РОССИЙСКАЯ АКАДЕМИЯ НАУК

ИНСТИТУТ ФИЛОСОФИИ

ЛОГИЧЕСКИЕ ИССЛЕДОВАНИЯ

Выпуск 16

Центр гуманитарных инициатив
Москва—Санкт-Петербург
2010

УДК 16
ББК 87.4
Л69

Логические исследования / [отв. ред. А.С. Карпенко]; Ин-т философии РАН. М.-СПб: ЦГИ, 2010
Вып. 16. — 2010. — 303с. — ISBN 978-5-98712-048-4 (в пер.).

В данный выпуск «Логических исследований» включены наиболее важные результаты, полученные в различных областях логики за последнее время. Обсуждаются такие фундаментальные вопросы как основания логики, ее универсальность, поиск вывода и логическая дедукция, перспективы прикладного конструктивизма, идентичность математических объектов. Продолжены исследования по истории отечественной логики.

Сборник предназначен логикам, философам, математикам и всем тем, кто интересуется различными приложениями логики.

Подписной индекс в каталоге «Пресса России» 42046.
2-е полугодие 2010 г.

Logical Investigations. — Vol. 16. — M.—SPb: C.G.I, 2010. — 303 p. — ISBN 978-5-98712-048-4.

The present volume includes the most important results recently obtained in a number of research areas of logic. The fundamental questions are discussed, such as the foundations of logic, its universality, inference search and logical derivation, the prospects of the applied constructivism, the identity of mathematical objects. The research in the area of the history of Russian logic is continued.

The volume is of interest to logicians, philosophers, mathematicians and all those who have interest in applications of logic.

ISBN 978-5-98712-048-4

Логические модальности как арифметичекие функции

Н. Л. Архиереев

abstract. In the paper some new approach to the theory of logical modalities is considered. This approach presupposes construction of basic logical notions of logical necessity, logical contingency,logical impossibility by means of Restricted and Relatively Restricted Sets of State-Descriptions(RSSD and RRSSD respectively), which can be also treated as ordered sets of possible truth-values for variables. Recalculation of RSSD and RRSSD for each particular formula is provided by arithmetical functions of special type.

Ключевые слова: логическая необходимость, возможность, случайность, возможный мир, модельная структура, ограниченное/относительно ограниченное множество описаний состояния, арифметическая фукция

1 Неформальные замечания

При построении семантик модальных исчислений в современной логике в качестве исходных обычно используются понятия модельной структуры, возможного мира и отношения достижимости между мирами. Несмотря на общепринятость данных понятий, их смысл во многом остается неясным. Так, иногда под возможным миром подразумевают мыслимое (возможное, действительное или необходимое) положение дел, состояние наших знаний об окружающем мире в определенный момент времени и т.д. Иногда предлагается вообще не конкретизировать понятие возможного мира, рассматривая его просто как абстрактную «точку соотнесения», выбор которой в качестве исходной («выделенной») в семантическом анализе модальных понятий определяется задачами данного анализа или же особенностями отношения достижимости в соответствующей системе. При этом «размножение» самих систем, называемых модальными, осуществляется в основном сугубо формальными методами, например, наложением дополнительных, зачастую весьма экзотических ограничений на отношение достижимости между мирами. Указанная ситуация кажется тем более странной, поскольку метод «возможных миров» широко используется не только для уточнения смысла алетических модальных понятий, но и при построении семантик для систем с временными, эпистемическими, деонтическими модальностями, при истолковании ряда интуиционистских и релевантных систем. Поэтому проблема построения семантик модальных исчислений, не использующих понятий «модельная структура», «возможный мир», «отношение достижимости», представляет интерес не только для модальной логики самой по себе, но и для всех логических систем, в основе которых лежат определенные модификации названных понятий.

Попытки содержательно истолковать указанные понятия предпринимались неоднократно. Так, Е.К. Войшвилло писал о семантике возможных миров для S5: «…Мир β естественно трактовать как множество фактов, относящихся к индивидам некоторого непустого множества с определенными на нем свойствами и отношениями… В языке это множество фактов представляет обычное классическое карнаповское описание состояния (о.с.)… описания мира β можно представить как $\Gamma \cup \alpha$, где α есть классическое о.с., а Г — множество… законов и, возможно,… некоторых их следствий нефактического характера в языках рассматриваемых систем…

Существенно, что Г ограничивает множество возможных различных фактических состояний мира. Так, при наличии закона $\forall x(A(x) \to B(x))$ исключаются о.с. α, в которых имеются $A(a_i)$ и одновременно $\neg B(a_i)$ для любых индивидов a_i. Если М есть множество всех возможных классических о.с., то Г выделяет из него подмножество M_Γ (которое не является пустым в в силу непротиворечивости Г). Это последнее представляет собой модельную структуру S5, если учесть, что отношение достижимости R имеет место для любых $a_i, a_j \in M_\Gamma$» [2, с. 77].

В свою очередь из этого вытекает, что «функция оценки переменных в мире α определяется самим этим миром: $v(p, \alpha) = T \Leftrightarrow p \in \alpha$». Следовательно, «…Модальное высказывание…, отнесенное к некоторому миру β, детерминировано (если оно истинно) или недетерминировано самим этим миром» [2, с. 77]. «Суждение $\Box A$ истинно в некотором мире β не потому, что A истинно во всех возможных мирах, достижимых из β, а наоборот, *последнее имеет место потому, что необходимость ситуации A детерминирована в самом β*» [2, с. 80]. (Курсив мой — Н.А.)

Наличие сложных итерированных модальностей вида $\Diamond\Box$, $\Box\Diamond\Box$ в более «богатой» системе S4 предполагает, по мнению Е.К. Войшвилло, «возможность каких-то изменений Г, по крайней мере за счет появления каких-то следствий нефактического характера из имеющихся законов» [2, с. 78]. (Опровержимость формулы $\Diamond A \supset \Box\Diamond A$ в S4 подразумевает, что при $\neg\Box A$ (т.е. $\Diamond\neg A$) в исходном α может оказаться $\Box A$ в некотором β, достижимом из него.) Кроме того, отношение достижимости в S4 является, как известно, рефлексивным и транзитивным, но уже не симметричным, т.е. в S4-модельной структуре каждый мир не достижим из каждого, поэтому существенным оказывается понятие выделенного (действительного) мира. Тем не менее, «вполне возможен вариант семантической теории S4, в котором понятие модельной структуры можно исключить, как и в S5» [2, с. 78].

Основные принципы построения семантик исчислений S5, S4, M, в которых не используются понятия модельной структуры, возможного мира, отношения достижимости между мирами, а сами модальные понятия рассматриваются как логические, были предложены Ю.В. Ивлевым [3, с. 168-190]. При данном подходе каждое элементарное (атомарное) высказывание последовательно рассматривается как логически истинное (необходимое), логически недетерминированное (случайное), логически ложное (невозможное) высказывание. Далее, если два и более элементарных (атомарных) высказывания истолковываются одновременно как случайные, каждая их конъюнкция последовательно рассматривается как случайное или невозможное высказывание (поскольку конъюнкция случайных высказываний может оказаться логически ложной: «31 декабря 2012 года будет всемирный банковский кризис и 31 декабря 2012 года всемирного банковского кризиса не будет»). В результате таких интерпретаций — ограничений на допустимые истинностные значения элементарных высказываний — из исходного множества о.с. для формулы могут исключаться некоторые о.с. Так, если переменная рассматривается как обозначающая невозможное (логически ложное) высказывание, то из множества всех возможных о.с. для формулы, содержащей эту переменную, исключаются все о.с., в которые она входит *без отрицания*. В итоге на базе исходного множества о.с. для формулы создаются особые конструкции — ограниченные и относительно ограниченные множества описаний состояний (ОМОСы и ОГОСЫ соответственно), выполняющие роль модельных структур семантик возможных миров [3, с.169].

Дальнейшее изложение посвящено построению семантик указанного типа для систем S5, S4 К.И. Льюиса

2 Трехзначная не–истинностно–функциональная семантика для S5

Опишем семантику интересующего нас вида для пропозиционального фрагмента S5. Пусть язык содержит исходные символы $\neg, \supset, \Box$ (оператор логической необходимости). Понятие формулы и другие логические связки определяются обычным образом. Операторы логической возможности и случайности определяются, соответственно, как $\Diamond A = \neg\Box\neg A$, $\nabla A = \Diamond A \wedge \Diamond\neg A$.

Как указывает Ю.В. Ивлев, основой для ограничения возможных истинностных значений переменных формулы с модальными операторами являются элементарные содержательные соображения.

В качестве примера рассмотрим формулу $\Box q \supset \Diamond(p \supset \Box q)$ и все возможные о.с. для нее: $\alpha_1 = \{p, q\}$, $\alpha_2 = \{p, \neg q\}$, $\alpha_3 = \{\neg p, q\}$, $\alpha_4 = \{\neg p, \neg q\}$.

В описаниях состояний α_2, α_4 ложным является элементарное высказывание q, значит, и высказывание $\Box q$, поскольку высказывание, принимающее значение f («ложь») при некоторой интерпретации, не может считаться логически истинным (необходимым). Значит, в этих о.с. формула $\Box q \supset \Diamond(p \supset \Box q)$ принимает значение t («истина») независимо от значения p. В о.с. α_3 переменная p толкуется как обозачающая ложное высказывание, поэтому в этом о.с. формула $(p \supset \Box q)$ принимает значение t независимо от значений q и $\Box q$. (Иными словами, если p в данной формуле рассматривается как обозначающая невозможное высказывание, то исходная формула оказывается истинной при любом значении q.) Наконец, в о.с. α_1 истинными оказываются оба элементарных высказывания p и q. Что можно сказать в этом случае о значении исходной формулы? Необходимо рассмотреть 4 возможности: 1) p и q обозначают необходимые (логически истинные) высказывания; допустимым относительно такой интерпретации возможных значений переменных будет одноэлементное множество о.с. $\{\{p, q\}\}$; 2) p обозначает необходимое (логически истинное) высказывание, q — логически случайное; такому ограничению допустимых значений переменных будет соответствовать двухэлементное множество о.с. $\{\{p, q\}, \{p, \neg q\}\}$; 3) p обозначает случайное, q — необходимое высказывание;такой интерпретации будет соответствовать набор о.с. $\{\{p, q\}, \{\neg p, q\}\}$; 4) обе переменные обозначают логически недетерминированные высказывания; возможными наряду с α_1 оказываются все остальные о.с. для формулы.

Последний случай требует некоторых дополнительных ограничений на возможные сочетания высказываний p и q, поскольку, как указывалось выше, конъюнкция двух и более случайных высказываний сама может оказаться невозможным высказыванием. В подобных случаях необходимо учитывать все допустимые варианты образования таких «невозможных» конъюнкций. Какие же варианты будут допустимыми? Очевидно, что «детерминистская» интерпретация возможных значений некоторой переменной (т.е., скажем, $\Box p \vee \neg\Diamond p$) может задаваться единичным о.с., точнее, единичным множеством о.с., которое выполняет условия соответствующей интерпретации. Но чтобы при помощи последовательности (множества) о.с. корректно представить ограничение ∇p, соответствующее множество должно содержать не менее двух о.с., так как переменная p в этом множестве должна хотя бы однажды менять значение. Таким образом, допустимыми будем считать все такие варианты образования «невозможных» конъюнкций двух и более случайных высказываний, при которых сответствующее множество о.с. содержит «от» 2^1 «до» 2^n о.с., а каждая переменная в этом множестве по крайней мере однажды меняет значение.

Будем вслед за Ю.В. Ивлевым называть ОМОСом двухэлементное множество $\langle \text{ОГ}; W^{\shortmid} \rangle$, где ОГ — интерпретация переменных, входящих в формулу, а W' — соответствующее такой интерпретации множество о.с.; $W' \in 2^{2^n}$, где 2^n есть исходное множество о.с. для формулы с n переменными. Далее, если ОГ некоторого ОМОСа содержит две или более интерпретации вида $\triangledown p$, то на его основе строится множество всех допустимых (в указанном смысле) дополнительных ограничений на образование конъюнкций случайных высказываний, входящих в формулу. В результате по каждому такому ОМОСу мы получаем некоторое множество дополнительно ограниченных множеств о.с. (подомосов) вида $\langle$ОГ$'$; $W''\rangle$, где ОГ$'$ — полное ограничение указанной структуры, а W'' — соответствующее ему множество о.с. ($W'' \subseteq W'$). Тогда для вышеприведенной формулы возможными окажутся следующие истолкования ее переменных:

1. $\langle\{\Box p, \Box q\}; \{\{p, q\}\}\rangle$;
2. $\langle\{\Box p, \neg\Diamond q\}; \{\{p, \neg q\}\}\rangle$;
3. $\langle\{\neg\Diamond p, \Box q\}; \{\{\neg p, q\}\}\rangle$;
4. $\langle\{\neg\Diamond p, \neg\Diamond q\}; \{\{\neg p, \neg q\}\}\rangle$;
5. $\langle\{\Box p, \nabla q\}; \{\{p, q\}, \{p, \neg q\}\}\rangle$;
6. $\langle\{\neg\Diamond p, \nabla q\}; \{\{\neg p, q\}, \{\neg p, \neg q\}\}\rangle$;
7. $\langle\{\nabla p, \Box q\}; \{\{p, q\}, \{\neg p, q\}\}\rangle$;
8. $\langle\{\nabla p, \neg\Diamond q\}; \{\{p, \neg q\}, \{\neg p, \neg q\}\}\rangle$;
9. $\langle\{\nabla p, \nabla q\}; \{\{p, q\}, \{p, \neg q\}, \{\neg p, q\}\{\neg p, \neg q\}\}\rangle$.

Для формулы с двумя переменными возможными оказались 9 ОМОСов. Поскольку каждая переменная последовательно интерпретируется как необходимая, невозможная либо случайная, в общем случае число ОМОСов для формулы с n различными переменными определяется выражением 3^n.

Девятый ОМОС содержит 2 ограничения вида ∇, поэтому на его основе образуем следующие подомосы:

1. $\langle\{\nabla p, \nabla q, \Diamond\{p \wedge q\}, \Diamond\{p \wedge \neg q\}, \Diamond\{\neg p \wedge q\}, \Diamond\{\neg p \wedge \neg q\}\}$; $\{\{p, q\}, \{p, \neg q\}, \{\neg p, q\}, \{\neg p, \neg q\}\}\rangle$;

2. $\langle\{\nabla p, \nabla q, \neg\Diamond\{p \wedge q\}, \Diamond\{p \wedge \neg q\}, \Diamond\{\neg p \wedge q\}, \Diamond\{\neg p \wedge \neg q\}\};$ $\{\{p, \neg q\}, \{\neg p, q\}, \{\neg p, \neg q\}\}\rangle;$

3. $\langle\{\nabla p, \nabla q, \Diamond\{p \wedge q\}, \neg\Diamond\{p \wedge \neg q\}, \Diamond\{\neg p \wedge q\}, \Diamond\{\neg p \wedge \neg q\}\};$ $\{\{p, q\}, \{\neg p, q\}, \{\neg p, \neg q\}\}\rangle;$

4. $\langle\{\nabla p, \nabla q, \Diamond\{p \wedge q\}, \Diamond\{p \wedge \neg q\}, \neg\Diamond\{\neg p \wedge q\}, \Diamond\{\neg p \wedge \neg q\}\};$ $\{\{p, q\}, \{p, \neg q\}, \{\neg p, \neg q\}\}\rangle;$

5. $\langle\{\nabla p, \nabla q, \Diamond\{p \wedge q\}, \Diamond\{p \wedge \neg q\}, \Diamond\{\neg p \wedge q\}, \neg\Diamond\{\neg p \wedge \neg q\}\};$ $\{\{p, q\}, \{p, \neg q\}, \{\neg p, q\}\}\rangle;$

6. $\langle\{\nabla p, \nabla q, \neg\Diamond\{p \wedge q\}, \Diamond\{p \wedge \neg q\}, \Diamond\{\neg p \wedge q\}, \neg\Diamond\{\neg p \wedge \neg q\}\};$ $\{\{p, \neg q\}, \{\neg p, q\}\}\rangle;$

7. $\langle\{\nabla p, \nabla q, \Diamond\{p \wedge q\}, \neg\Diamond\{p \wedge \neg q\}, \neg\Diamond\{\neg p \wedge q\}, \Diamond\{\neg p \wedge \neg q\}\};$ $\{\{p, q\}, \{\neg p, \neg q\}\}\rangle.$

Нетрудно убедиться, что иных допустимых ограничений на конъюнкции двух случайных переменных не существует. Таким образом, число всех возможных подомосов для формулы с числом переменных $n = 2$ определяется выражением $2^{2^n} - 3^n$. Однако, при $n > 2$ формула для определения числа допустимых подомосов выглядит не столь элементарно. Чтобы обобщить ее для произвольных значений n, рассмотрим еще раз число ОМОСов 3^n.

При больших значениях n это число становится весьма значительным, поэтому хотелось бы иметь способ описания аналогов модельных структур более эффективный, чем простое поэлементное перечисление множества 3^n. Для этого данное число нужно представить в виде эквивалентной ему арифметической функции:

$$C_n^0 \times 2^n + C_n^1 \times 2^{n-1} + C_n^2 \times 2^{n-2} + \ldots + C_n^{n-1} \times 2^1 + C_n^n \times 2^0 = 3^n,$$

где C_n^i есть биномиальный коэффициент, n — число переменных в формуле.

Каждое слагаемое в данной сумме описывает некоторый класс эквивалентности — группу ограниченных множеств о.с. с одинаковым числом переменных, проинтерпретированных в качестве случайных. Например, первое слагаемое описывает число множеств о.с., в которых все переменные истолковываются как имеющие свои значения по необходимости, второе слагаемое представляет число ОМОСов, в каждом из которых в качестве случайной истолковывается ровно одна переменная и т.д. Проиллюстрировать сказанное удобно при помощи таблицы:

Число ограничений типа ∇ в ОГ' каждого ОМОСа группы	Число ОМОСов в группе	Число о.с. в W'' каждого ОМОСа группы
0	$C_n^0 \times 2^n$	2^0
1	$C_n^1 \times 2^{n-1}$	2^1
$0 < k < n$	$C_n^k \times 2^{n-k}$	2^k
$n - 1$	$C_n^{n-1} \times 2^1$	2^{n-1}
n	$C_n^n \times 2^0$	2^n

При определении числа корректных «кластеров» (дополнительно ограниченных множеств о.с.) для $n = 1$, $n = 2$ можно было исходить из следующих элементарных соображений: все переменные в таких множествах истолковываются как случайные, поэтому для определения числа корректных кластеров достаточно из общего числа 2^{2^n} вычесть число множеств с детерминистскими интерпретациями, т.е. 3^n. Для формул с данными значениями n получали, соответственно, 1 и 7. Однако, для исчерпывающего определения числа корректных кластеров при бо́льших значениях n необходимо существенным образом использовать представление числа 3^n в виде эквивалентной ему арифметической функции. В качестве примера рассмотрим подробно разложение на степенные слагаемые указанного вида числа 3^n для $n = 3$, $n = 4$, $n = 5$.

Пусть $n = 3$; разбиение числа 3^n примет вид:

$$C_3^0 \times 2^3 + C_3^1 \times 2^2 + C_3^2 \times 2^1 + C_3^3 \times 2^0 = 27.$$

Третье слагаемое этой суммы описывает число ограниченных множеств о.с. с двумя случайными переменными. *Каждое* такое множество порождает набор дополнительных ограничений на образование конъюнкций случайных высказываний. Как мы выяснили, при $n = 2$ таких кластеров (подомосов) будет 7. То есть *каждый* элемент из группы $C_3^2 \times 2^1$ порождает 7 дополнительных кластеров, поэтому число допустимых ограничений на образование конъюнкций трех случайных высказываний будет определяться выражением:

$$2^{2^3} - [C_3^0 \times 2^3 + C_3^1 \times 2^2 + C_3^2 \times 2^1 \times 7 + C_3^3 \times 2^0] = 256 - 63 = 193.$$

Пусть $n = 4$; разбиение числа 3^n примет вид:

$C_4^0 \times 2^4 + C_4^1 \times 2^3 + C_4^2 \times 2^2 + C_4^3 \times 2^1 + C_4^4 \times 2^0 = 81.$

Каждый из элементов третьего и четвертого слагаемых данной суммы будет порождать, соответственно, по 7 и 193 дополнительных кластеров, следовательно, число допустимых ограничений на образование конъюнкций четырех случайных высказываний будет определяться выражением:

$2^{2^4} - [C_4^0 \times 2^4 + C_4^1 \times 2^3 + C_4^2 \times 2^2 \times 7 + C_4^3 \times 2^1 \times 193 + C_4^4 \times 2^0] = 65536 - 1761 = 63775.$

Соответственно, число допустимых ограничений на образование конъюнкций пяти случайных переменных буде определяться выражением

$2^{2^5} - [C_5^0 \times 2^5 + C_5^1 \times 2^4 + C_5^2 \times 2^3 \times 7 + C_5^3 \times 2^2 \times 193 + C_5^4 \times 2^1 \times 63775 + C_5^5 \times 2^0] = 4.294.967.296 - 646.143 = 4.294.321.153.$

Если теперь символом $N(k)$ обозначить число допустимых ограничений на образование конъюнкций k случайных переменных $(2 \leq k \leq n-1)$, то обобщение полученного алгоритма для формул с произвольным конечным числом переменных n примет вид:

$2^{2^n} - [C_n^0 \times 2^n + C_n^1 \times 2^{n-1} + C_n^2 \times 2^{n-2} \times N(2) + \ldots + C_n^k \times 2^{n-k} \times N(k) + \ldots + C_n^{n-1} \times 2^1 \times N(n-1) + C_n^n \times 2^0].$

(Отдельно отметим, что первоначально данный алгоритм формулировался нами в виде последовательности вложенных разностных коэффициентов, что значительно его усложняло. Выяснилось, что в связи с проблемой организации пересчета модельных схем традиционной силлогистики формулировкой схожей закономерности занимался В.А. Бочаров. Приведенный выше алгоритм существенно использует результаты В.А. Бочарова, кроме того, как оказалось, число допустимых модельных схем традиционной силлогистики с n различными непустыми и неуниверсальными терминами совпадает с числом допустимых подомосов для формулы с n переменными, а использованное нами представление числа 3^n в виде арифметической функции удачно описывает число модельных схем аристотелевой силлогистики с n различными терминами. Более подробное исследование этого вопроса было проведено в отдельной работе.)

В предложенной семантике формулам следующим образом приписываются значения:

1. Пропозициональная переменная обычным образом принимает значение t или f в о.с. $\alpha \in W^{\prime}(\alpha \in W^{\prime\prime})$ в зависимости от того, входит ли в α она сама или ее отрицание.

2. Формула $\neg B$ принимает значение t в α, если и только если (е.т.е.) формула B принимает значение f в α.

3. Формула $A \supset B$ принимает значение t в α, е.т.е формула А принимает значение f в α или формула В принимает значение t в α.

4. Формула $\Box$В истинна в $\langle \text{ОГ}^{\prime}; W^{\prime\prime}\rangle$ (или в $\langle \text{ОГ}^{\prime}; W^{\prime\prime}\rangle$), е.т.е. В общезначима в $W^{\prime}$ (в $W^{\prime\prime}$), т.е. истинна в каждом о.с. из соответствующего множества.

5. Формула $\Diamond$В истинна в $\langle \text{ОГ}^{\prime}; W^{\prime\prime}\rangle$ (или в $\langle \text{ОГ}^{\prime}; W^{\prime\prime}\rangle$), е.т.е. В выполнима в $W^{\prime}$ (в $W^{\prime\prime}$), т.е. истинна в некотором (хотя бы одном) о.с. из соответствующего множества.

   (Фактически, при решении вопроса об истинности или ложности формул вида $\Box$В, $\Diamond$В в $\langle \text{ОГ}^{\prime}; W^{\prime\prime}\rangle$ (или в $\langle \text{ОГ}^{\prime}; W^{\prime\prime}\rangle$) мы соотносим их не с отдельным «миром» $\alpha \in W^{\prime\prime}$, а с множеством о.с. $W^{\prime\prime}$ в целом, т.е. расссматриваем операторы $\Box, \Diamond$ как кванторы $\forall, \exists$, пробегающие по элементам этого множества.)

6. Формула $\Box$В логически общезначима,е.т.е В общезначима в каждом $W^{\prime} \in 2^{2^n}$ (в каждом элементе множества всех подмножеств исходного множества о.с. для формулы), е.т.е. В истинна в каждом о.с. $\alpha \in 2^n$.

7. Формула □B логически выполнима, е.т.е. B общезначима в некотором $W^{\shortmid} \in 2^{2^n}$ (существует множество о.с. $W^{\shortmid} \in 2^{2^n}$, возможно, одноэлементное, в каждом о.с. которого B истинна), е.т.е. B истинна в некотором $\alpha \in 2^n$.

8. Формула ◊B логически общезначима, е.т.е. B логически выполнима (имеется хотя бы одно о.с. $\alpha \in 2^n$, в котором B истинна).

(Согласно приведенным определениям, формула $(\Box p \supset \Diamond q) \supset \Box(p \supset q)$ будет ложной в множестве $\{\{p, q\}, \{p, \neg q\}\}$, т.е. в пятом ОМОСе, а формула $\Box(p \supset q) \supset (\Box p \supset \Diamond q)$ оказывается логически общезначимой.)

Таким образом, ***в качестве S5-модельных структур при данном подходе рассматриваются все возможные подмножества исходного множества о.с. для формулы. Все о.с., включенные в один кластер $W^{\shortmid}$ или $W^{\shortmid\shortmid}$, объединены общим набором законов ОГ (аналогом S5-отношения достижимости), в качестве которых выступают определенные ограничения допустимых истинностных значений переменных, входящих в формулу***.

В результате мы ***получили теоретико-множественную (экстенсиональную) трехзначную не–истинностно–функциональную семантику для S5: любая модальная формула принимает ровно одно значение из трехэлементного множества $\{N, C, I\}$ (логически необходимо, логически случайно, логически невозможно, соответственно), причем сами эти значения задаются на определенных семействах множеств подмножеств исходного множества о.с. для формулы.*** Не–истинностно–функциональный характер данной семантики проявляется в том, что интерпретации, скажем, ∇p будет соответствовать любая последовательность о.с. длины «от» 2^1 «до» 2^n, в каждой из которых p хотя бы однажды меняет значение.

Будем иметь в виду следующую формулировку S5.

К аксиомам и правилам вывода добавляются схемы аксиом:

A1. □(A ⊃ B) ⊃ (□A ⊃ □B);

А2. $\Box$A $\supset$ A;

А3. $\neg\Box\neg$A $\supset$ $\Box\neg\Box\neg$A,

а также правило Гёделя: $\frac{\vdash \text{A}}{\vdash \Box \text{A}}$.

МЕТАТЕОРЕМА 1. *Каждая теорема исчисления S5 Льюиса является логически общезначимой формулой.*

Рассмотрим лишь аксиому А3. Пусть в некотором W'' формула $\neg\Box\neg$A является истинной, а формула $\Box\neg\Box\neg$A — ложной. Тогда в некотором $\alpha \in W''$ формула A является истинной, а формула $\neg\Box\neg$A является ложной в множестве W''. Значит, в данном W'' истинна формула $\Box\neg$A, т.е. в каждом $\beta \in W''$ формула $\neg$A является истинной, следовательно, формула A является ложной. Пришли к противоречию, т.е. А3 — логически общезначимая формула.

МЕТАТЕОРЕМА 2. *Каждая логически общезначимая формула доказуема в S5.*

Доказательство. Доказательство осуществляется методом Кальмара.

Кратко изложим схему доказательства метатеоремы. Поскольку значения формул, содержащих модальные операторы, определяются не в отдельных о.с., а в их множествах, известная лемма, предшествующая доказательству метатеоремы о полноте методом Кальмара преобразуется в два утверждения.

1. Пусть D — формула, не содержащая вхождений модальных операторов, $\langle \text{О}\Gamma'; W'' \rangle$ — подомос, $a_1, \ldots, a_n$ — все различные переменные, входящие в D, $b_1^\alpha, \ldots, b_n^\alpha$ — истинностные значения этих переменных в о.с. α таком, что $\alpha \in W''$. A_i^α есть a_i, если b_i^α есть t, и есть $\neg a_i$, если b_i^α есть f. Пусть D^α есть D или $\neg D$ в зависимости от того, принимает ли D значение t или f в α. Тогда $\text{О}\Gamma' \cup \{\text{A}_1^\alpha \ldots \text{A}_n^\alpha\} \vdash D^\alpha$.

2. Пусть D — формула, содержащая вхождения модальных операторов, $\langle \text{О}\Gamma'; W'' \rangle$ — подомос, $a_1, \ldots, a_n$ — все различные переменные, входящие в D, $\{b_{1_k}^w \ldots b_{n_k}^w\}$ — k-элементное множество n-мерных логических векторов, допустимых наборов значений переменных $a_1, \ldots, a_n$ в описаниях состояния $\alpha_1, \ldots, \alpha_k \in W''$ $(1 \leq k \leq 2^n)$.

Пусть A_i ($A_i \in$ ОГ') есть $\Box a_i$, если $b^w_{i_k}$ есть t для каждого k, есть $\neg\Diamond a_i$, если $b^w_{i_k}$ есть f для каждого k, и есть ∇a_i, если для некоторых k $b^w_{i_k}$ есть t и для некоторых k $b^w_{i_k}$ есть f.

Пусть $\sim \Diamond(\sim a_1 \wedge \ldots \wedge \sim a_m)$ ($\sim \Diamond(\sim a_1 \wedge \ldots \wedge \sim a_m) \in$ ОГ', $2 \leq m \leq n$, $\sim a_i$ есть a_i или $\neg a_i$) есть $\Diamond(\sim a_1 \wedge \ldots \wedge \sim a_m)$, если соответствующая конъюнкция m случайных переменных интерпретируется как логически возможное высказывание, и есть $\neg\Diamond(\sim a_1 \wedge \ldots \wedge \sim a_m)$, если конъюнкция m случайных переменных интерпретируется как логически невозможное высказывание.

Пусть D^w есть D или $\neg D$ в зависимости от того, принимает ли D значение t или f в W''.

Тогда для любого набора гипотез $A_1 \ldots A_n$, $\sim \Diamond(\sim a_1 \wedge \ldots \wedge \sim a_m)_1$, ..., $\sim \Diamond(\sim a_1 \wedge \ldots \wedge \sim a_m)_r$ ($r = 2^m$) выполняется:
$A_1 \ldots A_n$, $\sim \Diamond(\sim a_1 \wedge \ldots \wedge \sim a_m)_1$, ..., $\sim \Diamond(\sim a_1 \wedge \ldots \wedge \sim a_m)_r$ $\vdash D^w$.

Оба утверждения доказываются возвратной математической индукцией по числу вхождений символов $\neg$, $\supset$ и $\Box$ в D, не считая вхождений этих символов в элементарные формулы.

Результатом доказательства является истинность утверждения: если формула D общезначима, то для любого набора ограничений ОГ' верно, что ОГ' $\vdash D$.

Далее, в результате последовательного применения $\vee$-удаления к гипотезам из ОГ' выясняется, что при любой интерпретации переменных, входящих в общезначимую формулу D, в качестве необходимых, невозможных или случайных высказываний D доказуема в S5. Q.E.D.

3 Трехзначная не–истинностно–функциональная семантика для S4

Построение семантики интересующего нас вида для S4 несколько усложняется двумя факторами: во-первых, существенным оказывается понятие выделенного мира (точнее, какой-либо аналог этого понятия); во-вторых, в отличие от S5, в S4 имеются собственные несводимые модальности неэлементарного уровня ($\Box\Diamond, \Diamond\Box, \Diamond\Box\Diamond, \Box\Diamond\Box$ и их отрицательные напарники). С другой стороны, в S4 имеется всего 12 несводимых модальностей ненулевого уровня, и, как мы увидим, предлагаемый подход позволяет построить интуитивно ясные и технически простые семантические модели всех итерированных модальностей S4-типа.

Будем использовать следующую формулировку S4:

A1. $\Box(A \supset B) \supset (\Box A \supset \Box B)$;

A2. $\Box A \supset A$;

A3. $\Box A \supset \Box\Box A$,

а также правило Гёделя $\frac{\vdash \mathrm{A}}{\vdash \Box A}$.

Язык пропозиционального фрагмента S4 содержит те же базовые символы и определения операторов логической возможности и случайности, что и вышеприведенный фрагмент S5.

Пусть W — 2^n-элементное множество исходно возможных о.с. для формулы с n переменными. По каждому $\alpha_i \in W$ мы строим множество всех возможных ограничений на истинностные значения переменных формулы. Поскольку каждое о.с. содержит n переменных, а каждая переменная может истолковываться как имеющая свое значение случайно или по необходимости, изначально допустимыми по каждому $\alpha_i \in W$ оказываются 2^n таких истолкований. При этом данное число удобнее рассматривать в качестве арифметической функции — суммы элементов строки треугольника Паскаля с основанием n, в которой слагаемое вида C_n^k обозначает число интерпретаций, толкующих в качестве случайных какие-либо k переменных. По каждой интерпретации, в которой $2 \leq k \leq n$, строится, как и в семантике для S5, набор дополнительных ограничений на образование конъюнкций случайных высказываний, в результате чего из исходного множества о.с. для формулы могут исключаться некоторые элементы.

Таким образом, *в качестве наиболее простых аналогов S4-модельных структур мы будем использовать трехэлементные множества* $\langle \text{ОГ}^{|}_1; \alpha_i; W^{||}_1 \rangle$*, где* α_i *— исходное о.с. (аналог выделенного мира), относительно которого рассматриваются все возможные ограничения логических форм элементарных высказываний,* $\text{ОГ}^{|}_1$ *— одна из таких интерпретаций, выполняющая роль отношения достижимости семантик возможных миров,* $W^{||}_1$ *— множество о.с., выполняющих условия* $\text{ОГ}^{|}_1$. Каждое такое трехэлементное множество будем называть ***относительно ограниченным множеством описаний состояний (ОГОСом) первой степени.***

В ОГОСах первой степени следующим образом приписываются значения формулам без итерированных модальностей:

$$|\Box B|_{w_1^{\shortparallel}} = t \Leftrightarrow \forall\alpha(\alpha \in W_1^{\shortparallel} \Rightarrow |B|_\alpha = t)$$

(формула □B истинна в $\langle \text{ОГ}_1^{\shortmid}; \alpha_i; W_1^{\shortparallel}\rangle$, е.т.е B истинна в каждом о.с. из $W_1^{\shortparallel}$),

$$|\Diamond B|_{w_1^{\shortparallel}} = t \Leftrightarrow \exists\alpha(\alpha \in W_1^{\shortparallel} \wedge |B|_\alpha = t).$$

По сути, способ оценки формул с модальностями $\Box$, $\Diamond$ остается тем же, что и в семантике для S5.

Для определения значений формул с модальностями вида $\Box\Diamond$, $\Diamond\Box$ и их отрицательными напарниками по каждому ОГОСу первой степени следующим образом строится множество ОГОСов второй степени. Переменные, проинтерпретированные как необходимые или невозможные на первом шаге, сохраняют исходные значения во всех ОГОСах более высокого уровня (в силу А3). Переменные, истолкованные как случайные в некотором $\langle \text{ОГ}_1^{\shortmid}; \alpha_i; W_1^{\shortparallel}\rangle$, могут на втором шаге получить интерпретацию $\Box\nabla$ или $\nabla\nabla$; при этом способ представления таких интерпретаций в $\langle \text{ОГ}_2^{\shortmid}; \alpha_i; W_2^{\shortparallel}\rangle$ несколько усложняется по сравнению с $\langle \text{ОГ}_1^{\shortmid}; \alpha_i; W_1^{\shortparallel}\rangle$: если произвольное $W_1^{\shortparallel}$ есть множество о.с., то $W_2^{\shortparallel}$ есть *множество множеств о.с.*, т.е. элементами $W_2^{\shortparallel}$ оказываются объекты предыдущего уровня — множества $W_1^{\shortparallel}$. Если $\langle \text{ОГ}_2^{\shortmid}; \alpha_i; W_2^{\shortparallel}\rangle$ содержит для некоторой переменной p_i истолкование $\Box\nabla p_i$, то элементами $W_2^{\shortparallel}$ будут только такие множества $W_1^{\shortparallel}$, в каждом из которых p_i по крайней мере однажды меняет значение. Если же в $\langle \text{ОГ}_2^{\shortmid}; \alpha_i; W_2^{\shortparallel}\rangle$ содержится интерпретация $\nabla\nabla p_i$, то в $W_2^{\shortparallel}$ *она будет представлена тройкой множеств о.с., соответствующей истолкованию* $\Box\nabla p_i \vee \Box p_i \vee \neg\Diamond p_i$. Поясним сказанное на примерах.

Рассмотрим один из ОГОСов первой степени для формулы с тремя переменными. Пусть α_i есть $\{p, q, r\}$, $\text{ОГ}_1^{\shortmid}$ есть $\Box p, \nabla q, \nabla r$. Тогда соответствующий $\langle \text{ОГ}_1^{\shortmid}; \alpha_i; W_1^{\shortparallel}\rangle$ примет вид:

$$\langle\{\Box p, \nabla q, \nabla r\}; \{p, q, r\}; \{\{p, q, r\}, \{p, q, \neg r\}, \{p, \neg q, r\}, \{p, \neg q, \neg r\}\}\rangle.$$

Переменная p интерпретируется как необходимая, q и r — как логически недетерминированные, поэтому возможными в S4 оказываются 4 $\langle \text{ОГ}_2^{\shortmid}; \alpha_i; W_2^{\shortparallel}\rangle$ по данному $\langle \text{ОГ}_1^{\shortmid}; \alpha_i; W_1^{\shortparallel}\rangle$:

1. $\langle\{\Box\Box p, \Box\nabla q, \Box\nabla r\}; \{p, q, r\}; \{\{\{p, q, r, \}\{p, q, \neg r\}, \{p, \neg q, r\}, \{p, \neg q, \neg r\}\}\}\rangle$ — поскольку все изначальные интерпретации допустимых истинностных значений переменных оцениваются как необходимые, $W_2^{''}$ данного ОГОСа будет одноэлементным множеством множеств о.с. Его единственный элемент — четырехэлементное множество о.с. $W_1^{''}$, входящее в исходный $\langle \text{ОГ}_1^{'}; \alpha_i; W_1^{''}\rangle$.

2. $\langle\{\Box\Box p, \Box\nabla q, \nabla\nabla r\}; \{p, q, r\}; \{\{\{p, q, r, \}, \{p, q, \neg r\}, \{p, \neg q, r\}, \{p, \neg q, \neg r\}\}; \{\{p, q, r\}, \{p, \neg q, r\}\}; \{\{p, q, \neg r\}, \{p, \neg q, \neg r\}\}\}\rangle$ — переменная r имеет неопределенностное значение вида $\Box\nabla r \vee \Box r \vee \neg\Diamond r$. В $W_2^{''}$ такая интерпретация будет представлена тройкой множеств о.с. Первое множество о.с. соответствует истолкованию $\Box\nabla r$, второе и третье — истолкованиям $\Box r$ и $\neg\Diamond r$ соответственно.

3. $\langle\{\Box\Box p, \nabla\nabla q, \Box\nabla r\}; \{p, q, r\}; \{\{\{p, q, r\}, \{p, q, \neg r\}, \{p, \neg q, r\}, \{p, \neg q, \neg r\}\}\ \{\{p, q, r\}, \{p, q, \neg r\}\}; \{\{p, \neg q, r\}, \{p, \neg q, \neg r\}\}\}\rangle$ — случай аналогичен предыдущему.

4. $\langle\{\Box\Box p, \nabla\nabla q, \nabla\nabla r\}; \{p, q, r\}; \{\{\{p, q, r\}, \{p, q, \neg r\}, \{p, \neg q, r\}, \{p, \neg q, \neg r\}\}; \{\{p, q, r\}, \{p, \neg q, r\}\}; \{\{p, q, \neg r\}, \{p, \neg q \neg r\}\}; \{\{p, q, r\}, \{p, q, \neg r\}\}; \{\{p, \neg q, r\}, \{p, \neg q, \neg r\}\}; \{\{p, q, r\}\}; \{\{p, q, \neg r\}\}; \{\{p, \neg q, r\}\}; \{\{p, \neg q, \neg r\}\}\}\rangle$ — неопределенностной интерпретации обеих первично случайных переменных соответствует девятиэлементное множество множеств о.с.

Таким образом, если k $(0 \leq k \leq n)$ — число случайных переменных в некотором ОГОСе первой степени, то он порождает 2^k ОГОСов второй степени, причем число элементов — множеств $W_1^{''} \in W_2^{''}$ этих ОГОСов — может варьироваться от 3^0 до 3^k.

Число $\langle \text{ОГ}_2^{'}; \alpha_i; W_2^{''}\rangle$ по отдельному α_i удобно представить в виде следующей арифметической функции:

$$C_n^0 \times 2^0 + C_n^1 \times 2^1 + C_n^2 \times 2^2 + \ldots + C_n^k \times 2^k + \ldots + C_n^n \times 2^n = 3^n.$$

Слагаемое $C_n^k \times 2^k$ представляет число $\langle \text{ОГ}_2^{'}; \alpha_i; W_2^{''}\rangle$, порожденных ОГОСами первой степени с k случайными переменными. Закономерности порождения различных $\langle \text{ОГ}_2^{'}; \alpha_i; W_2^{''}\rangle$ по некоторому $\langle \text{ОГ}_1^{'}; \alpha_i; W_1^{''}\rangle$ можно выразить в виде таблицы:

Число случайных переменных в каждом $\langle \text{О}\Gamma^{\prime}_1; \alpha_i; W^{\prime\prime}_1 \rangle$ группы	Число $\langle \text{О}\Gamma^{\prime}_2; \alpha_i; W^{\prime\prime}_2 \rangle$, порожденных каждой группой $\langle \text{О}\Gamma^{\prime}_1; \alpha_i; W^{\prime\prime}_1 \rangle$	Возможное число элементов $W^{\prime\prime}_1$ в каждом $\langle \text{О}\Gamma^{\prime}_2; \alpha_i; W^{\prime\prime}_2 \rangle$	Максимальное число о.с. в $W^{\prime}_1$
0	$C^0_n \times 2^0$	3^0	2^0
1	$C^1_n \times 2^1$	$3^0 \vee 3^1$	2^1
2	$C^2_n \times 2^2$	$3^0 \vee 3^1 \vee 3^2$	2^2
k	$C^k_n \times 2^k$	$3^0 \vee \ldots \vee 3^k$	2^k
n	$C^n_n \times 2^n$	$3^0 \vee \ldots \vee 3^n$	2^n

Формулам с модальностями вида $\Box\Diamond$, $\Diamond\Box$ следующим образом приписываются значения в $\langle \text{О}\Gamma^{\prime}_2; \alpha_i; W^{\prime\prime}_2 \rangle$:

$$|\Box\Diamond B|_{w^{\prime\prime}_2} = t \Leftrightarrow \forall W^{\prime\prime}_1 (W^{\prime\prime}_1 \in W^{\prime\prime}_2 \Rightarrow \exists \alpha (\alpha \in W^{\prime\prime}_1 \wedge |B|_\alpha = t))$$

(формула вида $\Box\Diamond B$ истинна в $W^{\prime\prime}_2$, е.т.е. В выполнима в каждом $W^{\prime}_1 \in W^{\prime\prime}_2$, т.е. истинна в некотором о.с. каждого $W^{\prime\prime}_1$),

$$|\Diamond\Box B|_{w^{\prime\prime}_2} = t \Leftrightarrow \exists W^{\prime\prime}_1 (W^{\prime\prime}_1 \in W^{\prime\prime}_2 \wedge \forall \alpha (\alpha \in W^{\prime\prime}_1 \Rightarrow |B|_\alpha = t)).$$

Таким образом, при определении значений формул с модальностями вида $\Box\Diamond$, $\Diamond\Box$ мы соотносим их с множеством $W^{\prime\prime}_2$ в целом, т.е. рассматриваем их как сложные кванторы, пробегающие по элементам $W^{\prime\prime}_2$.

(Отметим, что вышеприведенный пример построения ОГОСов второй степени по некоторому ОГОСу первой степени удачно иллюстрирует опровержимость в S4 схемы аксиом $\Diamond A \supset \Box\Diamond A$. В исходном $\langle \text{О}\Gamma^{\prime}_1; \alpha_i; W^{\prime\prime}_1 \rangle$ формула $(\Diamond p \supset (q \supset r))$ истинна, а вот формула $\Box\Diamond(p \supset (q \supset r))$ ложна в четвертом $\langle \text{О}\Gamma^{\prime}_2; \alpha_i; W^{\prime\prime}_2 \rangle$, поскольку среди элементов $W^{\prime\prime}_2$ этого ОГОСа имеется множество $\{\{p, q, \neg r\}\}$, в котором $(p \supset (q \supset r))$ невыполнима.)

Значения формул с модальностями вида $\Box\Diamond\Box$, $\Diamond\Box\Diamond$ определяются в ОГОСах третьей степени. Общее число $\langle \text{О}\Gamma^{\prime}_3; \alpha_i; W^{\prime\prime}_3 \rangle$ по отдельному α_i описывается арифметической функцией вида

$$C^0_n \times 3^0 + C^1_n \times 3^1 + C^2_n \times 3^2 + \ldots + C^k_n \times 3^k + \ldots + C^n_n \times 3^n = 4^n,$$

где слагаемое $C^k_n \times 3^k$ представляет число $\langle \text{О}\Gamma^{\prime}_3; \alpha_i; W^{\prime\prime}_3 \rangle$, порождаемых теми ОГОСами первой степени, в каждом из которых в качестве случайных истолковываются какие-либо k переменных

$(0 \leq k \leq n)$. При этом элементами W''_3 будут объекты предыдущего уровня — множества множеств о.с. W''_2, а число таких элементов может варьироваться от 3^0 до 3^n.

Связь между степенью ОГОСа, числом случайных переменных в исходной интерпретации, типом и числом элементов в W''_i выразим при помощи таблицы:

Степень ОГОСа	Число случайных переменных в ОГ	Число элементов в W	Тип элементов W
$\langle \text{ОГ}'_1; \alpha_i; W''_1 \rangle$	$0 \leq i \leq n$ (n — число переменных в формуле)	2^i	о.с.
$\langle \text{ОГ}'_2; \alpha_i; W''_2 \rangle$	$0 \leq k \leq i$	3^k	Множества о.с.
$\langle \text{ОГ}'_3; \alpha_i; W''_3 \rangle$	$0 \leq m \leq k$	3^m	Множества множеств о.с.

Формулам с модальностями вида $\Box\Diamond\Box$, $\Diamond\Box\Diamond$ следующим образом приписываются значения в $\langle \text{ОГ}'_3; \alpha_i; W''_3 \rangle$:

$$|\Box\Diamond\Box B|_{w''_3} = t \Leftrightarrow \forall W''_2(W''_2 \in W''_3 \Rightarrow \exists W''_1(W''_1 \in W''_2 \wedge \forall \alpha(\alpha \in W''_1 \Rightarrow |B|_\alpha = t)))$$

(формула вида $\Box\Diamond\Box B$ истинна в W''_3, е.т.е. формула $\Diamond\Box B$ истинна в каждом его элементе W''_2, е.т.е. формула $\Box B$ выполнима в каждом W''_2, е.т.е. в каждом множестве множеств о.с. W''_2 найдется хотя бы один элемент W''_1 такой, что формула В общезначима в нем, т.е. истинна в каждом о.с. из этого W''_1),

$$|\Diamond\Box\Diamond B||_{w''_3} = t \Leftrightarrow \exists W''_2(W''_2 \in W''_3 \wedge \forall W''_1(W''_1 \in W''_2 \Rightarrow \exists \alpha(\alpha \in W''_1 \wedge |B|_\alpha = t))).$$

Как и ранее, модальности $\Box\Diamond\Box$, $\Diamond\Box\Diamond$ рассматриваются как своего рода кванторы, пробегающие по элементам некоторого W''_3 — множествам множеств о.с. W''_2.

Рассмотрим несколько примеров. Четвертый из приведенных выше $\langle \text{ОГ}'_2; \alpha_i; W''_2 \rangle$ для формулы с тремя переменными порождает 4 ОГОСа третьей степени, одним из которых будет такой $\langle \text{ОГ}'_3; \alpha_i; W''_3 \rangle$:

$<\{\Box\Box\Box p, \Box\nabla\nabla q, \nabla\nabla\nabla r\}; \{p, q, r\};$

$[\ \{\{p, q, r\}, \{p, q, \neg r\}, \{p, \neg q, r\}, \{p, \neg q, \neg r\}\};$

$\{\{p, q, r\}, \{p, \neg q, r\}\}; \{\{p, q, \neg r\}, p, \neg q, \neg r\}\};$
$\{\{p, q, r\}, \{p, q, \neg r\}\}; \{\{p, \neg q, r\}, \{p, \neg q, \neg r\}\};$
$\{\{p, q, r\}\}; \{\{p, q, \neg r\}\}; \{\{p, \neg q, r\}\}; \{\{p, \neg q, \neg r\}\}\ \mathbf{]}$
$\mathbf{[}\{\{p, q, r\}, \{p, \neg q, r\}\}; \{\{p, q, r\}\}; \{\{p, \neg q, r\}\}\mathbf{]}$
$\mathbf{[}\{\{p, q, \neg r\}, \{p, \neg q, \neg r\}\}; \{\{p, q, \neg r\}\}; \{\{p, \neg q, \neg r\}\}\mathbf{]}>.$

Набору ограничений, входящему в данный $\langle \text{ОГ}^{\shortmid}_3; \alpha_i; W^{\shortmid\shortmid}_3\rangle$, соответствует трехэлементное множество $W^{\shortmid\shortmid}_3$. Каждый отдельный его элемент (множество множеств о.с.) мы выделили квадратными скобками. Формула $\Diamond\Box\Diamond(p \supset (q \supset r))$ истинна в данном $\langle \text{ОГ}^{\shortmid}_3; \alpha_i; W^{\shortmid\shortmid}_3\rangle$. Это означает, что $W^{\shortmid\shortmid}_3$ этого ОГОСа содержит (хотя бы) одно такое множество множеств о.с. $W^{\shortmid\shortmid}_2$, что в каждом его элементе $W^{\shortmid\shortmid}_1$ формула $(p \supset (q \supset r))$ выполнима. Таким множеством множеств о.с., причем единственным, является *второе* из выделенных квадратными скобками множеств. Два других $W^{\shortmid\shortmid}_2$ содержат опровергающее одноэлементное множество о.с. $\{\{p, q, \neg r\}\}$.

В этом же $\langle \text{ОГ}^{\shortmid}_3; \alpha_i; W^{\shortmid\shortmid}_3\rangle$ ложна формула $\Box\Diamond\Box(p \supset (q \wedge r))$; это озачает, что имеется $W^{\shortmid\shortmid}_2 \in W^{\shortmid\shortmid}_3$, в котором формула $\Box(p \supset (q \wedge r))$ невыполнима, т.е. среди элементов этого $W^{\shortmid\shortmid}_2$ нет ни одного множества о.с. $W^{\shortmid\shortmid}_1$, в каждом о.с. которого формула $p \supset (q \wedge r)$ была бы истинной. Таким опровергающим $W^{\shortmid\shortmid}_2$ является *третье* из выделенных квадратными скобками множеств множеств о.с. Это автоматически означает, что в данном $\langle \text{ОГ}^{\shortmid}_3; \alpha_i; W^{\shortmid\shortmid}_3\rangle$ истинным является отрицание исходной формулы, т.е. $\Diamond\Box\Diamond\neg(p \supset (q \wedge r))$. Нетрудно убедиться, что формула $\Box\Diamond(p \wedge (\neg q \vee \neg r))$ истинна в том же $W^{\shortmid\shortmid}_2 \in W^{\shortmid\shortmid}_3$.

Приведенных определений достаточно для установления значений формул с любым конечным числом модальных операторов в семантике для S4, поскольку все они сводятся к одному из двенадцати видов собственных несводимых модальностей, выделяемых в этой системе. Кроме того, в силу правил построения ОГОСов неэлементарного уровня по некоторому исходному $\langle \text{ОГ}^{\shortmid}_1; \alpha_i; W^{\shortmid\shortmid}_1\rangle$, модализированные формулы каждого из основных типов, оцененные как истинные в ОГОСе соответствующего уровня, сохраняют истинность (*общезначимость* или *выполнимость*) при любых допустимых интерпретациях ОГ$^{\shortmid}$ более высокого уровня. К примеру, если формула вида $\Box\Diamond B$ принимает значение t в некотором $W^{\shortmid\shortmid}_2$, то в любом допустимом относительно него множестве $W_n^{||}$ $(n > 2)$ эта оценка сохранится, так как $\Box\Diamond B \supset \Box\Box\Diamond B$ есть теорема S4; если формула $\Diamond\Box\Diamond B$ оценивается как истинная в некотором $W_3^{||}$, то ее истинность (*выполнимость*) сохраняется в любом $W_n^{||}$ $(n > 3)$, допустимом правилами построения относительно исходного $\langle \text{ОГ}_3^{|}; \alpha_i; W_3^{||} \rangle$, поскольку $\Diamond\Box\Diamond B \supset \Diamond\Diamond\Box\Diamond B$ есть теорема S4 и т.д.

4 Предварительные выводы

Изложенные в настоящей работе принципы построения семантик модальных систем предполагают использование только традиционных для логики понятий (логической) истинности, (логической) ложности, (логической) выполнимости, что, на наш взгляд, выгодно их отличает от семантик возможных миров. Кроме того, число ограниченных и относительно ограниченных множеств о.с., выполняющих роль модельных структур семантик возможных миров, *всегда конечно* при описании пропозициональных фрагментов модальных систем и конечно в случае их предикатных расширений при соблюдении дополнительного условия конечности предметной области. Это позволяет организовать эффективный пересчет *всех* аналогов модельных структур для произвольной формулы (множества формул), который и был осуществлен нами при помощи элементарных арифметических функций. Данный факт, в свою очередь, позволяет автоматизировать процесс проверки модальных формул на общезначимость и выполнимость.

За рамками настоящей статьи осталось описание сокращенных способов проверки модальных формул на общезначимость и выполнимость, а также детальное доказательство метатеорем о полноте исчислений S5, S4 относительно предложенных семантик. Эти вопросы будут рассмотрены в отдельном исследовании.

Литература

[1] *Архиереев Н.Л.* К вопросу о содержательном истолковании итерированных модальностей в системе S4 К. И. Льюиса // Труды научно–исследовательского семинара Логического центра Института философии РАН. М.: 2008. Вып. XIX, С. 7–19.

[2] *Войшвилло Е. К.* Содержательный анализ модальностей S4 и S5 // Филос. науки . М.: 1983. № 3, С. 76–80

[3] *Ивлев Ю. В.* Модальная логика. М.: 1991.

Проблема логического противоречия и русская религиозная философия[1]

Б. В. Бирюков, И. П. Прядко

abstract. This article touches upon the logical ideas of two Russian philosophers of a beginning XX century — the discoverer of imaginary logic N.A.Vasiljew, and P.A. Florensky, author of the solid work. By instruments of the classic proposition logic make explication of the Florensky's doctrine. The imaginary logic of Vasiljew is compared by logical comprehension of Florensky. At the same time Vasiljew's logic is perfectly correctly, but it is based on philosophical principles. It is demonstrated, a distinction of the theological contexts theirs logical doctrines.

Ключевые слова: Флоренский, Васильев, логическое противоречие, история логики, неклассические логики

ЧАСТЬ ПЕРВАЯ

1 Логико-философские идеи Серебряного века: современный взгляд

Оценка заслуг и ценностного содержания русской философии рубежа XIX–XX вв. на сегодняшний день стала одной из самых острых проблем — слишком сходна ситуация начала нового века с тем, что переживала Россия столетие тому назад. В литературе по этому вопросу мы находим разные суждения. Один из подходов можно назвать православно ориентированным. Он включает критику произведений отечественных философов с весьма консервативных позиций. С этой точки зрения выводы русской философии не соответствуют стилю мышления, укорененному в тысячелетней отечественной традиции; в рамках данного подхода отмечаются «неправославные», западные истоки идей многих русских мыслителей. Так, А.С. Хомяков иногда оценивается

---

[1] Статья написана при поддержке РФФИ; грант № 08-06-00267а «П. А. Флоренский: философско-логические идеи и математическая логика как средство экспликации философско-теологических воззрений».

как «имманентист» протестантского толка, как продолжатель линии немецких романтиков [40, с. 72]. Далеко не все принимается в трудах всеединцев: Вл.С. Соловьева, Е.Н. Трубецкого, С.Л. Франка. Но еще менее связанными с национальной почвой при таком подходе выглядят идеи Н.А. Бердяева, Л.И. Шестова, Д.С. Мережковского, гениального «литературного провокатора» В.В. Розанова.

Это одна крайность. Наряду с ней существует другой подход, в рамках которого критика русской философии ведется с «западнических» позиций. Адептами подобных, как правило, либеральных мировоззренческих философем отечественная традиция видится как маргинальное явление, не представляющее в масштабах истории мировой мысли большого интереса. Безусловно негативно трактуются патриотические мотивы в историософских работах русских мыслителей. В контексте критики, ориентированной на западные либеральные ценности, выводы русских философов отвергаются потому, что они якобы не отвечают современным представлениям о «политкорректности». Ставится знак равенства между историософски-религиозными идеями корифеев русской мысли Серебряного века и программными заявлениями некоторых современных политиков консервативной ориентации.

Ни первая, ни вторая из приведенных трактовок русской философии не представляется нам справедливой. Отечественное философское наследие — явление многогранное, сложное: не все в нем следует принимать, но и не все отвергать. Общемировоззренческие выводы отечественных авторов Серебряного века требуют взвешенных оценок.

Поиск причин тех трагедий и триумфов, которые наблюдались в русской истории, пытаются искать в социальной психологии, в географии страны (евразийцы), в геополитике и даже в биологии. Мы же считаем, что в поиске ответов на интересующие нас вопросы полезным будет обращение к *логике*[2].

В таком случае возникает вопрос, могут ли особенности национальной психики и специфика народного миросозерцания

---

[2] В этом отношении интересно исследование Б.М. Шуранова «Русская логика переломной эпохи (1880–1930) в социо-культрологическом аспекте»[48].

найти отражение в логических закономерностях, в наиболее часто используемых схемах мышления? Можно ли увязать философию как «эпоху, постигнутую в умозрении» (Гегель), с разработками в области логической неклассичности? Может быть, есть способ обнаружить причины многих общественных изменений путем отвлечения от конкретного нелогического содержания, что и предполагает наука логики? Мы убеждены, что правомерна по меньшей мере постановка подобных вопросов.

В настоящей статье рассматриваются логико-философские концепции двух известных русских мыслителей начала XX века — Н.А. Васильева и П.А. Флоренского. Если о творчестве Павла Александровича Флоренского идут достаточно острые, но плодотворные споры, то философские взгляды первого — Николая Александровича Васильева некоторыми авторами объявляются малоинтересными, «неполиткорректными» и не заслуживающими обсуждения. Подобным образом еще до революции относился к ним такой философски настроенный математик, как С.А. Богомолов [50]. В 20-е годы XX века логические идеи Н.А. Васильева критиковались с позиций марксистской диалектики как формалистические [3]. Только в 60–80-е годы стараниями отечественных логиков В.А. Смирнова, В.А. Бажанова, бразильской исследовательницы А. Арруды и других — спустя 30–40 лет после первого этапа их активного обсуждения — взгляды эти были открыты вновь и введены в широкий научный оборот [33], [34], [4], [51], [52]. Примерно то же можно сказать об историко-психологических и философско-исторических воззрениях казанского ученого [18]. Неприятие его общественно-научных выводов[3] сегодня свидетельствует лишь о нашем историческом инфантилизме, о неумении ценить отечественное интеллектуальное наследие и о бездумном преклонении перед чужими авторитетами.

Обращаясь к Флоренскому, мы видим, как эволюционировала его философия. Еще в «Воспоминаниях о детстве» взгляд философа на мир обрел твердую веру в наполненность каждого явления *смыслом*[4]. Поиск этого смысла в последующие годы

---

[3] Критике подобного неприятия посвящена статья И.П. Прядко [29].

[4] Здесь мы опираемся на статью [44, с. 185 и далее].

становления Флоренского как мыслителя привел его к созданию знаменитого сочинения «Столп и утверждение истины»[5]; и это развитие завершилось стройным православным мировоззрением, выраженным в последующих работах ученого.

Находясь на пути к своему главному творению, о. Павел ощутил сущностное родство «Эллады и Лавры, античной духовности и московско-русского православия XIV–XV вв.». Фундаментом его духовного мира стало «сближение христианства и платонизма, русского православия и эллинской мистериальной религии» [44, с. 185]. В этом смысле Флоренский в определенном отношении воплощал в своем творчестве единство двух крайностей русской мысли, с констатации которых мы начали настоящую статью. Его мысль органически влилась в отечественный религиозно-философский поиск, предполагавший как освоение западной философии, так и — это прежде всего — разработку «вечных» тем русского интеллектуального сознания: соборности, всеединства, эсхатологии.

Ограничивая наши рассмотрения логико-философской ориентацией, мы ни в коей мере не хотим умалять иные подходы к интересующей нас проблематике. Здесь достаточно назвать ощутимое представительство в предреволюционном интеллектуальном пространстве России *неокантианства* — о нем мы тоже будем говорить в настоящей статье. Одно из ответвлений последнего — в лице русских представителей марбургской школы — нашло у нас своих пропагандистов, ожидающих от его изучения «впечатляющих открытий» [24]. Думается, что значимость кантовской традиции на русской почве не стоит преувеличивать, но свою роль она сыграла как раз в том аспекте, который нас интересует: как мы увидим, данная традиция явилась одним из идейных истоков, питавших отечественную логическую неклассичность.

---

[5] Название этого труда повторяет слова ап. Павла, сказавшего: «. . . чтобы <. . . > ты знал, как должно поступать в доме Божьем, который есть Церковь Бога живаго, *столп и утверждение Истины*» (I Тим. 3,15) (курсив наш. — *Б.Б., И.П.*).

2 Постановка проблемы

Наверное, для начала XX века трудно найти двух до такой степени непохожих философов, как Николай Александрович Васильев и о. Павел Александрович Флоренский. С одной стороны, кончивший безумием реформатор логики — мыслитель, чаявший грядущий рационально-мистический синтез по образцу гностического. С другой стороны, православный священник, сочетавший разработку проблем православного богословия с научными занятиями. С одной стороны, размеренная жизнь Казани, среда университетских светил, кадетов и позитивистов по преимуществу, с другой стороны, Москва с ее полуязычески-полухристианской культурой Серебряного века. Судьба и обстановка, в которой Васильеву и Флоренскому приходилось работать и жить, а главное, направление мысли этих философов были совершенно разными. Это несходство, казалось бы, исключает попытку провести между ними параллель. Однако область, где сопоставление выбранных нами фигур возможно и даже желательно, существует. Эта область — *логика*, шире — *дискурсивное мышление* — вместе с его теоретико-познавательными аспектами и телеологическими коннотациями.

Оба мыслителя — Васильев и Флоренский — явились реформаторами данной почтенной науки, со времен Аристотеля и до середины XIX века в целом избегавшей кардинального пересмотра своих положений. Оселком, на котором Васильев и Флоренский оттачивали свои реформаторские идеи, была идея *противоречия*, шире — *антиномичности*. Оба давали ей неклассические интерпретации. Здесь — главная точка соприкосновения учений Флоренского и Васильева. Но если, как мы уже говорили, взгляды первого широко известны и вполне определенны — в них выражен опыт христианского познания как преодоления субъектом своей «самости», отдельности, изложенный в упомянутом фундаментальном труде мыслителя, где логика находит достойное место [41], то философское творчество второго менее известно. Идеи логической неклассичности не получили у Васильева развернутой теоретической разработки: из-за тяжелой болезни творческая деятельность ученого прекратилась очень рано. Однако его статьи и рецензии свидетельствовали, что, рассматривая познавательную практику, мыслитель из Казани пришел к заключению о необходимости при разработке «логики противоречия» учитывать гносеологическое значение религиозной веры и вообще при логических рассмотрениях иметь в виду духовную сферу общественного бытия[6].

В самом деле, Н.А. Васильев принимал во внимание не только широко известные тогда в России западные источники, например статьи Анри Пуанкаре, но и работы А.С. Хомякова и Вл.С. Соловьева. Именно в контексте их установок оценивал он «Последние мысли» французского математика и мыслителя, говорившего о недостаточности для человека одних только рационально-логических схем познания; Васильев соглашался с корифеем западной науки в том, что жизнь состоит из поступков, а поступок есть акт нашей воли и веры [30].

Нам представляется, что некоторый теологический компонент в воззрениях Васильева позволяет говорить о сходстве его учения с религиозно-философскими идеями Серебряного века. В статье «Логика и металогика» [20, с. 115], рассуждая по поводу закона противоречия, ученый апеллирует к мыслящему Субъекту, сверхчеловеческому по своей природе, а потому «не умеющему» ошибаться. Сознание такого Существа, по Васильеву, не знает закона противоречия, поскольку Ему — этому Существу — нечего опровергать [20, с. 119]. Говоря о сверхчеловеческом мышлении и вводя его в контекст создаваемой им схемы неклассической логики, ученый из Казани связал свой психологизм с теизмом, говоря о *металогике* — логике без отрицания как о логике Божества. Правда, сделал он это как-то вскользь, не придавая своим словам, возможно, большого значения. И тем не менее это был существенный штрих в философско-логическом учении Васильева. К этому вопросу мы вскоре вернемся.

Когда Флоренский ставил задачу уяснения природы антиномичности и, значит, противоречия, он не знал, что за ее решение с другого конца уже взялся его современник — Н.А. Васильев. При сходстве мотивов, побуждавших Васильева и Флоренского исследовать проблему логического противоречия, между их взглядами имелись существенные различия. Прежде всего, один из них — о. Павел — связывал антиномичность с истиной, трак-

---

[6] Мы уже касались этого вопроса. См. [10].

туемой в богословском духе. Ничего этого у Васильева мы не находим. Религиозность, о которой Васильев рассуждал в своих историософских работах, носила слишком общий и неопределенный, — во всяком случае неправославный, — характер. Только некоторые детали позволяют нам говорить о принадлежности учений Васильева и Флоренского единой умозрительной традиции. Но именно эти детали будут для нас существенны.

В центр своих рассмотрений Васильев поставил *закон противоречия*, а религиозный мыслитель Флоренский исходил из *закона тождества*, считая законы противоречия и исключенного третьего его «неизбежными спутниками». Богословские импликации, без учета которых немыслимо понять философию о. Павла, существенны потому, что именно в их свете — т.е. в свете омоусианских установок, противопоставляемых внехристиански-рационалистическим омиусианским установкам, — приобретают смысл его гносеологические выкладки[7].

Однако антиномичность — и это следует подчеркнуть особо — Флоренский не замыкает в пределах богословия. Он указывает на древность идеи сочетания противоположностей, называя имена философов античности — Гераклита, элейцев, Платона, мыслителей Нового времени — Николая Кузанского, Гегеля, даже Ницше. Идея антиномичности, пишет он, ныне «высказывается даже в специальных дисциплинах», и как пример приводит лингвистику, математику, физику и механику, этику, эстетику и логику (имея в виду в последнем случае, по-видимому, И. Канта) [41, том II, с. 686–687].

Используемый Флоренским логический аппарат будет в дальнейшем нами подробно описан. Здесь мы ограничимся рядом замечаний. В отличие от Н.А. Васильева, исходившего из аристотелевой силлогистики и не обращавшегося к современной ему математической логике, о. Павел достаточно владел аппаратом «логистики». Таково первое замечание. Смысл другого состоит в следующем. Н.А. Васильев в своих логических построениях предполагал равноправие истины и лжи: они для него — две возможные попытки суждения. Вводя противоречивые логические формулы, казанский философ допускал их бинарную

---

[7] Этимология этих понятий получит разъяснение в дальнейшем изложении.

истинностно-ложностную оценку. Не то Флоренский. Истина для него не «равноправна» лжи, и в своих логико-психологических выводах он исходит из непреложной истинности как богословских догматов, так и антиномических категорий. В статье Б.В. Бирюкова [7] показано, что логическая формула, выражающая тезис «Священное Писание и догматы христианства непротиворечивы», верна при условии истинности его антецедента, утверждающего, что соответствующее предложение высказано в состоянии духовного просветления. Все это нуждается в детальном исследовании, к которому мы и приступим.

Наконец, последнее замечание. Сравнивая подход к логике Флоренского и Васильева, мы обнаруживаем, что, в отличие от казанского ученого, логические рассуждения о. Павла включали противопоставление, с одной стороны, логики, восходящей к Аристотелю, а с другой стороны, современной ему западной логики неокантианцев (Г. Риккерт), которую он называл гносеологической логикой, а также символической логики. На «логико-алгебраический алгоритм», писал о. Павел, мы смотрим «под углом зрения гносеологической логики» [41, том II, с. 622]. При этом решительно отвергается присущая западной философской традиции «логизации науки» установка на рационализацию всего мышления.

Напротив, Н.А. Васильев не был категорическим противником рационализма, хотя и понимал его ограниченность. Отдавая, как и о. Павел, должное логическим идеям неокантианцев — правда, не столько западных, сколько русских, — он не принимал в расчет достижения математической логики. Здесь проявилось известное отставание Васильева, который в гораздо меньшей мере, чем Флоренский, был знаком с мировой логической литературой.

***

К сказанному добавим несколько слов о социально-историческом контексте логических размышлений Васильева и Флоренского. Социальная противоречивость издавна привлекала внимание философов, социологов, культурологов. Например, исследователи политического и цивилизационного процесса Нового времени и сегодня обращают внимание на противоречивый характер продолжающей быть актуальной «триединой» политической формулы, получившей хождение во времена Французской революции и «эмансипационных» движений XIX–XX вв.: «свобода, равенство и братство». Каждый элемент этой формулы противоречит двум остальным: семейные узы и семейная *иерархия* (братство) исключает свободу; свобода не совместима с равенством, поскольку приводит к неравенству социальных статусов индивидов, и т.д.

Думается, социальная противоречивость тоже была одной из тех причин, которые создавали *объективную* потребность в теориях, рассматривающих противоречие как одно из свойств высказываний формального языка логики. Социальную конфликтность, т.е. ситуацию, когда налицо противоположные тенденции (силы, партии, социальные группы), в диалектическом мышлении издавна представляли «формулой» *A* и *не-A*.

Истоком логической неклассичности для той эпохи были не только общественно-научные, но и некоторые естественнонаучные идеи. Приведем один пример. Нильс Бор (1885–1962 гг.) в рассматриваемый период дал превосходный анализ соотношения теоретического и эмпирического в естествознании. На основе этого он сформулировал постулаты, в которых противоречие выступало необходимым инструментом естественнонаучного исследования. Датский физик не только не отбрасывал противоречащие суждения, но делал их отправными точками его теории. Нильс Бор, таким образом, проявил себя не только в области физики, он оказался незаурядным мыслителем, разрабатывавшим парадигмальные концепты естествознания XX века. Он, в частности, указал на принципиальное для теории различие между частным и предельным случаем (ньютонова механика как предельный случай *специальной теории относительности*).

Здесь возникает вопрос, в какой мере отечественные религиозно-философские умозрения, социальные противоречия и естественнонаучные открытия можно считать факторами, побудившими русскую мысль к поиску логики, которая ныне называется *паранепротиворечивой*, а также к попыткам построения учения об *антиномичности* познания. Мы надеемся, что анализ концепций Н.А. Васильева и П.А. Флоренского будет содействовать освещению данной проблемы.

3 Металогика Н.А. Васильева

Мы начнем наше рассмотрение с того, что Н.А. Васильев назвал *металогикой*, так как здесь в явной форме представлены религиозные импликации казанского мыслителя. Васильев назвал металогику сухим минимумом, дополнить который могут формальная (эмпирическая) и воображаемая (паранепротиворечивая) логики, более пригодные для нужд исследования окружающего мира. При этом он отверг онтологический статус закона противоречия. Вместо этого ученый склонен был говорить о *самонепротиворечивости*: требовании, предъявляемом к эмпирически данному мышлению человека.

Анализируя закон противоречия, Васильев учитывал критику этого закона, которая изложена в книге Фр. Полана «Логика противоречий» [54]. Н.А. Васильева, в то время еще магистра (1913 г.), привлекла мысль западного ученого об относительности данного закона, заложенной в самой его формулировке: «Утверждение и отрицание не могут быть верны „в одном и том же отношении“. Но определить в каждом конкретном случае, имеется ли тут одно и то же отношение, бывает очень трудно. Представим себе купца, который утверждал бы, что одна арифметика действительна для исчисления его долгов, а другая действительна для исчисления его имущества. Он мог бы указать, что тут утверждение и отрицание имеют место не в одном и том же отношении, а в разных» [17, с. 364].

Считая выводы французского психолога заслуживающими внимания, Н.А. Васильев предостерегал от смешения реальных противоположностей и логических противоречий. Движение мысли в ходе исследования объекта, отказ от одних суждений науки и принятие в качестве истинных других, антагонизмы социального мира, ненависть и одновременно любовь к одному и тому же лицу — это, по Васильеву, не должно трактоваться как логические противоречия. Все это, согласно его взглядам, свидетельствует о наличии внутренне противоречивых объектов. Когда мы сталкиваемся с объектами последнего рода, мы можем, согласно Васильеву, говорить о противоположностях, но не можем говорить об отрицании одного другим — одной противоположности другой противоположностью.

Между тем, отрицания в логике (в классической, формальной) все же есть. Как же смотреть на них с точки зрения «бедной» — а на деле самой возвышенной — логики (т.е. металогики)? По Васильеву, отрицательные суждения — и психологически, и логически — предполагают возможность *ошибки*, *заблуждения*: они выражают несовершенство человеческого мышления, выступая его случайными *акциденциями*. Тут у Васильева, судя по всему, речь идет о *погрешности*, *грехе*, *зле*, — о том, что Отцы церкви понимали как недостаток, отсутствие чего-то необходимого в тварном мире. Таким образом, рассуждение Васильева об утверждающем истину Духе отвечало не только установкам философов русского Серебряного века, но и шло в русле учений православных авторитетов прошлого, которые понимали ложь как отсутствие бытия, как то, что отвергнуто и осуждено от века. Васильев полагал, что металогика прикосновенна миру *умных сущностей*, — миру, в котором исключена всякая погрешность, всякое несовершенство, неизбежное в мире дольнем.

Васильев не конкретизировал свое учение о металогике. Единственное требование, которое предъявлял мыслитель, — очистить мышление от всего, что ему доставляет опыт. Казанский логик подчеркивал: «Если устранить то, что устранимо и эмпирично, останется неустранимая рациональная логика. Ее мы и предлагаем назвать металогикой. <...> Различие между металогикой и эмпирической логикой есть прежде всего различие между рациональным и эмпирическим (или, точнее, рационально-эмпирическим, так как эмпирическое в чистом виде не может существовать, так как и в эмпирической логике есть рациональные элементы)» [20, с. 115]. Связанная с Божеством металогика, судя по всему, не нуждается и в законе достаточного основания: ведь установить, связаны ли суждения причинно, можно только из их внелогического содержания. В металогике, где основание и следствие могут быть только истинными, истинным будет и соответствующее импликативное сложное суждение. «Металогика, — уточняет свою мысль Васильев, относится к эмпирической логике как абстрактное к конкретному, как бедное к богатому, как минимальное к максимальному. Металогика — это то, что обще всем логикам, и поэтому она беднее их содержанием» [20, с. 116]. Для казанского мыслителя металогика — это только возможность логики, но не сама логика.

Мысль Васильева о совершенной и одновременно минимальной логике, в которой действует принцип «исключенного второго», может быть рассмотрена как логическая экспликация рассуждений отечественных философов Серебряного века о *всеединстве.* Наиболее рельефно данная доктрина отражена в работах последователей Вл.С. Соловьева, к числу которых принадлежали Е.Н. Трубецкой, Л.П. Карсавин, С.Л. Франк (о соответствующих идеях П.А. Флоренского мы скажем ниже). Исходя из онтологической общности всех предметов, сущих в мире, и понимая эти предметы как индивидуации Всеединого начала, философы данного направления утверждали, что злое в мире есть только недостаток, неполнота добра, возникающая в силу неокончательного усвоения Божественной сущности. Зла, таким образом, нет: есть различные уровни приобщения к добру. Логически это и предполагает отсутствие необходимости что-либо отрицать в мире, созданном Богом: ведь это значило бы, по мысли всеединцев, отрицать и Творца мира. Данный вывод, быть может, в большей степени отвечающий Божественному замыслу о человеке и мире, а не реальному положению вещей, будет справедлив для мира нематериальных идей, мира Божества. Но именно для мышления Бога предназначалась металогика Васильева.

Заметим, что представление о всеединстве не является для России чем-то новым — оно не придумано ни русским логиком, ни религиозными философами Серебряного века. Оно коренилось в самой основе отечественной умозрительной традиции и определяло специфику восточно-христианского философского и культурно-религиозного дискурса. В своих основных чертах оно было дано в Евангелии.

Ниже мы проследим, каким образом умозрение мыслителей Серебряного века повлияло на развитие логических теорий — паранепротиворечивости и антиномичности. Здесь существенны прежде всего философско-религиозные идеи П.А. Флоренского.

4 Истина как проблема онтологии и гносеологии

Обращение к религии и, шире, к вере в трансцендентальный Абсолют для Флоренского, как отмечают исследователи его творчества, было вызвано возникшей в молодости острой потребностью не только обрести критерии достоверности знания (не находя их на почве научной рациональности, философ обратился к интуиции как одному из средств постижения истины), но и вообще — найти жизнестроительные принципы, необходимые для выработки цельного взгляда на мир. Именно поэтому и в науке, и в философии, но особенно в религиозной традиции о. Павел стремился найти ответы на столь мучавшие его вопросы. Осмысление, а иногда и новое прочтение сохраненных традицией религиозных текстов, предпочтение, отдаваемое предлогическому и сверхлогическому перед рациональным, внимание к математике и Платону — все это для Флоренского находилось в русле усилий по обретению истины, было связано с поиском ответа на вопрос: чем она — истина — является. Ввиду особой важности этого, задаваемого религиозным мыслителем, вопроса, отметим сложившиеся в философии представления об истине, истинности. Ведь вопрос: *что есть истина и как отличить ее от заблуждений и преднамеренной лжи* — имеет не только теоретический, но и насущный практический смысл. В разных течениях философии науки XIX–XX вв. вопрос об истинности знаний рассматривался как один из самых трудных, а такие авторы, как Поппер, даже объявили его не имеющим для научной теории самостоятельного смысла, повторяя вслед за Гёте: «Гораздо легче найти ошибку, чем истину».

Распространенные в настоящее время дефиниции истины, на наш взгляд, недостаточно глубоки. Истину характеризуют как правильное представление о действительности; как мысль, которая соответствует своему предмету, т.е. передает его таким, каков он есть; как соответствие познания изучаемому; как знание, соответствующее предмету, совпадающее с ним. Эти «определения», как очевидно, несут в себе, по сути, одинаковое содержание. Наиболее естественным является понимание истины как того, что с той или иной мерой адекватности отражает реальный порядок вещей.

То специфическое свойство человеческого знания, что оно, как правило, бывает лишь отчасти истинным, в начале XX века с особой силой подчеркивал С.И. Поварнин. В книге о теории и практике спора он продемонстрировал, что в научной полемике ее участники, как правило, обладают истиной лишь в какой-то степени, и каждая из сторон может впадать в то или иное заблуждение. Поварнин здесь подчеркивает следующее: «Просты и несомненны (для обычных целей) лишь истины нашего обычного опыта; например, я не сомневаюсь, что спал в эту ночь и утром пил чай. Но чем сложнее и отвлеченнее истина, тем менее она „проста“ и тем труднее достигнуть правильной уверенности в ней. Между тем огромное множество людей совершенно не понимает этого» [27, с. 20]. Русский логик сетовал, что в эвристической практике неуловимость «полной» — абсолютной — истины не учитывается вовсе, а преобладают безапелляционные выводы и суждения. «Не следует забывать, — предупреждал С.И.Поварнин, — что большинство „истин“, выходящих за пределы простого обычного опыта, тоже не „чистые истины“, что в них тоже есть примесь заблуждения большего или меньшего, которого мы оценить теперь не в силах» [*Там же*].

Понимание истины как отношения знания к познаваемому принималось и Флоренским, в частности, когда русский богослов обращался к проблеме соответствия образа, явленного в православной иконе, горнему Первообразу. Так, о. Павел совершенно справедливо охарактеризовал эстетически совершенные реалистические произведения религиозной живописи эпохи Возрождения как *лжесвидетельства*, в своем духовном содержании сильно уступающие образцам византийского религиозного искусства. Здесь он констатировал: «Религиозная живопись Запада, начиная с Возрождения, была сплошной художественной неправдой» [42, с. 66]. В работе «Иконостас» он говорил о Троице Андрея Рублева как о наиболее убедительном свидетельстве истинности христианства: «Из всех философских доказательств Бытия Божия наиболее убедительно именно то, о котором даже не упоминается в учебниках; примерно оно может быть построено умозаключением: „Есть Троица Рублева, следовательно, есть Бог“» [42, с. 67]. Сходное о. Павел писал и о православных святых: их бытие как бы показывает, что есть Истина: «Подвижник не словами своими, а самим собою, вместе со словами своими, а не отвлеченно, не отвлеченной аргументацией, свидетельствует и доказывает истину — истину реальности, подлинной реальности» [42, с. 57].

Не меньшей проблемой, чем проблема соответствия образа реальности самой реальности является проблема языка, на котором фиксируются как результаты научного исследования, так и выводы богословско-философского характера. Вопрос здесь стоит так: как определить степень того, в какой мере знание, выраженное в символической форме, отвечает тому, что изучается, — физическим процессам, историческим событиям, процессам сознания, религиозным переживаниям? Можно ли изменчивые и текучие явления реальности, столь многообразной в своих формах и проявлениях, вместить в жесткие рамки понятийно-категориального аппарата?

Недоверие к знаку, символу не раз проявлялось и в религиозных учениях, и в богословской практике. Так, в Средние века особое значение придавалось языку, на котором писался и читался религиозный текст. Грамматике и синтаксису при этом уделяли первоочередное внимание. Именно поэтому Флоренский, толкуя смысл сложных философско-богословских терминов, обращается к греческому языку первоисточников восточно-христианской традиции, стремясь таким способом восстановить истинное значение понятий.

Для Флоренского как мыслителя религиозного проблема Истины лежала, разумеется, не столько в плоскости гносеологии, сколько онтологии. Можно сказать, что истина была для него не *что*, а *Кто*. Что же касается проблем гносеологии, то о. Павел прочно увязывал их с практикой Богопознания.

Реальность Истины, взятой как Абсолют, по Флоренскому, — и в полном соответствии с ортодоксальной точкой зрения — помогает человеку укорениться в Боге. Она, образно говоря, позволяет личности-индивиду прикоснуться к Личности-Христу. Это — акт духовного восхождения, требующий от рассудка подвига самоотречения. Русский философ-богослов подчеркивал, что познающему субъекту необходимо учитывать ограниченность рационально-логических схем, неточных и слишком бедных, а потому не позволяющих приблизиться к Истине (с большой буквы); для этого надо возвыситься до позиции разума-Логоса. Это означает приятие такого мышления, которое требует оперирования антиномиями. Чтобы формализовать такое мышление, необходима *логическая теория антиномичности.*

***

Знакомясь с огромной литературой, посвященной П.А.Флоренскому, мы с удивлением обнаруживаем, что вне поля исследовательского внимания до сих пор остаются его логические взгляды, его учение о логике антиномичности и его попытки применить математическую логику к решению отдельных богословских вопросов. Последний пример: на прошедшей в апреле 2007 г. в Московском университете и Московской Духовной академии юбилейной научной конференции, посвященной «125-летию со дня рождения и 70-летию мученической кончины философа, богослова, ученого, священника Павла Александровича Флоренского», его логическим воззрениям не было посвящено ни одного доклада! Настоящая статья служит в какой-то мере восполнению этого пробела.

5 Бесконечность — потенциальная или актуальная?

Как известно, П.А. Флоренский получил блестящее математическое образование, окончив соответствующее отделение физико-математического факультета Московского университета. Однако он не пошел по математической стезе (о чем сожалел Николай Николаевич Лузин, учившийся тоже на математическом отделении, но только годом младше), а поступил в Московскую духовную академию, по окончании которой получил там доцентуру. Защищенная им в 1914 году в МДА магистерская диссертация «О духовной истине. Опыт православной теодицеи» явилась основой рассматриваемого нами в настоящей работе главного труда Флоренского.

Математическая образованность о. Павла позволила ему одним из первых в России понять огромную значимость учения о множествах Георга Кантора и для математики, и для философии, и для богословия. К этому добавилось то, что о. Павел владел основоположениями и аппаратом математической логики, что дало ему возможность рассматривать проблемы *разума*, *истины* и *противоречия* не только в теологических, но и в чисто научных, причем точных, терминах.

Канторово учение о множествах явилось одной из первых областей математики, изучая которые, Флоренский столкнулся с феноменом антиномичности. Свидетельством этого явилась опубликованная им в 1904 году — году окончания им Московского университета и поступления в Духовную академию — статья «О символах бесконечности» [37]. В ней он констатирует, что пренебрежение дистинкцией понятий *актуальной* и *потенциальной* бесконечности привело в истории человеческой мысли ко многим недоразумениям.

Вслед за Кантором Флоренский признает подлинной бесконечностью *актуальную*, считая потенциальную бесконечность «вспомогательным» понятием; известное с античных времен как «неопределенное» (апейрон Анаксимандра), оно в философии Нового времени получило название *дурной бесконечности*. Это, писал Флоренский, есть *переменное конечное* количество, тогда как актуальная бесконечность есть постоянное, *константа*, обогащенная признаком — быть больше «*всякой* конечной константы, как бы великой мы ее ни взяли». В этом смысле, писал Флоренский, мы можем сказать, что «могущество Божие актуально-бесконечно, потому что оно, будучи определенным (в Боге нет изменения), в то же время больше всякого конечного могущества» [37, с. 177–178].

Понятие о бесконечности, возникшее в эллинской науке в связи с попытками уяснения природы *Универсума*, было перенесено на почву логики Аристотелем[8]. Здесь-то и выяснилось (Флоренский ссылается на диалог Шеллинга «Бруно»), что «каждое понятие есть бесконечность, потому что оно объединяет собою множество представлений, которое не является конечным; но так как объем понятия, по существу дела, вполне определен и дан, то эта бесконечность не может быть ничем иным, кроме актуальной бесконечности»; далее, и всякое «суждение, всякая теорема носят в себе актуальную бесконечность»[9], и в этом вся сила логического мышления, как указывал еще Сократ [37, с. 178].

Обосновывая необходимость введения актуальной бесконечности, Флоренский говорит о том, что потенциальная бесконечность предполагает беспредельное изменение, но для этого необ-

---

[8] Здесь Флоренский ссылается на известного историка науки, французского ученого Поля Таннери.

[9] Следует ссылка на труд Анри Пуанкаре «Наука и гипотеза».

ходима область изменения, которая сама уже не может меняться, так как в противном случае потребовалась бы «область изменения для области [изменения] и т.д.». Поэтому «всякая потенциальная бесконечность уже предполагает существование актуальной бесконечности как своего сверх-конечного предела» [37, с. 179].

Обращаясь к учению Кантора, Флоренский называет три различные области, где реализуется актуально бесконечное: в Боге (in Deo sive natura naturante), в мире, где актуально-бесконечное «может быть предположено in concreto, в зависимом мире, в твари, in natura naturata (Кантор называет ее «*Transfinitum*») и в духе — in abstracto, поскольку дух „имеет возможность познавать *Transfinitum* в природе и, до известной степени, *Absolutum* в Боге“» [37, с. 181–182]. Флоренский приводит два аргумента против актуальной бесконечности, выдвинутых ранне-христианским философом и богословом Оригеном, — что в тварях нельзя мыслить бесконечного и что, если бы бесконечное множество существовало, оно бы постигалось числом, но числа бесконечного не существует. Кантор же своим учением о множествах опроверг эти аргументы. Он показал, что символы бесконечности можно создать и что «не только абсолютный дух, но и мы можем иметь идею о бесконечном множестве» [37, с. 185].

В годы, когда писалась рассматриваемая нами статья, терминология теории множеств еще не сложилась. Канторовскую «науку о множестве и единстве в их взаимоотношениях» П.А. Флоренский называл «наукой о группах». В терминах «групп» он и излагал основные положения канторовского учения. Он привел основные разъяснения Кантора, касающиеся понятия множества («группы») и различия между конечными и бесконечными множествами, а также отношения между множеством и составляющими его элементами; это отношение предполагает принцип исключенного третьего: «в сущности элемента уже определено, что он либо подпадет под определение [данной] группы, либо нет» [37, с. 199].

В статье систематически излагались основные положения учения Кантора о бесконечных множествах — вводились понятия о мощности множеств и их эквивалентности, понятия упорядоченного и вполне упорядоченного множества, а также операции над множествами; и, наконец, перед читателем вставала во всем объеме развитая Кантором иерархия кардинальных (количественных) и ординальных (порядковых) чисел. Ныне все это широко известно, но иначе обстояли дела в начале прошлого века. Поэтому к выкладкам Флоренского следует подходить, учитывая его эпоху.

Можно констатировать, что в альтернативе: бесконечность — потенциальная или актуальная — Флоренский выбрал вторую, считая, что первая должна быть отброшена, так как ведет к логическому противоречию. Прошло немного времени, и с критикой актуально бесконечного и связанного с ним безоговорочного признания принципа исключенного третьего выступил Э.Я.Л. Брауэр. Со своей стороны, упомянутый Н.Н. Лузин был склонен критически относиться к идее актуальной бесконечности и поэтому был осторожен в применении принципа исключенного третьего, когда речь заходила о бесконечных совокупностях объектов.

***

Заключительная часть статьи Флоренского звучит как гимн гению Кантора, который совершил, по его словам, подвиг великой веры — веры в возможность создания символов бесконечности. О. Павел в связи с этим писал: «Если мы ничто перед Абсолютным, то все же мы — нравственно однородны с Ним, мы можем постигать Его, но не прямо, а в символах; мы носим в себе трансфинитное, сверх-конечное; мы, — космос, — не являемся чем-то конечным, прямо противоположным Божеству, мы — трансфинитны, „середина между всем и ничем“» [37, с. 232].

По мысли Флоренского, Г. Кантор показал, как создать символы для Бесконечного, как можно реализовать «внутренне непротиворечивую идею Трансфинита». Со своей стороны, о. Павел видел, что сама идея актуальной бесконечности не лишена противоречия. В пробной лекции pro venia legendi, прочитанной им в 1908 году на Совете МДА [38] и посвященной космологическим антиномиям Иммануила Канта, он хотя и выдвигает — в качестве главного возражения немецкому мыслителю — «неприятие им во внимание идеи *актуальной бесконечности*», вместе с тем указывает на антиномичность последней. «Признаки данности — законченности и бесконечности — беспредельности — сочетаются в идее *актуальной бесконечности*, которая дана, *но не исчерпывается* никаким *конечным рядом синтезов*». В опыте никогда не дана бесконечность, но всегда только конечное, но не просто конечное: опыт всегда потенциально бесконечен; он — бесконечность в возможности; никогда не данной, но всегда имеющейся в виду. «Абсолютность, законченность, бесконечность — это отражение в опыте собственного стремления *разума*, его неудовлетворенности конечным и условным» [38, с. 5]. О. Павел заключает: «Идея о *возможности* антиномий разума — самая глубокая и самая плодотворная из идей Канта. Но доказательство действительного их *существования* — кажется, самое непрочное место „Критики [чистого разума]“» [38, с. 27, 28](см. также Прибавление «Экскурс об антиномической структуре разума», с. 30).

Восполняя этот недостаток, Флоренский помещает в данной статье «Прибавление» — «Экскурс об антиномической структуре разума». В нем дан абрис того, что в развернутой форме изложено в его труде «Столп и утверждение истины». Поэтому теперь мы перейдем к трактовке антиномии самим П.А. Флоренским.

6 Идея антиномичности истины у Флоренского

Идея противоречивости бытия и познания — очень древняя. Уже на этапе возникновения логики как самостоятельной отрасли философского знания обращалось внимание на антиномичность (апорийность) как одну из существенных философско-логических проблем. Так, античные философы — софисты, стоики, элеаты, скептики пытались как-то справиться с парадоксами типа «Лжец», «Куча», «Спрятанный». Они, далее, открыли апории, ведущие к противоречиям, связанным с мысленным отображением движения, пространства и времени. Была осознана антиномичность отношения множественности и единственности, обнаружена трудность индивидуации предметов мысли. Средневековые схоласты в своих логических компендиумах вводили особый раздел — *О неразрешимых предложениях.* Наконец, широкую известность приобрели кантовские антиномии чистого разума, о которых говорил Флоренский, а также гегелевское учение о противоречии как основе «диалектики». Однако все эти рассмотрения не приводили ни к последовательному анализу идеи *антиномичности*, основанному на учете данных логики, ни к созданию сколько-нибудь разработанных логических теорий противоречивости. Свое веское слово здесь сказали, с одной стороны, П.А. Флоренский, отстаивавший тезис об антиномичности истины, а с другой — Н.А. Васильев, создавший исторически первый вариант «логики противоречий».

Противоречивость — антиномичность, апорийность — у о. Павла выступает в качестве *важнейшего* элемента интерпретации православного вероучения. Проблеме противоречия посвящено «Прибавление» в его статье об антиномиях Канта, а главное — «шестое письмо» его фундаментального труда. Противоречие для Флоренского связано с Истиной (с большой буквы) и истинами, явленными в человеческих суждениях и понятиях. «Там, на небе — единая Истина; у нас — множество истин, осколков Истины, не конгруэнтных друг с другом» [41, том I, с. 158]. «Существование многих истин есть лишь иное выражение самого факта существования твари» [41, том I, с. 143]. Но «в твари данная <...> истина должна быть монограммою Божества» [41, том I, с. 145]. Истина, полагал Флоренский, есть «такое суждение, которое содержит в себе и предел всех отменений его, или, иначе, *истина есть суждение самопротиворечивое.* <...> Истина потому и есть истина, что не боится никаких оспариваний; а не боится их потому, что сама говорит против себя более, чем может сказать какое-угодно отрицание; но это само-отрицание свое истина сочетает с утверждением. Для рассудка *истина есть противоречие*, и это противоречие делается явным, лишь только истина получает словесную формулировку. <...> Тезис и антитезис *вместе* образуют выражение истины. Другими словами, истина есть антиномия, и не может не быть таковою» [41, том I, с. 147].

Истина как «предел всех отменений суждения» означает, по Флоренскому, то, что истинное суждение предусматривает все возражения на него и отвечает на них. Антиномией она является потому, что на вопрос: «Почему A есть A?» следует ответ: «„Потому A есть A, что вечно бывая *не*-A, в этом *не*-A оно находит свое утверждение как A“. Точнее: A потому есть A, что оно есть *не*-A. Не будучи равно A, т.е. самому себе, — оно в вечном порядке бытия всегда устанавливается силою *не*-A, как A» [41, том I, с. 47].

Итак, основной тезис рассуждений религиозного мыслителя состоит в том, что любое A может быть познано в сопоставлении с *не*-A, т.е. через свое другое; *не*-A является условием существования A, условием его различения. Без *не*-A мы бы A не заметили, и отсутствовала бы возможность выделения A из предметов универсума.

Мы еще вернемся к предложенному Флоренским толкованию истины как антиномии. Здесь же отметим, что о. Павел, с одной стороны, указывал на древность идеи антиномичности, а с другой стороны, на ее распространенность в науке. Понятие «антиномия», писал Флоренский, появляется не ранее Канта, да и то только в «Критике чистого разума» — до этого слово «антиномия» было юридическим и, отчасти, богословским термином. Но «идея необходимой само-противоречивости рассудка» — древняя, и Флоренский говорит об эллинской идее сочетания противоположностей, называя, как мы уже говорили, Гераклита и Платона, элейцев и Николая Кузанского, Гегеля и Ницше, и др. Что касается науки, то о. Павел указал на присутствие идеи антиномичности даже в специальных дисциплинах — в лингвистике (здесь упомянуто имя Вильгельма Гумбольдта), в математике (Г. Кантор, Б. Больцано, А. Пуанкаре), в богословии (Флоренский пишет, что антиномии христианства особенно подчеркивает Д.С.Мережковский), в физике и механике, в социологии (Н. Кареев), в этике (уже названное сочинение Канта, гл.V), в эстетике (Кант, «Критика способности суждения», § 55–57), и, конечно, в логике.

Вряд ли следует сомневаться в том, что идея антиномичности, как она рассматривалась о. Павлом, отражала специфику мышления той переходной эпохи, и если ее и нельзя считать фактором, побудившим ученых приступить к поиску формализованных логических систем, допускающих противоречие, то сигналом того, что время такого рода логик настало, — можно. И подтверждением здесь служит не только концепция «воображаемой логики» Н.А. Васильева, но и идеи некоторых русских неокантианцев. Однако прежде чем о них говорить, рассмотрим детальнее осененные светом православия логико-методологические воззрения о. Павла.

7 Критика рассудочного знания. Проблема достоверности

Исходный пункт мысли П.Флоренского — это неуловимость для логических принципов церковности как жизни в духе. Согласно о. Павлу, «...для всякого, желающего понять православие, есть только один способ — прямой опыт православия <...> можно стать католиком или протестантом по книгам <...> Но, чтобы стать православным, надо окунуться разумом в самую стихию православия, зажить православно, — и нет иного пути» [41, том I, с. 8]. Читая эти слова, можно вспомнить о покойном Ю.А. Шрейдере, принявшим именно католицизм и в его «ментальном стиле» сочинившим свой труд по этике [46][10].

Для Флоренского вера «„с доказательствами от разума“, вера по толстовской формуле <...> есть заскорузлый, злой, жестокий и каменный нарост в сердце, который не допускает его к Богу», крамола против Бога. «„Разумная вера“, — согласно отцу Павлу, — есть смрад пред Богом». Отсюда оправдание тертуллиановского «Credo quia *absurdum*»: что «умер Сын Божий, это достоверно, потому что нелепо; что Он, погребенный, воскрес, несомненно, потому что это невозможно». Это верно «вопреки стопам рассудка» [41, том I, с. 61,64], [41, том II, с. 638].

Комментируя этот взгляд во втором томе своего труда, где разъясняются некоторые «частности», о которых говорилось в томе первом, Флоренский писал: «Что жизнь недоступна рассудку, — об этом у нас рассуждали многие, особенно же настаивали на этом пункте у нас *славянофилы*, преимущественно *А.С.Хомяков* и *И.В.Киреевский* <...> но сверх-рассудочность *духовной* жизни, „зоэ“, о которой говорят славянофилы, не

---

[10] В предисловии к данной книге, между прочим, подчеркивается, что в ней «богословский контекст изложения носит скорее общехристианский, чем специфически католический характер» (с. 3). Математическая интерпретация проблем морали особенно отчетливо просматривается в Главе 8 этого исследования (см. параграфы «Алгебра комбинирования добра и зла», «Формальная структура рефлексии»). См. аналогичные установки в [47].

должна быть смешиваема с иррациональностью *естественной* жизни, как биологического явления, bios». На недоступность *такой* жизни — bios — формулам рассудка в свое время указывал *Гёте*, а в настоящее время «особенно сильно и подробно» говорит *Анри Бергсон*[11].

Не отвергая научной значимости рассудочного знания, о. Павел на первое место ставил познание *интуитивное*. Говоря, что истины даны человеку в его *суждениях*, Флоренский писал: «Суждение, данное непосредственно, есть само-очевидность интуиции — evidentia, $\epsilon\nu\epsilon\rho\gamma\epsilon\iota\alpha$. Далее она дробится: Она может быть само-очевидностью *чувственного* опыта, и тогда критерий истины есть критерий эмпириков *внешнего* опыта (эмпириокритицистов и проч.): „Достоверно все то, что может быть сведено к непосредственным восприятиям органов чувств; достоверно восприятие *объекта*“. — Она может быть само-очевидностью интеллектуального опыта, и критерием истины в этом случае будет критерий эмпириков внутреннего опыта (трансценденталистов и проч.), а именно: „Достоверно все то, что приводится к аксиоматическим положениям рассудка; достоверно самовосприятие *субъекта*“. — И, наконец, само-очевидность интуиции может быть само-очевидностью интуиции *мистической*; получается критерий истины, как он разумеется большинством мистиков (особенно индусских): „Достоверно все то, что остается, когда отвеяно все неприводимое к восприятию субъект-объекта, достоверно лишь восприятие *субъект-объекта*, в котором нет расщепления на *субъект* и *объект*“» [41, том I, с. 24–25].

Но интуитивный критерий свмоочевидности, какого бы рода он ни был, для Флоренского недостаточен, так как не доставляет достоверности. Поэтому необходимо обращение к опосре-

---

[11] П.А. Флоренский здесь указывает на труды Анри Бергсона, к тому времени имевшиеся в русском переводе: «Материя и память. Исследование об отношении тела к духу». Перев. с фр. А.Баулера. СПб., 1911; «Время и свобода воли». Перев. С.И. Гессена. М.: Изд. журнала «Русская мысль», 1910; «Творческая эволюция». Перев. М. Булгакова. М., 1909. В числе работ о Бергсоне названы: *Ю. Кронер.* «Творческая эволюция (А.Бергсон)» // «Логос», русск. изд., кн.1, М., 1910, и *Б.Н.Бобынин.* «Философия Бергсона» // «Вопросы философии и психологии», т. XXII (1911), кн.108 (III) май–июнь, и кн. 109 (IV); последнего автора не следует путать с историком математики и логики Виктором Викторовичем Бобыниным. См. [41, том II, с. 608–609].

дованным суждениям — к тому, что «принято называть *дискурсией*, ибо здесь разум discurrit, *перебегает»* от одного суждения к другому [41, том I, с. 30]. Такую достоверность Флоренский называет *отвлеченно-логической*, в отличие от интуитивной, «конкретно-выразительной» [41, том I, с. 32]. Требование достоверности означает решение: ничего не принимать без доказательства; последнее предполагает установление аподиктической связи между логическим подлежащим суждения и его логическим сказуемым.

8 Два вида закона тождества

«Второе письмо: сомнение» о. Павел начинает с утверждения, что для теоретической мысли «Столп Истины» — это достоверность. На пути к ней неизбежно возникает вопрос о справедливости закона тождества — того, что «„вообще всякая данность есть она сама: всякое A есть A“» — но для разума «A=A бессмысленное равенство» [41, том I, с. 25]. Это, по Флоренскому, вытекает из явлений множественности и изменения, присущих и внешнему миру, и миру внутреннему, и, наконец, миру мистических восприятий. Между тем рассудок, в отличие от разума, считает, что лишь A, равное самому себе и не равное тому, что не есть A, является подлинно сущим. Рассудок и разум противны друг другу: «Жизнь — текучая, несамотождественная <...> может быть прозрачна для разума <...> А рассудок враждебен жизни» [41, том I, с. 29–30].

Эти слова о. Павла не следует понимать как отвержение рассудочного знания. Флоренский внимательно вглядывался в него, различая, например, ясность и отчетливость мысли, с одной стороны, и ее объяснение — с другой. Мыслить ясно и отчетливо означает: «стоять на A и не сбиваться с него на *не-А*. „*Объяснять*“, т.е. „определять“ и „доказывать“ — это значит идти от A к *Б*, — к тому, что есть *не-А*. Но чтобы идти от A к *Б*, надо сперва установить A как A, т.е. чтобы „объяснять“ и „доказывать“ A, надо сперва „*мыслить его ясно и отчетливо*“». Для этого A надо понимать, т.е. объяснять его, определять, доказывать [41, том I, с. 485][12].

---

[12] Сходную формулировку мы находим в статье об антиномиях Канта: «Мыслить ясно и отчетливо — это значит под A разуметь именно A и ничего

Доказательственный процесс, однако, сталкивается с той трудностью, что впадает в «дурную бесконечность». Ибо переход от суждения обосновывающего к суждению обосновываемому для рассудка не имеет конца: «...раз уж кто <...> вступил на путь *объяснений* и *обоснований*», то на «вопрос „Где же конец?“ отвечаем: „Конца *нет*“. Есть <...> regressus in indefinitum — нисхождение в серый туман „дурной“ бесконечности»; иными словами, допущение подобного «перехода от n к $(n{+}1)$, каково бы ни было n», влечет мысль в бесконечность in potentia [41, том I, с. 32]. И в этом состоит ахиллесова пята рационализма. Чтобы избежать в этом процессе движение ad indefinitum, закон тождества, согласно о. Павлу, надо дополнить законом достаточного основания, позволяющим «остановку мысли». Эти законы составляют, по Флоренскому, «наличную норму рассудка» [41, том I, с. 485–486].

Таким образом, Флоренский не отбрасывает закон тождества, а дает ему свое истолкование, и когда нужно, например, опровергнуть взгляды скептиков, он ссылается именно на этот закон. Основное требование скепсиса — считать всякое недоказанное положение недостоверным — приводит к состоянию воздержания от всякого высказывания, или «эпохэ» — $\epsilon\pi\omega\chi\eta$. $E\pi\omega\chi\eta$ означает «остановку, задержку, это остановка мышления», так как означает принятие тезиса: «Я ничего не утверждаю; не утверждаю и того, что ничего не утверждаю», или ниже: «Я утверждаю, что ничего не утверждаю (A’); я не утверждаю, что ничего не утверждаю (A”)». Здесь, указывает Флоренский, нарушается закон тождества $A{=}A$. Ибо «об одном и том же подлежащем, — об утверждении своем, A, — в одном и том же отношении высказываются противоречивые сказуемые:

- A есть A;
- A не есть A» [41, том I, с. 35–36], [41, том II, с. 628].

более; объяснять и доказывать — это значит выходить мыслию за пределы A к $Б$. Мыслить ясно и отчетливо — это значит стоять на A и не сбиваться с него на *не-A*. Объяснять (определять и доказывать) — это значит идти от A к $Б$, — к тому, что есть *не-A*. Но, чтобы идти от A к $Б$, надо сперва установить A как A, т.е. чтобы объяснять и доказывать A, надо сперва мыслить его ясно и отчетливо» [38, с. 3].

«Так получится пирроническое, поистине огненное („пюр“ — огонь) терзание» [41, том I, с. 37]. Итак, завершает ход своей мысли о. Павел, позиция скептицизма, как и путь рационализма, не ведет ни к чему.

***

Таким образом, закон тождества для Флоренского — это совокупность *аналитических законов мышления*: закон тождества берется вместе с его неизбежными спутниками — законом противоречия и законом исключенного третьего, ибо они, все три, говорят с разных сторон об одном и том же. К аналитическим законам, по Флоренскому, как мы уже говорили, надо добавить закон достаточного основания. Но закону этому о. Павел не придавал большого значения. Это и понятно, так как обоснование суждения *А* он видел прежде всего в его сопоставлении с *не-А*.

В самом деле, мы читаем у о. Павла, что в плане устремления к обоснованию понятий и суждений — т.е. «в плане определения и доказательства — каждое *А* должно иметь свою основу в *не-А*; <...> Когда мы спрашиваем: „Что есть *А*?“, то нам дают ответ: „*А* есть *Б*“, т.е., другими словами, выводят *А* из его само-тождества „*А*=*А*“ и приравнивают его *Б*, тому, что не есть тождественно *А*» [41, том I, с. 484–485].

Что «достаточное основание» в изложении о. Павла с трудом находит место в рассудочной логике, видно из того, как трактуется вопрос о том, что значит «мыслить ясно и отчетливо». Выше мы кратко изложили его мысли по этому поводу. Теперь настало время привести полностью соответствующие слова о. Павла: «„*Мыслить ясно и отчетливо*“ — это значит под *А* разуметь именно *А* и ничего более; „*объяснять*“ и „*доказывать*“ — это значит выходить мыслию за пределы *А*, к *Б*. „*Мыслить ясно и отчетливо*“ — это значит стоять на *А* и не сбиваться с него на *не-А*. „*Объяснять*“ т.е. „*определять*“ и „*доказывать*“ — это значит идти от *А* к *Б* — к тому, что есть *не-А*. Но, чтобы идти от *А* к *Б*, надо сперва установить *А*, как *А*, т.е. чтобы „объяснять“ или „доказывать“ *А*, надо сперва „*мыслить его ясно и отчетливо*“, надо *понимать* это *А*, т.е. надо „*объяснять*“ его, — т.е.

„*определять*“ и „*доказывать*“ — надо устанавливать A, как *не*-A. Но для последнего опять-таки надо установить A, как A. И так идет процесс ad indefinitum. Одна функция разума предполагает другую; но, вместе, одна — исключает другую. Всякое не-тождественное объяснение приводит A к *не*-A. Всякое ясное и отчетливое мышление устанавливает тождество $A{=}A$. Утверждение A как A и утверждение его как *не*-A — таковы два основных момента мысли» [41, том I, с. 484–485].

Закон тождества как «первая норма рассудка» требует «остановки мысли», а как вторая — «беспредельного движения» мысли; первая «понуждает установить A, а вторая свести его к $Б$»; эта вторая норма есть закон достаточного основания [41, том I, с. 486].

Но как остановить это бесконечное сведение A к $Б$, $Б$ к $В$ и т.д. — эту трудность о. Павел решает, ссылаясь на антиномичность мышления, о чем пойдет речь позже.

9 Формальная и математическая логика

Следует подчеркнуть, что Флоренский достаточно хорошо ориентировался в современной ему логике — формальной («философской») и математической, а также в теории множеств. Ему были известны труды не только Георга Кантора, но и Бертрана Рассела, Анри Пуанкаре. Вообще, логическая эрудиция о.Павла чрезвычайно широка. В примечании № 211 к «Письму шестому: противоречие» мы находим перечень трудов по математической логике («логистике»), принадлежащих зарубежным и русским ученым. Список начинается с выпусков I и II «Опытов математического изложения логики» Виктора Викторовича Бобынина, где представлены работы Буля, Шрёдера и Роберта Грассмана. Указаны работы П. Порецкого. Зарубежная «логистика» представлена С. Джевонсом, Уайтхедом (указан его известный труд «Универсальная алгебра»), Б. Расселом, Дж. Пеано, Бурали-Форти, Хью Макколом. Назвав труд Б. Рассела «Принципы математики» и знаменитые «Principia mathematica» Уайтхеда и Рассела (Том I), Флоренский замечает: «Труды Шрёдера, Уайтхеда и Ресселя [так в то время транскрибировалось имя этого ученого] — капитальнейшие <...> изложения логистики: на основе теории классов, теории отношений и теории пропозициональных функций» [41, том II, с. 688]. Все это позволило о. Павлу овладеть логической техникой, где главным руководством для него служила известная книга Л. Кутюра [25].

Но в логических познаниях о. Павла имелся один существенный пробел: ему были неизвестны ни основополагающие для современной формы математической логики труды Готлоба Фреге (1848–1925 гг.), ни работы Давида Гильберта, заложившие основы аксиоматического метода. Знакомство с работами Фреге, думается, не отразилось бы — существенно, во всяком случае, — на логических взглядах Флоренского. Иначе обстоит дело с аксиоматическим методом Гильберта. В нем о. Павел нашел бы существенные возражения против своих рассуждений о «регрессе в бесконечность» доказательственного процесса, правда, не на «разумном», а на рассудочном, т.е. рациональном уровне.

На логику Флоренский смотрел, конечно, через призму своего антирационализма. Не владея аксиоматическим методом, он считал, что рассудочный доказательственный процесс означает regressus ad indefinitum. В этой части его критика рационализма была не вполне оправдана. Но когда мы читаем у него о том, что рационализм — «будь то рационализм Фихте, Шеллинга, Гегеля, современных марбуржцев или, наконец, логистиков», — в сущности занят одной задачею: «изгнать из области мысли все то, что не воспостроено чисто-логически, т.е. рационализировать все мышление», — мы должны с ним согласиться. И критический пафос о. Павла в отношении подобной установки совершенно понятен, тем более что, говоря о «логизации науки», он указывает на арифметизацию, проводимую в основаниях математики. Он метко заметил, что в этом случае интуиция, изгоняемая в дверь, неизбежно влетает в окно [41, том II, с. 625–626].

Это верно уже в применении к известной концепции *финитизма* Давида Гильберта. В книге Б.В. Бирюкова и В.Н. Тростникова эта мысль выражена в словах: «Гильберт считал, что необходимым условием надежности логических рассуждений является *наглядное представление* определенных внелогических конкретных объектов; эти объекты должны быть обозримы, четко отличны друг от друга, а их структура должна усматриваться вместе с ними как нечто, не сводимое к чему-либо другому» [11, с. 112]. Речь здесь идет о *знаках*, используемых в математике и логике, об их постижении по сути дела на *интуитивном* уровне, не поддающемся математико-логической экспликации. Флоренский был прав, говоря, что в этом дан «опыт наглядного приведения к абсурду самого принципа рационалистического» [41, том II, с. 626]. С этой точки зрения он имел бы все основания возражать против «терапевтической» функции аксиоматического метода, когда мы находимся на уровне разума.

Стоит обратить внимание на то, как Флоренский «разводит» формальную и символическую логику. Формальная логика, основанная Аристотелем, монистична в том смысле, что берет в качестве первичного либо понятия (и, опираясь на них, осуществляет последующие логические конструкции), либо суждения (служащие той же цели). «Символическая же логика, основываясь на соотносительности и неразделимости суждений и понятий, существенно *дуалистична* <...> не бывает ни суждений без понятий, ни понятий — без суждений <...> Понятия и суждения суть такие элементы мышления, которые, будучи всегда вместе, различаются не безотносительно, а лишь соотносительно, и, вне своего соотношения, они не могут быть рассматриваемы как различные <...> [В символической логике] при алгорифмических выкладках нам нет ни малейшей надобности знать, имеем ли мы дело с суждениями или с понятиями; полученная формула будет равно справедлива и при той и при другой интерпретации, так что каждая формула представляет собою *две* теоремы — одну из исчисления классов, а другую — из исчисления предложений» [41, том II, с. 621][13].

Заметим, что в своем учении об антиномичности познания и истины Флоренский — ради простоты, как он говорит, — имел в виду логику *суждений*; «и тогда истина оказалась антиномией *суждений* <...> в логике *понятий* мы пришли бы к выводу подобному, а именно, что истина есть антиномия *понятий* <...> Ведь каждое понятие превращаемо в соответствующее ему суждение, и каждое суждение — в понятие» [41, том I, с. 148].

---

[13] Следует заметить, что Флоренский здесь ссылается на уже упомянутую книгу Л. Кутюра «Алгебра логики».

10 Дискурсивная интуиция и интуитивная дискурсия. Омиусианство и омоусианство

Преодоление ограниченности «норм рассудка» Флоренский начинает с того, что к аналитическим законам (закону тождества и двум другим его «родственникам») он добавляет закон достаточного основания. Он пишет, что первая из норм рассудка требует «остановки мысли, а вторая — беспредельного движения мысли <...>. Первая есть *закон тождества*, а вторая закон *достаточного основания*» [41, том I, с. 486]. Но это не дает окончательного решения, так как не ясно, как снять это движение. Поэтому о. Павел делает следующий шаг — вводит представление об интуиции-дискурсии. Эта двойственная по положению, но единая по замыслу идея формулируется так: «Истина есть интуиция, которая доказуема, т.е. дискурсивна. <...> Чтобы быть интуитивною, дискурсия должна быть не уходящей в беспредельность, не возможною только, а действительною, актуальною. *Дискурсивная интуиция* должна содержать в себе синтезированный бесконечный ряд своих обоснований; *интуитивная же дискурсия* должна синтезировать весь свой беспредельный ряд обоснований в конечность, в *единство* <...> *Дискурсивная интуиция* есть интуиция дифференцированная до бесконечности; интуитивная же дискурсия есть дискурсия интегрированная до единства». Итак, Истина есть «конечная бесконечность и бесконечная конечность, или, — выражусь математически, — *актуальная бесконечность*» [41, том I, с. 43].

Подчеркивание интуитивной компоненты знания — дара «глубинного зрения», как охарактеризовал интуицию о. Павла С.С. Хоружий [44, с. 185], есть особенность мировоззрения Флоренского. Но это не мешало ему понимать, что научное знание требует постулата единообразия природы. Отстаивая данный тезис, православный философ ссылался на Стенли Джевонса и Джона Стюарта Милля. Но в их учениях, по мнению Флоренского, данный постулат построен на песке. Милль, убежден о. Павел, «по природе софист, опутывающий читателя и самого себя блестящей смесью фактов, цитат и остроумных оборотов» [41, том II, с. 683][14].

---

[14] Это — цитата из «Университетского опыта» В.Я. Цингера (М., 1874).

Положение о «единообразии законов природы» является постулатом, без которого невозможна никакая наука. Но постулат этот становится психологической реальностью только при вере в Божественное Слово. «Провидение Божие $<\ldots>$ вот религиозная предпосылка нашей науки», — пишет он [41, том I, с. 126]. Рационально-рассудочному истолкованию знания как «философии плотской», *омиусианской*, о. Павел противопоставлял омоусианскую философию[15].

Обратим внимание на то, что речь здесь идет о функциях *разума*, а не рассудка, а этим категориям Флоренский придавал большое значение, хотя проводимое им их различение не отличалось ясностью. Закон достаточного основания — *рассудочный закон*, и он находит свое место, когда заходит речь об объяснении, определении, доказательстве. Но последние понимаются также как функции *разума*.

Такой взгляд согласуется с тем, в чем Флоренский видел подлинное обоснование закона тождества — не в его низшем, рассудочном виде, но в некотором высшем, разумном, — том, который о. Павел счел высшей *формой закона тождества*[16]. Так понимаемый закон тождества может быть «животворящим в своей динамике». Ибо: «Вместо пустого, мертвого и формально самотождественного „$A{=}A$“, в силу которого A должно было бы быть самостно, само-утверждено $<\ldots>$ мы получили содержательное $<\ldots>$, реальное само-тождество A, как вечно отвергающего себя и в своем самоотвержении вечно получающего себя. Если в первом случае A есть A ($A{=}A$) вследствие исключенности из него *всего* (*— и его самого в его конкретности! —*), то

---

[15] Два противопоставляемых Флоренским подхода: омоусианский и омиусианский — лежат в основе познавательных практик двух культур. Омоусианство или «единосущие» характерно для исследователя, стоящего на почве православия. Здесь в акте познания исследователь восстанавливает свое изначальное единство с изучаемым объектом. Омиусианство, которое переводится как «подобосущие», есть установка, ставшая основой для западной науки Нового времени. Омиусианство — это путь анализа, путь разложения цельного объекта на составные части. Противоположность данного подхода православному омоусианскому очевидна.

[16] Ее открытие о. Павел связывал с именем архимандрита Серапиона Машкина, автора трудов «Опыт системы христианской философии» и «Система философии: Опыт научного синтеза», 1903, существовавших в виде рукописей.

теперь A есть A через утверждение себя как *не-A*, через усвоение и уподобление себе всего» [41, том I, с. 47–48].

В конце первого тома своего главного труда о. Павел пишет, что антиномичность основного строения рассудка ставит вопрос: «Как возможен рассудок?» Отвечая на него, Флоренский утверждает, что рассудок имеет две основы — начало *конечности* и начало *бесконечности.* При этом «ткань рассудка», сотканная из конечности и бесконечности — дурной бесконечности, беспредельности, — раздирается в противоречиях. Рассудок *равно* нуждается в обеих этих нормах. Но он не может пользоваться *обеими* ими, ибо они не совместимы. Рассудок насквозь «антиномичен». «„Рассудок возможен тогда, когда мыслимая им конечность есть бесконечность, и, наоборот, когда мыслимая в рассудке бесконечность есть конечность“; или наконец: „Рассудок возможен, если дана ему Абсолютная Актуальная Бесконечность“» [41, том I, с. 488] — а «Столп Истины» — это Церковь, это Дух Святой. Человек может достичь только того, что «сквозь зияющие трещины человеческого рассудка видна бывает „*лазурь вечности*“». Это непостижимо, но это — так. И мы знаем, что «„Бог Авраама, Исаака, Иакова, а не Бог философов и ученых“ приходит к нам. . . » [41, том I, с. 489][17].

11 Попытка построения логической теории антиномичности

Поскольку, как уже отмечалось, для Флоренского «Истина есть антиномия», он счел необходимым создание формально-логической теории *антиномичности* [41, том I, с. 148]. Пытаясь показать, в чем она состоит, о. Павел прибег к тому, что он назвал «логическим алгоритмом». И тут обнаружилось, что, владея логической техникой, он не до конца продумал вопрос о том, как следует согласовывать логические выкладки со своей богословской установкой.

Речь идет о рассуждениях о. Павла, как они представлены в его «Шестом письме: противоречие». Логические рассуждения

---

[17] Здесь о. Павел цитирует Блеза Паскаля, его знаменитый текст, известный под названием «амулета Паскаля». В томе II своего труда Флоренский посвятил ему «разъяснение» XXV, в котором привел французский текст, дал его русский перевод и его богословский комментарий. Паскаля о. Павел называл «проникновенным мыслителем». См. [41, том II, с. 577–581].

ведутся ученым в базисе: импликация ($\supset$), дизъюнкция, называемая им логическим сложением ($\cup$), конъюнкция, называемая логическим умножением ($\cap$), и отрицание, выражаемое короткой чертой, помещаемой перед формулой; вместо скобок используются точки, как это было принято в некоторых математико-логических построениях того времени. В дальнейшем мы вместо точек будем пользоваться скобками. Флоренский считал, что рассуждения об антиномиях естественно возникают из приема доказательства путем сведения к нелепости. Прием этот передается им формулой

$$\text{(IV)}\ \ (-p \supset p) \supset p,$$

(используется нумерация формул самого Флоренского). Подразумеваемое этой формулой рассуждение Флоренский считает парадоксальным, хотя и оправдываемым в «логистике»; из этой формулы, заменяя в ней букву p ее отрицанием $-p$ и применяя закон снятия двойного отрицания, он получает формулу

$$\text{(IX)}\ \ (p \supset -p) \supset -p.$$

Формулы (IV) и (IX), считает он, и «слагают собою антиномию P» [41, том I, с. 151].

У читателя-логика может возникнуть вопрос, правомерно ли говорить (как это делает о. Павел) о «парадоксальности» формул (IV) и (IX). Конечно, с точки зрения классической пропозициональной логики это кажется странным, так как упомянутые формулы тождественно-истинны. Но в них «просвечивает» то, что известно как парадоксы материальной импликации.

Антиномия, по мысли о. Павла, символически определяется как формула

$$\text{(X)}\ \ P = (p \cap -p) \cap \mathrm{V},$$

где V есть знак истины. Далее читаем: «Переводя формулу (X) на обычный язык, скажем: „Антиномия есть такое предложение, которое, будучи истинным, содержит в себе совместно тезис и антитезис, так что недоступно никакому возражению“. Прибавка же символа V поднимает антиномию над плоскостью рассудка и отличает антиномию P от лжи Λ (перевернутые V, или $-\mathrm{V}$), лежащей в рассудочной плоскости и определяемой формулой:

(XI) $\Lambda = p \cap -p$».

И далее: «По своему составу P нисколько не разнится от простого противоречия Λ, и, следовательно, в сфере рассудочной лишь авторитет является тем перстом, который отличает истинность P в сравнении с Λ» [41, том I, с. 152].

Как мы увидим, здесь самое существенное — ссылка на авторитет.

Рассматриваемое само по себе, это рассуждение ошибочно. *Конъюнктивное* присоединение истины V к противоречивой формуле $p \cap -p$ не обращает выражение $(p \cap -p) \cap \mathrm{V}$ в истину. P оказывается ложным. Делу не помогает ни представление P в видоизмененно-детализированном виде:

$$(*)\ \ (((-p \supset p) \cap (p \supset -p)) \supset ((p \cap -p) \cap -\Lambda) = P,$$

правда, сопровождающий ее комментарий содержит ошибку, ибо слова Флоренского — «„если антитезис влечет за собою тезис, и, вместе с тем, тезис влечет антитезис, то совокупность тезиса и антитезиса — если она не ложна, — есть антиномия“[18]. Такова *формула антиномии*» [41, том I, с. 153] — не отвечают сути дела.

Рассмотрим формулу (*). Совокупность тезиса и антитезиса в ней:

$$(-p \supset p) \cap (p \supset -p)$$

как раз ложна, так как выразив импликацию через конъюнкцию и отрицание, мы получим формулу противоречия $p \cap -p$; консеквент формулы (*) тоже *ложен*, но это уже не имеет значения: формула P истинна в силу ложности антецедента. Сравнивая P в формуле (*) с P в формуле (X), мы видим, что в первой P истинно, а в последней ложно. Естественно считать, что именно формула (*) выражает задуманную Флоренским «логику антиномичности». Такой она представляется *рассудочному* дискурсу.

Однако как быть с формулой (X)? Ее следует отнести к сфере *разума*, где авторитет возвышает ее к сфере рационального. Ниже мы покажем, как можно передать эту мысль о. Павла, оставаясь в пределах логики.

---

[18] Но *в логике* «совокупность тезиса и антитезиса» не может не быть ложной (курсив наш. — *Б.Б., И.П.*).

***

Итак, Истина, согласно Флоренскому, есть антиномия в описанном выше смысле. Но предлагаемое логическое представление антиномичности в сфере рассудка не приводит к истине. Положение, как будто, можно спасти, заменив в формулах (X) и (XII) конъюнктивное введение тождественной истинности V ($= -\Lambda$) *дизъюнктивным.* Но тогда смысл антиномичности сведется к выбору между формально-логическим противоречием и истиной. По-видимому, это не совсем то, что хотел сказать о. Павел.

В самом деле, приводимый в «восьмом письме» пример тезиса и антитезиса, когда Флоренский пишет: «Тезис — „*невозможна невозможность всеобщего спасения*“ — и антитезис — „*возможна невозможность всеобщего спасения*“ — явно антиномичны» [41, том I, с. 209], он вряд ли предполагает, что к этим словам для выявления антиномии надо конъюнктивно или дизъюнктивно присоединять истину V.

Очевидно, что, оставаясь в рамках рассудочной логики (а у о. Павла это была классическая логика высказываний), мы к непротиворечивому представлению антиномий не придем. Требуется, учитывая *логику рассудка*, совершить вместе с тем выход за ее пределы. Как это возможно?

Прежде всего заметим, что «рассудочная» логика отнюдь не бесполезна в богословском анализе. Дело в том, что, приняв православное вероучение — опираясь на его *авторитет*, — можно производить логическую экспликацию богословских утверждений. Это по сути дела показал сам Флоренский, анализируя «задачу Кэрролла». Выявление смысла его выкладок на эту тему проведено одним из авторов этих строк [7]. Не вдаваясь в детали, опишем возникающую здесь ситуацию.

В помещенном в томе II «разъяснении» XVI, цель которого — достижение «большей осознанности того шага, который мы делаем, когда верим в Истину», Флоренский утверждает, что для этого «полезно рассмотреть соответствующие акту веры умственные процессы in abstracto»; а это, согласно его взгляду, означает решить задачу Льюиса Кэрролла «в ее общем виде» [41, том II, с. 500].

Мы сформулируем эту задачу в тех логических терминах, которые были использованы нами выше. В этом случае она принимает следующий вид. Даны посылки

(1) $q \supset r$;

(2) $s \supset (q \supset -r)$.

Выводима ли из них формула $s \supset -q$? Флоренский показывает, что данная выводимость в классической пропозициональной логике имеет место, и это используется им для опровержения того, будто Священное Писание и православная догматика противоречивы.

П. Флоренский рассуждает так. Пусть q означает противоречивость Св. Писания и догматики Церкви; r — небожественное их происхождение; s — состояние духовного просветления. Тогда, если имеется s — духовное просветление, мы, используя посылку (2), с помощью правила *modus ponens* получаем формулу $q \supset -r$, выражающую то, что противоречивость Св. Писания вместе с православными догматами влечет их «не-небожественность», т.е. их божественное происхождение; это — вместе с посылкой (1) $q \supset r$ — приводит к противоречию, заставляющему отвергнуть q, т.е. противоречивость православного вероучения.

Главное в этом рассуждении состоит в том, что данное заключение усматривается только в состоянии *духовного просветления*. Но ведь этот ход мысли применим и к учению об антиномичности Флоренского. Ибо противоречивость *разума* усматривается лишь духовно просветленным лицом, человеческой личностью, принимающей *авторитет* Священного писания и Истину Церкви. Это значит, что антиномия P является таковой лишь при условии s: $s \to \mathrm{P}$, или в развернутой записи:

(3) $s \to (p \cap -p) \cap \mathrm{V}$, а также

(4) $s \to ((-p \supset p) \;\&\; (p \supset -p)) \supset ((p \cap -p) \cap -\Lambda$,

где знак → означает условную связь, учитывающую смысловое отношение между условием и заключением; связь эта отлична от «рассудочной» материальной импликации (и средством ее уточнения являются различные теории «строгой импликации»). Очевидно, что полученные формулы не тождественно-ложны, и их можно считать логической экспликацией антиномики о.Павла. Правда, с точки зрения математической логики нельзя признать положения формулы (3) истинными. Но опираясь на авторитет Церкви, находясь в состоянии духовного просветления (т.е принимая s), мы должны признать заключенную в (3) и (4) антиномичность как *истину разума.*

12 Отношение к логическому наследию античности

Как видно из предыдущего параграфа, создать логическое учение об *антиномиях* как истинных утверждениях Флоренскому не удалось. Со своей стороны Н.А. Васильев, не отвергая ложности суждений вида «S есть P и S не есть P ($=$ S есть *не*-P)», такую теорию разработал; заметим, что этому предшествовала его исследовательская деятельность в области истории и социальной психологии. Естественно, что, сопоставляя логические подходы двух мыслителей, стоит остановиться на некоторых их историко-логических воззрениях.

Если мы обратим внимание на то, как оценивали Васильев и Флоренский предыдущие этапы становления логики, то обнаружим больше различий, чем сходств. Флоренский, судя по его трактату «Столп и утверждение истины», придерживался распространенного в философской историографии мнения, будто логическое учение Аристотеля состоит из трех частей: учений о понятиях, о суждениях и об умозаключениях. Согласно этому представлению, учение о понятиях раскрывается в более раннем произведении Стагирита — «Категориях», а учение о суждениях и об умозаключениях — в поздних его работах: в трактате «Об истолковании» и в «Аналитиках»[19].

На самом деле ничего подобного у создателя логики не было. Данную схему эллинскому мыслителю приписали комментаторы Нового времени. Они подогнали корпус сочинений Аристотеля под классификацию, сформировавшуюся в позднейший период развития науки, и тем самым навязали древнему автору традиционный ныне школьный шаблон. Флоренский смотрел на

---

[19] Подробную критику такой оценки наследия Аристотеля см. [32, с. 298].

эту классификационную схему как на объект критики, не принимая во внимание того обстоятельства, что понимание Стагиритом задач и структуры логики в эту схему не вписывалось.

Анализ идей Аристотеля, проделанный Васильевым, в этом отношении глубже, чем экскурсы о. Павла в учение «отца логики». Исследователь из Казани, приведя фрагмент из «Второй Аналитики», показал, что его можно толковать в смысле, отличном от того, который приписывался ему традиционными комментаторами. Правда, Васильев начинает лишь с Гегеля и Шопенгауэра, ограничивая тем самым круг «бунтарей» против формальной логики. Но, несмотря на это, анализ, произведенный Васильевым, позволяет и Аристотеля причислить к не вполне твердым сторонникам классической формальной логики (т.е. логики, которую потом назвали *аристотелевской*!). Ведь античный философ высказывал мысль о неуниверсальности закона исключенного третьего и говорил о наличии «средних» (по-современному «индифферентных») суждений. Существование противоречивых понятийных конструктов допускали стоики — наследники Аристотеля в области логических построений. Однако фрагменты эллинской диалектики, в которых данность третьего ставилась под сомнение, не нашли применения в логических учениях последующих времен; именно поэтому классической стала считаться двузначная логика, именуемая ныне аристотелевской.

13 О неокантианских идеях в русской логике

В ряде фрагментов своего учения Васильев отталкивался от гносеологических выводов Иммануила Канта — мыслителя, гораздо более близкого ему по времени, чем Аристотель. Далее мы кратко рассмотрим кантианские и неокантианские истоки логической неклассичности в отечественной науке[20].

Мы видели, что обосновать истинность антиномий средствами классической логики Флоренскому не удалось. Да это и не могло произойти, так как данная логика рассудочно-рационалистична. Но он сумел показать, что логические средства можно использовать при анализе конкретных богословских вопросов.

Вслед за Флоренским можно констатировать, что антиномия

---

[20] Нам уже приходилось писать об этом: [8], [49]. См. также [53].

(буквально — «беззаконие», «противо-мыслие») есть абсолютное противоречие в подлинном смысле. Уже мыслитель-богослов показал, что для «работы» с антиномиями существуют по меньшей мере три их разные трактовки. Один подход состоит в выявлении предпосылки конкретной антиномичности и установлении факта, что отказ от одной (или более, чем одной) из них снимает противоречие. Другой способ связан с «ослаблением» противоречия, содержащегося в антиномии, при этом противоречие оказывается вполне безвредным для данной логической системы (в результате становится невозможно из ослабленного противоречия выводить «все, что угодно»). Наконец, возможно строить логику так, что в числе ее предложений окажутся противоречивые высказывания, и для них (как и для непротиворечивых высказываний) вводится понятие логического следования. Два последних подхода обычно объединяются под названием *паранепротиворечивой* логики. Нами уже отмечалось, что исторически первой системой такой логики явилась «воображаемая логика» Н.А. Васильева.

Указывали мы и на то, что логическая мысль у Флоренского находилась в пределах двузначной логики (об аспекте его взглядов, который можно считать неявным выходом за ее рамки, мы скажем ниже). Логическую бинарность принимал и Васильев. Как и у Флоренского, проблема противоречия была одним из главных объектов его рассмотрений. Это и понятно. Обращаясь к широкому кругу текстов, написанных корифеями русского религиозного Ренессанса, мы видим, что и в них присутствуют схемы более сложные, чем бинарные, истинностно-ложностные конструкции — характерный признак классической логики. Одной из причин этого было обращение к внутренне противоречивым объектам, которые можно обнаружить среди социальных феноменов. Именно о внутренней противоречивости общественных явлений шла речь у С.А. Аскольдова, Н.А. Бердяева, у авторов «веховского» направления — например, в их статьях, посвященных особенностям русского национального характера. Русский этнос в работах этих мыслителей трактовался как носитель противоположных свойств. Он, если можно так выразиться, есть *А* и *не-А* зараз. Глубина противоречий общественного развития определила, согласно представлениям веховцев, трагизм русской истории. Этот трагизм и получил «логическое представление» в концепции Н.А. Васильева.

Значительную часть опубликованных работ Васильева составляют рецензии на книги и статьи современных ему западных и отечественных мыслителей, занимавшихся проблемами логики, гносеологии и истории познания. Оценки, которые содержатся в этих работах, позволяют реконструировать положительную часть философского мировоззрения казанского ученого. Мы полагаем, что интерес к *неокантианской* логике (а Васильев много внимания уделял идеям Риккерта и Виндельбанда, следил за публикациями представителей именно этого направления современной ему теории познания) не мог не оказать влияния на творчество ученого.

Идеи неокантианцев нашли отражение в основных формулировках первой логической работы Васильева о законе исключенного четвертого. Даже положение, в соответствии с которым суждение о единичном предмете является результатом обобщения частных моментов существования данного предмета и наряду с изложением факта несет в себе общее содержание, соответствует тому фрагменту учений Виндельбанда и Риккерта, где речь идет об образовании понятий в гуманитарных науках и об основополагающей роли в этих науках исторических (т.е. единичных) фактов.

Принимая далеко не все в гносеологической логике неокантианцев, Васильев подчеркивал, что теоретическую силу этого философского направления составляют «частности» и «изящные детали» [21, с. 134]. Именно они кажутся интересными русскому логику. Одной из важных неокантианских «деталей» является мысль о том, что в мире «вещей в себе» допустимы противоречивые объекты. Соответствующую идею можно обнаружить, например, у И.И. Лапшина, на которую в связи с этим ссылался Васильев[21].

---

[21] Иван Иванович Лапшин был крупным специалистом по истории философии и логики. Его капитальный труд — «Законы мышления и формы познания» (СПб., 1906), оказал влияние на последующие отечественные разработки в области неклассической логики. С 1922 г. политэмигрант. В Праге развивал критический метод Канта, связав априоризм немецкого классика с логическими разработками в области создания неклассических формализованных систем. Стремился построить систему «абсолютного им-

Однако Васильев не разделял того негативного отношения к математической логике, которое было характерно для представителей баденской школы неокантианства. В недоверии к математике Васильев видел «Геркулесово распутье» [21, с. 135] современной ему философской логики, ее противоречивость и «старомодность». Ниже мы укажем на некоторые иные точки пересечения васильевской доктрины с неокантианской. А пока отметим, что, создавая воображаемую логику, Васильев, вероятно, принимал во внимание современную ему теорию чисел, основные положения которой были изложены в работах его отца — Александра Васильевича Васильева, профессора математики Казанского университета [14].

Позитивное отношение к неокантианству является, как нам кажется, одним из пунктов сходства идей Н.А. Васильева и П.А. Флоренского. Ведь последний в некоторых вопросах тоже солидаризировался с неокантианцами, подобно им считая суждение «основным актом познания». При сопоставлении классической логики с новыми подходами в этой науке, предложенными последователями Канта, Флоренский отдавал предпочтение гносеологическим схемам баденских философов. Он писал: «Формальная логика, основанная Аристотелем, начинает, как известно, с *понятий*, и из них построены, далее, суждения. Напротив, гносеологическая логика, особенно в трудах Г. Риккерта, начинает с *суждений* и при помощи них устанавливает понятия. <...> В первом случае понятия — первичные элементы, а суждения — вторичные, во втором — наоборот, но и та и другая логика сходятся между собой в *монистическом* понимании логических элементов». И далее, уточняя свои подходы в логике: «На логико-алгебраический алгоритм мы посмотрели под углом зрения именно гносеологической логики, т.е. сочли <...> основным актом познания — суждение» [41, том II, с. 621–622].

При определении того, какая форма мысли является первичной, Васильев, как это видно из его статей, шел дальше Флоренского и неокантианцев. Русский логик выводил отрицательные суждения из умозаключений, т.е. умозаключение считал первоначальной формой мысли. Отрицание Васильев в одних случаях сближал с предложением о несовместимости двух признаков,

---

манентизма», обосновав невозможность метафизики.

в других рассматривал его как заключение силлогизма модуса *Celarent*. Большая посылка этого силлогизма является положением о несовместимости, а меньшая посылка отождествляет предмет с субъектом большей посылки:

> N исключает P, несовместимо с P (положение несовместимости)
>
> S есть N (малая посылка)
>
> ---
>
> S не есть P (выводное отрицательное суждение).

«Мы обычно не замечаем, — писал Н.А. Васильев, — что при отрицательных суждениях мы имеем дело с выводом. Причина этого заключается в том, что вывод этот является чем-то в высокой степени для нас привычным, и поэтому совершается настолько быстро и механично, что не доходит до сознания» [22, с. 61]. Иными словами, умозаключение есть форма мысли, возникающая на этапе, предшествующем осознанной умственной деятельности. Опережая суждение, оно, умозаключение, определяет его характер; операция отрицания в этом случае начинается с подведения менее общего понятия под понятие более общее.

Рассматривая отрицательное суждение как результат силлогистического умозаключения, Васильев настаивал на вторичности, несамостоятельности этих суждений. Аргументация в пользу данного положения, развитая Васильевым в статье «Логика и металогика», опирается на его «полупсихологистские» установки. Утверждая онтологический характер *только некоторых* логических формул, Васильев подчеркивал психологическую, субъективную обусловленность отрицаний. Отрицание для русского логика — лишь негативная оценка субъектом суждения об объекте, а потому оно увязывалось Васильевым только с человеческим мышлением. Здесь можно усмотреть сходство васильевских рассуждений с выводами Флоренского: ведь понятие как основа логики отвергалось о. Павлом, видимо, в силу его отвлеченного, неконкретного характера. Религиозная философия говорит в таких случаях о немощи человеческого мышления, неспособного избежать ошибок — следствий неверного анализа и обобщения фактов. Результатом ошибок являются неверные понятия (фантастические логосы). Без отрицания этих логосов —

побочных продуктов человеческого мышления — постигающий мир субъект обойтись не может.

Н.А. Васильев в своих работах не указывал явно на связь между идеей социальной конфликтности, присутствующей в мире, и предлагаемой им «воображаемой логикой». Однако косвенно эта связь прослеживается именно в упомянутой второй большой статье ученого, посвященной идеям паранепротиворечивости [22, с. 61]. В ней, если говорить языком философии, речь идет о вопросе, допустимы ли противоречия в *кантовском мире «вещей в себе»*.

Отметим, что данная проблема интересовала современников Васильева — русских неокантианцев, в том числе и тех, которые разрабатывали *логику отношений*. Эти исследователи пытались выяснить, мыслима ли контрадикторность в ноуменальном мире, т.е. в мире объектов «самих по себе». Один из представителей данного направления — уже упоминавшийся нами И.И. Лапшин давал на вопрос о допустимости противоречий положительный ответ. Согласно концепции неокантианцев, *ноуменальный* мир стоит за *всеми* явлениями природы и общества, т.е. в том числе и за явлениями социальными, охватываемыми, как полагал Васильев, на самой высокой ступени абстракции — философией истории, и более низком (и тем не менее абстрактном) уровне — так называемой «сравнительной историкой»; последняя занимается фиксацией сходных явлений, происходящих на совпадающих этапах развития различных культур. Между тем абстрактные объекты, которые вводит в рассмотрение наука, не относятся к ноуменальному, трансцендентному миру — они принадлежат миру явлений. Не стоят ли за социальными противоречиями ноумены A и *не*-A? Мы не можем дать ответа на этот вопрос, но обязаны допустить правомерность его постановки.

14 Непрерывность и дискретность. Разные пути, ведущие к идее логической многозначности

Начало века в отечественном математическом мышлении ознаменовалось коллизией между установками на непрерывность и на дискретность в истолковании мышления. Собственно говоря, проблема эта была во весь рост поставлена Георгом Кантором, но в России она приобрела особый смысл благодаря философско-математическому творчеству Н.В. Бугаева и П.А. Некрасова. Бугаеву, отцу Андрея Белого, члену-корреспонденту Императорской Академии наук, одному из основателей Московского математического общества, принадлежит идея *аритмологии* — философско-математического направления, в котором результаты теории разрывных функций были распространены на психолого-гносеологические вопросы. Аритмология противопоставлялась аналитике как теории, связанной с идеями биологической эволюции и социального прогресса. «Аритмология, — поясняет современный автор, — говорит о принципиальной неисключаемости свободы, выбора, цели, воли, подвига, творчества <...> Аналитической рассудочной деятельности противостоит озарение» [28].

П.А. Флоренский был знаком с аритмологией, упоминал о математических исследованиях, относящихся к непрерывности и прерывности, связывал их с «логистикой». Ему были известны работы Бугаева, в частности его статья «Математика и научно-философское миросозерцание» [13], труды П.А. Некрасова. Он указывал на «кванты» Планка, корпускулярную теорию света, на «вечно истинные» парадоксы Зенона; он писал об открытиях в учении об органической эволюции, и при этом называл теории, говорящие о явлениях прерывности в развитии живого мира, о том, что «психологические исследования подсознательной и сверх-сознательной душевной жизни обнаруживают прерывные изменения сознания, прерывность творчества, вдохновения и т.д.» [41, том II, с. 684].

У Флоренского мы читаем: «Вдохновение, творчество, свобода, подвиг, красота, ценность плоти, религия и многое другое только неясно *чувствуется*, изредка *описывается*, устанавливается в своей наличности, но стоит вне методов и средств научного исследования, ибо основная их предпосылка, конечно, есть предпосылка связности, предпосылка непрерывности, постепенности. Идея закономерности в существующей форме, решительно неприменима ко всему таковому. Тут — *прерывность*, а прерывность выходит за пределы нашей науки, не вяжется с основными идеями современного миросозерцания и разрушает его» [41, том I, с. 127].

Конечно, прерывное и непрерывное тесно взаимосвязаны: «Мы не можем мыслить *процесса*, не разлагая его на последовательность стационарных состояний — на последовательности моментов неизменности. И мы не можем также мыслить непрерывное, *continuum*, не разлагая его на прерывную совокупность точечных элементов». И в рассудке это проявляется в соотношении его *статики* и *динамики*, которые исключают друг друга, хотя вместе с тем «не могут быть друг без друга» [41, том I, с. 484].

В статье о «пифагоровых числах» [39][22] Флоренский сопоставил пифагорейскую идею о «выразимости всего целым числом» с канторовским учением о бесконечных множествах с его понятиями количественных и порядковых чисел; он писал о необходимости «изучать числа, — конкретные, *изображенные* числа, — как индивидуальности, как первоорганизмы, схемы и первообразы всего устроенного и организованного» [39, с. 634].

***

Классическая логика, конечно, дискретна, но нам теперь известны такие ее «неклассические» направления, как многозначные и бесконечнозначные логические системы. В связи с этим стоит задержаться на неклассических логических идеях, которые, с одной стороны, можно вычитать у Флоренского, и которые, с другой стороны, содержались в «воображаемой» логике Васильева.

У о. Павла мы встречаем две идеи, которые можно отнести к логической неклассичности. Первая — это «триипостасное» истолкование истины, вторая — мысль о разных «степенях» знания.

Сначала рассмотрим первую идею. В логико-теологическом построении о. Павла мы встречаем — впрочем, в весьма неявной форме, — мысль о трехзначности логического; она была представлена в названном выше «трехипостасном» истолковании истины. Данное истолкование всегда связывалось, как хорошо известно, с христианской идеей Троицы. В логическом же плане

---

[22] Опубликована по манускрипту, хранящемуся в архиве о, Павла. По времени создания относится к концу 20-х годов.

мысль о троичности возникала из сопоставления *А* и *не-А*, пронизывавшем все мышление Флоренского.

Во «Втором письме: сомнении» главного труда о. Павла ставится вопрос о том, что собой представляет само-доказательный Субъект. Ответ, который на него дается, гласит: «Он таков, что он есть *А* и *не-А*. Обозначим для ясности *не-А* через *Б*. Что же — *Б*? *Б* есть *Б*, но оно само было бы слепым *Б*, если бы не было вместе и *не-Б*. Что же такое *не-Б*? Если оно просто *А*, то *А* и *Б* были бы тождественны. *А*, будучи *А* и *Б*, было бы одним простым, голым *А*, равно как и *Б*. Чтобы не было простого тождесловия „*А*=*А*", чтобы было *реальное* равенство „*А* есть *А*, ибо *А* есть *не-А*", необходимо, чтобы *Б* <...> было зараз „*Б* и *не-Б*"; последнее, т.е. *не-Б* для ясности обозначим через *В*. Через *В* круг может замкнуться, ибо в его „другом", — в *не-В*, — *А* находит себя как *А*. <...> *А* от *другого* <...>, т.е. от *В*, опосредованно получает себя, но уже „доказанным", уже установленным. То же относится и к каждому из субъектов *А*, *Б*, *В* троичного отношения». Субъект истины, продолжает о. Павел, есть *отношение Трех*. Истина есть «*Бесконечный акт Трех в Единстве* <...> *Истина есть единая сущность о трех ипостасях*» [41, том I, с. 48–49].

В «разъяснении» XXIII — «К методологии исторической критики» Флоренский подходит к вопросу с другой стороны. Он вводит представление о вариативности «количества знания». Он убежден: «Всякое суждение и всякое умозаключение в области *исторических наук* есть суждение с коэффициентом вероятности, и если суждение и умозаключение выражается формулою $a \supset b$, то историческое суждение и историческое умозаключение <...> должно выражаться формулою $a \supset_p b$, где символ $\supset_p$ означает связку как функцию параметра p, т.е. вероятность связи $a \supset b$»[23]. Спектр степени *твердости* веры или неверия в некоторую гипотезу он представляет в виде таблицы, где «плюс бесконечность» означает «абсолютно да», за чем следует нисходящая градация — «очевидно да», «быть может да» и т.п.; нулем обозначается «не знаю», за тем следует «пожалуй нет», «быть может нет», «наверняка нет», а завершается «минус бесконечностью»: «абсолютно нет» [41, том II, с. 546–547]. Далее сле-

---

[23] Курсив наш. — *Б.Б., И.П.*

дует теоретико-вероятностное истолкование данной схемы, где наряду с математическим ожиданием вводится «нравственное ожидание».

Мы не станем подробнее говорить об этой схеме, ограничившись тем, что укажем на явное предвосхищение о.Павлом *вероятностной логики*, причем с учетом ее теоретико-игрового аспекта. Заметим, что данную схему Флоренский ограничивает апостериорными (т.е. эмпирическими) науками.

У Флоренского подобные рассмотрения не были связаны с нормами *логики*. Но в истории науки такая связь существовала издревле. Как мы знаем, еще Аристотель сомневался в универсальности «исключения третьего», размышляя об истинностной оценке высказываний о будущих событиях. В этом можно видеть отдаленное предвосхищение логической трехзначности. Естественно, что такой глубокий мыслитель, как Васильев, пошел именно этим путем. Логическая трехзначность проявляется у Н.А. Васильева, правда, не прямо — категорическая оценка его логического учения как некоей трехзначной логики, которая распространена в литературе, ошибочна[24], что было показано в статье Б.В. Бирюкова и Б.М. Шуранова [**?**]. Почему же многие авторы находили у Васильева трехзначную логику? Потому, что в «воображаемой логике» были введены три «качества» суждений — утвердительность, отрицательность и противоречивость (в другой интерпретации — «индифферентность»). Конечно, в этом можно видеть общую идею логической трехзначности, подобную «триипостасности» Флоренского. Но Васильев в своей концепции решительно придерживался двузначности истинностных оценок суждений.

В классической пропозициональной логике имеет место совпадение бинарностей «истина — ложь» и «утвердительность — отрицательность». Отсюда законы исключенного третьего и противоречия. У Васильева первая бинарность сохраняется, а вторая заменяется тернарностью. Поэтому закон исключенного третьего заменяется законом «исключенного четвертого», а закон противоречия, утверждающий несовместимость суждений «S есть P» и «S не есть P» (или «S есть *не*-P») заменяется

---

[24] К сожалению, эта ошибка повторяется с настойчивостью, достойной лучшего применения. Ср. [5, с. 238]

утверждением о попарной несовместимости суждений трех васильевских «качеств»: утверждения произвольного суждения P (мы запишем это как У(P)), отрицания суждения Р (запишем это как О(P)) и нейтральной оценки P (т.е. того, что P «индифферентно» — И(P)). Тогда закон исключенного четвертого будет обязывать к выбору одного из этих суждений при отрицании остальных, а выбор этот — из *трех* альтернатив.

В упомянутой выше статье выбор этот был представлен таблицей несовместимостей:

	У(P)	О(P)	И(P)
1)	*и*	*л*	*л*
2)	*л*	*и*	*л*
3)	*л*	*л*	*и*

где «*и*» означало истину, а «*л*» — ложь. Строки же 1) – 3) предлагалось считать некими «внешними» значениями истинности трехзначной логики Васильева.

Очевидно, что в классической пропозициональной логике таблица несовместимостей имеет вид:

	У(P)	О(P)
1)	*и*	*л*
2)	*л*	*и*

А какой вид имеет таблица «несовместимостей» для *металогики* Васильева, прикосновенной миру «умных сущностей»? Очевидно, что это вырожденная таблица:

	У(P)
1)	*и*

В построении Васильева выделялись три формы единичных суждений, три формы суждений общих, суждения же, которые автор «воображаемой логики» называл акцидентальными («случайными»), должны были бы быть четырех форм. Этого, однако, не происходило, так как Н.А. Васильев предполагал, что в частных суждениях (в смысле традиционной логики) квантор «некоторые» имеет смысл «только некоторые». Это уравнивает по смыслу соответствующие утвердительные и отрицательные суждения, и тогда таблица несовместимостей для них принимает вид:

	Только некоторые S суть P, Только некоторые S не суть P	Одни S суть P, а другие S суть и не суть P	Одни S не суть P, а другие S суть и не суть P
1)	*и*	*л*	*л*
2)	*л*	*и*	*л*
3)	*л*	*л*	*и*

***

Итак, мы видим сколь многообразными были подходы к неклассической логике в России в начале XX века, даже если ограничить рассмотрение только двумя яркими представителями русской мысли того времени.

15 Флоренский об антиномиях языка

До сих пор мы, рассматривая идеи о.Павла, опирались на его труд «Столп и утверждение истины». Но выраженная в нем идея *теодицеи* как «оправдания Бога» — доктрина, стремящаяся «согласовать идею „благого“ и „разумного“ управления миром» с наличием в нем «мирового зла, „оправдать“ это управление перед лицом темных сторон бытия» [1] — идея эта вскоре сменилась идеей *антроподицеи* — «оправдания человека».

Издатель наследия о. Павла игумен Андроник (А.С. Трубачев) в предисловии к тому 3(1) собрания сочинений Флоренского приводит слова из одного его письма 1919 года: «Мой „Столп“ до такой степени опротивел мне, что я часто думал про себя: да не есть ли выпускание его в свет акт нахальства, ибо что же на самом деле понимаю я в духовной жизни?». Комментируя данный пассаж, игумен Андроник говорит, что «к этому времени ему внутренне стал чужд дух теодицеи» [2, с. 5–6]: «Столп» оказался пройденным этапом жизни и творчества о. Павла Флоренского. Его мышление стало развиваться в направлении антроподицеи.

Антроподицея, как и теодицея, пишет названный выше комментатор Флоренского, есть «философия *единосущия*, опирающаяся на догмат о Троице. Цель антроподицеи — дедуцировать человека, т.е. показать смысл и внутреннюю необходимость его строения, освящения и деятельности, показать Божии уставы бытия человека во всех его проявлениях» [2, с. 7].

Думается, что не случайно с 1919 года Флоренского занимают проблемы физики и техники, где он активно использует свои математические знания. С начала 20-х годов Павел Александрович активно участвует в научной жизни строящегося Советского государства. Он ведет исследовательскую работу в Главэнерго, служит научным сотрудником Государственного экспериментального электротехнического института. С 1927 года интенсивно трудится в редакции «Технической энциклопедии» — и как редактор раздела «Материаловедение», входя здесь в общую редакцию издания, и как автор многочисленных статей[25].

Теперь его интересует не общая проблема антиномичности богопознания, а конкретные противоречия, присущие *науке* и *философии*, а также — и прежде всего — *языку*. Интерес к последнему прослеживается в труде «У водоразделов мысли», где в параграфе третьем — «Мысль и язык» главы IV (она озаглавлена «Антиномии языка») ведется речь о «противоречивом сопряжении» в языке *вещности* и *деятельности*.

Внимание о. Павла к языку проистекало из его убеждения, что наука и философия представляют собой *языковое* описание действительности, являются противоположными *модусами языка*. «Наука, жесткая и по замыслу своему, на деле, в историческом своем раскрытии, имеет и текучесть, и мягкость. Философия же, подвижно-стремительная и гибкая, — таковою хочет быть, — не чужда жесткой и догматической хватки. Есть и нечто диалектическое в науке, хотя она и не диалектична по своему уклону, как есть нечто систематическое в философии» [43, с. 143].

Что касается языка, то его антиномичность Флоренский раскрывает, опираясь на идеи Вильгельма Гумбольдта, которого обильно цитирует. Существо антиномии языка, по Гумбольдту,

---

[25] Эту его деятельность прервал в 1933 г. арест, за которым последовали лагеря ГУЛАГа, а в 1937 г. расстрел.

состоит в том, что в языке все живет, течет, движется; «человек — творец языка, божественно свободен в своем языковом творчестве»; это — тезис. Антитезис же заключается в том, что язык как достояние народа *монументален*, и пользуясь им, мы подчиняемся необходимости; «язык предстоит духу как целое, уже готовое, сразу обозреваемое, хотя, в то же время, он — только по-мгновенно творится духом и существует лишь постольку и лишь тогда, поскольку и когда творится»; язык — живое равновесие $\epsilon\rho\gamma o\nu$ и $\epsilon\nu\epsilon\rho\gamma\epsilon\iota\alpha$ [43, с. 144](также в выписках с. 5), «вещи» и «жизни». «*Нет* индивидуального языка, который не был бы вселенским в своей основе; *нет* вселенского языка, который бы не был в своем явлении — индивидуальным» [43, с. 153].

16 Культурологические аспекты и социальные коннотации

Рассмотренные нами идеи в значительной мере относились к области логики, но логическое постижение мира для П.А. Флоренского и тем более для не один раз упоминавшегося нами Н.А. Васильева не было единственным. Оба мыслителя опирались на гносеологическое учение, основы которого были заложены А.С. Хомяковым и И.В. Киреевским. Свои эпистемологические и философско-методологические предпочтения Васильев изложил в небольшой рецензии на работу Э.Л. Радлова по истории русской философии [19], в рецензии на книгу А. Пуанкаре [16, с. 392] и в Послесловии к исторической диссертации: оно было посвящено актуальным проблемам европейской культуры начала XX века. Ниже мы коснемся только одного фрагмента философско-антропологических построений казанского логика — фрагмента, посвященного роли религиозного сознания в жизни общества и значимости этого сознания при оценке окружающей действительности.

Васильев высоко ценил предлагавшуюся еще Хомяковым идею, в соответствии с которой у человека существуют три познавательных способности: разум, воля и вера. Базируя на этом свой поиск самобытной философии православного Востока, классик славянофильства именно полноту религиозной жизни считал целью всякого познания. Подлинное познание, инструментами которого служат все три способности человека, неизбежно приводит к Богу. Это убеждение разделяет и Васильев: он, в частности, пишет о значимости религии, дающей личности устойчивые жизненные ориентиры; при этом предупреждая, что безрелигиозный путь гибелен для общества. Утрату *единства смысла*, свойственную атеистической цивилизации Запада (частью которого была, конечно, и императорская Россия), казанский ученый рассматривал в качестве одного из наиболее ярких симптомов вырождения. В критике основ европейской культуры этот мыслитель сходился со славянофилами. Свои размышления о ее судьбах он завершил следующей констатацией: «Наша теперешняя умственная жизнь свободна, но она анархична, разнообразна, но бессильна. Личное творчество выявляется вполне, и потому наша культура интересна и напряжена, она быстро прогрессирует, увеличивается в объеме путем постоянных личных вкладов. Но в ней нет места для грандиозного и стильного творчества прежних веков, возможного только на почве единого мировоззрения, единой идеологии, спаивавшей людей в одно творческое целое. Нам не создать ни готических соборов, ни поэм Гомера, нам не создать даже греческих трагедий, где личное в обрисовке характеров и ситуаций соединяется с одним и тем же религиозно-философским миросозерцанием, делающим из них части одного грандиозного целого. Наша культура не грандиозна, она пошла, и башня Эйфеля является ее достойным символом» [18, с. 131].

Преемственность идей П.А. Флоренского и религиозно-философской гносеологии славянофилов и мыслителей-всеединцев более ощутима. В отличие от Васильева, Флоренский писал не об анонимной религиозности, но о церковности; как мы видели, ее нельзя понять, используя лишь инструментарий формальной логики. Церковность во всей ее конкретности, согласно Флоренскому, недоступна рассудку. Для Васильева, опиравшегося на мысли Н.А. Бердяева, Д.С. Мережковского, А. Белого и даже на иррационализм И.В. Гете [18, с. 130], противоречия в познании отражают паралогичность естественной жизни, т.е. жизни как биологического явления. Васильев, интересы которого были обращены к материальному миру, трактовал религию как инструмент, как средство достижения состояния физического и душевного подъема. Флоренский же писал о другом — о сверхрассудочности, реализуемой в сфере духа. Не случайно от *теодицеи*, воплощенной в его «Столпе...», он перешел, как уже было говорено, к *антроподицее* — «оправданию человека», «испытывающего себя», усматривающего свое несоответствие образу Божию и осознающему необходимость очищения.

Существенно, что культурно-социологичеким фоном антроподицеи о. Павла было его убеждение в том, что здание культуры «духовно опустело», что «вся сложная система обездушенной цивилизации пойдет разваливаться»[26], что час «глубочайшего переворота в самих основах культурного строительства» близок.

Для сверхрассудочности в понимании о. Павла критерием являлась красота духовная, а она неуловима для логических формул. Такое видение, разумеется, сильно отличается от гностического идеала религиозности, предлагавшегося Н.А. Васильевым. Если применять в отношении сказанного Флоренским категории современной теории культуры, то можно говорить о том, что феномены религиозной жизни у русского богослова являются носителями, помимо семантической, еще и глубокой эстетической информации (ср. [6]). Излагаемый религиозным мыслителем взгляд соответствует свойственному славянскому этносу *эстетизму*: «Повесть временных лет» свидетельствует, что именно художественная обрядность византийского православия оказала сильное впечатление на послов князя Владимира и определила выбор веры [26].

Приближение к миру совершенных сущностей, по Флоренскому, возможно через опыт. «Богословие, — писал он, — наука опытная» [41, том I, с. 122]. В этом пункте выводы русского богослова совпадают со взглядами, которые высказаны в труде Уильяма Джемса «Многообразие религиозного опыта»: «Рассудок может проложить только поверхностный и призрачный путь к Богу. <...> Рассудок дает темное и обманчивое знание, тогда как чувство доставляет уверенность в истине, — таково положение религиозного человека, искренне относящегося к себе самому и к фактам» [23, с. 356]. Только живая жизнь в вере,

---

[26] Ср. сходные пессимистические взгляды на судьбы западной цивилизации Н.А.Васильева, о которых авторы этих строк писали в [10].

а не теоретизирование по поводу религии позволяет постигнуть суть, содержание последней. Надо ли говорить о том, насколько Васильев с его холодной верой естественника был далек от этой жизни.

Возвращаясь к сказанному в начале нашей работы, отметим, что сравнение Васильева и Флоренского оправдано лишь в том случае, когда они рассматриваются не только как мыслители, ставившие и решавшие ряд конкретных гносеологических и методологических проблем науки, но и как два представителя доминировавшего в начале XX века умонастроения, в котором ориентация на интеллектуальные традиции прошлого сочеталась с поиском новаторских решений насущных вопросов познания окружающего природного мира, общественного обустройства и духовных ценностей. Здесь мы вплотную подходим к оценке общественно-политических, мировоззренческих идей Васильева и Флоренского.

***

В русской культуре Серебряного века — как в ее западническом, так и в славянофильском варианте — наблюдалась некоторая расплывчатость оценок, понятий, характеров; часты были взаимные переходы друг в друга нетождественных явлений. Революция потребовала четкости социально-политических оценок. Власть интернационалистов-большевиков по-своему завершила эру противостояния русского западничества и почвенничества. Петербургский период русской истории подошел к концу. Но как ни парадоксально это звучит, ненавистники русской национальной культурной традиции — Ленин и Троцкий, исповедуя марксизм — порождение западной мысли, в некотором смысле продолжили дело славянофилов: противопоставили Россию «латинскому» Западу, возвратили Москве функцию столицы, протянули руку дружбы народам Востока. Так считали (и не всегда ошибочно) Н.А. Бердяев, Г.Г. Шпет, Г.В. Федоров. Надежду на большевиков как на реставраторов Московской Руси емко выразил Г.Г. Шпет: «„Славянофильская“ и даже вообще восточная порода „большевиков“ видна теперь даже философски невооруженному эмпирическому глазу. <...> Не случайно романтический Кремль славянофильства — реальный Кремль большевизма» [45, с. 85]. Да и сам Васильев в Послесловии к своей историософской книге говорил о грядущей миссии Советской России, выражая надежду, что культурное спасение деградирующей Европе придет с того географического места у притока Оки, на которое еще в XIV веке указал старец Елеазарова псковского монастыря Филофей.

Другая контроверза культурной жизни России начала XX века — это наличие и скрытое противостояние двух «незримых» сообществ — позитивистов, преобладавших в преподавательском составе университетов, людей науки вообще, с одной стороны, и деятелей искусства, для которых была характерна внерациональность мышления, базировавшегося на полурелигиозном мистико-символическом восприятии окружающего мира — с другой.

Во Флоренском и Васильеве, как нам кажется, находят выражение мировоззрение сразу обоих этих культурных сообществ. Философское мышление двух ученых как раз противоречиво объединяет несходные культурные тенденции. Здесь можно выделить две проблемы, решение которых позволяет понять специфику русской культуры начала XX века.

Первая проблема — это проблема *времени*. Объекты воображаемой логики Васильева взяты им вне времени. И именно отвлечение от временных характеристик позволяет рассматривать данные объекты в качестве носителей постоянных свойств. Некоторые из этих свойств являются противоречивыми — одновременно присущими и неприсущими объекту. То, что у Васильева является предметом изучения, у Флоренского оказывается предпосылкой, неотъемлемой составляющей его мысли. Всевременность и неотмирность суть необходимые признаки умопостигаемых сущностей, о которых писал религиозный мыслитель.

Требование некоторой остановки во времени и требование наличия у предмета свойств, хотя бы какое-то время остающихся неизменными, являются абсолютными для науки. В методологических исследованиях отечественных ученых разных направлений формулировка этих требований (равно как и напоминание: мыслить предмет в целостности его основных свойств) в XX веке появляется неоднократно. Естественно, что его учитывал и Васильев, и Флоренский.

Вторая проблема — это уже обсуждавшаяся нами проблема объектов, несущих в себе противоречие и опровергающих своим существованием закон исключенного третьего. Особенно много таких объектов, как мы уже говорили, порождает социальная реальность. Противоречивые социальные феномены, отражавшиеся в работах русских философов конца XIX — начала XX в., можно считать эмпирическими референтами закона исключенного четвертого Н.А. Васильева и учения об антиномичности П.А. Флоренского. Нередко в трудах отечественных ученых предлагался выбор не из двух, а из трех альтернатив, причем одна из них противоречиво сочетала свойства двух других. Даже политический контекст русских революций, как нам кажется, встраивается в подобную схему. Ведь среди основных сил, участвовавших в ней, обычно называют не только революционеров («красных») и противостоящих им консервативные силы (нередко отождествляемые с «черными» — так называемыми черносотенцами, обскурантами — от лат. *obscurus* — темный), но и либеральную интеллигенцию, принципиально отвергавшую крайности тех и других. Россия как культурный ареал мыслился отечественной историософией не как механическое смешение Запада и Востока, но как особый мир, в котором противоречивое объединение разнородных культурных элементов порождает самобытные культурные комплексы. Разве не о России и не о ее творческом гении идет речь в следующем фрагменте Е.Н. Трубецкого: «Не один только потусторонний мир Божественной славы нашел себе изображение в древнерусской иконописи. В ней мы находим живое, действенное соприкосновение двух миров, двух планов существования. С одной стороны — потусторонний вечный покой, с другой стороны — страждущее, греховное, хаотическое, но стремящееся к успокоению в Боге существование, — мир ищущий, но не нашедший Бога» [36, с. 41]. И встреча этих двух миров есть «третье» — самое Россия.

***

Мы видим, что идеи Флоренского заставляют обратиться к положениям, лежавшим в основе логических изысканий начала XX века. В самом деле, одним полюсом у Флоренского и философов-всеединцев XX века является онтологическое ничто — то, чему нет места в мире. Это ничто, тем не менее, тщится занять какое-то место. Оно хочет если не быть, то хотя бы казаться чем-либо. На онтологическую фиктивность лжи указывал наряду с Флоренским Андрей Белый, связывавший ее с темнотой, мраком: «Отсутствие… божественного рождает черную пустоту $<\ldots>$ Открывается: ужас — бездна пошлости. Носится серая стая, осаждаясь повсюду. Душит и гасит светоч жизни, слабо мерцающий в руках…» [36, с. 42]. Иначе обстоит дело с истиной: она, как указывал Флоренский, «включается всем», т.е. в отличие от лжи, бездны она на «законных основаниях» присутствует во всем, придает бытийный статус вещам и явлениям. Ее всеохватность не имеет ничего общего с тривиальной логической общезначимостью. То, как Флоренский понимал ложь, естественно связать с пустыми формулами идеологий: их пустота явилась именно следствием их общезначимости [9]. Она — от отсутствия границ, например, между предметом A и всем, что *не-A*. Истина же включается во все, но не разрушает границ вещей и явлений. Важно, что именно так понимал истину и Н.А. Васильев. Ложь в металогике Васильева невозможна психологически. Генератором металогических рассуждений является сверхприродное Существо, неспособное ошибаться, а значит, неспособное лгать. Исключая ложь из объектов мысли, автор «воображаемой логики» лишал ее онтологического статуса.

Сильно отличалась от «васильевского» восприятия лжи как онтологической фикции концепция, предлагавшаяся некоторыми представителями школы логического позитивизма. Эта западная школа может быть представлена как антитеза русской философии. В онтологии одного из представителей данного философского направления — Дж. Мура «Отец лжи» не просто реальность, но первая реальность: он более реален, чем Бог. Именно на это указывал Мур в одной из лекций, прочитанной на заседании кружка кембриджских «апостолов»: «В начале была материя, она породила дьявола, а дьявол породил Бога» [31, с. 153].

***

Анализ наследия Н.А. Васильева и П.А. Флоренского позволяет говорить о связи, существующей между формами религиозного сознания и логикой. Истоки неклассических воззрений Флоренского в логике понятны: они коренятся в «мирочувствии» его как православного священника. Иначе обстоят дела с Васильевым. Последний высоко оценивал религию, но не как личный путь к совершенству, а как форму общественного, коллективного сознания. Именно общественные, «мирские» стороны религиозной жизни принимал он во внимание. В сочинениях своего деда — выдающегося востоковеда В.П. Васильева — он мог бы ознакомиться с тем, как в традиционном восточном обществе бок о бок с развитием религиозного сознания происходило становление логики и диалектики. Казанский ученый мог бы обратить внимание на то, что в основном произведении его деда-историка — трактате о буддизме подчеркивалась наукообразующая роль религии [15, с. 169–170]. В.П. Васильев показывает, что потребность разрешать религиозные противоречия в мире средневекового буддийского общества была мощным стимулом развития *логики*.

Понимая значимость веры, Васильев-внук не жил подлинной религиозной жизнью. Ею жил Флоренский. Однако и последнего ортодоксальные авторы нередко упрекают в склонности к рационалистическому обоснованию фактов веры. Иногда грех чрезмерного упования на разум формулируется достаточно резко — как *мудрствование плоти*. В этой специфической особенности мышления обнаруживается еще одно сходство научных биографий Васильева и Флоренского: поиски того и другого нередко заводили их в интеллектуальные тупики. Поэтому, чтобы понять масштаб философских заслуг двух русских мыслителей, чтобы оценить глубину не только их мыслей, но и заблуждений, чтобы осознать непреходящее значение их естественнонаучных и историософских прозрений, необходимо учитывать особенности логических учений обоих исследователей. Сделать это мы и попытались.

Литература

[1] *Аверинцев С.С.* Теодицея // Новая философская энциклопедия. Том 4. М., 2001. С. 31.

[2] Игумен *Андроник* (А.С. Трубачев). История создания цикла «У водоразделов мысли» // Свящ. *Павел Флоренский.* Сочинения в четырех томах. Том 3(1). М.: «Мысль», 1999.

[3] *Асмус В.Ф.* Формальная логика и диалектика // Под знаменем марксизма. 1929. №.4. С. 39–62.

[4] *Бажанов В.А.* Становление и развитие логических идей Н.А. Васильева // Философские науки. 1986. № 3. С. 74–82.

[5] *Бажанов В.А.* История логики в России и СССР (концептуальный контекст университетской философии). М.: Канон, 2007.

[6] *Бирюков Б.В.* Строгость терминологии и стиль мышления // Психология процессов художественного творчества. Л.: Наука, 1980. С. 261–264.

[7] *Бирюков Б.В.* Из истории математической логики в России: «Задача Кэрролла» в трактовке о. Павла Флоренского // Логические исследования. Вып. 6. М., 1999.

[8] *Бирюков Б.В.* Неклассические идеи в русской философской логике конца XIX – начала XX века // Смирновские чтения. 2 Международная конрференция. М., 1999.

[9] *Бирюков Б.В.* Социальная мифология, мыслительный дискурс и русская культура // Homo legens-3. Человек читающий. Сб. статей. М., 2006.

[10] *Бирюков Б.В., Прядко И.П.* «Где все единство без конца . . . ». Логические воззрения Н.А.Васильева в культурно-философском контексте Серебряного века // Вопросы философии. 2003. № 1.

[11] *Бирюков Б.В., Тростников В.Н.* Жар холодных числ и пафос бесстрастной логики. Формализация мышления от античных времен до эпохи кибернетики. Изд. 3-е, переработанное и дополненное. М., 2004.

[12] *Бирюков Б.В., Шуранов Б.М.* В каком смысле «воображаемую логику» Н.А. Васильева можно считать многозначной // Вестник МГУ. Серия 7: философия, 1998, № 5.

[13] *Бугаев Н.В.* Математика и научно-философское миросозерцание // Вопросы философии и психологии, 1898. № 45.

[14] *Васильев А.В.* Целое число. Пг., 1919.

[15] *Васильев В.П.* Буддизм, его догматы, история и литература. Ч.I. СПб., 1857–1869.

[16] *Васильев Н.А.* Рецензия на книгу: Henri Poincare. Dernieres pensees (Paris, 1913. Ernest Flammarion edit.) // Логос. 1913. № 3–4.

[17] *Васильев Н.А.* Рецензия на книгу Ф. Полана «Логика противоречий» // Логос [Международный Ежегодник по философии культуры]. М.: Мусагет, 1913.

[18] *Васильев Н.А.* Вопрос о падении Западной Римской империи и античной культуры в историографической литературе и истории философии // Известия общества археологии, истории и этнографии при Казанском университете. Т. III. Вып. 2 –3. Казань, 1921. С. 118–248.

[19] *Васильев Н.А.* Рецензия на «Очерк истории русской философии» Э. Радлова // Казанский библиофил. 1921, №2. С.98–99.

[20] *Васильев Н.А.* Логика и металогика // Васильев Н.А. Воображаемая логика. М., 1989.

[21] *Васильев Н.А.* Рецензия на книгу В. Виндельбанда и А. Руге «Энциклопедия философских наук» // Васильев Н.А. Воображаемая логика. М., 1989.

[22] *Васильев Н.А.* Воображаемая (неаристотелева) логика // Васильев Н.А. Воображаемая логика. М., 1989. Первая публикация этой второй статьи Васильева см.: Журнал Министерства народного просвещения, Н.с. 1912, август. Ч. 40. С. 207–246.

[23] *Джемс У.* Многообразие религиозного опыта. СПб., Андреев и сыновья, 1993.

[24] *Дмитриева Н.* Предисловие // Фохт Б.А. Избранное (из философского наследия). М.: Прогресс-Традиция, 2003. С. 38.

[25] *Кутюра Л.* Алгебра логики. Перев. П. Слешинского. Одесса, 1909.

[26] Летопись по Ипатьевскому списку // Русские летописи. Т. II. Рязань: Александрия, 2001. С. 73–74.

[27] *Поварнин С.И.* Спор. О теории и практике спора. М., 1992.

[28] *Половинкин С.М.* Аритмология // Новая Философская энциклопедия. Т. I. М., 2000. С. 179.

[29] *Прядко И.П.* История как проблема логики в диссертационном исследовании Н.А.Васильева (методологические аспекты исторической концепции создателя «воображаемой логики») // Современная логика: Проблемы теории, истории и применения в науке. Материалы научной конференции. СПб., 2004.

[30] *Пуанкаре А.* Мораль и наука // Пуанкаре А. Последние мысли. Пг., 1923. С. 117.

[31] *Рассел Б.* Автобиография // Вопросы философии. 2004, № 5. С. 150–154.

[32] *Савельев А.Л.* К вопросу о структуре античной диалектики // Современная логика: проблемы теории, истории и применения в науке. Материалы V Общероссийской научной конференции. СПб., 1998.

[33] *Смирнов В.А.* Логические взгляды Н.А. Васильева // Очерки по истории логики в России. М., 1962.

[34] *Смирнов В.А.* Аксиоматизация логических систем Н.А. Васильева // Современная логика и методология науки. М., 1987. С. 143–151.

[35] *Смирнов В.А.* Логические методы анализа научного знания. М., 1987.

[36] *Трубецкой Е.Н.* Два мира в древнерусской иконе // Е.Н. Трубецкой. Три очерка о русской иконе. Новосибирск: Сибирь XXI век, 1991.

[37] *Флоренский П.А.* О символах бесконечности (Очерк идей Г. Кантора) // Новый путь. 1904, № 9. С. 173–235.

[38] *Флоренский П.А.* Космологические антиномии Канта. С приложением экскурса об антиномической структуре разума // Богословский вестник. 1909. Том 1, № 44; цит. по: *Свящ. Павел Флоренский.* Сочинения в четырех томах. Том 2. М., «Мысль», 1996.

[39] *Флоренский П.А.* Пифагоровы числа // Сочинения в четырех томах. Том 2. М.: «Мысль», 1996. С. 632–646.

[40] *Флоренский П.А.* А.С. Хомяков // Богословский вестник. 1916, июль-август.

[41] *Флоренский П.А.* Столп и утверждение истины. Тома I-II. М., 1990 (Факсимильное издание труда, подзаголовок которого гласил: «Опыт православной теодицеи в двадцати письмах свящ<енника> Павла Флоренского», Изд-во «Путь», М., 1914).

[42] *Флоренский П.А.* Иконостас. М.: Искусство, 1994.

[43] *Флоренский П.А.* Сочинения в четырех томах. Т.3(1). М.: «Мысль», 1996.

[44] *Хоружий С.С.* Философский символизм Флоренского и его жизненные истоки // Историко-философский ежегодник. М.: Наука, 1988. С. 180–201.

[45] *Шпет Г.Г.* Очерк развития русской философии. Ч. I. Петроград: Колос, 1922.

[46] *Шрейдер Ю.А.* Лекции по этике. М.: МИРОС, 1994.

[47] *Шрейдер Ю.А.* Этика: введение в предмет. М.: Текст, 1998.

[48] *Шуранов Б.М.* Русская логика переломной эпохи (1880–1930) в социокультрологическом аспекте. Автореф. дисс. на соиск. уч. степ. канд. филос. наук. М., 2000.

[49] *Шуранов Б.М., Бирюков Б.В.* Русские неокантианцы: предвосхищение идей логической паранепротиворечивости // Научная конференция «Современная логика: проблемы теории, истории и применения в науке». Памяти И.Н.Бродского и О.Ф.Серебрянникова. Тезисы докладов. СПб., 1996.

[50] *Шуранов Б.М., Бирюков Б.В.* Об одной контроверзе в истолковании логики мышления. С.А.Богомолов против Н.А.Васильева // Тезисы докладов международного семинара «Антропология с современной точки зрения». Калининград, 1998.

[51] *Arruda A.* Vasiliev: A forerunner of paraconsistent logic // Philosophia naturalis. 1984. Vol. 21. P. 472–491.

[52] *Arruda A.* Vasiliev: A forerunner of paraconsistent logic // VII International Congress of Logic, Methodology and Philosophy of Science. Salzburg. Vol. 6. P. 14–17.

[53] *Biryukov B. V.* Die Antizipation nichtklassischer Ideen durch russische Logiker des 19. und Anfang des 20. Jahrhunderts // *W.Stelzner / M.Stockler* (Hrsg.). Zwischen traditioneller und moderner Logik. Nichtklassische Ansatze. Paderborn, mentis Verlag, 2001.

[54] *Paulhan Fr.* La logique de la contradiction. Paris: Felix Alean, 1911.

Логика и процедуры поиска вывода[1]

В. Н. Брюшинкин

ABSTRACT. The article deals with the capacity of the proof-search theory for the simulating creativity and solving logico-philosophical problems. The ideas of prominent Russian logician Vladimir Smirnov are analyzed. The proof-search theory emergence is explained in the light of the Boris Gryasnov's model of development of scientific theories. The explanation is based on a new interpretation of unexpected consequences (porism) of Hilbert's proof theory, in particular from the constructing proofs bottom-up in sequential style logical systems, subformula principle and it's interpretation in the field of automatic proof-search procedures.

Ключевые слова: логико-математическое доказательство, теория поиска вывода, поризм, аналитическая интерпретация доказательств, принцип подформульности, автоматическое доказательство теорем

XX век принес сначала в логику, а затем и в философию логики новую тему — проблематику процедур систематического поиска логического вывода. Правда, эта проблематика так или иначе рассматривалась, начиная с Аристотеля, например, при обсуждении проблемы построения силлогизмов: «Теперь следует сказать о том, каким образом мы для данного положения можем всегда иметь достаточно силлогизмов и каким путем мы каждый раз можем найти их начала, ибо надо, пожалуй, не только исследовать, из чего образуются силлогизмы, но и быть в состоянии их строить» [1, с. 173]. Аристотель сводит проблему построения силлогизмов к проблеме обнаружения среднего термина. Думаю, что это первая в истории логики попытка построения процедуры поиска логического вывода. Проблематику поиска вывода можно найти и у И. Канта. Так, во Введении к

---

[1] Статья содержит результаты исследований по проекту Российского фонда фундаментальных исследований № 09-06-00092а «Логика И. Канта: реконструкция и современное значение».

«Трансцендентальной диалектике» ставится новая задача по отношению к умозаключениям, решение которой затем окажется парадигматическим по отношению к разуму вообще: «Если, как это нередко случается, вывод задан как суждение, чтобы посмотреть не вытекает ли он из уже данных суждений, посредством которых мыслится совершенно иной предмет, то я ищу в рассудке утверждение этого вывода, а именно не находится ли оно в рассудке при определенных условиях согласно общему правилу» [11, с. 344]. Даже поверхностное знакомство с процедурами поиска вывода, разработанными в современных теориях машинного доказательства теорем, показывает, что здесь ставится не что иное, как *задача поиска вывода.* Действительно, Кант предполагает наличие суждения $\mathbf{A}$, наличие некоторого множества «данных суждений» $\mathbf{\Gamma}$ и спрашивает, имеется ли между ними отношение выводимости: $\mathbf{\Gamma} \vdash \mathbf{A}$? Это типичная задача поиска вывода. Правда, Кант налагает здесь еще одно ограничительное условие. Посредством посылок вывода должен мыслиться «совершенно иной предмет». Это требование можно на языке современной логики проинтерпретировать как условие, согласно которому множество свободных переменных, встречающихся в посылках, не должно иметь общих элементов с множеством свободных переменных заключения. Или формально: если $\mathbf{V}(\mathbf{\Gamma})$ и $\mathbf{V}(\mathbf{A})$ — множества свободных переменных $\mathbf{\Gamma}$ и $\mathbf{A}$, соответственно, то $\mathbf{V}(\mathbf{\Gamma}) \cap \mathbf{V}(\mathbf{A}) = \emptyset$. Иначе говоря, Кант относит к логическому применению разума решение задачи поиска вывода, т.е. фактически *расширяет понятие логической процедуры* так, чтобы включить в него не только логические формы понятий, суждений и умозаключений (выводов), но и процедуры поиска вывода (подробнее см. [4]).

Поиск логического вывода (доказательства) до второй половины XX века был неформализованным процессом, о котором высказывались различные эвристические соображения. Отдельным направлением было конструирование логических машин, которые так или иначе также были связаны с построениями логических доказательств. Задача поиска вывода на протяжении тысячелетий относилась к области содержательного мышления, эвристики, способов обнаружения нового знания. В своей статье «Эвристики, алгоритмы и правила логики» О.Ф. Серебрянников дает следующее определение эвристики: «Эвристиками мы называем приемы, правила, процедуры, принципы, способствующие организации поиска решения задачи некоторым рациональным или целесообразным путем с практически осуществимыми затратами времени, сил и средств» [14, с. 132]. Существенной особенностью эвристик является то, что стратегия поиска, основанная на эвристиках, не всегда приводит к успеху. Однако даже в случае неудачи эвристического поиска, он должен давать информацию, позволяющую делать дальнейший поиск более эффективным. Существенным вопросом, относящимся к философии логики, является вопрос о том, позволяет ли логика строить формальные модели эвристик или, иначе говоря, являются ли эвристики неформализуемым добавлением к формальным логическим процедурам или имеются формальные логические модели эвристик? Если мы выберем вторую альтернативу, то это будет означать, что нам придется расширить понятие логической процедуры.

В статье В.А. Смирнова «Творчество, открытие и логические методы поиска доказательства»[2], которая послужила поводом для написания этого текста, ставится задача — «обратить внимание на новые возможности использования логических методов и идей в исследовании исключительно сложной проблематики поиска, открытия и творчества» [16, с. 447]. В этой формулировке выражен ограниченный оптимизм относительно возможностей логики в исследовании эвристических процессов. Вместе с тем обращает на себя внимание то, что Владимир Александрович, который всегда придерживался классических (Фреге-Гуссерль) взглядов на логику, доказательство и отношение к процессам порождения нового знания в результате осуществления логических процедур[3], начинает говорить о возможностях

---

[2] Впервые опубликованной в [15] и перепечатанной в [16]. В дальнейшем будем называть эту статью ТОЛМПД.

[3] В частности, В.А. Смирнов в 70-х годах, когда мы с ним обсуждали эти проблемы, несколько подозрительно отнесся к концепции Я. Хинтикки о приращении информации в ходе логического вывода, основанной на теории дистрибутивных нормальных форм, в силу того, что она расходилась с его основными представлениями о природе логического вывода. Его вполне удовлетворило мое заключение о том, что приращение информации, о котором говорит Хинтикка, происходит не в ходе логического вывода, а в ходе

логики в моделировании эвристических процессов. ТОЛМПД говорит о том, что В.А. к середине 80-х годов начал рассматривать поиск вывода как логическую процедуру (или как часть ее) и делать на этой основе философские заключения. Чтобы оценить эволюцию взглядов В.А. Смирнова, рассмотрим вкратце эволюцию логики в XIX–XX веках в интересующем нас аспекте.

Основные усилия создателей современной символической логики были направлены на определение независимого от каких-либо внелогических соображений понятия доказательства. С построением исчисления предикатов Готлобом Фреге математическое доказательство стало строгим понятием, определяемым на основе явно введенных логических понятий и структуры логической системы. Таким образом, понятие доказательства опиралось на строго очерченное множество логических истин, определение которых зависело только от явно сформулированных в логической системе отношений и не ссылалось ни на какие внешние для логической системы факторы (например, психологические). Эта установка, сыгравшая решающую роль в становлении символической логики, на долгие десятилетия предопределила интерес логиков к доказательству и связанным с ним понятиям. Эта установка определила характер логических систем и логической проблематики. То, что связано с независимым определением доказательства, есть логика, а все, что не связано с ним, не есть логика. В неклассических логиках, в которых вводились понятия, далеко выходящие за пределы исчисления предикатов, критерием логического характера получавшейся системы были все то же — процедура доказательства, независимая ни от каких внешних факторов. В.А. Смирнов использовал для такого рода первоначальных систем логики, термин «системы фрегерасселовского типа». Такова классическая постановка проблемы отличения логических процедур от нелогических, выработанная на этапе становления математической логики.

В ТОЛМПД Смирнов осмысливает эту классическую поста-

поиска логического вывода. Расхождения у нас были только в вопросе о том, относится ли поиск вывода к логике или поиск вывода носит внелогический характер. Данная статья показывает, что в середине 80-х В.А. начал пересматривать свои взгляды.

новку вопроса и изменения, которые произошли в ней: «Мне представляется, что необходимо различать три вопроса: что есть доказательство; как искать доказательство; как искать интересующее нас утверждение» [16, с. 438]. Смирнов отмечает, что «логика (дедуктивная, формальная логика) на первых порах ограничивалась исследованием первого вопроса. Основной задачей логики было описание правильных способов рассуждений, т.е. рассуждений, которые при истинности посылок гарантируют истинность заключения» [16, 438-439][4]. Это соответствует тому, что ранее говорилось о роли автономного понятия «доказательство» в системах математической логики. Подводя итог своим рассуждениям, Смирнов замечает, что «имеются четкие и точные критерии, что есть вывод и доказательство» [16, с. 439]. Такие критерии — результат первого этапа становления математической логики. Этот этап завершился знаменитой теоремой Гёделя о неполноте, которая послужила импульсом для становления новой области логики — теории поиска вывода. В некотором смысле можно сказать, что теоремы Гёделя навели на мысль о том, что проблематика теории доказательства не является единственной проблематикой математической логики. В связи с этим рассмотрим подробнее генезис теории поиска вывода в свете новейших методологических исследований.

Б.С. Грязнов предложил модель развития научных теорий, в которой каждая последующая теория возникает как поризм, т.е. непредвиденное следствие из предыдущей теории *T*. В статье «О взаимоотношении проблем и теорий», по существу, содержится оригинальная программа построения теории развития науки, альтернативная программам К. Поппера, Т. Куна, И. Лакатоса. Дело в том, что характерной чертой всех такого рода методологических программ (особенно четко выраженной в концепции К. Поппера) является признание иррациональности возникновения нового знания: научное открытие непредсказуемо и неожиданно, следовательно, оно нелогично и нерационально. В такого рода аргументации всегда имеется скрытая предпосылка, согласно которой в науке нет места теориям, которые

---

[4] Следует обратить внимание на слово «было». Видимо, эту задачу В.А. относит к уже прошедшему этапу развития логики, считая, что теперь у логики новые задачи.

были бы логическими следствиями уже имеющегося знания и вместе с тем были бы непредсказуемы, неожиданны. Б.С. Грязнов опровергает это скрытое допущение: еще античной науке было известно понятие *поризма* — утверждения, «которое получалось в процессе доказательства теоремы или решения задачи, но получалось как непредвиденное следствие, как промежуточный результат», который, хотя и «получается как логическое следствие, для исследователя... может оказаться неожиданным, поскольку не является целью познавательной деятельности» [9, с. 114].

Предлагаемая Б.С. Грязновым трактовка научного открытия (возникновения новой теории) как поризма позволяет соединить в рамках одной методологической концепции две, казалось бы, несовместимые черты — логичность (рациональность) и неожиданность (непредсказуемость). Такую концепцию в буквальном смысле можно назвать «Логикой научного открытия». Согласно этой «логике», развитие науки предстает как история решения задач, поставленных внутри имеющихся теорий. Новое знание возникает в ходе решения задач и последующего превращения некоторых из этих решений (поризмов) в новую теорию путем придания им новой интерпретации. Поризм, будучи интерпретирован на новой области объектов, становится новой теорией T^*. При этом некоторый изоморфный образ теории T при новой интерпретации становится подтеорией T^*. Указанное понимание развития науки влечет за собой пересмотр многих традиционных представлений, в частности представлений о соотношении проблемы и теории и вообще представлений о задачах методологического исследования.

Эта модель применима и к развитию эмпирических наук, и к развитию математики. Я намереваюсь показать, что модель Грязнова объясняет и развитие логики, в частности, происхождение теории поиска вывода[5]. Теория поиска вывода как теория зародилась в 70-х годах XX века в трудах ленинградского логика и математика С.Ю. Маслова [12]. Вслед за С.Ю. Масловым определим теорию поиска вывода (ТПВ) как область символической логики, занимающуюся обнаружением по исчислению и объекту в языке этого исчисления структуры возможных выво-

---

[5] Впервые этот тезис был высказан в моей работе [3].

дов этого объекта [12, с. 91-92]. Теория поиска вывода в настоящее время вырастает из проблематики автоматического доказательства логических и (или) математических теорем на ЭВМ, ставшей частью более общей проблемы расширения баз знаний в системах «искусственного интеллекта».

В качестве исходной теории T рассмотрим гильбертовскую теорию доказательств, в рамках которой была поставлена задача доказательства непротиворечивости арифметики финитными средствами, заведомо формализуемыми в самой этой арифметике. Традиционный метод проведения доказательств непротиворечивости математических теорий состоял в указании модели рассматриваемой теории, построенной в рамках некоторой теории, непротиворечивость которой не вызывает сомнений. Однако, для теории множеств невозможно построение метатеории, обладающей большей надежностью, чем она сама. Гильберт предложил новый метод обоснования теории множеств, получивший название формалистической программы. Он поставил задачу показать, что применяемые в математике методы доказательства достаточно сильны для того, чтобы получить всю классическую математику, в том числе всю канторовскую теорию множеств, исходя из подходящим образом выбранных аксиом, но не настолько сильны, чтобы вывести из аксиом противоречие. Выполнение этой задачи Гильберт предполагал осуществить в два этапа.

Прежде всего, математика должна быть формализована, то есть необходимо было построить некоторую формальную систему, из аксиом которой с помощью некоторого четко определенного множества правил можно было бы вывести, по крайней мере, основы математики (здесь, прежде всего, имелись в виду арифметика, анализ и теория множеств). Эта формализация идет дальше часто применяемой содержательной аксиоматики, в которой основываются на «содержательно понимаемой» логике и ограничиваются полным перечнем списка всех специальных первоначальных терминов и перечислением всех сформулированных в этих терминах допущений, необходимых для вывода определенной совокупности теорем. Формализация, предполагаемая Гильбертом, не должна была включать в себя никаких неявных значений терминов: во внимание в ней принимаются только вид и порядок символов, к последовательностям которых применяются правила вывода. В такой системе проверка того, является ли некоторая цепочка последовательностей символов доказательством последней последовательности в этой цепочке, может быть осуществлена посредством выполнения механических операций.

В качестве второго шага Гильберт намеревался показать, что применение правил вывода к аксиомам никогда не сможет привести к противоречию. Рассуждения, посредством которых доказывается эта метатеорема о невозможности противоречия, должны быть настолько элементарными, чтобы в их справедливости невозможно было усомниться. Все виды рассуждений, применение которых в математике вызывает критику интуиционистов (например, применение закона исключенного третьего к бесконечным множествам), не должны применяться. Эта метатеория, в рамках которой предполагалось исследовать методы математических доказательств, была названа Гильбертом *метаматематикой* или *теорией доказательств*. Гильберт настаивал на том, чтобы в теории доказательств разрешалось пользоваться только *финитными* методами, однако его указания на то, какими свойствами они должны обладать, довольно расплывчаты. Он лишь говорит, что это «...прямые содержательные рассуждения, совершающиеся в виде мысленных экспериментов над наглядно представимыми объектами и не зависящие от предположений аксиоматического характера» [8, с. 59]. Более конкретная характеристика финитным рассуждениям была дана учеником Гильберта Ж. Эрбраном: «под интуиционистским (то есть финитным) рассуждением мы понимаем рассуждение, удовлетворяющее следующим условиям: всегда рассматривается лишь конечное и определенное число предметов и функций; функции эти точно определены, причем определение позволяет произвести однозначное вычисление их значений; никогда не утверждается существование объекта без указания способа построения этого объекта; никогда не рассматривается (как вполне определенное) множество всех предметов x какой-либо бесконечной совокупности; если же говорится, что какое-то рассуждение (или теорема) верно для всех этих x, то это означает, что это общее рассуждение можно повторить для каждого конкретного x, причем само это общее рассуждение следует при этом рассматривать только как образец для проведения таких конкретных рассуждений» (цит. по [17, с. 321]).

Особый интерес представляет методологический анализ этой своеобразной «металогической» теории. Для теории доказательств предметной областью исследования являются реальные доказательства, изобретаемые в содержательных математических теориях. Вместе с тем гильбертовская теория доказательств создает новый объект — *формальное доказательство в некотором логико-математическом исчислении.* Формальное доказательство в таком случае представляет собой результат абстракции от реальных математических доказательств *свойства формальной выводимости* теоремы из аксиом теории, представленное в виде синтаксической последовательности формул языка данного исчисления, каждая из которых является либо аксиомой исчисления, либо выводима из предыдущих по явно сформулированным в исчислении правилам вывода. Однако доказательство в логико-математическом исчислении является формальным синтаксическим объектом, а теория доказательств или метаматематика является *содержательной* теорией о формальных системах. Это означает, что для того, чтобы формальное доказательство стало абстрактным объектом, представляющим объект некоторой теории, оно должно быть интерпретировано, то есть ему должен быть приписан смысл, определяющий место этого объекта в теории. Для Гильберта смысл формальному доказательству придавался его связью с аксиоматическим методом. Аксиоматическое построение теории означает определенную интерпретацию доказательства как движения по *нисходящему* ряду, от основания к следствию, «сверху вниз», или если вспомнить античную интерпретацию математических доказательств, данную в александрийской математической школе, *синтетическое построение* доказательства. В.А. Смирнов в ТОЛМПД рассматривает эти смыслы анализа и синтеза, упоминая при этом имена Евклида и Папа Александрийского и опираясь на работу Ф.А. Зеленогорского [10]. Смирнов напрямую связывает понятие анализа с проблематикой поиска вывода, но не упоминает о роли синтеза в применении к теории доказательств. Однако во времена создания гильбертовской теории доказательств аксиоматическое построение было единственным известным способом задания логико-математических теорий. Поэтому рассмотрение формального объекта «доказательство» вместе с синтетическим способом его построения «сверху вниз» традиционно воспринималось как нечто само собой разумеющееся. На этом основании можно заключить, что *объектом* гильбертовской теории доказательств является *понятие формального доказательства, которому придана «синтетическая» или «нисходящая» интерпретация.*

Невозможность выполнения программы Гильберта в ее первоначальном варианте стала очевидной после того, как Гёдель в 1931 году доказал теорему о неполноте и следствие из этой теоремы (вторую теорему Гёделя), которое показывает невозможность обойтись при обосновании математики только конечными (финитными) методами. После того, как выяснилось, что невозможно доказать формальную непротиворечивость арифметики финитными средствами, возник вопрос, нельзя ли доказать непротиворечивость арифметики с помощью каких-либо методов, не финитных в первоначальном смысле этого слова, но все же достаточно надежно согласующихся с основой концепции формализма. Г. Генцен доказал непротиворечивость арифметики с помощью лишь одного нового метода, выходящего за рамки арифметики в собственном смысле слова, — с помощью так называемой трансфинитной индукции. Для решения задачи доказательства непротиворечивости арифметики Генцен строит сначала натуральные, а затем секвенциальные исчисления. Среди фигур заключения секвенциальных исчислений он выделяет *сечение*:

$$\frac{\Gamma \to \Theta, D \quad D, \Delta \to \Lambda}{\Gamma, \Delta \to \Theta, \Lambda}$$

Все фигуры заключения секвенциальных исчислений, кроме сечения, обладают свойством подформульности — каждая формула из посылки фигуры входит в ее заключение либо сама, либо как подформула более сложной формулы. Для того, чтобы доказать непротиворечивость арифметики, Генцен доказывает основную теорему, говорящую о том, что из исчисления может быть устранено сечение с сохранением множества выводимых в исчислении секвенций. При этом он замечает, что в таком исчислении уже все доказательство обладает свойством подформульности — все входящие в него формулы являются подформулами конечной секвенции. Таким образом, свойство подформульности было получено *не целенаправленно, а в ходе решения конкретной задачи* — доказательства непротиворечивости арифметики, то есть представляет собой *поризм*. Однако возникновение новой теории на основе поризма требует придания поризму новой интерпретации и включения его в некоторую систему понятий, которая составит ядро новой теории. Обнаружение у доказательств в генценовском секвенциальном исчислении свойства подформульности показало, что доказательство в этом исчислении может строиться как «сверху вниз», так и «снизу вверх». В терминах рассматриваемой модели, это обстоятельство вводит новую аналитическую интерпретацию основного объекта гильбертовской теории доказательств — формального доказательства. Поскольку объект гильбертовской теории доказательств представляет собой понятие формального доказательства вместе с его синтетической интерпретацией «сверху вниз», возможность новой аналитической интерпретации создает возможность нового теоретического объекта. Поскольку же синтетическая и аналитическая интерпретации противоположны, то новый теоретический объект означает рассогласование с первоначальной интерпретацией объекта теории доказательств и требует развития нового взгляда на доказательства в секвенциальных исчислениях как на объекты, обладающие важными «аналитическими» свойствами. Построение доказательства, обладающего свойством подформульности, «снизу вверх» реализует некоторую элементарную стратегию поиска доказательства, в которой структура доказываемой секвенции и выделение в ней главного знака почти однозначно[6] определяют следующий шаг построения доказательства. Тем самым построение доказательства исходной секвенции «снизу вверх» включает в себя формализацию некоторой стратегии обнаружения доказательства, а значит, порождает возможность нового теоретического объекта — поиска

---

[6] За исключением применения так называемых минус-правил: правил введения квантора общности в антецедент и введения квантора существования в сукцедент секвенции.

вывода. Гёдель в своей теореме о неполноте продемонстрировал невыполнимость этой задачи, что привело к попыткам получить доказательство непротиворечивости более сильными (трансфинитными) средствами. Однако оказалось, что аксиоматические системы гильбертовского типа, во-первых, плохо приспособлены к такого рода доказательствам, а, во-вторых, сильно расходятся с теми приемами, которые действительно используются в математической практике. Решая задачу доказательства непротиворечивости арифметики, Генцен в начале 30-х гг. изобретает секвенциальные системы, особенно удобные для такого рода доказательств. В них доказательство непротиворечивости эквивалентно существованию нормальной формы доказательств, в которой более не встречается сечений. Но это автоматически влечет за собой наличие у доказательства свойства подформульности: каждая формула в посылках применения правила является подформулой формул, встречающихся в заключении. Это задает новую точку зрения на доказательства в исчислениях этого типа: «снизу вверх», а эта точка зрения сама по себе подсказывает стратегию поиска вывода. Таким образом, простая перемена точки зрения на выводы в секвенциальных исчислениях ведет к принципиальному сдвигу: от теории доказательств — к теории поиска вывода. Однако этой перемены пришлось ждать примерно еще двадцать лет, и систематически новая точка зрения была проведена только в середине 50-х гг. в семантических таблицах Э. Бета и модельных множествах Я. Хинтикки[7]. В чем дело? Ответ подсказывает модель Грязнова: для превращения непредвиденного следствия (поризма) в новую теорию требуется новая интерпретация с новой предметной областью. Такой интерпретацией послужило автоматическое доказательство теорем на ЭВМ, исходя из потребностей которого, начала систематически развиваться уже собственно теория поиска вывода, ее методы (резолюций, обратный и др.), система и обобщения (до теории творческих, процессов определенного типа — С.Ю. Маслов в 70-х гг.)

Таким образом, свойство подформульности, возникающее как поризм в ходе доказательства непротиворечивости арифмети-

---

[7] Подробнее об аналитической интерпретации доказательств Э. Бетом и Я. Хинтиккой и о том, почему это не привело к формированию ТПВ, см. [7].

ки, вместе с переменой взгляда на работу в исчислении («снизу вверх») и интерпретацией этой работы на новой области автоматического доказательства теорем на ЭВМ породило новую теорию — *теорию поиска вывода*[8]. Проведенная реконструкция возникновения теории поиска вывода из гильбертовской теории доказательств показывает, что ТПВ стала результатом решения внутрилогических проблем, возникновение которых связано с приложениями логики к основаниям математики. Иначе говоря, возникновение ТПВ показывает, что последняя является *логической* теорией, формулирующей понятие логической процедуры, представляющей собой расширение традиционного понятия логического доказательства. Логические доказательства становятся частью более обширной системы поиска вывода.

Здесь возникает вопрос о соотношении понятий «метод поиска вывода» и «процедура поиска вывода». Начнем с понятия процедуры. Что же такое логическая процедура и в чем значение этого понятия? Процедура вообще есть последовательность действий, выполняемая по более или менее определенным правилам. Логическую процедуру в первом приближении можно определить как последовательность действий, выполняемых в соответствии с правилами преобразования выражений некоторого естественного или формализованного языка. **Однако уже это определение вызывает ряд вопросов: если логическая процедура есть последовательность действий, то: что это за действия? чьи это действия? с чем это действия? – *Так вообще пишут по-русски?*** Возникает задача описания логической процедуры как системы.

Первое, что требуется при системной трактовке логической процедуры, — это осознание того, что логическая процедура является одним из видов познавательных процедур, а, следовательно, имеет субъект-объектную структуру. На мой взгляд, нет необходимости конструировать какой-либо особый «логический» субъект. Субъектом действий, составляющих логическую процедуру, является субъект познания. Специфика субъект-объектных отношений в логических процедурах скорее связана с понятием объекта действий. На первый взгляд, субъект дей-

---

[8] Подробнее объяснение происхождения теории поиска вывода из теории доказательств в рамках поризматической модели см. [18], а также [6].

ствует с формулами или множествами формул языка L. Однако являются ли формулы и предложения объектами логических процедур? На мой взгляд, нет, поскольку общезначимые формулы и логически истинные предложения обычно интересуют субъекта не сами по себе, а как выражение отношений между логическими формами высказываний языка L. Действительно, вместе с принятием некоторого языка, определением формы его выражений и их семантики фиксируется и множество отношений между логическими формами этих выражений — логических отношений между высказываниями. Эти отношения независимы от субъекта в том смысле, что диктуются, навязываются ему структурой самого языка и его семантикой. Строя выводы, доказательства, опровержения, субъект ставит своей целью обнаружить такие отношения, выраженные формулами или утверждениями о выводимости. Поэтому объектом данной логической процедуры естественно считать некоторое подмножество множества объективных отношений между логическими формами выражений языка L — логических отношений.

При таком понимании субъекта и объекта логических процедур системообразующими связями между компонентами системы — субъектом и объектом — выступают действия субъекта по исследованию объекта — логических отношений.

Логическим аналогом такого рода действий можно считать понятие вывода (доказательства, опровержения). Если определять место логического вывода в системе логической процедуры, то можно сказать, что вывод есть средство фиксации логических отношений, развернутое «изображение» отношения логического следования. Поэтому логический вывод есть *результат* действий субъекта логических процедур. Сами эти действия — это действия по *поиску* вывода. Таким образом, на уровне работы с выражениями языка L логическая процедура состоит из двух подсистем: вывода и поиска вывода, которые в совокупности образуют те «внешние действия» (по выражению Гильберта), при помощи которых субъект исследует логические отношения между высказываниями языка L.

Рассмотрим, каким образом это понимание логических процедур может быть применено к формализованным логическим системам. С этой точки зрения можно выделить два типа логических систем: во-первых, системы, в которых формализуются понятие общезначимой формулы или отношения следования, и, во-вторых, системы, в которых наряду с формализацией логического следования имеет место хотя бы частичная формализация принципов поиска вывода. Примером систем первого типа могут быть аксиоматические системы гильбертовского типа и системы натурального вывода. Примером систем второго типа могут служить секвенциальные системы.

Можно сказать, что более полная формализация процесса дедуктивного рассуждения происходит в системах второго типа. На основе этих систем можно точно ставить вопрос об эвристических возможностях логических процедур и положительно отвечать на него. В системах первого типа формализуется только подсистема логического вывода, а системные принципы строения логической процедуры не находят полного выражения. В таком случае логические процедуры развертываются как бы в «двух измерениях»: в формальной системе, в которой выписывается вывод, и в «уме» субъекта, работающего с этой формальной системой (ищущего подстановки в аксиомы, изобретающего вспомогательные допущения и т.п.). Системы второго типа — секвенциальные системы кангеровского типа, семантические таблицы Бета и т.п. — частично формализуют и вторую подсистему логических процедур — поиск вывода. Для еще более полной формализации логических процедур, в том виде, в каком они понимаются в настоящей статье, необходима формализация принципов поиска вывода в рассматриваемой логической системе, т.е. формулировка алгоритмов поиска вывода.

Теперь мы можем дать определение логической процедуры: *логическая процедура есть последовательность действий субъекта познания с формулами (или множествами формул) формализованного языка (или предложениями естественного языка), направленных на обнаружение отношений логических форм высказываний этого языка и выполняемых в соответствии с правилами некоторой логической системы, сформулированной (или подразумеваемой) в этом языке.*

Ключевой вопрос, с которым связано рассмотрение важнейших логико-философских проблем[9], состоит в том, включаем ли

---

[9] Различение логических проблем, философских проблем логики и

мы поиск вывода в понятие логической процедуры, или, иначе говоря, являются ли логическими процедуры поиска логических выводов?

Проведенный анализ понятия логической процедуры показывает, что логическая процедура является целостной системой. Базисный уровень ее представляет собой субъект-объектную структуру, связанную действиями субъекта по исследованию логических отношений; на уровне «внешних действий» (семантики и синтаксиса языка) эта структура проявляется как динамическое взаимодействие двух подсистем: вывода и поиска вывода.

Вообще терминологическое различие «метод поиска вывода»–«процедура поиска вывода» отражает существенное различие в подходе к рассмотрению того, чем занимается логика. При акценте на методы к области логического относятся только сами предписания по осуществлению логических действий, при акценте на процедуры — и само осуществление этих действий. Такое различие порождает и различные подходы в философии логики, в частности, различные решения вопроса о том, возможно ли моделирование логическими структурами процессов мышления или нет.

Тенденцию к включению в состав логических процедур поиска вывода можно заметить и в ТОЛМПД. Однако для В.А. Смирнова этот тезис носит ограниченный характер, поскольку, по мнению Смирнова, если принять этот тезис неограниченно, то возникает опасность проникновения психологизма в логику через «окошко» логических процедур поиска вывода: «Нам важно отметить то, что имеется принципиальная возможность обсуждать проблемы поиска доказательств не в субъективных психологических терминах, а в собственно логических, объективных» [16, с. 442]. Важнейшим философским вопросом здесь является вопрос о том, следует ли включать поиск вывода в структуру логических процедур. Похоже, что В.А. Смирнов склоняется к признанию того, что развитие методов поиска логических выводов во второй половине XX века дает нам основание для включения поиска вывода в структуру логических процедур: «Долгое время многие ученые, включая специалистов-логиков, полагали, что задача поиска доказательства является скорее за-

---

логико-философских проблем см. в [2, с. 7-8].

дачей психологической, чем логической. Но развитие логики дало средства для логической постановки проблемы поиска доказательств. Тем самым вторая проблема — как искать доказательство — приобрела характер логической проблемы» [16, с. 440]. Однако В.А. Смирнов сразу же ставит следующий вопрос: «В настоящее время логика изучает не только способы рассуждения, но и приходит к изучению процедуры поиска доказательств. Но не означает ли это, что логика вновь возвращается к покинутым ею в свое время позициям психологизма?» [16, с. 443].

Подводя итоги первому этапу развития математической логики, В.А. Смирнов делает совершенно верное наблюдение: «Успехи логики в решении этого основного вопроса (о доказательстве — В.Б.) были обусловлены отказом от психологизма, господствовавшего в логике в XIX столетии» [16, с. 439]. Именно психологизм был главным препятствием для формулирования автономного понятия доказательства в логико-математических системах, поскольку основанием доказательств так или иначе считались психологические способности субъекта. Особенно показательной была позиция Д.С. Милля, для которого законы логики представляли собой психологические законы мышления, взятые при определенных ограничениях. Недаром Милль стал объектом критики и Фреге и Гуссерля. По Миллю, (1) логика сводима к психологии, то есть логические понятия могут быть определены в терминах психологических понятий, а логические законы могут быть выведены из психологических законов, (2) логика тривиально является моделью процессов мышления, потому что логика просто является частью этих процессов.

По поводу проблемы психологизма и ТПВ я выскажу некоторые общие соображения, подкрепление которых анализом соотношения конкретных процедур поиска вывода и процессов естественного мышления можно найти в [2].

(1) Конечно, теория поиска вывода не преследует цель изучить, каким образом человек изобретает доказательства, это — задача психологии творчества. Однако, думается, не следует отбрасывать возможность того, что, преследуя цель организации наиболее рациональных процедур поиска вывода, логика моделирует некоторые стороны изобретения доказательств чело-

веком, поскольку *человеческие способы поиска вывода одновременно могут оказаться и наиболее рациональными.* Последнее утверждение не является верным или неверным a priori. Вопрос о его истинности становится вопросом *факта*, т.е. сравнения конкретных процедур поиска вывода с процессами естественного мышления.

(2) В ТПВ можно в принципе провести различие между человечески-ориентированными и машинно-ориентированными методами поиска вывода. Такое различие проводится, например, Дж. А. Робинсоном, который к человечески-ориентированным методам поиска вывода относит процедуры поиска вывода, основанные на секвенциальном исчислении и таблицах Бета, а к машинно-ориентированным — метод резолюций [19, с. 169]. Хотя с фактическим проведением такой границы Робинсоном можно не соглашаться, тем не менее различение Робинсона показывает принципиальную возможность проведения такой границы. Иначе говоря, в логике также можно провести грань между методами поиска вывода, более приспособленными для реализации человеком, чем компьютером. В принципе нельзя отвергать возможность сравнения и систематизации методов поиска вывода именно по этому основанию.

(3) Часто говорят о существенном отличии интеллектуальных процедур, разрабатываемых в рамках ИИ, от аналогичных процедур, осуществляемых человеком. Но в современных исследованиях по ИИ этот вопрос не является окончательно решенным. Из них нельзя получить определенного вывода о принципиальной возможности или невозможности моделирования процессов естественного мышления системами ИИ. По-видимому, это также вопрос факта, и решение его зависит от степени успешности систем ИИ, претендующих на моделирование особенностей естественного интеллекта. В силу такой неопределенности в качестве исходного пункта философского исследования можно взять и гипотезу о моделируемости естественного интеллекта искусственным, и гипотезу, запрещающую такое моделирование. Выбор между этими гипотезами в конечном счете будет зависеть от фактического положения дел в области ИИ. Таким образом, мы не можем сказать, что из исследований по ИИ вытекает однозначный антипсихологизм. На мой

взгляд, большая часть исследований по ИИ склоняется как раз к некоторого рода психологизму, связанному с возможностью моделирования определенных сторон естественного интеллекта в системах ИИ [13].

(4) Логические процедуры не даны логике извне, поскольку логика работает не с самими естественными рассуждениями, а с их *представлениями* в точных формализованных языках. Но эти представления в некотором (пока не уточняемом) смысле и являются описаниями (точнее сказать, моделями) естественных рассуждений. Если бы перед логикой стояла только задача обоснования методов поиска вывода, то логика, по-видимому, не пошла бы далее процедуры простого перебора (метода Британского музея), поскольку простой перебор является *самым обоснованным* методом поиска. В силу рекурсивной перечислимости множества теорем исчисления предикатов первого порядка он рано или поздно выдаст вывод любой теоремы этого исчисления.

Однако я думаю, что в настоящее время сам термин «психологизм» (и, соответственно, «антипсихологизм») устарел. В современных исследованиях по философии логики речь уже не идет об *обосновании* логики со стороны психологии. Речь идет о действительно важном вопросе: является ли логика замкнутой системой теорий, абстрагирующих из систем объективного знания свойство обоснованности высказываний и полностью отделяющих это свойство от тех субъектов, которые изобретают и используют эти обоснования, или логика приносит существенную информацию о человеческом мышлении? Вопрос об обосновании логики психологией снят в результате антипсихологистской критики. Однако остается вопрос о моделировании мышления логическими процедурами. Поэтому для концепций, настаивающих на автономии логики, но утверждающих отношение моделирования между логическими процедурами и определенными аспектами человеческого мышления, больше подходит термин «логический ментализм»[10]. Использование этого термина подчеркивает, что это концепция в философии логики, которая устанавливает объективные отношения между логическим процедурами, совершаемыми в соответствии с правилами той или

---

[10] Я уже обсуждал возможность введения такого термина в [5].

иной формальной системы, и умственными действиями (mental actions) субъекта познания.

Завершить эту статью я хотел бы обширной цитатой из анализируемой работы В.А. Смирнова, намечающей дальнейший путь разработки теории поиска вывода и ее применения как в самой логике, так и в философии логики: «На протяжении последних ста лет своего развития логика ограничивала свои задачи процедурами доказательства, не претендуя на исследование методов открытия, на исследование процессов творчества. В этом ограничении своих задач был залог многих ее успехов. Однако к настоящему времени разработаны средства, позволяющие исследовать процедуры поиска доказательств и их индуктивного подтверждения. Запросы практики, особенно задачи создания „искусственного интеллекта“ , настоятельно требуют разработки вопросов, относящихся к проблемам выдвижения и выбора гипотез, индуктивных закономерностей. Логическому подходу к этим проблемам будет принадлежать важное место» [16, с. 447].

Литература

[1] *Аристотель.* Первая аналитика // Сочинения в 4-х томах. М.: Мысль, 1978. Т. 2. С. 173.

[2] *Брюшинкин В.Н.* Логика, мышление, информация. Л.: Изд-во ЛГУ, 1988.

[3] *Брюшинкин В.Н.* О возникновении теорий в логике: теория поиска вывода как поризм // Современная логика: Проблемы теории, истории и применения в науке: Сб. науч. тр. / Под. ред. А.Я Слинина. Л.: Изд-во Ленинградского ун-та, 1990. С.17–18.

[4] *Брюшинкин В.Н.* Метапсихологизм Канта // Кантовский сборник. Вып. 24. Калининград: Изд-во КГУ, 2004. С. 65–73.

[5] *Брюшинкин В.Н.* Антропологические измерения логики // Вестник Российского государственного университета имени Иммануила Канта. Вып. 6. Сер. Гуманитарные науки. Калининград: Изд-во РГУ им. И Канта, 2006. С. 6–11.

[6] *Брюшинкин В.Н., Ходикова Н.А.* Рациональная реконструкция происхождения теории поиска вывода из гильбертовской теории доказательств // Модели рассуждений — 1: Логика и аргументация: Сб. науч. ст. / Под общ. ред. В.Н. Брюшинкина. Калининград: Изд-во РГУ им. И. Канта, 2007. С. 205–219.

[7] *Брюшинкин В.Н., Ходикова Н.А.* Аналитическая интерпретация доказательств в таблицах Бета и модельных множествах Хинтикки // Аргументация и интерпретация. Исследования по логике, аргументации и истории философии: Сб. научн. статей. / Под ред. В.Н. Брюшинкина. Калининград: Изд-во РГУ им. И. Канта, 2006. С. 39–46.

[8] *Гильберт Д., Бернайс П.* Основания математики. Логические исчисления и формализация арифметики. М.: Наука, 1979. С. 59.

[9] *Грязнов Б.С.* Логика, рациональность, творчество. М.: Наука, 1982. С. 114.

[10] *Зеленогорский Ф.А.* О математическом, метафизическом, индуктивном и критическом методах исследования и доказательства. Харьков, 1877.

[11] *Кант И.* Критика чистого разума // Кант И. Соч. в шести тт. М.: Мысль, 1966. Т. 3. С. 344.

[12] *Маслов С.Ю.* Теория дедуктивных систем и ее применения. М.: Радио и связь, 1986.

[13] *Поспелов Д.А.* Моделирование рассуждений. Опыт анализа мыслительных актов. М.: Радио и связь, 1989.

[14] *Серебрянников О.Ф.* Эвристики, алгоритмы и правила логики // Проблемы законов науки и логики научного познания: Сб. науч. тр. / Под ред. И.Я. Чупахина, В.П.Рожина. Л.: Изд-во Ленинградского университета, 1980. С. 132.

[15] *Смирнов В.А.* Творчество, открытие и логические методы поиска доказательства // Природа научного открытия. М.: Наука., 1986. С. 101–114.

[16] *Смирнов В.А.* Творчество, открытие и логические методы поиска доказательства // Логико-философские труды В.А. Смирнова / Под ред. В.И. Шалака, М.: Эдиториал УРСС, 2001. С. 438–447.

[17] *Френкель А., Бар-Хиллел И.* Основания теории множеств. М.: Мир, 1966. С. 321.

[18] *Ходикова Н.А.* Логико-методологическое исследование происхождения теории поиска вывода. Диссертация на соискание ученой степени кандидата философских наук. Калининград, 2004.

[19] *Robinson J.A.* Logic: form and function. Edinburg, 1979. P. 169.

Металогический плюрализм и универсальная логика[1]

В. Л. Васюков

ABSTRACT. Conception of logical pluralism claims that there is not one true logic but there are many. Conception of metalogical pluralism is based on the assumption that there is not one correct answer as to whether a given argument is deductively valid, but there are many. Since that leads to the interplay between logics and metalogics the question arises: what is the nature of this interplay? The Universal Logics approach gives us hints at some answers to this question. There are also some semantic keys to the issue under consideration.

Ключевые слова: логический плюрализм, логический монизм, логическое следование, общезначимость, комбинации логик, неклассический универсум

1 Введение

Современная ситуация в логике характеризуется постоянным увеличением числа неклассических логических систем, и процесс этот, судя по всему, необратим в силу своей природы. На протяжении свыше двух тысяч лет исследователи имели дело лишь с логикой Аристотеля и логикой стоиков, и современная классическая логика в значительной степени следует их традиции, отличаясь лишь своим инструментарием. Появление неклассической логики нанесло серьезный удар по логическим исследованиям, заставляя переоценивать и подвергать сомнению многие результаты, считавшиеся доселе незыблемыми. Как следствие, в современной философии логики получила широкое распространение точка зрения о праве на существование не одной, но множества истинных логик. Эта точка зрения получила известность под именем *логического плюрализма.*

---

[1] Исследование выполнено при финансовой поддержке РГНФ в рамках научно-исследовательского проекта РГНФ («Логический плюрализм и его онтологические и эпистемологические следствия»), проект № 09-03-00545а.

Впрочем, еще Ч. Пирс считал, что существует огромное многообразие логик, которые могут быть определяемы, улучшаемы и используемы для исследования друг друга (или даже самих себя) — все зависит от целей исследователя. В отличие от него для Г. Фреге существовало только одно-единственное исчисление (*Begriffsschrift*), поскольку всем присуща только лишь одна разновидность человеческого мышления, которую это исчисление отражает. Отсюда и специально разработанный Фреге формальный язык (*Formelsprache*) — это, по его мнению, не просто какой-то отдельный дополнительный язык, но улучшенная и проясненная версия обычного языка.

В XX веке становление неклассической логики на раннем этапе часто приводило к мирному сосуществованию логического плюрализма и логического монизма в рамках одного и того же философского сообщества. Характерным примером в этом отношении может считаться Львовско-Варшавская логико-философская школа, два выдающихся представителя которой — Станислав Лесьневский и Ян Лукасевич — занимали полярные позиции по вопросу поиска единого основания логики. По мнению Лесьневского, отличие математических систем от произвольных дедуктивных систем вызвано тем, что математические системы не противоречат «логическим интуициям», которые, в свою очередь, не могут произвольно описывать мир. Они в состоянии это делать лишь подчиняясь единой логике — истинной собственной логике мира. Лучше всего, точнее, единственным возможным образом, эту логику можно охарактеризовать как классическую логику — двузначную и экстенсиональную. По этой причине, в частности, Лесьневский не проявлял ни малейшего интереса к многозначным логикам (впрочем и вообще к другим неклассическим логикам).

Что касается Лукасевича, то если в 1936 году он соглашается с Лесьневским, и пишет, что одна и только одна из логических систем реализована в действительном мире, реальна так же как реальна одна и только одна система геометрии, то уже в 1937 году он утверждает нечто противоположеное. Теперь он придерживается той точки зрения, что все логические системы, создаваемые нами, являются при тех допущениях, при которых мы их создаем, необходимо истинными. Можно говорить лишь о подтверждении онтологических допущений, скрытых где-то в основании логики, если мы хотим следствия данных допущений проверить как-то на фактах. Наконец, в конце своей жизни в 1952 году он приходит к заключению, что не существует способа распознать, какая из n-значных систем логики, $n \geq 2$, истинна. Классическое исчисление высказываний, истинностная матрица которого двузначна, является самой старой и самой простой логической системой и поэтому оно наиболее известно и наиболее широко применяемо. Но для определенных целей, например, в модальной логике, n-значная система ($n \geq 2$) может быть более уместной и применяемой. Чем более применима и богата логическая система, тем более она имеет истинностных значений.

Р. Карнап в своей работе «Логический синтаксис языка» [10] писал, что логика играет огромную роль в философском исследовании, но ничто не заставляет утверждать, что в подобном исследовании мы обязаны иметь дело только с одной логикой. Он формулирует плюралистический «Принцип толерантности», который гласит: наше дело не устанавливать запреты, но получать логические заключения. По его мнению, в логике нет моральных запретов, каждый волен строить и использовать ту логику, которая приносит успех в его исследовании. При этом следует учитывать, что речь, в сущности, идет не о выборе логики, но о выборе соответствующего формального языка.

В наше время, несмотря на то что современная ситуация характеризуется пролиферацией (размножением) неклассических логических систем, что можно было бы считать «эмпирическим» подтверждением правомочности логического плюрализма, дебаты по поводу логического плюрализма не утихают. И главную проблему в связи с этим составляет вопрос о том, являются ли эти логики соперничающими, или же они образуют одно огромное дружное семейство. Такие исследователи, как Грэм Прист, считают, что любая из нестандартных логик (т.е. интуиционистская, многозначная и квантовая, релевантная и паранепротиворечивая, условная и свободная) корректна, их наличие служит нам напоминанием о том, что логика не является множеством принятых истин, но дисциплиной, в которой претендующие на значимость теории соперничают друг с другом. При этом следует различать теоретическую логику, прикладную логику и обыденную логику, ибо области их конкуренции могут не пересекаться.

2 Логический плюрализм и логический монизм

Какова же природа логического плюрализма с точки зрения современной логики? Карнаповский «принцип толерантности», дающий карт-бланш изобретению и конструированию логических систем, на практике оказался не совсем уместным и приводящим к некоторым недоразумениям. Г. Рестол в [17] показывает, что карнаповская «толерантность», сводящая плюрализм к возможности выбора формальных языков, неверна в том отношении, что в одном и том же языке могут существовать различные отношения логического следования. Поэтому речь должна идти не об отношении между языками, но об отношении между различными видами логического следования.

Последнее весьма существенно, поскольку по мнению Г. Рестола и Дж. Билла [8, p. 475] еще не так давно в логике доминировала точка зрения Фреге-Рассела, согласно которой главным является логическая истина, а логическое следование рассматривалось как вторичное понятие. Может быть, этим и объясняется неудача карнаповского принципа в качестве аргумента в пользу логического плюрализма. Для современной картины логики характерно обратное представление: главное — это логическое следование. Но что тогда представляет собой логическое следование? Что означает, что заключение A *следует* из посылок Σ? Рестол и Билл считают, что в рамках существующей общепринятой традиции природа логического следования может быть описана следующим образом:

> (V) Заключение A *следует* из посылок Σ тогда и только тогда, когда в любом случае, когда каждая посылка из Σ истинна, будет истинным A. Или равносильно: не бывает так, что каждая посылка из Σ истинна, но при этом A не истинно.

Этот принцип позволяет определить общезначимость, например, так, как это делает Р. Джеффри: «Общезначимый вывод есть такой вывод, чье заключение истинно во всех случаях, когда истинны его посылки. Признаком общезначимости является отсутствие контрпримеров, случаев, когда все посылки истинны, а заключение ложно» [12, p. 1].

Однако примечательно, что Джеффри заканчивает свое определени замечанием, что трудности с применением этого определения возникают при обсуждении случаев, в нем упомянутых. Вот эти-то трудности следует воспринимать более чем серьезно, ибо они и служат источником логического плюрализма, накладывающего свой отпечаток на всю современную логику, составляя смысл большинства современных исследований.

Подобная специфическая версия логического плюрализма основывается, в сущности, на трех положениях:

- Принцип (V) определяет дотеоретическое (или интуитивное) понятие следования.
- Логика задается уточнением случаев, возникающих в (V). Подобное уточнение может рассматриваться как способ истолкования условий истинности утверждений, выражаемых с помощью рассматриваемого языка.
- Существует по меньшей мере два различных уточнения случаев в (V).

Во втором положении наиболее прозрачное истолкование случаев получается путем простого отождествления их с возможными мирами, столь популярными в современной логике, что приводит к следующему виду определений истинностных значений сложных формул:

$A \wedge B$ истинно в возможном мире w тогда и только тогда, когда A истинно в w и B истинно в w.

$A \vee B$ истинно в возможном мире w тогда и только тогда, когда A истинно в w или B истинно в w.

$\neg A$ истинно в возможном мире w тогда и только тогда, когда A не истинно в w.

$\forall x A(x)$ истинно в возможном мире w тогда и только тогда, когда для каждого объекта b в w, $A(b)$ истинно в возможном мире w.

$\exists xA(x)$ истинно в возможном мире w тогда и только тогда, когда для некоторого объекта b в w, $A(b)$ истинно в возможном мире w.

Однако, более стандартным способом в языке классической первопорядковой логики случаи истолковываются в рамках так называемых моделей Тарского. Эти модели представляют собой структуры, включающие в себя следующие конструкции:

1. Непустое множество D, называемое областью определения.
2. Функция I, интерпретация, удволетворяющая следующим условиям:

   (a) $I(E)$ является элементом D, если E является именем (в данном языке);

   (b) $I(E)$ является множеством упорядоченных n-ок D-элементов, если E является n-местным предикатом.

Использование моделей для определения языка влечет выполнение следующих условий.

- Если α есть приписывание D-элементов переменным, то $I_\alpha(x) = \alpha(x)$. Если a является именем, то $I_\alpha(a) = I(a)$.
- $Ft_1 \cdots t_n$ истинно в M, α тогда и только тогда, когда $\langle I_\alpha(t_1), \ldots I_\alpha(t_n)\rangle \in I(F)$.
- $A \wedge B$ истинно в M, α тогда и только тогда, когда A истинно в M, α и B истинно в M, α.
- $A \vee B$ истинно в M, α тогда и только тогда, когда A истинно в M, α или B истинно в M, α.
- $\neg A$ истинно в M, α тогда и только тогда, когда A не истинно в M, α.
- $\forall xA$ истинно в M, α тогда и только тогда, когда A истинно в M, α' для каждого x-варианта α'.
- $\exists xA$ истинно в M, α тогда и только тогда, когда A истинно в M, α' для некоторого x-варианта α'.

Эти условия дают нам общезначимость аргументов в формальном языке по принципу (V). Аргумент общезначим тогда и только тогда, когда в каждой модели, в которой истинны посылки, будут истинны заключения. Подобное определение можно назвать общезначимостью по Тарскому.

Если же мы будем говорить вместо моделей или миров, например, о ситуациях, то мы получим определение следования и общезначимости в релевантной логике. Если в роли случаев будут выступать вычислительные конструкции (доказательства), то мы получим интуиционистскую логику и т.д. Ясно, что некоторые условия и определения при этом изменяются.

Так, в первом случае условие для отрицания выглядит теперь следующим образом:

- A истинно в s тогда и только тогда, когда A не истинно в s', где sCs'.

Здесь sCs' означает, что ситуация s совместима с ситуацией s' (т.е. C есть бинарное отношение *совместимости*). Иными словами, отрицание A истинно в s только когда любая ситуация, в которой A истинно, несовместима с s. Принцип (V) в этом случае приобретает *ситуационное* прочтение:

> Вывод A из Σ *релевантно* общезначим, если в любой ситуации, в которой все предпосылки из Σ истинны, истинно и A.

Для интуиционистской логики существует семантика типа Крипке, в которой истина соотносится с точками (моделирующими вычислительные конструкции), которые частично упорядочены по силе с помощью отношения $\sqsupseteq$. В частности, условия для импликации и отрицания выглядят следующим образом:

- $A \supset B$ истинно в c тогда и только тогда, когда для любой $d \sqsupseteq c$, если A истинно в d, то и B также;

- $\neg A$ истинно в c тогда и только тогда, когда A не истинно в d для любой $d \sqsupseteq c$.

Таким образом конструкция доказывает $A \supset B$ тогда и только тогда, когда будучи скомбинированной с конструкцией для A она дает конструкцию для B. Условие для отрицания становится понятным, если учесть, что $\neg A$ определяется как $A \supset \perp$, а для $\perp$ конструкции не существует. Версия принципа (V) для случая конструкций выглядит следующим образом:

> Вывод A из Σ *интуиционистски* общезначим, если в любой конструкции, в которой все предпосылки из Σ истинны, будет истинно и A.

Интуитивно возникающее здесь возражение связано с неопределенностью границ подобных истолкований случаев. Получается, что существует огромное количество отношений следования, порождающих различные логики, и все они несравнимы между собой, в том смысле, что нет никаких объективных критериев, позволяющих судить о превосходстве одного отношения следования над другим. Все они равноправны, следовательно, справедлив принцип «anything goes», т.е. «все дозволено»?

На этот упрек сторонники логического плюрализма обычно отвечают, что задачей их исследований является как раз констатация факта логического плюрализма и прояснение возникающей при подобной констатации картины. Многие из неклассических систем могут быть оспариваемы как по логико-философским, так и техническим причинам, однако это ничего не добавляет к поразительному факту возможности существования множества подобных систем. Собственно говоря, несогласие возникает только тогда, когда уточнены задачи вашей логической системы, установлено, что она должна делать.

Более серьезный аргумент против плюрализма выдвигает Г. Прист в [14, p. 203], рассматривая гипотетический случай двух одинаково хороших определений дедуктивной общезначимости K_1 и K_2, когда β следует из α в случае K_1, но не K_2, и мы знаем, что α истинно. Будет ли β истинным, обусловлена ли истинность β приводимой информацией? В случе K_1 это очевидно согласно принципу (V), но вот в случае K_2 мы сталкиваемся с затруднением. Если считать истинность абсолютным, а не относительным понятием, и учитывать, что общезначимость не означает в общем случае истинность (т.е. в случае K_2 не утверждается, что β ложно), то получается, что мы обязаны принять истинность β, что приводит к тому, что K_1 информационно предпочтительней K_2. Отсюда логика, соответствующая K_1, превосходит логику, соответствующую K_2.

Дальнейший анализ возникающей в этой связи ситуации приводит С. Рида [16] к заключению, что недостатком подобного плюралистского подхода является принятие классической метатеории, поскольку в этом случае из формализации принципа (V) в виде

$$\begin{gathered}(\mathrm{V}_{\supset})\ \Sigma \vdash_{\supset} A \text{ тогда и только тогда, когда} \\ (\forall w)((\forall B \in \Sigma) w \vDash B \supset w \vDash A)\end{gathered}$$

оказывается, что из $\alpha \vdash_{\supset} \beta$ и истинности α не следует, что β истинно. В качестве примера можно взять случай дизъюнктивного силлогизма ($A \vee B, \neg A \vdash B$), который, как известно (так называемый аргумент Льюиса, см. [15, § 2.6]), приводит к принципу *Ex Falsum Quodlibet,* который не согласуется с (V). Действительно, рассмотрим следующий вывод (см. [9]):

$$\dfrac{\dfrac{\dfrac{A \wedge \neg A}{A}(\wedge E)}{A \vee B}(\vee I) \qquad \dfrac{A \wedge \neg A}{\neg A}(\wedge E)}{B}(DS)$$

Получается, что дизъюнктивный силлогизм (с помощью элиминации конъюнкции и введения дизъюнкции) приводит к странному заключению, что все что угодно (в данном случае B) следует из противоречия (в данном случае $A \wedge \neg A$). Это представляется неверным, особенно сторонникам релевантной логики.

Если же классическую метаимпликацию заменить на релевантную, то соответствующая модификация принципа (V)

$$\begin{gathered}(\mathrm{V}_{\to})\ \Sigma \vdash_{\to} A \text{ тогда и только тогда, когда} \\ (\forall w)((\forall B \in \Sigma) w \vDash B \to w \vDash A)\end{gathered}$$

гарантирует корректное сохранение истинности и корректный учет общезначимости, включая сюда и классический случай. Отсюда Рид делает вывод, что существует только одна правильная логика и этой логикой может быть только релевантная логика с релевантным метаязыком (т.е. с релевантной металогикой), поскольку именно она является составной частью требования сохранения истинности от посылок к заключению: если заключение действительно логически следует из посылок, то эти посылки должны быть релевантны заключению.

3 Проблема неклассических металогик

Возникающий здесь вопрос связан со следующим обстоятельством. В общем виде формализация принципа (V) выглядит следующим образом:

$$(\mathrm{V}_{\Rightarrow})\ \Sigma \vdash_{\Rightarrow} A \text{ тогда и только тогда, когда } \\ (\forall w)((\forall B \in \Sigma) w \vDash B \Rightarrow w \vDash A).$$

Рид замечает, что, согласно Ресторлу и Биллу, мы получаем различные варианты '$\vdash$' путем варьирования области 'w' — рассматривая воозможные миры, конструкции, ситуации и т.д. Однако, область 'w' должна быть универсальной, поэтому различные теории следования скорее можно получить варьированием '$\Rightarrow$'. В классической металогике выбор только один — материальная импликация '$\supset$'. В релевантной металогике существует две возможности, поскольку релевантная логика четко различает классическую и релевантную импликацию. Собственно говаоря, монизм Рида и основывается на втором выборе — больше, по его мнению, выбирать не из чего.

Однако, должна ли металогика быть обязательно или классической или релевантной? Подобная точка зрения давно уже не является общепринятой. Тот же Г. Прист, рассматривая теорию истины Тарского и его Т-конструкцию, пишет: «...иногда говорят, что теория Тарского должна основываться на классической логике: эта логика требуется для реализации данной конструкции. Подобное утверждение является попросту ложным. Она может основываться на интуиционистской логике, паранепротиворечивой логике, и, фактически, на большинстве логик» [14, p. 45].

В этом случае необходимо исследовать проблему неклассических металогик, возникающую в связи с метаязыковой формулировкой $(\mathrm{V}_{\Rightarrow})$ логического следования, которую для простоты можно словесно перефразировать следующим образом: *из A следует B тогда и только тогда, когда истинность A влечет истинность B*. Слово «влечет» указывает здесь на металогическую импликацию, и, следуя Риду, в этом случае можно переформулировать определение следования в виде «из A релевантно следует B тогда и только тогда, когда истинность A *релевантно* влечет истинность B». В этом случае мы получаем релевантную логику и на метауровне. Но тогда возникает соблазн рассмотрения и статуса формулировок следующего вида: «из A интуиционистски следует B тогда и только тогда, когда истинность A *интуиционистски* влечет истинность B» , «из A квантовологически следует B тогда и только тогда, когда из истинности A *квантовологически* следует истинность B» и т.п.

Действительно, что означает «истинность A интуиционистски влечет истинность B»? Поскольку для интуиционистской логики существует семантика вычислительных конструкций (доказательств), то общезначимость означает здесь истинность во всех метаконструкциях, т.е. наши случаи здесь означают метаконструкции, связанные специфическим отношением порядка. Отсюда принцип (V) (теперь уже метапринцип) здесь привязан к истинности в «интуиционистских» метаконструкциях, специфика которых определяется семантикой интуиционистской металогики.

Точно так же «истинность A квантовологически влечет истинность B» определяется спецификой «квантовых» случаев, которые представляют собой подмножества состояний квантовой системы. Характерным для квантовой логики является отсутствие связки импликации, которую, например, в случае системы квантовой логики Р. Гольдблатта [11] заменяет «выводимость», чья интерпретация совпадает с отношением порядка (теоретико-множественным включением) на ортомодулярной решетке подмножеств состояний. В этом случае в принципе $(\mathrm{V}_{\Rightarrow})$ метасвязка '$\Rightarrow$' как раз и представляет собой подобную связку, детерминируя истинность соответствующих формул.

Но что интересно: парадоксальным образом монистический аргумент Рида в пользу релевантной логики можно усилить, как раз учитывая возможность «вариьрования» метасвязки '$\Rightarrow$'. Если обратиться к семантике релевантной логики R с тернарным отношением достижимости, то, как известно, мы получаем классическую логику в рамках R, если расширяем систему семантических постулатов за счет постулата $0 < a$ [7, с. 396]. Таким образом, если рассмотреть множество K ситуаций, обладающих этим дополнительному свойством, то ($\mathrm{V}_{\supset}$) получается из ($\mathrm{V}_{\rightarrow}$) путем ограничения квантификации по w, т.е. дается принципом

$$(\mathrm{V}^{\rightarrow}_{\supset}) \qquad \Sigma \vdash_{\supset} A \text{ тогда и только тогда, когда } (\forall w \in K)((\forall B \in \Sigma) w \vDash B \rightarrow w \vDash A).$$

Более того, если этот же самый постулат добавить к системе постулатов для позитивной релевантной логики (без отрицания), то в качестве результата мы получаем позитивную интуиционистскую логику [7, с.401]. Ограничивая соответствующий квантор до некоторого множества P ситуаций, обладающих требуемым свойством, получаем релевантно-интуиционистскую версию принципа (V) в виде

$$(\mathrm{V}^{\rightarrow}_{\supset_{Int}}) \qquad \Sigma \vdash_{\supset_{Int}} A \text{ тогда и только тогда, когда } (\forall w \in P)((\forall B \in \Sigma) w \vDash B \rightarrow w \vDash A).$$

С другой стороны, можно получить версию ($\mathrm{V}_{\rightarrow}$), основываясь, например, на квантовой логике. Крон, Марич и Вуйосевич [13] показали, что алгебраическая структура релевантных логик (в частности, системы R) может быть получена путем введения на ортомодулярной решетке дополнительной операции $\rightarrow$, при этом если $\vdash_R A \rightarrow B$, то $v(A) \leq v(B)$, где v — оценка на ортомодулярных решетках, а $\vdash_R$ — знак выводимости в системе R. Здесь A, B обязательно должны представлять собой формулы без знака импликации. Однако аксиому дистрибутивности приходится удалить, заменяя ее на $A \wedge (\neg A \vee (A \wedge B)) \rightarrow B$. Отсюда, если ограничить квантификацию по w ситуациями-состояниями, образующими ортомодулярную решетку OML, получаем квантово-релевантную версию принципа (V):

$$(\mathrm{V}^{\Rightarrow_Q}_{\rightarrow_R}) \qquad \Sigma \vdash_{\rightarrow_R} A \text{ тогда и только тогда, когда } (\forall w \in OML)((\forall B \in \Sigma) w \vDash B \Rightarrow_Q w \vDash A).$$

На первый взгляд кажется, что ($\mathrm{V}^{\rightarrow}_{\supset_{Int}}$) и ($\mathrm{V}^{\Rightarrow_Q}_{\rightarrow_R}$) являются просто следствием нарушения требования универсальности области w (в обоих случаях мы ограничивали область квантификации по w). Однако ничто не заставляет нас, например, в случае $(\mathrm{V}^{\Rightarrow Q}_{\rightarrow R})$ вообще отказаться от трактовки w как случаев, рассматривая вместо ситуаций состояния квантовой системы.

Рассмотрим еще один пример получения «смешанного» принципа (V). Для системы бесконечнозначной логики Лукасевича $\text{Ł}_{\aleph_0}$ в работе [18] была построена семантика возможных миров с тернарным отношением достижимости. В этой семантике каждой формуле приписывалось значение истинности из обычной матрицы [0,1] для логики Лукасевича и постулаты для отношение следования совпадали с постулатами для релевантной логики R, но возможные миры были линейно упорядочены относительно бинарной упорядоченности $<$, задаваемой с помощью определения $a < b =_{def} ROab$. Если ограничить возможные миры только теми, в которых рассматриваемые формул принимают значение 0 или 1, то для такого множества возможных миров LW $\text{Ł}_{\aleph_0}$-релевантная версия принципа (V) сводится к следующему принципу:

$$(\mathrm{V}^{\rightarrow L}_{\rightarrow R}) \qquad \Sigma \vdash_{\rightarrow_R} A \text{ тогда и только тогда, когда}$$
$$(\forall w \in LW)((\forall B \in \Sigma) w \models B \rightarrow_L w \models A).$$

Более того, пополнив список семантических постулатов за счет постулата $0 < a$, мы, как и в случае релевантной логики, получаем $\text{Ł}_{\aleph_0}$-классическую версия принципа (V):

$$(\mathrm{V}^{\rightarrow L}_{\supset}) \qquad \Sigma \vdash_{\supset} A \text{ тогда и только тогда, когда}$$
$$(\forall w \in RLW)((\forall B \in \Sigma) w \models B \rightarrow_L w \models A).$$

Напрашивающийся здесь вывод сводится к тому, что расширенная «металогическая» версия принципа (V) может сводиться к следующему:

> Вывод A из Σ общезначим в некоторой логике, если в соответствующей металогике истинность предпосылок из Σ влечет истинность заключения A.

Вопрос теперь заключается только в том, какова же должна или может быть соответствующая металогика, определяющая следование в исходной логике. Собственно говоря, можно рассматривать две металогические версии принципа (V):

> Вывод A из Σ общезначим в некоторой логике, если в некоторой металогике истинность предпосылок из Σ влечет истинность заключения A.
>
> Вывод A из Σ общезначим в некоторой логике, если во всех металогиках истинность предпосылок из Σ влечет истинность заключения A.

Вторая версия малореалистична — трудно рассматривать *все* металогики. Возникает также вопрос, не является ли выбор металогики детерминированным существованием «перевода» из некоторой логики в данную логику, поскольку само существование «смешанных» принципов типа (V) является следствием вмешательства или подмены семантики одной логики на другую семантику, погружения одних семантических концепций в другие, их ограничивающие (что сказывается в ограничении квантификации по случаям). Приходится также задумываться о том, не приводит ли это к ограничению каких-то аргументов в пользу выбора между монистическими (когда логика совпадает с металогикой) и плюралистическими (когда логика и металогика различны концептуально).

И, наконец, внимания требует еще одно обстоятельство, связанное с понятием металогик. Дело в том, что рассмотрение той или иной неклассической метаимпликации способно породить мета-металогическое определение следования. Если отдельно рассмотреть, например, металогическую часть принципа (V), то поскольку в ней речь идет о металогической импликации, то она также требует применения этого принципа. Таким образом, возникает необходимость мета-металогической версии принципа (V) вида

> (V) Заключение A *следует* из посылок Σ тогда и только тогда, когда истиннность заключения A следует из истинности посылок Σ тогда и только тогда, когда в любом случае, когда истинность каждой посылки из Σ истинна, будет истинной истинность заключения A.

С одной стороны, это приводит к дурной бесконечности. С другой стороны, это напоминает ситуацию в теории истины С. Крипке [6], приводя к следующей формулировке:

($\mathrm{V}^{Meta}_{\Rightarrow}$) $\Sigma \vdash_{\Rightarrow} A$ тогда и только тогда, когда $T(B) \vdash_{\Rightarrow}$ $T(A)$

тогда и только тогда, когда $T(T(B)) \vdash_{\Rightarrow}$ $T(T(A))$...

с соответствующими модификациями $\vdash_{\Rightarrow}$ в случае «смешанного» принципа. В этом случае помимо крипкевского рассмотрения случаев истинности или ложности на соответствующих метауровнях приходится рассматривать еще и истинность на плюралистических вариантах метауровней.

4 Универсальная металогика

Проблема статуса «смешанных» версий и метаверсий принципа (V) решается очевидным образом в результате конкретного исследования, однако сразу же можно заметить, что в некотором смысле выбор металогики аналогичен выбору неклассического универсума: выбирая ту или иную неклассическую логику в качестве металогики в принципе ($\mathrm{V}^{Meta}_{\Rightarrow}$), мы неявно детерминируем результаты выводимости той или иной формулы метаязыковыми соображениями, не имеющими прямого отношения к данной логической системе. Возможное отношение между металогиками и логиками можно было бы попытаться оценить в перспективе использования понятия глобальных и локальных логик, когда «глобальная логика» означает некоторую металогику, а «локальная логика» означает логическую систему, сформулированную в объектном языке, чьи условия следования однозначно определяются условиями следования в данной металогике, т.е. в глобальной логике. Однако дурная бесконечность в принципе ($\mathrm{V}^{Meta}_{\Rightarrow}$) делает эту перспективу проблематичной, хотя можно принимать некоторые конвенции: в случае, например, «смешанной» версии принципа ($\mathrm{V}^{Meta}_{\Rightarrow}$) считать последним некоторый метауровень, после которого '$\Rightarrow$' уже не изменяется.

Если проводить отождествление некоторых формулировок, типа «из A в логике X следует B тогда и только тогда, когда из истинности A в логике Y_1 следует истинность B» и «из A в логике X следует B тогда и только тогда, когда из истинности A в логике Y_2 следует истинность B», то в этом случае нам потребуется некоторая теория, дающая нам критерии этого отождествления. В этом качестве можно рассматривать универсальную логику (см. [2], [3], [20]), в рамках которой рассматривается взаимная переводимость и комбинируемость всех логических систем. Тогда отождествление или связь рассматриваемых формулировок можно проводить на основании, например, перевода из логики (металогики) Y_1 в логику (металогику) Y_2. Результат будет выглядеть, например, следующим образом: «из A в логике X следует B тогда и только тогда, когда из истинности A в логике Y_1 следует истинность B» справедливо тогда и только тогда, когда «из A в логике X следует B тогда и только тогда, когда из *перевода* условий истинности A в логике Y_2 следует *перевод* условий истинности B». Если подобное отождествление работает для ряда данных переводов, то в этом случае можно говорить о локальном металогическом монизме.

Вместо отождествления можно получать, пользуясь методами универсальной логики, *объединение* двух формулировок. В этом случае в объединении $Y_1 \oplus Y_2$ двух логик Y_1 и Y_2 объединенное следование $\vdash_{1\oplus2}$ определяется с помощью условия:

$$T_i(\Sigma) \vdash_i T_i(A) \textit{ влечет } T_{1\oplus2}(\Sigma) \vdash_{1\oplus2} T_{1\oplus2}(A) \textit{ для всех}$$
$$T_i(\Sigma) \cup \{T_i(A)\} \in Y_i (i = 1, 2),$$

где $T_i(A)$ означает истинность A в логике Y_i. Этот случай можно было бы характеризовать как *аддитивный* металогический монизм, если принять во внимание, что мы можем получить единое следование путем объединения всех следований для формулировок приведенного типа, т.е. объединяя все металогики при неизменной логике.

Наряду с этим можно рассматривать и *мультипликативный* металогический монизм, прибегнув к произведению двух формулировок. В произведении $Y_1 \otimes Y_2$ двух логических систем $\vdash_{1\otimes2}$ следование определяется с помощью условия

$$\langle T_1(\Sigma_1), T_1(\Sigma_2)\rangle \vdash_{1\otimes2} \langle T_1(A_1), T_1(A_2)\rangle \textit{ влечет } T_i(\Sigma_i) \vdash_i T_i(A_i)$$
$$\textit{для каждого } T_i(\Sigma_i) \cup \{T_i(A_i)\} \in Y_i (i = 1, 2).$$

В этом случае мы получаем произведение всех следований для формулировок рассмотренного типа, т.е. рассматриваем произведение всех металогик при неизменной логике.

И наконец, можно получить *коэкспоненциальный* металогический монизм, используя коэкспоненциальное логическое следование $\vdash_{1 \Leftarrow 2}$

$$\begin{gathered} T_1(\Sigma) \vdash_{1 \Leftarrow 2} T_1(A) \textit{ тогда и только тогда, когда} \\ g[T_1(\Sigma)] \vdash_2 g(T_1(A)) \textit{ для всех переводов } g : Y_1 \to Y_2, \end{gathered}$$

и *экспоненциальный* металогический монизм, используя экспоненциальное логическое следование $\vdash_{2 \Rightarrow 1}$:

$$\begin{gathered} T_1(\Sigma) \vdash_{2 \Rightarrow 1} T_1(A) \textit{ если и только если существуют переводы} \\ h : Y_2 \to Y_1 \textit{ и } g : Y_1 \to Y_2\textit{, такие, что} \\ h(g[T_1(\Sigma)])) \vdash_1 h(g(T_1(A))). \end{gathered}$$

Можно попытаться получить и коэкспоненциальный и экспоненциальный монизмы с помощью формулировок «из перевода A в логике X_2 следует B тогда и только тогда, когда из *перевода* условий истинности A в логике Y_2 следует *перевод* условий истинности B», используя (ко)экспоненциальное логическое следование и (ко)экспоненциальное металогическое следование одновременно, но на нашем пути встает проблема всеведения — увы, мы не в состоянии знать все возможные логики в явном виде, а, следовательно, мы не в силах актуально осуществить все вышеописанные комбинации.

5 Семантические аспекты логического плюрализма

Стоит заметить, что проблема противостояния логического плюрализма и логического монизма в основном носит характер внутренней дискуссии между логиками по поводу обоснования тех или иных установок по вопросу о логическом следовании, природе логических связок, способах устранении логических парадоксов и т.д. Переход к более широкой перспективе, вызванной рассмотрением чисто онтологических и эпистемологических следствий принимаемых решений, на повестке дня этих дискуссий возникал лишь в контексте философии науки. Однако общее рассмотрение подобных аспектов способно привести и к формулировке гибридного «логико-онтологического» плюрализма, вызванного вопросом о природе онтологических допущений формальных языков различных неклассических логик, и к гибридному «логико-эпистемологическому» плюрализму, вызванному необязательностью принятия некоторых подобных допущений, поскольку мы можем их сконструировать из уже имеющихся — а это ставит вопрос о их познаваемости.

Что касается конкретных проблем, вызванных металогическим плюрализмом, то следует напомнить, что метаязыковые аспекты первопорядковой классической логики обычно сводятся к интерпретации с помощью моделей (моделей Тарского). Совокупность всех множеств, называемая универсумом множеств, снабжает нас всевозможными разновидностями моделей, требуемых для интерпретации нашей логики. Отсюда, в некотором смысле, первопорядковая логика детерминируется универсумом множеств (моделей).

Меняя определения операций на множествах, интерпретирующих действие логических связок, таким образом, что они будут представлять собой интерпретацию неклассических логических связок, мы получаем возможность интерпретации соответствующей неклассической логики в данном множестве. Возникает ситуация, когда в классическом универсуме (модели классической логики) у нас существует интерпретация неклассической логики. Подобная ситуация типична для семантики неклассической логики. Мы можем освоить в нашем классическом универсуме столько неклассических логик, сколько нам нужно.

Ситуация изменится, если мы возьмем неклассический универсум, то есть модель неклассической логики, а затем введем в нем классические теоретико-множественные операции. В этом случае мы получим интерпретацию классической логики в неклассическом универсуме. Более того, можно продолжить подобное умножение операций путем повторного использования иных неклассических связок, получая новые интерпретации неклассических систем. По сути дела мы сталкиваемся с ситуацией, когда в рамках неклассического универсума существует интерпретация классической логики наряду с другими логическими системами.

При этом у нас нет никаких аргументов в пользу предпочтения классического или неклассического универсума. Мы можем утверждать самое большее только то, что имеется одна лежащая в основании (глобальная) логика, определяющая и определенная нашим универсумом, в то время как существует множество (локальных) логик, населяющих универсум, не определяемый ими. Глобальность и локальность в подобном контексте являются просто метафорическими маркерами, фиксирующими состояние дел.

Подобными результатами снабжает нас и теория категорий, а именно, теория топосов. Р. Гольдблатт использовал конструкцию топоса функторов из малой категории в категорию множеств Set для построения категорной семантики интуиционистской логики, в которой алгебра Гейтинга играет роль малой категории. Подобным же образом была использована категория Set^{CN} функторов из так называемой CN-категории (теоретико-категорный эквивалент алгебры да Косты) в категорию Set. Эта категория также представляет собой топос и полнота паранепротиворечивой системы логики да Косты C_1 доказывается именно по отношению к подобной разновидности топосов (см. [19]). Аналогичный подход был реализован и для случая релевантной логики R (см. [1]).

Все эти результаты можно оценивать как параллель к первому способу теоретико-множественного построения неклассических универсумов, когда модели неклассической логики строятся «внутри» модели классической логики.

Можно разработать иной теоретико-категорный метод получения неклассического универсума, в котором будут интерпретироваться другие логики (в частности, классическая логика), т.е. построить параллель ко второму способу теоретико-множественного построения неклассических универсумов. С этой целью строятся конкретные категории, подобно топосам передающие структуру определенных неклассических логик, в частности паранепротиворечивой логики да Косты и квантовой логики, так и рассмотрен проект общего метода получения подобных «алгеброзначных» категорий. Если в первом случае речь шла о семантическом погружении неклассических логик в интуиционистский универсум–топос, то во втором случае речь идет о построении иных неклассических теоретико-категорных универсумов, играющих роль «неклассического» топоса.

В частности, топос да Косты (или *потос* в терминологии бразильских логиков, выдвинувших подобную идею, но не реализовавших ее) (см. [4]) представляет собой паранепротиворечивый универсум, в котором можно было бы развивать паранепротиворечивую математику, подобно тому, как это делается в топосах для интуиционистской математики. Но если в случае топоса функторов из алгебры да Косты в категорию множеств все случаи паранепротиворечивости возникают лишь как частные конструкции в интуиционистском универсуме, как некоторые локальные артефакты, то в топосе да Косты эта паранепротиворечивость абсолютно органична и более того, она лежит в основе всех конструкций, она глобальна и фундаментальна. Здесь уже классическая математика возникает как артефакт в паранепротиворечивом универсуме, как некоторое локальное отклонение от паранепротиворечивых закономерностей. Так, например, при интерпретации систем $C_1 - \mathrm{C}_n$ приходится использовать неистинностно-функциональную оценку, а истинностно-функциональная оценка характерна только для случая булевых топосов, которые являются теперь всего лишь частным случаем топосов да Косты.

Второй пример — это квантовый топос или *квантос* [5]. Он представляет собой категорию, которая структурно ориентирована на квантовую логику, но подобна топосу в том отношении, что ее «классификатор подобъектов» имеет структуру ортомодулярной решетки. Каждый квантос содержит в себе булевы топосы и является универсумом для интерпретации квантовой логики.

Литература

[1] *Васюков В.Л.* Интерпретация релевантной логики в топосах // Логика и В.Е.К. М., 2004. С. 112-121.

[2] *Васюков В.Л.* Проблема структуры универсальной логики // Логические исследования. Вып. 13. М.: Наука, 2006. С. 95-114.

[3] *Васюков В.Л.* Проблема контекста интерпретации в универсальной логике // Логические исследования. Вып. 14. М.: Наука, 2007. С. 105-130.

[4] *Васюков В.Л.* Потосы для паранепротиворечивой логики // Современная логика: проблемы теории, истории и применения в науке. Материалы X Общероссийской научн. конференции, СПб. 2008. С. 105-107.

[5] *Васюков В.Л.* Онтология квантовой математики // Вестник Российского университета дружбы народов. Серия: Философия. 2009. №3. С. 57-70.

[6] *Крипке С.* Очерк теории истины // Сол А. Крипке. Витгенштейн о правилах и индивидуальном языке. М.: Канон+, 2010. С. 206-254.

[7] *Роутлей Р., Мейер Р.* Семантика следования // Семантика модальных и интенсиональных логик. М.: Прогресс, 1981. С. 363-423.

[8] *Beall J.C. and Restall G.* Logical Pluralism // Australasian Journal of Philosophy. 2000. Vol.78. P. 475-493.

[9] *Beall J.C. and Restall G.* Defending Logical Pluralism // Logical Consequence: Rival Approaches Proceedings of the 1999 Conference of the Society of Exact Philosophy / John Woods and Bryson Brown (editors), Stanmore: Hermes, 2001. P. 1-22.

[10] *Carnap R.* The Logical Syntax of Language. Little eld, Adams and Co., 1959. translated by Amethe Smeaton.

[11] *Goldblatt R. I.* Semantic analysis of orthologic // J.Phil.Log. 1974. Vol.3. №1-2. P. 19-35.

[12] *Jeffrey R.C.* Formal Logic: its scope and its limits. McGraw Hill, Third edition, 1991.

[13] *Kron A., Marič Z., Vujosevič S.* Entailment and quantum logic // Current Issues in Quantum Logic / Eds. Beltrametti S., Fraassen B. Van. New York, London: Plenum, 1981. P. 193-207.

[14] *Priest G.* Doubt Truth to be a Liar. Oxford: Clarendon Press, 2008.

[15] *Read S.* Relevant Logic. Oxford: Blackwell, 1988.

[16] *Read S.* Monism: the one true logic // A Logical Approach to Philosophy: Essays in Honour of Graham Solomon / ed. D. DeVidi and T. Kenyon, Springer, 2006. P. 193-209.

[17] *Restall G.* Carnap's Tolerance, Meaning and Logical Pluralism // Journal of Philosophy. 2002. Vol. 99. P. 426-443.

[18] *Vasyukov V. L.* The Completeness of the Factor Semantics for Łukasiewicz's Infinite-valued Logics // Studia Logica. 1993. Vol. 52. №1. P. 143-167.

[19] *Vasyukov V.L.* Paraconsistency in Categories // Frontiers of Paraconsistent Logic / D.Batens, C.Mortensen, G.Priest and J.-P. van Bendegem (eds.). Research Studies Press Ltd., Baldock, Hartfordshire, England, 2000. P. 263-278.

[20] *Vasyukov V.L.* Structuring the Universe of Universal Logic // Logica Universalis. 2007. Vol.1. №2. P. 277-294.

Континуальность трехзначных логик: проблемы и гипотезы[1]

А. С. Карпенко

abstract. Functional properties of three-valued logics are considered. Among these logics ones with closed function classes set cardinality that is continuum. The problem of continuity of Bochvar's three-valued logic is discussed and a hypothesis concerning the citeria of continuity of an arbitrary three-valued logic is proposed.

Ключевые слова: трехзначные логики, замкнутые классы функций, счётность замкнутых классов, континуальность замкнутых классов

1 Необходимые понятия

Произвольная функция $f(x_1, \dots, x_m)$ от любого конечного числа переменных, областью определения которых и областью значения самой функции является множество V_n (пусть его элементами являются $0, 1, 2, \dots, n-1$), называется n-значной функцией или *функцией n-значной логики.* Пусть P_n есть множество всех n-значных функций и пусть $F \subseteq P_n$. Тогда, следуя А.В. Кузнецову, множество всех функций, которые можно получить с помощью операции суперпозиции [6] из F, называется *замыканием* F и обозначается посредством $[F]$.

Система функций $F = \{f_1, \dots, f_k, \dots\}$ из P_n называется функционально полной, если любая функция из P_n представима посредством суперпозиций функций из системы F. Или, в терминах замыкания: F — полная система, если $[F] = P_n$.

Система F функций называется *предполной (максимальной)* в P_n, если F представляет не полную систему, но добавление к F любой функции f такой, что $f \in P_n$ и $f \notin F$ преобразует F в полную систему. Или, в терминах замыкания: F предполна в P_n, если $[F] \neq P_n$ и $[F \cup \{f\}] = P_n$, где $f \in P_n$ и $f \notin F$.

---

[1] Работа выполнена при поддержке РГНФ, грант № 09-03-00303а.

Важная роль предполных классов функций видна из следующей теоремы А.В. Кузнецова (1956), *система функций F полна в P_n тогда и только тогда, когда она не содержится целиком ни в одном предполном классе.*

2 Счётность и континуальность

Множество F n-значных функций называется (функционально) *замкнутым множеством (классом)*, если оно совпадает со своим замыканием, то есть если $F = [F]$.

В 1941 г. Э. Пост установил, что мощность множества замкнутых классов в P_2, где P_2 есть множество булевых функций, *счётна* [10]. Уже Постом был поставлен вопрос об описании всех замкнутых классов в P_n. Оказалось, и даже несколько неожиданным образом, что с многозначной логикой дело обстоит совсем по-другому. В [7] было доказано, что *для всякого $n\,(n \geq 3)$ P_n содержит континуум различных замкнутых классов.* Это говорит о принципиальной несводимости многозначной логики к двузначной. Вообще-то говоря, точная природа такого различия между двузначной и трехзначной логиками неясна, т.е. при переходе от двух истинностных значений к трем озадачивает происходящмй *скачок* от счётности к континуальности.

3 Другие трехзначные логики

А как обстоит дело с другими трехзначными логиками, т.е. с не функционально полными? В [6] С.В. Яблонский дал описание всех 18 предполных классов функций в P_3, а в [4] В.К. Финн доказал, что класс функций $Ł_3$, соответствующий трехзначной логике Лукасевича **Ł3** со множеством истинностных значений $\{1, \frac{1}{2}, 0\}$ является предполным в P_3. Класс функций $Ł_3$ задается суперпозицией следующих исходных функций: $\sim$ и $\rightarrow$, где $\sim x = 1 - x$; $x \rightarrow y = 1$, если $x \leq y$, и $x \rightarrow y = 1 - x + y$, если $x > y$.

Рассмотрим следующее полезное понятие, впервые введенное М.Ф. Раца. Будем называть *глубиной* системы F функций в классе K_0 наименьшее из таких натуральных чисел m, что существует убывающая последовательность классов $K_0, K_1, \ldots, K_m$, удовлетворяющая двум условиям:

1) класс K_{i+1} предполон в K_i $(i = 0, 1, \ldots, m - 1)$;

2) система F является полной в K_m.

В частности, то, что глубина системы F в классе K_0 равна 0, означает, что F является полной в K_0.

3.1 Трехзначная логика Гейтинга

Как раз первым примером логики «глубины 2», чьи функциональные свойства были тщательно изучены, была трехзначная логика Гейтинга $\mathbf{G_3}$. Класс функций G_3, соответствующий логике $\mathbf{G_3}$, задается суперпозицией следующих исходных функций: $\neg, \Rightarrow, \&$ и $\vee$, где $\neg x = 1$, если $x = 0$, и $\neg x = 0$ в остальных случаях; $x \Rightarrow y = 1$, если $x \leq y$, и $x \Rightarrow y = y$, если $x > y$; $x \,\&\, y = min(x, y)$ и $x \vee y = max(x, y)$. Заметим, что $Ł_3 = [G_3 \cup \{\sim x\}]$.

М.Ф. Рацa показал, что класс функций G_3 предполон в классе функций $Ł_3$ и установил критерий функциональной полноты для класса функций G_3. Но, главное, Рацa доказал [3], что G_3 *содержит континуум различных замкнутых классов.* Для порождения континуального множества замкнутых классов функций М.Ф. Рацa строит систему функций C, выраженную следующей формулой:

$$\{\&_{i=1}^{n}((\neg x_1 \,\&\, \ldots \,\&\, \neg x_{i-1} \,\&\, \neg x_{i+1} \,\&\, \ldots \,\&\neg x_n) \Rightarrow \bot x_i) \,|\, n{=}2{,}3, \ldots\},$$

где $\bot x = x \vee \neg x$.

Обозначим эти функции — двухместную, трехместную и т.д. символами C_2, $C_3, \ldots$ соответственно. Например, C_2 есть

$$(\neg x_2 \Rightarrow x_1 \vee \neg x_1) \,\&\, (\neg x_1 \Rightarrow x_2 \vee \neg x_2).$$

Условимся для любых функций $f(x_1, \ldots, x_i, \ldots, x_k)$ и $g(x_1, \ldots, x_i, \ldots, x_m)$ из G_3 обозначать символом $f(x_i/g)$ результат подстановки в f функции g вместо переменной x_i. Тогда для всякого $n = 2, 3, \ldots$ функция C_n является симметрической (т.е. при всякой перестановке аргументов остается равной себе) и удовлетворяет условиям:

1. $C_n = \bot C_n$,
2. $C_n(x_i/1) = 1 \;\; (1 \leq i \leq n)$,

3. $C_n(x_i/\bot y,\, x_j/\bot z) = 1 \ \ (1 \leq i < j \leq n)$.

М.Ф. Раца показывает, что при выполнении этих условий система функций C является независимой, откуда следует, что существует континуум различных замкнутых классов функций.

Поскольку класс функций G_3 предполон в $Ł_3$, то таковыми же континуальными свойствами обладает и сама $Ł_3$, и вообще, любая логика, в которой посредством исходных связок можно задать указанную выше систему функций C, является континуальной. Таким образом, можно говорить о некотором критерии континуальности для трехзначных логик.

Результат Раца является следствием более общей теоремы для предполных классов глубины 2 (такие классы называются еще *субмаксимальными клонами*) [8]:

Всего P_3 имеет 158 субмаксимальных клонов. Из них: 5 имеют конечное множество подклассов; 7 имеют счётное множество классов; остальные 146 имеют мощность континуума.

3.2 Трехзначная логика Бочвара

Класс функций B_3, соответствующий трехзначной логике Бочвара $\mathbf{B_3}$, задается суперпозицией следующих исходных функций: $\sim, \cap, \vdash$, где $x \cap y = min(x, y)$, если $x, y \in \{0, 1\}$, и $x \cap y = \frac{1}{2}$, в остальных случаях; $\vdash x = \neg \sim x$.

В [5] В.К. Финн установил критерий функциональной полноты для класса функций B_3. Также В.К. Финн показал, что класс функций H_3, соответствующий трехзначной логике Холдена $\mathbf{H_3}$, включается в один из предполных классов B_3. Класс функций H_3 задается суперпозицией следующих исходных функций: $\sim, \cap$ и $\triangle$, где $\triangle x = 0$, если $x = \frac{1}{2}$, и $\triangle x = 1$, в остальных случаях.

Тогда можно сделать *предположение* о глубине рассмотренных классов функций:

$$H_3 \subset B_3 \subset E_3 \subset Ł_3 \subset P_3,$$

где E_3 есть класс функций, соответствующей трехзначной логике Эббингауза $\mathbf{E_3}$, т.е. $E_3 = [B_3 \cup \{x \rightarrow_s y\}]$, где $x \rightarrow_s y$ есть импликация Собочиньского: $x \rightarrow_s y = 0$, если $x > y$, $\frac{1}{2} \rightarrow_s \frac{1}{2} = \frac{1}{2}$ и $x \rightarrow_s y = 1$, в остальных случаях [11].

Интересна гипотеза В.К. Финна (высказанная автору много лет назад), что мощность множества замкнутых классов B_3 является счётной, как и для P_2. Эта гипотеза основывалась на *предположении* о том, что в B_3 класс внутренних функций B_3^{in} (который порождается функциями $\sim, \cap$) и класс внешних функций B_3^{ex} (областью значения которых является множество $\{0, 1\}$) каждый сам по себе счётен, а в объединении они порождают всё множество функций B_3. Исходя из этого, гипотеза В.К. Финна выглядит очень естественной.

3.3 Другие предположения о счётности/континуальности

В [9] сформулирован следующий критерий счётности:

Пусть F есть подкласс P_n. Там существует отношение частичного порядка $\leq$ на F, удовлетворяющее следующим трем свойствам:

(a) $f \leq g \Rightarrow [f] \subseteq [g]$,

(b) *каждая цепь является вполне упорядоченной*[2] *(относительно $\leq$),*

(c) *каждая антицепь*[3] *(относительно $\leq$) имеет только конечное число элементов.*

Тогда F имеет как наибольшее только счётное множество различных подклассов.

Обратим внимание на свойство (a). Будем говорить, что функция $f(x_1, \ldots, x_m)$ не превосходит функцию $g(x_1, \ldots, x_m)$, и писать $f \leq g$, если для любого набора $(a_1, \ldots, a_m)$ из V_3^m выполняется

$$f(a_1, \ldots, a_m) \leq g(a_1, \ldots, a_m).$$

Нетрудно подобрать две функции, например, внутреннюю $\cap$ и внешнюю $\cap^{\vdash}$ конъюнкции из B_3, такие, что $(x \cap^{\vdash} y) \leq (x \cap y)$, где

---

[2] Т.е. каждое непустое подмножество обладает единственным минимальным элементом.

[3] *Антицепью* называется подмножество частично упорядоченного множества, состоящее из попарно несравнимых элементов, которых не меньше двух.

$x \cap^{\vdash} y = \vdash x \cap \vdash y$. Из теоремы В.К. Финна о критерии функциональной полноты B_3 следует, что пересечение множества внутренних функций B_3^{in} и множества внешних функций B_3^{ex} пусто. Это значит, что условие (a) из вышеприведенного критерия счётности в B_3 не выполняется. Однако вышеприведенный критерий счётности формулирует всего лишь *необходимое условие.*

Рассмотрим еще одно предположение в пользу континуальности B_3. В [1] предложен метод гильбертовской аксиоматизации широкого класса многозначных логик, основанный на расширении классической логики $\mathbf{C_2}$. Для этого должны выполняться следующие условия:

(1) Алгебра $< V_n; \vee, \wedge >$ является квазирешеткой;

(2) Наличие всех J_i-операторов:

$$j_i(x) = \begin{cases} 1, \text{если } x = i \\ & (\text{для всех } i \in V_n); \\ 0, \text{если } x \neq i. \end{cases}$$

(3) Ограничения операций $\neg, \vee, \wedge, \supset$ на подмножество $\{0, 1\}$ множества V_n суть обычные классические операции отрицания, дизъюнкции, конъюнкции и импликации соответственно.

Логика $\mathbf{B_3}$ все эти условия выполняет, но не выполняет их логика $\mathbf{G_3}$: не все J_i-операторы здесь имеют место. Однако все J_i-операторы и не нужны, достаточно, $J_0(\neg)$ или $J_1(\vdash)$, поскольку с их помощью строится *изоморф* $\mathbf{C_2}$. Понятие изоморфа введено Д.А. Бочваром и означает, что логика $\mathbf{B_3}$ содержит фрагмент, который верифицирует аксиомы $\mathbf{C_2}$, а правило *modus ponens* сохраняет классическое отношение логического следования. Такие изоморфы названы «нормальными». Подробно об изоморфах см. диссертацию Л.Ю. Девяткина [2]. Таким образом, задается некоторый «минимум» функциональных свойств, который достаточен для аксиоматизации некоторой трехзначной логики $\mathbf{L_3}$. Заметим, что логика Холдена $\mathbf{H_3}$ не содержит операторов J_0 и J_1 и поэтому не может быть аксиоматизирована как расширение $\mathbf{C_2}$.

4 Гипотеза о континуальности

В связи с этим в качестве гипотезы можно сформулировать следующий критерий континуальности. Пусть $F \subseteq P_3$ и $|F|$ есть мощность множества F. Для класса F, *соответсвующего некоторой трехзначной логике* $\mathbf{L_3}$, $|F| = \mathcal{C}$ *т.т.т., когда* $\mathbf{L_3}$ *аксиоматизируема как расширение* $\mathbf{C_2}$. Таким образом, функциональные свойства некоторого множества функций F связываются с чисто логическими свойствами класса формул соответствующей логики $\mathbf{L_3}$.

Литература

[1] *Аншаков О. М., Рычков С. В.* О многозначных логических исчислениях // Семиотика и информатика. 1982. Вып. 19. С. 90–117.

[2] *Девяткин Л.Ю.* Многозначные изоморфы классической пропозициональной логики. Автореферат на соискание ученой степени кандидата философских наук. М.: ИФ РАН, 2008.

[3] *Раца М.Ф.* О классе функций трехзначной логики, соответствующем первой матрице Яськовского // Проблемы кибернетики. 1969. Вып. 21. С. 185–214.

[4] *Финн В.К.* О предполноте класса функций, соответствующего трехзначной логике Я. Лукасевича // Научно-техническая информация. Сер. 2. 1969. Вып. 10. С. 35–38.

[5] *Финн В.К.* О критерии функциональной полноты для B3 // Исследования по формализованным языкам и неклассическим логикам. М.: Наука, 1974. С. 194–199.

[6] *Яблонский С.В.* Функциональные построения в k-значной логике // Труды математического института им. В. А.Стеклова. 1958. Т. 51. С. 5–142.

[7] *Янов Ю. И., Мучник А. А.* О существовании k-значных замкнутых классов, не имеющих конечного базиса // Доклады Академии Наук СССР. 1959. Т. 127. С. 44–46.

[8] *Bulatov A., Lau D. and Strauch B.* The cardinalities of sublatticies of depth 2 in the latticies of clones on a 3-elementary set. Preprint Universität Rostock, 1996.

[9] *Lau D.* Function Algebras on Finite Sets: A Basic Course on Many-Valued Logic and Clone Theory. Berlin: Springer-Verlag, 2006.

[10] *Post E.L.* Two-valued iterative systems // Annals of Mathematical Studies. 1941. Vol. 5. Princeton-London.

[11] *Sobociński B.* Axiomatization of a partial system of three-valued calculus of propositions // The Journal of Computing Systems. 1952. Vol. 1. P. 23–55.

Критерии рациональности изменения убеждений: непротиворечивость

Н. П. Козаченко

abstract. We consider some possible strategies in explicating the rationality criteria within various directions in belief revision. More specifically, we compare the so called AGM-approach (by Alchourron, Gärdenfors and Makinson) with the Paraconsistent Belief Revision advocated recently by Edwin Mares, as to dealing with inconsistent theories and believe bases. We conclude that although it is hardly possible to eliminate the principle of consistency, it still can be weakened by a suitable concept of coherence. It allows to effectively isolate contradictions and to work rationally with inconsistent believe bases.

Ключевые слова: ревизия убеждений, паранепротиворечивая ревизия убеждений, теории типа AGM, критерии рациональности, множества убеждений, баэы убеждений

Введение

Динамика убеждений и знаний находится в поле зрения доксастической и эпистемической логик. Терминологическое разделение в духе фон Вригта хоть и предполагает наличие доксастической логики убеждений и эпистемической логики знаний [17], но не слишком разграничивает их области исследований. Более того, в контексте исследования познавательных процессов, которые приводят к изменению когнитивного состояния субъекта, в центре рассмотрения чаще всего оказывается обобщенная категория *убеждения*[1]. Истолкованное в широком смысле множество убеждений включает знания и чаще всего, в данном контексте, термины «знание» и «убеждение» используются

---

[1] По мнению В.Н. Костюка, рассмотрение знания в строгом смысле «в общем случае препятствует рассмотрению возможности развития знания, перехода от менее полного к более полному знанию, игнорирует элемент гипотетичности в (научном) знании» [1, с. 131].

как синонимы, если явно не указано различие между ними. В дальнейшем изложении мы также будем придерживаться этой традиции.

Одной из фундаментальных проблем эпистемической логики является поиск адекватного способа представления знаний и убеждений с учетом специфики человеческого познавательного процесса. Не имея возможности абсолютно точно отобразить действительный способ существования убеждений, исследователи вынуждены прибегать к довольно сильным идеализациям. В авангарде колонны эпистемических идеализаций стоит абстрактный познающий субъект, который активно и рационально производит определенные действия над своими убеждениями. Использование такой сильной идеализации тем не менее стало плодотворной почвой для развития большого количества исследований механизмов существования и изменения знаний и убеждений. Эту отрасль формальной эпистемологии в англоязычной литературе называют *изменением теорий* (theory change) или *ревизией убеждений* (belief revision).

Основные принципы исследования способов представления и изменения убеждений сформулированы в концепции, которая получила в литературе название AGM (по заглавным буквам фамилий авторов — К.Алчуррона, П. Герденфорса и Д. Макинсона, предложивших этот подход) [2]. В настоящее время разработан целый ряд теорий, позволяющих в той или иной мере описывать процессы изменения знаний, варьируя способ представления убеждений, критерии рациональности убеждений, возможные познавательные действия. Большинство из них используют основные принципы изменения убеждений концепции AGM, ставшей своего рода классикой belief revision. Чаще всего рассматривают три типа возможного изменения теории: *расширение* (*expansion*) — высказывание просто добавлено к теории, *ревизия* (*revision*) — произведен пересмотр теории на предмет предупреждения появления в ней противоречий, а затем добавлено новое высказывание, *сокращение* (*contraction*) — высказывание удалено из теории.

1 Рациональная непротиворечивость

Чтобы разработать концептуальный аппарат для исследования динамики знаний и убеждений, следует отыскать подходящий способ представления эпистемических элементов — знаний и убеждений субъекта. Возможный или текущий набор знаний и убеждений субъекта называют *эпистемическим состоянием* (*epistemic state*) или *состоянием убеждений* (*belief state*). В зависимости от способа представления эпистемического состояния, определяют критерии рациональности, которым они должны соответствовать. Это своего рода метауровень, который описывает правила существования и изменения убеждений. Традиционные критерии, принятые в AGM, характерны практически для всех сентенциональных моделей, которые рассматривают эпистемическое состояние субъекта как *множество убеждений* (*belief set*) — высказываний. Каждое высказывание может быть убеждением, равно как и любое убеждение может быть представлено в виде высказывания. Исходное множество убеждений замкнуто относительно логического следования. Эпистемический вход (*epistemic input*) — информация, которая приводит к изменениям исходного состояния убеждений, также представляется как высказывание.

Критерии рациональности AGM для множества убеждений выражаются требованиями:

- минимальности изменений исходной информации,
- приоритетности новой информации,
- непротиворечивости.

Каждый из перечисленных критериев порождает ряд дискуссий относительно его уместности, необходимости и способа реализации. Часто на основе таких дискуссий развивается новое направление в исследовании процессов изменения убеждений, связанное с определенным способом представления эпистемического состояния и построением соответствующей модели.

Действуя в рамках критериев рациональности, следует также стремится к соблюдению принципа категориального соответствия при выполнении познавательных действий. В формулировке П. Герденфорса и Х. Ротта, этот принцип звучит так:

В результате выполнения какого либо действия, результат должен представлять собой систему, аналогичную исходной и соответственно обладающую такими же свойствами [7].

В рамках различных традиций представления знаний существуют самые разнообразные воплощения этого принципа, но следует отметить, что практически все существующие системы предпочитают работать с убеждениями прежде всего рационального субъекта, оперирующего непротиворечивыми убеждениями. В данном случае, мы говорим о том, что любое изменение множества убеждений должно выдать результат в виде множества убеждений, также замкнутого относительно логического следования, как и исходное.

Следует отметить, что требования рациональности сами по себе естественны и закономерны, но любая их реализация в рамках определенного представления убеждений зачастую требует очень высокого уровня идеализации. Множество убеждений рационального субъекта должно быть непротиворечиво, потому что следующим требованием, исходящим из способа представления убеждений, есть замкнутость множества убеждений относительно логического следования. Если же субъект проигнорировал требование непротиворечивости, то результатом замыкания такого множества убеждений будет множество всех высказываний языка, что приводит к тривиализации самого процесса пересмотра убеждений. Устранение, своевременное обнаружение и предупреждение появления противоречий во множестве убеждений — это своего рода священная обязанность каждого субъекта — носителя убеждений.

Прежде чем приступить к изменению множества убеждений, следует увериться в его непротиворечивости, и так же завершающим этапом каждой доксастической операции должна быть проверка результата на непротиворечивость. Тем не менее, реальный познающий субъект не так уж и нуждается в постоянном контроле противоречий. Во множестве убеждений обычного человека порой мирно сосуществуют несовместимые высказывания, наличие которых не обязательно есть свидетельством нерациональности, но скорее признаком «человечности». Замкнутость относительно логического следования также необязательна для познающего субъекта, — возможно именно поэтому обычный, «живой» носитель множества убеждений не приходит в ужас, осознавая перспективу тривиализации своих убеждений. Постепенно, устраняя проявляющиеся противоречия, человек успешно изменяет свое множество убеждений, порой даже не осознавая всех производимых операций.

Допустив подобную необязательность при построении доксастической логики, мы фактически в самом начале потеряем исходные принципы, на которые она опирается. Для абстрактного рационального субъекта, в идеале реализовать действия которого сможет, к примеру, компьютер, необходимо наличие четких требований и такое же четкое их выполнение. Человек, по-видимому, обладает все же ограниченными познавательными способностями, поэтому он делает необходимые умозаключения *ad hoc*, когда же получает противоречивые следствия, задумывается и устраняет несоответствие. Компьютер, оперируя аналогичным множеством убеждений, обладает бо́льшими вычислительными возможностями. Кроме того, если «человеку свойственно ошибаться», то компьютеру в такой возможности отказывают. Обнаружив противоречие в своих убеждениях, у человека всегда есть возможность исправить ситуацию. У компьютера подобной возможности в аналогичных условиях нет, ведь получив уже противоречивое множество, он не будет делать заключения лишь по надобности, рискуя выдать ошибочный результат, а немедленно выполнит замыкание относительно логического следования и получит множество всех высказываний языка. Полностью отказаться от требования непротиворечивости множества убеждений нельзя. Но также нельзя игнорировать ситуации, в которых существование противоречия в состоянии убеждений вынуждено[2].

Способов устранения или локализации противоречия во множестве убеждений достаточно много, но все они проистекают из необходимости соблюдения условия непротиворечивости. Тем не менее, некоторые исследователи предлагают способы ослабить или отказаться от этого критерия. Понятно, что просто

---

[2] Например, экспертная система букмекерского клуба, получает информацию о результатах матча из разных источников. Получив противоречивую информацию, система должна локализовать противоречие и ожидать уточнения.

отбросить его нельзя, ведь в таком случае мы теряем возможность использовать множества убеждений как удобный и привычный способ представления эпистемических состояний. Даже ослабление условия непротиворечивости также влечет изменение способа представления состояния убеждений. Чтобы получить возможность более пристально взглянуть на пути «подкопа под стену непротиворечивости» рассмотрим две характерные доксастические модели.

2 Отказ от непротиворечивости: ревизия базы убеждений

Рассмотрение человеческих способностей оперировать своими убеждениями часто наталкивает на мысль, что представление этих убеждений в виде множества высказываний не вполне адекватно выражают механизмы изменения состояний убеждений человека. Конечно, мы имеем здесь удобную и сильную идеализацию, формально отражающую большинство аспектов изменения убеждений, но порой ее выразительных возможностей оказывается недостаточно, в частности, при рассмотрении условия непротиворечивости. Как бы ни верили мы в человеческую рациональность, но все же приходится признать, что иногда человек халатно относится к своим эпистемическим обязанностям: не следит за непротиворечивостью множества убеждений, не замыкает его относительно логического следования, и даже не осознает всех следствий своих убеждений. А почему, собственно говоря, он должен это делать?

Множество убеждений как способ представления эпистемического состояния субъекта подвергался критике со стороны многих исследователей, среди которых выделяются А. Фурманн [4], С. Ханссон [9], П. Герденфорс [6], Х. Ротт [7], Б. Небел [15] и другие. Чаще всего указывают на ограниченные описательные возможности аппарата теории множеств применительно к убеждениям, что затрудняет возможности описания статуса убеждения, его зависимостей, подтвержденности или ценности. Д. Макинсон также обращает внимание на неудобство оперирования множеством высказываний, практически бесконечным в силу требования логической замкнутости [13].

Подобных аргументов очень много. Действительно, эпистемическое состояние субъекта неоднородно. Не все наши убеждения имеют независимый статус, большая их часть следуют из других, более фундаментальных убеждений. В терминах множества убеждений описать такое различие практически невозможно, не имея отличительного признака для базовых и производных убеждений. Кроме того, указывает А. Фурманн, в процессе изменения убеждений, мы никогда не охватываем все множество убеждений, а работаем лишь с его базовой частью [4], изменение которой во многом похоже на операции над множеством убеждений, но имеет и ряд особенностей.

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 1. Множество B_K называется *базой убеждений* множества убеждений K, если и только если B_K — конечное подмножество K и результатом логического замыкания B_K есть само множество K.

Для базы убеждений необязательно условие замкнутости относительно логического следования и, соответственно, требование непротиворечивости также не упоминается. А значит, база убеждений может содержать противоречивые высказывания. Фактически, любой набор высказываний представляет собой некоторую базу убеждений. Очевидно, что базы убеждений обладают большими выразительными возможностями, нежели множества убеждений. Одному множеству убеждений могут соответствовать разные базы. Фактически, база убеждений представляет собой набор основных, фундаментальных убеждений, на основе которых формируется то или иное множество убеждений.

Изменение базы убеждений осуществляется с помощью тех же трех операций: расширения, сокращения и ревизии. С учетом принципа категориального соответствия, результатом выполнения некоторого действия над базой убеждений также должна быть база убеждений. Таким образом, расширение базы убеждений выглядит несколько проще расширения множества убеждений, где для достижения категориального соответствия необходимо замкнуть результат относительно логического следования. Расширение базы убеждений предполагает лишь механическое добавление нового высказывания ко множеству уже существующих в базе.

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 2. Расширением базы убеждений B посредством высказывания α назовем операцию $+$, такую что $B + \alpha = B \cup \{\alpha\}$.

В работах Ханссона функция сокращения интерпретирована для баз убеждений, путем введения дополнительного оператора — *оператора ядра* [10]. Такой оператор на множестве высказываний B выбирает для любого высказывания α минимальное подмножество исходного множества B, такое что оно влечет α.

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 3. Для любого множества высказываний B и любой формулы α, назовем оператор $\perp\!\!\!\perp$ *оператором ядра*, если и только если для любого множества высказываний $X \in B \perp\!\!\!\perp \alpha$ выполняются следующие условия:

1. $X \subseteq B$,
2. $X \models \alpha$,
3. для любого Y, если $Y \subset X$ то $Y \not\models \alpha$.

$B \perp\!\!\!\perp \alpha$ называется центральным α-множеством, его элементы α-ядрами. Каждая база убеждений порождает ряд α-ядер, т.е. минимальных подмножеств базы, которые влекут α. Сокращение баз убеждений реализовано Ханссоном через *сокращение ядра* (*kernel contraction*) [10]. Суть этой операции довольно проста. Чтобы сократить базу убеждений посредством высказывания α, потребуется:

- выбрать все α-ядра базы убеждений;
- удалить наименее предпочтительный элемент каждого α-ядра.

В результате выполнения этих действий, полученное множество убеждений уже не будет влечь α, так как ни одна его база не будет влечь α.

Для выбора наименее предпочтительных элементов ядра, подлежащих удалению, используется *функция усечения* (*incision function*), которая определяет, какой элемент каждого α-ядра следует удалить. Функция усечения σ в качестве аргумента принимает центральное α-множество и производит выбор на объединении всех минимальных подмножеств, влекущих α (α-ядер). При этом σ гарантирует, что в каждом α-ядре будет выбрано хотя бы одно высказывание, подлежащее удалению.

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 4. Функцией усечения для B назовем такую функцию σ, которая для любого высказывания α будет удовлетворять следующим условиям:

1. $\sigma(B \perp\!\!\!\perp \alpha) \subseteq \cup(B \perp\!\!\!\perp \alpha)$,
2. если $X \neq \varnothing$ и $X \in B \perp\!\!\!\perp \alpha$, то $X \cap \sigma(B \perp\!\!\!\perp \alpha) \neq \varnothing$.

Используя функцию усечения σ, Ханссон определяет сокращение ядра для базы убеждений [10].

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 5. Сокращением ядра для базы убеждений B на основе функции усечения σ, назовем операцию $-_\sigma$, такую что $B -_\sigma = B \setminus \sigma(B \perp\!\!\!\perp \alpha)$.

Сокращение ядра базы убеждений удовлетворяет постулатам сокращения AGM, кроме постулата замыкания. Сокращение ядра, которое бы удовлетворяло всем AGM постулатам сокращения, может быть построено с использованием *функции мягкого усечения* (*smooth incision function*).

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 6. Функцию σ усечения на множестве B назовем функцией мягкого усечения, если и только если для любого $A \subseteq B$, если $A \vdash \beta$ и $\beta \in \sigma(B \perp\!\!\!\perp \alpha)$, то $A \cap \sigma(B \perp\!\!\!\perp \alpha) \neq \varnothing$.

Соответствующая *операция мягкого сокращения ядра*, основанная на функции мягкого усечения, удовлетворяет всем постулатам сокращения AGM; исходя из этого, Ханссон формулирует и доказывает репрезентационную теорему [11].

ТЕОРЕМА 7. *Пусть K есть множество убеждений. Оператор $-$ на K будет оператором мягкого сокращения ядра, если и только если $-$ есть оператор сокращения частичного пересечения.*

Ревизия базы убеждений может быть представлена с использованием равенства Леви: $K * \alpha = (K - \neg\alpha) + \alpha$, причем в данном случае порядок действий значения не имеет. Требование непротиворечивости для множества убеждений четко определяет порядок осуществления ревизии [7]:

- удаляем предполагаемое противоречие ($\neg\alpha$);
- добавляем высказывание α.

Аналогичный порядок действий можно сохранить и для ревизии базы убеждений, определив ее на основе расширения и сокращения базы убеждений, рассмотренных выше. Специфическим для баз убеждений случаем оказывается *операция полуревизии* (*semirevision*) базы B посредством убеждения α, соответствующая обратному равенству Леви [11]: $K * \alpha = (K + \alpha) - \neg\alpha$.

Иными словами, полуревизия базы убеждений предполагает два следующих шага:

1. Расширение базы убеждений B посредством α.
2. Удаление противоречий в B, если таковые возникли (*консолидация* базы).

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 8. Полуревизия ядра базы убеждений, основанная на функции усечения σ — это операция вида $\circledast_\sigma$, для которой $B \circledast_\sigma \alpha = B \cup \{\alpha\} \setminus \sigma((B \cup \{\alpha\}) \perp\!\!\!\perp \ \perp)$.

Такая операция может дать результат, отличный от результата обычной ревизии, т.к. на втором шаге, удаляя возникшие в базе B противоречия, мы не всегда можем исключить возможность удаления убеждения α, посредством которого осуществлялся пересмотр базы. Поэтому операция такого пересмотра базы убеждений и названа полуревизией [9]. При этом не следует снижать ее познавательной ценности, ведь в сущности, она более тонко моделирует процесс пересмотра убеждений. Действительно, когда мы в соответствии со стандартной процедурой, предусмотренной равенством Леви, заранее предпринимаем действие по недопущению противоречия, сокращая состояние убеждений посредством $\neg\alpha$, мы автоматически отвергаем возможность недостоверности α, т.е. фактически отдаем предпочтение новой информации перед уже имеющейся. В случае же применения операции полуревизии принцип приоритетности новой информации перестает быть обязательным. И действительно, получая новую информацию, которая к тому же противоречит имеющимся убеждениям, мы скорее отнесемся к ней негативно или настороженно, но, во всяком случае, далеко не всегда будем воспринимать ее как безусловно приоритетную. Эта ситуация реализуется операцией полуревизии — мы принимаем α как равноправное убеждение базы и уже после этого начинаем искать несоответствия, при этом в ходе удаления возникших противоречий вполне возможна потеря новой информации α, которая может оказаться неконкурентоспособной по сравнению с базовыми убеждениями, хотя бы в силу меньшей субъективной значимости.

Операция полуревизии должна удовлетворять следующим постулатам [11]:

1. *Непротиворечивость*: $\perp\notin Cn(B \circledast \alpha)$
2. *Включение*: $\text{B} \circledast \alpha \subseteq \text{B} \cup \{\alpha\}$
3. *Сохранение ядра*: Если $\beta \in \text{B}\backslash\text{B}\circledast\alpha$, тогда существует такое $B' \subseteq \text{B}\cup\{\alpha\}$, для которого $\perp \notin Cn(B')$ и $\perp \notin Cn(B')\cup\{\beta\}$
4. *Предварительность расширения*: $(B + \alpha) \circledast \alpha = B \circledast \alpha$
5. *Конгруэнтность*: Если $\alpha \leftrightarrow \beta$ теорема, то $B \circledast \alpha = B \circledast \beta$

Использование баз убеждений не освобождает нас от необходимости контролировать возникновение противоречий, но предоставляет возможность существенно уточнить представление эпистемического состояния субъекта и построить более адекватную модель изменения убеждений для моделирования процессов, приближенных к действительному механизму изменения убеждений.

3 Ослабление непротиворечивости: паранепротиворечивая ревизия убеждений

Возможен и другой способ представления эпистемического состояния субъекта посредством некоторой *содержательной структуры*, компонентами которой являются два множества. Первое — множество убеждений, которые субъект в данный момент считает истинными, — принимаемое множество убеждений *(acceptance set)* (Γ). В качестве второго компонента содержательной структуры выступает множество отвергаемых убеждений *(rejection set)* (Δ). Уместность рассмотрения множества убеждений, в истинности которых субъект в данный момент уверен, не вызывает сомнений. Напротив, придание отвергаемым высказываниям статус отдельного, причем равноправного, множества содержательной структуры, вызывает закономерный интерес и требует уточнения [8]. Отвержение убеждения — это познавательное действие, которое в разговорной речи выражается различными степенями отрицания. Хотя исследования сущности отрицания имеют массивные исторические корни, уходящие в глубину веков к истокам логики, исследователи далеко не всегда обращали внимание на существенное различие между отрицанием утверждения и утверждением отрицания (см. Т. Парсонс [16]). Акт речевого отрицания α вынуждает нас отказаться от утверждения α, но никоим образом не обязывает полностью отбрасывать отрицаемое высказывание, удалять его и старательно забывать как постыдное свидетельство нашего заблуждения. Естественно, существуют и другие эпистемические обязательства субъекта, согласно которым, в частности, если субъект отвергает некоторое убеждение, он не имеет права одновременно утверждать это убеждение. Используя такой способ ограничения, мы получаем компоненты содержательной структуры:

Γ — множество принимаемых убеждений,

Δ — множество отвергаемых убеждений.

Кроме того, упомянутые выше эпистемические обязательства субъекта не только закономерны и интуитивно понятны, но также могут быть использованы в качестве искомого более слабого заменителя непротиворечивости множества убеждений. Используя представление эпистемического состояния субъекта в терминах содержательной структуры, требование непротиворечивости может быть заменено более слабым — *согласованностью*. В данном случае согласованность выполняет функции разделителя компонентов содержательной структуры, — множества принимаемых и отвергаемых убеждений должны быть согласованы, т.е. не иметь общих элементов.

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 9. Содержательной структурой Con назовем упорядоченную пару множеств (Γ, Δ), где $\Gamma \cap \Delta = \varnothing$.

Используя возможности рассмотренного представления, Эдвин Марес создает стройную и выразительную модель под названием *паранепротиворечивая теория ревизии убеждений* (далее — PBR[3]) [14]. Построение подобной теории продиктовано необходимостью выработки средств для рациональной работы с противоречиями, если они возникают. Используя непротиворечивость как движущую силу изменения убеждений, невозможно представить себе наличие противоречия во множестве убеждений без тривиализации этого множества. Положив в основу PBR паранепротиворечивую, а не классическую логику, можно рассчитывать получить теорию, в рамках которой допустимо оперировать противоречиями, не опасаясь тривиализации. Разумеется, даже использование паранепротиворечивой логики не может полностью застраховать субъекта от появления противоречий, недопустимых в рамках подобной теории. Поэтому в качестве более слабого аналога непротиворечивости выдвигается требование согласованности множеств принимаемых и отвергаемых убеждений.

Стандартное представление изменения убеждений в теориях типа AGM среди основных принципов использует *непротиворечивость* и *минимальность*. Реализация этих принципов подразумевает оптимальный выбор, который позволяет свести к минимуму потери при изменении состояния убеждения. AGM демонстрирует здесь определенную осторожность, которая заключается в стремлении оставить как можно больше высказываний нетронутыми, удалив лишь «наихудшие» убеждения, например, наименее укорененные, наименее подтвержденные, наименее предпочитаемые и т.п.

При построении паранепротиворечивой теории, Э. Марес придерживается аналогичных двух принципов: *согласованность* и *минимальность*. В целях сохранения согласованности содержательной структуры нельзя допускать нарушения эпистемических обязательств субъекта во избежание пересечения множества принимаемых и множества отвергаемых убеждений. Минимальность PBR состоит в удалении лишь наименее значимых для субъекта убеждений, при этом следует учитывать необходимость минимального изменения обоих множеств — принимаемых убеждений Γ и отвергаемых убеждений Δ.

В основе PBR лежит релевантная логика системы **R**, при

---

[3] **PBR** — аббревиатура-сокращение названия модели — *Paraconsistent Theory Of Belief Revision.*

этом Марес указывает, что выбор логики продиктован только его личными предпочтениями и в качестве основы теории может быть использована любая релевантная или полурелевантная логика от **B** до **RM3**[4]. В качестве метаязыка использована классическая логика первого порядка.

Рассмотрим отношение следования и операторы замыкания для каждого множества — компонента содержательной структуры [8].

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 10. *Отношение следования.* $\Gamma \vdash \Delta$ тогда и только тогда, когда существуют такие наборы высказываний $\gamma_1,\ \gamma_2,\ \gamma_3\ \dots\ \gamma_n\ \in\ \Gamma$ и $\delta_1,\ \delta_2,\ \delta_3\ \dots\ \delta_m\ \in\ \Delta$, что $\gamma_1\ \&\ \gamma_2\ \&\ \gamma_3\ \&\ \dots\ \&\ \gamma_n\ \rightarrow\ \delta_1 \vee \delta_2 \vee \delta_3 \vee \dots \vee \delta_m$.

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 11. Оператор восходящего замыкания. Пусть Φ — множество формул, тогда $Cn(\Phi) = \alpha : \Phi \vdash \alpha$.

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 12. Оператор нисходящего замыкания. Пусть Φ — множество формул, тогда $Do(\Phi) = \alpha : \alpha \vdash \Phi$.

Определенные таким образом отношение следования и операторы восходящего замыкания Cn и нисходящего замыкания Do имеют следующие свойства.

1. $\alpha \in Cn(\Phi)$ и $\beta \in Cn(\Phi) \Rightarrow \alpha \wedge \beta \in Cn(\Phi)$
2. $\alpha \in Do(\Phi)$ и $\beta \in Do(\Phi) \Rightarrow \alpha \vee \beta \in Do(\Phi)$
3. $Cn(\Phi) = Cn(Cn(\Phi))$
4. $Do(\Phi) = Do(Do(\Phi))$
5. $(\Phi \vdash \Phi'\ \&\ \Phi' \vdash \Phi'') \supset \Phi \vdash \Phi''$
6. $\forall\Phi, \Phi \nvdash \varnothing$ и $\forall\Phi, \varnothing \nvdash \Phi$
7. $Cn(\varnothing) = Do(\varnothing) = \varnothing$
8. $(\Phi \subseteq \Phi'\ \&\ \Phi' \vdash \Phi'') \supset \Phi' \vdash \Phi''$
9. $(\Phi \subseteq \Phi'\ \&\ \Phi'' \vdash \Phi) \supset \Phi'' \vdash \Phi'$

---

[4] Подробнее специфику **R** и подобных систем см. [3].

Следует отметить, что множество принимаемых убеждений $\Gamma = Cn(\Gamma)$ и, соответственно, множество отвергаемых убеждений $\Delta = Do(\Delta)$. Доксастические операции расширения, сокращения и ревизии в терминах PBR могут быть определены аналогично принципам построения операций, описанным в AGM [13]. Описание операции расширения для обоих множеств довольно очевидно.

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 13. (*Расширение PBR*)

Операция расширения для множества принимаемых убеждений: $\Gamma + \alpha = Cn(\Gamma \cup \{\alpha\})$.

Операция расширения для множества отвергаемых убеждений: $\Delta \oplus \alpha = Do(\Delta \cup \{\alpha\})$.

Определение операции сокращения всегда более трудоемко и часто требует введения дополнительных понятий. Построение сокращения в терминах PBR Э. Марес осуществляет аналогично сокращению частичного пересечения AGM [2]. Прежде чем приступить к рассмотрению специфики сокращения принимаемого и отвергаемого множеств, следует определить критерии успешности сокращения PBR. Для этого нам понадобятся так называемые множества «остатков» *(reminders)* относительно некоторого высказывания [8]. Обозначим через $\Gamma \bot \alpha$ множество остатков относительно высказывания α принимаемых убеждений. Аналогично для множества остатков относительно высказывания α отвергаемых убеждений используем запись $\Delta \top \alpha$.

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 14. Множество Γ' назовем *принимаемым множеством остатков* Γ по α, если и только если для него выполняются следующие условия:

1. Γ' — множество принимаемых убеждений,
2. $\Gamma' \subseteq \Gamma$,
3. $\alpha \notin \Gamma'$,
4. $\forall \Gamma'' : (\Gamma' \subset \Gamma'' \subseteq \Gamma) \supset \Gamma'' \vdash \alpha$.

Фактически Γ'' представляет собой множество, содержащее максимальные элементы семейства подмножеств Γ, которые не влекут α.

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 15. Множество Δ' назовем отвергаемым множеством остатков Δ по α, если и только если для него выполняются следующие условия:

1. Δ' — множество принимаемых убеждений,
2. $\Delta' \subseteq \Delta$,
3. $\alpha \notin \Delta'$,
4. $\forall \Delta'' : (\Delta' \subset \Delta'' \subseteq \Delta) \supset \alpha \vdash \Delta''$.

Успешность сокращения PBR может быть показана путем доказательства двух лемм о непустоте множеств $\Gamma \bot \alpha$ принимаемых остатков и $\Delta \top \alpha$ отвергаемых остатков [14].

Кроме того, в рамках PBR определена пара функций предпочтения:

$\sigma(\Gamma, \alpha) \subseteq \Gamma \bot \alpha$ ($\Gamma \bot \alpha$ — непусто),

$\tau(\Delta, \alpha) \subseteq \Delta \top \alpha$ ($\Delta \top \alpha$ — непусто).

Каждая функция предпочтения выбирает множество высказываний, которые субъект более всего склонен изъять из множества принимаемых или отвергаемых убеждений. Значение функции может зависеть от личных предпочтений субъекта или же от условий выбора.

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 16. (*Сокращение PBR*)

Операция сокращения для множества принимаемых убеждений: $\Gamma - \alpha = \cap \sigma(\Gamma \bot \alpha)$.

Операция сокращения для множества отвергаемых убеждений: $\Delta \ominus \alpha = \cap \tau(\Delta \top \alpha)$.

Определенная таким образом операция сокращения подчиняется требованию категориального соответствия: в результате сокращения множества принимаемых убеждений, получаем принимаемое множество и, соответственно, после сокращения отвергаемого множества, результат также будет представлять собой множество отвергаемых убеждений. Используя определение операций сокращения PBR, функций предпочтения и свойство минимальности множеств остатков, несложно доказать две леммы об успешности каждого вида сокращения. Соответственно, результат $\Gamma - \alpha$ всегда определен и $\alpha \notin \Gamma - \alpha$, равно как всегда определен и успешен результат $\Delta \ominus \alpha$, $\alpha \notin \Delta \ominus \alpha$.

Для последующего определения операции ревизии убеждений, дополнительно рассмотрим так называемое *множественное сокращение*. Фурман и Ханссон [5] выделяют два вида множественного сокращения: последовательное и пакетное, в рамках данной теории, автор использует именно *пакетное сокраще-*

ние убеждений. Остатки компонентов содержательной структуры по множеству Σ могут быть определены аналогично остаткам по некоторому высказыванию. Пакетные остатки $\Gamma\bot\Sigma$ множества Γ принимаемых убеждений по множеству Σ и $\Delta\top\Sigma$ множества отвергаемых убеждений Δ по множеству Σ имеют свойства, полностью аналогичные соответствующим остаткам по единичному высказыванию. Успешность пакетного сокращения обосновывается путем доказательства соответственных лемм о непустоте множеств принимаемых остатков $\Gamma\bot\Sigma$ и отвергаемых остатков $\Delta\top\Sigma$ и определением пары функций предпочтения $\sigma'(\Gamma,\Sigma) \subseteq \Gamma\bot\Sigma$ и $\tau'(\Delta,\Sigma) \subseteq \Delta\top\Sigma$.

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 17. (*Пакетное сокращение PBR*)

Операция пакетного сокращения для множества принимаемых убеждений: $\Gamma -^{\forall} \Sigma = \cap\sigma'(\Gamma\bot\Sigma)$.

Операция пакетного сокращения для множества отвергаемых убеждений: $\Delta \ominus^{\forall} \Sigma = \cap\tau'(\Delta\top\Sigma)$.

Доказательство успешности пакетных сокращений PBR аналогично доказательству соответствующих лемм для единичного сокращения PBR.

Вооружившись определениями расширения и сокращения, можно приступать к рассмотрению комплексного механизма содержательной ревизии. *Содержательная ревизия PBR* может быть реализована двумя путями, соответственно с помощью двух операторов $*$ — *ревизия принятия* и $\star$ — *ревизия отвержения.* Пусть определена содержательная структура $Con = (\Gamma, \Delta)$. Необходимо ввести в Con высказывание α. Э. Марес предлагает следующий алгоритм:

1. Если полученная в результате структура $(\Gamma + \alpha, \Delta \ominus \alpha)$ согласована, то собственно она и будет результатом ревизии.

2. Если же полученная структура несогласована, то действуем по такому алгоритму:

    - подвергаем сокращению оба компонента структуры до получения когерентной пары;
    - получаем $\Gamma'' \subseteq \Gamma$ и $\Delta'' \subseteq \Delta$, как компоненты согласованной структуры $(\Gamma'' + \alpha, \Delta'')$;

- определяем $\Gamma' = \cap(\Gamma'' + \alpha),\ \Delta' = \cap\Delta''$;
- на основе компонентов Γ' и Δ' конструируем содержательную структуру $Con * \alpha = (\Gamma' + \alpha, \Delta')$, которая и будет результатом содержательной ревизии принятия $*$ [14].

Построение $Con \star \alpha$ аналогично. В случае несогласованности компонентов структуры $(\Gamma - \alpha, \Delta \oplus \alpha)$, следует выполнить действия по согласованию структуры и рассмотреть множества $\Gamma'' \subseteq \Gamma$ и $\Delta'' \subseteq \Delta$, при которых структура $(\Gamma'' - \alpha, \Delta'' \oplus \alpha)$ согласована. Затем сконструировать результирующую структуру ревизии отвержения $Con \star \alpha = (\Gamma', \Delta' \oplus \alpha)$ на основе компонентов $\Gamma' = \cap\Gamma'',\ \Delta' = \cap(\Delta'' \oplus \alpha)$.

Далее Марес предлагает определить функцию выбора π, которой предстоит выбирать множества убеждений, подлежащие удалению.

Предположим, что структура $(\Gamma + \alpha, \Delta \ominus \alpha)$ несогласованна. Значит, существует по крайней мере одно высказывание $\gamma \in \Gamma$ и хотя бы одно высказывание $\delta \in (\Delta \ominus \alpha)$ такие, что $\alpha \wedge \gamma \vdash \delta$.

Также известно, что все γ и δ в силу замкнутости $\Gamma + \alpha$ относительно $\wedge$ и замкнутости $\Delta \ominus \alpha$ относительно $\vee$, обладают следующими свойствами: $\gamma \not\vdash \delta$ и $\alpha \not\vdash \delta$.

Кроме того, $\alpha \nvdash \Delta \ominus \alpha$ в силу успешности сокращения.

Рассмотрев множество всех пар (γ, δ), обладающих указанным свойством, можно построить множество множеств, каждое из которых содержит только один член каждой пары и никаких других формул. Обозначим такое множество через $\Pi(\Gamma + \alpha, \Delta \ominus \alpha)$. Если пар (γ, δ), таких что $\alpha \wedge \gamma \vdash \delta$ нет, то $\Pi(\Gamma + \alpha, \Delta \ominus \alpha) = \{\varnothing\}$. Если рассматриваемое множество непусто, то очевидно, что выбрав любой элемент множества $\Pi(\Gamma + \alpha, \Delta \ominus \alpha)$ и сократив с его помощью $\Gamma + \alpha$ и $\Delta \ominus \alpha$, получим согласованную содержательную структуру.

Выбор элемента зависит опять же от личных предпочтений субъекта. Обычно субъект предпочитает выбирать среди наихудших множеств, наименее приемлемых, наименее ценных или значимых убеждений. Обозначим такой выбор как $\pi(\Gamma + \alpha, \Delta \ominus \alpha)$, он существует всегда, если $\Pi(\Gamma + \alpha, \Delta \ominus \alpha)$ непусто. Таким образом, в процессе содержательной ревизии нам предстоит выполнить сокращение посредством объединения $\pi(\Gamma + \alpha, \Delta \ominus \alpha)$, что возможно с помощью пакетного сокращения.

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 18. (Содержательная ревизия принятия)
$Con * \alpha = (\Gamma', \Delta')$, где $\Gamma' = ((\Gamma -^{\forall} \cap \pi(\Gamma + \alpha, \Delta \ominus \alpha)) + \alpha)$.

Производя сокращение обоих множеств, и принимаемых, и отвергаемых убеждений посредством объединения наихудших множеств проблемных формул, в результате получаем согласованную пару.

Для оператора $\star$ содержательной ревизии отвержения Э. Марес рассматривает аналогичную функцию выбора χ. Рассмотрению подлежит множество $X(\Gamma - \alpha, \Delta \oplus \alpha)$ множеств формул, состоящих из одного члена каждой пары (γ, δ) и не содержащих при этом никаких других формул. Функция χ на множестве $X(\Gamma - \alpha, \Delta \oplus \alpha)$ выберет подмножество наихудших проблемных формул, т.е. те множества, которые субъект предпочтет удалить.

$\chi(\Gamma - \alpha, \Delta \oplus \alpha) \;\subseteq\; X(\Gamma - \alpha, \Delta \oplus \alpha)$,

$\chi(\Gamma - \alpha, \Delta \oplus \alpha)$ определена, если $X(\Gamma - \alpha, \Delta \oplus \alpha)$ непусто.

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 19. (Содержательная ревизия отвержения)
$Con \star \alpha = (\Gamma'', \Delta'')$, где$\Gamma'' = ((\Gamma -^{\forall} \cap \chi(\Gamma - \alpha, \Delta \oplus \alpha)) + \alpha)$.

Оба определения содержательной ревизии PBR, — принятия $*$ и отвержения $\star$, — представляют собой варианты равенства Леви. В данном случае, в отличие от ревизии базы убеждений, порядок операций строго определен [14]. Хотя метод достижения согласования принимаемых и отвергаемых множеств не исключает возможность определения оператора полуревизии [11]. Категориальное соответствие содержательных ревизий PBR может быть показано путем несложного доказательства соответствующей теоремы, но более интересными оказываются формальные свойства построенных операторов.

Оба оператора представляют собой типы ревизии, удовлетворяющие постулатам AGM для ревизии [7].

1. *Замыкание*: $\Gamma = Cn(\Gamma)$и$\Delta = Do(\Delta)$
2. *Успешность*: $\alpha \in \Gamma'$
3. *Включение*: $\Gamma' \subseteq \Gamma + \alpha$ и $\Delta' \subseteq \Delta$

4. *Конгруэнтность*: Если $\alpha \leftrightarrow \beta$ теорема R, то $Con * \alpha = Con * \beta$

Отброшенные при построении модели постулаты, соответствующие AGM принципам непротиворечия и минимальности для PBR ревизий, не выполняются.

4 Согласованность vs обоснованность

Рассмотренные доксастические модели относят к отдельным направлениям развития эпистемических теорий, опирающихся либо на принцип **согласованности** (*coherence*), или же на принцип **обоснованности** (*foundations*). Основное отличие этих подходов заключается в способе представления эпистемического состояния, его логической структуры.

В рамках подхода, использующего критерий согласованности, убеждения представлены в качестве однородных элементов и подразумевается, что механизм выбора удаляемых убеждений будет осуществлен извне, — его определит либо сама доксастическая операция, либо субъект. К теориям согласованности относятся множества убеждений AGM и рассмотренная выше паранепротеворечивая модель PBR. Такие теории часто упрекают в недостаточной ясности и адекватности представления механизма изменения убеждений, чрезмерной идеализации, статичности и отсутствии четкого алгоритма. Некоторые исследователи называют такие теории «постулатными» и указывают, что рассмотрение свойств убеждений опережает создание ясной онтологии убеждений. В то же время, увеличивающееся количество репрезентационных теорем говорит о том, что в рамках таких моделей фундаментально описаны основные операции изменения, постулаты и свойства познавательных действий, область применения которых подлежит дальнейшему расширению.

Теории, предполагающие обоснованность убеждений, вводят механизм различения статусов убеждений в сам способ их представления (например, оправдательную структуру), таким образом пытаясь изнутри контролировать механизм изъятия убеждений. В качестве примера такой модели было рассмотрено разделение высказываний на эксплицитные и имплицитные через введение баз убеждений. Модели, использующие эпистемическое укоренение, ранжирование и упорядочивание убеждений, также относятся к теориям обоснованности. Большинство из них используют основные постулаты сокращения и ревизии AGM, соответствие которым устанавливается путем доказательства репрезентационных теорем. Подобные теории актуальны, так как предоставляют неплохие вычислительные, в частности, алгоритмические возможности, но они также имеют ряд спорных вопросов.

При выборе критериев рациональности естественно опереться прежде всего на здравый смысл и ожидаемый результат. Все же, несмотря на интуитивную понятность и даже необходимость, критерии рациональности эпистемических теорий не являются незыблемыми, даже если цели их построения весьма похожи. Более того, очевидно, что они находятся во взаимозависимости со способом представления убеждений и другими компонентами эпистемической теории. Изменение критерия рациональности влечет за собой иной способ представления состояния убеждений, возможно более удачный, но в то же время, способ представления убеждений диктует особенности воплощения критериев рациональности, их уточнение или даже, в некотором роде, отказ от традиционно принятых.

Литература

[1] *Костюк В.Н.* Элементы модальной логики. Киев, 1978.

[2] *Alchourron C.E., Makinson D.* The logic of theory change: Contraction functions and their associated revision functions // Theoria. 1982. Vol. 48. P. 14-37.

[3] *Anderson A.R., Belnap N.D., Dunn J.M.* Entailment: Logic of Relevance and Necessity. Volume II. Princeton University Press. 1992.

[4] *Fuhrmann A.* Theory contraction through base contraction // Journal of Philosophical Logic. 1991. Vol. 20. P. 175–203.

[5] *Fuhrmann A., Hansson S.O.* A survey of multiple contractions // Journal of Logic, Language and Information. 1994. Vol. 3. P. 39–76.

[6] *Gärdenfors P.* The dynamics of belief systems: Foundations versus coherence theories // Reveu Internationale de Philosophie. 1990. Vol. 44. P. 24-46.

[7] *Gärdenfors P., Rott H.* Belief revision. In Handbook of Logic in Artificial Intelligence and Logic Programming. Volume IV. Chapter 4.2. 1995.

[8] *Gomolinska A.* On the logic of acceptance and rejection // Studia Logica. 1998. Vol. 60. P. 233–251.

[9] *Hansson S.O.* Belief Base Dynamics, Uppsala: Acta Universitatis Upsaliensis. 1991.

[10] *Hansson S.O.* Kernel contraction // Journal of Symbolic Logic. 1994. Vol. 59. P. 845–859.

[11] *Hansson S.O.* Semi-revision // Journal of Applied Non Classical Logic. 1997. Vol. 7. № 1-2. P. 151-175.

[12] *Hintikka J.* Knowledge and Belief: an Introduction to the Logic of the Two Notions. Ithaca, N. Y.: Cornell University Press, 1962.

[13] *Makinson D.* How to give it up: A survey of some formal aspects of the logic of theory change // Synthese. 1985. Vol. 62. P. 347-363.
[14] *Mares E.D.* A paraconsistent theory of belief revision // Erkenntnis. 2002. Vol. 56. P. 229–246.
[15] *Nebel B.* Reasoning and Revision in Hybrid Representation Systems. Lecture Notes in Computer Science. 1990. Vol. 422. Berlin: Springer, 1990.
[16] *Parsons T.* Assertion, denial and the liar paradox // Journal of Philosophical Logic. 1984. Vol. 13. P. 137–152.
[17] *Von Wright G.H.* An Essay in Modal Logic. Amsterdam: North-Holland, 1951.

Виктор Иванович Шестаков и логическое моделирование

В. И. Левин

ABSTRACT. The scientific biography of the outstanding cybernetician V.I. Shestakov, one of pioneers in logic modelling in technics is stated and analysed. The short analysis of his basic works is given. His mutual relations with other scientists, features of his person are considered. The full bibliography of his scientific publications is presented.

Ключевые слова: дискретные схемы, логическое моделирование, логическое проектирование, история приложений логики

В.И. Шестаков.

1 Введение

В последние годы значительно возрос интерес к научной биографии советского ученого-кибернетика Виктора Ивановича Шестакова [1–8]. Это неудивительно, поскольку В.И. Шестаков был выдающимся ученым, одним из первооткрывателей логического моделирования технических устройств, который, по мнению многих российских историков науки, при жизни был недооценен как за рубежом, так и у себя на родине. Одной из причин интереса к ученому явилось также то, что в его трудах, наряду с традиционными задачами логического моделирования дискретных устройств, рассматривалась аналогичная задача для непрерывных (аналоговых) устройств. В имеющихся публикациях о В.И. Шестакове довольно подробно описаны основные этапы научного пути ученого, основные классы рассмотренных им задач логического моделирования технических устройств, его столкновения с другими учеными по вопросу приоритета на открытие логического моделирования в технике [2, 3, 5–8]. Однако многие важные вопросы остались не освещенными. Например, что из сделанного В.И. Шестаковым принадлежит только ему и отсутствует в работах других ученых; чем его работы отличаются методически; каким образом он — физик по образованию — пришел в область исследований «логика и техника»; почему идею логического моделирования релейных схем, родившуюся у него в 1935 году, он опубликовал лишь в 1941 году, поставив под вопрос свой приоритет открытия; почему он никогда не ссылался на работы других участников данного открытия; каковы были человеческие и общественно-политические взгляды ученого, что он представлял собой как человек, товарищ, семьянин; кто были его друзья и враги; при каких обстоятельствах С.А. Яновская провозгласила его в 1948 году первооткрывателем логического моделирования в технике; почему он остался недооцененным в мире и на родине.

В настоящей статье сделана попытка ответить на некоторые из указанных вопросов. Полученные в статье результаты позволяют по-новому взглянуть на историю открытия логического моделирования в технике.

2 Начало пути

Выдающийся российский ученый, пионер применения логики в технике и физике, автор первых работ в этой области в СССР и один из первых в мире, Виктор Иванович Шестаков родился 15 октября (по старому стилю) 1907 года в Москве. Его родителями были Иван Васильевич Шестаков (1880 г. рожд.) — крестьянин Курской губернии и его законная жена Мария Бонифатьевна Погоржельская (рожд. в 1876 году, г. Двинск), оба «православного вероисповедания» (М.Б. была рождена в католичестве, полькой, дочерью Бонифатия Погоржельского, активного участника восстания за независимость Польши в 1863 году, сосланного затем в Россию). К моменту рождения Вити в семье уже был один сын — Владимир (1906 г.р.). Иван Васильевич почти до самой смерти в 1918 г. работал слесарем Главных железнодорожных мастерских Белорусско-Балтийской (Александровской) железной дороги. В конце своих дней И.В. работал начальником железнодорожного депо. Путем самообразования он познакомился с историей, естествознанием; изучал иностранные языки, т.е. был образованным для своего круга и времени человеком. Мария Бонифатьевна до 1918 г. была домашней хозяйкой, но после смерти мужа, оставшись вдовой с двумя детьми на руках, была вынуждена устроиться чернорабочей на вагоноремонтный завод «Памяти революции 1905 г.». В этот период дети оказались без присмотра, Виктор даже некоторое время беспризорничал на Сухаревском рынке в Москве. Вдобавок М.Б. заболела туберкулезом. В итоге младшего сына Витю и старшего Володю пришлось перевести из начальной школы железнодорожного поселка ст. Юдино Александровской железной дороги, где они учились с 1915 года, в интернат 1-й Трудовой опытно-показательной школы Наркомпроса. Здесь Витя проучился до 1926 г., окончив 9 классов. Витя был слабым ребенком, часто болел, в основном, болезнями дыхательных путей (круппозный ларингит, многократные воспаления легких и т.д.), а после смерти матери от туберкулеза в 1920 г., оставшись в 13 лет круглым сиротой, болел практически непрерывно, заработал туберкулезный бронхоаденит и, начиная с 1923 г., до окончания школы находился под наблюдением врачей в туберкулезном диспансере. По оценке самого В.И. Шестакова, в школе он «проявил большую склонность и некоторые способности к технике, физике и математике».[1] В школе он много занимался теоретически и экспериментально электричеством и радио, что дало знания физики, превышающие программу средней школы, но самое важное, по мнению самого В.И., это «привычку мыслить физически и работать самостоятельно по физике и применять в этой области математику».[1] Хвалебный отзыв об успеваемости Вити — «третьего ученика в классе»[1] — дала также школа, где он учился. Его школьные знания по физике и математике, по-видимому, были действительно хороши — впоследствии он никогда не проваливался на экзаменах по этим дисциплинам, а, наоборот, показывал результаты лучшие, чем большинство других экзаменующихся.[1]

В 1926 г. В.И. Шестаков предпринял первую, увы, неудачную, попытку поступить в ВУЗ — на электротехнический факультет МВТУ. Он выдержал конкурс по письменной математике (который не прошли 125 человек), но «провалил» политэкономию. После этой неудачи он пошел работать — сначала служащим Института методов внешкольной работы (1926–27 гг.), потом чернорабочим механического завода (1927–28 гг.). С марта 1928 г. он оказался безработным и жил на пособие по безработице, а в период 1928-29 гг., как член профсоюза, перебивался временной работой по направлениям Биржи труда. В 1928 г. В.И. Шестаков совершил новую, к сожалению, опять неудачную попытку поступить в ВУЗ, на этот раз — на физический факультет 1-го МГУ: он не прошел по конкурсу. Однако уже через несколько месяцев ему повезло: весной 1929 г. (в середине учебного года, в рамках актуальной тогда «задачи химизации страны») его принимают на химический факультет МВТУ. Виктор был счастлив. Но вскоре ситуация, а вместе с ней и его настроение изменились. Выяснилось, что когда на занятиях требовалось знание материала по химии, он «плавал»; там же, где требовались сообразительность, логика рассуждений, умение строить структуры (те же химические), там он «чувствовал себя лучше».[1] Он с удовольствием занимался на 1-м курсе аналитической геометрией (по Соколовскому), теоретической механикой (по Бухгольцу), а на 2-м курсе «прошел электричество на первом месте в группе»[1] и даже «спорил с преподавателем, хотя группа стояла на другой точке зрения, занимался с отстающими по физике».[1] В конце 2 курса В.И. Шестакову дважды предлагали аспирантуру — по химии и по диалектическому материализму, но он отказался от обоих предложений, т.к. это «не отвечало его физико-математическим наклонностям».[1] В 1929 году, будучи студентом 2-го курса химфака МВТУ, он впервые совершил «пробу пера»[1] в виде студенческих научных работ по математике и физике. Сам Виктор Иванович так оценивал эти свои труды: «Это не научные открытия, не открытие «Америки», а просто самостоятельные работы, на которые я с удовольствием трачу свое время и энергию».[1] Эти его занятия завершились ходатайством о переводе его на физический факультет 1-го МГУ: «Дайте мне возможность заниматься этим делом не урывками, а как основной работой».[1] В связи с этим В.И. Шестаков замечает: «Ничего подобного не замечается в химии: за 1,5 года у меня ни одной мысли не мелькнуло по химии».[1]

«Крик души» начинающего ученого был услышан, и осенью 1930 года его перевели с 3-го курса Высшего Химико-Технологического Училища (бывший химфак МВТУ) на 2-й курс физического факультета 1-го МГУ им. М.Н. Покровского (т.е. с потерей курса). Однако предшествующее двухлетнее пребывание на химфаке МВТУ и связанная с этим работа в химических лабораториях и на химических предприятиях не прошли даром: его здоровье, начавшее улучшаться после окончания в 1926 г. школы-интерната, снова ухудшилось. Все завершилось месячной практикой Виктора Ивановича в мае 1930 года на Макеевском коксобензольном заводе. Из-за постоянного плохого самочувствия и повышенной температуры он уехал из Макеевки домой, не дождавшись конца практики, за что у него была «отнята хлебная карточка».[1] В родной Москве его опять взяли под наблюдение в туберкулезном диспансере как больного туберкулезным бронхоаденитом.

Переход в МГУ придал В.И. Шестакову новые творческие силы. Уже через полтора года, 08.02.1932 г., будучи студентом четвертого курса, он подал в Комитет по изобретательству заявку на изобретение счетной машины нового типа и 31.03.1934 г. получил Свидетельство на изобретение.[2] В июне 1934 г. он защитил на «отлично» диплом по теме «Теоретическое исследование спектра гармонического осциллятора при наличии случайных скачков фазы (задача Лоренца)», которой он успешно занимался на старших курсах под руководством известного физика, специалиста по теории колебаний проф. С.Э. Хайкина. В дипломе, выданном Шестакову, была указана его квалификация — «научный работник 2-го разряда в области «Колебания», преподаватель ВУЗа и ВТУЗа, а также техникумов, рабфаков и старших классов средней школы».[3] Осенью того же 1934 г. В.И. Шестаков поступил в аспирантуру НИИ физики МГУ (лаборатория теории колебаний). Его поселили, выделив койку в общежитии МГУ. Началась новая жизнь — жизнь ученого.

В качестве научного руководителя Виктору Ивановичу выделили квалифицированного специалиста по физической теории колебаний проф. Горелика. Однако нормальные отношения между аспирантом и руководителем не сложились. Все темы диссертаций, которые аспиранту могли предложить в лаборатории, были, естественно, связаны с теорией колебаний. Однако теперь эта тематика его не устраивала.[4] Шестаков все же выбрал одну из предложенных ему тем, но реальной работы по ней так и не начал. Его интересы перешли в совсем другую область, связанную с применением алгебры логики к теории сложных схем из реле. Его отношения с научным руководителем обострились. В декабре 1934 г. руководитель в своем отзыве жаловался, что его подопечный «в течение 3 месяцев не начинал работу...», а в феврале 1935 г. он прямо указал, что «выполнение плана аспирантской работы тов. Шестаковым должно быть признано неудовлетворительным. Исследования Шестакова в области применения алгебры логики к схемам реле... не гарантирует защиту им кандидатской диссертации». Тем не менее, определенный результат изыскания Шестакова дали: в январе 1935 г. он подготовил работу «Реле и релейные схемы» с основным разделом «Алгебра релейных схем», которая, хотя она и носила предварительный характер и не предназначалась для публикования, сыграла роль трамплина в его последующих, более обстоятельных работах.[5] Интенсивная работа привела снова к обострению туберкулеза и в феврале 1935 г. Виктор Иванович ушел в академический отпуск до осени. Во время отпуска В.И. Шестаков лечился в санатории (Башкирия). Там он познакомился с Геней Абрамовной Гурфинкель (1913 г.р.). Вскоре В.И. Шестаков женился на Г.А. и переехал в ее 18-метровую комнату. Там же жила и мать молодой жены — Эмилия Соломоновна Гурфинкель (1890 г.р.). Условия жизни молодоженов были ужасны (см. книгу [8], гл. 13). Тем не менее, женитьба пошла на пользу Виктору Ивановичу: уже к осени 1935 года он снова полон творческих сил и продолжает начатые исследования — уже под руководством нового, более соответствующего его теме научного руководителя, выдающегося специалиста по алгебре, логике и теории вероятностей д-ра физ.-мат. наук профессора Валерия Ивановича Гливенко. Именно В.И. Гливенко первым обратил внимание В.И. Шестакова на рецензию П. Эренфеста по книге Л. Кутюра «Алгебра логики», в которой впервые была высказана мысль о возможном использовании алгебры логики для описания и конструирования релейно-контактных схем, и поддержал молодого ученого профессионально и морально. Следующий, 1936-й год оказался для Виктора Ивановича успешным и в научной, и в семейной жизни: у него родилась дочь Ирина, а он, пользуясь советами и помощью В.И. Гливенко, разработал логико-математический аппарат для описания релейно-контактных и обычных (непрерывных) электрических схем, причем первые рассматривались как предельный, вырожденный случай вторых. Это дало возможность уже весной 1937 года приступить к написанию диссертации. Срок пребывания в аспирантуре был продлен на 4 месяца, что позволило точно в срок — 9 января 1938 года закончить диссертацию. Она называлась «Некоторые математические методы конструирования и упрощения двухполюсных электрических схем класса А». В ней В.И. Шестаков первый в СССР и один из первых в мире применил к расчету двухполюсных электрических схем с последовательными и параллельными соединениями элементов аппарат алгебры логики.[6] Начались поиски оппонентов: сначала отказался профессор С.А. Лебедев, потом согласившийся оппонировать сотрудник его лаборатории Д.И. Марьяновский оказался не доктором наук. Подходящей фигурой был член-корреспондент АН СССР, редактор журнала «Автоматика и телемеханика» В.И. Коваленков, согласившийся быть оппонентом и опубликовать материал диссертации в своем журнале. Однако, взяв диссертацию в марте 1938 г. на просмотр, он вернул ее через 1,5 месяца, отказавшись от всех своих обещаний. В конце концов, 1-м оппонентом стал доктор технических наук Лаврентьев из Наркомтяжпрома и математик — профессор И.И. Жегалкин из МГУ. Защита диссертации состоялась 28 сентября 1938 г. и прошла успешно. В диссертации соискатель установил соответствие между соединениями электрических сопротивлений (в частности, реле) и логическими операциями и выяснил физические основания такого соответствия. В январе 1939 г. ВАК присудил В.И. Шестакову ученую степень кандидата физико-математических наук. Заметим, что диссертацию В.И. Шестаков защитил, не имея ни одной публикации! Такие защиты в то время были обычным явлением: люди больше работали, чем публиковались. После окончания аспирантуры в январе 1938 г. В.И. Шестаков все годы работал преподавателем кафедры общей физики физического факультета МГУ — сначала ассистентом, а с конца 1941 г. — доцентом. Интересно, что окончив Физфак МГУ и проработав 50 лет преподавателем физики, В.И. так и не стал физиком. Сферой его интереса всегда была математическая логика и ее технические приложения (см. [8], гл. 13).

3 Первые отзывы и первые столкновения

1940-41 годы принесли В.И. Шестакову несколько сюрпризов. В июне 1940 г. в Физико-математическом реферативном журнале (Т. IV. 1940. Вып. 2) появился первый опубликованный в печати отклик на его диссертацию: он содержался в реферате Д.И. Марьяновского статьи инж. В.А. Розенберга «Задача о блокировке и преобразование контактных групп», опубликованной в журнале «Автоматика и телемеханика», 1940, № 1. Это было приятно, но не удивительно, поскольку этот реферат был «заказан» Марьяновскому самим В.И. (они состояли в дружеских отношениях). А неприятное было в том, что перед этим, в апреле 1940 года, после ознакомления со статьей Розенберга Виктору Ивановичу показалось, что по содержанию она совпадает с его диссертацией, что и породило его «заказ». Он вспомнил, что в марте-апреле 1938 г. его диссертация находилась на просмотре у ответственного редактора этого журнала, который вернул ее автору, отказав и в оппонировании, и в публикации, и мысленно связал с этим событием факт появления публикации Розенберга. Реакция возмущенного несправедливостью (как ему казалось) В.И. Шестакова была быстрой. Незадолго до описываемых событий он подготовил большую статью с изложением основных теоретических положений его диссертации по применению математической логики к моделированию релейно-контактных последовательно-параллельных схем и 25.02.1940 г. с названием

«Алгебра двухполюсных схем, построенных исключительно из двухполюсников (алгебра А-схем)» представил в «Журнал технической физики». Затем, подробно познакомившись со статьей Розенберга, он подготовил письмо о показавшихся ему совпадениях содержания этой статьи с его диссертацией и вместе с копией своей статьи «Алгебра двухполюсных схем…» 27 апреля 1940 г. отправил в редакцию журнала «Автоматика и телемеханика». Тогда же, вместе с письмом В.И. Шестакова, письмо аналогичного содержания в защиту своего сотрудника направили в редакцию этого журнала директор НИИ физики МГУ член-корр. АН СССР проф. А.С. Предводителев и профессор К.Ф. Теодорчик. 5 мая руководство НИИФ получило ответ из редакции о возможности опубликования их письма (при условии необходимой коррекции текста) совместно с объяснениями В.А. Розенберга. 17 мая редакция получила письмо от Розенберга. В этом письме главный инженер Ленпроектконторы «Сев. зап. эл. монтаж» В.А. Розенберг объяснил, что содержание работ В.И. Шестакова ему не известно, что алгебры Буля он не знает, а изобрел ее сам, а отмеченные Шестаковым совпадения считает нормальным явлением для специалистов, занимающихся одной предметной областью.[7] 23 мая в редакцию пришло повторное письмо от директора НИИФ Предводителева с предложенной журналом коррекцией текста. Однако после этого редакция передумала выносить переписку по столь щекотливому вопросу на страницы журнала. В ответ на запрос Шестакова от 11.10.1940 г. о судьбе дела редакция «Автоматики и телемеханики» 25.10.1940 г. письменно отказала ему и директору НИИФ в опубликовании их писем о приоритете работ Шестакова по логическому моделированию электрических схем, обосновав свою позицию тем, что вопрос приоритета является в данном случае спорным и потому должен решаться в судебном порядке. Вместе с тем, редакция предложила Виктору Ивановичу опубликовать присланную им в апреле статью «Алгебра двухполюсных схем…» в переработанном виде. Уже 20.11.1940 г. доработанная статья была получена редакцией. Доработка состояла в сокращении текста, исключении доказательств и доведении объема статьи до принятых в журнале норм.[8] Одновременно, озабоченный вопросами своего приоритета и получив вдобавок на доработку свою статью из ЖТФ (август 1940 г.), В.И. Шестаков подготовил (видимо, для подстраховки) еще один — третий, весьма краткий (4-страничный) вариант своей статьи и под названием «Об одном символическом исчислении, применимом к теории электрических схем» 02.09.1940 г. представил в сборник «Ученые записки Московского университета». В итоге первая, основная и наибольшая по объему статья «Алгебра двухполюсных схем, построенных исключительно из двухполюсников (алгебра А-схем)» вышла в свет в марте 1941 г. (ЖТФ. Т. 11. 1941. Вып. 6), ее сокращенный вариант с тем же названием — в апреле 1941 г. («Автоматика и телемеханика», 1941. № 2). Публикация же последней, самой краткой версии статьи задержалась из-за войны на целых 4 года (Ученые записки Московского университета. Теория вероятностей. Вычислит. математика. Номография. 1944. Вып. 73.). Отметим еще, что в это же время (06.12.1940 г.) с просьбой о защите его приоритета в области применения алгебры Буля к электрическим схемам В.И. Шестаков обращался и в Президиум АН СССР. Однако ответа он, видимо, не получил. Обратиться же по этому вопросу в суд, как советовал журнал «Автоматика и телемеханика», он не решился. В итоге формально права на приоритет в данной области у Шестакова и В.А. Розенберга остались равными.[9]

1940-й год, по-видимому, сильно изменил жизненные установки и характер поведения Виктора Ивановича. Он понял, что не является единственным, кто разрабатывает тематику «Применение логических методов в технике»; этим занимаются многие — советский ученый В.А. Розенберг, немка Х. Пиш, австриец О. Плехль, японцы А. Накашима и М. Ханзава (об этом В.И. должен был узнать в феврале-августе 1940 г.[10]), американец К.Э. Шеннон (об этом В.И. должен был узнать в сентябре 1940 — апреле 1941 г.[11]) и др. Вдобавок 15 марта 1940 г. умер его научный руководитель В.И. Гливенко и Виктор Иванович остался без научной поддержки. В этой новой для него ситуации он, очевидно, решил, что может надеяться только на себя и потому должен активизировать научную работу и опубликование ее результатов, с тем чтобы опередить своих конкурентов. В частности, он перестал заниматься линейными электрическими цепями, сосредоточив все усилия на тематике, занимавшей большинство других ученых: логические методы исследования релейно-контактных и других дискретных схем.

Начало Великой Отечественной войны внесло существенные коррективы в жизнь В.И. Шестакова. Будучи по состоянию здоровья не пригодным к прохождению службы в рядах Советской армии, он не подлежал призыву и направлению на фронт. Это сохранило ему жизнь, а России — выдающегося ученого. 13.10.1941 г. он получил «Удостоверение об эвакуации из Москвы с семьей из трех человек в г. Ашхабад», где по постановлению Правительства СССР уже находился МГУ. В эвакуации Шестаков находился до конца 1943 г. (сначала в Ашхабаде, затем Свердловске, куда перевели МГУ).

После возвращения из эвакуации в Москву В.И. Шестаков с еще большей интенсивностью включился в научную работу. При этом тематика его исследований заметно изменилась. Прежде всего он, как уже говорилось, перестал заниматься логическим моделированием обычных электрических схем и сосредоточил все усилия на изучении релейно-контактных схем. Во-вторых, он понял, что применение аппарата алгебры логики полезно при изучении не только управляющих систем (таких как релейно-контактные схемы), но и вычислительных машин дискретного действия (причем логики не только двузначной, но и многозначной).[12] В связи с этим в период с 1949 по 1953 г. он работал по совместительству сначала младшим, а с 1950 г. — старшим научным сотрудником в Институте точной механики и вычислительной техники АН СССР (специальность «вычислительная техника»). Там он разрабатывал новую в то время область — программирование и решение математических задач на цифровых ЭВМ. К этому времени относятся также его перевод с английского языка главы XIII «Арифметические элементы» в книге «Быстродействующие вычислительные машины» (перевод с англ. под ред. Д.Ю. Панова. М. 1952 г.), написание совместно с А.А. Абрамовым и М.Р. Шура-Бура, под ред. чл.-корр. АН СССР Л.А. Люстерника первой отечественной монографии по программированию «Решение математических задач на автоматических цифровых машинах. Программирование для электронных счетных машин» (М. 1952), перевод с английского языка, а также редактирование книги «Синтез электронных вычислительных и управляющих схем» (М. 1954). За названную выше коллективную монографию В.И. Шестаков и три его соавтора в 1952 г. получили премию Президиума АН СССР. Это было не первое признание научных заслуг В.И. Шестакова. А первое признание произошло в 1948 г.: в статье известного логика С.А. Яновской «Основания математики и математическая логика» (Математика в СССР за 30 лет (1917–1947). Т. 2. Гостехтеориздат. М.–Л.) было сказано, что в работе «Алгебра релейных схем», написанной Шестаковым в январе 1935 года,[5] впервые в мире была подтверждена возможность построения алгебры релейно-контактных схем на базе алгебры логики. Еще два признания были получены в 1949 году. В отзыве о работах Виктора Ивановича от 15.10.1949 г. будущего академика П.С. Новикова было сказано, что его работа «Алгебра релейных схем», сделанная в январе 1935 года, содержала принципы нового расчета релейных схем. А в дальнейшем особая роль в науке Виктора Ивановича проявилась в том, что он первый ввел в технику метод расчета путем установления аналогии между областями, казалось бы, совершенно далекими и тем самым явился основоположником нового направления в технических науках. В отзыве о работах Виктора Ивановича Шестакова от 22.10.1949 г. профессора М.А. Гаврилова отмечен пионерский характер его работ по применению математического аппарата теоретической логики к решению задач синтеза и анализа релейно-контактных схем.[13] Заметим, что помимо научной работы, много времени Виктор Иванович всегда уделял реферированию работ других авторов. Только в период с 1938 по 1955 гг. он прореферировал 54 работы, включая два перевода с языка оригинала.

После возвращения в Москву из эвакуации семья В.И. Шестакова получила 19-метровую комнату в Пушкинском студенческом городке в Останкино — в деревянном стандартном доме, построенном по коридорной системе. С молодыми теперь не было тещи — она осталась в своей довоенной комнате. К сожалению, не было не только тещи, но также водопровода, канализации, центрального отопления. И находилась эта комната в 1,5 часах езды от работы. В 1954 г. Виктору Ивановичу наконец повезло: по ходатайству ректора МГУ ему выделили 21,8-метровую комнату в коммунальной квартире на 4 семьи по

Ломоносовскому проспекту. Этот «подарок» явился результатом заявления В.И. Шестакова ректору, где он просил об «исправлении вопиющей несправедливости ко мне, допущенной деканом физического факультета, уже вторично не включившим меня в список на получение квартиры в 14-этажном доме МГУ, в то время как деканат находит возможность включать в список на получение квартир во вторую очередь сотрудников, которым уже ранее были предоставлены благоустроенные квартиры».

В мае 1952 г. по приказу министра высшего образования СССР В.И. Шестаков был командирован в докторантуру МГУ сроком с 05.05.1952 г. по 05.11.1953 г. для выполнения докторской диссертации «Алгебраические методы анализа и синтеза систем с конечным числом устойчивых состояний» (научный консультант д-р физ.-мат. наук профессор К.Ф. Теодорчик). Согласно приказу В.И. Шестаков должен был представить краткий отчет о состоянии работы над диссертацией к 10.01.1953 г. и окончательный отчет о результатах выполнения диссертации и ее защите — по окончании срока пребывания в докторантуре. Цель диссертации формулировалась так: исследование и разработка алгебраических методов анализа и синтеза релейных систем дискретного действия, реле которых работают в некоторой последовательности, определяемой либо последовательностью внешних воздействий, либо структурой системы и начальными условиями в ней. Таким образом, речь шла о создании вычислительных методов изучения объектов, получивших впоследствии название «конечные автоматы». Напомним, что в описываемое время понятия «конечный автомат» еще не было. План диссертации включал введение, части 1 и 2 и заключение. Пять глав части 1 посвящалось системам из элементов с двумя устойчивыми состояниями, а три главы части 2 — системам с любым конечным числом состояний. Отчет Шестакова за 11 первых месяцев работы на имя ректора МГУ гласил: написана работа объемом 200 машинописных страниц, являющаяся теоретической частью диссертации; не осуществлена вторая часть, посвященная вопросам практического применения полученных результатов в области вычислительных машин, из-за неясности вопроса о секретности этой части диссертации. В окончательном отчете ректору МГУ о причинах невыполнения плана пребывания в докторантуре В.И. Шестаков объяснил все бытовыми проблемами с жильем и отсутствием поддержки МГУ с публикацией результатов.[14]

4 Признание

С 1953 г. В.И. Шестаков приступил к представлению на различных семинарах, а также к интенсивной подготовке и написанию статей по результатам, полученным в период пребывания в докторантуре и относящимся уже к тематике многотактных релейно-контактных схем, являющихся частным случаем конечных автоматов (в отличие от однотактных схем, изучавшихся В.И. в предшествующие годы). В течение короткого времени (6-7 лет) он опубликовал около 20 статей и докладов в самых известных изданиях страны (Доклады АН СССР, Автоматика и телемеханика, Логические исследования, Труды III Всесоюзного математического съезда и др.). Рецензии на эти работы писали самые авторитетные советские ученые: П.С. Новиков, С.А. Яновская, М.А. Гаврилов, С.Л. Соболев, М.А. Леонтович, В.С. Кулебакин и др. Основополагающими из этих статей являются «О преобразовании моноциклической последовательности в возвратную» (Доклады АН СССР. Т. 98. 1954. № 4), «Алгебраический метод синтеза многотактных релейных систем» (Доклады АН СССР. Т. 99. 1954. № 6) и «Алгебраический метод синтеза многотактных систем r-позиционных реле» (Доклады АН СССР. Т. 112. 1957. № 1). Эти работы Шестакова, выполненные независимо от проводившихся в тот же период исследований американских (А. Бёркс, Дж. фон Нейман, Д. Райт, Г. Эйкен, Д. Хаффмен, С. Клини, Ф. Муррей), румынских (Г. Моисил) и советских (В.Н. Рогинский, Б.А. Трахтенброт, Н.Е. Кобринский, В.М. Глушков) ученых совместно составили основу современной теории конечных автоматов — важной части современной дискретной математики. Именно в этот период произошло похолодание во взаимоотношениях В.И. Шестакова с М.А. Гавриловым, которые восходили еще к 1938 г., когда присутствовавший на докладе Виктора Ивановича Гаврилов первый оценил его работы и предсказал им большое будущее. Теперь же Шестаков заподозрил, что Гаврилов, будучи членом редколлегии журнала «Автоматика и телемеханика», придерживает его статьи, пропуская вперед свои (статьи В.И. Шестакова «Алгебраический метод анализа автономных систем двухпозиционных реле» и «Алгебраический метод синтеза автономных систем двухпозиционных реле», написанные по просьбе редакции журнала 10.01.1953 г., с апреля по октябрь 1953 г. находились у Гаврилова, который в начале октября вернул их без отзыва, а 9 октября 1953 г. представил в журнал собственную статью «Основные формулы синтеза релейных схем». Опубликование же статей Шестакова отложили до 1954 года, одновременно обратившись к нему с просьбой дать отзыв на вышеуказанную статью Гаврилова). Шестаков тут же письменно потребовал от редактора журнала опубликования главной его статьи, посвященной синтезу релейных схем. К счастью, отношения между двумя учеными существенно не пострадали, обе статьи Шестакова были вскоре опубликованы в журнале (1954. № 2 и 1954. № 4), и Виктор Иванович в последующие годы достаточно долго, как и прежде, участвовал в семинарах Гаврилова и публиковался в журнале «Автоматика и телемеханика».[15] Аналогичная задержка публикации случилась со статьей В.И. Шестакова «Алгебраический метод синтеза автономных релейных систем», представленной в 1954 г. акад. П.С. Новиковым в журнал «Доклады АН СССР». Дважды (14.05. и 09.06.1954) академик обращался к главному редактору журнала в поддержку статьи. Тем не менее, она так и не была опубликована — задержка оказалась столь велика, что появился новый, более общий вариант статьи, содержащий общее решение задачи синтеза как автономных, так и неавтономных релейных систем.

Примерно в то же время произошло столкновение В.И. Шестакова с А.Н. Колмогоровым — вероятно, наиболее близким ему по характеру дарования и кругу тогдашних интересов ученым. Еще в 1946 году Колмогоров поддержал большую работу Шестакова «Представление характеристических функций предложений посредством выражений, реализуемых релейно-контактными схемами», представив ее в журнал, где статья вскоре была опубликована (Известия АН СССР. Серия математическая. 1946. Т. 10. № 6). Однако теперь, в 1953 г., во время выступления Шестакова на семинаре по логике в МГУ с изложением своих результатов по анализу и синтезу многотактных релейно-контактных схем, Колмогоров оценил эти результаты как изучение весьма частного случая цепей Маркова и раскритиковал их, как не содержащие новизны. После этого пути двух ученых разошлись.[16]

Надо заметить, что В.И. Шестаков схватывался не только с советскими учеными, которые, по его мнению, были его конкурентами и/или мешали опубликованию его работ (В.А. Розенберг, М.А. Гаврилов, А.Н. Колмогоров), но и с соответствующими зарубежными учеными. Так (по свидетельству Э. Кольмана) в апреле 1957 г. он публично «весьма резко опровергал кибернетику, как «лженауку»... Шестаков не знал, что он сам и есть кибернетик». По нашему мнению, ученый поступал так не по незнанию, а потому, что для него в кибернетике после работ его конкурента К. Шеннона не осталось места. Такая кибернетика была ему не нужна.[17]

В эти годы последовало еще несколько признаний достижений В.И. Шестакова. 28 октября 1953 года по поводу работы В.И. «Анализ и синтез релейных систем, построенных из элементов, имеющих только два устойчивых состояния» д.ф.-м.н. проф. С.А. Яновская написала: «Представляется имеющей важной значение гл. III, посвященная автономным и неавтономным системам. Проблема анализа и синтеза таких систем, последующие состояния которых определяются их предшествующими состояниями, представляет особый интерес с точки зрения технических приложений для математических вычислений...». В 1954 г. в статье «Логика математическая» (БСЭ, 2 изд., Т. 25. 1954) чл.-корр. АН СССР А.А. Марков указал: «Советским ученым в 30-х гг. было открыто важное применение классического исчисления высказываний к релейно-контактным схемам, широко используемое в автоматических устройствах. Рассматривая двухполюсную релейно-контактную схему, Шестаков заметил, что всякая такая схема... моделирует некоторую формулу классического исчисления высказываний». В 1959 году в статье «Логика и автоматизация» («Логические исследования». Сб. статей. М. Изд-во АН СССР. 1959) известный ученый-кибернетик Г.Н. Поваров отметил: «Строгое доказательство того, что булева алгебра описывает логически структуру релейно-контактных схем, и первые систематические методы синтеза, основанные на применении булевой алгебры, были даны в 30-х годах В.И. Шестаковым и К.Э. Шенноном. Кроме того, А. Накасима и М. Хандзава, В.А. Розенберг и Иоганна Пиш построили специальные схемные алгебры, фактически совпадающие с булевой алгеброй, но не отметили сразу этого совпадения».[18] При этом Поваров ссылается на кандидатскую диссертацию Шестакова 1938 г. и его статью в Журнале технической физики 1941 года (см. библиографию работ В.И. Шестакова), статью К.Э. Шеннона 1938 года[11], две статьи И. Пиш 1939 года [10], две статьи А. Накашимы 1936 и 1938 гг. на английском языке и статью В.А. Розенберга 1940 г. (см. выше). В том же 1959 г. чл.-корр. АН СССР А.А. Ляпунов в статье «Математические исследования, связанные с эксплуатацией ЭВМ» («Математика в СССР за 40 лет». М. Физматгиз. 1959. Т. 1) написал: «В.И. Шестаков предложил векторно-алгебраический метод синтеза автономных релейно-контактных схем, который был им обобщен и на неавтономные схемы», а С.А. Яновская в статье «Математическая логика и основания математики» (там же) отметила: «В теории конечных автоматов В.И. Шестаков разрабатывал методы получения по уравнениям, схеме какого-либо автомата отвечающего им процесса (анализ системы) и обратно: уравнений по характеру процесса (синтез системы)».

В 1950-е — 1960-е годы сфера деятельности В.И. Шестакова заметно расширилась. Наряду с реферированием научных работ для различных реферативных журналов, чем он занимался и раньше (являясь внештатным редактором раздела «Алгебра (математическая теория) электрических цепей» реферативного журнала «Математика»), он стал вести ряд научных семинаров. Так, в 1953–54 годах он стал одним из руководителей семинара «Алгебра логики и релейно-контактных схем» на механико-математическом факультете МГУ. Он также руководил другим постоянным семинаром по техническим приложениям математической логики, созданным в октябре 1955 г. в МГУ по инициативе С.А. Яновской. На семинарах обсуждались главным образом проблемы анализа и синтеза (в том числе структурного) контактных и бесконтактных релейных схем. В 1950-х — 60-х годах он стал также руководителем прекрасного (по отзывам участников) семинара по теории релейных схем в университете — сначала при кафедре истории математики, затем при кафедре общей физики, который собирал много участников из разных учреждений Москвы и превратился в своеобразный клуб, который сыграл важную роль в развитии и пропаганде новых методов изучения релейно-контактных схем. Тематика этого семинара была аналогична тематике семинара по техническим приложениям логики. Кроме сказанного, В.И. Шестаков занимался также популяризацией применений логики в технике. Так, в журнале «Математика в школе» (1958, № 6; 1959, № 1) он опубликовал большую научно-популярную статью «Математическая логика и автоматика», написанную по результатам его исследований.

В конце 1950-х — 1960-е годы В.И. Шестаков много внимания уделил разработке вопросов многозначной (в основном, трехзначной) логики и ее использования для математического моделирования, анализа и синтеза релейно-контактных схем на многопозиционных реле. Он опубликовал довольно значительное число статей по этой тематике («Алгебраический метод синтеза многотактных систем r-позиционных реле». Доклады АН СССР. Т. 112. 1957. № 1; «Моделирование операций исчисления высказываний посредством релейно-контактных схем». Логические исследования. Выпуск 2. М. Изд-во АН СССР. 1959; «О двойной арифметической интерпретации трехзначного исчисления высказываний, используемой при моделировании этого исчисления посредством релейно-коммутаторных схем». Применение логики в науке и технике. М. Изд-во АН СССР. 1960; «О взаимоотношении некоторых трехзначных логических исчислений». Успехи математических наук. 1964. Т. 19. Вып. 2 и др.). Все они явились дальнейшим развитием его вышеупомянутой статьи «Представление характеристических функций предложений...» 1946 года, в которой, видимо, впервые была показана возможность технических приложений многозначных логик. В этот же период Шестаков опубликовал ряд статей по использованию аппарата алгебры логики для построения конкретных вычислительных и управляющих (логических) устройств («Синтез параллельного сумматора двоичных чисел, построенного из двухполюсных переключателей и поляризованных реле». Вопросы теории математических машин. Т. 2. 1962; «Логические машины». Философская энциклопедия. Т. 3. М. Советская Энциклопедия. 1964. — с Б.В. Бирюковым и Л.А. Калужниным и др.).

В 1960-е годы продолжился процесс признания научных заслуг В.И. Шестакова. В 1964 году в статье «Релейно-контактных схем теория» (Автоматизация производства и промышленная электроника. М. Сов. Энциклопедия. Т. 3. 1964) О.П. Кузнецов отметил: «Релейно-контактных схем теория возникла в 1936–38 годы после работ В.И. Шестакова, К. Шеннона, А. Накасимы и М. Ханзавы» и еще: «Началом развития... теории являются 1936–38 гг., когда В.И. Шестаков, К. Шеннон и А. Накашима применили для решения задач... теории аппарат математической логики». В 1968 году в письме декана физфака МГУ А.С. Предводителева в редакцию «Вестника Московского университета. Сер. 3» (1968. № 5) «К истории применения алгебры Буля в технике» была отмечена роль В.И. Шестакова в применении символической логики к анализу и синтезу релейных схем и указано наличие документов, подтверждающих приоритет Виктора Ивановича в этой области. В частности, приведен отзыв профессора В.И. Гливенко от 06.01.1936 г. о работе В.И. Шестакова по подготовке кандидатской диссертации.[19]

В эти же годы В.И. Шестаков в очередной раз попытался улучшить свои жилищные условия. В своем заявлении начальству (1958 г.) он писал: «На факультете почти за 20 лет работы в университете у меня нет даже отдельного письменного стола, хотя я веду научную работу творческого характера в новом, начатом мною впервые в СССР, направлении. В домашних условиях работать мне также очень трудно: кроме моей семьи в квартире, где я проживаю, еще три больших семьи, все с маленькими детьми — на 4 комнаты прописанных жильцов 17 человек, не считая временно проживающих. В одной с нами комнате — взрослая дочь-студентка». В итоге в 1962 г. Виктор Иванович получил отдельную комнату в 19 кв.м. на Ломоносовском проспекте, рядом с МГУ. И лишь в 1963 г. в 56 лет всемирно известный ученый впервые в жизни приобрел отдельную двухкомнатную квартиру общей площадью 43 кв.м (жилой площадью 31,6 кв.м) по ул. Лобачевского (путем обмена его однокомнатной квартиры и комнаты в коммуналке тещи).

5 Итоги

Помимо научной и преподавательской работы, В.И. Шестаков в 1960-е гг. много времени уделял редактированию и рецензированию иностранной научной литературы. Так, в 1963 году он редактировал переводимую В.М. Остиану с румынского книгу Гр. Моисила «Алгебраическая теория дискретных автоматических устройств» и рецензировал книгу Whitesitt J.E. «Булева алгебра и ее приложения», а в 1964 г. рецензировал книги Гудстейна Р.Л. «Булева алгебра» и Флегга Х.Г. «Булева алгебра и ее приложения». Он также принял деятельное участие в подготовке и реализации Директивы Совета по Кибернетике при Президиуме АН СССР от 22.05.1965 г. о проведении мероприятий по развитию исследований в области теории релейных устройств и конечных автоматов, по внедрению этой теории и развитию ее преподавания во ВТУЗах. В рамках этой программы Виктора Ивановича должны были командировать в Бельгию на Международный симпозиум «Логические системы, их теория и применение» (15.09–20.09.1969). Там он собирался выступить с докладом «Использование булевых, лукасевичевых и бочваровых операций в теории логических систем». Однако поездка и выступление не состоялись. Примерно в 1965 г. В.И. Шестаков заключил договоры с Издательством физико-математической литературы на написание справочника «Методы функционального анализа и структурного синтеза релейных систем» и книги «Математическая логика в теории релейных схем», а с Учпедгизом — на подготовку учебного пособия «Математическая логика и автоматизация вычислений». Все эти книги, учитывая большие научные достижения и опыт Шестакова, могли оказаться полезными для расширения и углубления исследований по применению математической логики в технике и для ее преподавания. К сожалению, ни один из этих издательских проектов не был осуществлен.[20]

1970-е годы были наиболее богатыми по числу признаний научных достижений В.И. Шестакова и их уровню. В 1970 г. в энциклопедии «История отечественной математики» (Т. 4. Кн. 2. Киев. Изд-во «Наукова Думка». 1970) отмечалось: «Одно из первых применений математической логики в теории контактных схем (1934 г.) принадлежит В.И. Шестакову. Пользуясь аналогией между операциями исчисления высказываний и контактными схемами, он разработал метод синтеза схем, не содержащих мостиковых соединений». И там же: «Еще в 1938 г. В.И. Шестаков (одновременно с американским ученым К. Шенноном) для решения задач синтеза релейно-контактных схем применил аппарат булевой алгебры».[21] В 1973 г. В.М. Глушков в статье «Кибернетика» в 3-м издании БСЭ (БСЭ. Т. 12. 1973) указал, что «В 1938 г. К. Шеннон (США), а в 1941 г. В.И. Шестаков (СССР) показали возможность использования для синтеза и анализа релейно-контактных схем аппарата математической логики. Тем самым было положено начало развитию современной теории автоматов». В 1975 году во 2-м издании «Логического словаря-справочника» Н.И. Кондакова было написано: «Математическое доказательство применимости алгебры Буля в теории и практике контактных и контактно-релейных схем было дано в 1938 г. русским ученым В.И. Шестаковым и американским инженером К.Э. Шенноном».

В конце 1970-х — 1980-е гг. В.И. Шестаков после долгого перерыва вернулся к логико-алгебраическим методам изучения линейных электрических цепей, с которых в 1935 году он начинал свою научную деятельность. В серии работ, опубликованных в журнале «Вестник Московского университета. Серия 3: физика, астрономия» (1976. № 2; 1977. № 2; 1979. №№ 4,6; 1982. № 1; 1983. № 2; 1984. № 1) он распространил разработанные им ранее логико-алгебраические методы расчета двухполюсных электрических схем с последовательными и параллельными соединениями элементов на многополюсные схемы. Кроме того, в этот, последний период своей жизни Виктор Иванович нашел новые применения трехзначной логики — для установления эквивалентности электрических двухполюсников и для анализа размерностей физических величин (см. тот же журнал, 1983. № 4; 1987. № 3). Эти последние работы В.И. Шестакова отказывались публиковать ведущие журналы СССР, публиковавшие его прежде: «Доклады АН СССР», «Автоматика и телемеханика» и др. Более того, он встречал непонимание и у коллег по прежней работе в МГУ, так что даже в родном университетском журнале его статьи проходили не просто (см. ниже воспоминания акад. О.Б. Лупанова). Заметим, что и в эти последние годы жизни Виктор Иванович продолжал с интересом следить за работами других ученых по применениям математической логики, переводил их и реферировал, доведя число опубликованных рефератов до 76.

В 1967 г. В.И. Шестакову исполнилось 60 лет. Однако, достигнув пенсионного возраста, он не ушел на пенсию, а продолжал по-прежнему интенсивно трудиться на кафедре общей физики физфака МГУ еще почти 15 лет — до 1982 года. Более того, дважды — в 1971 и 1978 годах он был слушателем факультета повышения квалификации МГУ по специальности «общая физика». Выйдя в июне 1982 г. окончательно на пенсию, он фактически продолжал трудиться — сначала и.о. доцента, а с 1984 г. — и.о. ассистента, что было вызвано его недостаточной материальной обеспеченностью. К моменту выхода на пенсию состав семьи Шестакова сильно изменился. Еще в 1941 г. на фронте погиб его старший брат Владимир Иванович Шестаков. В 1962 году дочь Ирина Викторовна вышла замуж за Виктора Васильевича Самохвалова и в 1963 г. родила сына Евгения, сделав В.И. Шестакова дедом. В 1977 году умерла теща Виктора Ивановича Э.С. Гурфинкель. Изменились и жилищные условия: в 1971 г. Виктор Иванович купил однокомнатную кооперативную квартиру 16,7 кв.м. по ул. 26 Бакинских комиссаров и переехал в нее со своей семьей, оставив семье дочери двухкомнатную квартиру по ул. Лобачевского. В 1984 году скончалась Геня Абрамовна – жена Виктора Ивановича, и семидесятивосьмилетний ученый был вынужден снова переехать в семью дочери, оставив свою кооперативную квартиру внуку. Свою смерть вследствие рака пищевода Виктор Иванович Шестаков встретил 3 мая 1987 года. При этом он работал практически до последнего дня жизни: последняя из его неопубликованных рукописей помечена 3 апреля 1987 г., а две его последние опубликованные статьи вышли из печати в июне 1987 года, уже после смерти автора («Вестник Московского университета, Серия 3». 1987. № 3). Эти последние годы его жизни ознаменовались рядом новых признаний его научных заслуг. 16.06.1982 г. в отзыве «О научных трудах В.И. Шестакова», составленном в связи с его предстоявшим 75-летним юбилеем и окончательным уходом на пенсию и подписанном известными учеными-кибернетиками

Б.В. Бирюковым, В.А. Горбатовым, В.Г. Лазаревым и Г.Н. Поваровым, указывалось, что юбиляр «установил возможность и показал плодотворность приложений математической логики в прикладной математике, вычислительной технике и кибернетике; разработал первые логические методы анализа и синтеза релейных схем; положил начало математическому проектированию дискретных технических устройств; разработал теорию многотактных релейных схем, оказавшую влияние на формирование более общей теории конечных автоматов; внес большой вклад в развитие молодого искусства программирования ЦВМ». 22 февраля 1983 года в газете «Московский университет» появилось еще одно, на этот раз необычное — анонимное признание В.И. Шестакова под названием «Чего не увидели другие», в котором утверждалась бесспорность его приоритета в разработке метода расчета релейно-контактных схем на основе математической логики.[22]

Каким человеком был В.И. Шестаков в жизни? Мнения на этот счет сильно расходятся. Проф. Д.А. Поспелов, опираясь на личные впечатления М.А. Гаврилова, пишет, что «интроверт по складу личности, Шестаков не любил шумных сборищ, накала научной полемики, столкновения интересов».[23] Ему вторит преемник М.А. Гаврилова на посту зав. лабораторией автоматов ИПУ РАН А.А. Амбарцумян (записано автором 10.12.2004 г.): «Шестаков был очень скромный и тихий человек. Однажды он пришел к нам в институт на семинар и тихо стоял в сторонке. Его провели в зал, усадили. Он слушал, но не задавал никаких вопросов... На него не ссылались по очевидной причине: для математиков это была не математика, а для инженеров, составлявших большинство, — далекая от практики теория, не обеспечивающая процесс проектирования устройств». А вот что сообщила автору многолетняя коллега Виктора Ивановича по Физфаку МГУ Алевтина Прохоровна Крылова (записано автором 09.12.2004 г.): «Он был прекрасный человек, легкий, не способный сделать ничего плохого людям, скромный. Всю жизнь вел только практику. Лекции читать ему никогда не давали, хотя в довоенные годы степень кандидата наук, которую он имел, уже ценилась высоко. Публиковался он в молодые годы мало. В этом нет ничего необычного, тогда вообще мало публиковались —

меньше, чем сейчас, особенно по логике — к ней было отношение какое-то не то. А его защита без публикаций — тогда все так защищались. Вообще, в его поведении не было ничего необычного, выделяющего его из массы. В послевоенные годы его стали публиковать легко в трудах МГУ. Но в других изданиях он проходил трудно». По воспоминаниям Е.В. Самохвалова — внука В.И., — он «несмотря на то, что был крупным ученым, был прост в обращении, в нем полностью отсутствовали какие-либо барьеры перед живым общением с рабочими, дворниками, сантехниками. Часто работники, приглашенные делать ремонт, после выполнения работы приглашались дедом за общий стол, и он с ними беседовал, как с равными. Совсем другое мнение у академика РАН О.Б. Лупанова, бывшего в 1980-е и последующие годы деканом Мехмата МГУ (записано автором 08.12.2004 г.): «Он был довольно странный человек, и эти странности есть в его поздних публикациях. Ко мне приходили из редакции «Вестника МГУ. Сер. Физика, астрономия», показывали статьи Шестакова, которые они не понимали, и спрашивали, какие рецензии писать, и вообще, что делать со статьями. Я отвечал, что рецензии надо писать снисходительно-одобрительные, без обсуждения по существу, хотя эти статьи действительно были очень странные». По нашему мнению, В.И. Шестаков не был ни скромным и тихим, ни обыкновенным, как все, ни странным — он был просто Ученым, различные стороны личности которого проявлялись в зависимости от обстоятельств и их связи с его наукой и интересами. Так, когда доклад на семинаре, где он присутствовал, был ему не интересен, то он был «тихим и скромным», а когда он приносил статью в «Вестник МГУ. Сер. Физика, астрономия» и пытался объяснить важность применения математической логики в физике, то для физиков он выглядел странным. Когда же ему приходилось бороться за опубликование своих научных работ, он был напорист и оперативен, привлекал в свою поддержку влиятельных в научном мире ученых, проявлял большую активность и в большинстве случаев добивался своего, демонстрируя отнюдь не «тихость и скромность».

У В.И. Шестакова, по воспоминаниям его внука Е.В. Самохвалова, были весьма независимые и свободолюбивые общественно-политические взгляды. Эти взгляды были характерны резким неприятием всякой несправедливости. Он весьма негативно относился к советскому строю и коммунизму, регулярно слушал зарубежные радиостанции и по ним ориентировался в состоянии дел в мире и стране. По словам дочери В.И. Самохваловой И.В., он был очень чувствительным человеком, сочувствовал больным, гонимым и т.д. Он часто подписывал письма в защиту ученых-диссидентов (например, А.С. Есенина-Вольпина). В.И. считал себя наполовину русским, наполовину поляком — внуком участника польского восстания 1863 года и с гордостью повторял, что в его «жилах течет кровь борца за свободу польского народа». Однако при всем свободолюбии он не был чистым «отрицателем» и любил Россию.

6 Заключение

Подводя итоги, необходимо, прежде всего, отметить, что Виктор Иванович Шестаков был выдающимся ученым в области приложений математической логики и алгебры к моделированию, анализу и синтезу электрических схем, а также релейно-контактных и других дискретных устройств автоматики и вычислительной техники.[23] Две пламенные страсти смолоду владели им: страсть к науке, которой он оставался предан всю жизнь, и страсть всегда и во всем быть первым. Его преданность науке принесла богатый урожай. Это, во-первых, открытие им в 1938 г. возможности применения аппарата алгебры логики для расчета, анализа и синтеза статики работы линейных электрических и релейно-контактных схем, во-вторых, открытие в 1953–54 гг. теории многотактных релейных схем, явившихся прообразом конечного автомата, и в-третьих, разработка (в составе коллектива) первой в СССР системы программирования для цифровых вычислительных машин. Были у него и другие значительные научные достижения (например, содержательная логическая теория размерностей в физике). Что же касается его стремления быть всегда первым, то это ему обычно не удавалось. Так, честь открытия возможности использования алгебры логики для расчета релейно-контактных схем В.И. Шестаков разделил, по общему признанию, с американцем К.Э. Шенноном и японцами А. Накашима и М. Ханзава, понятие конечного автомата независимо от В.И. Шестакова и примерно в то же самое время ввели американцы А. Бёркс, Д. Райт, Д. Хаффмен, С. Клини, румын Г. Моисил, советские ученые Б.А. Трахтенброт и Н.Е. Кобринский, а еще до войны — М.А. Гаврилов (многотактные релейные схемы), а в разработке первых в Советском Союзе методов программирования вместе с В.И. Шестаковым участвовало еще 3 известных ученых: Л.А. Люстерник, М.Р. Шура-Бура и А.А. Абрамов, причем в период разработки аналогичные методы уже существовали на Западе. Эти и другие подобные им факты задевали В.И. Шестакова и побуждали иногда к действиям, которые по-человечески можно понять, но трудно оправдать. Нашему герою, по существу, не нужно было ничего, кроме реальных научных результатов и их достаточно широкого признания. Ради них он пожертвовал многим, в частности, защитой докторской диссертации (для этого надо было оторвать несколько лет жизни и подлинной научной работы и «пробивать» возникающие перед ним трудности). Его научные заслуги отмечены во многих книгах, статьях, энциклопедиях и справочниках. Правда, начальство Виктора Ивановича отметило его заслуги более скромно: за почти полувековую деятельность в МГУ он удостоился лишь двух почетных грамот от месткома, праздничного адреса к 70-летию от коллектива своей кафедры да 2 приказов с благодарностью «за многолетнюю безупречную учебную, методическую и научную работу».

Пройдут годы. Многое встанет на свое место. Взаимоотношения В.И. Шестакова с его научными конкурентами и чиновниками от науки, его подчас необычные взгляды и поступки и другие, сугубо личные, обстоятельства потеряют общественный интерес. И тогда на первый план выступит то, что было главным в этом человеке — Ученый Божьей милостью. И признание придет само собой. А то, что оно пришло позже на 50 или 100 лет, не будет иметь никакого значения, ибо что такое 50-100 лет по сравнению с вечностью?

7 Библиография основных работ В.И. Шестакова

В приведенную ниже библиографию включены все известные автору публикации В.И. Шестакова на русском языке. Отсутствуют только переводы его работ на иностранные языки, выполненные им рефераты для реферативных журналов и несколько неопубликованных рукописей.

1. Шестаков В.И. Авторское свидетельство на изобретение № 35435: счетная машина типа Однера. М. 31.03.1934. С. 1–8.

2. Шестаков В.И. Некоторые математические методы конструирования и упрощения двухполюсных электрических схем класса А. Дисс... канд. физ.-мат. наук. М.: НИИ физики МГУ. 1938. Часть I. С. 1-34; Часть II. С. 1–79.

3. Шестаков В.И. Алгебра двухполюсных схем, построенных исключительно из двухполюсников (алгебра А-схем) // Журнал технической физики. 1941. Т. 11. Вып. 6. С. 532–549 (март 1941 г.).

4. Шестаков В.И. Алгебра двухполюсных схем, построенных исключительно из двухполюсников (алгебра А-схем) // Автоматика и телемеханика. 1941. № 2. С. 15–24 (апрель 1941 г.) (сокращенный вариант статьи 3).

5. Шестаков В.И. Об одном символическом исчислении, применимом к теории релейно-контактных схем // Ученые записки Московского университета: Теория вероятностей. Вычислительная математика. Номография. М. 1944. Вып. 73. С. 45-48 (сильно сокращенный вариант статьи 3).

6. Шестаков В.И. Представление характеристический функций предложений посредством выражений, реализуемых релейно-контактными схемами // Известия АН СССР. Сер. математическая. 1946. Т. 10. № 6. С. 529–554.

7. Шестаков В.И., Абрамов А.А., Люстерник Л.А., Шура-Бура М.Р. Решение математических задач на автоматических цифровых машинах. Программирование для быстродействующих электронных счетных машин. М.: Изд-во АН СССР. 1952. 327 с.

8. Шестаков В.И. Моделирование операций исчисления предложений посредством простейших четырехполюсных схем // Вычислительная математика и вычислительная техника. Вып. 1. М.: Изд-во АН СССР. 1953. С. 56–89.

9. Шестаков В.И. Алгебраический метод анализа автономных систем двухпозиционных реле // Автоматика и телемеханика. 1954. № 2. С. 107–123.

10. Шестаков В.И. Алгебраический метод синтеза автономных систем двухпозиционных реле // Автоматика и телемеханика. 1954. № 4. С. 310–324.

11. Шестаков В.И. О преобразовании моноциклической последовательности в возвратную // Доклады АН СССР. 1954. Т. 98. № 4. С. 541–544.

12. Шестаков В.И. Алгебраический метод синтеза многотактных релейных систем // Доклады АН СССР. 1954. Т. 99. № 6. С. 987–990.

13. Синтез электронных вычислительных и управляющих схем // Пер. с англ., ред. В.И. Шестаков. М.: ИИЛ. 1954. 360 с.

14. Шестаков В.И. Векторно-алгебраический метод анализа и синтеза многотактных релейных систем // Труды 3-го Всесоюзного математического съезда. Т. 1. М.1956. С. 190–191.

15. Гаврилов М.А., Поваров Г.Н., Рогинский В.Н., Харкевич А.Д., Шестаков В.И. Математическая проблематика структурной теории релейных схем // Труды 3-го всесоюзного математического съезда. Т. 2. М. 1956. С. 150–151.

16. Шестаков В.И. Алгебраический метод синтеза многотактных схем r-позиционных реле // Доклады АН СССР. 1957. Т. 112. № 1. С. 62–65.

17. Шестаков В.И. Перфокарточный метод синтеза многотактных релейных систем // Автоматика и телемеханика. 1958. № 6. С. 592–605.

18, 19. Шестаков В.И. Математическая логика и автоматика // Математика в школе. 1958. № 6. С. 9–20; 1959. № 1. С. 19–39.

20. Шестаков В.И. Перфокарточный метод синтеза многотактных систем многопозиционных реле // Автоматика и телемеханика. 1959. № 11. С. 1496–1506.

21. Шестаков В.И. Моделирование операций исчисления высказываний посредством релейно-контактных схем // Логические исследования. Вып. 2. М.: Изд-во АН СССР. 1959. С. 315–351.

22. Шестаков В.И. Об одной теории синтеза смешанных релейно-контактных схем класса П // Вестник Московского университета. Серия 3. Математика, механика, астрономия, физика, химия. 1959. № 6. С. 215–223.

23. Шестаков В.И. К вопросу о синтезе смешанных релейно-

контактных схем класса П // Известия вузов СССР. Радиофизика. 1960. Т. 3. № 3. С. 526–533.

24. Шестаков В.И. О двойной арифметической интерпретации трехзначного исчисления высказываний, используемой при моделировании этого исчисления посредством релейно-коммутаторных схем // Применение логики в науке и технике. М.: Изд-во АН СССР. 1960. С. 341–376.

25. Шестаков В.И. О теории синтеза смешанных релейно-контактных схем класса П // Вестник Московского университета. Серия 3. Физика, астрономия. 1961. Т. 2. № 4.

26. Шестаков В.И. Синтез однотактного сумматора двоичных чисел, построенного из двухпозиционных коммутаторов и поляризованных реле // Вопросы теории математических машин. Т. 2. М. 1962. С. 232–239.

27. Шестаков В.И. О взаимоотношении некоторых трехзначных логических исчислений // Успехи математических наук. 1964. Т. 19 (116). С. 177–181.

28. Бирюков Б.В., Калужнин Л.А., Шестаков В.И. Логические машины // Философская энциклопедия. Т. 3. М.: Советская Энциклопедия. 1964. С. 232–234.

29. Шестаков В.И. Алгебра коммутаторных схем (алгебра четырехполюсников, соединенных двухполюсными коммутаторами) // Синтез релейных схем. Труды Международного симпозиума по теории релейных устройств и конечных автоматов. ИФАК. М.: Наука. 1965. С. 87–96.

30. Шестаков В.И. О некоторых расширениях исчислений Бочвара и Клини до функционально полных трехзначных исчислений // Научно-техническая информация. Серия 2. Информационные процессы и системы. М. 1967. № 12. С. 12–17.

31. Шестаков В.И. Об одном фрагменте исчисления Бочвара // Информационные вопросы семиотики, лингвистики и автоматического перевода. Вып. 1. М.: ВИНИТИ. 1971. С. 102–115.

32. Шестаков В.И. О матричном представлении каскадных соединений четырехполюсников // Вестник Московского университета. Серия 3. Физика, астрономия. 1976. Т. 17. № 2. С. 168–176.

33. Шестаков В.И. Об одном универсальном методе символического представления каскадных соединений двухпроводных

цепей // Вестник Московского университета. Серия 3. Физика, астрономия. 1977. Т. 18. № 2. С. 11–19.

34. Шестаков В.И. Об одном методе символического представления каскадных и параллельных соединений нормальных N-проводных цепей // Вестник Московского университета. Серия 3. Физика, астрономия. 1979. Т. 20. № 4. С. 45–55.

35. Шестаков В.И. Операции обращения и инверсии комплексных физических величин // Вестник Московского университета. Серия 3. Физика, астрономия. 1979. Т. 20. № 6. С. 47–55.

36. Шестаков В.И. Метод символического представления параллельных и каскадных соединений N-полюсных цепей // Вестник Московского университета. Серия 3. Физика, астрономия. 1982. Т. 23. № 1. С. 31–38.

37. Шестаков В.И. Основные законы алгебры параллельных соединений N-полюсников // Вестник Московского университета. Серия 3. Физика, астрономия. 1983. Т. 24. №2. С. 59–66.

38. Шестаков В.И. О применении трехзначной логики для анализа отношений между физическими величинами // Вес/-т/-ник Московского университета. Серия 3. Физика, астрономия. 1983. Т. 24. № 4. С. 40–45.

39. Шестаков В.И. Основные законы алгебры двухполюсных соединений двухполюсников и кортежей этих соединений // Вестник Московского университета. Серия 3. Физика, астрономия. 1984. Т. 25. № 1. С. 41–48.

40. Шестаков В.И. Об эквивалентности пассивных двухполюсников // Вестник Московского университета. Серия 3. Физика, астрономия. 1987. Т. 28. №3. С. 31–36.

41. Шестаков В.И. О применении трехзначной логики в теории размерностей физических величин // Вестник Московского университета. Серия 3. Физика, астрономия. 1987. Т. 28. № 3. С. 37–42.

8 Примечания

[1] В.И. Шестаков в течение всей жизни стремился быть первым — и в учебе, и в научной деятельности. Часто это ему удавалось (хотя и не всегда) Однако связанные с этим хлопоты нередко отвлекали его от собственно творческой научной работы. Приведенная в тексте цитата взята из книги [8], гл. 4.

[2] Авторское свидетельство № 35435 на изобретение счетной машины типа Однера для производства арифметических действий как с положительными, так и с отрицательными числами. Это изобретение никогда не фигурировало в публикациях В.И. Шестакова, и о нем, по-видимому, до настоящего времени не было известно научно-технической общественности.

[3] Интересно, что В.И. Шестаков никогда впоследствии не работал по специальности, указанной в его дипломе.

[4] Причина взаимонепонимания между аспирантом и его научным руководителем была, по-видимому, в том, что второй всю жизнь занимался исследованием непрерывных процессов, а первый хотел заниматься изучением дискретных процессов и вдобавок вел себя очень независимо.

[5] История появления и роль этой работы в жизни как самого В.И. Шестакова, так и всего научного сообщества сложна и запутана. Работа «Реле и релейные схемы», включающая главу «Алгебра релейных схем», судя по данным архива В.И. Шестакова, была выполнена в декабре 1934 г. — январе 1935 г. (возможно, это произошло под влиянием акад. Н.Н. Лузина, сотрудника МГУ, занимавшегося тогда логикой и явившегося впоследствии одним из инициаторов создания Ин-та автоматики и телемеханики АН СССР). Эта работа, судя по оформлению, не предназначалась для опубликования. Затем Виктор Иванович представил ее в дирекцию НИИ физики МГУ с просьбой считать его работу диссертацией, однако позже забрал ее. После этого в течение 14 лет работу никто не вспоминал. Сам Шестаков не сослался на нее даже в своей диссертации 1938 г., хотя такая ссылка была бы очень уместной, поскольку у него в этот момент не было ни одной публикации. Более того, его руководитель В.И. Гливенко и проф. С.А. Яновская в совместной обзорной статье «Логика математическая» 1938 г. (БСЭ. Т. 37. М. 1938) ни словом не упоминают о ней. И лишь в 1948 году та же С.А. Яновская в обзорной статье «Основания математики и математическая логика» («Математика в СССР за 30 лет. 1917–1947». Т. 2. М.–Л. 1948) написала: «Предположение о возможности построения алгебры релейно-контактных схем на базе алгебры логики впервые было высказано в 1910 г... Эренфестом... Это предположение было подтверждено в конце 1934 — нача-

ле 1935 г. В.И. Шестаковым... Эти результаты были изложены в работе «Алгебра релейных схем», написанной В.И. Шестаковым в январе 1935 г. Работа не была опубликована, но легла в основу его кандидатской диссертации». После этого тезис о приоритете Шестакова в открытии в 1935 г. алгебры релейных схем был повторен рядом советских ученых (П.С. Новиков. Отзыв о работах В.И. Шестакова. 15.10.1949 — см. в тексте; М.А. Гаврилов. Теория релейно-контактных схем. М.–Л. 1950; В.Н. Рогинский. Построение релейных схем управления. М.-Л. 1964; История отечественной математики. Т. 4. Кн. 2. Киев. 1970. С. 443; В.А. Успенский. Очерки истории информатики в России. Новосибирск. 1998. С. 124; М.Г. Гаазе-Раппопорт. Там же. С. 232). Однако другие работу «Алгебра релейных схем» 1935 года даже не упоминают (О.П. Кузнецов. Релейно-контактных схем теория // Автоматизация производства и промышленная электроника. Т. 3. М. 1964; В.М. Глушков. Синтез цифровых автоматов. М. 1962; Н.Е. Кобринский и Б.А. Трахтенброт. Введение в теорию конечных автоматов. М. 1962; М.А. Айзерман, Л.А. Гусев, Л.И. Розоноэр, И.М. Смирнова, А.А. Таль. Логика. Автоматы. Алгоритмы. М. 1963; Э.А. Якубайтис. Асинхронные логические автоматы. Рига. 1966; В.М. Глушков. Кибернетика / БСЭ. Т. 12. 1973; Логика: биобиблиографический справочник (Россия–СССР–Россия). СПб. 2001). По нашему мнению, рукопись «Реле и релейные схемы» с главой «Алгебра релейных схем», составленная В.И. Шестаковым в период наивысшего обострения его отношений с научным руководителем по аспирантуре проф. Гореликом, имела своей ближайшей целью отчитаться за 1-й семестр аспирантуры, а следующей целью — добиться смены темы диссертации и научного руководителя. Ее содержание должно было лишь показать серьезность новой заявляемой темы — не более того. Именно поэтому Шестаков подготовил ее очень быстро — в течение месяца, сразу отдал в дирекцию НИИ физики МГУ, а после достижения своей цели забрал ее. Тот факт, что ни он, ни его руководитель никогда не упоминали ее, можно считать свидетельством того, что они не считали ее законченной работой, содержащей определенные новые научные результаты. Однако около 1947 г. В.И. Шестаков, уже знакомый с исследованиями других ученых по его теме (см. прим. 6, 10, 18, 24) и озабоченный вопросами своего приоритета, познакомил с работой С.А. Яновскую. Искра упала на благодатную почву (хорошо известна большая доброжелательность С.А. к молодым ученым) и в нужное время (это был пик борьбы против низкопоклонства перед Западом, за приоритет отечественной науки и техники). В итоге — вышеупомянутый обзор С.А. Яновской, с установлением приоритета Шестакова в построении логической алгебры релейно-контактных схем. А дальше высокий научный и человеческий авторитет С.А. привел к тиражированию данной установки в СССР. И это при том, что умозаключение С.А. Яновской о приоритете является по меньшей мере некорректным, поскольку она сравнивает неопубликованную рукопись Шестакова, которую никто не видел, с опубликованными работами его конкурентов. Необходимо также добавить, что анализ научной биографии С.А. Яновской показывает, что она не могла быть свидетелем создания работы В.И. Шестакова «Реле и релейные схемы» и ее главы «Алгебра релейных схем». Поэтому ее поддержка приоритета Шестакова, провозглашенная в 1948 году, очевидно, была основана только на рукописях и устных пояснениях самого Шестакова. Такое обоснование приоритета ученого явно недостаточно. Это подтверждают и воспоминания И.В. Самохваловой — дочери В.И. Шестакова, которая свидетельствует, что В.И. и С.А. после войны «связывали дружеские отношения... Они неоднократно обсуждали вместе интересующие их проблемы и историю с предвоенными работами Шестакова Яновская знала очень хорошо от него самого».

[6] Интересно, что практически одновременно с В.И. Шестаковым и независимо от него были подготовлены и защищены еще две диссертации — К.Э. Шеннона (Shannon C.E. A Symbolic Analysis of Relay and Switching Circuits. Kembrige, USA. 1938) и А. Риттера (Ritter A. Beitrage zur Schaltlehre. Wien. 1938) и подготовлена диссертация О. Плехля, защищенная позже (Plechl O. Die Kombinatorik der Strompfade elektrotechnischer Schaltungen. Wien. 1943; свидетельство подготовки этой работы еще в 1938 г. — см. H. Piesch. Archiv fur Elektrotechnik. 1939. Bd. 33. № 10). Все четыре диссертации решали одну и ту же задачу математического моделирования релейно-контактных схем с помощью булевой алгебры логики.

[7] Позицию В.И. Шестакова и его убежденность в плагиате, который якобы совершил В.А. Розенберг, мы считаем не оправданными по следующим причинам (см. также [18]): а) совпадение отдельных мест работ двух авторов не является доказательством плагиата, совершенного одним из них; так, в статье Шестакова в ЖТФ. 1941. Т. 11. Вып. 6 формулы (4), (4'), (5), (5'), (7), (8o), (8o'), (15), (15') совпадают соответственно с формулами (1a), (1b), (2a), (2b), (8), (9b), (9a), (14a), (14b) статьи Шеннона в Trans. of the AIEE. 1938. T. 57 — ну и что? б) Розенберг, в отличие от Шестакова, рассматривает эквивалентные преобразования релейно-контактных схем не только с параллельными и последовательными, но и с мостиковыми соединениями; в) Розенберг приводит лишь часть известных законов булевой алгебры логики, не используя термин «булева» и правильные названия законов, что подтверждает его незнание алгебры логики и вообще низкий уровень математической подготовки; этого не было бы, если Розенберг был знаком с диссертацией Шестакова; г) у главного редактора журнала «Автоматика и телемеханика» не было никакого резона посылать диссертацию Шестакова в Ленинград на рецензию Розенбергу (именно в этом случае у последнего появлялась возможность плагиата), поскольку в это время в его непосредственном подчинении в Институте автоматики и телемеханики (Москва) работал гораздо более квалифицированный специалист М.А. Гаврилов, уже в то время к.т.н., автор 40 печатных работ, в т.ч. 3 монографий; д) в период предполагаемой присылки диссертации Розенбергу (март 1938 г.) в стране происходили массовые репрессии, тысячи людей расстреливали, хотя они не совершали никаких преступлений; для того чтобы в этих условиях совершить несомненное преступление в форме плагиата, а затем выставить его на всеобщее обозрение, опубликовав статью в наиболее читаемом журнале, надо было быть полным идиотом; Розенберг, занимавший в это время высокий пост (гл. инженер Ленпроектконторы «Сев. зап. эл. монтаж»), явно не был идиотом; е) два независимых эксперта, оценивавших обе работы — диссертацию В.И. Шестакова и статью В.А. Розенберга (Д.И. Марьяновский и эксперт, действовавший по заданию редактора журнала «Автоматика и телемеханика»), а также редактор журнала член-корр. АН СССР В.И. Ковален-

ков — специалист в данной области, — факта плагиата не установили; ж) в «Дневнике» 22.04.1940 г. В.И. Шестаков жалуется: «Утром прочел в только что вышедшем № 1 за 1940 год журнале «Автоматика и телемеханика» статью В.А. Розенберга. Очень большое совпадение содержания с содержанием 2-й части моей диссертации. Еще большее совпадение с моей рукописью «Реле и релейные схемы». Что ж, теоретически «большое совпадение содержания» статьи Розенберга с содержанием диссертации Шестакова было возможно, хотя вероятность такого совпадения близка к нулю (см. выше пп. а)-е)). Однако «еще большее совпадение» статьи с рукописью «Реле и релейные схемы» невозможно даже теоретически, так как В.И. Шестаков свои рукописи никому не давал; з) М.А. Гаврилов в период описываемых событий уже входил в редколлегию «Автоматики и телемеханики» и, будучи хорошо знакомым с работами В.И. Шестакова, без труда обнаружил бы плагиат в статье Розенберга, если бы он там был, еще на стадии ее подготовки к печати. Это, при хорошо известной порядочности Гаврилова, неизбежно привело бы к отклонению статьи. Однако этого не произошло. Более того, впоследствии Гаврилов ссылался на статью Розенберга как на заслуживающее внимания самостоятельное исследование (см., например: Гаврилов М.А. Теория релейно-контактных схем. М.–Л. 1950). Заметим еще, что объективно В.А. Розенберг своей публикацией помог В.И. Шестакову, подтолкнув его к опубликованию собственных результатов.

[8] У редакции журнала «Автоматика и телемеханика» была веская причина отказаться от публикации переписки с В.И. Шестаковым и В.А. Розенбергом (кроме причины, связанной с сомнениями в наличии плагиата в статье Розенберга): появление переписки на страницах журнала могло привести к обвинениям против него в попытке опорочить советских ученых, со всеми вытекающими отсюда последствиями. Очень возможно, что редактор журнала сначала запросил мнение «компетентных органов» и лишь после этого принял «нужное решение», сообщив о нем Шестакову. Несмотря на отказ В.И. Шестакову в публикации его письма с обвинениями против Розенберга, редакция «Автоматики и телемеханики» отнеслась к Виктору Ивановичу доброжелательно. Об этом свидетельствует появление в жур-

нале его статьи «Алгебра двухполюсных схем...» всего через 5 месяцев после представления требуемой формы рукописи. Большую роль в этом, видимо, сыграл член редколлегии журнала М.А. Гаврилов.

[9] Отказ В.И. Шестакова от всяких попыток решить вопрос о своем приоритете в суде вызван отчасти тем, что по характеру он был интроверт и потому старался избегать открытого столкновения интересов и публичной полемики. Другой причиной, по нашему мнению, было то, что к концу эпопеи он, видимо, осознал, что у него нет юридических доказательств, необходимых для судебного иска.

[10] Две работы Пиш были напечатаны в журнале Archiv fur Elektrotechnik. 1939. №№ 10,11 и уже в начале 1940 г. были доступны читателям наших столичных библиотек. На эти работы В.И. Шестаков ссылался уже в первой своей статье (ЖТФ. 1941. Т. 11. Вып. 6). В свою очередь, в первой работе Х. Пиш приводились сведения о публикациях А. Накашимы и М. Ханзавы и неопубликованной работе О. Плехля.

[11] Со статьей К. Шеннона в Trans. AIEE. 1938 (июнь). Vol. 57 В.И. Шестаков мог легко познакомиться уже осенью 1938 года в библиотеке своего родного МГУ, которая выписывала этот журнал. Далее, статья К.Э. Шеннона в журнале Trans. AIEE. 1938 (июнь). Vol. 57 была прореферирована в № 2 «Автоматики и телемеханики» 1941 г. — том самом, в котором появилась сокращенная версия статьи В.И. Шестакова «Алгебра двухполюсных схем...». Однако о Шенноновской статье Шестаков мог узнать и раньше, за несколько месяцев до выхода в свет этого журнала от М.А. Гаврилова, который курировал в журнале тематику релейных схем и с которым он контактировал. Интересно отметить, что В.И. Шестаков никогда не ссылался на работы других известных ему ученых, занимавшихся применением логических методов в технике (за исключением одной, явно вызванной требованием рецензента, ссылки на работы Х. Пиш [10]). Это поведение было, по-видимому, своеобразной формой его самоутверждения в качестве первооткрывателя этих методов.

[12] Первые работы по применению аппарата алгебры логики для изучения релейно-контактных и других дискретных схем, выполнявшиеся в СССР и Европе в 1930-е — начале 1940-х го-

дов, использовались преимущественно при построении различных управляющих систем (управление железнодорожным транспортом, управление электрическими системами и т.д.), в отличие от аналогичных работ в США, которые сразу ориентировались на использование дискретных схем при построении цифровых вычислительных машин, и работ японских ученых, связанных с применениями теории дискретных схем в телефонии.

[13] Эти и последующие отзывы в СССР на работы В.И. Шестакова, безусловно, готовились при его непосредственном участии, в соответствии со сложившейся в стране традицией. Конечно, трудно представить себе подобную технологию появления отзывов на научные работы, скажем, американцев Н. Винера и К. Шеннона или англичанина Р. Эшби. Однако, оценивая действия Шестакова, следует иметь в виду, что он всегда хотел быть первым,[1] а за подтверждение его первенства в виде некоторого отзыва на его работы при сложившихся в нашей стране традициях он неизбежно должен был делать шаги, не допустимые с точки зрения западного ученого и вообще научной этики.

[14] Командирование В.И. Шестакова в докторантуру было совершенно естественно и несомненно согласовано с ним. Тем большее изумление вызывают отчеты Виктора Ивановича о пребывании в докторантуре. В предварительном отчете В.И. сообщает о выполнении теоретической части диссертации и невыполнении практической (применение к ЦВМ) из-за неясности вопроса о секретности. Но никто не мешал В.И. выяснить вопрос о секретности (он много раз проделывал это, оформляя акты об отсутствии в его статьях секретных сведений) и в случае наличия такой секретности исключить соответствующий материал из диссертации либо оставить его и защищать закрытую диссертацию. В окончательном отчете он жалуется совсем на другое — на бытовые проблемы и трудности с публикацией результатов. Где же правда? А правда, по нашему мнению, была совсем в другом: на горьком опыте подготовки и защиты кандидатской диссертации В.И. Шестаков убедился в том, что эта процедура чревата задержкой в подготовке публикаций и риском утери приоритета. Поэтому он, по-видимому, принял решение вместо защиты диссертации опубликовать в кратчайшие сроки свои новые результаты. И сразу «забыл» о бытовых и иных проблемах.

По свидетельству Е.В. Самохвалова, внука В.И., было еще одно обстоятельство: жена Шестакова Г.А. Гурфинкель в 1952 году как «безродный космополит» была уволена из военной академии, где она преподавала философию. После этого Шестакова ясно предупредили, что докторской степени ему не видать!

[15] Подозрения В.И. Шестакова в адрес М.А. Гаврилова были, на наш взгляд, необоснованны. М.А. Гаврилов был первым, кто еще в 1938 г. правильно оценил не только теоретическое, но и прикладное значение работ В.И. Шестакова для проектирования дискретных систем управления. После этого В.И. приобрел в лице М.А. соратника, способного вложить в борьбу за новые идеи огромные силы. По единодушному мнению многочисленных учеников, М.А. Гаврилов был «предан науке и честен перед собой и своими учениками» (Д.А. Поспелов. Школа МАГа // Новости искусственного интеллекта. 1997. № 3). И еще — даже «противники его научных взглядов никогда не превращались для него в личных врагов» (там же). По свидетельству А.А. Амбарцумяна — участника гавриловского коллектива, М.А. Гаврилов пытался привлечь В.И. Шестакова, которого он высоко ценил, к работам своего коллектива. Однако это ему не удалось, поскольку В.И. не любил работать в коллективе. Несмотря на это, Гаврилов всегда помнил о Шестакове и посильно помогал ему: включал в престижные коллективные публикации, давал необходимые отзывы и т.д. В частности, многочисленные публикации В.И. Шестакова в журнале «Автоматика и телемеханика» появились во многом благодаря поддержке М.А. Гаврилова. При этом все они выходили в свет в сроки, обычные для этого журнала, а некоторые [8] — досрочно.

[16] Это столкновение засвидетельствовано академиком О.Б. Лупановым (записано автором 08.12.2004 г.). А.Н. Колмогоров был, безусловно, прав в том, что процессы в многотактных релейных схемах, изучавшиеся В.И. Шестаковым, представляют собой весьма частный, вырожденный случай цепей Маркова, теория которых была построена еще в начале XX в. Однако он был не прав в другом: частные случаи могут иметь важные и полезные свойства, которых нет в общем случае, так что переход к изучению частного случая может привести к научному открытию. Вряд ли ученый такого уровня, как А.Н. Колмогоров, не

понимал этого. Однако ему — одному из создателей теории марковских процессов, видимо, было трудно согласиться с тем, что в недрах созданной им теории рождается новая наука (впоследствии она получит название теории автоматов), а он к этому не причастен. Аналогично в период с 1948 по 1959 год он не мог примириться с тем, что на базе его собственных работ, а также работ А.Я. Хинчина и Н. Винера по анализу и прогнозированию случайных процессов именно Винер создал новую науку — кибернетику. Именно отсюда проистекает критика Колмогоровым кибернетики в 1950-е гг.

[17] См.: Кольман Э. Мы не должны были так жить. N.-Y. Chalidze. 1982.

[18] Анализ Г.Н. Поварова содержит наибольшее, по сравнению с другими работами 1940-90-х гг., число участников открытия логических методов моделирования дискретных систем. Тем не менее, в нем упущены некоторые из участников: Р. Эдлер, О. Плехль, А. Риттер и др. (см. [6] и [2, 3, 6–9]). Заметим еще, что, приводя в числе участников открытия фамилию В.А. Розенберга, Г.Н. Поваров тем самым отвергает обвинения в плагиате, выдвинутые против этого ученого В.И. Шестаковым.

[19] Приоритет В.И. Шестакова в применении символической логики к анализу и синтезу релейных схем может быть установлен путем сопоставления дат официального представления общественности законченных работ всех участников исследований в этой области (дат представления диссертаций, дат их защиты, дат опубликования работ и т.д.) и сравнительного анализа содержания этих работ. Но приведенный в письме отзыв В.И. Гливенко оценивает исследования Шестакова только за сентябрь-декабрь 1935 г., не считая их законченными, что видно из текста отзыва: «Шестаков работает над разработкой найденного им математического аппарата для аналитического выражения электрических схем с последовательными и параллельными соединениями. Этот аппарат дает возможность автоматически решать задачу о получении простейших статических схем для некоторых классов релейных схем. Шестаков разработал до конца математический аппарат для аналитического выражения схем двухполюсников в предельном случае бесконечно малых и бесконечно больших сопротивлений, получил ряд результатов для схем

двухполюсников в непредельном случае конечных сопротивлений, нашел математическую формулировку задачи об упрощении схем двухполюсников. Исследовательская работа Шестакова позволяет рассчитывать на успешное доведение ее до конца». (Напомним, что впереди у В.И. Шестакова было еще целых два года пребывания в аспирантуре!). Кроме того, эти незаконченные исследования В.И. Шестакова не были официально представлены общественности. Таким образом, доказать приоритет В.И. Шестакова так, как это делает в своем письме декан физфака МГУ, нельзя. Кстати сказать, тот же декан в 1938 г. писал: «Отзыв Гливенко точно фиксирует идейную сторону исследований Шестакова, которые по своему содержанию и предложенным методам решения практических задач перекликаются с многими работами советских и зарубежных ученых. В связи с задержкой публикаций исследований В.И. Шестакова (они не сразу были встречены радушно) роль Виктора Ивановича в применении алгебры логики Дж. Буля недостаточно четко отмечается в советской и зарубежной печати». Отсюда видно, что раньше декан придерживался других взглядов на проблему приоритета, считая работу Шестакова одной из многих работ в данной области. Более полный анализ затронутых здесь проблем дан в статье В.И. Левина «История открытия логического моделирования статики технических устройств» [6]. Заметим еще, что автор письма — декан Физфака МГУ, не являясь специалистом в логике и не имея ни одной публикации в этой области (его специальность — физическая теория горения!), делает в своем письме исторический экскурс алгебраических построений в логике, восходящих к Лейбницу, Дж. Булю, Кутюра, Эренфесту. Это заставляет думать, что подлинным автором текста письма декана физфака МГУ, опубликованного в «Вестнике МГУ». Серия 3. 1968. № 5, был, вероятно, сам В.И. Шестаков.[13].

[20] Причина, по которой В.И. Шестаков отказался от выполнения договоров на издание всех трех книг, по нашему мнению, была та же, по которой за 12 лет до этого он отказался от защиты докторской диссертации,[14] а именно, нежелание тратить время на работу, непосредственно не связанную с творчеством, получением новых научных результатов, их опубликованием и защитой своего приоритета.

[21] Две приведенные даты — 1934-й и 1938-й годы не согласуются между собой. На самом деле первым официально зафиксированным публичным представлением результатов В.И. Шестакова по применению алгебры логики для синтеза релейно-контактных схем была его защита кандидатской диссертации 28.09.1938 года на физическом факультете МГУ. Первая же публикация этих результатов состоялась лишь в 1941 году.

[22] Этот документ вызывает много вопросов: 1) Кто был автором анонимного хвалебного отзыва? 2) Почему этот автор был заинтересован в признании приоритета работ В.И. Шестакова? 3) Чем мотивировалось его желание скрыть свое имя? И т.д. Очевидно, что никто из врагов В.И. Шестакова либо просто безразличных к нему людей не мог быть автором хвалебного отзыва — им мог быть только кто-то из его друзей или из начальства, заинтересованный в признании работ друга или коллеги. Однако никому из этих людей не было никакого смысла скрывать свое имя: ведь хвалить — не ругать. К тому же начальники анонимок обычно не пишут, не желая рисковать карьерой. Выходит, что никто из знавших В.И. Шестакова не мог написать этот отзыв. Но в таком случае можно предположить, что автором текста отзыва был сам Виктор Иванович! В пользу этого говорят следующие доводы. Во-первых, он был единственным человеком, который был заинтересован в признании приоритета работ В.И. Шестакова и при этом желал скрыть свое имя. Во-вторых, название отзыва подсказано книгой: Вебер Ю.Г. Когда приходит ответ. М.: Детская литература. 1977 (в книге есть фраза «...он сумел подсмотреть то, чего не увидели до сих пор те, кто годами варился в этой области...»). Чтобы дать такое название, автор отзыва должен был хорошо знать содержание указанной книги и то, что под именем одного из главных героев Василия Игнатьевича Шестопалова выведен Виктор Иванович Шестаков. Конечно, лучше всех это знал сам В.И. Шестаков. Кстати, в его архиве хранится экземпляр книги Ю.Г. Вебера. В-третьих, если бы подлинным автором отзыва был кто-то из знакомых В.И. Шестакова, он бы непременно показал ему текст, чтобы избежать ошибок. Между тем, отзыв содержит, по меньшей мере, одну ошибку: дата публикации основного конкурента Шестакова в споре за приоритет — Шеннона указана неверно

(сдвинута на более позднее время). Так что наше предположение, что автором текста анонимного отзыва на работы В.И. Шестакова был он сам, вполне обосновано. Остается объяснить, зачем Виктор Иванович в своей публикации сознательно допустил указанную ошибку. Ответ очевиден: только в этом случае, обратившись впоследствии в редакцию с письмом, содержащим исправление указанной ошибки, он отводил от себя возможные обвинения в авторстве документа, не совместимого с нормами научной этики. И действительно, машинописная копия такого письма от 13.03.1983 г. хранится в архиве В.И. Шестакова ([5], с. 29). В этом письме В.И. содержится исправление указанной ошибки и еще одной аналогичной ошибки в отношении другого его конкурента Накашимы. Однако последней ошибки в публикации газеты «Московский университет» от 22.02.1983 г. нет: там Накашима вообще не упоминается. Это означает, что свое письмо в газету Шестаков написал еще до публикации в ней анонимного отзыва на его работы, используя другой, первоначальный вариант отзыва, в котором содержались обе упомянутые выше хронологические ошибки. Отсюда следует, что В.И. Шестаков был автором (или соавтором) опубликованного в газете отзыва.

[23] Поспелов Д.А. Школа МАГа // Новости искусственного интеллекта. — 1997. — № 3.

[24] М.А. Гаврилов, считавший работу В.И. Шестакова революционной, в то же время полагал, что ее значение не было понято даже автором (Амбарцумян А.А. Михаил Александрович Гаврилов (к 100-летию со дня рождения) // Проблемы управления. 2003. № 4). Эта оценка представляется несправедливой. В.И. Шестаков и другие ученые, работавшие в 1930-е гг. — К.Э. Шеннон, А. Накашима, М. Ханзава, А. Риттер, О. Плехль, Х. Пиш, В.А. Розенберг и др. отлично понимали значение их работ, впервые позволивших заменить эквивалентные преобразования (а, значит, и проектирование) релейно-контактных схем чисто математической (а, значит, и полностью формализованной) задачей эквивалентного преобразования булевой логической функции, определяющей проводимость схемы. Конечно же, эти ученые не занимались прикладными, техническим вопросами, связанными с поиском наилучших алгоритмов преобразо-

вания, учетом размерности схем и т.д. Однако принципиальную проблему возможности формализации проектирования релейно-контактных схем с помощью алгебры логики разрешили именно они. Следующему поколению ученых (М.А. Гаврилов, Г.Н. Поваров, В.Н. Рогинский, В.Г. Лазарев, Д.А. Поспелов и др.) уже не нужно было решать эту проблему, и они взялись сразу за решение указанных прикладных вопросов.

Литература

[1] *Волгин Л.И.* Шестаков — основоположник континуального этапа развития математической логики // Современная логика: проблемы теории, истории и применения в науке. Материалы VI Всероссийской научной конференции. СПб.: Изд-во СПбГУ, 2000.

[2] *Левин В.И.* Из истории открытия логического моделирования технических устройств (статика) // Прикладная философия и социология. Труды Международной конференции «Континуальные алгебраические логики, исчисления и нейроинформатика в науке и технике». Т. 1. Ульяновск: Изд-во УлГТУ, 2004.

[3] *Левин В.И.* История открытия логического моделирования технических устройств // Вестник Тамбовского университета. Серия: Естественные и технические науки. 2004. Т. 9. № 4.

[4] *Бажанов В.А.* Шестаков и Шеннон: разные судьбы творцов одной красивой идеи // Вопросы истории естествознания и техники. 2005. № 2.

[5] *Бирюков Б.В., Верстин И.С., Левин В.И.* Жизненный и научный путь В.И. Шестакова — создателя логической теории релейно-контактных схем // Логические исследования. Вып. 14. М.: Наука, 2007.

[6] *Левин В.И.* История открытия логического моделирования статики технических устройств // Вопросы истории естествознания и техники. 2007. № 1.

[7] *Бирюков Б.В., Борисова О.А., Левин В.И.* О вкладе В.И. Шестакова в создание логической теории релейных схем // Вопросы философии. 2009. № 3.

[8] В.И. Шестаков и открытие логического моделирования в технике / Под ред. В.И. Левина. Пенза: Изд-во Пензенской государственной технологической академии, 2009.

[9] *Левин В.И.* История открытия логического моделирования устройств и систем // VII Международная научно-практическая конференция «Проблемы образования в современной России и на постсоветском пространстве». Сборник статей. Пенза: Изд-во Приволжского дома знаний, 2006.

Манифест прикладного конструктивизма

Н. Н. Непейвода, А. П. Бельтюков

ABSTRACT. Manifest of constructivism reborned. This constructive concept is in some extents more liberal and in some extents more strict than traditional ones. It is intended to join together best sides of intuitionism and Soviet constructivism and to apply the to practical problems of informatics and other domains. Main its peculiarities are:

1. Intensive use of ignorance as a positive factor.
2. Strict discrimination of constructive and descriptive reasoning both necessary for a good theory.
3. Admission of Hilbert's program core statements.
4. Admission of actual infinity for purely descriptive considerations.
5. Transition to real constructability for many constructive considerations.
6. Dependence of constructive logics from admitted variant of constructability. Your main value dictates your logic.
7. Modestly platonistic philosophy. Ideal notions are not invented, they are discovered, but human cannot reach any absolute idea.
8. Scientific anti-monopolism and anti-globalism. Human cannot invent something absolute.
9. Anti-relativism. We are to choose the best tool for our problem and quality of its solution is determined mainly by quality of means applied. There is no «freedom of choice» for truly creative and responsible subject. His/her decisions are forced by well understood necessity.

Ключевые слова: конструктивизм, прикладной конструктивизм, информатика

1. Настала пора возрождать конструктивное направление в математике, некогда составлявшее одну из самых славных частей советской математической школы.

2. При этом необходимо сразу же придать данному направлению прикладной характер, что планировал А. А. Марков,

но не смог из-за недостаточного развития тогдашней информатики.

3. Прикладной конструктивизм может развиваться лишь на стыке двух наук: математики и логики — и трех областей знания: математики, информатики и философии.

4. Основными методологическими принципами прикладного конструктивизма являются следующие.

   (a) Прикладной конструктивизм должен соединять лучшие стороны советского конструктивизма, альтернативных конструктивных направлений, интуиционизма и классики.

   (b) Необходимо строго соблюдать концептуальную целостность. Главный враг хорошей концепции — лишние возможности.

   (c) В области прикладных теорий принимаются абстракции отождествления, различные варианты реальной осуществимости и потенциальной осуществимости.

   (d) При этом потенциальная осуществимость рассматривается как идеальный предельный случай реальной осуществимости.

   (e) Нельзя идти слишком прямыми путями, необходимо искать обходные. Путь к конструктивным решениям может пролегать через идеальные конструкции.

   (f) Из-за парадокса изобретателя красивую и полезную теорию не построишь без идеальных объектов. Поэтому строго различаются конструктивные и дескриптивные области, конструктивные и дескриптивные понятия и части выводов.

   (g) Допустимо использование абстракции актуальной бесконечности в дескриптивных областях и для дескриптивных понятий, для которых не требуется получение конструктивных методов (например, в теории моделей для конструктивной математики).

   (h) Логика дескриптивной математики, логика потенциальной осуществимости и логики реальной осуществимости — разные.

   (i) Потенциальная осуществимость рассматривается как средство, которым получают чистые теоремы. Если эффективность решений, достигаемых чистыми методами, недостаточна, следует перейти к более высокой степени конструктивности: к различным формам абстракции реальной осуществимости и различным ее сложностным классам.

   (j) Реальная осуществимость различна в зависимости от главного принимаемого во внимание ресурса: времени, денег, обратимости действий и т. п. Реальные осуществимости могут образовывать иерархии в зависимости от классов ограничений на используемые ресурсы.

   (k) В связи с вышеизложенным, полностью отвергается попытка унифицировать все и вся и монополизм одной из парадигм. Каждая из них хороша на своем и только на своем месте.

   (l) Самый большой недостаток — эклектизм, смешение в одном месте разных парадигм.

   (m) Это не препятствует осознанному и критическому использованию в одной из парадигм результатов другой как вещей в себе.

   (n) Построение объектов не является единственной или главной целью конструктивизма. Его главная задача как идеальной математической теории — анализ методов построений.

   (o) Осознанное незнание — один из наиболее мощных видов знания. Нельзя скатываться к иллюзии всезнания и призраку познаваемости всего и вся.

5. Основными математическими принципами прикладного конструктивизма являются следующие.

   (a) Использование неклассических логик и неклассических теорий для анализа понятий реальной и потенциальной осуществимости.

(b) Ориентация с самого начала на нечисленную математику и абстрактные объекты, что соответствует и нынешней практике информатики.

(c) Использование в качестве основной абстрактной дескриптивной теории теории категорий.

(d) Отказ от попыток переписать существующую математическую традицию в новых терминах, поскольку ныне это осознано как одна из основных стратегических ошибок конструктивных направлений. Тем не менее, приветствуется перестройка некоторых разделов традиционной конструктивной математики в терминах различных видов реальной вычислимости.

(e) Мирное сосуществование с классической математикой на принципах взаимного признания и взаимообогащения, отказ от всяких попыток глобализации своих концепций и вместе с тем непримиримая война против глобалистских замашек классики.

(f) Четкое осознание того, что универсальные решения никуда не годятся на практике и что конструктивизм — средство поиска хороших решений именно для данной цели в данной обстановке.

(g) Ориентация не на полноту теорий, а на их адекватность.

(h) Полный отказ в связи с этим от критики по принципу «У Вас нет того-то». Введение в математические обычаи критики по принципу «А зачем у Вас здесь есть это? Нельзя бы было без него обойтись?».

(i) Понимание того, что не сам результат ценен, а его доказательство.

(j) Четкое понимание того, что, прыгая по верхам, ничего серьезного не получишь. Действительно полезная теория очень трудна. Действительно полезные результаты получаются после того, как пройдет пора первых легких успехов, и с громадным трудом удастся либо пробиться через вторую, намного более мощную, линию обороны, либо обойти ее по болотистым и коварным тропкам.

(k) В связи с этим поддержка тенденции фундаментализации математического и информатического образования и война с попытками превратить обучение в натаскивание.

(l) Четкое понимание того, что каждая действительно глубокая математическая концепция (например, действительные числа) имеет множество измерений, что фиксированных объектов в математике (кроме простых финитных структур) нет вообще.

(m) Показ в связи с этим каждого результата в контексте не только положительных, но и отрицательных примеров применения.

(n) Четкое понимание того, что основная сила математики — не конструктивные, а негативные результаты, и формирование у обучающихся привычки искать во всех нетривиальных случаях коварные ловушки.

6. Основные принципы взаимодействия прикладного конструктивизма с информатикой следующие.

   (a) Полный отказ от задач типа «обосновать такую-то конструкцию». За благословением нужно обращаться к священникам, а не к ученым.

   (b) Безжалостный критический анализ вместе с максимально доброжелательным истолкованием его результатов. Основная польза конструктивизма — вовремя расставлять красные флажки там, где привыкли безоглядно рваться вперед.

   (c) Постоянные переходы между формальным и содержательным и между различными формализмами для целей многостороннего комплексного охвата ситуации.

   (d) Использование в каждом месте адекватных для данной ситуации средств.

   (e) Перепроверка полученного одним методом другим методом, в том числе формального — содержательным, содержательного — формальным.

(f) Накопление для каждого важного понятия как можно большего количества эквивалентных математических представлений, потому что они на практике дают различные решения.

(g) Полный отказ от следования моде.

(h) Полный отказ от отождествления «нового» и «хорошего». Новое скорее то, что является заведомо недоделанным и подозрительным.

(i) При всем этом максимальное следование принципам и методам творческого мышления.

(j) Развитие лучших сторон русского негативного мышления, поскольку именно оно позволяет органически слить все вышесказанное.

Секвенциальные аксиоматизации простых паралогик[1]

В. М. Попов

Памяти российского философа и логика
Владимира Александровича Смирнова,
который внес неоценимый вклад в исследования
секвенциальных аксиоматизаций логических систем,
посвящается

ABSTRACT. The sequent systems axiomatizing some simple paralogics are presented and the solution of the decision problem for these simple paralogics is given. The connection of these logics with the classical propositional logic and the intuitionistic propositional logic is described.

Ключевые слова: секвенция, исчисление, пересечение логик, паралогика

Формулируются удобные для поиска доказательства секвенциальные исчисления, аксиоматизирующие простые паралогики. Положительно решается вопрос о разрешимости паралогик, аксиоматизируемых посредством этих секвенциальных исчислений. Устанавливается связь между рассматриваемыми простыми паралогиками с одной стороны и классической и интуиционистской пропозициональными логиками с другой стороны.

Язык L, являющийся языком всех рассматриваемых в предлагаемой работе логик, есть стандартно определяемый пропозициональный язык, алфавиту которого принадлежат только следующие символы: $p_1, p_2, \ldots$ (пропозициональные переменные языка L), $\&, \vee, \supset$ (бинарные логические связки языка L), $\neg$ (унарная логическая связка языка L), левая и правая круглые скобки. Определение L-формулы индуктивно: (1) всякая пропозициональная переменная языка L есть L-формула, (2) если A

---

[1] Работа выполнена при поддержке РГНФ, проект № 06-03-00020а.

и B являются L-формулами, то $(A\&B)$, $(A \vee B)$, $(A \supset B)$ и $(\neg A)$ являются L-формулами, (3) ничто другое не является L-формулой. Принимаем обычные соглашения об опускании скобок в L-формулах и используем «формула» как сокращение для «L-формула». Квазиэлементарной формулой называем формулу, в которую не входит ни одна бинарная логическая связка языка L. Длиной квазиэлементарной формулы называем число всех вхождений $\neg$ в эту формулу. Ясно, что для всякой квазиэлементарной формулы существует единственная длина этой квазиэлементарной формулы, и что длина всякой квазиэлементарной формулы есть целое неотрицательное число. Обозначаем правило модус поненс в L через MP, а правило подстановки формулы в формулу вместо пропозициональной переменной языка L обозначаем через Sub. Логикой называем непустое множество формул, замкнутое относительно MP и Sub. Теорией логики L называем множество формул, включающее логику L и замкнутое относительно MP. Понятно, что множество всех формул является логикой, а также теорией любой логики. Для всякой логики L называем множество всех формул тривиальной теорией логики L. Противоречивой теорией логики L называем такую теорию T логики L, что для некоторой формулы A верно: $A \in T$ и $\neg A \in T$. Паранепротиворечивой теорий логики L называем такую противоречивую теорию T логики L, что T не есть тривиальная теория логики L. Паранепротиворечивой логикой называем такую логику L, что существует паранепротиворечивая теория логики L. Простой паранепротиворечивой логикой называем такую паранепротиворечивую логику L, что для всякой паранепротиворечивой теории T логики L верно: если $A \in T$ и $\neg A \in T$, то A есть квазиэлементарная формула. Полной теорией логики L называем такую теорию T логики L, что для всякой формулы A верно следующее: $A \in T$ или $\neg A \in T$. Параполной теорией логики L называем такую теорию T логики L, что T не является полной теорией логики L и всякая полная теория логики L, включающая T, есть тривиальная теория логики L. Параполной логикой называем такую логику L, что существует параполная теория логики L. Простой параполной логикой называем такую параполную логику L, что для всякой параполной теории T логики L верно следующее: существует такая квазиэлементарная формула A, что ни A и ни $\neg A$ не принадлежат T. Простой паралогикой называем такую логику, которая является простой паранепротиворечивой логикой или простой параполной логикой. Простой паранормальной логикой называем такую логику, которая является простой паранепротиворечивой логикой и простой параполной логикой.

Для всякого i из $\{0, 1, 2, 3\}$ определим исчисления $HInt_{i,0}$, $HInt_{i,1}$, $HInt_{i,2}$, $\ldots HInt_{i,\omega}$, $HI_{i,0}$, $HI_{i,1}$, $HI_{i,2}$, $\ldots HI_{i,\omega}$. Все эти исчисления являются исчислениями гильбертовского типа, язык каждого из которого есть L, каждое из этих исчислений имеет единственное правило вывода — правило MP. Во всяком из этих исчислений выводы (в частности, доказательства) строятся обычным для гильбертовского типа исчислений образом. Теперь для определения любого из указанных исчислений остается задать множество всех его аксиом.

Множеству всех аксиом исчисления $HInt_{0,k}$ (k есть целое неотрицательное число) принадлежат все те и только те формулы, каждая из которых имеет хотя бы один из следующих видов (здесь и далее A, B, C и D — формулы):
(I) $(A \supset B) \supset ((B \supset C) \supset (A \supset C))$, (II) $A \supset (A \vee B)$, (III) $B \supset (A \vee B)$, (IV) $(A \supset C) \supset ((B \supset C) \supset ((A \vee B) \supset C)$, (V) $(A \& B) \supset A$, (VI) $(A \& B) \supset B$, (VII) $(C \supset A) \supset ((C \supset B) \supset (C \supset (A \& B)))$, (VIII) $(A \supset (B \supset C)) \supset ((A \& B) \supset C)$, (IX) $((A \& B) \supset C) \supset (A \supset (B \supset C))$, (X, k) $\neg E \supset (E \supset A)$, где E есть формула, не являющаяся квазиэлементарной формулой, длина которой меньше k, (XI,k) $(E \supset \neg(A \supset A)) \supset \neg E$, где E есть формула, не являющаяся квазиэлементарной формулой, длина которой меньше k.

Множеству всех аксиом исчисления $HInt_{3,k}$ (k есть целое неотрицательное число) принадлежат все те и только те формулы, каждая из которых является аксиомой исчисления $HInt_{0,k}$ или имеет вид $(\neg A \supset (A \supset B)) \vee ((C \supset \neg(D \supset D)) \supset \neg C)$.

Множеству всех аксиом исчисления $HInt_{1,k}$ (k есть целое неотрицательное число) принадлежат все те и только те формулы, каждая из которых имеет хотя бы один из видов (I)-(IX) , или имеет вид (X, k), или имеет вид $(B \supset \neg(A \supset A)) \supset \neg B$.

Множеству всех аксиом исчисления $HInt_{2,k}$ (k есть целое неотрицательное число) принадлежат все те и только те формулы, каждая из которых имеет хотя бы один из видов (I)-(IX), или имеет вид $\neg B \supset (B \supset A)$ или имеет вид (XI,k).

Множеству всех аксиом исчисления $HInt_{0,\omega}$ принадлежат все те и только те формулы, каждая из которых имеет хотя бы один из видов (I)-(IX), или имеет вид (XII) $\neg F \supset (F \supset A)$, где F есть формула, не являющаяся квазиэлементарной формулой, или имеет вид (XIII) $(F \supset \neg(A \supset A)) \supset \neg F$, где F есть формула, не являющаяся квазиэлементарной формулой.

Множеству всех аксиом исчисления $HInt_{3,\omega}$ принадлежат все те и только те формулы, каждая из которых является аксиомой исчисления $HInt_{0,\omega}$, или имеет вид $(\neg A \supset (A \supset B)) \vee ((C \supset \neg(D \supset D)) \supset \neg C)$.

Множеству всех аксиом исчисления $HInt_{1,\omega}$ принадлежат все те и только те формулы, каждая из которых имеет хотя бы один из видов (I)-(IX), или имеет вид (XII), или имеет вид $(B\neg(A \supset A)) \supset \neg B$.

Множеству всех аксиом исчисления $HInt_{2,\omega}$ принадлежат все те и только те формулы, каждая из которых имеет хотя бы один из видов (I)-(IX), или имеет вид $\neg B \supset (B \supset A)$, или имеет вид (XIII).

Для всякого i из $\{0, 1, 2, 3\}$ и для всякого α из $\{0, 1, 2, \dots \omega\}$ множество всех аксиом исчисления $HI_{i,\alpha}$ равно объединению множества всех аксиом исчисления $HInt_{i,\alpha}$ с множеством всех формул вида $((A \supset B) \supset A) \supset A$.

Условимся, что для всякого i из $\{0, 1, 2, 3\}$ и для всякого α из $\{0, 1, 2, \dots \omega\}$ $Int_{i,\alpha}$ и $I_{i,\alpha}$ являются соответственно множеством всех формул, доказуемых в $HInt_{i,\alpha}$, и множеством всех формул, доказуемых в $HI_{i,\alpha}$.

Доказаны следующие утверждения 1-17.

УТВЕРЖДЕНИЕ 1. *Множество* $Int_{0,0}$ *равно множеству всех интуиционистских тавтологий в языке* L.

УТВЕРЖДЕНИЕ 2. *Множество* $I_{0,0}$ *равно множеству всех классических тавтологий в языке* L.

УТВЕРЖДЕНИЕ 3. $Int_{0,0} = Int_{1,0} = Int_{2,0} = Int_{3,0}$.

УТВЕРЖДЕНИЕ 4. $I_{0,0} = I_{1,0} = I_{2,0} = I_{3,0}$.

УТВЕРЖДЕНИЕ 5. *Множества* $Int_{0,1}$, $Int_{0,2}$, $\dots Int_{0,\omega}$ *являются попарно различными простыми паранормальными ло-*

гиками, при этом для всякого α *из* $\{1, 2, \dots \omega\}$ *и для всякого* β *из* $\{1, 2, \dots \omega\}$ *верно, что если* α *меньше, чем* β, *то* $Int_{0,\beta}$ *включается в* $Int_{0,\alpha}$.

УТВЕРЖДЕНИЕ 6. *Множества* $I_{0,1}$, $I_{0,2}$, $\dots I_{0,\omega}$ *являются попарно различными простыми паранормальными логиками, при этом для всякого* α *из* $\{1, 2, \dots \omega\}$ *и для всякого* β *из* $\{1, 2, \dots \omega\}$ *верно, что если* α *меньше, чем* β, *то* $I_{0,\beta}$ *включается в* $I_{0,\alpha}$.

УТВЕРЖДЕНИЕ 7. *Множества* $Int_{3,1}$, $Int_{3,2}$, $\dots Int_{3,\omega}$ *являются попарно различными простыми паранормальными логиками, при этом для всякого* α *из* $\{1, 2, \dots \omega\}$ *и для всякого* β *из* $\{1, 2, \dots \omega\}$ *верно, что если* α *меньше, чем* β, *то* $Int_{3,\beta}$ *включается в* $Int_{3,\alpha}$.

УТВЕРЖДЕНИЕ 8. *Множества* $I_{3,1}$, $I_{3,2}$, $\dots I_{3,\omega}$ *являются попарно различными простыми паранормальными логиками, при этом для всякого* α *из* $\{1, 2, \dots \omega\}$ *и для всякого* β *из* $\{1, 2, \dots \omega\}$ *верно, что если* α *меньше, чем* β, *то* $I_{3,\beta}$ *включается в* $I_{3,\alpha}$.

УТВЕРЖДЕНИЕ 9. *Множества* $\{Int_{0,1}, Int_{0,2}, \dots Int_{0,\omega}\}$, $\{I_{0,1}, I_{0,2}, \dots I_{0,\omega}\}$, $\{Int_{3,1}, Int_{3,2}, \dots Int_{3,\omega}\}$ *и* $\{I_{3,1}, I_{3,2}, \dots I_{3,\omega}\}$ *попарно несовместимы.*

УТВЕРЖДЕНИЕ 10. *Множества* $Int_{1,1}$, $Int_{1,2}$, $\dots Int_{1,\omega}$ *являются попарно различными простыми паранепротиворечивыми логиками, ни одна из которых не является параполной логикой, и при этом для всякого* α *из* $\{1, 2, \dots \omega\}$ *и для всякого* β *из* $\{1, 2, \dots \omega\}$ *верно, что если* α *меньше, чем* β, *то* $Int_{1,\beta}$ *включается в* $Int_{1,\alpha}$.

УТВЕРЖДЕНИЕ 11. *Множества* $I_{1,1}$, $I_{1,2}$, $\dots I_{1,\omega}$ *являются попарно различными простыми паранепротиворечивыми логиками, ни одна из которых не является параполной логикой, и при этом для всякого* α *из* $\{1, 2, \dots \omega\}$ *и для всякого* β *из* $\{1, 2, \dots \omega\}$ *верно, что если* α *меньше, чем* β, *то* $I_{1,\beta}$ *включается в* $I_{1,\alpha}$.

УТВЕРЖДЕНИЕ 12. *Множество* $\{Int_{1,1}, Int_{1,2}, \dots Int_{1,\omega}\}$ *несовместимо с множеством* $\{I_{1,1}, I_{1,2}, \dots I_{1,\omega}\}$.

УТВЕРЖДЕНИЕ 13. *Множества* $Int_{2,1}$, $Int_{2,2}$, $\dots Int_{2,\omega}$ *яв-*

ляются попарно различными простыми параполными логиками, ни одна из которых не является паранепротиворечивой логикой, и при этом для всякого α из $\{1, 2, \ldots \omega\}$ и для всякого β из $\{1, 2, \ldots \omega\}$ верно, что если α меньше, чем β, то $Int_{2,\beta}$ включается в $Int_{2,\alpha}$.

УТВЕРЖДЕНИЕ 14. *Множества $I_{2,1}$, $I_{2,2}$, $\ldots I_{2,\omega}$ являются попарно различными простыми параполными логиками, ни одна из которых не является паранепротиворечивой логикой, и при этом для всякого α из $\{1, 2, \ldots \omega\}$ и для всякого β из $\{1, 2, \ldots \omega\}$ верно, что если α меньше, чем β, то $I_{2,\beta}$ включается в $I_{2,\alpha}$.*

УТВЕРЖДЕНИЕ 15. *Множество $\{Int_{2,1}, Int_{2,2}, \ldots Int_{2,\omega}\}$ несовместимо с множеством $\{I_{2,1}, I_{2,2}, \ldots I_{2,\omega}\}$.*

УТВЕРЖДЕНИЕ 16. *Для всякого i из $\{0, 1, 2, 3\}$ верно, что $Int_{i,\omega} = \cap\{Int_{i,k}\}_{k\in\{1,2,\ldots\}}$ и $I_{i,\omega} = \cap\{I_{i,k}\}_{k\in\{1,2,\ldots\}}$.*

УТВЕРЖДЕНИЕ 17. *Для всякого α из $\{1, 2, \ldots \omega\}$ верно, что $Int_{1,\alpha} \cap Int_{2,\alpha} = Int_{3,\alpha}$ и $I_{1,\alpha} \cap I_{2,\alpha} = I_{3,\alpha}$.*

Определим секвенциальные исчисления, аксиоматизирующие рассматриваемые здесь паралогики. Алфавит **A** языка всех этих секвенциальных исчислений есть объединение алфавита языка L с двухэлементным множеством $\{\mathbf{,}\ \rightarrow\}$ символов. Непустой последовательностью формул называем слово в алфавите **A**, имеющее вид $A_1\mathbf{,}\ldots\mathbf{,}A_n$, где n — целое положительное число, а $A_1, \ldots, A_n$ есть формулы. Заметим, что если $n = 1$, то $A_1\mathbf{,}\ldots\mathbf{,}A_n$ есть A_1. Пустой последовательностью формул называем пустое слово. Называем π последовательностью формул, если π есть пустая последовательность формул или непустая последовательность формул. Секвенцией называем слово в алфавите **A**, имеющее вид $\pi \rightarrow \rho$, где π и ρ — последовательности формул. Для всякого целого положительного числа n называем n-посылочным секвенциальным правилом любое подмножество $n+1$-вой декартовой степени множества всех секвенций. Называем R секвенциальным правилом, если для некоторого целого положительного числа n R есть n-посылочное секвенциальное правило. Называем Π применением секвенциального правила R, если $\Pi \in R$. Условимся обозначать через Γ, Δ, Σ и Θ последовательности формул, а через Λ — пустую последовательность формул или формулу. Нам потребуются следующие секвенциальные правила: $R1$, $R'1$, $R'2$, $R3$, $R'3$, $R4$, $R5$, $R'5$, $R6$, $R'6$, $R7$, $R'7$, $R8$, $R'8$, $R9$, $R'9$, $R10$, $R'10$, $R11$, $R'11$, $R12$, $R'12$, $R13$, $R'13$, $R14$, $R'14$, $R15$, $R15.k$, где k есть целое положительное число, $R15.\omega$, $R'15$, $R'15.k$, где k есть целое положительное число, $R'15.\omega$, $R16$, $R16.k$, где k есть целое положительное число, $R16.\omega$, $R'16$, $R'16.k$, где k есть целое положительное число, $R'16.\omega$, $R17$, $R'17$.

$R1$ есть секвенциальное правило, каждое применение которого имеет вид $< \Gamma, A, B, \Delta \to \Theta, \quad \Gamma, B, A, \Delta \to \Theta >$,

$R'1$ есть секвенциальное правило, каждое применение которого имеет вид $< \Gamma, A, B, \Delta \to \Lambda, \quad \Gamma, B, A, \Delta \to \Lambda >$,

$R2$ есть секвенциальное правило, каждое применение которого имеет вид $< \Gamma \to \Delta, A, B, \Theta, \quad \Gamma \to \Delta, B, A, \Theta >$,

$R3$ есть секвенциальное правило, каждое применение которого имеет вид $< A, A, \Gamma \to \Theta, \quad A, \Gamma \to \Theta >$,

$R'3$ есть секвенциальное правило, каждое применение которого имеет вид $< A, A, \Gamma \to \Lambda, \quad A, \Gamma \to \Lambda >$,

$R4$ есть секвенциальное правило, каждое применение которого имеет вид $< \Gamma \to \Theta, A, A, \quad \Gamma \to \Theta, A >$,

$R5$ есть секвенциальное правило, каждое применение которого имеет вид $< \Gamma \to \Theta, \quad A, \Gamma \to \Theta >$,

$R'5$ есть секвенциальное правило, каждое применение которого имеет вид $< \Gamma \to \Lambda, \quad A, \Gamma \to \Lambda >$,

$R6$ есть секвенциальное правило, каждое применение которого имеет вид $< \Gamma \to \Theta, \quad \Gamma \to \Theta, A >$,

$R'6$ есть секвенциальное правило, каждое применение которого имеет вид $< \Gamma \to, \quad \Gamma \to A >$,

$R7$ есть секвенциальное правило, каждое применение которого имеет вид $< A, \Gamma \to \Theta, \quad A \,\&\, B, \Gamma \to \Theta >$,

$R'7$ есть секвенциальное правило, каждое применение которого имеет вид $< A, \Gamma \to \Lambda, \quad A \,\&\, B, \Gamma \to \Lambda >$,

$R8$ есть секвенциальное правило, каждое применение которого имеет вид $< A, \Gamma \to \Theta, \quad B \,\&\, A, \Gamma \to \Theta >$,

$R'8$ есть секвенциальное правило, каждое применение которого имеет вид $< A, \Gamma \to \Lambda, \quad B \,\&\, A, \Gamma \to \Lambda >$,

$R9$ есть секвенциальное правило, каждое применение которого имеет вид $< \Gamma \to \Theta, A, \quad \Gamma \to \Theta, B, \quad \Gamma \to \Theta, A \,\&\, B >$,

$R'9$ есть секвенциальное правило, каждое применение которого имеет вид $< \Gamma \to A,\quad \Gamma \to B,\quad \Gamma \to A \,\&\, B >$,

$R10$ есть секвенциальное правило, каждое применение которого имеет вид $< A, \Gamma \to \Theta,\ \ B, \Gamma \to \Theta, B,\ \ A \vee B, \Gamma \to \Theta >$,

$R'10$ есть секвенциальное правило, каждое применение которого имеет вид $< A, \Gamma \to \Lambda,\ \ B, \Gamma \to \Lambda, B,\ \ A \vee B, \Gamma \to \Lambda >$,

$R11$ есть секвенциальное правило, каждое применение которого имеет вид $< \Gamma \to \Theta, A,\quad \Gamma \to \Theta, A \vee B >$,

$R'11$ есть секвенциальное правило, каждое применение которого имеет вид $< \Gamma \to A,\quad \Gamma \to A \vee B >$,

$R12$ есть секвенциальное правило, каждое применение которого имеет вид $< \Gamma \to \Theta, A,\quad \Gamma \to \Theta, B \vee A >$,

$R'12$ есть секвенциальное правило, каждое применение которого имеет вид $< \Gamma \to A,\quad \Gamma \to B \vee A >$,

$R13$ есть секвенциальное правило, каждое применение которого имеет вид

$<\Gamma \to \Theta, A,\ \ B, \Sigma \to \Delta,\ \ A \supset B, \Gamma, \Sigma \to \Theta, \Delta>$,

$R'13$ есть секвенциальное правило, каждое применение которого имеет вид $< \Gamma \to A,\quad B, \Sigma \to \Lambda,\quad A \supset B, \Gamma, \Sigma \to \Lambda >$,

$R14$ есть секвенциальное правило, каждое применение которого имеет вид $< A, \Gamma \to \Theta, B,\quad \Gamma \to \Theta, A \supset B >$,

$R'14$ есть секвенциальное правило, каждое применение которого имеет вид $< A, \Gamma \to B,\quad \Gamma \to A \supset B >$,

$R15$ есть секвенциальное правило, каждое применение которого имеет вид $< \Gamma \to \Theta, A,\quad \neg A, \Gamma \to \Theta >$.

Для всякого целого положительного числа k $R15.k$ есть секвенциальное правило, каждое применение которого имеет вид $< \Gamma \to \Theta, E,\ \ \neg E, \Gamma \to \Theta >$, где E есть формула, не являющаяся квазиэлементарной формулой, длина которой меньше k.

$R15.\omega$ есть секвенциальное правило, каждое применение которого имеет вид $< \Gamma \to \Theta, F,\ \ \neg F, \Gamma \to \Theta >$, где F есть формула, не являющаяся квазиэлементарной формулой.

$R'15$ есть секвенциальное правило, каждое применение которого имеет вид $< \Gamma \to A,\quad \neg A, \Gamma \to>$.

Для всякого целого положительного числа k $R'15.k$ есть секвенциальное правило, каждое применение которого имеет вид $< \Gamma \to E,\ \neg E,\ \Gamma \to>$, где E есть формула, не являющаяся квазиэлементарной формулой, длина которой меньше k.

$R'15\omega$ есть секвенциальное правило, каждое применение которого имеет вид $< \Gamma \to F, \quad \neg F, \Gamma \to >$, где F есть формула, не являющаяся квазиэлементарной формулой.

$R16$ есть секвенциальное правило, каждое применение которого имеет вид $< A, \Gamma \to \Theta, \; \Gamma \to \Theta, \neg A >$.

Для всякого целого положительного числа k $R16.k$ есть секвенциальное правило, каждое применение которого имеет вид $< E, \Gamma \to \Theta, \quad \Gamma,\Theta \to \neg E >$, где E есть формула, не являющаяся квазиэлементарной формулой, длина которой меньше k.

$R16.\omega$ есть секвенциальное правило, каждое применение которого имеет вид $< F, \Gamma \to \Theta, \; \Gamma \to \Theta, \neg F >$, где F есть формула, не являющаяся квазиэлементарной формулой.

$R'16$ есть секвенциальное правило, каждое применение которого имеет вид $< A, \Gamma \to, \quad \Gamma \to \neg A >$.

Для всякого целого положительного числа k $R'16.k$ есть секвенциальное правило, каждое применение которого имеет вид $< E, \Gamma \to, \; \Gamma \to \neg E >$, где E есть формула, не являющаяся квазиэлементарной формулой, длина которой меньше k.

$R'16\omega$ есть секвенциальное правило, каждое применение которого имеет вид $< F, \Gamma \to, \quad \Gamma \to \neg F >$, где F есть формула, не являющаяся квазиэлементарной формулой.

$R17$ есть секвенциальное правило, каждое применение которого имеет вид $< \Gamma \to \Delta, A, \quad A, \Sigma \to \Theta, \quad \Gamma, \Sigma \to \Delta, \Theta >$.

$R'17$ есть секвенциальное правило, каждое применение которого имеет вид $< \Gamma \to A, \quad A, \Sigma \to \Lambda, \; \Gamma, \Sigma \to \Lambda >$.

Поскольку во всяком из определяемых ниже секвенциальных исчислений доказательства строятся обычным для этого типа исчислений образом (см. [2]) и для всякого формулируемого в предлагаемой работе секвенциального исчисления определение доказуемой в нем секвенции стандартно (см. [2]), то для задания любого из этих исчислений достаточно указать множество всех его основных секвенций и множество всех его правил.

Секвенциальное исчисление $GInt_{0,k}$, где k — целое положительное число.

Множество всех основных секвенций исчисления $GInt_{0,k}$ есть множество всех секвенций, каждая из которых имеет вид $A \to A$. Множество $\mathbf{R'_k}$ всех правил этого исчисления есть $\{R'1, R'3$, $R'5$, $R'6$, $R'7$, $R'8$, $R'9$, $R'10$, $R'11$, $R'12$, $R'13$, $R'14$, $R15.k$,

$R'16.k$, $R'17\}$. Доказано следующее утверждение 18.

УТВЕРЖДЕНИЕ 18. *Для всякого целого положительного числа k и для всякой формулы A верно: в $GInt_{0,k}$ доказуема секвенция $\to A$ тогда и только тогда, когда $A \in Int_{0,k}$.*

Секвенциальные исчисления $GInt_{3,k}$, где k — целое положительное число.

Множество всех основных секвенций исчисления $GInt_{3,k}$ есть множество всех секвенций, каждая из которых имеет вид $A \to A$ или имеет вид $\to (((\neg A) \supset (A \supset B)) \vee ((C \supset (\neg(D \supset D))) \supset (\neg C)))$. Множество всех правил этого исчисления есть $\mathbf{R'_k}$. Доказано следующее утверждение 19.

УТВЕРЖДЕНИЕ 19. *Для всякого целого положительного числа k и для всякой формулы A верно: в $GInt_{3,k}$ доказуема секвенция $\to A$ тогда и только тогда, когда $A \in Int_{3,k}$.*

Секвенциальное исчисление $GInt_{1,k}$, где k — целое положительное число.

Множество всех основных секвенций исчисления $GInt_{1,k}$ есть множество всех секвенций, каждая из которых имеет вид $A \to A$. Множество всех правил этого исчисления есть $(\mathbf{R'_k} \setminus \{R'16.k\}) \cup \{R'16\}$. Доказано следующее утверждение 20.

УТВЕРЖДЕНИЕ 20. *Для всякого целого положительного числа k и для всякой формулы A верно: в $GInt_{1,k}$ доказуема секвенция $\to A$ тогда и только тогда, когда $A \in Int_{1,k}$.*

Секвенциальное исчисление $GInt_{2,k}$, где k — целое положительное число.

Множество всех основных секвенций исчисления $GInt_{2,k}$ есть множество всех секвенций, каждая из которых имеет вид $A \to A$. Множество всех правил этого исчисления есть $(\mathbf{R'_k} \setminus \{R'15.k\}) \cup \{R'15\}$. Доказано следующее утверждение 21.

УТВЕРЖДЕНИЕ 21. *Для всякого целого положительного числа k и для всякой формулы A верно: в $GInt_{2,k}$ доказуема секвенция $\to A$ тогда и только тогда, когда $A \in Int_{2,k}$.*

Секвенциальное исчисление $GInt_{0,\omega}$.

Множество всех основных секвенций исчисления $GInt_{0,\omega}$ есть множество всех секвенций, каждая из которых имеет вид $A \to A$. Множество всех правил этого исчисления есть $(\mathbf{R'_k} \setminus$

$\{R'15.k, R'16.k\}) \cup \{R'15.\omega, R'16.\omega\}$. Доказано следующее утверждение 22.

УТВЕРЖДЕНИЕ 22. *Для всякой формулы A верно: в $GInt_{0,\omega}$ доказуема секвенция $\rightarrow A$ тогда и только тогда, когда $A \in Int_{0,\omega}$.*

Секвенциальное исчисление $GInt_{3,\omega}$.

Множество всех основных секвенций исчисления $GInt_{3,\omega}$ есть множество всех секвенций, каждая из которых имеет вид $A \rightarrow A$ или имеет вид $\rightarrow (((\neg A) \supset (A \supset B)) \vee ((C \supset (\neg(D \supset D))) \supset (\neg C)))$. Множество всех правил этого исчисления есть множество всех правил исчисления $GInt_{0,\omega}$. Доказано следующее утверждение 23.

УТВЕРЖДЕНИЕ 23. *Для всякой формулы A верно: в $GInt_{3,\omega}$ доказуема секвенция $\rightarrow A$ тогда и только тогда, когда $A \in Int_{3,\omega}$.*

Секвенциальное исчисление $GInt_{1,\omega}$.

Множество всех основных секвенций исчисления $GInt_{1,\omega}$ есть множество всех секвенций, каждая из которых имеет вид вид $A \rightarrow A$. Множество всех правил этого исчисления есть $(\mathbf{R'_k} \setminus \{R'15.k, R'16.k\}) \cup \{R'15.\omega, R'16\}$. Доказано следующее утверждение 24.

УТВЕРЖДЕНИЕ 24. *Для всякой формулы A верно: в $GInt_{1,\omega}$ доказуема секвенция $\rightarrow A$ тогда и только тогда, когда $A \in Int_{1,\omega}$.*

Секвенциальное исчисление $GInt_{2,\omega}$.

Множество всех основных секвенций исчисления $GInt_{2,\omega}$ есть множество всех секвенций, каждая из которых имеет вид $A \rightarrow A$. Множество всех правил этого исчисления есть $(\mathbf{R'_k} \setminus \{R'15.k, R'16.k\}) \cup \{R'15, R'16.\omega\}$. Доказано следующее утверждение 25.

УТВЕРЖДЕНИЕ 25. *Для всякой формулы A верно: в $GInt_{2,\omega}$ доказуема секвенция $\rightarrow A$ тогда и только тогда, когда $A \in Int_{2,\omega}$.*

Секвенциальное исчисление $GI_{0,k}$, где k — целое положительное число.

Множество всех основных секвенций исчисления $GI_{0,k}$ есть множество всех секвенций каждая из которых имеет вид $A \to A$. Множество $\mathbf{R_k}$ всех правил этого исчисления есть $\{R1$, $R2$, $R3$, $R4$, $R5$, $R6$, $R7$, $R8$, $R9$, $R10$, $R11$, $R12$, $R13$, $R14$, $R15.k$, $R16.k$, $R17\}$. Доказано следующее утверждение 26.

УТВЕРЖДЕНИЕ 26. *Для всякого целого положительного числа k и для всякой формулы A верно: в $GI_{0,k}$ доказуема секвенция $\to A$ тогда и только тогда, когда $A \in I_{0,k}$.*

Секвенциальное исчисление $GI_{3,k}$, где k — целое положительное число.

Множество всех основных секвенций исчисления $GI_{3,k}$ есть множество всех секвенций каждая из которых имеет вид $A \to A$ или имеет вид $A, \neg A \to B, \neg B$. Множество всех правил этого исчисления есть $\mathbf{R_k}$. Доказано следующее утверждение 27.

УТВЕРЖДЕНИЕ 27. *Для всякого целого положительного числа k и для всякой формулы A верно: в $GI_{3,k}$ доказуема секвенция $\to A$ тогда и только тогда, когда $A \in I_{3,k}$.*

Секвенциальное исчисление $GI_{1,k}$, где k — целое положительное число.

Множество всех основных секвенций исчисления $GI_{1,k}$ есть множество всех секвенций каждая из которых имеет вид $A \to A$. Множество всех правил этого исчисления есть $(\mathbf{R_k} \backslash \{R16.k\}) \cup \{R16\}$. Доказано следующее утверждение 28.

УТВЕРЖДЕНИЕ 28. *Для всякого целого положительного числа k и для всякой формулы A верно: в $GI_{1,k}$ доказуема секвенция $\to A$ тогда и только тогда, когда $A \in I_{1,k}$.*

Секвенциальное исчисление $GI_{2,k}$, где k — целое положительное число.

Множество всех основных секвенций исчисления $GI_{2,k}$ есть множество всех секвенций каждая из которых имеет вид $A \to A$. Множество всех правил этого исчисления есть $(\mathbf{R_k} \setminus \{R15.k\}) \cup \{R15\}$. Доказано следующее утверждение 29.

УТВЕРЖДЕНИЕ 29. *Для всякого целого положительного числа k и для всякой формулы A верно: в $GI_{2,k}$ доказуема секвенция $\to A$ тогда и только тогда, когда $A \in I_{2,k}$.*

Секвенциальное исчисление $GI_{0,\omega}$.

Множество всех основных секвенций исчисления $GI_{0,\omega}$ есть множество всех секвенций, каждая из которых имеет вид $A \to A$. Множество всех правил этого исчисления есть $\{R1$, $R2$, $R3$, $R4$, $R5$, $R6$, $R7$, $R8$, $R9$, $R10$, $R11$, $R12$, $R13$, $R14$, $R15.\omega$, $R16.\omega$, $R17\}$. Доказано следующее утверждение 30.

УТВЕРЖДЕНИЕ 30. *Для всякой формулы A верно: в $GI_{0,\omega}$ доказуема секвенция $\to A$ тогда и только тогда, когда $A \in I_{0,\omega}$.*

Секвенциальное исчисление $GI_{3,\omega}$.

Множество всех основных секвенций исчисления $GI_{3,\omega}$ есть множество всех секвенций, каждая из которых имеет вид $A \to A$ или имеет вид A, $\neg A \to B$, $\neg B$. Множество всех правил этого исчисления есть множество всех правил исчисления $GI_{0,\omega}$. Доказано следующее утверждение 31.

УТВЕРЖДЕНИЕ 31. *Для всякой формулы A верно: в $GI_{3,\omega}$ доказуема секвенция $\to A$ тогда и только тогда, когда $A \in I_{3,\omega}$.*

Секвенциальное исчисление $GI_{1,\omega}$.

Множество всех основных секвенций исчисления $GI_{1,\omega}$ есть множество всех секвенций, каждая из которых имеет вид $A \to A$. Множество всех правил этого исчисления есть $(\mathbf{R_k} \setminus \{R15.k, R16.k\}) \cup \{R15.\omega, R16\}$. Доказано следующее утверждение 32.

УТВЕРЖДЕНИЕ 32.

Для всякой формулы A верно: в $GI_{1,\omega}$ доказуема секвенция $\to A$ тогда и только тогда, когда $A \in I_{1,\omega}$.

Секвенциальное исчисление $GI_{2,\omega}$.

Множество всех основных секвенций исчисления $GI_{2,\omega}$ есть множество всех секвенций, каждая из которых имеет вид $A \to A$. Множество всех правил этого исчисления есть $(\mathbf{R_k} \setminus \{R15.k, R16.k\}) \cup \{R15, R16.\omega\}$. Доказано следующее утверждение 33.

УТВЕРЖДЕНИЕ 33. *Для всякой формулы A верно: в $GI_{2,\omega}$ доказуема секвенция $\to A$ тогда и только тогда, когда $A \in I_{2,\omega}$.*

Обозначаем через G объединение множества $\{Int_{i,\alpha}\}$ ($i \in \{0, 1, 2\}$ и $\alpha \in \{1, 2, 3, \ldots \omega\}$) с множеством $\{I_{j,\beta}\}$ ($j \in \{0, 1, 2, 3\}$ и $\beta \in \{1, 2, 3, \ldots \omega\}$).

Для каждого V из G определяем напарника исчисления V как такое секвенциальное исчисление W, что (1) язык исчисления W есть язык исчисления V, (2) множество всех основных секвенций исчисления W есть множество всех основных секвенций исчисления V, (3) множество всех правил исчисления W есть разность множества всех правил исчисления V с множеством $\{R17,\ R'17\}$, (4) доказательства в W строятся обычным для секвенциального типа исчислений образом. Ясно, что для всякого V из G существует единственный напарник исчисления V. Для всякого V из G обозначаем через FCV напарника исчисления V. Следующее утверждение 34 (теорема об устранимости сечения для исчислений из G) доказано методом, предложенным и примененным Г. Генценом в [1].

УТВЕРЖДЕНИЕ 34. *Для всякого V из G и всякой секвенции S верно: S доказуема в V тогда и только тогда, когда S доказуема в FCV.*

УТВЕРЖДЕНИЕ 35. *Для всякого V из G исчисление FCV разрешимо.*

Утверждение 35 доказано методом редуцированных секвенций (см. [1]).

С использованием утверждений 17, 20, 21, 24, 25 и 35 доказано следующее утверждение 36.

УТВЕРЖДЕНИЕ 36. *Для всякого i из $\{0, 1, 2, 3\}$ и для всякого α из $\{1, 2, \dots \omega\}$ логика $Int_{i,\alpha}$ и логика $I_{i,\alpha}$ разрешимы.*

Связь между изучаемыми простыми паралогиками с одной стороны и классической $I_{0,0}$ и интуиционистской $Int_{0,0}$ пропозициональными логиками с другой стороны устанавливают нижеследующие утверждения 37 и 38, а также формулируемые ниже теоремы 39-42.

УТВЕРЖДЕНИЕ 37. *Для всякого i из $\{0, 1, 2, 3\}$ и для всякого α из $\{1, 2, \dots \omega\}$ позитивный фрагмент логики $I_{i,\alpha}$ равен позитивному фрагменту логики $I_{0,0}$.*

УТВЕРЖДЕНИЕ 38. *Для всякого i из $\{0, 1, 2, 3\}$ и для всякого α из $\{1, 2, \dots \omega\}$ позитивный фрагмент логики $Int_{i,\alpha}$ равен позитивному фрагменту логики $Int_{0,0}$.*

Утверждения 37 и 38 доказаны с помощью утверждений 17, 18, 20, 21, 22, 24, 25, 26, 28, 29, 30, 32, 33 и полученных в [1] фундаментальных результатов по секвенциальной аксиоматизации интуиционистской и классической логик. Доказаны также следующие теоремы 39-42.

ТЕОРЕМА 39. *Пусть* $i \in \{0, 1, 2, 3\}$, $\alpha \in \{1, 2, \ldots \omega\}$ *и* φ *есть отображение множества всех пропозициональных переменных языка* L *во множество всех формул, удовлетворяющее условиям:*

(1) $\varphi(p)$ *не есть пропозициональная переменная языка* L *ни для какой пропозициональной переменной* p *языка* L,

(2) для всякой пропозициональной переменной p *языка* L $p \supset \varphi(p)$ *и* $\varphi(p) \supset p$ *принадлежат логике* $Int_{i,\alpha}$.

Пусть h_φ *есть такое отображение множества всех формул в себя, что для всякой пропозициональной переменной* p *языка* L *и для всяких формул* B *и* C *выполняются следующие условия:*

(a) $h_\varphi(p) = \varphi(p)$,

(b) $h_\varphi((B \circ C)) = (h_\varphi(B) \circ h_\varphi(C))$, *где* $\circ \in \{\&, \vee, \supset\}$,

(c) $h_\varphi((\neg B)) = (\neg h_\varphi(B))$.

Тогда для всякой формулы A *верно:* $A \in Int_{0,0}$ *тогда и только тогда, когда* $h_\varphi(A) \in Int_{i,\alpha}$.

ТЕОРЕМА 40. *Пусть* $i \in \{0, 1, 2, 3\}$, $\alpha \in \{1, 2, \ldots \omega\}$ *и* g *есть такое отображение множества всех формул в себя, что для всякой пропозициональной переменной* p *языка* L *и для всяких формул* B *и* C *выполняется условия:*

(a) $g(p) = p$,

(b) $g((B \circ C)) = (g(B) \circ g(C))$, *где* $\circ \in \{\&, \vee, \supset\}$,

(c) $g((\neg B)) = (g(B) \supset (\neg(p_1 \supset p_1)))$.

Тогда для всякой формулы A *верно:* $A \in Int_{0,0}$ *тогда и только тогда, когда* $g(A) \in Int_{i,\alpha}$.

ТЕОРЕМА 41. *Пусть* $i \in \{0, 1, 2, 3\}$, $\alpha \in \{1, 2, \ldots \omega\}$ *и* φ *есть отображение множества всех пропозициональных переменных языка* L *во множество всех формул, удовлетворяющее условиям:*

(1) $\varphi(p)$ *не есть пропозициональная переменная языка* L *ни для какой пропозициональной переменной* p *языка* L,

(2) *для всякой пропозициональной переменной* p *языка* L $p \supset \varphi(p)$ *и* $\varphi(p) \supset p$ *принадлежат логике* $I_{i,\alpha}$.

Пусть h_φ *есть такое отображение множества всех формул в себя, что для всякой пропозициональной переменной* p *языка* L *и для всяких формул* B *и* C *выполняются следующие условия:*

(a) $h_\varphi(p) = \varphi(p)$,

(b) $h_\varphi((B \circ C)) = (h_\varphi(B) \circ h_\varphi(C))$, *где* $\circ \in \{\&, \vee, \supset\}$,

(c) $h_\varphi((\neg B)) = (\neg h_\varphi(B))$.

Тогда для всякой формулы A *верно:* $A \in I_{0,0}$ *тогда и только тогда, когда* $h_\varphi(A) \in I_{i,\alpha}$.

ТЕОРЕМА 42. *Пусть* $i \in \{0, 1, 2, 3\}$, $\alpha \in \{1, 2, \ldots \omega\}$ *и* g *есть такое отображение множества всех формул в себя, что для всякой пропозициональной переменной* p *языка* L *и для всяких формул* B *и* C *выполняется условия:*

(a) $g(p) = p$,

(b) $g((B \circ C)) = (g(B) \circ g(C))$, *где* $\circ \in \{\&, \vee, \supset\}$,

(c) $g((\neg B)) = (g(B) \supset (\neg(p_1 \supset p_1)))$.

Тогда для всякой формулы A *верно:* $A \in I_{0,0}$ *тогда и только тогда, когда* $g(A) \in I_{i,\alpha}$.

Литература

[1] *Генцен Г.* Исследование логических выводов //Математическая теория логического вывода. М., 1967. С.9-74.

[2] *Смирнов В. А.* Формальный вывод и логические исчисления// Смирнов В. А. Теория логического вывода. М., 1999. С.16-233.

Структурализм и идентичность математических объектов[1]

М. Резник

abstract. The paper deals with the nature of mathematics from the point of view so called mathematical structuralism. The author proposes specific analysis of mathematical objects, and within the particular — relativistic standpoint — justify that mathematics is the science of patterns. He responded for the objections toward mathematical structuralism.

Ключевые слова: структурализм, паттерны, структурная релятивность, позиции и идентичность логических и математических объектов

М. Резник как логик и философ

М. Резник родился в 1938 г. Будучи учеником У. Куайна, он получил степень PhD в Гарварде в 1964 г. за диссертацию о Г. Фреге. Он являлся профессором университета в штате Северная Каролина, где получил звание почетного профессора. Его работы по философии математики (вместе с работами С. Шапиро, Дж. Хеллмана и Ч. Парсонса) положили начало такому направлению как структурализм (в философии математики). Резник также занимался философией логики, где он отстаивал неаприорный характер логики и анализировал способы ее модификации. В своей концепции математического структурализм Резник развил некоторые аспекты идеи Куайна об онтологическом релятивизме.

В.А. Бажанов

---

[1] Перевод с англ. В.А. Бажанова.

Структурализм и идентичность математических объектов

М. Резник

Начну с терминологического замечания.

Я полагаю, что математика изучает паттерны («структуры»). Прежде, чем начать прояснять что такое паттерны, я скажу несколько слов о понятиях «паттерна», «структуры» и «структурализма». Я использую термин «паттерн» в смысле распознавания паттернов (структур), имея в виду, что из них что-то может конструироваться, или такие признаки, которые помогают отличать акцент жителей одних районов от акцента жителей других районов. Термин «структура» близок по значению к «паттерну» и часто их значения перекрываются. «Структурализм» — более удачное название, чем «паттернизм», и не более того. Более того, понятия «паттерна» и «структуры» в большей или меньшей степени взаимозаменяемы в моих работах.

1 Что изучает математика?

Что изучает математика, если ее основные представления используются в различных приложениях? Мы их находим в геометрии, где она очень плодотворна и использует синтетические или аналитические методы. Мы находим ее в успехах математической логики, которые достигнуты благодаря использованию теории чисел, алгебры и теории множеств. Мы видим ее в теории чисел, которая может строиться как теория конечных кардинальных чисел, теория конечных упорядоченных или конечных дискретных образований или даже как теория синтаксических цепочек. Если бы мои познания в математике были более глубоки, то я бы привел еще много аналогичных примеров. Мы также знаем о возможности различных путей развития различных ветвей математики. Мы можем воссоздать всю (или почти всю) математику на основе теории множеств. Равно как и на основе теории категорий. Мы может начать с арифметики или получить фрагменты геометрии на ее базе. Или же мы можем начать с геометрии и выйти на арифметику как часть геометрии. Почему это возможно? Что мы узнаем, какого рода знание получаем в рамках математики? Паттерны можно расширять, копировать, рассматривать совместно. Они могут встречаться в других паттернах и могут получаться из них. Их можно «извлекать» из обыденного опыта, равно как и самих паттернов. Моя гипотеза относительно математики объяснит, почему возможны различные подходы к одним и тем же проблемам — причина здесь проста: математики изучают паттерны в различного рода образованиях. Отсюда понятно, почему возможны различные основания математики. Некоторые паттерны встречаются в виде «вложенных структур», и поэтому мы можем отталкиваться от одного паттерна или же считать его производным (см. рис. 1). Эта идея объясняет, почему математическое знание не является знанием отдельных объектов. Разумеется, мы можем задумываться, например, о числе 13, но в целом фундаментальные свойства чисел раскрываются путем их отношения к другим числам.

2 Паттерны и их включение

Некоторые отношения между паттернами может пролить свет на природу математики. Я вкратце остановлюсь на случае включения паттернов. На рис. 2 последовательность P несколько раз встречается в паттерне Q. Действительно, мы представляем последовательность звездочек как продолжающуюся в бесконечность, тогда P бесконечное число раз встречается в Q. Очевидный математический пример — четные натуральные числа в рамках всего ряда натуральных чисел. Как показывает рис. 1, трудно привести примеры паттернов, которые входят друг в друга, но математических примеров здесь много. Натуральные числа входят в положительные рациональные числа. Кодированием упорядоченных пар чисел в виде одного числа, мы говорим о включении рациональных чисел в натуральные. Включение паттернов рефлексивно и транзитивно, причем P изоморфно структуре R которая принадлежит Q и определяется в Q. Замечу, что пункт, относящийся к определимости, — ключевой. Это позволяет структуре (N, S) не только входить в (N, $<$), где последующий член — суб-отношение «меньше чем»; кроме того, последующий член может быть получен без наложений ограничений на те или иные области всей структуры. Рациональные числа (Rat, $+$, *) содержатся в (N, S), но рациональные числе в плотном упорядочении (Rat, $<$) нет, т.к. 0 и последующие числе не определяются в такого рода структурах. С другой стороны, хотя действительные числа и их упорядочение можно с помощью теоретико-множественных средств определить на основе натуральных чисел, (Real, $<$) не входит в (N, S). Итак, что же такое паттерн? В своей статье 1981 года и в книге 1997 года я определил его как «состоящий из позиций, которые проявляются в различных отношениях». Понятно, что определение довольно неопределенное, но я преднамеренно не хотел бы его уточнять. Я не старался и не стараюсь выразить паттерн математически или прояснить его онтологический статус. Утверждая, что математика изучает паттерны или нечто подобное, я хочу привлечь внимание к некоторым свойствам паттернов и пролить новый свет на природу математики. Я повторяю: паттерн состоит из позиций, которые проявляются в различных отношениях. Паттерны могут иметь строго определенные позиции и монадные отношения, например, цвета. Структура национальных флагов, например, не просто структура, состоящая из определенных форм, но форм совершенно определенных цветов. Их ориентация также очень важна. В математике возможны различные ориентации паттернов (как, скажем, в системах координат) и метрики. Очевидно, что одних лишь логических средств недостаточно для характеристики любых паттернов. Отсюда вытекает идея структурной релятивности.

3 Структурная релятивность

Ее идея проста: структуры мы можем различать и описывать как функцию некоторых базовых образований, которые у нас есть для изображения структур. Это важно, когда мы мыслим паттерны как некоторого рода трафареты, позволяющие образовывать те или иные конкретные объекты, или говорим об инвариантности при тех или иных трансформациях, или же о классах эквивалентности, определяемых соответствующими отношениями. Данные паттерны относительны в смысле наших средств или имеющихся форм, или же отношений. Более того, обогащая или обедняя базовые образования, мы можем получать различные понятия структуры, сличать различные вещи, которые имеют одинаковые структуры и различать отношения между ними.

Геометрия здесь дает много примеров: в ней говорится о более и более богатых типах структур, которые образуются, скажем, на основе конгруэнтных фигур, ориентированных в евклидовом пространстве и их движениями (но уже без ориентации) и таким образом до аффинных и топологических пространств. Структурная релятивность проявляется, когда мы хотим дать определение вхождения паттернов, причем понятие определимости само относительно выбранного метода определения. Это в свою очередь зависит от нелогического словаря базисного языка, и от наших логических средств. Не только наши структурные отношения изменяются с нашим «логическим» фоном, но и элементы структуры и, следовательно, сами структуры. Если ограничиться описанием структур как моделей различных первопорядковых формул (схем), то типы структур будут похожи на крупно-ячейистые структуры, которые часто встречаются в абстрактной алгебре. Здесь можно исходить из определения таких структур как группа, кольцо или решетка, имея в виду допустить неизоморфные примеры подобного типа. В результате большинство наших структурных описаний не будут категоричными. С другой же стороны, используя языки второго порядка, можно сформулировать категорические описания структур, изучаемых (второпорядковой) теорией чисел, евклидовой геометрией, анализом. Категорические расширения ZFC считаются достаточно мощными, чтобы обеспечить нужды математиков.

Фиксируя базисную логику L, можно назвать L-структурой структуру в некотором неуточненном, абсолютном смысле. Но это не устраняет идею структурной релятивности. Фрагментируя логические средства L, можно сделать более интуитивно прозрачными те различимости, которые позволяет L. Действительно, одно возражение против использования первопорядковой логики как структурной основы заключается в том, что и стандартные, и нестандартные модели теории чисел проявляют Первопорядковую Структуру, относящуюся к Натуральным Числам. Однако даже второпорядковая логика не способна предоставить все интуитивно прозрачные различения, которые для нас были бы естественны. Например, все и только одни прогрессии (progressions) имеют Второпорядковую структуру, относящуюся к Натуральным Числам, но если выбрать конкретную прогрессию, можно в ней отличить под-прогрессии, в который «расстояния» между последовательными числами сохраняются от тех, в которой не сохраняются (увеличиваются; пример, четные числа vs. простых чисел). Значит, пока структурное понятие прогрессии определимо в языке второго порядка, то для прогрессии с увеличивающимися (или постоянными) «расстояниями» это не имеет место. Один пример, который будет важен и ниже. Возьмем аддитивную группу целых чисел <I, +, 1, −1>. Здесь не надо добавлять 0 как отдельный элемент, т.к. мы уже можем определить понятия идентичности (тождества?). Но нужно иметь и 1, и −1 как отдельные элементы т.к. их нельзя определить в терминах аддитивности (сложения). Если нам дана бесконечная прогрессия в (+ и – бесконечность) с неопределимыми элементами, мы можем не идентифицировать повторно 1 и −1. Рассмотрим число 3 и последовательность звездочек, обозначенную «A». Если дано «средняя точка», или 0, в последовательности B недостаточно средств для того, чтобы найти 1 и −1, поскольку мы не знаем, какое направление положительное (+). Но если задать положительное (или отрицательное) направление мы можем воссоздать положения 1 и −1 в последовательности C. Это показывает, как паттерны с различаемыми позициями, ориентациями или цветами требуют более изощренных средств для определения их, нежели без различаемых позиций, ориентаций или цветов и т.д.

4 Позиции и их идентичность

Ключевым для моей версии структурализма является тезис, согласно которому об идентичности положений (позиций) можно говорить только относительно конкретного паттерна, в границах которого выделяется эта позиция. Итак, если взять позиции x и y в паттерне P, x=y или xy. Раньше я сравнивал позиции с геометрическими точками, которые не имеют никакой структуры, которые нельзя идентифицировать или различать по признакам вне структуры. Чтобы это пояснить более конкретно, рассмотрим углы треугольника на рис. 4 и рис. 5. Предположим, что сначала нам показали рис. 4, а потом рис. 5. Кто-то может спросить: «Является ли угол C первого треугольника углом F второго треугольника?». Ответить можно так: «В настоящем виде вопрос не имеет смысла. Если они рассматриваются как конкретные рисунки, мы не знаем, какой из них был нарисован первым или получен из первого путем вращения». Но можно сказать сильнее. Если они рассматриваются как структуры вне зависимости от того, как и когда были нарисованы, то лучше выразиться, что просто у нас нет средств узнать, является ли C идентичным F, это просто не относится к делу. Я использовал эту идею, чтобы разрешить задачу (головоломку) Бенасеррафа. Математика не может считать никакое определение чисел через множества корректным. Можно использовать определения Цермело, фон Неймана или Фреге-Рассела, равно как и много других для тех или иных конкретных целей. Бенасерраф отсюда заключил, что числа не являются множествами. Действительно, они не являются объектами. Мой ответ таков: каждое определение схватывает разные вхождения паттерна чисел в паттерн множеств. Однако не имеет отношение к делу положение вхождения паттерна числа в паттерн множества и их идентичность вне определенного контекста. Таким образом, редукция одного числа к множеству подобна идентификации вхождения одного паттерна в другой, и поэтому неверно думать, что лишь один способ редукции является единственно верным. Более того, не имеет отношения к делу вопрос о том, являются ли числа множествами или нет. Являются ли числа объектами? Я утверждаю, что да, но не потому, что они в действительности являются ими или являются объектами в некотором независимом контексте. Скорее, их можно считать объектами в том же смысле, что и Фреге — благодаря тому, что они попадают в поле первопорядковых переменных теории чисел. Существуют ли числа? Снова я утверждаю, что да. Я отношу себя к математическим реалистам, но не хочу здесь защищать эту точку зрения. Вне относительно реализма можно сказать, что задача математики исследовать паттерны (либо путем открытия, либо путем конструирования), и разговор о математических объектах — позициях в паттерне — есть способ такого исследования. Этот разговор касается того, как могут быть организованы объекты. Разговор о возможностях может стать разговором о реальностях. Как положения эти объекты должны подчиняться иным критериям существования (legitimacy) по сравнению с не-положениями.

5 Возражения

Некоторые философы попытались опровергнуть мой тезис, что положение в одном паттерне имеет значение для идентичности с положениями в другом паттерне. Это возражение может быть также представлено в следующем виде. Согласно лейбницевскому принципу тождества неразличимых, должен иметь место следующий случай: если x и y — различные положения в одном паттерне, тогда должно быть некоторое свойство, характеризующее отношение, которое определимо в терминах паттерна, которое позволяет их отличать. Это справедливо для числа 0, которое отлично от других чисел, поскольку не имеет предшественника (predecessor). Действительно, аддитивная группа целых чисел <I, +, 1, −1> имеет положения, которые нельзя отличить через рациональные свойства, ассоцинированных с ней. Предположим, что “Fx” — одноместный предикат определяемый в терминах «+», не относится к 1 или –1. Тогда 1 удовлетворяет “Fx” т.т.т. когда ему удовлетворяет 1. Это не единственный пример: комплексные числа i и –i не могут быть различимы с помощью предикатов, которые определяются в структуре, за исключением тех, которые относятся к i и –i. Точки в геометрическом пространстве также неразличимы; равно и симметричные узлы в симметрических группах; равно как положения в «вырожденных» структурах, таких как кардиналы или безреберные (edgeless) графы, которые имеют иных отношений за исключением тождества и нетождества. Приводя эти примеры, можно еще возразить, что либо 1) тождество 1 с +1, +i с –i и каждой точки в пространстве с любой другой и т.д.; либо 2) исключить симметричные математические структуры из моей теории; либо 3) отказаться от моего тезиса, касающегося идентичности позиций в различных структурах. Две первые альтернативы безусловно неприемлемы, а принятие последней подрывает мое решение задачи Бенасеррафа.

6 Ответ на возражения

Повольте мне разделить мои контрпримеры на те, которые касаются симметричных структур с различимыми элементами, такими как +1 и –1 в аддитивных группах целых чисел, с одной стороны, и те, которые касаются неразличимых элементов, таких, как евклидово пространство, с другой. Предлагая примеры первого рода, мои критики не учли структурную релятивность. Аддитивная группа целых чисел есть структура с различимыми элементами, и именно таковым является поле чисел. Таким образом, это структура не является перво- или второпорядковой структурой с логической точки зрения. Нам нужна более сильная базисная теория для описания такого рода структур. Если принять это положение, то видно, что рассмотрение изоморфизма этих структур мы должны зафиксировать различимые элементы точно также как фиксируем другие структурные отношения и операции. Смена $+1$ на -1 в аддитивной группе показывает, что нет свойства определимого в ней, которое позволяло отличать $+1$ от -1 за исключением прямого обращения к этим числам. Но это не является возражением моей точке зрения, т.к. взаимозаменяемость не является структурой, которая сохраняется путем несохранения неразличимых элементов в этой структуре. Короче говоря, мои критики используют слишком узкое понятие структурного свойства. Можно все это представить и иначе. Предположим, что меня попросили сделать тождественную копию паттерна, который мной обозначен как «последовательность C» на рис. 3. Это не последовательности A или B. Более того, проекции последовательности C на рис. 3 на своего рода экран требует сохранения его положения, цвета и обозначенных (отмеченных) элементов. Аналогичное справедливо при создании изоморфного ее образа. С. Шапиро и Дж. Лэдиман другим способом продемонстрировали, что мои критики требуют слишком многого. Последние фактически требуют то, что Лейбниц называл абсолютная различимость — если x и y различимы, то они требуют истинности одного предиката, но не другого. Но Шапиро и Лэдиман заметили, что Куайн признавал более слабые типы различимости, которые позволяют нас различать 1 от -1 в указанных выше терминах. Например, 1 больше -1, но не наоборот. Куайн называл различимость через асимметричное отношение, подобное данному, относительной различимостью. Он также признавал слабую различимость двух объектов, если они находятся в симметричных, но нерефлексивных отношениях. Мы можем различить в слабом смысле i от –i с помощью отношения, которое относится к положительному расстоянию в комплексном пространстве. Конечно. Если допустить числовую различимость, т.е. фактически не-тождество (non-identity), как отношение, то два любых объекта различимы в слабом смысле. К сожалению, эти соображения не касаются структур, не имеющих различимых элементов или которые включают положения, допускающие только слабую различимость посредством не-тождественности. Трудность здесь состоит в том, что моя критика направлена против истолкования тождества или чего-то иного в его собственных терминах как структурного отношения для объектов со слабой различимостью. Мои критики полагают, что если две вещи различимы, то должно быть что-то такое, отличное от них самих, которое позволяет их различать. Мои критики могут быть правы относительно обычных объектов, существующих в пространстве и времени, но как показывает пример безреберных графов, это вовсе не справедливо относительно любого математического объекта, представляем ли мы математических объект в виде положений в паттерне или иным способом. Зачем требовать наличия дополнительных положений в паттернах? Я думаю, мы не должны этого делать. Мы должны забыть о попытках индивидуализировать положения в кардиналах и других симметричных структурах. Кардинальность ТРИ имеет три различимых положения. Это свойство структуры — даже если его не удается обнаружить посредством нахождения некоторых нетривиальных отношений между положениями. Мы неявно признаем это свойство, когда требуем наличие структурного изоморфизма не только в целях сохранения структурных отношений; но чтобы различить 1 и –1 нужно сопоставлять различные образы различным членам этой области.

7 Заключение

Мы выяснили, что в случае симметричных структур важны соображения структурной релятивности, также как и введения различимых элементов, ориентаций, метрик и т.д. в дополнение к логическим средствам языка. Это может быть важно для нарушения симметрии. Из примеров с кардинальностью следует, что некоторые свойства структуры, а именно те, которые сохраняются при изоморфизме, не могут быть редуцируемы к нетривиальным свойствам или отношениям между позициями.

Одно замечание. Мои критики — это Юкка Керанен и Фрэзер МакБрайд (см. ссылки ниже). Хартри Филд и Джон Бургесс также обращали внимание на трудность с i и –i.

Благодарности.

Я благодарю В. Бажанова, Ю. Керанена, М. Лэйна, К. МакЛарти, Дж. Розенберга Т., Хофвебера и С. Шапиро за полезные обсуждения или обмен мнениями в переписке. Я много получил от чтения неопубликованной статьи Дж. Лэдимана.

Литература

[1] Benacerraf, Paul, “What numbers could not be” originally published in the Philosophical Review in 1965, reprinted in Benacerraf and Putnam, *Philosophy of Mathematics*, Cambridge: Cambridge University Press, 1983.

[2] Keranen, Jukka, “The Identity Problem for Realist Structuralism,” *Philosophia Mathematica* (2001)

[3] Keranen, Jukka, “The Identity Problem for Realist Structuralism II: A Reply to Shapiro” in MacBride (2006)

[4] Ladyman, James, “On the Identity and Diversity of Objects in a Structure” Unpublished.

[5] MacBride, Fraser, *Identity and Modality*, Oxford: Clarendon Press, 2006.

[6] Quine, W.V., “Grades of Discriminability” in W. V. Quine, *Theories and Things*, Cambridge, Mass: Harvard, 1981.

[7] Resnik, Michael D., “Mathematics as a Science of Patterns: Ontology and Reference,” *Nous* 15, (1981)

[8] Resnik, Michael D., *Mathematics as a Science of Patterns*, Oxford: Clarendon Press, 1997.

[9] Shapiro, Stewart, “Structure and Identity” in MacBride (2006).

[10] Shapiro, Stewart, “The Governance of Identity” in MacBride (2006).

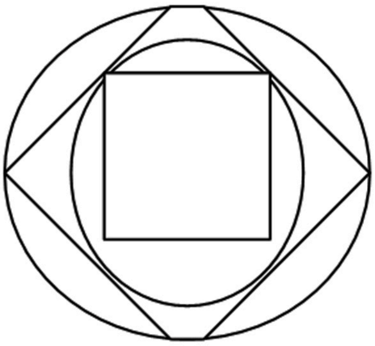
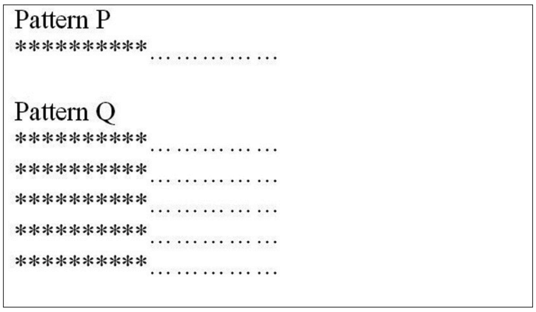


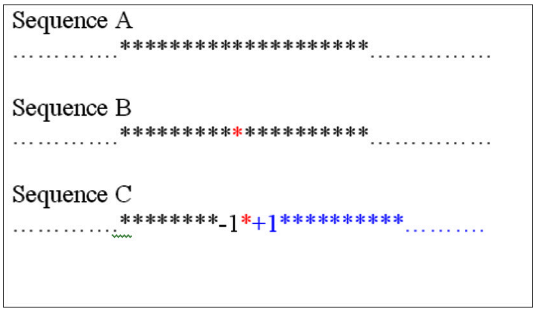
Рис. 1



Pattern P
**********……………

Pattern Q
**********……………
**********……………
**********……………
**********……………
**********……………

Рис. 2



Sequence A
…………..********************……………

Sequence B
…………..*********************……………

Sequence C
…………..********-1*+1**********……….

Рис. 3

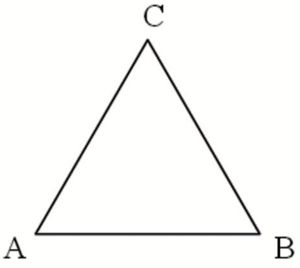


Рис. 4

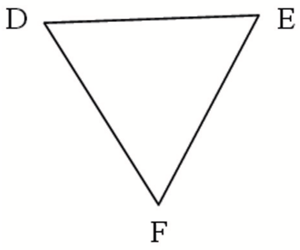


Рис. 5

Импликативные расширения регулярных логик Клини

Н. Е. Томова

ABSTRACT. The family of regular 3-valued Kleene's logics (strong, weak and intermediate) are considered as bases for other logics. Extentions of regular logics by implicative connectives ("natural" implication) are considered. In conclusion all exententions presented as a lattice.

Ключевые слова: трехзначные логики, регулярные логики Клини, импликация, расширения регулярных логик

1 Введение

В [3] С. Клини описал свойство регулярности, оно является необходимым условием для того, чтобы логические связки моделировали рекурсивные функции, вычисление значения которых никогда не оканчивается. С этой целью, пишет Клини, таблицы для связок должны быть регулярными в следующем смысле: «*данный столбец (строка) содержит 1 в строке (столбце) для 1/2 только при условии, что этот столбец (строка) состоит целиком из 1; аналогично для 0*». В этой же работе Клини представил две трехзначные регулярные логики — сильную логику Клини $\mathbf{K_3}$ и слабую логику Клини $\mathbf{K_3^w}$. В дальнейшем, следуя С. Клини [3, §64], под трехзначной логикой будет пониматься некоторое множество логических связок.

М. Фиттинг [14] указал на существование промежуточной регулярной логики **Lisp** ($\mathbf{K_3^{\rightarrow}}$). Логика **Lisp**, а также взаимоотношения между регулярными логиками подробно рассмотрены в [4][1].

---

[1] В этой же работе представлена еще одна промежуточная регулярная логика **Twin Lisp**, которая функционально эквивалентна **Lisp**. Поскольку данные системы функционально эквивалентны, достаточно рассмотреть одну.

Итак, в качестве регулярных логик будем рассматривать логики вида: $\{\sim, \vee, \wedge\}$, где $\sim$ — регулярное отрицание, $\vee$, $\wedge$ — регулярные дизъюнкция и конъюнкция соответственно[2].

Сильная логика Клини $\mathbf{K_3}$ есть логика с исходными связками $\sim$[3], $\vee$, $\wedge$, где $\vee$, $\wedge$ определяются сильными регулярными таблицами:

$\vee$	1	$\frac{1}{2}$	0
1	1	1	1
$\frac{1}{2}$	1	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{2}$
0	1	$\frac{1}{2}$	0

$\wedge$	1	$\frac{1}{2}$	0
1	1	$\frac{1}{2}$	0
$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{2}$	0
0	0	0	0

Слабая логика Клини $\mathbf{K_3^w}$ есть логика с исходными связками $\sim$, $\cup$, $\cap$, где $\cup$, $\cap$ определяются слабыми регулярными таблицами:

$\cup$	1	$\frac{1}{2}$	0
1	1	$\frac{1}{2}$	1
$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{2}$
0	1	$\frac{1}{2}$	0

$\cap$	1	$\frac{1}{2}$	0
1	1	$\frac{1}{2}$	0
$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{2}$
0	0	$\frac{1}{2}$	0

Промежуточная логика $\mathbf{K_3^{\rightarrow}}$ есть логика с исходными связками $\sim$, $\vee^{\rightarrow}$, $\wedge^{\rightarrow}$, где $\vee^{\rightarrow}$, $\wedge^{\rightarrow}$ определяются регулярными таблицами вида:

$\vee^{\rightarrow}$	1	$\frac{1}{2}$	0
1	1	1	1
$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{2}$
0	1	$\frac{1}{2}$	0

$\wedge^{\rightarrow}$	1	$\frac{1}{2}$	0
1	1	$\frac{1}{2}$	0
$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{2}$
0	0	0	0

Обратим внимание на взаимоотношение между регулярными логиками. В работе [8, с. 425] В.К. Финн определил слабые связки Клини через сильные:

---

[2] Заметим, что во всех регулярных логиках Клини в качестве исходных связок достаточно взять отрицание и дизъюнкцию (или конъюнкцию), поскольку все остальные связки классически выразимы через указанные. Однако для дальнейшего удобства в качестве исходных в каждой из регулярных логик были взяты три связки: отрицание, дизъюнкция и конъюнкция.

[3] $\sim$ определяется одинаково в каждой из регулярных логик: $\sim 0 = 1$, $\sim 1 = 0$, $\sim \frac{1}{2} = \frac{1}{2}$.

$$p \cap q = (p \wedge q) \vee (p \wedge \sim p) \vee (q \wedge \sim q).$$

Также было показано, что обратное — определение сильных связок посредством слабых — не может быть осуществлено. Таким образом, $\mathbf{K_3^w}$ функционально вложима в $\mathbf{K_3}$, т.е. $\mathbf{K_3^w} \subset \mathbf{K_3}$. Далее, в работе [4, с. 125] доказано, что логика **Lisp** является промежуточной между сильной и слабой логиками Клини, т.е. $\mathbf{K_3^w} \subset \mathbf{K_3^{\rightarrow}}$ и $\mathbf{K_3^{\rightarrow}} \subset \mathbf{K_3}$. Обратное же не имеет места. Более того, Е.Ю. Комендантской показано, что семейство регулярных логик Клини образует четырехэлементную решетку по отношению функционального вложения [4].

Существенной особенностью всех трехзначных регулярных логик является то, что при одном выделенном значении 1 в этих логиках класс тавтологий пуст. Это очевидно, поскольку все регулярные связки сохраняют значение $\frac{1}{2}$ при значении аргументов $\frac{1}{2}$. Во всех этих системах связка импликации не присутствует в качестве исходной связки, но ее можно ввести: $p \supset q$ есть $\sim p \vee q$. Теперь, если допустить, что в рассматриваемых регулярных логиках не одно, а два выделенных значения, 1 и $\frac{1}{2}$, то класс тавтологий совпадет со множеством общезначимых формул классической логики $\mathbf{C_2}$, но несложно заметить, что правило modus ponens не сохраняет тавтологию.

Однако возникает вопрос, что если регулярные логики Клини расширить за счет добавления связки импликации, обладающей некоторыми «хорошими» свойствами. Например, мы знаем, что трехзначная логика Бочвара $\mathbf{B_3}$ [1] есть слабая логика Клини $\mathbf{K_3^w}$ с импликацией $\rightarrow_5$[4], а при построении известной паранепротиворечивой логики **PCont** [5] берется сильная регулярная логика Клини $\mathbf{K_3}$ с импликацией $\rightarrow_{21}$[5]. Знаменитую трехзначную логику Лукасевича можно представить как $\mathbf{K_3}+\rightarrow_2$. Указанные три логики являются наиболее известными представителями семейства трехзначных логик. См. подробно об этом в [2].

Представляет интерес систематически рассмотреть импликативные расширения всех трех регулярных логик Клини и представить эти расширения в виде решетки. Именно это и является целью данной статьи.

---

[4] Импликации с указанными номерами см. ниже.

[5] Указанная импликация встречается впервые в работе [17].

2 Определения и вспомогательные утверждения

Введем необходимые определения.

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 1. Логика S функционально вложима в логику S', если все связки логики S могут быть определены посредством связок логики S'.

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 2. Логика S функционально эквивалентна логике S', если

(1) логика S функционально вложима в логику S' и

(2) логика S' функционально вложима в логику S.

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 3. Пусть V_3 есть $\{0, \frac{1}{2}, 1\}$ и D есть множество выделенных значений. Импликацию $\rightarrow$ будем называть *естественной*, если она обладает следующими свойствами:

(1) **C**-расширение, т.е. ограничение $\rightarrow$ на подмножество $\{0, 1\}$ множества V_3 суть обычная классическая связка импликации.

(2) Нормальность в смысле Лукасевича–Тарского [19, p. 134], т.е. если $x \rightarrow y \in D$ и $x \in D$, то $y \in D$.

(3) Согласованность с частичным порядком на V_3: если $x \leq y$, то $x \rightarrow y \in D$.[6]

(4) $x \rightarrow y \in V_3$, в остальных случаях.

Тогда, согласно определению 3, при $D = \{1\}$ имеем всего 6 импликаций:

$\rightarrow$	1	$\frac{1}{2}$	0
1	1	a	0
$\frac{1}{2}$	1	1	b
0	1	1	1

---

[6] Заметим, что в [21, p. 179-180] Е. Расёва вводит понятие *импликативной логики*, откуда следует более строгое условие, чем (3), а именно:

$$x \leq y \text{ е.т.е. } x \rightarrow y \in D \text{ (отношение предпорядка).}$$

Но тогда выпадает, например, импликация $\rightarrow_{21}$ из логики **PCont** и, вообще, выпадают логики с хорошими *стандартными* свойствами (см. ниже).

где $a \in \{0, \frac{1}{2}\}$ и $b \in \{0, \frac{1}{2}, 1\}$.

При $D = \{1, \frac{1}{2}\}$ имеем 24 импликации:

$\to$	1	$\frac{1}{2}$	0
1	1	b	0
$\frac{1}{2}$	a	a	0
0	1	a	1

где $a \in \{1, \frac{1}{2}\}$ и $b \in \{0, \frac{1}{2}, 1\}$.

Заметим, что 2 пары импликаций[7] совпадают как при $D = \{1\}$, так и при $D = \{1, \frac{1}{2}\}$, поэтому имеется всего 28 уникальных импликаций, удовлетворяющих условиям (1)–(4) определения 3.

Для дальнейшего удобства перенумеруем полученные импликации и приведем соответствующие им таблицы истинности:

$D = \{1\}$

$\to_1$	1	$\frac{1}{2}$	0
1	1	$\frac{1}{2}$	0
$\frac{1}{2}$	1	1	0
0	1	1	1

$\to_2$	1	$\frac{1}{2}$	0
1	1	$\frac{1}{2}$	0
$\frac{1}{2}$	1	1	1
0	1	1	1

$\to_3$	1	$\frac{1}{2}$	0
1	1	$\frac{1}{2}$	0
$\frac{1}{2}$	1	1	$\frac{1}{2}$
0	1	1	1

$\to_4$	1	$\frac{1}{2}$	0
1	1	0	0
$\frac{1}{2}$	1	1	0
0	1	1	1

$\to_5$	1	$\frac{1}{2}$	0
1	1	0	0
$\frac{1}{2}$	1	1	1
0	1	1	1

$\to_6$	1	$\frac{1}{2}$	0
1	1	0	0
$\frac{1}{2}$	1	1	$\frac{1}{2}$
0	1	1	1

$D = \{1, \frac{1}{2}\}$

$\to_7$	1	$\frac{1}{2}$	0
1	1	1	0
$\frac{1}{2}$	1	1	0
0	1	1	1

$\to_8$	1	$\frac{1}{2}$	0
1	1	1	0
$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{2}$	1	0
0	1	1	1

$\to_9$	1	$\frac{1}{2}$	0
1	1	1	0
$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{2}$	1	0
0	1	$\frac{1}{2}$	1

---

[7] В предложенном ниже перечне это импликации $\to_1$ и $\to_4$.

$\to_{10}$	1	$\frac{1}{2}$	0
1	1	1	0
$\frac{1}{2}$	1	1	0
0	1	$\frac{1}{2}$	1

$\to_{11}$	1	$\frac{1}{2}$	0
1	1	$\frac{1}{2}$	0
$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{2}$	1	0
0	1	1	1

$\to_{12}$	1	$\frac{1}{2}$	0
1	1	$\frac{1}{2}$	0
$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{2}$	1	0
0	1	$\frac{1}{2}$	1

$\to_{13}$	1	$\frac{1}{2}$	0
1	1	$\frac{1}{2}$	0
$\frac{1}{2}$	1	1	0
0	1	$\frac{1}{2}$	1

$\to_{14}$	1	$\frac{1}{2}$	0
1	1	0	0
$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{2}$	1	0
0	1	1	1

$\to_{15}$	1	$\frac{1}{2}$	0
1	1	0	0
$\frac{1}{2}$	1	1	0
0	1	$\frac{1}{2}$	1

$\to_{16}$	1	$\frac{1}{2}$	0
1	1	0	0
$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{2}$	1	0
0	1	$\frac{1}{2}$	1

$\to_{17}$	1	$\frac{1}{2}$	0
1	1	1	0
$\frac{1}{2}$	1	$\frac{1}{2}$	0
0	1	1	1

$\to_{18}$	1	$\frac{1}{2}$	0
1	1	1	0
$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{2}$	0
0	1	1	1

$\to_{19}$	1	$\frac{1}{2}$	0
1	1	1	0
$\frac{1}{2}$	1	$\frac{1}{2}$	0
0	1	$\frac{1}{2}$	1

$\to_{20}$	1	$\frac{1}{2}$	0
1	1	1	0
$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{2}$	0
0	1	$\frac{1}{2}$	1

$\to_{21}$	1	$\frac{1}{2}$	0
1	1	$\frac{1}{2}$	0
$\frac{1}{2}$	1	$\frac{1}{2}$	0
0	1	1	1

$\to_{22}$	1	$\frac{1}{2}$	0
1	1	$\frac{1}{2}$	0
$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{2}$	0
0	1	1	1

$\to_{23}$	1	$\frac{1}{2}$	0
1	1	$\frac{1}{2}$	0
$\frac{1}{2}$	1	$\frac{1}{2}$	0
0	1	$\frac{1}{2}$	1

$\to_{24}$	1	$\frac{1}{2}$	0
1	1	$\frac{1}{2}$	0
$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{2}$	0
0	1	$\frac{1}{2}$	1

$\to_{25}$	1	$\frac{1}{2}$	0
1	1	0	0
$\frac{1}{2}$	1	$\frac{1}{2}$	0
0	1	1	1

$\to_{26}$	1	$\frac{1}{2}$	0
1	1	0	0
$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{2}$	0
0	1	1	1

$\to_{27}$	1	$\frac{1}{2}$	0
1	1	0	0
$\frac{1}{2}$	1	$\frac{1}{2}$	0
0	1	$\frac{1}{2}$	1

$\to_{28}$	1	$\frac{1}{2}$	0
1	1	0	0
$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{2}$	0
0	1	$\frac{1}{2}$	1

Среди приведенных таблиц присутствуют таблицы, соответствующие импликациям известных трехзначных логик: $\to_3$ —

импликация Лукасевича [18] в $\mathbf{Ł_3}$; $\to_5$ — импликация логики Бочвара [1] в $\mathbf{B_3}$; $\to_{21}$ — импликация Яськовского [17], затем появившаяся в [12] и в [5] (логика **PCont**); импликация $\to_2$ появилась независимым образом в [24] и [20] с целью сохранения сиандартой теоремы дедукции в $\mathbf{Ł_3}$; $\to_{25}$ — импликация Собочиньского [25], которая появляется затем в логике **RM3** [10]. Две импликации, уже упоминаемые нами, следующие: $\to_1$ — импликация логики Гейтинга $\mathbf{G_3}$ (1930 г.) и стандартная импликация Решера $\to_4$ [22]. Импликация $\to_7$ встречается в паранепротиворечивой логике Сетте $\mathbf{P_1}$ [23]. Подробно обо всех этих логиках см. в [2].

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 4. Расширением логики S назовем некоторую логику S', которая представляет собой пополнение исходного множества связок логики S связкой, которая не может быть определена посредством исходных связок системы S.

Далее нас будут интересовать импликативные расширения регулярных логик Клини за счет добавления связки естественной импликации.

Поскольку в каждой регулярной логике в качестве исходной связки присутствует регулярное отрицание $\sim$, поэтому прежде чем приступить к непосредственному рассмотрению импликативных расширений регулярных логик, докажем ряд утверждений относительно систем с исходными связками $\sim$ и $\to_i$ $(1 \leq i \leq 28)$.

УТВЕРЖДЕНИЕ 5. *Логики со связками* $\sim$, $\to_1$ *и* $\sim$, $\to_6$ *функционально эквивалентны.*

Доказательство. Используем определения 1 и 2; доказательство утверждения следует из следующих соотношений:

$$\begin{aligned} &(1) \quad p \to_1 q = \sim q \to_6 \sim p, \\ &(2) \quad p \to_6 q = \sim q \to_1 \sim p. \end{aligned}$$

Q.E.D.

УТВЕРЖДЕНИЕ 6. *Логики со связками* $\sim$, $\to_3$ *и* $\sim$, $\to_{12}$ *функционально эквивалентны.*

Доказательство.

(1) Заметим, логика со связками $\sim, \to_3$ есть трехзначная логика Лукасевича $\mathbf{Ł_3}$. В силу функциональной предполноты $\mathbf{Ł_3}$ [7][8], очевидно, что посредством $\sim$ и $\to_3$ определима импликация $\to_{12}$.

(2) Покажем, что посредством множества связок $\{\sim, \to_{12}\}$ определимы связки из множества $\{\sim, \to_3\}$:

$$p \to_3 q = \sim (p \to_{12} q) \to_{12} \sim (q \to_{12} \sim p).$$

Q.E.D.

УТВЕРЖДЕНИЕ 7. *Логики со связками $\sim, \to_5$ и $\sim, \to_7$ функционально эквивалентны.*

Доказательство. Доказательство утверждения следует из следующих соотношений:

$$(1) \quad p \to_5 q = \sim q \to_7 \sim p,$$
$$(2) \quad p \to_7 q = \sim q \to_5 \sim p.$$

Q.E.D.

УТВЕРЖДЕНИЕ 8. *Логики со связками $\sim, \to_{14}$ и $\sim, \to_{15}$ функционально эквивалентны.*

Доказательство. Доказательство утверждения следует из соотношений:

$$(1) \quad p \to_{14} q = \sim q \to_{15} \sim p,$$
$$(2) \quad p \to_{15} q = \sim q \to_{14} \sim p.$$

Q.E.D.

УТВЕРЖДЕНИЕ 9. *Логики со связками $\sim, \to_{17}$ и $\sim, \to_{25}$ функционально эквивалентны.*

---

[8] Логика L — функционально предполна, если она не является функционально полной, но добавление к L связки, которая не выразима посредством исходных связок логики L, превращает L с этой связкой в функционально полную логику.

Доказательство. Доказательство утверждения следует из соотношений:

$$\begin{aligned}
&(1) \quad p \rightarrow_{17} q = (q \rightarrow_{25} {\sim} p) \rightarrow_{25} (p \rightarrow_{25} q),\\
&(2) \quad p \rightarrow_{25} q = (({\sim} q \rightarrow_{17} {\sim} p) \rightarrow_{17} {\sim} (p \rightarrow_{17} q)).
\end{aligned}$$

Q.E.D.

УТВЕРЖДЕНИЕ 10. *Логики со связками* $\sim$, $\rightarrow_{18}$ *и* $\sim$, $\rightarrow_{21}$ *функционально эквивалентны.*

Доказательство. Доказательство утверждения следует из соотношений:

$$\begin{aligned}
&(1) \quad p \rightarrow_{18} q = p \rightarrow_{21} {\sim} (q \rightarrow_{21} {\sim} p),\\
&(2) \quad p \rightarrow_{21} q = (q \rightarrow_{18} p) \rightarrow_{18} (p \rightarrow_{18} q).
\end{aligned}$$

Q.E.D.

УТВЕРЖДЕНИЕ 11. *Логики со связками* $\sim$, $\rightarrow_{19}$ *и* $\sim$, $\rightarrow_{26}$ *и* $\sim$, $\rightarrow_{27}$ *попарно функционально эквивалентны.*

Доказательство. Сначала покажем эквивалентность логик со связками $\sim$, $\rightarrow_{26}$ и $\sim$, $\rightarrow_{27}$. Это верно в силу следующих соотношений:

$$\begin{aligned}
&(1) \quad p \rightarrow_{27} q = {\sim} q \rightarrow_{26} {\sim} p,\\
&(2) \quad p \rightarrow_{26} q = {\sim} q \rightarrow_{27} {\sim} p.
\end{aligned}$$

Далее покажем, что логика со связками $\sim$, $\rightarrow_{19}$ функционально эквивалентна логике со связками $\sim$, $\rightarrow_{27}$. Это справедливо в силу следующих соотношений:

$$\begin{aligned}
&(1) \quad p \rightarrow_{27} q = p \rightarrow_{19} {\sim} (p \rightarrow_{19} {\sim} q),\\
&(2) \quad p \rightarrow_{19} q = p \rightarrow_{27} {\sim} (p \rightarrow_{27} {\sim} q).
\end{aligned}$$

Q.E.D.

УТВЕРЖДЕНИЕ 12. *Логики со связками* $\sim$, $\rightarrow_{20}$ *и* $\sim$, $\rightarrow_{22}$ *и* $\sim$, $\rightarrow_{28}$ *попарно функционально эквивалентны.*

Доказательство. Сначала покажем эквивалентность логик со связками $\sim$, $\to_{20}$ и $\sim$, $\to_{28}$. Это верно в силу следующих соотношений:

$$\begin{aligned} &(1) \quad p \to_{20} q = (q \to_{28} {\sim} p) \to_{28} (p \to_{28} q), \\ &(2) \quad p \to_{28} q = {\sim}((\sim q \to_{20} {\sim} p) \to_{20} {\sim} (p \to_{20} q)). \end{aligned}$$

Далее покажем, что логика со связками $\sim$, $\to_{20}$ функционально эквивалентна логике со связками $\sim$, $\to_{22}$. Это справедливо в силу следующих соотношений:

$$\begin{aligned} &(1) \quad p \to_{22} q = ({\sim} p \to_{20} {\sim} q) \to_{20} (p \to_{20} q), \\ &(2) \quad p \to_{20} q = (q \to_{22} {\sim} p) \to_{22} (p \to_{22} q). \end{aligned}$$

Q.E.D.

УТВЕРЖДЕНИЕ 13. *Посредством множества связок* $\{\sim, \to_i\}$ $(1 \leq i \leq 16)$ *выразим* J_1*-оператор*[9].

Доказательство.

$$J_1(p) = {\sim}(p \to_i {\sim} p), \text{ где } 1 \leq i \leq 16.$$

Q.E.D.

3 Импликативные расширения регулярных логик

3.1 Расширения $\mathbf{K_3}$

Последовательно опишем все импликативные расширения $\mathbf{K_3}$. Напомним, $\mathbf{K_3}$ есть логика с исходным множеством связок $\{\sim, \vee, \wedge\}$.

УТВЕРЖДЕНИЕ 14. *Расширение* $\mathbf{K_3}$ *посредством добавления импликации* $\to_i$ $(1 \leq i \leq 16)$ *есть трехзначная логика Лукасевича* $\mathbf{Ł_3}$.

---

[9] Трехзначные j_i-операторы впервые введены в [1]:

$$j_i(x) = \begin{cases} 1, \text{если } x = i \\ 0, \text{если } x \neq i. \end{cases}$$

Доказательство. Напомним, в нашем обозначении логика Лукасевича **Ł3** есть логика с исходными связками $\sim$ и $\to_3$.

Покажем, что логика со связками $\sim$ и $\to_3$ функционально эквивалентна логике со связками $\sim$, $\vee$, $\wedge$, $\to_i$ $(1 \leq i \leq 16)$.

Это справедливо, с одной стороны, в силу функциональной предполноты логики **Ł3**, с другой стороны, в силу того, что в каждой из 16 систем со связками $\{\sim, \vee, \wedge, \to_i\}(1 \leq i \leq 16)$ выразима импликация $\to_3$. Последнее обоснуем так. Расширение множества связок $\{\sim, \vee, \wedge\}$ посредством J_0-оператора есть трехзначная логика Лукасевича. Это очевидно, если принять во внимание (а) в **Ł3** определимы все J_i-операторы; (б) определение импликации Лукасевича (в нашем обозначении $\to_3$) в работе [24]:

$$p \to_3 q = (\sim p \vee q) \vee \sim J_0(\sim p \wedge q).$$

Таким образом, достаточно посредством множества связок $\{\sim, \vee, \wedge, \to_i\}(1 \leq i \leq 16)$ определить J_0-оператор. А это имеет место в силу ранее доказанного утверждения 13, а также соотношений:

$$J_1(p) = J_0(\sim p) \text{ и } J_0(p) = J_1(\sim p).$$

Итак, утверждение 14 доказано. Q.E.D.

УТВЕРЖДЕНИЕ 15. *Расширение* **K3** *посредством* $\to_i$ $(i \in \{17, 18\})$ *есть логика* **PCont**.

Доказательство. Покажем, что логика со связками $\sim, \vee, \wedge, \to_i$ $(i \in \{17, 18\})$ функционально эквивалентна логике со связками $\sim, \vee, \wedge, \to_{21}$.

В работе [11] доказано, что логика **PCont** функционально эквивалентна логике **RM3**, т.е. в нашем обозначении логика со множествами связок $\{\sim, \vee, \wedge, \to_{21}\}$ и $\{\sim, \vee, \wedge, \to_{25}\}$ функционально эквивалентны.

Доказательство утверждения 15 следует из вышесказанного, а также из ранее обоснованных утверждений 9 и 10. Q.E.D.

УТВЕРЖДЕНИЕ 16. *Расширение* **K3** *посредством* $\to_i$ $(i \in \{19, 20, 22, 26, 27, 28\})$ *есть логика* **PCont**.

Доказательство. В силу ранее доказанных утверждений 11 и 12, для доказательства утверждения 16 достаточно показать, что:
(1) логика со множеством исходных связок $\{\sim, \vee, \wedge, \rightarrow_{19}\}$ функционально эквивалентна логике со множеством связок $\{\sim, \vee, \wedge, \rightarrow_{20}\}$;
(2) логика со связками $\sim, \vee, \wedge, \rightarrow_{19}$ функционально эквивалентна логике со связками $\sim, \vee, \wedge, \rightarrow_{18}$. (Последняя в силу утверждения 15 есть логика **PCont**.)

Итак, (1) имеет место, т.к.

$$p \rightarrow_{19} q = (p \rightarrow_{20} q) \vee q,$$
$$p \rightarrow_{20} q = (p \vee \sim p) \vee (p \rightarrow_{20} q).$$

(2) справедливо, т.к.:

$$p \rightarrow_{19} q = (q \rightarrow_{18} p) \rightarrow_{18} (p \rightarrow_{18} q) \text{ и}$$
$$p \rightarrow_{18} q = ((p \rightarrow_{19} q) \wedge p) \rightarrow_{19} (p \wedge \sim q).$$

Таким образом, утверждение 16 доказано. Q.E.D.

УТВЕРЖДЕНИЕ 17. *Расширение* $\mathbf{K_3}$ *посредством* $\rightarrow_i$ $(i \in \{23, 24\})$ *есть логика* **PCont**.

Доказательство. Для доказательства утверждения 17 достаточно показать, что:
(1) логика со связками $\sim, \vee, \wedge, \rightarrow_{23}$ функционально эквивалентна логике со связками $\sim, \vee, \wedge, \rightarrow_{24}$;
(2) логика со связками $\sim, \vee, \wedge, \rightarrow_{23}$ функционально эквивалентна логике со связками $\sim, \vee, \wedge, \rightarrow_{21}$ (**PCont**).

(1) справедливо в силу следующих соотношений:

$$p \rightarrow_{23} q = (p \rightarrow_{24} q) \vee q \text{ и}$$
$$p \rightarrow_{24} q = (p \rightarrow_{23} q) \wedge (p \vee \sim p).$$

(2) справедливо в силу соотношений:

$$p \rightarrow_{23} q = (p \rightarrow_{21} q) \wedge (q \vee \sim q) \text{ и}$$
$$p \rightarrow_{21} q = (p \rightarrow_{23} q) \vee \sim (q \rightarrow_{23} (p \wedge (\sim q \wedge q))).$$

Итак, утверждение 17 доказано. Q.E.D.

Таким образом, при рассмотрении расширений сильной регулярной логики Клини $\mathbf{K_3}$ посредством класса *естественных* импликаций получили, с одной стороны, *класс логик, по функциональным свойствам эквивалентных логике Лукасевича* $\textbf{Ł}_\mathbf{3}$, с другой стороны, *класс логик, функционально эквивалентных логике* **PCont**.

Таблица разбиений всех 28 импликаций на классы выглядит следующим образом:

$\textbf{Ł}_\mathbf{3}$	**PCont**
$\rightarrow_i$ $(1 \leq i \leq 16)$	$\rightarrow_i$ $(17 \leq i \leq 28)$

Заметим, что расширение **PCont** константой 1 приводит к другой известной паранепротиворечивой логике $\mathbf{J_3}$, которая по функциональным свойствам есть $\textbf{Ł}_\mathbf{3}$. Тогда расширения $\mathbf{K_3}$ можно представить так:

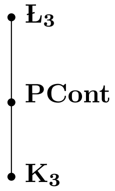


Рис. 1

3.2 Расширения $\mathbf{K_3^{\rightarrow}}$

Последовательно рассмотрим все импликативные расширения логики $\mathbf{K_3^{\rightarrow}}$. Напомним, промежуточная регулярная логика **Lisp** есть логика с исходным множеством связок $\{\sim, \vee^{\rightarrow}, \wedge^{\rightarrow}\}$.

УТВЕРЖДЕНИЕ 18. *Расширение* $\mathbf{K_3^{\rightarrow}}$ *посредством добавления импликации* $\rightarrow_i$ $(1 \leq i \leq 16)$ *есть трехзначная логика Лукасевича* $\textbf{Ł}_\mathbf{3}$.

Доказательство. Напомним, в нашем обозначении логика Лукасевича $\textbf{Ł}_\mathbf{3}$ есть логика с исходными связками $\sim$ и $\rightarrow_3$.

Покажем, что логика со связками $\sim$ и $\rightarrow_3$ функционально эквивалентна логике со связками $\sim, \vee^{\rightarrow}, \wedge^{\rightarrow}, \rightarrow_i$ $(1 \leq i \leq 16)$.

Это справедливо, с одной стороны, в силу функциональной предполноты логики $\mathbf{Ł_3}$, с другой стороны, в силу того, что в каждой из 16 систем со связками $\{\sim, \vee^{\rightarrow}, \wedge^{\rightarrow}, \rightarrow_i\}(1 \leq i \leq 16)$ выразима импликация $\rightarrow_3$. Последнее очевидно имеет место, если принять во внимание следующее:
(а) расширение $\mathbf{K_3^{\rightarrow}}$ посредством любого из трех J_i-операторов представляет собой трехзначную логику Лукасевича [6];
(б) ранее доказанное утверждение 13.
Таким образом, утверждение 18 доказано. Q.E.D.

УТВЕРЖДЕНИЕ 19. *Расширение* $\mathbf{K_3^{\rightarrow}}$ *посредством* $\rightarrow_i$ $(i \in \{17, 18, 21, 25\})$ *есть логика* **PCont**.

Доказательство. В силу ранее доказанных утверждений 9 и 10, а также утверждений о том, что расширение $\mathbf{K_3}$ посредством $\rightarrow_i$ $(i \in \{17, 18, 21, 25\})$ есть логика **PCont**, и учитывая, что $\mathbf{K_3^{\rightarrow}} \subset \mathbf{K_3}$, для доказательства утверждения 19 достаточно посредством каждого множества связок $\{\sim, \vee^{\rightarrow}, \wedge^{\rightarrow}, \rightarrow_{21}\}$ и $\{\sim, \vee^{\rightarrow}, \wedge^{\rightarrow}, \rightarrow_{25}\}$ определить сильную регулярную дизъюнкцию $\vee$. Это можно сделать, например, так:

$$p \vee q = (\sim q \rightarrow_{21} p) \vee^{\rightarrow} (\sim p \rightarrow_{21} q) \text{ и}$$
$$p \vee q = ((\sim p \rightarrow_{25} q) \vee^{\rightarrow} p) \vee^{\rightarrow} q.$$

Утверждение 19 доказано. Q.E.D.

УТВЕРЖДЕНИЕ 20. *Расширение* $\mathbf{K_3^{\rightarrow}}$ *посредством* $\rightarrow_i$ $(i \in \{19, 20, 22, 26, 27, 28\})$ *есть логика* **PCont**.

Доказательство. В силу ранее доказанных утверждений 11 и 12, а также утверждений о том, что расширение $\mathbf{K_3}$ посредством $\rightarrow_i$ $(i \in \{19, 20, 22, 26, 27, 28\})$ есть логика **PCont**, и учитывая, что $\mathbf{K_3^{\rightarrow}} \subset \mathbf{K_3}$, для доказательства утверждения 20 достаточно посредством каждого множества связок, например, $\{\sim, \vee^{\rightarrow}, \wedge^{\rightarrow}, \rightarrow_{20}\}$ и $\{\sim, \vee^{\rightarrow}, \wedge^{\rightarrow}, \rightarrow_{27}\}$, определить сильную регулярную дизъюнкцию $\vee$. Это можно сделать, например, так:

$$p \vee q = ((p \rightarrow_{20} \sim q) \vee^{\rightarrow} q) \rightarrow_{20} (p \vee^{\rightarrow} q) \text{ и}$$
$$p \vee q = ((\sim p \rightarrow_{27} q) \vee^{\rightarrow} p) \vee^{\rightarrow} q.$$

Утверждение 20 доказано. Q.E.D.

УТВЕРЖДЕНИЕ 21. *Расширение* $\mathbf{K_3^{\to}}$ *посредством импликации* $\to_{23}$ *функционально эквивалентно расширению* $\mathbf{K_3^{\to}}$ *посредством импликации* $\to_{24}$.

Доказательство. Доказательство утверждения следует из следующих соотношений:

(1) $p \to_{23} q = q \vee^{\to} (p \to_{24} q)$ и

(2) $p \to_{24} q = ((p \to_{23} q) \wedge^{\to} p) \vee^{\to} (p \to_{23} q)$.

Утверждение 21 доказано. Q.E.D.

Далее, определим, что представляет с функциональной точки зрения логика со связками $\sim$, $\vee^{\to}$, $\wedge^{\to}$, $\to_{23}$. Ранее было показано (утверждение 17), что логика со связками $\sim$, $\vee$, $\wedge$, $\to_{23}$ есть логика **PCont**. Тогда, учитывая, что $\mathbf{K_3^{\to}} \subset \mathbf{K_3}$, можем утверждать, что логика со связками $\sim$, $\vee^{\to}$, $\wedge^{\to}$, $\to_{23}$ функционально вложима в логику **PCont**. Однако не можем говорить о функциональной эквивалентности этих логик, поскольку если бы это имело место, то посредством множества связок $\{\sim, \vee^{\to}, \wedge^{\to}, \to_{23}\}$ была бы выразима, например, импликация $\to_{25}$ или, что аналогично, дизъюнкция $\vee_{25}$ (где $p \to_{25} q = \sim p \vee_{25} q$). Обратимся к таблице для $\vee_{25}$, очевидно, дизъюнкция $\vee_{25}$ коммутативна: $1 \vee_{25} \frac{1}{2} = 1$ и $\frac{1}{2} \vee_{25} 1 = 1$. Подобную дизъюнкцию посредством связок $\sim$, $\vee^{\to}$, $\wedge^{\to}$, $\to_{23}$ определить невозможно в силу их некоммутативности[10]. Подобное рассуждение дает основание для следующего утверждения:

УТВЕРЖДЕНИЕ 22. *Расширение* $\mathbf{K_3^{\to}}$ *посредством* $\to_i$ $(i \in \{23, 24\})$ *не является функционально эквивалентным логике* **PCont**.

Строгое доказательство утверждения 22 остается открытой проблемой.

Обозначим логику со связками $\sim$, $\vee^{\to}$, $\wedge^{\to}$, $\to_{23}$ (а также функционально эквивалентные ей логики) как $\mathbf{T^2}$.

---

[10] Очевидно, логика со связками $\sim$, $\vee^{\to}$, $\wedge^{\to}$, $\to_{23}$ функционально эквивалентна логике со связками $\sim$, $\vee^{\to}$, $\wedge^{\to}$, $\vee_{23}$ (где $p \vee_{23} q = \sim p \to_{23} q$). Дизъюнкция $\vee_{23}$, так же как и связки $\vee^{\to}$, $\wedge^{\to}$, является некоммутативной.

Таким образом, при рассмотрении расширений промежуточной регулярной логики Клини $\mathbf{K_3^{\to}}$ посредством класса естественных импликаций получили, три класса логик: с одной стороны, *класс логик, по функциональным свойствам эквивалентных логике Лукасевича* $\mathbf{Ł_3}$, с другой стороны, *класс систем, эквивалентных логике* $\mathbf{PCont}$, а также *класс логик, эквивалентных логике* $\mathbf{T^2}$. Эта логика встречается *впервые*.

Таблица разбиений всех 28 импликаций на классы выглядит следующим образом:

$\mathbf{Ł_3}$	$\mathbf{PCont}$	$\mathbf{T^2}$
$\to_i$ $(1 \leq i \leq 16)$	$\to_i$ $(i \in \{17, 18, 19, 20, 21,$ $22, 25, 26, 27, 28\})$	$\to_i$ $(i \in \{23, 24\})$

Таким образом, расширения $\mathbf{K_3^{\to}}$ можно представить так:

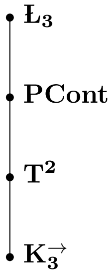


Рис. 2

3.3 Расширения $\mathbf{K_3^w}$

Рассмотрим все импликативные расширения логики $\mathbf{K_3^w}$. Напомним, $\mathbf{K_3^w}$ есть логика с исходным множеством связок $\{\sim, \cup, \cap\}$.

Учитывая ранее доказанное утверждение 6, а также тот факт, что логика Лукасевича $\mathbf{Ł_3}$ есть логика с исходными связками $\sim$ и $\to_3$, очевидно, что расширение $\mathbf{K_3^w}$ посредством добавления импликации $\to_i$ $(i \in \{3, 12\})$ есть трехзначная логика Лукасевича $\mathbf{Ł_3}$.

Для дальнейшего исследования нам потребуется следующее утверждение.

УТВЕРЖДЕНИЕ 23. *Расширение* $\mathbf{K_3^w}$ *посредством добавления* J_1*-оператора или* J_0*-оператор есть логика* $\mathbf{B_3}$.

Доказательство. Напомним, в связи с проблемой анализа логических антиномий Д.А. Бочвар [1] построил трехзначную логику $\mathbf{B_3}$, которая имеет следующие исходные связки $\sim$, $\cap$, $\vdash$, где $\sim$ и $\cap$ определяются так же, как в слабой логике Клини $\mathbf{K_3^w}$, а связка $\vdash$ называется внешним утверждением и есть не что иное, как J_1-оператор. Таким образом, учитывая, что $J_1(p) = J_0(\sim p)$ и $J_0(p) = J_1(\sim p)$, утверждение 23 доказано. Q.E.D.

УТВЕРЖДЕНИЕ 24. *Расширение* $\mathbf{K_3^w}$ *посредством* $\to_i$ $(i \in \{4, 5, 7\})$ *есть логика* $\mathbf{B_3}$.

Доказательство. В работе [8, с. 401] показано, что логика со связками $\sim$, $\cup$, $\cap$, $\to_5$ есть $\mathbf{B_3}$.

Тогда, учитывая ранее доказанные утверждение 7, 13, 23 для доказательства утверждения 24 достаточно показать, что логика со связками $\sim$, $\cup$, $\cap$, $\to_4$ функционально вложима в логику со связками $\sim$, $\cup$, $\cap$, $\to_5$. Это следует из соотношения:

$$p \to_4 q = (p \to_5 q) \cap (\sim q \to_5 \sim p).$$

Утверждение 24 доказано. Q.E.D.

УТВЕРЖДЕНИЕ 25. *Расширение* $\mathbf{K_3^w}$ *посредством* $\to_i$ $(i \in \{18, 19, 20, 21, 22, 26, 27, 28\})$ *есть логика* $\mathbf{PCont}$.

Доказательство. В силу ранее доказанных утверждений 10, 11, 12, а также утверждений о том, что расширение $\mathbf{K_3^{\to}}$ посредством $\to_i$ $(i \in \{18, 19, 20, 21, 22, 26, 27, 28\})$ есть логика $\mathbf{PCont}$, и учитывая тот факт, что $\mathbf{K_3^w} \subset \mathbf{K_3^{\to}}$, для доказательства утверждения 25 достаточно посредством каждого множества связок, например, $\{\sim, \cup, \cap, \to_{19}\}$, $\{\sim, \cup, \cap, \to_{20}\}$ и $\{\sim, \cup, \cap, \to_{21}\}$, определить регулярную дизъюнкцию $\vee^{\to}$. Это можно сделать, например, так:

$$p \vee^{\to} q = ((p \to_{19} q) \cap (\sim q \to_{19} p)) \cup p,$$
$$p \vee^{\to} q = (\sim p \to_{20} q) \cup p,$$
$$p \vee^{\to} q = (\sim p \to_{21} q) \cup p.$$

Утверждение 25 доказано. Q.E.D.

УТВЕРЖДЕНИЕ 26. *Расширение* $\mathbf{K_3^w}$ *посредством добавления импликации* $\rightarrow_i$ $(i \in \{1, 2, 6, 8, 9, 10, 11, 14, 15, 16\})$ *есть трехзначная логика Лукасевича* $\mathbf{Ł_3}$.

Доказательство. Покажем, что логика со связками $\sim$ и $\rightarrow_3$ ($\mathbf{Ł_3}$) функционально эквивалентна логике со связками $\sim$, $\cup$, $\cap$, $\rightarrow_i$ $(i \in \{1, 2, 6, 8, 9, 10, 11, 14, 15, 16\})$.

Это справедливо, с одной стороны, в силу функциональной предполноты логики $\mathbf{Ł_3}$, с другой стороны, в силу того, что в каждой из 10 систем со связками $\sim$, $\cup$, $\cap$, $\rightarrow_i$ $(i \in \{1, 2, 6, 8, 9, 10, 11, 14, 15, 16\})$ выразима импликация $\rightarrow_3$. Последнее имеет место, если принять во внимание ранее доказанные утверждения 5 и 8, а также следующие выразимости[11]:

$$p \rightarrow_3 q = (p \rightarrow_i q) \cap (\sim q \rightarrow_i \sim p), \text{ где } i \in \{1, 2\};$$
$$p \rightarrow_3 q = ((\sim q \rightarrow_i p) \cup (p \rightarrow_i \sim q)) \cap (p \rightarrow_5 q), \text{ где } i \in \{8, 11, 14\};$$
$$p \rightarrow_3 q = \sim (q \rightarrow_i p) \cup (p \rightarrow_5 q), \text{ где } i \in \{9, 16\};$$
$$p \rightarrow_3 q = ((\sim p \rightarrow_{10} q) \cup (q \rightarrow_{10} \sim p)) \cap (p \rightarrow_5 q).$$

Таким образом, утверждение 26 доказано. Q.E.D.

УТВЕРЖДЕНИЕ 27. *Расширение* $\mathbf{K_3^w}$ *посредством* $\rightarrow_{24}$ *функционально эквивалентно логике* $\mathbf{T^2}$*, т.е. логике со связками* $\sim$, $\vee^{\rightarrow}$, $\wedge^{\rightarrow}$, $\rightarrow_i$ $(i \in \{23, 24\})$.

Доказательство. Поскольку $\mathbf{K_3^w} \subset \mathbf{K_3^{\rightarrow}}$ и логика со связками $\sim$, $\vee^{\rightarrow}$, $\wedge^{\rightarrow}$, $\rightarrow_{24}$ есть логика $\mathbf{T^2}$, то для доказательства утверждения 27 достаточно посредством связок $\sim$, $\cup$, $\cap$, $\rightarrow_{24}$ выразить регулярную дизъюнкцию $\vee^{\rightarrow}$. Это можно сделать, например, так:

$$p \vee^{\rightarrow} q = (\sim (\sim p \rightarrow_{24} q) \rightarrow_{24} ((q \rightarrow_{24} \sim p) \cap p)) \cup p.$$

Утверждение 27 доказано. Q.E.D.

Далее, в работе [15] рассмотрены алгебраические свойства трехзначной логики бессмысленности — логики $\mathbf{Z}$. Исходные

---

[11] При выражении $\rightarrow_3$ в некоторых случаях будет использована связка $\rightarrow_5$. Очевидно, в силу ранее обоснованных утверждений 13 и 23, что $\rightarrow_5$ определима посредством множества связок $\sim$, $\cup$, $\cap$, $\rightarrow_i$ $(i \in \{1, 2, 6, 8, 9, 10, 11, 14, 15, 16\})$.

связки логики **Z**: инволюция $\sim$, слабая регулярная конъюнкция $\cap$ и дизъюнкция трехзначной логики Эббингауза $\vee^e$ [13][12]. Другими словами, логика **Z** есть расширение слабой регулярной логики Клини посредством добавления дизъюнкции Эббингауза. Однако это аналогично тому, что к $\mathbf{K_3^w}$ добавить импликацию $\rightarrow_{25}$, поскольку

$$p \rightarrow_{25} q = {\sim} p \vee^e q.$$

Тогда, учитывая данное рассуждение, а также ранее доказанное утверждение 9, справедливо следующее:

УТВЕРЖДЕНИЕ 28. *Расширение* $\mathbf{K_3^w}$ *посредством добавления импликации* $\rightarrow_i$ $(i \in \{17, 25\})$ *есть логика* **Z**.

Возникает вопрос о соотношении логики **Z** с другими импликативными расширениями логики $\mathbf{K_3^w}$. В силу ранее доказанного утверждения 25, а также предложенного А.А. Солощенковым определения $\rightarrow_{25}$ посредством $\sim$ и $\rightarrow_{21}$:

$$p \rightarrow_{25} q = {\sim}(p \rightarrow_{21} q) \rightarrow_{21} {\sim}(q \rightarrow_{21} p),$$

можем говорить о том, что логика **Z** функционально вложима в логику **PCont**. С другой стороны, логика **PCont** не вложима в логику **Z**. Это следует из работы [15], поскольку в логике **Z** не определима сильная регулярная дизъюнкция (конъюнкция).

Далее, рассмотрим расширение $\mathbf{K_3^w}$ посредством добавления $\rightarrow_{13}$. Для удобства логику со связками $\sim$, $\cup$, $\cap$, $\rightarrow_{13}$ обозначим $\mathbf{T^3}$.

В силу ранее доказанных утверждений 13 и 23, очевидно, что логика Бочвара $\mathbf{B_3}$ функционально вложима в логику $\mathbf{T^3}$. Однако $\mathbf{T^3}$ не вложима в $\mathbf{B_3}$[13].

Можно доказать следующее утверждение.

УТВЕРЖДЕНИЕ 29. *Логика* **Z** *функционально вложима в логику* $\mathbf{T^3}$.

Доказательство. Доказательство следует из соотношения:

---

[12] Напомним, что логика Эббингауза $\mathbf{E_3}$ представляет собой расширение логики Бочвара $\mathbf{B_3}$ за счет добавления дизъюнкции $\vee^e$.

[13] Из построения нормальных форм (I-J-с.д.н.ф.) для логики $\mathbf{B_3}$ [8] следует, что импликация $\rightarrow_{13}$ не определима в $\mathbf{B_3}$.

$$p \to_{25} q = (p \to_{13} q) \to_{13} ((\sim q \to_{13} \sim p) \to_{13} p).$$

Утверждение 29 доказано. Q.E.D.

В то же время, $\mathbf{T^3}$ не вложима в $\mathbf{Z}$, поскольку все связки логики $\mathbf{Z}$ сохраняют значение $\frac{1}{2}$ при значении аргументов $\frac{1}{2}$, в то время как свойства импликации логики $\mathbf{T^3}$ таковы, что $\frac{1}{2} \to_{13} \frac{1}{2} = 1$.

С другой стороны, $\mathbf{T^3}$ функционально вложима в $\mathbf{Ł_3}$. Однако $\mathbf{Ł_3}$ не вложима в $\mathbf{T^3}$, в противном случае, в $\mathbf{T^3}$ была бы выразима дизъюнкция $\vee$, которая есть $max(x, y) : 1 \vee \frac{1}{2} = 1$ и $\frac{1}{2} \vee 1 = 1$. Дизъюнкцию $\vee$ посредством связок $\sim$, $\cup$, $\cap$, $\to_{13}$ определить невозможно в силу некоммутативности $\vee_{13}$: $1 \vee_{13} \frac{1}{2} = \frac{1}{2}$, $\frac{1}{2} \vee_{13} 1 = 1$ и $\frac{1}{2} \vee_{13} 0 = 0$, $0 \vee_{13} \frac{1}{2} = \frac{1}{2}$.[14]

Далее, рассмотрим расширение $\mathbf{K_3^w}$ посредством добавления $\to_{23}$. Для удобства логику со связками $\sim$, $\cup$, $\cap$, $\to_{23}$ обозначим $\mathbf{T^1}$. Относительно логики $\mathbf{T^1}$ докажем утверждения 30-32.

УТВЕРЖДЕНИЕ 30. *Логика* $\mathbf{T^1}$ *функционально вложима в логику* $\mathbf{Z}$.

Доказательство. Для доказательства достаточно посредством связок $\sim$, $\cup$, $\cap$, $\to_{25}$ определить импликацию $\to_{23}$. Это можно сделать, например, так:

$$p \to_{23} q = (p \to_{25} q) \cup q.$$

Утверждение 30 доказано. Q.E.D.

УТВЕРЖДЕНИЕ 31. *Логика* $\mathbf{T^1}$ *функционально вложима в логику* $\mathbf{T^2}$.

Доказательство. Для доказательства достаточно посредством связок $\sim$, $\cup$, $\cap$, $\to_{24}$ определить импликацию $\to_{23}$. Это можно сделать, например, так:

$$p \to_{23} q = ((p \to_{24} q) \to_{24} (\sim q \cap q)) \cup q).$$

Утверждение 31 доказано. Q.E.D.

---

[14] Очевидно, логика со связками $\sim$, $\cup$, $\cap$, $\to_{13}$ функционально эквивалентна логике со связками $\sim$, $\cup$, $\cap$, $\vee_{13}$ (где $p \vee_{13} q = \sim p \to_{13} q$).

УТВЕРЖДЕНИЕ 32. *Логика* $\mathbf{T^1}$ *функционально вложима в логику* $\mathbf{B_3}$.

Доказательство. Для доказательства достаточно посредством связок $\sim$, $\cup$, $\cap$, $\rightarrow_5$ определить импликацию $\rightarrow_{23}$. Это можно сделать, например, так:

$$p \rightarrow_{23} q = (\sim q \rightarrow_5 \sim p) \cup q.$$

Утверждение 32 доказано. Q.E.D.

С другой стороны, свойства связок логики $\mathbf{T^1}$ таковы, что ни $\mathbf{Z}$, ни $\mathbf{T^2}$, ни $\mathbf{B_3}$ не вложимы в $\mathbf{T^1}$.

$\mathbf{B_3} \not\subset \mathbf{T^1}$, поскольку знаем, что в $\mathbf{B_3}$ выразимы все J_i-операторы, с другой стороны, очевидно, что в $\mathbf{T^1}$ нет ни одного J_i-оператора.

$\mathbf{T_2} \not\subset \mathbf{T^1}$, т.к. в противном случае, учитывая доказанные утверждения 31 и 32, получили бы, что $\mathbf{T^2}$ и $\mathbf{T^1}$ функционально эквивалентны и $\mathbf{T^2} \subset \mathbf{B_3}$. Однако $\mathbf{T_2} \not\subset \mathbf{B_3}$, поскольку из построения нормальных форм (I-J-с.д.н.ф.) для логики $\mathbf{B_3}$ [8] следует, что импликация $\rightarrow_{24}$ (импликация логики $\mathbf{T^2}$) не определима в $\mathbf{B_3}$.

$\mathbf{Z} \not\subset \mathbf{T^1}$, т.к. в противном случае, учитывая доказанные утверждения 30 и 32, получили бы, что $\mathbf{Z}$ и $\mathbf{T^1}$ функционально эквивалентны и $\mathbf{Z} \subset \mathbf{B_3}$. Однако $\mathbf{Z} \not\subset \mathbf{B_3}$, поскольку из построения нормальных форм (I-J-с.д.н.ф.) для логики $\mathbf{B_3}$ [8] следует, что импликация $\rightarrow_{21}$ (импликация логики $\mathbf{Z}$) не определима в $\mathbf{B_3}$.

Итак, при рассмотрении расширений слабой регулярной логики Клини $\mathbf{K_3^w}$ посредством класса *естественных* импликаций получили *семь* логик. Эти логики назовем *базовыми*. Таблица разбиений всех 28 импликаций на классы выглядит следующим образом:

Ł₃	**PCont**	$\mathbf{B_3}$	$\mathbf{Z}$	$\mathbf{T^1}$	$\mathbf{T^2}$	$\mathbf{T^3}$
$\rightarrow_i$ $(i \in \{1,2,3,6,$ $8,9,10,11,$ $12,14,15,16\})$	$\rightarrow_i$ $(i \in \{18,19,$ $20,21,22,$ $26,27,28\})$	$\rightarrow_i$ $(i \in \{4,5,7\})$	$\rightarrow_i$ $(i \in \{17,25\})$	$\rightarrow_{23}$	$\rightarrow_{24}$	$\rightarrow_{13}$

Решетка базовых трехзначных логик весьма примечательна:

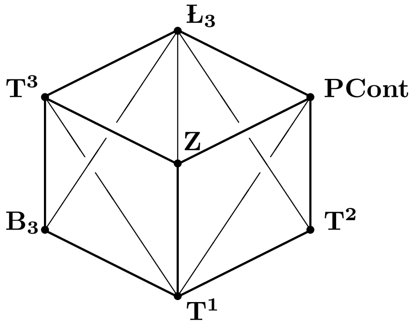


Рис. 3

Итак, семь базовых логик образуют решетку по отношению функционального вложения одной логики в другую. Это отношение является отношением порядка, поскольку оно рефлексивно, антисимметрично и транзитивно. К этому стоит добавить, что свойства связок $\cup$ и $\cap$ таковы, что они образуют дистрибутивную квази-решетку (т.е. решетку без законов поглощения), а вместе со связкой $\sim$ выполняют законы Де Моргана.

Важно отметить, что расширения $\mathbf{K_3^w}$ не образуют булеву решетку, поскольку теоретико-множественное объединение множеств связок логики $\mathbf{B_3}$ и логики $\mathbf{T^2}$ дает трехзначную логику $\mathbf{Ł_3}$. Посредством множества связок $\{\sim, \cup, \cap, \to_5, \to_{24}\}$[15] можно определить импликацию Лукасевича ($\to_3$), например, так:

$$p \to_3 q = ((q \to_{24} J_1(p)) \cap (p \to_{24} (J_0(q) \cap J_{\frac{1}{2}}(q))) \cup (J_1(q) \cup J_{\frac{1}{2}}(q)).$$

Далее, особо отметим логики $\mathbf{T^1}$, $\mathbf{T^2}$, $\mathbf{T^3}$, ранее не встречавшиеся в литературе. Они оказались *некоммутативными*, если мы стандартным образом (посредством $\sim$ и $\to_i$ $(i \in \{23, 24, 13\})$) определим в них дизъюнкции.

$\mathbf{T^1}$ с функциональной точки зрения является самым слабым расширением логики $\mathbf{K_3^w}$. В работе [9] описаны 11 предполных классов логики Бочвара $\mathbf{B_3}$, и логика $\mathbf{T^1}$ является одним из них (класс всех внутренних функций).

4 Решетка $\mathbf{L(K_3^w)}$ и другие трехзначные логики

Однако возникает вопрос, почему в приведенной классификации расширений слабой регулярной логики Клини $\mathbf{K_3^w}$ отсутствуют

---

[15] Напомним, посредством связок $\sim$, $\cup$, $\cap$, $\to_5$ выразимы все J_i-операторы.

логика Холдена $\mathbf{H_3}$ [16][16] и логика Эббингауза $\mathbf{E_3}$ [13], в основе которых также лежит $\mathbf{K_3^w}$. На рис. 4 приведем решетку $\mathbf{L}(\mathbf{K_3^w})$.

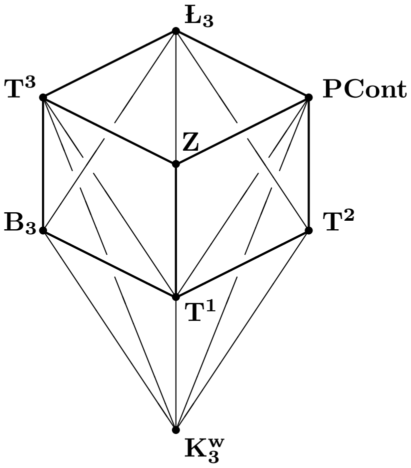


Рис. 4

Итак, логика $\mathbf{H_3}$ отсутствует в данной классификации, поскольку не содержит ни одну из 28 *естественных* импликаций. Известно, что эта логика находится между $\mathbf{K_3^w}$ и $\mathbf{B_3}$.

Логика Эббингауза $\mathbf{E_3}$ также не попадает в эту классификацию, поскольку содержит импликации из двух классов $\mathbf{B_3}$ и $\mathbf{Z}$ (см. таблицу разбиений 28 импликаций) и, что важно, заменить их на одну импликацию (импликацию какого-то одного класса) нельзя, т.е. $\mathbf{E_3}$ не является импликативным расширением $\mathbf{K_3^w}$. Чтобы получить $\mathbf{E_3}$, необходимо по крайней мере *2 раза* последовательно расширить $\mathbf{K_3^w}$: сначала расширить $\mathbf{K_3^w}$ до $\mathbf{B_3}$, а затем посредством любой импликации из класса $\mathbf{Z}$ до $\mathbf{E_3}$.[17]

$\mathbf{E_3}$ находится между $\mathbf{B_3}$ и $\mathbf{Ł_3}$. Интересно, что у $\mathbf{E_3}$ имеется некоммутативный напарник $\mathbf{T^4}$ (точно также как у $\mathbf{B_3}$ имеется $\mathbf{T^2}$, а у **PCont** имеется $\mathbf{T^3}$). Так же как $\mathbf{E_3}$ получается за счет расширения логики $\mathbf{B_3}$ посредством импликаций из класса $\mathbf{Z}$ (или за счет расширения логики $\mathbf{Z}$ посредством импликаций из

---

[16] Напомним, логику Холдена можно рассматривать как расширение $\mathbf{K_3^w}$ посредством добавления $J_{\frac{1}{2}}$-оператора.

[17] Аналогичным образом $\mathbf{E_3}$ можно получить, сначала расширив $\mathbf{K_3^w}$ до $\mathbf{Z}$, а затем посредством любой импликации из класса $\mathbf{B_3}$ до $\mathbf{E_3}$.

класса $\mathbf{B_3}$), аналогичным образом логика $\mathbf{T^4}$ получается расширением логики $\mathbf{T^2}$ посредством добавления импликаций из класса $\mathbf{Z}$ (или за счет расширения логики $\mathbf{Z}$ посредством импликаций из класса $\mathbf{T^2}$). Так же как $\mathbf{E_3}$, $\mathbf{T^4}$ не является импликативным расширением $\mathbf{K_3^w}$ и непосредственно в представленную классификацию не входит.

***

Суммируем полученные в ходе исследования результаты и представим импликативные расширения всех трех регулярных логик $\mathbf{K_3}$, $\mathbf{K_3^{\rightarrow}}$ и $\mathbf{K_3^w}$ следующим образом:

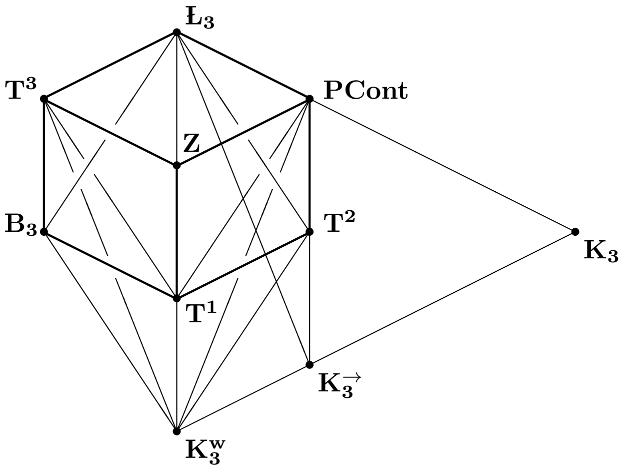


Рис. 5

Итак, в качестве импликативных расширений регулярных логик Клини выступают 7 *базовых* логик: $\mathbf{Ł_3}$, $\mathbf{PCont}$, $\mathbf{B_3}$, $\mathbf{Z}$, $\mathbf{T^3}$, $\mathbf{T^2}$ и $\mathbf{T^1}$. Таким образом, установлено, что для построения логик $\mathbf{Ł_3}$ и $\mathbf{PCont}$ в качестве основания может выступать любая регулярная логика, в основе логики $\mathbf{T^2}$ может лежать или $\mathbf{K_3^{\rightarrow}}$ или $\mathbf{K_3^w}$, в то время как логики $\mathbf{T^1}$, $\mathbf{Z}$, $\mathbf{T^3}$, $\mathbf{B_3}$ появляются исключительно как импликативные расширения слабой логики Клини $\mathbf{K_3^w}$.

Необходимо отметить, что во всех представленных импликативных расширениях, имеет место стандартная теорема дедукции, поскольку в каждой из 7 систем имеется такая импликация, что K и S являются тавтологиями:

$K.\, p \to (q \to p)$

$S.\, (p \to (q \to r)) \to ((p \to q) \to (p \to r)).$

Литература

[1] *Бочвар Д.А.* Об одном трехзначном исчислении и его применении к анализу парадоксов классического расширенного функциональого исчисления // Математический сборник. 1938. Т. 4. № 2. С. 287-308.

[2] *Карпенко А.С.* Многозначные логики. Серия «Логика и компьютер». М.: Наука, 1997.

[3] *Клини С.К.* Введение в метематематику. М.: ИЛ, 1957.

[4] *Комендантская Е.Ю.* Функциональная взаимовыразимость регулярных логик Клини // Логические исследования. Вып. 15. 2009. С. 116-128.

[5] *Розоноэр Л.И.* О выявлении противоречий в формальных теориях. I // Автоматика и телемеханика. 1983. № 6. С. 113-124.

[6] *Томова Н.Е.* О расширениях логики Lisp // Шестые Смирновские чтения: материалы Междунар. науч. конф., Москва, 17-19 июня 2009 г. М.: Современные тетради. 2009. С. 104-106.

[7] *Финн В.К.* О предполноте класса функций, соответствующего трехзначной логике Лукасевича // Научно-техническая информация. Серия 2. 1969. № 10. С. 35-38.

[8] *Финн В.К.* Аксиоматизация некоторых трехзначных исчислений высказываний и их алгебр // Философия и логика. М.: Наука, 1974. С. 398-438.

[9] *Финн В.К.* О критерии функциональной полноты для B3 // Исследования по формализованным языкам и неклассическим логикам. М.: Наука, 1974. С. 194-199.

[10] *Anderson A. R., Belnap N. D.* Entailment: The Logic of Relevance and Necessity. Princeton University Press. 1975.

[11] *Avron A.* Natural 3-valued logics — characterization and proof theory // The Journal of Symbolic Logic. 1991. Vol. 56. № 1. P. 276-294.

[12] *Batens D.* Paraconsistent extensional propositional logics // Logique et Analyse. 1980. Vol. 23. № 90-91. P. 127-139.

[13] *Ebbinghaus H.-G.* Uber eine pradikatenlogik mit partiell definierten Pradikaten und Funktionen // Arch. Math. Logik Grundlagenforsch. 1969. Bd. 12. P. 39-53.

[14] *Fitting M.* Kleene's three valued logics and their children // Fundamenta Informaticae. 1992. Vol. 20. P. 113-131.

[15] *Hałkowska K.* A note on matrices for systems of nonsens-logic // Studia Logica. 1989. Vol. 48. №4. P. 461-464.

[16] *Hallden S.* The Logic of Nonsense, Uppsala, 1949.

[17] *Jaśkowski S.* Rahunek zdan dla systemov dedukcyjnych sprzecznych // Studia Societatis Scientiarum Torunensis. 1948. 1(5), Sectio A (Engish translation: propositional calculus for contradictory dedactive systems // Studia Logica. 1969. Vol. 24. P. 143-157)

[18] *Łukasiewicz J.* O logice trójwartosciowey // Ruch Filozoficzny. 1920. Vol. 5. 170-171.(English translation: On three-valued logic // Łukasiewicz J. Selected works. PWN. Warszawa. 1970. P. 87-88.)

[19] *Łukasiewicz J., Tarski A.* Investigations into the sentential calculus // Łukasiewicz J. Selected Works. Amsterdam & Warszawa: North-Holland & PWN. 1970.

[20] *Monteiro A.* Construction des algèbres de Łukasiewicz trivalentes dans les algèbres de Boole monadiques, I // Mathematica Japonica. 1967. Vol. 12. P. 1-23.

[21] *Rasiowa H.* An Algebraic Approach to Non-classical Logics. Amsterdam: North-Holland. 1974.

[22] *Resher N.* Many-valued Logic. New York: McGraw-Hill. 1969.

[23] *Sette A.M.* On propositional calculus P1 // Mathematica Japonica. 1973. Vol. 16. P. 173-180.

[24] *Slupecki E., Bryll J., Prucnal T.* Some remarks on the three-valued logic of J. Łukasiewicz // Studia Logica. 1967. Vol. 21. P. 45-70.

[25] *Sobociński B.* Axiomatization of a partial system of three-valued calculus of propositions // The Journal of Computin Systems. 1952. Vol. 11. №1. P. 23-55.

Логика функций vs логика отношений

В. И. Шалак

ABSTRACT. It is proved that for any first-order theory with equality, the domain of interpretation of which contains at least two individuals, there exists mutually embeddable theory in language with functional symbols and only one-place predicate.

Ключевые слова: погружающая операция, функция, предикат

Довольно распространенной является точка зрения, что переход к современной логике, совершенный на рубеже XIX-XX вв., был связан с расширением выразительных возможностей ее языка за счет включения в него суждений об отношениях. Субъектно-предикатная структура предложений традиционной логики не позволяла выразить даже такое простое отношение как *«x больше y»*. С этой проблемой сталкивается Сократ в диалоге Платона «Теэтет».

> *«И значит, если бы тебе сказали, что один человек головою больше другого, а другой головою меньше, ты не принял бы этого утверждения, но решительно его отклонил, заявивши так: „Я могу сказать лишь одно — что всякая вещь, которая больше другой вещи, такова лишь благодаря большому, то есть она становится больше благодаря большому, а меньшее становится меньшим лишь благодаря малому, то есть мало делает его меньшим“. А если бы ты признал, что один человек головою больше, а другой меньше, тебе пришлось бы, я думаю, опасаться, как бы не встретить возражения: прежде всего в том, что большее, у тебя есть большее, а меньшее — меньшее по одной и той же причине, а затем и в том, что большее делает бо́льшим малое, — ведь голова то мала!»* [3, Теэтет, 100e-101a].

Считается, что переход к логике отношений был закономерным шагом, который благотворно сказался не только на самой логике, но и на общем развитии науки.

> *«Ограничение лишь предикатными предложениями роковым образом сказалось и на областях, лежащих вне сферы логики. Возможно, Рассел был прав, объясняя некоторые ошибки метафизики недостатками логики: если каждое предложение приписывает какому-то субъекту некоторый предикат, то, в сущности, существует лишь один субъект, некий абсолют, и каждое положение вещей сводится к тому, что абсолюту присущ определенный атрибут. Быть может, аналогичным образом всякую субстантивную метафизику можно объяснить как основанную на этой ошибке. ... названная ограниченность вызвала длительную задержку в развитии физики, породив, например, субстанциальное представление о материи. ... понятие абсолютного пространства обусловлено этой ошибкой логики. ... Когда Лейбниц осознал возможность использования предложений об отношениях, он смог придти к правильному истолкованию пространства: не местоположения тел, а их положения по отношению к другим телам, — вот в чем заключается элементарное положение дел. ... К сожалению, его борьба за релятивистское истолкование пространства со сторонниками ньютоновского абсолютного пространства была столь же безуспешной, как и его стремление расширить область логики. Лишь 200 лет спустя его идеи обрели признание: в логике благодаря созданию теории отношений, в физике — благодаря теории относительности»* [1, с.110-111].

Мы покажем, что вопреки устоявшемуся мнению язык свойств (одноместных отношений) и функций вполне достаточен для выражения тех же математических и физических идей, которые находят оформление в терминах многоместных отношений. С логической точки зрения, не было никакой необходимости для отказа от имевших богатую историю субстантивной метафизики и абсолютного пространства, о чем пишет Р. Карнап.

Напомним некоторые определения, связанные с понятием погружающих операций [4].

Пусть S — теория в языке первого порядка L. Принадлежность формулы A языку L будем обозначать посредством $A \in L$, а доказуемость формулы A в теории S — посредством $S \vdash A$. Поскольку теория понимается как дедуктивно замкнутое множество формул, то $S \vdash A$ означает то же самое, что и $A \in S$.

Пусть S_1 и S_2 — теории в языках L_1 и L_2. Рекурсивную функцию φ: $L_1 \to L_2$ называют операцией, *погружающей* теорию S_1 в S_2, если и только если для нее выполняется следующее условие:

$$S_1 \vdash A \Leftrightarrow S_2 \vdash \varphi(A).$$

Будем говорить, что теория S_1 *погружаема* в теорию S_2, если и только если существует операция, погружающая S_1 в S_2.

Теории S_1 и S_2 *взаимопогружаемы*, если и только если S_1 погружаема в S_2, и S_2 погружаема в S_1. Отношение взаимопогружаемости рефлексивно, симметрично и транзитивно [4, с. 110].

Будем говорить, что теория S_1 является *подтеорией* S_2, если и только если $S_1 \subseteq S_2$.

ЛЕММА 1. *Если теория S_1 является подтеорией S_2, то достаточным условием взаимопогружаемости S_1 и S_2 является существование рекурсивной функции $\varphi : L_2 \to L_1$, для которой выполняются следующие условия:*

1. $S_2 \vdash A \Rightarrow S_1 \vdash \varphi(A)$,

2. $S_1 \vdash \varphi(A) \Rightarrow S_1 \vdash A$ *для* $A \in L_1$,

3. $S_2 \vdash \varphi(A) \Rightarrow S_2 \vdash A$ *для* $A \in L_2$.

Доказательство. Операцией, погружающей теорию S_1 в теорию S_2, является тождественная функция $\imath(A) = A$.

+ 1. $A \in L_1$
+ 2. $S_1 \vdash A$
3. $S_1 \vdash \imath(A)$ - из 2 по определению $\imath$
4. $S_2 \vdash \imath(A)$ - из 3 по условию $S_1 \subseteq S_2$
5. $S_1 \vdash A \Rightarrow S_2 \vdash \imath(A)$ - из 2-4
+ 6. $S_2 \vdash \imath(A)$
7. $S_2 \vdash A$ - из 6 по определению $\imath$
8. $S_1 \vdash \varphi(A)$ - из 7 по условию 1)
9. $S_1 \vdash A$ - из 1,8 по условию 2)
10. $S_2 \vdash \imath(A) \Rightarrow S_1 \vdash A$ - из 6-9
11. $S_1 \vdash A \Leftrightarrow S_2 \vdash \imath(A)$ - из 5,10

+1. $A \in L_2$
2. $S_2 \vdash A \Rightarrow S_1 \vdash \varphi(A)$ - условие 1)
+3. $S_1 \vdash \varphi(A)$
4. $S_2 \vdash \varphi(A)$ - из 3 по условию $S_1 \subseteq S_2$
5. $S_2 \vdash A$ - из 1,4 по условию 3)
6. $S_1 \vdash \varphi(A) \Rightarrow S_2 \vdash A$ - из 3-5
7. $S_2 \vdash A \Rightarrow S_1 \vdash \varphi(A)$ - из 2,6

Q.E.D.

Пусть нам дана **теория $\mathbf{T_1}$** в языке исчисления предикатов первого порядка с равенством, одной из аксиом которой является формула:

$$(Ax\text{-}ab) \qquad\qquad \neg(a = b),$$

где a и b — замкнутые термы.

ЛЕММА 2. *Если P — n-местный предикатный символ языка теории T_1, то в ней доказуемы следующие формулы:*

1. $\exists y((P(\boldsymbol{x}) \mathbin{\&} y = a) \vee (\neg P(\boldsymbol{x}) \mathbin{\&} y = b))$,
2. $((P(\boldsymbol{x}) \mathbin{\&} y = a) \vee (\neg P(\boldsymbol{x}) \mathbin{\&} y = b)) \mathbin{\&} ((P(\boldsymbol{x}) \mathbin{\&} z = a) \vee (\neg P(\boldsymbol{x}) \mathbin{\&} z = b)) \supset y = z$,

где $\boldsymbol{x}$ — кортеж n-переменных.

Доказательство.

+1.	$P(\boldsymbol{x})$	
2.	$\vdash a = a$	- акс. равенства
3.	$P(\boldsymbol{x}) \mathbin{\&} a = a$	- из 1,2
4.	$(P(\boldsymbol{x}) \mathbin{\&} a = a) \vee (\neg P(\boldsymbol{x}) \mathbin{\&} a = b)$	- из 3
5.	$\exists y((P(\boldsymbol{x}) \mathbin{\&} y = a) \vee (\neg P(\boldsymbol{x}) \mathbin{\&} y = b))$	- из 4 по ∃в
+6.	$\neg P(\boldsymbol{x})$	
7.	$\vdash b = b$	- акс. равенства
8.	$\neg P(\boldsymbol{x}) \mathbin{\&} b = b$	- из 6,7
9.	$(P(\boldsymbol{x}) \mathbin{\&} a = a) \vee (\neg P(\boldsymbol{x}) \mathbin{\&} a = b)$	- из 8
10.	$\exists y((P(\boldsymbol{x}) \mathbin{\&} y = a) \vee (\neg P(\boldsymbol{x}) \mathbin{\&} y = b))$	- из 9 по ∃в
11.	$T_1 \vdash y((P(\boldsymbol{x}) \mathbin{\&} y = a) \vee (\neg P(\boldsymbol{x}) \mathbin{\&} y = b))$	- из 1-5, 6-10

+1.	$((P(\boldsymbol{x}) \mathbin{\&} y = a) \vee (\neg P\ (\boldsymbol{x}) \mathbin{\&} y = b)) \mathbin{\&} ((P(\boldsymbol{x}) \mathbin{\&} z = a) \vee (\neg P(\boldsymbol{x}) \mathbin{\&} z = b))$	
2.	$(P(\boldsymbol{x}) \mathbin{\&} y = a) \vee (\neg P(\boldsymbol{x}) \mathbin{\&} y = b)$	- из 1
3.	$(P(\boldsymbol{x}) \mathbin{\&} z = a) \vee (\neg P(\boldsymbol{x}) \mathbin{\&} z = b)$	- из 1
+4.	$P(\boldsymbol{x})$	
5.	$P(\boldsymbol{x}) \mathbin{\&} y = a$	- из 2,4

6. $P(\boldsymbol{x}) \,\&\, z = a$ - из 3,4
7. $y = a$ - из 5
8. $z = a$ - из 6
9. $y = z$ - из 7,8

+10. $\neg P(\boldsymbol{x})$

11. $\neg P(\boldsymbol{x}) \,\&\, y = b$ - из 2,10
12. $\neg P(\boldsymbol{x}) \,\&\, z = b$ - из 3,10
13. $y = b$ - из 11
14. $z = b$ - из 12
15. $y = z$ - из 13, 14
16. $y = z$ - из 4-9, 10-15
17. $T_1 \vdash ((P(\boldsymbol{x}) \,\&\, y = a) \vee (\neg P(\boldsymbol{x}) \,\&\, y = b)) \,\&\, ((P(\boldsymbol{x}) \,\&\, z = a) \vee (\neg P(\boldsymbol{x}) \,\&\, z = b)) \supset y = z$ - из 1-16

Q.E.D.

Рассмотрим **теорию $\mathbf{T_2}$**, полученную путем расширения языка теории T_1 за счет добавления для каждого n-местного предикатного символа P нового функционального символа f_P и принятия для каждого из них новой аксиомы:

$$(Ax\text{-}f_P) \qquad (P(\boldsymbol{x}) \,\&\, f_P(\boldsymbol{x}) = a) \vee (\neg P(\boldsymbol{x}) \,\&\, f_P(\boldsymbol{x}) = b),$$

где $\boldsymbol{x}$ — кортеж n-переменных.

ЛЕММА 3. *В теории T_2 доказуемы следующие формулы:*

1. $f_P(\boldsymbol{x}) = a \vee f_P(\boldsymbol{x}) = b$,
2. $P(\boldsymbol{x}) \equiv f_P(\boldsymbol{x}) = a$.

Доказательство.

+1. $P(\boldsymbol{x})$

2. $P(\boldsymbol{x}) \vee (f_P\ (\boldsymbol{x}) = b)$ - из 1
3. $\neg(\neg P(\boldsymbol{x}) \& f_P(\boldsymbol{x}) = b)$ - из 2
4. $P(\boldsymbol{x}) \& f_P(\boldsymbol{x}) = a$ - из 3 и $Ax\text{-}f_P$
5. $f_P(\boldsymbol{x}) = a$ - из 4
6. $f_P(\boldsymbol{x}) = a \vee f_P(\boldsymbol{x}) = b$ - из 5

+7.	$\neg P(\boldsymbol{x})$	
8.	$\neg P(\boldsymbol{x})\vee(f_P(\boldsymbol{x})= a)$	- из 7
9.	$\neg(P(\boldsymbol{x})\& f_P(\boldsymbol{x})= a)$	- из 8
10.	$\neg P(\boldsymbol{x})\& f_P(\boldsymbol{x})= b$	- из 9 и $Ax\text{-}f_P$
11.	$f_P(\boldsymbol{x})= b$	- из 10
12.	$f_P(\boldsymbol{x})= a \vee f_P(\boldsymbol{x})= b$	- из 11
13.	$T_2 \vdash f_P(\boldsymbol{x})= a \vee f_P(\boldsymbol{x})= b$	- из 1-6, 7-12

+1.	$f_P(\boldsymbol{x})= a$	
2.	$\neg(f_P(\boldsymbol{x})= b)$	- из 1, $Ax\text{-}ab$
3.	$P(\boldsymbol{x})\,\&\, f_P(\boldsymbol{x})= a$	- из 2, $Ax\text{-}f_P$
4.	$P(\boldsymbol{x})$	- из 3
5.	$f_P(\boldsymbol{x})= a \supset P(\boldsymbol{x})$	- 1-4
+6.	$P(\boldsymbol{x})$	
7.	$P(\boldsymbol{x})\,\& f_P(\boldsymbol{x})= a$	- из 6, $Ax\text{-}f_P$
8.	$f_P(\boldsymbol{x})= a$	- из 7
9.	$P(\boldsymbol{x})\supset f_P(\boldsymbol{x})= a$	- из 6-8
10.	$T_2 \vdash P(\boldsymbol{x})\equiv f_P(\boldsymbol{x})= a$	- из 5, 9

Q.E.D.

ЛЕММА 4. *Для всякой формулы A теории T_2 существует такая формула $\phi(A)$ языка теории T_1, что*

1. $T_2 \vdash A \equiv \phi(A)$,
2. $T_2 \vdash A \Rightarrow T_1 \vdash \phi(A)$,
3. $T_2 \vdash A \Rightarrow T_1 \vdash A$ *— если A принадлежит языку теории T_1.*

Эта теорема соответствует предложению 2.29 о введении новых функциональных символов из книги [2]. Условием его применимости является лемма 3 и определение теории T_2. Поэтому мы можем опустить ее доказательство.

ЛЕММА 5. *Теории T_1 и T_2 взаимопогружаемы.*

Доказательство. Так как теория T_1 является подтеорией T_2, достаточно найти функцию, удовлетворяющую условиям леммы 1.

Пусть ϕ — отображение теории T_2 в теорию T_1, определяемое в лемме 4. На основании свойства 2 функции ϕ из леммы 4 имеет место $T_2 \vdash A \Rightarrow T_1 \vdash \phi(A)$. Проверим выполнимость оставшихся двух условий.

+1. $A \in L_1$
+2. $T_1 \vdash \phi(A)$
3. $T_2 \vdash \phi(A)$ - из 2 , так как $T_1 \subseteq T_2$
4. $T_2 \vdash A \equiv \phi(A)$ - свойство 1 функции ϕ из леммы 4
5. $T_2 \vdash A$ - из 3, 4
6. $T_1 \vdash A$ - из 1, 5 по свойству 3 из леммы 4
7. $T_1 \vdash \phi(A) \Rightarrow T_1 \vdash A$ - из 2-6

+1. $A \in L_2$
+2. $T_2 \vdash \phi(A)$
3. $T_2 \vdash A \equiv \phi(A)$ - свойство 1 функции ϕ из леммы 4
4. $T_2 \vdash A$ - из 2, 3
5. $T_2 \vdash \phi(A) \Rightarrow T_2 \vdash A$ - из 2-4

Q.E.D.

Определим функцию α из языка теории T_2 в ее подъязык, содержащий лишь функциональные символы и единственный двухместный предикатный символ равенства.

- $\alpha(t_1 = t_2) \quad = \quad (t_1 = t_2)$
- $\alpha(P(t_1, \ldots, t_n)) \quad = \quad f_P(t_1, \ldots, t_n) = a$
- $\alpha(\neg A) \quad = \quad \neg\alpha(A)$
- $\alpha(A \nabla B) \quad = \quad \alpha(A) \nabla \alpha(B) \qquad \nabla \in \{\&, \vee, \supset, \equiv\}$
- $\alpha(QxB) \quad = \quad Qx\alpha(B) \qquad Q \in \{\exists, \forall\}$

Пусть формула A является аксиомой **теории $\mathbf{T_3}$**, если и только если $A = \alpha(B)$, где B собственная аксиома теории T_2.

ЛЕММА 6. *Теории T_3 и T_2 взаимопогружаемы.*

Доказательство. По определению теории T_3, ее язык является подъязыком теории T_2.

Если A — аксиома T_3, то $A = \alpha(B)$, где B собственная аксиома теории T_2. Так как в силу леммы 3(2), определения α, и теоремы 2.20 из [2] имеет место $T_2 \vdash B \equiv \alpha(B)$, то $T_2 \vdash \alpha(B)$. Отсюда следует, что всякое доказательство в теории T_3 одновременно является доказательством в T_2, т.е. $T_3 \subseteq T_2$.

Так как теория T_3 является подтеорией T_2, достаточно найти функцию, удовлетворяющую условиям леммы 1.

Индукцией по построению доказательства формулы A в теории T_2 покажем, что в теории T_3 доказуема формула $\alpha(A)$.

Если A — логическая аксиома, то $\alpha(A)$ также логическая аксиома и, следовательно, $T_3 \vdash \alpha(A)$.

Если A — собственная аксиома теории T_2, то $\alpha(A)$ — аксиома теории T_3 и потому $T_3 \vdash \alpha(A)$.

Допустим, формула A получена в теории T_2 из двух предшествующих формул доказательства B и $(B \supset A)$ по правилу modus ponens. По индуктивному допущению, в теории T_3 доказуемы формулы $\alpha(B)$ и $\alpha(B \supset A)$. Так как $\alpha(B \supset A) = \alpha(B) \supset \alpha(A)$, то в теории T_3 доказуема формула $\alpha(A)$.

Допустим, формула A имеет вид $\forall x B$ и получена в теории T_2 из предшествующей формулы доказательства В по правилу генерализации. По индуктивному допущению, в теории T_3 доказуема формула $\alpha(B)$. По правилу генерализации в теории T_3 доказуема формула $\forall x \alpha(B)$. Так как $\forall x \alpha(B) = \alpha(\forall x B)$, то в теории T_3 доказуема формула $\alpha(A)$.

Таким образом, мы показали, что $T_2 \vdash A \Rightarrow T_3 \vdash \alpha(A)$. Проверим выполнимость оставшихся двух условий.

+1. $A \in L_3$
+2. $T_3 \vdash \alpha(A)$
3. $\alpha(A) = A$ - из 1 по определению α
4. $T_3 \vdash A$ - из 2, 3
5. $T_3 \vdash \alpha(A) \Rightarrow T_3 \vdash A$ - из 2-4

+1. $A \in L_2$
+2. $T_2 \vdash \alpha(A)$
3. $T_2 \vdash A \equiv \alpha(A)$ - в силу леммы 3(2) и теоремы 2.20 [2]

4. $T_2 \vdash A$ - из 2, 3
5. $T_2 \vdash \alpha(A) \Rightarrow T_2 \vdash A$ - из 2-4

Q.E.D.

Следующая теорема получается как простое следствие ранее доказанных лемм 5 и 6.

ТЕОРЕМА 7. *Для всякой первопорядковой теории в языке логики предикатов с равенством, в которой для некоторых двух замкнутых термов a и b доказуема формула $\neg(a = b)$, существует взаимопогрузимая с ней первопорядковая теория в языке с одними лишь функциональными символами и единственным предикатом равенства.*

Далее мы покажем, что предикат равенства также не является необходимым и может быть заменен специальным одноместным предикатом. Пусть **теория $\mathbf{T_4}$**, получена путем расширения языка теории T_3 новым одноместным предикатным символом H и добавлением новой аксиомы:

$(Ax\text{-}H)$ $\qquad (H(x) \equiv x = a).$

ЛЕММА 8. *В теории T_4 доказуема формула $H(f_=(x_1, x_2)) \equiv (x_1 = x_2)$.*

Доказательство.

1. $T_2 \vdash (x_1 = x_2) \equiv (f_=(x_1, x_2) = a)$ - лемма 3(2)
2. $T_2 \vdash A \Rightarrow T_3 \vdash \alpha(A)$ - лемма 6
3. $T_3 \vdash (x_1 = x_2) \equiv (f_=(x_1, x_2) = a)$ - из 1, 2 и определения α
4. $T_3 \subseteq T_4$ - определение T_4
5. $T_4 \vdash (x_1 = x_2) \equiv (f_=(x_1, x_2) = a)$ - из 3, 4
6. $\forall x(H(x) \equiv x = a)$ - аксиома T_4
7. $T_4 \vdash H(f_=(x_1, x_2)) \equiv (f_=(x_1, x_2) = a)$ - из 6
8. $T_4 \vdash H(f_=(x_1, x_2)) \equiv (x_1 = x_2)$ - из 5, 7

Q.E.D.

ЛЕММА 9. *Теории T_3 и T_4 взаимопогружаемы.*

Доказательство. Так как теория T_3 является подтеорией T_4, достаточно найти функцию, удовлетворяющую условиям леммы 1.

Определим функцию ψ из языка теории T_4 в язык теории T_3.

- $\psi(H(t)) = t = a$
- $\psi(t_1 = t_2) = t_1 = t_2$
- $\psi(\neg A) = \neg\psi(A)$
- $\psi(A \nabla B) = \psi(A)\nabla\psi(B) \quad \nabla \in \{\&, \vee, \supset, \equiv\}$
- $\psi(QxB) = Qx\psi(B) \quad Q \in \{\exists, \forall\}$

Индукцией по построению доказательства формулы A в теории T_4 покажем, что в этом случае в теории T_3 доказуема формула $\psi(A)$.

Если A — логическая аксиома, то легко проверить, что $\psi(A)$ также является логической аксиомой и потому $T_3 \vdash \psi(A)$.

Если A — аксиома $H(x) \equiv (x = a)$, то $\psi(A)$ есть $(x = a) \equiv (x = a)$ и, следовательно, $T_3 \vdash \psi(A)$.

Если A — собственная аксиома теории T_3, то $\psi(A) = A$, т.к. A не содержит вхождений предикатного символа H. Поэтому $T_3 \vdash \psi(A)$.

Допустим, формула A получена из двух предшествующих формул доказательства B и $(B \supset A)$ по правилу modus ponens. По индуктивному допущению, в теории T_3 доказуемы формулы $\psi(B)$ и $\psi(B \supset A)$. Так как $\psi(B \supset A) = \psi(B) \supset \psi(A)$, то в теории T_3 доказуема формула $\psi(A)$.

Допустим, формула A имеет вид $\forall xB$ и получена из предшествующей формулы доказательства B по правилу генерализации. По индуктивному допущению, в теории T_3 доказуема формула $\psi(B)$. По правилу генерализации в теории T_3 доказуема формула $\forall x\psi(B)$. Так как $\forall x\psi(B) = \psi(\forall xB)$, то в теории T_3 доказуема формула $\psi(A)$.

Таким образом, $T_4 \vdash A \Rightarrow T_3 \vdash \psi(A)$. Проверим выполнимость оставшихся двух условий.

+1. $A \in L_3$
+2. $T_3 \vdash \psi(A)$

3. $\psi(A) = A$ - т.к. A не содержит вхождений H
4. $T_3 \vdash A$ - из 2, 3
5. $T_3 \vdash \psi(A) \Rightarrow T_3 \vdash A$ - из 2-4

+1. $A \in L_4$
+2. $T_4 \vdash \psi(A)$
3. $T_4 \vdash \psi(A) \equiv A$ - в силу аксиомы Ax-H и теоремы 2.20 из [2]
4. $T_4 \vdash A$ - из 2, 3
5. $T_4 \vdash \psi(A) \Rightarrow T_4 \vdash A$ - из 2-4

Q.E.D.

Определим функцию β из языка теории T_4 в ее подъязык, содержащий лишь функциональные символы и единственный одноместный предикатный символ H.

- $\beta(H(t)) = H(t)$
- $\beta(t_1 = t_2) = H(f_=(t_1 = t_2))$
- $\beta(\neg A) = \neg\beta(A)$
- $\beta(A \nabla B) = \beta(A) \nabla \beta(B)$ $\quad \nabla \in \{\&, \vee, \supset, \equiv\}$
- $\beta(QxB) = Qx\beta(B)$ $\quad Q \in \{\exists, \forall\}$

Пусть формула A является аксиомой **теории $\mathbf{T_5}$**, если и только если $A = \beta(B)$, где B либо аксиома равенства, либо собственная аксиома теории T_4.

ЛЕММА 10. *Теории T_5 и T_4 взаимопогружаемы.*

Доказательство. По определению теории T_5 ее язык является подъязыком теории T_4.

Если A — аксиома T_5, то $A = \beta(B)$, где B либо аксиома равенства, либо собственная аксиома теории T_4. В силу леммы 8, определения β и теоремы 2.20 из [2] имеет место $T_4 \vdash B \equiv \beta(B)$ и, следовательно, $T_4 \vdash \beta(B)$. Т.е. всякая аксиома теории T_5 доказуема в T_4. Отсюда получаем, что всякое доказательство в теории T_5 одновременно является доказательством в T_4, т.е. $T_5 \subseteq T_4$.

Так как теория T_5 является подтеорией T_4, достаточно найти функцию, удовлетворяющую условиям леммы 1.

Индукцией по построению доказательства формулы A в теории T_4 покажем, что в этом случае в теории T_5 доказуема формула $\beta(A)$.

Если A — пропозициональная или кванторная аксиома, то $\beta(A)$ также пропозициональная или кванторная аксиома и, следовательно, $T_5 \vdash \beta(A)$.

Если A — либо аксиома равенства, либо собственная аксиома теории T_4, то $\beta(A)$ — аксиома теории T_5 и потому $T_5 \vdash \beta(A)$.

Допустим, формула A получена в теории T_4 из двух предшествующих формул доказательства B и $(B \supset A)$ по правилу modus ponens. По индуктивному допущению, в теории T_5 доказуемы формулы $\beta(B)$ и $\beta(B \supset A)$. Так как $\beta(B \supset A) = \beta(B) \supset \beta(A)$, то в теории T_5 доказуема формула $\beta(A)$.

Допустим, формула A имеет вид $\forall xB$ и получена в теории T_4 из предшествующей формулы доказательства B по правилу генерализации. По индуктивному допущению, в теории T_5 доказуема формула $\beta(B)$. По правилу генерализации в теории T_5 доказуема формула $\forall x\beta(B)$. Так как $\forall x\beta(B) = \beta(\forall xB)$, то в теории T_5 доказуема формула $\beta(A)$.

Таким образом, мы показали, что $T_4 \vdash A \Rightarrow T_5 \vdash \alpha(A)$. Проверим выполнимость оставшихся двух условий.

+1.	$A \in L_5$	
+2.	$T_5 \vdash \beta(A)$	
3.	$\beta(A) = A$	- из 1 по определению β
4.	$T_5 \vdash A$	- из 2, 3
5.	$T_5 \vdash \beta(A) \Rightarrow T_5 \vdash A$	- из 2-4

+1.	$A \in L_4$	
+2.	$T_4 \vdash \beta(A)$	
3.	$T_4 \vdash A \equiv \beta(A)$	- в силу леммы 8 и теоремы 2.20 [2]
4.	$T_4 \vdash A$	- из 2, 3
5.	$T_4 \vdash \beta(A) \Rightarrow T_4 \vdash A$	- из 2-4

Q.E.D.

Следующая теорема является простым следствие теоремы 7 и лемм 9 и 10.

ТЕОРЕМА 11. *Для всякой первопорядковой теории в языке логики предикатов с равенством, в которой для некоторых двух замкнутых термов* a *и* b *доказуема формула* $\neg(a = b)$, *существует взаимопогрузимая с ней теория, язык которой содержит лишь функциональные символы и единственный одноместный предикат.*

Доказательство представленных теоремы не является сложным, и потому их содержание кажется тривиальным. Однако с философской точки зрения они достаточно интересны, поскольку опровергают некоторые устоявшиеся мнения.

> *«Рассел указал на то, что роковая ошибка школьной философии заключалась в предположении, будто каждое суждение некоторому субъекту приписывает какое-то свойство в качестве предиката. Если, например, говорят, что тело A движется относительно некоторого другого тела B, то представитель школьной логики будет требовать, чтобы одному или другому телу самому по себе был приписан предикат движения. Рассел показал, что очень многие суждения говорят об отношении, о связи двух объектов, и их нельзя свести к высказываниям о присущности свойства отдельному объекту. Последние представляют собой лишь частный случай высказываний об отношениях. Поэтому представителю школьной логики кажутся бессмысленными высказывания, например, такого вида: если два тела движутся относительно друг друга, то не имеет никакого смысла спрашивать, какое из них „действительно движется“, т.е. какому из них присущ предикат „находиться в движении“»* [5, с.172].

Рассел ошибался, когда думал, будто показал, что суждения об отношениях нельзя свести к высказываниям о присущности свойства отдельному объекту. Можно предположить, что в результате этой ошибки наша картина мира оказалась искусственно искаженной.

Литература

[1] *Карнап Р.* Старая и новая логика // Журнал «Erkenntnis» («Познание»). Избранное. М.: Издательский дом «Территория будущего», Идея-Пресс, 2007. С. 105-119.

[2] *Мендельсон Э.* Введение в математическую логику. М.: Наука, 1976.

[3] *Платон.* Собрание сочинений в 4 т. М.: Мысль, 1993.

[4] *Смирнов В.А.* Логические методы анализа научного знания. М.: Наука, 1987.

[5] *Франк Ф.* Каково значение современных физических теорий для общей теории познания? // Журнал «Erkenntnis» («Познание»). Избранное. М.: Издательский дом «Территория будущего», Идея-Пресс, 2007. С. 160-187.

What is a logic?
Towards axiomatic emptiness

J.-Y. Béziau[1]

ABSTRACT. We first recall the original Greek sense of the word logic and how logic was developed on the one hand as an efficient way of reasoning by the use of reduction to the absurd and on the other hand as a useless system of logic by Aristotle. Then we discuss the changes of the modern conception of logic: the rejection of the principle of non-contradiction considered as fundamental by Aristotle and the structuralist move breaking the Aristotelian accident/essence dichotomy. Finally we explain why and how in universal logic — like in universal algebra — axiomatic emptiness prevails: a logical structure is a structure obeying no axioms.

Keywords: universal logic, structure, axioms, principle of non contradiction

1 In the beginning was the Logos

"What is logic?" is a difficult question. In this paper we will tackle the issue through a simpler question "What is a logic?". We will explain why we can consider that a logic is a structure without axioms similarly to the case of universal algebra and giving the example of a simple logic, anti-classical logic, obeying none of the standard axioms that however can reasonably be considered as a logic. But it is important to keep in mind the more general issue of what logic is and to see how our answer to the simpler question is related and directed by this broader perspective.

Logic nowadays is generally the study of some logical systems related with mathematics, computer science, artificial intelligence or philosophy. These logical systems are sometimes called formal systems and their construction and study is developed using some

---

[1] Work supported by a grant DCR (Funcap/CNPq) and within the LogComp research project (CNPq). Thanks to all members of Log Comp.

mathematical tools at various degrees. Most of the time people have lost the more profound idea of what logic is.

It is good to remember that the word “logic” came from the Greek word “Logos”, a key concept of Greek culture. The word “Logos” has four main interrelated meanings: reason, science, language, relation. Logic as an art of reasoning and logic as a logical system are not necessarily the same if we consider for example, like Descartes did, that we don’t need a system to reason in a good way — Descartes was against syllogistic. Syllogistic is maybe the first system of logic, developed by Aristotle, who for that reason is often considered as the godfather of logic.

But before Aristotle, the emergence of the Logos in Greece manifested through a powerful way of reasoning: the reduction to the absurd. Using the strength of this reasoning the Pythagoreans were able to prove that the square root of 2 is not rational, a result which is considered sometimes as the first mathematical proof, hence the true birth of mathematics.The Pythagoreans had the idea that all reality is based on natural numbers and relations between natural numbers, so “rational” numbers were also admitted. A number that cannot be expressed as a *relation* between two natural numbers, an *irrational* number, was therefore something contradicting their views. But Logos was stronger than ideology and irrational numbers were admitted because they were born through reasoning, using the reduction to the absurd.

The reduction to the absurd, without being “formalized”, became the main tool to develop mathematics. On the other hand Aristotle few decades later developed a system of logic, the syllogistic, where the reduction to the absurd does not appear explicitly and which was never used by mathematicians, or anyone, to produce interesting reasonings. But during 2000 years the study of logic was limited to syllogistic and someone like Kant even claimed that it was eternal. Aristotle is known to have characterized human beings as “rational animals”, but the conception of rationality promoted by Aristotle is quite narrow, it is only one aspect of the Logos. We can say that in some sense Aristotle has blocked logic for 2000 years with his syllogistic and his metaphysical conceptions related to it: difference between accident and substance, subject and predicate, the claim that the principle of non-contradiction is the basis of rationality and reality. During the second half of the XIX century things started to change, this was the birth of modern logic.

2 The modern conception of logic

In modern times Aristotle's dogmas were rejected at two different levels: on the one hand the principle of non-contradiction was relativized and logics in which this principle does not hold were constructed (paraconsistent logics), on the other hand logical systems, including classical logic, were developed on a ground departing from Aristotle's metaphysics.

The Russian logician Vasiliev developed what he called *imaginary logic* or *non-Aristotelian logic* by analogy with the work of his colleague Lobatchevski also from Kazan. Vasiliev rejected the principle of non-contradiction and for this reason he is considered as a forerunner of paraconsistent logic. But Vasiliev was still working in the framework of Aristotelian thought, presenting variations of the syllogistic system.

The second forerunner of paraconsistent logic is the Polish logician Jan Lukasiewicz. In 1910 Lukasiewicz wrote a detailed criticism of Aristotle's arguments in favor of the principle of non-contradiction. At the end of this book there is a presentation of Schröder's idea of algebra of logic and this volume is considered as the book introducing modern logic in Poland. It is therefore the point of departure of the famous Polish school of logic which has been so fundamental in the development of modern logic. Lukasiewicz himself contributed very much to the development of modern logic working for example in many-valued logic.

But the real revolution of modern logic was not the contribution of one or two people; it was the rise of a new way of thinking which can be called "structuralism", which emerged in linguistics, mathematics, art and philosophy.

The idea of structuralism is that things are interrelated and that we can understand things through the relations they have. An object does not have an existence or meaning by itself. As well pointed out by Bourbaki, the number 4 does not exist by itself but only in relation with other numbers. This applies also to concrete objects like "particles" and to thought and language. For Saussure the meaning of a word does not only depend on its connection with reality but is delimited by the meaning of other words. The basic notion of structuralism is the notion of relation. This is really logical if we think of the original meaning of the word “logos”.

Relations are described through the concept of structure — hence the name structuralism. We can say “to be is to be an object of a structure”. To understand what an object is we have to appraise it in the appropriate structure. Different structures are possible and what also is important is to study the relations between structures, then we go at a higher level considering structures whose elements are themselves structures.

The theory of structures was developed in mathematics by Bourbaki, people working in universal algebra and category theory (Birkhoff / MacLane), and also by model theorists. Model theory, developed mainly by Alfred Tarski in the 1950s, was the final step of a long adventure in the development of modern logic and became the central subject of study in mathematical logic during three decades. Sometimes people use the word “semantics” to talk about model theory, but the word “semantics” was originally coined by Breal in a linguistic context. Model theory is much more than semantics in the linguistic sense; it is the full outcome of structuralism in logic. But there is also another aspect of this outcome taking place at a higher level of abstraction.

3 Universal logic

A logical system itself can be considered as a structure. There are different ways to define a logical system: via proof theory, via model theory or via some intermediate means such as tableaux. But a logical system can be considered as an abstract structure beyond syntax and semantics.

The first step in that direction is due to Tarski with his notion of consequence operator. This is a structure close to a topological structure — at this time (end of the 1920s) Tarski was working with Kuratowski. For this structure there are some axioms corresponding to reflexivity, monotonicty and transitivity of consequence.

The interesting point of Tarski’s approach is that it is very abstract in the sense that consequence is not defined on a specific language, a specific set of formulas. A reason for this is that in the Polish school people were interested not only in mathematical reasoning but in general scientific reasoning, hence the expression they promoted for logic: *Methodology of deductive sciences*. Connectives do not appear at this level and therefore there are no laws such as the law of non-contradiction.

But Tarski's axioms for the notion of consequence can be criticized at two levels: concrete and abstract. At the concrete level one can find some counter-examples for such axioms, the most famous case are the penguins of non-monotonic logic. At the abstract level we may want to go even deeper in abstraction as this was done by Birkhoff in universal algebra.

Universal algebra — an expression coined by J.J. Sylvester — was at first a general theory of algebras looking for some general laws or axioms for algebraic structures, such as associativity or commutativity. At the end of the XIXth century Whitehead wrote a big book on the subject: *A treatise on universal algebra*. But in the 1930s Garrett Birkhoff went deeper into abstraction by defining an abstract algebra just as a set with a family of functions on it — no more axioms. His motivation was that the intersection of the two main groups of algebras (Noether /Boole) had no axioms in common, so unification could be done only in axiomatic emptiness. But Brikhoff showed that even at this level of axiomatic emptiness interesting work can be done: it is possible to define what a subalgebra is and also what morphisms are. These notions do not depend on any axioms, they are valid for all abstract algebras. We are at the level of concepts rather than axioms.

Axiomatic emptiness takes us back to a famous thought of Anaximander — considered as one of the first philosophical thoughts – "the undetermined (apeiron) is the principle (arche) of everything". This is quite different from Aristotle trying to base everything on the principle of contradiction.

For logic we can follow the same road to higher abstraction as in universal algebra and define a logical structure just as a consequence relation on a set. This is the idea of a logical structure in universal logic. It is important to emphasize that universal logic is therefore not the study of a universal system of logic from which everything can be deduced, a system which is the final explanation/description of the world or thought. It is in fact dubious that such system exists because on the one hand science is always evolving — new theories always appear, and on the other hand maybe the world and thought do not obey absolute laws, axioms or rules (contrarily to Kant's idea).

Universal logic is directly inspired by universal algebra but this does not mean that they are the same: both are keen of abstraction but they don't deal with the same kinds of structures: logical structures do not necessarily reduce to algebraic structures, they can be considered as a fourth type of basic mother structures in the sense of Bourbaki — by the side of algebraic, topological and order structures.

Such a jump into abstraction — performed in universal algebra and universal logic — allows space for monsters: we have limit structures close to nonsense and also very strange structures. In universal logic as limit structures we have a structure where everything is deducible from everything and its dual, nothing is deducible from nothing. And we have many strange structures which maybe don't describe any kind of natural or artificial reasonings. But this kind of jungle with a lot of weird animals is familiar to mathematicians. Limit structures are part of zeorology, the science of limit cases as named by Roland Fraïssé, and strange structures may one day turn to be in connection with reality as happened to non-Euclidean geometry. So the jump into abstraction makes sense from a methodological point of view and also for applications.

To end let us have a look at one of the monsters we have in the jungle of universal logic: anti-classical logic. This logic is just defined as the complement of classical logic: it is easy to check that it obeys none of Tarski's axioms. It also does not obey a further axiom which was put forward by Los and Suszko to improve Tarski's theory of consequence, the axiom of substitution. But why not considering anti-classical logic as a logic? It can be defined using recognized logical methods: proof methods (using for example the theory of refutation developed by Lukasiewicz) and semantics methods (using for example truth-tables).

References

[1] *Bazhanov, V.* Vasiliev : life and work // V.A.Smirnov (ed), Imaginary logic — selected works. Nauka. Moscow. 1989.

[2] *Béziau, J.-Y.* Universal logic // Logica'94, P.Kolar et V.Svoboda (eds.), Académie des Sciences, Prague. 1994. P.73-93.

[3] *Béziau, J.-Y.* Recherches sur la logique universelle, PhD Thesis, Universite Denis Diderot (Paris 7). 1995.

[4] *Béziau, J.-Y.* From paraconsistent logic to universal logic // Sorites. Vol. 12. 2001. P. 5-32.

[5] *Béziau, J.-Y.*(ed). Logica Universalis, Birkhäuser, Basel. 2005.

[6] *Béziau, J.-Y.* 13 questions about universal logic // Bulletin of the Section of Logic. Vol. 25. 2006. P.133-150.

[7] *Béziau, J.-Y.* Les axiomes de Tarski // R. Pouivet and M. Rebuschi (eds), La philosophie en Pologne 1918-1939, Vrin, Paris. 2006. P.135-149.

[8] *Béziau, J.-Y.* What is "formal logic"? // Revista Brasileira de Filosofia. Vol. 232. 2009. P.197-208.

[9] *Béziau, J.-Y., Carnielli, W.A. et Gabbay, D.M.* (eds) Handbook of Paraconsistency, King's College, Londres. 2007.

[10] *Birkhoff, G.* Universal algebra // Comptes Rendus du Premier Congrès Canadien de Mathématiques, Presses de l'Université de Toronto, Toronto. 1946. P.310-326.

[11] *Birkhoff, G.* Universal algebra // Rota, G.-C. and Oliveira J.S. (eds.), Selected Papers on Algebra and Topology by Garret Birkhoff, Birkhäuser, Bâle. 1987. P.111-115.

[12] *Boole, G.* The mathematical analysis of logic, being an essay toward a calculus of deductive reasoning, Cambridge. 1847.

[13] *Bourbaki, N.* L'architecture des mathématiques // Les grands courants de la pensée mathématique, F. Le Lionnais (ed). 1948. P.35-48.

[14] *Bréal, M.* Essai de sémantique, Paris, 1897.

[15] *Corry, L.* Modern Algebra and the Rise of Mathematical Structures, Birkhäuser, Boston. 1996.

[16] *De Morgan, A.* Formal logic: or, the calculus of inference, necessary and probable, London. 1847.

[17] *Dieudonné, J.* Pour l'honneur de l'esprit humain, Hachette, Paris. 1987.

[18] *Fraissé, R.* La zérologie: une recherche aux frontières de la logique et de l'art: applications à la logique des relations de base vide // International Logic Review. Vol. 26. 1982. P.67-29.

[19] *Glivenko, V.* Théorie générale des structures, Hermann, Paris. 1938.

[20] *Granger, G.G.* Pensée formelle et science de l'homme, Aubier Montaigne, Paris. 1960.

[21] *Granger, G.G.* L'irrationnel, Odile Jacob. Paris. 1998.

[22] *Hertz, P.* Über Axiomensysteme für beliebige Satzsysteme // Matematische Annalen Vol. 101. 1929. P.457-514.

[23] *Koslow, A.* A structuralist theory of logic, Cambridge University Press, New-York. 1992.

[24] *Los, J. et Suszko, R.* Remarks on sentential logics // Indigationes Mathematicae. Vol. 20. 1958. P.177-183.

[25] *Lukasiewicz, J.* On the principle of contradiction in Aristotle — A critical study, Krakow. 1910.

[26] *Lukasiewicz, J. et Tarski, A.* Untersuchungen über den Aussagenkalkül // Comptes Rendus des séances de la Société des Sciences et des lettres de Varsovie XXIII, Classe III. 1930. P.30-50.

[27] *Mossakowski, T., Goguen, J., Diaconescu, R. and Tarlecki, A.* What is a Logic? // J.-Y. Béziau (ed). Logica Universalis, Birkhäuser, Basel. 2005.

[28] *Porte, J.* Recherches sur la théorie générale des systèmes formels et sur les systèmes connectifs, Gauthier–Villars, Paris et Nauwelaerts, Louvain. 1965.

[29] *Rasiowa, H. et Sikorski, R.* The mathematics of metamathematics, Académie Polonaise des Sciences, Varsovie. 1963.

[30] *Riche, J.* From universal algebra to universal logic // J.Y. Béziau and A. Costa-Leite (eds). Perspectives on Universal Logic, Polimetrica, Monza. 2007. P.3-39.

[31] *Rougier, L.* The relativity of logic // Philosophy and Phenomenological Research. Vol. 2. 1941. P.137-158.

[32] *Rougier, L.* Le traité de la connaissance, Gauthiers-Villars, Paris. 1955.

[33] *Schanuel, S.H. et Lawvere, F.W.* Conceptual mathematics — A first introduction to categories, CUP. 1997.

[34] *Scholz, H.* Abriss der Geschichte der Logik, Karl Alber, Fribourg. 1931.

[35] *Sylvester, J.J.* Lectures on the principles of universal algebra // American Journal of Mathematic. Vol. 6. 1884. P.270-286.

[36] *Tarski, A.* Remarques sur les notions fondamentales de la méthodologie des mathématiques // Annales de la Société Polonaise de Mathématique. 1928. P.270-271.

[37] *Tarski, A.* Über einige fundamenten Begriffe der Metamathematik // Comptes Rendus des séances de la Société des Sciences et des lettres de Varsovie XXIII, Classe III. 1930. P.22-29.

[38] *Tarski, A.* Fundamentale Begriffe der Methodologie der deduktiven Wissenschaften. I // Monatshefte für Mathematik und Physik. Vol. 37. 1930. P.361-404.

[39] *Whitehead, A.N.*A treatise on universal logic, CUP. 1898.

[40] *Wolenski, J.* Logic and Philosophy in the Lvov-Wasaw School, Kluwer, Dordrecht. 1989.

Formal polynomials, heuristics and proofs in logic

W. CARNIELLI

ABSTRACT. This note surveys some previous results on the role of formal polynomials as a representation method for logical derivation in classical and non-classical logics, emphasizing many-valued logics, paraconsistent logics and modal logics. It also discusses the potentialities of formal polynomials as heuristic devices in logic and for expressing certain meta-logical properties, as well as pointing to some promising generalizations towards algebraic geometry.

Keywords: formal polynomials, algebraic proof procedures, heuristics in logical proofs, many-valued logics, modal logics

1 Formal polynomials as algebraic proof procedures: a brief survey

Algebraic proof systems based on formal polynomials over algebraically closed fields (the "polynomial ring calculus") were introduced in [7] (see also [8] and [9]). However, the Russian mathematician Ivan Ivanovich Zhegalkin had already proposed in 1927 a method (cf. [26]) to translate and decide propositions from A. Whitehead and B. Russell's *Principia Mathematica* by means of polynomials with coefficients in the two-element field $\mathbf{Z}_2$; some intuitions in the same direction can be found in the work of the Russian/Ukrainian logician Platon Sergeevich Poretskij (cf. [3]).

In the development of [7], [8] and [9] sentences are identified as multivariable polynomials in the ring $GF_{p^n}[X]$ of polynomials with coefficients in the Galois field of order p^n, and propositional derivability is reduced to checking whether or not certain families of polynomials have zeros (reading truth-values as elements of the field). In this way, questions of satisfiability can be related to the Hilbert's Nullstellensatz (cf. for instance, [25])), a well-known result of algebraic geometry that asserts in general for F an algebraically closed field and $f, g_1, \ldots, g_m$ multivariable polynomials in $F[X]$, that f has a common zero with $g_1, \ldots, g_m$ iff there is an integer k and polynomials $h_1, \ldots, h_m \in F[X]$ so that $f^k = \sum_{1 \leq i \leq n} h_i \cdot g_i$. A discussion and more details on how the uses of such fundamental results are related to obtaining proofs in many-valued logics can be found in [8] and [9].

The above mentioning of algebraic geometry is not fortuitous. Actually, commutative algebra and algebraic geometry may be the right setting to couple logic and pure mathematics. As it is well known, distinct algebraic varieties (in particular, classes of lattices) are coupled with distinct logics. Paradigmatic cases are Boolean algebras (associated to classical propositional logic) and Heyting algebras (associated to Intuitionistic Logic). Although we are using only Boolean rings (defined as polynomial rings based upon finite fields, as it will be clear in the following) where the identity $x^n = x$ is pivotal, we could naturally think about dropping this law, working with commutative rings in general.

Formal polynomials as algebraic proof procedures revamp the idea of using algebraic methods to deal with proofs, already implicit in the work of Gottfried Wilhelm von Leibniz, George Boole, Augustus De Morgan, Charles Sanders Peirce, Ernst Schröder, David Hilbert and Alfred Tarski, just to mention some important predecessors. It is interesting to recall that we owe De Morgan in [15] a century-old pioneering remark that logical conjunction is just a particular case of composition of binary relations, a topic further developed as a full study of relation algebras by Tarski.

There is also a more recent idea of using this machinery to investigate proof complexity by means of the so-called Gröbner basis (cf. [14]), but this is surely no more than scratching the surface of the potentialities of algebraic methods in proofs (complexity among them).

Polynomial ring calculus are particularly appropriate for automatic proof systems not only for finitely many-valued logics, but also for non-truth-functional logics, including modal logics (cf. [1]): even logics that have no finite-valued characteristic semantics, as the paraconsistent logics, can be given a two-valued dyadic semantics expressed by multivariable polynomials over the ring $Z_2[X]$.

We survey below the basic ideas on polynomial ring calculus

(PRC) for (finitely) many-valued logics, following [7] and [8]. We suppose the logics to be explicitly given by means of a signature, designated truth-values, etc. (see [18]). All calculations are done within finite (Galois) fields, what is convenient in the case of p^n-valued logics, particularly to the most conspicuous three-, four-, and five-valued logics, considering that those are the overwhelming majority of many-valued logics in practice. It is simple to see, however, that for example 6-valued logics can be embedded into the next prime-valued logic, and treated in an analogous way.

Let F be any abelian ring (in most of the applications below, a finite field) with unity 1, and let 0 be the zero of F. Let $F[X]$ be the ring of all finite polynomials in the variables $x_1, x_2, \dots, x_m, \dots$ with arbitrary degree and characteristic p^n. A *polynomial ring proposition* for $\mathbb{L}$ is any polynomial $f \in F[X]$ on the variables $\vec{x}$; f is *satisfiable* if there exists a polynomial evaluation in F which produces $d \in D \subset F$ (denoted by $f(\vec{x}) = d$) where D is the set of designated truth-values of $\mathbb{L}$; see definition below). The notation is simplified to $f = d$, and $f \approx g$ means that $f = g$ for all evaluations in F. In particular, $f \approx d$ for $d \in F$ means, of course, that f coincides with the constant polynomial d.

The *ring rules* of PRC are the following for every $f, g, h \in F[X]$, $f + g \in F[X]$ and $f \cdot g \in F[X]$:

1. $f + (g + h) \vdash_{\approx} (f + g) + h$
2. $f + g \vdash_{\approx} g + f$
3. $f + 0 \vdash_{\approx} f$
4. $f + (-f) \vdash_{\approx} 0$
5. $f \cdot (g \cdot h) \vdash_{\approx} (f \cdot g) \cdot h$
6. $f \cdot (g + h) \vdash_{\approx} f \cdot g + f \cdot h$

The letters $x, y, z, \dots$ (with or without indices) are used as metavariables over variables, $f, g, h, \dots$ as metavariables over polynomials.

The PRC based on F for $\mathbb{L}$ is defined in the following way:

1. Its terms are all variables, and its formulas are all polynomials of $F[X]$;

2. The bases are the ring rules plus the *polynomial rules* $p^n \cdot x = x + x + \ldots \vdash_{\approx} 0$(summing x exactly p^n times) and $x^i \cdot x^j \vdash_{\approx} x^k(\texttt{mod}\ p(x))$ for $k \equiv i + j(\texttt{mod}\ (p^n - 1))$ where $p(x)$ is a convenient primitive polynomial (i.e., an irreducible polynomial of degree n with coefficients in Z_p);

3. There are two inference (meta)rules, the Uniform Substitution (US): $f \vdash_{\approx} g / f[x : h] \vdash_{\approx} g[x : h]$ and the Leibnitz rule (LR): $f \vdash_{\approx} g / h[x : f] \vdash_{\approx} h[x : g]$ where $f[x : g]$ denotes the result of uniformly substituting g for the variable x in f.

The usual properties of the familiar consequence relations (as reflexivity, transitivity, etc.) follow from the (LR) properties.

If $\Delta \bigcup \{f\}$ is any collection of polynomial propositions, a derivation of f from Δ, denoted by $\Delta \vdash_{\approx} f$, is a finite sequence of (polynomial) formulas that are either in Δ or are obtained from previous terms through PRC rules; f is said to be a *theorem*, denoted by $\vdash_{\approx} f$, if $\emptyset \vdash_{\approx} f$.

Some concrete examples will be discussed below, and the following fact will be essential:

THEOREM 1. *Let p be a prime number; then there is an isomorphism between the set of all* p^n*-valued truth-functions of arity* $\leq m$ *and all the m-variable polynomials in GF(*p^n*)[X].*

Proof. By checking that each such polynomial defines a unique p^n-valued function in a field, and vice versa. ■

The preceding theorem can be strengthened to non-deterministic finite-valued functions as well (and this makes it possible to use polynomial functions with extra-variables to treat non-truth functional logics such as paraconsistent logics and modal logics, (cf. [8] and [1]). Moreover, for fixed p^n, there exists a polynomial-time transformation Π that outputs the corresponding polynomial of $GF_{p^n}[X]$ for each truth-function, as it can be computed by elementary linear algebra (systems of linear equations) over finite fields.

THEOREM 2. *Let* f *be a polynomial in* $GF_{p^n}[X]$*. Then* $f \approx c$ *for a constant* c *of* $GF(p^n)$ *if and only if* $f \vdash_{\approx} c$ *in* PRC*.*

Proof. Since the field $GF(p^n)$ is constructed as $GF(p^n) = Z_p[X]/ < p(x) >$ (that is, the quotient of the ring of all polynomials with coefficients in Z_p by the ring ideal $< q(x) >$ generated by an irreducible polynomial $q(x)$), application of the PRC procedures to polynomials f in $GF_{p^n}[X]$ obtains a class representative of f in $GF_{p^n}[X]$ modulo $q(x)$ with minimum degree (note that the polynomial rules always decrease degrees). If $f \approx c$, then f is equivalent to the constant polynomial c and a finite number of PRC steps will end up with c. ■

The above theorems guarantee a completeness theorem with respect to PRC for p^n-valued logics. Let $\mathbb{L}$ be a p^n-valued logic (for p a prime number) and let D be the set of distinguished truth-values of $\mathbb{L}$. Actually, easy constructions (all well-known in the literature) obtain finite fields with 4, 8 and 9 elements (namely, $GF(2^2)$, $GF(2^3)$ and $GF(3^2)$). Indeed, in the above indicated construction $GF_{p^n}[X] = Z_p[X]/ < q(x) >$, $x^2{+}x{+}1$ is the only irreducible monic quadratic polynomial in $Z_2[x]$, which gives for $GF(2^2)$ in a unique way (this case is exemplified in more details for four-valued logics in Section 2).

For the case of 8 truth-values: the irreducible cubics in $Z_2[X]$ are just $x^3 + x + 1$ and $x^3 + x^2 + 1$, and both define isomorphic finite fields with 8 elements (viz., $GF(2^3)$). For the last case, concerning 9 truth-values, $x^2 + 1$, $x^2 + x + 2$ and $x^2 + 2x + 2$ are the only irreducible monic quadratic polynomials in $Z_3[X]$, and all of them produce isomorphic finite fields with 9 elements (viz., $GF(3^2)$).

We thus have a direct treatment of all finite-valued logics from 2 to 9 truth-values (with the exception of 6) in terms of polynomial ring calculus, independent of which truth-values (or how many of them) are taken as distinguished values. Since a 6-valued logic can be embedded in $Z_7[X]$, this virtually covers all cases of finitely many-valued logics with any pragmatic interest in the literature.

Moreover, since $GF(p^m)$ is a subfield of $GF(p^n)$ iff m divides n (another well-known elementary fact about Galois fields), then of course classical propositional logic can be entirely embedded into four-valued logic, a possibility which can make a difference when investigating complexity of proof procedures (cf. also Section 5).

Let $At = \{p_1, p_2, \ldots\}$ be a denumerable set of *atomic sentences*, and let $\Sigma = \{\Sigma_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ be a *propositional signature*, where each Σ_n is a set of *connectives* of arity n, which defines the set $Con = \bigcup_{n\in\mathbb{N}} \Sigma_n$ be the set of connectives. The set of formulas of $\mathbb{L}$ is then defined as the freely generated algebra by At over Σ. Thus, $p_k \in \mathbb{L}$, for any atomic sentence $p_k \in At$, and $\otimes(\varphi_1, \ldots, \varphi_m) \in \mathbb{L}$, for any m-ary connective $\otimes \in Con$, and any formulas $\varphi_1, \ldots, \varphi_m \in \mathbb{L}$.

Given a usual matrix interpretation to $\mathbb{L}$, which we call a *semantics* Sem for $\mathbb{L}$, denote by v the valuations from the formulas of $\mathbb{L}$ to $GF(p^n)$; a canonical *consequence relation* $\Vdash \subseteq \wp(\mathbb{L}) \times \mathbb{L}$ associated to Sem is defined by establishing that a formula $\varphi \in \mathbb{L}$ *follows from* a set of formulas $\Gamma \subseteq \mathbb{L}$ whenever $v(\Gamma) \in D$ implies that $v(\varphi) \in D$.

The above notion of consequence relation complies to what is known as a *Tarskian* logic. We can also suppose with no loss of generality that $\mathbb{L}$ is also compact, so $\Gamma \subseteq \mathbb{L}$ can be taken as finite.

THEOREM 3. *Let* $\Gamma = \{\gamma_1, \ldots, \gamma_n\}, \varphi$ *be a set of formulas of* $\mathbb{L}$*;*

$\Gamma \Vdash \varphi$ *iff there is an integer* k *and polynomials* $h_1, \ldots, h_m \in F[X]$ *such that* $f^k = \sum_{1 \leq i \leq n} h_i \cdot g_i$*, where* $f = \Pi(\varphi) - c, g_1 = \Pi(\gamma_1) - d_1, \ldots, g_n = \Pi(\gamma_n) - d_n$ *for truth-values* $d_1, \ldots, d_n \in D$ *and* $c \notin D$.

Proof. By the Nullstellensatz for arbitrary fields, $\Gamma \Vdash \varphi$ iff the polynomials $f = \Pi(\varphi) - c, g_1 = \Pi(\gamma_1) - d_1, \ldots, g_n = \Pi(\gamma_n) - d_n$ have a common zero. ■

The previous theorem grants a refutation proof method to many-valued logics based on the Nullstellensatz, in a way similar to the mentioned Gröbner calculus. Cases of special interest arise when the logic $\mathbb{L}$ is endowed with a connective, which we call $\circledast$, such that the Metatheorem of Deduction holds for $\mathbb{L}$. In this case, $\Gamma, \alpha \Vdash \varphi$ iff $\Gamma \Vdash \circledast(\alpha, \varphi)$. If this is the case, the procedure can be iterated,and in general $\Gamma \Vdash \varphi$ iff there exists a formula ψ such that $\Vdash \psi$, where ψ is construed from the formulas of Γ and the connective $\circledast$.

2 Example-cases: Post and Łukasiewicz logics in polynomial format

Although the idea of many-valued logics was present in the work of Charles Peirce already in the first decade of the 20th century (cf. [17]), Emil Post introduced in 1920 the first well-worked many-valued logical systems almost simultaneously (but independently) from Łukasiewicz. The primitive operators negation $\neg$ and disjunction $\vee$ introduced by Post are related to the fundamental operators of *Principia Mathematica*, and are defined as the following operations over Z_n, where $n - 1$ is the only distinguished truth-value: $\neg(x) =$

$x+1(\mathtt{mod}\ n)$ and $x \vee y = max\{x,y\}$. Without any loss of generality we can consider an isomorphic variant of Post's system through the following operations over Z_n, where now 0 is the only distinguished truth-value: $\neg(x) = x+n-1$ and $x \vee y = min\{x,y\}$. It is now easy to compute, for each p^n, two polynomials corresponding to $\neg$ and $\vee$. For example, for $n = 3$ the following polynomials over $Z_3[X]$ represent $\neg$ and $\vee$: $\neg(x) = x+2$ and $x \vee y = min\{x,y\} = 2x2y2 + 2x^2y + 2xy^2 + xy$. Since any other formula in the many-valued Post logic can be written in terms of $\neg$ and $\vee$ (i.e, they form a functionally complete set of connectives) any other 3-valued function in one or two variables can be written as composition of these. A similar result holds for all p^n-valued logics.

Since Post's logics are functionally complete and the Deduction Metatheorem holds for them, provability in p^n-valued Post's logics can be directly treated via PRC proof theory. Here the polynomial rules reduce to $3 \cdot x \approx 0$ and $x^3 \approx x$, since we are dealing with the simple case $p = 3, n = 1$ and PRC reduces to simplifying polynomials in $Z_3[X]$.

Łukasiewicz's three-valued system L_3 is sound and complete with respect to the well-known matrices for $\rightarrow$ and $\neg$ (where 2,1,0 are used instead of the more common 1, 1/2 and 0, and 0 is the only designated truth-value). In polynomial form over the ring $Z_3[X]$ the corresponding connectives are expressed by: $x \rightarrow y = 2x(y+1)(xy+y+1)$ and $\neg(x) = 2x$.

Since Łukasiewicz's logic enjoys a form of Metatheorem of Deduction, the procedure also applies directly. As a simple example, $x \rightarrow x = 2x(x+1)(x^2+x+1) = 2x^4+4x^3+4x^2+2x$. Using the polynomial rules $3 \cdot x \approx 0$ and $x^3 \approx x$, we obtain immediately: $x \rightarrow x \approx 2x^4+4x^3+4x^2+2x \approx 2x^2+x+x^2+2x \approx 3x^2+3x \approx 0$. Hence, $\alpha \rightarrow \alpha$ is a theorem in the system L_3. The method is obviously also useful as a decision procedure (it is clear that any logic characterizable through polynomial calculus are recursively decidable).

Analogous results hold for all p^n-valued logics. As hinted in the previous section, four-valued logics, for example, can be easily dealt with by means of polynomials over $GF(4)$ (notice that we cannot use the ring $Z_4[X]$, which fails to be a unique factorization domain and in this cannot represent all four-valued connectives: for instance is is easy to see that a connective such as $x \vee y = max\{x,y\}$ is not representable as a polynomial in $Z_4[X]$. The field $GF(4)$ can be defined (as previously remarked) as an extension field of $GF(2)$ by means of the primitive polynomial $q(x) = x^2 + x + 1$ of degree 2 in $Z_2[X]$, and by taking the successive powers of the roots of $p(x)$ to represent the non-zero elements in $GF(4$ as $\{0, 1, a, a^2 = a + 1\}$, on which addition and multiplication are defined as:

$+$	0	1	a	a^2
0	0	1	a	a^2
1	1	0	a^2	a
a	a	a^2	0	1
a^2	a^2	a	1	0

$\cdot$	0	1	a	a^2
0	0	0	0	0
1	0	1	a	a^2
a	0	a	a^2	1
a^2	0	a^2	1	a

Using polynomials with coefficients in $GF(4)$ and computing according to such tables, one can of course characterize *any* four-valued logic in the literature (and even the ones not yet invented).

For the particular case $n = 2$, n-valued Post logic reduces to classical propositional calculus. It is simpler to give a direct formulation, translating the usual boolean connectives as follows: Let $At = \{p_1, p_2, \ldots\}$ be the atomic sentences of PC, and $\neg, \vee, \wedge, \rightarrow$ the usual connectives. The translation Π is set as follows:

1. $\Pi(p_i) := x_1$
2. $\Pi(\varphi) := 1 + \Pi(\varphi)$
3. $\Pi(\varphi \wedge \psi) := \Pi(\varphi) \cdot \Pi(\psi)$
4. $\Pi(\varphi \vee \psi) := \Pi(\varphi) \cdot \Pi(\psi) + \Pi(\varphi) + \Pi(\psi) + 1$
5. $\Pi(\varphi \rightarrow \psi) := \Pi(\varphi) \cdot \Pi(\psi) + \Pi(\varphi) + 1$

The polynomial rules over $Z_2[X]$ in this case reduce to $x + x \vdash_{\approx} 0$ and $x \cdot x \vdash_{\approx} x$. As a consequence, φ is a PC-tautology iff $\Pi(\varphi) \vdash_{\approx} 1$. We thus obtain a promising method for checking the satisfiability problem for many-valued logics (in particular for SAT), since the reductions performed by the polynomial ring calculus might be subexponential in the number of variables of a propositional formula.

3 The heuristic stand: half-logics, quarter-logics and the laws of form

Logicians should not overlook what poets have to say: a four-line poem by Samuel Butler in the mid-19th century (cf. [5]) expresses a philosophy of heuristics better than some treatises:

All the inventions that the world contains
Were not by reason first found out, nor brains
But pass for theirs, who had the luck to light
Upon them by mistake or oversight.

But how can heuristic insights be considered along with the act of proving? Modern logicians virtually killed heuristics: indeed, the contemporary notion of proof completely expels the role of discovery and heuristics. Considering that problem solving and the heuristic method have been emphasized by some notable mathematicians, most of them Hungarians as George Pólya (famous references are [21] and [22]), there is no principled reason heuristic methods could not be shared by logicians. They were indeed shared by Greek geometers and philosophers as Euclid (circa 325-270 BC), Pappus (290-350) and Proclus (410-485), a tradition continued by Descartes and Leibniz. Discovery in logic is of course completely independent from whether there may be a logic of discovery[1], and I argue here that formal polynomials work in a quite remarkable way as a heuristic tool in logic. Two examples are reviewed below: the discovery of quarter-logics (as a generalization of half-logics) and the discovery of an appropriate formalism to express some ideas on the so-called "laws of form".

Classical implication → and negation $\sim$ are truth-functional connectives completely characterized by the familiar two-valued valuations v:

$$v(P \to Q) = 1 \text{ iff } v(P) = 0 \text{ or } v(Q) = 1 \text{ and } v({\sim}P) = 0 \text{ iff } v(P) = 1$$

Non-truth-functional connectives, however, are abundant in the literature. Béziau in [4] defined a partial (non-truth-functional) negation $\neg_1$ characterized by:

$$v(\neg_1 P) = 0 \text{ if } v(P) = 1$$

---

[1] If there is, it would perhaps be an *algebra* of discovery rather than a logic of discovery; incidentally, this was a topics I was strongly interested in my Ph.D thesis, which I later decided to do in pure logic instead.

Albeit its non-truth-functional character, the negation $\neg_1$ is defined via a process of *bounded non-determinism* in the sense that $v(\neg_1 P) \in \{0, 1\}$ if $v(P) = 0$, i.e., there are no truth-value gaps. As remarked, every finite-valued defined by a bounded non-deterministic definition can be represented by polynomial functions over Galois fields $GF_{p^n}[X]$ with extra (hidden) variables (cf. [8]).

Due to its bounded non-truth functionality, $\neg_1 P$ can is representable as a simple polynomial over $Z_2[X]$ with an extra variable x. Indeed, the "half " negation $\neg_1 P$ is computable by $x \cdot (p + 1)$ and easily recovers classical negation with the help of $\to$: in polynomial format, $P \to \neg_1 P$ is computed as $p \cdot (x \cdot (p + 1)) + p + 1 = p + 1$, but $p + 1$ represents $\sim$.

This was noted in [4] with the suggestion that it could be regarded as a certain "translation paradox" in the sense that PC can be strongly translated within a certain subclassical logic $K/2$ (in the language $\{\to, \neg_1\}$). The translation τ in question is:

1. $\tau(P) = P$, for P atomic;
2. $\tau(A \to B) = \tau(A) \to \tau(B)$;
3. $\tau(\sim A) = A \to \neg_1 A$.

Although this "phenomenon" deserved a paper by L. Humberstone (cf. [19]), our polynomial computation shows that this is nothing more than a mere consequence of function compositionality: $\sim$ belongs to the clone defined by $\to$ and $\neg_1$. Indeed, additional "half-logics" can be defined just by playing with polynomials, as for instance:

$$v(\neg_2 P) = 1 \text{ if } v(P) = 0$$

In polynomial terms $\neg_2 p$ is expressed by $p \cdot x + 1$ (when $p = 0$, $\neg_2 p = 1$, but when $p = 1$, then $\neg_2 p$ is undetermined)

Now consider a connective $P \overset{*}{\leftarrow} Q$ semantically defined in the polynomial form as $p \cdot (q + 1)$; this expresses semantically the connective:

$$v(P \leftarrow Q) = 1 \text{ iff } v(P) = 1 \text{ and } v(Q) = 0$$

It is easy to see that $\neg_2$ and $\leftarrow$ define classical negation $\sim$ by $\neg_2(P) \overset{*}{\leftarrow} P$, computed as $(p \cdot x + 1) \cdot (p + 1) = (p + 1) \cdot p \cdot x + (p + 1) = p + 1$.

Not only new half-logics, but also quarter-logics can be invented. Consider a binary connective semantically defined in p and q by $x \cdot (p+1) \cdot q$, corresponding to a non-truth-functional connective $\rightharpoonup$ whose valuation condition is:

$$v(P \rightharpoonup Q) = 0 \text{ if } v(P) = 1 \text{ or } v(Q) = 0$$

Consider a logic $K/4$ in the signature $\{\rightarrow, \rightharpoonup\}$.

This quarter logic recovers itself; indeed, classical negation $\sim$ can be defined by:

$$P \rightarrow (P \rightharpoonup Q)$$

In polynomial format this is computed as $p \cdot (x \cdot (p+1) \cdot q) + p + 1 = p + 1$, hence full PC is recovered in the signature $\{\rightarrow, \rightharpoonup, \sim\}$.

More quarter-logics can be defined, now departing from $x \cdot p \cdot (q + 1)$, corresponding to $\rightharpoondown$ whose clause for valuation is:

$$v(P \rightharpoondown Q) = 0 \text{ if } v(P) = 0 \text{ or } v(Q) = 1$$

Consider now $K'/4$ in the signature $\{\rightarrow, \rightharpoondown\})$; classical negation $\sim$ is now definable by:

$$Q \rightarrow (P \rightharpoondown Q)$$

and again full PC is recovered in $\{\rightarrow, \rightharpoondown, \sim\}$.

It is not difficult to be convinced that there is a lot of other “paradoxical” connectives: at least 16 binary connectives can be defined as a basis for such “quarter” logics, and many more in other arities. Exploring this aspect of non-truth-functional connectives is more than performing a clever algebraic trick; it is a contribution to understanding which are the laws of logical form.

Another interesting application of the expressivity of formal polynomials as heuristic devices is in the analysis of the so-called “laws of form”. In a booklet of 1969 (cf. [24]) George Spencer-Brown attempted to formalize what he thought to be “the laws of form” by means of a sort of exoteric calculus, praised by Bertrand Russell as “a new calculus of great power and simplicity”. The idea, with its proposal of starting from nothing and drawing a distinction, has some connections with Brower’s “two-oneness”, which he considered to be the basal intuition of mathematics. It has also some remarkable coincidences with C. Peirce's "alpha-existential graphs"; indeed, Peirce's "streamer" is like Spencer Brown's symbol ⌉. It was proven in [2] that part of Spencer-Brown's system for the "laws of form" (namely, his so-called "primary algebra") is just Boolean algebra in disguise. However, the same proof can be obtained in a much simpler way by interpreting Spencer-Brown's symbology as polynomials over boolean rings, as shown in [6].

4 Modal logics in polynomial format

In [1] a polynomial ring calculus (PRC) for the familiar modal logic **S5** was designed, which permits to perform modal deductions through polynomial handling. The paper also investigated the relationships among the PRC here defined, the algebraic semantics for modal logics, equational logics and the Dijkstra-Scholten equational-proof style. The method proposed can be easily extended to other modal logics.

The definition of PRC for **S5** can be easily adapted to other modal logics: for the systems **K**, **T**, **B** and **S4** it is only necessary to adjust certain polynomial constraints corresponding to axioms in the respective system. In particular, the polynomial representation of provability for **S4** can be immediately extended to intuitionist logic **Int**, due to the well-known Gödel's embedding of **Int** into **S4**.

These extensions can be done without much ado by considering the well-known Lemmon-Scott axioms for modal logics. Moreover, a relationship with their respective modal algebras can also be obtained: new polynomial constraints will correspond to algebraic conditions over operators.

A PRC for **S4** has an extra interest, as this means that intuitionistic logic can in principle be also treated in polynomial terms (bearing in mind the well-known correspondence between **S4** and the propositional intuitionistic calculus). Issues on decidability of modal logics can also be treated through polynomials: this is, for instance, immediate for **S5**, although for other calculi connections with the finite-model property would have to be established.

The PRC for modal logics is also related to the *non-deterministic matrices*, a generalization of ordinary multi-valued matrices, in which the truth-value of a formula can be non-deterministically assigned: actually, the methods in [1] constitute the first example of non-deterministic semantics for modal logics. It constitutes also a particular case of *possible-translations semantics* (see, e.g. [11]) — not by accident, since the latter are more expressive than the former, as proven in [12] (Theorem 38 and the following discussion).

5 Expectations concerning heuristics and complexity

Boole's "algebra of logic", re-shaped by E. Schröder and later subsumed in the propositional and predicate calculus (cf. [20]), is not coincident with Boolean algebra; indeed, the "algebra of logic" is more a commutative ring with unity, partly because Boole's disjunction was exclusive (instead of contemporary exclusive "or"). The use of formal polynomials in logic sharply expresses such a distinction between Boole's algebra and Boolean algebra. In this sense, the real "algebra of logic" would be the one which approaches itself towards algebraic geometry, as exemplified by our discussion above concerning the Hilbert's Nullstellensatz.

To gain full access to algebraic geometry, however, logics represented by infinite fields seem to be more appropriate than the ones restricted to finite fields. So, for instance, as shown in [13], there are some limitations for expressing certain metamathematical properties of logics by means of polynomials over finite fields: Craig Interpolation Lemma, for example, cannot be proven directly by manipulating polynomials over finite fields. Some challenging open problems are to represent infinite-valued Łukasiewicz logics, full first-order logic and higher-order logics by means of polynomials over GF_{p^n} (in such cases,polynomials over the field of rational numbers $\mathbb{Q}$ seem to be more adequate).

The ring $GF_{p^n}[X]$ of polynomials with coefficients in the Galois field of order p^n, which is used in the polynomial ring calculus for many-valued logics, paraconsistent logics and modal logics, share strikingly similar properties with the commutative ring $\mathbf{Z}$ of the integer numbers. Indeed, both are unique factorization domains, and they have very accordant number theories: the prime numbers of $\mathbf{Z}$ correspond to monic irreducible polynomials in $GF_{p^n}[x]$, the ring of polynomials in one variable x (several interesting consequences of this similarity are discussed in [16]).

This makes the polynomial ring calculus a kind of abstract number theory, with promising consequences for logical consequence: as noted in [16]) (pages 28 and 29), irreducibility testing in $GF_{p^n}[x]$ seems to be more tractable than primality test in $\mathbf{Z}$, and the problem of factorization for polynomials seems to be, equally, more tractable than factorization for integers. So there is hope that treating logics by means of formal polynomials *might* lead to some new insights regarding complexity of theorem-proving procedures.

Independently from issues on complexity and from any relevant connections to algebraic geometry and to the problems found therein, the polynomial formatting of logics has another tantalizing feature: by using the powerful representation given by polynomials we not only shape new proof methods, but we come upon one of the very few heuristic artifacts in logic. In this direction, as well, there is much to be explored.

References

[1] *Agudelo, J. C. and Carnielli, W. A.* Polynomial ring calculus for modal logics: a new semantics and proof method for modalities. Pre-print available at *CLE e-Prints* 9(4), 2009, at `http://www.cle.unicamp.br/e-prints/vol_9,n_4,2009.html`.

[2] *Banaschewski, B.* On G. Spencer Brown's Laws of Form. *Notre Dame Journal of Formal Logic* 18(3):507-509, 1977.

[3] *Bazhanov, V. A.* New archival materials concerning P. S. Poretskij. *Modern Logic* 3(1) pp. 80-81, 1992.

[4] *Béziau, J.-Y.* Classical negation can be expressed by one of its halves. *Logic Journal of IGPL* 7(2):145-151, 1999.

[5] *Butler, S.* Miscellaneous Thoughts, in: The Poems of Samuel Butler, Vol. II. (Chiswick: C. Willingham, 1822), p. 281

[6] *Carnielli, W. A.* Formal polynomials and the laws of form. In "The Multiple Dimensions of Logic", Coleзro CLE volume 54, UNICAMP, Brazil (Eds. Jean-Yves Béziau and Alexandre Costa-Leite), pp. 202-212, 2009.

[7] *Carnielli, W. A.* A polynomial proof system for Lukasiewicz logics. Second Principia International Symposium. August 6-10, 2001 Florianypolis, SC, Brazil.

[8] *Carnielli, W. A.* Polynomial ring calculus for many-valued logics. Proceedings of the 35th International Symposium on Multiple-Valued Logic. IEEE Computer Society. Calgary, Canada. IEEE Computer Society, pp. 20-25, 2005. Pre-print available at *CLE e-Prints* 6(3), 2006, at `http://www.cle.unicamp.br/e-prints/vol_6,n_3,2006.html`.

[9] *Carnielli, W. A.* Polynomizing: Logic inference in polynomial format and the legacy of Boole. In: Model-Based Reasoning in Science, Technology, and Medicine (Editors, L. Magnani and P. Li). Series "Studies in Computational Intelligence", volume 64, pp. 349-364. Springer Berlin-Heidelberg, 2007. Pre-print available under the title "Polynomial ring calculus for logical inference" at *CLE e-Prints* 5(3), 2005, at `http://www.cle.unicamp.br/e-prints/vol_5,n_3,2005.html`.

[10] *Caleiro, C., Carnielli, W. A., Coniglio, M. E. and Marcos, J.* Two's company:"The humbug of many logical values". In Logica Universalis, 169–189, editor Béziau, J.-Y., Birkhäuser Verlag, Basel, Switzerland, 2005.

[11] *Carnielli, W. A., Coniglio, M. E. and Marcos, J.* Logics of formal inconsistency. In D. Gabbay and F. Guenthner, editors, Handbook of Philosophical Logic, volume

14, pages 15–107. Springer, 2nd edition, 2007. Preprint available from *CLE e-Prints* 5(1), 2005 at `http://www.cle.unicamp.br/e-prints/vol5,n1,2005.html`.

[12] *Carnielli, W. A. and Coniglio, M. E.* Splitting Logics. In "We Will Show Them! Essays in Honour of Dov Gabbay" pages 389–414. College Publications, 2005.

[13] *Carolino, P. K.* Polinomization of Logics: Problems and Perpscrives. Master Dissertation (in Portuguese). IFCH- UNICAMP, Campinas, SP, Brazil, 2009.

[14] *Clegg, M., Edmonds, J., and R. Impagliazzo, R.* Using the Gröbner basis algorithm to find proofs of unsatisfiability. In Proceedings of the Twenty-Eighth Annual ACM Symposium on Theory of Computing, pages 174-183, Philadelphia, PA, May 1996.

[15] *De Morgan, A.* On the syllogism, no. IV, and on the logic of relations. *Trans. Cambridge Philosophical Soc* 10:331-358, 1860.

[16] *Effinger, G., Hicks, K, and Mullen, G. L.* Integers and polynomails: comparing the close cousins **Z** and $F_q[x]$. *The Mathematical Intelligencer* 27(2):26-34, 2005.

[17] *Fisch, M. and Turquette, A.* Peirce's Triadic Logic. *Transactions of the Charles S. Peirce Society* 11:71-85, 1966.

[18] *Gottwald, S.* A Treatise on Many-Valued Logics, Studies in Logic and Computation, Research Studies Press Ltd. Hertfordshire, England, 2001.

[19] *Humberstone, L.* Béziau's translation paradox. *Theoria* 71:138-18, 2005.

[20] *Kneebone, G.T.* Mathematical Logic and the Foundation of Mathematics: An introductory Survey. Courier Dover Publications, 2001.

[21] *Pólya, G.* How to Solve It: A New Aspect of Mathematical Method. Princeton, NJ: Princeton University Press, 1945.

[22] *Pólya, G.* Mathematical discovery: on understanding, learning, and teaching problem solving. New York, NY: John Wiley and Sons, Inc., 1981

[23] *Paturi, R., Pudlбk, P., Saks, M. and Zane, F.* An improved exponential time algorithm for *k*-sat. Annual IEEE Symposium on Foundations of Computer Sience, 1998.

[24] *Spencer-Brown, G.* The Laws of Form. Allen & Unwin, London, 1969.

[25] *van der Waerden, B. L.* Modern Algebra, Julius Springer, Berlin, 1931.

[26] *Zhegalkin, I. I.* On the Technique of Calculating Propositions in Symbolic Logic. *Matematicheskii Sbornik* 43: 9–28, 1927.

Наши авторы

АРХИЕРЕЕВ Николай Львович — кандидат философских наук, доцент кафедры информационного права, информатики и математики Российской правовой академии Министерства юстиции РФ.

БЕЛЬТЮКОВ Анатолий Петрович — доктор физико-математических наук, профессор, заведующий кафедрой теоретических основ информатики Удмуртского государственного университета.

БИРЮКОВ Борис Владимирович — доктор философских наук, профессор, заведующий межвузовским центром исследования чтения и информационной культуры (при МГЛУ).

БРЮШИНКИН Владимир Никифорович — доктор философских наук, профессор, заведующий кафедрой философии и логики исторического факультета Российского государственного университета имени Иммануила Канта, Калининград.

ВАСЮКОВ Владимир Леонидович — доктор философских наук, заведующий кафедрой истории и философии науки Института философии РАН.

КАРПЕНКО Александр Степанович — доктор философских наук, профессор, заведующий сектором логики Института философии РАН.

КОЗАЧЕНКО Надежда Павловна — ассистент кафедры философии Криворожского государственного педагогического университета.

ЛЕВИН Виталий Ильич	— доктор технических наук, доктор философии(Grand Ph.D), профессор(Full Prof), заведующий кафедрой научных технологий Пензенской государственной технологической академии, профессор Московского института экономики, менеджмента, права.
НЕПЕЙВОДА Николай Николаевич	— доктор физико-математических наук, профессор, заведующий кафедрой теории и методологии информатики Удмуртского государственного университета.
ПОПОВ Владимир Михайлович	— кандидат философских наук, доцент кафедры логики философского факультета МГУ им. М.В. Ломоносова.
ПРЯДКО Игорь Петрович	— доцент кафедры общетеоретических дисциплин Нарофоминского филиала РГСУ.
РЕЗНИК Майкл	— доктор философии, профессор кафедры философии Университета Северной Каролины, Чапел Хилл, США.
ТОМОВА Наталья Евгеньевна	— аспирант кафедры логики философского факультета МГУ им. М.В. Ломоносова.
ШАЛАК Владимир Иванович	— кандидат философских наук, старший научный сотрудник сектора логики Института философии РАН.
BÉZIAU Jean-Yves	— PhD in mathematical logic (University of Paris 7), PhD in philosophy (University of Sao Paulo). At moment professor and researcher at Department of Philosophy and Department of Computation, Federal University of Ceara, Brazil.
CARNIELLI Walter	— PhD in Mathematics, Full Professor for Logic and Foundations of Mathematics at Centre for Logic, Epistemology and the History of Science and Department of Philosophy State University of Campinas — UNICAMP, Brazil.

К сведению авторов

Ежегодник *Логические исследования* принимает к публикации статьи, содержащие изложение оригинальных результатов из различных областей современной логики, ранее не публиковавшиеся и не представленные к публикации в других изданиях.

Статья должна быть представлена в электронном виде и оформлена в формате LaTeX 2$_\varepsilon$ (по согласованию с редколлегией в MS Word). При подготовке статьи в LaTeX 2$_\varepsilon$ необходимо использовать стиль li.sty. Стилевой файл li.sty, заглавный файл li.tex, а также пример оформления статьи можно найти по адресу: `http://iph.ras.ru/page48601066.htm`

Объем статьи не должен превышать 30 печатных страниц в указанном формате. Статья обязательно должна содержать аннотацию на английском языке (не более 100 слов) и ключевые слова на русском языке (3-5 слов/словосочетаний).

При подготовке электронного варианта статьи особое внимание следует уделить следующим моментам оформления статьи:

- Аннотация, ключевые слова, теоремы, леммы, доказательства, примеры и т.п. должны набираться с использованием соответствующих окружений.

- Иллюстративный материал (рисунки, таблицы, диаграммы) готовится стандартными средствами LaTeX'а. Рисунки могут быть также подготовлены в любом графическом редакторе и представлены в формате eps.

- Примечания, сноски к тексту статьи делаются постранично с использованием сквозной нумерации.

- Для знаков кавычек следует использовать символы `<<` и `>>`. Для «кавычек „внутри“ кавычек» — символы `,,` и `‘‘`.

- Тире ставится следующим образом: «Логика`~---` это наука о правильных рассуждениях.»

- Цитированная литература помещается в конце статьи общим списком в алфавитном порядке и оформляется как окружение thebibliography. В тексте ссылка на источник из списка литературы оформляется стандарным образом с помощью команды `\cite`.

  В библиографии должны быть указаны: для книг (монография, сборник и т.д.) — фамилия и инициалы автора, название книги, место издания (город), издательство, год издания; для журнальных статей — фамилия и инициалы автора, название статьи, название журнала, год издания, том, номер (выпуск), страницы (первая и последняя).

Со статьей также необходимо выслать

- сведения об авторе/авторах:
    - фамилия, имя, отчество полностью,
    - ученые степени и звания,
    - место работы;
- название статьи и ФИО автора(ов) на английском языке.

Статьи следует направлять по адресу
LogicalInvestigations@gmail.com

Information for authors

Logical Investigations accepts for submission papers containing original results in all areas of logic. The papers should not have been published or simultaneously submitted to another publication.

Papers should be submitted electronically in the LaTeX 2$_\varepsilon$ format (special permission of the editorial board is needed for submissions to be made in the MS Word format). While typesetting a paper, the style file li.sty and the master file li.tex should be used; both files, along with a sample paper file, can be accessed at `http://iph.ras.ru/page48601066.htm`

Papers should not exceed 30 pages in the above mentioned format. A paper should have an abstract in English not exceeding 100 words and a list of keywords (3 to 5 words or phrases).

Special attention should be paid to the following aspects of typesetting a paper:

- Abstract, keywords, theorems, lemmas, proofs, etc, should be typeset using respective environments.
- Figures, tables, and diagrams should be typeset using LaTeX. For pictures .eps files can also be used.
- Footnotes should appear at the bottom of the page and should be numbered sequentially throughout the paper.
- For quotation marks, symbols `‘‘and’’` should be used. For nested quotation marks, symbols `‘and’` should be used.
- A hyphen should be typeset as follows: “This theorem`~---` unlike the rest in this paper`~---` is really important”.

Together with the paper, the following information should be submitted:
- The full names of the authors
- Deegres
- Associated institution

Submissions should be emailed to the following address:
LogicalInvestigations@gmail.com

Содержание

Table of contents

Научное издание

Логические исследования
Вып. 16

Утверждено к печати
Институтом философии РАН

Компьютерная верстка и корректура
Н.Е. Томова

Художник-оформитель
Н.Н. Попов

Идея рисунка
И.А. Герасимова

Издательство «Центр гуманитарных инициатив»
190031, г. Санкт-Петербург, Столярный переулок, дом 10-12,
e-mail: unikniga@yandex.ru, unibook@mail.ru
Руководитель центра Соснов П.В.

По вопросам реализации книги обращаться:
«Университетская книга-СПб»
198052, г. Санкт-Петербург, ул. Броницкая, дом 17.
В Москве — ООО «Университетская книга-СПб»,
телефон (495) 915-32-84, e-mail: ukniga-m@libfl.ru
в Санкт-Петербурге — ООО «Университетская книга-СПб»,
телефон (812) 317-89-72, e-mail: ukniga1@westcall.net

Розничные издательские продажи:
в Санкт-Петербурге — магазин «Книжный окоп»
(широкий ассортимент гуманитарной литературы)
Тучков переулок, д.11 (812) 323-85-84
В Москве — www.notabene.ru (495) 745-15-36

Подписано в печать 07.04.2010
Гарнитура Таймс. Формат 60x90 1/16. Бумага офсетная. Печать
офсетная. Усл.печ.л.19. Уч.-изд.л. 18. Тираж 1000 экз. Заказ

Отпечатано: ООО «Издательство МБА» Москва,
ул. Рубцовско-Дворцовая, д.2
тел.: 726-31-69, 608-47-15, 625-38-13

Подписной индекс в каталоге «Пресса России» 42046.
2-е полугодие 2010 г.