подформула $B_1\&\&\cdots\&\&B_n$, и
$\mathrm{TheType}(A[B_1]) = \tau_1, \ldots, \mathrm{TheType}(A[B_n]) = \tau_n$, и $a_1, \ldots, a_n$ — различные слова, то
$\mathrm{TheType}(A[B_1\&\&\cdots\&\&B_n]) = (a_1 : \tau_1 \times \cdots \times a_n : \tau_n)$.

9. $\mathrm{TheType}(A[A])$ называется типом самой формулы при данном приписывании.

Формула *корректна*, если хотя бы при одном приписывании она имеет тип.

Это определение накладывает следующие синтаксические ограничения: две формулы могут связываться связкой, отличной от && или &, лишь в том случае, если у них имеются изоморфные типы. Две формулы A, B могут связываться связкой & лишь в том случае, если они обе имеют тип 0 одновременно или же для некоторых типов τ, π, ρ выполнено $\mathrm{Type}(A, (\tau \to \pi))$, $\mathrm{Type}(B, (\pi \to \rho))$.

Таким образом, лишь параллельная конъюнкция может связывать произвольные формулы. Во всех остальных случаях мы потрудились, чтобы при преобразованиях информация не появлялась и не терялась.

Заметим, что параллельная конъюнкция не идемпотентна и не ассоциативна. Отсутствие каких-то импликаций между A и $A\&\&A$ неизбежно, поскольку при переходе от одной формулы к другой либо дублируется, либо теряется информация. Неассоциативность является скорее интуитивным решением, навеянным аналогией между конъюнкцией и структурами данных. Ни один информатик не скажет, что три списка

$$(a, b, c), ((a, b), c), (a, (b, c))$$

эквивалентны по информации. А формулы типа

$$(A\&\&B\&\&C) \Rightarrow ((A\&\&B)\&\&C)$$

просто синтаксически некорректны.

Истинность и реализуемость корректной формулы на башне групп определяется естественно, так же, как для RL.

Коммутативность параллельной конъюнкции выполняется. Формула

$$((A\&\&B) \Rightarrow (B\&\&A))\&\&((B\&\&A) \Rightarrow (A\&\&B))$$

тождественно реализуема.

8 Некоторые выводы для методологии, информатики и электроники

Внимательно рассматривая так называемый «Toffoli Gate» [3], рекламируемый как реализация условного оператора для реверсивных вычислений, видим, что он отнюдь не противоречит нашим выводам о нереверсивности дизъюнкции: информация удваивается! Таким образом, каждый условный оператор либо цикл вызывает еще одно дублирование информации, обрабатываемой в нем.

Это показывает, почему сорвались проекты сверхпроводящего суперкомпьютера. Такой суперкомпьютер может быть лишь вычислительной мельницей для практически прямых вычислений. Все управление (не говоря уже о вводе и выводе информации) должно осуществляться внешним традиционным компьютером.

Но ситуация с экономической реверсивностью не выглядит столь безнадежно. Поскольку дублироваться должна лишь та информация, которая меняется непосредственно при выборе, а базы данных все равно громадные, реверсивность может быть здесь вполне приемлемым решением.

Заметим теперь, что формально допустимая с точки зрения групповой интерпретации реверсивности параллельная конъюнкция сразу же приводит к колоссальному утяжелению концепций. Так что общий вывод о том, что лишние возможности — самый страшный враг, тем более в нынешней ситуации, когда упоминание «новых возможностей» влечет приступ слюнявого телячьего восторга, получает еще более жестокое подтверждение. Даже теоретически полностью обоснованная возможность может на практике оказаться врагом, поскольку хорошая теория всегда односторонняя.

Далее, еще раз подтверждается, что нет логического плюрализма. Есть практически однозначный после осознания задачи, условий и ресурсных ограничений выбор логики, подходящей именно к данной ситуации. Так что есть логическое многообразие, логические альтернативы, логический выбор, который, как и всякий фундаментальный выбор, должен делаться весьма ответственно.

Еще раз показано, что различные ресурсы ведут к совершенно различным логикам. Достаточно сравнить нильпотентную, интуиционистскую, линейную и реверсивную логики. Так что стиль мышления человека, считающего основной ценностью деньги, и стиль мышления того, который считает основной ценностью время, несовместимы. А уж что говорить об истине! Поистине, нельзя служить одновременно Богу и маммоне (добавим еще, и суете).

А в общем, видно, что реверсивные вычисления — прежде всего еще один стиль программирования со своей исключительно своеобразной логикой, и главное препятствие здесь — невозможность подходить к ним с традиционными мерками.

Литература

[1] *Landauer R.* Irreversibility and heat generation in the computing process // IBM Journal of Research and Development. 1961. V. 5. P. 183–191.

[2] *Bennett C. H.* Logical reversibility of computation // IBM Journal of Research and Development. 1973. V. 17. P. 525–532.

[3] *Toffoli T.* Reversible Computing // MIT Technical Report MIT/LCS/TM-151, 1980.

[4] *Fredkin E., Toffoli T.* Conservative logic // International Journal of Theoretical Physics. 1982. V. 21. P. 219–253.

[5] *Merkle R. C.* Towards Practical Reversible Logic, // Workshop on Physics and Computation, PhysComp '92, October, Dallas Texas. IEEE Press, 1992.

[6] *Непейвода Н. Н., Скопин И. Н.* Основания программирования. М.;Ижевск, 2004.

Оператор истины для классической сентенциональной логики и ее расширения на область неправильно построенных формул[1]

С. А. Павлов

ABSTRACT. In the paper axiomatic truth theory with truth operator for classical sentential logic is proposed. Such theory is extended on domain of not well-formed formulae and on sentential logic that was enriched by quantifiers.

Ключевые слова: оператор истинности, теория истины, аксиоматический подход, неправильно построенные формулы, кванторы по сентенциональным переменным.

Цель данной работы состоит в построении аксиоматической теории истины с оператором истинности для классической сентенциональной логики, обогащении языка кванторами и ее расширении на область неправильно построенных формул.

Пусть имеем язык классической сентенциональной (пропозициональной) логики высказываний с отрицанием $\sim$ и импликацией $\longrightarrow$. Сентенциональные переменные: $s, s_1, s_2 \ldots$ (Var — множество переменных).

Правила построения формул стандартные.

Пусть $A, \sim A, (A \longrightarrow B)$ есть формулы этого языка. A, B — метапеременные для формул (For — множество формул, предложений).

Символически обозначим этот язык $L(s, s_1, s_2 \ldots, \sim, \longrightarrow)$ или более кратко $L(\sim, \longrightarrow)$.

Построим интерпретацию языка $L(\sim, \longrightarrow)$.

Функция оценки v есть отображение множества Var на множество $\{T, F\}$ (сокр. $v : Var \to \{T, F\}$).

[1]Работа поддержана РГНФ, грант № 07-03-00242.

$$v(\sim A) = \left\{ \begin{array}{l} T, \text{ если } v(A) = F, \\ F, \text{ если } v(A) = T. \end{array} \right\}$$

$$v(A \longrightarrow B) = \left\{ \begin{array}{l} T, \text{ если } v(A) = F \ \text{ или } v(B) = T, \\ F, \text{ если } v(A) = T \ \text{ и } v(B) = F. \end{array} \right\}$$

Для построения аксиоматической теории истины с оператором истины необходимо сформулировать основные положения, касающиеся свойств этого оператора. Сначала в качестве метаязыка будем использовать фрагмент естественного языка, в котором действует классическая логика.

Первым положением, которое отвечает утверждению $For \rightarrow \{T, F\}$, является принцип бивалентности: всякая формула (высказывание) A либо истинна, либо ложна.

Будем символически обозначать операторы истинности и ложности посредством знаков $|, -$, соответственно. Тогда принцип бивалентности можно записать так: $\mid A$ либо $-A$.

Условия истинности для отрицания будем задавать, следуя Д. Гильберту и В. Аккерману [3], которые принимали, что $\overline{X}$ обозначает высказывание, которое истинно, если X ложно, и ложно, если X истинно.

Используя язык $L(\sim, \longrightarrow)$ и операторы истинности и ложности, выразим эти условия следующим образом:

$|\!\sim A$ е.т.е. $-A$,

$- \sim A$ е.т.е. $\mid A$.

Также эти условия отвечают функции оценки для отрицания.

Условия истинности для импликации, гласящие в [3], что $X \longrightarrow Y$ обозначает высказывание, которое ложно в том и только том случае, когда X истинно, а Y ложно.

Также эти условия отвечают функции оценки для импликации.

$-(A \longrightarrow B)$е.т.е. $\mid A \wedge -B$,

$\mid (A \longrightarrow B)$е.т.е. $- A \vee \mid B$.

Завершающим положением могла бы быть выраженная с помощью оператора истинности T-эквивалентность:

$\mid A$ е.т.е. A.

Однако для оператора истинности имеются еще два положения, отвечающие особенностям его употребления в языке. Одно касается возможности его итерировать, т. е. иметь дело с формулами вида: $(|| A), (||| A)$ и т.д. И второе, связанное с возможностью ввести этот оператор в язык-объект. Тем самым этот подход отличается от подхода, реализованного в семантической теории истины Тарского. Обсуждение использования оператора истинности в логических построениях смотри в [4], а также в статье [2].

Эти положения реализуются при обогащении исходного языка $L(\sim, \longrightarrow)$ оператором истинности. Таким образом получаем язык $L^T(s, s_1, s_2 \ldots, |, \sim, \longrightarrow)$.

Также для формализации вышеприведенных положений необходимо вместо естественного языка ввести формальный. В качестве такового будем использовать язык $L^T(|, \sim, \longrightarrow)$.

Перейдем к формулировке теории истины с оператором истинности для классической сентенциональной логики.

1 Формулировка теории истины TT_2

Алфавит TT_2:

$s,\ s_1,\ s_2 \ldots$ сентенциальные переменные;

$|, \sim, \longrightarrow$ логические константы, обозначающие оператор истинности, отрицание и импликацию;

$(,)$ технические символы.

Правила образования ппф

(i) Если q есть сентенциональная переменная, то (q) есть правильно построенная формула (ппф).

(ii) Если A, B есть ппф, то $(\sim A), (| A), (A \longrightarrow B)$ есть ппф.

(iii) Ничто иное не является ппф.

Метапеременные: $A, B, C, \ldots$ для ппф.

Примем стандартные соглашения относительно опускания скобок.

Введем следующие сокращения для формул.

Высказывание о ложности предложения A рассматривается как сокращение для высказывания об истинности отрицания предложения A («—» содержательно означает «есть ложно»):

D1.1. $-A =_{df} |\sim A$.

D1.2.1-D1.2.3. Конъюнкция $\&$, дизъюнкция $\vee$ и эквиваленция $\longleftrightarrow$ определяется классическим образом.

Для высказывания о строгой истинности предложения A: «$\lceil A$» содержательно означает «есть истинно и неложно».

D1.3. $\lceil A =_{df} -(A \longrightarrow -A)$.

Определим импликацию $\supset$, которую назовем D-импликацией, и ряд производных связок.

D1.4.1. $(A \supset B) \ =_{df} \ (\lceil A \longrightarrow \lceil B)$,

D1.4.2. $(A \wedge B) \ =_{df} \ -(A \supset -B)$,

D1.4.3. $(A \vee B) \ =_{df} \ (-A \supset B)$,

D1.4.4. $(A \equiv B) =_{df} \ (A \supset B) \wedge (B \supset A)$,

D1.4.5. $(A \veebar B) =_{df} \ (A \vee B) \wedge -(A \wedge B)$.

Из всего класса ппф выделим подкласс формул, которые образованы из префиксированных оператором истинности формул. Будем называть их T-формулами (T-ф.).

(iv) Если A есть ппф, то $(| \ A \ )$ есть T-ф.

(v) Если $P_1, \ P_2$ есть T-ф., то $(\sim P_1)$, $(P_1 \longrightarrow P_2)$, есть T-ф.

Метапеременные: $P, \ P_1, \ P_2, \ldots$ для T-ф.

Аксиомы теории истины TT_2

Исходные положения теории истины выразим в языке $L^T(|, \sim, \longrightarrow)$. Разобьем аксиомы на 3 группы:

1) аксиомы классической логики для T-формул,

2) аксиомы, выражающие условия истинности для отрицания и для импликации,

3) принцип бивалентности и аксиома, выражающая T-эквивалентность,

4) аксиомы классической сентенциональной логики.

Некоторые из них зависимы от других, поэтому не все войдут в список исходных аксиом.

Схемы аксиом

A1.1. $(P_1 \supset (P_2 \supset P_1))$

A1.2. $(P_1 \supset (P_2 \supset P_3)) \supset ((P_1 \supset P_2) \supset (P_1 \supset P_3))$

A1.3. $(-P_1 \supset -P_2) \supset (P_2 \supset P_1)$

A2.1. $- \sim A \equiv\mid A$

A2.2.1. $\mid (A \longrightarrow B) \equiv (-A \vee \mid B)$

A2.2.2. $-(A \longrightarrow B) \equiv (\mid A \wedge -B)$

A3. $(\mid A \veebar -A)(\mid A \veebar -A)$

Правило вывода $A, (A \supset B)/B$ MP

Определение вывода стандартное.

Еще одно соотношение для отрицания следует из определения оператора ложности.

T1. $|\sim A \equiv -A$

T-эквивалентность с оператором истинности является теоремой.

T2.1. $(\mid A \longleftrightarrow A)$

T2.2. $\mid P \equiv P$

В формулировке данной теории используются два сорта метапеременных: $A, B, C, \dots$ для ппф языка исчисления и P, P_1, $P_2, \dots$ для T-формул.

Для каждого сорта переменных можно поставить вопрос о том, к какой логике относятся теоремы, в формулировке которых присутствуют те или иные метапеременные.

На вопрос о классической сентенциональной логике отвечают теоремы T3.1-3.4, соответствующие ее аксиомам и правилу вывода.

Тем самым имеем метатеорему:

MT1. Классическая сентенциональная логика $CL(s, s_1, s_2 \ldots, \sim, \longrightarrow)$ является подсистемой TT_2.

Для T-формул имеем следующую метатеорему:

MT2. Логика со схемами аксиом A_{CL} является подсистемой TT_2 и является классической логикой. Будем обозначать ее $CL(-, \supset)$.

Также имеем метатеорему:

MT3. Исчисление $TT_2(s, s_1, s_2 \ldots, |, \sim, \longrightarrow)$ дедуктивно эквивалентно классической сентенциональной логике $CL(s, s_1, s_2, \ldots, \sim, \longrightarrow)$.

Другими словами, особенностью выше сформулированного исчисления является то, что оно дедуктивно эквивалентно своей собственной части.

В языке исчисления TT_2 имеем теоремы, выражающие законы противоречия и исключенного третьего в семантической и несемантической формулировках.

T.4.1. $-(| A \wedge -A)$ (семантическая формулировка закона противоречия)

T4.2. $\sim (A \ \& \sim A)$

T5.1. $(| A \vee -A)$ (семантическая формулировка закона исключенного третьего)

T5.2. $(A \mathrm{V} \sim A)$

Также имеем теоремы:

T6.1 $|\sim \sim A \equiv | A$

T6.2 $\sim \sim A \longleftrightarrow A$

Металогические свойства теории TT_2 выражаются метатеоремами о непротиворечивости и семантической полноте.

MT4. $\vdash A \implies \models A$

MT5. $\models A \implies \vdash A$

2 Включение кванторов в язык $L^T(|, \sim, \longrightarrow)$

Для полноты рассмотрения обобщим рассматриваемую теорию истины для сентенциональной логики на случай включения в язык последней кванторов.

Введем квантор всеобщности по переменной для предложений (сентенциальной переменной). Такой способ введения кванторов подобен использованию кванторов с пропозициональными переменными в качестве операторных переменных в расширенном пропозициональном исчислении Лукасевича–Тарского, Рассела, в прототетике Лесневского.

Наличие квантора в языке логики позволяет задать тождественно-ложную формулу f и затем определить отрицание. Тем самым нет необходимости иметь отрицание в алфавите языка. В этом случае достаточно иметь оператор истинности, импликацию и квантор всеобщности.

Сформулируем теорию истины $TT_2(|, \longrightarrow, \forall)$.

Для того чтобы лишний раз не повторяться, запишем ниже только изменения в формулировках языка и аксиом $TT_2(|, \sim, \longrightarrow)$.

Об изменениях в алфавите сказано выше.

В правилах образования ппф заменим пункт (ii) на (ii)*.

(ii)* Если A, B есть ппф и q есть сентенциональная переменная, то $(| A)$, $(A \longrightarrow B)$, $(\forall q\ A)$ есть ппф.

Добавим метапеременные: q для сентенциальных переменных; $B(q)$, $C(A)$ для ппф B, C, в которые входят сентенциальная переменная q или ппф A.

Определим формулу f, являющуюся тождественно ложной, и отрицание.

D1.0.1. $f =_{df} (\forall s \mid s)$

D1.0.2. $\sim A =_{df} (A \longrightarrow f)$

В правилах образования T-формул заменим пункт (v) на (v)*.

(v)* Если P_1, P_2 есть T-ф. и q есть сентенциональная переменная, то $(P_1 \longrightarrow P_2)$ и $(\forall q\ P_1)$ есть T-ф.

Аксиому A2.1. заменим на аксиому A2.1*.

A2.1*. $-f$.

К схемам аксиом добавим следующие:

A4.1. $(\forall q\ B(q) \longrightarrow B(A))$, если ппф A не содержит свободных вхождений q, если ппф A свободна для q в $B(q)$.

A4.2. $(\forall q\ (A \longrightarrow B) \longrightarrow (A \longrightarrow \forall qB))$.

К правилу вывода MP добавим следующее:
$A/\ \forall qA$ Gen
Имеем следующее соотношение истинности для квантора всеобщности

T7. $(|\ (\forall q\ A)) \longleftrightarrow (\forall q\ |\ A)$.

Расширенное пропозициональное исчисление сводимо к классической логике CL. Подобным образом можно показать, что $TT_2(|,\ \longrightarrow, \forall)$ сводимо к $TT_2(|,\ \sim, \longrightarrow)$.

В расширенном пропозициональном исчислении константа «ложь» задается с помощью формулы $\forall s\ s$. Имеем теорему, связывающую различные определения (имеющие разный смысл, который обнаружится при дальнейшем обобщении $TT_2(|, \longrightarrow, \forall)$) константы «ложь» в расширенном пропозициональном исчислении и тождественно-ложной формулы в $TT_2(|, \longrightarrow, \forall)$.

T8. $(\forall s\ |\ s)\ \longleftrightarrow \forall s\ s$.

3 Расширение теории истины на область нестандартных формул

Несмотря на эквивалентность исчислений $TT_2(|, \sim, \longrightarrow)$ и $CL(\sim, \longrightarrow)$ формулировка исчисления TT_2 сложнее, чем формулировка CL. Возможности формулировки TT_2 проявятся далее, в случае расширения области определения операторов истинности и ложности за пределы области двузначных высказываний и предложений.

Понятия истинности и ложности обычно применяют к высказываниям и предложениям. А.Тарский пишет об этом так: «Предикат “истинно” … относят к определенным физическим объектам — языковым выражениям, в частности, к предложениям» [5]. В то же время имеются трудности, связанные с определением того, что есть высказывание и предложение. А. Тарский пишет об этом: «Мы не знаем в точности, какие выражения являются предложениями» [5]. Там же А. Тарский говорит о новых возможностях: «тот факт, что нас прежде всего интересует понятие истины для предложений, не исключает возможности последующего расширения сферы применимости этого понятия на другие виды объектов».

Уже Аристотель не ограничивает применимость истинностных оценок только к утвердительным или отрицательным высказываниям, но применяет их к их частям, составляющим эти высказывания. Так, в главе четвертой Категорий [1] он пишет:

> «утверждение или отрицание получается сочетанием их [категорий], ведь всякое утверждение или отрицание, надо полагать, или истинно, или ложно, а из сказанного без какой-либо связи ничто не истинно и не ложно, например “человек”, “белое”, “бежит”, “побеждает”».

А в главе десятой Категорий Аристотель утверждает: «Да и вообще все, о чем говорится без какой-либо связи, не истинно и не ложно».

Д. Гильберт и В. Аккерман пишут в [3]: «Взятые сами по себе предикаты ни истинны, ни ложны».

У Г. Фреге в его статье «Функция и понятие» [6] имеется пример расширения сферы применимости функции, изображаемой в виде горизонтальной черты $—x$ на другие виды объектов. Он устанавливает, что «значением этой функции должна быть истина, когда в качестве аргумента берется истина, во всех же остальных случаях ее значение есть ложь — стало быть и тогда, когда он вообще не является значением истинности. В соответствии с этим, например,

$—1 + 3 = 4$, есть истина, тогда как

$—1 + 3 = 5$, есть ложь, так же как

$—4$»(см. [6]).

Выражение «4» не есть предложение, в отличие от предыдущих аргументов функции, но, тем не менее, Г. Фреге не затрудняется определить значение функции $—x$ с аргументом «4».

С точки зрения теории слов, которые определяются как цепочка символов языка, все формулы языка, как правильно построенные, так и неправильно построенные являются словами этого языка. Символьным выражением некоторого языка L называется любая конечная линейная последовательность (упорядоченная n-ка) символов из алфавита этого языка L. Синонимом символьного выражения являются слово, выражение или строка в алфавите, а также цепочка символов.

Язык логики, которая допускает логические операции в области символьных выражений языка, строится следующим образом.

К языку сентенциальной логики добавляем операторы истинности и ложности. Расширяем применение понятия истинности и ложности на класс выражений языка, которые определяются индуктивно. Такое расширение сферы применимости понятий истинности и ложности на универсум символьных выражений языка не ведет к трудностям или неясностям, так как все выражения, которые не являются предложениями (для любого определения предложения), заведомо ни истинны, ни ложны.

Неправильно построенные формулы обычно в логике не рассматриваются. Относительно них можно утверждать: 1) что они бессмысленны и 2) что они ни истинны, ни ложны. В стандартном языке сентенциональной логики нельзя выразить тот факт, что они ни истинны и ни ложны, так как в нем отсутствуют операторы истинности и ложности. Однако в предложенном выше языке $L^T(s, s_1, s_2, \ldots, |, \sim, \longrightarrow)$ утверждения о неистинности и неложности формул выразимы. В случае расширения области определения оператора истинности на область выражений языка, являющихся ни истинными, ни ложными, для последних будет иметь место следующее положение:

Обозначим неправильно построенную формулу Non-wff. Тогда $(- \mid (Non - wff) \wedge - - \ (Non - wff))$.

Определение неправильно построенной формулы может рассматриваться как парафраз последнего пункта правил образования ппф «Ничто иное не является ппф»: всякое иное выражение данного языка есть неправильно построенная формула. Такое определение неправильно построенных формул не индуктивно в отличие от определения ппф, однако для всякого выражения языка возможно выяснить, является ли оно ппф или нет.

В качестве исходных неправильно построенных формул возьмем отдельно записанные символы $|, \sim, \longrightarrow$ логических констант (оператора истинности, отрицания и импликации). Это ограничение не снизит общности рассмотрения. В этом частном случае будем называть их для определенности нестандартными формулами. Метапеременными для них будут служить $N, N_1, N_2, \ldots$ Затем можно расширить классическую область определения оператора истинности присоединением к ней множества нестандартных формул. Метапеременные $E, E_1, E_2, \ldots$ для этой расширенной области будем называть метапеременными для символьных выражений (сокращенно св).

Рассмотрим, какие необходимо внести изменения в формулировку $TT_2(|,\ \sim,\ \longrightarrow)$. Отметим сразу, что будут только добавления и обобщения.

Начнем с правил образования. К ним добавятся:

(i)$^+$ Если N есть $|, \sim$ или $\longrightarrow$, то N есть нестандартная формула (нф).

(i)$^{++}$ Если E есть ппф или нф, то E есть символьное выражение (св).

(ii)$^+$ Если N есть нф, то $(\sim N)$, $(N \longrightarrow N_1)$, есть нф.

(iii)$^+$ Ничто иное не является нф и св.

(iv)$^+$ Если E есть св, то $(|\ E)$ есть T-ф.

В определениях все вхождения метапеременных для ппф замещаются (обобщаются) на метапеременные для св.

Для 3 групп схем аксиом: в первой добавляется аксиома

A1.4. $|\ P \equiv P$.

Во второй группе все вхождения метапеременных для ппф замещаются на метапеременные для св. В третьей добавляются следующие:

A3$^+$. $(- \mid N) \wedge (- - N)$.

В силу наличия предыдущей аксиомы принцип бивалентности отвергается и остается принцип непротиворечия.

A3^{++}. $-(\mid E \wedge -E)$

И, наконец, в правиле вывода все вхождения метапеременных для ппф замещаются на метапеременные для св.

Отметим те теоремы, которые остаются доказуемыми при замещении всех вхождений метапеременных для ппф на метапеременные для св. Это Т1., Т.4.1., Т.6.1.

Добавляется ряд теорем, среди которых выделим следующую:

T2.1$^+$. $(\mid E \longleftrightarrow E) \equiv (\mid E \veebar -E)$, которая говорит о взаимоотношении T-эквивалентности и принципа бивалентности.

Обозначим полученную теорию $TT_3(\mid,\ \sim,\ \longrightarrow)$, так как она имеет трехзначную интерпретацию, к которой и перейдем.

Значения введем по аналогии с тем, как их вводит Дж. Данн в [7]. Он отождествляет множества со значениями следующим образом (приведем здесь три из четырех):

$(\{\alpha\}, \{\}) = T, (\{\}, \{\alpha\}) = F, (\{\}, \{\}) = N.$

Для теории истины в качестве исходного множества имеет содержательный смысл выбрать одноэлементное множество {истина} и образовать из него множество его подмножеств. И подобно предыдущему построению отождествить пары множеств со значениями:

$< \{\text{истина}\}, \{\} >= T, < \{\}, \{\text{истина}\} >= F, < \{\}, \{\} >= N.$

И, совсем абстрактно, можно в качестве исходного взять множество $\{\{\}\}$, образовать из него множество его подмножеств и затем построить следующие пары:

$< \{\{\}\}, \{\} >, < \{\}, \{\{\}\} >, < \{\}, \{\} >.$

Табличная интерпретация для исходных логических операторов следующая:

A	$\sim A$	$\mid A$
T	F	T
F	T	F
N	N	F

$\longrightarrow$	T	F	N
T	T	F	N
F	T	T	T
N	T	N	N

Отметим, что таблицы для связок отрицания и импликации в области трех значений подобны таблицам для соответствующих связок сильной логики Клини K_3^S.

В связи с тем, что для символьных выражений отбрасывается принцип бивалентности, имеет смысл вопрос о выразимости связок трехзначной логики Лукасевича, на который имеется положительный ответ.

В завершение, пользуясь вышеприведенными таблицами, доказываются метатеоремы непротиворечивости и семантической полноты для $TT_3(|, \sim, \longrightarrow)$:

MT6. $\vdash A \Rightarrow \models_3 A$.

MT7. $\models_3 A \Rightarrow \vdash A$.

Отметим, что сигнатура языка теории $TT_2(|, \sim, \longrightarrow)$ не изменилась при переходе к $TT_3(|, \sim, \longrightarrow)$.

Таким образом, построены аксиоматическая теория истины с оператором истинности для классической сентенциональной логики, для классической сентенциональной логики, язык которой обогащен кванторами, и также для ее расширения на неклассическую область неправильно построенных формул.

Литература

[1] *Аристотель.* Категории // Сочинения. Т. 2. М., 1978. С.51– 90.

[2] *Бессонов А.В.* Истина внутри языка выразима // Язык и логическая теория. М., 1987. С. 54-61.

[3] *Гильберт Д., Аккерман В.* Основы теоретической логики. М., 1947.

[4] *Павлов С.А.* Логика с операторами истинности и ложности. М., 2004.

[5] *Тарский А.* Семантическая концепция истины // Аналитическая философия: Становление и развитие. М., 1998.

[6] *Фреге Г.* Функция и понятие // Готтлоб Фреге. Логика и логическая семантика. М., 2000.

[7] *Dunn J.M.* Partiality and its Dual // Studia Logica. 2000. Vol. 65. P. 5–40.

Некоторые интервалы между простыми паралогиками[1]

В. М. Попов

ABSTRACT. Some intervals between simple paralogics are characterized, in particular their cardinalities are pointed out.

Ключевые слова: паранепротиворечивость, параполнота, паранормальность.

Охарактеризованы некоторые интервалы между простыми паралогиками. Определяем язык L как стандартный пропозициональный язык с алфавитом $\{\&, \vee, \supset, \neg,), (, p_1, p_2, p_3, \dots\}$. Принимаем обычные соглашения об опускании скобок в L-формулах и используем «формула» как сокращение для «L-формула». Квазиэлементарной формулой называем формулу, в которую не входит ни $\&$, ни $\vee$, ни $\supset$. Логикой называем непустое множество формул, замкнутое относительно правила подстановки в L и правила модус поненс в L. Теорией логики L называем множество формул, включающее L и замкнутое относительно правила модус поненс в L. Ясно, что множество Form всех формул является логикой и теорией любой логики. Для всякой логики L называем множество всех формул тривиальной теорией логики L. Противоречивой теорией логики L называем такую теорию T логики L, что для некоторой формулы A верно: $A \in T$ и $\neg A \in T$. Паранепротиворечивой теорией логики L называем такую противоречивую теорию T логики L, что T не есть тривиальная теория логики L. Паранепротиворечивой логикой называем такую логику L, что существует паранепротиворечивая теория логики L. Простой паранепротиворечивой логикой называем такую паранепротиворечивую логику L, что для всякой паранепротиворечивой теории T логики L верно: если $A \in T$ и $\neg A \in T$, то

[1]Работа выполнена при поддержке РФФИ, грант № 06-06-80292-а.

A есть квазиэлементарная формула. Полной теорией логики L называем такую теорию T логики L, что для всякой формулы A верно: $A \in T$ или $\neg A \in T$. Параполной теорией логики L называем такую теорию T логики L, что T не является полной теорией логики L и всякая полная теория логики L, включающая T, есть тривиальная теория логики L. Параполной логикой называем такую логику L, что существует параполная теория логики L. Простой параполной логикой называем такую параполную логику L, что для всякой параполной теории T логики L верно: существует такая квазиэлементарная формула e, что $e \notin T$ и $\neg e \notin T$. Простой паралогикой называем логику, которая является простой паранепротиворечивой логикой или простой параполной логикой. Простой паранормальной логикой называем логику, которая является простой паранепротиворечивой логикой и простой параполной логикой. Исчисления $HAVP$, $HVIK$, $HMAP$, $HLAP$, $HI_{0,\omega}$, $HI_{1,\omega}$, $HI_{2,\omega}$, $HI_{3,\omega}$ являются исчислениями гильбертовского типа. Язык каждого из этих исчислений есть L. Аксиомные схемы исчисления $HI_{0,\omega}$ (здесь и далее A, B и C есть переменные по формулам, а E — переменная по формулам, не являющимся квазиэлементарными формулами): (I) $(A \supset B) \supset ((B \supset C) \supset (A \supset C))$, (II) $A \supset (A \vee B)$, (III) $B \supset (A \vee B)$, (IV) $(A \supset C) \supset ((B \supset C) \supset ((A \vee B) \supset C))$, (V) $(A \& B) \supset A$, (VI) $(A \& B) \supset B$, (VII) $(C \supset A) \supset ((C \supset B) \supset (C \supset (A \& B)))$, (VIII) $(A \supset (B \supset C)) \supset ((A \& B) \supset C))$, (IX) $((A \& B) \supset C) \supset ((A \supset (B \supset C))$, (X) $((A \supset B) \supset A) \supset A$, (XI) $\neg E \supset (E \supset A)$, (XII) $(E \supset \neg(A \supset A)) \supset \neg E$. Аксиомные схемы исчисления $HI_{3,\omega}$: (I)-(XII) и (XIII) $(A \& \neg A) \supset (B \vee \neg B)$. Аксиомные схемы исчисления $HI_{1,\omega}$: (I)-(XI) и (XIV) $(B \supset \neg(A \supset A)) \supset \neg B$. Аксиомные схемы исчисления $HI_{2,\omega}$: (I)-(X), (XII) и (XV) $\neg B \supset (B \supset A)$. Аксиомные схемы исчисления $HAVP$: все аксиомные схемы исчисления $HI_{0,\omega}$, (XVI) $\neg\neg A \supset A$ и (XVII) $A \supset \neg\neg A$. Аксиомные схемы исчисления $HVIK$: все аксиомные схемы исчисления $HI_{3,\omega}$, (XVI) и (XVII). Аксиомные схемы исчисления $HMAP$: все аксиомные схемы исчисления $HI_{1,\omega}$, (XVI) и (XVII). Аксиомные схемы исчисления $HLAP$: все аксиомные схемы исчисления $HI_{2,\omega}$, (XVI) и (XVII). Правило модус поненс в L является единственным правилом вывода всякого из определяемых здесь исчислений. Доказательства в каждом из этих исчислений строятся обычным для гильбертовского типа исчислений образом. Через $I_{0,\omega}$ обозначаем множество всех формул, доказуемых в $HI_{0,\omega}$, через $I_{1,\omega}$ — множество всех формул, доказуемых в $HI_{1,\omega}$, через $I_{2,\omega}$ — множество всех формул, доказуемых в $HI_{2,\omega}$,через $I_{3,\omega}$ — множество всех формул, доказуемых в $HI_{3,\omega}$, через AVP — множество всех формул, доказуемых в $HAVP$, через VIK — множество всех формул, доказуемых в $HVIK$, через MAP — множество всех формул, доказуемых в $HMAP$, через LAP — множество всех формул, доказуемых в $HLAP$. Предполагая стандартное определение формулы, являющейся классической тавтологией, обозначаем через ClP множество всех формул, каждая из которых есть классическая тавтология. Разумеется, ClP является логикой. Называем M логическим интервалом с нижней границей L_1 и верхней границей L_2, если L_1 и L_2 являются логиками, $L_1 \subseteq L_2$ и M есть множество всех таких логик X, что $X \neq L_1$, $X \neq L_2$ и $L_1 \subseteq X \subseteq L_2$. Обозначаем через (L_1, L_2) логический интервал с нижней границей L_1 и верхней границей L_2. Доказано, что (1) AVP, VIK, MAP, LAP — попарно различные конечнозначные простые паралогики, а $I_{0,\omega}$, $I_{1,\omega}$, $I_{2,\omega}$, $I_{3,\omega}$ — попарно различные разрешимые простые паралогики, ни одна из которых не является конечнозначной; (2) AVP, VIK, $I_{0,\omega}$, $I_{3,\omega}$ — простые паранормальные логики, MAP, $I_{1,\omega}$ — паранепротиворечивые (но не параполные) логики, LAP, $I_{2,\omega}$ — параполные (но не паранепротиворечивые) логики; (3) $VIK = MAP \cap LAP$ и $I_{3,\omega} = I_{1,\omega} \cap I_{2,\omega}$; (4) $(AVP, MAP) = (AVP, LAP) = \{VIK\}$; (5) $(AVP, Form) = \{VIK, MAP, LAP, ClP\}$; (6) $(I_{1,\omega}, MAP)$ и $(I_{2,\omega}, LAP)$ — континуальные множества соответственно простых паранепротиворечивых логик и простых параполных логик; (7) $(I_{3,\omega}, VIK)$ и $(I_{0,\omega}, AVP)$ — континуальные множества простых паранормальных логик; (8) $(I_{3,\omega}, I_{1,\omega})$, $(I_{3,\omega}, I_{2,\omega})$ и $(I_{0,\omega}, I_{3,\omega})$ — континуальные множества соответственно простых паранепротиворечивых логик, простых параполных логик и простых паранормальных логик.

Литература

[1] *Попов В. М.* Интервалы простых паралогик //Смирновские чтения по логике. Материалы 5-й конференции 20-22 июня 2007, М., 2007. С.35-37.

Аналитические таблицы для пропозициональной логики Роговского

Н. И. Стешенко

ABSTRACT. Formalization of Rogowski's logic is offered by simple and generalized analytical tableaus. Generalized tableaus are constructed in R. Hehnle's style. The theorem of completeness is proved by the Smallyan's method.

Ключевые слова: множество Хинтикки, помеченная формула, правила редукции, простые аналитические таблицы, обобщенные аналитические таблицы, табличное доказательство.

1 Простые аналитические таблицы

Построим формализацию логики $\mathbf{R}_4$ Роговского методом аналитических таблиц. Как в двухзначной, так и многозначных логиках, метод аналитических таблиц является опровергающей процедурой. Поиск обоснования общезначимости формулы осуществляется по определенным правилам и начинается с предположения, что формула не общезначима. Это предположение ведет к противоречию, если формула на самом деле общезначима.

Правила редукции создаются на основе следующей таблицы истинности для логических связок и операторов логики $\mathbf{R}_4$ Роговского.

A	$\sim$ A	ТА	ВА	ИА	УА	ЕА	A $\rightarrow$ B	3	2	1	0
3	0	3	1	2	3	3	3	3	2	1	0
2	1	0	3	0	3	0	2	3	2	1	1
1	2	0	0	3	0	3	1	3	2	2	2
0	3	0	2	1	0	0	0	3	3	3	3

Логические константы читаются так: «$\sim$ A» — не есть так, что A; «ТА» — истинно, что A; «ВА» — возникает так, что

А; «ИА» — исчезает так, что А; «УА» — уже есть так, что А; «ЕА» — еще есть так, что А; «А → В» — если А, то В.

Расширим наш язык операциями **3, 2, 1** и **0**, которые будут применяться к формулам. Выражения вида **3**А, **2**А, **1**А и **0**А называются помеченными формулами, и соответственно читаются «А истинно», «А подистинно», «А подложно» и «А ложно», где А непомеченная формула.

Семантические сущности, т.е. истинностные значения, превратились в синтаксические объекты **3, 2, 1** и **0**.

Простыми аналитическими таблицами называются аналитические таблицы для формул вида **1**А, **0**А, **2**А и **3**А.

Аналитические таблицы для логики Роговского даны в духе Р. Смальяна [6]. Отметим, что в отечественной литературе метод построения аналитических таблиц Р. Смальяна применялись к формализации многозначных логик, (см. [1][2, с. 265-324]).

Введем правила редукции для построения аналитических таблиц логики Роговского.

Правила для импликации

$$(\to_0)\ \frac{\mathbf{0}(A \to B)}{\begin{array}{c}\mathbf{3}\mathrm{A}\\ \mathbf{0}\mathrm{B}\end{array}} \qquad (\to_1)\ \frac{\mathbf{1}(A \to B)}{\begin{array}{c|c|c}\mathbf{2}\mathrm{A} & \mathbf{2}\mathrm{A} & \mathbf{3}\mathrm{A}\\ \mathbf{0}\mathrm{B} & \mathbf{1}\mathrm{B} & \mathbf{1}\mathrm{B}\end{array}}$$

$$(\to_2)\ \frac{\mathbf{2}(A \to B)}{\begin{array}{c|c|c|c|c}\mathbf{1}\mathrm{A} & \mathbf{1}\mathrm{A} & \mathbf{1}\mathrm{A} & \mathbf{2}\mathrm{A} & \mathbf{3}\mathrm{A}\\ \mathbf{0}\mathrm{B} & \mathbf{1}\mathrm{B} & \mathbf{2}\mathrm{B} & \mathbf{2}\mathrm{B} & \mathbf{2}\mathrm{B}\end{array}} \qquad (\to_3)\ \frac{\mathbf{3}(A \to B)}{\begin{array}{c|c}\mathbf{0}\mathrm{A} & \mathbf{3}\mathrm{B}\\ & \end{array}}$$

Правила для оператора «В»

$$(B_0):\ \frac{\mathbf{0}\mathrm{BA}}{\mathbf{1}\mathrm{A}} \quad (B_1):\ \frac{\mathbf{1}\mathrm{BA}}{\mathbf{3}\mathrm{A}} \quad (B_2):\ \frac{\mathbf{2}\mathrm{BA}}{\mathbf{0}\mathrm{A}} \quad (B_3):\ \frac{\mathbf{3}\mathrm{BA}}{\mathbf{2}\mathrm{A}}$$

Правила для отрицания (слабого)

$$(\sim_0):\ \frac{\mathbf{0} \sim A}{\mathbf{3}\mathrm{A}} \quad (\sim_1):\ \frac{\mathbf{1}B \sim A}{\mathbf{2}\mathrm{A}} \quad (\sim_2):\ \frac{\sim A}{\mathbf{1}\mathrm{A}} \quad (\sim_3):\ \frac{\mathbf{3} \sim A}{\mathbf{0}\mathrm{A}}$$

Правила для оператора «И»

$$(\text{И}_0):\ \dfrac{\mathbf{0}\text{ИA}}{\mathbf{1}\text{A}}\quad (\text{И}_1):\ \dfrac{\mathbf{1}\text{ИA}}{\mathbf{3}\text{A}}\quad (\text{И}_2):\ \dfrac{\mathbf{2}\text{ИA}}{\mathbf{0}\text{A}}\quad (\text{И}_3):\ \dfrac{\mathbf{3}\text{ИA}}{\mathbf{2}\text{A}}$$

Правила для оператора «Т»

$$(\text{T}_0):\ \dfrac{\mathbf{0}\text{TA}}{\mathbf{0}\text{A}\ \big|\ \mathbf{1}\text{A}\ \big|\ \mathbf{2}\text{A}}\quad (\text{T}_1):\ \dfrac{\mathbf{1}\text{TA}}{\begin{array}{c}\mathbf{0}\text{A}\\ \mathbf{3}\text{A}\end{array}}\quad (\text{T}_2):\ \dfrac{\mathbf{2}\text{TA}}{\begin{array}{c}\mathbf{0}\text{A}\\ \mathbf{3}\text{A}\end{array}}\quad (\text{T}_3):\ \dfrac{\mathbf{3}\text{TA}}{\mathbf{3}\text{A}}$$

Правила для отрицания (сильного) «$\sim$ Т»

$$(\sim \text{T}_0):\ \dfrac{\mathbf{0}\sim \text{T}A}{\mathbf{3}\text{A}}\quad (\sim \text{T}_1):\ \dfrac{\mathbf{1}\sim \text{T}A}{\begin{array}{c}\mathbf{3}\text{A}\\ \mathbf{0}\text{A}\end{array}}$$

$$(\sim \text{T}_2):\ \dfrac{\mathbf{2}\sim \text{T}A}{\begin{array}{c}\mathbf{3}\text{A}\\ \mathbf{0}\text{A}\end{array}}\quad (\sim \text{T}_3):\ \dfrac{\mathbf{3}\sim \text{T}A}{\mathbf{0}\text{A}\ \big|\ \mathbf{1}\text{A}\ \big|\ \mathbf{2}\text{A}}$$

Правила для оператора «У»

$$(\text{У}_0):\ \dfrac{\mathbf{0}\text{УA}}{\mathbf{0}\text{A}\ \big|\ \mathbf{1}\text{A}}\quad (\text{У}_1):\ \dfrac{\mathbf{1}\text{УA}}{\begin{array}{c}\mathbf{3}\text{A}\\ \mathbf{0}\text{A}\end{array}}\quad (\text{У}_2):\ \dfrac{\mathbf{2}\text{УA}}{\begin{array}{c}\mathbf{3}\text{A}\\ \mathbf{0}\text{A}\end{array}}\quad (\text{У}_3):\ \dfrac{\mathbf{3}\text{УA}}{\mathbf{2}\text{A}\ \big|\ \mathbf{3}\text{A}}$$

Правила для оператора «Е»

$$(\text{E}_0):\ \dfrac{\mathbf{0}\text{EA}}{\mathbf{0}\text{A}\ \big|\ \mathbf{2}\text{A}}\quad (\text{E}_1):\ \dfrac{\mathbf{1}\text{EA}}{\begin{array}{c}\mathbf{3}\text{A}\\ \mathbf{0}\text{A}\end{array}}\quad (\text{E}_2):\ \dfrac{\mathbf{2}\text{EA}}{\begin{array}{c}\mathbf{3}\text{A}\\ \mathbf{0}\text{A}\end{array}}\quad (\text{E}_3):\ \dfrac{\mathbf{3}\text{EA}}{\mathbf{1}\text{A}\ \big|\ \mathbf{3}\text{A}}$$

Помеченную формулу над чертой назовем *посылкой* правила редукции. Все помеченные формулы под чертой правила редукции — заключением, которое состоит из помеченных подформул формулы, находящейся в посылке. Вертикальная черта «|» в заключении правил редукции означает «ветвление» результата применения правила.

В заключении правил (T_1), (T_2), ($\sim \text{T}_1$), ($\sim \text{T}_2$), (У_1), (У_2), (E_1) и (E_2) имеется пара помеченных формул (**0**A, **3**A), которая означает, что заключение дает противоречие. Это объясняется таблицами истинности для указанных операторов. Например, формула ТА может принимать только два истинностных значения «3» и «0» из множества $\{3, 2, 1, 0\}$ (согласно таблице истинности для оператора Т). И если мы приписываем ТА истинностные значения «1» или «2», т.е. истинностные значения, которых ТА не имеет, то это синтаксически означает, что помеченные формулы **1**ТА и **2**ТА дают в заключении противоречие. Это напоминает случай замкнутой ветви в классической логике, которая содержит константы «ложь» и «истина».

Сформулированные правила разбиваются на четыре группы α, β, γ и δ. К группе α относится правило, которое порождает 5 ветвей; к группе β принадлежат все те правила, которых порождают 3 ветви; к группе γ относятся правила, порождающие 2 ветви; и, наконец, группе δ принадлежат те правила редукции, применения которых дает одну ветвь. Такая классификация правил нужна для определения множества Хинттики и доказательства метатеорем об аналитических таблицах, чтобы избежать повторений в однотипных шагах доказательства.

α	α_1	α_2	α_3	α_4	α_5
$\mathbf{2}(A \to B)$	**1**A **0**B	**1**A **1**B	**1**A **2**B	**2**A **2**B	**3**A **2**B

β	β_1	β_2	β_3
$\mathbf{1}(A \to B)$	**2**A **0**B	**2**A **1**B	**3**A **1**B
0TA	**0**A	**1**A	**2**A
$\mathbf{3} \sim TA$	**0**A	**1**A	**2**A

γ	γ_1	γ_2
$\mathbf{3}(A \to B)$	**0**A	**3**B
3УА	**3**A	**2**A
0УА	**1**A	**0**A
3EA	**3**A	**1**A
0EA	**2**A	**0**A

δ	δ_1
$\mathbf{0}(A \to B)$	**3**A **0**B
0BA	**1**A
1BA	**3**A
2BA	**0**A
3BA	**2**A

$\mathbf{0} \sim A$	**3**A
$\mathbf{1} \sim A$	**2**A
$\mathbf{2} \sim A$	**1**A
$\mathbf{3} \sim A$	**0**A
0ИA	**2**A
1ИA	**0**A
2ИA	**3**A
3ИA	**1**A
2TA	**3**A **0**A
3TA	**3**A
$\mathbf{2} \sim TA$	**3**A **0**A
$\mathbf{1} \sim TA$	**3**A **0**A
$\mathbf{0} \sim TA$	**3**A
2УA	**3**A **0**A
1УA	**3**A **0**A
2EA	**3**A **0**A
1EA	**3**A **0**A

Отметим то важное обстоятельство, что каждое правило редукции *структурно соответствует ДНФ* логики изменения и направленности Роговского. В посылке правила указана формула и ее истинностное значение на синтаксическом уровне, в заключение правила представлено разложение посылочной формулы в нормальную форму (ДНФ или СДНФ как частный случай ДНФ). Например, правило $\rightarrow_1$ соответствует фрагменту СДНФ импликации A $\rightarrow$ B, а именно тем наборам истинностных значений «A» и «B», на которых формула A $\rightarrow$ B принимает истинностное значение «1». Для демонстрации этого используем обозначения нужных истинностных значений формулы и ее подформул верхними индексами:

$$(\mathrm{A} \to \mathrm{B})^1 = (\mathrm{A}^3 \wedge \mathrm{B}^1) \vee (\mathrm{A}^2 \wedge \mathrm{B}^1) \vee (\mathrm{A}^2 \wedge \mathrm{B}^0)$$

Структурное соответствие между правилом редукции $\to_1$ и ДНФ определяется очевидными соглашениями: $\mathbf{1}\Phi \equiv \Phi^1$, вертикальная черта «|» заменяется знаком «$\vee$»; формулы, написанные одна под другой, соединяются знаком «$\wedge$».

Это соответствие легко распространить на остальные правила редукции группы α, β и γ. Кроме того, будем считать, что правила группы δ соответствуют усеченным дизъюнкциям вида $\Phi \vee 0 = \Phi$, где 0 есть константа. Например, $(\mathrm{A} \to \mathrm{B})^0 = (\mathrm{A}^3 \wedge \mathrm{B}^0) \vee 0 = (\mathrm{A}^3 \wedge \mathrm{B}^0)$. Из таблицы истинности для импликации ясно, что $(\mathrm{A} \to \mathrm{B})^0$ представляет одну строчку, в которой импликация на указанных индексами истинностных наборах принимает значение «0».

Аналитические таблицы есть частный случай математического дерева. В описании дерева будем следовать статье [2, с. 281–282].

Под *неупорядоченным деревом Д* понимается множество Ω элементов, называемых точками, которое удовлетворяет следующим условиям:

(1) имеется функция φ, которая приписывает каждой точке натуральное число $\varphi(\mathrm{A})$, называемое уровнем точки А;

(2) на точках задано отношение $\mathrm{A}\mathbf{R}\mathrm{B}$, которое читается «А есть предшественник В» или «В есть сукцессор А», т.е. В есть точка, следующая за точкой А. Отношение $\mathbf{R}$ удовлетворяет таким условиям:

(2.1) имеется единственная точка A_1 уровня $\varphi(\mathrm{A}_1) = 1$, называемая корнем дерева Д;

(2.2) каждая точка, отличная от корня, имеет единственного предшественника;

(2.3) для любых точек А и В, если В есть сукцессор А, то $\varphi(\mathrm{B}) = \varphi(\mathrm{A}) + 1$.

Точка А называется *концевой точкой*, если она не имеет сукцессоров.

Точка А называется *простой точкой*, если она имеет в точности один сукцессор. В противном случае она называется *юнктивной (сложной)* точкой.

Ветвью (путем) называется любая такая конечная или счетная последовательность точек, что: (а) она начинается с корня дерева, и (б) каждый член последовательности, кроме последнего (если такой имеется), является предшественником следующего члена.

Максимальной ветвью (путем) называется ветвь такая, что ее последний член есть либо концевая точка дерева, либо бесконечная ветвь.

Упорядоченным деревом Д называется дерево, на котором задана функция ξ такая, что она приписывает каждой юнктивной точке N последовательность $\xi(N)$, не содержащую повторяющихся точек и состоящую из всех сукцессоров точки N.

Дерево Д называется *конечно порожденным*, если каждая точка имеет конечное число сукцессоров.

Дерево Д называется *m-адическим*, если каждая юнктивная точка имеет не более m сукцессоров $(m = 2,\ 3, \dots)$.

Аналитической таблицей для формулы А логики изменения и направленности Роговского называется *5-адическое* дерево Д (точками которого являются формулы), удовлетворяющее таким условиям.

Пусть $Д_1$ и $Д_2$ два упорядоченных *5-адических дерева.* $Д_2$ называется *непосредственным расширением* $Д_1$, если $Д_2$ получено из $Д_1$ применением одного из правил типа $\alpha,\ \beta,\ \gamma$ или δ. Тогда Д есть *аналитическая таблица* для формулы А тогда и только тогда, когда имеется конечная последовательность $Д_1,\ Д_2, \dots Д_n$, где $Д_n = Д$ такая, что $Д_1$ одноточечное дерево, чей корень есть формула А, и $Д_{i+1}$ есть непосредственное расширение $Д_i$ для каждого $i < n$.

Назовем ветвь θ таблицы помеченной формулы А *замкнутой (закрытой)*, если она содержит хотя бы одну пару помеченных формул из множества ($\mathbf{0}$А, $\mathbf{1}$А, $\mathbf{2}$А, $\mathbf{3}$А). Эти пары формул будем также называть *противоречивыми.* В противном случае ветвь называется *открытой (непротиворечивой).* Более формально:

на замкнутой ветви имеются помеченные формулы $j_1ф_1$, $j_2ф_2, \ldots, j_nф_n$ такие, что $ф_2 = ф_3 = \cdots = ф_m$ и $\{j_1\} \cap \{j_2\} \cap \cdots \cap \{j_m\} = \varnothing$, где $j \in \{\mathbf{3,\ 2,\ 1,\ 0}\}$ и $1 < m \leq n$. В противном случае, т.е. когда пересечение не пусто, ветвь не является замкнутой.

Таблица называется *замкнутой*, если все ее ветви замкнуты.

Табличное доказательство непомеченной формулы А есть тройка замкнутых таблиц для формул **0**А, **1**А и **2**А.

Отметим, что по сравнению с двухзначной логикой надо строить не одну, а три таблицы.

Ветвь θ таблицы Д называется *полной*, если для всякой формулы вида α, β, γ, δ ветвь θ удовлетворяет следующим условиям (предполагается, что каждая α, β, γ, δ имеет конечное число вхождений логических связок и операторов):

(у.1) если $\alpha \in \theta$, то $\alpha_1 \in \theta$, или $\alpha_2 \in \theta$, или $\alpha_3 \in \theta$, или $\alpha_4 \in \theta$, или $\alpha_5 \in \theta$;

(у.2) если $\beta \in \theta$, то $\beta_1 \in \theta$ или $\beta_2 \in \theta$, или $\beta_3 \in \theta$;

(у.3) если $\gamma \in \theta$, то $\gamma_1 \in \theta$ или $\gamma_2 \in \theta$;

(у.4) если $\delta \in \theta$, то $\delta_1 \in \theta$.

Другими словами, ветвь называется полной, если она редуцирована посредством указанных правил до помеченных атомарных подформул исходной формулы.

Таблица Д называется *завершенной*, если каждая ветвь таблицы или замкнута, или полная.

Для того чтобы получить понятия выполнимости, общезначимости и другие семантические характеристики формул логики Роговского, надо дать определение $\mathbf{R}_4$-оценки.

Функция ν, отображающая множество $А^+$ всех формул логики Роговского на множество истинностных значений $\{0,\ 1,\ 2,\ 3\}$, называется $\mathbf{R}_4$-оценкой, если она удовлетворяет следующим условиям.

$$(1)\ \nu(A \to B) = \left| \begin{array}{l} 3, \text{ если } \nu(A) = 0 \text{ или } \nu(B) = 3 \\ 2, \text{ если } \nu(A) = 1 \text{ и } \nu(B) \neq 3 \text{ или } \nu(B) = 2 \text{ и} \\ \quad \nu(A) \neq 0; \\ 1, \text{ если } \nu(A) = 3 \text{ и } \nu(B) = 2 \text{ или } \nu(A) = 2 \text{ и} \\ \quad [\nu(B) = 1 \text{ или } \nu(B) = 0]; \\ 0, \text{ если } \nu(A) = 3 \text{ и } \nu(B) = 0. \end{array} \right.$$

$$(2)\ \nu(BA) = \left| \begin{array}{l} 3, \text{ если } \nu(A) = 2 \\ 2, \text{ если } \nu(A) = 0 \\ 1, \text{ если } \nu(A) = 3 \\ 0, \text{ если } \nu(A) = 1 \end{array} \right. \qquad (3)\ \nu(\sim A) = \left| \begin{array}{l} 3, \text{ если } \nu(A) = 0 \\ 2, \text{ если } \nu(A) = 1 \\ 1, \text{ если } \nu(A) = 2 \\ 0, \text{ если } \nu(A) = 0 \end{array} \right.$$

$$(4)\ \nu(\text{И}\text{А}) = \left| \begin{array}{l} 3, \text{ если } \nu(A) = 1 \\ 2, \text{ если } \nu(A) = 3 \\ 1, \text{ если } \nu(A) = 0 \\ 0, \text{ если } \nu(A) = 2 \end{array} \right.$$

$$(5)\ \nu(\sim TA) = \left| \begin{array}{l} 3, \text{ если } \nu(A) \neq 3 \\ 0, \text{ если } \nu(A) = 3 \end{array} \right. \qquad (6)\ \nu(TA) = \left| \begin{array}{l} 3, \text{ если } \nu(A) = 3 \\ 0, \text{ если } \nu(A) \neq 3 \end{array} \right.$$

$$(7)\ \nu(\text{У}A) = \left| \begin{array}{l} 3, \text{ если } \nu(A) = 3 \text{ или } \nu(A) = 2 \\ 0, \text{ если } \nu(A) = 0 \text{ или } \nu(A) = 0 \end{array} \right.$$

$$(8)\ \nu(\text{Е}A) = \left| \begin{array}{l} 3, \text{ если } \nu(A) = 3 \text{ или } \nu(A) = 1 \\ 0, \text{ если } \nu(A) = 3 \text{ или } \nu(A) = 2 \end{array} \right.$$

Если использовать понятие матрицы (т.е. системы, состоящей: (1) из непустого множества истинностных значений; (2) множества операций, определенных на множестве истинностных значений, и (3) множества выделенных значений, являющимся подмножеством множества истинностных значений), то можно показать, что функция оценки ν есть гомоморфизм, отображающий множество формул логики Роговского в матрицу.

Интерпретацией произвольной формулы А называется приписывание истинностных значений всем атомарным подформулам, из которых построена формула А.

Любая данная интерпретация формулы А расширяется единственным образом до некоторой $\mathbf{R}_4$-оценки, так как для каждой сложной подформулы формулы А можем однозначно определить истинностное значение, руководствуясь условиями (1)–(8).

Формула А называется *выполнимой*, если и только если (дальше пишем — е!) она истинна по крайней мере в одной $\mathbf{R}_4$-оценке, т.е $\nu(\mathrm{A}) = 3$.

Множество формул A^* называется *одновременно выполнимым* (или, другими словами, *совместным*), е! имеется R_4-оценка, при которой каждая формула множества A^* выполнима.

В противном случае, т.е. когда не имеется такой $\mathbf{R}_4$-оценки, оно *не является одновременно выполнимым.*

Формула A называется *общезначимой*, е! для любой R_4-оценки $\nu(\mathrm{A}) = 3$, т.е. А общезначима е! она выполнима в каждой $\mathbf{R}_4$-оценке.

Формула А называется *тождественно ложной*, е! для любой $\mathbf{R}_4$-оценки $\nu(\mathrm{A}) = 0$.

Формула А *не общезначима*, е! она не является общезначимой, т.е. имеется хотя бы одна $\mathbf{R}_4$-оценка, в которой $\nu(\mathrm{A}) = 2$, или $\nu(\mathrm{A}) = 1$, или $\nu(\mathrm{A}) = 0$.

Формула А называется *невыполнимой*, е! она не является выполнимой, т.е. нет ни одной $\mathbf{R}_4$-оценки, в которой $\nu(\mathrm{A}) = 3$. Отметим, что в классической логике понятия «быть тождественно ложной» и «быть невыполнимой» равнообъемные понятия. В рассматриваемой логике отношение между указанными понятиями иное: если формула тождественно ложная, то она является невыполнимой, но не наоборот.

Мы дали общее определение выполнимости в том смысле, что не учитывались разные виды формул А — $\mathbf{0}$А, $\mathbf{1}$А, $\mathbf{2}$А, $\mathbf{3}$А. Детализируем определение выполнимости относительно этих видов формул.

Для этого установим отношение между выполнимостью помеченной формулы $\mathbf{i}$А, где $\mathbf{i} \in \{0,\ 1,\ 2,\ 3\}$ и $\mathbf{R}_4$-оценкой непомеченной формулы А. Тот факт, что произвольная помеченная формула $\mathbf{i}$А выполнима, будем обозначать через $\exists\nu(\nu(\mathbf{i}A) \in \{3\})$.

$$(df.1). \exists\nu(\nu(\mathbf{0}A) \in \{3\}) \text{ e! } \nu(\mathrm{A}) = 0$$

$$(df.2). \exists\nu(\nu(\mathbf{1}A) \in \{3\}) \text{ e! } \nu(\mathrm{A}) = 1$$

$$(df.3). \exists\nu(\nu(\mathbf{2}A) \in \{3\}) \text{ e! } \nu(\mathrm{A}) = 2$$

$$(df.4). \exists\nu(\nu(\mathbf{3}A) \in \{3\}) \text{ e! } \nu(\mathrm{A}) = 3$$

Известно, что в классической логике высказываний формуле, помеченной знаком «ложь», можем поставить в соответствие формулу с оператором отрицания, а формуле, помеченной знаком «истина», — саму формулу (т.е. $\mathbf{f}\mathrm{A} \Leftrightarrow\sim \mathrm{A}$, $\mathbf{t}\mathrm{A} \Leftrightarrow \mathrm{A}$, где «f» и «t» — знаки, обозначающие соответственно ложь и истину). Установим аналогичное соответствие для логики Роговского:

$$\mathbf{0}\mathrm{A} \Leftrightarrow\sim \mathrm{A},\ \mathbf{1}\mathrm{A} \Leftrightarrow \text{ИA},\ \mathbf{2}\mathrm{A} \Leftrightarrow \text{ВA},\ \mathbf{3}\mathrm{A} \Leftrightarrow \mathrm{A}.$$

Однако использовать в логике Роговского вместо помеченных формул формулы с указанными операторами возможно, но практически неудобно. В этой логике имеются различные типы отрицания (слабое и сильное, а также их комбинации), разные типы утверждений (слабое и сильное), а потому появятся сложности с итерацией операторов «И», «В» и «Т» и некоторые другие. Помеченные же формулы дают единообразие в обозначениях, исключают любую неоднозначность в правилах редукции, минимизируют число правил редукции.

Введем понятие множества Хинтикки для помеченных формул (как множества формул истинных относительно некоторой $\mathbf{R}_4$-оценки). Назовем множество помеченных формул $\mathbf{H}$ множеством Хинтикки, если и только если для любых формул вида α, β, γ, δ оно удовлетворяет таким условиям:

($\mathbf{H}_0$). Для любой атомарной формулы p только одна произвольная формула из множества помеченных формул $\{\mathbf{0}\mathrm{p}, \mathbf{1}\mathrm{p}, \mathbf{2}\mathrm{p}, \mathbf{3}\mathrm{p}\}$ принадлежит $\mathbf{H}$, т.е. множество $\mathbf{H}$ непротиворечиво.

($\mathbf{H}_1$). Если $\alpha \in \theta$, то $\alpha_1 \in \mathbf{H}$, или $\alpha_2 \in \mathbf{H}$, или $\alpha_3 \in \mathbf{H}$, или $\alpha_4 \in \mathbf{H}$, или $\alpha_5 \in \mathbf{H}$;

($\mathbf{H}_2$) — если $\beta \in \mathbf{H}$, то $\beta_1 \in \mathbf{H}$ или $\beta_2 \in \mathbf{H}$, или $\beta_3 \in \mathbf{H}$;

($\mathbf{H}_3$) — если $\gamma \in \mathbf{H}$, то $\gamma_1 \in \mathbf{H}$ или $\gamma_2 \in \mathbf{H}$;

($\mathbf{H}_4$) — если $\delta \in \mathbf{H}$, то $\delta_1 \in \mathbf{H}$.

Дальше докажем методом Р. Смальяна [5] теорему о полноте аналитических таблиц для логики Роговского. Покажем, что если А есть общезначимая формула логики R_4, то все полные таблицы для $\mathbf{0}$A, $\mathbf{1}$A и $\mathbf{2}$A являются замкнутыми.

ТЕОРЕМА 1. *Каждая полная открытая ветвъ таблицы одновременно выполнима.*

Пусть θ полная открытая ветвь таблицы Д и пусть A^+ есть множество всех помеченных формул, принадлежащих θ. Тогда по определению полной таблицы условия $(i_1) - (i_4)$ совпадают с условиями $(\mathbf{H}_1) - (\mathbf{H}_4)$ определения множества Хинтикки, а по определению открытой ветви оказывается, что открытая ветвь есть множество непротиворечивых формул, что равносильно условию $(\mathbf{H}_0)$ определения множества Хинтикки. Заключаем, что полная открытая ветвь θ есть множество Хинтикки. Для продолжения доказательства теоремы нам нужна лемма.

ЛЕММА 2. *Каждое множество Хинтикки для $\boldsymbol{R}_4$ является одновременно выполнимъым.*

Доказательство.

Пусть $\mathbf{H}$ — множество Хинтикки. Построим $\mathbf{R}_4$-оценку, в которой каждая формула А $\in \mathbf{H}$ истинна. Припишем всем атомарным подформулам, из которых построены формулы из $\mathbf{H}$, истинностные значения следующим образом:

$$(1)\ \nu^*(p) = \left|\begin{array}{l} 3,\text{ если } \mathbf{3}p \in \mathbf{H} \\ 2,\text{ если } \mathbf{2}p \in \mathbf{H} \\ 1,\text{ если } \mathbf{1}p \in \mathbf{H} \\ 0,\text{ если } \mathbf{0}p \in \mathbf{H} \end{array}\right.$$

(2). Если помеченная атомарная подформула не принадлежит $\mathbf{H}$, то p можно приписать произвольное истинностное значение, для определенности будем считать, что $\nu^*(\mathrm{p}) = 3$.

В силу $(\mathbf{H}_0)$ условие (1) не может давать противоречивого подмножества формул.

Покажем индукцией по строению формулы А, что каждая А $\in \mathbf{H}$ при подходящей (без нарушения условия $(\mathbf{H}_0)$) интерпретации ее атомарных подформул истинна по меньшей мере в одной $\mathbf{R}_4 - \nu^*$-оценке. Для доказательства используем понятие степени (ранга) формулы d(A) как числа вхождений логических операторов в формулу A, более точно:

(c.1): каждая атомарная формула p имеет нулевую степень, т.е. $d(\mathrm{p}) = 0$;

(c.2): $d(s\mathrm{A}) = d(\mathrm{A}) + 1$, где $s \in \{\mathrm{B}, \sim, \ \mathrm{И}, \ \mathrm{T}, \ \mathrm{У}, \ \mathrm{E}\}$;

(c.3): $d(\mathrm{A} \to B) = d(\mathrm{A}) + d(\mathrm{B}) + 1$.

Базис индукции. Каждая помеченная атомарная формула, задаваемая условием (1), может быть истинной относительно указанной оценки ν^*.

Пусть $d(\mathrm{A}) > 0, \ \mathrm{A} \in \mathbf{H}$. Предположим, что для любой C такой, что $d(\mathrm{C}) < d(\mathrm{A})$ имеет место $\nu^*(\mathrm{C}) = 3$ по крайней мере в одной $\mathbf{R}_4$-оценке, где C есть помеченная подфомула помеченной формулы A. Надо показать, что $\nu^*(\mathrm{A}) = 3$. Так как $d(\mathrm{A}) > 0$, то формула A есть либо α, либо β, либо γ, либо δ.

Пусть A есть формула вида α. Тогда, по условию ($\mathbf{H}_1$) $\alpha_1 \in \mathbf{H}$, или $\alpha_2 \in \mathbf{H}$, или $\alpha_3 \in \mathbf{H}$, или $\alpha_4 \in \mathbf{H}$, или $\alpha_5 \in \mathbf{H}$. Но $d(\alpha_i) < d(\alpha), \ 1 \leq i \leq 5$. По предположению дано $\nu^*(\alpha_i) = 3$ по крайней мере в одной $\mathbf{R}_4$-оценке, значит и $\nu^*(\alpha) = 3$.

Случаи, когда A есть либо β, либо γ, доказываются сходным образом. Последний случай, когда A есть δ, доказывается аналогично, кроме применения правил $(\mathrm{T}_1), \ (\mathrm{T}_2), (\ \mathrm{T}_1), (\ \mathrm{T}_2), (\mathrm{У}_1), (\mathrm{У}_2), (\mathrm{E}_1)$ и (E_2), принадлежащих группе δ. Эти правила дают в заключении противоречие ($\mathbf{0}$A, $\mathbf{3}$A), а потому они не могут участвовать в построении множества H. Случай указанных правил соответствует случаю замкнутых ветвей в классических логиках, в которых используются константы «ложь» и «истина». Лемма доказана, тем самым доказана и теорема 1.

Q.E.D.

ТЕОРЕМА 3. *(a) Если A есть общезначимая формула, то все завершенные таблицы для помеченных формул **0**A, **1**A, **2**A являются замкнутыми; (b) Если A общезначима, то A таблично доказуема.*

Доказательство. Доказательство (a) проведем рассуждением от противного, т.е. допустим, что таблицы для помеченных формул $\mathbf{0}$A, $\mathbf{1}$A, $\mathbf{2}$A не являются замкнутыми.

Рассмотрим случай $\mathbf{0}$A. Пусть Д есть открытая таблица, построение которой начато с формулы $\mathbf{0}$A, т.е. $\mathbf{0}\mathrm{A} \in$Д. Если Д открытая таблица, то в ней имеется, по крайней мере, одна открытая ветвь θ. Тогда по теореме 1 эта ветвь одновременно выполнима. Это значит, что и формула **0**A выполнима, тогда $\nu^*(\mathrm{A}) = 0$, (где A непомеченная формула), так как **0**A∈Д. Но это противоречит условию теоремы, так как $\nu(\mathrm{A}) = 3 \neq \nu^*(\mathrm{A}) = 0$ (т.е. для любой $\mathbf{R}_4$-оценки $\nu(\mathrm{A}) = 3$, так как по условию теоремы формула A — общезначима, и в то же время имеется $\mathbf{R}_4$-оценка ν^*, в которой $\nu^*(\mathrm{A}) = 0$). Значит, таблица для **0**A замкнута.

Случай формулы **1**A. Пусть Д открытая таблица, начинающаяся с формулы **1**A, т.е. **1**A∈Д. Продолжая рассуждения так, как и в случае **0**A, придем к заключению, что $\nu(\mathrm{A}) = 3 \neq \nu^*(\mathrm{A}) = 1$. Значит, таблица для **1**A замкнута. Доказательство случая **2**A копирует два предыдущих случая.

(b). По пункту (a) теоремы 2 общезначимая формула A имеет замкнутые таблицы для помеченных формул **0**A, **1**A, **2**A. Так как по определению табличное доказательство непомеченной формулы A есть тройка замкнутых таблиц для помеченных формул **0**A, **1**A, **2**A, то непосредственно получаем, что A таблично доказуема. Q.E.D.

СЛЕДСТВИЕ 4. *Если имеется хотя бы одна незамкнутая таблица из тройки построенных таблиц для помеченных формул **0**A, **1**A, **2**A, то формула A не является общезначимой.*

Допустим, что формула A общезначима. Тогда по теореме 3 пункт (a), все таблицы для помеченных формул **0**A, **1**A, **2**A являются замкнутыми. Последнее находится в противоречии с условием формулировки Следствия 4. Значит, формула A на самом деле не является общезначимой.

ЛЕММА 5. *Если имеется замкнутая таблица для формулы A, то множество формул, расположенных на каждой замкнутой ветви таблицы, не являются одновременно выполнимым.*

Пусть имеется замкнутая таблица для формулы A, например **1**A, но формулы, принадлежащие любой из ветвей этой таблицы, одновременно выполнимы. Тогда получим противоречие. По определению одновременной выполнимости множества формул, существует $\mathbf{R}_4$-оценка, в которой все эти формулы истинны. Но это значит, что ветвь непротиворечива, т.е. таблица для формулы A не является замкнутой, что противоречит условию леммы.

ТЕОРЕМА 6. *Если A имеет табличное доказательство, то A общезначима.*

По определению табличное доказательство непомеченной формулы A есть тройка замкнутых таблиц для формул **0**A, **1**A, **2**A. По лемме 5 все множества формул, расположенных на ветвях таблиц для формул **0**A, **1**A, **2**A, не являются одновременно выполнимыми. При построении аналитических таблиц для помеченных формул **0**A, **1**A, **2**A предполагалось, что имеется, соответственно, хотя бы одна оценка, в которой непомеченная формула A принимает значение «0», «1» или «2». Но во всех трех случаях эти предположения ведут к противоречию. Это означает, что нет ни одной оценки, в которой непомеченная формула принимает значения «0», «1» и «2». Тогда непомеченная формула A выполнима в каждой R_4-оценке, т.е. формула A общезначима.

ЗАМЕЧАНИЕ 7. Можно видеть, что правила редукции $(\to_0)$, $(\to_3)$ и $(\sim_0)$, $(\sim_3)$ одинаковы для логики Роговского и классической логики высказываний. Это значит, что аналитические таблицы логики Роговского содержат изоморф аналитических таблиц классической логики высказываний. Но это также значит, что доказанная теорема о полноте для логики Роговского является обобщением этой теоремы, доказанной Смальяном для двузначной логики.

ЗАМЕЧАНИЕ 8. Эту же теорему можно доказать в стиле М. Фиттинга [3]. Так поступает, например, Р. Хенл [4] в доказательстве полноты для произвольной конечнозначной логики.

Основная особенность этого способа доказательства теоремы о полноте состоит в том, что используется *абстрактное свойство непротиворечивости.* В большинстве доказательств теорем о полноте явно используется понятие непротиворечивости (любое непротиворечивое множество формул имеет модель (выполнимо)). М. Фиттинг называет использование понятия непротиворечивости в доказательствах теоремы о полноте «стандартным аргументом полноты». Он выделяет существенные черты этого аргумента, т.е. черты, независимые от специфики той или иной конкретной дедуктивной системы и ее семантики. Он указывает две существенные черты. Во-первых, произвольное множество формул является непротиворечивым, если из него нельзя получить противоречия. Во-вторых, с семантической точки зрения все формулы непротиворечивого множества должны быть истинными, и понятие непротиворечивости руководит подбором значений пропозициональных переменных (из которых построены все формулы непротиворечивого множества), конструированием истинностной оценки, при которой формулы, входящие в непротиворечивое множество, оказываются истинными. Абстрактное свойство непротиворечивости допускает возможность уточнения для различных логик: классической, модальной, многозначной. Оно представляет собой не отдельное множество формул, как множество Хинтикки, а совокупность (собрание) множеств формул. Вся совокупность и каждое множество из этой совокупности непротиворечиво, т.е. из него невозможно по сформулированным условиям вывести противоречие. Каждое множество формул, если оно принадлежит этому собранию множеств формул, формально (структурно) удовлетворяет тем же условиям, что и множество Хинтикки, но содержательно речь идет о непротиворечивости.

Если применить эти содержательные соображения к помеченным формулам логики Роговского, то абстрактное свойство непротиворечивости уточняется следующим образом.

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 9. Пусть Δ есть собрание множеств помеченных формул логики Роговского. Назовем Δ свойством непротиворечивости помеченных формул, если для каждого $S \in \Delta$ оно удовлетворяет следующим условиям:

1. Для всех атомарных формул p, если j_1p, j_2p $\in S$, то $\{j_1\} \cap \{j_2\} \neq \varnothing$, где $j \in \{3,\ 2,\ 1,\ 0\}$;
2. $\mathbf{0}$(A $\to$ B), $\mathbf{1}$TA, $\mathbf{2}$TA, $\mathbf{1} \sim$ TA, $\mathbf{2} \sim$ TA, $\mathbf{1}$УA, $\mathbf{2}$УA, $\mathbf{1}$EA, $\mathbf{2}$EA $\notin S$;
3. Если $\alpha \in S$, то $S \cup \{\alpha_1\} \in \Delta$ или $S \cup \{\alpha_2\} \in \Delta$ или, $S \cup \{\alpha_3\} \in \Delta$ или, $S \cup \{\alpha_4\} \in \Delta$ или, $S \cup \{\alpha_5\} \in \Delta$;
4. Если $\beta \in S$, то $S \cup \{\beta_1\} \in \Delta$ или $S \cup \{\beta_2\} \in \Delta$ или, $S \cup \{\beta_3\} \in \Delta$;
5. Если $\gamma \in S$, то $S \cup \{\gamma_1\} \in \Delta$ или $S \cup \{\gamma_2\} \in \Delta$;

6. Если $\delta \in S$, то $S \cup \{\delta_1\} \in \Delta$, причем из δ исключены формулы, указанные в пункте 2.

Например, пункт 5 определения означает, что если $\gamma \in S$, то удлинение S посредством γ_1 или γ_2 непротиворечиво. Основная идея доказательства теоремы о полноте состоит в том, чтобы показать, что удлинение S является множеством Хинтикки. Множество Хинтикки выполнимо. Если S конечно, то доказательство очевидно. Но если S бесконечно, то надо использовать теорему Линденбаума (всякое непротиворечивое множество предложений S может быть расширено до максимального непротиворечивого множества), и показать, что максимальное непротиворечивое множество предложений есть множество Хинтикки.

Приведем несколько примеров проверки общезначимости формул.

ПРИМЕР 10. Тр $\to (g \to p)$. Проверим, является ли эта формула общезначимой. Надо построить три аналитические таблицы $\mathbf{0}$(Тр $\to (g \to p)$), $\mathbf{1}$(Тр $\to (g \to p)$), $\mathbf{2}$(Тр $\to (g \to p)$).

(1). $\mathbf{0}$(Тр$\to (g \to p)$)
(2). $\mathbf{3}$Тр
(3). $\mathbf{0}(g \to p)$
(4). $\mathbf{3}$p(2)
(5). $\mathbf{3}$g
(6). $\mathbf{0}$p(3)
пр. 4, 6

Таблица для помеченной формулы $\mathbf{0}$(Тр$\to (g \to p)$) замкнута, на что указывает знак «пр.» после строчки (6), который читается «противоречие». Вторая и третья строчки получены из (1), но во второй строчке это не отмечается. Пятая и шестая строчки получены из строчки (3), но в пятой строчке указание на это опускается. Мы также опускаем указание на то, что вторая и третья строчки получены из (1), а пятая и шестая из (3) по одному и тому же правилу редукции ($\to_0$). По знаку помеченной формулы, из которой получаем другие строчки, и расположению скобок, выделяющих в формуле (или подформуле) главную логическую связку или оператор, однозначно определяется используемое правило редукции. Такие сокращения оправданы для лучшего обозрения весьма громоздких таблиц (см. Приложение 1).

Все ветви для помеченной формулы $\mathbf{2}$(Тр $\to (g \to p)$) замкнуты. Все таблицы для помеченных формул $\mathbf{0}$(Тр $\to (g \to p)$), $\mathbf{1}$(Тр $\to (g \to p)$) и $\mathbf{2}$(Тр $\to (g \to p)$) замкнуты. А потому формула (Тр $\to (g \to p)$) общезначима.

ПРИМЕР 11. р $\to (g \to p)$. Проверим, является ли эта формула общезначимой. Надо построить три аналитические таблицы $\mathbf{0}$(р $\to (g \to p)$), $\mathbf{1}$(р $\to (g \to p)$), $\mathbf{2}$(р $\to (g \to p)$).

(1). $\mathbf{0}$(р $\to (g \to p)$)
(2). $\mathbf{3}$р
(3). $\mathbf{0}(g \to p)$ (1)
(4). $\mathbf{3}$g
(5). $\mathbf{0}$р
пр. 2, 5

Таблица для помеченной формулы $\mathbf{0}$(р $\to (g \to p)$) замкнута.

Таблица для помеченной формулы $\mathbf{1}$(р $\to (g \to p)$) замкнута (см. Приложение 2).

Проверять построение ветвей, порождаемых формулами (с$_1$), (d_1) и (е$_1$), — лишняя работа, так как часть ветвей (три), полученные на основании формулы b_1, оказались полными, но не замкнутыми. Значит, таблица для помеченной формулы $\mathbf{2}$(р $\to (g \to p)$) не замкнута (см. Приложение 3.), и формула (р $\to (g \to p)$) не является общезначимой.

ПРИМЕР 12. Проверить общезначимость формулы У$(p \to g) \to$ (У$p \to$ Уg). Надо построить три аналитических таблицы $\mathbf{0}$(У$(p \to g) \to$ (У$p \to$ Уg)), $\mathbf{1}$(У$(p \to g) \to$ (У$p \to$ Уg)), $\mathbf{2}$(У$(p \to g) \to$ (У$p \to$ Уg)) и выяснить являются ли они замкнутыми.

(1). $\mathbf{0}$(У$(p \to g) \to$ (У$p \to$ Уg))
(2). $\mathbf{3}$(У$(p \to g)$)
(3). $\mathbf{0}$((У$p \to$ Уg)) (1)

(4). $\mathbf{3}((p \to g)$ (2)		(5). $\mathbf{2}((p \to g))$ (2)
(4.1). $\mathbf{0}$р (4)	(4.2). $\mathbf{3}$g (4)	
(4.1.1). $\mathbf{3}$Ур (3)	(4.2.1). $\mathbf{3}$Ур (3)	
(4.1.2). $\mathbf{0}$Уg (3)	(4.2.2). $\mathbf{0}$Уg (3)	

(5).

(a). $\mathbf{3}$р	(b). $\mathbf{2}$р	(c). $\mathbf{1}$р	(d). $\mathbf{1}$р	(e). $\mathbf{1}$р
(a_1). $\mathbf{2}$g (5)	(b_1). $\mathbf{2}$g (5)	(c_1). $\mathbf{2}$g (5)	(d_1). $\mathbf{1}$g (5)	(e_1). $\mathbf{0}$g (5)
(a_2). $\mathbf{3}$Ур (3)	(b_2). $\mathbf{3}$Ур (3)	(c_2). $\mathbf{3}$Ур (3)	(d_2). $\mathbf{3}$Ур (3)	(e_2). $\mathbf{3}$Ур (3)
(a_3). $\mathbf{0}$Уg (3)	(b_3). $\mathbf{0}$Уg (3)	(c_3). $\mathbf{0}$Уg (3)	(d_3). $\mathbf{0}$Уg (3)	(e_3). $\mathbf{0}$Уg (3)

(6).		(7).	
(6.1). **3**p(4.1.1)	(6.2). **2**p(4.1.1)	(7.1). **0**g(4.2.2)	(7.2). **1**g(4.2.2)
пр. 4.1,6.1	**пр.** 4.1,6.2	**пр.** 4.2,7.1	**пр.** 4.2,7.2

(8).		(9).	
(d_{21}). **3**p(d_2)	(d_{22}). **2**p(d_2)	(e_{21}). **3**p(e_2)	(e_{22}). **2**p(e_2)
пр. $d,\ d_{21}$	**пр.** $d,\ d_{22}$	**пр.** $e,\ e_{21}$	**пр.** $e,\ e_{22}$

(10).		(11).		(12).	
(a_{31}). **1**g(a_3)	(a_{32}). **0**g(a_3)	$(в_{31})$. **1**g$(в_3)$	$(в_{32})$. **0**g$(в_3)$	(c_{21}). **3**p(c_2)	(c_{22}). **2**p(c_2)
пр. $a_1,\ a_{31}$	**пр.** $a_1,\ a_{32}$	**пр.** $в_1,\ в_{31}$	**пр.** $в_1,\ в_{32}$	**пр.** $c,\ c_{21}$	**пр.** $c,\ c_{22}$

Все ветви помеченной формулы $\mathbf{0}(У(p \to g) \to (Уp \to Уg))$ замкнуты. Однако ветви не являются завершенными: помеченные формулы (4.1.2) и (4.2.2) не редуцированы к помеченным подформулам.

$\mathbf{1}(У(p \to g) \to (Уp \to Уg))$

(a).$\mathbf{2}У(p \to g)$ $(a_1)\mathbf{0}(Уp \to Уg)(1)$ **пр.** (a)	(b).$\mathbf{2}У(p \to g)$ $(b_1)\mathbf{1}(Уp \to Уg)(1)$ **пр.** (b)	(c).$\mathbf{3}У(p \to g)$ $(c_1)\mathbf{1}(Уp \to Уg)(1)$		
		(c_{11}).**3**Уp (c_{12}).**1**Уg(c_1) **пр.**(c_{12})	(c_{13}).**2**Уp (c_{14}).**1**Уg(c_1) **пр.**(c_{14})	(c_{15}).**2**Уp (c_{16}).**0**Уg(c_1) **пр.**(c_{15})

Таблица для помеченной формулы $\mathbf{1}(У(p \to g) \to (Уp \to Уg))$ замкнута, хотя и не является полной. К помеченным формулам, например, строки (c).$\mathbf{3}У(p \to g)$ и строки $(a_1)\mathbf{0}(Уp \to Уg)$ правила редукции не применялись.

Все ветви помеченной формулы $\mathbf{2}(У(p \to g) \to (Уp \to Уg))$ замкнуты (см. Приложение 4). Непомеченная формула $У(p \to g) \to (Уp \to Уg)$ общезначима.

Кроме указанных примеров, были проверены на общезначимость все аксиомы (третий пример — это аксиома), правило вывода и ряд других формул аксиоматической системы Роговского, т.е. тестирование правил редукции, на мой взгляд, было достаточным. Множество правил редукции логики Роговского удовлетворяет методологическим требованиям полноты (Теорема 3) и корректности (Теорема 6).

2 Обобщенные аналитические таблицы

Практика построения аналитических таблиц даже для сравнительно простых формул, т.е. формул, имеющих небольшое число логических связок и операторов, показывает их громоздкость, сложность по сравнению с аналитическими таблицами классической логики. Эта сложность объясняется двумя обстоятельствами. Во-первых, максимальное число новых ветвей, порождаемых правилом ($\rightarrow_2$), равно пяти, тогда как в классической логике это число равно двум. Во-вторых, для каждой формулы логики Роговского строятся три аналитические таблицы, в классическом случае одна. Назовем на время эту вторую сложность *«проблемой большого числа аналитических таблиц»*. Проблематичность имеет место не с теоретической точки зрения (система правил редукции полна и корректна), а с практической: в конце концов табличный способ формализации логики Роговского должен быть удобным инструментом для проверки общезначимости более или менее сложных формул.

Первый недостаток частично устраним, при условии если формулы или подформулы имеют структуру вида: $\mathbf{2}(\text{ТA} \rightarrow \text{B})$, $\mathbf{2}(\text{A} \rightarrow \text{ТB}), \mathbf{2}(\text{ТA} \rightarrow \text{ТB}), \mathbf{1}(\text{ТA} \rightarrow \text{B}), \mathbf{1}(\text{A} \rightarrow \text{ТB}), \mathbf{1}(\text{ТA} \rightarrow \text{ТB}), \mathbf{2}(\text{УA} \rightarrow \text{B}), \mathbf{2}(\text{A} \rightarrow \text{УB}), \mathbf{2}(\text{УA} \rightarrow \text{УB})$ и некоторую другую. Но в этом случае нам нужны производные правила, которые несложно получить. Например, можно получить такое производное правило (производное правило определяется стандартно).

$$\frac{\mathbf{2}(\text{ТA} \rightarrow \text{B})}{\begin{array}{c}\mathbf{3}\text{ТA}\\ \mathbf{2}\text{B}\end{array}}$$

(+).$\mathbf{2}(\text{ТA} \rightarrow \text{B})$

(a). $\mathbf{3}$ТA	(b). $\mathbf{2}$ТA	(c). $\mathbf{1}$ТA	(d). $\mathbf{1}$ТA	(e). $\mathbf{1}$ТA
(a_1). $\mathbf{2}$B (+)	(b_1). $\mathbf{2}$B (+)	(c_1). $\mathbf{2}$B (+)	(d_1). $\mathbf{1}$B (+)	$\mathbf{1}$B (+)
	(b_2).$\mathbf{3}A$, $\mathbf{0}A(b)$	(c_2).$\mathbf{3}A$, $\mathbf{0}A(c)$	(d_2).$\mathbf{3}A$, $\mathbf{0}A(d)$	$\mathbf{3}$A, $\mathbf{0}$A (e)
	пр. (b_2)	**пр.** (c_2)	**пр.** (d_2)	**пр.** (e_2)

В данном производном правиле сокращение числа ветвей произошло за счет отсечения заведомо противоречивых ветвей.

Если бы мы применили это производное правило к примеру 10 при построении аналитической таблицы для помеченной формулы $\mathbf{2}(\text{Тp} \rightarrow (g \rightarrow p))$, то ветви (в) (c), (d) и (e) отсутствовали бы. Несложно указать и обосновать другие производные правила.

Производные правила сокращают число ветвей при построении аналитических таблиц, но в отдельных, подходящих случаях, когда структура исследуемой формулы разрешает применять производные правила. Но они не являются применимыми во всех возможных случаях; легко указать в принципе потенциально бесконечный список формул, структура которых не допускает применения производных правил.

В итоге можно утверждать, что появление большого числа ветвей при построении аналитических таблиц неизбежно, так как правила ($\rightarrow_1$) и ($\rightarrow_2$) отображают табличную семантику импликации. Неизбежно до тех пор, пока не произойдет некоторое обобщение на уровне табличной семантики импликации. Это станет возможным, если будет решена вторая проблема.

Что касается проблемы большого числа аналитических таблиц, то она также вполне объяснима.

Из множества $\Gamma_4 = \{3,\ 2,\ 1,\ 0\}$ истинностных значений, допускаемых логикой Роговского, в качестве выделенного принимается значение $\{3\}$. Остальные истинностные значения $\{0\}, \{1\}$ и $\{2\}$ не являются значимыми, выделенными. Тогда, чтобы получить доказательство общезначимости формулы A в табличном построении логики Роговского, надо порознь сделать три предположения о необщезначимости формулы. (1) Имеется хотя бы одна возможность (т.е. открытая ветвь), в которой формула A принимает значение «0», т.е. $\nu^*(\mathrm{A}) = 0$; (2) Имеется хотя бы одна возможность, в которой $\nu^*(\mathrm{A}) = 1$; (3) Имеется хотя бы одна возможность, в которой $\nu^*(\mathrm{A}) = 2$.

Синтаксически эти три предположения означают, что построения аналитических таблиц соответственно начинаются с помеченных формул **0**A, **1**A и **2**A. Опровержение же состоит в том (если, конечно, все аналитические таблицы замкнуты), что мы получаем противоречие в каждой ветви этих таблиц. Противоречие означает, что на ветви встречается, по меньшей мере дважды, одна и та же формула (в случае полной таблицы — атомарная формула), но она имеет различные помеченные значения. В более точной записи: на замкнутой ветви имеются помеченные формулы $j_1\text{ф}_1,\ j_2\text{ф}_2, \ldots,\ j_n\text{ф}_n$ такие, что $\text{ф}_2 = \text{ф}_3 = \cdots = \text{ф}_m$ и $\{j_1\} \cap \{j_2\} \cap \cdots \cap \{j_m\} = \emptyset$, где $j \in \{\mathbf{3,\ 2,\ 1,\ 0}\}$ и $1 < m \leq n$. Иначе, т.е. когда пересечение не пусто, ветвь не является замкнутой.

Три *порознь* сделанных предположения о необщезначимости формулы и является подлинной причиной появления трех аналитических таблиц (или, в другой терминологии, трех подтаблиц данной таблицы) для одной и той же исследуемой формулы.

Если обобщить этот подход на произвольную конечнозначную логику, то число аналитических таблиц для любой, исследуемой на общезначимость формулы равно $|N|\backslash|b|$, где $|N|$ — мощность множества истинностных значений, $|b|$ — это мощность выделенных значений истинности. Обобщения табличного способа формализации на произвольную конечнозначную логику, начатое Сурмой (Surma Stanislaw) [7] и продолженное Карниелли (Carnielli Walter) [8], безупречны с точки зрения методологических требований полноты и корректности, предъявляемых к табличным системам. К сожалению, при этом подходе не решается проблема неизбежности построения большого числа аналитических таблиц ($|N|\backslash|b|$) для одной и той же формулы. Поэтому с практической точки зрения они малопригодны. Задача, таким образом, формулируется так: как сократить число аналитических таблиц для одной и той же формулы?

Систематическое решение этой задачи впервые было предложено Хенлем [4]. Основная идея этого решения, если применить ее к четырехзначной логике Роговского, состоит в следующем. Надо предполагать в рассуждении от противного, свойственного для аналитических таблиц, не три изолированных друг от друга случая предположения: «$\nu^*(\mathrm{A}) = 0$», «$\nu^*(\mathrm{A}) = 1$» и «$\nu^*(\mathrm{A}) = 2$», но следует реализовать в этом рассуждении единое условие, а именно: «$\nu^*(\mathrm{A}) = 0$, или $\nu * (\mathrm{A}) = 1$, или $\nu^*(\mathrm{A}) = 2$». Но тогда надо изменить трактовку помеченной формулы. Он назвал это новое понимание помеченной формулы «множества как знаки» (sets as signs). «Множества как знаки» — это синтаксические операторы, которым ставятся в соответствие определенные подмножества $\mathrm{г} \subset \Gamma_4$ истинностных значений из $\Gamma_4 = \{3,\ 2,\ 1,\ 0\}$. Из всех возможных подмножеств множества Γ_4 будут использованы следующие подмножества:

$\{\{0, 1, 2\},\ \{0, 1\},\ \{0, 2\},\ \{1, 2\},\ \{0\},\ \{1\},\ \{2\}\}$ и $\{3\}$.

Все подмножества, кроме последнего, являются подмножествами множества $\{0, 1, 2\}$, последнее подмножество является выделенным множеством логики Роговского.

Такой выбор не является случайным. Чтобы доказать в табличной системе логики Роговского общезначимость формулы, надо показать, что помеченная формула, соответствующая множеству $\{0, 1, 2\}$, не является выполнимой, т.е. все ветви этой помеченной формулы замкнуты. Все остальные подмножества $\{0, 1, 2\}$, используемые в качестве знаков помеченных формул, появляются в ходе разложения исходной помеченной подформулы на подформулы, т.е. в процессе построения аналитической таблицы. Если мы превратим само множество $\{0, 1, 2\}$ и его подмножества в синтаксические объекты, т.е. в знаки помеченных формул, то возможны такие виды помеченных формул: **012**:A, **01**:A, **02**:A, **12**:A, **0**A, **1**A, **2**A и, кроме этого, имеется еще одна помеченная формула **3**A, где A — произвольная формула. Тогда, например, формула **012**:A читается «A ложно или A подложно, или A подистинно».

Дальше будем называть *обобщенной помеченной формулой* любую формулу вида **012**:A, **01**:A, **02**:A, **12**:A.

Обобщенным правилом редукции называется любое правило, в котором в посылке или заключении имеется хотя бы одна обобщенная помеченная формула.

Обобщенной аналитической таблицей называется аналитическая таблица, построение которой начинается из формулы **012**:A. Отметим, что в построении обобщенных аналитических таблиц применяются не только обобщенные правила редукции, но и некоторые прежние правила редукции. Сначала модифицируем правила редукции **1**(A→B), **2**(A→B), **0**TA, **3**∼TA, **0**УA и **0**EA так, чтобы в заключении этих правил имелись обобщенные подформулы. Затем укажем новые (обобщенные) правила редукции для формул **012**:A, **01**:A, **02**:A и **12**:A, где A произвольная формула, возможно с оператором. И после этого дадим обоснование этих правил.

Модифицированные правила

$(\to_1)$, $(\to_2)$, (T0), ($\sim$ T3), (У0), (E0).

$$(\to_1)^+ : \ \frac{\mathbf{1}(A \to B)}{\begin{array}{c|c} \mathbf{2}\mathrm{A} & \mathbf{3}\mathrm{A} \\ \mathbf{01{:}}\mathrm{B} & \mathbf{1}\mathrm{B} \end{array}} \qquad (\to_2)^+ : \ \frac{\mathbf{2}(A \to B)}{\begin{array}{c|c|c} \mathbf{1}\mathrm{A} & \mathbf{12{:}}\mathrm{A} & \mathbf{3}\mathrm{A} \\ \mathbf{2}\mathrm{B} & \mathbf{2}\mathrm{B} & \end{array}} \ \mathbf{01{:}}\mathrm{B} \qquad (\mathrm{T}_0)^+ : \ \frac{\mathbf{0}\mathrm{TA}}{\mathbf{012{:}}\mathrm{A}}$$

$$(\sim T_3)^+ : \ \frac{\mathbf{3}{\sim}\mathrm{TA}}{\mathbf{012:}\mathrm{A}} \quad (\text{У}_0)^+ : \ \frac{\mathbf{0}\text{УА}}{\mathbf{01:}\mathrm{A}} \quad (E_0)^+ : \ \frac{\mathbf{0}\mathrm{EA}}{\mathbf{02:}\mathrm{A}}$$

Обобщенные правила: $(\to_{01})$, $(\to_{02})$, $(\to_{12})$, $(\to_{012})$ и др.

Правила для импликации

$$(\to_{01}) \ \begin{array}{c|c} \multicolumn{2}{c}{\mathbf{01}:(A \to B)} \\ \hline \mathbf{2}\mathrm{A} & \mathbf{3}\mathrm{A} \\ \mathbf{01:}\mathrm{B} & \mathbf{01:}\mathrm{B} \end{array} \quad (\to_{02}) \ \begin{array}{c|c|c} \multicolumn{3}{c}{\mathbf{02}:(A \to B)} \\ \hline \mathbf{1}\mathrm{A} & \mathbf{12:}\mathrm{A} & \mathbf{2}\mathrm{B} \\ \mathbf{01:}\mathrm{B} & \mathbf{2}\mathrm{B} & \mathbf{02:}\mathrm{B} \end{array}$$

$$(\to_{12}) \ \begin{array}{c|c|c} \multicolumn{3}{c}{\mathbf{12}:(A \to B)} \\ \hline \mathbf{12:}\mathrm{A} & \mathbf{3}\mathrm{A} & \mathbf{12:}\mathrm{A} \\ \mathbf{01:}\mathrm{B} & \mathbf{12:}\mathrm{B} & \mathbf{2}\mathrm{B} \end{array} \quad (\to_{012}) \ \begin{array}{c|c} \multicolumn{2}{c}{\mathbf{012}:(A \to B)} \\ \hline \mathbf{12:}\mathrm{A} & \mathbf{3}\mathrm{A} \\ \mathbf{012:}\mathrm{B} & \mathbf{012:}\mathrm{B} \end{array}$$

Отметим, что правила для импликации: $(\to_0)$ и $(\to_3)$ сохраняются без изменений.

Правила для оператора «В»

$$(B_{01}) : \ \begin{array}{c|c} \multicolumn{2}{c}{\mathbf{01:}\mathrm{BA}} \\ \hline \mathbf{1}\mathrm{A} & \mathbf{3}\mathrm{A} \end{array} \quad (B_{02}) : \ \frac{\mathbf{02:}\mathrm{BA}}{\mathbf{01:}\mathrm{A}}$$

$$(B_{12}) : \ \begin{array}{c|c} \multicolumn{2}{c}{\mathbf{12:}\mathrm{BA}} \\ \hline \mathbf{0}\mathrm{A} & \mathbf{3}\mathrm{A} \end{array} \quad (B_{012}) : \ \begin{array}{c|c} \multicolumn{2}{c}{\mathbf{012:}\mathrm{BA}} \\ \hline \mathbf{01}\mathrm{A} & \mathbf{3}\mathrm{A} \end{array}$$

Правила для отрицания (слабого)

$$(\sim_{01}) : \ \begin{array}{c|c} \multicolumn{2}{c}{\mathbf{01} : \sim A} \\ \hline \mathbf{2}\mathrm{A} & \mathbf{3}\mathrm{A} \end{array} \quad (\sim_{02}) : \ \begin{array}{c|c} \multicolumn{2}{c}{\mathbf{02} : \sim A} \\ \hline \mathbf{1}\mathrm{A} & \mathbf{3}\mathrm{A} \end{array}$$

$$(\sim_{12}) : \ \frac{\mathbf{12} : \sim A}{\mathbf{12:}\mathrm{A}} \quad (\sim_{012}) : \ \begin{array}{c|c} \multicolumn{2}{c}{\mathbf{012} : \sim A} \\ \hline \mathbf{12:}\mathrm{A} & \mathbf{3}\mathrm{A} \end{array}$$

Правила для оператора «И»

$$(\text{И}_{01}):\ \frac{\mathbf{01:}\text{ИА}}{\mathbf{02:}\text{А}} \quad (\text{И}_{02}):\ \frac{\mathbf{02:}\text{ИА}}{\mathbf{2}\text{А} \mid \mathbf{3}\text{А}}$$

$$\frac{\mathbf{12:}\text{ИА}}{\mathbf{0}\text{А} \mid \mathbf{3}\text{А}} \quad (\text{И}_{012}):\ \frac{\mathbf{012:}\text{ИА}}{\mathbf{02:}\text{А} \mid \mathbf{3}\text{А}}$$

Правила для оператора «Т»

$(\text{Т}_{01}) = (\text{Т}_{02}) = (\text{Т}_{012})$, т.е. заключения этих правил совпадают

$$(\text{Т}_{01}):\ \frac{\mathbf{01:}\text{ТА}}{\mathbf{012:}\text{А}} \quad (\text{Т}_{12}):\ \frac{\mathbf{12:}\text{ТА}}{\mathbf{0}\text{А},\ \mathbf{3}\text{А}}$$

Правила для отрицания (сильного) «$\sim$ Т»

$\sim(\text{Т}_{01}) = \sim(\text{Т}_{02}) = \sim(\text{Т}_{012})$, т.е. заключения этих правил совпадают

$$\sim(\text{Т}_{01}):\ \frac{\mathbf{01:}\sim \text{Т}A}{\mathbf{3}\text{А}} \quad \sim(\text{Т}_{12}):\ \frac{\mathbf{12:}\sim \text{Т}A}{\mathbf{0}\text{А},\ \mathbf{3}\text{А}}$$

Правила для оператора «У»

$(\text{У}_{01}) = (\text{У}_{02}) = (\text{У}_{012})$, т.е. заключения этих правил совпадают

$$(\text{У}_{01}):\ \frac{\mathbf{01:}\text{УА}}{\mathbf{01:}\text{А}} \quad (\text{У}_{12}):\ \frac{\mathbf{12:}\text{УА}}{\mathbf{0}\text{А},\ \mathbf{3}\text{А}}$$

Правила для оператора «Е»

$(E_{01}) = (E_{02}) = (E_{012})$, т.е. заключения этих правил совпадают

$$(E_{01}):\ \frac{\mathbf{01:}\text{ЕА}}{\mathbf{02:}\text{А}} \quad (E_{12}):\ \frac{\mathbf{12:}\text{ЕА}}{\mathbf{0}\text{А},\ \mathbf{3}\text{А}}$$

Разобьем эти правила на три группы : $(\beta)^*$, $(\gamma)^*$ и $(\delta)^*$

$(\beta)^*$	β_1^*	β_2^*	β_3^*
2$(A \to B)$	**1**A **01:**B	**12:**A **2**B	**3**A **2**B
02:$(A \to B)$	**1**A **01:**B	**12:**A **2**B	**3**A **02:**B
12:$(A \to B)$	**12:**A **01:**B	**3**A **12:**B	**12:**A **2**B

$(\gamma)^*$	γ_1^*	γ_2^*
1$(A \to B)$	**2**A **01:**B	**3**A **1**B
01:$(A \to B)$	**2**A **12:**A	**3**A **01:**B
012:$(A \to B)$	**12:**A **012:**B	**3**A **012:**B
01:ВA	**1**A	**3**A
12:ВA	**0**A	**3**A
012:ВA	**01:**A	**3**A
01:$\sim A$	**2**A	**3**A
02:$\sim A$	**1**A	**3**A
012:$\sim A$	**12:**A	**3**A
02:ИA	**2**A	**3**A
12:ИA	**0**A	**3**A
012:ИA	**02:**A	**3**A
12:ТA	**0**A **3**A	**0**A **3**A
12:$\sim T$A	**0**A **3**A	**0**A **3**A
12:УA	**0**A **3**A	**0**A **3**A
12:ЕA	**0**A **3**A	**0**A **3**A

$(\delta)^*$	δ_1^*
0TA	**012:**A
3$\sim TA$	**012:**A
0УA	**01:**A
0EA	**02:**A
02:BA	**01:**A
12:$\sim A$	**12:**A
01:ИA	**02:**A
01:TA	**012:**A
01:$\sim TA$	**3:**A
01:УA	**01:**A
01:УA	**02:**A

Прежде чем дать обоснование модифицированных и обобщенных правил, укажем на очевидные факты. В модифицированных правилах число столбцов в заключении, как можно видеть, уменьшилось по сравнению со старыми правилами. Кроме того, во всех указанных правилах максимальное число столбцов (ветвей) в заключении равно трем. Последнее очень важно для практики построения аналитических таблиц, так как это означает, что число ветвей в ходе построения аналитической таблицы для определенной формулы сокращается. Хотя, с другой стороны, число правил редукции увеличивается, но это неудобство скорее психологического характера. И, наконец, вместо трех аналитических таблиц, что особенно важно, строится одна.

Модифицированные и новые правила получаем из старых правил посредством некоторых эквивалентных преобразований ДНФ: переходим от правил редукции к соответствующим им ДНФ, затем проводим эквивалентные преобразования ДНФ, и, наконец, от преобразованной ДНФ переходим к модифицированным или новым правилам редукции.

Прежде отмечалось, что правилам редукции соответствует ДНФ. Надо более точно описать это соответствие. Введем два определения.

(д.1). $\Phi^{\mathbf{i}} \equiv_{Df} \mathbf{i}\Phi$,

где $\mathbf{i} \in \{\mathbf{012},\ \mathbf{01},\ \mathbf{02},\ \mathbf{12},\ \mathbf{0},\ \mathbf{1},\ \mathbf{2},\ \mathbf{3}\}$, если $\mathbf{i}$ есть оператор формулы, т.е. знак помеченной формулы, и $i \in \{\{0,\ 1,\ 2\},\ \{0,\ 1\},$ $\{0,\ 2\},\ \{1,\ 2\},\ \{0\},\ \{1\},\ \{2\},\ \{3\}\}$, если **i** есть знак истинностного значения формулы. В последнем случае **i** используется в качестве верхнего индекса, т.е. $\Phi^{\mathbf{i}}$. $\Phi^{\mathbf{i}}$ читается «Ф имеет истинностное значение i». Определение (д.1) позволяет переходить от операторов формулы к истинностным значениям формулы, и обратно.

(д.2). $\Phi^{\mathbf{ij}} \equiv_{Df} \Phi^{\mathbf{i}} \vee \Phi^{\mathbf{j}}$,

где **i**, **j** — одинаковые или различные истинностные значения одной и той же формулы Ф. Это определение позволяет объединить отдельные истинностные значение формулы Ф в множество, и наоборот, разбить множество истинностных значений на отдельные истинностные значения фиксированной формулы. Например. $\mathrm{A}^1 \vee \mathrm{A}^0 = A^{\{1,0\}} = A^{10}$, т.е. ради краткости скобки и запятую мы опускаем.

Эти два определения и соглашения о замене конъюнкции запятой (в правилах редукции на самом деле используется не запятая, а запись в виде написанных одна под другой формул) и обратно; а также замены дизъюнкции вертикальной чертой, и обратно, позволяют описать соответствие между ДНФ и правилами редукции.

Дадим *обоснование правила* $(\to_1)^+$.

$\mathbf{1}(\mathrm{A} \to \mathrm{B}) =_{(\text{д.1})} (\mathrm{A} \to \mathrm{B})^1 =_{(\text{по таблице истинности для } \to)} (\mathrm{A}^3 \wedge \mathrm{B}^1) \vee ((\mathrm{A}^2 \wedge \mathrm{B}^1) \vee (\mathrm{A}^2 \wedge \mathrm{B}^0)) =_{(\text{дистр.})} (\mathrm{A}^3 \wedge \mathrm{B}^1) \vee (\mathrm{A}^2 \wedge (\mathrm{B}^0 \vee \mathrm{B}^1)) =_{(\text{д.2})} (\mathrm{A}^3 \wedge \mathrm{B}^1) \vee (\mathrm{A}^2 \wedge \mathrm{B}^{01}) =_{(\text{д.1})} (\mathbf{3}\mathrm{A} \wedge \mathbf{1}\mathrm{B}) \vee (\mathbf{2}\mathrm{A} \wedge \mathbf{01{:}}\mathrm{B}) =_{(\text{соответствие})}$ $\mathbf{3}\mathrm{A},\ \mathbf{1}\mathrm{B} \mid \mathbf{2}\mathrm{A},\ \mathbf{01{:}}\mathrm{B}$

Обоснование правила $(\to_2)^+$.

$\mathbf{2}(\mathrm{A} \to \mathrm{B}) =_{(\text{д.1})} (\mathrm{A} \to \mathrm{B})^2 =_{(\text{по таблице истинности для } \to)} (\mathrm{A}^3 \wedge \mathrm{B}^2) \vee ((\mathrm{A}^2 \wedge \mathrm{B}^2) \vee (\mathrm{A}^1 \wedge \mathrm{B}^2)) \vee ((\mathrm{A}^1 \wedge \mathrm{B}^1) \vee (\mathrm{A}^1 \wedge \mathrm{B}^0)) =_{(\text{дистр.})} (\mathrm{A}^3 \wedge \mathrm{B}^2) \vee (\mathrm{B}^2 \wedge (\mathrm{A}^1 \vee \mathrm{A}^2) \vee (\mathrm{A}^1 \wedge (\mathrm{B}^0 \vee \mathrm{B}^1) =_{(\text{д.2})} (\mathrm{A}^3 \wedge \mathrm{B}^2) \vee (\mathrm{B}^2 \wedge \mathrm{A}^{12}) \vee (\mathrm{A}^1 \wedge \mathrm{B}^{01}) =_{(\text{д1})} (\mathbf{3}\mathrm{A} \wedge \mathbf{2}\mathrm{B}) \vee (\mathbf{2}\mathrm{B} \wedge \mathbf{12{:}}\mathrm{A}) \vee (\mathbf{1}\mathrm{A} \wedge \mathbf{01{:}}\mathrm{B}) =_{(\text{соответствие})} \mathbf{3}\mathrm{A}, \mathbf{2}\mathrm{B} \mid \mathbf{2}\mathrm{B}, \mathbf{12{:}}\mathrm{A} \mid \mathbf{1}\mathrm{A}, \mathbf{01{:}}\mathrm{B}$

Дальше будем использовать термин *обобщенные таблицы истинности* для обозначения факта объединенных истинностных значений, выраженных верхними индексами формул. Например, формула $(\mathrm{A}^3 \wedge \mathrm{B}^2) \vee (\mathrm{B}^2 \wedge \mathrm{A}^{12}) \vee (\mathrm{A}^1 \wedge \mathrm{B}^{01})$ представляет обобщенные таблицы истинности, так как в ней использованы вхождения подформул $\mathrm{A}^{12},\ \mathrm{B}^{01}$.

Отметим, что после второго знака равенства мы имеем СДНФ импликации, принимающей истинностное значение «2», где верхние индексы формул А и В указывают те построчные истинностные наборы, на которых импликация принимает значение «2». После третьего знака равенства дана одна из возможных ДНФ, полученная из СКНФ, поэтому в принципе возможна различная формулировка правил редукции. В этом случае для формулы $\mathbf{2}(\mathrm{A} \to \mathrm{B})$ мы могли бы получить еще один вариант правила редукции, а именно: $\mathbf{3}\mathrm{A}, \mathbf{2}\mathrm{B} \mid \mathbf{2}A, \mathbf{2}B \mid \mathbf{1}\mathrm{A}, \mathbf{012{:}}\mathrm{B}$. И первый вариант правила редукции, и второй (я его не использовал) порождают в аналитических таблицах одинаковое число ветвей (три ветви), но в первом варианте имеется две ветви с обобщенными помеченными формулами, тогда как во второй — одна. В первом варианте будем иметь две ветви меньшей длины, во втором одну. Однако формулы, выражающей точные количественные оценки длины ветвей, мы не имеем.

Дальше приведем обоснование некоторых новых правил. Все эти новые правила есть результат старых правил (**0**А ,**1**А, **2**А, **3**А) и модифицированных правил.

Обоснование правила $\mathbf{01{:}}(\mathrm{A} \to \mathrm{B})$.

$\mathbf{01{:}}(\mathrm{A} \to \mathrm{B}) =_{(\text{д.1})} (\mathrm{A} \to \mathrm{B})^{\mathbf{01}} =_{(\text{д.2})} (\mathrm{A} \to \mathrm{B})^{\mathbf{0}} \vee (\mathrm{A} \to \mathrm{B})^{\mathbf{1}} = =_{(\text{таб. ист., обобщ. таб. ист.})} (\mathrm{A}^3 \wedge \mathrm{B}^0) \vee ((\mathrm{A}^2 \wedge \mathrm{B}^{01}) \vee (\mathrm{A}^3 \wedge \mathrm{B}^1)) = =_{(\text{коммутат., ассоц.})} ((\mathrm{A}^3 \wedge \mathrm{B}^0) \vee (\mathrm{A}^3 \wedge \mathrm{B}^1)) \vee (\mathrm{A}^2 \wedge \mathrm{B}^{01})(\mathrm{A}^2 \wedge \mathrm{B}^{01}) = =_{(\text{дистр.})} ((\mathrm{A}^3 \wedge (\mathrm{B}^0 \vee \mathrm{B}^1)) \vee (\mathrm{A}^2 \wedge \mathrm{B}^{01}) =_{(\text{д.2})} ((\mathrm{A}^3 \wedge \mathrm{B}^{01}) \vee (\mathrm{A}^2 \wedge \mathrm{B}^{01}) =_{(\text{д1})} (\mathbf{3}\mathrm{A} \wedge \mathbf{01{:}}\mathrm{B}) \vee (\mathbf{2}\mathrm{A} \wedge \mathbf{01{:}}\mathrm{B}) =_{(\text{соотв}-\text{е})} \mathbf{3}\mathrm{A}, \mathbf{01{:}}\mathrm{B} \mid \mathbf{2}\mathrm{A}, \mathbf{01{:}}\mathrm{B}$

Обоснование правила $\mathbf{12{:}}(\mathrm{A} \to \mathrm{B})$

$12 : (\mathrm{A} \to \mathrm{B}) =_{(\text{д.1})} (\mathrm{A} \to \mathrm{B})^{\mathbf{12}} =_{(\text{д.2})} (\mathrm{A} \to \mathrm{B})^{\mathbf{1}} \vee (\mathrm{A} \to \mathrm{B})^{\mathbf{2}} =_{(\text{об. таб. ист.})} ((\mathrm{A}^2 \wedge \mathrm{B}^{01}) \vee (\mathrm{A}^3 \wedge \mathrm{B}^1)) \vee ((\mathrm{A}^1 \wedge \mathrm{B}^{01}) \vee (\mathrm{A}^{12} \wedge \mathrm{B}^2) \vee (\mathrm{A}^3 \wedge \mathrm{B}^2)) =_{(\text{коммутат., ассоц.})} ((\mathrm{A}^2 \wedge \mathrm{B}^{01}) \vee (\mathrm{A}^1 \wedge \mathrm{B}^{01})) \vee ((\mathrm{A}^3 \wedge \mathrm{B}^1) \vee (\mathrm{A}^3 \wedge \mathrm{B}^2)) \vee (\mathrm{A}^{12} \wedge \mathrm{B}^2) =_{(\text{дистр.})} ((\mathrm{A}^2 \wedge \mathrm{A}^1) \vee \mathrm{B}^{01}) \vee (\mathrm{A}^3 \wedge (\mathrm{B}^1 \vee \mathrm{B}^2)) \vee (\mathrm{A}^{12} \wedge \mathrm{B}^2) =_{(\text{коммутат., д.2})} (\mathrm{A}^{12} \vee \mathrm{B}^{01}) \vee (\mathrm{A}^3 \wedge \mathrm{B}^{12}) \vee (\mathrm{A}^{12} \wedge \mathrm{B}^2) =_{(\text{д1})} (\mathbf{12{:}}\mathrm{A} \wedge \mathbf{01{:}}\mathrm{B}) \vee (\mathbf{3}\mathrm{A} \wedge \mathbf{12{:}}\mathrm{B}) \vee (\mathbf{12{:}}\mathrm{A} \wedge \mathbf{2}\mathrm{B}) =_{(\text{соотв.})} \mathbf{12{:}}\mathrm{A}, \mathbf{01{:}}\mathrm{B} \mid \mathbf{3}\mathrm{A}, \mathbf{12{:}}\mathrm{B} \mid \mathbf{12{:}}\mathrm{A}, \mathbf{2}\mathrm{B}$

Остальные правила для импликации обосновываются сходным образом.

Дадим обоснование правила **012:**ВА и некоторых других.

$\mathbf{012{:}}\mathrm{BA} =_{(\text{д.1, д.2})} \mathrm{BA}^0 \vee \mathrm{BA}^1 \vee \mathrm{BA}^2 =_{(\text{табл.истин.})} \mathrm{A}^1 \vee \mathrm{A}^3 \vee \mathrm{A}^0 =_{(\text{коммут.})} (\mathrm{A}^0 \vee \mathrm{A}^1) \vee \mathrm{A}^3 =_{(\text{д.2})} \mathrm{A}^{01} \vee \mathrm{A}^3 =_{(\text{соответст.})} \mathbf{01{:}}\mathrm{A} \mid \mathbf{3}\mathrm{A}$.

Применение определения (д.1) перед последним знаком «=» опускается.

Обоснуем **12:**ТА.

12:ТА $=_{(\text{д.1, д.2})}$ ТА$^{\mathbf{1}}\vee$ТА$^{\mathbf{2}}$ $=_{(\text{д.1})}$ **1**ТА$\vee$**2**ТА $=_{(\text{по прав. }\mathbf{1}\text{ТА, }\mathbf{2}\text{ТА})}$ **0**А, **3**А $\vee$ **0**А, **3**А $=_{(\text{идемп.})}$ **0**А, **3**А.

Обратим внимание, что после второго равенства мы отступили от прежнего порядка обоснования правил, т.е. не указали для ТА$^{\mathbf{1}}$ и ТА$^{\mathbf{2}}$ соответствующих им ДНФ. Вместо этого свели правило **12:**ТА к двум старым правилам: **1**ТА и **2**ТА. Это объясняется тем, что ТА, согласно таблице истинности, не имеет истинностных значений «1» и «2» при любом истинностном значении формулы А. В этих случаях, когда формула с каким-то оператором («Т» « У» и др.) не имеет истинностного значения, мы приписываем им противоречие.

Обоснования остальных правил осуществляются аналогично выше приведенным обоснованиям.

Часть прежних понятий, описывающих аналитическую таблицу, надо модифицировать.

Аналитической таблицей для формулы А логики изменения и направленности Роговского называется 3-*адическим* деревом Д (точками которого являются формулы), удовлетворяющее таким условиям.

Пусть $Д_1$ и $Д_2$ два упорядоченных 3-*адических* дерева. $Д_2$ называется *непосредственным расширением* $Д_1$, если $Д_2$ получено из $Д_1$ применением одного из правил типа $(\beta)^*$, $(\gamma)^*$ или $(\delta)^*$.

Тогда Д есть *аналитическая таблица* для формулы А тогда и только тогда, когда имеется конечная последовательность $Д_1$, $Д_2, \ldots Д_n$, где $Д_n = Д$ такая, что $Д_1$ одноточечное дерево, чей корень есть формула А и $Д_{i+1}$ есть непосредственное расширение $Д_i$ для каждого $i < n$.

Прежде у нас имелось 5-*адическое* дерево Д, теперь 3-*адическое* дерево Д. Это объясняется тем, что максимальное число ветвей, которые порождаются обобщенными правилами редукции, равно трем.

Понятие ветви остается без изменений. Но понятие замкнутой ветви несколько изменяется.

Назовем ветвь θ таблицы формулы А *замкнутой (закрытой)*, если она содержит хотя бы одну пару противоречивых формул.

Противоречие по-прежнему означает, что на ветви встречается, по меньшей мере дважды, одна и та же формула (в случае полной таблицы — атомарная формула), но она имеет непересекающиеся «множества-знаки», т.е. на замкнутой ветви имеются помеченные формулы $j_1ф_1,\ j_2ф_2, \dots,\ j_nф_n$ такие, что $ф_2 = ф_3 = \dots = ф_m$ и $\{j_1\} \cap \{j_2\} \cap \dots \cap \{j_m\} = \emptyset$, где $j \in \{$**3, 2, 1, 0, 01, 02, 12, 012**$\}$ и $1 < m \leq n$. В противном случае, т.е. когда пересечение не пусто, ветвь не является замкнутой.

Таблица называется *замкнутой*, если все ее ветви замкнуты. Естественно модифицируется понятие полной ветви.

Ветвь θ таблицы Д называется полной, если для всякой формулы вида $(\beta)^+,\ (\gamma)^+,\ (\delta)^+$ ветвь θ удовлетворяет следующим условиям (предполагается, что каждая формула вида $(\beta)^+, (\gamma)^+, (\delta)^+$ имеет конечное число вхождений логических связок и операторов):

(у.1)$^+$ — если $(\beta)^+ \in \theta,$ то $\beta_1^+ \in \theta$ или $\beta_2^+ \in \theta,$ или $\beta_3^+ \in \theta$;

(у.2)$^+$ — если $(\gamma)^+ \in \theta,$ то $\gamma_1^+ \in \theta$ или $\gamma_2^+ \in \theta$;

(у.3)$^+$ — если $(\delta)^+ \in \theta,$ то $\delta_1^+ \in \theta$.

Табличное доказательство непомеченной формулы A есть замкнутая таблица для формулы **012**A.

Проверим работу этих правил на старых примерах: $\mathrm{T}p \to (g \to p),\ p \to (g \to p)$ и $\mathrm{У}(p \to g) \to (\mathrm{У}p \to \mathrm{У}g)$.

ПРИМЕР 13. $\mathrm{T}p \to (g \to p)$. Проверить, является ли эта формула общезначимой.

Согласно новому взгляду на аналитические таблицы для логики Роговского мы можем строить не три аналитические таблицы, а одну.

(1). **012:**T$p \to (g \to p)$
(2).

(a).**12:**Tp	(b).**3**Tp	
(a_1).**012:**$(g \to p)$ (1)	(b_1).**012:**$(g \to p)$ (1)	
(a_2).**0**p, **3**$p(a)$	(b_2) **3**p (b)	
пр. a	(b_3). **3**p	(b_4). **3**g
	(b_{31}).**012:**p (b_1)	(b_{41}).**012:**p (b_1)
	пр. $b_{31},\ b_2$	**пр.** $b_{41},\ b_2$

Все ветви таблицы замкнуты. Формула Т$p \to (g \to p)$ общезначима. Очевидно, если сравнить Пример 10 и Пример 13, то новые правила по сравнению со старыми являются более эффективным средством проверки общезначимости исследуемой формулы.

(1). **012:**Т$p \to (g \to p)$			
(2).			
(a).**12:**Тр		(b).**3**Тр	
(a_1).**012:**$(g \to p)$ (1)		(b_1).**012:**$(g \to p)$ (1)	
(a_{11}).**12:**g	(a_{13}).**3**g	(b_{11}).**12:**g	(b_{13}).**3**g
(a_{12}).**012:**р (a_1)	(a_{14}).**012:**р (a_1)	(b_{12}).**012:**р (b_1)	(b_{14}).**012:**р (b_1)

Таблица полная, ни одна ветвь не является замкнутой. Формула не является общезначимой.

ПРИМЕР 14. Проверить общезначимость формулы $\text{У}(p \to g) \to (\text{У}p \to \text{У}g)$.

(1).**012:**$\text{У}(p \to g) \to (\text{У}p \to \text{У}g)$				
(2)				
(a). **12:** $\text{У}(p \to g)$	(b). **3**$\text{У}(p \to g)$			
(a_1). **012:**$(\text{У}p \to \text{У}g)$ (1)	(b_1). **012:**$(\text{У}p \to \text{У}g)$ (1)			
(a_2). **3**$\text{У}(p \to g)$ (a)	(b_2). **12:**$\text{У}p$	(b_5).**3**Ур		
(a3). **0**$\text{У}(p \to g)$ (a)	(b_3).**012:**$\text{У}g$ (b_1)	(b_6).**012:**$\text{У}g(b_1)$		
пр. (a_2), (a_3)	(b_4). **3**p, **0**p (b_2)	(b_7).**01:**$g(b_6)$		
	пр. (b_4)	(c). **3**$(p \to g)$(b)		(e). **2**$(p \to g)$ (b)
		(c_1). **0**р (c)	(c_2).**3**g (c)	
			пр. b_7, c_2	
(c_{11}).**3**р (b_5)	(c_{12}).**2**р (b_5)			
пр. c_{11}, c_1	**пр.** c_{12}, c_1			
	(e_1). **1**р		(e_2). **12:**р	(e_3). **3**р
	(e_{11}).**01:**g(e)		(e_{21}).**2**g(e)	(e_{31}).**2:**g(e)
	(e_{12}). **2**р (b_5)	(e_{13}).**3**р(b_5)	**пр.**e_{21}, b_7	**пр.**$(\mathrm{e}_{31}), (b_7)$
	пр. e_{12}, e_1	**пр.** $\mathrm{e}_{13}, \mathrm{e}_1$		

Все ветви замкнуты для **012:**$((\text{У}(p \to g) \to (\text{У}p \to \text{У}g))$. Формула $\text{У}(p \to g) \to (\text{У}p \to \text{У}g)$ общезначима.

Для того чтобы доказать теорему о полноте и корректности для формализованной логики Роговского посредством обобщенных аналитических таблиц, надо продолжить уточнения понятий.

К определениям $(d_1) - (d_4)$, связывающим выполнимость помеченной формулы и оценку непомеченной формулы, добавим следующие определения:

$$(d_5).\exists\nu(\nu(\mathbf{01}A)\in\{3\})\text{ е! }\nu(\mathrm{A})=0\text{ или }\nu(\mathrm{A})=1;$$

$$(d_6).\exists\nu(\nu(\mathbf{02}A)\in\{3\})\text{ е! }\nu(\mathrm{A})=0\text{ или }\nu(\mathrm{A})=2;$$

$$(d_7).\exists\nu(\nu(\mathbf{12}A)\in\{3\})\text{ е! }\nu(\mathrm{A})=1\text{ или }\nu(\mathrm{A})=1;$$

$$(d_8).\exists\nu(\nu(\mathbf{012}A)\in\{3\})\text{ е! }\nu(\mathrm{A})=1\text{ или }\nu(\mathrm{A})=2;$$

Понятия *выполнимой* формулы, *общезначимой, тождественно ложной, необщезначимой*, и *невыполнимой* формулы остаются прежними.

Уточняется понятие хинтикковского множества.

Назовем множество обобщенно помеченных формул $\mathbf{H}^+$ множеством Хинтикки, если и только если для любых формул вида $(\beta)^+$, $(\gamma)^+$ и $(\delta)^+$ оно удовлетворяет таким условиям:

$(\mathbf{H}_0)^+$. Для всех атомарных формул p, если j_1p, j_2p $\in \mathbf{H}^+$, то $\{j_1\}\cap\{j_2\}\neq\varnothing$, где$j\in\{$**3, 2, 1, 0, 01, 02, 12, 012**$\}$;

$(\mathbf{H}_1)^+$. Если $\beta\in\mathbf{H}^+$, то $\beta_1\in\mathbf{H}+$ или $\beta_2\in\mathbf{H}^+$, или $\beta_3\in\mathbf{H}^+$;

$(\mathbf{H}_2)^+$. Если $\gamma\in\mathbf{H}^+$, то $\gamma_1\in\mathbf{H}^+$ или $\gamma_2\in\mathbf{H}^+$;

$(\mathbf{H}_3)^+$. Если $\delta\in\mathbf{H}^+$, то $\delta_1\in\mathbf{H}^+$;

$(\mathbf{H}_{3.1})^+$. $\mathbf{0}(\mathrm{A}\rightarrow\mathrm{B})$, **12:**ТА, **12:** $\sim$ ТА, **12:**УА, **12:**ЕА $\notin\mathbf{H}^+$.

Последний пункт определения выделяет то множество правил (точнее посылок правил) из группы δ, которые ведут к противоречию.

Для доказательства леммы о том, что обобщенно помеченные формулы множества Хинтикки одновременно выполнимы, надо построить оценку ν^*, в которой все формулы этого множества истинны. Для этого припишем всем атомам, из которых построены формулы, принадлежащие H^+, истинностные значения согласно следующим условиям:

$$(1)^{+}.\nu^{*}(p) = \begin{cases} 0 \text{ или } 1, \text{ если } \mathbf{01{:}}p \in \mathbf{H}^{+}; \\ 0 \text{ или } 2, \text{ если } \mathbf{02{:}}p \in \mathbf{H}^{+}; \\ 1 \text{ или } 2, \text{ если } \mathbf{12{:}}p \in \mathbf{H}^{+}; \\ 0 \text{ или } 1 \text{ или } 2, \text{ если } \mathbf{012{:}}p \in \mathbf{H}^{+}; \end{cases}$$

$(2)^{+}$. Если помеченная атомарная подфомула $\mathbf{j}p$ не принадлежит $\mathbf{H}^{+}$, то для определенности будем считать, что $\nu^{*}(\mathrm{p}) = 3$, где $\mathbf{j} \in \{\mathbf{01, 02, 12, 012}\}$.

Поскольку среди помеченных формул из $\mathbf{H}^{+}$ встречаются и атомарные формулы вида **0**р, **1**р, **2**р, **3**р, то условия $(1)^{+}$ и $(2)^{+}$ добавляются к условиям (1) и (2), которые были сформулированы выше при доказательстве выполнимости множества Хинтикки, содержащее формулы вида **0**А, **1**А, **2**А и **3**А.

Имея уточнения нужных понятий, сформулируем следующие утверждения об обобщенных аналитических таблицах логики Роговского.

ТЕОРЕМА 15. *Каждая полная открытая ветвь обобщенной таблицы одновременно выполнима.*

ЛЕММА 16. *Каждое множество Хинтикки, содержащее обобщенно помеченные формулы для R_4, является одновременно выполнимым.*

ТЕОРЕМА 17. *Если А есть общезначимая формула, то завершенная таблица для обобщенно помеченной формулы* ***012:****А является замкнутой* (в)$^{+}$. *Если А общезначима, то А таблично доказуема.*

СЛЕДСТВИЕ 18. *Если имеется хотя бы одна незамкнутая ветвь таблицы обобщенно помеченной формулы* ***012:****А, то формула А не является общезначимой.*

ЛЕММА 19. *Если имеется замкнутая таблица для формулы А, то множество формул, расположенных на каждой замкнутой ветви таблицы, не являются одновременно выполнимым.*

ТЕОРЕМА 20. *Если А имеет обобщенное табличное доказательство, то А общезначима.*

Доказательства этих утверждений аналогичны доказательству соответствующих доказательств для случая простых аналитических таблиц логики Роговского.

ЗАМЕЧАНИЕ 21. Обобщенные аналитические таблицы более эффективны в проверке общезначимости формул логики Роговского. Но это не значит, что простые аналитические таблицы стали лишними. Обобщенные аналитические таблицы есть скрытая дизъюнкция простых аналитических таблиц. Не имея табличной семантики первых, семантика вторых была бы неясной. Обратим внимание также на то, что, увеличивая число выделенных значений, число простых аналитических таблиц для одной и той же формулы уменьшается: $|N|\backslash|b|$, где $|N|$ — фиксированная мощность множества истинностных значений, $|b|$ — это мощность выделенных значений истинности. В четырехзначной логике Роговского, руководствуясь теми или иными содержательными соображениями, число выделенных значений может колебаться от одного до трех. В этом случае простые аналитически таблицы вовсе не лишние. Автор благодарен В. А. Бочарову за полезные замечания.

Литература

[1] *Аншаков О. М.* О некоторых конструктивизациях пропозициональных логик Д. А. Бочвара и С. Холдена // Исследования по неклассическим логикам и формальным системам. М.: Наука, 1983. С. 335–359.

[2] *Бочвар Д. А., Финн В. К.* Некоторые дополнения к статьям о многозначных логиках // Исследования по теории множеств и неклассическим логикам. М.: Наука, 1976.

[3] *Fitting M.* First — order Logic and Automated Theorem Proving. Springer-Verlag, New York. 1990. Pp. 51-55.

[4] *Hähnle R.* Towards an efficient tableau proof procedure for multiple- valued logics // Proceedings Workshop on Computer Science Logics. P.248-260. Heidelberg. Springer, LNCS 533, 1990.

[5] *Rogowski L.S.* Logika kierunkowa a heglowska teza o sprecznościzmiany/ Toruń. 1969.

[6] *Smullyan R. M.* First — order logic. N.Y., 1968.

[7] *Surma S. J.* An algorithm for axiomatizing every finite logic // Computer Science and Multiple-Valued Logics. P. 143-149. North-Holland. Amsterdam. 1984.

[8] *Carnielli W. A.* Systematization of finite many - valued logics through the method of tableaux // Journal of Symbolic Logic.52(2): 473-493. June 1987.

Приложение 1.

(1)				**1**(Тр $\to (g \to p)$)					
(2)									
(a)	**3**Тр					(b)	**2**Тр	(c)	**2**Тр
(a_1)	**1**$(g \to p)$ (1)					(b_1)	**1**$(g \to p)$ (1)	(c_1)	**0**$(g \to p)$ (1)
(a_2)	**3**p (a)					(b_2)	**3**p (b)	(c_2)	**3**p (c)
(3)							**0**p (b)		**0**p (c)
(a_{11})	**3**g		**2**g		**2**g		**пр.**(b)		**пр.**(c)
(a_{12})	**1**p (a_1)	(a_{13})	**1**p (a_1)	(a_{15})	**0**p (a_1)				
	пр. a_2, a_{12}	(a_{14})	**пр.** a_2, a_{14}	(a_{16})	**пр.** a_2, a_{16}				

(1)				**2**(Тр $\to (g \to p)$)					
(2)									
(a)	**3**Тр	(b)	**2**Тр	(c)	**1**Тр	(d)	**1**Тр	(e)	**1**Тр
(a_1)	**2**$(g \to p)$ (1)	(b_1)	**2**$(g \to p)$ (1)	(c_1)	**2**$(g \to p)$ (1)	(d_1)	**1**$(g \to p)$ (1)	(e_1)	**0**$(g \to p)$ (1)
(a_2)	**3**p (a)	(b_2)	**3**p, **0**p (в)	(c_2)	**3**p, **0**p (c)	(d_2)	**3**p, **0**p (d)	(e_2)	**3**p (e)
			пр. в$_2$		**пр.** c_2		**пр.** d_2		**пр.** e_2
(3).									
(a_{11})	**3**g	(a_{13})	**2**g	(a_{15})	**1**g	(a_{17})	**1**g	(a_{19})	**1**g
(a_{12})	**2**p (a_1)	(a_{14})	**2**p (a_1)	(a_{16})	**2**p (a_1)	(a_{18})	**1**p (a_1)	(a_{10})	**0**p (a_1)
	пр. a_2, a_{12}		**пр.** a_2, a_{14}		**пр.** a_2, a_{16}		**пр.** a_2, a_{18}		**пр.** a_2, a_{10}

Приложение 2.

	$\mathbf{1}(\mathrm{p} \to (g \to p))$	
(1) (2) (a)$\mathbf{3}$p $(a_1)\mathbf{1}(g \to p)$ (1)	(b) $\mathbf{2}$p $(b_1)\mathbf{1}(g \to p)$ (1)	(c) $\mathbf{2}$p $(c_1)\mathbf{0}(g \to p)$ (1) $(c_2)\mathbf{3}$g $c_3\mathbf{0}$p (c) **пр.** c, c_3

(3.1) (a_{11}). $\mathbf{3}$g (a_{12}).$\mathbf{1}p(a_1)$ **пр.** a, a_{12}	(a_{13}). $\mathbf{2}$g (a_{14}).$\mathbf{1}p(a_1)$ **пр.** a, a_{14}	(a_{15}). $\mathbf{2}$g (a_{16}).$\mathbf{0}p(a_1)$ **пр.** a, a_{16}	(3.2) (b_{11}). $\mathbf{3}$g (b_{12}). $\mathbf{1}$p (b_1) **пр.** b, b_{12}	(b_{13}). $\mathbf{2}$g (b_{14}). $\mathbf{0}$p **пр.** b, b_{14}	(b_{15}). $\mathbf{2}$g $(b_{16}$. $\mathbf{1}$p (в$_1$) **пр.** b, b_{16}

Приложение 3.

(1)	$\mathbf{2}(\mathrm{p} \to (g \to p))$			
(2) (a)$\mathbf{3}$p $(a_1)\mathbf{2}(g \to p)$(1)	(b)$\mathbf{2}$p $(b_1)\mathbf{2}(g \to p)$ (1)	(c)$\mathbf{1}$p $(c_1)\mathbf{2}(g \to p)$ (1)	(d)$\mathbf{1}$p $(d_1)\mathbf{1}(g \to p)$ (1)	(e)$\mathbf{1}$p $(e_1)\mathbf{0}(g \to p)$ (1)

(3.1) $(a_{11})\mathbf{3}$g $(a_{12})\mathbf{2}p$ (a_1) **пр.**a, a_{12}	$(a_{13})\mathbf{2}$g $(a_{14})\mathbf{2}p$ (a_1) **пр.**a, a_{14}	$(a_{15})\mathbf{1}$g $(a_{16})\mathbf{2}p$ (a_1) **пр.**a, a_{16}	$(a_{17})\mathbf{1}$g $(a_{18})\mathbf{1}p$ (a_1) **пр.**a, a_{18}	$(a_{19})\mathbf{1}$g $(a_{110})\mathbf{0}p(a_1)$ **пр.**$a, a_{1.10}$

$(b_{11})\mathbf{3}$g (b_{12}) $\mathbf{2}$p (b_1)	$(b_{13})\mathbf{2}$g (b_{14}) $\mathbf{2}$p (b_1)	(3.2) $(b_{15})\mathbf{1}$g (b_{16}) $\mathbf{2}$p (b_1)	$(b_{17})\mathbf{1}$g (b_{18}) $\mathbf{1}$p (b_1) **пр.**b, b_{18}	$(b_{19})\mathbf{1}$g (b_{110}) $\mathbf{1}$p (b_1) **пр.**b, b_{10}

Приложение 4.

(1). $\mathbf{2}(\text{У}(p \to g) \to (\text{У}p \to \text{У}g))$

(2).

$(a_1)\mathbf{3}\text{У}(p \to g)$ $(a_2)\mathbf{1}(\text{У}p \to \text{У}g)(1)$	$(b_1)\mathbf{2}\text{У}(p \to g)$ $(b_2)\mathbf{1}(\text{У}p \to \text{У}g)(1)$ $(b_3)\mathbf{3}(p \to g)$ $(b_4)\mathbf{0}(p \to g)(b_1)$ **пр.** $b_3,\ b$	$(c_1)\mathbf{1}\text{У}(p \to g)$ $(c_2)\mathbf{1}(\text{У}p \to \text{У}g)(1)$ $(c_3)\mathbf{3}(p \to g)$ $(c_4)\mathbf{0}(p \to g)(c_1)$ **пр.** $c_3,\ c_4$	$(d_1)\mathbf{1}\text{У}(p \to g)$ $(d_2)\mathbf{1}(\text{У}p \to \text{У}g)(1)$ $(d_3)\mathbf{3}(p \to g)$ $(d_4)\mathbf{0}(p \to g)(d_1)$ **пр.** $d_3,\ d_4$	$(e_1)\mathbf{1}\text{У}(p \to g)$ $(e_2)\mathbf{1}(\text{У}p \to \text{У}g)(1)$ $(e_3)\mathbf{3}(p \to g)$ $(e_4)\mathbf{0}(p \to g)(e_1)$ **пр.** $e_3,\ e_4$

(3)

$(a_{21}).\mathbf{3}$Уp $(a_{22}).\mathbf{2}$Уg (a_2) $(a_{23}).\mathbf{3}$g$\mathbf{0}$g(a_{22}) **пр.** a_{23}	$(a_{24}).\mathbf{2}$Уp $(a_{25}).\mathbf{2}$Уg (a_2) $(a_{26}).\mathbf{3}$p$\mathbf{0}$p(a_{24}) **пр.** a_{26}	$(a_{27}).\mathbf{2}$Уp $(a_{28}).\mathbf{2}$Уg (a_2) $(a_{29}).\mathbf{3}$p$\mathbf{0}$p(a_{27}) **пр.** a_{29}

О четырехзначных регулярных логиках

Н. Е. Томова

ABSTRACT. A set of four-valued regular logics is introduced in the article. It is shown that the set of four-valued regular logics does not coincide with the set of four-valued monotonic logics (if the set $\{1, 0, \frac{2}{3}, \frac{1}{3}\}$ is ordered by that way: $\frac{1}{3} \leqslant 0$, $\frac{1}{3} \leqslant 1$, $1 \leqslant \frac{2}{3}$, $0 \leqslant \frac{2}{3}$, and 1 and 0 noncomparable).

Ключевые слова: трехзначные логики Клини, четырехзначные регулярные логики.

1 Введение

Под регулярной логикой будем понимать множество связок $\{\vee, \neg\}$, где $\vee$ есть регулярная дизъюнкция, а $\neg$ есть отрицание ($\neg 1 = 0, \neg 0 = 1, \neg\frac{2}{3} = \frac{2}{3}, \neg\frac{1}{3} = \frac{1}{3}$). Нас будут интересовать только С-расширяющие логики, т. е. логики, в которых таблицы истинности для пропозициональных связок полностью совпадают на классических истинностных значениях $\{0, 1\}$ с распределением значений в классической логике. Говоря неформально, С-расширяющие логики содержат на множестве $\{0, 1\}$ классическую двузначную логику.

В работе [1] было представлено семейство трехзначных регулярных логик, описаны их свойства и взаимоотношения. Результаты, полученные в [1], можно обобщить и описать класс всех четырехзначных регулярных логик. Для этого необходимо: 1) вычислить количество всех четырехзначных регулярных логик, а затем 2) найти структуру, которую они могут образовывать. В данной статье остановимся на решении задачи 1). Для этого достаточно вычислить число всех четырехзначных регулярных дизъюнкций.

2 Трехзначные регулярные дизъюнкции

Идея создания многозначных регулярных логик принадлежит С. Клини [2]. При решении проблемы определения трехзначных логических связок С. Клини предложил регулярные таблицы и указал, что эти таблицы нужно выбирать регулярными в следующем смысле: данный столбец (строка) содержит 1 в строке (столбце) для $\frac{1}{2}$ только при условии, что этот столбец (эта строка) состоит целиком из 1; аналогично для 0.

В работе [1] было найдено число всех трехзначных регулярных логик, оно равно 4. Приведем таблицы для трехзначных регулярных дизъюнкций:

(I)

$\vee^I$	1	$\frac{1}{2}$	0
1	1	1	1
$\frac{1}{2}$	1	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{2}$
0	1	$\frac{1}{2}$	0

(II)

$\vee^{II}$	1	$\frac{1}{2}$	0
1	1	$\frac{1}{2}$	0
$\frac{1}{2}$	1	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{2}$
0	1	$\frac{1}{2}$	0

(III)

$\vee^{III}$	1	$\frac{1}{2}$	0
1	1	1	1
$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{2}$
0	1	$\frac{1}{2}$	0

(IV)

$\vee^{IV}$	1	$\frac{1}{2}$	0
1	1	$\frac{1}{2}$	1
$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{2}$
0	1	$\frac{1}{2}$	0

Заметим, что первая таблица соответствует дизъюнкции в сильной логике Клини, последняя — дизъюнкции в слабой логике Клини, таблицы (II) и (III) соответствуют дизъюнкциям логики **Lisp** и дуальной ей логики **TwinLisp** соответственно.

В упомянутой работе [1] было также установлено, что логики **Lisp** и **TwinLisp** являются промежуточными между сильной и слабой логиками Клини, а также что множество всех трехзначных регулярных логик образует решетку по отношению D-включения, причем $\mathbf{K}_3$ — является супремумом, а $\mathbf{K}_3^W$ — инфинумом.

3 Семейство четырехзначных регулярных логик

Обобщая свойство регулярности, предложенное С. Клини, имеем: в случае четырехзначных регулярных логик пропозициональные связки будут определяться регулярными таблицами в следующем смысле: данный столбец (строка) содержит 1 в строке (столбце) для $\frac{1}{3}$ и $\frac{2}{3}$ только при условии, что этот столбец (эта строка) состоит целиком из 1; аналогично для 0.

Будем рассматривать только четырехзначные регулярные дизъюнкции. Согласно сформулированному выше свойству регулярности, эти дизъюнкции будут определяться следующими четырьмя типами регулярных матриц:

(I)

$\vee^I$	1	$\frac{2}{3}$	$\frac{1}{3}$	0
1	1	1	1	1
$\frac{2}{3}$	1	?	?	?
$\frac{1}{3}$	1	?	?	?
0	1	?	?	0

(II)

$\vee^{II}$	1	$\frac{2}{3}$	$\frac{1}{3}$	0
1	1	1	1	1
$\frac{2}{3}$	?	?	?	?
$\frac{1}{3}$	?	?	?	?
0	1	?	?	0

(III)

$\vee^{III}$	1	$\frac{2}{3}$	$\frac{1}{3}$	0
1	1	?	?	1
$\frac{2}{3}$	1	?	?	?
$\frac{1}{3}$	1	?	?	?
0	1	?	?	0

(IV)

$\vee^{IV}$	1	$\frac{2}{3}$	$\frac{1}{3}$	0
1	1	?	?	1
$\frac{2}{3}$	?	?	?	?
$\frac{1}{3}$	?	?	?	?
0	1	?	?	0

на месте ? — любое промежуточное значение ($\frac{1}{3}$ или $\frac{2}{3}$).

Нетрудно заметить, что таблицы (I) типа представляют собой обобщение на четырехзначный случай сильной трехзначной регулярной таблицы для дизъюнкции; таблицы (IV) типа — обобщение слабой трехзначной регулярной таблицы для дизъюнкции; таблицы (II) и (III) типов представляют собой обобщения на четырехзначный случай промежуточных трехзначных регулярных таблиц для дизъюнкции логик **Lisp** и **TwinLisp** соответственно. Используя указанные регулярные таблицы, можем вычислить число всех четырехзначных регулярных дизъюнкций. Итак, дизъюнкций

$$\begin{array}{rl} \text{(I)} & \text{типа} — 2^8 \\ \text{(II)} & \text{типа} — 2^{10} \\ \text{(III)} & \text{типа} — 2^{10} \\ \text{(IV)} & \text{типа} — 2^{12}. \end{array}$$

Таким образом, всего четырехзначных регулярных дизъюнкций 6400, и соответственно столько же четырехзначных регулярных логик.

4 Регулярность и монотонность

Напомним, что в случае трехзначных логик иногда регулярность (например, см. [3]) определяют также как монотонность на порядке $\frac{1}{2} \leqslant 1$, $\frac{1}{2} \leqslant 0$, причем 1 и 0 несравнимы. При так заданном порядке класс монотонных трехзначных логик совпадает с классом трехзначных регулярных логик.

Когда имеем дело с четырехзначными логиками, ситуация меняется.

Определение монотонности опирается на отношение порядка на множестве истинностных значений, а определение регулярности дается без учета того или иного порядка на этом множестве. Так, если установить порядок на множестве $\{1, 0, \frac{2}{3}, \frac{1}{3}\}$ таким образом, что $\frac{1}{3} \leqslant 0$, $\frac{1}{3} \leqslant 1$, $1 \leqslant \frac{2}{3}$, $0 \leqslant \frac{2}{3}$, причем 1 и 0 несравнимы, то число регулярных четырехзначных дизъюнкций и число монотонных четырехзначных дизъюнкций совпадать не будет. Заметим, что установленный порядок представляет собой обобщение порядка Клини на четырехзначный случай.

Итак, можно сосчитать число всех монотонных дизъюнкций при указанном порядке на множестве $\{1, 0, \frac{2}{3}, \frac{1}{3}\}$, оно равно 81, однако лишь 6 из них являются регулярными в смысле Клини («данный столбец (строка) содержит 1 в строке (столбце) для значений $\frac{2}{3}$, $\frac{1}{3}$ только при условии, что этот столбец (строка) состоит целиком из 1; аналогично для 0»). Эти дизъюнкции определяются следующими таблицами:

(II)

$\vee^{II}$	1	$\frac{1}{3}$	0	$\frac{2}{3}$
1	1	1	1	1
$\frac{1}{3}$	$\frac{1}{3}$	$\frac{1}{3}$	$\frac{1}{3}$	$\frac{1}{3}$
0	1	$\frac{1}{3}$	0	$\frac{2}{3}$
$\frac{2}{3}$	$\frac{2}{3}$	$\frac{2}{3}$	$\frac{2}{3}$	$\frac{2}{3}$

(III)

$\vee^{III}$	1	$\frac{1}{3}$	0	$\frac{2}{3}$
1	1	$\frac{1}{3}$	1	$\frac{2}{3}$
$\frac{1}{3}$	1	$\frac{1}{3}$	$\frac{1}{3}$	$\frac{2}{3}$
0	1	$\frac{1}{3}$	0	$\frac{2}{3}$
$\frac{2}{3}$	1	$\frac{1}{3}$	$\frac{2}{3}$	$\frac{2}{3}$

(IV)

$\vee_1^{IV}$	1	$\frac{1}{3}$	0	$\frac{2}{3}$
1	1	$\frac{1}{3}$	1	$\frac{2}{3}$
$\frac{1}{3}$	$\frac{1}{3}$	$\frac{1}{3}$	$\frac{1}{3}$	$\frac{2}{3}$
0	1	$\frac{1}{3}$	0	$\frac{2}{3}$
$\frac{2}{3}$	$\frac{2}{3}$	$\frac{2}{3}$	$\frac{2}{3}$	$\frac{2}{3}$

(IV)

$\vee_2^{IV}$	1	$\frac{1}{3}$	0	$\frac{2}{3}$
1	1	$\frac{1}{3}$	1	$\frac{2}{3}$
$\frac{1}{3}$	$\frac{1}{3}$	$\frac{1}{3}$	$\frac{1}{3}$	$\frac{1}{3}$
0	1	$\frac{1}{3}$	0	$\frac{2}{3}$
$\frac{2}{3}$	$\frac{2}{3}$	$\frac{2}{3}$	$\frac{2}{3}$	$\frac{2}{3}$

(IV)

$\vee_3^{IV}$	1	$\frac{1}{3}$	0	$\frac{2}{3}$
1	1	$\frac{1}{3}$	1	$\frac{2}{3}$
$\frac{1}{3}$	$\frac{1}{3}$	$\frac{1}{3}$	$\frac{1}{3}$	$\frac{2}{3}$
0	1	$\frac{1}{3}$	0	$\frac{2}{3}$
$\frac{2}{3}$	$\frac{2}{3}$	$\frac{1}{3}$	$\frac{2}{3}$	$\frac{2}{3}$

(IV)

$\vee_4^{IV}$	1	$\frac{1}{3}$	0	$\frac{2}{3}$
1	1	$\frac{1}{3}$	1	$\frac{2}{3}$
$\frac{1}{3}$	$\frac{1}{3}$	$\frac{1}{3}$	$\frac{1}{3}$	$\frac{1}{3}$
0	1	$\frac{1}{3}$	0	$\frac{2}{3}$
$\frac{2}{3}$	$\frac{2}{3}$	$\frac{1}{3}$	$\frac{2}{3}$	$\frac{2}{3}$

Очевидно, дизъюнкции, определяемые регулярными таблицами $\vee^{II}$ и $\vee^{III}$, представляют собой обобщение на четырехзначный случай дизъюнкций логики **Lisp** и **TwinLisp**. Дизъюнкции $\vee_1^{IV}$, $\vee_2^{IV}$, $\vee_3^{IV}$, $\vee_4^{IV}$ являются обобщениями слабой дизъюнкции Клини.

Рассмотрим взаимоотношения между четырехзначными регулярными логиками $\{\neg, \vee^{II}\}, \{\neg, \vee^{III}\}, \{\neg, \vee_1^{IV}\}, \{\neg, \vee_2^{IV}\}, \{\neg, \vee_3^{IV}\}$, $\{\neg, \vee_4^{IV}\}$.

Итак, логика $\{\neg, \vee^{II}\}$ дуальна $\{\neg, \vee^{III}\}$ и наоборот, поскольку справедливы следующие равенства: $x \vee^{II} y = y \vee^{III} x$ и $x \vee^{III} y = y \vee^{II} x$.

Логика $\{\neg, \vee_2^{IV}\}$ дуальна $\{\neg, \vee_3^{IV}\}$ и наоборот, поскольку справедливо: $x \vee_2^{IV} y = y \vee_3^{IV} x$ и $x \vee_3^{IV} y = y \vee_2^{IV} x$.

Учитывая вышесказанное, а также следующие соотношения

$x \vee_2^{IV} y = \neg(\neg(x \vee^{II} y) \vee^{II} \neg(y \vee^{II} x))$

$x \vee_2^{IV} y = \neg(\neg(x \vee^{III} y) \vee^{III} \neg(y \vee^{III} x))$,

получаем, что $\{\neg, \vee_2^{IV}\} \subset \{\neg, \vee^{II}\}$, $\{\neg, \vee_2^{IV}\} \subset \{\neg, \vee^{III}\}$ и $\{\neg, \vee_3^{IV}\} \subset \{\neg, \vee^{II}\}$, $\{\neg, \vee_3^{IV}\} \subset \{\neg, \vee^{III}\}$.

***

Итак, в работе представлено семейство четырехзначных регулярных логик. В ходе исследования удалось установить тот факт, что в случае четырех значений класс регулярных логик не совпадает с классом монотонных. Однако, как показано в [1], это справедливо для трехзначных систем. Вопрос о структуре семейства четырехзначных регулярных логик пока остается открытым.

Литература

[1] *Комендантская Е. Ю.* Функциональная взаимовыразимость регулярных логик Клини // Логические исследования. Вып. 15. М., 2008.
[2] *Клини С.К.* Введение в метаматематику. М.: ИЛ, 1957.
[3] *Fitting M.* Kleene's Three Valued Logics and Their Children // Fundamenta Informaticae. 1992. Vol. 20. P. 113–131.

Об одном свойстве универсумов в моделях реализуемости для интуиционистской теории множеств

В. Х. Хаханян

abstract. We consider the universe of sets for models for intuitionistic set theory from [1] and [2] and proved some property of such universe.

Ключевые слова: аксиома, универсум, функция, множество, интуиционизм, экстенсиональность.

Напомним определение универсума множеств неформальным образом (для формального определения см. [1] или [2]). Универсум Δ определяется индукцией по классу ординалов так же, как универсум фон Неймана (кумулятивная иерархия) или универсум Гёделя конструктивных множеств (для выполнимости аксиомы выбора). Δ есть объединение Δ_α, где α — ординал и каждое множество из универсума состоит из пар <натуральное число, множество меньшего ранга уже построенное>. На предельном ординале происходит объединение всех ранее построенных множеств (объединение по меньшим ординалам), а на ординале-последователе берутся подмножества уже построеннных к данному шагу множеств, но только такие, которые не разбивают отношения эквивалентности $\approx$ и для которых существует частично-рекурсивная функция, являющаяся функцией экстенсиональности. Опишем отношение $\approx$. Мы говорим, что $x \approx y$, если вторые члены упорядоченных пар у x и y одни и те же и если существуют две частично-рекурсивные функции (ч-р.ф), одна из которых сводит x к y, а вторая, наоборот, y к x. Мы говорим, что ч-р.ф $f(n,m)$ сводит x к y, если для всякой пары $< n, z >\in x!f(n,m)$ (здесь m — функция экстенсиональности для множества z (множество z уже построено ранее и у него существует функция экстенсиональности!)) и $< f(n,m), z >\in y$.

Мы говорим, что ч-р.ф $g(n, m, p)$ является функцией экстенсиональности для множества z, если для любых множеств u и v (из нашего универсума Δ) и ч-р.ф h и q, если $< n, u >\in z$ и $u \approx v$ с функциями h и q, то $!g(n, h, q)$ и $< g(n, h, q), v >\in z$. Конечно, всюду имеем дело не с ч-р.ф, а с их гёделевыми номерами. Итак, если множество принадлежит универсуму, то (по построению!) у него есть функция экстенсиональности.

ЛЕММА 1. *Для всякой ч-р.ф $f(n, h, q)$ существует множество x из универсума Δ такое, что данная функция не является его функцией экстенсиональности.*

СЛЕДСТВИЕ 2. *Не существует ч-р.ф такой, которая была бы функцией экстенсиональности для всех множеств из универсума Δ.*

Доказательство. Рассмотрим три группы функций, которые исчерпывают все ч-р.ф от трех аргументов и для функции из каждой группы приведем нужное множество из универсума Δ. Мелкие детали обоснования оставляем читателю.

1. $\exists n, m, p \neg ! f(n, m, p)$. Тогда $x =< n, \emptyset >$. Заметим, что данное множество имеет функцию экстенсиональности (какую?), т.е. принадлежит универсуму и что пустое множество эквивалентно самому себе с любыми функциями.

2. $\exists n, m, p f(n, m, p) \neq n$. Тогда требуемое множество x то же самое, что из пункта 1.

3. $\forall n, m, p f(n, m, p) = n$, т.е. для любых фиксированных m и p функция f как функция первого аргумента является тождественной. Требуемое множество таково: $x = < 0, z > |z \approx y \bigcup < 1, y >$, где $y \neq \emptyset$ и y принадлежит нашему универсуму ($z \approx y$ означает, что существуют ч-р.ф, сводящие z к y и y к z). Функцией экстенсиональности множества x будет, например, функция g(n,m,p), которая для всех m и p $g(n, m, p) = 0$, в частности, $g(1, m, p) = 0$ обязательно. А тогда x и есть требуемое множество, так как исходная функция f по любым фиксированным второму и третьему аргументам является тождественной.

Q.E.D.

ЗАМЕЧАНИЕ 3. Данное свойство универсума (Δ) можно попытаться использовать для получения контрпримера сильного принципа униформизации для доказательства независимости этого принципа от тезиса Чёрча с выбором в интуиционистской теории множеств. В записи этого контрпримера формула φ не содержит параметров (раньше удалось доказать независимость сильного принципа униформизации от тезиса Чёрча с выбором в интуиционистской теории множеств с объемностью для формулы φ с одним параметром ровно). Однако для этого необходимо дать запись этой формулы в языке теории множеств.

Литература

[1] *Хаханян В.Х.* Теория множеств и тезис Чёрча // Исследования по неклассическим логикам и формальным системам. М.: Наука, 1983. С. 198–208.

[2] *Хаханян В.Х.* Непротиворечивость интуиционистской теории множеств с принципами Чёрча и униформизации // Вестник Моск. Университета, серия Математика. Механика. 1980. № 5. С. 3–7.

[3] *Хаханян В.Х.* Невыводимость принципа униформизации из тезиса Чёрча в интуиционистской теории множеств // Математические заметки. 1988. Т.43. Вып. 5 (май). С. 685–691.

Замечание. В статье «Интуиционистская арифметика с принципами Маркова и P» (Выпуск 14 «Логических исследований», стр. 283–285) в приведенной автором модели (штрих-реализуемость Клини) принцип P НЕ ВЫПОЛНЯЕТСЯ (невозможно доказать выводимость для формулы в заключении принципа P). Для принципа M доказательство остается верным, верным остается и результат: теория HA+M обладает свойствами дизъюнктивности и экзистенциальности, так же как и теория HA+P. Оба последних утверждения получены в 1971 г. или ранее А. С. Трулстрой. Теория же HA+M+P совпадает с классической арифметикой и свойствами эффективности НЕ ОБЛАДАЕТ. Все замечания верны и легко следуют из имеющихся фактов.

О кирпичах математической логики[1]

М. И. Шейнфинкель (Москва)[2]

§ 1

Согласно существу аксиоматического метода, который сегодня получил признание, прежде всего благодаря работам Гильберта, нужно стремиться не только к максимальному ограничению числа и содержания *аксиом*, но стараться также максимально уменьшить число неопределяемых основных *понятий*. Это достигается выбором наиболее подходящих понятий, из которых можно построить все другие понятия рассматриваемой области науки. В соответствии с этим требованием простоты и стремятся задавать исходные понятия.

Основные *связки высказываний* математической логики я передаю здесь с помощью обозначений, использованных Гильбертом в его лекциях:

$$\overline{a}, \quad a \vee b, \quad a \ \& \ b, \quad a \to b, \quad a \sim b$$

(читается: “не-a”, “a или b”, “a и b”, “если a, то b”, “a эквивалентно b”). Как известно, из одной связки все остальные получить вообще нельзя, но можно получить из двух связок, приняв в качестве основных и неопределяемых отрицание и какую-то из следующих за ним трех связок. (Из этих трех способов редукции Рассел и Уайтхед избрали в качестве основы отрицание и дизъюнкцию, а Фреге – отрицание и импликацию).

[1] *Schönfinkel M.* Über die Bausteine der mathematischen Logik // Mathematische Annalen. 1924. Bd. 92. S. 305–316 / Перевод с нем. А.Л. Никифорова.

[2] Излагаемые ниже размышления были представлены автором 7 декабря 1920 г. Математическому обществу Геттингена. Их формальная и стилистическая правка для подготовки к печати была осуществлена Г. Беманом из Геттингена.

Тем не менее сведение к одной-единственной основной связке вполне возможно, если не ограничиваться теми связками, которые приведены выше. Недавно это было показано Шеффером[3]. В качестве основной связки можно выбрать, скажем, “не-a или не-b”, т.е. “из высказываний a и b по крайней мере одно ложно”. С помощью приведенных выше знаков ее можно представить в двух эквивалентных формах:

$$\overline{a} \vee \overline{b} \quad \text{и} \quad \overline{a \ \& \ b}$$

Теперь можно ввести новый знак

$$a|b,$$

и поскольку очевидно

$$\overline{a} = a|a, \quad a \vee b = (a|a)|(b|b),$$

то благодаря

$$a \ \& \ b = \overline{(\overline{a} \vee \overline{b})}, \quad (a \to b) = \overline{a} \vee b, \quad (a \sim b) = (a \to b) \ \& \ (b \to a)$$

сведение осуществлено.

Еще более замечательно то обстоятельство, что посредством подходящей модификации этой основной связки можно выразить также и оба высказывания более высокой ступени, а именно:

$$(x)f(x) \quad \text{и} \quad (Ex)f(x),$$

т.е. “Все индивиды обладают свойством f” и “Существует индивид, обладающий свойством f”, иными словами, обе операции (x) и (Ex), которые вместе с указанными выше связками составляют полную систему основных связок математической логики.

Если теперь в качестве основной связки мы будем рассматривать

[3] Am. Math. Soc. Trans. 1913. Vol. 14. P. 481.

$$(x)[\overline{f(x)} \vee \overline{g(x)}] \quad \text{или} \quad (x)\overline{(f(x)\ \&\ g(x))}$$

и запишем это в виде

$$f(x)|^x g(x),$$

тогда очевидно справедливо (поскольку константы мы можем представлять как функции от одного аргумента):

$$\overline{a} = a|^x a, \quad a \vee b = (x)(\overline{\overline{a}} \vee \overline{\overline{b}}) = \overline{a}|^x \overline{b} = (a|^y a)|^x (b|^y b),$$
$$(x)f(x) = (x)(\overline{\overline{f(x)}} \vee \overline{\overline{f(x)}}) = \overline{f(x)}|^x \overline{f(x)} =$$
$$(f(x)|^y f(x))|^x (f(x)|^y f(x))$$

и благодаря

$$(Ex)f(x) = \overline{(x)\overline{f(x)}}$$

новое утверждение доказано.

Успехи, достигнутые на этом пути, побуждают к дальнейшему продвижению в данном направлении. Мысль о том, что можно попытаться с помощью подходящего сведения устранить также все еще остающиеся основные понятия высказывания, функции высказывания и переменной, на первый взгляд может показаться слишком смелой. Рассмотрение и анализ такой возможности были бы важны не только с точки зрения методического единства, но представляли бы ценность с философской или, если угодно, с эстетической точки зрения. Поскольку переменные в логическом высказывании есть не что иное, как знак того, что определенные аргументные места и операторы принадлежат к одному типу, постольку характер голой, неизменной, “вечной” сущности логического высказывания оказывается излишним вспомогательным понятием.

Кроме того, мне представляется примечательным то обстоятельство, что поставленная цель может быть достигнута посредством сведения к трем основным знакам.

§ 2

Для решения поставленной задачи нам нужно подготовить и разъяснить некоторые вспомогательные средства. Поэтому оставим пока нашу проблему в стороне и дадим набросок некоторого обобщенного *функционального исчисления*.

Как известно, в простейшем смысле под *функцией* понимают некоторое соподчинение между элементами какой-либо области величин, выступающих в качестве аргументов, и элементами (которые обычно мыслятся как совпадающие с первыми) из области значений функции – соподчинение такого рода, что каждому значению аргумента соответствует одно значение функции. Здесь понятие функции понимается в самом широком смысле, т.е. в качестве значений аргументов и значений функции могут выступать сами функции. Значение функции f для аргумента x мы обозначаем, просто помещая знак аргумента рядом со знаком функции:

$$fx$$

Опираясь на наше расширенное истолкование понятия функции, мы можем *функцию от нескольких аргументов* следующим образом свести к функции от одного аргумента.

Например, функцию

$$F(x, y)$$

мы можем истолковать как функцию от одного аргумента y, но не как определенно заданную, а как изменяющуюся в зависимости от x. (Речь здесь идет, разумеется, о зависимости самой *функции*, т.е. самого соподчинения, а не об обычной зависимости *значений* функции от аргумента). В математике в этих случаях обычно говорят о зависимости функции от некоторого параметра и записывают это так:

$$G_x(y)$$

Саму эту функцию G — ее вид, так сказать, — мы можем рассматривать как значение (функциональное значение) некоторой новой функции f, так что $G = fx$.

Поэтому в нашей символике мы записываем:

$$(fx)y$$

или, как это делается, например, в теории бесконечных рядов, договариваемся опускать скобки, стоящие слева, и пишем просто:

$$fxy,$$

где новую функцию f следует отличать от прежней функции F.

Предложенное преобразование я хотел бы сделать более понятным, показав его применение к конкретной числовой функции $x - y$. Если рассматривать это выражение как функцию только от одного y, то оно примет вид $x-$, что означает "разница между x и какой-то заданной величиной", а функция будет записываться так: $(x-)y$. Здесь существенно то обстоятельство, что для x и y значения подставляются не одновременно, а сначала только для x, скажем, значение a, благодаря чему в качестве промежуточной ступени возникает функция $a - y$ (короче: функция $a-$), которая зависит только от замены y каким-то определенным значением b.

Таким образом, теперь fx представляет функцию, которая при подстановке значений для x дает не объекты основной области (как было со значением $F(x, y)$), а опять приводит к функции, аргументом которой является y. Иными словами, f есть функция, аргумент которой никак не ограничен, а ее значением вновь является некоторая функция. Описанное выше преобразование мы можем провести для функций от нескольких переменных, которые теперь можно представлять в виде

$$fxyz\ldots,$$

что, как уже было сказано, является сокращением для

$$(((fx)y)z)\ldots$$

§ 3

Теперь нам нужно ввести целый ряд *индивидуальных функций* весьма общего характера. Я называю их следующим образом: функция тождества **I**, константная функция **C**, функция перестановки **T**, функция группировки **Z** и функция слияния **S**.

1. Под *функцией тождества* **I** я понимаю такую полностью определенную функцию, значения аргументов которой ничем не ограничены, а значение функции всегда совпадает со значением аргумента, т.е. каждый объект и каждая функция соподчиняются самим себе. Мы определяем ее посредством равенства

$$\mathbf{I}x = x,$$

где знак равенства следует понимать не как выражение логической эквивалентности в смысле обычного исчисления высказываний, а как говорящий просто о том, что выражения, стоящие слева и справа от него, означают одно и то же, т.е. что значение функции $\mathbf{I}x$ всегда совпадает со значением аргумента x. (Так, например, $\mathbf{II} = \mathbf{I}$).

2. Пусть теперь значение аргумента вновь ничем не ограничено, а значение функции, независимо от аргумента, всегда имеет одно и то же значение a. Эта функция зависит от a, поэтому имеет вид $\mathbf{C}a$. То, что значением этой функции всегда является a, выразим так:

$$(\mathbf{C}a)y = a$$

Поскольку a также может изменяться, постольку мы получаем:

$$(\mathbf{C}x)y = x \quad \text{или} \quad \mathbf{C}xy = x.$$

Это равенство определяет *константную функцию* **C**. Ясно, что функция **C** относится к тому виду функций, который был рассмотрен выше. При определенных значениях для x она дает некоторую функцию с аргументом y. В практическом применении она полезна тем, что позволяет нам ввести величину x в качестве “слепой” переменной.

3. Выражение

$$fxy$$

можно вновь рассматривать, очевидно, как возникшее из

$$F(x, y),$$

где F однозначно определена заданным f. Если, с другой стороны, записать это выражение в виде

$$gyx,$$

рассматривая y тоже как параметр, то эта новая функция также будет однозначно задана посредством F и, следовательно, f.

Поэтому функцию g мы можем истолковать как значение функции $\mathbf{T}$ для аргумента f. Эта *функция перестановки* $\mathbf{T}$ имеет в качестве аргумента функцию вида φxy, а значением функции

$$\psi = \mathbf{T}\varphi$$

будет та функция ψxy, для которой значение ψxy совпадает с φyx для всех значений аргументов x, y, для которых φyx имеет один смысл. Это определение мы кратко записываем так:

$$(\mathbf{T}\varphi)xy = \varphi yx,$$

где скобки опять можно опустить.

Функция $\mathbf{T}$ дает возможность изменять в выражении порядок членов и помогает в определенной мере компенсировать отсутствие коммутативных законов.

4. Если на месте аргумента некоторой функции f (зависящей от x) оказывается значение некоторой другой функции g, то

$$f(gx)$$

также зависит от x и может рассматриваться, следовательно, как значение некоторой третьей функции F, однозначно заданной посредством f и g. Как известно, в математическом анализе здесь неточно говорят о “функции от функции”, но более правильно говорить о функции от значения функции и обозначать посредством F функцию, “составленную” из f и g. Таким образом, функция F является значением определенной функции $\mathbf{Z}'$ от f и g.

Поэтому мы можем определить:

$$[\mathbf{Z}'(\varphi, \chi)]x = \varphi(\chi x)$$

Если теперь, опираясь на наши принятые выше соглашения, мы заменим $\mathbf{Z}'$ соответствующей функцией от одного аргумента, то получим определение *функции группировки* $\mathbf{Z}$:

$$\mathbf{Z}\varphi\chi x = \varphi(\chi x)$$

Посредством функции $\mathbf{Z}$ мы можем перемещать скобки внутри сложного выражения (но не устранять их, поскольку они всегда домысливаются). Таким образом, она действует в смысле не выполняемых здесь ассоциативных законов.

5. Если в выражении

$$fxy$$

вместо y подставим значение некоторой функции g для того же x, который выступает в качестве аргумента f, то получим выражение

$$fx(gx),$$

которому можно придать следующий вид

$$(fx)(gx).$$

Это будет значением функции только от одного x, поэтому

$$(fx)(gx) = Fx,$$

где

$$F = \mathbf{S}'(f, g)$$

вновь вполне определенным образом зависит от заданных функций f и g.

Поэтому мы получаем

$$[\mathbf{S}'(\varphi, \chi)]x = (\varphi x)(\chi x)$$

или, согласно использованному выше преобразованию,

$$\mathbf{S}\varphi\chi x = (\varphi x)(\chi x)$$

Это и есть определение *функции слияния* **S**.

Смысл этой функции полезно пояснить с помощью конкретного примера. Если, скажем, для fxy мы примем значение ${}^x log\, y$ (т.е. логарифм y при основании x), а для gz – функциональное значение $1+z$, то $(fx)(gx)$ примет вид ${}^x log(1+x)$, т.е. предстанет как значение функции от x, которая посредством нашей общей функции **S** однозначно связана с обеими данными функциями.

Практическая полезность функции **S** состоит, очевидно, в том, что она позволяет несколько вхождений какой-то переменной, в том числе в определенной мере и индивидуальных функций, свести к одному вхождению.

§ 4

Для решения наших логико-символических проблем большое значение имеет тот факт, что введенные выше пять индивидуальных функций **I**, **C**, **T**, **Z**, **S** не являются независимыми. Достаточно двух из них, а именно **C** и **S**, для того чтобы через них определить все остальные. Здесь имеют место следующие связи:

1. Согласно истолкованию функций **I** и **C**:

$$\mathbf{I}x = x = \mathbf{C}xy.$$

Поскольку y произвольно, постольку вместо него мы можем подставить любой объект или любую функцию, например, $\mathbf{C}x$. Тогда получаем:

$$\mathbf{I}x = (\mathbf{C}x)(\mathbf{C}x).$$

Согласно истолкованию **S** это означает:

$$\mathbf{SCC}x,$$

и в итоге мы получаем:

$$\mathbf{I} = \mathbf{SCC}.^4$$

Впрочем, в выражении **SCC** последний знак **C** не является важным. Если мы выше заменим y не на $\mathbf{C}x$, а на произвольную функцию φx, то соответственно получим:

$$\mathbf{I} = \mathbf{SC}\varphi$$

где вместо φ можно подставлять любую функцию[5].

2. В соответствии с истолкованием **Z** имеет место:

$$\mathbf{Z}fgx = f(gx).$$

Теперь можно осуществить уже известные преобразования:

$$f(gx) = (\mathbf{C}fx)(gx) = \mathbf{S}(\mathbf{C}f)gx = (\mathbf{CS}f)(\mathbf{C}f)gx.$$

Слияние по f дает:

$$\mathbf{S}(\mathbf{CS})\mathbf{C}fgx$$

таким образом:

$$\mathbf{Z} = \mathbf{S}(\mathbf{CS})\mathbf{C}.$$

3. Опять-таки выражение

$$\mathbf{T}fyx = fxy$$

можно преобразовать следующим образом:

$$fx(\mathbf{C}yx) = (fx)(\mathbf{C}yx) = \mathbf{S}f(\mathbf{C}y)x = (\mathbf{S}f)(\mathbf{C}y)x = \mathbf{Z}(\mathbf{S}f)\mathbf{C}yx = \\ \mathbf{ZZS}f\mathbf{C}yx = (\mathbf{ZZS}f)\mathbf{C}yx = (\mathbf{ZZS}f)(\mathbf{CC}f)yx = \\ \mathbf{S}(\mathbf{ZZS})(\mathbf{CC})fyx.$$

---

[4] Об этом сведении мне сообщил г-н Босковитц, а о несколько более сложном, а именно $(\mathbf{SC})(\mathbf{CC})$ еще раньше — г-н Бернайс.

[5] Конечно, только такую, которая имеет смысл для любого x.

Отсюда получаем:

$$\mathbf{T} = \mathbf{S}(\mathbf{ZZS})(\mathbf{CC}).$$

Если вместо $\mathbf{Z}$ сюда подставить найденное выше выражение, то $\mathbf{T}$ также сведется к $\mathbf{C}$ и $\mathbf{S}$.

§ 5

Теперь полученные нами результаты мы применим к конкретному логическому исчислению, основными элементами которого являются индивиды и функции функций-высказываний. Прежде всего нам нужна еще одна конкретная функция, свойственная этому исчислению. Выражение

$$fx|^x gx,$$

в котором f и g являются функциями-высказываниями от одного аргумента – мы можем ограничиться рассмотрением только таких функций согласно высказанному выше замечанию, — представляет собой определенную функцию от обеих функций f и g, т.е. имеет вид $\mathbf{U}(f, g)$ или, в соответствии с нашим принципом преобразования, $\mathbf{U}fg$. Таким образом, мы получаем:

$$\mathbf{U}fg = fx|^x gx,$$

где f и g являются обычными функциями-высказываниями, определение *функции несовместимости* $\mathbf{U}$.

Представляется замечательным тот факт, что каждую логическую формулу можно выразить только с помощью наших индивидуальных функций $\mathbf{I}$, $\mathbf{C}$, $\mathbf{T}$, $\mathbf{Z}$, $\mathbf{S}$, $\mathbf{U}$ и, таким образом, посредством функций $\mathbf{C}$, $\mathbf{S}$ и $\mathbf{U}$.

Прежде всего каждую логическую формулу можно выразить с помощью обобщенной штрих-символики, причем связанные переменные (мнимые переменные) помещаются на верхнем конце штриха. Это справедливо без ограничений для любой упорядоченности высказываний и их отношений. Далее можно постепенно при подходящем использовании других константных функций вводить вместо штрих-символа функцию $\mathbf{U}$.

Здесь нет возможности провести целиком все построение. Мы лишь разъясним роль различных индивидуальных функций при этом сведении.

Мы получили такую функцию $\mathbf{C}$, что выражения, стоящие слева и справа от штриха, являются функциями от одних и тех же аргументов.

Тогда, например, для f, g и y выражение

$$fx|^x gy,$$

в которое x справа не входит, можно было бы записать следующим образом:

$$fx|^x \mathbf{C}(gy)x$$

Если же, напротив, x встречается справа, то можно использовать функцию $\mathbf{T}$, при этом освободить от скобок функцию $\mathbf{Z}$ и осуществить слияние функции $\mathbf{S}$, если она встречается несколько раз. Так мы получаем, например:

$$fx|^x gxy = fx|^x \mathbf{T}gyx = \mathbf{U}f(\mathbf{T}gy)$$

Или, если использовать более развернутый пример:

$$(fxy|^y gxy)|^x(hxz|^z kxz) = \mathbf{U}(fx)(gx)|^x \mathbf{U}(hx)(kx)$$

Здесь выражение, стоящее перед штрихом, можно развернуть следующим образом:

$$\mathbf{U}(fx)(gx) = \mathbf{ZU}fx(gx) = \mathbf{S}(\mathbf{ZU}f)gx.$$

Тогда все выражение примет вид:

$$\mathbf{S}(\mathbf{ZU}f)gx|^x \mathbf{S}(\mathbf{ZU}h)kx = \mathbf{U}[\mathbf{S}(\mathbf{ZU}f)g][\mathbf{S}(\mathbf{ZU}h)k]$$

Если бы в последнем примере f и g были тождественны, то мы пришли бы к выражению:

$$\mathbf{S}(\mathbf{ZU}f)f.$$

Для того чтобы осуществить здесь слияние относительно f, нам нужна функция $\mathbf{I}$, а дальше мы вычисляем:

$$\mathbf{S}(\mathbf{ZU}f)f = \mathbf{S}(\mathbf{ZU}f)(\mathbf{I}f) = [\mathbf{ZS}(\mathbf{ZU})f](\mathbf{I}f) = \mathbf{S}[\mathbf{ZS}(\mathbf{ZU})]\mathbf{I}f.$$

В качестве практического примера рассмотрим следующее высказывание: “Для каждого предиката существует несовместимый с ним предикат”, т.е. “Для каждого предиката f существует предикат g такой, что высказывание $fx\ \&\ gx$ не будет верным ни для одного x”.

Запишем это предложение в символике Гильберта:

$$(f)(Eg)(x)\overline{(fx\ \&\ gx)}$$

Из этого сначала получаем:

$$(f)(Eg)(fx|^x gx)$$

Затем высказывание о существовании представляем в виде отрицания общего высказывания:

$$(f)\overline{(g)\overline{(fx|^x gx)}} \quad \text{или} \quad (f)\overline{(g)\overline{(fx|^x gx)\ \&\ (fx|^x gx)}}$$

Это дает:

$$(f)\overline{(fx|^x gx)|^g (fx|^x gx)}$$

Далее проводим это для f и получаем:

$$\begin{gathered}(f)\overline{((fx|^x gx)|^g (fx|^x gx)\ \&\ (fx|^x gx)|^g (fx|^x gx))} = \\ = [(fx|^x gx)|^g (fx|^x gx)]|^f [(fx|^x gx)|^g (fx|^x gx)].\end{gathered}$$

Здесь штрих-символ оказывается единственной логической связкой. Если теперь мы введем функцию несовместимости $\mathbf{U}$, то сначала получим:

$$[(\mathbf{U}fg)|^g (\mathbf{U}fg)]|^f [(\mathbf{U}fg)|^g (\mathbf{U}fg)],$$

а затем:

$$[\mathbf{U}(\mathbf{U}f)(\mathbf{U}f)]|^f [\mathbf{U}(\mathbf{U}f)(\mathbf{U}f)].$$

Однако имеет место:

$$\mathbf{U}(\mathbf{U}f)(\mathbf{U}f) = (\mathbf{ZUU}f)(\mathbf{U}f) = \mathbf{S}(\mathbf{ZUU})\mathbf{U}f,$$

поэтому полученное выше выражение переходит в:

$$[\mathbf{S}(\mathbf{ZUU})\mathbf{U}f]|^f[\mathbf{S}(\mathbf{ZUU})\mathbf{U}f],$$

что означает:

$$\mathbf{U}[\mathbf{S}(\mathbf{ZUU})\mathbf{U}][\mathbf{S}(\mathbf{ZUU})\mathbf{U}].$$

§ 6

После того, как мы пришли к символам **C**, **S** и **U**, дальнейшая редукция требует новых средств.

Конечно, чисто схематически можно было бы **C**, **S** и **U** заменить одной-единственной функцией, введя новую функцию **J** посредством следующих определений:

$$\mathbf{JC} = \mathbf{U}, \quad \mathbf{JS} = \mathbf{C}, \quad \mathbf{J}x = \mathbf{S},$$

где x отличен от **C** и **S**. Мы устанавливаем, прежде всего, что **J** отличается от **C** и **S**, поскольку **J** принимает только три значения, а **C** и **S** – бесконечно много функциональных значений. Вследствие этого мы имеем:

$$\mathbf{JJ} = \mathbf{S}, \quad \mathbf{J}(\mathbf{JJ}) = \mathbf{JS} = \mathbf{C}, \quad \mathbf{J}[\mathbf{J}(\mathbf{JJ})] = \mathbf{JC} = \mathbf{U}$$

и редукция действительно осуществлена. Однако в силу ее произвольного характера она едва ли имеет существенное значение.

Следует заметить[6], что посредством иного, более естественного способа можно освободиться, по крайней мере, от знака **U**. Каждая логическая формула содержит знак **U** и имеется возможность, как мы видели это выше для любых символов, посредством индивидуальных функций обобщенного функционального исчисления, в частности, посредством **C** и **S**, преобразовать ее таким образом, что **U** окажется аргументом всего

[6]Следующие ниже рассуждения принадлежат редактору Г. Беману.

выражения, т.е. примет вид $F\mathbf{U}$, где F уже не будет содержать $\mathbf{U}$. Если опускать $\mathbf{U}$ как само собой разумеющееся, то действительно можно обойтись только $\mathbf{C}$ и $\mathbf{S}$.

С другой стороны, если отказаться от предельного сведения основных функциональных знаков, то можно установить требование полностью избегать употребления скобок. Если мы исходим из формы $F\mathbf{U}$, то благодаря $\mathbf{Z}$ мы можем записывать F без всяких скобок. Таким образом, каждую логическую формулу можно записывать как простую последовательность знаков $\mathbf{C}, \mathbf{Z}$ и $\mathbf{S}$ без скобок и тем самым исчерпывающим образом выражать ее каким-то числом этих знаков.

Что касается вопроса об *однозначности* рассмотренного сведения, то с чисто символической точки зрения о нем речь идти не может, поскольку каждая формула как старого, так и нового исчисления допускает самые разнообразные преобразования. Однако в некотором ограниченном смысле однозначность все-таки можно установить. Будем называть “равнозначными” такие формулы старого исчисления, которые могут быть сведены друг к другу только на основании определений, т.е. без использования логических аксиом, и в которых обобщенный штрих Шеффера является основной связкой. Если теперь будем считать равнозначными также те формулы, которые отличаются только типом своих переменных, то одной и той же формуле нового исчисления, а также всем формулам, которые получены из нее посредством символического вычисления, будут соответствовать все и только те формулы старого исчисления, которые равнозначны в разъясненном выше смысле. Таким образом, рассмотренное здесь сведение логических формул обладает тем замечательным свойством, что оно не зависит от аксиом логики. (Поступило 15. 3. 1924).

М. И. Шейнфинкель и комбинаторная логика[1]

В. И. Шалак

abstract. In the article we review the famous paper of Moses Schönfinkel and it's influence on subsequent development of combinatory logic and λ-calculus.

Ключевые слова: Шейнфинкель, комбинаторная логика, лямбда-исчисление.

Прошло более 80 лет с момента публикации на немецком языке статьи Моисея Исаевича Шейнфинкеля “*О кирпичах математической логики*”[2]. Все это время в Советском Союзе она была труднодоступной. Остается лишь сожалеть, что люди, которым мы обязаны переводом на русский язык многих зарубежных монографий по логике и основаниям математики, в свое время не обратили на нее должного внимания. Возможно, именно по этой причине тематика комбинаторной логики и λ-исчисления не пользуется у нас той же популярностью, что и в остальном мире. Публикуя перевод статьи М. Шейнфинкеля, мы хотим восполнить этот пробел.

Несмотря на широкую известность имени М. Шейнфинкеля, о самом авторе мы знаем на удивление мало – две статьи, одна сохранившаяся фотография и скудные биографические данные. Известно, что он родился 4 сентября то ли 1887, то ли 1889 года в городе Екатеринославе (ныне Днепропетровск на Украине). Изучал математику в Одессе в университете, который тогда назывался Новороссийским. Его руководителем был

---

[1]Работа поддержана РГНФ. Грант № 08-03-00173а.

[2]*Schönfinkel M.* Über die Bausteine der mathematischen Logik // Mathematische Annalen. 1924. Bd. 92. S. 305–316.

Самуил Осипович Шатуновский – известный российский математик, много внимания уделявший вопросам геометрии и ее оснований. Нет ничего удивительного в том, что в 1914 г. М. Шейнфинкель приезжает в математическую Мекку того времени – в Геттинген к Д. Гильберту. Известность пришла к М. Шейнфинкелю благодаря докладу, который он сделал 7 декабря 1920 г. перед Математическим обществом Геттингена. Д. Гильберт рекомендовал доклад к публикации, которая и была осуществлена четырьмя годами позже в известном математическом журнале "Mathematische Annalen". Помощь в подготовке публикации оказал Г. Беман.

В Геттингене М. Шейнфинкель тесно общался с П. Бернайсом, который был его ровесником. В 1929 г. ими была подготовлена совместная публикация[3], посвященная проблеме разрешимости для одного частного класса формул исчисления предикатов. К этому времени М. Шейнфинкель уже вернулся в СССР. Последние годы жизни он провел в Москве, где страдал от нищеты, лечился от психического расстройства и умер в 1942 г. в госпитале. Ни точная дата смерти, ни место погребения неизвестны. Во время войны, чтобы хоть как-нибудь согреться, бывшие соседи М. Шейнфинкеля сожгли все его рукописи в печи.

Это все, что мы о нем знаем.

М. Шейнфинкель поставил перед собой задачу уменьшить число исходных понятий, используемых в логике, и избавиться от связанных переменных, поскольку они не имеют самостоятельного значения, а являются всего лишь "*знаками того, что определенные аргументные места и операторы принадлежат к одному типу*".

Если посредством определения $a|b = \neg a \vee \neg b$ ввести в язык классической логики новую связку, штрих Шеффера, то окажется, что ее одной достаточно для определения всех остальных связок.

$$\neg a = a|a, \quad a \vee b = (a|a)|(b|b)$$

М. Шейнфинкель замечает, что аналогичным образом можно определить обобщенный штрих Шеффера

[3] *Bernays P., Schönfinkel M.* Zum Entscheidungsproblem der mathematischen Logik // Mathematische Annalen. Bd. 99. S. 342–72.

$$f(x)|^x g(x) = (x)\neg(f(x) \ \& \ g(x)),$$

посредством которого выразимы не только связки, но и кванторы

$$\neg a = a|^x a, \quad a \vee b = (a|^y a)|^x (b|^y b),$$
$$(x)f(x) = (f(x)|^y f(x))|^x (f(x)|^y f(x)).$$

Далее он показывает, каким образом можно свести функции от нескольких аргументов к функциям одного аргумента.

Пусть дана функция $F(x, y)$. Для различных фиксированных значений аргумента x мы будем получать различные функции $G_x(y)$ от y. Если представить различные функции G как значения некоторой новой функции f, то $G = fx$, и исходная функция $F(x, y)$ может быть представлена в виде $(fx)y$. “*Таким образом, теперь fx представляет функцію, которая при подстановке значеній для x дает не объекты основной области (как было со значением $F(x, y)$), а опять приводит к функціи, аргументом которой является y. Иными словами, f есть функція, аргумент которой никак не ограничен, а ее значением вновъ является некоторая функція*”. Функции могут быть не только значениями других функций, но и занимать аргументные места.

Записывая функцию $(((fx)y)z)$ в виде $fxyz$, а $((f(xy))z)$ в виде $f(xy)z$, мы будем по умолчанию предполагать левую ассоциацию скобок при их восстановлении.

М. Шейнфинкель вводит еще пять специальных функций, которые позднее получили название комбинаторов:

$\mathbf{I}x = x$ — функция тождества
$\mathbf{C}xy = x$ — константная функция
$\mathbf{T}xyz = xzy$ — функция перестановки
$\mathbf{Z}xyz = x(yz)$ — функция группировки
$\mathbf{S}xyz = xz(yz)$ — функция слияния

Они нужны для того, чтобы определять другие функции и представлять их свойства. Например, коммутативность сложения $x + y$, которое будем записывать как Axy, может быть представлена в виде $Axy = Ayx = \mathbf{T}Axy$, а после опускания x и y просто как $A = \mathbf{T}A$.

Эти функции не являются независимыми. Достаточно оставить лишь **C** и **S**, так как остальные выразимы через них следующим образом:

$\mathbf{I} = \mathbf{SCC}$
$\mathbf{Z} = \mathbf{S(CS)C}$
$\mathbf{T} = \mathbf{S(ZZS)(CC)}$

Вместо обобщенного штриха Шеффера М. Шейнфинкель вводит функцию несовместимости $\mathbf{U}fg = fx|^x gx$. В левой части определения связанные переменные уже не фигурируют. С помощью **U** и функций **C** и **S** выразимы все логические формы. Например, формула логики предикатов второго порядка $(f)(Eg)(x)\neg(fx \;\; \& \;\; gx)$ может быть записана как $\mathbf{U}[\mathbf{S}(\mathbf{ZUU})\mathbf{U}]$ $[\mathbf{S}(\mathbf{ZUU})\mathbf{U}]$.

В последнем параграфе М. Шейнфинкель показывает, что достаточно даже не трех, а всего лишь одной функции **J**, с помощью которой можно выразить все остальные. Она определяется следующим образом:

$\mathbf{JC} = \mathbf{U}$
$\mathbf{JS} = \mathbf{C}$
$\mathbf{J}x = \mathbf{S}$, где x отличен от **C** и **S**.

Легко проверить, что имеет место $\mathbf{JJ} = \mathbf{S}$, $\quad \mathbf{J}(\mathbf{JJ}) = \mathbf{JS} = \mathbf{C}$, $\mathbf{J}[\mathbf{J}(\mathbf{JJ})] = \mathbf{JC} = \mathbf{U}$.

Возможно, это смутило даже его, так как далее он замечает, что в силу произвольного характера этой функции “*она едва ли имеет существенное значение*”.

Очевидно, что полученные М. Шейнфинкелем результаты имеют не только математическое, но и глубокое философское значение, так как относятся к глубинным основам математической деятельности. Возможно, это лишь случайное совпадение, но Д. Гильберт, который после знаменитого выступления на Математическом конгрессе 1900 г. основное внимание стал уделять вопросам физики и ее аксиоматизации, именно зимой 1920-1921 гг., когда и был сделан доклад М. Шейнфинкеля, вновь заинтересовался основаниями математики.

При всей ясности изложения результаты М. Шейнфинкеля были настолько необычны, что требовали глубокого осмысления. Он всего лишь заложил первый камень в исследования по комбинаторной логике, но не успел оформить их в законченную систему. Ее современным видом и самим термином мы обязаны Хаскеллу Бруксу Карри, который самостоятельно переоткрыл комбинаторную логику[4] и вдохнул в нее жизнь[5].

В одной небольшой статье невозможно изложить всю историю комбинаторной логики. Тем более что к ней были причастны люди с такими громкими именами, как Х.Б. Карри, А. Чёрч, С.К. Клини, Дж. Россер, А. Тьюринг, У. Куайн, Ф. Фитч. Поэтому мы приведем лишь современную формулировку комбинаторной логики и родственного ей λ-исчисления А. Чёрча, сформулируем полученные в них основные результаты и дадим доступную библиографию, которая позволит читателю более подробно ознакомиться с данным предметом и, возможно, заинтересоваться им с целью дальнейшего глубокого изучения.

1 Исчисление редукций чистой комбинаторной логики

1.1 Исходные символы

1. Var — множество переменных;
2. K, S — атомарные комбинаторы;
3.), (— скобки.

Все термы языка комбинаторной логики принадлежат одному типу.

1.2 Термы

1. Если $x \in Var$, то x — терм;
2. K и S — константные атомарные термы;
3. Если X и Y — термы, то (XY) — терм;
4. Ничто другое термом не является.

[4] *Curry H.B.* Grundlagen der kombinatorischen Logik // American Journal of Mathematics. 1930. Bd. 52. S. 509–536, 789–834.

[5] *Curry H.B., Feys R.* Combinatory Logic. Vol. 1. Amsterdam, 1958.

Терм вида (XY) называют аппликацией (применением) терма (функции) X к терму Y. В этом принципиальное отличие комбинаторной логики от современной теории категорий. Теория категорий строится на основе понятия композиции функций, а комбинаторная логика – на основе понятия применения функции к аргументу.

Термы, составленные лишь из константных термов K и S, будем называть *комбинаторами* и выделять в тексте жирным шрифтом. Поскольку при таком определении терма он может содержать много скобок, будем для облегчения восприятия по возможности опускать лишние скобки, предполагая их ассоциацию влево. Например, терм $(((XY)Z)U)$ после опускания скобок может быть записан просто как $XYZU$, а терм $((X(YZ))U)$ примет вид $X(YZ)U$.

В современной комбинаторной логике для обозначения комбинаторов М. Шейнфинкеля **I**, **C**, **T**, **Z**, **S** используют символы I, K, C, B, S.

В исчислении редукций комбинаторной логики изучают отношение редуцируемости между ее термами, которое обозначают посредством символа $\geq$. Это отношение можно рассматривать как аналог отношения выводимости между формулами классической логики.

1.3 Аксиомы

1. $X \geq X$ — для атомарных термов X
2. $\mathsf{K}XY \geq X$
3. $\mathsf{S}XYZ \geq XZ(YZ)$

1.4 Правила вывода

1. $X \geq Y \Rightarrow XZ \geq YZ$
2. $X \geq Y \Rightarrow ZX \geq ZY$
3. $X \geq Y, \;\; Y \geq Z \Rightarrow X \geq Z$

1.5 Определение доказательства. Последовательность редукций $< R_1, \ldots, R_n >$ называется доказательством, если для любого $i \leq n$ редукция R_i либо является аксиомой, либо получена из предшествующих редукций последовательности по одному из правил вывода. В этом случае редукция R_n называется доказуемой.

Иногда к приведенным выше трем правилам вывода добавляют еще одно

4. $X \geq Y \Rightarrow Y \geq X$

В этом случае говорят о *чистой комбинаторной логике* и вместо символа $\geq$ часто используют $=_*$.

1.6 Соглашения

1. Будем использовать символ $\equiv$ для обозначения графического равенства термов как языковых выражений.

2. Будем называть термы вида $\mathsf{K}XY$ и $\mathsf{S}XYZ$ *редексами*, а X и, соответственно, $XZ(YZ)$ – их *свертками*.

3. Будем говорить, что терм X находится в *нормальной форме*, если в него не имеет вхождения ни один редекс.

4. Посредством $T[Z_1/x_1, \ldots, Z_n/x_n]$ или $T[\overrightarrow{Z_n/x_n}]$ будем обозначать результат *одновременной подстановки* термов $Z_1, \ldots, Z_n$ в терм T вместо всех вхождений переменных $x_1, \ldots, x_n$, определяемый следующим образом:

   (a) $x_i[\overrightarrow{Z_n/x_n}] \equiv Z_i \quad 1 \leq i \leq n$

   (b) $y[\overrightarrow{Z_n/x_n}] \equiv y \quad y$ — атомарный терм, отличный от x_i, $1 \leq i \leq n$

   (c) $(XY)[\overrightarrow{Z_n/x_n}] \equiv (X[\overrightarrow{Z_n/x_n}])(Y[\overrightarrow{Z_n/x_n}])$

5. Посредством $FV(T)$ будем обозначать множество всех переменных, входящих в терм T.

Можно показать, что редукция $X \geq Y$ доказуема, е. и т. е. терм Y либо графически равен X, либо существует такая последовательность термов $< X_0, \ldots, X_n >$, что $X_0 \equiv X$, $X_n \equiv Y$ и для всякого $i > 0$ терм X_i получен из терма X_{i-1} путем единичной замены вхождения некоторого редекса на его свертку.

Исчисление редукций и сама комбинаторная логика обладают рядом важных свойств. Мы приведем их лишь для исчисления редукций, так как для комбинаторной логики они формулируются аналогичным образом.

1.7 Комбинаторная полнота. Для любого терма T, все переменные которого содержатся среди $\{x_1, \ldots, x_n\}$, существует такой комбинатор $\mathbf{D}$, что доказуема редукция $\mathbf{D}x_1 \ldots x_n \geq T$.

Комбинаторная полнота является аналогом неограниченной свертки в наивной теории множеств. Благодаря этому свойству исчисление редукций обладает большими выразительными возможностями.

Известно несколько алгоритмов нахождения комбинатора $\mathbf{D}$. Приведем самый простой.

Пусть x – переменная, а T – терм. Обозначим посредством $[x].T$ терм, полученный в результате применения следующего алгоритма:

- $[x].x \equiv \mathsf{SKK}$
- $[x].X \equiv \mathsf{K}X$, если X не содержит вхождений переменной x
- $[x].XY \equiv \mathsf{S}([x].X)([x].Y)$

Определим терм $[x_1, \ldots, x_n].T$ с помощью рекурсии $[x_1, \ldots, x_n].T = [x_1].([x_2, \ldots, x_n].T)$. В этом случае будем говорить, что терм $[x_1, \ldots, x_n].T$ получен из терма T посредством функциональной абстракции относительно переменных $x_1, \ldots, x_n$. Терм $[x_1, \ldots, x_n].T$ и есть искомый комбинатор.

Можно показать, что для любых термов $Y_1, \ldots, Y_n$ доказуема редукция: $([x_1, \ldots, x_n].T)Y_1 \ldots Y_n \geq T[Y_1/x_1, \ldots, Y_n/x_n]$.

1.8 Свойство Чёрча–Россера. Если доказуемы редукции $X \geq Y$ и $X \geq Z$, то существует такой терм U, что доказуемы редукции $Y \geq U$ и $Z \geq U$.

Отсюда следует, что если термы Y и Z находятся в нормальной форме, то $Y \equiv Z$. Это позволяет представлять в исчислении редукций функциональные отношения. Из свойства Чёрча–Россера следует также, что исчисление редукций непротиворечиво в смысле нетривиальности.

1.9 Представимость рекурсивных функций. В исчислении редукций представимы все рекурсивные функции.

1.10 Стандартная форма доказательств. Если доказуема редукция $X \geq Y$, где Y находится в нормальной форме, то терм Y либо графически равен X, либо существует такая последовательность термов $< X_0, \ldots, X_n >$, что $X_0 \equiv X$, $X_n \equiv Y$ и для всякого $i > 0$ терм X_i получен из терма X_{i-1} путем замены самого левого вхождения редекса его сверткой.

Существование стандартных форм доказательств очень важно с точки зрения приложений. Если мы представили некоторую вычислимую функцию посредством терма исчисления редукций, то существует стандартный алгоритм ее вычисления.

Алгебраическими моделями комбинаторной логики являются комбинаторные алгебры, которые еще называют комбинаторно полными аппликативными структурами.

1.11 Структура $M =< X, * >$ называется *аппликативной*, если $*$ — бинарная операция на множестве X.

Очевидно, что это определение совпадает с определением группоида.

1.12 Комбинаторная алгебра – это аппликативная структура $M =< X, *, k, s >$ с двумя выделенными элементами k, s, удовлетворяющими равенствам

$$kxy = x,\ sxyz = xz(yz)^6.$$

"*Аксиомы комбинаторных алгебр порождены не алгебраическими соображениями, а анализом рекурсивных процессов. ... эти структуры – патологические с алгебраической точки зрения*"[7]. Нетривиальные комбинаторные алгебры некоммутативны, неассоциативны, неконечны и нерекурсивны.

Возникновение комбинаторной логики было связано с поиском новых оснований математики. Х. Карри надеялся найти их в обобщенной теории функциональности, которой по своей сути

[6] *Барендрегт Х.* Ламбда-исчисление. Его синтаксис и семантика. М.: Мир, 1985. С. 103.

[7] Там же. С. 105.

и должна была стать комбинаторная логика. Добавив к ней комбинаторы, соответствующие импликации и кванторам, он построил *иллативную комбинаторную логику.* В 1934 г. С.К. Клини и Дж. Россер показали, что в этой логике имеет место аналог парадокса Ришара. Проанализировав причины возникновения парадокса, Х. Карри пришел к выводу о несовместимости свойства комбинаторной полноты и свойства дедуктивной полноты, выражаемого хорошо известной теоремой дедукции. Это позволило ему сформулировать новый парадокс, получивший впоследствии имя *парадокса Карри.*

2 Чистое λ-исчисление Чёрча

Одновременно с Х. Карри поисками новых функциональных оснований математики занимался Алонзо Чёрч[8]. С его именем связано появление λ-исчисления. Если теоретико-множественное представление функций является экстенсиональным, то в λ-исчислении они трактуются интенсионально, как некоторые предписания. Привычное еще со школьной скамьи представление функций в виде формул как раз и является таким вычислительным предписанием.

2.1 Исходные символы

1. Var – множество переменных;
2. λ – оператор абстракции;
3.), (- скобки.

Все выражения языка чистого λ-исчисления принадлежат одному типу.

2.2 Термы

1. Если $x \in Var$, то x - терм;
2. Если X и Y - термы, то (XY) – терм;
3. Если $x \in Var$, Y – терм, то (λxY) – терм;

[8] *Church A.* A set of postulates for the foundation of logic // Annals of Math. 1932. Vol. 33. № 2. P. 346–366 and Annals of Math. 1933. Vol. 34. P. 839–864.

4. Ничто другое термом не является.

Оператор абстракции связывает переменные. Очевидным образом вводятся понятия свободных и связанных переменных, области действия оператора абстракции, подстановки терма вместо свободной переменной. На подстановку терма T вместо свободной переменной x в терм Y, обозначаемую посредством $Y[T/x]$, налагается обычное ограничение, что ни одна свободная переменная терма T после его подстановки не становится связанной. Операция подстановки всегда определена, поскольку в λ-исчислении возможно переименование связанных переменных по аналогии с тем, как это делается в исчислении предикатов.

В λ-исчислении изучается *отношение конверсии* между его термами, которое мы будем обозначать посредством символа $=$.

2.3 Аксиомы

1. $((\lambda xY)Z) = Y[Z/x]$ — β-конверсия
2. $X = X$ — для атомарных термов X

2.4 Правила вывода

1. $X = Y \Rightarrow Y = X$
2. $X = Y \Rightarrow XZ = YZ$
3. $X = Y \Rightarrow ZX = ZY$
4. $X = Y,\ Y = Z \Rightarrow X = Z$
5. $X = Y \Rightarrow (\lambda zX) = (\lambda zY)$ — правило ξ

Определение доказательства очевидно.

По аналогии с комбинаторной логикой мы будем называть λ-термы вида $((\lambda xY)Z)$ *редексами*, а λ-термы вида $Y[Z/x]$ — их *свертками*. Если понимать λ-терм вида (λxY) как некоторое вычислительное предписание, то λ-терм вида $Y[Z/x]$ является результатом применения этого предписания к терму Z.

λ-исчисление обладает свойством Чёрча–Россера, оно непротиворечиво, и для него также имеет место теорема о стандартной форме доказательств. В λ-исчислении так же, как и в комбинаторной логике, представимы все рекурсивные функции.

Будучи построены независимо друг от друга, комбинаторная логика и λ-исчисление тесно связаны между собой.

2.5 φ — функция перевода термов комбинаторной логики в термы λ-исчисления.

1. $\varphi(x) = x$, если x — переменная
2. $\varphi(\mathsf{K}) = (\lambda x(\lambda yx))$
3. $\varphi(\mathsf{S}) = (\lambda x(\lambda y(\lambda z((xz)(yz)))))$
4. $\varphi(XY) = (\varphi(X)\varphi(Y))$

2.6 ψ — функция перевода термов λ-исчисления в термы комбинаторной логики.

1. $\psi(x) = x \quad x$ — переменная
2. $\psi(XY) = (\psi(X)\psi(Y))$
3. $\psi(\lambda xY) = [x].\psi(Y)$

Имеет место следующая теорема.

2.7 Теорема. Если в чистой комбинаторной логике доказуемо $X =_* Y$, то в чистом λ-исчислении доказуемо $\varphi(X) = \varphi(Y)$.

Обратная теорема не имеет места, так как в комбинаторной логике не выполняется аналог ξ-правила $X =_* Y \Rightarrow [z]X =_* [z].Y$. Тем не менее, Х. Карри показал, что имеется конечный набор редукций, добавление которых в качестве новых аксиом приводит к тому, что если $X = Y$ доказуемо в чистом λ-исчислении, то $\psi(X) = \psi(Y)$ доказуемо в комбинаторной логике.

В 1936 г. А. Чёрч средствами чистого λ-исчисления получил результат, который сделал его знаменитым[9]. Он доказал существование неразрешимых проблем. Отсюда следовали неразрешимость арифметики и неразрешимость исчисления предикатов первого порядка.

Результат о λ-определимости арифметических функций позволил А. Черчу выдвинуть тезис, что класс всех функций, которые являются вычислимыми с интуитивной точки зрения, совпадает с классом функций, определимых в λ-исчислении. В 1937 г. А. Тьюринг доказал, что класс λ-определимых функций совпадает с классом функций, определимых в его собственном формализме. Это явилось первым подтверждением тезиса Чёрча.

Часто можно услышать, что λ-исчисление оказалось противоречивым и потому А. Чёрч перестал им заниматься. Это не верно. Так же, как и Х. Карри, А. Чёрч занимался поисками новых оснований математики и логики. Построение λ-исчисления как раз и преследовало эту цель. Как и Х. Карри, он добавил к нему специальные логические аксиомы, и это получившееся в результате исчисление оказалось противоречивым. Попытка построить бестиповую логику высших порядков, из которой можно было бы вывести всю математику, потерпела неудачу. Само же чистое λ-исчисление непротиворечиво, как непротиворечива и чистая комбинаторная логика. В отличие от Х. Карри, после обнаружения противоречий А. Чёрч действительно стал заниматься другими вопросами, и долгое время, почти три с лишним десятилетия, тематику комбинаторной логики и λ-исчисления разрабатывал лишь очень ограниченный круг ученых. Все изменилось в конце 50-х годов прошлого столетия в связи с развитием вычислительной техники и теоретического программирования.

Первым предложил использовать комбинаторы в программировании еще Х. Карри[10], но в то время это не получило должного отклика. Следующим был Ф. Фитч[11]. В конце 50-х и на-

[9] *Church A.* An unsolvable problem of elementary number theory // American Journal of Mathematics. 1936. Vol.58. P. 345–363.

[10] *Curry H.B.* The logic of program composition // In Applications Scientifiques de la Logique Mathematique, Actes du Deuxieme Colloque International de Logique Mathematique, Paris, 1952. P. 97–102. Gauthier-Villars, Paris, 1954.

[11] *Fitch F.B.* Representation of sequential circuits in combinatory logic //

чале 60-х годов Дж. Маккарти создает язык символьного программирования LISP, в котором есть много заимствований из λ-исчисления, в частности — механизм функциональной абстракции. Им был предложен новый способ организации программ, получивший впоследствии название *функционального программирования*[12]. В начале 60-х годов П. Ландин предлагает использовать λ-термы для кодирования структур известного языка программирования Algol-60[13]. В 1963 г. он же описывает абстрактную SECD-машину для редукции λ-термов, рассматриваемых как программы[14]. Дальнейший рост интереса к комбинаторной логике и λ-исчислению привел к получению многих важных теоретических и практических результатов, перечислить которые в одной небольшой статье не представляется возможным.

Выше мы говорили лишь о бестиповых исчислениях, но были разработаны и такие, в которых каждому терму сопоставлен его тип. Комбинаторная логика с типами оказалась тесно связанной с импликативной интуиционистской логикой. На это обратил внимание в 1934 г. Х. Карри[15] . В 1958 г. он отметил[16], что типам комбинаторов соответствуют доказуемые формулы интуиционистской логики.

Дальнейшие исследования[17] привели к новым результатам. В настоящее время эта тема активно разрабатывается, так как находит применение не только в теоретическом, но и практическом программировании, а само соответствие получило название *изоморфизма Карри–Говарда*.

Связь между типами базовых комбинаторов и формулами им-

Philosophy of Science. 1958. Vol. 25. P. 263–279.

[12] *McCarthy J.* A basis for a mathematical theory of computation // Proc. of 1961 Western Joint Computer Conference.

[13] *Landin P.J.* A correspondence between ALGOL 60 and Church's lambda notation // Communications of the ACM. 1965. Vol. 8. P. 89–101, 158–165.

[14] *Landin P. J.* The mechanical evaluation of expressions // The Computer Journal. 1964. Vol. 6. P. 308–320.

[15] *Curry H.* Functionality in Combinatory Logic // Proceedings of the National Academy of Sciences. 1934. Vol. 20. P. 584–590.

[16] *Curry H.B., Feys R.* Combinatory Logic. Vol. 1. Amsterdam, 1958.

[17] *Howard W.A* The formulae-as-types notion of construction // To H. B. Curry, Essays on Combinatory Logic, Lambda Calculus and Formalism. Academic Press, London, 1980. P. 479–490. Manuscript circulated 1969.

пликативного вида позволила по-новому взглянуть на отношение между различными логиками и дать их стройную классификацию[18].

3 Логика дефинициальной дедукции[19]

Существует определенный перекос между большим интересом, который проявляют к комбинаторной логике и λ-исчислению представители computer science, и совершенно незначительным интересом со стороны логиков-философов. Этому есть две причины. Во-первых, при изложении этих исчислений, как правило, указывают на их предполагаемую функциональную интерпретацию, которая гораздо интереснее именно представителям computer science, а не логикам-философам. Во-вторых, они очень абстрактны и, в случае λ-исчисления, первоначально могут даже отпугнуть своей сложностью.

Оказывается, возможен третий чисто логический и гораздо более простой подход к представлению этих же структур. В его основе лежат две хорошо известные логические операции — аналоги введения определений и замены на их основе.

3.1 Исходные символы языка

1. Var — множество переменных;
2. $Const$ — множество констант, которое изначально является пустым;
3. $=_{def}$ — символ для введения определений;
4.), (— скобки.

3.2 Термы

1. Если $x \in Var$, то x — терм;
2. Если $c \in Const$, то c — терм;

[18] *Карпенко А.С.* Классификация пропозициональных логик // Логические исследования. Вып.4. М.: Наука, 1997. С. 107–133.

[19] *Шалак В.И.* Логический анализ дефинициальной дедукции // Логические исследования. Вып.15. М.: Наука, 2008.

3. Если X и Y — термы, то (XY) — терм;

4. Ничто другое термом не является.

Терм вида (XY) не предполагает никакой подразумеваемой интерпретации. Это не аппликация функции X к аргументу Y, а просто рядоположенность двух термов, которым могут соответствовать любые два объекта мысли.

Кроме термов, объектный язык содержит конструкции, называемые определениями.

3.3 Определения

1. Если T — терм и $FV(T) \subseteq \{x_1, \ldots, x_n\}$, то $Dx_1 \ldots x_n =_{def} T$ — определение, где D — новая константа.

2. Ничто другое определением не является.

Принятие определения и введение в язык новой константы D влечет за собой расширение множества правильно построенных термов. Примем дополнительные соглашения.

3.4 Соглашения

1. Пусть Δ — некоторое множество определений. Посредством $Const(\Delta)$ будем обозначать множество всех констант, введенных определениями Δ, т.е.

   $Const(\Delta) = \{D : Dx_1 \ldots x_n =_{def} T \in \Delta\}$.

2. Посредством $\mathrm{L}(\Delta)$ будем обозначать множество всех правильно построенных термов в языке с $\mathrm{Const} = \mathrm{Const}(\Delta)$.

3.5 Согласованное множество определений

1. Пустое множество определений является согласованным;

2. Если множество определений Δ согласовано, то множество определений $\Delta \cup \{Dx_1 \ldots x_n =_{def} T\}$, где $T \in L(\Delta)$, но $D \notin L(\Delta)$, также является согласованным;

3. Ничто другое согласованным множеством определений не является.

Смысл, который вкладывается в понятие согласованного множества определений, достаточно очевиден. Он заключается в том, что определения принимаются последовательно, и потому ранее принятые определения не могут содержать констант, которые будут введены в язык позже.

3.6 Правило замены по определению. Если $Dx_1 \ldots x_n =_{def} T$ – определение, а $X\{DZ_1 \ldots Z_n\}$ – терм, с выделенным вхождением терма $DZ_1 \ldots Z_n$, то $X\{T[\overrightarrow{Z_n/x_n}]\}$ есть результат замены $DZ_1 \ldots Z_n$ согласно определению на $T[\overrightarrow{Z_n/x_n}]$.

$$Dx_1 \ldots x_n =_{def} T, \quad X\{DZ_1 \ldots Z_n\} \Rightarrow X\{T[\overrightarrow{Z_n/x_n}]\}$$

3.7 Дефинициальной дедукцией (выводом) терма Y из согласованного множества определений Δ и терма $X \in L(\Delta)$ называется такая непустая конечная последовательность термов $< X_0, \ldots, X_n >$, что $X_0 \equiv X$, $X_n \equiv Y$ и для всякого $i > 0$ терм X_i получен из терма X_{i-1} по правилу замены.

Можно показать, что это исчисление в строго определенном смысле дефиницально эквивалентно исчислению редукций чистой комбинаторной логики. Отсюда следует, в частности, что в логике дефинициальной дедукции представимы все рекурсивные функции арифметики. Удивительно здесь то, что в этой логике изначально нет ни одной аксиомы и ни одного дескриптивного термина, как в комбинаторной логике. В этом смысле ее язык пуст и ничего кроме переменных и термов, построенных из них, не содержит. В то же время в этой логике нет связанных переменных, как в λ-исчислении, что делает ее гораздо более простой и понятной. Субъект дефинициальной логики всего лишь обладает способностью вводить определения и производить замену согласно им. Тем не менее, эти базовые логические операции, к которым мы привыкли относиться как к техническому приему, приводят к нетривиальным результатам.

4 Библиография

Выше уже упоминалось, что на русском языке очень мало публикаций, посвященных комбинаторной логике и λ-исчислению. Поэтому мы посчитали необходимым привести список работ, которые легко доступны и пригодны для начального ознакомления с предметом.

4.1 В 1987 г. в издательстве "Мир" была издана книга Э. Энгелера "*Метаматематика элементарной математики*". В ее третьей главе очень доступно излагаются основы комбинаторной логики и λ-исчисления.

4.2 В 1985 г. в издательстве "Мир" вышла книга Х. Барендрегта "*Ламбда-исчисление. Его синтаксис и семантика*". Ее по праву называют энциклопедией λ-исчисления. В книге подробнейшим образом излагаются λ-исчисление и комбинаторная логика, приводятся доказательства всех основных теорем, полученных в данной области. Большое количество упражнений позволяют использовать ее как превосходный учебник. Для тех, кто впервые открывает эту книгу, кажущаяся сложность изложения компенсируется логически строгими и полными доказательствами теорем. Автор сам заботится о том, чтобы облегчить ее чтение.

4.3 На механико-математическом факультете МГУ много лет исследованиями в области комбинаторной логики и оснований математики занимается А.Б. Кузичев. На его персональной странице в сети Интернет по адресу http://kuzichev.boom.ru можно найти много полезной информации.

4.4 Тем, кто не решится тратить свое время на изучение книги Х. Барендрегта, можно порекомендовать написанное им в соавторстве с Э. Барендсеном небольшое по объему "*Introduction to λ-calculus*", которое доступно по адресу http://www.cs.ru.nl/E.Barendsen/onderwijs/sl2/materiaal/lambda.pdf.

4.5 Хорошее изложение комбинаторной логики и λ-исчисления можно найти в "*Lecture Notes on the Lambda Calculus*" Петера Селинджера, которое также доступно для скачивания по адресу http://www.mscs.dal.ca/∼selinger/papers/lambdanotes.pdf

4.6 Истории λ-исчисления и комбинаторной логики посвящена глава "*History of Lambda-calculus and Combinatory Logic*", написанная Р. Хиндли и Ф. Кардоне для пятого тома *Handbook of the History of Logic*. Текст доступен по адресу http://www-maths.swan.ac.uk/staff/jrh/papers/JRHHislamWeb.pdf.

4.7 Еще одну работу по истории "*The Logic of Curry and Church*", написанную также для пятого тома *Handbook of the History of Logic* Дж. Селдином, можно скачать по адресу http://people.uleth.ca/$\sim$Ejonathan.seldin/CCL.pdf.

Логический анализ дефинициальной дедукции[1]

В. И. Шалак

abstract. The article is devoted to analisis of definitions and their properties in type-free languages. In order to achieve this aim we define logic of definitional deduction. The single rule of this logic is replacement of terms according to their definitions. The resulting logic is definitionally equivalent to combinatory logic of Schönfinkel–Curry.

Ключевые слова: определение, дедукция, комбинаторная логика, неподвижная точка.

1 Введение

Если историю возникновения логики вести со времен Платона и Аристотеля, то окажется, что одновременно это была и история теории определений, которая традиционно считается одним из разделов логики. Цель настоящей работы заключается в том, чтобы еще раз обратить внимание на роль определений в процессе познания и проанализировать возможности их использования в логических рассуждениях.

Достаточно распространено убеждение, что теория определений имеет вполне завершенный вид и ничего принципиально нового дать нам не может, что основная ее задача — классифицировать определения по видам, уточняя условия правильности их применения. Как иронически замечает Дж. Браун, “*Чтобы вызвать зевоту у читателя, трудно найти более подходящую тему, чем определения*” [1].

Наиболее распространенными являются явные определения, которые имеют простую лингвистическую форму,

$$A =_{def} B.$$

[1] Работа выполнена при поддержке РГНФ, грант № 08-03-00173а

Левая часть этого выражения, обозначенная буквой A, называется *определяемым* (дефиниендумом), а правая часть, обозначенная буквой B, — *определяющим* (дефиниенсом). Символ $=_{def}$ "*указывает, что принята конвенция считать, что выражение A означает то же самое, что и выражение B*" [2]. В левой части определения обязательно присутствует новый так называемый *определяемый термин*, который вводится в язык, расширяя его.

Очень часто, если говорить о формальной стороне, явные определения рассматривают всего лишь как некоторые сокращения других комбинаций символов.

"*Определение – это декларация о том, что вновь введенный символ или комбинация символов означает то же самое, что и некоторая другая комбинация символов, значение которой уже известно*" [3].

Поэтому они не могут привнести с собой ничего нового.

"После того, как посредством определения некоторый знак получил значение, он его отныне имеет, и определение переходит в предложение, в котором утверждается тождество. Конечно, это предложение содержит только тавтологию, которая не расширяет наше знание. Оно содержит истину, которая является настолько очевидной, что кажется бессодержательной... Действительно, посредством одних определений нельзя доказать истину, которая без них не была бы доказуема" [4].

Это является, в свою очередь, обоснованием их применения в ходе рассуждений.

Если нами принято определение $A =_{def} B$, то в любом выражении языка $T[A]$, в которое входит *определяемое*, мы можем заменить его на *определяющее* и получить выражение $T[B/A]$. Это *правило замены* кажется настолько очевидным, что его широко используют люди, даже не знакомые с тем, что такое логика.

С формальной точки зрения, к явным определениям предъявляются два основных требования [5]. *Во-первых*, введение посредством определений в язык новых символов должно удовлетворять условию консервативности. То есть не приводить к тому, что ранее недоказуемые утверждения языка L становятся доказуемыми в расширенном языке L^+. *Во-вторых*, мы должны иметь возможность сводить выражения языка L^+ к выражениям языка L, заменяя определяемое на определяющее. Второе требование как раз и разрешает использовать *правило замены* в ходе рассуждений. В явной форме эти два требования были впервые сформулированы К. Айдукевичем и С. Лесневским.

Логика, которую мы собираемся построить ниже, теснейшим образом связана с комбинаторной логикой Шейнфинкеля–Карри и λ-исчислением А. Чёрча [6].

2 Логика дефинициальной дедукции

Чтобы приступить к анализу определений, мы должны фиксировать язык. Если мы возьмем стандартный язык первопорядкового исчисления предикатов, то на наши результаты могут повлиять те неявные предпосылки, которые в нем принимаются. Мы бы этого не хотели. Наша цель – исследовать определения независимо от возможной категориальной структуры языка и наполнения его конкретными дескриптивными терминами. Нам нужен в определенном смысле *пустой* язык, который впоследствии мог бы быть расширен в любом направлении. Основная идея заключается в том, чтобы рассмотреть язык логического субъекта, который еще не приступил к познанию окружающего его мира и потому даже никак не категоризовал его. Мы не первые сталкиваемся с подобной проблемой, и ее стандартным решением является бестиповый язык. Он не содержит ничего, кроме переменных, которые представляют всего лишь возможные объекты мысли.

2.1 Исходные символы языка

1. Var — множество переменных;
2. $Const$ — множество констант, которое изначально пусто;
3. $=_{def}$ — символ для введения определений;
4.), (— скобки.

Выражения этого языка будем называть термами. Они являются просто комбинациями переменных и констант, структурированными посредством скобок. Изначально констант в языке нет, но мы допускаем, что они могут быть введены в него позже.

2.2 Термы

1. Если $x \in Var$, то x — терм;
2. Если $c \in Const$, то c — терм;
3. Если X и Y — термы, то (XY) – терм;
4. Ничто другое термом не является.

Терм вида (XY) не предполагает никакой подразумеваемой интерпретации. Это просто синтаксическая рядоположенность двух термов, которым могут соответствовать любые два объекта мысли. Взятие термов в скобки всего лишь на максимально абстрактном уровне отражает тот эмпирический факт, что выражения языка структурированы.

Поскольку при нашем определении терма он может содержать много скобок, будем для облегчения восприятия опускать лишние скобки, предполагая их ассоциацию влево при восстановлении. Например, терм $((((X)Y)Z)U)$ после опускания скобок может быть записан просто как $XYZU$, а терм $((X(YZ))U)$ примет вид $X(YZ)U$.

В дальнейшем изложении будем использовать символ $\equiv$ для обозначения графического равенства термов как языковых выражений.

2.3 Одновременная подстановка

Посредством $T[Z_1/x_1, \ldots, Z_n/x_n]$ или $T[\overrightarrow{Z_n/x_n}]$ будем обозначать результат одновременной подстановки термов $Z_1, \ldots, Z_n$ в терм T вместо всех вхождений переменных $x_1, \ldots, x_n$, определяемый следующим образом:

- $x_i[\overrightarrow{Z_n/x_n}] \equiv Z_i$, где $1 \leq i \leq n$
- $y[\overrightarrow{Z_n/x_n}] \equiv y$, где y — атомарный терм, отличный от x_i, $1 \leq i \leq n$
- $(XY)[\overrightarrow{Z_n/x_n}] \equiv (X[\overrightarrow{Z_n/x_n}])(Y[\overrightarrow{Z_n/x_n}])$.

Кроме термов, объектный язык содержит конструкции, называемые определениями. Необходимо обратить внимание на то, что определения принадлежат не метаязыку, а именно объектному языку.

Константы, введенные определениями, и составленные лишь из них термы будем выделять жирным шрифтом.

Обозначим посредством $FV(T)$ множество всех переменных, входящих в терм T.

2.4 Определения

Если T — терм, $FV(T) \subseteq \{x_1, \ldots, x_n\}$, $n \geq 0$ и $\mathbf{D}$ — константа, то $\mathbf{D}x_1 \ldots x_n =_{def} T$ — определение.

В случае, когда $n > 0$, новый термин, представленный константой $\mathbf{D}$, определяется вместе с контекстом его употребления. Такие определения называются *контекстуальными*. Если $n = 0$, то определение нового термина не зависит от контекста, т.е. является *неконтекстуальным*.

Каждое применение операции определения приводит к расширению констант языка и множества его термов. Чтобы отразить это в используемой нами символике, мы должны принять некоторые соглашения.

2.5 Соглашения

1. Пусть Δ — некоторое множество определений. Посредством $Const(\Delta)$ будем обозначать множество всех констант, введенных в язык определениями Δ, т.е. $Const(\Delta) = \{\mathbf{D} : \mathbf{D}x_1 \ldots x_n =_{def} T \in \Delta\}$.

2. Посредством $L(\Delta)$ будем обозначать множество всех правильно построенных термов в языке с $Const = Const(\Delta)$.

Операцию введения определений представим в виде правила.

2.6 Правило введения определений

Если имеется множество определений Δ, терм T и константа $\mathbf{D}$, удовлетворяющие ограничениям $T \in L(\Delta)$ и $\mathbf{D} \notin L(\Delta)$, то мы можем расширить множество Δ посредством нового определения $\mathbf{D}x_1 \ldots x_n =_{def} T$.

$$\text{(DI)}\quad \Delta,\, T \in L(\Delta),\, \mathbf{D} \notin L(\Delta) \quad\Rightarrow\quad \Delta \cup \{\mathbf{D}x_1 \ldots x_n =_{def} T\}$$

Мы должны учесть, что определения вводятся последовательно и поэтому в определенном смысле согласованы.

2.7 Согласованное множество определений

Множество определений Δ называется *согласованным*, е. и т. е. существует такая последовательность множеств $< \Delta_0, \ldots, \Delta_n >$, что $n \geq 0$, $\Delta_0 = \emptyset$, $\Delta_n = \Delta$, и для всех $0 < i \leq$n множество Δ_i получено из Δ_{i-1} путем применения правила введения определений DI.

С формальной точки зрения, посредством определений логический субъект всего лишь запоминает, каким образом из переменных $x_1, \ldots, x_n$, входящих в левую часть определения, и, возможно, уже содержащихся в языке констант, может быть построен терм, находящийся в правой части определения. Новая константа языка, определяемый термин, репрезентирует структуру определяющего. После принятия определения этот новый абстрактный объект вводится в универсум рассуждения и становится самостоятельным объектом мысли логического субъекта, а соответствующая ему константа может участвовать в построении новых термов. В обыденной практике, определив, что значит разделить одно число на другое, мы начинаем говорить об операции деления, которой овладели, как о самостоятельном объекте. Необходимо особо отметить, что новый абстрактный объект существует независимо от какой-либо интерпретации языка, так как его значением является структура языкового терма, который мы построили и выбрали на роль дефиниенса.

2.8 Правило замены

Если $\mathbf{D}x_1 \ldots x_n =_{def} T$ – определение, а $X\{\mathbf{D}Y_1 \ldots Y_n\}$ – терм, с выделенным конкретным вхождением терма $\mathbf{D}Y_1 \ldots Y_n$, то $X\{T[\overrightarrow{Y_n/x_n}]\}$ есть результат замены $\mathbf{D}Y_1 \ldots Y_n$ согласно определению на $T[\overrightarrow{Y_n/x_n}]$.

$$\text{(DE)}\quad \mathbf{D}x_1 \ldots x_n =_{def} T,\, X\{\mathbf{D}Y_1 \ldots Y_n\} \quad\Rightarrow\quad X\{T[\overrightarrow{Y_n/x_n}]\}$$

При кажущейся сложности формулировки правила замены оно не представляет ничего необычного. Вспомним, как мы вводим в язык логики высказываний определение связки эквиваленции

$$p \leftrightarrow q =_{def} (p \supset q)\&(q \supset p).$$

Встретив формулу $A \vee (B \leftrightarrow C)$ и пожелав устранить эквиваленцию в соответствии с принятым определением, мы должны подставить в дефиниенс вместо пропозициональной переменной p формулу B, подставить вместо переменной q формулу C, т.е. выполнить операцию одновременной подстановки $((p \supset q)\&(q \supset p))[B/p, C/q]$, получить в результате формулу $(B \supset C)\&(C \supset B)$ и после этого произвести замену $(B \leftrightarrow C)$ на $(B \supset C)\&(C \supset B)$. Результатом замены будет формула $A \vee ((B \supset C)\&(C \supset B))$. Именно эта последовательность шагов и отражена в нашей формулировке правила замены.

2.9 Дефинициальной дедукцией

(выводом) терма X из согласованного множества определений Δ и конечного множества термов $\Sigma \subseteq L(\Delta)$ называется непустая конечная последовательность $< X_0, \ldots, X_n >$ термов, где $X_n = X$ и каждый член которой либо является элементом Σ, либо получен по правилу DE из предшествующих термов последовательности и определений Δ.

В дальнейшем изложении всякий раз, говоря о множестве определений, мы будем подразумевать, что оно является согласованным.

Запись $\Delta; \Sigma > X$ будет означать, что существует вывод терма X из множества определений Δ и множества посылок Σ. В тех случаях, когда множество определений Δ фиксировано, и это не может вызвать недоразумений, мы будем использовать сокращенную запись $\Sigma > X$.

3 Свойства логики дефинициальной дедукции

ЛЕММА 1. *Вывод $\Delta; \Sigma > X$ имеет место, е. и т. е. для некоторого терма $Y \in \Sigma$ имеет место вывод $\Delta; \{Y\} > X$.*

Лемма доказывается простой индукцией по построению вывода. Базис индукции очевиден, а доказательство шага индукции следует из того, что посылка правила DE состоит из одного определения и одного терма.

Благодаря этой лемме при доказательстве свойств логики дефинициальной дедукции нам достаточно рассматривать выводы лишь из одноэлементного множества термов Σ. В дальнейшем вместо $\Delta; \{Y\} > X$ будем использовать запись $\Delta; Y > X$.

ЛЕММА 2. *Логика дефинициальной дедукции обладает свойством Чёрча–Россера. Если имеют место выводы* $\Delta; X > Y$ *и* $\Delta; X > Z$*, то существует такой терм* U*, что имеют место выводы* $\Delta; Y > U$ *и* $\Delta; Z > U$*.*

Доказательство этой леммы выходит за рамки настоящей статьи.

Из свойства Чёрча–Россера следует, что в логике дефинициальной дедукции отношение выводимости обладает функциональными свойствами и поэтому может быть использовано для представления функций.

Следующая теорема говорит о том, что какие бы определения мы ни принимали, это никогда не сделает логику противоречивой в смысле тривиальности.

ТЕОРЕМА 3 (нетривиальности). *Для любого множества определений* Δ *существуют такие термы* X *и* Y*, что вывод* $\Delta; X > Y$ *не имеет места.*

Доказательство.

Если множество определений Δ пусто, то нетривиальность следует из того, что все выводы имеют вид $\emptyset; X > X$.

Если множество определений Δ непусто, то оно содержит хотя бы одно контекстуальное определение вида $\mathbf{D}x_1 \ldots x_n =_{def} T$, где $n > 0$. Очевидно, что вывод $\Delta; \mathbf{D} > (\mathbf{DD})$ не имеет места, так как ни для одного определения из множества Δ правило DE к константе $\mathbf{D}$ не применимо, ибо ее контекст не заполнен. Q.E.D.

Определения должны удовлетворять условию консервативности. Доказательство этого свойства является содержанием следующей теоремы.

ТЕОРЕМА 4 (о консервативности определений). *Если для множества определений* Δ *и термов* X*,* $Y \in L(\Delta)$ *не верно, что имеет место вывод* $\Delta; X > Y$*, то для любого нового определения* $\boldsymbol{D}x_1 \ldots x_n =_{def} T$ *вывод* $\Delta \cup \{\boldsymbol{D}x_1 \ldots x_n =_{def} T\}; X > Y$ *также не будет иметь места.*

Доказательство.

Допустим, что для X, $Y \in L(\Delta)$ имеет место вывод $\Delta \cup \{\mathbf{D}x_1 \ldots x_n =_{def} T\}; X > Y$. Покажем, что в этом случае также будет иметь место вывод $\Delta; X > Y$. Доказательство проводим индукцией по построению вывода $\Delta \cup \{\mathbf{D}x_1 \ldots x_n =_{def} T\}; X > Y$.

Базис, $Y = X$.

Так как $X \in L(\Delta)$, то имеет место вывод $\Delta; X > X$.

Индукционный шаг. Достаточно рассмотреть случай, когда терм Y имеет вид $Y\{U[\overrightarrow{Z_k/x_k}]\}$ и получен по правилу DE из некоторого предшествующего терма последовательности $Y\{\mathbf{W}Z_1 \ldots Z_k\}$ и определения $\mathbf{W}x_1 \ldots x_k =_{def} U \in \Delta \cup \{\mathbf{D}x_1 \ldots x_n =_{def} T\}$.

По индуктивному допущению имеет место вывод $\Delta; X > Y\{\mathbf{W}Z_1 \ldots Z_k\}$, но в этом случае $Y\{\mathbf{W}Z_1 \ldots Z_k\} \in L(\Delta)$ и, следовательно, $\mathbf{W}x_1 \ldots x_k =_{def} U \in \Delta$. Отсюда получаем вывод $\Delta; X > Y\{U[\overrightarrow{Z_k/x_k}]\}$. Q.E.D.

Важнейшим свойством комбинаторной логики, λ-исчисления Чёрча и логики дефинициальной дедукции является наличие неподвижных точек для любого терма и существование эффективного алгоритма для их нахождения.

ТЕОРЕМА 5 (о неподвижных точках). *Для всякого множества определений Δ и всякого терма $F \in L(\Delta)$ существует такой терм $X \in L(\Delta \cup \{\boldsymbol{A}xy =_{def} y(xxy)\})$, что имеет место вывод $\Delta \cup \{\boldsymbol{A}xy =_{def} y(xxy)\}; X > FX$.*

Доказательство.

Пусть $F \in L(\Delta)$ — произвольный терм. В качестве искомого терма X возьмем $\mathbf{AA}F$.

1. $\mathbf{AA}F$
2. $y(xxy)[\mathbf{A}/x, F/y]$ — из 1 по DE
3. $F(\mathbf{AA}F)$ — из 2 по опр. 2.3
4. FX — из 1, 3

Q.E.D.

СЛЕДСТВИЕ 6. *Пусть Δ — некоторое множество определений, а C — произвольный терм в языке $L(\Delta)$. Обозначим посредством Θ множество определений $\Delta \cup \{ \boldsymbol{G}x_0x_1\ldots x_n =_{def} C, \boldsymbol{A}xy =_{def} y(xxy)\}$. Тогда существует такой терм $\boldsymbol{F} \in L(\Theta)$, что для всяких термов $T_1, \ldots, T_n \in L(\Theta)$ имеет место вывод $\Theta; \boldsymbol{F}T_1\ldots T_n > C[\boldsymbol{F}/x_0, T_1/x_1, \ldots, T_n/x_n]$.*

В качестве искомого терма **F** возьмем **AAG**.

1. $\mathbf{AAG}T_1\ldots T_n$
2. $(y(xxy)[\mathbf{A}/x, \mathbf{G}/y])T_1\ldots T_n$ — из 1 по DE
3. $\mathbf{G(AAG)}T_1\ldots T_n$ — из 2 по опр. 2.3
4. $C[(\mathbf{AAG})/x_0, T_1/x_1, \ldots, T_n/x_n]$ — из 3 по DE
5. $C[\mathbf{F}/x_0, T_1/x_1, \ldots, T_n/x_n]$ — из 1–4

Для тех, кто специально не интересовался понятием неподвижной точки, необходимо пояснить, что это такое, и почему оно действительно представляет интерес.

Одной из стандартных задач арифметики является решение уравнений вида $f(x) = 0$. Очевидно, что это уравнение имеет в точности те же корни, что и уравнение $f(x) = x - x$, которое, в свою очередь, может быть преобразовано к виду $f(x) + x = x$. Обозначим $f(x) + x$ посредством $g(x)$. Получаем, что задача решения исходного уравнения $f(x) = 0$ равносильна решению уравнения $g(x) = x$, т.е. нахождению таких x, при которых значение функции $g(x)$ совпадает со значением ее аргумента. Отсюда и появился термин *неподвижная точка*. Ряд глубоких теорем математики формулируется в терминах существования неподвижных точек.

Теорема 5 и следствие 6 говорят о том, что каждый терм дефинициальной логики имеет неподвижную точку, и эту точку (терм) можно эффективно построить. Благодаря этому мы можем расширить нашу логику новым видом определений, которые позволяют вводить в язык новые константы посредством самореференции. В обычной логике таких определений стараются избегать, считая самореференцию *порочным кругом* и ошибкой. Ограниченная форма определений посредством самореференции используется в математике под названием *рекурсивных определений*.

3.1 Определения через неподвижные точки

Если T — терм, $FV(T) \subseteq \{x_0, x_1, \ldots, x_n\}$, и $\mathbf{D}$ — константа, то $\mathbf{D}x_1\ldots x_n =_{dfp} T[\mathbf{D}/x_0]$ — определение через неподвижную точку.

3.2 Правило введения определений через неподвижную точку

Если имеется множество определений Δ, терм T и константа $\mathbf{D}$, удовлетворяющие ограничениям $T \in L(\Delta)$ и $\mathbf{D} \notin L(\Delta)$, то мы можем расширить множество Δ посредством нового определения $\mathbf{D}x_1\ldots x_n =_{dfp} T[\mathbf{D}/x_0]$.

$$\text{(DFI) } \Delta,\, T \in L(\Delta),\, \mathbf{D} \notin L(\Delta) \Rightarrow \Delta \cup \{\mathbf{D}x_1\ldots x_n =_{dfp} T[\mathbf{D}/x_0]\}$$

Очевидно, что в том случае, когда переменная x_0 не имеет вхождений в терм T, определения через неподвижную точку совпадают с обычными определениями.

3.3 Расширенное согласованное множество определений

Множество определений Δ называется *расширенным согласованным*, е. и т. е. существует такая последовательность множеств $< \Delta_0, \ldots, \Delta_n >$, что $n \geq 0$, $\Delta_0 = \emptyset$, $\Delta_n = \Delta$ и для всех $0 < i \leq n$ множество Δ_i получено из Δ_{i-1} путем применения правила введения определений DI или DFI.

3.4 Правило замены

(Для определений через неподвижную точку). Если $\mathbf{D}x_1\ldots x_n =_{dfp} T[\mathbf{D}/x_0]$ — определение, а $X\{\mathbf{D}Y_1\ldots Y_n\}$ — терм, с выделенным вхождением терма $\mathbf{D}Y_1\ldots Y_n$, то $X\{T[\mathbf{D}/x_0, Y_1/x_1, \ldots, Y_n/x_n]\}$ есть результат замены $\mathbf{D}Y_1\ldots Y_n$ согласно определению на $T[\mathbf{D}/x_0, Y_1/x_1, \ldots, Y_n/x_n]$

$$\text{(DFE)} \quad \mathbf{D}x_1\ldots x_n =_{dfp} T[\mathbf{D}/x_0],\, X\{\mathbf{D}Y_1\ldots Y_n\} \Rightarrow X\{T[\mathbf{D}/x_0, Y_1/x_1, \ldots, Y_n/x_n]\}.$$

Нам остается показать, что определения через неподвижную точку не могут привести ни к чему плохому.

ТЕОРЕМА 7 (о консервативности определений через неподвижную точку). *Если для множества определений Δ и термов $X, Y \in L(\Delta)$ не верно, что имеет место вывод $\Delta; X > Y$, то для любого нового определения $\boldsymbol{D}x_1 \ldots x_n =_{dfp} T[\boldsymbol{D}/x_0]$ вывод $\Delta \cup \{\boldsymbol{D}x_1 \ldots x_n =_{dfp} T[\boldsymbol{D}/x_0]\}; X > Y$ также не будет иметь места.*

Доказательство.

Допустим, что имеет место вывод $\Delta \cup \{\mathbf{D}x_1 \ldots x_n =_{dfp} T[\mathbf{D}/x_0]\}$; $X > Y$. Покажем, что в этом случае также будет иметь место вывод $\Delta; X > Y$.

Обозначим посредством Θ множество определений $\Delta \cup \{\mathbf{A}xy =_{def} y(xxy), \mathbf{G}x_0x_1 \ldots x_n =_{def} T\}$.

Во всех термах вывода $\Delta \cup \{\mathbf{D}x_1 \ldots x_n =_{dfp} T[\mathbf{D}/x_0]\}; X > Y$ заменим константу $\mathbf{D}$ на терм $\mathbf{AAG}$. Покажем, что результатом такой замены является вывод $\Theta; X > Y$.

Доказательство проводим индукцией по построению вывода $\Delta \cup \{\mathbf{D}x_1 \ldots x_n =_{dfp} T[\mathbf{D}/x_0]\}; X > Y$.

a) $Y = X$.

Так как $X \in L(\Delta)$, то $\Theta; X > X$.

b) В выводе $\Delta \cup \{\mathbf{D}x_1 \ldots x_n =_{dfp} T[\mathbf{D}/x_0]\}; X > Y$ терм Y имеет вид $Y\{N[\overrightarrow{Z_k/x_k}]\}$ и получен по правилу DE из терма $Y\{\mathbf{S}Z_1 \ldots Z_k\}$ и определения $\mathbf{S}x_1 \ldots x_k =_{def} N \in \Delta$.

По индуктивному допущению, имеет место вывод

$$\Theta; X > U\{\mathbf{S}V_1 \ldots V_k\},$$

где U, $V_1, \ldots, V_k$ есть результат замены в термах Y, $Z_1, \ldots, Z_k$ константы $\mathbf{D}$ на терм $\mathbf{AAG}$. Из терма $U\{\mathbf{S}V_1 \ldots V_k\}$ применением правила DE получаем терм $U\{N[\overrightarrow{V_k/x_k}]\}$ и соответственно вывод $\Theta; X > U\{N[\overrightarrow{V_k/x_k}]\}$.

c) В выводе $\Delta \cup \{\mathbf{D}x_1 \ldots x_n =_{dfp} T[\mathbf{D}/x_0]\}; X > Y$ терм Y имеет вид $Y\{N[\mathbf{S}/x_0, Z_1/x_1, \ldots, Z_n/x_k]\}$ и получен по правилу DFE из терма $Y\{\mathbf{S}Z_1 \ldots Z_k\}$ и определения $\mathbf{S}x_1 \ldots x_k =_{dfp} N[\mathbf{S}/x_0]$.

По индуктивному допущению, имеет место вывод

$$\Theta; X > U\{\mathbf{S}V_1 \ldots V_k\},$$

где U, $V_1,\ldots,V_k$ есть результат замены в термах Y, $Z_1,\ldots,Z_k$ константы $\mathbf{D}$ на терм $\mathbf{AAG}$. Из терма $U\{\mathbf{S}V_1\ldots V_k\}$ применением правила DFE получаем терм $U\{N[\mathbf{S}/x_0, V_1/x_1,\ldots,V_k/x_k]\}$ и соответственно вывод $\Theta; X > U\{N[\mathbf{S}/x_0, V_1/x_1,\ldots,V_k/x_k]\}$.

d) В выводе $\Delta\cup\{\mathbf{D}x_1\ldots x_n =_{dfp} T[\mathbf{D}/x_0]\}; X > Y$ терм Y имеет вид $Y\{T[\mathbf{D}/x_0, Z_1/x_1,\ldots,Z_n/x_n]\}$ и получен по правилу DFE из терма $Y\{\mathbf{D}Z_1\ldots Z_n\}$ и определения $\mathbf{D}x_1\ldots x_n =_{dfp} T[\mathbf{D}/x_0]$.

По индуктивному допущению, имеет место вывод

$$\Theta; X > U\{\mathbf{AAG}V_1\ldots V_n\},$$

где U, $V_1,\ldots,V_n$ есть результат замены в термах Y, $Z_1,\ldots,Z_n$ константы $\mathbf{D}$ на терм $\mathbf{AAG}$. Продолжим этот вывод.

1. $U\{\mathbf{AAG}V_1\ldots V_n\}$ — заключительный терм предшествующего вывода
2. $U\{(y(xxy)[\mathbf{A}/x, \mathbf{G}/y])V_1\ldots V_n\}$ — из 1 по DE
3. $U\{\mathbf{G(AAG)}V_1\ldots V_n\}$ — из 2 по опр. 2.3
4. $U\{T[\mathbf{AAG}/x_0, V_1/x_1,\ldots,V_n/x_n]\}$ — из 3 по DE

В результате мы получили вывод $\Theta; X > U\{T[\mathbf{AAG}/x_0, V_1/x_1,\ldots,V_n/x_n]\}$.

Все случаи рассмотрены. Так как в выводе $\Theta; X > Y$ по условию теоремы X, $Y \in L(\Delta)$, то мы можем применить к нему теорему 4 и получить искомый вывод $\Delta; \Sigma > Y$. Q.E.D.

Из следствия 6 и теоремы 7 следует, что определения через неподвижную точку не расширяют дедуктивных возможностей дефинициальной логики, так как всегда могут быть заменены обычными определениями в смысле 2.4. Вместе с теоремой 4 это означает, что определения через неподвижную точку являются полноправными определениями и при корректном их использовании ни к чему плохому привести не могут.

Стандартной задачей арифметики является нахождение решения системы уравнений:

$f_1(x_1, ..., x_n) = 0$

. . . .

$f_n(x_1, ..., x_n) = 0$

Эту задачу можно свести к задаче о нахождении множественных неподвижных точек для системы уравнений:

$f_1(x_1, ..., x_n) + x_1 = x_1$

. . . .

$f_n(x_1, ..., x_n) + x_n = x_n$

Следующая теорема является усилением теоремы 5.

ТЕОРЕМА 8 (Теорема о множественных неподвижных точках). *Для всякого множества определений* Δ *и термов* $F_1, \ldots, F_n \in L(\Delta)$ *существует такое множество определений* Θ *и термы* $X_1, \ldots, X_n \in L(\Theta)$*, что* $\Delta \subseteq \Theta$ *и имеют место выводы* $\Delta; X_1 > (F_1 X_1 \ldots X_n), \ldots, \Delta; X_n > (F_n X_1 \ldots X_n)$.

Доказательство.

В качестве Θ возьмем множество Δ, к которому последовательно добавлены следующие определения:

$\mathbf{P}_1 x_1 \ldots x_n =_{def} x_1$

. . . .

$\mathbf{P}_n x_1 \ldots x_n =_{def} x_n$

$\mathbf{R}x =_{dfp} x(F_1(\mathbf{RP}_1)\ldots(\mathbf{RP}_n))\ldots(F_n(\mathbf{RP}_1)\ldots(\mathbf{RP}_n))$

В качестве терма X_i возьмем $\mathbf{RP}_i$.

1. $\mathbf{RP}_i$
2. $x(F_1(\mathbf{RP}_1)\ldots(\mathbf{RP}_n))\ldots(F_n(\mathbf{RP}_1)\ldots(\mathbf{RP}_n))[\mathbf{P}_i/x]$ — из 1 по DFE
3. $\mathbf{P}_i(F_1(\mathbf{RP}_1)\ldots(\mathbf{RP}_n))\ldots(F_n(\mathbf{RP}_1)\ldots(\mathbf{RP}_n))$ — из 2 по опр. 2.3
4. $x_i[(F_1(\mathbf{RP}_1)\ldots(\mathbf{RP}_n))/x_1, \ldots, (F_n(\mathbf{RP}_1)\ldots(\mathbf{RP}_n))/x_n]$ — из 3 по DE
5. $F_i(\mathbf{RP}_1)\ldots(\mathbf{RP}_n))$ — из 4 по опр. 2.3

Q.E.D.

В настоящей статье мы не будем приводить точных формулировок и доказательств, но лишь заметим, что из теоремы 8 по аналогии с теоремой 5 вытекает возможность принятия множественных определений через неподвижные точки. В арифметике аналогом этого является одновременное определение нескольких функций посредством взаимной рекурсии.

ТЕОРЕМА 9. *Логика дефинициальной дедукции эквивалентна исчислению редукций комбинаторной логики Шейнфинкеля–Карри [6].*

Подробное доказательство этой теоремы выходит за рамки настоящей статьи. Дадим лишь его набросок.

В логике дефинициальной дедукции мы можем определить два основных комбинатора исчисления редукций комбинаторной логики:

$\mathbf{K}xy =_{def} x$

$\mathbf{S}xyz =_{def} xz(yz)$

После этого остается лишь показать допустимость в дефинициальной логике правил вывода исчисления редукций комбинаторной логики.

Доказательство в обратную сторону использует тот факт, что правило введения определений DI является аналогом свойства комбинаторной полноты исчисления редукций. Остается доказать допустимость в исчислении редукций правила DE. Это легко сделать индукцией по глубине вхождения терма $\mathbf{D}Y_1 \ldots Y_n$ в терм $X\{\mathbf{D}Y_1 \ldots Y_n\}$.

4 Приложения логики дефинициальной дедукции

Удивительным свойством логики дефинициальной дедукции является то, что многие известные математические объекты и конструкции могут быть в ней просто определены, а не постулированы, как в обычной логике предикатов. Определения этих объектов и их существование не зависят от понятия модели, так как имеют чисто языковую природу.

4.1 Соглашения

1. Будем говорить, что терм, к которому не применимы правила DE и DFE, *находится в нормальной форме.*

2. Если из терма X выводим находящийся в нормальной форме терм Y, то будем говорить, что терм X *имеет нормальную форму.*

Из свойства Чёрча–Россера для дефинициальной логики следует, что если терм имеет нормальную форму, то она единственна. Этот факт удобно использовать для представления функций.

Допустим, мы хотим определить в нашем языке некоторую функцию $\mathbf{f} : A^n \to B$, где A и B – некоторые множества. Для этого каждому элементу $a \in A$ и каждому $b \in B$ необходимо сопоставить термы $\ulcorner a \urcorner$ и $\ulcorner b \urcorner$, которые будут их представлять. Должно быть соблюдено условие: если $a_1 \in A$, $a_2 \in A$ и $a_1 \neq a_2$, то $\ulcorner a_1 \urcorner$ и $\ulcorner a_2 \urcorner$ имеют разные нормальные формы, т.е. не существует такого терма t , что $\ulcorner a_1 \urcorner > t$ и $\ulcorner a_2 \urcorner > t$. Аналогично для $b_1 \in B$, $b_2 \in B$.

4.2 Определимость функций

Функция $\mathbf{f} : A^n \to B$ *определима* в логике дефинициальной дедукции, если существует такой замкнутый терм $\mathbf{F}$, что для всяких $a_1, \ldots, a_n \in A$ имеет место вывод $\mathbf{F}\ulcorner a_1 \urcorner \ldots \ulcorner a_n \urcorner > \ulcorner f(a_1, \ldots, a_n) \urcorner$, где $\ulcorner f(a_1, \ldots, a_n) \urcorner$ представляет элемент $\mathbf{f}(a_1, \ldots, a_n) \in B$. В этом случае будем говорить, что терм $\mathbf{F}$ *определяет* функцию $\mathbf{f}$.

4.3 Определение истинностнозначных булевых функций

Определим две константы, которые будут представлять в нашем языке *Истину* и *Ложь*.

1. $(\mathbf{T}\, x\, y) =_{def} x$
2. $(\mathbf{F}\, x\, y) =_{def} y$

Поскольку термы $\mathbf{T}$ и $\mathbf{F}$ находятся в нормальной форме и отличны друг от друга, то необходимые условия соблюдены. Определим теперь дополнительные константы, представляющие основные булевы функции.

1. $(\mathbf{Not}\, x) =_{def} (x\, \mathbf{F}\, \mathbf{T})$
2. $(\mathbf{And}\, x\, y) =_{def} (x\, y\, \mathbf{F})$
3. $(\mathbf{Or}\, x\, y) =_{def} (x\, \mathbf{T}\, y)$

4. $(\mathbf{Imp}\, x\, y) =_{def} (x\, y\, \mathbf{T})$

Легко проверить, что они действительно представляют булевы функции. Проверим это на примере констант **Not** и **And**. Для остальных функций проверка аналогична.

$(\mathbf{Not}\,\mathbf{T}) > (\mathbf{T}\ \ \mathbf{F}\ \ \mathbf{T}) > \mathbf{F}$
$(\mathbf{Not}\,\mathbf{F}) > (\mathbf{F}\ \ \mathbf{F}\ \ \mathbf{T}) > \mathbf{T}$

$(\mathbf{And}\ \ \mathbf{T}\ \ \mathbf{T}) > (\mathbf{T}\ \ \mathbf{T}\ \ \mathbf{F}) > \mathbf{T}$
$(\mathbf{And}\ \ \mathbf{T}\ \ \mathbf{F}) > (\mathbf{T}\ \ \mathbf{F}\ \ \mathbf{F}) > \mathbf{F}$
$(\mathbf{And}\ \ \mathbf{F}\ \ \mathbf{T}) > (\mathbf{F}\ \ \mathbf{T}\ \ \mathbf{F}) > \mathbf{F}$
$(\mathbf{And}\ \ \mathbf{F}\ \ \mathbf{F}) > (\mathbf{F}\ \ \mathbf{F}\ \ \mathbf{F}) > \mathbf{F}$

Этот пример демонстрирует общую схему, как определяются функции в языке дефинициальной логики. Подобным образом можно показать, что в ней определимы не только булевы, но и все (!) функции рекурсивной арифметики.

Поскольку исходный язык пуст, т. е. не содержит никаких дескриптивных терминов с заранее заданной интерпретацией, арифметика рекурсивных функций развивается за счет его внутренних ресурсов и потому совместима с любыми будущими расширениями. Это явление может быть названо *лингвистическим априоризмом.*

Мы не можем остановиться лишь на констатации данного факта, а должны дать ему какое-то рациональное объяснение. Повидимому, оно заключается в том, что многие структуры языка, не только искусственно нами построенного, но и естественных языков, являются древовидными. Эти структуры обнаруживаются при анализе слов, предложений, текстов. Их богатые выразительные возможности для кодирования информации и представления вычислений хорошо известны в математике. Поэтому совершенно не удивительно, что обнаружив их в языке, мы открыли в себе способность с помощью операций введения определений (кодирования) и замены согласно определениям (декодирования) представлять разнообразные математические объекты и конструкции. А поскольку наше знание мы всегда формулируем и закрепляем в языке, то оно вынуждено подчиняться этим математическим структурам. Не в этом ли и заключается ответ на вопрос о том, почему математика столь успешно приложима к внешнему миру?

Литература

[1] *Brown J.R.* Philosophy of Mathematics. Routledge, 1999. P. 74.
[2] *Бочаров В.А., Маркин В.И.* Основы логики. Учебник. М.: Космополис, 1994. С. 201.
[3] *Whitehead A.N., Russel B.* Principia Mathematica. Vol. 1. Cambridge, 1910. P. 11.
[4] *Фреге Г.* Логика в математике. Избранные работы. М.: Дом интеллектуальной книги, 1997. С. 101.
[5] *Gupta A.* Definitions // The Stanford Encyclopedia of Philosophy / Edward N. Zalta (ed.), URL = <http://plato.stanford.edu/entries/definitions/>.
[6] *Барендрегт Х.* Ламбда-исчисление. Его синтаксис и семантика. М.: Мир, 1985.

Truth as value and duty: lessons of mathematics[1]

Yu. I. Manin[2]

Key words: mathematical truth, value, proof, mathematical model, mathematical metaphor.

1. Introduction

Imagine that you open your morning newspaper and read the following report:

Brownsville, AR. *A local object partially immersed in a liquid was buoyed upward Tuesday by a force equal to the weight of the liquid displaced by that object, witnesses at the scene reported. As of press time, the object is still maintaining positive buoyancy.*

In fact, I did read this report in *the ONION*; I have only abridged it to add a Fénéonian touch.

If this meeting had been dedicated to the nature of the comical, one could produce an interesting analysis of the clever silliness of this parody. But as we are preoccupied with truth, I will use it in order to illustrate the differences between the attitudes to truth among practitioners of social sciences and law (as exemplified by [BoHa]) on the one hand, and that of, say, physicists, on the other.

To put it crudely, in social sciences information comes from witnesses; but in what sense was Archimedes' role in his discovery that of a witness, and are the experimental observations generating/supporting a physical theory on an equal footing with the observations of witnesses to a crime scene, or respondents to a poll?

[1]Talk at the International Symposium of the Balzan Foundation "Truth in the Humanities, Science and Religion", Lugano, May 16–17, 2008.

Now, imagine another report, that could have been posted on the web–site of the Department of Physics of Cambridge University:

The Cavendish Laboratory News & Features bulletin announced yesterday that a Cavendish student has won Science, Engineering and Technology award. He managed to measure the constant π *with unprecedented precision:* $\pi = 3,1415925...$ *with an error* ± 2 *at the last digit.*

I must confess right away that I did not read but simply fabricated this spoof in order to stress the further differences between the attitudes towards truth, now held by physicists and by mathematicians respectively.

On the one hand, formally such an announcement would make perfect sense: the *mathematical* constant π *can* be measured with some precision, in the same way that any *physical* constant such as the speed of light c, or the mass of the electron can be measured. The maximum achievable precision, at least of a "naive" direct measurement of π, is determined by the degree to which we can approximate ideal Euclidean rigid bodies by real physical ones. The limits to this approximation are set by the atomic structure of matter, and in the final analysis, by quantum effects.

On the other hand, in order to get in principle as many digits of π as one wishes, measurements are not required at all. Instead, one can use one of the many existing formulas/algorithms/software codes and do it on a sheet of paper, a pocket calculator, or a supercomputer. This time the limits of precision are determined by the physical limitations of our calculator: the size of the sheet of paper, memory of computer, construction of the output device, available time ...

What I want to stress now is that π imagined as an infinite sequence of its digits, is not amenable to a "finite" calculation: even the number of digits of π equal to the number of atoms in the observable Universe, would not exhaust π. Nevertheless, mathematicians speak about π and work with π as if it were a completely well defined entity, graspable in its entirety not only by one exceptional super–Mind, but by the minds of all trained researchers, never doubting that when they speak of π, they speak about one and the same ideal object, as rigid as if it really exists in some Platonic world.

In fact, one facet of this rigidity can be expressed by a few theorems implying that whatever exact formula, algorithm, or software code we might use to calculate π and whatever precision we choose, we will always get the same result. If we do not, either our formula was wrong, or the calculator made a mistake/there was a bug in the code/output device could not cope with the quantity of information ...

Contemplating this example, we may grasp the meaning of the succinct description of mathematics by Davis and Hersh ([DaHe]): *"the study of mental objects with reproducible properties".*

However, I want to use this example in order to stress that most of the deep mathematical truths are about infinity and infinitary mental constructs rather than experimentally verifiable finitary – and finite – operations, that can be modeled using actual objects of the physical world.

2

... mais je ne le crois pas!

G. Cantor to R. Dedekind, June 29, 1877

Before Georg Cantor, infinity appeared in mathematical theorems mostly implicitly, through the quantifier "all" (which also could be only implicit as in most Euclid's theorems).

Cantor proved the first theorem ever in which infinities themselves were objects of consideration. Slightly modernizing his arguments, we can say that he invented two or three mental constructions allowing us to compare sizes (technically, cardinalities) of infinite (in fact, finite as well) sets:

a) Two sets X, Y have equal cardinalities, symbolically $|X| = |Y|$, if their elements $x \in X$, $y \in Y$ can be joined in pairs (x, y) in such a way that each x is paired with exactly one y and each y with exactly one x.

b) The cardinality of X is called "less or equal" to that Y, symbolically $|X| \leq |Y|$, if there is a subset $X' \subset Y$ such that $|X| = |X'|$.

After these two *definitions*, the famous Cantor's *theorem* can be proved in several lines:

c) The set of all subsets of X, symbolically $P(X)$, has cardinality strictly larger than that of X.

Since we may iterate this construction, forming consecutively $P(P(X))$, $P(P(P(X)))$, $\ldots$, we see that *there exists an infinite scale of infinities of growing sizes.*

The proof of c) consists of two remarks. The first one says that $|X| \leq |P(X)|$, because X can be in a tautological way paired with a part of $P(X)$ consisting of one–element subsets of X.

The second remark is (a remake of) the famous Cantor's diagonal argument, using *reductio ad absurdum*. Imagine that $|X| = |P(X)|$. Then we can pair each $x \in X$ with some $S_x \subset X$ in such a way that *any* subset $S \subset X$ has the form S_y for some $y \in S$. Choose such a pairing (technically, one–to–one correspondence). Define

$S =$ *the set of all* x *such that* $x \notin S_x$.

This S must be of the form S_y for some $y \in X$, but then both logical possibilities, $y \notin S_y$ and $y \in S_y$ lead to a contradiction, so that the postulated one–to–one correspondence cannot exist.

Of course, the last key argument goes back to the ancient "liar's paradox". It was revived again in a different context in the 20th century by Tarski and Gödel. Tarski's theorem features the ominous, at least for the purposes of this conference, name *"inexpressibility of truth"*.

In the final analysis, self–referentiality was used to produce several deep mathematical arguments, and this became possible only when the mathematical universe became so extended that the language of mathematics could be embedded into this universe as a part of it. In particular, Leibniz's dream of merging language with meta–language became a reality.

3

The best test of truth is the power of the thought
to get itself accepted in the competition of the market.
Justice Oliver Wendell Holmes, Jr (1919)

When Cantor first presented his diagonal argument in a letter to Dedekind in 1873, it was worded differently and used only to prove that the cardinality of the natural numbers is strictly less than that of the real numbers. The discovery of the proof itself was in a sense hardly more important than the discovery of the definition of what it means, for one infinity to be larger than another one.

As soon as this was achieved, Cantor started thinking about the cardinality of the reals compared with that of the pairs of reals, or, geometrically, sets of points of a curve and of a surface respectively. They turned out to be equal! If we have a pair of numbers (α, β) in $(0, 1)$, Cantor suggested to produce from them the third number $\gamma \in (0, 1)$ by putting decimal digits of α to the odd places, and those of β to the even places. One sees, that vice versa, (α, β) can be reconstructed from γ. Dedekind, who was informed by Cantor's letter about this discovery as well, remarked that this does not quite work because some rational numbers have two decimal representations, such as $0,499999\dots = 0,5000000\dots$. Cantor had to spend some time to amend the proof, but this was a minor embarrassment, in comparison with the fascinating novelty of the fact itself: *"Ce que je vous ai communiqué tout récemment est pour moi si inattendue, si nouveau, que je ne pourrai pour ainsi dire pas arriver à une certaine tranquillité d'esprit avant que je n'aie reçu, très honoré ami, votre jugement sur son exactitude. Tant que vous ne m'aurez pas approuvé, je ne puis que dire: je le vois, mais je ne le crois pas"*, as Cantor famously wrote to Dedekind.

This returns us to the basic question on the nature of truth.

We are reminded that the notion of "truth" is a reification of a certain relationship between humans and *texts/utterances/statements*, the relationship that is called "belief", "conviction" or "faith", and which itself should be analyzed, together with other primary notions invoked in this definition.

Professor Blackburn in [Bl] extensively discussed other relationships of humans to texts, such as *scepticism, conservatism, relativism, deflationism.* However, in the long range all of them are secondary in the practice of a researcher in mathematics.

So I will return to truth.

I will skip analysis of the notion of "humans" :=) and will only sketch what must be said about texts, sources of conviction, and methods of conviction peculiar to mathematics.

Texts. Alfred North Whitehead allegedly said that all of Western philosophy was but a footnote to Plato.

The underlying metaphor of such a statement is: "Philosophy is a text", the sum total of all philosophic utterances.

Mathematics decidedly is *not* a text, at least not in the same sense as philosophy. There are no authoritative books or articles to which subsequent generations turn again and again for wisdom. Except for historians, nobody reads Euclid, Newton, Leibniz or Hilbert in order to study geometry, calculus or mathematical logic. The life span of any mathematical paper or book can be years, in the best (and exceptional) case decades. Mathematical wisdom, if not forgotten, lives as an invariant of all its (re)presentations in a permanently self–renewing discourse.

Sources and methods of conviction. Mathematical truth is not revealed, and its acceptance is not imposed by any authority.

Moreover, mathematical truth decidedly is not something that can be ascertained, as Justice Oliver Wendell Holmes put it, by "the majority vote of the nation that could lick all the others" (quoted from [Pe]), or by acceptance "in the competition of the market". In short, it is not a democratic value.

Ideally, the truth of a mathematical statement is ensured by *a proof*, and the ideal picture of a proof is a sequence of elementary arguments whose rules of formation are explicitly laid down before the proof even begins, and ideally are common for all proofs that have been devised and can be devised in future. The admissible starting points of proofs, "axioms", and terms in which they are formulated, should also be discussed and made explicit.

This ideal picture is so rigid that it can itself become the subject of mathematical study, which was actually performed and led to several remarkable discoveries, technically all related to the effects of merging language with metalanguage and self–referentiality.

Of course, the real life proofs are rendered in a peculiar mixture of a natural language, formulas, motivations, examples. They are much more condensed than imaginary formal proofs. The ways of condensing them are not systematic in any way. We are prone to mistakes, to taking on trust others' results that can be mistaken as well, and to relying upon authority and revelations from our teachers. (All of this should have been discussed together with the notion of "humans" which I have wisely avoided.)

Moreover, the discovery of truth may, and usually does, involve experimentation, nowadays vast and computer–assisted, false steps, sudden insights and all that which makes mathematical creativity so fascinating for its adepts.

One metaphor of proof is a route, which might be a desert track boring and unimpressive until one finally reaches the oasis of one's destination, or a foot path in green hills, exciting and energizing, opening great vistas of unexplored lands and seductive offshoots, leading far away even after the initial destination point has been reached.

4

[...] "mismanagement and grief": here you have that enormous distance between cause and effect covered in one line. Just as math preaches how to do it.

J. Brodsky. On "September 1, 1939" by W. H. Auden.

Mathematics is most visible to the general public when it is posits itself as an applied science, and in this role the notion of mathematical truth acquires distinctly new features. For example, our initial discussion of π as an essentialy non–finitary ("irrational") real number becomes pointless; whenever π enters any practical calculation, the first few digits are all that matters.

In a wider context than just applied science, mathematics can be fruitfully conceived as a toolkit containing powerful cognitive devices. I have argued elsewhere ([Ma1], [Ma2]) that these devices can be roughly divided into three overlapping domains: models, theories, and metaphors. Quoting from [Ma2],

"A mathematical *model* describes a certain range of phenomena qualitatively or quantitatively but feels uneasy pretending to be something more.

From Ptolemy's epicycles (describing planetary motions, ca 150) to the Standard Model (describing interactions of elementary particles, ca 1960), quantitative models cling to the observable reality by adjusting numerical values of sometimes dozens of free parameters ($\geq$ 20 for the Standard Model). Such models can be remarkably precise.

Qualitative models offer insights into *stability/instability*, *attractors* which are limiting states tending to occur independently of initial conditions, *critical phenomena* in complex systems which happen when the system crosses a boundary between two phase states, or two basins of different attractors. [...]

What distinguishes a (mathematically formulated physical) *theory* from a model is primarily its higher aspirations. A modern physical theory generally purports that it would describe the world with absolute precision if only it (the world) consisted of some restricted variety of stuff: massive point particles obeying only the law of gravity; electromagnetic field in a vacuum; and the like. [...]

A recurrent driving force generating theories is a concept of a reality beyond and above the material world, reality which may be grasped only by mathematical tools. From Plato's solids to Galileo's "language of nature" to quantum superstrings, this psychological attitude can be traced sometimes even if it conflicts with the explicit philosophical positions of the researchers.

A (mathematical) *metaphor*, when it aspires to be a cognitive tool, postulates that some complex range of phenomena might be compared to a mathematical construction. The most recent mathematical metaphor I have in mind is Artificial Intelligence (AI). On the one hand, AI is a body of knowledge related to computers and a new, technologically created reality, consisting of hardware, software, Internet etc. On the other hand, it is a potential model of functioning of biological brains and minds. In its entirety, it has not reached the status of a model: we have no systematic, coherent and extensive list of correspondences between chips and neurons, computer algorithms and brain algorithms. But we can and do use our extensive knowledge of algorithms and computers (because they were created by us) to generate educated guesses about structure and function of the central neural system [...].

A mathematical theory is an invitation to build applicable models. A mathematical metaphor is an invitation to ponder upon what we know."

As an aside, let us note that George Lakoff's *definition* of poetic metaphors such as "love is a journey" in [La] is itself expressed as a mathematical metaphor using the characteristic Cantor–Bourbaki mental images and vocabulary: *"More technically, the metaphor can be understood as a mapping (in the mathematical sense) from a* *source domain (in this case, journeys) to a target domain (in this case, love). The mapping is tightly structured. There are ontological correspondences, according to which entities in the domain of love (e. g. the lovers, their common goals, their difficulties, the love relationship, etc.) correspond systematically to entities in the domain of a journey (the travellers, the vehicle, destinations, etc.).*"

When a mathematical construction is used as a cognitive tool, the discussion of truth becomes loaded with new meanings: a model, a theory or a metaphor must be true to a certain reality, more tangible and real than the Platonic "reality" of pure mathematics. In fact, philosophers of science routinely discussed truth precisely in this context. Karl Popper's vision of scientific theories in terms of falsifiability (vs verifiability) is quite appropriate in the context of highly mathematicised theories as well.

What I want to stress here, however, is one aspect of contemporary mathematical models which is historically very recent. Namely, models are more and more widely used as "black boxes" with hidden computerized input procedures, and oracular outputs prescribing behavior of human users.

Mary Poovey, discussing from this viewpoint financial markets, remarks in her insightful essay [Po] that what she calls "representations", basically computerized bookkeeping or the numbers a trader enters in a computer, tend to replace the actual exchange of cash or commodities. "This conflation of representation and exchange has all kinds of material effects, [...] for when representation can influence or take the place of exchanges, the values at stake become notional too: they can grow exponentially or collapse at the stroke of key".

In fact, actions of traders, banks, hedge funds and alike are to a considerable degree determined by the statistical models of financial markets encoded in the software of their computers. These models thus become a hidden and highly influential part of the actions, our computerized "collective unconscious". As such, they cannot even be judged according to the usual criteria of choosing models which better reflect the behavior of a process being modeled. They are part of any such process.

What becomes more essential than their empirical adequacy, is, for example, their stabilizing or destabilizing potential. Risk management assuming mild variability and small risks can collapse when a disaster occurs, ruining many participants of the game; risk management based upon models that use pessimistic "Lévy distributions" rather than omnipresent Gaussians paradoxically tends to flatten the shock waves and thus to avoid major disasters (cf. [MandHu]).

5

There have been dramatic changes in the way in which the motion of the crowd is modeled in recent years.

R. Clemens, R. Hughes, in [ClHu].

When in the 20th century mathematicians got involved in heated discussions about the so called "Crisis in Foundations of Mathematics", several issues were intermingled.

Philosophically–minded logicians and professional philosophers were engaged with the nature and accessibility of mathematical truth (and reliability of our mental tools used in the process of acquiring it).

Logicists (finitists, formalists, intuitionists) were elaborating severe normative prescriptions trying to outlaw dangerous mental experiments with infinity, non–constructivity and *reductio ad absurdum.*

For a working mathematician, when he/she is concerned at all, "foundations" is simply a general term for the historically variable set of rules and principles of organization of the body of mathematical knowledge, both existing and being created. From this viewpoint, the most influential foundational achievement in the 20th century was an ambitious project of the Bourbaki group, building all mathematics, including logic, around set–theoretical "structures" and making Cantor's language of sets a common vernacular of algebraists, geometers, probabilists and all other practitioners of our trade. These days, this vernacular, with all its vocabulary and ingrained mental habits, is being slowly replaced by the languages of category theory and homotopy theory and their higher extensions. Respectively, the basic "left–brain" intuition of sets, composed of distinguishable elements, is giving way to a new, more "right brain" basic intuition dealing with space–like and continuous primary images, both deformable and deforming.

In the Western ethnomathematics, truth is best understood as a central value, ever to be pursued, rather than anything achieved. Practical efficiency, authority, success in competition, faith, all other clashing values must recede in the mind of a mathematician when he or she sets down to do their job.

The most interesting intracultural interactions of mathematics such as symbolized by this conference are as well those that are not direct but rather proceed with the mediation of value systems.

Coda

Every four years, mathematicians from all over the world meet at the International Congresses (ICM), to discuss whatever interesting developments happened recently in their domains of expertise. One of the traditions of these Congresses is a series of lectures for general public.

In 1998, our Congress met in Berlin, and Hans Magnus Enzensberger, the renowned poet and essayist, deeply interested in mathematics, spoke about "Zugbrücke außer Betrieb: die Mathematik im Jenseits der Kultur": the drawbridge to the castle of mathematics is out of service. The main concern of his talk was a deplorable lack of mathematical culture and communication between the general public and mathematicians, leading to alienation and mutual mistrust.

At the end of his talk ([Enz]) Enzensberger quotes an imaginary dialogue from [St], where a mathematician is chatting with a fictitional layman "Seamus Android".

"Mathematician: It's one of the most important discoveries of the last decade!

Android: Can you *explain* it in words ordinary mortals can understand?

Mathematician: Look, buster, if ordinary mortals could understand it, you wouldn't need mathematicians to do the job for you, right? You can't get a feeling for what's going on without understanding the technical details. How can I talk about manifolds without mentioning that the theorems only work if the manifolds are finite–dimensional para–compact Hausdorff with empty boundary?

Android: Lie a bit.

Mathematician: Oh, but I couldn't do that!

Android: Why not? Everybody *else* does."

And here I must play God and say to both Android and Mathematician: "Oh, no! Don't lie — because everybody else does."

References

[Bl] S. Blackburn. *Truth and Ourselves: the Elusive Last Word.* Keynote talk at the Balzan Symposium "Truth", May 2008.

[BoHa] L. Bovens, S. Hartmann. *Bayesian Epistemology.* Clarendon Press, Oxford, 2003.

[ClHu] R. C. Clemens, R. L. Hughes. *Mathematical Modelling of a Mediaeval Battle: the Battle of Agincourt, 1415.* Math. and Computers in Simulation, 64:2 (2004), 259–269.

[Dau] J. W. Dauben. *Georg Cantor. His Mathematics and Philosophy of the Infinite.* Princeton University Press, 1990.

[DavHe] P. Davis, R. Hersh. *The Mathematical Experience.* Birkhäuser Boston, 1986.

[Enz] H. M. Enzensberger. *Drawbridge Up. Mathematics — a Cultural Anathema.* A. K. Peters, Natick, Mass., 1999.

[La] G. Lakoff. *The Contemporary Theory of Metaphor.* In: A. Ortony (ed.), Metaphor and Thought (2nd ed.). Cambridge Univ. Press, 1993.

[MandHu] B. Mandelbrot, R. Hudson. *The (Mis)behavior of Markets: a Fractal View of Risk, Ruin and Rewards.* Profile, 2005.

[Ma1] Yu. Manin. *Mathematics as Metaphor.* (Selected Essays, with Foreword by F. Dyson). American Math. Society, 2007.

[Ma2] Yu. Manin. *Mathematical Knowledge: Internal, Social and Cultural Aspects.* (Introductory Chapter to vol. 2 of "La Matematica", Einaudi, ed. by C. Bartocci and P. Odifreddi, reproduced in [Ma1], pp. 3–26). Preprint math.HO/0703427

[Pe] J. D. Peters. *Courting the Abyss: Free Speech and the Liberal Tradition.* Chicago, 2005.

[Po] M. Poovey. *Can Numbers Ensure Honesty? Unrealistic expectations and the US accounting scandal.* Notices of the AMS, vol. 50:1, Jan. 2003, pp. 27–35.

[St] I. Stewart. *The Problems of Mathematics.* Oxford Univ. Press, 1987.

Formal Methodology

A. Mutanen

ABSTRACT. In general terms, methodology is a study of the entire scientific inquiry process: how science arrives at the posited goal. There are different kinds of goals for scientific inquiry. For example, goals may be epistemic (truth), aesthetic (simplicity) or several kinds of pragmatic goals (efficiency, economy, and explanatory power). It is not the concern of methodology what this goal happens to be. More generally, formal methods turned out to be effective tools in philosophical analysis, in the paper we will show this introducing the interrogative model and some basic properties of it, let us mention the covering law theorem. Finally we will formulate some philosophical implications of the model introduced.

Key words: logic, interrogative model, levels of methodological problems.

1 Introduction

The notion of formal methodology refers to logic or, rather, to philosophical logic. However, the scope and the aim of philosophical logic are not clear enough. It is reasonable to ask the question about the scope (and about the aim) of philosophical logic. Hintikka ([9]) takes quite a critical attitude to the whole approach: "Is there such a thing as 'philosophical logic'? Basically, my answer is 'no' " ([9],1). The very idea behind Hintikka's negative attitude seems to be that there is just logic. Philosophers should do much work together with the logic and take a look at "which are of greatest interest and relevance to a philosopher's pursuits" ([9], 2). So, there is only logic, but philosophers have a philosophical interest and — in a sense — logic is a tool, not a goal to a philosopher. In the same spirit we can say, that there is just methodology. Logical — formal — tools can, and should, be used if they have some philosophical relevance, that is, if the logic does some real (philosophical and conceptual) function. There is no reason only to formalize something that has been said before the formalization. According to Quine, the problem of translation has to be taken seriously: Why just try to translate? Is it possible just to translate?

In formal methodology the focus is not in formalization, but in methodology. Moreover, formal methodology need not be formalized. That is, the qualifier 'formal' does not refer to formalized. Here, we have the content of the distinction between philosophical logic and mathematical logic. This division is part and parcel of university schedule, for example, in Moscow and in Helsinki. In mathematical logic the intention is to study the formal structures and their properties; the intention is formal. In philosophical logic the intention is philosophical; the idea is to study philosophical notions. In this sense, formal methodology is a notion of philosophical logic.

In philosophy, or, in a general sense, in philosophical logic, formal — logical and mathematical — methods are used and studied very extensively. However, the systematic study of the nature and use of formal methods in philosophy has not been focal. The methodical role of formalization and the relationship between formal-logical and philosophic-conceptual concept formation has not been fully characterized. Of course, quite a lot of work has been done, by, for example, Smirnov in Moscow. What is the real content of the assumption that formalism has to perform some philosophical task?

To get a better grasp of what is going on in formal methodology we may take a look at scientific inquiry processes. In scientific inquiry there is cooperation between different actors. The cooperative partners may have very different kinds of background. Some of the cooperators may have a practical background without any scientific experience (this may be the case also in scientific inquiry); moreover, the partners may, and usually have, experience in different fields of science. In practical life, each organization has its own routine ways to characterize and solve problems. Each field of science has its own tradition. How can cooperation overriding traditions be possible? How to do fruitful cooperation? For a philosopher the situation looks very challenging. How to conceptualize such cooperation? Moreover, a philosopher may be one of the cooperators. What can a philosopher give to such cooperation? What can a philosopher get from such cooperation? This enforces the philosopher to rethink the basic ideas — methodological basic questions. Formal methodology may help us to understand such a situation.

Science is not done in a vacuum: the notion of tradition captures some essential aspects of the scientific inquiry process. The notion of tradition is not easy to characterize. The notion refers to a mental, social and practical level. At individual level tradition the notion of habitus captures some aspects of the notion. Habitus is something that can be seen from the behaviour of an individual. It is something personal but at the same something objective; something internal that the other can see. At the organizational level customs correspond to the habitus at an individual level. Customs refers basically to practical organizational behaviour. Besides, at the same it, refers to intellectual behaviour, to ways to identify interesting problems, for example. Science is both local and global: within a university department there is a tradition of its own, but at the same it has to be a member of global scientific community. (Cf. Merton's criterions.)

For example at the Department of Philosophy in University of Helsinki there is a long tradition of the use of formal methods in philosophical research. Several research groups study and use formal methods in their research work. To understand the philosophical environment at the department, let us mention names like: Eino Kaila, G H von Wright, Jaakko Hintikka, Oiva Ketonen, Erik Stenius, Veikko Rantala, Ingmar Pörn, Ilkka Niiniluoto, and Gabriel Sandu; all have worked at the department. All this has built a philosophical tradition which is still strong at the department. This tradition makes the choice of the methodological orientation natural or self-evident:

> ”The subject of formal methods in philosophy is intriguing but also for me at least puzzling, in more than one way. One puzzle is not unlike the predicament of the character in Moliere who is surprised to hear that he had been speaking French prose all his life long. What else could he have done? What other methods should — or could — I have possibly used in the philosophical work I have done?”([13])

Hintikka states that for him, the tradition of formal methods formulates a natural framework to do philosophical research. However, as Hintikka says, such a natural framework may be so self-evident that one does not react to it at all. It is something that one just does: what else could he (or I) do? Of course, Hintikka has made a conscious methodological choice. He has studied the very nature of methodology profoundly in his publications. He has both opened new paths for philosophical study and reflected on the philosophical importance of different methodic choices. But in general the problem is real: how have the methodological decisions been made in different fields of science?

The philosophical environment plays a central role in the focus of philosophical orientation. The philosophical environment shows how to do philosophy and how to identify important problems. In Helsinki the logic tradition has been strong and fruitful. All the students and researchers have a deep connection to the tradition. To have a connection, to work within and to reflect on a tradition are three different things. It is far from clear how to reflect on philosophical orientation. To reflect means that one has to look at the tradition (from some point of view). Reflection can neither be reduced into the analysis and classification of the actual practice nor into the analysis of ideal practice. The reflection captures some central aspects of the tradition and analyses the interdependencies between the factors analysed. So, reflection is something that Hintikka calls an explanatory model approach ([8]).

Let us take a step towards the reflective attitude to formal orientation. There is a proper need to understand the relationship between the different fields of science better. Sometimes philosophy — especially formal philosophy — is seen as a bridge builder between the different fields. In fact, [24] characterizes the spirit in Helsinki just in this sense:

> In Helsinki " [t]here was no sign of Snow's two cultures in the intellectual climate of the department of philosophy of the University of Helsinki in the 70s. Hintikka lectured and supervised students from mathematics, philosophy and linguistics departments. It was another piece of common knowledge that at the doctoral level there are no disciplinary barriers: one just sees to it that he or she acquires the proper education in all the departments where the topic of the dissertation might lead her or him to" ([24]).

This demonstrates clearly the possibility to override the borders between different fields of science. However, to override, one just cannot ignore the borders, he or she has to be able to explicate notions and problems that have a fundamental methodological role. This shows a general meaning of the formal methodology we are searching for here. Overriding the borders supposes a very general methodological approach. The generality refers to abstractness —

this abstractness is closely connected to formality. In fact, Hintikka's example demonstrates that such a methodological orientation can be done.

To achieve such a position, one has to reflect the very foundation of the scientific approach. However, in the tradition of formal philosophy reflection of the methods has not been in a central role. In fact, a formal approach may emphasize the practical aspects of the approach that is expressed by methodological motto taken from Nike 'Just do it' ([5]). Of course, in a practical work, like scientific inquiry, one has to emphasize the actual work in the Nike-spirit. However, there is still actual need for methodological discussion:

> ”The book is motivated by our curiosity but also by our discontent. Neither of us is content with the prominent histories of analytic philosophy currently on the market and we both believe that the discussion of general methodology of philosophy is in a pretty poor state. One of the most significant faults we see with such recent work is its failure to recognize and tackle the central place of formal methods. Shopworn narratives about the failures of logical positivism, the decline of formal methods in philosophy and the rise of intuitions-based conceptual analysis, are neither entirely true nor particularly helpful. In any case, such talk has been overwhelmed by the ongoing buzz of interesting work from philosophers who look much more like Russell and Carnap than Rorty.... we can help to begin a fruitful conversation about the deep and interesting methodological problems that formal work in philosophy presents” ([7]).

To be fruitful it has to be discussion about something. That is, reflection has to have a specific content that encourages the search for fundamentals. So, the focus of the discussion has to be located somehow. [7] do this by focusing the discussion to epistemology:

> ”In the spring of 2005 we had the opportunity to work collaboratively on problems related to the application of epistemic logic and elements from formal learning theory to traditional epistemological questions. Given the nature of this topic, our conversations regularly turned to the more general question of the relationship between formal methods and philosophical investigation. We realized that some of the philosophers we most admire had never explicitly articulated their views on these questions and it occurred to us that it might be worth asking them” ([7]).

2 Logic

While speaking about formal methodology or formal philosophy it is not possible to avoid the discussion about logic and formal languages. However, we have to emphasize that formal methodology searched need not be formalized, and, moreover, formalized philosophical analysis need not be formal in a sense we intend. The use of logic and formal languages are explained to make it possible to explicate the argumentation:

> "Formalization of an argument makes explicit its tacit assumptions. In some cases, one or more of these are clearly false, and one sees immediately what is wrong with the argument. In other cases, one is forced to think through the premises of the argument, and one may discover that was generally taken for granted may not be true" ([4]).

According to Føllesdal, formalization makes explicit tacit assumptions behind the argumentation. To do this the formalization focuses on some of the aspects in the argumentation, but at the same it hides something else. That is, by taking something explicitly under study, all the other things will be hidden. Of course, this is nothing new; if one observes one thing he or she does not observe something else. However, the focus of attention is a strategic choice. This opens the way to the critical evaluation of the situation. In a philosophical analysis, the use of formal methods has usually been restricted to formal or logical analysis of existing arguments or to the analysis of language of mathematics or of science. We should do a strategic evaluation of this choice ([11]).

Obviously "[o]ne of the most important cognitive abilities of people (and perhaps some other species) is the ability to reason" ([23], 5). In logic, the study of reasoning has been the formal study of argumentation, that is, argumentation theory. In the argumentation theory the emphasis has been in the study of relationships between premises and conclusion. The intention has not been in the characterization of actual argumentation but in the characterization of rules for rational or ideal argumentation. As Priest says "[l]ogic is the study of reasoning. It is not the study of how people actually reason. All too evidently, people often make mistakes when they reason. More importantly, the literature in cognitive psychology shows that people's reasoning ability appears to make systematic and predictable mistakes. Rather, logic is the theorisation of the norms of correct reasoning" ([23],5).

The very idea is clear: logic is a study of rational reasoning. However, this is not a reasoning that takes place in everyday argumentation between humans. It can be seen as a certain kind of ideal limit of human argumentation. So, logical meta-results give characterization theorems (maximality and minimality results) of human argumentation. A central feature of logic, which at the same makes it an effective tool in the argumentation theory, is that it is truth preserving: from true premises follow only true conclusions. If there is a false consequence then some of the premises have to be false. This is a foundation of hypotetico-deductive model of scientific inquiry. The traditional logical approach does not capture the dynamic aspects of actual human reasoning. In fact, one central aspect of hypotetico-deductive model is that it not dynamic but static.

However, logic is not merely a play with symbols but also epistemologically valuable. For example, Frege emphasized this aspect: "By insisting that the chains of inference do not have any gaps we succeed in bringing to light every axiom, assumption, hypothesis or whatever else you want to call it on which a proof rests; in this way we obtain a basis for judging the epistemological nature of the theorem." (*Grundgesetze der Arithmetik*, 1893) Similar emphasis can be found in the texts of Gödel and Turing. This emphasis is not necessarily connected to psychologism in logic. (See [19]) The attitude has been developed into a systematic approach in Hintikka's interrogative model of inquiry.

Unfortunately, as Priest denotes, humans do not follow the logical rules in actual reasoning. In fact, scientific argumentation does not follow the rules of logic either. This enforces us to search for better models of reasoning. The first model of reasoning to capture a philosophers' attention was the Socratic method of questioning or *elenchus* that Plato systematized into a practice of questioning games used in the Academy. In *Topica* Aristotle further developed a theory of interrogative argumentation. However, in the antique world the basic intention behind theories of interrogation games was pedagogic: to train students in philosophical and scientific reasoning ([12, 16]). Hintikka has developed a model of scientific reasoning that is "a framework for spelling out, explaining, and practicing good reasoning" ([15], 29). The model focuses especially on strategic aspects of inquiry process. The model is called interrogative model of inquiry.

To get a better grasp of what is going on in the interrogative model let us to consider Aristotle's ideas for a moment. He focused his attention on the logical nature of answers in questioning games. Some of the answers were necessitated by earlier ones. In modern terms, these answers were logically implied by the earlier answers. The group has a very special nature of its own. In fact, Aristotle's study of this group of answers became the first study of logic in history. This branch has developed as an autonomous field of study — deductive logic. Unfortunately the roots of the branch have been forgotten. There is also a set of answers that are not necessitated by earlier ones. This set of answers plays a special role in reasoning. In the interrogative model the idea is to give a strategic characterization of the information processing in reasoning ([16]).

3 Knowledge

The classical tripartite definition characterizes knowledge as well-justified, true belief. The purpose of definition is to define the meaning of the usual knowledge statement of the form 'A knows that p '. Moreover, the definition captures the so-called propositional knowledge.

To get a step further let us consider the notion of information. Let us say that S is a sentence (in a language L). The class of models of L determines a class of possibilities. The sentence S divides the class of models of L into two parts: into models in which S is true and into models in which S is false. This division is complete in the sense that each model makes the sentence true or false but not both. The sentence S excludes the class of model in which it is false in an obvious way. The semantical information of S is determined on the basis of this fact ([1, 14]).

In the same spirit, if an agent knows that p it means that the agent is entitled to behave as if p would be true. More generally the knowledge excludes some of the possible courses of events. The possible courses of events are divided into the two groups according whether the knowledge excludes it or not. However, this analysis connects knowledge to the notion of information and to the notion of action. This notion is natural in the framework of interrogative model of inquiry, but the traditional tripartite definition does not capture it. We will consider this a little bit closer later.

4 Interrogative model of inquiry

Interrogative model of inquiry is a general framework developed by Hintikka and his associates in the 1990's. The fundamental idea behind the interrogative model is to consider questioning and answering systematically as a method of knowledge seeking. A fundamental part of the model is the logic of questions and answers. However, questioning and answering is not abstract logical work but actual search for new knowledge. That implies that without epistemic notions (especially modern epistemic logic) one cannot formulate the model adequately ([16]).

In the simplest case the model is characterized by the following features: (i) There is only one oracle. (ii) The set of answers the oracle will provide remains constant throughout the inquiry. (iii) All of the oracle's answers are true, and known by the inquirer to be true. This simple case allows us to formulate several interesting general meta-results of the interrogative model. Moreover, there are several theoretically and practically interesting aspects of the model that can be seen from the simple formulation.

The condition (i) does not cause any principal restrictions. By suitable coding the model canbe applied to any case in which the number of oracles is enumerable. The condition (ii) does not give an adequate picture of all the cases. Innovation processes are practical example of the context in which actor can change the set of possible future answers. It is possible to formulate a model in which inquirer's action (or some other practical change in the environment) chances the set of available answers. For example the set of observable things depends on the observer's actions. (See [17]) The condition (iii) is not true in every case. There are lots of interesting practical applications in which we would like to relieve the condition. To do this we need one extra operator into the interrogative model. The operator is called bracketing operator which shows that the information given by the oracle is not certain. (See [16]) However, the simple model is worth of closer study. We can formulate some interesting results by using this simple model. It is possible to generalize these results to hold also in the generalized model ([16]).

In basic formulation of the interrogative model the argumentation is relative to a first-order language. The oracle gives truthful answers — the answers are truths about a particular model $\mathbb{M}$ of the given language. An interrogative argumentation proceeds relative to the model. Let C be a sentence of the language, and let T be a set of sentences of the language. We call T as the background knowledge of the inquirer. By simplicity we assume that T is true in the model. The inquirer is trying to derive C from T together with some auxiliary information about the model. When C is derivable from T in $\mathbb{M}$, we say that C is a model consequence of T in $\mathbb{M}$, and express this by

(1) $\mathbb{M} : T \vdash C$.

Clearly, if no questions are allowed, $\mathbb{M}$ becomes irrelevant and the relation of model consequence reduces to the usual relation of deductive consequence. Conversely, if there is no restriction in the questions asked and answers given by the oracle, the model consequence reduces to the notion of truth in the model $\mathbb{M}$. Already this shows the theoretical interest of the interrogative model. For simplicity we say that C is interrogatively inferred from T in $\mathbb{M}$ if (1) holds. So, the interrogative model studies interrogative reasoning ([11]).

All the additional information brought into the argument comes from an outer source of information. These are understood as answers to questions asked by the inquirer. There are no principal restrictions to the questions asked. This open possibility for additional information makes the argumentation dynamic and open-ended. In practice, the additional information comes via observations, experiments or some other kinds of sources. In such cases the additional information can be called empirical.

The interplay between logical and empirical information in the rational argumentation is of certain importance. Because of theoretical reasons they cannot be separated effectively in practice. The practical separation supposes that increase of empirical information and explication of the existing information would be effectively separated. However, it imposes extreme logical complexity to the reasoning to do this. This fact throws some dark clouds to traditional decision theories ([11, 14]).

To proceed on, let us inspect some properties of the model that show more obviously the newness of the model. Let us assume that the set Φ includes all the possible answers that the arguer may in principle get during the argumentation process. With help of the set Φ it is possible to close the process. It is possible to prove the following theorem, which shows that the open-ended and closed models are factually equivalent:

THEOREM 1 *(Completeness Theorem). If Φ is the set of all available answers and T the set of initial premises, then a conclusion C can be established in a model $\mathbb{M}$ by means of interrogative logic if and only if $(\Phi \cup T) \vdash C$.*

The theorem shows that the open-endedness does not cause logical or theoretical problems. However, it does not annihilate the essential difference between the two approaches. The notion of model completeness studied by Abraham Robinson 1953 shows this. Let T be a consistent theory expressed in a first-order language L, and let $\mathbb{M}$ be a model of T, i.e., $\mathbb{M} \models T$. The diagram $D(\mathbb{M})$ is the set of atomic and negated atomic sentences of the extended language $L(M)$, where M is the domain of the model $\mathbb{M}$, such that for all $S \in D(\mathbb{M}) : \mathbb{M} \models S$. We say that T is a model complete if for all $S \in L(M)$, i.e., the sentences may contain additional names for individuals, either $T \cup D(\mathbb{M}) \vdash S$ or $T \cup D(\mathbb{M}) \vdash \neg S$. So, the completeness theorem shows the close connection of the interrogative model to the model theoretical logic á la Abraham Robinson. This has several deep logical and philosophical implications ([10]).

The following theorem is of crucial philosophical importance. The analysis of the theorem shows several central ideas behind the interrogative model. The theorem is proved in [16].

THEOREM 2 *(Extended Interpolation Theorem). Assume that $T(P)$ is a consistent theory such that C can be interrogatively derived from the theory $T(P)$ in a model $\mathbb{M}$, i.e., $\mathbb{M} : T(P) \vdash C$; and not:$T(P) \vdash C$. Then there is an interpolant $I(a_1, ..., a_n)$ such that each non-logical constant of $I(a_1, ..., a_n)$ occurs in both T and C except for a finite number of individual constants $a_1, ..., a_n$. (i) $\mathbb{M}$: $T(P) \vdash I(a1, ..., an)$, (ii) $I(a1, ..., an) \vdash C$.*

The theorem shows the close interconnection of the interrogative model to the traditional logical (deductive) model. However, there is a deep logical and philosophical difference between the models. The analysis of the theorem, and the proof of the theorem, shows several interesting philosophical facts. The individual constants that occur in the theorem are answers to inquirer's questions. The number of the constants shows the empirical depth of the theorem (proof). This corresponds to the surface information defined by Hintikka ([9]).

However, if we compare the proof of the theorem and the corresponding theorem in logic we observe that the structures of the proofs are similar. Moreover, the questions correspond to existential instantiations in the logical proof. Fortunately it is possible to generalize the observation. The interrogative model shows that there is a close connection between deductive reasoning and general interrogation (empirical reasoning): from the strategic point of view they can be seen as two parallel processes. This can be formulated as a theorem — *the Strategy Theorem* ([16]).

The observation shows the importance of strategic aspects in a study of reasoning. Strategy theorem shows that the interrogative model is an effective method for the study. The strategy theorem opens a new path to the study of strategies of reasoning. The strategy theorem is a fundamental theorem of the interrogative model: the interrogative model is a strategic study of inquiry. This imposes that the interrogative model is a general approach to evaluate the research processes ([14]).

Before we will go on, let us formulate the following covering law theorem that generalizes the extended interpolation theorem. The theorem has a corresponding theorem in logic. However, the following theorem has a special task in the philosophy of science. It is a key theorem which opens new light into the theory of explanation. The theorem shows that the interrogative model can be developed as a proper formalized theory, but at the same the theory has a deep philosophical content. The theorem is proved [16].

THEOREM 3 *Covering law Theorem: Let* T *be a theory in the first-order language* L *and* $F = F[b_1, ..., b_n]$ *be a sentence such that* $F[x_1, ..., x_n]$ *is a formula of* L *and* $b1, ..., bn \in M$. *Let* $\mathbb{M} : T \vdash F$ *be established by means of a constant set of answers* A. *Let us assume that* A *is consistent and that* T *does not entail* $F[b_1, ..., b_n]$. *If other constants than* $b_1, ..., b_n$ *of* F *do not occur in* A *and if* $b_1, ..., b_n$ *do not occur in* T, *then there is a formula* $H[x_1, ..., x_n]$ *of* L *such that (i)* $T \vdash (x1)...(xn)(H[x1, ..., xn] \rightarrow F[x1, ..., xn])$*; (ii)* $A \vdash H[a1, ..., an]$, *none of the constants of* $F[x_1, ..., x_n]$ *occur in* $H[x_1, ..., x_n]$.

5 Interrogation

In the interrogative reasoning there are two kinds of steps: logical steps and interrogative steps. Logical steps are as usual truth preserving. Interrogative steps search new information into the argument. Answers are used in the reasoning as any other item of information. However, if the inquirer does not know where the new information comes from we are not dealing with rational reasoning but with mere guesswork. The information coming from the oracle is new in the logical sense of the word: the information cannot be deduced from the information the arguer has at the moment. The inquirer has to receive the information as a response to an earlier question asked from the oracle ([16]).

In general there is no guarantee that the information would be true. However, the structure of interrogative reasoning shows that if all the forthcoming information is true (and also known to be true) then the resulting conclusions will also be true (and known to be true). In this case we will get a logic of discovery in a strict logical sense. Moreover, if the answers are known to be true then the inquirer get new knowledge as a result of the inquiry. In this case the method used is reliable in a strict logical sense.

However, if it may happen that some of the answers would not be true, the situation will be changed. In this case, the inquirer has to evaluate the forthcoming information and some of the forthcoming information is reasonable to be marked uncertain. All the consequences that depend on this item of information also have to be marked uncertain. Of course, some uncertain item of information may become certain if some further information supports it. To handle this situation we have a rule of bracketing and unbracketing ([16]).

However, in this case we will not have any more a logic of discovery. The idea is that the inquirer searches for knowledge in uncertainty. The inquirer has to have a strategic approach to the process. He or she has all the time to strategically evaluate all the steps. Hence, we have a logic of justification. The bracketing and unbracketing rules show the interconnection between discovery and justification. There is a close strategic link between the two. However, we can see that the logic of justification is strategically more complex than the mere logic of discovery ([14]).

In the above discussion we have discussed the questions in an interrogative process in one specific sense, namely request of additional information. In a sense, this is a very central meaning in the interrogative model. Inquiry is a goal-directed process. The final goal can be expressed via questions. However, the structure of the interrogative model separates the two types of questions. The questions that express the final goal are called principal questions and questions that request for additional information are called operational questions.

The inquirer consults one source of information or another. The role of the information is to add new information into the inquiry process. The information directs the inquiry process in an obvious way. However, this implies that the result of inquiry is dependent on the source of information. The inquiry process may end to this or to that result depending on the source of information used. This source dependency is a structural property of the inquiry process. That is, it is a strategic principle that is built up to the structure of the interrogative model ([14]).

Our discussion has been discussion about information, not about knowledge. The reason has been built into the structure of interrogative model. The model does not presuppose that the inquirer knows or believes the forthcoming information. In some special cases the inquirer may even doubt the truth of the information. However, all the time the discussion has been about the information achieved during the process. Moreover, the end product of the inquiry may still be mere information, that is, there are no general guarantees that the inquiry process would end up to knowledge. It is possible to study the structure of inquiry processes and find out whether the process is or is not reliable. This is a strategic problem of the whole interrogative model ([19]).

6 Formal methodology

In the interrogative model strategic aspects of the questioning process are emphasized. However, it is possible to characterize them from a different point of view. By classifying different kinds of questioning settings we can at the same give different kinds of methodological problems. They correspond to Kelly's classification of methodological problems.

Usually, in methodology textbooks of empirical inquiry there is a chapter that considers reliability and validity of the inquiry. Clearly, this is a problem of methodological relevance. However, the basic idea is to discuss the reliability of *this specific* inquiry (in a specific context) only. Usually, the discussion is solely of rhetorical value. There is no theoretical or methodological discussion about the general setting of the inquiry. The language is purely descriptive. The reason for this is that the structure of the research problem discussed is *fixed* in an obvious way. This gives us the *lowest level of methodological problems* according to [17]. At this level methods are determined by a theory, that is, questions and the questioning strategy is determined by the experimental setting. At this level the questioning strategies are closed. The methodological discussion just shows that the required standards are fulfilled.

To bring about a methodologically more interesting discussion there have to be some factors that can behave as variables. For example, in statistics there are results — for example, the law of large numbers — that show that a certain method gives a reliable result for a certain *kind* of evidence. This implies that the inquirer has to justify the types of operational questions he or she uses during the inquiry process. The type of operational questions determines the sequences of additional information in an obvious way. Such argumentation gives general methodological information about the inquiry strategy and hence also about the reliability of the inquiry. This is Kelly's *second level of methodological problems.* At this level we have results that can be applied in several different fields of science.

In philosophy of science the question of the *scope* of a given method(s) plays, or should play, a central role. For example, the study of the relationship between quantitative and qualitative inquiry can be seen as an example of this kind of question. A problem encompasses the possible situations (problem settings) into which a method can (or cannot) be applied. According to the interrogative model this concerns the logic of principal questions of the interrogative model. This is Kelly's *third level of methodological problems.* At this level it is possible to distinguish different fields of science on a methodological basis. For example, von Wright ([25]) distinguished humanities and natural sciences in just this sense.

It is possible to look at the scientific inquiry as a problem solving activity ([18] and [22]). However, it is not clear enough what this means: A scientist starts with a problem and searches for a solution. This opens some problems: How to solve it? Is the problem solvable with the method used? At this level, the inquirer may search, or compare, for methods to solve the problem. In the interrogative model the inquirer has — or should have — a questioning strategy (strategy theorem). This level is a study of questioning strategies. That specifies Kelly's *fourth level of methodological problems*.

However, it is possible to take one more step in our abstraction process. This can be done by considering the third and fourth levels together, which allows us to consider problem solving in general. This gives us Kelly's *fifth level of methodological problems*. Examples of problems of this level are, for example, the possibility of logic of discovery, logic of justification, and the theory of explanation. At this level interrogative model is a general theory of reasoning (different meta-theorems). At this level the general theory of interrogative processes is the general theory of problem solving ([14], [16], [3]).

The levels of methodological problems imply to a different kind of formality. Methodological problems of the lowest level are connected directly to practical problems in scientific inquiry. At that level it is not possible to formulate general methodological problems. Hence, we said that the problems an this level are mainly of rhetorical value. To have more interesting problems methodologically we have to make the problem setting more formal — less dependent on the specific context and specific topic. The hierarchy is built accordingly: at the fifth level there is not direct connection to any specialities of the specific local details. The fifth level formulates a general theory of problem solving — the formal methodology we were searching. Of course, this can be formalized by using a formal language. However, the formalization is neither needed nor supposed. So, in formal methodology formalism is neither a necessary nor sufficient condition ([14]).

Methodology should allow us to evaluate the rationality of the research process. To do this, the process should have both a descriptive and a normative component. It is connected to the existing scientific tradition, but cannot be just documentation of an actual inquiry. To evaluate it also has to be normative: it has to give some standards to the evaluation. In methodology — at least in formal methodology — it is possible to characterize the reliability of methods in different possible cases. As we have seen the interrogative model is an answer to the request for this kind of methodology ([14], [6], [17]).

In the classification notions like method, problem, solution etc. came up. These are central methodological notions that require explication. In the explication it is natural to use formal methods. In this task it is possible to use computational methods, like Kelly [17], Hendricks [6], Mutanen [19], or logical methods, like Hintikka, Halonen, and Mutanen [16], Hintikka [14]. Independent of which formal methods are used, the formal methods must do some philosophical work. That is, allow us to reflect the philosophical framework in which the problem takes place at a conceptual, theoretical, and methodological level. The formal methodology formulated above can be used as a framework in stimulating cooperation between different fields of sciences.

Formalism as such is not, or should not, be the final goal of formal methodology. Formal methods are tools that are actively used in the study. The final goal is to give a better understanding of the philosophically central notions and the interconnection of such notions. Formal methodology is still philosophy, and it is closely connected to other philosophical approaches ([7]).

References

[1] *Bar-Hillel Y. and Carnap R.* Semantic Information // British Journal for the Philosophy of Science 4, 1953. P. 147–157.

[2] *Burgin M.* Three aspects of Super-recursive Algorithms and Hypercomputation or Finding Black Swans // Theoretical Computer Science 317, 2004. P. 1–11.

[3] *Engeström Y.* Activity Theory and Individual and Social Transformation, in Engeström, Y., R. Miettinen, and R-L. Punamäki (eds.) // Perspectives on Activity Theory, Cambridge University Press, 1999.

[4] *Føllesdal D.* // Hendricks and Symons, 2005.

[5] *Haack S.* // Hendricks and Symons, 2005.

[6] *Hendricks V. F.*The Convergence of Scientific Knowledge — a View from the Limit // Kluwer Academic Publishers, 2001.

[7] *Hendricks V. F. and Symons J.* Formal Philosophy // Automatic Press, 2005.

[8] *Hintikka J.* Models for Modalities // D. Reidel Publishing Company, 1969.

[9] *Hintikka J.* Logic,Language-Games and Information : Kantian Themes in the Philosophy of Logic // Clarendon Press, 1973.

[10] *Hintikka J.* The logic of science as a model-oriented logic. In P. Asquith and P. Kitcher (eds.) // PSA, vol. 1. East Lansing, Michigan: Philosophy of Science Association, 1984. P. 177–185.

[11] *Hintikka J.* What Is the Logic of Experimental Inquiry? // Synthese 74, 1988. P. 173–188.

[12] *Hintikka J.* The Principles of Mathematics Revisited // Cambridge University Press, 1996.

[13] *Hintikka J.* // Hendricks and Symons, 2005.

[14] *Hintikka J.* Socratic Epistemology // Cambridge University Press, 2007.

[15] *Hintikka J. and Bachman J.* What If...? Toward Excellence in Reasoning // Mayfield Publishing Company, 1991.

[16] *Hintikka J., Halonen I. and Mutanen A.* Interrogative Logic as a General Theory of Reasoning in R.H. Johnson and J. Woods (eds.) // Handbook of Practical Reasoning, Kluwer Academic, 2002.

[17] *Kelly K.* The Logic of Reliable Inquiry // Oxford University Press, 1996.

[18] *Laudan L.* Progress and its Problems: Toward a Theory of Scientific Growth // Berkeley University of Califormia Press, 1977.

[19] *Mutanen A.* From Computation to Truth via Learning // Helsinki, 2004.

[20] *Mutanen A.* Methodology of Engineering Science as a Combination of Epistemic, Ethical and Aesthetic Aspects, in Hyldgaard, Steen (ed.) // Philosophy in Engineering, Academica, 2007.

[21] *Niiniluoto I.* The Aim and Structure of Applied Research // Erkenntnis 38, 1993. P. 1–21.

[22] *Niiniluoto I.*Truthlikeness // D. Reidel, 1987.

[23] *Priest G.* Logic // The Newsletterfor Philosophical Logic and Its Applications, Springer, 2007.

[24] *Sandu G.* // Hendricks and Symons, 2005.

[25] *von Wright G. H.* Explanation and Understanding, Routledge and K. Paul, 1971.

Наши авторы

АНИСОВ
Александр Михайлович — доктор философских наук, профессор. Ведущий научный сотрудник сектора логики Института философии РАН.

БИРЮКОВ
Борис Владимирович — доктор философских наук, профессор. Заведующий межвузовским центром исследования чтения и информационной культуры (при МГЛУ).

ВАСЮКОВ
Владимир Леонидович — доктор философских наук, заведующий кафедрой истории и философии науки Института философии РАН.

ГОРБУНОВ
Илья Анатольевич — кандидат физико-математических наук, ассистент кафедры алгебры и математической логики Тверского государственного университета.

ДЕВЯТКИН
Леонид Юрьевич — и.о. научного сотрудника сектора логики ИФ РАН.

ЗАЙЦЕВ
Дмитрий Владимирович — кандидат философских наук, доцент кафедры логики философского факультета МГУ им. М.В. Ломоносова.

КОМЕНДАНТСКАЯ
Екатерина Юрьевна — научный сотрудник, Факультет Компьютерных наук, Университет Ст. Эндрюс, Великобритания.

ЛЕДНИКОВ
Евгений Евгеньевич — доктор философских наук, профессор кафедры философии Московской академии тонкой химической технологии им. М.В. Ломоносова.

МАНИН Юрий Иванович	— член-корреспондент РАН, профессор Северо-Западного университета, США.
МАРКИН Владимир Ильич	— доктор философских наук, профессор, заведующий кафедрой логики философского факультета МГУ имени М.В. Ломоносова.
МУТАНЕН Арто	— научный сотрудник, Технологический университет г. Лаппеенранта, Финляндия.
НЕПЕЙВОДА Николай Николаевич	— доктор физико-математических наук, профессор, зав. кафедрой теории и методологии информатики Удмуртского государственного университета.
ПАВЛОВ Сергей Афанасьевич	— кандидат философских наук, старший научный сотрудник сектора логики ИФ РАН.
ПОПОВ Владимир Михайлович	— кандидат философских наук, доцент кафедры логики философского факультета МГУ им. М.В. Ломоносова.
СТЕШЕНКО Николай Иванович	— кандидат философских наук, доцент кафедры философии и методологии науки факультета философии и культурологии Южного федерального университета.
ТОМОВА Наталья Евгеньевна	— аспирант кафедры логики философского факультета МГУ им. М.В. Ломоносова.
ХАХАНЯН Валерий Христофорович	— кандидат физико-математических наук, доктор философских наук (логика), профессор Института экономики и финансов, кафедры «Прикладная математика-2».
ШАЛАК Владимир Иванович	— кандидат философских наук, старший научный сотрудник сектора логики Института философии РАН.

Содержание

Table of contents

Научное издание

Логические исследования

Вып. 15

Утверждено к печати
Ученым советом
Института философии РАН

Компьютерный набор выполнен
в Институте философии РАН

Компьютерная верстка *Н.Е. Томова*

Зав. редакцией *Г.И. Чертова*
Редактор *Е.А. Жукова*
Художественный редактор *Т.В. Болотина*

Подписано к печати 30.11.2009
Формат 60 × 90 1/16. Гарнитура Таймс
Печать офсетная
Усл.печ.л. 20,0. Усл.кр.-отт. 20,3. Уч.-изд.л. 20,0
Тип. зак. 4087

Издательство "Наука"
117997, Москва, Профсоюзная ул., 90

E-mail: secret@naukaran.ru
www.naukaran.ru

Отпечатано с готовых диапозитивов
в ГУП "Типография "Наука"
199034, Санкт-Петербург, 9 линия, 12