

RUSSIAN ACADEMY OF SCIENCES
INSTITUTE OF PHILOSOPHY
M.V. LOMONOSOV
MOSCOW STATE UNIVERSITY
FACULTY OF PHILOSOPHY

LOGICAL
INVESTIGATIONS
Volume 17

Centre of Humanitarian Initiatives
Moscow–St. Petersburg
2011

РОССИЙСКАЯ АКАДЕМИЯ НАУК
ИНСТИТУТ ФИЛОСОФИИ
МОСКОВСКИЙ ГОСУДАРСТВЕННЫЙ УНИВЕРСИТЕТ
ИМЕНИ М.В. ЛОМОНОСОВА
ФИЛОСОФСКИЙ ФАКУЛЬТЕТ

**ЛОГИЧЕСКИЕ
ИССЛЕДОВАНИЯ**
Выпуск 17

Центр гуманитарных инициатив
Москва–Санкт-Петербург
2011

УДК 16/164

ББК 87.4

Л69

Редколлегия:

Карпенко А.С. (отв. редактор),
Васюков В.Л., Герасимова И.А., Зайцев Д.В., Ивлев Ю.В.,
Маркин В.И., Микиртумов И.Б., Непейвода Н.Н., Попов В.М.,
Томова Н.Е. (отв. секретарь), Успенский В.А.,
Финн В.К., Хаханян В.Х., Чагров А.В., Шалак В.И.

Editor-in-Chief:

Alexander S. Karpenko,
Institute of Philosophy, Russian Academy of Sciences, Moscow

Логические исследования / Отв. ред. А.С. Карпенко; Ин-т философии РАН; философский ф-т МГУ им. М.В. Ломоносова. М.–СПб.: ЦГИ, 2011.

Вып. 17. — 2011. — 320 с. — ISBN 978-5-98712-073-6 (в пер.)

В данный сборник включены наиболее важные результаты, полученные в различных областях логики за последнее время. Основное внимание уделяется развитию неклассических логик. В данном сборнике публикуется прекрасная обзорная статья Н.Н. Непейводы о проблемах конструктивной математики. В статье Б.В. Бирюкова и Л.Г. Бирюковой впервые подробно излагаются логические идеи А.В. Введенского (1856–1925) и их влияние на развитие логики того времени.

Сборник предназначен для всех интересующихся современной логикой, ее приложениями и историей логики.

*Подписной индекс в каталоге «Пресса России» 42046.
2-е полугодие 2011 г.*

Logical Investigations. — Vol. 17. — М.–S.-Pb.: C.G.I., 2011. — 320 p. — ISBN 978-5-98712-073-6.

The present volume includes the most important results recently obtained in a number of research areas of logic. The majority of publications are devoted to non-classical logics. An excellent review paper by N.N. Nepeivoda on problems of constructive mathematic is presented. For the first time, in paper by B.V. Biryukov and L.G. Biryukova a detailed survey of A.V. Vvedensky logical ideas and its influence over contemporary logic are proposed.

The volume is of interest to logicians, philosophers, mathematicians and all those who have interest in applications of logic.

ISBN 978-5-98712-073-6

- © Институт философии РАН,
продолжающееся издание
«Логические исследования»
(разработка, оформление),
1993 (год основания), 2011
- © Философский факультет
МГУ им. М.В. Ломоносова, 2011
- © Карпенко А.С., составление, 2011

Семантика допустимых множеств оценок для S5. Разрешающая процедура

Н. Л. АРХИЕРЕЕВ

ABSTRACT. The article deals with some peculiarities of the decision procedure for the semantic of Restricted Sets of State-Descriptions (RSSD) for propositional fragment of S5. Basis of the decision procedure is modified apparatus of analytical tableaux for classical propositional logic with truth-functional and special set-theoretic («volumetric») rules.

Ключевые слова: метаоценка переменных, множество истинности формулы, конфигурация таблицы, объемные правила.

В работе [1] была описана стратегия построения семантик для нормальных модальных систем S4, S5, не использующих понятий «модельная структура», «возможный мир», «отношение достижимости между мирами». В настоящем исследовании осуществлена попытка построения разрешающей процедуры для пропозиционального фрагмента системы S5 Льюиса, сформулированной в терминах ограниченных множеств описаний состояний (допустимых множеств оценок).

Напомним кратко основные принципы построения семантик указанного типа.

Каждая пропозициональная переменная некоторой формулы, содержащей модальные операторы, последовательно рассматривается как обозначающая логически истинное (необходимое), логически недетерминированное (случайное) и логически невыполнимое (невозможное) высказывание. В результате подобных толкований из исходного множества о.с. для формулы могут исключаться некоторые описания состояний. Значения формул, главным логическим символом которых является какой-либо модальный оператор, определяются относительно полученных «кластеров» W'' — ограниченных множеств о.с., которые

также можно рассматривать как допустимые множества оценок/истинностных значений пропозициональных переменных. Данные множества представляют собой аналоги модельных структур семантик возможных миров.

В дальнейшем изложении в качестве исходных будем использовать символы $\neg, \supset, \Box$ (оператор логической необходимости). Понятие формулы и другие логические связи определяются обычным образом. Операторы логической возможности и случайности определяются, соответственно, как $\Diamond A = \neg \Box \neg A$ и $\nabla A = \Diamond A \wedge \Diamond \neg A$.

Символами N, C, I обозначим дополнительные истолкования элементарных переменных в качестве, соответственно, необходимых, случайных и невозможных высказываний.

Символом U обозначим исходное 2^n -элементное множество о.с. для формулы (n — число переменных в формуле), символом 2^U — множество всех его подмножеств, символами W_i'' с нижними и верхними индексами или без них ($1 \leq i \leq 2^U$) будем обозначать кластеры, т.е. множества — аналоги S5 — модельных структур.

Формулам различного вида следующим образом приписываются значения в данной семантике.

1. В отдельном о.с. пропозициональная переменная обычным образом принимает значение t или f в зависимости от того, входит ли в данное о.с. она сама или ее отрицание: $|p|_\alpha = t \Leftrightarrow p \in \alpha$; $|p|_\alpha = f \Leftrightarrow \neg p \in \alpha$.
2. В множестве о.с. W'' переменная принимает одно из значений $\{N, C, I\}$ в зависимости от того, входит ли она в каждое о.с. из этого кластера без отрицания, с отрицанием или же по крайней мере однажды меняет значение в этом множестве о.с.: $|p|_{W''} = N \Leftrightarrow \forall \alpha (\alpha \in W'' \Rightarrow p \in \alpha)$; $|p|_{W''} = I \Leftrightarrow \forall \alpha (\alpha \in W'' \Rightarrow \neg p \in \alpha)$; $|p|_{W''} = C \Leftrightarrow \exists \alpha (\alpha \in W'' \wedge p \in \alpha) \wedge \exists \beta (\beta \in W'' \wedge \neg p \in \beta)$.

Таким образом, в данной семантике каждой пропозициональной переменной, входящей в формулу, могут приписываться оценки двух типов: классическая оценка в терминах $\{t, f\}$ (осуществляется относительно отдельных о.с.) и неклассическая (мета)оценка в терминах $\{N, C, I\}$ (осуществляется относительно

множеств о.с.). Как отмечалось в [1], последняя оценка является не истинностно-функциональной, поскольку ей может соответствовать любое множество о.с. «размерности» от 2^1 до 2^n , в котором данная переменная по крайней мере однажды меняет значение.

Сложные формулы к. л. в. оцениваются в отдельных о.с. :

$$3. |\neg B|_\alpha = t \Leftrightarrow |B|_\alpha = f$$

$$4. |A \supset B|_\alpha = t \Leftrightarrow |A|_\alpha = f \vee |B|_\alpha = t$$

Операторы $\Box$, $\Diamond$ рассматриваются как кванторы $\forall$, $\exists$, пробегающие по элементам W'' :

$$5. |\Box B|_{W''} = t \Leftrightarrow \forall \alpha (\alpha \in W'' \Rightarrow |B|_\alpha = t);$$

$$6. |\Diamond B|_{W''} = t \Leftrightarrow \exists \alpha (\alpha \in W'' \wedge |B|_\alpha = t)$$

(Следует отметить, что в [1] была, к сожалению, допущена серьезная неточность: в терминах $\{N, C, I\}$ оцениваются не модальные формулы, а пропозициональные переменные, входящие в них. Формулам, находящимся в области действия операторов $\Box$, $\Diamond$, приписываются значения из множества $\{t, f\}$.)

7. Формула $\Box B$ логически общезначима, е.т.е. B общезначима в каждом $W'' \in 2^U$.

8. Формула $\Box B$ логически выполнима, е.т.е. B общезначима в некотором $W'' \in 2^U$.

9. Формула $\Diamond B$ логически общезначима, е.т.е. B логически выполнима.

(Подробнее см. в [1].)

Помимо приведенных определений при формулировке разрешающей процедуры необходимо учитывать следующие соображения.

Поскольку в данной семантике имеются оценки только двух типов (относительно отдельных о.с. и их множеств), в ней «распознаются» только собственные для S5 модальности $\Box$, $\Diamond$, $\Box\neg$,

$\Diamond \neg$. Модальности высших степеней рассматриваются как «нечи-таемые» символы или кванторы по переменным, не имеющим вхождений в данную формулу. Поэтому проверке произвольной формулы на общезначимость/выполнимость должна предшествовать процедура приведения этой формулы (всех ее подформул) к некоторой «предваренной» форме особого вида. *Предваренной модальной S5-формой* некоторой формулы, содержащей произвольные последовательности модальных операторов, назовем такую логически эквивалентную ей формулу, в которой *ни один модальный оператор не находится в области действия ни одного другого модального оператора*. Для приведения формулы к предваренной модальной S5-форме используются известные правила редукции итерированных модальностей в S5 (в произвольной последовательности модальных операторов, предшествующих формуле к. л. в., существенным оказывается один — «ближайший» к формуле к. л. в. оператор), а также действующие в S5 пренесения операторов $\Box$, $\Diamond$ через истинностно-функциональные символы: $\Box(A \wedge B) \equiv (\Box A \wedge \Box B)$; $\Diamond(A \vee B) \equiv (\Diamond A \vee \Diamond B)$; $\Box(A \vee MB) \equiv (\Box A \vee MB)$; $(A \wedge MB) \equiv (\Diamond A \wedge MB)$; $\Box(MA \supset B) \equiv (MA \supset \Box B)$; $\Diamond(MA \supset B) \supset (MB \supset \Diamond B)$; $\Box(A \supset MB) \supset (\Diamond A \supset MB)$; $\Diamond(A \supset MB) \supset (\Box A \supset MB)$ — где M есть одна из собственных модальностей.

Кроме того, поскольку в рассматриваемых семантиках в качестве возможных моделей некоторой формулы выступают различные непустые подмножества U , их число будет *всегда конечным*. Это означает, что для пропозиционального фрагмента S5 (а также для его предикатного расширения с конечной предметной областью) возможно построение разрешающей процедуры, допускающей исчерпывающее перечисление всех кластеров W'' для произвольной формулы. Поэтому правила 5, 6 являются необходимыми, но не достаточными и должны быть дополнены некоторыми операциями над объемами U и 2^U .

Пусть U , как и ранее, есть исходное множество о.с. для формулы, $\mathbf{U}$ — число его элементов, B — произвольная формула к. л. в., $\Box B$, $\Diamond B$ — формулы, главными логическими знаками которых являются соответствующие модальные операторы.

Выражением $V(B)$ обозначим множество тех о.с. из U , в которых B истинна, выражением $V(\neg B)$ — множество тех о.с. из

U , в которых B ложна, выражениями $\mathbf{V}(B)$, $\mathbf{V}(\neg B)$ — число элементов в каждом из этих множеств:

- $V(B) = \{\alpha \in U \mid |B|_\alpha = t\} = U/V(\neg B)$, где $/$ — знак теоретико-множественной разности;
- $V(\neg B) = \{\alpha \in U \mid |B|_\alpha = f\} = U/V(B)$;
- $\mathbf{V}(B) = U - \mathbf{V}(\neg B)$; $\mathbf{V}(\neg B) = U - \mathbf{V}(B)$; ясно, что $\mathbf{V}(B) = U$, если B есть общезначимая формула к. л. в., и $\mathbf{V}(B) = 0$, если B невыполнима.

Если элементами $V(B)$ и $V(\neg B)$ являются отдельные о.с., то элементами $V(\Box B)$, $V(\Diamond B)$, $V(\Box \neg B)$, $V(\Diamond \neg B)$ будут множества о.с. $W \in 2^U$:

- $V(\Box B) = \{W \in 2^U \mid |\Box B|_W = t\} = 2^{U/V(\neg B)}$;
- $V(\Box \neg B) = \{W \in 2^U \mid |\Box \neg B|_W = t\} = 2^{U/V(B)}$;
- $V(\Diamond B) = \{W \in 2^U \mid |\Diamond B|_W = t\} = 2^U / V(\Box \neg B) = 2^U / 2^{U/V(B)}$;
- $V(\Diamond \neg B) = \{W \in 2^U \mid |\Diamond \neg B|_W = t\} = 2^U / V(\Box B) = 2^U / 2^{U/V(\neg B)}$;

Число элементов каждого из множеств данной группы определяется соотношениями:

- $\mathbf{V}(\Box B) = 2^{U - \mathbf{V}(\neg B)} - 1$; $\mathbf{V}(\Diamond B) = 2^U - \mathbf{V}(\Box \neg B) = 2^U - (2^{U - \mathbf{V}(B)})$;
- $\mathbf{V}(\Box \neg B) = 2^{U - \mathbf{V}(B)} - 1$; $\mathbf{V}(\Diamond \neg B) = 2^U - \mathbf{V}(\Box B) = 2^U - (2^{U - \mathbf{V}(\neg B)})$.

Определения $\mathbf{V}(\Box B)$, $\mathbf{V}(\Box \neg B)$ очевидны: «максимальным» множеством истинности B является фрагмент исходного U , включающий все о.с., в которых B истинна. Следовательно, $\Box B$ будет истинным в любом *непустом* подмножестве этого фрагмента. Из этого, в свою очередь, вытекают определения для $\mathbf{V}(\Diamond B)$, $\mathbf{V}(\Diamond \neg B)$: если в некотором (хотя бы одном) элементе произвольного множества о.с. W формула B истинна, то $\Diamond B$ будет истинной в каждом элементе этого W . Следовательно, в качестве «моделей» для $\Diamond B$ не подходят только кластеры из множества $V(\Box \neg B)$. Поскольку как 2^U , так и $2^{U/V(B)}$, $2^{U/V(\neg B)}$ содержат по одному пустому элементу, в определениях $\mathbf{V}(\Diamond B)$, $\mathbf{V}(\Diamond \neg B)$ соответствующий коэффициент 1 можно опустить.

Рассмотрим формулы $\Box(p \wedge q)$, $\Box(p \supset q)$ и исходное множество о.с. для каждой из них: $\{\{p, q\}, \{p, \neg q\}, \{\neg p, q\}, \{\neg p, \neg q\}\}$.

$$V(\Box(p \wedge q)) = 2^{U/V(\neg(p \wedge q))}; \quad \mathbf{V}(\Box(p \wedge q)) = 2^{U - \mathbf{V}(\neg(p \wedge q))} - 1 = 2^1 - 1 = 1.$$

Ясно, что единственным «множеством истинности» для формулы $\Box(p \wedge q)$ будет одноэлементное множество о.с. $\{\{p, q\}\}$.

$$V(\Box(p \supset q)) = 2^{U/V(\neg(p \supset q))}; \quad \mathbf{V}(\Box(p \supset q)) = 2^{U - \mathbf{V}(\neg(p \supset q))} - 1 = 2^3 - 1 = 7.$$

Формула $p \supset q$ истинна в каждом элементе множества $\{\{p, q\}, \{\neg p, q\}, \{\neg p, \neg q\}\}$, поэтому «множествами истинности» для $\Box(p \supset q)$ будут все его непустые подмножества. Таким образом, определение $|\Box(p \supset q)|_{W''} = t \Leftrightarrow \forall \alpha (\alpha \in W'' \Rightarrow |p \supset q|_{\alpha} = t)$ будет справедливым не для одного, а для семи кластеров W'' .

Данных определений достаточно для построения разрешающей процедуры. В общем виде она представляет собой систематический поиск контрпримера, то есть множества/множеств о.с. (соответственно, метаоценки переменных формулы в терминах $\{N, C, I\}$), в котором (которых) выполнимо отрицание исходной формулы. Если же все попытки подобрать подобную метаоценку оказываются безуспешными, то единственным множеством, в котором выполнимо отрицание исходной формулы, оказывается пустое множество о.с. $\{\emptyset\}$, а сама исходная формула общезначима.

Естественной основой построения разрешающей процедуры является в данном случае модифицированный аппарат аналитических таблиц для к. л. в. Помимо правил $[\wedge]$, $[\neg\wedge]$, $[\vee]$, $[\neg\vee]$, $[\supset]$, $[\neg\supset]$, $[\neg\neg]$, формулировка которых стандартна, будем использовать так называемые объемные правила, касающиеся допустимых оценок переменных некоторой формулы в терминах $\{N, C, I\}$ и условий истинности неэлементарных формул с главными логическими операторами $\Box$, $\Diamond$.

Пусть p — пропозициональная переменная. Что можно сказать об условиях истинности формул $\Box p$, $\Box\neg p$, $\Diamond p$, $\Diamond\neg p$? Первая из них может быть истинной только в множествах W с метаоценкой Np , вторая — в множествах о.с. с метаоценкой Ip , третья — при метаоценках Np , Cp , четвертая — при метаоценках Ip , Cp . На основе вышесказанного, а также с учетом соотношений $\neg\Box p \equiv \Diamond\neg p$, $\neg\Diamond p \equiv \Box\neg p$, формулируем следующие правила:

$$\begin{aligned}
& [\Box p] \frac{\Theta, \Box p, \Psi}{\Theta, Np, \Psi}; \quad [\Box \neg p] \frac{\Theta, \Box \neg p, \Psi}{\Theta, Ip, \Psi}; \\
& [\Diamond p] \frac{\Theta, \Diamond p, \Psi}{\Theta, Np, \Psi | \Theta, Cp, \Psi}; \quad [\Diamond \neg p] \frac{\Theta, \Diamond \neg p, \Psi}{\Theta, Ip, \Psi | \Theta, Cp, \Psi},
\end{aligned}$$

где p есть некоторая пропозициональная переменная, Θ, Ψ — произвольные (возможно, пустые) множества формул и/или их допустимых оценок.

$$\begin{aligned}
& [\Box B] \frac{\Theta, \Box B, \Psi}{\Theta, V(\Box B), \Psi}; \quad [\Box \neg B] \frac{\Theta, \Box \neg B, \Psi}{\Theta, V(\Box \neg B), \Psi}; \\
& [\Diamond B] \frac{\Theta, \Diamond B, \Psi}{\Theta, V(\Diamond B), \Psi}; \quad [\Diamond \neg B] \frac{\Theta, \Diamond \neg B, \Psi}{\Theta, V(\Diamond \neg B), \Psi},
\end{aligned}$$

где B есть формула к.л.в., главным логическим символом которой является какая-либо бинарная истинностно-функциональная связка, Θ, Ψ — произвольные (возможно, пустые) множества формул и/или их допустимых оценок.

Объемные правила двух групп по сути эквивалентны. Однако в случаях, когда операторы $\Box, \Diamond$ относятся к отдельным пропозициональным переменным и их отрицаниям технически удобнее использовать именно первый вариант их формулировки.

Выражения вида $Np, V(\Box B)$ и т.д. из нижних конфигураций таблиц рассматриваются как сокращения соответственно для $\{W \in 2^U | \forall \alpha (\alpha \in W \Rightarrow p \in \alpha)\}$ и $\{W | W \in 2^{U/(V \neg B)}\}$.

Если в некоторую конфигурацию таблицы входят пропозициональные переменные, не находящиеся в области действия модальных операторов (формула имеет «безмодальные» подформулы), то их значения определяются классическим образом относительно *одного фиксированного* о.с. В качестве символов для таких «констант» будем использовать $s_1, s_2, \dots, s_i$ ($1 \leq i \leq 2^n$). Наличие в одной конфигурации выражений вида $p \in s_i$ и Ip , $\neg p \in s_i$ и Np , а также Np и Cp , Np и Ip говорит о ее замкнутости (противоречивости).

Результатом всех возможных применений указанных правил к элементам некоторой конфигурации является «замещение» входящих в нее формул множествами (семействами множеств) о.с., в которых данные формулы истинны. Конфигурация зам-

кнута, е.т.е. соответствующее конфигурации истолкование переменных формулы в терминах N, C, I противоречиво или, что то же, пересечение объемов всех входящих в нее «множеств истинности» пусто. Таблица замкнута, е.т.е. замкнуты все ее конфигурации.

Рассмотрим несколько примеров. Покажем общезначимость формулы $\Box p \supset p$. Справа от каждой конфигурации таблицы обозначаем правило, в результате применения которого она появилась.

$\neg(\Box p \supset p)$	
$\Box p \wedge \neg p$	$[\neg \supset]$
$\Box p, \neg p$	$[\wedge]$
$Np, \neg p \in s_1$	$[\Box p]$
$p \in s_1, \neg p \in s_1$	

Завершающая конфигурация таблицы замкнута, поскольку не существует непустого множества о.с. W , соответствующего такому истолкованию допустимых значений переменных формулы в терминах $\{N, C, I\}$.

Покажем общезначимость формулы $(\Diamond p \wedge \Diamond q) \supset \Diamond(p \wedge q)$.

$\neg((\Diamond p \wedge \Diamond q) \supset \Diamond(p \wedge q))$	
$(\Diamond p \wedge \Diamond q) \wedge \neg \Diamond(p \wedge q)$	$[\neg \supset]$
$(\Diamond p \wedge \Diamond q), \neg \Diamond(p \wedge q)$	$[\wedge]$
$\Diamond p, \Diamond q, \neg \Diamond(p \wedge q)$	$[\wedge]$
$Np, Nq, 2^{U/V(p \wedge q)} \mid Np, Nq, 2^{U/V(p \wedge q)} \mid Cp, Nq, 2^{U/V(p \wedge q)} \mid Cp, Cq, 2^{U/V(p \wedge q)}$	
дважды применяя $[\Diamond p]$ и $[\Box \neg]$	

Последняя конфигурация таблицы незамкнута, формула необщезначима.

Проанализируем этот пример более подробно.

Первая конфигурация содержит метаоценки Np, Nq , которым соответствует единственное множество $\{\{p, q\}\}$, не являющееся элементом $2^{U/V(p \wedge q)}$. Таким образом, данной конфигурации соответствует множество $W = \emptyset$.

Вторая конфигурация содержит метаоценки Np, Cq , которым соответствует двухэлементное множество о.с. $W = \{\{p, q\}, \{p,$

$\neg q\}$ }, также не являющееся элементом $2^{U/V(p \wedge q)}$. $|\Box(\neg p \vee \neg q)|_W = t \Leftrightarrow \forall \alpha (\alpha \in W \Rightarrow |\neg p \vee \neg q|_\alpha = t)$. Нетрудно убедиться, что при квантификации по элементам данного W формула $\Box(\neg p \vee \neg q)$ оказывается ложной.

Третья конфигурация содержит метаоценки Cp, Nq , которым соответствует двухэлементное множество о.с. $W = \{\{p, q\}, \{\neg p, q\}\}$. При квантификации по элементам этого множества формула $\Box(\neg p \vee \neg q)$ оказывается ложной.

Четвертая конфигурация содержит метаоценки Cp, Cq . Им будет соответствовать семейство множеств о.с. «размерности» от 2^1 до 2^n , в каждом из которых p и q по крайней мере однажды меняют значение. В данном случае таких множеств 7 (подробнее см. в [1]). Формула $\Box(\neg p \vee \neg q)$ будет истинной в любом из них, не содержащем о.с. $\{p, q\}$.

Этим условиям удовлетворяют множества с метаоценками $Cp, Cq, I\{p \wedge q\}, C\{p \wedge \neg q\}, C\{\neg p \wedge q\}, C\{\neg p \wedge \neg q\}$ и $Cp, Cq, I\{p \wedge q\}, C\{p \wedge \neg q\}, C\{\neg p \wedge q\}, I\{\neg p \wedge \neg q\}$, т.е. множества о.с. $\{\{p, \neg q\}, \{\neg p, q\}, \{\neg p, \neg q\}\} \in 2^{U/V(p \wedge q)}$ и $\{\{p, q\}, \{\neg p, q\}\} \in 2^{U/V(p \wedge q)}$.

Нетрудно убедиться, что в каждом из них истинно отрицание исходной формулы.

Литература

- [1] *Архиереев Н.Л.* Логические модальности как арифметические функции // Логические исследования. Вып. 16. М.-СПб: ЦГИ, 2010. С. 3-23.
- [2] *Ивлев Ю.В.* Модальная логика. М.: Изд-во Московского университета, 1991.

Как может рассуждать компьютер в духе булевой многозначности

К. И. БАХТИЯРОВ

Памяти дочери посвящается

ABSTRACT. How a computer may think? The non-classical many-valuedness can be presented by means of classical logic. We use $F = -1$ as a negative number for false, and the logical zero is released for uncertainty $N = 0$ which is better to be accepted **by a computer by default** than a presumption of lie. Uncertainty $N = 0 = \frac{0}{1}$ forms the triad $\nabla_{\mathbf{N}} : -1, \frac{0}{1}, 1$ where false $\mathbf{F}$ gives $\frac{-1}{1} \vee \frac{0}{1} = \frac{0}{1}$. Nonsense $B = 0' = \frac{1}{0}$ forms the inverse triad' $\triangle_{\mathbf{B}} : 1, 0', -1'$ where $\mathbf{F}'$ gives $\frac{1}{-1} \vee \frac{1}{0} = \frac{1}{0}$. Two triads generate FIVE system, where $N \vee B = 0 \vee 0' = \frac{0}{1} \vee \frac{1}{0} = \frac{1}{1}$. Operations are done componentwise. The letters of a genetic code are taken for a sample: A (adenine) as a maximum, u (uracil) as a weak minimum, and also the inverted letters: V as a minimum, n as a weak maximum. The Matrix of Complementarity, columns of which represent complementary pairs, has been constructed under laws of creation of a living organism. The complete block Ψ characterizes dependence on Last Name-dominants A and V Isomorphism of matrices of a genetic code and mental types shows predisposition of characters, in many respects determined by their genetic code. It is offered the arithmetization of modal logic on the basis of the Matrix of Complementarity.

Ключевые слова: пятизначная бирешетка, ложь-нонсенс, самодуальность инверсии, комплементарность, генкод, доминанты, психогенетика

1 Арифметизация практической логики Белнапа

Математика (в отличие от грамматики)
не любит исключений.

П.С. Александров. Лекции по аналитической геометрии

Для реализации идеи булевой многозначности будем оттапливаться (сначала опираться, а потом делать качественный скачок) от четырех значений, которые использовались Булем в логике. На столетии его «Законов мысли» идея булевой многозначности подчеркивалась Р. Фейсом и согласно его интер-

претации (в полном соответствии с правилами математики) следовало считать $\frac{1}{1} = 1$ истинным, $\frac{0}{1} = 0$ ложным, $\frac{0}{0}$ неопределенным, $\frac{1}{0}$ бесконечным значением [21]. Рассмотрим первые три значения. Если использовать идею Я. Лукасевича о **покомпонентном выполнении операций** в четырехзначной логике, то для этих четырех значений имеем $\frac{0}{1} \vee \frac{1}{1} = \frac{1}{1}$ и $\frac{0}{0} \vee \frac{1}{1} = \frac{1}{1}$, но $\frac{0}{0} \vee \frac{0}{1} = \frac{0}{1}$ (*)?! Действуя формально, в последнем случае получаем ложное значение F вместо неопределенности. Ведь должно быть $N \vee F = N$ (**). Тогда Лукасевич в трехзначной логике записывает $\frac{1}{2} \vee 0 = \frac{1}{2}$. Обстоятельный обзор дан в монографии А.С. Карпенко «Развитие многозначной логики» [11]. Однако введение дробного значения $\frac{1}{2}$ означает полный отказ от концепции булевой многозначности, исповедующей принцип цифровой бинарности (только цифры 0 и 1). Ее не следует путать с числовой бинарностью и было бы правильнее называть логической многомерностью. Можно заметить родство этой логики с конечными геометриями.

Исторический опыт показывает, что обогащение математического аппарата всегда проводилось путем обобщения обратных арифметических операций на случаи, когда они невозможны. Лазарь Карно говорил: «Попробуйте взять 5 яблок со стола, где лежат 3 яблока». Автор полагает, что для обозначения лжи как отрицания истины более естественно использовать отрицательное число -1 . Тогда вместо формулы (**) будем просто иметь $0 \vee -1 = 0$, формулу (***). Логический нуль освобождается для неопределенности (принятие которой *компьютером по умолчанию* лучше презумпции лжи) [3]. Неопределенности Белнапа $N = None$ (ни истинно, ни ложно) [3] будет соответствовать значение $0 = \frac{0}{1}$. **Неопределенность N** задает тройку значений: $0, 1, -1$ (Лукасевич L3) с ложью-ошибкой $F = -1 = \frac{-1}{1}$. Нонсенсу Белнапа $B = Both$ (и истинно, и ложно) [3] будет соответствовать значение $0' = \frac{1}{0}$. **Нонсенс В** задает обратную тройку значений: $0', 1, -1'$ (анти-Лукасевич L'3) с ложью-нонсенсом (граничащей с абсурдом) $F^B = F' = -1' = \frac{1}{-1}$. Для обозначения обратных величин вводится апостроф: $x' = x^1 = \frac{1}{x}$. Для обратных величин получаем $0' \vee -1' = 0'$, так как $\frac{1}{0} \vee \frac{1}{-1} = \frac{1}{0}$. Этот результат $0' = 0^{-1} = \frac{1}{0}$ является следствием **покомпонентного выполнения операций**.

Унарные связки для логической инверсии «'» и отрицания «—» определяются нами следующей таблицей:

A	A'	$-A$
$-1 = \frac{-1}{1}$	$-1' = \frac{1}{-1}$	$1 = \frac{1}{1}$
$0 = \frac{0}{1}$	$0' = \frac{1}{0}$	$0 = \frac{0}{1}$
$1 = \frac{1}{1}$	$1 = \frac{1}{1}$	$-1 = \frac{-1}{1}$
$0' = \frac{1}{0}$	$0 = \frac{0}{1}$	$0' = \frac{1}{0}$
$-1' = \frac{1}{-1}$	$-1 = \frac{-1}{1}$	$1 = \frac{1}{1}$

В итоговой таблице дизъюнкции выделены триада $\nabla_{\mathbf{N}}$ и обратная триада $\Delta^{\mathbf{B}}$ для $\mathbf{L3}$ и $\mathbf{L'3}$, которые совместно порождают пятизначную бирешетку *FIVE*. Образно говоря, склеивание по единственной истине (T) знака римской пятерки V и ее перевернутого знака порождает римскую десятку X . Так удастся избежать парадокса гексаграммы, называемой звездой Давида.

$\vee$	-1	0	1	$0'$	$-1'$	$\vee$	F	N	T	B	F'
-1	-1	0	1	1	1	F	F	N	T	T	T
0	0	0	1	1	1	N	N	N	T	T	T
1	1	1	1	1	1	T	T	T	T	T	T
$0'$	1	1	1	$0'$	$0'$	B	T	T	T	B	B
$-1'$	1	1	1	$0'$	$-1'$	F'	T	T	T	B	F'

В общей логической алгебре следует отличать ложь-нонсенс $\mathbf{F}' = -1' = \frac{1}{-1}$ и ложь-ошибку $F = -1 = \frac{-1}{1}$, потому что это разные упорядоченные пары. Дизъюнкция с **нонсенсом** $\mathbf{B}$ для лжи-нонсенса $\mathbf{F}'$ дает **нонсенс** $\mathbf{B}$, а когда имеем ложь-ошибку F , то **истину** $\mathbf{T}$. Образно говоря, они находятся в разных окрестностях, являются аналогами бесконечно-больших и бесконечно-малых. Это важно, поскольку в отношениях вида $\frac{x}{y}$ (которые в логике являются проективными координатами) операции производятся покомпонентно. Две триады имеют общее значение истины, поскольку $\mathbf{T} = \mathbf{T}' = \frac{1}{1}$. Они отличаются парами неопределенностей $N = 0 = \frac{0}{1}$, $F = -1 = \frac{-1}{1}$ и абсурдностей

$B = 0' = \frac{1}{0}$, $F' = -1' = \frac{1}{-1}$. Покажем, что для алгебры логики, в которой операции выполняются покомпонентно, недостаточно системы FOUR четырехзначной логики. Действительно, $-1' \vee 0' = 0'$, но $-1 \vee 0' = 1$, так как $\frac{-1}{1} \vee \frac{1}{0} = \frac{1}{1}$. Вообще, $a \vee b' = 1$, ибо $\frac{a}{1} \vee \frac{1}{b} = \frac{1}{1}$. В частности, $0 \vee 0' = 1$, т.е. $N \vee B = T$, так как $\frac{0}{1} \vee \frac{1}{0} = \frac{1}{1}$.

Итак, для выполнения покомпонентных операций алгебры логики необходима система FIVE пятизначной логики (из-за наличия лжи-нонсенса $F' = -1' = \frac{1}{-1}$ и лжи-ошибки $F = -1 = \frac{-1}{1}$). В ней при $b \geq a$ имеем $a \vee b = b$ и $a' \vee b' = b'$. Самодуальность инверсии: $(a \vee b)' = a' \vee b'$ облегчает **покомпонентное выполнение операций** и упрощает запись.

В основе практической логики для компьютера лежат две пары противоположностей: *по знаку* имеем $+1$ и -1 , а *по величине* имеем нуль 0 и бесконечность $\frac{1}{0}$. Геометрической моделью может служить ситуация *деления отрезка* $[0; 1]$ в данном отношении.

$p = -\infty$	0	$\frac{1}{2}$	1	$+\infty$
	$ A$	$ M$	$ B$	
$\frac{p}{q} = \frac{-1}{+1}$	$\frac{0}{1}$	$\frac{1}{1}$	$\frac{1}{0}$	$\frac{+1}{-1}$

Для отрезка $[A, B]$ отношение $\lambda = \frac{AM}{MB}$ удобнее задавать не одним числом, а парой чисел $\lambda = \frac{p}{q} [1]$. Имеют место два исключения:

- 1) точке $M = B$ не соответствует никакое λ ,
- 2) число $\lambda = -1$ не соответствует никакой точке M .

Пара $\frac{p}{q} = \frac{1}{0}$ снимает первое исключение. Пополнив прямую несобственной (бесконечно удаленной) точкой, снимаем второе исключение. При $p \rightarrow +\infty$ имеем $\frac{p}{q} = \frac{+1}{-1}$, а при $p \rightarrow -\infty$ получаем $\frac{p}{q} = \frac{-1}{+1}$. Внутренность отрезка $[A, B]$ дает положительное значение λ , а внешность этого отрезка — отрицательное значение λ . Склеивание двух различных отношений $\frac{-1}{1}$ и $\frac{1}{-1}$, которое происходит при замене их одним числом -1 , порождает парадокс А. Арно, автора «Логике Пор-Рояля»: «меньшее относится к большому так же, как большее относится к меньшему», —

который доказывал парадоксальность отрицательных чисел [3]. Однородные координаты позволяют сформулировать не только основания геометрии, но и **основания логики**.

2 Логический квадрат и матрица комплементарности

C'est peut-être **I Ching** qu'il faudrait étudier
pour saisir les relations entre hérédité et langage.
F. Jacob. Le modele linguistique en biologie.
(Возможно, именно через древнекитайскую
«Книгу перемен» удастся установить связь
между генетическим кодом и языком.
Ф. Жакоб. Лингвистическая модель в биологии)

Под влиянием древнекитайской «Книги перемен» Лейбниц создал двоичную систему и поставил проблему создания универсального языка. Он писал: «Никто, однако, не попытался создать язык или характеристику, . . . знаки, или характеры которой представляли бы собой то же, что арифметические знаки представляют собой в отношении чисел, а алгебраические обозначения — в отношении абстрактно взятых величин» [14]. Нобелевский лауреат по молекулярной генетике Ф. Жакоб недаром возлагал такие большие надежды на древнекитайскую «Книгу перемен».

При создании универсального языка существенную помощь может оказать рассмотрение параллелизма между триплетами генетического кода и триграммами (с прерывистыми и сплошными чертами) из древнекитайской «Книги перемен». «Доньшикам» — триграммам с двумя и одной сплошными нижними чертами — соответствуют минимумы: $\equiv = \cup$ и $\equiv = \vee$. Следуя З. Фрейду можно охарактеризовать эти символы как вагинальные, в противоположность фаллическим $\equiv$ и $\equiv$. Заметим, что для слабых знаков масоны использовали усеченные треугольники. Аналогичный гендерный смысл несут и символы карточных мастей — Кубки (червы) и Мечи (пики), которые напоминают две пирамиды на входе Лувра: $\triangle$ и ∇ . Термин «*угол вершиной вниз*» звучит парадоксально, ибо «*высота*» фактически называется *глубиной* относительно «*основания*» (подлежащее = *субъект*). Знаки экстремумов фактически являются символами слабого и сильного пола. Экстремумы подразделяются на глад-

кие (первая производная $y' = 0$) и острые (y' не существует).
Имеем минимумы: $\cup$ — *дно* и $\vee$ — *бездонное дно*.

Г. Фреге в «Логике» писал: «Законы природы не нуждаются в нашем признании, чтобы быть истинными». За образец букв универсального языка возьмем буквы генетического кода. Будем использовать букву **A** (аденин) как знак максимума, а букву **u** (урацил) как слабого минимума. Для другой комплементарной пары возьмем аналогичные перевернутые знаки: букву **V** как знак минимума (цитозин), а букву **n** как стилизованный знак слабого максимума (гуанин) [4]. Максимум $\equiv \equiv$ = A и минимум $\equiv \equiv$ = V хорошо прорисовываются триграммами.

Теперь получаем Генетическую Матрицу Комплементарности (слева), которая заменила Логический Квадрат Противоположностей (справа).

ЮВ	Ю		ЮЗ	ТВ	Т		ТС
В	n	A	З	В	n	A	С
	V	u			u	V	
СВ	С		СЗ	ХВ	Х		ХС

Согласно восточной классификации элементы образуют две пары. Имеем по вертикали: теплое (Т) — холодное (Х), а по горизонтали: сухое (С) — влажное (В). Соединяясь попарно, эти свойства порождают четыре стихии: воздух (ТВ), огонь (ТС), вода (ХВ), земля (ХС).

Логический Квадрат (справа) является искусственной логической конструкцией, порождающей возникновение точки разрыва (второго рода). Достаточно сделать транспозицию элементов в нижней строке, своеобразную «рокировку», и полученная Матрица Комплементарности (слева) свободна от этого недостатка. В Квадрате Противоположностей по вертикальной оси имеем *истину* (t), а по горизонтальной — *железную* необходимость (L), которой по древнекитайской классификации элементов соответствует 5-й элемент — металл. В этой классификации противопоставляются дерево и металл, которым соответствуют в Логическом Квадрате возможность и необходимость. В его правом столбце имеем необходимую истину Lt и необходимую ложь Lf.

Mt	t ☰		Lt
None	☰	☰	Both
☰	☰	☰	☰
Mf	f ☰		Lf

Поиск в языке априорных структур призван объяснить возможность математического знания. Одно слово «*indefinite*» во французском и английском языках имеет два значения: «неопределенно» и «безгранично». Им соответствуют **None** — логический нуль 0 и обратное значение **Both** — логическая бесконечность $\frac{1}{0}$, нонсенс. Это — противоположности по *величине*, а другая пара противоположностей: *по знаку* +1 и −1.

Две указанные пары противоположностей лежат в основе **Квадрата Противоположностей** (*Square of Opposition*), обычно называемого **Логическим Квадратом**. Напротив, Матрица Комплементарности плавно вписывается в природные круговороты: годовой Солнечный цикл времен года (весна — лето — осень — зима) и месячный цикл фаз Луны: от первой четверти :) до последней четверти. Заметим, что символы лунных фаз могут быть прочитаны как смайлики. Итак, имеем модель, в которой сезоны перемежаются с деми-сезонами. Природа действительно движется по кругу, что соответствует матрице комплементарности. Круговая планировка Москвы (напоминающая кольца на спиле дерева) живая в отличие от прямолинейной планировки Санкт-Петербурга.

Логика кладется в основу искусственного интеллекта (ИИ), присущего компьютеру. Недаром девиз Лейбница был: *Calculus!*, что означало *Вычислим*, чтобы не спорить. Ведь, логика — это просто. Гораздо сложнее постигнуть природу естественного интеллекта (ЕИ). Живые системы требуют генетического подхода. Генетический код позволяет заглянуть в Кухню Природы, познавая принципы становления нового. Это — генеральная линия в преодолении пропасти между ИИ и ЕИ. Мы опираемся на идею структурирования по типу **Матрицы Комплементарности** (*Matrix of Complementarity*), имеющей естественное расположение элементов комплементарных пар.

Целостный блок Ψ характеризует зависимость от фамилий-доминант «либералов» А и «консерваторов» V; а расщепленный

блок $(\downarrow\uparrow)$ — зависимость от имен-доминант столбцов комплементарных пар $\downarrow$ и $\uparrow$:

$$\downarrow = \begin{bmatrix} n \\ V \end{bmatrix} \text{ — моногамные согласные, } \uparrow = \begin{bmatrix} A \\ u \end{bmatrix} \text{ — полигамные гласные.}$$

Некронекеров (левый) тензорный квадрат матрицы Ψ дает

		nn	An	nA	AA	gly	STOP, arg/ser	glu/asp	lys/asn
$(\uparrow\downarrow)_n$	ΨA	Vn	un	VA	uA	arg	STOP, trp/cys	gln/his	STOP/tyr
		nV	AV	nu	Au	ala	thr	val	ile, met/ile
ΨV	$(\uparrow\downarrow)_u$	VV	uV	Vu	uu	pro	ser	leu	leu/phe

Комплементарные пары образуют сочетания твердого характера с мягким. Рассматривая пары вида $(x_1, x_2) = (First\ Name, Second\ Name)$, будем исходить из приоритета фамилии, второго имени (second name). Имеем две доминантные фамилии: гласная *A (вершина либерализма «полигамна», открыта) и согласная *V (воронка консерватизма «моногамна», закрыта). Не-доминантные фамилии n, u: с гласными именами A*, u* — аура золотой пары — примыкают к блоку гласных, а с согласными именами V*, n* — *волей-неволей* к блоку согласных [5]. Так реализуется своеобразная петля гистерезиса (которая в Генетической таблице хорошо видна по блокам, напечатанным **жирным** и **тонким шрифтом**).

Переключатели **в петле гистерезиса** описывают особенность порогового подхода. Это — аналог закона инерции в психофизике, где его сравнивают с работой реле. При решении практических задач в радиолокации для различения ситуаций «перехлеста» используется очень наглядная терминология: **No/signal** = *пропуск сигнала* (ОИ = отвергнутая истина) и **Yes/noise** = *ложная тревога* (ПЛ = принятая ложь). В математике их называют ошибками первого и второго рода. Психологам хорошо известно, что в развлечениях быстрее вскрываются плюсы, а в проблемах — минусы.

Первым почти универсальным языком явилась математика, которая проявила тенденцию к захвату различных областей знания. «Усвоив с детства позиционный способ нумерации, мы

склонны недооценивать это замечательное культурное достижение человечества. История, однако, учит нас, что такие высококультурные народы древности, как египтяне и даже греки с их изумительно тонкой и глубокой математической культурой, не создали позиционной нумерации». В средние века специальным декретом венецианской республики запрещались арабские цифры и вменялись к употреблению римские цифры. Умевшим делить в столбик числа, записанные римскими цифрами, даже присваивалась ученая степень — доктор деления.

Символическая информация непозиционна. Трудно составить звуковые слова из знаков арифметических действий, используя позиционный принцип. Нео-пифагорейская парадигма новой метафизики стала особенно популярна после открытия генкода, **кода Живого**. Геном выступает как образец текста, записанного четырьмя буквами универсального кода. Генетический код позволил нам заглянуть в кухню Природы и познать принципы становления нового. Не надо новых букв при позиционной записи операторных слов на высших уровнях, где достаточно всего четырех букв. При этом сначала идет крупноблочное строительство логической матрицы, а потом обустройство отдельных ячеек, которые заполняются по принципу подобию.

Нечисловой позиционный принцип в гуманитарной области дает не меньшие преимущества, чем позиционная числовая арифметика. В универсальном языке операторные слова составлены из однобуквенных операторов («букв»). Это реализует мечту Лейбница — сделать математику действительно универсальным языком. В инициалах (*First Name, Second Name*) фамильное сходство («типаж») играет роль ключевого аспекта, который стоит всех остальных вместе взятых. Кстати заметим, что при позиционной записи чисел арабскими цифрами старшинство разрядов возрастает справа налево, соответствуя записи арабских, а не европейских слов. И чтобы разобраться в логике генетического кода, надо все переставить с головы на ноги, ибо как говорят англичане: *Last but not least* (Последний по очередности, но не по значимости).

Д. Хофштадтером убедительно показана необходимость осмысления макроуровня генетического кода и подчеркивается необходимость перехода от молекулярного уровня к антропо-

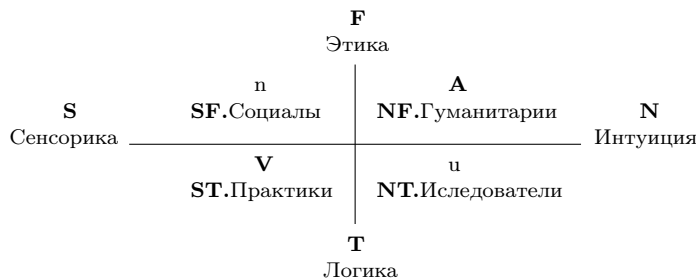
морфному — от молекул к характерам. Центральные строительные блоки личности — характер и темперамент — имеют решающее значение во взаимопонимании. Это очень важно, ибо главное не технология и не финансы, а **битва за умы**, позиционирование сознания [22]. Высший уровень позволяет выявлять смыслы макроскопических сущностей-единств, напечатанных ТОНКИМ шрифтом как КОНСЕРВАТИВНЫЕ, а **жирным** шрифтом как **мутационные**, «полигамные» ячейки (таблица слева), порождающие кодоны *более богатые аминокислотами* (таблица справа) [7, 8, 20]. Феноменология дает понимание кода психотипа.

Противоположность между консерватизмом *V* и авантюризмом *A* наглядно проявляется в хромосоме 19, где замена двух цистиннов на два аргинина (в позициях 472 и 334 в тексте гена APOE4 длиной в 897 «букв») приводит к увеличению риска заболевания болезнью Альцгеймера в 2 раза, а в сочетании с травмой головы в 10 раз [2].

Изоморфизм матриц генетического кода и психических типов показывает предрасположенность характеров, во многом определяющихся их генетическим кодом. Однако матрица, лежащая в основе классификации в книге *О. Крегера и Дж. Тьюсона* [12], меня не удовлетворила. Не было изоморфизма с моей таблицей генетического кода. Систематизация такого известного специалиста, как В.В. Гуленко, с 4-я блоками (профклубы), использовавшаяся Е.С. Филатовой и Н.Ф. Тельновым, оказалась наиболее удачной [17, 6].

Вопрос о структурном изоморфизме психических, физиологических и природных феноменов рассматривался еще в античности. Начиная с Гиппократы **выделяли** четыре темперамента, аналогичные агрегатным состояниям вещества. Пути решения проблемы «Двух культур» Ч. Сноу намечает в романе «Поиски»: «Нам всем хочется чего-то такого, чего наука не может дать нам. . . те образы, в которых греки воплощали природу: земля, воздух, огонь и вода».

В основу классификации психологических типов положено дихотомическое деление. Таблица основана на двух парах противоположных факторов: S-N (*Sensation-Intuition*) и T-F (*Thinking-Feeling*).



В таблице легко распознается Матрица Комплементарности с четырьмя первоэлементами-мастями: черви, бубны, трефы, пикки — $\heartsuit \diamondsuit \clubsuit \spadesuit$.

n	A	Медиа	Артисты	$\diamond$ пар пиара	$\heartsuit$ Огонь страсти	$\cdot$) весна	o Лето
V	u	Власть	Ученые	$\spadesuit$ Лёд власти	$\clubsuit$ вода науки	• Зима	:(осень

Освежающий вдох свежего дыхания, обжигающий огонь страсти, живительная вода мудрости и, наконец, леденящий холод могильных памятников — таковы фазы жизненного цикла.

Матрица состоит из четырех блоков психотипов, каждый из которых является ею в миниатюре, действуя как фрактальный множитель. Добавляя третью пару противоположных факторов на E-I (*Extraversion-Introversion*) получаем психологические типы К. Юнга. Он считал основным деление на экстраверсию и интроверсию (E-I) и рассматривал его в сочетании с вышеозначенными S-N и F-T. Юнг вводит и четвертую дихотомию — «рационализм-иррационализм», а Майерс и Майерс-Бригс заменяют ее на производную J-P (*Judging-Perceiving*) — комбинацию «рационализма-иррационализма» с экстраверсией-интроверсией (под предлогом ее якобы большей внешней проявленности). Научный руководитель журнала «Соционика и психология» Р.А. Степанов, анализируя четвертую дихотомию, показал необходимость ее замены на пару противоположностей О-А (*Mobile-Stabile*) *Динамик-Статик* [16], обосновывая первичность этой дихотомии и вторичность дихотомии «рациональность-иррациональность». Он выделяет 4 первичных дихотомии: E-I, S-N, F-T, О-А. Динамик делает встречные шаги (в прямом и переносном смысле), а для статика характерна согнутость фигуры и угловатость движений [13]. Доминанты A,V

образуют блок аристократов, которые четко делят всех на «своих» и «чужих». Для противостоящего им блока демократов п, и отсутствуют авторитеты, особенно у иррационалов.

Каждый блок может быть подразделен на психовиды, что порождает таблицу с шахматным порядком для **ИНТРОВЕРТОВ (Б)** и *экстравертов (м)*. Итак, получаем Основную Матрицу:

	Статик	Динамик	Статик	Динамик
ирр	Наполеон	ДЮМА	Гексли	ЕСЕНИН
рац	ДРАЙЗЕР	Гюго	ДОСТОЕВСКИЙ	Гамлет
ирр	Жуков	ГАБЕН	Дон Кихот	БАЛЬЗАК
рац	МАКСИМ	Штирлиц	РОБЕСПЬЕР	Джек

Для **рационалов** характерно совпадение: ИНТРОВЕРТ = статик, а *экстраверт* = динамик. Рациональные экстраверты динамики (Гюго, *Гамлет*, *Джек*, *Штирлиц*) страдают излишним консерватизмом. Рационалы тяготеют к стандартизации, интроверты замкнуты. Рациональные интроверты статике (ДРАЙЗЕР, МАКСИМ, **ДОСТОЕВСКИЙ**, **РОБЕСПЬЕР**) имеют склонность к формализму. Если рационал все планирует, то иррационал действует спонтанно. Согнутость и угловатость движений — характерные внешние признаки статика **Дон Кихота** — смягчаются для **иррационала** встречной открытостью экстраверта. Это — творческий тип искателя. Его полная противоположность из блока ученых — **БАЛЬЗАК**. У него как иррационала плавность движений динамика ожесточается замкнутостью интроверта. Он менее инициативен и является скорее критиком.

Приведенные персонажи — это своего рода *фотороботы*, которые носят характер псевдонимов, принятых в сленге социоников. Они были предложены Аушрой Аугустинавичюте, которая открыла отношения социальной ревизии и заказа как базовых интертипных отношений и показала асимметрию этих отношений.

А. Аугустинавичюте выявила в популяции, состоящей из 16 психотипов, группу из 14 так называемых «интертипных отношений», определенным образом структурирующих взаимодействие членов популяции. Причем, 2 из 14 отношений в этой груп-

пе являются асимметричными, и образуют в популяции циклические структуры одностороннего движения информации, названные «кольцами социального заказа». и «кольцами социальной ревизии».

Социальная ревизия является отношением контроля, где в качестве опорного признака Г.Р. Рейнина рассматривается пара *позитивность*(+)–*негативность*(–). Позитивисту в данный момент времени бросаются в глаза положительные, а негативисту — отрицательные аспекты ситуации. Ревизные отношения всегда очень тяжелые, причем нажим происходит от ревизора к подревизному. Обычно ревизор недооценивает способности своего подконтрольного, который со своей стороны недостаточно ценит проявляемую заботу.

Социальный заказ как отношение передачи информации (от передатчика к приемнику) является более благоприятным, чем ревизия. В качестве опорного признака для него рассматривается пара *квестимность*(?)–*деклатимность*(!). Коллектив заказного типа склонен к традиционному долгу, дискуссии в нем мало эффективны. Например, консервативный рационал Штирлиц является заказчиком для творческого иррационала Дон Кихота. Оба они экстраверты-квестимы, что более благоприятно для совместной работы. Для квестима спор не самоцель, а является способом получения информации, он не склонен к декларативности. Дополнительные спирали будут кольцами *деклатимности*(!) заказа. Наиболее комфортными являются отношения дуалов — недаром говорят: *крайности сходятся*. Таковы например, два иррационала: экстраверт статик Дон Кихот и интроверт динамик ДЮМА. Это, например, я и моя внучка.

Открытие Аугустиновичоте феномена «интертипных отношений» имеет регистрацию от 1 октября 1980 г. по дате депонирования ее рукописи «Теория интертипных отношений» в отделе рукописей Библиотеки АН Литовской ССР. Сущность открытия: «Установлено неизвестное ранее явление самоорганизации динамических структур межличностного взаимодействия в человеческом обществе, заключающееся в том, что в группе индивидуумов устанавливается определенная динамическая структура взаимодействия (пространственное расположение партнеров, интенсивность, темп и другие параметры речевого обмена, со-

ответствующая продуктивность совместной деятельности, субъективные переживания и др.), обусловленная дифференциацией человеческого общества на кооперирующие психологические типы личности».

Учет базовых интертипных отношений позволил построить с помощью периодического сдвига в Основной Матрице Периодическую таблицу, которая открывает «царский путь» в изучение отношений социальной ревизии и социального заказа. В предлагаемой ПСИ-таблице прослеживается четкая классификация в терминах Рационалов-Иррационалов и Статиков-Динамиков. Это — шахматная доска с клетками экстравертов-ИНТРОВЕРТОВ (черные клетки, большие буквы).

В таблице КЛЕТКИ **заказа** прочитываются по всем линиям вверх:

	Статик	Динамик	Статик	Динамик	Статик	Динамик
рац	+ ! МАКС	- ? Штур	• • • - ? РОВЕС	+ ! Джсек	+ ! МАКС	- ? • • • Штур
ирр	+ ? Напол	- ! ДЮМ	- ! Гексл	+ ? ЕГЕН	+ ? Напол	- ! ДЮМ
рац	- ? ДРАЙЗ	+ ! Гюго	+ ! ДОСТ	- ? Гамл	- ? ДРАЙЗ	+ ! Гюго
ирр	- ! Жуков	+ ? ГАБ	+ ? Дон	- ! БАЛБЗ	- ! Жуков	+ ? ГАБ

Блоки по любым линиям (по сплошным или по пунктирным) вниз дают пары параллельных линий **ревизии**:

$\swarrow \frac{+МАКС!}{-Штур?} \searrow \frac{+Напол?}{-ДЮМ!} \swarrow \frac{+ДОСТ!}{-Гамл?} \searrow \frac{+Дон?}{-БАЛБЗ!}$ 1-ая линия *позитивной S-ревизии*,
 $\swarrow \frac{-РОВЕС?}{+Джсек!} \searrow \frac{-Гексл!}{+ЕГЕН?} \swarrow \frac{-ДРАЙЗ?}{+Гюго!} \searrow \frac{-Жуков!}{+ГАБ?}$ 2-ая линия *негативной S-ревизии*,
 $\swarrow \frac{-РОВЕС?}{+Джсек!} \searrow \frac{-Гексл!}{+ЕГЕН?} \swarrow \frac{-ДРАЙЗ?}{+Гюго!} \searrow \frac{-Жуков!}{+ГАБ?}$ 3-ья линия *негативной Z-ревизии*,
 $\swarrow \frac{+МАКС!}{-Штур?} \searrow \frac{+Напол?}{-ДЮМ!} \swarrow \frac{+ДОСТ!}{-Гамл?} \searrow \frac{+Дон?}{-БАЛБЗ!}$ 4-ая линия *позитивной Z-ревизии*.

Кольца социальной ревизии пронизывают все четыре блока. Два кольца идут в одном направлении, два других — навстречу.

S-ревизия образует кольцо с вращением по часовой стрелке, что соответствует известному знаку свастики [19]. Примером может служить кольцо негативистов: БАЛЬЗАК давит на Штирлица, Штирлиц на ДЮМА, ДЮМА на Гамлета, Гамлет на БАЛЬЗАКА. **Z**-ревизия характеризует кольцо с вращением против часовой стрелки. Чередование **ИНТРОВЕРТ** (**Б**, черная клетка) экстраверт (**м**, белая клетка) характерно для циклов ревизии. Приведем пазлы **S**-ревизии (рис. 1а) и **Z**-ревизии (рис. 1б).

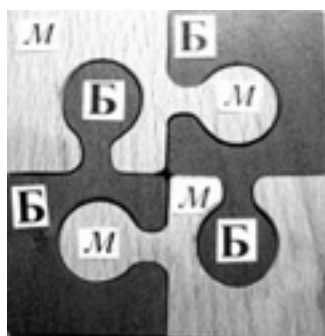


Рис. 1а

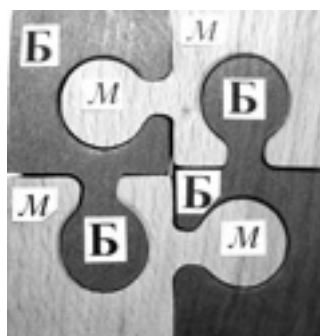


Рис. 1б

Коллектив с ревизуемостью дисциплинирован, его участники избегают генерировать идеи. Данный тип хорош для армейских коллективов. Например, рациональный экстраверт Штирлиц давит на иррационального интроверта ДЮМА (случай негативной **S**-ревизии). Кольца социального *квестимного* (?) заказа образуют спирали, которые показаны стрелками. Например, Штирлиц передает заказ Дон Кихоту, Дон Кихот — Гамлету, Гамлет — Наполеону, Наполеон — Штирлицу.

Наглядно просматривается асимметрия социальной ревизии и заказа как базовых интертипных отношений. Мой опыт невольного участия в асимметричных отношениях позволяет заключить, что знание психотипов дает возможность понять тех, кто является подзаказным (я, например, по отношению к своему зятю), а также тех, кто находится в положении подревизного (внучка ДЮМА по отношению к своему отцу Штирлицу).

Люди подчас понятия не имеют о том генетическом «наследстве», которое они получили. Осознание того, что типаж ха-

рактера являются врожденными, позволяет разуму найти решение проблемы. Моя многолетняя педагогическая практика показывает, как важно учитывать психотип каждого учащегося. Эти знания следовало бы преподавать уже в школе. В жизни они важнее биологии. Без учета человеческого фактора трудно представить себе подбор профессионального коллектива. Многие межличностные конфликты в служебной и семейной жизни находят свое разрешение. Приведу девиз Франка Милтнера и Вернера Сифеза: «*Понимание самого себя и умение общаться с окружающими — залог жизненного успеха*», который был взят в качестве эпиграфа к последней книге профессора Н.Ф. Тельнова [6].

Матрица генкода и матрица психотипов обе построены на основе Матрицы Комплементарности. Ей противостоит Логический Квадрат, который является искусственной логической конструкцией. Г. Харди в «Курсе чистой математики» подчеркивает недоказательный характер геометрических интерпретаций и старается избегать чертежей. Напротив, автор известного учебника Г.М. Фихтенгольц утверждает: «Курс математического анализа не должен представляться учащемуся лишь длинной цепью “определений” и “теорем”, но должен служить руководством к действию» [18]. Компьютерам пока недоступно творческое мышление, привлекающее внимание своей поразительной эффективностью благодаря парадоксальным метафорам. Мы приложим все усилия для решения этой задачи, превратим *одномерного* человекоподобного робота (*single-minded, one-dimentional man*), который, перебирая кирпичи, не дает никакого указания о способе кладки — в личность, обладающую метафорическим языком. Логические диаграммы Л. Кэрролла явились существенным прорывом и его популярная книга «Логическая игра» открывается посвящением «Моему другу маленькой девочке», напоминая детям и взрослым о жизнерадостной и находчивой Алисе. Ю.И. Манин считает, что Логический Квадрат заковывает милую девочку в тяжелые латы Белого Рыцаря и призывает «увидеть в математике воспитателя образного мышления» [15]. Абсолютизация памятника замораживает движение, так как пьедестал мешает двигаться. «Не надо заводить архива, над рукописями трястись» (Б. Пастернак).

3 Арифметизация модальной логики

Nature moves in circles; art in straight lines.
 The natural is rounded; artfical is made up of angles.
O. Henry. Squaring the circle.
 (Природа движется по кругу. Искусство —
 по прямой линии. Все натуральное округлено.
 Все искусственное угловато.
О. Генри. Квадратура круга)

Генетическая Матрица Комплементарности (слева) хорошо описывает круговую упорядоченность элементов, поскольку она не имеет точки бесконечного разрыва $\pm\infty = \pm\frac{1}{0} = \pm 0'$, которая характерна для Логического Квадрата (справа). Окрестность бесконечности является антиподом окрестности нуля ± 0 .

$$\begin{array}{ccc}
 +\frac{0}{1} & & +\frac{1}{0} \\
 & \begin{array}{|c|c|} \hline n & A \\ \hline V & u \\ \hline \end{array} & \\
 -\frac{1}{0} & & -\frac{0}{1}
 \end{array}
 \qquad
 \begin{array}{ccc}
 & +1 & \\
 \pm\frac{1}{0} & \begin{array}{|c|c|} \hline n & A \\ \hline u & V \\ \hline \end{array} & \pm\frac{1}{0} \\
 & -1 &
 \end{array}$$

Логический Квадрат является искусственной логической конструкцией, демонстрирующей зияющие высоты классической логики. Достаточно сделать «рокировку», и в полученной Матрице Комплементарности удастся устранить соседство необходимой истины $Lt = \frac{+1}{0} = +0'$ и необходимой лжи $Lf = \frac{-1}{0} = -0'$. Можно наглядно усмотреть сходство и отличие от четырехзначной логики Белнапа. Будем отталкиваться от матричного метода, примененного для четырехзначной логики Лукасевичем [11]. В его четырехзначной модальной логике, первоначально опиравшейся на числовую бинарность, в отличие от Буля принимается: ИСТИНА = (1, 1) = 1, ЛОЖЬ = (0, 0) = 0. Кроме того, имеются дополнительные значения истинности (1, 0) = 2 и ложности (0, 1) = 3, которые не получают более конкретной интерпретации. Принятая сплошная нумерация носит формальный характер и не позволяет усмотреть естественную упорядоченность. Поэтому в дальнейшем различными авторами им, как промежуточным значениям, приписывались дробные значения $\frac{1}{3}$ и $\frac{2}{3}$, что означало полный отказ от концепции булевой многозначности,

исповедующей принцип цифровой бинарности (только цифры 0 и 1).

Автор по-прежнему предлагает для обозначения ложности использовать отрицательные числа. Геометрической моделью снова будет служить ситуация *деления отрезка* $[0; 1]$ в данном отношении $\lambda = \frac{p}{q}$.

$p = -\infty$	0	$\frac{1}{2}$	1	$+\infty$
	A	M	B	
$\frac{p}{q} =$	$\frac{-0}{1}, \frac{+0}{1}$		$\frac{1}{+0}, \frac{1}{-0}$	
	Mf, Mt		Lt, Lf	

В модальной логике не будут использоваться оба исключения, ведь точке $M = B$ не соответствует никакое λ , а числу $\lambda = -1$ не соответствует никакая точка M . Внутренность отрезка $[A, B]$ дает положительные значения λ , а внешность этого отрезка — отрицательные значения λ . При стремлении слева к точке B , $p \rightarrow 1 - \varepsilon$ (где $\varepsilon \rightarrow 0$) имеем необходимую истину $Lt = \frac{1}{+0} = +0'$, а при стремлении справа, $p \rightarrow 1 + \varepsilon$ имеем необходимую ложь $Lf = \frac{1}{-0} = -0'$. При стремлении слева к точке A , $p \rightarrow -0$ имеем возможную ложь $Mf = \frac{-0}{1}$, а при стремлении справа, $p \rightarrow +0$ имеем возможную истину $Mt = \frac{+0}{1}$.

Унарные связки для логической инверсии «'» и отрицания «-» определяются следующей таблицей:

A	A'	-A
$+0 = \frac{+0}{1}$	$+0' = \frac{1}{+0}$	$-0 = \frac{-0}{1}$
$-0 = \frac{-0}{1}$	$-0' = \frac{1}{-0}$	$+0 = \frac{+0}{1}$
$+0' = \frac{1}{+0}$	$+0 = \frac{+0}{1}$	$-0' = \frac{1}{-0}$
$0' = \frac{1}{-0}$	$-0 = \frac{-0}{1}$	$+0' = \frac{1}{+0}$

Приведем для дизъюнкции нашу итоговую таблицу (слева) и таблицу для модальной логики Ю.В. Ивлева [10], которая для удобства сравнения дана в наших обозначениях (справа):

	Mf	Mt	Lt	Lf		Mf	Mt	Lt	Lf
$\vee$	-0	+0	+0'	-0'	$\vee$	-0	+0	+0'	-0'
Mf, -0	-0	+0	1	1	-0	-0	+0	+0'	-0
Mt, +0	+0	+0	1	1	+0	+0	+0	+0'	+0
Lt, +0'	1	1	+0'	+0'	+0'	+0'	+0'	+0'	+0'
Lf, -0'	1	1	+0'	-0'	-0'	-0	+0'	+0'	-0'

Например, равенство $+0 \vee +0' = 1$ вполне соответствует известному соотношению $N \vee B = T$ логики Белнапа. Очевидно $a \vee b' = 1$, ибо $\frac{a}{1} \vee \frac{1}{b} = \frac{1}{1}$. Ложное значение $-0 \vee -0' = -0$ в правой таблице не вписывается в это правило. В этом случае правая таблица оказывается «неправой», ибо нарушается **принцип покомпонентного выполнения операций**. Ведь только его выполнение позволило завязать все в единый логический узел, реализовав универсальный подход к арифметизации практической логики Белнапа и модальной логики.

Автор выражает скромную надежду, что ГЕНЕТИЧЕСКИЙ ПОДХОД В ЛОГИКЕ позволит воочию увидеть замысел Природы и окажется в первую очередь полезным для тех приложений, которые привели к мысли о необходимости перехода от Логического Квадрата к Генетическому Кругу.

Литература

- [1] Александров П.С. Лекции по аналитической геометрии. М., 1949. С. 28.
- [2] Александров А.А. Психогенетика. СПб, 2008. С. 85.
- [3] Бахтияров К.И. Алгебра логики для компьютера // Смирновские чтения. 4-ая Международная конференция. М., 2003. С. 25-27.
- [4] Бахтияров К.И. Логическая многомерность (векторные и матричные модели) // Вестник МГУ. Сер.7. 2005. №5. С. 92.
- [5] Бахтияров К.И. Принципы универсального языка (позиционная доминантность и фрактальность) // Противоположности и парадоксы. М., 2008. С. 216–233.
- [6] Бахтияров К.И. Роль гуманитарных трудов профессора Н.Ф. Тельнова в естествознании // Международный научный журнал. Министерство сельского хозяйства РФ. М., 2008. №4. С. 80.
- [7] Бахтияров К.И. Квадрат Противоположностей и Матрица Комплементарности // Полигнозис, 2009. №4. С. 53–59.
- [8] Бахтияров К.И. Матрица комплементарности для метагенетики // Смирновские чтения по логике. Материалы 6-ой конференции. Москва. 2009. С.154–156.
- [9] Белнап Н. Как нужно рассуждать компьютеру // Белнап Н., Стил Т. Логика вопросов и ответов. М., 1981.

- [10] *Ивлев Ю.В.* Модальная логика. М., 1991. С.76.
- [11] *Карпенко А.С.* Развитие многозначной логики. М., 2010.
- [12] *Крегер О., Тьюсон Дж.* Типы людей: 16 типов личности. М., 2006.
- [13] *Кривошеев Е.М.* Соционика глазами психолога. М., 2005. С.95.
- [14] *Лейбниц Г.В.* Письма и эссе о китайской философии и двоичной системе исчисления. М., 2005. С. 7.
- [15] *Манин Ю.И.* Математика как метафора. М., 2008. С.138.
- [16] *Степанов Р.А.* История четвертой дихотомии // Соционика и психология. М., 2001. С.20–35.
- [17] *Филатова Е.С.* Искусство понимать себя и окружающих. СПб, 1998.
- [18] *Физтенгольц Г.М.* Основы математического анализа. М., 1960. Т.1. С. 11.
- [19] *Якубовская Т.С.* Соционика: как разбираться в себе и в других. М., 2005. С.139–143.
- [20] *Bakhtiyarov K.I.* Matrix of Complementarity for Metagenetic // Symmetry Festival 2009. Abstracts. Budapest 2009.
- [21] *Feys R.* Boolean Methods of Development and Interpretation // Proceedings of the Royal Irish Academy. 1955. Vo.57. Sect. A. №6. P. 111.
- [22] *Hofstadter D.* I am a Strange Loop. N.Y., 2007. P. 235, 299.

Александр Иванович Введенский как логик. Часть I

Б. В. БИРЮКОВ, Л. Г. БИРЮКОВА

ABSTRACT. The paper is devoted to the logical ideas and the biography of the prominent Russian thinker Alexander Ivanovich Vvedenskiy (1856–1925).

Ключевые слова: А.И. Введенский, история логики, философская логика

Александр Иванович *Введенский* (1856–1925) — выдающийся русский философ и религиовед, занимавшийся также логикой и психологией. А.И. учился на математических факультетах университетов Москвы и Петербурга, окончил историко-филологический факультет Петербургского университета, где был учеником М.И. Владиславлева; именно под его руководством он прошел специализацию по философии.

Здесь необходимо сказать несколько слов о Михаиле Ивановиче Владиславлеве. Это был выдающийся русский мыслитель и деятельный участник развития высшего образования в России (в конце 80-х годов он занимал пост ректора Санкт-Петербургского университета). Владиславлев был хорошо знаком с зарубежной философией, так как три года находился в научной командировке за границей, где слушал таких мыслителей, как Куно Фишер и Лотце. В Петербурге Владиславлев читал лекции по логике, психологии и истории философии, вел, как сказали бы мы теперь, спецсеминар по изучению Аристотеля, в частности его «Метафизики» (по греческому оригиналу), и Канта (его «Критики чистого разума») и другим историко-философским темам. Введенскому было у кого учиться!

Владиславлев скончался в 1890 году, и А.И. Введенский посвятил своему учителю проникновенную статью [11].

В 1881 году А.И. Введенский окончил университет и был оставлен там «для приготовления к профессорскому званию». После магистерского экзамена был на два года командирован за границу, в Германию, где в Гейдельберге слушал лекции Куно Фишера. Магистерскую диссертацию А.И. Введенский защитил в 1888 году. Она носила название «Опыт построения теории материи на принципах критической философии». В ней он проявил себя как сторонник философии Канта «критического» периода. И на протяжении всей своей научно-философской деятельности оставался верным кантианцем, разработавшим, однако, оригинальную концепцию «философского критицизма», которую он в конце своей научно-философской деятельности назвал «логицизмом».

Профессор философии столичного университета с 1890 года, где Введенский сменил скончавшегося М.И. Владиславлева, он читал лекции по логике, по философской мысли Античности и по истории философии в Новое время, а также по психологии. Читал он не только в университете, но и на Высших женских курсах и в Военно-юридической академии¹.

Распространенная в России с конца XIX века в образованном обществе юношеская революционность не обошла и Введенского. Он принял участие в студенческих волнениях, и в 1879 г. полгода провел в заключении в Петропавловской крепости. Однако заступничество К. Бестужева-Рюмина² (одного из учителей Введенского) и М. Владиславлева уберегло его от высылки из столицы. Но Александр Введенский быстро образумился, и в бурном 1905 г., будучи профессором столичного университета, уже выступал против политизации университетской жизни — участия студентов в митингах и демонстрациях³.

В конце 40 – начале 50-х годов Б.В. Бирюкову довелось быть преподавателем логики и истории в 1-м Московском городском

¹О Введенском см.: [20, с. 226–236], [1, с. 171–172], [26].

²Константин Николаевич Бестужев-Рюмин (1829–1897) — историк, действительный член Петербургской Академии наук. Когда в столице в 1878 г. под его руководством были созданы Высшие женские курсы (так называемые Бестужевские), А.В. Введенский был привлечен для чтения на них лекций по логике.

³Этими сведениями я обязан письменным сообщениям В.И.Кобзаря, в частности его письму от 8.09.2004 г.

педагогическом училище. В нем моим коллегой был Николай Васильевич Румянцев, в прошлом член «Союза воинствующих безбожников» и автор большого труда о возникновении христианства, где пытался доказать неисторичность Христа как личности. Он рассказывал (считая, что логику это интересно) о том, что, будучи студентом Петербургского (или тогда уже Петроградского?) университета, слушал логические лекции Введенского.

Имя Введенского было широко известно в научных и культурных кругах столицы. Читал Александр Иванович замечательно, его лекции были очень яркими, аудитория всегда переполнена, послушать Введенского приходили студенты других факультетов. Этот рассказ находит подтверждение у В.В. Зеньковского, писавшего, что А.И. был «человеком острого ума, очень четкой и ясной мысли, большого литературного дарования»; он был «на редкость интересным мыслителем» [20, с. 226-227], и у Н.О. Лосского, отмечавшего, что А.И. обладал исключительным талантом педагога.

Введенский был автором гимназического учебника логики, удостоенного «полной большой премии Императора Петра Великого» [7]⁴. В отчете Ученого Комитета о присуждении премий в 1910 году об этом учебнике, в частности, сказано, что в изложении профессора Введенского «логика получает характер удивительной связности, последовательности и принудительности», что у него даются «превосходные разъяснения логических явлений, которых мы не встречаем в других учебниках»⁵.

Любопытно было узнать от Румянцева некоторые чисто человеческие черты этой замечательной личности.

А.И. Введенский имел обыкновение опаздывать на лекции и экзамены, засиживался в ресторане, всегда у одного и того же столика близ окна, и это было известно студентам. Чтобы напомнить ему о себе, они водружали на трость форменную студенческую фуражку и поднимали ее на уровень окна, давая знать, что ждут своего профессора. Александр Иванович был непрочь

⁴Мне было доступно второе издание (СПб, 1913), на титульном листе которого значилось, что она удостоена указанной премии.

⁵Эти слова можно найти на последней — рекламной — странице «Логик, как части теории познания» 1917 года издания.

ударить за молодыми девицами, и однажды случился конфуз, когда предметом его ухаживаний — по словам Румянцева, довольно невинных — оказалась его слушательница на Высших женских курсах, где он читал лекции.

С книгой А.И. Введенского я познакомился в 50-х годах прошлого века, и из всех книг по философской логике, которых тогда было уже немало, книга А.И. Введенского о логике как составной части гносеологии, оставляла сильное не только интеллектуальное, но и эмоциональное впечатление. Конечно, это была книга по *традиционной* логике, а не по логике математической, с которой я тогда был незнаком. Теперь я понимаю, что *учиться* логике по ней невозможно. Но целый ряд заключенных в ней идей не устарел. А сам труд без всякого сомнения принадлежит истории русской культуры.

Мы начнем с рассказа о том, как создавалось главное философско-логическое сочинение А.И. Введенского — его труд «Логика, как часть теории познания».

Первое издание «Логики» Введенского вышло в 1909 году. Как пишет автор в Предисловии к этой книге, чтение лекций по логике убедило его в том, что соответствующий лекционный курс приобретает единство и заинтересовывает слушателей лишь тогда, когда в нем присутствуют философские вопросы. Поэтому автор не только обогатил свой текст рассмотрением узловых проблем «критической» гносеологии, но и ввел термин «теория познания» в название своей книги.

В Предисловии ко 2-му изданию [8, с. V], вышедшему в 1912 году, А.И. сообщал, что издание 1909 года представляло собой исправленные лектором записи его лекций, составленных курсистками и студентами. Во втором же издании, пишет Введенский, «почти все написано мной самим».

Третье издание вышло через пять лет, в 1917 году. В Предисловии к нему автор писал, что это «почти новая книга». Главное изменение, по словам А.И., состояло в разработке «логицизма, как особого гносеологического направления» [9, с. III]. И, действительно, в третьем издании усилена теоретико-познавательная компонента книги. Это проявлялось уже в компоновке

обеих книг. Книга 1912 года завершалась главой XX «Важнейшие частности в учении о категорических силлогизмах»; книга 1917-го — тремя чисто философскими главами, где излагался «логицизм А.И. Введенского», подвергался критике позитивизм, эмпиризм и рационализм и характеризовалось «цельное научно-переработанное мировоззрение»; изложение теолого-философских вопросов было расширено.

В начале 20-х годов «Логика» Введенского вышла четвертым изданием [10].

Логический труд Введенского⁶ показывал, какие выводы для логики следуют из философии Канта «критического» периода, но больше — какие выводы для обоснования философского «критицизма» можно сделать на основании логики. В.В. Зеньковский считал, что, как неокантианец, Введенский по своим воззрениям близок Г. Когену. Однако он был вполне самостоятельным мыслителем. Следуя, в общем, учению Канта, он внес в «критическую» философию много оригинального, вытекавшего из его логического учения⁷.

Из «Логики» Введенского явствовало, что логика совершенно независима от других наук, в частности от психологии; что между «логикой открытия» новых истин и «логикой проверки» истин, уже установленных, следует проводить четкую грань. Анализируя познание, различая в нем априорную и апостериорную стороны, А.И. вместе с тем рассматривал метафизику как гипотетическое дополнение к знанию. Сопоставляя знание и веру, он с исключительной ясностью раскрывал сущность христианства.

Ниже мы выделим то, что представляется нам главным в логико-гносеологических и философско-теологических воззрениях Введенского.

⁶ А.И. Введенскому принадлежит также книга «Психология без всякой метафизики» (я пользовался третьим, исправленным и дополненным изданием [17]).

⁷ Страницы книги В.В. Зеньковского, отведенные философским взглядам Введенского, удивляют. Зарубежный русский историограф русской философии полностью игнорирует *логическую* основу трактовки Введенским кантовского «критицизма», что делает путанными многословные рассуждения Василия Васильевича о «критицизме» и метафизике, привязанные к воззрениям Александра Ивановича.

Первое, на что следует обратить внимание, это то, как Введенский понимал *логику*.

Логикою называется наука о правильности и ошибочности мышления. Правильным же называется мышление, пригодное для расширения знания, а ошибочным или неправильным — непригодное для этой цели. Задачи логики состоят в том, чтобы: 1) отыскать те правила или условия, при исполнении которых (будет ли оно преднамеренным или ненамеренным, это все равно) мышление выходит пригодным для расширения знания; 2) объяснить их законами мышления; 3) с помощью найденных ею правил выследить все те ошибки мышления (т.е. нарушения этих правил), которые встречаются в нем на деле, и описать их состав, т.е. указать, в чем состоит каждая из них [9, с. 1].

Это — понимание логики, близкое к современному. Правда, в наше время, объясняя суть логики, обычно говорят не о мышлении, а о рассуждении — именно для того, чтобы предотвратить психологизацию логики, т.е. то, против чего восставал Введенский и о чем будет сказано далее. Представленное у Введенского разъяснение сущности логики — с точностью до одного акцента, о котором мы вскоре скажем, — достаточно близко к взгляду, который выработан в математической логике. Для нее обрисованная Введенским область знания составляет *философскую логику*. Чтобы не быть голословным, приведем воззрения на этот счет такого выдающегося современного математического логика и философа, как Хаскелл Б. Карри.

Карри присоединился к распространенному взгляду, что «логика есть анализ и критика мышления». Далее читаем:

Рассуждая, мы из некоторых исходных данных выводим заключения. Мы замечаем, что эти заключения иногда верны, а иногда нет, и что иногда (но не всегда) ошибочность заключений объясняется ошибоч-

ностью некоторых из наших исходных данных. Постепенно мы убеждаемся, что на рассуждения, проводимые в согласии с определенными нормами, можно полагаться, если данные были правильными. Изучение такого рода норм, т.е. принципов правильного рассуждения, всегда считалась одной из задач философии [21, с. 17].

Так понимаемую логику Карри назвал *философской* логикой и отметил, что при ее изучении «оказалось полезным применять математические методы, т.е. строить математические системы, определенным образом связанные с логикой». Исследование таких систем составляет *математическую* логику. Философская и математическая логика тесно связаны между собой. Термином «логика» называют также конкретные системы или теории, являющиеся «предметом изучения математической или философской логики». Так, говорят о классической логике, модальной логике, аристотелевской логике, кантовской логике и пр. [21, с. 17–19].

Взгляды Введенского на логику в своем существе отвечают дефиниции, данной в статье «Логика» в Большой Советской Энциклопедии. Там логика определена как наука о *приемлемых* способах рассуждения [22]. Под этой, начальной, частью статьи стоит подпись М.М. Новоселова, но данная дефиниция «логики» возникла в ходе обсуждений и была принята А.А. Марковым⁸.

Стоит привести следующее затем разъяснение этого определения, которое дал М.М. Новоселов:

Слово «логика» в его современном употреблении многозначно, хотя и не столь богато смысловыми оттен-

⁸Этот факт известен мне, так как я состоял научным консультантом по логике издательства «Советская Энциклопедия», выпускавшего БСЭ (этот факт отмечен в конце первого тома данного издания, где приведен список научных консультантов). Статья «Логика» состоит из ряда разделов. Первый из них — «История логики» подписан М.М. Новоселовым, З.А. Кузичевой и Б.В. Бирюковым, второй, главный — «Предмет и методы современной логики» принадлежит Маркову; раздел «Научные учреждения и издания» — Кузичевой и Новоселову. В томе имеется серия статей о разных «логиках» — «Логика высказываний», «Логика предикатов» и др., в числе авторов которых были А.Г. Драгалин и Ю.А. Гастев.

ками, как древнегреческое *logos*, от которого оно происходит. В духе традиции с понятием логики связываются три основных аспекта: онтологический — логика вещей, т.е. необходимая связь явлений объективного мира (Демокрит); гносеологический — «логика знания», т.е. необходимая связь понятий, посредством которых познается сущность и истина (Платон), и демонстративный (доказательный) или собственно логический — «логика доказательств и опровержений», т.е. необходимая связь суждений (высказываний) в рассуждениях (умозаклечениях), принудительная убедительность («общезначимость») которых вытекает только из формы этой связи безотносительно к тому, выражают ли эти суждения «сущность и истину», или нет (Аристотель). Первые два аспекта относятся к философии и диалектической логике, последний же аспект составляет собственно логику или современную логику (которую вслед за Кантом иногда называют формальной логикой) [22].

Это разъяснение несомненно принял бы и Введенский. Для него термин «логика» соответствовал третьему из приведенных выше его значений⁹.

Правда, определяя логику, А.И. (см. приведенную цитату из книги 1917 года издания) упоминает *ошибочность* мышления и вообще слишком большое внимание уделяет способности нашей мысли сбиваться с логически правильных — и потому приемлемых — рассуждений. В издании 1912 года в объяснении того, что такое логика, упоминание «ошибочности» отсутствует.

Второе положение заключалось в четком разграничении *нормативного* и *описательного* подхода к мышлению. Нормативная сторона изучается логикой, а именно «логикой проверки», описательная сторона составляет предмет психологии. Последняя изучает мышление безоценочным образом, «логика же рассматривает мышление, только оценивая годность каж-

⁹Забегая вперед, замечу, что оппонент Введенского — Н.О. Лосский объединял в своем учении — интуитивизме — все три приведенных выше значений.

дого способа мышления для расширения знания»¹⁰ [8, с. 6]. При этом логика не обязана объяснять, «что такое мышление, какова его природа, и каковы его отличия от деятельности памяти и воображения. Это — задача психологии, а не логики. При изучении же логики достаточно помнить, что переживания суждений и умозаключений всеми принято называть мышлением» [9, с. 7].

Как нормативная дисциплина — наука о правильности мышления, — логика служит расширению знания; для этого в ней формулируются нормы правильного хода мысли, позволяющие отделять его от ошибочного рассуждения. Выявляя те правила, при которых заключение находится в логической связи с посылками, логика вместе с тем описывает умозаключения, которые ошибочны, «но имеют свойство казаться правильными» [8, с. 9]; именно в этом пункте психология особенно зависит от логики, основывается на предварительном ее изучении.

Будучи совершенно не зависимой от психологии, изучающей мышление безоценочно, как факт, логика рассматривает его только с той точки зрения, годен или нет для приращения знания тот или иной способ мышления. Этот взгляд был четким выражением логического антипсихологизма. Заметим, что Введенский ссылался здесь на Э. Гуссерля, который, по словам А.И., опроверг «разнообразные ухищрения, которыми хотят оправдать психологизм в логике»¹¹ [8, с. 15]. Правда, сам А.И. признавал, что логика и психология «соприкасаются между собою», причем, как сказано выше, особенно тесно при рассмотрении ошибочных умозаключений.

Эти представления Введенского о логике отвечают сути дела — за одним исключением: то внимание, которое он уделяет *ошибочному* мышлению, не свойственно современной логике.

Взгляд на отношение логики к гносеологии составляет *третье* положение. Как следует из названия книги, логика, соглас-

¹⁰Приведенные слова набраны в книге курсивом. Вообще все издания «Логики» Введенского пестрят курсивом; им набраны целые фразы, а иногда и большие куски текста. Я не стану воспроизводить эту манеру выделения авторской мысли.

¹¹Подстрочное примечание. Введенский имеет в виду русский перевод книги Гуссерля «Логические исследования» (ч. 1; СПб., 1909), выполненный С.Л. Франком.

но Введенскому, составляет *часть* теории познания, причем такую часть, которая *предшествует* основному содержанию этой теории. Логика «оказывается независимой от гносеологии и не имеет права основываться на ней» [9, с. 5]. Здесь — как и во многом другом — Введенский полемизировал с Н.О. Лосским; он решительно отвергал его мнение, будто логика основывается на теории познания¹².

Это совершенно верное понимание сути дела. Ни философская, ни математическая логика не предполагают никаких предварительных гносеологических установок. Введенский, следуя идеям Канта, подчеркивал, что логика «должна вести все свои исследования без всяких произвольных предпосылок», к которым он относил метафизические представления об «истинном бытии». Он разворачивал это положение в виде противопоставления трансцендентных и имманентных предметов. Первые — это такие предметы, которые «никогда и нигде и ни при каком изощрении наших способностей» не могут стать объектом знания — находятся за пределами всякого возможного опыта. Вторые — имманентные предметы — воспринимаются (или могли бы восприниматься) нами в опыте. Изучение — точнее попытка изучения — трансцендентных предметов «относится к так называемой метафизике», или учению об «истинном бытии» [9, с. 28–30]. Ее главные задачи сводятся к трем следующим вопросам:

- «Составляет ли истинное бытие, т.е. вещи в себе, то же самое, что и данные опыта, или же оно отличается от них?»
- «Если оно не то же самое, что данные опыта, то каково же оно: в чем сходство и разница между вещами в себе и данными опыта, т.е. между истинным (ноуменальным) и кажущимся (феноменальным) бытием?»
- А в этих двух вопросах, очевидно, заключается еще и такой: «входят ли в состав истинного

¹²Этот взгляд был высказан Лосским в его брошюре «Логика проф. А.И. Введенского» (СПб., 1912), перед этим напечатанной в виде статьи в журнале «Вопросы философии и психологии». О полемике Введенского с Лосским у нас еще будет речь.

бытия, иначе — вещей в себе, также и трансцендентные предметы; или же нет никаких трансцендентных предметов, а всякое бытие имманентно, хотя бы и воспринималось нами не вполне в том самом виде, как оно существует в действительности, а в кажущемся (феноменальном)?» [9, с. 32].

Метафизика должна быть наукой об «истинном бытии», о вещах в себе, и именно потому ей приходится быть и наукой о трансцендентных предметах, к которым, в частности, принадлежат душа и Бог. Все трансцендентное оказывается метафизическим; «но метафизическое, может быть, еще не все окажется трансцендентным»; поэтому вопрос о возможности знания трансцендентных предметов — трансцендентного знания приводит к вопросу о возможности метафизики вообще.

Для логики как первоначальной части гносеологии безразличен вопрос о возможности знания об истинном бытии.

Четвертое положение состоит в утверждении необходимости четкого разграничения *веры* и *знания*.

Как пишет Введенский, разделение мыслей, сопровождаемых уверенностью в их истинности, на знание и веру, возникло еще до появления логики. Но коль скоро она возникла, ее обязанностью стало указание, «каким требованиям должны удовлетворять мысли, в истинности которых мы уверены, чтобы они имели право считаться знанием» [9, с. 14]. Изучение же знания как такового составляет задачу философии. На ней лежит обязанность выяснить те условия, благодаря которым существует бесспорно признаваемое знание и до каких границ оно может простирается, так что, перейдя их, мы попадаем в область, «в которой возможны лишь одинаково доказуемые и одинаково неопровержимые мнения, т.е. вера, а не знание» [9, с. 25]. Знанием являются математика и естественные науки, но также психология, история, лингвистика и пр., «словом — всякое изучение данных опыта, производимое независимо от того, считается ли оно истинным или кажущимся бытием» [9, с. 36].

Нам представляется, что мы должны присоединиться к этому взгляду в его общем виде, когда к области веры относят все, касающееся религиозных представлений, в России — православия.

Вместе с тем мы должны оставить за наукой право проверять явления, относительно реальности которых у ученых существуют разные мнения; такими, например, являются те, которые известны под названием телепатии и ясновидения.

Пятое положение касается противопоставления, говоря языком Введенского, «логики проверки» и «логики открытия». Согласно его взгляду, «логики открытий» не существует, имеется только логика, позволяющая проверять правильность уже состоявшихся рассуждений. Логика, указывающая как открывать новое, — это еще не реализованный замысел. Правда, результаты логики имеют определенное эвристическое значение: они предохраняют от того, чтобы принимать «за годные» такие умозаключения и доказательства, которые неправильны. Но этим их эвристичность и ограничивается. Логических правил, соблюдение которых приводило бы к новым истинам, нет, хотя начиная с IV века многие мыслители пытались их обнаружить, — здесь Введенский называет имена Раймунда Луллия, Джордано Бруно, Френсиса Бэкона, — но настоящего успеха их усилия не принесли. Поэтому А.И. и утверждает, что в наличии имеется только логика проверки уже открытых истин, пусть они присутствуют лишь в форме догадок, научных гипотез (которые, согласно Введенскому, еще нельзя относить к знанию); «логика всегда предполагает, что догадка уже возникла, и ведет речь только о том, как ее проверить» [9, с. 3]. Вместе с тем: «Хотя логика совершенно бесполезна в смысле руководства к усвоению искусства правильно мыслить, она <...> служит руководством в критике проявлений этого искусства» [5, с. 22].

Этот взгляд Введенского согласовался с установками математической логики, но лишь в докибернетический период ее развития. С началом работ по алгоритмизации и компьютеризации поиска логического вывода ситуация стала меняться¹³. Ныне логическая эвристика представлена в активно ведущихся работах по «искусственному интеллекту»¹⁴.

В философской логике времен Введенского преобладала традиция излагать ее по схеме «понятие — суждение — умозаключение — доказательство». Именно так представлена логика в учеб-

¹³См. хотя бы: [3].

¹⁴См, например, [28].

нике Г.И. Челпанова¹⁵ [29], по которому после 1946 года учились поколения советских философов. Введенский не следует этой схеме. Он начинает изложение логики — и в этом заключается *шестое* выделяемое нами положение — с суждений. Он поступает так потому, что знание состоит из суждений; «другие мысли — понятия, представления и т.п. — входят в состав знания лишь постольку, поскольку они служат составными частями суждений» [9, с. 7]; только суждения могут быть носителями истины и из соединения суждений возникают умозаклучения. Поэтому разбор суждений предшествует у Введенского рассмотрению понятий.

Это совершенно верный взгляд. Развертывание систем современной философской или математической логики начинается всегда с рассмотрения суждений, или высказываний, которое в случае математизации логики приобретает форму индуктивного определения понятия *формулы* как выражения, которое может быть истинным либо ложным. Кроме того изложение логики *высказываний* предшествует изложению логики *предикатов*, т.е. понятий.

Фундаментальной категорией логики является понятие *логического следования* заключения из посылок. В «Логике как части теории познания» присутствует совершенно четкое представление о логическом следовании (это *седьмое* положение, выделяемое нами у Введенского). В этой книге оно выступает как свойство (правильных) умозаклучений *принуждать*, принимая посылки, принимать и заключение («вывод», как чаще говорил А.И.):

Про вывод *правильных* умозаклучений в логике принято говорить, что вывод в них вытекает, или *следует*, или получается из посылок. Про вывод же *неправильных* принято говорить, что вывод в них не вытекает, не следует, не получается из посылок [9, с. 9].

¹⁵Этот учебник неоднократно переиздавался, в 1918 г. вышло его 10-е издание; в 1946 г. он был издан в сокращенном виде (вызванном идеологическими соображениями); переиздан в своем подлинном виде в 1994 г. В настоящее время готовится его новое издание, предваряемое статьей о Челпанове, написанном автором этих строк.

В первом случае связь вывода с посылками называется *логической*, потому что она определяется «логическими законами мышления» [9, с. 9].

Это был бы совершенно верный взгляд, если бы понимание Введенским «логических законов», а также того, какую роль они играют в логическом следовании, не ограничивалось четырьмя известными в традиционной логике законами — противоречия, исключенного третьего, тождества и достаточного основания. В современной логике последний из названных законов вообще всерьез не рассматривается (он неявно входит в понятие доказательства), а понятие закона логики распространяется на любые тождественно-истинные высказывания, или высказывания, доказуемые из пустого множества посылок. Что касается законов противоречия, исключенного третьего и тождества, то они действительно занимают в современной логике — как математической, так и философской — особое место. Это объясняется тем, что решение проблемы сохранения, ограничения, ослабления или даже отказа от того или другого из них влечет серию «неклассических» направлений в исследовании дискурсивного знания и потому приобретает фундаментальную значимость в математико-логических и философско-математических рассуждениях.

Высокая оценка познавательной роли обобщений, точнее, *общих* суждений, составляет *восьмое* положение. В знании, считал Введенский, наибольшее значение следует придавать именно им, так как констатация общего позволяет предсказывать ход изучаемых явлений. Все математические теоремы, писал он, представляют собой общие суждения. Они — «подлинно общие», как утверждал А.И., отличая от подлинно общих суждения, только кажущиеся общими. Под последними он имел в виду суждения, относящиеся к строго определенному, хотя бы и очень большому числу предметов (в традиционной логике такие суждения называют регистрирующими). Таково приводимое Введенским суждение «Все апостолы родом из Галилеи» — его можно заменить двенадцатью следующими единичными суждениями: «Апостол Андрей родом из Галилеи», «Апостол Петр — тоже», «Апостол Фома — тоже» и т.д. Таким образом, суждение о том, что все апостолы были родом из Галилеи, является

«всего лишь суммирующим соединением нескольких единичных суждений. Что касается подлинно общих суждений, то каждое из них относится к бесконечно большому числу предметов» [9, с. 111]; следует заметить, что «бесконечное» А.И. понимал здесь не только в математическом смысле, но и как неограниченно большое.

Примечательно, что тезис о наибольшей познавательной значимости общих суждений А.И. распространял и на историческую науку, отвергая отстаивавшееся немецкими неокантианцами В. Виндельбантом и Г. Риккертом противопоставление *номотетических* («законоустанавливающих») наук, коими являются науки естественные, наукам *идеографическим* («единичноописывающим»), к которым принадлежит история. Согласно Введенскому, историческая наука должна иметь смысл, «а не быть всего только „интересной“» [8, с. 90], как считали немецкие неокантианцы. И нет сомнения в том, что в этом с ним следует согласиться.

Введенский, безусловно, прав, подчеркивая высокую познавательную роль обобщений. Однако его противопоставление общих суждений частным требует коррективов. Дело в том, что обобщающее знание может передаваться и частными суждениями, если надлежащим образом использовать операцию отрицания. Ведь для передачи мысли, выраженной в общем (утвердительно) суждении (суждении вида a , как его принято обозначать в категорической силлогистике), мы можем воспользоваться известным «логическим квадратом» — подвергнуть *отрицанию* суждение типа o — частно-отрицательное: «Некоторые S не суть P » и тем самым выразить ту же мысль, что и суждение «Все S суть P » (оговорив при этом, что квантор *некоторые* понимается в смысле «некоторые, а может быть и все»). Эта взаимосвязь общего и частного четко видна и из взаимовыразимости кванторов общности и существования в математической логике. Суждение вида $\forall x P(x)$ — «Для всех предметов x (рассматриваемой предметной области) верно, что они имеют свойство P » равносильно суждению вида $\neg \exists x (\neg P(x))$ — «Не существует такого предмета x , который не имел бы свойства P ». Здесь суждения существования соответствуют частным суждениям.

Вполне современна и мысль А.И. относительно необходимо-

сти рассмотрения *аналитических* суждений (*девятое* положение). Правда, их рассмотрение у него основывается на «критическом» взгляде на познание. Здесь он следует не Лейбницу (что сделало бы его взгляды более убедительными), а Канту. Исходя из субъектно-предикатной структуры суждений традиционной логики и следуя создателю «Критики чистого разума», Введенский соответствующим образом истолковывает различие между *аналитическими* и *синтетическими* суждениями. В случае первых «расчленение», или анализ, содержания подлежащего (субъекта) позволяет обнаружить в нем все признаки сказуемого (предиката), в то время как для синтетических суждений подобный анализ обнаруживает в последнем признаки, которых нет в субъекте. В силу этого «относительно каждого синтетического суждения мы имеем полное право сомневаться, следует ли допускать в знании именно это суждение или же одно из противоположных с ним. Поэтому не может быть никакой явной нелепости сомневаться в любой математической <...> аксиоме» [8, с. 143]. И Александр Иванович приводит в связи с этим выдвинутое Н.И. Лобачевским суждение, являющееся противоположным по отношению к «одинадцатой аксиоме Эвклида» (ныне обычно называемой пятым постулатом Евклида), которое позволило русскому математику «построить полную систему геометрии, которая нигде не запутывается в противоречиях, т.е. оказывается не менее возможной и мыслимой, а потому и не менее допустимой, чем геометрия Эвклида» [8, с. 144].

Знание расширяется только с помощью синтетических суждений — аналитические служат лишь разъяснению содержания своих субъектов. При этом науки, «не соединенные с установкой данных опыта», как говорил А.И., — математика прежде всего — требуют, чтобы в их «высших основаниях» имелись такие суждения, которые были бы и синтетическими, и внеопытными, или априорными (априорность при этом, как подчеркивал А.И., не следует понимать как врожденность).

Математическая логика, а также развитие связанных с ней философских идей, привели к выводу, что аналитичность суждений можно — и нужно — понимать более общо, чем это было у Канта (и Введенского): относить к аналитическим *любые* суждения, истинность которых устанавливается путем анализа ча-

стей, их составляющих, без обращения к каким-либо внелогическим данным. Тогда у истоков теории аналитических суждений оказывается Лейбниц.

Следующее, *десятое*, положение заключалось в том мотиве, который двигал Введенским, когда он решительно отстаивал силлогистику как то главное в логике, что позволяет отличать в мышлении его правильный ход и отвергать неправильный. Мотив этот заключался для А.И. в способности выражать процесс движения мысли, приводящий к расширению знания, а эту способность он представлял себе в виде силлогистического процесса. Правда, «силлогизм» для него был не только ассерторическим, а любым умозаключением дедуктивной логики, лишь бы оно из истинных посылок приводило к верному заключению (выводу).

Здесь стоит сказать, что Введенский был способен вникать в тонкие вопросы логики. Об этом свидетельствует его работа, в которой обосновывался взгляд, что все четыре фигуры ассерторической силлогистики самостоятельны [12]. Ассерторическая силлогистика рассматривалась им с разных точек зрения — практической, абстрактно-логической, абстрактно-психологической и гносеологической. Он показывал, что с абстрактно-логической точки зрения вопрос о числе *самостоятельных* фигур «упраздняется; они все сводимы друг на друга». Здесь у читателя, знакомого с логикой, может возникнуть вопрос, как это возможно, если, например, по третьей фигуре заключения всех ее модусов должны быть частными. Вопрос решается просто: при сведении модусов одной фигуры к модусам другой используются непосредственные умозаключения — превращение суждений, их обращение и пр. Что касается *очевидности* силлогистических умозаключений, то Введенский рассуждал следующим образом:

Рассматривая силлогизмы с логической стороны, мы можем иметь в виду не их самих, но оценку убедительности [их как] доказательств. Поэтому и вопрос о самостоятельности фигур, при такой точке зрения, мы должны поставить в следующей форме: какие из фигур окажутся самостоятельными, если под словом «самостоятельность» подразумевать, что

вывод вытекает из посылок вполне очевидным образом? Или — другими словами: во всех ли фигурах вывод отличается одинаково полной очевидностью? Такой вопрос и имел в виду Аристотель, когда характеризовал первую фигуру как совершенную, а вторую и третью как несовершенные. Четвертой же фигуры, как известно, он не рассматривал. При помощи самого простого самонаблюдения легко убедиться, что первые три фигуры отличаются вполне одинаковой очевидностью [12, с. 124–125 (с. 6–7 оттиска)].

Аристотелевские фигуры (с первой по третью), указывал Введенский, имеют явное и одинаковое преимущество перед четвертой как более естественные и дающие более очевидные выводы. Завершаются же рассуждения А.И. о силлогизмах следующими пронизательными словами: «факт сводимости фигур показывает, что если рассматривать силлогизмы как чисто умственные процессы, без всякого отношения к речи, то в них нет никаких фигур» [12, с. 130 (с. 12 оттиска)] (!).

Теперь о математизации логики. С ней А.И. был в известной мере знаком, но считал, что для представления логического мышления она ничего дать не может. Здесь он, в целом, ошибался. Достаточно вдуматься в историю логики, включая математическую, которая составляет исходный пункт развиваемой в рамках «искусственного интеллекта» логической эвристики, чтобы понять, что взгляды автора труда «Логика как часть теории познания» в этом пункте несостоятельны.

Но «анти-математическая» убежденность Введенского в известном смысле была оправданна. Подавляющая часть логических исчислений — потенциально бесконечных по своему «количеству» (которое может быть мощности континуум!) — действительно бесполезна для обогащения знания и тем более для уяснения мыслительной деятельности, к этому приращению приводящей.

А.И. Введенский считал, что им дано «Новое и легкое доказательство философского критицизма». Доказательство это было изложено в докладе, представленном Санкт-Петербургскому

Философскому обществу на заседании 7 ноября 1908 года, и сразу же опубликовано в виде статьи под тем же названием [13, с. 122–144]; в 1909 году эта статья была выпущена в виде отдельного оттиска¹⁶ [14].

Доказательство «критицизма» в смысле Канта было у Введенского основано на описанной выше его концепции логики и потому получило — в книгах 1917 и 1922 годов — название «логицизма». Так как этот термин в настоящее время «занят» за другим смыслом (им обозначают восходящую к Готтлобу Фреге, но в полной мере представленную у Бертрانا Рассела концепцию сведения математики к логике), мы будем называть концепцию А.И. — «логицизмом Введенского» (это тем более уместно, что сам автор так ее и именовал).

«Логицизм Введенского» подробно изложен в его книге 1917 года. По убеждению А.И., его логицизм покоился прежде всего на законе противоречия (а вместе с ним и на законах тождества и исключенного третьего). Для прояснения смысла соответствующих рассуждений, представленных в книге «Логика как часть теории познания» 1917 года, мы воспользуемся упомянутым оттиском его статьи 1909 года, а также изложением его взглядов, которое было дано В.В. Зеньковским [20, с. 229–232].

Введенский ставит вопрос: каковы логические законы мышления: естественные или нормативные? На этот вопрос обыкновенно отвечают, сразу имея в виду все четыре закона: «либо их все вместе считают естественными, либо все вместе нормативными <...> В действительности же они отчасти естественные, а отчасти нормативные». В законе исключенного третьего А.И. усматривал «все признаки естественного закона», так как он «высказывает чисто естественную неспособность нашего мышления придумать, или создать и мыслить такое третье отношение, которое не было бы ни утвердительным, ни отрицательным» [14, с. 6–10].

Мы знаем, что такое «третье отношение» возможно — в виде соединения утверждения и отрицания (как и поступил современник Введенского — Н.А. Васильев), но оно для А.И. запрещается законом противоречия. Для Введенского это — самый

¹⁶На обороте титульного листа оттиска указывалось: извлечено из Журнала Министерства Народного просвещения за 1909 год.

важный закон, и А.И. утверждает, что он «мог бы даже ограничиться лишь рассмотрением этого закона, не говоря ни слова о трех остальных» — в нем «центральный пункт» всех его соображений.

Закон противоречия, который, говорил Введенский, было бы лучше называть законом непротиворечия или даже законом невозможности противоречия, носит двойственный характер. С одной стороны, он кажется чисто естественным законом, «потому что мы не в силах представить себе противоречие осуществленным. <...> Но с другой стороны, он кажется и чисто нормативным. Ведь известно, что нам приходится *стараться* избегать противоречия в своих мыслях» [14, с. 10]. Эту двойственность Введенский объяснял различием, существующим между *представлениями* и *мышлением*: закон противоречия «естественен» для наших представлений и «нормативен» для нашего мышления. Противоречие непредставимо, но мыслимо [14, с. 11–13].

Чисто естественным, по Введенскому, является закон тождества. Это объясняется тем, что мышление невозможно, если не производить отождествления каждой мысли с ней самой. Что касается закона достаточного основания, то, по Введенскому, он только нормативен. «Как закон мышления, т.е. в своей логической форме, когда его не смешивают <...> с законом причинности, он предписывает, чтобы мы не соглашались ни с одной мыслью, для которой у нас нет основания, достаточного для того, чтобы принудить нас согласиться с ней» [14, с. 8].

Согласно Введенскому, логические умозаключения, которые основаны прежде всего на законе противоречия, неуместны в отношении того, что находится за пределами логики, то есть для «вещей в себе». Но, комментирует В.В. Зеньковский воззрения А.И., быть заключенным в мире явлений невыносимо, и апостериорное знание и философское мышление стремятся вывести нас за его пределы, в трансцендентный мир.

В одном из последних разделов своего доклада (статьи) «Новое и легкое доказательство философского критицизма», озаглавленного «Единственное средство для спасения метафизики в виде знания», Введенский ставит вопрос: а нельзя ли спасти метафизику как знание о трансцендентном мире посредством учения, допускающего, что к нему возможен непосредственный

доступ? Его ответ гласит: с помощью допущения, что мы обладаем «способностью прямо, непосредственно, т.е. без всякой помощи умозаключений, усматривать вещи в себе, вроде того, как это говорят мистицизм и интуитивизм, мы не спасем метафизику в виде знания. Подлинное постижение такого рода трансцендентного мира дается только верой».

Неудивительно, поэтому, что возникают требования изгнать из науки понятие о вещи в себе как противоречивого понятия. А.И. пишет:

В понятии вещи в себе подразумевается задача мыслить бытие, независимое от нас, от переживаний нашего сознания, а потому и независимое от логических законов мышления, между тем мы можем мыслить что бы то ни было не иначе, как в подчинении естественным законам мышления [14, с. 24].

Но тогда возникает проблема, «какая польза для науки из понятия вещей в себе, коль скоро о них нельзя знать ровно ничего, даже и того, существуют они или нет, а если существуют, то подчиняются ли логическим законам мышления или не подчиняются». Решение этой проблемы, говорит Введенский, указал уже Кант: это понятие указывает на границу логически позволительного применения причинности и других категорий. К этому кантовскому положению Введенский добавляет, что благодаря этому понятию обнаруживается граница «логически позволительного» использования умозаключений — оно ограничивается лишь явлениями. При такой позиции понятно, что Введенский отвергал и диалектику Гегеля, и метафизику Фихте и Шеллинга.

Таков был развивавшийся Введенским взгляд на проблему применимости к трансцендентному миру — «истинному бытию» — законов логики. Заметим, что это была проблема, которую рассматривали многие русские мыслители конца XIX — начала XX века, в частности ученик и современник А.И. — И.И. Лаппин. А Н.А. Васильева, как мы уже говорили, проблема эта привела к мысли о неаристотелевой логике. Сам Введенский считал, что мы можем ясно мыслить «то, что не можем представить, хотя бы и смутным образом» [8, с. 250]. По его

мнению, апостол Павел «уже чувствовал, что сама же логика требует считать неизвестным, все ли подчинено закону противоречия, и в частности — подчинен ли ему Бог» [10, с. 349]. Эта ситуация означает, что пользоваться умозаключениями и доказательствами «уместно и логически позволительно только в применении к таким предметам, относительно которых мы уже знаем, что они подчиняются закону противоречия» [8, с. 262]. Что касается «истинного бытия», то есть вещей в себе, то у нас нет никаких средств удостовериться, подчиняются они или не подчиняются этому закону.

Когда Введенский оставлял открытым данный вопрос, кажется, будто он допускал построение «логики противоречия». Однако это не так. А.И. писал, что если о предметах не известно, подчиняются ли они закону противоречия, то для них «ни из каких посылок не вытекает ровно никаких выводов» [8, с. 262]. Но уже тогда Н.А. Васильев построил свою «воображаемую логику», в которой допускаются суждения, содержащие в себе противоречия. Заметим, что в нашей домашней библиотеке имелся экземпляр журнала, в котором была напечатана одна из главных статей Н.А. Васильева, в которой не только излагались положения его «логики противоречия», но и обсуждались те логико-онтологические проблемы, которые поднимал Введенский [4]. Но, читая эту статью в 50-х годах прошлого века, не просто было усмотреть связь между идеями Васильева и Введенского и оценить логическое новаторство казанского ученого¹⁷.

К этому можно добавить, что тогда же, в первые десятилетия прошлого века, воззрение о противоречивости — антиномичности богословской Истины отстаивал о. Павел Флоренский.

Для понимания того, как «критицизм» Введенского преломлялся при решении конкретных философских вопросов, расскажем о двух из них. Первый представлен работой о пределах и признаках одушевления, т.е. говоря современным языком — пси-

¹⁷Спустя примерно десять лет на концепцию Н.А. Васильева обратил внимание В.А. Смирнов [27].

хики [16]¹⁸, второй — публичной лекцией на тему «Спор о свободе воли перед судом критической философии», которую А.И. прочитал в актовом зале Санкт-Петербургских Высших женских курсов 25 марта 1900 года [18].

В работе «О пределах и признаках одушевления» Введенский сформулировал «новый психо-физический закон», ставя его в связь с вопросом о возможности метафизики. В работе обосновывался взгляд, согласно которому вопрос о пределах одушевления принадлежит к числу эмпирически неразрешимых.

Нужно сказать, что эта работа Введенского особенно привлекла наше внимание в связи с вопросом о сущности психики. Продумывая вопрос о предмете этой науки, мы обнаружили, что центральное ее понятие — понятие о *психике* ускользает от определения, и ученым-психологам не остается ничего другого, как ссылаться на то, что психические явления знакомы каждому человеку по его собственному опыту. Если бы тогда нам была известна работа Введенского, стало бы понятно, что это не случайно — объективных признаков, позволяющих определить, обладает ли данное живое существо психикой или нет, не существует.

Но вернемся к Введенскому. Он начал свою работу так:

Настоящее исследование относится к области критической философии. Поэтому оно ведется в предположении неразрешимости одними теоретическими путями таких вопросов, как, например, о смысле мироздания, одна ли материя порождает душевную жизнь, или же, наоборот, первая сама является существующей только благодаря существованию сознания, а без него ее не было бы, и т.п., словом, в предположении неразрешимости всех вопросов, выходящих за пределы возможного опыта [16, с. 3].

Далее Введенский отверг взгляд, согласно которому вопрос об объективных признаках одушевления (и убеждение в существовании чужой душевной жизни) решается путем просто-

¹⁸На обороте титульного листа значится: Извлечено из Журнала Министерства Народного Просвещения за 1892 г.

го умозаключения по аналогии (будто бы мы от внешнего сходства переходим к внутреннему). Окончательный вывод, вытекающий из проведенного им исследования, он видел в следующем:

... если признать убеждение в существовании чужой душевной жизни за достоверную истину, и притом такую истину, которая не просто принята на веру, а проверена нами, то надо допустить, что, сверх внешних чувств и обсуждающего их показания ума, у нас есть еще особый орган, доставляющий нам сведения о том, что находится вне нас (мы его называем метафизическим чувством); в противном случае придется или считать убеждение в существовании чужой душевной жизни недостоверным и недоказуемым, или же возвратиться к какой-либо столь же недостоверной и недоказуемой системе старинной метафизики (к материализму или спиритуализму, это будет зависеть от личного вкуса) [16, с. 3–4].

Введенский указывал на тот факт, что среди ученых нет согласия относительно того, какие организмы (в том числе и животные) одушевлены, а какие остаются «бездушной физиологической машиной». Здесь А.И. в подстрочном примечании сослался на мнение Фехнера, что «особым сознанием» обладает каждый орган, организм, каждая планета и т.д.; упомянул он и фехнеровское противопоставление: *die Tagesansicht gegenüber der Nachtansicht* [16, с. 7].

Понятно, что имел в виду Введенский. Где-то в 70-х годах прошлого века одному из авторов этой статьи довелось ближе познакомиться с фигурой Густава Теодора Фехнера (1801–1887). Это был замечательный мыслитель — физик, философ, психолог, труды которого положили начало экспериментальной психологии (достаточно вспомнить закон Вебера – Фехнера о логарифмической связи между величиной раздражителя и силой вызываемого им ощущения). Ординарный профессор физики Лейпцигского университета, он переутомился, проводя свои исследования, и психика его пошатнулась. Он почти ослеп, часами пребывал в затемненном помещении. Но однажды, во время

прогулки по саду, произошло исцеление, и он стал не просто видеть окружающие его вещи, но и приобрел дар восприятия душ растений. Дальнейшее развитие его «визионерской» способности привело его к убеждению, что вся природа, весь мир одухотворен. Тогда-то он и стал противопоставлять господствовавшему в его время взгляду на мир, который он уподоблял ночной мгле (*die Nachtansicht*), — развивавшийся им светлый взгляд на мир (*die Tagesansicht*)¹⁹.

Рассматривая поднятый вопрос совершенно независимо от метафизических предположений и ограничиваясь в своих рассуждениях только тем, что может быть проверено «внутренним и внешним опытом», и ничего не принимая без такой «фактической проверки», Введенский следующим образом передает свой «психо-физический закон». Мы читаем:

Телесная жизнь, насколько она доступна эмпирическому познанию, всегда бывает такой, что все равно, сопровождается ли она душевной жизнью или нет <...> Из этого закона с необходимостью вытекает, что нет ни одного телесного явления, которое могло бы служить признаком одушевления. <...> А поэтому этот закон может быть назван *законом отсутствия объективных признаков одушевления*. Ему-то и подчиняется всякая душевная жизнь. Такова проводимая нами мысль [16, с. 30]²⁰.

А.И. Введенский отстаивал взгляд, что для того, чтобы основные законы связи душевных явлений с телесными можно было распространить на любую психическую («душевную») жизнь, в ком бы она ни проявлялась, нет никакой надобности в поисках объективных признаков одушевления. Он утверждал, что, не

¹⁹Психологи XIX–XX веков, разумеется, не приняли его взглядов, и в статье немецкого психолога Вильгельма Вундта, опубликованной к столетию со дня рождения Фехнера, говорится только о его экспериментально-психологических работах, но его «панпсихическое» учение замалчивается [30].

²⁰Здесь стоит сказать, что Н.О. Лосский, оппонент Введенского (о дискуссии между Лосским и Введенским у нас еще пойдет речь) в своем труде «Чувственная, интеллектуальная и мистическая интуиция» [23] назвал это исследование А.И. Введенского замечательным.

опасаясь ни противоречия с данными опыта, ни теоретического опровержения, можно как утверждать всеобщее одухотворение, так и отвергать любые формы психики — вопрос о пределах одушевления принадлежит к числу теоретически неразрешимых. Он рассуждал так.

Пусть признано, что психическое явление a всегда сопровождается физиологическим явлением a_1 , психическое явление b — физиологическим явлением b_1 , психическое явление c — физиологическим явлением c_1 , и т.д.; словом, каждое психическое явление сопровождается каким-нибудь физиологическим. Но ведь между «душевым» явлением a и сопутствующим ему физиологическим явлением a_1 нет никакой логически обосновываемой связи, так как мы не вправе говорить, что a_1 есть причина, порождающая существование a , или наоборот a есть причина, порождающая a_1 , или же, наконец, что a и a_1 возникают одновременно, как порождение какой-то третьей причины (например, Бога, установившего между ними предустановленную гармонию, или же единой субстанции, которая и духовна, и материальна).

Далее, не выходя за пределы опыта, мы не можем ответить на вопрос, когда у носителя психических явлений возникает душевная жизнь. Вопрос о времени возникновения психики у живого существа неразрешим. Это трансцендентно-метафизическая задача; «с чисто эмпирической же точки зрения первый момент душевной жизни можно поместить куда угодно; и даже можно считать ее безначальной и предсуществующей телесному возникновению человека» [16, с. 67].

Нам, конечно, странно и как-то неловко признавать теоретическую неразрешимость вопроса о времени возникновения душевной жизни, писал А.И., но такого рода вывод напрашивается сам собой, если принять закон отсутствия объективных признаков одушевления. Поскольку же мы свыклись с положением о зависимости психики от нервной системы, мы склонны допускать некоторый предел времени, раньше которого не может возникать душевная жизнь. Тут, однако, обнаруживается та трудность, что у простейших организмов, например амёб, нет нервной системы, и тем не менее у них наблюдаются явления (например, целесообразные движения), однородные с теми,

которые мы находим у животных, считающихся обладающими психикой. Но между простейшими и высшими животными нет резкой границы, нет разделяющего их скачка.

До сих пор против рассуждений А.И. нечего возразить; более того, можно указать на ученых, высказывающих сходные мысли, и на факты, говорящие в пользу отстаиваемого Введенским «закона».

Среди ученых, пришедших к взглядам, сходных с теми, которые развивал Введенский, особенно выделяется Джон фон Нейман. В книге Б.В. Бирюкова о методологии науки, как она видится в свете кибернетики, обращено внимание на его воззрения относительно процесса субъективного восприятия. Рассматривая измерение физических величин, Нейман утверждал, что возникающий при этом процесс субъективного восприятия «выводит нас из внешнего физического мира или, точнее, вводит нас во внутреннюю жизнь индивидуума» [2]. Он указывал на

фундаментальное для всего естественнонаучного мировоззрения требование, так называемый принцип психофизического параллелизма, согласно которому должно быть возможно так описать в действительности внефизический процесс субъективного восприятия, как если бы он имел место в физическом мире, — это значит сопоставить его последовательным этапам физические процессы в объективном внешнем мире, в обычном пространстве (естественно, что при этом процессе сопоставления <Zuordnungsprozess> возникает еще необходимость локализовать эти физические процессы в таких точках, которые лежат в занимаемой нашим телом части пространства [25]²¹.

Нейман привел пример. Пусть измеряется температура. Мы можем ограничиться визуальными показаниями термометра, но можем пойти дальше и определить длину его ртутного столба, сказав: вот длина, которую видит наблюдатель. Идя дальше, можно было учесть рассеяние световых квантов на непрозрачном столбике ртути вплоть до возникновения изображения на

²¹Вместо «Джона» его имя тогда читалось как «Иоганн», отсюда и соответствующий инициал.

сетчатке глаза и только тогда сказать: это изображение регистрируется наблюдателем; наконец, если позволяют наши знания, мы могли бы пойти еще дальше и указать химические реакции, вызываемые этим изображением на сетчатке глаза, в нерве и в мозгу, и только тогда сказать: эти химические изменения воспринимаются наблюдателем. Это значит, утверждал Нейман, что мы всегда должны делить мир на две части — наблюдаемую систему и наблюдателя, причем положение границы между ними в высокой степени произвольно. «То, что такую границу можно переместить сколь угодно далеко внутрь организма действительного наблюдателя, и составляет содержание принципа психофизического параллелизма» [25, с. 308].

Из этих слов явствует, что содержание того, что воспринимается наблюдателем, все время остается от него скрыто; здесь происходит как бы «обращение» рассуждений Введенского об отсутствии объективных признаков психики, или душевных явлений. Только в отличие от русского философа фон Нейман начинает не с переживаний субъекта, а с физических процессов, которые для него не были «вещами в себе».

Теперь о фактах, подтверждающих позицию Введенского. Их можно извлечь из ведущихся ныне обсуждений вопроса, с какого момента можно считать, что возник организм, обладающий психикой. С момента рождения? Или во чреве матери? Или с момента слияния женской и мужской половых клеток? Эти вопросы актуальны в свете споров относительно того, с какого момента этически непозволительно смотреть на плод матери как на возможный источник стволовых клеток. Напомню, что православная Церковь считает: личность возникает в момент зачатия.

В завершение этой темы — недоступности чужой душевной жизни — отметим, что в отечественном умозрении она была с полной ясностью выражена гениальным Тютчевым. Как сказал он в стихотворении «Silentium»:

Как сердцу высказать себя?
Другому как понять тебя?
Поймет ли он, чем ты живешь?
Мысль изреченная есть ложь.

Вернемся, однако, к Введенскому и укажем на один пункт в его рассуждениях, с которым трудно согласиться. По его мнению, для всякого, кто признал закон отсутствия объективных признаков психики и в то же время считает неоспоримой истинной одушевление других людей, логически неизбежен вывод о существовании особого (кроме эмпирических чувств и ума) органа метафизического познания; орган этот, будто бы, выводит нашу мысль за пределы всякого возможного опыта [16, с. 83]. Излишне, пожалуй, говорить, что такого органа до сих пор никто не обнаружил. . .

Перейдем теперь к работе Введенского о свободе воли. Автор начал с того, что уточнил смысл используемых им понятий детерминизма, индетерминизма и фатализма.

Учение, отрицающее существование хотя бы самой ограниченной свободы, называется *детерминизмом*. Учение же, допускающее хотя бы самую ограниченную свободу, лишь бы в смысле независимости от *всяких* причин, называется *индетерминизмом* <...> Фатализм учит <...> о независимости хода (важнейших — по крайней мере) событий от человеческой воли [18, с. 323].

Спор о свободе воли Введенский рассматривал в свете альтернативы «детерминизм — индетерминизм». Детерминизм не отрицает зависимости хода событий от нашей воли, «но уверен, что сами-то наши решения всегда сполна зависят от каких-нибудь причин» [18, с. 324]. Поэтому не следует думать, что если мы опровергнем фатализм, то этим докажем свободу воли.

Можно было бы думать, что вопрос о свободе воли носит психологический характер. Но это не так: согласно Введенскому он относится к гносеологии. «Что касается психологии, то взятая сама по себе, без теории познания, она совершенно не в силах решить вопрос о свободе воли» [18, с. 326]. Но если доказать свободу воли психологическим путем невозможно, не следует ли из

этого ее отсутствие? Нет, отвечает Введенский. Следует только то, что нам неизвестно, свободна воля или нет.

Но может быть решение вопроса дает ссылка на закон причинности? Привлекая его, кажется, что спор решается в пользу детерминизма. Если нет ни одного явления без причины, то всякое решение воли должно «сполна зависеть от обстоятельств, которые ему предшествуют и сопутствуют» [18, с. 331–332]. Однако имеет ли закон причинности всеобщее значение? Утвердительный ответ на этот вопрос подлежит доказательству, простая ссылка на него как на общепризнанную истину голословна.

Далее Введенский обратился к истории философии. Он констатировал, что и Аристотель, и Декарт, и Кант «защищают свободу воли, т.е. ее неполное подчинение закону причинности» [18, с. 331–332]; первый, кто поставил под сомнение вопрос, доказана ли всеобщность закона причинности, был Юм, который поэтому справедливо считается «предтечей критической теории познания» [18, с. 333].

После этого Введенский изложил свою позицию по данному вопросу. Он утверждал, что критическая теория познания не доказывает свободы воли, — она лишь дает возможность «с одинаковым правом и допускать, и отрицать ее, лишь оговариваясь, что и то, и другое предположение составит отнюдь не доказанное *знание*, а всего только *неопровержимую* при помощи знания и недоказуемую *веру*» [18, с. 338].

И далее его рассуждения перешли в моральную плоскость. Он связал свободу воли с нравственным долгом, считая, что тот, кто в него верит, верит и в свободу воли; для него эта свобода проявляется «именно в том, что он признает безусловную обязательность нравственного долга и притом признает не на словах, а всем своим существом» [18, с. 359].

И заключительный аккорд:

существует ли свобода воли, этого мы не знаем и не можем знать <...> Но за то, благодаря критической философии, мы вот что знаем: 1) <...> всякое доказательство существования или отсутствия свободы воли составляет такое же мнимое, облыжное знание, как и решение квадратуры круга при помощи линейки и циркуля. 2) Если существует свобода воли (я

говоря *если*), то ей не в чем состоять, как только в искреннем (не на словах, а всем существом) признании безусловно обязательного нравственного долга²² [18, с. 360].

Кантовско-критическая позиция Введенского, когда метафизика рассматривается как морально обоснованная вера, не могла не приводить его к конфронтации с атеистами и скептиками. Что касается философов-материалистов, то он не вступал с ними в споры, так как считал, что материализм как мирозерцание неопровержим. В связи с этим стоит сказать о его отношении к философским воззрениям Бенедикта Спинозы. Характерно уже название посвященной ему статьи — «Об атеизме в философии Спинозы» [15]²³.

Введенский рассматривает вопрос: «... нужно ли для Спинозы слово Бог, выражает ли оно у него какое-нибудь особое понятие, которое без этого термина осталось бы невыраженным» [15, с. 12] — и отвечает на него так: назвав субстанцию Богом, Спиноза не высказал о ней ровно ничего такого, чего он не высказал и что не могло бы быть им высказано о ней раньше [15, с. 15].

Рассматривая развитие философии Спинозы, Введенский утверждал, что в нем фигурирует только *название* Бог, а не *понятие* о нем, что название это используется им просто для обозначения субстанции. Без Бога он мог бы смело обойтись, и ко-

²²Стоит сказать, что оппонент Введенского Н.О. Лосский занимал по данному вопросу совершенно другую позицию. Согласно его взгляду, пишет П.Гайдено, свобода воли означает, что все ее проявления могут определяться только ею самою. В этом смысле она есть *causa sui* — причина самой себя. Свобода воли есть как бы тот непробиваемый щит, которым человек надежно защищен от всяких причинных воздействий извне — от влияний чувственного мира, от воздействий других людей и даже от Бога, который не посягает на свободу воли человека. В соответствии с философской системой Лосского здесь следует говорить не только о человеке, но о «субстанциональном деятеле» вообще, ибо таковыми являются как разумные существа, так и бесчисленное множество не наделенных сознанием существ, расположенных в иерархическом порядке (см. [19, с. 359]).

²³На титульной странице сказано: Оттиск из 37-й кн. «Вопросов философии и психологии».

гда Спиноза называл субстанцию Богом, он, по словам А.И., «замаскировал *перед самим собой* атеизм своей философией» [15, с. 21].

Почему же Спиноза, не будучи в душе атеистом, пришел к атеистическому учению о мировой субстанции, ставит вопрос Введенский. И отвечает: в этом проявилось влияние философии Декарта, который стремился к тому, чтобы все реальные связи и взаимоотношения мыслились как логические. И Декарт, и Спиноза отождествляли причинную связь со связью логической — со связью между основанием и следствием; оба они реальную независимость считали независимостью логической. Подобное отождествление реальных отношений с отношениями логическими, считал Введенский, вытекало из их механистического мирозерцания. Разница между ними состояла только в том, что у Спинозы это мирозерцание было выражено гораздо сильнее и более отчетливо, более осознанно, чем у Декарта.

Эта оценка философских взглядов Декарта и Спинозы, бесспорно, верна. Характеристика их воззрений как механистических («механических», как говорил А.И.) общепринята в современной философской историографии. Однако используемое Введенским понятие *логического* требует уточнения. «Логическое» и у Спинозы, и у Декарта не было таковым по существу. Это особенно видно в случае Декарта, который *противопоставлял* свои «правила для руководства ума» логической традиции, восходившей к философии эпохи схоластики. Это негативное отношение к логике в собственном смысле разделял и Спиноза, хотя он и строил свое главное сочинение «Этика» по образцу евклидовых «Начал».

Атеистичность философии Спинозы Введенский видел в том, что он не воспринимал события и процессы мира в понятиях целесообразности и целеполагания, т.е. не владел теми категориями, которые вывели бы его на *понятие* Бога. Вместо этого, писал А.И., у него наблюдается «уничтожение во вселенной действий по целям и объяснение всех фактов как неизбежных *следствий* из природы порождающих их субстанций» [15, с. 23].

Этот взгляд Введенского стоит сопоставить с трактовкой философии Спинозы главным советским «спинозоведом» Я. Миль-

нером–Ирининым²⁴. В отличие от Введенского у Мильнера акцент сделан не на атеизме Спинозы, а на его материализме. Но в остальном он солидарен с Введенским. Мильнер писал, что Спиноза «рассматривает бога, природу, субстанцию — все три слова едино суть — как существо, к сущности которого принадлежит существование, иными словами, как „causa sui“», т.е. причину самой себя. И хотя Спиноза начинает свою «Этику» с учения «О боге», речь в ней идет (определение 1 части I) о том, сущность чего включает в себе существование, иными словами о том, чья природа может быть представляема не иначе, как существующая [24, с. 62, 65–66].

Согласно Мильнеру, отход Спинозы от воззрений Декарта выразился в том, что картезианскому дуализму Спиноза противопоставил «материалистический монизм» и, следует добавить, атеизм. Но Введенский по-иному смотрел на философию той эпохи. Поставив вопрос, почему другие философские системы, возникшие под влиянием Декарта, — системы Гейлинкса, Мальбранша и Лейбница, не приняли атеистического характера, он дает на него следующий ответ. Ни одна из них не была чистым механицизмом. В окказионализме Гейлинкса и Мальбранша Бог «приноравливает свою деятельность к нашим хотениям, ибо действует по поводу них»; и действия эти рассматриваются как логически неизбежные [6].

Кроме того, у Мальбранша Бог творит мир, руководясь идеями, т.е. целями. У Лейбница же все мироздание в конце концов объясняется телеологически.

²⁴Яков Абрамович Мильнер–Иринин (1911–1989) в 1933–1935 гг. в качестве научного сотрудника Ин-та философии Коммунистической академии работал над темой «Философия Спинозы». Перед войной с Германией вышла книга: Я. Мильнер «Бenedикт Спиноза» [24]. По этой книге Мильнер–Иринин в 1943 г. защитил на философском факультете МГУ кандидатскую диссертацию. Будучи в 40-х годах старшим научным сотрудником Ин-та философии АН СССР, он подготовил докторскую диссертацию — «Понятие субстанции у Спинозы». Я.А. имел несчастье попасть в 1948 г. в кампанию против «безродных космополитов». Сохранились рукописи, в которых он продолжал анализировать учение Спинозы, и одна из них была напечатана уже после кончины автора, в 1999 г. См. статью о нем в кн. [1], написанную Н.Я. Ковановой (Мильнер), хранительницей архива Якова Абрамовича и, по-видимому, его дочерью.

Таким образом, в их системах не было чистого механизма²⁵, т.е. не было причин, породивших атеизм в системе Спинозы, а потому не было и атеизма [15, с. 27–28].

Заключительная часть статьи будет опубликована в следующем выпуске.

Литература

- [1] *Алексеев П.В.* Философы России XIX–XX столетий. Биографии, идеи, труды. М.: Академический проект, 2002.
- [2] *Бирюков Б.В.* Кибернетика и методология науки. М.: Наука, 1974. С. 303.
- [3] *Бирюков Б.В.* У истоков отечественных исследований по поиску логического вывода. О двух симпозиумах 60-х годов XX века, состоявшихся в г. Тракае (Литовская ССР) // Вопросы философии. 2006, № 12.
- [4] *Васильев Н.А.* Логика и металогики // Логос. Кн. 1–2, 1912–1913.
- [5] *Введенский А.И.* Вопросы философии и психологии. СПб., 1912.
- [6] *Введенский А.И.* Декарт и окказионализм. Берлин – Пг. – М., 1922.
- [7] *Введенский А.И.* Логика для гимназий. СПб., 1913.
- [8] *Введенский А.И.* Логика, как часть теории познания. Второе, вполне переработанное, издание. СПб., 1912.
- [9] *Введенский А.И.* Логика, как часть теории познания. Третье, вновь переработанное, издание. СПб., 1917.
- [10] *Введенский А.И.* Логика, как часть теории познания. Четвертое издание, М.–Пг., 1922 (на обложке — 1923).
- [11] *Введенский А.И.* Научная деятельность М.И. Владиславлева // Журнал Министерства народного просвещения (ЖМНП). СПб., 1890, июнь м-ц.
- [12] *Введенский А.И.* Новая постановка вопроса о самостоятельности четырех фигур силлогизма (из «commentationes philologicae»). СПб.: Типография Императорской Академии наук, 1897.
- [13] *Введенский А.И.* Новое и легкое доказательство философского критицизма // Журнал Министерства народного просвещения (ЖМНП). Новая серия. Часть XX. СПб., 1909. Март. С. 122–144.
- [14] *Введенский А.И.* Новое и легкое доказательство философского критицизма. СПб.: Сенатская типография, 1909.
- [15] *Введенский А.И.* Об атеизме в философии Спинозы. М., 1897.
- [16] *Введенский А.И.* О пределах и признаках одушевления. Новый психофизический закон в связи с вопросом о возможности метафизики. СПб., 1892.
- [17] *Введенский А.И.* Психология без всякой метафизики. Пг., 1917.
- [18] *Введенский А.И.* Спор о свободе воли перед судом критической философии // Журнал Министерства народного просвещения (ЖМНП). Седьмое десятилетие. Часть СССXXXVII [337]. Октябрь 1901 г.
- [19] *Гайденко П.П.* Иерархический персонализм Н.О. Лосского // Н.О. Лосский. Чувственная, интеллектуальная и мистическая интуиция. М., 1995.

²⁵То есть механицизма.

- [20] *Зеньковский В.В.* История русской философии. Том II, ч. 1. Л.: Эго, 1991 [перепечатка издания: Умса-Press. Париж, 1950].
- [21] *Карри Х.Б.* Основания математической логики. Перев. с англ. В.В. Донченко. Под ред. Ю.А. Гастева. М.: Мир, 1969.
- [22] Логика // БСЭ. 3-е издание. Том 14. 1962. С. 595–596.
- [23] *Лосский Н.О.* Чувственная, интеллектуальная и мистическая интуиция. Париж, 1938.
- [24] *Мильнер Я.А.* Бенедикт Спиноза. [М.]: Соцэкгиз, 1940.
- [25] *фон Нейман И.* Математические основы квантовой механики. Перев. с нем. М., 1964.
- [26] *Сербиненко В.* Введенский Александр Иванович // Русская философия. Малый Энциклопедический словарь. М.: Наука, 1995.
- [27] *Смирнов В.А.* Логические взгляды Н.А. Васильева // Очерки по истории логики в России. М., 1962.
- [28] *Финн В.К.* Интеллектуальные системы и общество. М.: Издание Российского государственного гуманитарного ун-та, 2001.
- [29] *Челпанов Г.И.* Учебник логики. Киев, 1897.
- [30] *Wundt W., Fechner W.* Rede zur Feier seines hundertjähreigen Geburtstages. Leipzig, 1901.

Паранепротиворечивые категории для паранепротиворечивой логики

В. Л. ВАСЮКОВ

ABSTRACT. It is well known that the concept of da Costa algebra [4] reflects most of the logical properties of paraconsistent propositional calculi C_n ($1 \leq n \leq \omega$) introduced by N.C.A. da Costa. In [8] the construction of topos of functors from a small category to the category of sets was proposed which allows to yield the categorical semantics for da Costa's paraconsistent logic. Another categorical semantics for C_n would be obtained by introducing the concept of potos — the categorical counterpart of da Costa algebra (the name “potos” is borrowed from W.Carnielli's story of the idea of such kind of categories). In the paper the potos completeness of da Costa logics (i.e. in respect to the potoses) is proved.

Ключевые слова: алгебра да Косты, паранепротиворечивые категории, потосы, общезначимость, основания теории категорий, элементарно замкнутые категории

1 Введение

Как известно, концепция алгебры да Косты [4] отражает большинство логических свойств паранепротиворечивого пропозиционального исчисления C_n , $1 \leq n \leq \omega$, введенного впервые Н.К.А. да Костой. В работе [8] автор предложил конструкцию топоса функторов из малой категории в категорию множеств, которая позволяет получить категорную семантику для паранепротиворечивой логики да Косты. Другая категорная семантика для C_n могла бы быть получена путем рассмотрения концепции *потоса* или топоса да Косты — категорного эквивалента алгебры да Косты.

Потос представляет собой паранепротиворечивый универсум, в котором можно было бы развивать паранепротиворечивую математику, подобно тому как это делается в топосах для интуиционистской математики. Но если в [8] все случаи паранепротиворечивости возникают лишь как частные конструкции в интуиционистском универсуме, как некоторые локальные артефакты,

то в потосе эта паранепротиворечивость абсолютно органична и, более того, она лежит в основе всех конструкций, она глобальна и фундаментальна. Здесь уже классическая математика возникает как артефакт в паранепротиворечивом универсуме, как некоторое локальное отклонение от паранепротиворечивых закономерностей. Так, например, при интерпретации систем C_n можно использовать неистинностно-функциональную оценку, в то время как истинностно-функциональная оценка становится характерной только для случая булевых топосов, которые являются теперь всего лишь частным случаем потосов.

В работе [1] автором уже была предложена конструкция потоса как декартово замкнутой категории (с начальным объектом 0 и терминальным объектом 1), содержащей выделенный объект Ω , который имплицитно является алгеброй да Косты, т.е. имеются стрелки $true : 1 \rightarrow \Omega$, $false : 1 \rightarrow \Omega$, $\bar{} : \Omega \rightarrow \Omega$, $\cap : \Omega \times \Omega \rightarrow \Omega$, $\cup : \Omega \times \Omega \rightarrow \Omega$, $\supset : \Omega \times \Omega \rightarrow \Omega$, выполняющие условия алгебры да Косты из работы [4, р. 81]. Однако подобное определение потоса страдает тем недостатком, что истинностная стрелка отрицания, в отличие от других стрелок, вводится «локально» и не связана с какими-либо категорными конструкциями.

В данной работе преодолевается этот недостаток путем введения так называемой комплементарной замкнутости декартово замкнутой категории. Это позволяет строить истинностную стрелку отрицания «глобально», по образцу введения остальных истинностных стрелок.

Следствием новой конструкции топоса является рассмотрение новой категории паранепротиворечивых множеств $PSet$, когда в качестве объектов используются множества системы ZF_1 — паранепротиворечивой теории множеств, которая соотносится с теорией множеств Цермело–Френкеля ZF_0 так же, как паранепротиворечивая первопорядковая логика с равенством соотносится с классической первопорядковой логикой с равенством. При этом категория $PSet$ оказывается не топосом, а потосом множеств.

Основание подобного рассмотрения можно найти у Ж. Бенабу, который в [3] предлагал в качестве минимальных теоретико-множественных оснований теории категорий рассматривать *теорию множеств* как любую теорию, использующую язык ZF_0 , и

использующую всего лишь аксиому экстенциональности и аксиому выделения. Для любой модели подобной теории ее элементы будут представлять собой множества, в то время как «метамножества» универсума дискурса, откуда выбирается модель, будут представлять собой классы. Следуя Бенабу, мы можем определить требуемую нам теорию множеств как любую теорию, использующую язык паранепротиворечивой теории множеств ZF_1 , и выбрать любую модель подобной теории в универсуме дискурса (фактически расширяя наш универсум до универсума всех неклассических «метамножеств»). Тогда так называемое отображение Йонеды будет сопоставлять каждому множеству некоторый его класс-представитель относительно нашей «паранепротиворечивой» модели, а наши множества будут в точности теми множествами, которые нужны нам для рассмотрения категории $PSet$.

Во втором параграфе приводятся минимальные сведения из теории алгебр да Косты, которые требуются для дальнейшего изложения, поскольку последние существенным образом используются и в значительной степени детерминируют саму конструкцию потоса.

В третьем параграфе вводится понятие потоса, анализируются его свойства и требуемые теоретико-множественные основания и рассматривается потос $PSet$. Вводятся также конструкции истинностных стрелок в произвольном потосе.

В четвертом параграфе дается алгебраическая интерпретация системы логики да Косты C_1 в алгебрах да Косты и теоретико-потосная интерпретация этой системы, существенно основанная на этих алгебрах. Доказывается полнота этой логической системы относительно данных интерпретаций. Наряду с этим рассматривается неистинностно-функциональная оценка для системы C_1 и полнота данной системы доказывается также с использованием этой оценки.

2 Алгебры да Косты

В 1984 г. В.А. Карниелли и Л.П. Алькантара [4] сформулировали понятие алгебры да Косты, отражающей большинство логических свойств паранепротиворечивой логики C_n . Было показано, что алгебра да Косты изоморфна паранепротиворечи-

вой алгебре множеств, что можно было бы рассматривать как аналог стоуновского представления для булевой алгебры. Однако подобная аналогия правомочна только с неклассической точки зрения: некоторые из операций в паранепротиворечивой алгебре множеств не сформулированы в обычных теоретико-множественных терминах.

Поскольку наши теоретико-категорные конструкции в дальнейшем будут существенно основаны на алгебрах да Косты, то для дальнейших построений приведем требуемые нам полные определения.

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 1. [4, р. 81] Под алгеброй да Косты будем понимать структуру $A = \langle S, 0, 1, \leq, \wedge, \vee, \supset, ' \rangle$ такую, что для каждого a, b, c из S выполняются следующие условия:

1. $\leq$ есть предпорядок;
2. $a \wedge b \leq a, a \wedge b \leq b$;
3. если $c \leq a$ и $c \leq b$, то $c \leq a \wedge b$;
4. $a \wedge a = a, a \vee a = a$;
5. $a \wedge (b \vee c) = (a \wedge b) \vee (a \wedge c)$;
6. $a \leq a \vee b, b \leq a \vee b$;
7. если $a \leq c$ и $b \leq c$, то $a \vee b \leq c$;
8. $a \wedge (a \supset b) \leq b$;
9. если $a \wedge c \leq b$, то $c \leq (a \supset b)$;
10. $0 \leq a, a \leq 1$;
11. $x^o \leq (x')^o$, где $x^o = (x \wedge x')'$;
12. $x \vee x' \equiv 1$, где $a \equiv b$ тогда и только тогда, когда $a \leq b$ и $b \leq a$;
13. $x'' \leq x$, где x'' означает $(x')'$;
14. $a^o \leq (b \supset a) \supset ((b \supset a') \supset b')$;
15. $x^o \wedge (x^o)' \equiv 0$.

Если существует $x \in S$, такой, что неверно, что $x \wedge x' \equiv 0$, то про алгебру A говорят, что она является *собственной алгеброй да Косты*.

ПРЕДЛОЖЕНИЕ 1. [1, р. 82] Если $A = \langle S, 0, 1, \leq, \wedge, \vee, \supset, ' \rangle$ есть алгебра да Косты, то справедливы следующие утверждения:

- (C1) $y \leq x$ тогда и только тогда, когда $x \wedge y \equiv y$;
- (C2) $x \wedge 0 \equiv 0, x \vee 1 \equiv 1$;

- (C3) $x \vee 0 \equiv x, x \wedge 1 \equiv x$;
 (C4) $x \vee y \equiv y \vee x, x \wedge y \equiv y \wedge x$;
 (C5) если $x = y$, то $x \equiv y$;
 (C6) если $a \equiv b$ и $x \equiv y$, то $x \wedge a \equiv y \wedge b$;
 (C7) если $a \equiv b$ и $x \equiv y$, то $x \vee a \equiv y \vee b$;
 (C8) $y \leq x$ тогда и только тогда, когда $y \vee x \equiv x$;
 (C9) если $x \vee y \equiv 0$, то $x \equiv 0$ и $y \equiv 0$;
 (C10) если $x \leq y^o$ и $x \leq (y^o)'$, то $x \equiv 0$;
 (C11) $p \vee (p' \wedge p^o) \equiv 1, p' \vee (p' \wedge p^o) \equiv 1$;
 (C12) $x \wedge y \equiv 0$ тогда и только тогда, когда $x \leq y' \wedge y^o$;
 (C13) $x \wedge (y \wedge y^o) \equiv 0$ тогда и только тогда, когда $x \leq y'$;
 (C14) $x \wedge x' \wedge x^o \equiv 0$;
 (C15) если $x \wedge (x')^o \equiv 0$, то $x \equiv x''$;
 (C16) если $x' \wedge (x')^o \equiv 0$, то $x \equiv x''$;
 (C17) если $x \wedge y \equiv 0$, то $x \leq y'$;
 (C18) если $y \equiv y^o$, то $x \wedge y \equiv 0$ тогда и только тогда, когда $x \leq y'$;
 (C19) $x \wedge y' \wedge y^o \equiv 0$ тогда и только тогда, когда $x \leq y$.

Доказательство. Очевидно.

Q.E.D.

ПРЕДЛОЖЕНИЕ 2. [1, р. 83] Каждая алгебра да Косты имеет по крайней мере три элемента.

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 2. [1, р. 83] Паранепротиворечивая алгебра множеств представляет собой структуру $A = \langle S, \emptyset, I, \leq, \cap, \cup, \Rightarrow, ' \rangle$, где

1. $\cap$ и $\cup$ являются операциями пересечения и объединения;
2. $\leq$ есть предпорядок;
3. $S \subseteq \wp(I)$;
4. S замкнуто относительно бинарных операций $\cap, \cup$ и унарной операции $'$;
5. $a \cap b \leq a, a \cap b \leq b$;
6. если $c \leq a$ и $c \leq b$, то $c \leq a \cap b$;
7. $a \leq a \cup b, b \leq a \cup b$;
8. $a \cap (a \Rightarrow b) \leq b$;
9. если $a \cap c \leq b$, то $c \leq (a \Rightarrow b)$;
10. $\emptyset \leq a, a \leq I$;

11. $x \cup x' \Leftrightarrow I$, где $a \Leftrightarrow b$ тогда и только тогда, когда $a \leq b$ и $b \leq a$;
12. $x'' \leq x$;
13. $x^o \leq (y \Rightarrow x) \Rightarrow ((y \Rightarrow x') \Rightarrow y')$, где $x^o = (x \cap x')'$;
14. $x^o \cap (x^o)' \Leftrightarrow \emptyset$.
15. $x^o \leq (x')^o$.

Пусть $S_0 = \{x : x \in S \text{ и } x \cap x' \nLeftrightarrow \emptyset\}$. Если $S_0 \neq \emptyset$, то мы имеем *собственную паранепротиворечивую алгебру да Косты*. Каждая паранепротиворечивая алгебра множеств является собственной алгеброй да Косты, в то время как каждая булева алгебра множеств является несобственной алгеброй множеств.

Для данного отношения эквивалентности $\sim$ про две алгебры да Косты A и B говорится, что они будут $\sim$ -изоморфными, если имеется функция f из A на B , сохраняющая операции и являющаяся $\sim$ -инъективной, т. е., когда если $x \sim y$, то $f(x) \neq f(y)$.

ТЕОРЕМА 1. [4, р. 84] *Каждая собственная алгебра да Косты $\equiv$ -изоморфна собственной паранепротиворечивой алгебре множеств.*

В [8, р. 273] доказана следующая теорема:

ТЕОРЕМА 2. *Множество максимальных фильтров алгебры да Косты $\equiv$ -изоморфно алгебре да Косты.*

3 Потосы

Потос фактически представляет собой топос, наделенный некоторой дополнительной структурой. По сути дела мы могли бы говорить не о потосах, а о «паранепротиворечивых топосах» или «топосах да Косты». Термин «потос» был навеян рассказом В. Карниелли об идее подобной разновидности категорий, высказанной одним из бразильских математиков, который именно так называл эти гипотетические категории.

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 3. Потос C является декартово замкнутой категорией, которая комплементарно замкнута и имеет классификатор подобъектов.

Комплементарная замкнутость C означает, что

- (i) для любого объекта a в C имеется объект a' , такой, что в C существуют стрелки $a'' \rightarrow a$ и $a^o \rightarrow (a')^o$, где $a^o = \langle a, a' \rangle'$,

$$(ii) \quad 1 \cong [a, a'], 0 \cong \langle a^o, a^{o'} \rangle,$$

(iii) для любых двух объектов в C имеется стрелка $a^o \rightarrow (b \Rightarrow a) \Rightarrow ((b \Rightarrow a') \Rightarrow b')$, где $b \Rightarrow a$ есть экспоненциал.

ПРЕДЛОЖЕНИЕ 3. В потосе C совокупность $Sub(d)$ всех мономорфных C -стрелок с концом d является алгеброй да Косты.

Доказательство. Поскольку любой потос C является декартово замкнутой категорией, то для любого объекта d в C совокупность $Sub(d)$ всех мономорфных C -стрелок с концом d образует предпорядоченную дистрибутивную решетку. Это означает, что условия 1-7 и 10 из определения алгебры да Косты выполняются в $Sub(d)$. Условия 8-9 являются следствиями диаграммы экспоненцирования. Условия (i)-(iii) определения потоса гарантируют нам выполнение условий 11-15. Q.E.D.

Нетрудно видеть, что в потосе мы имеем $Sub(d) \cong Hom(d, \Omega)$ и таким образом $Hom(d, \Omega)$ будет представлять собой алгебру да Косты. Но в этом случае возникает проблема категории множеств Set . Дело в том, что в Set мы имеем $Sub(D) \cong \wp(D)$, где $\wp(D) = \{x : x \text{ является подмножеством множества } D\}$. Поскольку $\wp(D)$ есть булева алгебра подмножеств, а не паранепротиворечивая алгебра множеств, как можно было бы ожидать по теореме 1, то приходим к заключению, что Set не может быть потосом. Но согласно определению паранепротиворечивой алгебры множеств существуют множества, образующие подобную алгебру. Таким образом, либо подобные множества порождают подкатегорию $PSet$ категории Set , либо Set в каком-то смысле является подкатегорией $PSet$.

Известно (см. [7]), что существует система ZF_1 паранепротиворечивой теории множеств, которая соотносится с теорией множеств Цермело–Френкеля ZF_0 так же, как паранепротиворечивая первопорядковая логика с равенством $C_1^=$ соотносится с классической первопорядковой логикой с равенством $C_0^=$. В сущности « ZF_1 должна быть ‘частично’ включенной в ZF_0 , хотя последняя также содержится в некотором смысле в первой» [7, р. 170]. Базисные теоретико-множественные понятия ZF_1 аналогичны соответствующим понятиям ZF_0 , хотя понятия, использующие отрицание, порождают два вида понятий: одни со сла-

бым отрицанием ($\neg$), а другие с сильным отрицанием ($\neg^*$, полагая $\neg^* A =_{def} \neg A \wedge A^o$). Как следствие, мы имеем, например, два пустых множества: $\emptyset = \{x : x \neq x\}$ и $\emptyset^* = \{x : \neg^*(x = x)\}$.

Совокупность всех множеств плюс $\emptyset, V, \cap, \cup, ^C$ (где $V = \{x : x = x\}$ и $x^C = \{y : y \notin x\}$) образует в ZF_0 полную булеву алгебру. Для ZF_1 мы получаем следующий результат:

ПРЕДЛОЖЕНИЕ 4. В ZF_1 совокупность всех множеств плюс $\emptyset, V, \cap, \cup, ^C$ образует паранепротиворечивую алгебру множеств.

Доказательство. Непосредственной проверкой (полагая $x \Rightarrow y = \{z : z \in x \rightarrow z \in y\}$). Q.E.D.

Каждая схема аксиом ZF_0 порождает соответствующие две схемы аксиом ZF_1 , одну с сильным отрицанием, а другую со слабым. Таким образом, мы можем сказать, что ZF_1 включает в себя ZF_0 и, следовательно, *Set* действительно в некотором смысле является подкатегорией *PSet*. Но что означает существование категории множеств, отличной от *Set*?

Ж. Бенабу в [3, р. 18], пытаясь выявить минимальные теоретико-множественные основания теории категорий, определяет *теорию множеств* как любую теорию T , использующую язык ZF_0 , и использующую, по меньшей мере, аксиому экстенциональности E и аксиому выделения CS . Пусть для любой модели M подобной теории элементы M будут называться множествами и обозначаться как $S, T, \dots$, а формальные отношения принадлежности и равенства множеств будут обозначаться как $S \in^* T$ и $S \doteq T$. Тогда «метамножества» универсума дискурса $\mathbf{U}$, откуда выбирается модель M , будут называться классами и обозначаться как $\mathbf{S}, \mathbf{C}, \dots$, в то время как отношения принадлежности и равенства в $\mathbf{U}$ будут обозначаться обычными символами $\in$ и $=$. Подкласс $\mathbf{S}$ из M будет *представимым*, если имеется множество S , называемое *представителем* $\mathbf{S}$, такое, что для всех $T \in M$ мы имеем $T \in \mathbf{S}$ тогда и только тогда, когда $T \in^* S$. *Отображение Йонеды* сопоставляет каждому множеству S класс-представитель $\hat{S} = \{T \in M : T \in^* S\}$.

Аксиома экстенциональности будет, например, в этом случае читаться следующим образом:

(E) Для всех множеств S и T , $\hat{S} = \hat{T}$ тогда и только тогда, когда $S \doteq T$.

Следуя Бенабу, мы можем определить теорию множеств как любую теорию T , использующую язык ZF_1 , и выбрать любую модель M подобной теории в универсуме дискурса $\mathbf{U}$ (фактически расширяя наш универсум до универсума всех неклассических «метамножеств»). Тогда отображение Йонеды будет сопоставлять каждому множеству $\mathbf{S}$ класс-представитель $\hat{S} = \{T \in M : T \in^* S\}$ относительно нашей «паранепротиворечивой» модели M , а наши множества будут в точности теми множествами, которые нужны нам для рассмотрения категории $PSet$.

ПРЕДЛОЖЕНИЕ 5. *$PSet$ является потосом.*

Доказательство. Согласно предложению 4 для любого множества I мы всегда имеем (см. [4, р. 84]) паранепротиворечивую алгебру множеств $\langle S, \emptyset, I, \leq, \cap, \cup, \Rightarrow, ' \rangle$, где $\cap$ и $\cup$ являются теоретико-множественными операциями пересечения и объединения, $\leq$ есть предпорядок, $S \subseteq \wp(I)$, S замкнуто относительно операций $\cap$, $\cup$ и унарной операции $'$. Если мы будем рассматривать функции включения как стрелки, то мы можем определить $x \leq y$ тогда и только тогда, когда $x \hookrightarrow y \cup \{b\}$, где $b \in S$. Определим теперь $x' = x^c$ если $x \notin S_0$ и $x' = x^c \cup \tau$ если $x \in S_0$, беря $S_0 = \{x \in S : \text{существует } \tau = \{a, b\}, \text{ такое, что } x \cap \tau \neq \emptyset, x^c \cap \tau \neq \emptyset \text{ и } \neg(x \subset \{a, b\})\} \neq \emptyset$, x^c будет теоретико-множественным дополнением x . Наконец, определяем $x \Rightarrow y$ как $x' \cup y$.

Нетрудно видеть, что в нашей алгебре $x^o = I$, если $x \notin S_0$, и $x^o = I - \{b\}$, если $x \in S_0$ для $b \in x \cap \tau$. Наряду с этим $\leq$ является собственным предупорядочением, так как если $b \in x$, то мы имеем $x \cup \{b\} \leq x$ и $x \leq x \cup \{b\}$, но $x \cup \{b\} \neq x$. Следовательно, определяя $x \Leftrightarrow y$ тогда и только тогда, когда $x \leq y$ и $y \leq x$, мы получаем отношение эквивалентности, отличное от равенства. Более того, если $x \subseteq y$ (и таким образом существует стрелка включения $x \hookrightarrow y$), то $x \leq y$ и $x = y$ влечет $x \Leftrightarrow y$. Наше отношение эквивалентности $\Leftrightarrow$ несовместимо с $'$, поскольку, если мы возьмем x , такой, что $\neg(\tau \subset x)$, то $x \cup \tau \Leftrightarrow x \cup \{a\}$, где $\tau = \{a, b\}$. Но $(x \cup \tau)' = (x \cup \tau)^c = x^c - \tau$ и $(x \cup \{a\})' = (x \cup \{a\})^c \cup \tau = x^c = \tau$. Таким образом, $x^c - \tau \not\Leftrightarrow x^c \cup \tau$.

Итак, можно заключить, что в $PSet$ мы имеем $Sub(d) \cong \wp(d)$ и $Sub(d)$ будет паранепротиворечивой алгеброй множеств, что

справедливо и для $\wp(d)$. Но в этом случае мы не можем взять 2 в качестве классифицирующего объекта, используя тот факт, что $\wp(d) \cong 2^d$, поскольку это приводит к булевой алгебре характеристических стрелок в Set . Действительно, если мы попытаемся определить

$$\chi_A(x) = \begin{cases} 1, & \text{если } x \in A \\ 0, & \text{если } x \notin A \end{cases},$$

то нам следует принять во внимание, что в $PSet$ у нас имеются два отрицания, и, следовательно, правильное определение будет выглядеть следующим образом:

$$\chi_A(x) = \begin{cases} 1, & \text{если } x \in A \\ 2, & \text{если } x \notin A \\ 0, & \text{если } \neg * (x \in A). \end{cases}$$

Это означает, что в роли классифицирующего объекта в $PSet$ следует принять не двухэлементную булеву алгебру, но трехэлементную алгебру да Косты (согласно предложению 2 каждая собственная алгебра да Косты имеет по меньшей мере три элманта). Пример подобной алгебры дается в [4, р. 83], где операции задаются следующими таблицами:

$\wedge$	0	1	2	$\vee$	0	1	2	$\supset$	0	1	2
0	0	0	0	0	0	1	2	0	1	1	1
1	0	1	2	1	1	1	1	1	0	1	0
2	0	2	2	2	2	1	2	2	0	1	1

$0' = 1, 1' = 0, 2' = 1; 0 \leq 2 \leq 1$.

Итак, у нас $\wp(d) \cong 3^d$ и множество $3 = \{\emptyset, \{\emptyset\}, \{\emptyset, 1\}\}$ вместе с функцией $true : 1 \rightarrow 3$ (такой, что $true(\emptyset) = 1$) играет роль классификатора подобъектов в $PSet$. Наряду с этим имеются три стрелки из $1 = \{\emptyset\}$ в $\Omega = \{\emptyset, 1, 2\} : true, false^* : 1 \rightarrow 3$ (такая, что $false^*(\emptyset) = \emptyset$) и $false : 1 \rightarrow 3$ (такая, что $false(\emptyset) = 2$).

Q.E.D.

Определим теперь истинностные стрелки в потосе в общем случае. Пусть $\mathbf{C}$ будет потосом с классификатором подобъектов $true : 1 \rightarrow \Omega$. Тогда

- (1) Отрицание $\neg : \Omega \rightarrow \Omega$ будет единственной стрелкой, для которой квадрат

$$\begin{array}{ccc} 1 & \xrightarrow{\text{false}} & \Omega \\ \downarrow & & \downarrow \neg \\ 1 & \xrightarrow{\text{true}} & \Omega \end{array}$$

будет декартов в $\mathbf{C}$. Таким образом $\neg = \chi_{\text{false}}$. Отрицание $\neg^* : \Omega \rightarrow \Omega$ будет единственной стрелкой, для которой квадрат

$$\begin{array}{ccc} 1 & \xrightarrow{\text{false}^*} & \Omega \\ \downarrow & & \downarrow \neg^* \\ 1 & \xrightarrow{\text{true}} & \Omega \end{array}$$

будет декартов в $\mathbf{C}$. В этом случае $\neg^* = \chi_{\text{false}^*}$

- (2) Поскольку потос является декартово замкнутой категорией, то истинностные стрелки определяются стандартным образом:

$\cap : \Omega \times \Omega \rightarrow \Omega$ есть характер произведения стрелок $\langle \text{true}, \text{true} \rangle : 1 \rightarrow \Omega \times \Omega$ в потосе $\mathbf{C}$;

$\cup : \Omega \times \Omega \rightarrow \Omega$ есть по определению характер образа $\mathbf{C}$ -стрелки $[\langle \text{true}_\Omega, 1_\Omega \rangle, \langle 1_\Omega, \text{true}_\Omega \rangle] : \Omega + \Omega \rightarrow \Omega \times \Omega$;

$\Rightarrow : \Omega \times \Omega \rightarrow \Omega$ есть характер монострелки $c : \otimes \rightarrow \Omega \times \Omega$, которая является уравнителем пары

$$\Omega \times \Omega \xrightarrow[\text{pr}_1]{\cap} \Omega,$$

где pr_1 есть проекция на первый сомножитель произведения $\Omega \times \Omega$.

4 Интерпретация паранепротиворечивой логики в потосах

Дадим интерпретацию в терминах потоса следующего списка аксиом и правил вывода [5, р. 3790]:

- A1. $\alpha \supset (\beta \supset \alpha)$
- A2. $(\alpha \supset \beta) \supset ((\alpha \supset (\beta \supset \gamma)) \supset (\alpha \supset \gamma))$
- A3. $\alpha \wedge \beta \supset \alpha$
- A4. $\alpha \wedge \beta \supset \beta$
- A5. $\alpha \supset (\beta \supset \alpha \wedge \beta)$
- A6. $\alpha \supset \alpha \vee \beta$
- A7. $\beta \supset \alpha \vee \beta$
- A8. $(\alpha \supset \gamma) \supset ((\beta \supset \gamma) \supset (\alpha \vee \beta \supset \gamma))$
- A9. $\alpha \vee \neg \alpha$
- A10. $\neg \neg \alpha \supset \alpha$
- A11. $\beta^o \supset ((\alpha \supset \beta) \supset ((\alpha \supset \neg \beta) \supset \neg \alpha))$
- A12. $\alpha^o \wedge \beta^o \supset (\alpha \wedge \beta)^o$
- A13. $\alpha^o \wedge \beta^o \supset (\alpha \vee \beta)^o$
- A14. $\alpha^o \wedge \beta^o \supset (\alpha \supset \beta)^o$
- A15. $\alpha^o \supset (\neg \alpha)^o$
- R1.
$$\frac{\alpha \quad \alpha \supset \beta}{\beta}$$

Здесь α^o является сокращением для $\neg(\alpha \vee \neg \alpha)$. Данная аксиоматика фактически описывает систему C_1 паранепротиворечивой логики да Косты.

Мы получим исчисление C_n ($1 \leq n \leq \omega$), если вместо аксиом A11 – A15 используем следующие аксиомы:

- A11'. $\beta^{(n)} \supset ((\alpha \supset \beta) \supset ((\alpha \supset \neg \beta) \supset \neg \alpha))$
- A12'. $\alpha^{(n)} \wedge \beta^{(n)} \supset (\alpha \wedge \beta)^{(n)}$
- A13'. $\alpha^{(n)} \wedge \beta^{(n)} \supset (\alpha \vee \beta)^{(n)}$
- A14'. $\alpha^{(n)} \wedge \beta^{(n)} \supset (\alpha \supset \beta)^{(n)}$
- A15'. $\alpha^{(n)} \supset (\neg \alpha)^{(n)}$

где $\alpha^{(n)}$ ($1 \leq n \leq \omega$) означает $\alpha^1 \wedge \alpha^2 \wedge \dots \wedge \alpha^n$, а α^n , в свою очередь, означает $\alpha^{oo\dots o}$, где символ o повторяется n раз.

Можно определить оценку $v : \Phi_0 \rightarrow A$ системы C_1 в алгебре да Косты A , ставящую в соответствие каждой пропозициональной переменной π_i некоторое истинностное значение $V(\pi_i) \in A$. Она однозначно продолжается по следующим правилам:

- (1) $v(\neg \alpha) = v(\alpha)'$;

- (2) $v(\alpha \wedge \beta) = v(\alpha) \wedge v(\beta)$;
- (3) $V(\alpha \vee \beta) = v(\alpha) \vee v(\beta)$;
- (4) $V(\alpha \supset \beta) = v(\alpha) \supset v(\beta)$,

до функции $v : \Phi \rightarrow A$. Предложение α , такое, что $v(\alpha) = 1$ для каждой A -оценки v называется A -общезначимым и обозначают это через $A \models \alpha$.

ТЕОРЕМА 3. *Для любой алгебры да Косты A имеет место $\vdash_{C_1} A$ тогда и только тогда, когда $A \models \alpha$.*

Доказательство. Слева направо проверяется C_1 -общезначимость всех C_1 -аксиом и правила отделимости. Чтобы получить доказательство утверждения справа налево, воспользуемся теоремой 2. Сопоставим каждому элементу x алгебры A главный фильтр $[x] = \{q : x \leq q\}$, где $q \in A$. Алгебра A^+ главных фильтров будет алгеброй да Косты. Определим A^+ -оценку как функцию $v_c : \Phi_0 \rightarrow A^+$ с помощью формулы $v_c(\pi_i) = [v(\pi_i)]$. Остальное очевидно. Q.E.D.

Определим теперь интерпретацию рассматриваемой системы в произвольном потосе C . Истинностным значением в потосе называется стрелка вида $1 \rightarrow \Omega$, а совокупность всех таких C -стрелок будет представлять собой множество стрелок $C(1, \Omega)$.

C -оценкой будем называть функцию $V : \Phi_0 \rightarrow C(1, \Omega)$, ставящую в соответствие каждой пропозициональной переменной π_i некоторое истинностное значение $V(\pi_i) : 1 \rightarrow \Omega$. Эта функция продолжается на множество всех формул Φ по следующим правилам:

- (a) $V(\neg\alpha) = \neg \circ V(\alpha)$;
- (b) $V(\alpha \wedge \beta) = \cap \circ \langle V(\alpha), V(\beta) \rangle$;
- (c) $V(\alpha \vee \beta) = \cup \circ \langle V(\alpha), V(\beta) \rangle$;
- (d) $V(\alpha \supset \beta) = \Rightarrow \circ \langle V(\alpha), V(\beta) \rangle$.

Таким образом мы продолжаем оценку V так, что каждому предложению α ставится в соответствие некоторая C -стрелка $V(\alpha) : 1 \rightarrow \Omega$. C -общезначимость предложения α (что обозначается как $C \models \alpha$) означает, что $V(\alpha) = \text{true} : 1 \rightarrow \Omega$ для всех оценок V .

Поскольку в потосе мы имеем $Sub(d) \cong Hom(d, \Omega)$, то отсюда $Sub(d) \cong C(d, \Omega)$, т.е. ставя подобъекту f его характер χ_f ,

мы получаем перенос структуры алгебры да Косты с $Sub(d)$ на $C(d, \Omega)$. Связь между семантикой потосов и рассматриваемой теорией, как и в случае алгебры Гейтинга [2, с. 199], заключается в том, что для любого потоса

$$C \models \alpha \text{ тогда и только тогда, когда } C(1, \Omega) \models \alpha \\ \text{тогда и только тогда, когда } Sub(1) \models \alpha.$$

Таким образом, общезначимость в потосе C равносильна общезначимости в алгебрах да Косты $C(1, \Omega)$ и $Sub(1)$. Отсюда получаем следующую теорему:

ТЕОРЕМА 4. *Если $\vdash_{C_1} \alpha$, то в любом потосе C имеем $C \models \alpha$.*

Доказательство. Пусть α — некоторая C_1 -теорема. Тогда α общезначима в алгебре да Косты по теореме 3. В частности, $C(1, \Omega) \models \alpha$, откуда $C \models \alpha$ согласно предыдущему утверждению.

Существует еще один способ доказательства предыдущей теоремы, если воспользоваться неистинностно-функциональной оценкой для системы C_1 . Согласно [6] мы можем ввести оценку $V' : \Phi_0 \rightarrow \{0, 1\}$, где Φ_0 есть множество пропозициональных переменных, и расширить ее на множество Φ всех формул следующим образом:

- (1) $V'(\alpha) = 0 \Rightarrow V'(\neg\alpha) = 1$;
- (2) $V'(\neg\neg\alpha) = 1 \Rightarrow V'(\alpha) = 1$;
- (3) $V'(\alpha^\circ) = V'(\alpha \supset \beta) = V'(\alpha \supset \neg\beta) = 1 \Rightarrow V'(\alpha) = 0$;
- (4) $V'(\alpha \supset \beta) = 1 \Leftrightarrow V'(\alpha) = 0 \text{ or } V'(\beta) = 1$;
- (5) $V'(\alpha \wedge \beta) = 1 \Leftrightarrow V'(\alpha) = V'(\beta) = 1$;
- (6) $V'(\alpha \vee \beta) = 1 \Leftrightarrow V'(\alpha) = 1 \text{ or } V'(\beta) = 1$;
- (7) $V'(\alpha^\circ) = V'(\beta^\circ) = 1 \Rightarrow V'((\alpha \supset \beta)^\circ) = V'((\alpha \wedge \beta)^\circ) = V'((\alpha \vee \beta)^\circ) = 1$.

Мы можем сопоставить V оценке V' , полагая $V(\pi_i) = true$, если $V'(\pi_i) = 1$, и $V(\pi_i) = false$ в противном случае.

ЛЕММА 1. $V(\alpha) = true$ тогда и только тогда, когда $V'(\alpha) = 1$.

Доказательство. В случае $\alpha = \pi_i$ лемма справедлива по определению. Используем индукцию по длине формулы, т.е. используем (1)–(7). Пусть $\alpha = \neg\beta$ и $V(\beta) = false$. Тогда

$$V(\neg\beta) = \neg \circ V(\beta).$$

Следовательно, $V(\alpha)(0) = \neg(V(\beta)(0)) = \neg(false(0)) =$ (по индуктивному определению) $= true(0)$. Таким образом, $V(\alpha) = true$ и $V'(\alpha) = 1$. Остальное получаем действуя аналогичным образом. Q.E.D.

Q.E.D.

ТЕОРЕМА 5. *Для любого потоса $\mathcal{C}$ и пропозициональной формулы α имеет место $\mathcal{C} \models \alpha$ тогда и только тогда, когда $\vdash_{C_1} \alpha$.*

Доказательство. Поскольку по лемме 1 мы выбираем оценку V абсолютно произвольным образом, а для V' в [6] полнота уже доказана, то это и приводит к требуемому заключению. Q.E.D.

Литература

- [1] Васюков В.Л. Потосы для паранепротиворечивой логики // Современная логика: проблемы теории, истории и применения в науке. Материалы X Общероссийской научн. конференции, СПб., 2008. С.105-107.
- [2] Голдблатт Р. Топосы. Категорный анализ логики. М., 1983.
- [3] J.Benabou. Fibered Categories and the Foundations of Naive Category Theory // The Journal of Symbolic Logic, 50(4):9-37, 1983.
- [4] W.A. Carnielli, L.P. Alcantara. Paraconsistent algebras // Studia Logica, XLIII, No 1/2, 1984, pp. 79-87.
- [5] N.C.A.da Costa. Calculus propositionnels pour les systemes inconsistants // C.R.Acad.Sci.Paris, T.257, 3790-3792, 1963.
- [6] N.C.A.da Costa and E.H.Alves. Une semantique pour le calculi C_1 // C.R.Acad.Sci.Paris, T.283, 729-731, 1976.
- [7] N.C.A.da Costa. Paraconsistent Mathematics // D.Batens, C.Mortensen, G.Priest and J.-P. van Bendegem (eds.), Frontiers of Paraconsistent Logic, Research Studies Press Ltd., Baldock, Hertfordshire, England, 2000, pp. 166-179.
- [8] V.L. Vasyukov. Paraconsistency in Categories // D.Batens, C.Mortensen, G.Priest and J.-P. van Bendegem (eds.), Frontiers of Paraconsistent Logic, Research Studies Press Ltd., Baldock, Hertfordshire, England, 2000, pp. 263-278.

О понятии конечного множества в конструктивной математике¹

А. А. ВЛАДИМИРОВ

ABSTRACT. It is known that the concept of non-infinite set is non-monolithic from the point of view of A.A. Markov's constructive mathematics. In the paper we present one general approach to constructivist conception of «type of non-infiniteness».

Ключевые слова: конструктивная математика, марковский конструктивизм, конечное множество

1 Введение

1. С интуитивной точки зрения, факт конечности того или иного множества объектов сводится к возможности перечислить эти объекты посредством некоторого списка. Например, конечность множества натуральных чисел, заданного условием

$$«n = 0 \text{ или } n = 1»,$$

устанавливается предъявлением списка $\{0, 1\}$, исчерпывающего все — с точностью до равенства — элементы указанного множества. Тем самым свойство конечности множества относится к числу свойств общего вида

- (1) «существует вспомогательный объект A , находящийся в некотором заранее известном отношении к рассматриваемому объекту X ».

С точки зрения «классических» логики и математики, суждения вида (1) ничем не выделяются среди прочих. Напротив, с точки зрения марковского конструктивного направления при

¹Работа поддержана РФФИ, проект № 09-06-00125.

попытке понимания таких суждений встает принципиальный вопрос о характере упоминаемого в них «существования». Ситуация, когда известен метод явного построения искомого вспомогательного объекта, — как раз и отвечающая интуитивным представлениям, — не считается в его рамках равнозначной ситуации, когда имеется лишь логическое опровержение предположения о невозможности такого объекта. Соответственно математические понятия, определения которых имеют вид (1), в рамках марковского конструктивизма подвержены эффекту «расщепления». В качестве хорошо известного [6, гл. 2] примера здесь можно указать на «классическое» определение вещественного числа по Г. Кантору, перенесение которого в конструктивный математический анализ приводит к несовпадающим понятиям «конструктивного вещественного числа» и «псевдочисла». Представление о конечности множества не является в этом смысле исключением.

Согласно сообщениям [10, 9], уже в 1950-е годы А.А. Марковым было указано на наличие, самое меньшее, четырех несовпадающих конструктивных истолкований представления о конечности, которые были связаны им с понятиями *финитного*, *субфинитного*, *квазифинитного* и *неинфинитного* множества. Аналогичная проблематика (хотя и несколько иначе трактуемая) возникла также в «классической» теории рекурсии. Например, в известной монографии [11, § 5.6] используются способы задания конечного множества посредством канонических индексов², а также посредством гёделевых номеров, разрешающих или перечисляющих эти множества рекурсивных функций³. Указанному вопросу уделялось также внимание и в рамках математического интуиционизма [1]. Целью настоящей статьи является развитие одного общего подхода к понятию «тип конечности множества» с точки зрения марковского конструктивного направления в математике. Некоторые из излагаемых далее результатов были анонсированы в заметке [2].

2. В качестве точных языков, применяемых для записи и истолкования математических суждений, мы намерены использовать языки *ступенчатой семантической системы* А.А. Маркова. В

²Это отвечает «финитным» множествам А.А. Маркова.

³Очерченная в [9] схема таких типов конечности не содержит.

частности, мы сохраняем применявшуюся самим автором этой системы [7] польскую запись логических связок. Более подробное описание используемых обозначений может быть найдено в монографии [4].

Термин «множество» будет далее рассматриваться в качестве сокращения для словосочетания «формула языка $\mathcal{Y}_{\omega+1}$ [4, § 27], не имеющая отличных от $|\Diamond$ параметров». Множества, задаваемые посредством формул языка $\mathcal{Y}_1$ [4, § 8], мы будем называть *порождаемыми*.

Элементом произвольно фиксированного множества $\mathfrak{A}$ будет считаться всякий постоянный терм [4, § 6], подстановка которого в формулу $\mathfrak{A}$ вместо переменной $|\Diamond$ приводит к верной замкнутой формуле. Ввиду возможности кодирования конструктивных объектов любой известной природы постоянными термами, указанные соглашения не влекут существенного ограничения общности рассмотрения.

2 Основные определения

1. Под *списком* постоянных термов естественным образом понимается постоянный терм, рассматриваемый как перечень своих звеньев [4, § 12]. Например, постоянный терм $**\Diamond\Diamond*\Diamond\Diamond$ представляет собой с указанной точки зрения список с членами $*\Diamond\Diamond$ и $\Diamond$. Порождаемое множество [4, § 12.4(1)] пар $*ut$ вида «постоянный терм t есть член списка u » мы в дальнейшем будем обозначать символом $\mathfrak{L}$.

2. Введенные А.А. Марковым понятия *финитного*, *субфинитного*, *квазифинитного* и *неинфинитного* множества могут быть определены следующим образом:

2.1. *Множество $\mathfrak{A}$ называется финитным, если верна замкнутая формула*

$$\exists \#_2 \forall |\Diamond \equiv \mathfrak{A} \exists \#_3 \& = \#_3 * \#_2 |\Diamond [\mathfrak{L} \#_3^\varepsilon.$$

Иначе говоря, финитность множества $\mathfrak{A}$ означает, что известен способ построения списка, членами которого являются все элементы множества $\mathfrak{A}$, и только они.

2.2. Множество $\mathfrak{A}$ называется *субфинитным*, если верна замкнутая формула

$$\exists \#_2 \forall \Diamond \supset \mathfrak{A} \exists \#_3 \& = \#_3 * \#_2 \mid \Diamond [\mathfrak{L} \#_3^\varepsilon.$$

Иначе говоря, субфинитность множества $\mathfrak{A}$ означает, что известен способ построения списка, членами которого являются все элементы множества $\mathfrak{A}$ — но, возможно, не только они.

2.3. Множество $\mathfrak{A}$ называется *квазифинитным*, если верна замкнутая формула

$$\exists \#_3 \neg \forall \#_2 \supset \mathfrak{C} \neg \forall \Diamond \equiv \mathfrak{A} \exists \#_3 \& = \#_3 * \#_2 \mid \Diamond [\mathfrak{L} \#_3^\varepsilon,$$

где $\mathfrak{C}$ — формула языка $\mathcal{Y}_1$ вида

$$(1) \quad \exists \Diamond \& \exists \#_4 = \mid \Diamond ** \#_2 \#_3 \#_4 \forall \Diamond < \mid \Diamond \vee \vee = \mid \Diamond \Diamond \exists \#_3 = \mid \Diamond ** \Diamond \#_3 \Diamond \\ \exists \#_2 \exists \#_3 \exists \#_4 \exists \#_5 \exists \#_6 = \mid \Diamond *** \#_5 \#_2 * \#_6 \#_3 ** \#_2 \#_3 \#_4,$$

выражающая отношение «число звеньев списка, являющегося значением переменной $\#_2$, не превосходит таковое для списка, являющегося значением переменной $\#_3$ ».

Иначе говоря, квазифинитность множества $\mathfrak{A}$ означает известность способа построения натурального числа n , для которого будет опровергаться приведением к нелепости предположение о невозможности списка элементов множества $\mathfrak{A}$ среди списков с не более чем n членами.

2.4. Множество $\mathfrak{A}$ называется *неинфинитным*, если верна замкнутая формула

$$\neg \forall \#_2 \neg \forall \Diamond \equiv \mathfrak{A} \exists \#_3 \& = \#_3 * \#_2 \mid \Diamond [\mathfrak{L} \#_3^\varepsilon.$$

Иначе говоря, неинфинитность множества $\mathfrak{A}$ означает возможность привести к нелепости предположение о невозможности списка, членами которого являлись бы все элементы множества $\mathfrak{A}$, и только они.

3. Как несложно заметить, каждое из определений 2.2, 2.3 и 2.4 имеет структуру вида

- (1) «осуществим вспомогательный объект A , для которого список L элементов рассматриваемого множества квазиосуществим среди списков, находящихся к объекту A в некотором заранее известном отношении».

Исключением является определение 2.1 — в случае *существенно проблемного* [5, § 1], т. е. удовлетворяющего условию

$$\neg\forall|\diamond \supset \neg\neg\mathfrak{A}\mathfrak{A},$$

множества $\mathfrak{A}$. Попытка переформулирования указанного определения в виде (1) давала бы утверждение о финитности множества $\neg\neg\mathfrak{A}$, а не множества $\mathfrak{A}$. Однако для *нормальных*⁴ множеств определение финитности также подпадает под указанную схему, что позволяет рассматривать последнюю в качестве основы для общего определения типа конечности.

4. Понятие *типа конечности* множеств мы вводим следующим образом:

4.1. Множество $\mathfrak{T}$ называется *типом конечности*, если для любого постоянного терма t осуществим постоянный терм u , удовлетворяющий соотношению $*ut \in \mathfrak{T}$.

Для произвольно фиксированного типа конечности $\mathfrak{T}$ мы вводим следующее понятие $\mathfrak{T}$ -конечного множества:

4.2. Пусть $\mathfrak{T}$ — тип конечности множеств. Множество $\mathfrak{A}$ называется $\mathfrak{T}$ -конечным, если осуществим постоянный терм u со свойством

$$\neg\forall\#_2\forall|\diamond \supset \&=|\diamond *u\#_2\mathfrak{T} \neg\forall|\diamond \equiv \mathfrak{A} \exists\#_3 \&= \#_3*\#_2|\diamond [\mathfrak{L}\#_3^\varepsilon.$$

Иначе говоря, $\mathfrak{T}$ -конечность множества $\mathfrak{A}$ означает осуществимость указания постоянного терма u , для которого список элементов $\mathfrak{A}$ квазиосуществим среди постоянных термов t со свойством $*ut \in \mathfrak{T}$.

⁴То есть заданных средствами языка $\mathcal{Y}_\omega$ и потому равнообъемных своим вторым отрицаниям.

Типы конечности множеств, описанные в пункте 2, допускают в рамках изложенной схемы следующую характеристику:

4.3. Пусть $\mathfrak{T}$ — тип конечности вида

$$\exists \#_2 = |\Diamond * \#_2 \#_2|.$$

Тогда $\mathfrak{T}$ -конечными являются множества с финитными вторыми отрицаниями, и только они.

4.4. Пусть $\mathfrak{T}$ — тип конечности вида

$$\exists \#_2 \exists \#_3 \& = |\Diamond * \#_2 \#_3 \vee \#_3 < \#_3 \vee = \#_3 \Diamond \exists \#_4 \exists \#_5 \& = \#_3 * \#_4 \#_5 [\mathfrak{L} * \#_2 \#_4]^\varepsilon.$$

Тогда $\mathfrak{T}$ -конечными являются субфинитные множества, и только они.

4.5. Пусть $\mathfrak{T}$ — тип конечности вида

$$\exists \#_2 \exists \#_3 \& = |\Diamond * \#_3 \#_2 \mathfrak{C}|,$$

где через $\mathfrak{C}$ обозначена формула 2(1). Тогда $\mathfrak{T}$ -конечными являются квазифинитные множества, и только они.

4.6. Пусть $\mathfrak{T}$ — тип конечности вида $= \Diamond \Diamond$. Тогда $\mathfrak{T}$ -конечными являются неинфинитные множества, и только они.

3 Сравнение типов конечности

1. Тип конечности $\mathfrak{T}$ естественно считать *мажорирующим* типом конечности $\mathfrak{S}$, если любое $\mathfrak{T}$ -конечное множество является также и $\mathfrak{S}$ -конечным. Используемая нами семантика языка $\mathcal{Y}_{\omega+1}$ не позволяет, однако, считать осмысленными условия, содержащие неограниченный теоретико-множественный квантор общности. Поэтому вышеописанное представление о мажорировании типов конечности нуждается в уточнении. Стандартным способом здесь является наложение ограничений на высоту рассматриваемых множеств:

1.1. Тип конечности $\mathfrak{T}$ называется *n-мажорирующим типом конечности $\mathfrak{S}$* , если любое нормальное $\mathfrak{T}$ -конечное множество не превосходящей *n* высоты является также $\mathfrak{S}$ -конечным.

Далее факт *n*-мажорирования типа конечности $\mathfrak{S}$ типом конечности $\mathfrak{T}$ мы будем обозначать символом $\mathfrak{T} \succ_n \mathfrak{S}$.

2. В дальнейшем два постоянных терма мы будем называть *равносоставленными*, если каждое звено одного из них является также звеном второго. Кроме того, мы введем следующее представление о *разрешимости* типа конечности:

2.1. Тип конечности $\mathfrak{T}$ называется *разрешимым*, если множество $\mathfrak{T}$ является порождаемым, а также может быть указано порождаемое множество $\mathfrak{T}'$, удовлетворяющее следующим условиям:

2.1.1. Для любых постоянного терма u и двух равносоставленных постоянных термов t и s невозможно одновременное выполнение соотношений $*ut \in \mathfrak{T}$ и $*us \in \mathfrak{T}'$.

2.1.2. Для любых двух постоянных термов u и t найдется равносоставленный с t постоянный терм s , удовлетворяющий соотношению $*us \in \bigvee \mathfrak{T}\mathfrak{T}'$.

В частности, несложным образом устанавливается разрешимость всех типов конечности § 2.4.3–§ 2.4.6.

3. Основной целью настоящего параграфа является доказательство следующего утверждения:

3.1. Пусть $\mathfrak{T}$ и $\mathfrak{S}$ — два разрешимых типа конечности множеств. Тогда при любом $n \geq 1$ для выполнения соотношения $\mathfrak{T} \succ_n \mathfrak{S}$ необходимо и достаточно, чтобы для любого постоянного терма u , удовлетворяющего условию

$$(1) \quad \exists \#_2 \exists |\diamond \& = |\diamond * u \#_2 \mathfrak{T},$$

был осуществим такой постоянный терм v , что для любого постоянного терма t со свойством $*ut \in \mathfrak{T}$ найдется равносоставленный ему постоянный терм s со свойством $*vs \in \mathfrak{S}$.

Доказательство. Достаточность сформулированного условия очевидна. Поэтому для завершения доказательства утверждения 3.1 остается установить необходимость этого условия.

В дальнейших рассуждениях постоянный терм u со свойством (1) мы будем предполагать зафиксированным.

Обозначим через $(t : x \Rightarrow y)$ формулу языка $\mathcal{Y}_1$, выражающую отношение «постоянный терм t есть перевод [4, § 13] схемы [8, § 27] нормального алгорифма над алфавитом $\diamond^*$, перерабатывающего значение переменной x в значение переменной y ». Далее,

обозначим через $\mathfrak{S}'$ порождаемое множество, отвечающее разрешимому типу конечности $\mathfrak{S}$ согласно определению 2.1. Наконец, обозначим через $\mathcal{A}$ нормальный алгорифм над алфавитом $\diamond*$, применимый к произвольно фиксированному постоянному терму v в том и только том случае, когда осуществимы два равносоставленных постоянных терма t и s со свойствами $*ut \in \mathfrak{T}$ и $*vs \in \mathfrak{S}'$. При этом будет предполагаться, что значением $\mathcal{A}(v)$ всегда является постоянный терм, удовлетворяющий соотношению $*u\mathcal{A}(v) \in \mathfrak{T}$ и обладающий равносоставленным постоянным термом s со свойством $*vs \in \mathfrak{S}'$.

Зафиксируем произвольным образом некоторый постоянный терм r со свойством $*ur \in \mathfrak{T}$, и сопоставим каждому постоянно-терму w имеющее высоту 1 множество $\mathcal{K}(w)$ вида

$$\begin{aligned} \mathcal{K}(w) = & \&\vee\exists\#_2 \&=\#_2 *r \mid \diamond [\mathfrak{L}\#_2^\varepsilon \exists\#_2\exists\#_3 \mathfrak{K}_w \\ & \supset \exists\#_2\exists\#_3 \mathfrak{K}_w \exists\#_2\exists\#_3 \&\mathfrak{K}_w \exists\#_2 \&=\#_2 * \#_3 \mid \diamond [\mathfrak{L}\#_2^\varepsilon, \end{aligned}$$

где положено

$$\mathfrak{K}_w = \exists \mid \diamond \&\&=\mid \diamond w (w : \mid \diamond \Rightarrow \#_2) ([\mathcal{A}^\tau : \#_2 \Rightarrow \#_3).$$

В том случае, когда постоянный терм w является переводом схемы самоприменимого⁵ нормального алгорифма, результат самоприменения которого представляет собой постоянный терм v из области применимости алгорифма $\mathcal{A}$, элементы множества $\mathcal{K}(w)$ перечисляются списком $\mathcal{A}(v)$. В противном случае они перечисляются списком r . Соответственно, при любом выборе постоянного терма w среди постоянных термов t со свойством $*ut \in \mathfrak{T}$ квазиосуществим список элементов множества $\mathcal{K}(w)$.

Предположим теперь, что выполняется соотношение $\mathfrak{T} \succ_n \mathfrak{S}$. Это означает осуществимость нормального алгорифма $\mathcal{B}$ над алфавитом $\diamond*$, применимого к переводу любого множества $\mathfrak{A}$ не превосходящей n высоты, список элементов которого квазиосуществим среди постоянных термов t со свойством $*ut \in \mathfrak{T}$, и перерабатывающего указанный перевод в такой постоянный терм v , что список элементов множества $\mathfrak{A}$ квазиосуществим среди постоянных термов s со свойством $*vs \in \mathfrak{S}$. Тогда, согласно вышесказанному, осуществим нормальный алгорифм $\mathcal{C}$ над алфавитом $\diamond*$, перерабатывающий любой постоянный терм w в такой

⁵То есть применимого к переводу своей схемы.

постоянный терм v , что среди постоянных термов s со свойством $*vs \in \mathfrak{S}$ квазиосуществим список элементов множества $\mathcal{K}(w)$.

По своему построению алгоритм $\mathcal{C}$ является самоприменимым, причем результатом его самоприменения является такой постоянный терм v , что среди постоянных термов s со свойством $*vs \in \mathfrak{S}$ квазиосуществим список элементов множества $\mathcal{K}([C^\tau])$. Однако последнее, по построению алгоритмов $\mathcal{K}$ и $\mathcal{A}$, автоматически означает неприменимость алгоритма $\mathcal{A}$ к постоянному терму v . Тем самым для любого постоянного терма t со свойством $*ut \in \mathfrak{T}$ найдется равносоставленный ему постоянный терм s со свойством $*vs \in \mathfrak{S}$, что и означает справедливость доказываемого утверждения. Q.E.D.

4. В качестве простейшего приложения утверждения 3.1 приведем основанные на нем доказательства результатов А.А. Маркова о сравнении типов конечности § 2.2.1–§ 2.2.4.

Рассмотрим постоянный терм $u \equiv **\diamond\diamond*\diamond\diamond$. Легко видеть, что для любого постоянного терма v найдется постоянный терм t , не равносоставленный с v , но не обладающий звеньями, не являющимися звеньями списка u . Тем самым, утверждение о финитности любого субфинитного множества является неверным.

Рассмотрим постоянный терм $u \equiv *\diamond\diamond$. Легко видеть, что для любого постоянного терма v найдется постоянный терм t , обладающий ровно одним не входящим в v звеном. Тем самым, утверждение о субфинитности любого квазифинитного множества является неверным.

Рассмотрим постоянный терм $u \equiv \diamond$. Легко видеть, что для любого постоянного терма v найдется постоянный терм t , число попарно графически различных звеньев которого превышает число звеньев v . Тем самым утверждение о квазифинитности любого неинфинитного множества является неверным.

Отметим, что неверность утверждения о финитности всех неинфинитных множеств может также быть выведена из теоремы [11, гл. 5, Теорема XV (b)].

4 Дополнительные замечания

1. Одним из математических понятий, определение которого опирается на понятие конечного множества, является понятие

иммунного множества. С точки зрения вышеизложенной схемы, указанное определение может быть сформулировано — при конструктивном понимании математических суждений — следующим образом:

1.1. *Инфинитное множество $\mathfrak{A}$ называется иммунным, если неверно, что для любого натурального числа n найдется финитное множество $\mathfrak{A}_n \subseteq \mathfrak{A}$, содержащее не менее n попарно различных элементов.*

Одна из форм [11, гл. 9, Теорема XV] определения понятия гипериммунного множества при этом легко переписывается следующим образом:

1.2. *Инфинитное множество $\mathfrak{A}$ называется гипериммунным, если неверно, что для любого натурального числа n найдется субфинитное множество $\mathfrak{A}_n \subseteq \mathfrak{A}$, квазисодержащее не менее n попарно различных элементов.*

Таким образом, хорошо известное различие между понятиями иммунного и гипериммунного множества по существу сводится к различию между понятиями финитного и субфинитного множества.

2. Некоторые характерные различия конструктивного и «классического» вариантов математического анализа также легко находят свое объяснение в «классической» установке подразумевать конечные множества всех возможных типов финитными. Здесь может быть указана, в частности, теорема об эквивалентности определений интеграла по Риману (в виде предела интегральных сумм) и по Дарбу (в виде сечения в множестве интегралов ступенчатых оценок рассматриваемой функции), с точки зрения конструктивного направления опровергаемая на примере [3]. Основным моментом «классического» доказательства, нарушающимся при этом с конструктивной точки зрения, является именно финитность (заведомо субфинитной) совокупности отрезков интегрального разбиения, содержащих «большие» колебания интегрируемой функции.

Литература

- [1] Veldman W. Some intuitionistic variations on the notion of a finite set of natural numbers// Repsectives on negation. Tilburg Univ. Press, Tilburg, 1995. P. 177-202.

- [2] *Владимиров А. А.* Об иерархиях конечных множеств// ДАН. 2006. Т. 406, № 3. С. 295-297.
- [3] *Владимиров А. А.* О сравнении интегралов Дарбу и Римана в конструктивном математическом анализе// Препринт доступен на сайте <http://arxiv.org/abs/0911.2892>
- [4] *Владимиров А. А., Домбровский-Кабанченко М. Н.* Ступенчатая семантическая система. М.: Изд-во ВЦ РАН, 2009.
- [5] *Заславский И. Д.* Некоторые свойства конструктивных вещественных чисел и конструктивных функций// Труды матем. ин-та им. В. А. Стеклова. Т. 67. С. 385–457.
- [6] *Кушнер Б. А.* Лекции по конструктивному математическому анализу. М.: Наука, 1973.
- [7] *Марков А. А.* Попытка построения логики конструктивной математики// Исследования по теории алгорифмов и математической логике. Т. 2. М.: Изд-во ВЦ АН СССР, 1976. С. 3-31.
- [8] *Марков А. А., Нагорный Н. М.* Теория алгорифмов. М.: ФАЗИС, 1996.
- [9] *Нагорный Н. М.* Монолитно ли понятие конечного множества? (По поводу одной неопубликованной работы А. А. Маркова)// Марков А. А. Избр. труды. Т. 2. М.: Изд-во МЦНМО, 2003. С. 527-534.
- [10] *Нагорный Н. М., Шанин Н. А.* Андрей Андреевич Марков (к шестидесятилетию со дня рождения)// Успехи матем. наук. 1964. Т. 19, № 3. С. 207-223.
- [11] *Роджерс Х.* Теория рекурсивных функций и эффективная вычислимость. М.: Мир, 1972.

Хорошо определенные логики¹

И. А. ГОРБУНОВ

ABSTRACT. Some questions concerned the deduction theorem for consequence operations and sentential calculi are considered in the present paper.

Ключевые слова: теорема о дедукции, дедуктивные пропозициональные системы

1 Предисловие

В отношении ее математического содержания данная работа является скорректированным и доработанным пересказом некоторых фактов из работы Ризарда Вуйцицкого [1] (или см. [2]). В частности утверждения 6–10 и 12 являются несколько уточненными фактами из указанной работы. К сожалению, в оригинале эти факты сформулированы и доказаны не совсем корректно. Утверждения 11, 13 и 14 доказаны и сформулированы автором этой работы.

2 Введение

Мы пока не будем определять, что такое логика, а будем опираться на ее интуитивное понимание. Отметим только, что всякая логика определяет (и в синтаксическом случае сама полностью определяется через) *отношение логического следования*, устанавливаемое между списками предложений языка и предложениями языка. Это отношение сопоставляет списку предложений, называемых *посылками*, некоторое предложение, которое называется их *следствием*.

Отношение логического следования, в свою очередь, некоторым образом выражается в естественном языке. Таким образом,

¹Работа выполнена при поддержке РФФИ, гранты 08–06–00414 и 10–06–00360.

выделение логики языка посредством этого же языка предполагает, что язык уже располагает некоторыми средствами представления логического следования. То есть в нем существует логическая связка (или формула), назначение которой — выражать в пропозициональном языке отношение логического следования. Если в языке существует такая связка, то, видимо, ее и стоит называть *импликацией*. Связку эту, как обычно, будем обозначать $\rightarrow$.

Частным примером импликации является *материальная импликация*. Обычно в русском языке эта связка передается включением в предложение словосочетания «Если ..., то...».

Изложение всякой логики происходит в русском же языке и в таком изложении мы вполне можем ожидать появления предложения следующего вида: «Если мы имеем формулу φ в качестве посылки, то имеем формулу ψ в качестве следствия». В этом предложении импликация представляет отношение выводимости (которое обычно обозначается символом $\vdash$), существующее в логике. Совокупность всех таких предложений языка, видимо, имеет свою логику. В этой работе мы попробуем приблизиться к этой логике и исследуем, какими же свойствами должны обладать логики, в которых импликация представляет отношение выводимости.

Рассмотрим следующую модель пропозиционального языка. Пусть V — счетное множество символов, называемых *пропозициональными переменными*, и Σ — не более чем счетное множество конечноместных функциональных символов, называемых *пропозициональными связками*. Пару $\langle V, \Sigma \rangle$ будем называть *пропозициональным алфавитом*. Всякий терм, построенный из символов алфавита $\langle V, \Sigma \rangle$, будем называть *формулой*. Языком S будем называть множество всех формул алфавита $\langle V, \Sigma \rangle$. Подстановку определим обычным образом, т. е. как гомоморфизм $\varepsilon : S \rightarrow S$, который является продолжением отображения $\varepsilon : V \rightarrow S$. Обозначим через $\mathbf{E}$ множество всех подстановок.

Функцию $C : 2^S \rightarrow 2^S$ будем называть *операцией присоединения следствий* над языком S , или, кратко, *следованием*, если для любых $X, Y \in 2^S$

$$A1. \quad X \subseteq C(X),$$

$$A2. C(X) = C(C(X)),$$

$$A3. X \subseteq Y \Rightarrow C(X) \subseteq C(Y),$$

A4. множество $C(\emptyset)$ замкнуто относительно подстановки.

Следование C будем называть *структурным*, если для любой подстановки ε и любого множества формул X выполняется условие $\varepsilon(C(X)) \subseteq C(\varepsilon(X))$. Следование будем называть *финитарным*, если для любого X верно, что $C(X) = \bigcup_{Y \subseteq X} C(Y)$, где Y — конечное множество. Структурное и финитарное следование будем называть *стандартным*.

Пару $\langle S, C \rangle$, где C — структурная операция присоединения следствий, будем называть *пропозициональной логикой*, или, для краткости, *логикой*.

Любое подмножество $\rho \subseteq 2^S \times S$ будем называть *правилом*, а любой элемент этого подмножества будем называть *схемой*. Будем говорить, что правило ρ порождено схемой $\langle X, \alpha \rangle$, если $\rho = \{ \langle \varepsilon(X), \varepsilon(\alpha) \rangle \mid \varepsilon \in \mathbf{E} \}$. Такое правило будем обозначать $\rho_{X/\alpha}$ (или, если это не будет вызывать недоразумений, просто X/α) и называть *секвенцией*. Секвенцию $\emptyset/\alpha$ будем называть *тавтологией* и обозначать ее просто α .

Множество $X \in 2^S$ будем называть замкнутым относительно правила ρ , если для любого $Y \subseteq X$ и для любого $\alpha \in S$ верно, что если $\langle Y, \alpha \rangle \in \rho$, то и $\alpha \in X$. Будем говорить, что следование C базируется на множестве правил вывода R (символически обозначать $C = C_R$), если для любого $X \in 2^S$ множество $C(X)$ является наименьшим множеством, содержащим X и замкнутым относительно каждого правила из R . Для данного следования C множество $C(X)$ будем называть *теорией* со множеством аксиом X .

3 Некоторые свойства операции присоединения следствий

Множество следствий конечного множества $\{\alpha_1, \dots, \alpha_n\}$ будем обозначать $C(\alpha_1, \dots, \alpha_n)$. Множество следствий из множества $\{\alpha\} \cup X$ будем обозначать как $C(\alpha, X)$. Докажем некоторые свойства операции присоединения следствий.

ТЕОРЕМА 1. Если $\alpha \in C(X)$, то $C(\alpha, X) = C(X)$.

Доказательство. Так как $X \subseteq \{\alpha\} \cup X$, то в силу свойства A3 $C(X) \subseteq C(\alpha, X)$. Докажем обратное включение.

Заметим, что $\{\alpha\} \cup X \subseteq \{\alpha\} \cup C(X) = C(X)$ и значит верно, что $C(\alpha, X) \subseteq C(\{\alpha\} \cup C(X)) = C(C(X)) = C(X)$. Q.E.D.

ТЕОРЕМА 2. $Y \subseteq C(X) \Leftrightarrow C(Y) \subseteq C(X)$

Доказательство. $(\Rightarrow)$ Пусть $Y \subseteq C(X)$, тогда, в силу A2 и A3 верно, что $C(Y) \subseteq C(C(X)) = C(X)$.

$(\Leftarrow)$ Пусть $C(Y) \subseteq C(X)$. В силу A1 верно, что $Y \subseteq C(Y)$, тогда $Y \subseteq C(X)$. Q.E.D.

СЛЕДСТВИЕ 1. $\alpha \in C(X) \Leftrightarrow C(\alpha) \subseteq C(X)$

ТЕОРЕМА 3. $C(X) \cup C(Y) \subseteq C(X \cup Y)$

Доказательство. Так как $X \subseteq X \cup Y$ и $Y \subseteq X \cup Y$. Следовательно $C(X) \subseteq C(X \cup Y)$ и $C(Y) \subseteq C(X \cup Y)$. Таким образом $C(X) \cup C(Y) \subseteq C(X \cup Y)$. Q.E.D.

ТЕОРЕМА 4. $C(C(X) \cup C(Y)) = C(X \cup Y)$

Доказательство. Включение $C(C(X) \cup C(Y)) \subseteq C(X \cup Y)$ следует из предыдущей теоремы. Докажем обратное включение. Так как $X \subseteq C(X)$ и $Y \subseteq C(Y)$, то $X \cup Y \subseteq C(X) \cup C(Y)$. Q.E.D.

4 Хорошо определенная логика

Поскольку импликация в языке нашей логики должна выражать отношение выводимости из списка посылок, то язык должен содержать также связку, объединяющую посылки в список. Таким образом, будем рассматривать логики в языке, содержащем связки импликации $\rightarrow$ и конъюнкции $\wedge$. При этом предполагаем, что конъюнкция обладает свойствами коммутативности и ассоциативности. Поэтому посредством квазиформулы $\alpha_1 \wedge \dots \wedge \alpha_n$ будем обозначать конъюнкцию формул $\alpha_1, \dots, \alpha_n$, взятых в произвольном порядке и с произвольной (но правильной) расстановкой скобок, запись $[\alpha_1 \wedge \dots \wedge \alpha_n]$ будет означать множество всех таких конъюнкций. Запись $[\alpha_1 \wedge \dots \wedge \alpha_n \rightarrow \alpha]$

будет обозначать множество всех импликаций, в посылках которых стоят конъюнкции, соответствующие данной квазиформуле. Пусть X — некоторое конечное множество формул, посредством $X^\wedge$ будем обозначать некоторую конъюнкцию всех формул из этого множества.

Будем считать, что операция присоединения следствий C в нашем языке уже задана и к тому же согласована с импликацией и конъюнкцией следующим образом:

$$\text{В1. } [\alpha_1 \wedge \dots \wedge \alpha_n \rightarrow \alpha] \subseteq C(\emptyset) \Leftrightarrow \alpha \in C(\alpha_1, \dots, \alpha_n).$$

Верно следующее утверждение:

ТЕОРЕМА 5. *Условие В1 эквивалентно следующему множеству условий:*

С1. C — стандартное следование;

С2. $\alpha \rightarrow \beta \in C(\emptyset) \Leftrightarrow \beta \in C(\alpha)$;

С3. $C(\alpha \wedge \beta) = C(\alpha, \beta)$.

Для его доказательства нам потребуется следующая

ЛЕММА 1. *Пусть C — такое следование, что для него верно, что $C(\alpha \wedge \beta) = C(\alpha, \beta)$, тогда для него верны равенства $C((\alpha \wedge \beta) \wedge \gamma) = C(\alpha \wedge (\beta \wedge \gamma)) = C(\alpha, \beta, \gamma)$.*

Доказательство.

$$\begin{aligned} C((\alpha \wedge \beta) \wedge \gamma) &= C(\alpha \wedge \beta, \gamma) = C(C(\alpha \wedge \beta), C(\gamma)) = \\ &= C(C(\alpha, \beta), C(\gamma)) = C(\alpha, \beta, \gamma) = C(C(\alpha), C(\beta, \gamma)) = \\ &= C(C(\alpha), C(\beta \wedge \gamma)) = C(\alpha, \beta \wedge \gamma) = C(\alpha \wedge (\beta \wedge \gamma)). \end{aligned}$$

Q.E.D.

Доказательство. (Доказательство теоремы 5).

($\Rightarrow$) 1) Финитарность операции C следует из того, что $\alpha \in C(X)$ тогда и только тогда, когда существует такое конечное множество формул $\{\alpha_1, \dots, \alpha_n\} \subseteq X$, что $[\alpha_1 \wedge \dots \wedge \alpha_n \rightarrow \alpha] \subseteq C(\emptyset)$.

Поскольку множество $C(\emptyset)$ замкнуто относительно всех подстановок, то для любой подстановки ε верно, что если формула $\alpha_1 \wedge \dots \wedge \alpha_n \rightarrow \alpha \in C(\emptyset)$, то и $\varepsilon\alpha_1 \wedge \dots \wedge \varepsilon\alpha_n \rightarrow \varepsilon\alpha \in C(\emptyset)$.

Таким образом, для любой формулы α и любой подстановки ε верно, что если $\alpha \in C(X)$, то и $\varepsilon\alpha \in C(\varepsilon X)$. Откуда следует, что $\varepsilon C(X) \subseteq C(\varepsilon X)$.

2) Условие C2 совпадает с условием B1, при $n = 1$.

3) По условию B1:

$$\gamma \in C(\alpha, \beta) \Leftrightarrow [\alpha \wedge \beta \rightarrow \gamma] \subseteq C(\emptyset) \Leftrightarrow \gamma \in C(\alpha \wedge \beta).$$

($\Leftarrow$) Индукцией по $n \geq 1$ докажем, что из условий C1–C3 следует условие B1.

Базис очевиден. Пусть для $k = n - 1$ верно, что

$$\alpha \in C(\alpha_1, \dots, \alpha_k) \Leftrightarrow [\alpha_1 \wedge \dots \wedge \alpha_k \rightarrow \alpha] \subseteq C(\emptyset).$$

Таким образом, $C(\alpha_1, \dots, \alpha_{n-1}) = C(\alpha_1 \wedge \dots \wedge \alpha_{n-1})$.

Пусть $\alpha \in C(\alpha_1, \dots, \alpha_n)$. Поскольку верно следующее включение — $C(\alpha_1 \wedge \dots \wedge \alpha_{n-1}) \subseteq C(\alpha_1 \wedge \dots \wedge \alpha_{n-1}, \alpha_n)$, то $\{\alpha_1, \dots, \alpha_n\} \subseteq C(\alpha_1 \wedge \dots \wedge \alpha_{n-1}, \alpha_n)$. Следовательно, верно, что $C(\{\alpha_1, \dots, \alpha_n\}) \subseteq C(C(\alpha_1 \wedge \dots \wedge \alpha_{n-1}, \alpha_n))$. При этом в силу условия C3 и леммы 1, мы получаем следующее равенство $C(\alpha_1 \wedge \dots \wedge \alpha_{n-1}, \alpha_n) = C(\alpha_1 \wedge \dots \wedge \alpha_{n-1} \wedge \alpha_n)$. Также имеем, что $C(C(\alpha_1 \wedge \dots \wedge \alpha_{n-1}, \alpha_n)) = C(\alpha_1 \wedge \dots \wedge \alpha_{n-1}, \alpha_n)$. Поэтому $C(\alpha_1, \dots, \alpha_n) \subseteq C(\alpha_1 \wedge \dots \wedge \alpha_n)$. Таким образом, $\alpha \in C(\alpha_1 \wedge \dots \wedge \alpha_n)$ и, следовательно, в силу условия C2 верно, что $[\alpha_1 \wedge \dots \wedge \alpha_n \rightarrow \alpha] \subseteq C(\emptyset)$.

Пусть $[\alpha_1 \wedge \dots \wedge \alpha_n \rightarrow \alpha] \subseteq C(\emptyset)$ и, значит, $\alpha \in C(\alpha_1 \wedge \dots \wedge \alpha_n)$. Так как $\{\alpha_1, \dots, \alpha_{n-1}\} \subseteq \{\alpha_1, \dots, \alpha_n\}$, то следовательно $C(\alpha_1 \wedge \dots \wedge \alpha_{n-1}) \subseteq C(\alpha_1, \dots, \alpha_n)$. Таким образом, формула $\alpha_1 \wedge \dots \wedge \alpha_{n-1} \in C(\alpha_1, \dots, \alpha_n)$. Отсюда не сложно заметить следующее включение: $\{\alpha_1 \wedge \dots \wedge \alpha_{n-1}, \alpha_n\} \subseteq C(\alpha_1, \dots, \alpha_n)$. Следовательно, получаем, что $C(\alpha_1 \wedge \dots \wedge \alpha_n) \subseteq C(\alpha_1, \dots, \alpha_n)$.

Q.E.D.

Логика, следование в которой удовлетворяет условиям C1–C3, в работах Ризарда Вуйицкого ([1] и [2]) была названа *хорошо определенной логикой* (well-determined logic). Там же определено и понятие *дедуктивного множества формул*.

Далее следование в хорошо определенной логике мы будем называть *хорошо определенным следованием*.

5 Дедуктивные множества

Множество формул L будем называть *дедуктивным* тогда и только тогда, когда существует такая хорошо определенная логика C , что $C(\emptyset) = L$.

Формулы, содержащие в качестве связки только конъюнкцию, везде далее будем обозначать маленькими греческими буквами с индексом $\wedge$, например $\alpha^\wedge$. Множество пропозициональных переменных, входящих в формулу α , будем обозначать $Var(\alpha)$.

ЛЕММА 2. *Если множество L является дедуктивным, то оно удовлетворяет следующим условиям:*

1. Множество L замкнуто относительно всех подстановок.
2. Для любых формул $\alpha^\wedge$ и $\beta^\wedge$ верно, что если имеет место включение $Var(\beta^\wedge) \subseteq Var(\alpha^\wedge)$, то $\alpha^\wedge \rightarrow \beta^\wedge \in L$.
3. Множество L замкнуто относительно следующих правил вывода:

$$\begin{array}{lll}
 (TR) \frac{p \rightarrow q, q \rightarrow r}{p \rightarrow r} & (CM) \frac{p_1 \rightarrow q_1, p_2 \rightarrow q_2}{p_1 \wedge p_2 \rightarrow q_1 \wedge q_2} & (AD) \frac{p, q}{p \wedge q} \\
 (CV) \frac{p, p \wedge q \rightarrow r}{q \rightarrow r} & (MP) \frac{p, p \rightarrow q}{q} & (EA) \frac{p \rightarrow q}{p \wedge r \rightarrow q}.
 \end{array}$$

Доказательство. Пусть множество L дедуктивно, значит, существует такое хорошо определенное стандартное следование C , что $C(\emptyset) = L$.

1. Поскольку C — структурное, то множество $C(\emptyset) = L$ замкнуто относительно всех подстановок.

2. В силу леммы 1 и свойства СЗ верны следующие равенства: $C(\alpha^\wedge) = C(Var(\alpha^\wedge))$ и $C(\beta^\wedge) = C(Var(\beta^\wedge))$. Тогда, если $Var(\beta^\wedge) \subseteq Var(\alpha^\wedge)$, то, следовательно, $C(Var(\beta^\wedge)) \subseteq C(Var(\alpha^\wedge))$ и значит $C(\beta^\wedge) \subseteq C(\alpha^\wedge)$. Таким образом, $\beta^\wedge \in C(\alpha^\wedge)$, откуда следует, что $\alpha^\wedge \rightarrow \beta^\wedge \in C(\emptyset)$.

3. (TR) Пусть $p \rightarrow q \in C(\emptyset)$ и $q \rightarrow r \in C(\emptyset)$. Значит $q \in C(p)$ и $r \in C(q)$. Так как по следствию 1 $C(q) \subseteq C(p)$, то $r \in C(p)$ и, следовательно, $p \rightarrow r \in C(\emptyset)$.

(СМ) Пусть $p_1 \rightarrow q_1 \in C(\emptyset)$ и $p_2 \rightarrow q_2 \in C(\emptyset)$, тогда $q_1 \in C(p_1)$ и $q_2 \in C(p_2)$. Так как $\{p_1\} \subseteq \{p_1, p_2\}$, $\{p_2\} \subseteq \{p_1, p_2\}$ и, по теореме 5, $C(p_1, p_2) = C(p_1 \wedge p_2)$, то верно, что $C(p_1) \subseteq C(p_1 \wedge p_2)$ и $C(p_2) \subseteq C(p_1 \wedge p_2)$. Таким образом, множество $\{q_1, q_2\} \subseteq C(p_1 \wedge p_2)$. Тогда, по теореме 2, $C(q_1, q_2) \subseteq C(p_1 \wedge p_2)$. Отсюда следует, что $C(q_1 \wedge q_2) \subseteq C(p_1 \wedge p_2)$, и, в силу указанного выше следствия, $q_1 \wedge q_2 \in C(p_1 \wedge p_2)$. Следовательно, $p_1 \wedge p_2 \rightarrow q_1 \wedge q_2 \in C(\emptyset)$.

(СV) Пусть $p \in C(\emptyset)$ и $p \wedge q \rightarrow r \in C(\emptyset)$. В силу свойства АЗ из первого следует, что $p \in C(q)$, и, значит, по теореме 1, $C(p, q) = C(q)$. Из второго условия следует, что $r \in C(p, q)$. Таким образом, $r \in C(q)$ и, значит, $q \rightarrow r \in C(\emptyset)$.

(МР) Пусть $p \in C(\emptyset)$ и $p \rightarrow q \in C(\emptyset)$. Таким образом, $q \in C(p)$ и $C(p) \subseteq C(\emptyset)$. Значит, $q \in C(\emptyset)$.

(АD) Пусть $p \in C(\emptyset)$ и $q \in C(\emptyset)$. Тогда, по свойствам А2 и АЗ, получаем, что $C(p, q) \subseteq C(\emptyset)$, а, значит, и $C(p \wedge q) \subseteq C(\emptyset)$. Таким образом, $p \wedge q \in C(\emptyset)$.

(ЕА) Пусть $p \rightarrow q \in C(\emptyset)$. Таким образом, $q \in C(p)$. Так как $\{p\} \subseteq \{p, r\}$, то $C(p) \subseteq C(p, r)$ и, значит, $q \in C(p, r)$. Следовательно, $p \wedge r \rightarrow q \in C(\emptyset)$. Q.E.D.

Пусть L — непустое множество формул. Посредством $\vec{L}$ обозначим одноместную операцию на множестве 2^S , которую определим следующим образом:

$$(1) \quad \alpha \in \vec{L}(X) \Leftrightarrow \exists \alpha_1, \dots, \alpha_n \in X \cup L (\alpha_1 \wedge \dots \wedge \alpha_n \rightarrow \alpha \in L).$$

Пусть X — некоторое множество, посредством R_X будем обозначать множество всех правил вывода, относительно которых множество X замкнуто.

ТЕОРЕМА 6. Пусть L — некоторое множество формул, замкнутое относительно подстановки, для которого верно, что $\{\alpha^\wedge \rightarrow \beta^\wedge \mid \text{Var}(\beta^\wedge) \subseteq \text{Var}(\alpha^\wedge)\} \subseteq L$ и $\{(TR), (CM)\} \subseteq R_L$. Тогда $\vec{L}$ является стандартным следованием, причем $L \subseteq \vec{L}(\emptyset)$.

Доказательство. Докажем, что $\vec{L}$ является операцией присоединения следствий.

(А1) Пусть $\alpha \in X$, так как $\alpha \rightarrow \alpha \in L$, то, по (1), $\alpha \in \vec{L}(X)$.

(А3) Пусть $X \subseteq Y$. Если $\alpha \in \vec{L}(X)$, то, по условию (1), $\exists \alpha_1, \dots, \alpha_n \in X \cup L (\alpha_1 \wedge \dots \wedge \alpha_n \rightarrow \alpha \in L)$. Так как $X \subseteq Y$, то $\alpha_1, \dots, \alpha_n \in Y \cup L$ и, значит, $\alpha \in \vec{L}(Y)$.

(A2) Включение $\vec{L}(X) \subseteq \vec{L}(\vec{L}(X))$ следует из A1. Докажем обратное включение.

Пусть формула $\alpha \in \vec{L}(\vec{L}(X))$, тогда в силу условия (1) верно, что $\exists \alpha_1, \dots, \alpha_n \in L \cup \vec{L}(X) (\alpha_1 \wedge \dots \wedge \alpha_n \rightarrow \alpha \in L)$.

Заметим, что если $\alpha \in L$, то, так как $\alpha \rightarrow \alpha \in L$, имеем $\alpha \in \vec{L}(\emptyset)$. Следовательно, $L \subseteq \vec{L}(\emptyset)$ и, значит, $L \cup \vec{L}(X) = \vec{L}(X)$.

Таким образом, для любого $1 \leq i \leq n$, верно, что $\alpha_i \in \vec{L}(X)$ и, значит, в силу (1), существуют формулы $\alpha_{i1}, \dots, \alpha_{im_i} \in L \cup X$ такие, что $\alpha_{i1} \wedge \dots \wedge \alpha_{im_i} \rightarrow \alpha_i \in L$.

Введем следующие обозначения. Положим $\beta_i = \alpha_{i1} \wedge \dots \wedge \alpha_{im_i}$, $\beta^1 = \beta_1$, $\alpha^1 = \alpha_1$ и для любого $1 \leq k \leq n-1$, $\beta^{k+1} = \beta^k \wedge \beta_{k+1}$ и $\alpha^{k+1} = \alpha^k \wedge \alpha_{k+1}$.

Применяем (CM). Для любого $1 \leq k \leq n-1$:

$$\frac{\beta^k \rightarrow \alpha^k, \beta_{k+1} \rightarrow \alpha_{k+1}}{\beta^{k+1} \rightarrow \alpha^{k+1}}.$$

Затем применяем (TR):

$$\frac{\beta^n \rightarrow \alpha^n, \alpha^n \rightarrow \alpha}{\beta^n \rightarrow \alpha}.$$

Таким образом, формула $\beta^n \rightarrow \alpha \in L$. Поскольку при этом верно, что $\{\alpha_{11}, \dots, \alpha_{1m_1}, \dots, \alpha_{n1}, \dots, \alpha_{nm_n}\} \subseteq X \cup L$, то $\alpha \in \vec{L}(X)$. Следовательно $\vec{L}(\vec{L}(X)) \subseteq \vec{L}(X)$ и, значит, $\vec{L}(X) = \vec{L}(\vec{L}(X))$.

Чтобы доказать стандартность следования $\vec{L}$, докажем сначала его структурность.

Пусть $\alpha \in \varepsilon\vec{L}(X)$, тогда существует такая формула β , что $\alpha = \varepsilon\beta$, и существуют формулы $\alpha_1, \dots, \alpha_n \in L \cup X$ такие, что формула $\alpha_1 \wedge \dots \wedge \alpha_n \rightarrow \beta \in L$. Так как множество L замкнуто относительно любой подстановки, то $\varepsilon\alpha_1 \wedge \dots \wedge \varepsilon\alpha_n \rightarrow \varepsilon\beta \in L$. Поскольку при этом $\varepsilon\alpha_1, \dots, \varepsilon\alpha_n \in L \cup \varepsilon X$, то $\alpha = \varepsilon\beta \in \vec{L}(\varepsilon X)$. Таким образом, $\varepsilon\vec{L}(X) \subseteq \vec{L}(\varepsilon X)$.

Остается доказать финитарность. Пусть $\alpha \in \vec{L}(X)$, тогда, по условию (1), $\exists \alpha_1, \dots, \alpha_n \in L \cup X (\alpha_1 \wedge \dots \wedge \alpha_n \rightarrow \alpha \in L)$. Пусть $Y = \{\alpha_1, \dots, \alpha_n\} \cap X$. По условию (1) получаем, что $\alpha \in \vec{L}(Y)$, так как $\exists \alpha_1, \dots, \alpha_n \in L \cup Y (\alpha_1 \wedge \dots \wedge \alpha_n \rightarrow \alpha \in L)$. Заметим, что множество Y является конечным подмножеством множества X .

Q.E.D.

Далее операцию $\vec{L}$, определенную для множества L , удовлетворяющего условиям теоремы 6, будем называть *импликативным следованием над множеством L* .

ЛЕММА 3. Пусть L — некоторое множество формул, для которого выполнены условия теоремы 6. Для следования $\vec{L}$ верно, что $\vec{L}(\emptyset) = L$, если $\{(AD), (MP)\} \subseteq R_L$.

Доказательство. Включение $L \subseteq \vec{L}(\emptyset)$ доказано в теореме 6, докажем обратное включение. Пусть $\alpha \in \vec{L}(\emptyset)$, следовательно существуют формулы $\alpha_1, \dots, \alpha_n \in L$ такие, что формула $\alpha_1 \wedge \dots \wedge \alpha_n \rightarrow \alpha \in L$. Применяя $n - 1$ раз правило (AD), получим, что $\alpha_1 \wedge \dots \wedge \alpha_n \in L$ и, следовательно, по правилу (MP), $\alpha \in L$.
Q.E.D.

ТЕОРЕМА 7. Пусть L — некоторое множество формул. Операция $\vec{L}$ является хорошо определенным следованием, для которого $\vec{L}(\emptyset) = L$, если и только если

L замкнуто относительно подстановки,

$$\{\alpha^\wedge \rightarrow \beta^\wedge \mid \text{Var}(\beta^\wedge) \subseteq \text{Var}(\alpha^\wedge)\} \subseteq L \text{ и}$$

$$\{(TR), (CM), (AD), (MP), (CV), (EA)\} \subseteq R_L.$$

Доказательство. ($\Rightarrow$) Следует из леммы 2.

($\Leftarrow$) Докажем, что $\vec{L}$ является следованием хорошо определенной логики.

(C1) Что $\vec{L}$ является стандартным следованием, для которого $\vec{L}(\emptyset) = L$, доказано в теореме 6 и лемме 3.

(C2) ($\Leftarrow$) Пусть $\alpha \in \vec{L}(\beta)$, тогда существуют такие формулы $\alpha_1, \dots, \alpha_n \in L \cup \{\beta\}$, что $\alpha_1 \wedge \dots \wedge \alpha_n \rightarrow \alpha \in L$.

Возможны два случая.

1) Формула $\beta \notin \{\alpha_1, \dots, \alpha_n\}$. Так как $\alpha_1 \wedge \dots \wedge \alpha_n \rightarrow \alpha \in L$, то, используя правило (EA), получаем, что $\alpha_1 \wedge \dots \wedge \alpha_n \wedge \beta \rightarrow \alpha \in L$.

2) Для некоторого $1 \leq i \leq n$ формула $\beta = \alpha_i$. Заметим, что поскольку $\{\alpha^\wedge \rightarrow \beta^\wedge \mid \text{Var}(\beta^\wedge) \subseteq \text{Var}(\alpha^\wedge)\} \subseteq L$ и множество L замкнуто относительно подстановки и правила (TR), то если верно, что $\alpha_1 \wedge \dots \wedge \alpha_n \rightarrow \alpha \in L$, то верно и $[\alpha_1 \wedge \dots \wedge \alpha_n \rightarrow \alpha] \subseteq L$. Тогда получаем, что

$$(\alpha_1 \wedge (\dots \wedge (\alpha_{i-1} \wedge (\alpha_{i+1} \wedge (\dots \wedge (\alpha_n \wedge \beta) \dots)) \rightarrow \alpha \in L.$$

Теперь применением в обоих случаях соответствующего числа раз правила (CV) получим, что $\beta \rightarrow \alpha \in L$.

($\Rightarrow$) Пусть $\beta \rightarrow \alpha \in L$, тогда из определения операции $\vec{L}$ следует, что $\alpha \in \vec{L}(\beta)$.

(C3) ($\Leftarrow$) Пусть формула $\alpha \in \vec{L}(\beta, \gamma)$, тогда существуют такие формулы $\alpha_1, \dots, \alpha_n \in L \cup \{\beta, \gamma\}$, что $\alpha_1 \wedge \dots \wedge \alpha_n \rightarrow \alpha \in L$. Возможны следующие случаи.

1) Множество $\{\beta, \gamma\} \not\subseteq \{\alpha_1, \dots, \alpha_n\}$. Значит, $\alpha_1, \dots, \alpha_n \in L$ и тогда, применяя правила (AD) и (MP), получим, что $\alpha \in \vec{L}(\emptyset)$. Поскольку $\vec{L}(\emptyset) \subseteq \vec{L}(\beta \wedge \gamma)$, то $\alpha \in \vec{L}(\beta \wedge \gamma)$.

2) Для некоторого $1 \leq i \leq n$ формула $\beta = \alpha_i$ и $\gamma \notin \{\alpha_1, \dots, \alpha_n\}$, тогда, как замечено для аналогичного случая выше, получаем, что $(\alpha_1 \wedge (\dots \wedge (\alpha_{i-1} \wedge (\alpha_{i+1} \wedge (\dots \wedge (\alpha_n \wedge \beta) \dots)) \rightarrow \alpha \in L$. Применяя соответствующее число раз правило (CV), получим, что $\beta \rightarrow \alpha \in L$. Откуда, применяя правило (EA), получаем, что $\beta \wedge \gamma \rightarrow \alpha \in L$. Тогда, по определению, $\alpha \in \vec{L}(\beta \wedge \gamma)$.

3) Случай, когда для некоторого $1 \leq i \leq n$ формула $\gamma = \alpha_i$ и $\beta \notin \{\alpha_1, \dots, \alpha_n\}$ доказывается аналогично.

4) Пусть $\{\beta, \gamma\} \subseteq \{\alpha_1, \dots, \alpha_n\}$, как и выше, отсюда следует, что $(\alpha_1 \wedge (\dots \wedge (\beta \wedge \gamma) \dots)) \rightarrow \alpha \in L$. Применяя соответствующее число раз правило (CV), получим, что $\beta \wedge \gamma \rightarrow \alpha \in L$.

($\Rightarrow$) Пусть $\alpha \in \vec{L}(\beta \wedge \gamma)$, в силу доказанного выше пункта C2, получаем, что $\beta \wedge \gamma \rightarrow \alpha \in L$, и, значит, по определению операции $\vec{L}$, имеем, что $\alpha \in \vec{L}(\beta, \gamma)$.

Таким образом, $\vec{L}(\beta, \gamma) = \vec{L}(\beta \wedge \gamma)$.

Q.E.D.

Из леммы 2 и теоремы 7 непосредственно следует критерий дедуктивности множества формул.

ТЕОРЕМА 8. *Множество L является дедуктивным тогда и только тогда, когда оно удовлетворяет следующим условиям:*

D1. *Множество L замкнуто относительно всех подстановок.*

D2. $\{\alpha^\wedge \rightarrow \beta^\wedge \mid \text{Var}(\beta^\wedge) \subseteq \text{Var}(\alpha^\wedge)\} \subseteq L$;

D3. $\{(TR), (CM), (AD), (MP), (CV), (EA)\} \subseteq R_L$.

Заметим, что таким образом минимальное дедуктивное множество, которое мы будем обозначать буквой W , можно определить как множество всех формул, выводимых в исчислении со

множеством тавтологий $\{\alpha^\wedge \rightarrow \beta^\wedge \mid \text{Var}(\beta^\wedge) \subseteq \text{Var}(\alpha^\wedge)\}$ и правилами вывода (TR), (CM), (AD), (MP), (CV) и (EA).

6 Единственность хорошо определенного следования

Введем следующие определения.

Пусть C_1 и C_2 — некоторые следования над одним и тем же языком. Эти следования не совпадают, если существует такое множество X , что $C_1(X) \neq C_2(X)$. Будем говорить, что следование C_1 *не сильнее* следования C_2 , если для любого множества X верно, что $C_1(X) \subseteq C_2(X)$. Если имеет место тот факт, что C_1 не сильнее C_2 и $C_1 \neq C_2$, то будем говорить, что C_1 *слабее* C_2 и C_2 *сильнее* C_1 и обозначать эти факты $C_1 < C_2$ и $C_2 > C_1$ соответственно.

Верна следующая

ТЕОРЕМА 9. Пусть L — дедуктивное множество. Хорошо определенное следование C такое, что $C(\emptyset) = L$ является единственным и совпадает с импликативным следованием $\vec{L}$ над множеством L .

Доказательство. Пусть C — некоторое хорошо определенное следование такое, что $C(\emptyset) = L$. Докажем, что оно совпадает с импликативным следованием $\vec{L}$, откуда и будет следовать единственность такого следования.

Пусть $C \neq \vec{L}$, тогда либо $\vec{L} < C$, либо $C < \vec{L}$, либо C несравнимо с $\vec{L}$.

Пусть $\vec{L} < C$, тогда существуют такое множество X , что $\vec{L}(X) \subset C(X)$, а значит, и такая формула α , что $\alpha \in C(X)$ и $\alpha \notin \vec{L}(X)$. Поскольку C — финитарное, то, следовательно, существует такое конечное множество $Y \subseteq X$, что $\alpha \in C(Y)$, причем $\alpha \notin \vec{L}(Y)$. Так как C — хорошо определенное следование, то $Y^\wedge \rightarrow \alpha \in C(\emptyset) = L$, тогда, по определению импликативного следования, $\alpha \in \vec{L}(Y)$. Противоречие.

Пусть $C < \vec{L}$, тогда существует такое множество X , что $C(X) \subset \vec{L}(X)$, а значит, и такая формула α , что $\alpha \notin C(X)$ и $\alpha \in \vec{L}(X)$. Из последнего следует, что существует конечное множество формул $Y = \{\alpha_1, \dots, \alpha_n\} \subseteq X \cup L$, причем такое, что $\alpha_1 \wedge \dots \wedge \alpha_n \rightarrow \alpha \in L$. Введем следующие обозначения. Посредством Z_L обозна-

чим конъюнкцию всех формул из множества $Y \cap L$. Положим $Z = Y \setminus L \subseteq X$. В силу теоремы 8 имеем, что $Z_L \wedge Z^\wedge \rightarrow \alpha \in L$ и $Z^\wedge \rightarrow \alpha \in L$. Так как $Z \subseteq X$ и $L = C(\emptyset)$, то $\alpha \in C(X)$. Противоречие.

Пусть C и $\vec{L}$ несравнимы друг с другом, тогда существуют такие множества X и Y и такие формулы α и β , что $\alpha \in C(X)$ и $\alpha \notin \vec{L}(X)$, и $\beta \notin C(X)$ и $\beta \in \vec{L}(X)$. Далее доказательство аналогично доказательствам для случаев, приведенных выше.

Таким образом, $C = \vec{L}$.

Q.E.D.

7 Хорошо определенные логики и теорема о дедукции

Заметим, что тот факт, что $\alpha \in C(\beta)$, означает, что формулы α и β находятся над данной логикой в отношении выводимости, что в более привычных обозначениях записывается как $\alpha \vdash \beta$. Тогда условие (C2) теоремы 5 запишется знакомым образом

$$\alpha \vdash \beta \Leftrightarrow \vdash \alpha \rightarrow \beta.$$

Таким образом, условие (C2) есть не что иное, как слабый вариант теоремы о дедукции. Это означает, что теорема о дедукции должна рассматриваться не только как технический момент, упрощающий построение выводов, но и как сообщение о некоторой согласованности языка и логики этого языка. А именно как сообщение о том, что язык обладает некоторыми средствами, позволяющими высказываться о логике этого же языка.

Если для логики верна теорема о дедукции в слабой ее форме, то будем говорить, что *логика обладает слабым дедуктивным свойством* или является *слабо-дедуктивной*.

Из теорем 8 и 9 следует

ТЕОРЕМА 10. *Минимальной логикой в языке, содержащем импликацию и конъюнкцию, обладающей слабым дедуктивным свойством, является логика с импликативным следованием $\vec{W}$ над множеством W .*

Минимальные логики с дедуктивным свойством исследовались В.А. Смирновым. В работе [3] им были представлены некоторые такие логики. Также, Х. Карри в книге [4] был приведен достаточный критерий для слабой дедуктивности некото-

рых логик. Однако в указанных работах рассматривались логики, для теорий которых постулировалась замкнутость относительно правила *modus ponens*, кроме того, логики найденные В.А. Смирновым обладают и сильным дедуктивным свойством. Таким образом, результаты Р. Вуйцицкого, а также автора данной работы являются обобщением дедуктивного свойства логик в несколько ином направлении.

Литература

- [1] *Wojcicki R.* Lectures on Propositional Calculi // www.studialogica.org/wojcicki
- [2] *Wojcicki R.* Lectures on Propositional Calculi // Wrocław: Ossolineum, 1984.
- [3] *Смирнов В.А.* Формальный вывод и логические исчисления. М., 1972.
- [4] *Хаскел Б. Карри* Основания математической логики. М., 1969.

О некоторых функциональных свойствах трехзначных матриц для классической логики

Л. Ю. ДЕВЯТКИН

ABSTRACT. In this paper a number of functional properties of implicative-negative three-valued logical matrices with the classical cosequence relation is described.

Ключевые слова: классическая пропозициональная логика, трехзначная логика, отношение логического следования, логические матрицы

В данной статье будет рассмотрен ряд трехзначных семантик для классической пропозициональной логики, построенных с помощью логических матриц.

Дадим ряд необходимых определений.

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 1 (Алфавит пропозиционального языка $L_{\supset \neg}$). Алфавиту пропозиционального языка $L_{\supset \neg}$ принадлежат только следующие символы: бинарная логическая связка $\supset$, унарная логическая связка $\neg$, пропозициональные переменные $p_1, p_2, p_3, \dots$, а также скобки.

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 2 ($L_{\supset \neg}$ -формула). Каждая пропозициональная переменная p_i есть $L_{\supset \neg}$ -формула. Если A — $L_{\supset \neg}$ -формула, то $\neg A$ есть $L_{\supset \neg}$ -формула. Если A и B — $L_{\supset \neg}$ -формулы, то $A \supset B$ есть $L_{\supset \neg}$ -формула. Ничто иное не $L_{\supset \neg}$ -формула.

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 3 (Логическая матрица). Будем называть логической матрицей $M = \langle U, F, D \rangle$, где U — непустое множество, D — непустое подмножество U , интерпретируемое как множество выделенных значений, F — множество операций, заданных на U .

Если не указано иное, будем рассматривать матрицы, в которых множество F содержит в точности одну бинарную и одну унарную базовые операции.

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 4 (Оценка $L_{\sup, \neg}$ -формулы в M). Оценку v произвольной $L_{\sup, \neg}$ -формулы A в M (символически — $|A|_v^M$) определим обычным образом: $|p|_v^M \in U$, если p есть пропозициональная переменная; если A и B есть $L_{\sup, \neg}$ -формулы, а $\rightarrow$ и $\sim$ есть соответственно бинарная и унарная базовые операции M , то $|A \supset B|_v^M = |A|_v^M \rightarrow |B|_v^M$, $|\neg A|_v^M = \sim |A|_v^M$.

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 5 (Логический закон). $L_{\sup, \neg}$ -формула A является законом в логической матрице M , е.т.е. $|A|_v^M \in D$ при каждой оценке v в M .

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 6 (Отношение логического следования). $L_{\sup, \neg}$ -формула B логически следует из множества посылок Γ в M (символически $\Gamma \models_M B$), е.т.е. не существует оценки v в M , при которой все формулы из Γ принимают выделенное значение, а формула B принимает невыделенное значение.

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 7 (Классическое отношение логического следования в M). Пусть логическая матрица $M_2 = \langle \{1, 0\}, \sup^+, \neg^+, \{1\} \rangle$ есть матрица для классической пропозициональной логики, а $\sup^+$ и $\neg^+$ определяются стандартными таблицами истинности для импликации и отрицания. Пусть $M_3 = \langle \{1, \frac{1}{2}, 0\}, \sup^*, \neg^*, \{1\} \rangle$ есть произвольная матрица с трехэлементным множеством-носителем, на котором заданы одна бинарная и одна унарная базовые операции. Будем говорить, что *отношение логического следования в M_3 является классическим*, если и только если выполняется следующее условие: $\Gamma \models_{M_2} B$, е.т.е. $\Gamma \models_{M_3} B$.

Можно доказать следующую теорему [2]:

ТЕОРЕМА 1. *Отношение логического следования в M_3 является классическим, только когда базовые связки M_3 отвечают следующим условиям: $x \supset^* y = 1$, е.т.е. $x \in \{\frac{1}{2}, 0\}$ или $y = 1$, в противном случае $x \supset^* y \in \{\frac{1}{2}, 0\}$; $\neg^* x = 1$, е.т.е. $x \in \{\frac{1}{2}, 0\}$, в противном случае $\neg^* x \in \{\frac{1}{2}, 0\}$.*

Существует восемь наборов связок, отвечающих данному условию:

$\supset^\alpha$	1	$\frac{1}{2}$	0
1	1	0	0
$\frac{1}{2}$	1	1	1
0	1	1	1

	$\neg^\epsilon$
1	0
$\frac{1}{2}$	1
0	1

					-----------------	---	---------------	---		$\supset^\beta$	1	$\frac{1}{2}$	0		1	1	$\frac{1}{2}$	0		$\frac{1}{2}$	1	1	1		0	1	1	1					---------------	-----------------			$\neg^\epsilon$		1	0		$\frac{1}{2}$	1		0	1			$\supset^\gamma$	1	$\frac{1}{2}$	0
1	1	0	$\frac{1}{2}$																																																	
$\frac{1}{2}$	1	1	1																																																	
0	1	1	1																																																	

	$\neg^\epsilon$
1	0
$\frac{1}{2}$	1
0	1

					------------------	---	---------------	---------------		$\supset^\delta$	1	$\frac{1}{2}$	0		1	1	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{2}$		$\frac{1}{2}$	1	1	1		0	1	1	1					---------------	-----------------			$\neg^\epsilon$		1	0		$\frac{1}{2}$	1		0	1			$\supset^\alpha$	1	$\frac{1}{2}$	0
1	1	0	0																																																	
$\frac{1}{2}$	1	1	1																																																	
0	1	1	1																																																	

	$\neg^\varphi$
1	$\frac{1}{2}$
$\frac{1}{2}$	1
0	1

					-----------------	---	---------------	---		$\supset^\beta$	1	$\frac{1}{2}$	0		1	1	$\frac{1}{2}$	0		$\frac{1}{2}$	1	1	1		0	1	1	1					---------------	----------------			$\neg^\varphi$		1	$\frac{1}{2}$		$\frac{1}{2}$	1		0	1			$\supset^\gamma$	1	$\frac{1}{2}$	0
1	1	0	$\frac{1}{2}$																																																	
$\frac{1}{2}$	1	1	1																																																	
0	1	1	1																																																	

	$\neg^\varphi$
1	$\frac{1}{2}$
$\frac{1}{2}$	1
0	1

 | | | | | |------------------|---|---------------|---------------| | $\supset^\delta$ | 1 | $\frac{1}{2}$ | 0 | | 1 | 1 | $\frac{1}{2}$ | $\frac{1}{2}$ | | $\frac{1}{2}$ | 1 | 1 | 1 | | 0 | 1 | 1 | 1 | | | | |---------------|----------------| | | $\neg^\varphi$ | | 1 | $\frac{1}{2}$ | | $\frac{1}{2}$ | 1 | | 0 | 1 | |

Таким образом, может быть построено восемь логических матриц с трехэлементным множеством-носителем, в которых отношение логического следования является классическим. Обозначим их соответственно как $M_3^{\alpha,\epsilon}$, $M_3^{\beta,\epsilon}$, $M_3^{\gamma,\epsilon}$, $M_3^{\delta,\epsilon}$, $M_3^{\alpha,\varphi}$, $M_3^{\beta,\varphi}$, $M_3^{\gamma,\varphi}$, $M_3^{\delta,\varphi}$. Некоторые из перечисленных связок достаточно известны. Так, первый набор связок — это внешние импликация и отрицание трехзначной логики Бочвара **B₃** [1]. Связка $\supset^\beta$ была независимо описана в целом ряде работ [4, 5, 6].

Как известно (см., например, [3]), классические импликация и отрицание образуют функционально полную систему связок, т. е. с их помощью может быть выражена любая функция, заданная на $\{1, 0\}$. Интересно, что в случае с приведенными выше наборами связок ситуация совершенно иная.

УТВЕРЖДЕНИЕ 1. *Используя базовые операции $M_3^{\alpha,\epsilon}$ и $M_3^{\delta,\varphi}$, нельзя выразить никакие иные из описанных нами связок.*

Доказательство. Ясно, что любая функция, выражимая в данных матрицах, имеет область значения $\{1, 0\}$ или $\{1, \frac{1}{2}\}$ соответственно. Однако это неверно для остальных матриц. Q.E.D.

УТВЕРЖДЕНИЕ 2. В $M_3^{\beta, \epsilon}$ выразимы связки $M_3^{\alpha, \epsilon}$ и не выразимы базовые связки остальных матриц.

Доказательство. Импликация из $M_3^{\alpha, \epsilon}$ выражается следующим образом: $x \supset^\alpha y = \neg^\epsilon \neg^\epsilon (x \supset^\beta y)$. В то же время все функции $M_3^{\beta, \epsilon}$ имеют область значений $\{1, 0\}$ при ограничении значений переменных тем же множеством. Однако это неверно для остальных матриц. Q.E.D.

УТВЕРЖДЕНИЕ 3. В $M_3^{\beta, \varphi}$ выразимы связки $M_3^{\delta, \varphi}$ и не выразимы базовые связки остальных матриц.

Доказательство. Импликация из $M_3^{\delta, \varphi}$ выражается аналогично предыдущему случаю: $x \supset^\delta y = \neg^\varphi \neg^\varphi (x \supset^\beta y)$.

Покажем, что через базовые операции $M_3^{\beta, \varphi}$ нельзя выразить унарный оператор f^1 , такой, что $f^1(1) = 0$.

Индуктивное допущение. Пусть f^1 нельзя выразить в $M_3^{\beta, \varphi}$, используя менее k вхождений $\supset^\beta$ и $\neg^\varphi$.

Теперь допустим, что f^1 можно выразить посредством суперпозиции g операций $\supset^\beta$ и $\neg^\varphi$, содержащей в точности k вхождений данных операций.

Случай 1. $g(x) = \neg^\varphi h(x)$. Тогда $\neg^\varphi h(1) = 0$. Однако это невозможно в силу определения $\neg^\varphi$.

Случай 2. $g(x) = h'(x) \supset^\beta h''(x)$.

1. $h'(1) \supset^\beta h''(1) = 0$ (по условию)
2. $h'(1) = 1$ и $h''(1) = 0$ (по определению $\supset^\beta$)
3. $h''(1) = 0$. Число вхождений $\supset^\beta$ и $\neg^\varphi$ в h'' меньше k . противоречие с индуктивным допущением.

Индукция закончена. Оператор f^1 невыразим в $M_3^{\beta, \varphi}$.

Однако этот оператор выразим в остальных матрицах: $x \supset^\alpha \neg^\varphi x$ для $M_3^{\alpha, \varphi}$, $x \supset^\gamma \neg^\varphi x$ для $M_3^{\gamma, \varphi}$, $\neg^\epsilon x$ для остальных матриц.

Q.E.D.

УТВЕРЖДЕНИЕ 4. $M_3^{\delta, \epsilon}$ функционально эквивалентна $M_3^{\alpha, \varphi}$. В этих матрицах выразимы базовые операции $M_3^{\alpha, \epsilon}$ и $M_3^{\delta, \varphi}$ и не выразимы базовые операции $M_3^{\beta, \epsilon}$, $M_3^{\beta, \varphi}$, $M_3^{\gamma, \epsilon}$ и $M_3^{\gamma, \varphi}$.

Доказательство. Функциональная эквивалентность $M_3^{\delta, \epsilon}$ и $M_3^{\alpha, \varphi}$ и выразимость базовых операций $M_3^{\alpha, \epsilon}$ и $M_3^{\delta, \varphi}$:

- $x \supset^\alpha y = \neg^\epsilon \neg^\epsilon (x \supset^\delta y)$;
- $\neg^\varphi x = x \supset^\delta \neg^\epsilon x$;
- $x \supset^\delta y = \neg^\varphi \neg^\varphi (x \supset^\alpha y)$;
- $\neg^\epsilon x = x \supset^\alpha \neg^\varphi x$.

Теперь покажем, что через базовые операции $M_3^{\delta, \epsilon}$ нельзя выразить унарный оператор f^1 , такой, что $f^1(\frac{1}{2}) \neq f^1(0)$, содержащий не меньше одного вхождения базовой операции.

Индуктивное допущение. Пусть f^1 нельзя выразить в $M_3^{\delta, \epsilon}$, используя менее k ($k \geq 1$) вхождений $\supset^\delta$ и $\neg^\epsilon$.

Допустим, что f^1 можно выразить посредством суперпозиции g операций $\supset^\delta$ и $\neg^\epsilon$, содержащей в точности k вхождений данных операций.

Случай 1. Пусть $g(x) = \neg^\epsilon h(x)$

1. $\neg^\epsilon h(\frac{1}{2}) \neq \neg^\epsilon h(0)$ (по условию)
2. $h(x)$ содержит l ($0 < l < k$) вхождений базовых операций или $h(x)$ есть x (по условию)
3. Пусть $h(x)$ есть x (допущение)
4. $\neg^\epsilon \frac{1}{2} \neq \neg^\epsilon 0$ (из 1, 3)
5. $\neg^\epsilon \frac{1}{2} = \neg^\epsilon 0$ (по определению $\neg^\epsilon$)
6. $h(x)$ содержит l вхождений базовых операций (из 2–5)
7. $h(\frac{1}{2}) = h(0)$ (из 6 по индуктивному допущению)
8. $\neg^\epsilon h(\frac{1}{2}) = \neg^\epsilon h(0)$ (из 7 по определению $\neg^\epsilon$)
9. Неверно, что $g(x) = \neg^\epsilon h(x)$ (из 1, 8)

Случай 2. Пусть $g(x) = h'(x) \supset^\delta h''(x)$.

1. $h'(\frac{1}{2}) \supset^\delta h''(\frac{1}{2}) \neq h'(0) \supset^\delta h''(0)$ (по условию)

2. $h'(x)$ содержит l ($0 < l < k$) вхождений базовых операций или $h'(x)$ есть x (по условию)
3. $h''(x)$ содержит m ($0 < m < k$) вхождений базовых операций или $h''(x)$ есть x (по условию)
4. Пусть $h'(x)$ есть x и $h''(x)$ есть x (допущение)
5. $\frac{1}{2} \supset^\delta \frac{1}{2} \neq 0 \supset^\delta 0$ (из 1, 4)
6. $\frac{1}{2} \supset^\delta \frac{1}{2} = 0 \supset^\delta 0$ (по определению $\supset^\delta$)
7. Неверно, что $h'(x)$ есть x и $h''(x)$ есть x (из 5, 6)
8. Пусть $h'(x)$ содержит l вхождений и $h''(x)$ содержит m вхождений базовых операций.
9. $h'(\frac{1}{2}) = h'(0)$ (из 8 по индуктивному допущению)
10. $h''(\frac{1}{2}) = h''(0)$ (из 8 по индуктивному допущению)
11. $h'(\frac{1}{2}) \supset^\delta h''(\frac{1}{2}) = h'(0) \supset^\delta h''(0)$ (по определению $\supset^\delta$)
12. Неверно, что $h'(x)$ содержит l вхождений и $h''(x)$ содержит m вхождений базовых операций (из 1, 11).
13. Пусть $h'(x)$ содержит l вхождений базовых операций и $h''(x)$ есть x (допущение)
14. $h'(\frac{1}{2}) \supset^\delta (\frac{1}{2}) \neq h'(0) \supset^\delta (0)$ (из 1, 13)
15. $h'(\frac{1}{2}) \supset^\delta (\frac{1}{2}) = \frac{1}{2}$ и $h'(0) \supset^\delta (0) = 1$, или $h'(\frac{1}{2}) \supset^\delta (\frac{1}{2}) = 1$ и $h'(0) \supset^\delta (0) = \frac{1}{2}$ (из 14 по определению $\supset^\delta$)
16. Пусть $h'(\frac{1}{2}) \supset^\delta (\frac{1}{2}) = \frac{1}{2}$ и $h'(0) \supset^\delta (0) = 1$ (допущение)
17. $h'(\frac{1}{2}) = 1$ (из 16 по определению $\supset^\delta$)
18. $h'(0) \neq 1$ (из 16 по определению $\supset^\delta$)
19. $h'(\frac{1}{2}) \neq h'(0)$ (из 17, 18)
20. Неверно, что $h'(\frac{1}{2}) \supset^\delta (\frac{1}{2}) = \frac{1}{2}$ и $h'(0) \supset^\delta (0) = 1$ (из 19 и индуктивного допущения)

21. $h'(\frac{1}{2}) \supset^\delta (\frac{1}{2}) = 1$ и $h'(0) \supset^\delta (0) = \frac{1}{2}$ (из 15, 20)
22. $h'(\frac{1}{2}) \neq 1$ (из 21 по определению $\supset^\delta$)
23. $h'(0) = 1$ (из 21 по определению $\supset^\delta$)
24. $h'(\frac{1}{2}) \neq h'(0)$ (из 22, 23)
25. Неверно, что $h'(x)$ содержит l вхождений базовых операций и $h''(x)$ есть x (из 24 и индуктивного допущения)
26. Пусть $h'(x)$ есть x и $h''(x)$ содержит m вхождений базовых операций (допущение)
27. $\frac{1}{2} \supset^\delta h''(\frac{1}{2}) = \frac{1}{2}$ и $0 \supset^\delta h''(0) = 1$, или $\frac{1}{2} \supset^\delta h''(\frac{1}{2}) = 1$ и $0 \supset^\delta h''(0) = \frac{1}{2}$ (из 26 по определению $\supset^\delta$). Однако это невозможно в силу определения $\supset^\delta$.
28. Неверно, что $h'(x)$ есть x и $h''(x)$ содержит m вхождений базовых операций (из 27)
29. Неверно, что $g(x) = h'(x) \supset^\delta h''(x)$ (из 2, 3, 4, 12, 25, 28)

Таким образом, через базовые операции $M_3^{\delta, \epsilon}$ нельзя выразить унарный оператор f^1 , такой, что $f^1(\frac{1}{2}) \neq f^1(0)$, содержащий не меньше одного вхождения базовой операции.

Однако такой оператор выразим в $M_3^{\beta, \epsilon}$, $M_3^{\beta, \varphi}$, $M_3^{\gamma, \epsilon}$ и $M_3^{\gamma, \varphi}$:
 $(x \supset^\beta x) \supset^\beta x$, $(x \supset^\gamma x) \supset^\gamma x$. Q.E.D.

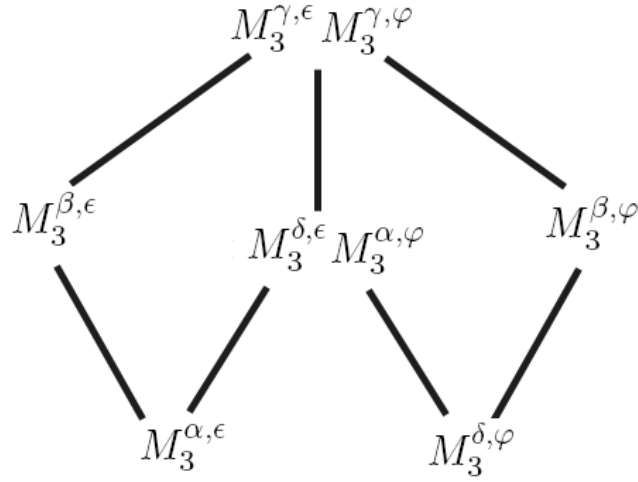
УТВЕРЖДЕНИЕ 5. $M_3^{\gamma, \epsilon}$ функционально эквивалентна $M_3^{\gamma, \varphi}$.
 В этих матрицах также выразимы базовые связки всех остальных матриц.

Доказательство. Чтобы доказать данное утверждение, достаточно следующих тождеств:

- $\neg^\varphi x = x \supset^\gamma \neg^\epsilon x$
- $\neg^\epsilon x = x \supset^\gamma \neg^\varphi x$
- $x \supset^\beta y = x \supset^\gamma (\neg^\varphi y \supset^\gamma y)$
- $x \supset^\delta y = \neg^\varphi \neg^\varphi (x \supset^\gamma y)$

Q.E.D.

Обобщая доказанные утверждения, можно заключить, что между матрицами $M_3^{\alpha,\epsilon}$, $M_3^{\beta,\epsilon}$, $M_3^{\gamma,\epsilon}$, $M_3^{\delta,\epsilon}$, $M_3^{\alpha,\varphi}$, $M_3^{\beta,\varphi}$, $M_3^{\gamma,\varphi}$, $M_3^{\delta,\varphi}$ имеет место порядок по отношению выразимости базовых связок. Причем, $M_3^{\gamma,\epsilon}$ функционально эквивалентна ей $M_3^{\gamma,\varphi}$ выступают в роли максимума, $M_3^{\alpha,\epsilon}$ и $M_3^{\delta,\varphi}$ есть несравнимые минимумы, а $M_3^{\beta,\epsilon}$, $M_3^{\beta,\varphi}$ и $M_3^{\delta,\epsilon}$, функционально эквивалентная $M_3^{\alpha,\varphi}$ представляют собой три несравнимых промежуточных элемента.



УТВЕРЖДЕНИЕ 6. Набор базовых операций $M_3^{\gamma,\epsilon}$ не является функционально полным в P_3 .

Доказательство. Покажем, что через операции $\neg^\epsilon$ и $\supset^\gamma$ невыразим унарный оператор $f^1(x)$, такой что $f^1(\frac{1}{2}) = 1$ и $f^1(0) = 0$.

Индуктивное допущение. Пусть f^1 нельзя выразить в $M_3^{\gamma,\epsilon}$, используя менее k вхождений $\supset^\gamma$ и $\neg^\epsilon$.

Теперь допустим, что f^1 можно выразить посредством суперпозиции g операций $\supset^\gamma$ и $\neg^\epsilon$, содержащей в точности k вхождений данных операций.

Случай 1. Пусть $g(x)$ есть $\neg^\epsilon h(x)$

1. $\neg^\epsilon h(\frac{1}{2}) = 1$ и $\neg^\epsilon h(0) = 0$ (по условию)

2. $h(\frac{1}{2}) \neq 1$ и $h(0) = 1$ (в силу определения $\neg^\epsilon$)
 3. $h(x)$ содержит по меньшей мере одну операцию и имеет вид $\neg^\epsilon h^*(x)$ или $h'(x) \supset^\gamma h''(x)$ (из 2)
 4. Пусть $h(x)$ имеет вид $\neg^\epsilon h^*(x)$ (допущение)
 5. $\neg^\epsilon h^*(\frac{1}{2}) \neq 1$ и $\neg^\epsilon h^*(0) = 1$ (из 2 и 4)
 6. $h^*(\frac{1}{2}) = 1$ и $h^*(0) = 0$ (из 5 по определению $\neg^\epsilon$). Однако это противоречит индуктивному допущению. Следовательно, неверно, что $h(x)$ имеет вид $\neg^\epsilon h^*(x)$.
 7. $h(x)$ имеет вид $h'(x) \supset^\gamma h''(x)$ (из 3 и 6)
 8. $h'(\frac{1}{2}) \supset^\gamma h''(\frac{1}{2}) \neq 1$ и $h'(0) \supset^\gamma h''(0) = 1$ (из 1, 7)
 9. $h'(\frac{1}{2}) = 1$ и $h''(\frac{1}{2}) \neq 1$ (из 8)
 10. $h'(0) \neq 1$ или $h''(0) = 1$ (из 8)
 11. Пусть $h'(0) \neq 1$ (Допущение)
 12. $\neg^\epsilon \neg^\epsilon h'(0) = 0$ (из 11 по определению $\neg^\epsilon$)
 13. $\neg^\epsilon \neg^\epsilon h'(\frac{1}{2}) = 1$ (из 9 по определению $\neg^\epsilon$)
 14. $\neg^\epsilon \neg^\epsilon h'(x)$ содержит менее k вхождений связок. Следовательно, неверно, что $h'(0) \neq 1$ (из 12, 13 и индуктивного допущения)
 15. $h''(0) = 1$ (из 10, 14)
 16. $\neg^\epsilon h''(0) = 0$ (из 15 по определению $\neg^\epsilon$)
 17. $\neg^\epsilon h''(\frac{1}{2}) = 1$ (из 9 по определению $\neg^\epsilon$)
 18. $\neg^\epsilon h''(x)$ содержит менее k вхождений связок. Неверно, что $g(x)$ есть $\neg^\epsilon h(x)$ (из 16, 17 и индуктивного допущения)
- Случай 2. Пусть $g(x)$ есть $h'(x) \supset^\gamma h''(x)$
1. $h'(\frac{1}{2}) \supset^\gamma h''(\frac{1}{2}) = 1$ и $h'(0) \supset^\gamma h''(0) = 0$ (по условию)
 2. $h'(0) = 1$ и $h''(0) = \frac{1}{2}$ (из 1 по определению $\supset^\gamma$)

3. $h'(\frac{1}{2}) \neq 1$ или $h''(\frac{1}{2}) = 1$ (из 1 по определению $\supset^\gamma$)
4. Пусть $h'(\frac{1}{2}) \neq 1$ (Допущение)
5. $\neg^\epsilon h'(\frac{1}{2}) = 1$ (из 4 по определению $\neg^\epsilon$)
6. $\neg^\epsilon h'(0) = 0$ (из 2 по определению $\neg^\epsilon$)
7. $\neg^\epsilon h'(x)$ содержит менее k вхождений операций. Таким образом, неверно, что $h'(\frac{1}{2}) \neq 1$ (из 5, 6 и индуктивного допущения)
8. $h''(\frac{1}{2}) = 1$ (из 3, 7)
9. $\neg^\epsilon \neg^\epsilon h''(\frac{1}{2}) = 1$ (из 8 по определению $\neg^\epsilon$)
10. $\neg^\epsilon \neg^\epsilon h''(0) = 0$ (из 2 по определению $\neg^\epsilon$)
11. $\neg^\epsilon \neg^\epsilon h''(x)$ содержит m ($m \leq k$) операций. Однако это противоречит индуктивному допущению и Случаю 1 настоящего доказательства.

Таким образом, набор базовых операций $M_3^{\gamma, \epsilon}$ не является функционально полным в P_3 . Q.E.D.

Мы показали, что различные трехэлементные матрицы с классическим отношением логического следования не только различаются по силе с функциональной точки зрения, но и образуют достаточно интересную структуру. Можно сделать вывод, что функциональная полнота системы базовых связок в импликативно-негативной логической матрице не является необходимым свойством классической логики высказываний.

В стандартной двузначной матрице классические конъюнкция и дизъюнкция обладают свойствами решеточных операторов. То есть они удовлетворяют следующим тождествам:

- *Идемпотентность*: $x \vee x = x$, $x \wedge x = x$;
- *Коммутативность*: $x \vee y = y \vee x$, $x \wedge y = y \wedge x$;
- *Ассоциативность*: $x \vee (y \vee z) = (x \vee y) \vee z$, $x \wedge (y \wedge z) = (x \wedge y) \wedge z$;

- *Поглощение*: $x \vee (x \wedge y) = x$, $x \wedge (x \vee y) = x$.

Так ли это для рассмотренных выше матриц? Выразим дизъюнкцию через импликацию и отрицание:

$$x \vee y = \neg x \supset y.$$

В зависимости от выбранных $\neg$ и $\supset$ может получиться одна из следующих связей.

$\vee^1$	1	$\frac{1}{2}$	0
1	1	1	1
$\frac{1}{2}$	1	0	0
0	1	0	0

$\vee^2$	1	$\frac{1}{2}$	0
1	1	1	1
$\frac{1}{2}$	1	$\frac{1}{2}$	0
0	1	$\frac{1}{2}$	0

$\vee^3$	1	$\frac{1}{2}$	0
1	1	1	1
$\frac{1}{2}$	1	0	$\frac{1}{2}$
0	1	0	$\frac{1}{2}$

$\vee^4$	1	$\frac{1}{2}$	0
1	1	1	1
$\frac{1}{2}$	1	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{2}$
0	1	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{2}$

Операции $\vee^1$ соответствуют $M_3^{\alpha,\epsilon}$ и $M_3^{\alpha,\varphi}$. Операции $\vee^2$ соответствуют $M_3^{\beta,\epsilon}$ и $M_3^{\beta,\varphi}$. Операции $\vee^3$ соответствуют $M_3^{\gamma,\epsilon}$ и $M_3^{\gamma,\varphi}$. Операции $\vee^4$ соответствуют $M_3^{\delta,\epsilon}$ и $M_3^{\delta,\varphi}$.

Теперь определим конъюнкцию через импликацию и отрицание:

$$x \wedge y = \neg(x \supset \neg y).$$

В зависимости от выбранных $\neg$ и $\supset$ возможны два варианта.

$\wedge^1$	1	$\frac{1}{2}$	0
1	1	0	0
$\frac{1}{2}$	0	0	0
0	0	0	0

$\wedge^2$	1	$\frac{1}{2}$	0
1	1	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{2}$
$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{2}$
0	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{2}$

Операции $\wedge^1$ соответствуют $M_3^{\alpha,\epsilon}$, $M_3^{\beta,\epsilon}$, $M_3^{\gamma,\epsilon}$, $M_3^{\delta,\epsilon}$. Операции $\wedge^2$ соответствуют $M_3^{\alpha,\varphi}$, $M_3^{\beta,\varphi}$, $M_3^{\gamma,\varphi}$, $M_3^{\delta,\varphi}$.

	$M_3^{\alpha,\epsilon}$	$M_3^{\beta,\epsilon}$	$M_3^{\gamma,\epsilon}$	$M_3^{\delta,\epsilon}$
$x \vee x = x$	—	+	—	—
$x \wedge x = x$	—	—	—	—
$x \vee y = y \vee x$	+	—	—	+
$x \wedge y = y \wedge x$	+	+	+	+
$x \vee (y \vee z) = (x \vee y) \vee z$	+	+	—	+
$x \wedge (y \wedge z) = (x \wedge y) \wedge z$	+	+	+	+
$x \vee (x \wedge y) = x$	—	—	—	—
$x \wedge (x \vee y) = x$	—	—	—	—

	$M_3^{\alpha,\varphi}$	$M_3^{\beta,\varphi}$	$M_3^{\gamma,\varphi}$	$M_3^{\delta,\varphi}$
$x \vee x = x$	—	+	—	—
$x \wedge x = x$	—	—	—	—
$x \vee y = y \vee x$	+	—	—	+
$x \wedge y = y \wedge x$	+	+	+	+
$x \vee (y \vee z) = (x \vee y) \vee z$	+	+	—	+
$x \wedge (y \wedge z) = (x \wedge y) \wedge z$	+	+	+	+
$x \vee (x \wedge y) = x$	—	—	—	—
$x \wedge (x \vee y) = x$	—	—	—	—

Таким образом, ни в одной из рассматриваемых матриц дизъюнкция и конъюнкция не обладают свойствами решеточных операторов.

Литература

- [1] Бочвар Д.А. Об одном трехзначном исчислении и его применении к анализу парадоксов классического расширенного функционального исчисления // Математический сборник. Т. 4, № 2. 1938. С. 287-308.
- [2] Девяткин Л.Ю. Многозначные изоморфы классической пропозициональной логики. Кандидатская диссертация на соискание ученой степени кандидата философских наук. М., 2008. С. 29.
- [3] Мендельсон Э. Введение в математическую логику. М., 1984. С. 33.
- [4] Avron A. Natural 3-valued logics — characterization and proof theory // The Journal of Symbolic Logic. Vol. 56. № 1. P. 276-294.
- [5] Monteiro A. Construction des algebres de Lukasiewicz trivalentes dans les algebres de Boole monadiques, I // Mathematica Japonica. Vol. 12. P. 1-23.
- [6] Stupecki J., Bryl J. and Prucnal T. Some remarks on the three-valued logic of J. Jukasiewicz // Studia Logica. Vol. 21. P. 45-70.

Две истины — одна логика¹

Д. В. ЗАЙЦЕВ, О. М. ГРИГОРЬЕВ

*Мы должны отличать вопрос
«Что есть истина?»
от совершенно другого вопроса
«Что является истинным?».
Ф. Рамсей*

ABSTRACT. In this paper we develop a new conception of two-component truth-values combining ontological and epistemological strands. In so doing we first present philosophical justification for this approach and then consider algebraic and semantical (valuational) systems of two-component truth.

Ключевые слова: обобщенные истинностные значения, релевантная логика первого уровня, логика Данна–Белнапа, двухкомпонентная истинность, редукция истинностных значений

1 От истины Дана–Белнапа к истине Шрамко–Ванзинга: обобщенные истинностные значения и функция мультиоценки

В современной философской логике все больший интерес вызывает проект обобщенных истинностных значений и соответствующих функций приписывания значений. Наиболее важные вехи развития этого проекта представлены известной «полезной» четырехзначной логикой Н. Белнапа для рассуждающего компьютера, [1, 2] и не менее полезной шестнадцатизначной логикой компьютерной сети Я. Шрамко и Г. Ванзинга [10]. В последнее время на страницах «Логических исследований» этой теме уделялось серьезное внимание (см., например, [16, 18]), однако для того чтобы сделать данную статью самодостаточной, мы

¹Работа поддержана РГНФ. Грант №10-03-00221а.

посчитали возможным предварить изложение наших идей кратким экскурсом в область обобщенных истинностных значений и функций оценки.

Несмотря на то что логика Белнапа получила широкую известность и со временем стала практически парадигмальной, исторически первая обобщенная релевантная логика была построена Дж. М. Данном в работе [4]. Данн исходил из идеи пресыщенных оценок и истинностно-значных провалов, когда одна и та же формула может принимать как оба традиционных значения «истина» и «ложь», так и ни одно из них. В результате получается четыре случая приписывания значений: два «нормальных», один пресыщенный и один с провалом значений. Два последних случая приписываний оказываются актуальными, когда необходимо иметь дело с противоречивой и неполной информацией соответственно. Именно поэтому свои новаторские идеи Данн развивал применительно к так называемой релевантной логике первого уровня (first-degree entailment, или **FDE**).

Существует несколько способов задания обобщенной функции приписывания значений, допускающей как провалы оценок, так и пресыщенные оценки. Для данной работы наиболее интересны два из них, принадлежащие Данну (см. также [5] и [6]) и Белнапу.

Первый способ связан с изменением трактовки функции приписывания значений, оценка понимается как функция, значениями которой являются не элементы множества $\{u, l\}$, а подмножества этого множества. Тогда указанные выше четыре случая приписывания значений произвольной формуле могут быть представлены следующим образом:

1. формуле в качестве значения приписано множество $\{u\}$;
2. формуле в качестве значения приписано множество $\{l\}$;
3. формуле в качестве значения приписано множество $\{u, l\}$;
4. в качестве значения приписано пустое множество $\emptyset$.

Такой подход позволяет говорить не только об обобщении множества истинностных значений через операцию взятия множества-степени, но и через обобщение самой функции приписывания. В работе [18] предложено называть такую функцию

«функцией мультиоценки». При этом следует иметь в виду, что даже случаи 1 и 2, кажущиеся, на первый взгляд, вполне классическими, тем не менее существенно отличаются от стандартных приписываний значений в классической пропозициональной логике. Отметим еще раз, классическая оценка предполагает приписывание формуле ровно одного элемента из множества $\{u, l\}$, в то время как мультиоценка ставит формуле в соответствие ровно одно подмножество этого множества. Таким образом:

- формула A истинна в классическом смысле, если и только если $v_c(A) = u$;
- формула A истинна в обобщенном смысле, если и только если $v_g(A) = \{u\}$,

где v_c — функция оценки в классической пропозициональной логике, а v_g — обобщенная функция мультиоценки.

Другой вариант обобщения классических значений истинности связан с известной парадигмой рассуждающего компьютера Н. Белнапа. По Белнапу, необходимо различать четыре случая (эпистемические ситуации), в которых оказывается компьютер, обрабатывающий поступающую к нему информацию.

1. Компьютеру была сообщена только истина, т. е. источники информации согласованно утверждают некоторое высказывание — этот случай компьютер Белнапа помечает значением **T**;
2. Компьютеру была сообщена только ложь, т. е. источники информации согласованно отрицают некоторое высказывание — этот случай компьютер Белнапа помечает значением **F**;
3. Компьютеру были сообщены истина и ложь одновременно, т. е. один источник информации утверждает, а другой отрицает некоторое высказывание — этот случай компьютер Белнапа помечает значением **B**;
4. Компьютеру не были сообщены ни истина, ни ложь, т. е. источники информации не передают компьютеру никакой информации относительно некоторого высказывания — этот случай компьютер Белнапа помечает значением **N**.

Достаточно легко заметить, что четыре эпистемические ситуации, в которых обнаруживает себя компьютер Белнапа, могут быть очевидным образом интерпретированы с использованием функции мультиоценки:

- значение **T** соответствует $\{u\}$;
- значение **F** соответствует приписыванию $\{l\}$;
- значение **B** соответствует приписыванию $\{u, l\}$;
- значение **N** соответствует приписыванию $\emptyset$.

В дальнейшем будем обозначать множество классических значений истины как **2**, а результат его обозначения через взятие множества-степени как **4**.

Белнап естественным образом показал, как четыре обобщенных значения истинности образуют дистрибутивную решетку с дополнением Де Моргана, известную в двух проекциях. Одна из них логическая решетка **L4** служит основой для семантической релевантной логики первого уровня. При этом значение **T** оказывается максимальным элементом, а **F** — минимальным. Другая проекция представляет собой аппроксимационную решетку **A4**, упорядоченную по возрастанию информации. В этом случае максимальным элементом оказывается уже **B**, а минимальным — **N**. Совмещение двух этих решеток в одной алгебраической структуре приводит к понятию бирешетки, введенному М. Гинзбургом. Рисунок 1 иллюстрирует бирешетку $FOUR_2$ с двумя отношениями порядка: логический порядок (t) по горизонтали и информационный (i) по вертикали. Бирешетки оказались весьма интересным средством изучения понятия истинности и моделирования различных видов нестандартных рассуждений.

Следующий шаг в обобщении истинностных значений был сделан Я. Шрамко и Г. Ванзингом при участии Дана и Текенака и связан с понятием мультирешетки, являющимся обобщением бирешетки. В статье [9] вводится понятие n -мерной мультирешетки «как структуры, на которой определены в точности n частичных порядков, каждый из которых выражает ту или иную

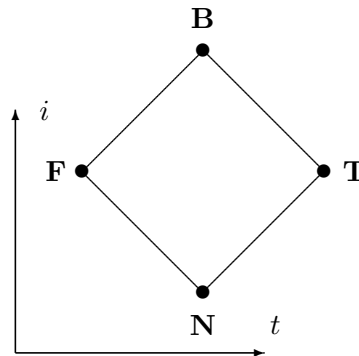
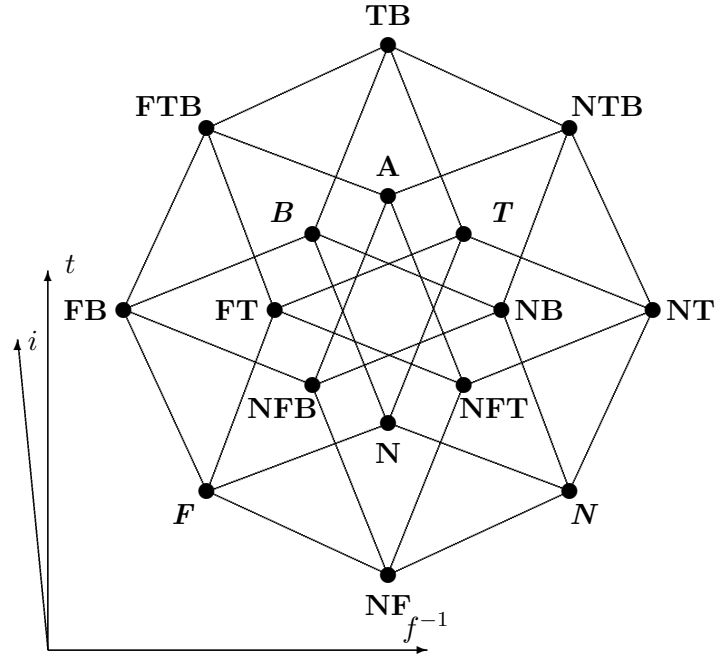


Рис. 1. Бирешетка $FOUR_2$

степень наличия определенного свойства у элементов рассматриваемого множества (в данном случае множества обобщенных истинностных значений)» [18, с. 285].

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 1. N -мерная мультирешетка представляет собой структуру $M = \langle S, \leq_1, \leq_2, \dots, \leq_n \rangle$, где S есть непустое множество, а $\leq_1, \leq_2, \dots, \leq_n$ — отношения частичного порядка, определенные на S так, что $\langle S, \leq_1 \rangle, \langle S, \leq_2 \rangle, \dots, \langle S, \leq_n \rangle$ суть различные решетки.

В качестве примера интересной мультирешетки остановимся на алгебраической структуре, представляющей обобщение решетки $FOUR_2$ до $SIXTEEN_3$ с тремя независимыми отношениями порядка по истинности, ложности и информации. К ее построению Шрамко и Ванзинг приходят, довольно естественным образом обобщая полезную логику Белнапа до шестнадцатизначной логики компьютерной сети. Шрамко и Ванзинг развивают компьютерную метафору, задаваясь вопросом, какая логика получится у сервера, коммуницирующего с целой сетью четырехзначных компьютеров. Очевидно, что эпистемические ситуации компьютерного сервера будут отличаться от тех, в которых находился компьютер Белнапа — теперь одно и то же высказывание может быть сообщено, к примеру, со значениями $\{u, l\}$ и $\{u\}$. Поиск ответа на этот любопытный вопрос приводит к дальнейшему обобщению истинностных значений. В распоряжении сервера должна находиться логика, базирующаяся

Рис. 2. Трирешетка $SIXTEEN_3$ (проекция $t - f$)

на шестнадцатизначном семантическом каркасе, представляющем собой множество-степень множества **4**.

Для каждого из отношений порядка могут быть заданы свои собственные операции объединения и пересечения, а также на решетке $SIXTEEN_3$ определяется несколько инверсий. Таким образом, становится возможно использовать обобщенный семантический подход для выявления свойств различных операций в рамках единой алгебраической конструкции. Обобщенный язык L_{tf} включает пропозициональные связки $\wedge_t, \vee_t, \neg_t, \wedge_f, \vee_f, \neg_f$, ассоциированные с соответствующими алгебраическими операциями. Рассматривая соответствующие логики, Шрамко и Ванзинг получают весьма примечательный результат, позволивший им метафорически заявить: «first-degree entailment everywhere!», т. е. логика компьютерной сети любой степени сложности совпа-

дает с известной системой выводимостей **FDE**, а именно представляет собой релевантную логику первого уровня. Другой вариант обобщения представлен в работе [12], где в качестве базиса для обобщения выбирается трехэлементное множество значений логик Клини.

Любопытные системы получаются в результате «смешения» языков. В последнем выступлении Г. Ванзинга на конференции «Шестые Смирновские чтения по логике» (Москва, 17–19 июля 2009) была анонсирована аксиоматизация системы $\mathbf{FDE}_t^{tf}$, язык которой включает оба типа связок. На очереди построение системы с двумя отношениями выводимости. Все это раскрывает увлекательные перспективы исследования пространства обобщенных значений истинности и формализации различных типов рассуждений, предполагающих комплексную оценку высказываний.

2 Две истины или одна: Логико-философский экскурс

Проект обобщенных истинностных значений в качестве стартовой точки рассматривает классические значения истинности, трактуемые в духе Фреге как атомарные абстрактные логические объекты, подобные по своему онтологическому статусу числам. Между тем в контексте логико-философского исследования вполне оправданно подвергнуть сомнению и эту идею. Является ли то, что мы называем истиной (истинностным значением), абсолютно примитивной и неделимой сущностью? Или, если взглянуть на эту проблему несколько по-другому, всегда ли мы под термином «истина» имеем в виду одно и то же? При этом речь идет не о многочисленных концепциях истины, а именно о словоупотреблении. Можно ли с уверенностью утверждать, что говоря «данное высказывание истинно», мы всегда подразумеваем один и тот же смысл? Представляется, что на этот вопрос можно ответить негативно. Существует как минимум две совершенно разных интерпретации смысла приведенного высказывания, которые дальше будут обозначены как *онтологическая* и *эпистемологическая*.

Онтологическая трактовка истинности в логике наиболее ярко представлена в логическом проекте Фреге. Истина — это зна-

чение декларативного предложения, его референциальная характеристика, и в этом смысле истина — объект в логическом мире Фреге. Соответственно логика оказывается наукой о бытии истины, а логическое следование предстает как обусловленное фундаментальными онтологическими отношениями между логическими объектами. Таким образом, утверждать, что данное высказывание истинно, значит, согласно онтологической интерпретации, утверждать, что значением данного высказывания является логический объект — истина.

Конкурирующий эпистемологический проект предполагает трактовку истинности как некоторой оценки. При этом истина теряет свой абсолютный онтологический характер и в определенном смысле релятивизируется. Тем самым «трудный» метафизический вопрос о природе истины фактически снимается. Истина становится свойством, которое сохраняется при переходе от посылок к заключению в корректном рассуждении («такие характеристики, как “быть истинным” и “быть ложным”, тоже являются признаками» [15, с. 17]). Суть эпистемологического подхода к логике очень емко выразил Э. Мендельсон на первых страницах своего «Введения в математическую логику».

«Истинность или ложность отдельных посылок или заключений не интересует логика. Он желает лишь знать, вытекает ли истинность заключения из истинности посылок» [17, с. 1].

Развивая парадигму эпистемологического подхода, можно сказать, что данное высказывание истинно, если существуют определенные обстоятельства (во внеязыковой реальности, в самом высказывании или в ментальных состояниях субъекта), позволяющие оценить его как истинное. При этом ложность становится просто равносильна неистинности — отсутствию свойства истинности.

Таким образом, оказывается вполне оправданно различать два понимания истины: референциальную истину как абстрактный объект, выступающий в качестве значения (референта) высказывания, и инференциальную истину как номинализацию свойства «быть истинным», как оценку высказывания, которая переносится в правильном рассуждении с посылок на заключение.

Отмеченное различие в трактовке истины отнюдь не является чисто логическим. В истории философии онтологическая и эпистемологическая интерпретации истины встречаются достаточно часто. В качестве примера можно вспомнить трактат Ансельма Кентерберийского «Об истине», в котором разводятся «правильность и истинность высказывания (*rectitudo et veritas enuntiationis*), поскольку оно обозначает то, для обозначения чего было создано» и «правильность и истинность, поскольку оно обозначает в силу полученного свойства обозначать» (см. [14, с. 207–208]). При этом первое неизменно присуще высказыванию от природы, а второе переменное и привходящее. Вторит Ансельму Фома Аквинский, утверждающий, что предложение «Сократ сидит», в случае сидящего Сократа истинно в обоих смыслах — и по истине вещи (*et veritate rei*) как значащее выражение, и по истине обозначения (*veritate significationis*) как обозначающее истинное мнение, а в случае вставшего Сократа вторая истинность исчезает («*Summa theologiae*»: I. 16, 2 к 3).

Еще более поразительное свидетельство о двойственном понимании истины содержится в буддистской доктрине двух истин (тиб. *bden-pa gnyis*). Согласно этой концепции существуют две истины: поверхностная, относительная, конвенциональная истина (тиб. *kun-rdzob bden-pa*) и глубинная, абсолютная (тиб. *don-dam bden-pa*). Их сложные взаимоотношения в одной из принятых интерпретаций могут быть проиллюстрированы через дистинкцию сущности и явления. Известны диаметрально противоположные трактовки двух истин — как взаимодополняющего единства (Цонкопа) и как противоречивого противоречия, не совместимого в единой сущности (Гораampa). См., например, [11].

В современной философии сознания это противостояние находит свое любопытное продолжение. Еще в 1950 г. в своей известной статье «Истина» Джон Остин писал:

«Мы спрашиваем себя, является ли Истина субстанцией (Истина, Корпус Знания), либо она представляет собой качество (что-то сходное с красным цветом, неотъемлемо присущим истинам), либо отношение («корреспонденция»)» [13, с. 175].

В этом же контексте можно вспомнить популярную в недавнем прошлом диалектику абсолютной и относительной истины, второй, эпистемический компонент которой вообще представляет

собой бесконечное множество степеней истинности, приближающихся, но не достигающих идеала онтологической истины.

За прошедшие годы тема онтологической и эпистемической истины не потеряла своей актуальности. Б. Эллиса, начинавший с предложения отправить на свалку истории старое метафизическое (онтологическое) понимание истины и заменить его новым эпистемологическим (см. [8]), в 2005 г. подводит некоторый итог своих философских исканий:

«Я думаю, проблема состоит в том, что истина в самом деле является гибридным понятием... На данный момент, имея дело с гибридной природой истины, я предпочитаю разводить вопросы эпистемологии и онтологии» [7, с. 20].

Последовательно придерживаясь скептической линии, мы выражаем сомнение и в том, что эпистемическую и онтологическую интерпретации следует обязательно разводить. Возможно ли их объединение в едином понятии комплексной истины? Первоначально подобный вопрос кажется несколько надуманным и искусственным (метафизическим в худшем смысле этого слова). Однако если вернуться к отправной точке этого параграфа и обратиться к анализу нашего парадигмального примера «это высказывание истинно», оказывается, что вполне можно представить себе ситуации, когда мы допускаем сразу обе интерпретации, как сказал бы Н. Васильев «за раз». В самом деле, легко представить себе случай, когда, например, я знаю, что высказывание обозначает ложь, но оцениваю его как истинное, приемлемое. Такое сплошь и рядом встречается в процессе публичной полемики, когда ее участники прекрасно отдают отчет в смысле и значении высказываемых ими суждений, но по каким-то им одним ведомым стратегическим или прагматическим причинам предпочитают оценивать их по-другому. Вообще любое высказывание, подвергнутое ревизии в процессе научного познания, представляет собой пример расхождения онтологического значения и эпистемической оценки. Все хорошо помнят, как Птолемей считал, что Солнце вращается вокруг Земли. В те времена подобное высказывание служило примером онтологической лжи, спрятавшейся под одеждами эпистемически-истинного мнения.

Кроме всего прочего оказывается, что идея совмещения двух истин в одном не является столь новой и революционной. Здесь

опять приоритет принадлежит буддийской философии, но на этот раз не тибетской, а китайскому варианту. Китайский мыслитель Цзи Цзан (549–623), ученик великого Фа Лана, один из выдающихся идеологов школы саньлунь оставил благодарным потомкам труд под названием «Смысл двух истин». В одном из разделов этой книги благодаря применению метода чатушкотики (буддийская тетралемма) он сумел обосновать так называемое «учение о четырех видах двух истин». Следует отметить, что основой учения о четырех видах послужила «концепция четырех альтернатив», разработанная его учителем Фа Ланом. Согласно Фа Лану, каждая из двух истин (в традиции китайского буддизма они интерпретировались соответственно как светская, мирская истина и реальная, подлинная истина) может «трансцендировать», «выходить за границы», «преодолевать» (*chueh*) или «не трансцендировать», «не выходить за границы», «не преодолевать» (*pu-chueh*). При этом трансцендируют они по-разному. Мирская истина преодолевает реальность и способствует временному бытию, тогда как подлинная истина преодолевает временное бытие и утверждает реальность. Впрочем, здесь мы касаемся материй, далеких от темы данной статьи. При желании с ними можно подробно ознакомиться, воспользовавшись книгой [3].

Итак, подводя итог этого параграфа, отметим, что две интерпретации истинности — онтологическая и эпистемическая — коренятся в древней философии и с завидным постоянством обнаруживают себя на всем протяжении развития философской мысли. Им соответствуют две трактовки истины: референциальная истина, представляющая собой значение высказывания, и инференциальная истина, представляющая собой оценку высказывания. При этом оправданно говорить не о двух истинах как самостоятельных сущностях, а двух компонентах единого целого-истинностного значения, которое больше не кажется простым и неделимым логическим объектом.

3 Редукция истинностных значений

Обобщение — не единственный способ получать новые совокупности истинностных значений. Оказывается, обратная процеду-

ра — редукция — также открывает интересные возможности в исследовании систем истинностных значений и их логик.

Осуществляя редукцию некоторой системы истинностных значений, мы отталкиваемся от того, что уже было ранее получено как результат обобщения. Например, обобщая множество **2** классических истинностных значений, получаем множество **4**, а редукция **4** дает обратно множество **2**. Что даст редукция, примененная к множеству **2**? Естественнo предположить, что результатом такой редукции будет множество **1**, т. е. множество $\{t\}$. Тогда система классических истинностных значений может быть обратно получена из **1** обобщением, если полагать, что $\{t\}$ есть аналог классического значения **t** («истина»), а $\emptyset$ — аналог значения **f** («ложь»).

В предыдущем разделе речь шла о различении (по меньшей мере) двух трактовок истинности — референциальной и инференциальной. Идея редукции истинностных значений предоставляет удобный аппарат для формального построения семантики с двумя по-разному понимаемыми значениями «истина». Для начала возьмем два различных символа, t и 1 , для представления референциальной и инференциальной истины соответственно. Будем рассматривать их как редуцированные истинностные значения. То есть в качестве исходным объектов мы принимаем $\{t\}$ и $\{1\}$. Тогда привычные двухэлементные множества истинностных значений $\{t, f\}$ и $\{1, 0\}$ возникают как множества степени множеств $\{t\}$ и $\{1\}$: $P(\{t\}) = \{\{t\}, \emptyset\}$ и $P(\{1\}) = \{\{1\}, \emptyset\}$, где $\emptyset$ выступает в качестве представителя лжи (f в одном, и 0 в другом случае). Теперь рассмотрим пропозициональные языки и семантические структуры, соответствующие двум описанным трактовкам истины.

Пусть L_t — пропозициональный язык со связками $\wedge_t$, $\vee_t$ и $\neg_t$. Определение формулы в этом языке стандартное. Для интерпретации языка построим следующую алгебраическую систему: $V_t = \langle P(\{t\}), \subseteq_t, \cap_t, \cup_t, -_t \rangle$ — и зададим оценку v_t как отображение множества пропозициональных переменных на множество $P(\{t\})$. Операции $\cap_t$ и $\cup_t$ представляют собой обычные теоретико-множественные операции пересечения и объединения, а $-_t$ есть операция дополнения.

Расширение данной функции на множество всех формул языка L_t описывается следующими равенствами:

$$\begin{aligned} v_t(A \wedge_t B) &= v_t(A) \cap_t v_t(B); \\ v_t(A \vee_t B) &= v_t(A) \cup_t v_t(B); \\ v_t(\neg_t A) &= -_t v_t(A). \end{aligned}$$

Теперь дадим определение логического следования:

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 2. Для всяких формул A и B языка L_t ,

$$A \models_t B \Leftrightarrow \forall v_t(v_t(A) \subseteq v_t(B)).$$

Ровно то же самое можно проделать для инференциальной истины 1, беря пропозициональный язык L_1 со связками $\wedge_1$, $\vee_1$ и $\neg_1$. Все необходимые конструкции и определения получаются из вышеприведенных заменой t на 1.

Ясно, что отношения $\models_t$ и $\models_1$ совпадают по объему с классическим отношением следования.

Следующий шаг — описание общей семантической структуры, которая может служить для интерпретации формул, для которых допускаются как референциальные, так и инференциальные истинностные значения. В качестве базиса такой структуры используем множество $\mathbf{\Pi} = \{t\} \cup \{1\}$. Обобщение этого множества есть множество $P(\mathbf{\Pi})$. Для элементов этого множества введем следующие обозначения:

$$\begin{aligned} \{t, 1\} &\text{ — } \mathbf{T1}; \\ \{t\} &\text{ — } \mathbf{T0}; \\ \{1\} &\text{ — } \mathbf{F1}; \\ \emptyset &\text{ — } \mathbf{F0}. \end{aligned}$$

На множестве этих истинностных значений зададим стандартные теоретико-множественные операции $\cap$ и $\cup$. Нетрудно проверить, что множество $P(\mathbf{\Pi})$ с данными операциями образует четырехэлементную решетку.

Теперь можно начать построение пропозиционального языка L_{TV} , содержащего пока только связки $\wedge$ и $\vee$ как аналоги решеточных операций. Таким образом, определяя функцию оценки v как отображение множества пропозициональных переменных на $P(\mathbf{\Pi})$, мы уже знаем, как расширить эту функцию на сложные выражения, содержащие в качестве главного знака связки

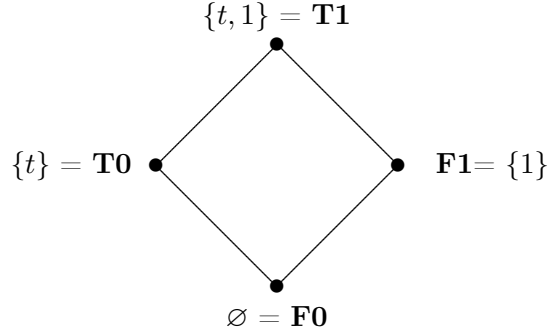


Рис. 3. Решетка A4

$\wedge$ или $\vee$. Для этого выпишем стандартные равенства:

$$\begin{aligned} v(A \wedge B) &= v(A) \cap v(B), \\ v(A \vee B) &= v(A) \cup v(B). \end{aligned}$$

Следующий вопрос — какие одноместные операции на множестве $P(\mathbf{II})$ будут интересны и какого типа отрицания будут им соответствовать в нашем пропозициональном языке?

Рассмотрим ситуацию с точки зрения референциальной истинности t . Естественно определить на множестве $P(\mathbf{II})$ такую унарную операцию $\smile_t$, которая при отображении не затрагивает инференциальный компонент истинностного значения, т. е. не приводит к его появлению или исчезновению внутри всего полученного истинностного значения. А референциальный компонент, напротив, меняется. Например, возьмем значение **T1**. Образом этого элемента является, в соответствии со сказанным, элемент **F1**.

Аналогичные рассуждения можно провести и в отношении инференциальной истины, вводя на множестве $P(\mathbf{II})$ унарную операцию $\smile_1$. Табличное определение описанных операций приведено на рис. 4.

Продолжая построение пропозиционального языка L_{TV} , добавим к набору его исходных символов знаки операций отрицания: $\neg_t$ и $\neg_1$. Ясно, что расширенная оценка для формул с внешними отрицаниями задается выражением $v(\neg_i A) = \smile_i v(A)$, где

$X \in P(\mathbf{II})$	$\neg_t X$	$X \in P(\mathbf{II})$	$\neg_1 X$
T1	F1	T1	T0
T0	F0	T0	T1
F1	T1	F1	F0
F0	T0	F0	F1

Рис. 4. Определение операций $\neg_t$ и $\neg_1$.

$i \in \{t, 1\}$. Отношение следования определяется через теоретико-множественное включение:

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 3. Для всяких формул языка L_{TV} , $A \models B \Leftrightarrow v(A) \subseteq v(B)$.

Заметим, что было бы правильнее называть эти отрицания «полуотрицаниями» в силу некоторых свойств этих логических связок, отличающих их от «полноценного» классического отрицания. В то же время, сравнивая свойства полуотрицаний, обнаруживаем их удивительный параллелизм:

1.	$\neg_t \neg_t A \models A$ и $A \models \neg_t \neg_t A$	$\neg_1 \neg_1 A \models A$ и $A \models \neg_1 \neg_1 A$
2.	$\neg_t(A \wedge B) \models \neg_t A \vee \neg_t B$	$\neg_1(A \wedge B) \models \neg_1 A \vee \neg_1 B$
3.	$\neg_t A \wedge \neg_t B \models \neg_t(A \wedge B)$	$\neg_1 A \wedge \neg_1 B \models \neg_1(A \wedge B)$
4.	$\neg_t A \wedge \neg_t B \models \neg_t(A \vee B)$	$\neg_1 A \wedge \neg_1 B \models \neg_1(A \vee B)$
5.	$\neg_t(A \vee B) \models \neg_t A \vee \neg_t B$	$\neg_1(A \vee B) \models \neg_1 A \vee \neg_1 B$

В то же время композиция полуотрицаний обладает всеми свойствами обычного булева отрицания:

6. $\neg_t A \models \neg_t B$ / $\neg_1 B \models \neg_1 A$;
7. $\neg_1 A \models \neg_1 B$ / $\neg_t B \models \neg_t A$.
8. $\neg_t \neg_1 A \models \neg_1 \neg_t A$ и $\neg_1 \neg_t A \models \neg_t \neg_1 A$;
9. $\neg_1 \neg_t A \models \neg_t \neg_1 A$ и $\neg_t \neg_1 A \models \neg_1 \neg_t A$;
10. $\neg_t \neg_1 \neg_t \neg_1 A \models A$ и $A \models \neg_t \neg_1 \neg_t \neg_1 A$;
11. $\neg_t \neg_1(A \wedge B) \models \neg_t \neg_1 A \vee \neg_t \neg_1 B$ и $\neg_t \neg_1 A \vee \neg_t \neg_1 B \models \neg_t \neg_1(A \wedge B)$;
12. $\neg_t \neg_1(A \vee B) \models \neg_t \neg_1 A \wedge \neg_t \neg_1 B$ и $\neg_t \neg_1 A \wedge \neg_t \neg_1 B \models \neg_t \neg_1(A \vee B)$;
13. $B \models \neg_t \neg_1 A \vee A$;
14. $\neg_t \neg_1 A \wedge A \models B$;
- R. $A \models B$ / $\neg_t \neg_1 B \models \neg_t \neg_1 A$.

4 «Гомогенные» и «гетерогенные» унарные операторы

Выделение унарных операторов полуотрицания открывает интересные перспективы для дальнейших исследований. Очевидно, что кроме этих двух связок существует множество других унарных операторов, достойных внимания. В рамках данной статьи представляется уместным предложить их обобщенную классификацию.

Сформулируем ряд условий, характеризующих наличие или отсутствие элементов обобщенного множества значений $\{t, 1\}$ в множестве, представляющем собой оценку для произвольного оператора $\sharp$. При этом естественно развести эти условия в две группы. К первой группе будут относиться «гомогенные» условия, т. е. такие, которые выражают зависимость наличия или отсутствия данного значения в оценке оператора от наличия или отсутствия того же значения в оценке подоператорной формулы. Пример «гомогенного» условия представляет следующее выражение: $1 \in v(A) \Leftrightarrow 1 \in v(\sharp A)$. К другой, «гетерогенной» группе, будут относиться условия, выражающие смешанные характеристики, когда наличие или отсутствие одного значения связывается с наличием или отсутствием другого, например, $t \in v(A) \Leftrightarrow 1 \in v(\sharp A)$.

«Гомогенные» условия:		«Гетерогенные» условия:	
(1)	$1 \in v(A) \Leftrightarrow 1 \in v(\sharp A)$	(3)	$t \in v(A) \Leftrightarrow 1 \in v(\sharp A)$
(1)	$1 \in v(A) \Leftrightarrow 1 \notin v(\sharp A)$	(3)	$t \in v(A) \Leftrightarrow 1 \notin v(\sharp A)$
(2)	$t \in v(A) \Leftrightarrow t \in v(\sharp A)$	(4)	$1 \in v(A) \Leftrightarrow t \in v(\sharp A)$
(2)	$t \in v(A) \Leftrightarrow t \notin v(\sharp A)$	(4)	$1 \in v(A) \Leftrightarrow t \notin v(\sharp A)$

Хорошо видно, что некоторые из приведенных условий являются попарно несовместимыми. В «гомогенной группе» это условия (1) и $(\bar{1})$, (2) и $(\bar{2})$. А в «гетерогенной» — (3) и $(\bar{3})$, (4) и $(\bar{4})$. Теперь рассмотрим возможные сочетания условий внутри каждой группы. Очевидно, что непротиворечивое совмещение условий внутри группы возможно только попарно. Это позволяет рассмотреть два семейства унарных операторов.

Гомогенные» унарные связки:

- $(\bar{1})$ и (2) — полуотрицание₁ ($\neg_1$);
 (1) и $(\bar{2})$ — полуотрицание₂ ($\neg_2$);

A	$\neg_1 A$	$\neg_2 A$	$\neg_r A$	$\sim A$	iA	$\star A$	$\lhd A$	$\rhd A$
T1	T0	F1	F0	F0	T1	T1	T0	F1
T0	T1	F0	T0	F1	T0	F1	F0	T1
F1	F0	T1	F1	T0	F1	T0	T1	F0
F0	F1	T0	T1	T1	F0	T1	F1	T0

Рис. 5. Сводная таблица унарных операторов

- ($\bar{1}$) и ($\bar{2}$) — булево отрицание ($\sim$);
 (1) и (2) — тождественное преобразование (i).

В этой группе вместе с двумя полуотрицаниями оказывается булево отрицание и оператор тождественного преобразования. А вот отрицание Де Моргана относится уже к «гетерогенной» группе.

«Гетерогенные» унарные связки:

- ($\bar{3}$) и (4) — «левый поворот» ($\lhd$);
 (3) и ($\bar{4}$) — «правый поворот» ($\rhd$);
 (3) и (4) — отрицание Де Моргана ($\neg_r$);
 (3) и ($\bar{4}$) — семантический сдвиг ($\star$).

Примечательно, что к этой группе относится оператор «звезды», представляющий собой синтаксический аналог известной по семантикам релевантной логики функции «звезды» — star-function. Взаимоотношения между этим операторами внутри самих групп удобно представить с помощью сводной таблицы истинности (см. рис. 5).

Совместить условия из разных групп чисто механически не представляется возможным. Однако ничто не мешает рассмотреть суперпозиции различных одноместных операторов. Вообще говоря, каждая из групп оказывается замкнутой относительно суперпозиции одноместных операторов. Но стоит допустить суперпозицию операторов из разных групп, и некоторые одноместные операторы получают новое, интересное выражение. Так, странные связки левого и правого поворотов из «гетерогенной группы» оказываются выразимы через полуотрицания «гомогенной группы» и оператор «звезды» из «гетерогенной» груп-

пы: левый поворот $\neg_1$ равносильно сочетанию $\neg_1 \star$ или $\star \neg_2$. А булево отрицание из «гомогенной» группы вполне предсказуемо выражается через тот же оператор «звезды» и отрицание Де Моргана: $\sim$ есть не что иное, как $\star \neg_1$ или $\neg_1 \star$.

Можно предположить, что набор $\langle \star, \neg_1, \neg_2 \rangle$ является функционально полным относительно описываемого множества унарных связей, т. е. с его помощью выражаются все остальные связи из обеих групп. Тожественное преобразование равносильно сочетанию левого и правого поворотов, как выражаются повороты, мы уже видели выше, выражение булева и деморганова отрицаний также уже встречались в тексте статьи. Точно также функционально полным в указанном выше смысле будет набор, включающий отрицание Де Моргана и два полуотрицания. Правдоподобным представляется утверждение, что для выражения любых унарных связей из двух групп необходимо иметь хотя бы один оператор с неподвижной точкой (оператор «звезды» или деморганово отрицание).

5 Заключение

Итак, подводя итоги нашего исследования, следует отметить, что предложена новая трактовка истинностных значений как комплексных молекулярных образований. Редукция этих комплексов, двойственная процедуре обобщения, позволяет выявить в их составе референциальную (онтологическую) и инференциальную (эпистемологическую) составляющие, что находит свои подтверждения в истории философии. Формализация пространства комплексных истинностных значений и построение соответствующей системы значений привели к обнаружению двух унарных операторов, названных в статье «полуотрицаниями». Каждое из таких полуотрицаний обладает ровно половиной свойств обычного отрицания, а их суперпозиция равносильна классическому булеву отрицанию.

На очереди формализация получившейся системы значений (семантической логики). Кроме того, дополнительный интерес представляет рассмотрение возможности построения логик только с одним из полуотрицаний и логик с несколькими «гомогенными» или «гетерогенными» унарными связками.

Литература

- [1] *Belnap N. D.* A useful four-valued logic // Dunn J. M. and Epstein G. (eds.), *Modern Uses of Multiple-Valued Logic*. Reidel Publishing Company. Dordrecht, 1977. P. 8–37.
- [2] *Belnap N. D.* How a computer should think // Ryle G. (ed.). *Contemporary Aspects of Philosophy*. Oriel Press. 1977. P. 30–55.
- [3] *Chang-Qing Shih.* The two truths in Chinese Buddhism. Delhi, 2004.
- [4] *Dunn J. M.* The Algebra of Intensional Logics. Doctoral Dissertation. University of Pittsburgh, Ann Arbor, 1966 (University Microfilms).
- [5] *Dunn J. M.* An intuitive semantics for first degree relevant implications (abstract) // *Journal of Symbolic Logic*. 1971. Vol. 36. P. 362–363.
- [6] *Dunn J. M.* Intuitive semantics for first-degree entailment and coupled trees // *Philosophical Studies*. 1976. Vol. 29. P. 149–168.
- [7] *Ellis B.* Constructing an Ontology // Valore P. (ed.), *Topics on General and Formal Ontology*. Polimetrika. International Scientific Publisher. 2005. P. 15–26.
- [8] *Ellis B.* An Epistemological Concept of Truth // Brown R., Rollins C. D. (eds.), *Contemporary Philosophy in Australia*. 1969. Vol. 6. P. 52–72.
- [9] *Shramko Y., Dunn J. M. and Takenaka T.* The trilattice of constructive truth values // *Journal of Logic and Computation*. 2001. Vol. 11. P. 761–788.
- [10] *Shramko Y., Wansing H.* Some useful sixteen-valued logics: How a computer network should think // *Journal of Philosophical Logic*. 2005. Vol. 34. P. 121–153.
- [11] *Thakchoe S.* The relationship between the two truths: a comparative analysis of two Tibetan accounts // *Contemporary Buddhism*. 2003. Vol. 4. P. 111–127.
- [12] *Zaitsev D.* A few more useful 8-valued logics for reasoning with tetralattice $EIGHT_4$ // *Studia Logica*. 2009. Vol. 92. P. 265–280.
- [13] Аналитическая философия: становление и развитие. М., 1998.
- [14] Ансельм Кентерберийский. Об истине // Антология средневековой мысли. СПб., 2001. С. 203–230.
- [15] Бочаров В. А., Маркин В. И. Введение в логику. М., 2007.
- [16] Ванзинг Г., Шрамко Я. В. Логика компьютерных сетей // Логические исследования. Вып. 12, М., 2005.
- [17] Мендельсон Э. Введение в математическую логику. М., 1971.
- [18] Шрамко Я. В. Обобщенные истинностные значения: решетки и мультирешетки // Логические исследования. Вып. 9. М., 2002. С. 264–291.

Традиционная силлогистика с отрицательными терминами

А. А. Ильин

ABSTRACT. We set out the following axiom schemes for traditional syllogistic with negative terms: $(MaP \& SaM) \supset SaP$, $SiP \supset PiS$, SaS , $SaP \supset SiP$, $SeP \equiv \neg SiP$, $SoP \equiv \neg SaP$, $SaP \equiv SeP'$, $SiP \equiv SiP''$. We prove that this system embeds into the predicate calculus by the interpretation of categorical propositions made by M. Bejanishwili and L. Mchedlishwili:

$$\begin{aligned} SaP &\rightarrow (\exists x Sx \& \exists x \neg Sx \& \exists x Px \& \exists x \neg Px) \supset \forall x (Sx \supset Px), \\ SiP &\rightarrow (\exists x Sx \& \exists x \neg Sx \& \exists x Px \& \exists x \neg Px) \supset \exists x (Sx \& Px), \\ SeP &\rightarrow (\exists x Sx \& \exists x \neg Sx \& \exists x Px \& \exists x \neg Px) \supset \forall x (Sx \supset Px), \\ SoP &\rightarrow (\exists x Sx \& \exists x \neg Sx \& \exists x Px \& \exists x \neg Px) \supset \exists x (Sx \& Px). \end{aligned}$$

Ключевые слова: традиционная силлогистика, негативные термины, аксиоматизация, категорические высказывания

В работе предлагается аксиоматизация системы традиционной силлогистики, содержащей отрицательные термины. Традиционная силлогистика — это теория, описывающая отношения между ассерторическими высказываниями; данные высказывания содержат только общие термины, а среди самих общих терминов выделяют содержащие отрицание и неотрицательные.

В язык традиционной силлогистики (ТС) входят нелогические термины единственного типа — параметры для простых неотрицательных терминов. Для обозначения терминов такого рода используем символы $S, P, Q, M, \dots$. Кроме того, в язык негативной силлогистики входят силлогистические константы a, i, e, o , пропозициональные связки $\&, \vee, \neg, \supset, \equiv$, знак терминного отрицания $'$ и скобки.

Любые параметры для неотрицательных общих терминов — $S, P, Q, M, \dots$ — есть термы, а также если S — терм, то S' — тоже терм. Формулами являются выражения вида SaP, SiP, SeP, SoP , где S и P — произвольные термы. Сложные формулы образуются из простых с помощью пропозициональных связок. (При

работе со схемами аксиом мы различаем обозначения для неотрицательных общих терминов — $S, P, Q, M, \dots$, и для тех же общих терминов с произвольным количеством отрицаний — $\bar{S}, \bar{P}, \bar{Q}, \bar{M}, \dots$. Тем самым $S, P, Q, M, \dots$ есть соответственно неотрицательные общие термины $S, P, Q, M, \dots$ с произвольным числом отрицаний.)

Я. Лукасевичем на базе классического исчисления высказываний была построена реконструкция чистого позитивного фрагмента традиционной силлогистики [4]. Им было показано, что аналоги всех законов чистой позитивной силлогистики являются теоремами построенной им системы, а все остальные силлогистические утверждения, кроме тавтологий логики высказываний, недоказуемы в системе.

Адекватная интерпретация силлогистических формул, детерминирующая класс законов традиционной позитивной силлогистики, была найдена в 1971 г. румынским логиком С. Виеру. Иной перевод силлогистических формул в исчисление предикатов был предложен В.А. Бочаровым [2].

Нами будет рассмотрена модификация погружающей операции позитивного фрагмента традиционной силлогистики, предложенной М.Н. Бежанишвили и Л.И. Мchedlishvili [1], более наглядно, в отличие от переводов Виеру и Бочарова, проясняющая смысл категорических высказываний. В ее основе лежит стандартный лейбницевский перевод категорических высказываний t , обычным образом распространенный на сложные силлогистические формулы:

$$\begin{aligned} \text{SaP} &\rightarrow \forall x(Sx \supset Px) \\ \text{SiP} &\rightarrow \exists x(Sx \& Px) \\ \text{SeP} &\rightarrow \forall x(Sx \supset \neg Px) \\ \text{SoP} &\rightarrow \exists x(Sx \& \neg Px). \end{aligned}$$

Посредством перевода t определяется погружающая операция T . Пусть $S_1, \dots, S_n$ — все термины, содержащиеся в формуле B .

Тогда $T(B) = ((\exists x S_1 x \& \exists x \neg S_1 x) \& \dots \& (\exists x S_n x \& \exists x \neg S_n x)) \supset t(B)$.

Силлогистическая теория, законами которой являются формулы, T -переводы которых доказуемы в исчислении предикатов, аксиоматизируется посредством системы $ТС$.

Схемами аксиом ТС являются:

T0. Схемы аксиом классического исчисления высказываний.

T1. $(MaP \& SaM) \supset SaP$ T5. $SeP \equiv \neg SiP$

T2. $SiP \supset PiS$ T6. $SoP \equiv \neg SaP$

T3. SaS T7. $SaP \equiv SeP'$

T4. $SaP \supset SiP$ T8. $SiP \equiv SiP''$

R1. *modus ponens*

Теорема о погружаемости системы ТС в исчисление предикатов посредством перевода Т будет доказываться на основе погружаемости данной системы в систему негативной фундаментальной силлогистики (НФС), для которой погружаемость в исчисление предикатов доказана [3].

При доказательстве погружаемости системы традиционной силлогистики в систему негативной фундаментальной силлогистики будем использовать критерий, предложенный В.А. Смирновым [7]:

Исчисление S_1 погружается в исчисление S_2 посредством функции ψ_1 (из множества формул S_1 в множество формул S_2), если и только если:

- (1) для каждой формулы A языка S_1 имеет место $S_1 \vdash A \Rightarrow S_2 \vdash \psi_1(A)$;

существует функция ψ_2 из множества формул S_2 в множество формул S_1 , такая что

- (2) для каждой формулы A языка S_2 имеет место $S_2 \vdash A \Rightarrow S_1 \vdash \psi_2(A)$,

- (3) для каждой формулы A языка S_1 имеет место $S_1 \vdash (A \equiv \psi_2(\psi_1(A)))$.

Воспользуемся данным критерием применительно к случаю, когда S_1 есть система ТС, а S_2 — система НФС.

Постулатами исчисления НФС являются:

- Ф0. Схемы аксиом классического исчисления высказываний.
 Ф1. $(MaP \& SaM) \supset SaP$ Ф6. $SoP \equiv \neg SaP$
 Ф2. $SiP \supset PiS$ Ф7. $SaP \equiv SeP'$
 Ф3. SaS Ф8. $SiP \equiv SiP''$
 Ф4. $SiP \supset SiS$ Ф9. $SiS \vee S'iS'$
 Ф5. $SeP \equiv \neg SiP$ R1. *modus ponens*

Определим перевод ψ_1 из ТС в НФС:

Пусть имеется произвольное утверждение В языка ТС; $S_1, \dots, S_n$ — все простые неотрицательные термины, содержащиеся в утверждении В.

Тогда $\psi_1(B) = ((S_1 i S_1 \& S'_1 i S'_1) \& \dots \& (S_n i S_n \& S'_n i S'_n)) \supset B$.
 Например, если В есть $SaP \supset SoS'$, то $\psi_1(SaP \supset SoS') = ((SiS \& S'iS') \& (PiP \& P'iP')) \supset (SaP \supset SoS')$.

Индукцией по длине доказательства формулы А в системе ТС покажем, что часть (1) критерия Смирнова выполняется: $\forall A (TC \vdash A \Rightarrow НФС \psi_1(A))$.

ψ_1 -перевод аксиом Т0, Т1, Т2, Т3, Т5, Т6, Т7, Т8 системы ТС суть формулы вида $((S_1 i S_1 \& S'_1 i S'_1) \& \dots \& (S_n i S_n \& S'_n i S'_n)) \supset A$, где А — соответствующая аксиома НФС (для Т0 — это Ф0, для Т1 — Ф1 и т.д.). Тогда схема доказательства для ψ_1 -переводов указанных аксиом системы ТС имеет вид:

1. А (соотв. аксиома системы НФС)
2. $((S_1 i S_1 \& S'_1 i S'_1) \& \dots \& (S_n i S_n \& S'_n i S'_n)) \supset A$ 1, ЛБ

Т4. $SaP \supset SiP$

$\psi_1(SaP \supset SiP) = ((SiS \& S'iS') \& (PiP \& P'iP')) \supset (SaP \supset SiP)$

- | | | |
|----|---------------------------------------|-------|
| 1. | $(PaS' \& SaP) \supset SaS'$ | Ф1 |
| 2. | $(SaP \& \neg SaS') \supset \neg PaS$ | 1, ЛБ |
| 3. | $SaS' \equiv SeS''$ | Ф7 |
| 4. | $PaS' \equiv PeS''$ | Ф7 |
| 5. | $SeS'' \equiv \neg SiS''$ | Ф5 |
| 6. | $PeS'' \equiv \neg PiS''$ | Ф5 |

- | | |
|--|----------|
| 7. $SiS \equiv SiS''$ | $\Phi 8$ |
| 8. $PiS \equiv PiS''$ | $\Phi 8$ |
| 9. $PiS \supset SiP$ | $\Phi 2$ |
| 10. $(SaP \& SiS) \supset SiP$ | 2-9, ЛВ |
| 11. $SiS \supset (SaP \supset SiP)$ | 10, ЛВ |
| 12. $((SiS \& S'iS') \& (PiP \& P'iP')) \supset (SaP \supset SiP)$ | 11, ЛВ |

В системе НФС справедлив закон $SiS \equiv S'iS'$ (введения/снятия двойного отрицания):

- | | |
|---------------------------|----------|
| 1. $SiS \equiv SiS''$ | $\Phi 8$ |
| 2. $S''iS \equiv S''iS''$ | $\Phi 8$ |
| 3. $S''iS \supset SiS''$ | $\Phi 2$ |
| 4. $SiS'' \supset S''iS$ | $\Phi 2$ |
| 5. $SiS \equiv S''iS''$ | 1-4, ЛВ |

Тогда произвольная формула PiP эквивалентна PiP , если P содержит четное число отрицаний; если же число отрицаний в P нечетно, то PiP эквивалентна $P'iP'$.

- | | |
|--|-------------|
| 13. $SiS \equiv S''iS''$ | Теорема НФС |
| 14. $((SiS \& S'iS') \& (PiP \& P'iP')) \supset (SaP \supset SiP)$ | 12, 13, ЛВ |

Покажем справедливость следующего утверждения:

$\text{НФС} \vdash \psi_1(A \supset B)$ и $\text{НФС} \vdash \psi_1(A) \Rightarrow \text{НФС} \vdash \psi_1(B)$.

Пусть имеем: $\text{НФС} \vdash \psi_1(A \supset B)$ и $\text{НФС} \vdash \psi_1(A)$.

$\psi_1(A) = A^\circ \supset A$, где A° есть конъюнкция вида $((S_1iS_1 \& S'_1iS'_1) \& \dots \& (S_kiS_k \& S'_kiS'_k))$, а $S_1, \dots, S_k$ — все простые неотрицательные термины, содержащиеся в формуле A .

$\psi_1(B) = B^\circ \supset B$, где B° есть конъюнкция вида $((P_1iP_1 \& P'_1iP'_1) \& \dots \& (P_miP_m \& P'_miP'_m))$, а $P_1, \dots, P_m$ — все простые неотрицательные термины, содержащиеся в формуле B . Ясно, что $\psi_1(A \supset B) = (A^\circ \& B^\circ) \supset (A \supset B)$.

Множества $\{S_1, \dots, S_k\}$ и $\{P_1, \dots, P_m\}$ всех простых неотрицательных терминов формул A и B непусты по определению формулы НФС.

Таким образом, из того, что $\text{НФС} \vdash (A^\circ \& B^\circ) \supset (A \supset B)$ и $\text{НФС} \vdash A^\circ \supset A$, необходимо получить $\text{НФС} \vdash B^\circ \supset B$.

1. $(A^\circ \& B^\circ) \supset (A \supset B)$ Теорема НФС (допущение)
2. $A^\circ \supset A$ Теорема НФС (допущение)
3. $(A^\circ \& B^\circ) \supset B$ 1, 2, ЛВ

Рассмотрим множество всех простых неотрицательных терминов $S_1, \dots, S_k$, содержащихся в формуле A .

Пусть множество $\{M_1, \dots, M_i\}$ есть множество всех тех простых неотрицательных терминов формулы A , которые не содержатся в формуле B . И пусть множество $\{Q_1, \dots, Q_j\}$ есть множество всех тех простых неотрицательных терминов формулы A , которые содержатся в формуле B . Ясно, что $\{M_1, \dots, M_i\} \cap \{P_1, \dots, P_m\} = \emptyset$, $\{M_1, \dots, M_i\} \cup \{Q_1, \dots, Q_j\} = \{S_1, \dots, S_k\}$, $\{Q_1, \dots, Q_j\} \cup \{P_1, \dots, P_m\} = \{P_1, \dots, P_m\}$.

Тогда A° есть $(A_1^\circ \& A_2^\circ)$, где A_1° есть конъюнкция вида $((M_1 i M_1 \& M'_1 i M'_1) \& \dots \& (M_i i M_i \& M'_i i M'_i))$, а A_2° есть конъюнкция вида $((Q_1 i Q_1 \& Q'_1 i Q'_1) \& \dots \& (Q_j i Q_j \& Q'_j i Q'_j))$. Следовательно,

4. $(A_1^\circ \& A_2^\circ \& B^\circ) \supset B$ 3, в силу определения A_1° , A_2° и A°
5. $(A_2^\circ \& B^\circ) \equiv B^\circ$ ЛВ, в силу определения A_2° и B°
6. $(A_1^\circ \& B^\circ) \supset B$ 5, ЛВ

Итак, $\text{НФС} \vdash ((M_1 i M_1 \& M'_1 i M'_1) \& \dots \& (M_i i M_i \& M'_i i M'_i) \& B^\circ) \supset B$, причем ни B° , ни B не содержат простых неотрицательных терминов $M_1, \dots, M_i$.

Индукцией по построению вывода не составляет труда доказать производность *правила подстановки* в системе НФС. Для этого показывается, что подстановка в схему аксиом есть аксиома, а также что результат применения правила *modus ponens* к теоремам также есть теорема.

Выберем произвольный простой неотрицательный термин P_e , входящий в формулу B , и осуществим i -раз подстановку данного термина вместо простых неотрицательных терминов $M_1, \dots, M_i$.

В результате данной подстановки получаем:

$$\text{НФС} \vdash ((P_e i P_e \& P'_e i P'_e) \& \dots \& (P_e i P_e \& P'_e i P'_e)) \& B^\circ \supset B).$$

В силу того, что B° по определению содержит все термины, входящие в B , а P_e входит в B , имеем, что B° содержит конъюнкт вида $(P_e i P_e \& P'_e i P'_e)$.

Тогда $((P_e i P_e \& P'_e i P'_e) \& \dots \& (P_e i P_e \& P'_e i P'_e)) \& B^\circ$ эквивалентно B° (в силу ЛВ).

Таким образом:

7. $B^\circ \supset B$ 6, из доказанного, ЛВ

Следовательно, $\text{НФС} \vdash B^\circ \supset B$.

Итак, имеем: $\text{НФС} \vdash \psi_1(A \supset B)$ и $\text{НФС} \vdash \psi_1(A) \Rightarrow \text{НФС} \vdash \psi_1(B)$.

Таким образом, часть (1) критерия Смирнова выполняется.

Для доказательства частей (2) и (3) указанного критерия необходимо сформулировать обратный перевод из системы НФС в систему ТС. Определим функцию ψ_2 из НФС в ТС следующим образом:

$$\psi_2(A) = A$$

$$\psi_2(\neg A) = \neg \psi_2(A)$$

$$\psi_2(A \bullet B) = \psi_2(A) \bullet \psi_2(B)$$

Покажем выполнение части (2) критерия Смирнова:

$$\forall A (\text{НФС} \vdash A \Rightarrow \text{ТС} \vdash \psi_2(A)).$$

Переводы аксиом Ф0 также являются аксиомами исчисления высказываний, поэтому они доказуемы в ТС.

ψ_2 -переводы аксиом Ф1, Ф2, Ф3, Ф5, Ф6, Ф7, Ф8 системы НФС суть аксиомы Т1, Т2, Т3, Т5, Т6, Т7, Т8 системы ТС.

$$\text{Ф4. SiP} \supset \text{SiS}$$

$$\psi_2(\text{SiP} \supset \text{SiS}) = \text{SiP} \supset \text{SiS}$$

1. SaS Т3
2. SaS $\supset$ SiS Т4
3. SiS 1, 2, ЛВ
4. SiP $\supset$ SiS 3, ЛВ

$$\text{Ф9. SiS} \vee \text{S'iS'}$$

$$\psi_2(\text{SiS} \vee \text{S'iS'}) = \text{SiS} \vee \text{S'iS'}$$

1. SaS Т3
2. SaS $\supset$ SiS Т4
3. SiS 1, 2, ЛВ
4. SiS $\vee$ S'iS' 3, ЛВ

Легко показать также справедливость следующего утверждения:

$$\text{ТС} \vdash \psi_2(A \supset B) \text{ и } \text{ТС} \vdash \psi_2(A) \Rightarrow \text{ТС} \vdash \psi_2(B).$$

Действительно, $\psi_2(A \supset B) = A \supset B$, $\psi_2(A) = A$, $\psi_2(B) = B$, а правило *modus ponens* имеется в ТС. Доказательство части (2) критерия Смирнова завершено.

Докажем часть (3) указанного критерия — $\forall A(ТС \vdash (A \equiv \psi_2(\psi_1(A))))$. В связи с тем, что $\psi_2(A) = A$, нам необходимо доказать $\forall A(ТС \vdash (A \equiv \psi_1(A)))$.

Пусть имеется произвольное утверждение В языка ТС; $S_1, \dots, S_n$ — все термины, содержащиеся в утверждении В. Тогда $\psi_1(B) = ((S_1 i S_1 \& S'_1 i S'_1) \& \dots \& (S_n i S_n \& S'_n i S'_n)) \supset B$.

Покажем: $B \equiv ((S_1 i S_1 \& S'_1 i S'_1) \& \dots \& (S_n i S_n \& S'_n i S'_n)) \supset B$.

- | | |
|---|----------|
| 1. SaS | T3 |
| 2. SaS $\supset$ SiS | T4 |
| 3. SiS | 1, 2, ЛВ |
| 4. $S_1 i S_1, \dots, S_n i S_n, S'_1 i S'_1, \dots, S'_n i S'_n$ — теоремы системы ТС | 3 |
| 5. $(S_1 i S_1 \& S'_1 i S'_1) \& \dots \& (S_n i S_n \& S'_n i S'_n)$ | 4, ЛВ |
| 6. $B \equiv B$ | ЛВ |
| 7. $B \equiv ((S_1 i S_1 \& S'_1 i S'_1) \& \dots \& (S_n i S_n \& S'_n i S'_n)) \supset B$ | 5, 6, ЛВ |

Таким образом, все три части критерия Смирнова выполняются. Следовательно, ТС погружается в НФС посредством ψ_1 . В работе [3] показана погружаемость системы НФС в систему обобщенной позитивной силлогистики (ОФС) посредством функции ψ_1 . В свою очередь, доказана погружаемость системы ОФС в исчисление предикатов посредством перевода * [5]. Из данных утверждений получаем, что ТС погружается в исчисление предикатов посредством композиции функций $\psi_1, \psi_1, *$. Остается показать, что данная композиция равносильна переводу силлогистических формул, предложенному М.Н. Бежанишвили и Л.И. Мchedlishvili.

Напомним, что язык ОФС содержит новые силлогистические константы: u — аналог отношения исчерпываемости и q — аналог отношения неисчерпываемости. В результате появляются два новых типа формул: SuP — «Всякий объект есть S или P » и SqP — «Некий объект не есть ни S , ни P ».

Перевод * силлогистических формул ОФС в язык исчисления

предикатов задан следующим образом:

$$\begin{aligned}
 (SaP)^* &= \forall x(Sx \supset Px) & (SiP)^* &= \exists x(Sx \& Px) \\
 (SeP)^* &= \forall x(Sx \supset \neg Px) & (SoP)^* &= \exists x(Sx \& \neg Px) \\
 (SuP)^* &= \forall x(Sx \vee Px) & (SqP)^* &= \exists x(\neg Sx \& \neg Px) \\
 (\neg A)^* &= \neg(A)^* & (A \bullet B)^* &= (A)^* \bullet (B)^*,
 \end{aligned}$$

где $\bullet$ — любая бинарная связка.

Для определения перевода ψ_1 из НФС в ОФС на термах языка негативной фундаментальной силлогистики задается функция f :

$$\begin{aligned}
 f(S)=0 & \text{ е.т.е. число терминных отрицаний в терме } S \text{ четно} \\
 & \text{ или } S \text{ не содержит терминных отрицаний;} \\
 f(S)=1 & \text{ е.т.е. число терминных отрицаний в терме } S \text{ нечетно.}
 \end{aligned}$$

Полагается, что S и P — это неотрицательные общие термины, входящие в состав S и P соответственно.

В связи с тем, что в НФС мы имеем дело со схемами формул и каждый параметр для терма в них представляет собой простой неотрицательный термин с произвольным количеством отрицаний, то для каждой из формул мы будем иметь количество переводов в язык ОФС, равное 2^n , где n — число термов.

$$\begin{aligned}
 \psi_1(SaP) &= \begin{array}{l} SaP, \text{ если } f(S)=0 \text{ и } f(P)=0 \\ SeP, \text{ если } f(S)=0 \text{ и } f(P)=1 \\ SuP, \text{ если } f(S)=1 \text{ и } f(P)=0 \\ PaS, \text{ если } f(S)=1 \text{ и } f(P)=1 \end{array} & \psi_1(SiP) &= \begin{array}{l} SiP, \text{ если } f(S)=0 \text{ и } f(P)=0 \\ SoP, \text{ если } f(S)=0 \text{ и } f(P)=1 \\ PoS, \text{ если } f(S)=1 \text{ и } f(P)=0 \\ SqP, \text{ если } f(S)=1 \text{ и } f(P)=1 \end{array} \\
 \psi_1(SeP) &= \begin{array}{l} SeP, \text{ если } f(S)=0 \text{ и } f(P)=0 \\ SaP, \text{ если } f(S)=0 \text{ и } f(P)=1 \\ PaS, \text{ если } f(S)=1 \text{ и } f(P)=0 \\ SuP, \text{ если } f(S)=1 \text{ и } f(P)=1 \end{array} & \psi_1(SoP) &= \begin{array}{l} SoP, \text{ если } f(S)=0 \text{ и } f(P)=0 \\ SiP, \text{ если } f(S)=0 \text{ и } f(P)=1 \\ SqP, \text{ если } f(S)=1 \text{ и } f(P)=0 \\ PoS, \text{ если } f(S)=1 \text{ и } f(P)=1 \end{array} \\
 \psi_1(\neg A) &= \neg \psi_1(A) & \psi_1(A \bullet B) &= \psi_1(A) \bullet \psi_1(B), \\
 & & \text{где } \bullet & \text{— любая бинарная связка.}
 \end{aligned}$$

Покажем, что композиция функций $\psi_1, \psi_1, *$ равносильна модификации перевода силлогистических формул, предложенного М.Н. Бежанишвили и Л.И. Мчедлишвили.

Если $f(S) = 0, f(P) = 0$, то

$$(\psi_1(\psi_1(SaP)))^* = (\psi_1(((SiS \& S'iS') \& (PiP \& P'iP')) \supset SaP))^* =$$

$$\begin{aligned}
&= (((SiS \& S'iS') \& (PiP \& P'iP')) \supset SaP)^* = \\
&= (\exists x(Sx \& Sx) \& \exists x(\neg Sx \& \neg Sx) \& \exists x(Px \& Px) \& \exists x(\neg Px \& \neg Px)) \supset \\
&\forall x(Sx \supset Px) \equiv (\exists x Sx \& \exists x \neg Sx \& \exists x Px \& \exists x \neg Px) \supset \forall x(Sx \supset Px)
\end{aligned}$$

Если $f(S) = 0$, $f(P) = 1$, то

$$\begin{aligned}
(\psi_1(\psi_1(SaP)))^* &= (\psi_1(((SiS \& S'iS') \& (PiP \& P'iP')) \supset SaP))^* = \\
&= (((SiS \& S'iS') \& (PiP \& P'iP')) \supset SeP)^* = \\
&= (\exists x(Sx \& Sx) \& \exists x(\neg Sx \& \neg Sx) \& \exists x(Px \& Px) \& \exists x(\neg Px \& \neg Px)) \supset \\
&\forall x(Sx \supset \neg Px) \equiv (\exists x Sx \& \exists x \neg Sx \& \exists x Px \& \exists x \neg Px) \supset \forall x(Sx \supset \neg Px)
\end{aligned}$$

Если $f(S) = 1$, $f(P) = 0$, то

$$\begin{aligned}
(\psi_1(\psi_1(SaP)))^* &= (\psi_1(((SiS \& S'iS') \& (PiP \& P'iP')) \supset SaP))^* = \\
&= (((SiS \& S'iS') \& (PiP \& P'iP')) \supset SuP)^* = \\
&= (\exists x(Sx \& Sx) \& \exists x(\neg Sx \& \neg Sx) \& \exists x(Px \& Px) \& \exists x(\neg Px \& \neg Px)) \supset \\
&\forall x(Sx \vee Px) \equiv (\exists x Sx \& \exists x \neg Sx \& \exists x Px \& \exists x \neg Px) \supset \forall x(\neg Sx \supset Px)
\end{aligned}$$

Если $f(S) = 1$, $f(P) = 1$, то

$$\begin{aligned}
(\psi_1(\psi_1(SaP)))^* &= (\psi_1(((SiS \& S'iS') \& (PiP \& P'iP')) \supset SaP))^* = \\
&= (((SiS \& S'iS') \& (PiP \& P'iP')) \supset PaS)^* = \\
&= (\exists x(Sx \& Sx) \& \exists x(\neg Sx \& \neg Sx) \& \exists x(Px \& Px) \& \exists x(\neg Px \& \neg Px)) \supset \\
&\forall x(Px \supset Sx) \equiv (\exists x Sx \& \exists x \neg Sx \& \exists x Px \& \exists x \neg Px) \supset \forall x(\neg Sx \supset \neg Px)
\end{aligned}$$

Если $f(S) = 0$, $f(P) = 0$, то

$$\begin{aligned}
(\psi_1(\psi_1(SiP)))^* &= (\psi_1(((SiS \& S'iS') \& (PiP \& P'iP')) \supset SiP))^* = \\
&= (((SiS \& S'iS') \& (PiP \& P'iP')) \supset SiP)^* = \\
&= (\exists x(Sx \& Sx) \& \exists x(\neg Sx \& \neg Sx) \& \exists x(Px \& Px) \& \exists x(\neg Px \& \neg Px)) \supset \\
&\exists x(Sx \& Px) \equiv (\exists x Sx \& \exists x \neg Sx \& \exists x Px \& \exists x \neg Px) \supset \exists x(Sx \& Px)
\end{aligned}$$

Если $f(S) = 0$, $f(P) = 1$, то

$$\begin{aligned}
(\psi_1(\psi_1(SiP)))^* &= (\psi_1(((SiS \& S'iS') \& (PiP \& P'iP')) \supset SiP))^* = \\
&= (((SiS \& S'iS') \& (PiP \& P'iP')) \supset SoP)^* = \\
&= (\exists x(Sx \& Sx) \& \exists x(\neg Sx \& \neg Sx) \& \exists x(Px \& Px) \& \exists x(\neg Px \& \neg Px)) \supset \\
&\exists x(Sx \& \neg Px) \equiv (\exists x Sx \& \exists x \neg Sx \& \exists x Px \& \exists x \neg Px) \supset \exists x(Sx \& \neg Px)
\end{aligned}$$

Если $f(S) = 1$, $f(P) = 0$, то

$$(\psi_1(\psi_1(SiP)))^* = (\psi_1(((SiS \& S'iS') \& (PiP \& P'iP')) \supset SiP))^* =$$

$$\begin{aligned}
&= (((SiS \& S'iS') \& (PiP \& P'iP')) \supset PoS)^* = \\
&= (\exists x(Sx \& Sx) \& \exists x(\neg Sx \& \neg Sx) \& \exists x(Px \& Px) \& \exists x(\neg Px \& \neg Px)) \supset \\
&\exists x(Px \& \neg Sx) \equiv (\exists xSx \& \exists x\neg Sx \& \exists xPx \& \exists x\neg Px) \supset \exists x(\neg Sx \& Px)
\end{aligned}$$

Если $f(S) = 1$, $f(P) = 1$, то

$$\begin{aligned}
(\psi_1(\psi_1(SiP)))^* &= (\psi_1(((SiS \& S'iS') \& (PiP \& P'iP')) \supset SiP))^* = \\
&= (((SiS \& S'iS') \& (PiP \& P'iP')) \supset SqP)^* = \\
&= (\exists x(Sx \& Sx) \& \exists x(\neg Sx \& \neg Sx) \& \exists x(Px \& Px) \& \exists x(\neg Px \& \neg Px)) \supset \\
&\exists x(\neg Sx \& \neg Px) \equiv (\exists xSx \& \exists x\neg Sx \& \exists xPx \& \exists x\neg Px) \supset \exists x(\neg Sx \& \neg Px)
\end{aligned}$$

Если $f(S) = 0$, $f(P) = 0$, то

$$\begin{aligned}
(\psi_1(\psi_1(SeP)))^* &= (\psi_1(((SiS \& S'iS') \& (PiP \& P'iP')) \supset SeP))^* = \\
&= (((SiS \& S'iS') \& (PiP \& P'iP')) \supset SeP)^* = \\
&= (\exists x(Sx \& Sx) \& \exists x(\neg Sx \& \neg Sx) \& \exists x(Px \& Px) \& \exists x(\neg Px \& \neg Px)) \supset \\
&\forall x(Sx \supset \neg Px) \equiv (\exists xSx \& \exists x\neg Sx \& \exists xPx \& \exists x\neg Px) \supset \forall x(Sx \supset \neg Px)
\end{aligned}$$

Если $f(S) = 0$, $f(P) = 1$, то

$$\begin{aligned}
(\psi_1(\psi_1(SeP)))^* &= (\psi_1(((SiS \& S'iS') \& (PiP \& P'iP')) \supset SeP))^* = \\
&= (((SiS \& S'iS') \& (PiP \& P'iP')) \supset SaP)^* = \\
&= (\exists x(Sx \& Sx) \& \exists x(\neg Sx \& \neg Sx) \& \exists x(Px \& Px) \& \exists x(\neg Px \& \neg Px)) \supset \\
&\forall x(Sx \supset Px) \equiv (\exists xSx \& \exists x\neg Sx \& \exists xPx \& \exists x\neg Px) \supset \forall x(Sx \supset \neg \neg Px)
\end{aligned}$$

Если $f(S) = 1$, $f(P) = 0$, то

$$\begin{aligned}
(\psi_1(\psi_1(SeP)))^* &= (\psi_1(((SiS \& S'iS') \& (PiP \& P'iP')) \supset SeP))^* = \\
&= (((SiS \& S'iS') \& (PiP \& P'iP')) \supset PaS)^* = \\
&= (\exists x(Sx \& Sx) \& \exists x(\neg Sx \& \neg Sx) \& \exists x(Px \& Px) \& \exists x(\neg Px \& \neg Px)) \supset \\
&\forall x(Px \supset Sx) \equiv (\exists xSx \& \exists x\neg Sx \& \exists xPx \& \exists x\neg Px) \supset \forall x(\neg Sx \supset \neg Px)
\end{aligned}$$

Если $f(S) = 1$, $f(P) = 1$, то

$$\begin{aligned}
(\psi_1(\psi_1(SeP)))^* &= (\psi_1(((SiS \& S'iS') \& (PiP \& P'iP')) \supset SeP))^* = \\
&= (((SiS \& S'iS') \& (PiP \& P'iP')) \supset SuP)^* = \\
&= (\exists x(Sx \& Sx) \& \exists x(\neg Sx \& \neg Sx) \& \exists x(Px \& Px) \& \exists x(\neg Px \& \neg Px)) \supset \\
&\forall x(Sx \vee Px) \equiv (\exists xSx \& \exists x\neg Sx \& \exists xPx \& \exists x\neg Px) \supset \forall x(\neg Sx \supset \neg \neg Px)
\end{aligned}$$

Если $f(S) = 0$, $f(P) = 0$, то

$$(\psi_1(\psi_1(SoP)))^* = (\psi_1(((SiS \& S'iS') \& (PiP \& P'iP')) \supset SoP))^* =$$

$$\begin{aligned}
&= (((SiS \& S'iS') \& (PiP \& P'iP')) \supset SoP)^* = \\
&= (\exists x(Sx \& Sx) \& \exists x(\neg Sx \& \neg Sx) \& \exists x(Px \& Px) \& \exists x(\neg Px \& \neg Px)) \supset \\
&\exists x(Sx \& \neg Px) \equiv (\exists xSx \& \exists x\neg Sx \& \exists xPx \& \exists x\neg Px) \supset \exists x(Sx \& \neg Px)
\end{aligned}$$

Если $f(S) = 0$, $f(P) = 1$, то

$$\begin{aligned}
(\psi_1(\psi_1(SoP)))^* &= (\psi_1(((SiS \& S'iS') \& (PiP \& P'iP')) \supset SoP))^* = \\
&= (((SiS \& S'iS') \& (PiP \& P'iP')) \supset SiP)^* = \\
&= (\exists x(Sx \& Sx) \& \exists x(\neg Sx \& \neg Sx) \& \exists x(Px \& Px) \& \exists x(\neg Px \& \neg Px)) \supset \\
&\exists x(Sx \& Px) \equiv (\exists xSx \& \exists x\neg Sx \& \exists xPx \& \exists x\neg Px) \supset \exists x(Sx \& \neg Px)
\end{aligned}$$

Если $f(S) = 1$, $f(P) = 0$, то

$$\begin{aligned}
(\psi_1(\psi_1(SoP)))^* &= (\psi_1(((SiS \& S'iS') \& (PiP \& P'iP')) \supset SoP))^* = \\
&= (((SiS \& S'iS') \& (PiP \& P'iP')) \supset SqP)^* = \\
&= (\exists x(Sx \& Sx) \& \exists x(\neg Sx \& \neg Sx) \& \exists x(Px \& Px) \& \exists x(\neg Px \& \neg Px)) \supset \\
&\exists x(\neg Sx \& \neg Px) \equiv (\exists xSx \& \exists x\neg Sx \& \exists xPx \& \exists x\neg Px) \supset \exists x(\neg Sx \& \neg Px)
\end{aligned}$$

Если $f(S) = 1$, $f(P) = 1$, то

$$\begin{aligned}
(\psi_1(\psi_1(SoP)))^* &= (\psi_1(((SiS \& S'iS') \& (PiP \& P'iP')) \supset SoP))^* = \\
&= (((SiS \& S'iS') \& (PiP \& P'iP')) \supset PoS)^* = \\
&= (\exists x(Sx \& Sx) \& \exists x(\neg Sx \& \neg Sx) \& \exists x(Px \& Px) \& \exists x(\neg Px \& \neg Px)) \supset \\
&\exists x(Px \& \neg Sx) \equiv (\exists xSx \& \exists x\neg Sx \& \exists xPx \& \exists x\neg Px) \supset \exists x(\neg Sx \& \neg Px)
\end{aligned}$$

Литература

- [1] Бежанишвили М.Н., Мchedlishvili Л.И. Позитивная силлогистика и логика предикатов // Логика Аристотеля. Тбилиси, 1985.
- [2] Бочаров В.А. Алгебраические реконструкции силлогистики // Логико-методологические исследования. М., 1980.
- [3] Ильин А.А. Негативная фундаментальная силлогистика // Труды научно-исследовательского семинара логического центра Института философии РАН. Вып. 15. М., 2000.
- [4] Лукасевич Я. Аристотелевская силлогистика с точки зрения современной формальной логики. М., 1983.
- [5] Маркин В.И. Обобщенная позитивная силлогистика // Логические исследования. Вып. 6. М., РОССПЭН, 1999.
- [6] Маркин В.И. Силлогистические теории в современной логике. М.: МГУ, 1991.
- [7] Смирнов В.А. Логические методы анализа научного знания. М., 1987.

На пути к протологике¹

А. С. КАРПЕНКО

ABSTRACT. This paper is devoted to the problem of the foundations of logic. The path of development of logic towards generalization and abstraction is traced. The central notions here are minimal logic, basic logic, abstract logic, universal logic, protologic.

Ключевые слова: минимальная логика, базисная логика, абстрактная логика, универсальная логика, протологика

1 Введение

Ровно через сто лет после выхода в 1879 г. в свет знаменитой работы Г. Фреге «Begriffsschrift» [12], в которой вводятся предикаты, отрицание, условная связь (the conditional) и кванторы как основа логики, а также введена идея формальной системы, в которой демонстрации должны осуществляться посредством явно сформулированных синтаксических правил, после ста лет триумфального развития логики как самостоятельной науки вдруг появляется статья Я. Хэкинга под названием «Что есть логика?» [35]. В ней высоко оценивается введение Г. Генцена структурных правил, работа с которыми позволяет выражать те аспекты логических систем, которые не имеют непосредственного отношения к логическим константам, ставится вопрос о логических константах и четко обозначается смена парадигмы от изучения истин к теоретико-доказательным методам, которые, в свою очередь, и являются основанием для введения логических операций. Основная идея Хэкинга заключается в том, что логические системы можно представлять по-разному.

Статья Хэкинга переиздается и открывает собой большой сборник работ под названием «Что есть логическая система?» [32], который издается в Англии и Америке. Заметим, что

¹Работа выполнена при поддержке РГНФ, грант № 11-03-00761а.

в этой книге также опубликована статья Дж. Ламбека под названием «Что есть дедуктивная система?» [40], в которой выделяется пять стилей дедуктивных систем. В этом же году и с тем же названием, что и статья Хэкинга, публикуется философская работа Хао Вана [49], которая открывается определениями логики, начиная от Канта и вплоть до Гёделя и заканчивается характеристикой логики, данной Л. Витгенштейном в 1921 г. в его «Трактате...»: «*Логика трактует каждую возможность, и все возможности суть ее факты* (2.0121)» [1]. Интересно, что в этом же 1994 году под названием «Что есть истинная элементарная логика?» появляется статья выдающегося логика и философа Яакко Хинтикки [37], в которой развивается *новая* концепция первопорядковой логики (см. также его совместную статью с Г. Санду «Революция в логике?» [38]). К работам Я. Хинтикки мы еще вернемся.

Ввиду сказанного нас интересует следующая проблема: почему после столь бурного и триумфального развития современной логики, начиная с работ Дж. Буля (середина XIX в.), вдруг в научной литературе в конце XX в. стал активно обсуждаться вопрос: «*Что есть логика*»? (см. также [5] и [39]). Сам этот вопрос говорит о *кризисе* в основаниях логики, приведшем к полной переоценке самого статуса логики и её назначения. Интересен анализ причин произошедшего.

2 Кризис в основаниях логики

Стоит заметить, что традиционный подход к пониманию логики весьма подкупает тем, что логику в нем можно попытаться определить посредством совокупности логических законов, ее задающих. Тогда одной из причин кризиса оснований логики является критика основных законов логики², предпринятая еще в начале XX в. Л. Брауэром (закон исключенного третьего), Н.А. Васильевым и Я. Лукасевичем (закон непротиворечия). Результатом стало появление различных систем интуиционистских и паранепротиворечивых логик. Затем подверглись критике основные свойства материальной (классической) импликации К. Льюисом (1912) и свойства строгой импликации В. Аккерманном (1956).

²См. в [6] раздел «Содержательная критика основных законов и принципов классической логики высказываний».

В результате появились многочисленные системы модальных и релевантных логик.

Подчеркнем, что критика основных законов классической логики продолжалась целое столетие и приняла тотальный характер, когда, казалось, совсем незыблемые законы были отвергнуты. Так, был отвергнут импликативный закон идентичности $A \supset A$, поскольку, согласно Э. Шрёдингеру, этот закон в общем случае не имеет места для микрообъектов. Такие логики получили название «логики Шрёдингера» [30]. Также не выдержал испытания и импликативный закон сильной транзитивности $(A \rightarrow B) \rightarrow ((B \rightarrow C) \rightarrow (A \rightarrow C))$ [43]. Из всего этого следует, что если сделать теоретико-множественное пересечение логических систем относительно верификации законов классической логики, то в результате получим *пустое множество*. Отсюда можно сделать один очень важный вывод: не существует какой-либо *выделенной* системы логики. Хотя время от времени появлялись и появляются все новые логики, каждая из которых представляет особый интерес в силу своих приложений или металогических свойств³.

Главным следствием всего этого процесса стало появление огромного класса новых логических систем. Было установлено, что существуют бесконечные классы логик, а в большинстве случаев эти классы *континуальны*. Первый результат в этой области был получен российским логиком В.А. Янковым [15], где было показано, что мощность класса суперинтуиционистских логик есть континуум. Более того, оказалось, что континуальность классов логик является не исключением, а нормой [3]. В связи с этим обратим внимание на главнейшую тенденцию развития современной логики, которая заключается в том, что

³Стоит заметить, что в последнее время такой логикой стала система, созданная Я. Хинтиккой и названная им **IF**-логикой (см. [37], а также [38]). **IF**-логика представляет собой расширение классической логики предикатов за счет введения ветвящихся кванторов. Следствием этого явилась ее семантическая неполнота. Таким образом, **IF**-логика не является аксиоматизируемой. Но в то же время она удовлетворяет свойствам компактности и Лёвенгейма–Скулема, а также обладает интерполяционным свойством. Несмотря на это **IF**-логика по своим выразительным возможностям очень богата и сравнима со второпорядковой логикой. В силу таких ее возможностей Хинтикка считает эту логику наиболее пригодной для решения проблем оснований математики.

изучается не какая-то специфическая логическая система, какой бы она ни была интересной, а подвергается исследованию некоторый класс логик в виде определенной структуры⁴.

В итоге главная проблема, порожденная кризисом в основаниях логики, может быть сформулирована следующим образом: Имеется ли все-таки одна «истинная» логика и если нет, то как мы можем ограничить наше понимание логики или, более конкретно, понимание логической системы. Обратим внимание, что статья А. Тсарпа так и называется: «Какая логика является правильной логикой?» [46]. Видимо, стоит согласиться с Дж. ван Бентемом и К. Дэтсом [48, р. 326], что «никакая специфическая теория не является священной в современной логике». Учитывая исключительное развитие неклассических логик, стоит констатировать, что подобный ответ является вызовом для всех логиков-исследователей. Тогда можно поставить вопрос следующим образом: «Как логика в лице своих известных представителей отвечает на этот вызов?»

3 Минимальная логика

Понятие минимальной логики имеет смысл в некотором хорошо определенном классе неклассических логик. Например, в классе модальных льюисовских систем таковой является модальная логика **K**, которая получается посредством добавления к классической логике лишь аксиомы

$$\Box(A \rightarrow B) \rightarrow (\Box A \rightarrow \Box B).$$

Иногда логика **K** называется *базисной* в силу того, что в семантике Крипке для модальных логик на отношение достижимости не накладывается никаких ограничений. Другими словами, множество формул логики **K** общезначимо во всех шкалах Крипке (см. [24]). Другим примером является минимальная временная логика **K_t**, которая получается за счет добавления к классической логике минимального числа аксиом с временными операторами (см. [4]).

Но нас больше интересует тенденция в сторону ограничения логических законов до их некоторого минимума. Уже на самом

⁴Например, в [26] глава 4 называется «От логик к классам логик».

раннем этапе четко обозначилась тенденция попытаться определить систему «минимальной логики». Уже в 1936 г. И. Йохансон определила «минимальное исчисление», которым оказалось ослабление интуиционистской логики **H** за счет отбрасывания закона Дунса Скота $A \rightarrow (\neg A \rightarrow B)$: «из противоречия следует все что угодно». Эта система обозначается посредством **J** и может быть аксиоматизирована следующим образом: к позитивной логике Гильберта⁵ добавляется аксиома

$$((A \rightarrow B) \& (A \rightarrow \neg B)) \rightarrow \neg A.$$

Стоит отметить, что А.Н. Колмогоров в 1925 г. в знаменитой статье «О принципе *tertium non datur*» [7]), разделяя критику закона исключенного третьего Л. Брауэром, подвергает также критике закон Дунса Скота. В результате строится первое в мире предикатное паранепротиворечивое исчисление (импликативно-негативное)⁶. Тогда пропозициональную *минимальную логику Колмогорова* можно аксиоматизировать следующим образом. К импликативному фрагменту позитивной логики Гильберта, который обозначим посредством **H**_→:

$$\text{K. } A \rightarrow (B \rightarrow A)$$

$$\text{S. } (A \rightarrow (B \rightarrow C)) \rightarrow ((A \rightarrow B) \rightarrow (A \rightarrow C))^7,$$

добавляется закон приведения к абсурду

$$((A \rightarrow B) \rightarrow ((A \rightarrow \neg B) \rightarrow \neg A)).$$

Заметим, что для логик, содержащих в качестве фрагмента

⁵Позитивная логика введена Гильбертом в 1934 г. (см. [2, с. 99]) и представляет собой такую систему логики, что добавление к ней закона Пирса $((A \rightarrow B) \rightarrow A) \rightarrow A$ дает позитивный фрагмент пропозициональной классической логики.

⁶См. также [9].

⁷Логика **H**_→ под названием «позитивная импликативная логика» была введена Гильбертом в 1922 г. и представляет собой следующую систему аксиом, эквивалентную приведенной:

$$\text{B. } (B \rightarrow C) \rightarrow ((A \rightarrow B) \rightarrow (A \rightarrow C))$$

$$\text{C. } (A \rightarrow (B \rightarrow C)) \rightarrow (B \rightarrow (A \rightarrow C))$$

$$\text{W. } (A \rightarrow (A \rightarrow B)) \rightarrow (A \rightarrow B)$$

$$\text{K. } A \rightarrow (B \rightarrow A).$$

$\mathbf{H}_{\supset}$, имеет место *стандартная* теорема дедукции. Отметим также, что удивительным образом простейшие типы для базовых комбинаторов соответствуют аксиомам логики $\mathbf{H}_{\rightarrow}$ [28]. Это так называемый *изоморфизм Карри–Ховарда*, который устанавливает, что полное множество исходных комбинаторов (например, **B**, **C**, **W**, **K**) определяет собой импликативный фрагмент интуиционистской пропозициональной логики, т.е. $\mathbf{H}_{\rightarrow}$.

Известно, что комбинаторная логика тесно связана с λ -исчислением, построенным А. Чёрчем в начале 1930-х годов. Таким образом, имеется изоморфизм между $\mathbf{H}_{\rightarrow}$ и типизированными замкнутыми λ -термами. В итоге можно было бы считать, что логика $\mathbf{H}_{\rightarrow}$ является прекрасным кандидатом на роль минимальной логики.

Однако в 1951 г. появляется статья А. Чёрча «Минимальная логика» [25], где строится «слабое позитивное импликативное исчисление». Эта логика получается из $\mathbf{H}_{\rightarrow}$ посредством замены формулы $A \supset (B \supset A)$ на формулу $A \supset A$, которой соответствует комбинатор **I**. Впоследствии оказалось, что полученная логика является импликативным фрагментом релевантной логики **R** (эта логика стала обозначаться посредством $\mathbf{R}_{\rightarrow}$, т.е. $\mathbf{R}_{\rightarrow}$ есть **B**, **C**, **W**, **I**). Для этой логики Чёрчем была доказана ослабленная теорема дедукции и было установлено соответствие между $\mathbf{R}_{\rightarrow}$ и исчислением $\lambda\mathbf{I}$.

В 1956 г. К.А. Мерedit вводит систему **B**, **C**, **I**, при этом также обращая внимание на соответствие между импликативными формулами и комбинаторами. Обратим внимание на то, что в последнее время получила развитие так называемая *линейная логика*, введенная Дж. Жираром [33] и нашедшая широкое применение в компьютерных науках. Ее взаимоотношение с другими логиками, и в особенности с релевантными, исследованы А. Авроном [18]. В этой работе $\mathbf{HL}_{\rightarrow}$ обозначает импликативный фрагмент данной линейной логики, который в точности совпадает с аксиомами **B**, **C**, **I**. Аврон следующим образом определяет $\mathbf{HL}_{\rightarrow}$: «минимальная система, соответствующая линейному доказательству», которое, в свою очередь, определяется так: «Линейное доказательство есть классическое доказательство, в котором каждое вхождение формулы, отличной от последней, используется в точности один раз в качестве посылок МР».

Исходя из идеи Чёрча о минимальной логике, Х. Карри [27] обобщает теорему дедукции для логики **IB**. Таким образом, импликативную логику **IB** можно было бы считать минимальной логикой. Идея о минимальной логике оказалась очень близкой специалистам в области релевантной логики. А. Уркварт [47, р. 168] формулирует «минимальную импликативную логику в смысле Чёрча», которая отличается от **IB** тем, что кроме правила МР имеется также правило: *из A следует $(A \rightarrow B) \rightarrow B$* . Характерной чертой этой логики, замечает Уркварт, является отсутствие структурных правил при ее секвенциальной формулировке. Интересно, что в этом же году импликативная логика с аксиомами **I** и **B** была рассмотрена также В.А. Смирновым [11, с. 72-74], при этом доказана теорема дедукции, которая имеет место при наличии следующей теоремы: «если существует доказательство формулы D , то существует доказательство формулы $(A \rightarrow (D \rightarrow B)) \rightarrow (A \rightarrow B)$ ». А. Андерсон и Н. Белнап в [16, § 8.11] в качестве минимальной логики предложили считать систему **IBB'** (с правилом МР), где аксиома **B'** есть закон сильной транзитивности (см. выше). Тема получила дальнейшее развитие в [17, р. 149], где таковой объявляется логика, предложенная А. Урквартом. Эту логику Андерсон и Белнап обозначали посредством $\mathbf{M}_{\rightarrow}$. Для нее строится модель $\langle S, v \rangle$ такая, что S есть ассоциативный моноид, и множество всех формул, истинных во всех $\langle S, v \rangle$ -моделях, аксиоматизируется посредством логики $\mathbf{M}_{\rightarrow}$.

Поскольку понятие моноида удовлетворяет условиям быть категорией, то данное понятие минимальной логики также обладает данными свойствами. Другими словами, дедуктивная система, отношение следования (дедущируемости) которой рефлексивно и транзитивно, является категорией. Поэтому с полным основанием логику $\mathbf{M}_{\rightarrow}$ можно было бы считать минимальной логической системой. Однако не очень понятно, почему в основе логических рассуждений должна лежать структура ассоциативного моноида? Более того, К. Дошен в качестве минимальной логики предлагает считать *неассоциативное* исчисление Ламбека с единственной бинарной связкой «мультипликации» [31, р. 20].

4 Базисная логика

Другая тенденция заключается в выборе некоторой *базисной логики*. Однако сразу стоит сказать, что такой выбор является весьма произвольным и имеет смысл только для определенного класса логик. Например, в классе всех нормальных модальных логик таковой является логика **K**. В качестве базисной логики предлагается также полное исчисление Ламбека **FL**. Грубо говоря, это интуиционистская логика без структурных правил (см. [42]). Кроме комбинирования **FL** со структурными правилами, соответствующими формулам **C**, **W** и **K**, к некоторым логикам добавляется еще закон снятия двойного отрицания $\neg\neg A \rightarrow A$. Интересной работой является [20], где вводится базисная логика **B** и строится ее секвенциальное исчисление⁸. Эта логика вообще не имеет структурных правил и может рассматриваться как «логика связей». Комбинирование последней осуществляется с тремя независимыми свойствами **C**, **D** и **S**, где **C** есть правила для снятия двойного отрицания, **D** состоит из обычных свойств импликации, удовлетворяющих теореме дедукции, и **S** есть структурные правила, соответствующие формулам **W** и **K**, плюс идентификация двух констант, выражающих ложь. Восемь возможных комбинаций свойств **C**, **D** и **S** продуцируют куб логик. В частности, добавление **C** и **D** к **B** дает линейную логику Жирара, добавление **D** и **S** дает интуиционистскую логику, добавление **C** и **S** дает ортологику и, наконец, добавление **C**, **D** и **S** дает классическую логику.

Последнее время распространение получила базисная *нечеткая* логика **BL** [36], которая получается за счет ослабления бесконечнозначной логики Лукасевича⁹.

⁸Эта логика введена в 1995 г.

⁹Ради полноты изложения приведем формулировку базисной логики, введенной А. Авроном в [19]. Это позитивный фрагмент классической пропозициональной логики **C**₂, плюс законы де Моргана и аксиомы $\sim\sim A \approx A$, $\sin(A \Rightarrow B) \approx A \wedge \sim B$. Впервые аксиоматизация этой логики появилась в [10], где она обозначена посредством **Par**. Если теперь добавить $A \vee \sim A$, то получим в точности аксиоматизацию трехзначной паранепротиворечивой логики **Pcont**. Если же добавить $A \rightarrow (\sim A \rightarrow B)$, то получим аксиоматизацию трехзначной логики, которая функционально эквивалентна трехзначной логике Лукасевича **L**₃. Если же добавим одновременно обе эти формулы, продолжает А. Аврон, то получим аксиоматизацию классической логики **C**₂.

Таким образом, смысл обоих указанных подходов, а именно выбор минимальной или базисной логики, заключается в том, что предлагается какой-то минимум логических средств и затем посредством различных расширений получают известные логические исчисления вплоть до самой классической логики. На самом деле вся исходная парадигма неверна: в основу берется классическое пропозициональное исчисление, и затем добавляются или, как мы видели, отбрасываются те или иные законы этой логики. Но остается открытым вопрос об обосновании полученного минимума или базиса логических средств, не говоря уже об обоснованности самого корпуса классической логики. Если делаются какие-то предпосылки, то на чем они основаны? В идеале хотелось бы вычленить какое-то логическое «ядро», не основываясь ни на каких жестких предпосылках.

5 Абстрагирование и обобщение

Пока мы рассмотрели философскую сторону дела. Однако параллельно с указанными тенденциями в недрах математической логики развивалась тенденция в сторону максимального обобщения или абстрагирования понятия логики.

В польской школе логиков получило распространение определение пропозициональной логики, введенное А. Тарским в 1930 г. (см. [44], [45]). Пусть $\mathcal{P}(A)$ есть множество всех подмножеств множества A . *Оператором замыкания* на множестве A называется отображение $C: \mathcal{P}(A) \rightarrow \mathcal{P}(A)$, которое удовлетворяет следующим условиям для каждого $X, Y \subseteq A$:

- (C1) $X \subseteq C(X)$ (рефлексивность),
- (C2) $CC(X) = C(X)$ (идемпотентность),
- (C3) Если $X \subseteq Y$, то $C(X) \subseteq C(Y)$ (монотонность).

Подмножество X из A называется *замкнутым подмножеством*, если $C(X) = X$.

А. Тарский [44] находит удивительное применение оператору замыкания для изучения *абстрактного* отношения следования. Пусть A есть множество всех формул Fm в пропозициональном языке $\mathcal{L}$. Тогда оператор замыкания C называется *операцией присоединения следствий* (consequence operation) и обозначается посредством Cn , т.е. Cn есть операция, которая, примененная

к множествам формул, позволяет получать новые множества формул. Пусть X есть множество предложений, тогда $Cn(X)$ обозначает множество всех предложений, которое может быть дедуцировано из X . Операция присоединения следствий Cn называется *структурной* (или *инвариантной относительно подстановки*), если для всех подстановок e (эндоморфизмов) пропозиционального языка $\mathcal{L}$ выполняется условие

$$(C4) \quad e(Cn(X)) \subseteq Cn(e(X)).$$

Под *логикой* (пропозициональной) понимается пара $\langle Fm, Cn \rangle$, где абстрактная операция присоединения следствий Cn является *структурной*. Изучению основных свойств операции присоединения следствий посвящена фундаментальная монография Р. Вуйцицкого [51]. Связь между операцией Cn и обычным отношением выводимости $\vdash$ очевидна:

$A_1, A_2, \dots, A_n \vdash B$ тогда и только тогда, когда $B \in Cn(\{A_1, A_2, \dots, A_n\})$.

В 1969 г. Р. Вуйцицкий вводит понятие «обобщенной логической матрицы» [50]. Обобщенная матрица есть пара $\mathbf{A} = \langle \mathbf{A}, C \rangle$, где $\mathbf{A}$ есть алгебра соответствующего типа и $C \subseteq \mathcal{P}(\mathbf{A})$ есть произвольное семейство подмножеств $\mathbf{A}$. Обобщенные матрицы имеют хорошо известное дуальное представление как пара $\langle \mathbf{A}, C \rangle$, где C есть оператор замыкания (см. выше). Специально обобщенным матрицам, их применению и развитию посвящена статья [34]. Наконец что в известной статье Д. Брауна и Р. Сушко [23] вводится термин «*абстрактная логика*» $\mathbf{L} = \langle \mathbf{A}, C \rangle$, где $\mathbf{A}$ есть абстрактная алгебра, а C есть абстрактная операция присоединения следствий (без структурности).

Под влиянием этих работ в 1994 г. Ж.-И. Безье вводит понятие «универсальной логики» [21] (см. также его же исторический экскурс [22]). По замыслу Безье универсальная логика имеет такое же отношение ко всем конкретным логикам, как универсальная алгебра к конкретным алгебрам. Универсальная логика подобно универсальной алгебре есть часть общей теории структур и поэтому центральный вопрос заключается в следующем: какого вида структуры являются логическими структурами? В качестве ответа Безье идет по пути дальнейшего обобщения тео-

рии Тарского об операторе присоединения следствий. В результате под логической структурой понимается пара $\langle \mathbb{S}, \vdash \rangle$, где первым членом является некоторая структура без всякой спецификации, т.е. $\mathbb{S}$ не обязательно является алгебраической структурой, а вторым членом является отношение следования $\vdash$, где $\vdash$ есть подмножество $\mathcal{P}(\mathbb{S}) \times \mathbb{S}$. Заметим, что в отличие от оператора Cn на $\vdash$ не накладывается никаких ограничений.

Обратим внимание, что параллельно с этим в среде *прикладной* логики все большее распространение стало получать представление логики в виде *функциональной системы*¹⁰, т.е. логика есть пара $\langle P_n, C \rangle$, где P_n есть множество n -значных функций, а C есть операция суперпозиции, определенная на этом множестве. Если вместо P_n берем множество булевых функций, то получаем модель для классической пропозициональной логики. Заметим, что множество всех функций, которые могут быть получены из функций системы $\mathfrak{A}$ с помощью операции суперпозиции, называется замыканием $\mathfrak{A}$ и обозначается посредством $[\mathfrak{A}]$. Очевидно, что операция $[\]$ обладает указанными выше свойствами (C1)–(C3). Таким образом, здесь мы имеем еще один пример конкретизации оператора замыкания C .

Однако подчеркнем, что все эти подходы, развиваемые в русле абстрагирования, обобщения и универсализации понятия логики, обладают одним и тем же серьезным недостатком: в основе лежат очень сильные допущения. Так, в основе абстрактной логики и логики как функциональной системы лежит различная конкретизация топологического оператора замыкания, а в основе универсальной логики — обобщение этого оператора. В начале XX в. идеи топологии были очень популярны в среде польских математиков и логиков, но это не значит, что свойства данного оператора замыкания должны детерминировать некоторое «ядро» человеческих рассуждений.

6 Протолика

Итак, возникает естественный вопрос, а можно ли выделить некоторое *протологическое* ядро, которое априорно лежит в ос-

¹⁰Начало положено работами российских математиков А.В. Кузнецова и С.В. Яблонского и далее развито В.Б. Кудрявцевым, С.С. Марченковым и др. См. [8] и [41].

нове человеческих рассуждений и не основывается ни на каких труднообъяснимых допущениях. Для этого необходимо вначале выделить ту естественную среду, которая априорно детерминирует некоторые исходные (прото)схемы рассуждений. Такой средой является человеческий язык, в котором оформляются все добытые знания. Но при этом «мы должны отвлечься от всякой специфики конкретных языков и взглянуть на них лишь как на абстрактные знаковые системы» [14]. Только при таком подходе мы можем подойти к построению логики, освобожденной от всяческих онтологических и эпистемологических допущений.

Прорыв в этой области совершен работами В.И. Шалака (см., в особенности, [13]), где вводится понятие протологического следования: *Из посылок $\Sigma = \{B_1, \dots, B_n\}$ протологически следует выражение A , если и только если существует правило R , позволяющее на основании значений посылок Σ определить значение выражения A .*

Далее строится *протологика* — система правил знаковых преобразований — аналогов логических умозаключений. Протологику можно представить как пару, где имеется множество абстрактных знаков, структурированное группоидной операцией.

Дедукция осуществляется с помощью следующих трех правил:

1. Правила введения констант.
2. Правила построения термов.
3. Правила замены на основе ранее принятых определений.

Оказалось, что протологика в строго определенном смысле полна относительно комбинаторной логики и λ -исчисления Чёрча, а это означает ни много, ни мало, что в протологике выразимы все эффективно вычислимые функции. Многие математические объекты оказались имплицитно содержащимися в абстрактных языковых структурах. Нет ничего удивительного, что пространственно разделенные культуры приходили к одним и тем же вычислительным математическим структурам. Им для этого не требовалось никакой развитой логики, а требовалось всего лишь владение собственным языком.

Вычислимость — главное свойство протологики. В итоге получаем реализацию программы Лейбница: *рассуждения заменяются вычислениями.*

Для сравнения с различными «минимальными» и «базисными» логиками, рассмотренными выше, приведем натуральную формулировку протобулевой логики, т.е. протологики с истинностно-значными термами:

$$\begin{array}{ll}
 \text{N.1} & \frac{\emptyset}{A \vee \neg A} \\
 \text{N.2} & \frac{A}{\neg A} \\
 \text{N.3} & \frac{A, B}{A \& B} \\
 \text{N.4} & \frac{\vdash A \equiv B, A}{B}
 \end{array}$$

Как известно, человеческие рассуждения зачастую являются противоречивыми и иррациональными. Приведенные выше четыре правила составляют рациональное ядро логики, априорно присущей человеческим существам, владеющим той или иной знаковой системой.

Литература

- [1] *Витгенштейн Л.* Логико-философский трактат. М.: Иностранная Литература, 1958.
- [2] *Гильберт Д., Бернайс П.* Основания математики. Логические исчисления и формализация арифметики. М.: Наука, 1979.
- [3] *Горбунов И.А., Рыбаков М.Н.* Континуальные семейства логик // Логические исследования. 2007. Вып. 14. С. 131-151.
- [4] *Ишмуратов А.Т.* Логические теории временных контекстов. Киев: Наукова Думка, 1981.
- [5] *Карпенко А.С.* Логика на рубеже тысячелетий // Логические исследования. 2000. Вып. 7. С. 7-60.
- [6] *Карпенко А.С.* Неклассические логики versus классической // Логико-философские штудии. 2005. Вып. 3. С. 48-73.
- [7] *Колмогоров А.Н.* О принципе tertium non datur // Математический сборник. 1925. Вып. 32. №4. С. 668-677. (Переиздано: А.Н. Колмогоров. Избранные труды. Математика и механика. М., 1985).
- [8] *Кудрявцев В.Б.* О функциональных системах. М.: ВЦ АН СССР, 1981.
- [9] *Плиско В.Е.* Исчисление Колмогорова как фрагмент минимального исчисления // Успехи математических наук. 1988. Вып. 43. №1. С. 79-91.
- [10] *Попов В.М.* Секвенциальные формулировки паранепротиворечивых логических систем // Синтаксические и семантические исследования неэкстенсивных логик. М.: Наука, 1989. С. 285-289.
- [11] *Смирнов В.А.* Формальный вывод и логические исчисления. М.: Наука, 1972.
- [12] *Фреге Г.* Исчисление понятий, язык формул чистого мышления, построенный по образцу арифметического // Фреге Г. Логика и логическая семантика. М.: Аспект Пресс, 2000. С. 65-142.
- [13] *Шалак В.И.* Протологика: новый взгляд на природу логического // Диссертация на соискание ученой степени доктора философских наук. М.: ИФ РАН, 2010.
- [14] *Шалак В.И.* Два подхода к построению логики // Логические исследования. 2011. Вып. 17. (См. данный сборник).

- [15] Янков В.А. Построение последовательности сильно независимых суперинтуиционистских пропозициональных исчислений // Доклады Академии Наук СССР. 1968. Вып. 181. №1. С. 33-34.
- [16] Anderson A.R. and Belnap N.D. Entailment: The Logic of Relevance and Necessity. Princeton Univ. Press, 1975.
- [17] Anderson A. R., Belnap N. D. and Dunn J.M. Entailment: The logic of Relevance and Necessity. Vol. 2. Princeton Univ. Press, 1992.
- [18] Avron A. The semantics and proof theory of linear logic // Theoretical Computer Science. 1988. Vol. 57. P. 161-184.
- [19] Avron A. Natural 3-valued logics - characterization and proof theory // The Journal of Symbolic Logic. 1991. Vol. 56. №1. P. 276-294.
- [20] Battilotti G. and Sambin G. Basic logic and the cube of its extensions // A. Cantini (eds.). Logic and Foundations of Mathematics. Dordrecht: Kluwer, 1999. P. 165-186.
- [21] Béziau J.-Y. Universal logic // Childers T. and Majer O. (eds.) Logica' 94 Proceedings of the 8th International Symposium. Prague, 1994. P. 73-93.
- [22] Béziau J.-Y. From consequences operator to Universal logic: A Survey of general Abstract logic // J.-Y. Béziau (ed.). Logica Universalis. Birkhäuser Verlag, 2005. P. 3-17.
- [23] Brown D.J. and Suszko R. Abstract logics // Dissertationes Mathematicae. 1973. Vol. 102. P. 7-41.
- [24] Chagrov A. and Zakharyashev M. Modal Logic. Oxford: Clarendon Press, 1997.
- [25] Church A. The weak theory of implication // Kontrolliertes Denken, Untersuchungen zum Logikkalkül und der Logik der Einzelwissenschaften. München, 1951. P. 22-37. (Abstract: The weak positive implicational propositional calculus // The Journal of Symbolic Logic. 1951. Vol. 16. №3. P. 238.).
- [26] Chagrov A. and Zakharyashev M. Modal Logic. Oxford: Clarendon Press, 1997.
- [27] Curry H.B. Generalization of the deduction theorem // Proceedings of International Congress of Mathematicians. 1954. Vol. 2. Amsterdam. P. 399-400.
- [28] Curry H.B., Feys R. Combinatory Logic. Vol. I. Amsterdam: North-Holland Co., 1958.
- [29] Curry H.B. Generalisation of the deduction theorem // Proceedings of the International Congress of Mathematicians. 1954. Vol. 2. Amsterdam. P. 399-400.
- [30] Da Costa N.C.A. and Krause D. Schrödinger logics // Studia Logica. 1994. Vol. 53. P. 533-550.
- [31] Došen K. A historical introduction to substructural logics // K. Dožen and P. Schroeder-Heister (eds.) Substructural Logics. Oxford: Clarendon Press, 1993.
- [32] Gabbay D. M. (ed.) What is a logical system? Oxford: Clarendon Press, 1994 (and New York 1995).
- [33] Girard J.Y. Linear logic // Theoretical Computer Science. 1987. Vol. 50. P. 1-102.
- [34] Font J.M. Generalized matrices in abstract algebraic logic // V.F. Hendricks and J. Malinowski (eds.). Trends in Logic: 50 Years of Studia Logica. Dordrecht: Kluwer, 2003. P. 57-86.
- [35] Hacking I. What is logic? // The Journal of Philosophy. 1979. Vol. 76. №6. (Reprinted in: [Gabbay (ed.), 1994]. P. 1-33).
- [36] Hájek P. Metamathematics of Fuzzy Logic. Dordrecht: Kluwer, 1998.
- [37] Hintikka J. What is true elementary logic? // K. Gavroglu, J. Stachel and M. Wartofsky (eds.). Physics, philosophy and the scientific community. Dordrecht: Kluwer, 1994. P. 301-326.
- [38] Hintikka J. and Sandu G. A revolution in logic? // Nordic Journal of Philosophical Logic. 1996. Vol. 1. №2. P. 169-183.
- [39] Karpenko A.S. Modern study in philosophical logic: Worldwide level and Russian science // Studies in Logic, Grammar and Rhetoric. 2008. Vol. 14. №27. P. 35-71.

- [40] *Lambek J.* What is a deductive system? // [Gabbay (ed.), 1994]. P. 141-159.
- [41] *Lau D.* Function Algebras on Finite Sets: A Basic Course on Many-Valued Logic and Clone Theory. Berlin: Springer-Verlag, 2006.
- [42] *Ono H.* Structural rules and a logical hierarchy // P.P. Petkov (ed.). Mathematical Logic. New York: Plenum Press, 1990. P. 95-104.
- [43] *Tennant N.* The transmission of truth and the transitivity of deduction // D.M. Gabbay (ed.). What is a logical system? Oxford: Clarendon Press, 1994. P. 161-177.
- [44] *Tarski A.* On some fundamental concepts of metamathematics // Tarski A. Logic, Semantics, Metamathematics. Papers from 1923 to 1938. Oxford: The Clarendon Press, 1956. P. 30-37 (2nd ed. Indianapolis, 1983).
- [45] *Tarski A.* Fundamental concepts of the methodology of the deductive sciences // Tarski A. Logic, Semantics, Metamathematics. Papers from 1923 to 1938. Oxford: The Clarendon Press, 1956. P. 60-109.
- [46] *Tharp L.* Which logic is the right logic? // Synthese. 1975. Vol. 31. P. 1-21.
- [47] *Urquhart A.* Semantics for relevant logics // The Journal of Symbolic logic. 1972. Vol. 37. P. 159-169.
- [48] *Van Benthem J. and Doets K.* Higher-order logic // Gabbay and Guenther (eds.). Handbook of Philosophical Logic. Dordrecht: Reidel, 1983. Vol. I. P. 275-329.
- [49] *Wang Hao* What is logic? // The Monist. 1994. Vol 77. №3. P. 261-277.
- [50] *Wójcicki R.* Logical matrices strongly adequate for structural sentential calculi // Bulletin de l'Académie Polonaise des Sciences. 1969. Classe 3. Vol. XVII. P. 333-335.
- [51] *Wójcicki R.* Theory of Logical Calculi: Basic Theory of Consequences Operations. Dordrecht: Reidel, 1988.

Знание и мнение: их роль в науке и коммуникации

Е. Е. Ледников

ABSTRACT. The paper exposes notions of knowledge and belief specific traits of contexts, discerned in accordance with philosophical tradition. Perspectives of construction of rational theory of discussion about beliefs are evaluated.

Ключевые слова: знание, мнение, истина, коммуникация, рациональная полемика

Интерес к философскому осмыслению понятий знания и мнения возник в античную эпоху. Еще Парменид в V в. до н.э. противопоставил знание мнению, заявив, что о текущих, изменчивых предметах и событиях возможно только мнение, но не знание. Эта мысль Парменида в полной мере была воспринята и использована Платоном, превратившим в объект познания неизменные, вечные идеи и отказавшим в таком же статусе чувственно воспринимаемым, изменчивым вещам [2, с. 432–433]. Высказывания древнегреческих философов по поводу знания и мнения в наше время можно было бы истолковать как пожелание, чтобы наука исследовала и познавала устойчивые, повторяющиеся, воспроизводимые явления действительности, ибо именно через их изучение человеку раскрываются тайны бытия мира, а в отношении изменчивых, преходящих, уникальных событий ограничивалась бы мнениями.

Конечно, научное познание нельзя свести к простой регистрации единичных фактов, в качестве которых выступают не повторяющиеся, уникальные события. Но и без их фиксации наука невозможна — она лишится в этом случае значительной части своего эмпирического базиса. При этом фактические данные об имевших место землетрясениях, ураганах, эпидемиях, социальных катаклизмах и тому подобных событиях в истории человечества вовсе не являются «мнениями», хотя они и представляют

собой регистрацию уникальных, не воспроизводимых событий. Одной из наиболее трудных задач науки как раз и является их изучение, формулировка закономерностей возникновения и протекания — крайне сложно, если вообще возможно, смоделировать то, что никогда больше не повторится (разумеется, при имевшем место наборе значений параметров, определявших ход перечисленных событий).

Следовательно, знание возможно как об «устойчивом», так и о «текущем». О первом, «устойчивом», оно получается, когда познающий человек конструирует абстрактные предметы с помощью абстракций отождествления, конструктивизации, идеализации, изолирующей абстракции, а затем устанавливает и формулирует законы взаимосвязи и взаимодействия этих предметов. О втором, «текущем», знание воплощается в сообщениях очевидцев, соучастников неповторимых, уникальных событий.

Различение знания и мнения, и это хорошо понимали уже мыслители древности, связано с их оценкой на истинность. Именно интенция (направленность) на истинность, осознание истинности некоторого высказывания превращает последнее в знание. В противном случае, если вопрос об истинности высказывания (или же системы высказываний) ставить преждевременно и даже вообще неуместно, его следует относить к мнению. Рассмотрим простейший случай, когда один человек полагает, что отдыхать следует на речке с удочкой, а другой — что лучше делать это во дворе за игрой в домино. Уместно ли в этом случае задаваться вопросом, чье мнение является «истинным»? Очевидно, что нет. Но и в более серьезных случаях вопрос об истинности может оказаться некорректным. Скажем, какой художественный метод (классицизм, реализм, абстракционизм) является истинным? Какая из мировых религий является истинной? В чем подлинный смысл жизни? Во всех этих случаях речь идет о мнениях, но никак не о знаниях, хотя в обратном нередко пытаются убедить окружающих сторонники тех или иных взглядов в соответствующих областях духовной культуры.

Относя важнейшие сферы духовной культуры к мнениям, мы никак не принижаем их роль в жизни человека. Нужно только помнить, что мнения представляют необходимое дополнение к знаниям, поскольку из одних только знаний духовный мир чело-

века состоять не может. Мнения — это не только конвенции и гипотезы, но, прежде всего, положения, принимаемые в ходе развития цивилизаций, неотъемлемые их элементы. Разные мнения соответствуют разным цивилизациям. Скажем, у первобытных народов было принято ритуальное поедание предков, что совершенно нетерпимо в современном цивилизованном обществе. В рабовладельческом обществе существовало мнение (увы, закрепленное законами того общества), что рабы — не люди. Но при всей важности мнений поиски среди них «истинных» зачастую не только лишены смысла, но могут быть и социально опасными. Ведь духовная нетерпимость, которая принесла столько бед в истории человечества, одной из своих причин имеет необоснованную попытку истолковывать мнения как знания, отвергая одни мнения как ложные, а другие утверждая в качестве «единственно правильных» всеми доступными средствами насилия. С другой стороны, попытки возвысить знания над мнениями (как, скажем, это делал Св. Августин, противопоставлявший «знание, ведущее к спасению» праздному, суетному любопытству) в наше время ведут к сциентизму — необоснованному преувеличению возможностей науки, а, значит, в конечном счете, к ее компрометации. Вот почему важен как содержательно-философский, так и сугубо логический анализ этих понятий и контекстов, в которых они употребляются.

Говоря об истине, будем иметь в виду исключительно аристотелевское или же платоновское ее понимание. То есть теорию корреспонденции в первом случае и теорию когеренции во втором. Действительно, знание о мире — это утверждение о том, что есть «на самом деле», которое проверяется экспериментально или же гипотетико-дедуктивным методом. Знание о математических объектах — это утверждение, не противоречащее ранее доказанным положениям (скажем, из области теории чисел), причем это утверждение может быть представлено в качестве теоремы.

Разумеется, далеко не всегда знание — это явно установленная истина. Иногда утверждения относят к знанию по косвенным признакам — например, они удовлетворяют идеальным нормам знания (выражены в аксиоматической форме) или же их разделяет авторитетное научное сообщество по причине соответствия

принятой парадигме. Однако в этом случае существует опасность принять за знание всего лишь мнение. Так, зачастую бывает трудно ответить на вопрос, является ли соответствующая парадигма образцом знания или феноменом мнения определенной научной группы (вспомним отношение официальной травматологии к новым методам лечения переломов, предложенным в 60-х годах курганским врачом-самородком Илизаровым). С другой стороны, сколько существует аксиоматически построенных рассуждений, попросту бесполезных в научном отношении! Так что косвенные свидетельства в пользу знания должны использоваться достаточно осторожно и критически.

Вопрос о специфике знания и мнения остро встает при разработке логических основ полемики о мнениях. Необходимость в полемике возникает всякий раз, когда люди, имеющие различные мнения по поводу тех или иных проблем, событий, предметов, пытаются устранить эти различия. А поскольку речь идет именно о мнениях, то цель подобной полемики — не столько в установлении истины, сколько в навязывании собственного мнения, а иногда и в отказе от него в пользу мнения оппонентов. В ходе такой полемики используется, как принято считать, прагматическая аргументация [4, с. 12]. Ее нередко противопоставляют логической аргументации, в ходе которой стремятся к обоснованию и расширению имеющихся знаний.

На первый взгляд, подобное противопоставление будто бы оправданно в свете того, что уже было сказано о различии знания и мнения. Заодно здесь уместно будет напомнить, что демократическое устройство общества предполагает уважение и терпимость к чужим мнениям, так что и о весьма серьезных расхождениях во мнениях спорить в цивилизованном обществе вроде бы не принято. И все же если предположить, что подобная полемика может возникнуть, то чтобы она привела к какому-либо плодотворному результату, она должна принять форму рациональной аргументативной дискуссии [1, с. 6–7]. А именно мнения должны быть выражены в виде утверждений, которые защищаются или критикуются. Стремление участников полемики убедить оппонента в приемлемости собственного и неприемлемости иного мнения должно осуществляться с помощью аргументативных утверждений, т.е. полемизирующие стороны

не должны выходить за рамки интеллектуального состязания (не прибегать к угрозам, насилию, запугиванию и т.п.). Участники полемики должны обладать способностью к усвоению выдвигаемых аргументов, в том числе логического характера. Они должны быть готовы принимать логические следствия своих мнений, если самостоятельно или с помощью оппонентов обнаружат, что некоторые утверждения являются именно такими следствиями. Они должны быть готовы считаться с тем, что мнение оппонента может базироваться на некотором бесспорном положении, и отказаться от собственного мнения, если окажется, что оно вытекает из какого-либо сомнительного или вообще неприемлемого положения.

Более того, полемика имеет смысл только тогда, когда ее участники разделяют хотя бы одно мнение, пусть и не относящееся непосредственно к предмету полемики. Трудно согласиться с трактовкой К. Поппером «мифа концептуального каркаса», объявившего необязательным наличие у полемизирующих точек соприкосновения в виде «общего концептуального каркаса основных предпосылок» или же «соглашения о словаре» используемых терминов [3, с. 559–560, 590]. Участникам полемики можно предъявить и более сильное требование — чтобы они были способны усмотреть логическую зависимость своих мнений от тех положений, которые являются точками соприкосновения. В противном случае полемика, может, и приведет к прояснению позиций ее участников (в чем Поппер видит самый значительный итог полемики), но достижения согласия во мнениях от подобной полемики ожидать не приходится. Как часто в современном мире мы наблюдаем длительные и бесплодные переговоры по тем или иным вопросам между странами!

Из всего сказанного напрашивается вывод, что если участники полемики не обременены логической культурой, то полемика вообще может не состояться. Так что логическая составляющая обязательно присутствует в любой аргументации, и вряд ли противопоставление логической аргументации прагматической должно выходить за рамки использования логически бесспорных либо прагматически убедительных аргументов — ведь структура аргументации будет одной и той же в обоих случаях,

а оценивать виды привлекаемых аргументов без помощи логики невозможно.

Вместе с тем логика пока что может предложить лишь весьма идеализированные модели рациональной полемики, а это приводит к другой крайности. Коль скоро в них фигурируют идеальные субъекты знаний и мнений, обладающие неограниченными дедуктивными и аргументативными ресурсами, то каждый подобный субъект придерживается только мотивированных, в частности, логически обоснованных мнений, и нет в природе ничего такого, что могло бы побудить его отказаться от собственного мнения или хотя бы внести в него какие-либо изменения. Он «видит» как все следствия своих мнений, так и все предпосылки, из которых эти мнения следуют. Получается, что полемика между идеальными субъектами тоже вряд ли может состояться — ведь для нее отсутствуют какие-либо видимые причины. А вот в отношении реального субъекта мнения дело обстоит иначе. Каждый подобный субъект ограничен как в отношении дедуктивных ресурсов, которыми мог бы воспользоваться, так и в отношении запаса фактов, на которые мог бы опираться. Да и осознает он значимость, весомость далеко не всех аргументов. И поскольку невозможно предложить различие между идеальными и реальными субъектами знаний и мнений, пригодное для любого случая возникновения полемики, то сугубо логическая теория аргументации с ее базисной идеализацией оказывается недостаточной, а прагматическая теория, если в ней игнорировались бы логические основы полемики, была бы попросту неадекватной. Поэтому остается только согласиться с тем, что эффективного инструмента анализа «аргументативных дискуссий» пока не существует [1, с. 6–7], и объединить в создании такого инструмента усилия специалистов в области логики, теории аргументации, психологии и лингвистики.

Литература

- [1] *Емерен Франс Х.ван, Гроотендорст Р.* Речевые акты в аргументативных дискуссиях. Санкт-Петербург: Нотабене, 1994.
- [2] *Платон.* Тимей // Платон. Собр.соч: В 4 т. Т.3. М.: Мысль, 1994.
- [3] *Поппер К.* Логика и рост научного знания. М.: Наука, 1983.
- [4] *Сергеев В.М.* Когнитивные методы в социальных исследованиях // Язык и моделирование социального взаимодействия. М.: Прогресс, 1987.

Сингулярные расширения силлогистики Лукасевича

В. И. МАРКИН

ABSTRACT. We implement two systems of syllogistic with singular terms that are the extensions of Łukasiewicz syllogistic. In the language of the first system singular terms can place only the subject position and singular propositions are of special type. In the language of the second one singular terms can place the subject as well as the predicate position and there are no special syllogistic constants for singular propositions. We prove the embedding of these singular syllogistics into the classical predicate calculus.

Ключевые слова: силлогистика, сингулярные термины, исчисление, семантика, формализация, погружающая операция

Широко известное силлогистическое исчисление, сформулированное Я. Лукасевичем в [1], является системой *чистой позитивной силлогистики*, поскольку в его языке содержатся нелогические символы только одного типа — общие термины (знаки множеств предметов), а среди логических символов отсутствуют терминообразующие операторы (например, терминное отрицание). Аксиомами силлогистики Лукасевича являются тавтологии классической логики высказываний (**ЛВ**) и формулы следующих типов:

- | | |
|--|-----------------------------------|
| A1. $(MaP \ \& \ SaM) \supset SaP,$ | A4. $SiS,$ |
| A2. $(MaP \ \& \ MiS) \supset SiP,$ | A5. $SeP \equiv \neg SiP,$ |
| A3. $SaS,$ | A6. $SoP \equiv \neg SaP.$ |

Сам Лукасевич последние две схемы аксиом трактовал как определения силлогистических констант **е** и **о** через, соответственно, константы **і** и **а**. Единственное правило вывода в системе — *modus ponens*. Понятия доказательства и теоремы обычные. Силлогистика Лукасевича в классификации В.А. Смирнова [3] получила название системы **С4**.

Задача данной статьи заключается в том, чтобы предложить расширения силлогистики **С4**, в языке которых наряду с общими терминами содержались бы и сингулярные (единичные) термины — знаки отдельных предметов.

Существует, по крайней мере, два способа введения сингулярных терминов в язык силлогистики. Первый из них был использован Аристотелем, который в качестве примеров рассматривал силлогизмы с единичными высказываниями. Анализ этих примеров позволяет установить следующее. Сингулярные термины употребляются Аристотелем только в качестве субъектов высказываний, но никогда в качестве предикатов. Он не использует сингулярные термины в общих и частных высказываниях — высказываниях типа **а**, **е**, **і** и **о**. Иначе говоря, высказывания с сингулярными терминами представляют собой особые типы категорических высказываний «*v* есть *P*» и «*v* не есть *P*», не сводимые к другим типам — общим и частным высказываниям.

Другая трактовка роли сингулярных терминов в силлогистическом языке была характерна для У. Оккама. В противоположность Аристотелю Оккам использует сингулярные термины на местах как субъектов, так и предикатов высказываний. Причем единичные высказывания (высказывания с сингулярным субъектом) не рассматриваются им как высказывания особого типа, а представляют собой разновидность множественных (общих или частных) высказываний. При оккамовском подходе осмысленными оказываются высказывания вида «Всякий (некоторый) *v* есть (не есть) *P*». Таким образом, второй способ введения сингулярных терминов в язык позитивной силлогистики не требует использования новых, отличных от **а**, **е**, **і**, **о**, силлогистических констант, допуская употребление на аргументных местах как универсалий, так и сингулярных терминов.

Современное формальное представление сингулярных расширений чистых позитивных силлогистик как в «аристотелевском», так и в «оккамовском» языке осуществлено в монографии [2] применительно к системе фундаментальной силлогистики **СФ** и к системе **С2** В.А. Смирнова, которая считается наиболее адекватной формализацией силлогистики Аристотеля. В данной статье аналогичная задача будет решаться применительно

к системе **C4**, формализующей традиционный вариант чистой позитивной силлогистики.

Сначала будем строить сингулярное расширение **C4** в языке (условно будем называть *аристотелевским*), в котором предполагается, что сингулярные термины могут выступать только в качестве субъектов, а единичные высказывания образуют самостоятельные типы категорических высказываний. Нелогическими символами этого языка наряду с общими терминами (будем обозначать их в метаязыке буквами $S, P, Q, M, \dots$) являются сингулярные термины (в качестве метапеременных по последним будем использовать знаки $v, w, v_1, w_1, v_2, \dots$). Силлогистическими константами наряду со стандартными (**a**, **e**, **i**, **o**) будут новые константы **ä** (для единичноутвердительных высказываний) и **ë** (для единичноотрицательных высказываний). В алфавите содержатся также пропозициональные связки и скобки.

Определение формулы задается так:

1. Если S и P — общие термины, то выражения типов SaP , SiP , SeP , SoP являются формулами;
2. Если S — общий, а v — сингулярный термин, то выражения типов $v\ddot{a}S$ (читается: « v есть S ») и $v\ddot{e}S$ (читается: « v не есть S ») суть формулы;
3. Если A и B — формулы, то $\neg A$, $(A \& B)$, $(A \vee B)$, $(A \supset B)$, $(A \equiv B)$ — формулы;
4. Ничто иное не есть формула.

В данном языке сформулируем исчисление $C4_A^C$, схемами аксиом которого являются:

- A_A^C0 . Схемы аксиом классического исчисления высказываний,
 A_A^C1 . $(SaP \& v\ddot{a}S) \supset v\ddot{a}P$, A_A^C4 . $SoS \equiv \neg SaP$,
 A_A^C2 . $(v\ddot{a}P \& v\ddot{a}S) \supset SiP$, A_A^C5 . $v\ddot{e}S \equiv \neg v\ddot{a}S$,
 A_A^C3 . $SeP \equiv \neg SiP$, A_A^C6 . SiS ,

а правилами вывода:

R1. *modus ponens*,

$$\mathbf{R2.} \quad \frac{\vdash (v\ddot{a}S \& v\ddot{a}P) \supset A}{\vdash SiP \supset A}, \quad \mathbf{R3.} \quad \frac{\vdash (v\ddot{a}S \& v\ddot{e}P) \supset A}{\vdash SoP \supset A},$$

где сингулярный термин v не содержится в формуле A .

Покажем, что исчисление $C4_A^C$ представляет собой расширение силлогистики $C4$:

МЕТАТЕОРЕМА 1. *Всякая теорема системы $C4$ доказуема в исчислении $C4_A^C$.*

Доказательство.

Достаточно продемонстрировать доказуемость в $C4_A^C$ всех аксиом системы $C4$.

Пропозициональные тавтологии доказуемы в $C4_A^C$ в силу A_A^C0 .

A1. $(MaP \& SaM) \supset SaP$

1. $(MaP \& v\ddot{a}S) \supset v\ddot{a}P$ A_A^C1
2. $(S\ddot{a}M \& v\ddot{a}S) \supset v\ddot{a}M$ A_A^C1
3. $(MaP \& SaM \& v\ddot{a}S) \supset v\ddot{a}P$ 1, 2; ЛВ
4. $v\ddot{e}P \equiv \neg v\ddot{a}P$ A_A^C5
5. $(v\ddot{a}S \& v\ddot{e}P) \supset \neg(MaP \& SaM)$ 3, 4; ЛВ
6. $SoP \supset \neg(MaP \& SaM)$ 5; R3
7. $SoP \equiv \neg SaP$ A_A^C4
8. $(MaP \& SaM) \supset SaP$ 6, 7; ЛВ

A2. $(MaP \& MiS) \supset SiP$

1. $(MaP \& v\ddot{a}S) \supset v\ddot{a}P$ A_A^C1
2. $(v\ddot{a}P \& v\ddot{a}S) \supset SiP$ A_A^C2
3. $(\neg v\ddot{a}P \& v\ddot{a}M) \supset \neg MaP$ 1; ЛВ
4. $(v\ddot{a}M \& v\ddot{a}S) \supset (SiP \vee \neg MaP)$ 2,3; ЛВ
5. $MiS \supset (SiP \vee \neg MaP)$ 4; R2
6. $(MaP \& MiS) \supset SiP$ 5; ЛВ

A3. SaS

1. $v\ddot{e}S \equiv \neg v\ddot{a}S$ A_A^C5
2. $(v\ddot{a}S \& v\ddot{e}S) \supset SaS$ 1; ЛВ

3. $SoS \supset SaS$ 2; **R3**
4. $SoS \equiv \neg SaS$ **A_A^C4**
5. SaS 3,4; **ЛВ**

Аксиомы видов **A4**, **A5** и **A6** системы **C4** доказуемы в **C4_A^C**, поскольку они являются соответственно аксиомами **A_A^C6**, **A_A^C3** и **A_A^C4** последней системы.

Q.E.D.

Далее мы покажем, что силлогистика **C4_A^C** погружается в классическое одноместное исчисление предикатов. С этой целью первоначально демонстрируется погружаемость **C4_A^C** в другую систему сингулярной позитивной силлогистики, а именно в систему **СФ_A^C** — «фундаментальный» вариант силлогистики указанного типа.

Исчисление **СФ_A^C** получается за счет отбрасывания из аксиомной схемы **A_A^C6** — **SiS**. Это исчисление подробно исследовано нами в [2]. В частности, для него была сформулирована адекватная семантика.

Моделью является пара $\langle \mathbf{D}, \varphi \rangle$, где $\mathbf{D} \neq \emptyset$, φ приписывает значения сингулярным и общим терминам следующим образом: $\varphi(v) \in \mathbf{D}$, $\varphi(S) \subseteq \mathbf{D}$. Условия истинности элементарных формул в модели $\langle \mathbf{D}, \varphi \rangle$ таковы:

- И1.** $|SaP|_{\varphi} = 1$, е.т.е. $\varphi(S) \subseteq \varphi(P)$,
- И2.** $|SiP|_{\varphi} = 1$, е.т.е. $\varphi(S) \cap \varphi(P) \neq \emptyset$,
- И3.** $|SeP|_{\varphi} = 1$, е.т.е. $\varphi(S) \cap \varphi(P) = \emptyset$,
- И4.** $|SoP|_{\varphi} = 1$, е.т.е. $\varphi(S) \setminus \varphi(P) \neq \emptyset$,
- И5.** $|v\ddot{a}P|_{\varphi} = 1$, е.т.е. $\varphi(S) \in \varphi(P)$,
- И6.** $|v\ddot{e}P|_{\varphi} = 1$, е.т.е. $\varphi(S) \notin \varphi(P)$.

Условия истинности для сложных формул, понятие истинности в модели и **СФ_A^C**-общезначимости стандартные.

В [2] доказаны непротиворечивость и полнота системы **СФ_A^C** относительно приведенной семантики. Отсюда следует справедливость утверждения:

МЕТАТЕОРЕМА 2. *Всякая формула доказуема в исчислении **СФ_A^C**, если и только если она является **СФ_A^C**-общезначимой.*

Был также задан «фундаментальный» перевод * формул языка сингулярной позитивной силлогистики аристотелевского типа на язык классического исчисления предикатов:

$$\begin{aligned} (SaP)^* &= \forall x(Sx \supset Px), & (SeP)^* &= \forall x(Sx \supset \neg Px), \\ (SiP)^* &= \exists x(Sx \& Px), & (SoP)^* &= \exists x(Sx \& \neg Px), \\ (v\ddot{a}S)^* &= Sv, & (v\ddot{e}S)^* &= \neg Sv, \\ (\neg A)^* &= \neg A^*, & (A \nabla B)^* &= A^* \nabla B^*, \end{aligned}$$

где ∇ есть любая бинарная пропозициональная связка.

Доказана метатеорема о погружаемости системы $\mathbf{C}\Phi_A^C$ в классическое одноместное исчисление предикатов (**ИП**):

МЕТАТЕОРЕМА 3. *Всякая формула A доказуема в исчислении $\mathbf{C}\Phi_A^C$, если и только если ее перевод A^* доказуем в **ИП**.*

Для силлогистики $\mathbf{C4}_A^C$ зададим другую функцию перевода Θ на язык **ИП**, определяемую с использованием функции *:

$$\Theta(A) = (\exists x S_1 x \& \dots \& \exists x S_n x) \supset A^*,$$

где $S_1, \dots, S_n$ — список всех различных общих терминов в составе формулы A .

Перевод Θ указывает на то, что любое силлогистическое утверждение в $\mathbf{C4}_A^C$ содержит характерную для традиционной силлогистики пресуппозицию о непустоте всех входящих в него общих терминов. Что же касается сингулярных терминов, то нет никакой необходимости эксплицитно выражать для них подобную пресуппозицию, поскольку утверждение о непустоте всех сингулярных терминов — один из исходных постулатов классического исчисления предикатов.

Перед обоснованием тезиса о погружаемости $\mathbf{C4}_A^C$ в **ИП** посредством Θ докажем, что эта система погружается в фундаментальную сингулярную позитивную силлогистику $\mathbf{C}\Phi_A^C$ посредством следующей операции:

$$\omega_1(A) = (S_1 i S_1 \& \dots \& S_n i S_n) \supset A,$$

где $S_1, \dots, S_n$ — список всех содержащихся в A общих терминов.

МЕТАТЕОРЕМА 4. Перевод ω_1 погружает $C4_A^C$ в $C\Phi_A^C$.

Доказательство. В доказательстве метатеоремы будем использовать следующий критерий погружаемости одного исчисления в другое, предложенный В.А. Смирновым [4]:

Исчисление S_1 погружается в исчисление S_2 посредством функции ψ_1 (из множества формул S_1 во множество формул S_2), если и только если (1) для каждой формулы языка S_1 имеет место: если $S_1 \vdash A$, то $S_2 \vdash \psi_1(A)$, и существует функция ψ_2 из множества формул S_2 во множество формул S_1 , такая что (2) для каждой формулы A языка S_2 имеет место: если $S_2 \vdash A$, то $\vdash \psi_2(A)$, и (3) $S_1 \vdash A \equiv \psi_2(\psi_1(A))$ для каждой формулы A языка S_1 .

Продemonстрируем сначала, что ω_1 -переводы всех теорем $C4_A^C$ доказуемы в фундаментальной силлогистике. Рассмотрим доказательство $C_1, \dots, C_k$ произвольной теоремы системы $C4_A^C$ и методом возвратной индукции покажем для каждого C_i , что $C\Phi_A^C \vdash \omega_1(C_i)$.

Пусть C_i — аксиома $C4_A^C$. Аксиомы A_A^C1 – A_A^C5 системы $C4_A^C$ являются также аксиомами $C\Phi_A^C$. Поэтому их ω_1 -переводы выводятся в последней системе из соответствующих аксиом с использованием закона утверждения консеквента. ω_1 -перевод аксиомы A_A^C6 представляет собой формулу $SiS \supset SiS$, которая является классической тавтологией.

Пусть C_i получено из $C_j \supset C_i$ и C_j по *modus ponens*. Пусть $M_1, \dots, M_r$ — список общих терминов, входящих в C_j , но не входящих в C_i ; $P_1, \dots, P_m$ — список общих терминов, входящих и в C_j , и в C_i , а $Q_1, \dots, Q_n$ — список общих терминов, не входящих в C_j , но входящих в C_i . Ясно, что по отдельности каждый из трех списков может, в принципе, оказаться пустым, но по крайней мере один — первый или второй, а также второй или третий — обязательно непуст. Обозначим через K_M формулу $M_1iM_1 \& \dots \& M_riM_r$, через K_P — формулу $P_1iP_1 \& \dots \& P_miP_m$, и через K_Q — формулу $Q_1iQ_1 \& \dots \& Q_niQ_n$.

Очевидно, что $\omega_1(C_j) = (K_M \& K_P) \supset C_j$, $\omega_1(C_i) = (K_P \& K_Q) \supset C_i$, а $\omega_1(C_j \supset C_i) = (K_M \& K_P \& K_Q) \supset (C_j \supset C_i)$.

Согласно индуктивному допущению, $\omega_1(\mathbf{C}_j \supset \mathbf{C}_i)$ и $\omega_1(\mathbf{C}_j)$ доказуемы в $\mathbf{C}\Phi_{\mathbf{A}}^{\mathbf{C}}$. Покажем, что в таком случае теоремой этой системы будет и формула $\omega_1(\mathbf{C}_i)$.

Из доказуемости $(\mathbf{K}_M \& \mathbf{K}_P) \supset \mathbf{C}_j$ и $(\mathbf{K}_M \& \mathbf{K}_P \& \mathbf{K}_Q) \supset (\mathbf{C}_j \supset \mathbf{C}_i)$ в силу законов логики высказываний вытекает доказуемость в $\mathbf{C4}_{\mathbf{A}}^{\mathbf{C}}$ формулы $\mathbf{K}_M \supset ((\mathbf{K}_P \& \mathbf{K}_Q) \supset \mathbf{C}_i)$, т.е. $\mathbf{K}_M \supset \omega_1(\mathbf{C}_i)$.

Если список $M_1, \dots, M_r$ пуст, то последнее выражение есть просто $\omega_1(\mathbf{C}_i)$, и мы уже получили утверждение о доказуемости ω_1 -перевода $\mathbf{C}_i$.

В случае непустоты указанного списка продолжим рассуждение методом «от противного». Допустим, что $\omega_1(\mathbf{C}_i)$ недоказуема в $\mathbf{C}\Phi_{\mathbf{A}}^{\mathbf{C}}$. В силу Метатеоремы 2 данная формула не является $\mathbf{C}\Phi_{\mathbf{A}}^{\mathbf{C}}$ -общезначимой, т.е. существует модель $\langle \mathbf{D}, \varphi \rangle$, в которой она принимает значение $\mathbf{0}$. Рассмотрим модель $\langle \mathbf{D}, \varphi' \rangle$, где φ' всем терминам, отличным от $M_1, \dots, M_r$, приписывает те же самые значения, что и φ , а общим терминам из списка $M_1, \dots, M_r$ сопоставляет в качестве значений множество $\mathbf{D}$: $\varphi'(M_1) = \varphi'(M_2) = \dots = \varphi'(M_r) = \mathbf{D}$. В модели $\langle \mathbf{D}, \varphi' \rangle$ каждая из формул $M_1 \mathbf{i} M_1, \dots, M_r \mathbf{i} M_r$ примет значение $\mathbf{1}$ в силу того, что множество $\mathbf{D}$ непусто. Поэтому и конъюнкция этих формул $\mathbf{K}_M$ истинна в рассматриваемой модели. Что же касается формулы $\omega_1(\mathbf{C}_i)$, то поскольку она не содержит терминов $M_1, \dots, M_r$, значение ее в $\langle \mathbf{D}, \varphi' \rangle$ останется тем же самым, что и в модели $\langle \mathbf{D}, \varphi \rangle$, т.е. она в обеих моделях принимает значение $\mathbf{0}$. Из сказанного следует, что формула $\mathbf{K}_M \supset \omega_1(\mathbf{C}_i)$ ложна в $\langle \mathbf{D}, \varphi' \rangle$, и потому она не является $\mathbf{C}\Phi_{\mathbf{A}}^{\mathbf{C}}$ -общезначимой. Отсюда в силу Метатеоремы 2 получаем, что $\mathbf{K}_M \supset \omega_1(\mathbf{C}_i)$ недоказуема в $\mathbf{C}\Phi_{\mathbf{A}}^{\mathbf{C}}$, что противоречит выведенному ранее из индуктивного предположения следствию. Поэтому допущение о недоказуемости $\omega_1(\mathbf{C}_i)$ неверно. Следовательно, эта формула является теоремой $\mathbf{C}\Phi_{\mathbf{A}}^{\mathbf{C}}$.

Пусть $\mathbf{C}_i$ получено из $\mathbf{C}_j$ по правилу **R2**. Тогда $\mathbf{C}_j = (v\ddot{\mathbf{a}}S \& v\ddot{\mathbf{a}}P) \supset \mathbf{A}$, а $\mathbf{C}_i = S\mathbf{i}P \supset \mathbf{A}$. Множества общих терминов в $\mathbf{C}_j$ и $\mathbf{C}_i$ совпадают.

1. $\mathbf{C}\Phi_{\mathbf{A}}^{\mathbf{C}} \vdash \omega_1((v\ddot{\mathbf{a}}S \& v\ddot{\mathbf{a}}P) \supset \mathbf{A})$ инд. доп.
2. $\mathbf{C}\Phi_{\mathbf{A}}^{\mathbf{C}} \vdash (S_1 \mathbf{i} S_1 \& \dots \& S_n \mathbf{i} S_n) \supset ((v\ddot{\mathbf{a}}S \& v\ddot{\mathbf{a}}P) \supset \mathbf{A})$ 1, опр. ω_1
3. $\mathbf{C}\Phi_{\mathbf{A}}^{\mathbf{C}} \vdash (v\ddot{\mathbf{a}}S \& v\ddot{\mathbf{a}}P) \supset ((S_1 \mathbf{i} S_1 \& \dots \& S_n \mathbf{i} S_n) \supset \mathbf{A})$ 2; ЛВ

4. $\mathbf{C}\Phi_{\mathbf{A}}^{\mathbf{C}} \vdash \mathbf{Si}P \supset ((S_1\mathbf{i}S_1 \& \dots \& S_n\mathbf{i}S_n) \supset \mathbf{A})$ 3; **R2**
5. $\mathbf{C}\Phi_{\mathbf{A}}^{\mathbf{C}} \vdash (S_1\mathbf{i}S_1 \& \dots \& S_n\mathbf{i}S_n) \supset (\mathbf{Si}P \supset \mathbf{A})$ 4; **ЛВ**
6. $\mathbf{C}\Phi_{\mathbf{A}}^{\mathbf{C}} \vdash \omega_1(\mathbf{Si}P \supset \mathbf{A})$ 5, опр. ω_1

Случай, когда $\mathbf{C}_i$ получено по правилу **R3**, рассматривается аналогично.

Итак, ω_1 -перевод любой теоремы $\mathbf{C4}_{\mathbf{A}}^{\mathbf{C}}$ доказуем в системе $\mathbf{C}\Phi_{\mathbf{A}}^{\mathbf{C}}$. Рассмотрение первой части критерия В.А. Смирнова завершено.

Зададим теперь обратный перевод ω_2 из $\mathbf{C}\Phi_{\mathbf{A}}^{\mathbf{C}}$ в $\mathbf{C4}_{\mathbf{A}}^{\mathbf{C}}$:

$$\omega_2(\mathbf{A}) = \mathbf{A}.$$

Поскольку исчисление $\mathbf{C}\Phi_{\mathbf{A}}^{\mathbf{C}}$ является подсистемой $\mathbf{C4}_{\mathbf{A}}^{\mathbf{C}}$, ω_2 -перевод любой теоремы $\mathbf{C}\Phi_{\mathbf{A}}^{\mathbf{C}}$ доказуем в $\mathbf{C4}_{\mathbf{A}}^{\mathbf{C}}$.

Перейдем к рассмотрению третьей, последней части критерия В.А. Смирнова. Необходимо показать, что для произвольной формулы $\mathbf{A}$ языка систем $\mathbf{C4}_{\mathbf{A}}^{\mathbf{C}}$ и $\mathbf{C}\Phi_{\mathbf{A}}^{\mathbf{C}}$ верно утверждение:

$$\mathbf{C4}_{\mathbf{A}}^{\mathbf{C}} \vdash \mathbf{A} \equiv \omega_2(\omega_1(\mathbf{A})).$$

Поскольку $\omega_2(\omega_1(\mathbf{A})) = \omega_1(\mathbf{A}) = (S_1\mathbf{i}S_1 \& \dots \& S_n\mathbf{i}S_n) \supset \mathbf{A}$, нам требуется доказать в $\mathbf{C4}_{\mathbf{A}}^{\mathbf{C}}$ формулу $\mathbf{A} \equiv ((S_1\mathbf{i}S_1 \& \dots \& S_n\mathbf{i}S_n) \supset \mathbf{A})$:

1. $\mathbf{A} \supset ((S_1\mathbf{i}S_1 \& \dots \& S_n\mathbf{i}S_n) \supset \mathbf{A})$ тавтология **ЛВ**
2. $S_1\mathbf{i}S_1 \& \dots \& S_n\mathbf{i}S_n$ из $\mathbf{A}_{\mathbf{A}}^{\mathbf{C}}\mathbf{6}$; **ЛВ**
3. $((S_1\mathbf{i}S_1 \& \dots \& S_n\mathbf{i}S_n) \supset \mathbf{A}) \supset \mathbf{A}$ 2; **ЛВ**
4. $\mathbf{A} \equiv ((S_1\mathbf{i}S_1 \& \dots \& S_n\mathbf{i}S_n) \supset \mathbf{A})$ 1, 3; **ЛВ**

Таким образом, все три части критерия погружаемости выполняются, следовательно, перевод ω_1 погружает $\mathbf{C4}_{\mathbf{A}}^{\mathbf{C}}$ в $\mathbf{C}\Phi_{\mathbf{A}}^{\mathbf{C}}$.
Q.E.D.

Перейдем к доказательству основной метатеоремы:

МЕТАТЕОРЕМА 5. *Перевод Θ погружает $\mathbf{C4}_{\mathbf{A}}^{\mathbf{C}}$ в ИП.*

Доказательство.

Из доказанных ранее утверждений о погружаемости системы $\mathbf{C}\Phi_{\mathbf{A}}^{\mathbf{C}}$ в $\mathbf{ИП}$ посредством операции $*$ (Метатеорема 3) и о погружаемости $\mathbf{C4}_{\mathbf{A}}^{\mathbf{C}}$ в свою подсистему $\mathbf{C}\Phi_{\mathbf{A}}^{\mathbf{C}}$ (Метатеорема 4) посредством функции ω_1 следует, что силлогистика $\mathbf{C4}_{\mathbf{A}}^{\mathbf{C}}$ погружается в $\mathbf{ИП}$ посредством композиции переводов ω_1 и $*$. Остается показать, что эта композиция равносильна в $\mathbf{ИП}$ переводу Θ :

$$\begin{aligned}\omega_1(\mathbf{A})^* &= ((S_1 \mathbf{i} S_1 \& \dots \& S_n \mathbf{i} S_n) \supset \mathbf{A})^* = (S_1 \mathbf{i} S_1 \& \dots \\ &\& S_n \mathbf{i} S_n)^* \supset \mathbf{A}^* = (\exists x(S_1 x \& S_1 x) \& \dots \& \exists x(S_n x \& \\ &\& S_n x)) \supset \mathbf{A}^* \equiv (\exists x S_1 x \& \dots \& \exists x S_n x) \supset \mathbf{A}^* = \Theta(\mathbf{A}).\end{aligned}$$

Q.E.D.

Таким образом, построено расширение силлогистики Лукасевича за счет введения в язык сингулярных терминов и оперирования ими в аристотелевском стиле.

Перейдем теперь к формулировке другого сингулярного расширения чистой позитивной силлогистики $\mathbf{C4}$, основанного на двух описанных выше оккамовских принципах употребления сингулярных терминов: 1) сингулярные термины допускаются как на места субъектов, так и на места предикатов; 2) высказывания с сингулярным субъектом не рассматриваются в качестве самостоятельного типа категорических высказываний, а могут быть либо общими, либо частными. Таким образом, здесь разрешается квантификация сингулярных терминов: «Всякий (некоторый) v есть (не есть) P ». В связи с этим необходимо пересмотреть их семантику, предположив, что значениями сингулярных терминов являются теперь не индивиды, а одноэлементные множества.

Язык сингулярной позитивной силлогистики, построенный на основе указанных выше принципов, будем условно называть *оккамовским*. В алфавит оккамовского языка, как и в алфавит языка аристотелевского типа, входят бесконечные списки общих и сингулярных терминов, пропозициональные связки и скобки. Но в данном языке содержатся лишь стандартные силлогистические константы $\mathbf{a}$, $\mathbf{e}$, $\mathbf{i}$ и $\mathbf{o}$.

Здесь существенным оказывается введение понятия *силлогистического термина*:

1. Всякий общий термин является силлогистическим термином;
2. Всякий сингулярный термин является силлогистическим термином;
3. Ничто иное не является силлогистическим термином.

Элементарными формулами в оккамовском языке являются выражения видов SaP , SeP , SiP и SoP , где S и P — силлогистические термины любого из двух типов. Сложные формулы образуются из других формул с помощью пропозициональных связок.

В [2] было осуществлено расширение в данном языке двух систем чистой позитивной силлогистики — **СФ** и **С2**. Исчисление **СФ₀^С**, формализующее «фундаментальный» вариант сингулярной позитивной силлогистики, содержит следующие схемы аксиом:

- A₀^С0.** Схемы аксиом классического исчисления высказываний,
A₀^С1. $vaav$, **A₀^С4.** $(vaP \& vaS) \supset SiP$,
A₀^С2. $vaaw \supset waw$, **A₀^С5.** $SeP \equiv \neg SiP$,
A₀^С3. $(MaP \& vaM) \supset vaP$, **A₀^С6.** $SoP \equiv \neg SaP$.

В системе **СФ₀^С** три правила вывода:

- П1.** *modus ponens*,
П2. $\frac{\vdash (vaS \& vaP) \supset A}{\vdash SiP \supset A}$, **П3.** $\frac{\vdash (vaS \& veP) \supset A}{\vdash SoP \supset A}$,

где v не содержится в заключении. S , P и M в формулировках аксиомных схем и правил — любые силлогистические термины (как общие, так и сингулярные), v и w — сингулярные термины.

В [2] сформулирована следующая семантика силлогистики **СФ₀^С**. Моделью является пара $\langle \mathbf{D}, \varphi \rangle$, где $\mathbf{D} \neq \emptyset$, $\varphi(v) \in \mathbf{D}$, а $\varphi(S) \subseteq \mathbf{D}$, где S — общий термин. Далее в модели $\langle \mathbf{D}, \varphi \rangle$ определяется новая функция σ , приписывающая значения любым силлогистическим терминам — как сингулярным, так и общим. Такими значениями должны быть подклассы $\mathbf{D}$. Сингулярному термину v функция приписывает класс, единственным элементом которого является объект, сопоставленный

v посредством φ , т.е. $\sigma(v) = \{\varphi(v)\}$. А общему термину S функция σ сопоставит тот же класс, что и φ , т.е. $\sigma(S) = \varphi(S)$. Условия истинности формул типа SaP , SiP , SeP , SoP оккамовского языка в модели $\langle \mathbf{D}, \varphi \rangle$ отличаются от определений **И1–И4** заменой φ на σ в определяющих частях:

- У1.** $|SaP|_{\varphi} = 1$, е.т.е. $\sigma(S) \subseteq \sigma(P)$
- У2.** $|SiP|_{\varphi} = 1$, е.т.е. $\sigma(S) \cap \sigma(P) \neq \emptyset$
- У3.** $|SeP|_{\varphi} = 1$, е.т.е. $\sigma(S) \cap \sigma(P) = \emptyset$
- У4.** $|SoP|_{\varphi} = 1$, е.т.е. $\sigma(S) \setminus \sigma(P) \neq \emptyset$

Условия истинности сложных формул, понятия истинности в модели и **СФ_С**-общезначимости стандартные. Доказана адекватность данной семантики сингулярной силлогистике **СФ_С**:

МЕТАТЕОРЕМА 6. *Всякая формула доказуема в исчислении **СФ_С**, если и только если она является **СФ_С**-общезначимой.*

Перевод силлогистических формул оккамовского языка осуществляется в язык исчисления предикатов, расширенный за счет введения символа $=$, причем переводу формул предшествует отображение множества силлогистических терминов в множество предикатов исчисления предикатов с равенством (**ИП⁼**). Эта особенность обусловлена следующим обстоятельством. Принимаемая в фундаментальной силлогистике интерпретация категорических высказываний фиксировалась ранее посредством перевода $*$ на язык логики предикатов. Однако при этом предполагалось, что субъектами и предикатами общих и частных высказываний могут быть только общие термины, которые в логике предикатов выступают в качестве одноместных предикаторов (знаков свойств). В оккамовском силлогистическом языке, как уже говорилось, на местах субъектов и предикатов общих и частных высказываний могут находиться и сингулярные термины. Причем тип их значений в составе множественных высказываний в силлогистике (одноэлементные классы) отличается от типа значений сингулярных терминов в логике предикатов (индивиды). Свойство принадлежности классу, единственным элементом которого является объект v , может быть выражено в **ИП⁼** посредством предиката « $x = v$ ». Очевидно также, что свойство принадлежности классу S предмета x (где S — общий термин) можно выразить посредством предиката « Sx ».

Функция θ , сопоставляющая силлогистическому термину некоторый предикат с одной предметной переменной x в языке $\mathbf{ИП}^=$, задается следующим образом:

$$\theta(v) = \theta(x = v), \quad \theta(S) = Sx,$$

где v — сингулярный, S — общий термин.

Функция $*$ переопределяется так, чтобы она сопоставляла формулам оккамовского силлогистического языка замкнутые формулы языка и выражала принимаемую в фундаментальной силлогистике интерпретацию категорических высказываний (S и P здесь являются произвольными силлогистическими терминами):

$$\begin{aligned} (SaP)^* &= \forall x(\theta(S) \supset \theta(P)), & (SeP)^* &= \forall x(\theta(S) \supset \neg \theta(P)), \\ (SiP)^* &= \exists x(\theta(S) \& \theta(P)), & (SoP)^* &= \exists x(\theta(S) \& \neg \theta(P)), \\ (\neg A)^* &= \neg(A^*), & (A \nabla B)^* &= A^* \nabla B^*. \end{aligned}$$

В [2] было доказано, что модифицированный перевод $*$ погружает $\mathbf{СФ}_O^C$ в $\mathbf{ИП}^=$:

МЕТАТЕОРЕМА 7. *Всякая формула A доказуема в исчислении $\mathbf{СФ}_O^C$, если и только если ее перевод A^* доказуем в $\mathbf{ИП}^=$.*

Построим теперь в оккамовском языке систему сингулярной позитивной силлогистики, которая является расширением силлогистики Лукасевича. Назовем эту систему $\mathbf{С4}_O^C$. Аксиоматическая формулировка данного исчисления получается за счет добавления к множеству постулатов системы $\mathbf{СФ}_O^C$ новой схемы аксиом:

$$\mathbf{A}_O^C 7. \quad SiS.$$

Покажем, что система $\mathbf{С4}_O^C$ содержит все законы силлогистики Лукасевича:

МЕТАТЕОРЕМА 8. *Всякая теорема системы $\mathbf{С4}$ доказуема в исчислении $\mathbf{С4}_O^C$.*

Доказательство.

Доказательства в $\mathbf{С4}_O^C$ аксиомных схем $\mathbf{A1}$ – $\mathbf{A6}$ системы $\mathbf{С4}$ аналогично их доказательствам в $\mathbf{С4}_A^C$, представленным в обосновании Метатеоремы 1. Отличие в том, что вместо силлогистической константы $\mathbf{\ddot{a}}$ должна стоять $\mathbf{a}$, а все вхождения константы $\mathbf{\ddot{e}}$ должны быть заменены на $\mathbf{e}$. Кроме того, в качестве

термина v , используемого в доказательствах аксиом, выбирается сингулярный термин, который отсутствует в самих этих аксиомах. Остается только доказать в $\mathbf{C4}_O^C$ аналог используемой в указанных выводах аксиомной схемы $\mathbf{A}_A^C5$ ($v\ddot{e}S \equiv \neg v\ddot{a}S$) системы $\mathbf{C4}_A^C$ — формулу $v\ddot{e}S \equiv \neg v\ddot{a}S$:

1. $(v\ddot{a}S \& v\ddot{a}v) \supset v\ddot{i}S$ $\mathbf{A}_O^C4$
2. $v\ddot{a}v$ $\mathbf{A}_O^C1$
3. $v\ddot{a}S \supset v\ddot{i}S$ 1, 2; ЛВ
4. $(w\ddot{a}S \& v\ddot{a}w) \supset v\ddot{a}S$ $\mathbf{A}_O^C3$
5. $w\ddot{a}v \supset v\ddot{a}w$ $\mathbf{A}_O^C2$
6. $(w\ddot{a}v \& w\ddot{a}S) \supset v\ddot{a}S$ 4, 5; ЛВ
7. $v\ddot{i}S \supset v\ddot{a}S$ 6; П2
8. $v\ddot{e}S \equiv \neg v\ddot{i}S$ $\mathbf{CA}_O^C5$
9. $v\ddot{e}S \equiv \neg v\ddot{a}S$ 3, 7, 8; ЛВ

Q.E.D.

Имеются веские основания считать именно систему $\mathbf{C4}_O^C$ адекватной современной формализацией сингулярного позитивного фрагмента традиционной силлогистики. Действительно, в том варианте силлогистики, который излагается в учебниках по традиционной логике, допускается использование сингулярных терминов на предикатной позиции, а единичные высказывания сводятся к множественным (обычно к общим). Кроме того, с семантической точки зрения, в системе $\mathbf{C4}_O^C$ принимается, что будет показано ниже, характерная для традиционной версии силлогистики предпосылка о непустоте силлогистических терминов.

Зададим перевод Θ' , фиксирующий указанную экзистенциальную предпосылку, формул рассматриваемого силлогистического языка на язык $\mathbf{ИП}^=$ и докажем адекватность данного перевода.

Пусть $\mathbf{A}$ — произвольная формула оккамовского варианта языка сингулярной позитивной силлогистики, $*$ — переопределенный только что перевод, погружающий систему $\mathbf{CF}_O^C$ в $\mathbf{ИП}^=$. Пусть $S_1, \dots, S_n$ — список всех содержащихся в формуле $\mathbf{A}$ общих терминов. Если данный список непуст, то

$$\Theta'(\mathbf{A}) = (\exists x S_1 x \& \dots \& \exists x S_n x) \supset \mathbf{A}^*;$$

а в случае, когда $\mathbf{A}$ не содержит общих терминов, т.е. силлоги-

стическими терминами в составе $\mathbf{A}$ являются лишь сингулярные термины, —

$$\Theta'(\mathbf{A}) = \mathbf{A}^*.$$

При переводе в язык $\mathbf{ИП}^=$ формул языка $\mathbf{C4}_0^C$ снова нет необходимости явно выражать предпосылку о непустоте сингулярных терминов, поскольку формула $\exists x(x = v)$, содержащая информацию о непустоте термина v , доказуема в $\mathbf{ИП}^=$.

В ходе обоснования тезиса о погружаемости $\mathbf{C4}_0^C$ в $\mathbf{ИП}^=$ посредством Θ' , как и в рассмотренном ранее случае первого сингулярного расширения $\mathbf{C4}$, используем в качестве «промежуточной» фундаментальную силлогистику, на этот раз — систему $\mathbf{CФ}_0^C$.

Зададим перевод из $\mathbf{C4}_0^C$ в $\mathbf{CФ}_0^C$. Пусть $S_1, \dots, S_n$ — список всех общих терминов, содержащихся в произвольной формуле $\mathbf{A}$ языка этих силлогистик.

Если данный список непуст, то

$$\omega'(\mathbf{A}) = (S_1 i S_1 \& \dots \& S_n i S_n) \supset \mathbf{A},$$

а в случае отсутствия универсалий в составе $\mathbf{A}$ —

$$\omega'(\mathbf{A}) = \mathbf{A}.$$

С использованием сформулированного В.А. Смирновым критерия погружаемости одного исчисления в другое докажем метатеорему:

МЕТАТЕОРЕМА 9. *Перевод ω' погружает $\mathbf{C4}_0^C$ в $\mathbf{CФ}_0^C$.*

Доказательство.

Покажем сначала, что ω' -переводы всех теорем $\mathbf{C4}_0^C$ доказуемы в $\mathbf{CФ}_0^C$.

Рассмотрим доказательство $\mathbf{C}_1, \dots, \mathbf{C}_k$ произвольной теоремы системы $\mathbf{C4}_0^C$, и методом возвратной индукции покажем для каждого $\mathbf{C}_i$, что $\mathbf{CФ}_0^C \vdash \omega'(\mathbf{C}_i)$.

Рассмотрим сначала случай, когда $\mathbf{C}_i$ — аксиома $\mathbf{C4}_0^C$. Аксиомы $\mathbf{A}_0^C1$ и $\mathbf{A}_0^C2$ системы $\mathbf{C4}_0^C$ не содержат в своем составе общих терминов, их ω' -переводы совпадают с ними самими и являются аксиомами $\mathbf{CФ}_0^C$. Аксиомы $\mathbf{A}_0^C3$ – $\mathbf{A}_0^C6$ системы $\mathbf{C4}_0^C$ являются также аксиомами $\mathbf{CФ}_0^C$. Поэтому если они не содержат общих терминов, их ω' -переводы доказуемы в $\mathbf{CФ}_0^C$. Если же эти аксиомы содержат в своем составе общие термины, их ω' -переводы

выводятся в последней системе из соответствующих аксиом с использованием частного случая закона утверждения консеквента — $\mathbf{C}_i \supset ((S_1 \mathbf{i} S_1 \& \dots \& S_n \mathbf{i} S_n) \supset \mathbf{C}_i)$. ω' -перевод аксиомы $\mathbf{A}_O^C 7$ $S \mathbf{i} S$, если S — общий термин, является законом логики высказываний $S \mathbf{i} S \supset S \mathbf{i} S$. Если же S — сингулярный термин, например v , то ω' -перевод данной аксиомы есть формула $v \mathbf{i} v$, которая доказывается в системе $\mathbf{C}\Phi_O^C$:

1. $v \mathbf{a} v$ $\mathbf{A}_O^C 1$
2. $(v \mathbf{a} v \& v \mathbf{a} v) \supset v \mathbf{i} v$ $\mathbf{A}_O^C 4$
3. $v \mathbf{i} v$ 1, 2; ЛВ

Пусть $\mathbf{C}_i$ в составе доказательства $\mathbf{C}_1, \dots, \mathbf{C}_k$ в системе $\mathbf{C}4_O^C$ получена по правилу *modus ponens* из предыдущих формул этой последовательности $\mathbf{C}_j \supset \mathbf{C}_i$ и $\mathbf{C}_j$. По индуктивному допущению, $\mathbf{C}\Phi_O^C \vdash \omega'(\mathbf{C}_j \supset \mathbf{C}_i)$ и $\mathbf{C}\Phi_O^C \vdash \omega'(\mathbf{C}_j)$. Рассмотрим четыре случая в зависимости от того, содержатся ли в составе формул $\mathbf{C}_j$ и $\mathbf{C}_i$ общие термины.

1. Ни $\mathbf{C}_j$, ни $\mathbf{C}_i$ не содержат общих терминов. Тогда $\omega'(\mathbf{C}_j \supset \mathbf{C}_i) = \mathbf{C}_j \supset \mathbf{C}_i$, $\omega'(\mathbf{C}_j) = \mathbf{C}_j$. Формула $\omega'(\mathbf{C}_i)$, совпадающая с $\mathbf{C}_i$, может быть получена в системе $\mathbf{C}\Phi_O^C$ по *modus ponens*.
2. $\mathbf{C}_j$ не содержит, а $\mathbf{C}_i$ содержит общие термины (например, $S_1, \dots, S_n$). В этом случае $\omega'(\mathbf{C}_j \supset \mathbf{C}_i) = (S_1 \mathbf{i} S_1 \& \dots \& S_n \mathbf{i} S_n) \supset (\mathbf{C}_j \supset \mathbf{C}_i)$, а $(\mathbf{C}_j) = \mathbf{C}_j$. Формула $(\mathbf{C}_i)$, совпадающая с $(S_1 \mathbf{i} S_1 \& \dots \& S_n \mathbf{i} S_n) \supset \mathbf{C}_i$, выводится в $\mathbf{C}\Phi_O^C$ из этих двух теорем с использованием закона коммутации и правила *modus ponens*.
3. $\mathbf{C}_i$ не содержит, а $\mathbf{C}_j$ содержит универсалии $(S_1, \dots, S_n)$. Тогда $\omega'(\mathbf{C}_j \supset \mathbf{C}_i) = (S_1 \mathbf{i} S_1 \& \dots \& S_n \mathbf{i} S_n) \supset (\mathbf{C}_j \supset \mathbf{C}_i)$, а $\omega'(\mathbf{C}_j) = (S_1 \mathbf{i} S_1 \& \dots \& S_n \mathbf{i} S_n) \supset \mathbf{C}_j$. С использованием закона самодистрибутивности импликации из этих двух формул выводим в $\mathbf{C}\Phi_O^C$ формулу $(S_1 \mathbf{i} S_1 \& \dots \& S_n \mathbf{i} S_n) \supset \mathbf{C}_i$. Рассуждением от противного покажем, что и формула $\mathbf{C}_i$ в этом случае будет теоремой $\mathbf{C}\Phi_O^C$. Допустим, что это не так. Тогда в силу Метатеоремы 7 $\mathbf{C}_i$ не является $\mathbf{C}\Phi_O^C$ -общеозначимой, т.е. найдется модель $\langle \mathbf{D}, \varphi \rangle$, в которой

C_i ложна. Пусть функция означивания φ' всем силлогистическим терминам, кроме общих терминов $S_1, \dots, S_n$, сопоставляет те же значения, что и φ , а $\varphi'(S_1) = \dots = \varphi'(S_n) = \mathbf{D}$. В силу непустоты множества $\mathbf{D}$ каждая из формул $S_1 i S_1, \dots, S_n i S_n$, а значит и их конъюнкция, истинны в модели $\langle \mathbf{D}, \varphi' \rangle$. Поскольку C_i не содержит общих терминов $S_1, \dots, S_n$, она будет иметь в $\langle \mathbf{D}, \varphi' \rangle$ то же значение, что и в $\langle \mathbf{D}, \varphi \rangle$, а именно значение «ложь». Следовательно, формула $(S_1 i S_1 \& \dots \& S_n i S_n) \supset C_i$ ложна в $\langle \mathbf{D}, \varphi' \rangle$. Тогда она не является $\mathbf{C}\Phi_{\mathbf{O}}^{\mathbf{C}}$ -общезначимой, и по Метатеореме 7, не доказуема в исчислении $\mathbf{C}\Phi_{\mathbf{O}}^{\mathbf{C}}$. Последнее утверждение вступает в противоречие с ранее полученным. Таким образом, допущение о недоказуемости формулы C_i в $\mathbf{C}\Phi_{\mathbf{O}}^{\mathbf{C}}$ опровергнуто, а в данном случае C_i совпадает с $\omega'(C_i)$. Поэтому $\mathbf{C}\Phi_{\mathbf{O}}^{\mathbf{C}} \vdash \omega'(C_i)$.

4. Обе формулы — C_j и C_i — содержат в своем составе общие термины. Обосновываем доказуемость $\omega'(C_i)$, рассуждая аналогично тому, как при доказательстве Метатеоремы 4.

Пусть C_i получено из C_j по правилу **П2**. Тогда $C_j = (vaS \& vaP) \supset \mathbf{A}$, а $C_i = SiP \supset \mathbf{A}$. Очевидно, что множества универсалий в C_j и C_i совпадают. Если эти множества пусты, то $\omega_1(C_i)$, совпадающая с C_i , выводится в системе $\mathbf{C}\Phi_{\mathbf{O}}^{\mathbf{C}}$ из $\omega_1(C_j)$, совпадающей с C_j , по правилу **П2**. Если же C_j содержит в своем составе универсалии $S_1, \dots, S_n$, рассуждаем как при рассмотрении случая **R2** Метатеоремы 4 (меняя в самом рассуждении константу $\mathbf{\ddot{a}}$ на $\mathbf{a}$, а в его анализе ссылку на правило **R2** ссылкой на применение **П2**).

Аналогичным образом рассматривается случай, когда C_i получено из C_j по правилу **П3**.

Индуктивное рассуждение завершено. Показано, что ω' -перевод любой теоремы $\mathbf{C4}_{\mathbf{O}}^{\mathbf{C}}$ доказуем в системе $\mathbf{C}\Phi_{\mathbf{O}}^{\mathbf{C}}$.

Задаем обратный перевод ω'' из $\mathbf{C}\Phi_{\mathbf{O}}^{\mathbf{C}}$ в $\mathbf{C4}_{\mathbf{O}}^{\mathbf{C}}$:

$$\omega''(\mathbf{A}) = \mathbf{A}.$$

Поскольку исчисление $\mathbf{C}\Phi_{\mathbf{O}}^{\mathbf{C}}$ является подсистемой $\mathbf{C4}_{\mathbf{O}}^{\mathbf{C}}$, ω'' -перевод любой теоремы $\mathbf{C}\Phi_{\mathbf{O}}^{\mathbf{C}}$ доказуем в $\mathbf{C4}_{\mathbf{O}}^{\mathbf{C}}$.

Остается удостовериться в выполнении третьей части критерия погружаемости В.А. Смирнова — в том, что $\mathbf{C4}_O^C \vdash \mathbf{A} \equiv \omega''(\omega'(\mathbf{A}))$ для любой формулы $\mathbf{A}$. Если $\mathbf{A}$ не содержит общих терминов, то $\omega''(\omega'(\mathbf{A})) = \mathbf{A}$, а $\mathbf{A} \equiv \mathbf{A}$ — теорема $\mathbf{C4}_O^C$. Если же $\mathbf{A}$ содержит общие термины, то формула $\mathbf{A} \equiv \omega''(\omega'(\mathbf{A}))$ доказывается в $\mathbf{C4}_O^C$ так же, как и в Метатеореме 4.

Q.E.D.

МЕТАТЕОРЕМА 10. *Перевод Θ' погружает $\mathbf{C4}_O^C$ в $\mathbf{ИП}^=$.*

Доказательство. Из утверждения о погружаемости $\mathbf{CФ}_O^C$ в $\mathbf{ИП}^=$ посредством модифицированной функции $*$ (Метатеорема 7) и только что доказанной погружаемости $\mathbf{C4}_O^C$ в $\mathbf{CФ}_O^C$ посредством ω' (Метатеорема 9) следует, что система $\mathbf{C4}_O^C$ погружается в $\mathbf{ИП}^=$ посредством композиции ω' и $*$. Данная композиция равносильна в $\mathbf{ИП}^=$ переводу Θ' . Если силлогистическая формула $\mathbf{A}$ не содержит общих терминов, то $[\omega'(\mathbf{A})]^* = \mathbf{A}^* = \Theta'(\mathbf{A})$. В противном случае осуществляем рассуждение, аналогичное содержащемуся в доказательстве Метатеоремы 5.

Q.E.D.

Литература

- [1] Лукасевич Я. Аристотелевская силлогистика с точки зрения современной формальной логики. М.: Издательство иностранной литературы, 1959.
- [2] Маркин В.И. Силлогистические теории в современной логике. М.: Издательство МГУ, 1991.
- [3] Смирнов В.А. Адекватный перевод утверждений силлогистики в исчисление предикатов // Актуальные проблемы логики и методологии науки. Киев: Наукова думка, 1980.
- [4] Смирнов В.А. Логические методы анализа научного знания. М.: Наука, 1987.

Конструктивная математика: обзор достижений, недостатков и уроков. Часть I

Н. Н. НЕПЕЙВОДА

ABSTRACT. The whole manifold of constructivist conceptions of last century is analyzed. They are systematized and some aspects and lessons for naive attempts of applying are highlighted.

Ключевые слова: конструктивизм, реализуемость, интерпретация Колмогорова, топологические интерпретации, аппроксимации, некорректные задачи, принцип конечной информации

1 Введение

XX век в математике характерен появлением неклассических альтернатив традиционной математике как целому. Их мы будем называть общим термином «конструктивизм», поскольку они базировались на желании давать не просто рассуждения, а конструкции, в каком-то смысле реализуемые. Поэтому и различные формы конструктивизма, и интуиционизм на равных фигурируют в данном анализе. Они переживали и расцвет, и надломы, и золотую осень, а ныне находятся, по терминологии Л.Н. Гумилева, на мемориальной стадии. Нынешние работы о конструктивизме либо используют некоторые элементы конструктивной логики (часто примитивно и неточно), либо глубоко и точно описывают, насколько великими были люди и достижения эпохи расцвета. Рассмотрим, какие же уроки можно извлечь из достижений и неудач конструктивизма.

В связи с поставленной задачей в данной работе исторические замечания соединяются с анализом достигнутых результатов и переработкой их в таком стиле, чтобы прояснить их возможные связи с нынешней теорией и практикой. Во многих случаях это требует серьезной переработки материала, который излагался

в соответствии с духом и предрассудками того времени, чтобы приблизить его к духу и предрассудкам нашего. И, конечно же, в отдельных случаях такая переработка перерастала в новое исследование.

Сразу же заметим, что ветераны конструктивизма могут возражать против данного изложения материала, поскольку во многих обоснованиях и модельных конструкциях существенно используются классические методы высокого уровня. На это стоит заранее дать три ответа.

Сам Брауэр не возражал против классической математики, особенно после появления программы Гильберта. Более того, Брауэр эту программу поддержал, но так, что Гильберт возмутился еще больше. Брауэр лишь потребовал, чтобы «практические математики» перестали воображать, что их конструкции чему-то соответствуют в реальности. Эти абстрактные конструкции тем не менее могут признаваться как полезное интеллектуальное орудие. Более того, Брауэр чувствовал, что многие полезные реальные результаты могут быть получены лишь путем прохода через идеальное, поскольку ползучие прямые пути к ним слишком длинны.

Н.А. Шанин строго обосновал, что во многих случаях после построения объекта показать правильность проведенного построения можно и классическими методами без потери конструктивности.

И, наконец, сам автор рассматривает данную работу как выполнение завещанной ему А.А. Марковым задачи: поставить четвертый стул между классикой, конструктивизмом и интуиционизмом и так, чтобы он стоял крепко и всех их соединял. Здесь нужен не эклектизм, а осознанное многоуровневое мышление, когда в каждый момент используются по возможности наиболее подходящие средства, и полученные с их помощью результаты анализируются не с точки зрения корректности обоснования в другом сегменте рассуждений, ставящем перед собой уже совершенно иные цели, а с точки зрения возможности их применения там как (говоря терминами информатики) отдельного модуля с закрытым кодом и открытым интерфейсом. То, что допустимо в одном модуле, может быть абсолютно неприемлемо в другом. Разнородные концепции можно соединять, но лишь на уровне передачи результатов.

2 Соглашения об обозначениях

В данной работе используются принятые в современной теоретической информатике λ -обозначения для функций. Это полностью устраняет, в частности, путаницу и нестрогость, возникающие при использовании традиционных обозначений, когда x^2 может означать как конкретное значение, так и функцию преобразования x в x^2 . Функция записывается как $\lambda x. x^2$.

Соответственно применение функции к аргументам записывается как список, в котором первым членом является функция, а последующими — ее аргументы. Во многих тонких случаях эта запись удобнее, чем традиционная математическая запись типа $\mu(X)$. Во избежание путаницы с применением функции, обычный список обозначаем угловыми скобками $\langle a_1 a_2 \dots a_n \rangle$.

Поскольку используются значения самых разных типов, включая только абстрактные, в формулах мы будем по хорошей традиции информатиков специфицировать все переменные их типами, за исключением того случая, когда *явно* высказано какое-то общее соглашение о типах переменных, действующее в данном фрагменте текста. Например, запись

$$\forall X : \text{Set} \exists n : \text{Nat} A(X, n)$$

означает, что X — переменная для множеств, а n — для натуральных чисел¹. Используются следующие стандартные типы данных и конструкции новых типов.

Set — тип всех множеств.

Nat — тип натуральных чисел.

Int — тип целых чисел.

Real — тип действительных чисел.

$\text{Set}(\text{Type})$ — тип множеств элементов типа Type .

$\langle \text{Type}_1, \dots, \text{Type}_n \rangle$ — тип n -ок, члены которых перечисленных типов.

$(\text{Type}_1 \rightarrow \text{Type}_2)$ — тип всюду определенных функций из значений первого типа в значения второго типа.

¹В информатике уже твердо осознано, что типы данных — не множества. Здесь мы в соответствующих местах приведем аргументацию, почему их нельзя отождествлять и в конструктивной математике и почему нельзя считать, что каждый тип данных описывается предикатом.

$(\text{Type}_1 \rightarrow \text{Type}_2)$ — тип частичных функций из значений первого типа в значения второго типа.

Поскольку в конструктивизме, как и в информатике, нет возможности обойти использование частичных функций при помощи известного трюка: функция, которая не определена в данной точке, выдает в ней значение Error , — постольку явно вводится квазипредикат осмысленности выражения. $!(f\ t)$ означает, что данное выражение имеет значение. Отметим еще один тонкий момент. Это не всегда означает, что $!t$, поскольку f при вычислениях может просто игнорировать свой аргумент. Еще чаще такое происходит с функциями многих аргументов. Логические предикаты считаются всегда определенными и существенно использующими все свои аргументы. Логические же связки, следуя Клини, определим так, что они могут игнорировать ошибочность некоторых своих аргументов.

$A \vee B$ считается осмысленным и обоснованным, если один из аргументов осмыслен и обоснован. Второй в данном случае игнорируется.

$A \Rightarrow B$ считается осмысленным, если B осмысленно во всех случаях, когда верно A . И, наоборот, если B уже доказано, то A нас не интересует ни с какой точки зрения.

$A \& B$ считается осмысленным и опровергнутым, если осмыслен и опровергнут один из членов.

$\exists x A(x)$ считается осмысленным и обоснованным, если $A(t)$ обосновано для некоторого t , такого, что $!t$.

$\forall x A(x)$ считается осмысленным и опровергнутым, если $A(t)$ опровергнуто для некоторого t , такого, что $!t$.

Мы вообще не задаемся схоластическим вопросом, каково же значение $P(t)$, если t не определено. Формула просто семантически некорректна, если такая ее подформула оказалась в контексте, где она не игнорируется.

И последнее, но одно из самых важных, замечаний.

Мы не отождествляем алгоритмичность и эффективную вычислимость. Алгоритмические преобразования — один из видов эффективной вычислимости.

Здесь мы следуем Брауэру, аргументы которого и их математический и методологический анализ приведены ниже.

3 Предпосылки конструктивизма

Мы не будем рассматривать реверансы в сторону конструктивности в трудах, скажем, братьев Грассманов и Кронекера. Они не уловили важнейшего аспекта, который делает конструктивизм конструктивизмом и который имел смелость осознать и обнаружить Л. Э. Я. Брауэр [1, 2, 3].

В математике конца XIX века было осознано, что некоторые «теоремы существования» доказываются настолько грязно, что они не дают и, видимо, в принципе не могут дать никакого построения объекта, существование которого утверждается.

ПРИМЕР 1. Грязной, в частности, является теорема о существовании неизмеримого множества действительных чисел при любом определении частичной функции *меры* μ из множеств действительных чисел в неотрицательные действительные числа, обладающем следующими базовыми свойствами.

1. Мера отрезка $[0, 1]$ равна 1: $(\mu [0, 1]) = 1$.
2. Мера множества из одной точки равна 0: $(\mu \{a\}) = 0$.
3. Мера множества Y , получающегося из множества X линейным преобразованием $\lambda x. a + x \cdot b$, вычисляется как $(\mu Y) = (\mu X) \cdot a$.
4. Если X_i — последовательность непересекающихся множеств, мера каждого из которых определена, то определена и мера их объединения

$$(\mu \bigcup_{i=1}^{\infty} X_i) = \sum_{i=1}^{\infty} (\mu X_i).$$

5. Если определены (μX) и (μY) , то определены $(\mu X \cap Y)$ и $(\mu X \setminus Y)$.
6. Если $X \subset Y$ и оба множества измеримы, то $(\mu X) \leq (\mu Y)$.

Прежде всего покажем, что измеримое подмножество отрезка $[0, 1)$ можно циклически сдвинуть внутри этого отрезка и мера его при этом не изменится. Пусть дано измеримое множество X .

Пусть $1 > a \geq 0$. Линейным преобразованием $\lambda x. x + a$ сдвинем X на a . Получившееся множество обозначим X_a . Согласно свойству 3, $(\mu X) = (\mu X_a)$. Теперь поделим множество X_a на два подмножества: $X_a^< = X_a \cap [0, 1)$; $X_a^> = X_a \setminus [0, 1)$. Тогда результат циклического сдвига X на a есть $X_a^< \cup (\lambda x. x + a - 1 X_a^>)$. Обозначим его $X \uparrow a$. Согласно 5, $(\mu X_a^>) + (\mu X_a^<) = (\mu X)$. Но $(\mu (\lambda x. x + a - 1 X_a^>)) = (\mu X_a^>)$. $(\mu X \uparrow a) = (\mu X)$.

Теперь рассмотрим отношение эквивалентности

$$\simeq = \{ \langle x y \rangle \mid (x - y) \in \mathbb{Q} \}.$$

Здесь $\mathbb{Q}$ — множество рациональных чисел. В каждом классе эквивалентности чисел из $[0, 1)$ выберем по элементу. Множество всех получившихся элементов обозначим P . Если P циклически сдвинуть на рациональное число a , то $P \uparrow a \cap P = \emptyset$. Далее,

$$\bigcup_{a \in \mathbb{Q} \& a \geq 0 \& a < 1} P \uparrow a = [0, 1).$$

Если предположить, что P имеет меру, то эта мера либо равна 0, либо равна некоторому $\varepsilon > 0^2$.

Тогда в первом случае получаем

$$(\mu[0, 1)) = \sum_{a \in \mathbb{Q} \& a \geq 0 \& a < 1} (\mu P \uparrow a) = \sum_{a \in \mathbb{Q} \& a \geq 0 \& a < 1} 0 = 0,$$

а во втором

$$(\mu[0, 1)) = \sum_{a \in \mathbb{Q} \& a \geq 0 \& a < 1} (\mu P \uparrow a) = \sum_{a \in \mathbb{Q} \& a \geq 0 \& a < 1} \varepsilon = +\infty,$$

но и то, и другое абсурдно.

Конец примера.

Проанализируем данный пример, поскольку он достаточно показателен. Прежде всего, исключительно грязная сущность данной теоремы была понятна почти сразу после ее доказательства. Математики стали искать явные примеры неизмеримых множеств, но найти таковые никак не удавалось. Лишь в 1930 г.

²Из последнего свойства меры следует, что $\varepsilon \leq 1$, но в дальнейшем рассуждении это нам не понадобится.

Н.Н. Лузин построил такое явно определенное множество, в отношении которого никак не удавалось доказать его измеримость либо неизмеримость, но это уже было гораздо позже.

Далее, в доказательстве теоремы используется *аксиома выбора*, которая, как только она была явно осознана, оказалась замешанной практически во всех подобных «грязных» доказательствах. Сформулируем ее.

Если у нас есть функция Φ , перерабатывающая каждое $\iota \in I$ в непустое множество X_ι , то есть и функция φ , которая выбирает по одному элементу из каждого такого множества: $(\varphi \iota) \in (\Phi \iota)$.

Если множества X_ι состоят из элементов достаточно хорошо определенного типа данных, в котором, например, все элементы можно каким-то стандартным способом упорядочить так, чтобы в каждом непустом подмножестве был наименьший элемент (*вполне упорядочение*), то такую функцию выбора можно просто построить, находя по каждому X_ι его минимум.

Неудивительно, что аксиома выбора оказалась эквивалентной «теореме» Кантора о возможности вполне упорядочить любое множество. А. Пуанкаре³, в частности, увидев роль этой аксиомы во многих грязных теоремах существования, предложил обходиться без нее. До сих пор большинство математиков «традиционной ориентации» уверены, что именно аксиома выбора ответственна за грязные теоремы существования.

Более того, в 1968 г. Соловей строго доказал, что в стандартной теории множеств **ZF** невозможно явно построить ни одного неизмеримого множества. А чуть позже он совместно с другими логиками доказал, что лузинское множество таково, что для него измеримость невозможно ни доказать, ни опровергнуть.

Но почему же без аксиомы выбора не обошлись? А потому, что она же «ответственна» и за многие исключительно красивые и концептуально важные результаты. Например, за теорему полноты классической логики. Без нее не построишь моделей нестандартного анализа, где можно корректно работать с бесконечно малыми и бесконечно большими. И даже столь простое и очевидное на первый взгляд утверждение, что декартово произведение любого семейства непустых множеств непусто, оказывается эквивалентно аксиоме выбора!

³Один из тех, кто впервые явно осознал аксиому выбора.

Наряду с прекрасными и концептуально богатыми результатами из аксиомы выбора получается целый ряд парадоксальных и в чем-то почти сумасшедших следствий. Например, шар можно разделить на четыре множества и одну точку таким образом, что конгруэнтными преобразованиями из них можно составить два таких же шара. Очевидно, что эти множества неизмеримы и построить их также нельзя.

Есть и еще один фактор. Просто отказаться от положения, у которого столько интересных и концептуально важных следствий, полностью бесперспективно. Нужно что-то предложить взамен. И были предложены целых два варианта.

Первый вариант основывается на парадоксальном результате (одном из многих, которые получаются при помощи сильной и интересной аксиомы). Рассмотрим следующую бесконечную игру с полной информацией, идея которой принадлежит польским математикам. Пусть дано некоторое подмножество X отрезка $[0, 1]$. Оно заранее известно обоим игрокам. Далее оба игрока по очереди называют двоичные цифры, начиная со старшего разряда дроби. После конца времен подводится итог. Если получившееся действительное число попало в X , то выигрывает первый игрок. Если нет, то второй. Оказывается, при помощи аксиомы выбора можно «построить» X такое, что ни один из игроков не имеет выигрывающей стратегии. Поскольку наличие «существования» в любой антагонистической игре с полной информацией выигрывающей стратегии для одного из игроков «интуитивно очевидно», появился интересный кандидат на альтернативу аксиоме выбора: аксиома детерминированности, которая именно это и утверждает. В теории множеств с аксиомой детерминированности, в частности, любое множество действительных чисел измеримо.

Но гони черта в дверь, он влезет в окно и приведет с собой семь сотоварищей. В альтернативной теории множеств была найдена игра, в которой *оба* игрока имеют выигрывающую стратегию. А грязные теоремы в ней отнюдь не исчезли.

Вторую альтернативу, базируясь на прекрасной идее Б. Рассела, предложил К. Гёдель. Б. Рассел для избежания парадоксов теории множеств предложил два взаимосвязанных решения. Одно из них стало традиционным в информатике, а именно тре-

бование строго соблюдать *типы* данных. Второе не стало столь популярным. Оно заключается в том, что даже внутри одного типа данных, содержащего абстрактные объекты, скажем, множества, нужно следить за тем, чтобы каждое из появляющихся множеств было бы определимо через предшествующие. К. Гёдель показал, что в бестиповой теории множеств такие множества⁴ образуют модель теории множеств. Но в этой модели аксиома выбора как раз и оказалась выполнена, даже если ее не было в исходной модели.

Таким образом, в начале XX века стало осознаваться всеми мыслящими⁵ математиками, что положение с математическими построениями весьма плачевно и что с этим нужно что-то делать.

4 Появление конструктивизма

Конструктивизм начался с блестящего интуитивного прозрения голландского аспиранта Л. Э. Я. Брауэра, который осознал, что причина и грязных, и просто неконструктивных «теорем существования» не в какой-то конкретной аксиоме, а в самой логике. Классическая логика изначально создавалась для обоснований и опровержений, а не для построений.

В конструктивной логике основной задачей является нахождение *идеальных умственных построений*. Три слова, которые выделены, являются цитатой из Брауэра и поражают своей точностью. Мы не обязательно гонимся за тем, чтобы конструкция, которую мы создали, была бы полностью применима на практике и, более того, даже не ставим перед собой цели, чтобы наша теория хотя бы в принципе давала лишь практически реализуемые конструкции. В теории нам нужны и *чистые* теоремы существования, когда объект построен, но практического способа реализовать найденное построение нет. Именно ориентация на построения в принципе, а не в реальности, позволила конструктивизму разработать ряд красивых систем, имеющих большее

⁴Гёдель назвал их конструктивными и имел некоторое основание для этого. Но мы не используем данный термин, поскольку к конструктивизму они никакого отношения не имеют.

⁵Но не всеми лихо доказывающими теоремы, больше ничем, кроме непосредственного успеха, не интересующимися и поэтому гордо называющими себя «практическими».

отношение к реальности, чем те, которые с самого начала ограничивали себя ориентацией на непосредственную применимость.

Таким образом, в конструктивной логике утверждение об «истинности теоремы» полностью теряет смысл. Теорема должна быть *реализуема* в том смысле, что ее доказательство должно содержать построение всех тех объектов, которые строятся в теореме, и на базе лишь той информации, которая содержится в условиях теоремы. Тем самым математические утверждения, которые выглядят одинаково, могут нести разный смысл в классической и конструктивной математике.

ПРИМЕР 2. Утверждение

$$\forall X : \text{Set} \exists n : \text{Natural} A(X, n)$$

в классической математике означает истинность⁶

$$\exists n : \text{Natural} A(X_0, n)$$

при каждом данном X_0 , рассматриваемом *по отдельности*. В конструктивной же математике та же формула означает существование общего эффективного метода построения числа n по каждому множеству X_0 .

Брауэр, проанализировав классическую логику, установил, что основное препятствие к реализуемости — сильный закон исключенного третьего $A \vee \neg A$. С конструктивной точки зрения он читается «Мы знаем все». Естественно, тогда никакой нужды строить что-то нет. Если мы доказали, что нечто существует, то оно действительно существует в некоем идеальном математическом мире. Такой взгляд на мир, являющийся грубой вульгаризацией взглядов Платона, принято называть *математическим платонизмом*.

Стоит заметить, что сам Аристотель никогда не утверждал закон исключенного третьего в данной форме. Он приводил в качестве контрпримера к сильному закону исключенного третьего высказывание «Завтра будет морское сражение», которое сегодня не истинно и не ложно. Аристотель формулировал этот закон в более мягкой форме: « A и $\neg A$ не могут быть одновременно ложны». Эту форму можно записать в качестве логической

⁶Вопрос о том, что есть истина, мы разбирать здесь не будем.

формулы $\neg\neg(A \vee \neg A)$. Данная логическая формула, как показал сам Брауэр, выполнена в конструктивной интуиционистской логике Брауэра⁷.

Тем самым Брауэр не вводил никаких новых логических значений. Он признавал непознанное и даже непознаваемое, но не считал это равноправной с истинностью или ложностью характеристикой высказывания. В частности, легко видеть, что с течением времени непознанное может стать познанным, а степеней непознаваемости много (начиная со знаменитого высказывания оракула «Познай самого себя», что невозможно для сложной системы). И даже принципиально непознаваемое может быть частично познано.

В своей математической практике Брауэр все время ссылался на нерешенные в тот момент задачи, выбирая те из них, которые казались наименее перспективными и наименее интересными для решения. Например, в качестве такой задачи он часто использовал следующую:

Встречается ли последовательность 0123456789 в десятичном разложении числа π ?

Брауэр не представлял ни мощности современных компьютеров, ни тупости их пользователей, и, наверно, перевернулся бы в гробу, если бы некто, просмотрев несколько миллионов знаков числа π , вычисленных на компьютере, громко объявил бы, что он решил задачу Брауэра. Конечно же, сам Брауэр не желал, чтобы кто-нибудь решал такую задачу, он прекрасно понимал, что, даже если она вдруг будет решена в ту или иную сторону, он моментально подберет другую подобную.

ПРИМЕР 3. Рассмотрим, как в стиле Брауэра опровергается теорема о сходимости любой монотонной ограниченной сверху последовательности действительных чисел.

Пусть M — последовательность десятичных цифр

01234567891011121314151617181920...1000000,

⁷Мы специально используем столь длинное наименование, чтобы четко отличать логику, предложенную Брауэром, принятую и развивавшуюся во всех школах конструктивизма вплоть до 80-х годов XX в., от других конструктивных логик, которые начали появляться после 1980 г.

в которой записаны подряд все числа от 0 до 1000000. Рассмотрим последовательность рациональных чисел

$$a_n = \begin{cases} 1 - \frac{1}{2^n}, & \text{если до } n\text{-го знака} \\ & \text{не найдено } M \text{ в разложении } \pi, \\ 2 - \frac{1}{2^m}, & \text{иначе, где } m \text{ — наименьший знак,} \\ & \text{с которого начинается } M. \end{cases}$$

Тогда мы не знаем предела этой последовательности даже с точностью до 0,5.

Конечно же, такой метод рассуждений несколько уязвим, поскольку любая конкретная проблема такого рода может неожиданно быть решена. А самое главное, что он вызывал сильное раздражение у подавляющего большинства не только математиков, но также у прикладников и у физиков, воспитанных в традициях квазирелигии прогресса. Почему это мы ссылаемся на то, чего пока что не узнали? Вот дойдут у кого-нибудь руки, и узнаем!⁸ А основывать научные рассуждения на невежестве — противоречит идеалам Великой и Святой Непререкаемой Научной Истины⁹.

Пользуясь теоремой Гёделя о неполноте, еще неизвестной в момент, когда Брауэр интенсивно развивал интуиционизм, но предсказанной им в полемике с Д. Гильбертом, можно модифицировать пример следующим образом.

ПРИМЕР 4. Пусть в нашей конкретной теории $\mathfrak{G}$ — такая формула, для которой неразрешима ни она сама, ни проблема ее неразрешимости. Тогда построим последовательность рациональных чисел следующим образом.

$$a_n = \begin{cases} 1 - \frac{1}{2^n}, & \text{если до } n \text{ нет кодов доказательства } \mathfrak{G} \\ 2 - \frac{1}{2^m}, & \text{иначе, где } m \text{ — наименьший код доказательства } \mathfrak{G}. \end{cases}$$

Тогда мы не знаем предела этой последовательности даже с точностью до 0,5.

Но и данное рассуждение подвержено критике. Следуя в первую очередь идеям критики Брауэра, заметим, что построение

⁸Здесь оппоненты оказались более правы, чем Брауэр.

⁹Сравните с нынешними либералами и «неоконсерваторами», которые точно так же молятся на Великую и Святую Свободу и Демократию.

неразрывно связано с достаточно произвольно выбранной конкретной формализацией математики. А с классической точки зрения, если $\mathfrak{G}$ неразрешима, то «содержательно истинно», что у нее нет никакого доказательства, и предел данной последовательности 1.

Следующей ахиллесовой пятой в первоначальных рассуждениях Брауэра было то, что он ссылаясь на «математическую интуицию» как на источник своих концепций. Верно в этой ссылке было только одно: Брауэр отвергал стандартную концепцию научного рационализма, которая и по сей день владеет умами почти всех ученых и особенно околонуучного сообщества. Он не стеснялся основывать свои рассуждения на незнании, почти уравнивая его в правах со знанием. Единственным преимуществом знания в концепции Брауэра было то, что, если незнание иногда устранимо, то раз полученное знание сохраняется навсегда.

Таким образом, Брауэр не был в деструктивной оппозиции к понятию прогресса¹⁰. Знание Брауэр считал неуничтожимым и прогрессивно развивающимся. Он принципиально отвлекался от того, что, познавая или приобретая новое, мы слишком часто теряем не менее ценное старое. Таким образом, он позиционировал свою концепцию как занимающуюся *чистым знанием*, не игнорируя при этом тот очевидный факт, что, чем больше мы знаем, тем больше мы не знаем, и в пределе приходим к мудрости Сократа: «Я знаю то, что ничего не знаю». Все конструктивистские школы XX века разделяли, наряду с интуиционистской логикой Брауэра, его отношение к математике как к области чистого знания.

В защиту Брауэра стоит привести по крайней мере два важных положения. Во-первых, восточная философия и мистика стали решающими вдохновляющими факторами для Брауэра, и его мировоззрение близко к чистому идеализму¹¹. Так что ссылки на интуицию можно считать несколько неудачной попыткой перевода на европейский язык понятия чистого созерцания и дао. Во-вторых, современное науковедение, исследуя научные

¹⁰К самому этому понятию, а не к его общепринятой вульгаризации!

¹¹И во всяком случае намного ближе к исходным платоновским концепциям, чем так называемый «математический платонизм».

революции (одной из которых, безусловно, стало открытие конструктивизма Брауэром), пришло к общему закону: *первооткрыватель чего-то принципиально нового и важного, как правило, неадекватно обосновывает и неадекватно позиционирует свое открытие*. Брауэр здесь не был исключением.

Видимо, для Брауэра не явилось сюрпризом, что его диссертация вызвала раздражение научного сообщества. Может быть, скорее для него было сюрпризом¹², что его диссертация была тем не менее успешно защищена. И следующий шаг Брауэра еще раз показывает, насколько права восточная мудрость: «Умный человек с честью выходит из такой ситуации, в которую мудрый не попадает». Брауэр не стал разбивать голову о стену, пытаясь пробить броню непонимания и отторжения. Он как будто забыл на несколько лет о своей скандальной диссертации, занялся общей топологией и добился таких результатов, что и поныне считается одним из ее отцов-основателей и классиков. В частности, прекрасен со всех сторон следующий его результат.

Теорема о неподвижной точке Брауэра.

Любое непрерывное отображение конечномерного шара в себя имеет неподвижную точку.

И неожиданно Брауэр, уже получив признание научного сообщества и достигнув такого неформального положения, когда его нельзя было далее игнорировать¹³, заявил, что та область, в которой он добился таких блестящих успехов, никакого смысла не имеет, и что вся математика больна с самого начала. Соответственно математику нужно полностью перестраивать. Брауэр стал (сначала один, а затем при помощи горстки учеников) выполнять эту титаническую задачу возведения здания математики на новом фундаменте и по новым правилам¹⁴.

Гениальность Брауэра проявилась еще и в том, что он с самого начала не ограничил конструктивизм финитными объектами.

¹²И честью для нидерландской науки.

¹³За формальными званиями он никогда не гнался, так и оставшись до самой пенсии старшим преподавателем провинциального нидерландского университета.

¹⁴Так и вспоминается цитата из Евангелия: «Разрушьте храм сей, и я в три дня воздвигну его» (Иоанн, гл.2, ст. 19).

Он ввел в свою математику, в частности, последовательности, алгоритм для которых неизвестен, и поэтому они не могут считаться полностью описанными финитными объектами. В самом деле, ведь не менее важно конструктивно работать с физическим датчиком, который отнюдь не финитен, чем с конечной последовательностью символов, задающей обычную программу.

Заметим еще раз, что цель данного обзора — не мемориальная, а реальная. Поэтому в дальнейшем изложении мы стремимся трансформировать идеи конструктивизма таким образом, чтобы были видны возможности их приложений к современной информатике и возможности их развития в современной математике (порядок приоритетов здесь очень важен!)

5 Базовые принципы и методы конструктивизма

5.1 Принцип конечной информации и чум-пространства

Сразу же после начала перестройки математики выяснилось, что конструктивная математика в гораздо большей степени требовательна к выбору исходных понятий и определений, чем классическая. Но, чтобы рассмотреть показательный пример с понятием действительного числа, нам необходимо явно сформулировать тот принцип, который также принадлежит в исходной формулировке Брауэру. Здесь ему придана более общая форма в связи с тем, что он рассматривается для различных разновидностей конструктивизма.

Принцип конечной информации

Пусть Φ — эффективное преобразование объекта α в объект β . Тогда всякая конечная информация, которую можно вычислить по β , может быть вычислена, с использованием Φ и конечной информации об α .

В частности, в интуиционизме Брауэра конечной информацией о функции финитных объектов считается любое конечное число результатов этой функции на заданных аргументах. Если эти результаты не являются финитными объектами, то в свою очередь берется конечная информация о них.

Рассмотрим с этой точки зрения пример с монотонной ограниченной последовательностью, который рассматривался в предыдущем параграфе.

Пусть α — монотонная ограниченная сверху последовательность действительных чисел. Пусть некий метод Φ претендует на то, что он умеет строить предел такой последовательности. Тогда конечная информация о пределе должна вычисляться по конечной информации о последовательности, то есть, в частности, по конечному числу ее результатов. Пусть ограничение сверху 3. Сконструируем входную последовательность α действительных чисел следующим образом. Будем подавать на вход Φ число 0 столько раз, сколько понадобится, чтобы $(\Phi \alpha)$ наконец-то выдал ответ с точностью до 1. Если этот ответ будет больше 0.5, то в дальнейшем так и будем подавать на вход 0, если же он будет меньше 2, то станем подавать на вход число 2.5.

Заметим, что здесь мы проявили аккуратность. Поскольку о результате может также иметься лишь конечная информация, границы определены таким образом, чтобы по результату, вычисленному с точностью до 1, можно было с гарантией определить хотя бы одну из этих границ. При этом пришлось отказаться от автоматизма, что рассматриваемые случаи обязательно взаимоисключающие. Если обе границы удовлетворены, то дальше контрпример можно строить любым из двух способов.

Хотелось бы привести конкретный контрпример, а не контрпример относительно некоего гипотетического метода. Но в предыдущем параграфе было показано, что такие «контрпримеры» апеллируют к вполне конкретному незнанию, порожденному либо нынешним состоянием наших исследований, либо принятой в данный момент конкретной аксиоматической системой. А в данном рассуждении мы показали пример весьма общего метода доказательства эффективной неразрешимости задач, совершенно не использующего детали конкретной алгоритмической формализации и базирующегося лишь на принципе конечной информации. Но, чтобы его сформулировать, нам предстоит уточнить неформально вытекающую из принципа конечной информации структуру эффективно заданных (или же эффективно используемых) нефинитных объектов. В нижеследующем построении мы базируемся на идеях Ю.Л. Ершова [6]¹⁵.

¹⁵Можно было бы попытаться использовать идеи Д. Скотта, направленные на то же, но у Ю.Л. Ершова намного четче выделено понятие эффективного базиса пространства.

Напомним некоторые понятия из топологии.

Любое частично упорядоченное множество (чум) $\mathcal{L}$ можно рассматривать как топологическое пространство, если определить базис окрестностей следующим образом. Окрестностью каждой точки x считается множество всех элементов $y \in \mathcal{L}$, таких, что $y \succ x$. Эти окрестности O_x вместе с пустым множеством образуют базис открытых множеств. Соответственно открытыми множествами являются все замкнутые вверх множества, то есть такие $O \subseteq \mathcal{L}$, что

$$\forall x (x \in O \Rightarrow \forall y (y \in \mathcal{L} \& x \prec y \Rightarrow y \in O)).$$

Все открытые множества образуются объединением конечных пересечений множеств O_x .

Такое топологическое пространство несколько необычно для привыкших к пространствам, базирующимся на действительных числах, поскольку если $y \succ x$, то y неотделимо от x в том смысле, что каждое открытое множество, содержащее x , содержит и y . Но для любых двух элементов $x, y \in \mathcal{L}$ всегда существует такое открытое множество O , что $\{x, y\} \not\subseteq O$. Таким образом, любые два элемента различимы. Топологические пространства, обладающие таким слабым свойством различимости элементов, называются T_0 -пространствами. T_0 -пространства чаще всего строятся, исходя из чумов, и всегда порождают чумы своих элементов. Мы будем называть их здесь *чум-пространствами* или *топологическими чумами*.

Перейдем теперь к определениям, необходимым для строгого представления принципа конечной информации и следствий из него.

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 1. Подмножество X чума L кофинально, если нет элемента, большего всех его членов:

$$\neg \exists x : L \forall y : L (y \in X \Rightarrow y \prec x).$$

Чум-пространство называется *полным*, если выполнены два условия.

1. У каждых двух элементов есть верхняя грань.
2. Любое линейно упорядоченное кофинальное множество элементов имеет верхнюю грань.

Чум-пространство *регулярно*, если оно полно, и у любых двух элементов есть нижняя грань.

Точкой чум-пространства называется его максимальный элемент.

Базис чум-пространства — всюду плотная совокупность элементов X .

Чум-пространство называется *полностью эффективным* ($\mathcal{E}_0$ -пространство), если оно полно и в нем выделен базис элементов, называемых *эффективными приближениями* или просто *приближениями*.

Естественно определяются прямые произведения и прямые суммы в категории чум-пространств. Еще одной важной операцией над чум-пространством $\mathbb{S}$ является взятие пространства $\mathbb{S}^*$, элементы которого называются *совокупностями* элементов $\mathbb{S}^*$. Совокупности — это конечные множества значений из $\mathbb{S}$, причем разные значения несравнимы. На совокупностях определяется следующий частичный порядок.

$$S_1 \preceq S_2 \iff \forall a (a \in S_1 \Rightarrow \exists b (b \in S_2 \& a \preceq b)).$$

Таким образом, совокупность считается больше, если она либо уточняет, либо дополняет другую. Заметим, что при этом вполне может быть так, что в большей совокупности меньше элементов, поскольку один элемент может иногда уточнять сразу несколько.

Неформально заметим, что при задании $\mathcal{E}_0$ -пространства мы будем следить, чтобы его базис действительно был эффективно задан. Но заранее ограничивать себя алгоритмически заданным базисом либо финитными конструктивными объектами мы не будем. Причины этого достаточно принципиальны и показаны ниже.

ПРИМЕР 5. Пространство действительных чисел может быть представлено как получаемое следующими двумя шагами. Вначале производим пополнение чума, образованного интервалами с рациональными концами и интервалом $(-\infty, +\infty)$, при следующем отношении порядка:

$$[c, d] \preceq [a, b] \iff [a, b] \subseteq [c, d].$$

Неравенство $\preccurlyeq$ можно содержательно понимать следующим образом

- (1) $i \preccurlyeq j \iff j$ уточняет информацию, содержащуюся в i .

Соответственно самая неточная информация (никакой, кроме типовой принадлежности объекта) в интервале $(-\infty, +\infty)$. Это пространство регулярно, поскольку можно построить минимальный интервал, содержащий два данных. Оно не является решеткой, поскольку наибольшего элемента нет. Наибольший элемент можно было бы ввести как пустой интервал, но тогда мы получили бы действительные числа, пополненные значением «невозможная информация о числе».

Далее строим фактор-пространство получившегося $\mathcal{E}_0$ -пространства по отношению эквивалентности

- (2) $x \simeq y \iff x$ и y — точки, и каждые два приближения к ним пересекаются.

Сами действительные числа задаются как точки $\mathcal{E}_0$ -пространства.

В данной конструкции есть два общих места. Большинство используемых нами пространств строится как пополнение базиса и в дальнейшем факторизация множества точек. Подобный процесс будем описывать следующим образом.

Возьмем в качестве приближений интервалы с рациональными концами и интервал $(-\infty, +\infty)$ при отношении порядка:

$$[c, d] \preccurlyeq [a, b] \iff [a, b] \subseteq [c, d],$$

и факторизуем точки по отношению эквивалентности $x \simeq y$.

Получившееся пространство обозначим $\mathbb{R}$.

Рассмотренный пример приводит к общему определению $\mathcal{E}$ -пространства.

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 2. *Эффективное пространство ($\mathcal{E}$ -пространство)* — фактор-пространство $\mathcal{E}_0$ -пространства по отношению эквивалентности, выразимому как ПΣ-формула над приближениями к элементам:

$$\begin{aligned} &\forall a (a \preccurlyeq x \Rightarrow \exists b (b \preccurlyeq y \& R(a, b)) \\ &\quad \& \\ &\forall a (a \preccurlyeq y \Rightarrow \exists b (b \preccurlyeq x \& R(a, b)) \end{aligned}$$

либо же П-формула над приближениями к элементам:

$$\forall a, b (a \preccurlyeq x \& b \preccurlyeq y \Rightarrow R(a, b)).$$

В обоих случаях R — эффективно проверяемое свойство.

В первом случае такое пространство называется *тестовым пространством*, во втором — *поток*.

ПРИМЕР 6. Рассмотрим теперь несколько других базисов.

Базис 1. Двоичные интервалы вида $[n/2^k, (n+1)/2^k]$. Отношение вложения как в прошлом примере. Построение пространства действительных чисел как в прошлом примере.

Это пространство — аналог двоичного представления действительных чисел. Его обозначим $\mathbb{R}_2$.

Базис 2. Можно выбрать троичные интервалы стандартным образом. Но интереснее видоизмененное представление: интервалы вида $(n/3^k, (n+2)/3^k)$. Здесь конечные точки интервалов исключены, поскольку интервалы одного уровня пересекаются. Построение пространства такое же, как в предыдущих примерах. Получившееся пространство обозначим $\mathbb{R}_3$.

Базис 3. Рассмотрим теперь представление на базе непрерывных дробей. Непрерывная дробь представляет собой конечное или бесконечное выражение вида

$$-5 + \frac{1}{1 + \frac{1}{2 + \frac{1}{3 + \frac{1}{4 + \dots}}}}$$

Чтобы ясно отделить конечную дробь от бесконечных, будем последний ее этаж записывать в виде $m + \frac{1}{1}$. Таким образом, непрерывную дробь можно представить следующей структурой данных: это кортеж либо бесконечная последовательность целых чисел. Все члены ее, начиная со второго, положительные натуральные числа. Последнее число конечной последовательности равно 1. В бесконечной последовательности все числа, начиная со второго, больше 0. Таким образом, в нашей кодировке -3 записывается как $[-4, 1]$, а выписанная выше бесконечная непрерывная дробь как последовательность $[-5, 1, 2, 3, 4, \dots]$.

Известно, что любое действительное число однозначно разлагается в непрерывную дробь, причем рациональные числа представляются конечными дробями, а иррациональные — бесконечными.

Здесь естественно взять в качестве приближений конечные непрерывные дроби и точки естественно определяются как предел продолжающейся последовательности конечных дробей. Отождествления здесь не нужно, так что в каком-то смысле эта модель действительных чисел простейшая с классической точки зрения. Обозначим ее $\mathbb{R}_{cf}$.

Базис 4. Аналогичен базису 1, но теперь длина отрезка — любое неотрицательное рациональное число, а не обязательно $\frac{1}{2^n}$. Получившееся пространство обозначим $\mathbb{R}_0$. С классической точки зрения уж эти-то два базиса кажутся абсолютно изоморфными с точки зрения результата. И там, и здесь в качестве приближений дано значение числа вместе с его точностью.

Базис 5. (Сечения Дедекинда) Базисом являются рациональные числа, которые интерпретируются как сегмент $(-\infty, a]$. Отношение порядка — обычное отношение на рациональных числах. Точки отождествляются, если в каждой из пары последовательностей α, β , сходящихся соответственно к первой и ко второй точке, для любого члена первой последовательности α_n и для любого $\varepsilon > 0$ есть член β_m второй последовательности, такой, что $\alpha_n - \varepsilon < \beta_m$, и наоборот. Поскольку предложение длинное, приведем его запись на точном логическом языке:

$$\alpha \sim \beta \iff \forall n : nat \forall \varepsilon : rational (\varepsilon > 0 \Rightarrow \exists m : nat ((\alpha\ n) - \varepsilon < (\beta\ m)) \& \forall n : nat \forall \varepsilon : rational (\varepsilon > 0 \Rightarrow \exists m : nat ((\beta\ n) - \varepsilon < (\alpha\ m))).$$

Наибольшую точку называем $+\infty$. Действительные числа $\mathbb{R}_D$ — точки данного пространства, исключая бесконечность.

Базис 6. (Модифицированные сечения Дедекинда) Каждый элемент базиса состоит из двух рациональных чисел $a < b$. Вторым элементом называется верхней границей. При сравнении двух элементов базиса границы должны совпадать, а первые члены сравниваются, как обычно. Такое определение порядка обеспечивает ограниченность каждой сходящейся последовательности, причем ее верхняя граница задана с самого начала.

При отождествлении двух последовательностей границы вообще не принимаются во внимание.

В этом случае $+\infty$ не возникает.

С классической точки зрения все эти представления приводят к одному и тому же множеству действительных чисел. С конструктивной точки зрения ситуация намного интереснее, и мы разберем ее ниже, базируясь на анализе В.А. Успенского.

Совершенно другая концепция сходимости представлена в следующем примере. Начнем с важного для последующего изложения определения.

Пусть для некоторого устройства либо для некоторой программной системы имеется машина, обеспечивающая получение результатов каждой программы и каждого входных данных, если эта программа вообще дает результат на этих данных, так называемая *информационная машина*.

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 3. Пусть дан некоторый дискретный тип программ $\mathbf{P}$, чум тестовой информации $\mathbf{T}$ и чум-пространство $\mathbb{S} = (\mathbb{A} \times \mathbb{R})^*$. *Информационная машина* — функционал $\mathbb{F} : (\mathbf{P}, \mathbf{T} \rightarrow \mathbb{S})$, неубывающий по второму аргументу:

$$\forall p : \mathbf{P}, t_1, t_2 : \mathbf{T} (t_1 \preceq t_2 \Rightarrow (\mathbb{F} p t_1) \preceq (\mathbb{F} p t_2)).$$

Содержательно информационная машина интерпретируется как способ получения совокупностей пар $\langle \text{аргумент}, \text{значение} \rangle$ по тесту программы.

ПРИМЕР 7. Рассмотрим, как можно задать пространство программно определенных функций.

Пусть базисом являются конечные множества пар натуральных чисел, упорядоченные по включению. Программы для алгоритмов также будем кодировать натуральными числами. Пусть информационной машиной K является алгоритм, строящийся следующим образом.

Возьмем универсальный всюду определенный пошаговый интерпретатор алгоритмов U , построенный Постом и обладающий следующими свойствами.

Алгоритм с программой p определен на n и дает на нем ответ m тогда и только тогда, когда для некоторого k $(U p n k) = m + 1$. Таким образом, пока интерпретатор не вычислил ответа программы, он дает для данного аргумента n ответ 0. Поправим

программу интерпретатора таким образом, что, выдав один раз ненулевое значение, он будет выдавать его для всех $k_1 > k$.

Каким-то стандартным вычислимым образом взаимно-однозначно закодируем пары натуральных чисел натуральными числами, введя всюду определенную вычислимую функцию $(\text{pair } m \ n)$ и обратные ей $(\text{pr}_1 x)$, $(\text{pr}_2 x)$ таким образом, что $(\text{pair } (\text{pr}_1 x) \ (\text{pr}_2 x)) = x$. Более того, это кодирование можно сделать таким, что для двух кодов пар при $x_1 \geq x_2$ члены пар не могли бы оба убывать. Теперь построим всюду определенный алгоритм $(K \ p \ x)$, выдающий по программе p и тесту x , являющемуся натуральным числом, совокупность всех пар $\langle n, r \rangle$, таких, что для некоторого $y \leq x$ $(U \ p \ n \ (\text{pr}_1 y)) = (\text{pr}_2 y) + 1$.

Поскольку программы у нас неупорядочены, программно-определимая функция — предел совокупностей, являющихся результатами $(K \ p \ x)$ при данном p . Заметим, что в пространстве совокупностей такой предел не обязательно является наибольшим элементом, и тем более не является таким в его замыкании. Ведь вычисляемая функция может быть не всюду определена.

ПРИМЕР 8. Покажем, как всего одной программой можно задать множество всех функций.

Пусть базисом являются кортежи из 0, 1, упорядоченные по отношению «быть началом». Таким образом, базис у нас — полное двоичное дерево. Тесты совпадают с элементами базиса. Программа всего одна: p_0 .

Информационная функция

$$(I \ p_0 \ x) = x.$$

Содержательно это функция «Чего изволите, босс?» В ответ на тест она выдает именно те результаты, которые заложены в данном тесте. Пределы линейных последовательностей тестов являются точками пространства. В нем определимы все последовательности элементов 0, 1.

Рассматривая последние два примера, мы видим, что линейно упорядоченный чум тестов означает детерминированность наших программ, а наличие несравнимых элементов означает наличие индетерминизма. А неограниченно повторяемый произвол порождает все, что угодно. Кстати, последний пример имеет прямое отношение к теории программирования.

Э. Дейкстра весьма обоснованно заметил в своей книге, что одной из самых вредных подпорок в программировании является необходимость делать альтернативы условного оператора обязательно взаимоисключающими. В самом деле, если мы выбираем наилучшее решение, и обе рассматриваемые альтернативы с точки зрения нашей системы оценок равнозначны, то можно выбрать любую из них. Это выражается следующим условным оператором:

```
if
    x ⋗ y then write(x),
    y ⋗ x then write(y)
fi
```

Этот условный оператор более логичен и гибок, чем традиционные детерминированные конструкции программирования. Но в точно такой же форме выражается и построение из примера 8:

```
if
    x ≤ x+1 then write(0),
    x ≤ x+2 then write(1)
fi
```

Заметим, что во всех рассмотренных случаях мы задали абстрактные объекты не просто базисом, а базисом из финитных объектов с разрешимыми отношениями равенства и порядка. Эти финитные объекты на практике могут служить приближениями к абстрактным и рассматриваться как конечная информация о них. Тем самым в каждом конкретном варианте представления абстрактных объектов получает точное представление и принцип конечной информации.

В случае Э-пространств принцип конечной информации может быть конкретизирован следующим образом.

Топологическая формулировка принципа конечной информации.

Пусть есть эффективный функционал Φ из одного Э-пространства в другое. Тогда для каждого приближения β_i к $(\Phi \alpha)$ найдется приближение α_j к α , такое, что для каждого α_1 , для которого α_j является приближением, β_i является приближением к $(\Phi \alpha_1)$.

Например, для действительных чисел, заданных стягивающимися интервалами, для получения интервала приближения к

результату нужен интервал приближения к аргументу, и, таким образом, вычислимые функции оказываются по самому факту их определения непрерывными.

Если два пространства заданы своими базисами, то конструкции прямого произведения и прямой суммы таких пространств очевидны: в первом случае базисом являются пары элементов двух базисов, $\langle a, b \rangle \preceq \langle c, d \rangle \iff a \preceq c \ \& \ b \preceq d$. Во втором достаточно взять размеченное объединение двух базисов, добавить к ним глобальный минимальный элемент и считать элементы различных базисов несравнимыми.

ТЕОРЕМА 1. *Категории потоков и тестовых пространств декартово замкнуты.*

Ю.Л. Ершов показал, что в таких пространствах естественно определяются и функционалы сколь угодно высоких конечных типов. Мы здесь используем идею его конструкции в пересмотренном виде.

5.2 Метод провокации и некорректные задачи

Базируясь на принципе конечной информации, можно дать общий способ установления неразрешимости проблем в конструктивной математике, не зависящий от конкретной формализации алгоритма либо эффективного метода.

Метод провокации

Пусть дана проблема построения по каждому α , имеющему тип T1, для которого выполнено свойство $A(\alpha)$, объекта β типа T2, удовлетворяющего свойству $B(\alpha, \beta)$. На конструктивном языке она в общем случае записывается формулой¹⁶

$$(3) \quad \forall \alpha : T1 (A(\alpha) \Rightarrow \exists \beta : T2 B(\alpha, \beta))$$

или же, в частном случае, когда построенный объект заведомо конечен,

$$(4) \quad \forall \alpha : T1 (A(\alpha) \Rightarrow B_1(\alpha) \vee \dots \vee B_n(\alpha)).$$

¹⁶Именно в общем случае! Если формулы A и B не являются чисто дескриптивными, то ситуация может осложниться. Более того, ниже разобраный случай с $\vee$ относится именно к данной группе исключений.

Пусть функционал Φ претендует на то, что он строит по каждому объекту α , удовлетворяющему свойству $A(\alpha)$, объект, удовлетворяющий свойству $B(\alpha, (\Phi \alpha))$, либо на то, что Φ указывает верный член дизъюнкции. Чтобы установить, что данная проблема эффективно неразрешима, достаточно дать метод построения последовательности приближений $(\varpi \Phi n)$, который работает следующим образом. Он вырабатывает вспомогательную последовательность приближений $(\varpi_0 n)$, не зависящую от Φ , подает ее на вход Φ и в момент, когда функционал Φ выдаст некоторое приближение к решению, обладающее заранее заданной заведомо достижимой характеристикой (например, некоторой точностью либо ответом на вопрос в конкретной точке), далее выдает в зависимости от этого ответа одну из конечного числа последовательностей приближений $(\varpi_i n)$, показывающую ошибочность выданного ответа (например, если выдано число с некоторой точностью, дальнейшие наши приближения находятся вне интервала, в котором может лежать данное число)¹⁷.

Таким образом, структуру провоцирующего функционала можно описать следующей (квази)программной конструкцией. Поскольку такой язык будет часто использоваться ниже, дадим некоторые пояснения.

Эффективные методы, которые считаются данными извне, задаются директивой `import`. Знания об этих методах описываются как `specification`. Отношение $x \lesssim \Xi$ означает, что x является приближением к идеальному объекту Ξ . Тип приближений для типа `type` описывается как `approx(type1)`. Если дан функционал Φ , то $(\Phi^0 x)$ означает существующий согласно принципу

¹⁷(Примечание А.П. Бельтюкова) Возражение С.С. Лаврова против диагональной конструкции при доказательстве неразрешимости (в частности, таковы многие варианты «метода провокации»): контрпример для разрешающей процедуры не может использовать саму эту разрешающую процедуру.

Мой комментарий: это надо понимать так, что программа анализа программ является объектом более высокого уровня и внутри анализируемой программы оказаться не может.

В связи с этим, по С.С. Лаврову, все современные конструктивные доказательства алгоритмической неразрешимости и сложностной иерархии, основанные на диагональных методах, некорректны.

Возражение автора. Квазипрограммное описание метода провокации, данное ниже, показывает, что программа анализа и выдачи контрпримера ни в коем случае не оказывается *внутри* опровергаемой программы. Она ее вызывает как модуль.

конечной информации функционал, выдающий приближения к результату по приближениям к аргументу.

```
import  $\Phi$ : (type1  $\rightarrow$  type2);
specification
 $\forall \Xi$ : type1 ( $A(\Xi) \Rightarrow B(\Xi, (\Phi \Xi))$ ) &
 $\forall \Xi$ : type1 ( $A(\Xi) \Rightarrow \exists x_2$ : approx(type2) ( $x_2 \lesssim (\Phi \Xi) \& C(x_2)$ ))&
 $\forall x_2, x_3$ : approx(type2) ( $C(x_2) \& x_2 \preceq x_3 \Rightarrow C(x_3)$ )&
 $\forall x_2$ : approx(type2) ( $C(x_2) \vee \neg C(x_2)$ );

comment Описания вспомогательных функций  $\varpi_i$ ,
выдающих разные варианты провоцирующей последовательности
end comment
function  $\varpi$ : (Nat  $\rightarrow$  approx(type1));
parameter i: Nat;
begin
if
    not C( $(\Phi^0 (\varpi_0 i))$ ) then result ( $\varpi_0 i$ ),
    C( $(\Phi^0 (\varpi_0 i))$ ) then
    if
        D1( $(\Phi^0 (\varpi_0 i))$ ) then result ( $\varpi_1 i$ ),
        ...,
        Dn( $(\Phi^0 (\varpi_0 i))$ ) then result ( $\varpi_n i$ )
    fi;
fi
end;
```

ПРИМЕР 9. Покажем неразрешимость задачи $\forall x : \text{Real} (x \leq 0 \vee x \geq 0)$ при определении действительных чисел через последовательности стягивающихся интервалов длины $1/2^n$ (названное у нас $\mathbb{R}$).

Пусть дана некоторая функция f : ($\text{Real} \rightarrow \{1, 2\}$), претендующая на решение этой проблемы. Будем подавать на ее вход последовательность $[-1/2^{n+1}, 1/2^{n+1}]$, пока f не выдаст номер варианта. Если она выдаст 1, дальше будем подавать $[1/2^{n+i+1}, 1/2^{n+i}]$, если 2, то $[-1/2^{n+i+1}, -1/2^{n+i}]$. Тем самым

мы обманули данную функцию, спровоцировав ее дать ответ и в дальнейшем изменив последовательность так, чтобы она под выданный вариант не подходила.

Соответственно неразрешима и задача

$$(5) \quad \forall x : \text{Real} (x < 0 \vee x = 0 \vee x > 0).$$

При развитии интуиционистского анализа методом провокации¹⁸ были впервые открыты (20-е годы) задачи, «решение» которых, предлагаемое в классической математике, некорректно (например, вычисление производной или нахождение нуля непрерывной функции, меняющей знак). Некорректность в форме неразрешимости сохраняется для таких задач во всех формах конструктивизма. Впоследствии эти задачи были переоткрыты классиками и официально названы «некорректными». Но до сих пор, скажем, в знаменитой численной библиотеке CERN FORTRAN имеются алгоритмы, «решающие» некорректные задачи и, конечно же, дающие непредсказуемые ошибки (пример принадлежит акад. С.К. Годунову).

Более того, еще в 20-е годы в интуиционистской математике были открыты и методы превращения некорректных задач в корректные, причем порою более общие, чем впоследствии предложенные классиками этого направления Тихоновым и Самарским, хотя, конечно же, в технической части гораздо менее развитые. А именно интуиционисты обратили внимание на необходимость логической перестановки задачи, а прикладники ограничились переходом от одного метрического пространства к другому, что выразимо в рамках традиционной численной парадигмы вычислительной математики.

Брауэр пытался обратить внимание на некорректные задачи и на практическую полезность полученных результатов, но прикладники его пренебрежительно проигнорировали, что привело в дальнейшем к позиционированию интуиционистского варианта конструктивизма как чистой науки и к избеганию контактов с прикладниками.

Рассмотрим другие варианты применения метода провокации, а также методы превращения некорректных задач в корректные. Это проиллюстрирует, в частности, сильную зависимость

¹⁸Сам Брауэр так его не называл.

конструктивных результатов от удачного выбора исходных понятий¹⁹.

ПРИМЕР 10. Покажем, как в конструктивном анализе видоизменить предыдущую задачу, чтобы она стала корректной, а именно дадим метод для решения задачи

$$(6) \quad \forall x : \text{Real}, \varepsilon : \text{Rational} (\varepsilon > 0 \Rightarrow x > -\varepsilon \vee x < \varepsilon).$$

Вычислим x с точностью до $\varepsilon/2$. Пусть a — рациональное число, представляющее приближенное значение x (либо середина интервала, либо конкретное представление, если выбрано другое из представлений действительных чисел). Тогда имеет место по крайней мере одно из двух: либо $a - \varepsilon/2 > -\varepsilon$, либо $a + \varepsilon/2 < \varepsilon$. В первом случае гарантирована выполнимость первого члена дизъюнкции, во втором — второго.

Посмотрев внимательно на этот пример, сразу можно увидеть одну из причин неприятия «практиками» практически ценных советов интуиционистов. Ведь мы не даем однозначного решения, во многих случаях оба решения приемлемы. А, скажем, Тихонов первым пунктом в определении корректной задачи поставил единственность решения, что с логической точки зрения по крайней мере излишне.

Впоследствии практики мучительно долго приходили к необходимости отхода от однозначно определенных методов. В программировании первым обратил внимание на неестественность (и даже концептуальную противоречивость с принципами структурного программирования) требования полной детерминированности условных выражений Э. Дейкстра²⁰.

ПРИМЕР 11. Покажем разрешимость задачи

$$\forall x : \text{Real} (x \leq 0 \vee x \geq 0)$$

¹⁹Не путать с конкретными представлениями понятий! Они становятся важны не в теории, а при приложениях теории к практике, где такие представления нужно выбирать очень хорошо. Поэтому теория, слишком завязанная на конкретное представление данных, моментально теряет большую часть практической ценности.

²⁰Впрочем, зачем кидать камень в практиков, когда логики тысячелетиями ставили на первое место в проблеме классификации требование несовместимости различных альтернатив.

при определении действительных чисел через двоичные разложения. Поскольку все двоичные знаки становятся известными, первый же из них определяет знак числа. Разрешима даже более сильная проблема:

$$\forall x : \text{Real} (x < 0 \vee x \geq 0).$$

А вот трихотомия

$$\forall x : \text{Real} (x \leq 0 \vee x = 0 \vee x \geq 0)$$

по-прежнему остается неразрешимой, поскольку, вычислив сколько угодно много двоичных знаков, равных 0, мы не можем гарантировать, что следующий не окажется 1, и на этой основе можно применить метод провокации.

При такой конструкции действительных чисел вычислима и соответственно непрерывна функция

$$(f \ x) = \begin{cases} 1 & \text{при } x \geq 0, \\ 0 & \text{при } x < 0. \end{cases}$$

Заметим, что эти рассуждения применимы не только к 0, но и к любому двоично-рациональному числу, только придется подождать до последнего знака после точки.

Таким образом, в данном представлении действительных чисел числа становятся неравноправными, и оно весьма подозрительно (по меньшей мере) в качестве основы для построения конструктивного понятия действительного числа.

Здесь мы замечаем еще одну особенность конструктивной математики. Она гораздо тоньше анализирует исходные понятия, чем классическая, и сигнализирует не только о грубой ошибке, приводящей к противоречивости теории (как классическая), но и о более тонких концептуальных ошибках, к прямому противоречию не ведущих.

Правда, если рассмотреть последний пример с точки зрения классической топологии, то к нему находится прямая аналогия: множество действительных чисел, базисом топологии на котором взяты полуинтервалы $[a, b)$, где a — двоично-рациональное число. Эту топологию можно было бы назвать топологией двоичной системы счисления.

Рассмотрим еще один любопытный пример.

ПРИМЕР 12. Возьмем определение действительных чисел через непрерывные дроби $\mathbb{R}_{cf}$. В данном случае особой точкой является любое рациональное число. Более того, для каждого рационального числа a решается задача трихотомии

$$\forall x : \text{Real} (x \leq a \vee x = a \vee x \geq a),$$

и еще более того, она решается единым методом для всех рациональных чисел (вычисления непрерывной дроби действительного числа на один этаж глубже, чем дробь данного рационального числа), так что выполнено

$$\forall a : \text{Rational} \forall x : \text{Real} (x \leq a \vee x = a \vee x \geq a).$$

Таким образом, при данном определении действительных чисел, в частности, вычислима функция $(\text{sgn } x)$.

Но вот проблема, является ли действительное число рациональным, неразрешима, поскольку как только претендент выдаст ответ, что число рациональное, мы дальше начнем подавать бесконечную непрерывную дробь, а если ответит, что нет, на следующем же шаге закончим дробь.

Однако можно вычислить функцию Дирихле, если модифицировать пространство результатов (причем совершенно безобидно с классической точки зрения).

Возьмем известный пример функции Дирихле

$$(D \ x) = \begin{cases} 1, & \text{если число рациональное;} \\ 0, & \text{если число иррационально} \end{cases}$$

и модифицированной функции Дирихле, разрывной во всех рациональных точках:

$$(D_1 \ x) = \begin{cases} \frac{1}{n}, & \text{если рациональное число представляется} \\ & \text{несократимой дробью } \frac{m}{n}; \\ 0, & \text{если число иррационально.} \end{cases}$$

Эти функции вычислимы, если разрешить в начале любой непрерывной дроби иметь цепочку нулей, а бесконечная цепочка нулей — это нуль.

И опять у нас находится классическая аналогия с нестандартной топологией на действительных числах. Возьмем в качестве базиса все замкнутые сегменты с рациональными концами.

Рассмотренные примеры позволяют провести следующее построение.

Определим функционал из $\mathbb{R}$ в Nat следующим образом.

```
function sign : (Real → Nat);
parameter x: Real;

begin
  for i: Nat from 0 by i+1 do
    (x0 i).down > 0 then {result(1);leave},
    (x0 i).up < 0 then {result(-1);leave},
    (x0 i).down ≤ 0 & (x0 i).up ≥ 0 then relax
  od;
end
```

Дадим некоторые пояснения к данному функционалу. Мы используем недетерминированную форму цикла, которая позволяет в случае хорошо структурированной программы обойтись без присваиваний. После **for** описываются параметры цикла (значения, которые изменяются от шага к шагу цикла); после **from** задаются их начальные значения, после **by** задаются изменения параметров на следующем шаге цикла.

Сам цикл подобен условному оператору и состоит из нескольких (не обязательно взаимоисключающих) альтернатив. **leave** — приказ завершить цикл. **relax** — пустой оператор.

Действительное число представляется как последовательность замкнутых интервалов

$$[(x^0 i).\text{down}, (x^0 i).\text{up}].$$

Здесь определена функция, которая почти всегда вычисляет $(\text{sign } x)$, но заикливается при $x = 0$. Этот пример показывает фактор, упущенный Брауэром в интуиционизме, но учитывавшийся во всех дальнейших вариантах конструктивизма: эффективные операторы могут быть не всюду определены, и самоограничение лишь всюду определенными функциями в конструктивной математике весьма затруднительно корректно провести.

ПРИМЕР 13. Видоизменим пример 9 для случая троичного разложения с интервалами удвоенной длины. Он проходит и для данного случая, что показывает, что корень зла не столько в выборе конкретной системы счисления, сколько в рабском следовании ей. Представление действительных чисел $\mathbb{R}_3$ оказывается полностью эквивалентно $\mathbb{R}$. Это представление изобрел Брауэр.

ПРИМЕР 14. Этот пример²¹ показывает, что не всегда разницу в конструктивном статусе представлений можно объяснить в терминах классической топологии. Рассмотрим $\mathbb{R}$ и $\mathbb{R}_0$. Покажем, что нет эффективного функционала, который по каждому элементу $\mathbb{R}_0$ строит равный ему элемент $\mathbb{R}$.

Воспользуемся методом провокации. Будем подавать на вход функционала последовательность сегментов

$$\left[1 - \frac{1}{2^n}, 2\right]$$

до тех пор, пока испытываемый функционал не выдаст значение элемента $\mathbb{R}$ с точностью до $1/4$. После этого обманем его, поскольку у нас ошибка заведомо превосходит 1.

ПРИМЕР 15. Данный пример, принадлежащий Г. Минцу, показывает, что конструктивные структуры не всегда приводят к классическим топологиям.

Рассмотрим объединение двух сегментов $(-\infty, 0]$ и $[0, +\infty)$. Обозначим его $\mathbb{R}_M$. Оно представляется через приближения аналогично $\mathbb{R}$, но в приближениях не может быть один конец сегмента положительный, а другой отрицательный. 0 здесь не является изолированной точкой, поскольку сегмента $[0, 0]$ нет и соответственно в данном случае приближения не образуют базиса топологии на $\mathbb{R}$ в традиционном смысле. Но разрешима проблема

$$\forall x : \text{Real}_M (x \geq 0 \vee x \leq 0).$$

ПРИМЕР 16. И, наконец, рассмотрим пример с программно определенными типами данных. Пусть наши программы имеют следующий вид

²¹Впервые встретившийся в другой конкретной формализации в работах Н.А. Шанина.

```
const a,b: Rational; function fab : (Nat → Rational);  
parameter i: Nat;  
  
begin  
  if    i=0 then result(a),  
    i>0 & (fab i-1)=a then result(a)  
    i>0 & (fab i-1)=a then result(b)  
    i>0 & (fab i-1)=b then result(b)  
  fi;  
end
```

Это рекурсивное недетерминированное определение. Содержательно оно означает, что мы до некоторого момента выдаем a , а затем b .

Две точки считаются равными, если с некоторого момента значения совпадают. Поскольку эти значения — рациональные числа, вроде бы мы получили те же самые рациональные числа.

Но в этом примере неразрешима задача отличить друг от друга два рациональных числа, поскольку какие бы числа a, b мы ни взяли, конкретная программа fab представляет как раз тот случай, на котором может обмануться любой функционал, поскольку если она слишком долго будет выдавать a , функционал даст ответ, и его можно будет обмануть.

Здесь мы столкнулись еще с одним вариантом метода провокации для недетерминированных алгоритмов. Показывается, что некоторый вариант исполнения параметра может обмануть функционал, и тем самым мы не можем гарантировать нужный результат. Но вопрос, обманет ли функционал данное конкретное исполнение, остается открытым.

Методом провокации можно анализировать на корректность множество задач. А нахождение конструктивно корректной переформулировки некорректной задачи является одним из способов практического решения некорректных задач и, наверно, потенциально самым мощным из таких способов.

Рассмотрим в связи с вышеизложенным классическую некорректную задачу, которой по традиции мучают первокурсников в стандартных курсах программирования, никогда не упоминая, что она некорректная и их решения смысла не имеют.

ПРИМЕР 17. (Метод деления пополам)

Рассмотрим равномерно непрерывную на отрезке $[0, 1]$ функцию действительного переменного $f : (\text{Real} \rightarrow \text{Real})$. Пусть она удовлетворяет следующим условиям:

1. $(f\ 0) = -1$; $(f\ 1) = 1$.
2. f возрастает на $[0, 1]$.

Как видно, у нас условия на функцию даже более жесткие, чем в стандартном методе деления пополам.

Конечным приближением к равномерно непрерывной функции можно считать кусочно-линейную трубку с рациональными точками сочленения кусков²², то есть конечную последовательность параллелограммов с вертикальными боковыми гранями и рациональными вершинами, такую, что каждый следующий параллелограмм расположен правее предыдущего по оси x и пересекается с ним по общей боковой грани. Любая равномерно непрерывная функция представима как предел стягивающейся последовательности таких трубок.

Поставим задачу нахождения корня такой функции (который, как известно, *в принципе* существует). Покажем, что нет эффективного функционала, решающего данную задачу.

Построим последовательность трубок следующего вида

$$(f_n\ x) = \left[\begin{array}{l} [(0, -1), (0, -1 + \frac{1}{2^n}), (\frac{1}{3}, -\frac{1}{2^n}), (\frac{1}{3}, \frac{1}{2^n})], \\ [(\frac{1}{3}, -\frac{1}{2^n}), (\frac{1}{3}, \frac{1}{2^n}), (\frac{2}{3}, -\frac{1}{2^n}), (\frac{2}{3}, \frac{1}{2^n})], \\ [(\frac{2}{3}, -\frac{1}{2^n}), (\frac{2}{3}, \frac{1}{2^n}), (0, 1 - \frac{1}{2^n}), (0, 1)] \end{array} \right]$$

Пока выдаются такие трубки, корень может быть везде на $[\frac{1}{3}, \frac{2}{3}]$. Как только функционал выдаст корень с точностью до $1/9$, видоизменим следующую трубку так, чтобы корень попал в незахваченную ответом область данного интервала. Например, так работает следующий условный оператор:

²²В дальнейшем мы строго обоснуем такой выбор; но сейчас это увело бы нас далеко в теоретические тонкости, не нужные для решения данной конкретной задачи.

```

if      a ≥ 1/2 then
    result [ [ (0, -1), (0, -1 + 1/2^{n+2}), (1/3, -1/2^{n+1}), (1/3, -1/2^{n+2}) ],
              [ (1/3, -1/2^{n+1}), (1/3, -1/2^{n+2}), (1/2, 1/2^{n+1}), (1/2, 1/2^{n+2}) ],
              [ (1/2, 1/2^{n+1}), (1/2, 1/2^{n+2}), (2/3, 3/2^{n+2}), (2/3, 1/2^n) ],
              [ (2/3, 3/2^{n+2}), (2/3, 1/2^n), (0, 1 - 1/2^{n+2}), (0, 1) ] ]
a ≤ 1/2 then
    result [ [ (0, -1), (0, -1 + 1/2^{n+2}), (1/3, -1/2^n), (1/3, -3/2^{n+2}) ],
              [ (1/3, -1/2^n), (1/3, -3/2^{n+2}), (1/2, -1/2^{n+1}), (1/2, -1/2^{n+2}) ],
              [ (1/2, -1/2^{n+1}), (1/2, -1/2^{n+2}), (2/3, 1/2^{n+2}), (2/3, 1/2^{n+1}) ],
              [ (2/3, 1/2^{n+2}), (2/3, 1/2^{n+1}), (0, 1 - 1/2^{n+2}), (0, 1) ] ]
fi;
end

```

Но ведь программу для решения этой неразрешимой задачи пишет любой²³ первокурсник. В чем же дело? В этой программе он всю использует неразрешимую задачу (5), а «мудрые» преподаватели никогда не дают ему тесты, на которых выявляется некорректность данной задачи.

Возникает вопрос, как же решить эту нерешаемую проблему? Нужно просто чуть-чуть видоизменить ее постановку, поняв, что же нам на самом деле может быть нужно на практике. Нам нужно такое значение аргумента, при котором функция была бы практически неотличима от нуля. А найти такое значение — разрешимая задача, и метод деления отрезка пополам великолепно с ней справляется за счет применения недетерминированного условного оператора из (6). Тем самым приходим к корректной постановке конструктивной задачи:

$$\begin{aligned}
 &\forall f : (\text{Real} \rightarrow \text{Real}) ((f\ 0) < 0 \& (f\ 1) > 0 \Rightarrow \\
 &\quad \forall \varepsilon : \text{Real} (\varepsilon > 0 \Rightarrow \exists x : \text{Real} (x > 0 \& x < 1 \& |(f\ x)| < \varepsilon))
 \end{aligned}$$

²³В нынешнее время приходится добавить: не безнадежно зазомбированный ЕГЭ.

6 Интуиционистская логика как конструктивная

Выше мы неоднократно ссылались на то, что для конструктивиста утверждение есть в значительной степени задача на построение. Можно сказать, что он интересуется не истинностью, а реализуемостью. В данном случае реализуемость, конечно же, обычно понимается как реализуемость *в принципе*, и вопрос о том, можно ли уложиться в данные ресурсные ограничения на первый взгляд кажется вторым вопросом, который можно поставить себе после того, как математическая реализуемость установлена. Более того, именно такое отношение к задачам, решаемым в конструктивной математике, было полностью общепринятым вплоть до 80-х годов XX в. Прежде всего рассмотрим, что получалось на данном пути. Ведь пренебрежение чисто практическими аспектами отнюдь не всегда приводит к непрактичным теориям. Гораздо чаще к таковым приводит именно ползучее следование тому, что кажется в данный момент «запросами практики».

А.Н. Колмогоров (1930) (и чуть позже А. Гейтинг, но в менее общем виде) дал общую конструкцию для естественных математических семантик конструктивизма именно как конструктивизма: абстрактное понятие *реализуемости*. Рассмотрим содержательную идею определения реализуемости по Колмогорову.

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 4. Колмогоровская реализуемость.

Сопоставим каждой формуле A некоторую совокупность объектов $\mathbb{R} A$, сообразуясь с содержательным пониманием задачи, решить которую необходимо для обоснования A . Объекты из данной совокупности будем называть *решениями* задачи A . $a \in \mathbb{R} A$ означает, что a — решение A , т. е. что $a \in \mathbb{R} A$. Пусть U — наш универс рассматривания.

1. Решения элементарных формул задаются по определению.
2. Решение $A \& B$ есть пара решений A и B соответственно, объединенная в единую структуру данных.
3. Решение $\exists x A(x)$ есть структура данных из конкретного значения $x_0 \in U$ и реализации $A(x_0)$.

4. Решение $A \vee B$ есть вариантная структура, в которой содержится метка решенной подзадачи (либо A , либо B) и решение указанной задачи.
5. Решение $A \Rightarrow B$ есть эффективный функционал, определенный на всех решениях A и преобразующий их в решения B .
6. Решение $\forall x A(x)$ есть эффективный функционал, определенный на всех элементах универса U и преобразующий каждый $x_0 \in U$ в решение $A(x_0)$.
7. Если нет таких a , что $a \textcircled{R} A$, то $0 \textcircled{R} \neg A$.

Это определение можно превратить в формальное двумя путями. Более легкий состоит в том, чтобы взять конкретные представления перечисленных структур данных и функционалов (например, кодирование натуральными числами и стандартное понятие алгоритма, как это сделал С.К. Клини, которому и принадлежит исключительно удачный термин «реализуемость»). Второй — попытаться действовать предельно абстрактно с тем, чтобы дать общий метод и общую схему, применимую к целому ряду частных случаев, в том чисел и к таким понятиям решения, которые либо существенно уже общего понятия алгоритма, либо формально шире, либо просто не укладываются в ту же парадигму, что и стандартная алгоритмическая вычислимость. В соответствии с общим духом данной работы здесь избирается второй путь. Как и формализация принципа конечной информации, этот путь требует, чтобы сначала были определены условия на тип объектов, являющихся реализациями, и необходимые операции на нем.

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 5. Пространство реализаций — совокупность объектов, на которой заданы константы **nihil**, **1**, **2**; всюду определенные *собирающие функции* ($\text{pair } x y$), ($\text{in}_1 x$), ($\text{in}_2 x$); частичные *разбирающие функции* ($\text{pr}_1 x$), ($\text{pr}_2 x$), ($\text{label } x$), ($\text{content } x$), ($\text{ev } f x$), ($\text{case } a b c$), обладающие следующими свойствами.

1. Если $z = (\text{pair } x y)$, то $!(\text{pr}_1 z)$ и $(\text{pr}_1 z) = x$, $!(\text{pr}_2 z)$ и $(\text{pr}_2 z) = y$.

2. Если $z = (\text{in}_1 x)$, то $!(\text{label } z), !(\text{content } z), (\text{label } z) = \mathbf{1}, (\text{content } z) = x$.
3. Если $z = (\text{in}_2 x)$, то $!(\text{label } z), !(\text{content } z), (\text{label } z) = \mathbf{2}, (\text{content } z) = x$.
4. Если $a = \mathbf{1}$, то $!(\text{case } a_c)$ и $(\text{case } a_c) = b$.
5. Если $a = \mathbf{2}$, то $!(\text{case } a_c)$ и $(\text{case } a_c) = c$.

Для представления логики необходимы дополнительные требования на пространство, которые легче всего выражаются в терминах λ -исчисления с типами.

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 6. Пространство реализаций называется *однократно λ -собирающим*, если для любого выражения $t[x]$, построенного при помощи функционалов $(\text{pair } x y)$, $(\text{in}_1 x)$, $(\text{in}_2 x)$ из элементов данной интерпретации и переменной x , имеется элемент $\lambda x. t[x]$, такой, что

$$(\text{ev } \lambda x. t[x] a) = b \iff b = t[x \mid a].$$

Здесь и далее $t[x \mid a]$ означает подстановку в выражение элемента вместо свободной переменной.

Пространство реализаций называется *λ -замкнутым*, если оно одновременно является моделью λ -исчисления с типами и типовой неопределенностью, где выполнены следующие приписывания типов:

$$\begin{aligned} \text{Type } [a] &= \tau \otimes \pi \supset \text{Type } [(\text{pr}_1 a)] = \tau; \\ \text{Type } [a] &= \tau \otimes \pi \supset \text{Type } [(\text{pr}_2 a)] = \pi; \\ \text{Type } [a] &= \tau \ \& \ \text{Type } [b] = \pi \supset \text{Type } [(\text{pair } a b)] = \tau \otimes \pi; \\ \text{Type } [a] &= \tau \oplus \pi \supset \text{Type } [(\text{label } a)] = \mathbf{label}; \\ \text{Type } [a] &= \tau \oplus \pi \ \& \ (\text{label } a) = \mathbf{1} \supset \text{Type } [(\text{content } a)] = \tau; \\ \text{Type } [a] &= \tau \oplus \pi \ \& \ (\text{label } a) = \mathbf{2} \supset \text{Type } [(\text{content } a)] = \pi; \\ \text{Type } [a] &= \tau \supset \text{Type } [(\text{in}_1 a)] = \tau \oplus \pi; \\ \text{Type } [b] &= \pi \supset \text{Type } [(\text{in}_2 b)] = \tau \oplus \pi; \\ \text{Type } [a] &= \mathbf{label} \ \& \ \text{Type } [b] = \tau \ \& \ \text{Type } [c] = \tau \supset \\ &\quad \text{Type } [(\text{case } a b c)] = \tau; \\ \text{Type } [\mathbf{nil}] &\text{ может быть любым типом, в том числе и } \mathbf{void}; \\ \text{Type } [\mathbf{1}] &= \mathbf{label}; \\ \text{Type } [\mathbf{2}] &= \mathbf{label}. \end{aligned}$$

Внимание! Мы намеренно не приложили никаких усилий, чтобы разбирающие функции были определены только в том случае, когда объект собран при помощи соответствующей собирающей функции. А содержательно, определяя разбирающие и собирающие функции, необходимо следить, чтобы осмысленность разбирающих функций проверялась эффективно, т.е. в случае неприменимости они выдавали точное сообщение об ошибке. Я пока еще не знаю, как формализовать это требование абстрактно и вместе с тем адекватно²⁴, но оно гораздо важнее формальной точной обратимости.

С использованием аппарата современной теоретической информатики [7] минимальное требование на замкнутость может быть кратко выражено следующим образом.

Условие λ -замкнутости

Любой типизированный λ -терм над функционалами из нашей интерпретации определяет объект соответствующего типа.

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 7. Колмогоровская реализуемость (формальное определение). Пусть $\mathbb{R} A$ — множество решений A , и $a \mathbb{R} A$ означает, что a — решение A , т.е. что $a \in \mathbb{R} A$. Пусть U — наш универс рассматривания. Оператор, преобразующий A в $\mathbb{R} A$, называется *колмогоровской интерпретацией*, если выполнены следующие условия:

1. Для конъюнкции:

$$(*) \forall a, b (a \mathbb{R} A \ \& \ b \mathbb{R} B \supset (\text{pair } a \ b) \mathbb{R} (A \& B)), \\ \forall c (c \mathbb{R} A \& B \supset !(\text{pr}_1 \ c) \ \& \ (\text{pr}_1 \ c) \mathbb{R} A \ \& \ !(\text{pr}_2 \ c) \ \& \ (\text{pr}_2 \ c) \mathbb{R} B).$$

2. Для квантора $\exists$:

$$(*) \forall a, c (a \mathbb{R} A(c) \supset (\text{pair } a \ c) \mathbb{R} \exists x A(x), \\ \forall c \left(\begin{array}{c} c \mathbb{R} \exists x A(x) \supset \\ !(\text{pr}_1 \ c) \ \& \ (\text{pr}_1 \ c) \in U \ \& \ !(\text{pr}_2 \ c) \ \& \ (\text{pr}_2 \ c) \mathbb{R} A(\text{pr}_1(c)) \end{array} \right)).$$

²⁴Предупреждение для тех, кто попытается, увидев очевидную «дыру», заделать ее простейшим способом. Для всех простейших способов я знаю причины их неадекватности.

3. Для дизъюнкции:

$$\begin{aligned} (*) \quad & \forall a (a \mathbb{R} A \supset (\text{in}_1 a) \mathbb{R} A \vee B), \\ (*) \quad & \forall b (b \mathbb{R} B \supset (\text{in}_2 b) \mathbb{R} A \vee B), \\ \forall c \quad & \left(c \mathbb{R} (A \vee B) \supset \left(\begin{array}{c} !(\text{content } z) \underline{\&} !(\text{label } z) \underline{\&} \\ ((\text{label } z) = \mathbf{1}) \underline{\&} (\text{content } z) \mathbb{R} A) \vee \\ ((\text{label } z) = \mathbf{2}) \underline{\&} (\text{content } z) \mathbb{R} B) \end{array} \right) \right). \end{aligned}$$

4. Для импликации:

$$\begin{aligned} (*) \quad & \forall a (a \mathbb{R} A \underline{\&} f \mathbb{R} (A \Rightarrow B) \supset !(\text{ev } f a) \underline{\&} (\text{ev } f a) \mathbb{R} B). \\ \forall f \quad & (\forall a (a \mathbb{R} A \underline{\&} !(\text{ev } f a) \underline{\&} (\text{ev } f a) \mathbb{R} B) \supset f \mathbb{R} (A \Rightarrow B)). \end{aligned}$$

5. Для квантора $\forall$:

$$\begin{aligned} (*) \quad & f \mathbb{R} \forall x A(x) \supset \forall a (a \in U \supset !(\text{ev } f a) \underline{\&} (\text{ev } f a) \mathbb{R} A(a)). \\ \forall f \quad & (\forall a (a \in U \supset !(\text{ev } f a) \underline{\&} (\text{ev } f a) \mathbb{R} A(a)) \supset f \mathbb{R} (\forall x A(x))). \end{aligned}$$

6. Для отрицания:

$$\begin{aligned} (*) \quad & \text{Если нет таких } a, \text{ что } a \mathbb{R} A, \text{ то } \mathbf{nihil} \mathbb{R} \neg A. \\ & \text{Если } \mathbf{nihil} \mathbb{R} \neg A, \text{ то нет ни одного } a, \text{ такого, что } a \mathbb{R} A. \end{aligned}$$

Если оставить лишь подпункты с (*), то интерпретация называется *собирающей колмогоровской*, или просто *собирающей*. Если отбросить подпункты с (*), то интерпретация называется *разбирающей колмогоровской*, или просто *разбирающей*.

Через $! \mathbb{R} A$ обозначается тот факт, что $\mathbb{R} A$ непусто. Если $! \mathbb{R} A$, то A называется *реализуемой* в данной колмогоровской интерпретации.

Это определение отличается от оригинального в нескольких отношениях. Во-первых, у Колмогорова²⁵ не было явно указанных отображений и операторов, а прямо говорилось, что множество $\mathbb{R} A \& B$ — прямое произведение $\mathbb{R} A \times \mathbb{R} B$, множество $\mathbb{R} A \vee B$ — прямая сумма $\mathbb{R} A \oplus \mathbb{R} B$. Пункт, соответствующий $\mathbb{R} A \Rightarrow B$, был определен только частично. Было сказано, что

²⁵Как и у Гейтинга, как и у многих других вплоть до проникновения в данную область категорного подхода.

элементами $\mathbb{R} A \Rightarrow B$ являются *эффективные* преобразования $\mathbb{R} A$ в $\mathbb{R} B$, но само понятие *эффективного преобразования* оставалось неопределенным²⁶.

Далее, поскольку вплоть до 40-х годов XX в. еще не было ясно, насколько фундаментально в эффективной математике понятие ошибки и что оно неустранимо, у Колмогорова (впрочем, и у Гейтинга тоже) не было никаких оговорок насчет частично определенных функционалов. И, наконец, у Колмогорова везде были эквивалентности, он даже не думал о том, что можно из его реализаций выбирать еще подмножества и получать более слабые колмогоровские интерпретации, соответствующие дополнительным критериям на решения либо даже ограниченным классам построений.

Таким образом, в сущности интерпретация Колмогорова была *мета-интерпретацией*, общим методом построения целого множества интерпретаций. Наше определение еще сильнее подчеркивает этот аспект и ее взаимосвязи с категорными конструкциями. Посмотрите на операторы и отображения, определявшиеся в пунктах 1 и 3. Они прямо соответствуют категорным конструкциям прямого произведения и прямой суммы.

Рассмотрим логические характеристики колмогоровской интерпретации.

УТВЕРЖДЕНИЕ 1. *В собирающей колмогоровской интерпретации имеют место следующие правила перехода:*

1. Если $! \mathbb{R} A$ и $! \mathbb{R} B$, то $! \mathbb{R} A \& B$.
2. Если $! \mathbb{R} A$ или $! \mathbb{R} B$, то $! \mathbb{R} A \vee B$.
3. Если $! \mathbb{R} A(u)$ для некоторого $u \in U$, то $! \mathbb{R} \exists x A(x)$.

Таким образом, все прямые собирающие правила естественного вывода обычной классической логики выполнены в любой собирающей колмогоровской интерпретации. Установим дополнительные условия на собирающие интерпретации, при которых и косвенные собирающие правила для $\Rightarrow$ и $\forall$ также приемлемы.

²⁶Здесь мы на следующем витке спирали практически вернулись к Колмогорову, но длительное время именно за эту недоговоренность его больше всего «пинали» и отказывались признать его приоритет.

Для этого необходимо условие замкнутости, которое содержательно представляется естественным и в некотором смысле минимальным для эффективных функционалов.

Условие термальной замкнутости

Любое корректное выражение, составленное из уже имеющих-ся эффективных функционалов и содержащее свободные переменные, может быть объявлено новым функционалом, аргументами которого являются свободные переменные.

Точное формальное выражение данного условия в случае собирающих интерпретаций требует некоторого фрагмента модели λ -исчисления с типами, а именно чтобы пространство реализаций было *однократно λ -собирающим*.

Грубо говоря, если мы ухитрились уложиться в ограничения, создав некоторый сложный объект, то его составные части также построены согласно заданным ограничениям. Такое свойство может служить гарантией, что в первом приближении процессы построения описываются адекватно²⁷.

²⁷Во втором приближении дело может обстоять совсем не так. В частности, известно, что нетривиальное решение можно порою найти, лишь пройдя через ошибку. Уложиться в ограничения для финального результата порою возможно, лишь выйдя за их пределы по ходу построения и затем компенсировав сделанные «ошибки».

Такой прием обыгрывается в рассказе А. Азимова «ВЫХОД ИЗ ПОЛОЖЕНИЯ» из его знаменитой книги «Я, робот». Суперинтеллектуальному роботу дали задачу найти способ летать со сверхсветовой скоростью. Почему-то на этой задаче ломались все его предшественники. Он не сломался, поскольку был интеллектуальнее предыдущих и понял, что, хотя сверхсветовой прыжок приведет к смерти экипажа (а по законам робототехники причинение вреда человеку недопустимо), эта смерть обратима.

Но для компенсации «морального ущерба» робот ухитрился расцветить смерть пародийными видениями типа

«Это была смерть!

Это был мир без движения и без ощущений.

Мир тусклого, бесчувственного сознания — сознания тьмы, и безмолвия, и хаоса. И главное — сознания вечности. От человека остался лишь ничтожный белый клочок — его «я», зачоченевшее и перепуганное. . .

Потом проникновенно зазвучали слова, раскатившиеся над ним морем громового гула:

— На вас плохо сидит ваш гроб? Почему бы не попробовать эластичные

ПРИМЕР 18. Рассмотрим формулу $\forall x (A(x) \vee \neg A(x))$. В колмогоровской интерпретации ее реализуемость означает, что имеется такое f , что для всех $x_0 \in U$

$$\begin{aligned} &!(\text{label } (\text{ev } f \ x_0)), \\ &!(\text{content } (\text{ev } f \ x_0)), \\ &(\text{label } (\text{ev } f \ x_0)) = \mathbf{1} \supset (\text{content } (\text{ev } f \ x_0)) \textcircled{\mathbb{R}} A, \\ &(\text{label } (\text{ev } f \ x_0)) = \mathbf{2} \supset (\text{content } (\text{ev } f \ x_0)) \textcircled{\mathbb{R}} \neg A. \end{aligned}$$

Из перечисленных свойств реализации следует, что функция $\lambda x. (\text{label } (\text{ev } f \ x))$ эффективно решает проблему распознавания, выполнена или нет A . Заметим, что функция $\lambda x. (\text{content } (\text{ev } f \ x))$ справляется с такой работой намного хуже.

Возможность краткого и красивого выражения разрешимости является одним из преимуществ конструктивизма в области выразительности.

Из условия λ -замкнутости следует тождественная реализуемость всех формул, доказуемых в интуиционистской логике. Но это условие тем не менее не гарантирует полной формальной адекватности реализуемости для интуиционистской логики. Например, для любой замкнутой формулы A реализуемо $A \vee \neg A$. В самом деле, если у нас есть реализация A , то реализуема первая часть дизъюнкции, если ее нет — вторая. Таким образом, интерпретация реализуемости интуиционистски замкнута лишь для равномерной реализуемости, когда логическая формула считается реализуемой, если есть типизируемый замкнутый λ -терм, который после постановки типов входящих в формулу пропозициональных букв и предикатов как типов переменных становится реализацией логической формулы. Итак, говорить о реализуемости логической формулы можно лишь в контексте. Рассмотрение формулы как формулы с предикатными и пропозициональными переменными — один из этих контекстов. Другой — наличие единой реализации для всех интерпретаций. Ни тому, ни другому требованию равномерности $A \vee \neg A$ не удовлетворяет.

гробы фирмы Трупа С. Кадавра? Их научно разработанные формы соответствуют естественным изгибам тела и обогащены витаминами. Пользуйтесь гробами Кадавра — они удобны. Помните... вы... будете... мертвы... долго... долго!..”

Сложности, связанные с чисто формальной интерпретацией конструктивных формул через реализуемость, привели к тому, что в логических работах основными интерпретациями стали другие. Но для нас основной интерпретацией остается реализуемость, поскольку именно она выражает основное назначение конструктивной логики. Более того, для использования теории в качестве основы для построений, необходимо иметь не просто аксиомы, а аксиомы, помеченные объектами, их реализующими. Другими словами, *каждая конструктивная аксиома описывает некоторый программный модуль*.

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 8. Конструктивная теория — теория, в которой каждая аксиома снабжена именем реализующего ее объекта: $a \text{ @ } \text{Axiom}$. Модель конструктивной теории Th — такая колмогоровская интерпретация, в которой объект, специфицирующий аксиому, реализует данную аксиому.

Итак, для конструктивных теорий недостаточно абстрактной «истинности» аксиомы в любой модели. Нужно, чтобы ее реализовал именно тот объект, для которого она объявлена спецификацией в описании теории (или же, эквивалентно, объект, который объявлен реализацией аксиомы). Установим теорему корректности интуиционистской логики относительно колмогоровских интерпретаций с условием λ -замкнутости для произвольных теорий и выясним принципиальные препятствия, вырастающие перед абстрактной теоремой полноты.

ТЕОРЕМА 2. (Теорема об извлечении программы) По интуиционистскому доказательству формулы A в конструктивной теории Th можно построить λ -терм, реализующий A в любой конструктивной модели Th .

Доказательство. Воспользуемся формализацией выводов в виде графов, эквивалентно переформулировав ее таким образом, что правило размножения применяется лишь к допущениям вспомогательных выводов. Строим реализацию каждой формулы, встречающейся в выводе, как типизированный λ -терм, зависящий от свободных переменных, соответствующих действующим допущениям и произвольным переменным. Поэтому в описании правил вывода будем ссылаться на посылки правила как на специфицированные формулы вида $a \text{ @ } A$.

1. Аксиома $a \textcircled{R} A$ остается без изменений.
2. Допущению сопоставляется новое, не использованное ранее, имя свободной переменной соответствующего типа x :
Type $[A] \textcircled{R} A$.
3. Правило извлечения следствий порождает применение функции: $a \textcircled{R} A$ и $f \textcircled{R} A \Rightarrow B$ порождают $(f a) \textcircled{R} B$.
4. Правило дедукции порождает λ -абстракцию. Если $x \textcircled{R} A$ — допущение вспомогательного вывода-посылки, $t \textcircled{R} B$ — его результат, то $\lambda x. t \textcircled{R} (A \Rightarrow B)$.
5. Правило разъединения порождает соответствующую проекцию пары: если $c \textcircled{R} A \& B$, то $(\text{pr}_1 c) \textcircled{R} A$.
6. Правило соединения порождает пару: если $a \textcircled{R} A$, $b \textcircled{R} B$, то $(\text{pair } a b) \textcircled{R} A \& B$.
7. Правило порождения $\vee$ порождает вложение: если $a \textcircled{R} A$, то $(\text{in}_1 a) \textcircled{R} A \vee B$.
8. Правило разбора случаев порождает условное предложение: если $a \textcircled{R} A \vee B$; $t[x] \textcircled{R} C$, где C — результат первого вспомогательного вывода, а $x \textcircled{R} A$ — его допущение; $r[y] \textcircled{R} C$, где C — результат второго вспомогательного вывода, а $y \textcircled{R} B$ — его допущение, то

$$(\text{case } (\text{label } a) t[x \mid (\text{content } A)] r[y \mid (\text{content } B)]) \textcircled{R} C$$

как результат правила.

9. Правило вспомогательной константы придает значение этой константе, которое в дальнейшем подставляется вместо нее. Если $a \textcircled{R} \exists x A(x)$, то значением вводимой вспомогательной константы c_i становится $(\text{pr}_1 a)$, и $(\text{pr}_2 a) \textcircled{R} A[x \mid c_i]$. В дальнейшем во всех упоминаемых термах вспомогательные константы заменяются на их значения.
10. Правило доказательства на примере порождает пару. Если $a \textcircled{R} A[x \mid t]$, то $(\text{pair } at) \textcircled{R} \exists x A(x)$.

11. Правило обобщения порождает λ -выражение. Если z — произвольная переменная вывода, $t \text{ @ } A(z)$, то $\lambda z. t \text{ @ } \forall x A(x)$.
12. Правило перехода от общего к частному порождает вызов функции. Если $f \text{ @ } \forall x A(x)$, то $(f t) \text{ @ } A[x \mid t]$.
13. Правило приведения к абсурду. **nihil** @ $\neg A$.
14. Из лжи следует все, что угодно. **nihil** @ B .

Тривиальной индукцией по построению вывода доказывается корректность указанного алгоритма извлечения программы и соответственно равномерная реализуемость каждой доказуемой формулы.

Q.E.D.

Заметим, что данная теорема в нашей форме явно иллюстрирует несколько тонкостей. Во-первых, реализации $\neg A$ либо формулы, полученной по *ex falso quodlibet*, никак не используют реализации предыдущих формул. В доказательстве корректности используется лишь тот факт, что одновременно A и $\neg A$ не могут реализоваться ни в какой интерпретации. Во-вторых, даже в отсутствие отрицания целые куски доказательства могут не использоваться в реализации теоремы. В частности, к такому эффекту приводят формулы вида

$$\forall x, y (A(x, y) \Rightarrow B(x)).$$

y здесь оказывается промежуточным значением, которое вычисляется, а потом забывается.

Теперь устраним сделанное предположение о том, что правило размножения применяется лишь к допущениям. Тогда необходимо видоизменить язык создаваемых программ, введя в него описания констант:

const $c=t$;

В дальнейшей части того блока, где введено описание константы, c имеет то же значение, что и t . Отметим известные факты, касающиеся функциональных языков. Если все вычисления детерминированы, то описания констант формально не изменяют

выразительной силы языка, но сокращение длины программы при этом может быть более чем в экспоненту раз. Если же вычисления недетерминированы, то описания констант дают принципиально новый эффект. s получает результат одного из вычислений t и передает его в неизменном виде, а если записать t многократно, каждый его экземпляр может дать свое значение.

Заметим, что предыдущее рассмотрение заодно показывает, что построенный нами алгоритм легко модифицируется при изменениях логического исчисления. Но эти модификации могут оказаться весьма существенными с практической точки зрения. Далее, только что приведенные соображения показывают, что язык логики в принципе нейтрален по отношению к детерминированности либо недетерминированности вычислений, но малейшие изменения в конкретной формализации могут склонить чашу весов либо в одну, либо в другую сторону.

Обобщая все сказанное, можно заметить, что интуиционистская логика является концептуально последовательным и красивым выражением понятия реализуемости в λ -исчислении с типами, но не совпадает с этим исчислением. В доказательстве не все части переходят в программу. Этот факт на самом деле имеет фундаментальное значение для приложений логики к информатике, а его игнорирование — одна из бед нынешнего примитивного и основанного на грубой силе подхода к приложениям логики. Итак, *в достаточно сложном конструктивном доказательстве с необходимостью возникают неконструктивные части*. Далее, эксперименты с реализуемостью, проделанные в данном параграфе, показывают, что есть широкий спектр возможностей варьировать понятие реализуемости. И, наконец, изменения в выборе формы представления доказательств, вроде бы неважные с внутренней логической точки зрения, могут приводить к принципиальным сдвигам в соотношениях между доказательствами и конструируемыми объектами.

Литература

- [1] Brouwer L.E.J. Over de grondslagen der wiskunde. Amsterdam: Thesis, 1907.
- [2] Brouwer L.E.J. De onbetrouwbaarheid rer logische principes // Tijdschrift voor wijsbegeerte, **2**, 1908.
- [3] Brouwer L.E.J. Intuitionisme en formalisme. Groningen, 1912.

- [4] *Brouwer L.E.J.* Besitzt jede reele Zahl eine dezimalbruchentwicklung?// Proc. Acad. Amsterdam, **23**, p 949–954.
- [5] *Гейтинг А.* Интуиционизм. Введение. М., 2010.
- [6] *Ершов Ю.Л.* Теория нумераций. М.: Наука, 1977.
- [7] *Митчелл Дж.* Основания языков программирования. М.; Ижевск: РХД, 2010.

Секвенциальная аксиоматизация паранормальной логики PContPComp¹

В. М. Попов

ABSTRACT. The sequent calculus axiomatizing paranormal logic PContPComp is presented.

Ключевые слова: секвенция, исчисление, паранормальная логика, паранепротиворечивая логика, парapolная логика

Предлагается удобное для осуществления поиска доказательства секвенциальное исчисление, аксиоматизирующее логику PContPComp из [3].

Язык L логики PContPComp есть стандартный пропозициональный язык с алфавитом $\{\&, \vee, \supset, \neg, (,), (p_1, p_2, p_3, \dots)\}$ (разумеется, символы $\&, \vee$ и $\supset$ — бинарные, а символ $\neg$ — унарная логические связки языка L , $($ и $)$ — технические символы языка L , символы $p_1, p_2, p_3, \dots$ — пропозициональные переменные этого языка). Принимаем обычные соглашения об опускании скобок в L -формулах и используем «формула» вместо « L -формула». Логикой называем непустое множество формул, замкнутое относительно правила подстановки в L и правила modus ponens в L . Теорией логики $\mathbf{L}$ называем множество формул, включающее логику $\mathbf{L}$ и замкнутое относительно правила modus ponens в $\mathbf{L}$. Множество всех формул называем тривиальной теорией. Противоречивой теорией логики $\mathbf{L}$ называем такую теорию $\mathbf{T}$ логики $\mathbf{L}$, что для некоторой формулы A верно следующее: $A \in \mathbf{T}$ и $\neg A \in \mathbf{T}$. Паранепротиворечивой теорией логики $\mathbf{L}$ называем такую противоречивую теорию $\mathbf{T}$ логики $\mathbf{L}$, что $\mathbf{T}$ не есть тривиальная теория. Паранепротиворечивой логикой называем такую логику $\mathbf{L}$, что существует паранепротиворечивая теория логики

¹Работа выполнена при поддержке РГНФ, проект № 10-03-00570а.

L. Полной теорией логики **L** называем такую теорию **T** логики **L**, что для всякой формулы A верно: $A \in \mathbf{T}$ или $\neg A \in \mathbf{T}$. Параллельной теорией логики **L** называем такую теорию **T** логики **L**, что **T** не является полной теорией логики **L** и всякая полная теория логики **L**, включающая **T**, есть тривиальная теория. Параллельной логикой называем такую логику **L**, что существует параллельная теория логики **L**. Паранормальной логикой называем логику, которая является паранепротиворечивой и параллельной логикой. Следуя [3], строим исчисление HPContPComp гильбертовского типа и определяем логику PContPComp. Язык исчисления HPContPComp есть L . Правило *modus ponens* в L является единственным правилом вывода этого исчисления. Выводы (в частности, доказательства) в HPContPComp строятся обычным для гильбертовского типа исчислений образом (см. [1], [4]). Множеству всех аксиом исчисления HPContPComp принадлежат все те и только те формулы, каждая из которых имеет хотя бы один из следующих видов (здесь и далее A , B и C есть формулы):

- (I) $(A \supset B) \supset ((B \supset C) \supset (A \supset C))$,
- (II) $A \supset (A \vee B)$,
- (III) $A \supset (B \vee A)$,
- (IV) $(A \supset C) \supset ((B \supset C) \supset ((A \vee B) \supset C))$,
- (V) $(A \& B) \supset A$,
- (VI) $(A \& B) \supset B$,
- (VII) $(C \supset A) \supset ((C \supset B) \supset (C \supset (A \& B)))$,
- (VIII) $(A \supset (B \supset C)) \supset ((A \& B) \supset C)$,
- (IX) $((A \& B) \supset C) \supset (A \supset (B \supset C))$,
- (X) $((A \supset B) \supset A) \supset A$,
- (XI) $\neg(A \vee B) \supset (\neg A \& \neg B)$,
- (XII) $(\neg A \& \neg B) \supset \neg(A \vee B)$,
- (XIII) $\neg(A \& B) \supset (\neg A \vee \neg B)$,
- (XIV) $(\neg A \vee \neg B) \supset \neg(A \& B)$,
- (XV) $\neg(A \supset B) \supset (\neg A \& B)$,
- (XVI) $(\neg A \& B) \supset \neg(A \supset B)$,
- (XVII) $\neg\neg A \supset A$,
- (XVIII) $A \supset \neg\neg A$,

$$(XIX) (A \& \neg A) \supset (B \vee \neg B).$$

Множество всех формул, доказуемых в HPContPComp , обозначаем через PContPComp . Согласно [3], PContPComp является паранормальной логикой. Эта логика есть пересечение паранепротиворечивой (но не параполной) логики PCont и параполной (но не паранепротиворечивой) логики PComp (см. [2], [3]). Построим секвенциальное исчисление GPContPComp . Алфавит $\mathbf{A}$ языка этого секвенциального исчисления есть объединение алфавита языка L с двухэлементным множеством $\{\bullet, \rightarrow\}$ символов. Непустой последовательностью формул называем слово в алфавите $\mathbf{A}$, имеющее вид $A_1 \bullet \dots \bullet A_n$, где n есть целое положительное число, а $A_1, \dots, A_n$ есть формулы. В случае, когда $n=1$, $A_1 \bullet \dots \bullet A_n$ есть A_1 . Пустой последовательностью формул называем пустое слово (в алфавите $\mathbf{A}$). Называем π последовательностью формул, если π есть непустая последовательность формул или пустая последовательность формул. Условимся обозначать через Γ, Σ, Δ и Θ последовательности формул. Секвенцией называем слово в алфавите $\mathbf{A}$, имеющее вид $\Gamma \rightarrow \Delta$.

Пусть Seq есть множество всех секвенций и для всякого целого положительного числа n Seq^n есть n -ная декартова степень множества Seq . Называем R секвенциальным правилом, если для некоторого целого положительного числа n $R \subseteq \text{Seq}^{n+1}$. Называем Π применением секвенциального правила R , если $\Pi \in R$. Для описания применений секвенциальных правил потребуется операция $\bullet$. Можно доказать, что существует единственная бинарная операция (обозначаем ее через $\bullet$) на множестве всех последовательностей формул, удовлетворяющая следующим трем условиям (а), (б) и (в).

- (а) $\Gamma \bullet \Delta = \Gamma$, если Δ есть пустая последовательность формул.
- (б) $\Gamma \bullet \Delta = \Delta$, если Γ есть пустая последовательность формул.
- (в) $\Gamma \bullet \Delta = \Gamma, \Delta$, если ни Γ , ни Δ не есть пустая последовательность формул.

Правилами исчисления GPContPComp являются определяемые ниже двадцать пять секвенциальных правил (и только они).

Каждое из этих секвенциальных правил определяем путем указания общего вида применения данного правила. При этом, следуя традиции, пользуемся двухмерным представлением упорядоченных пар секвенций и упорядоченных троек секвенций.

$$\begin{array}{c}
\frac{((\Gamma \bullet A, B) \bullet \Delta) \rightarrow \Theta}{(\Gamma \bullet B, A) \bullet \Delta \rightarrow \Theta} \text{ (ПЛ)}, \quad \frac{\Gamma \rightarrow ((\Delta \bullet A, B) \bullet \Theta)}{\Gamma \rightarrow ((\Delta \bullet B, A) \bullet \Theta)} \text{ (ПП)}, \\
\\
\frac{(A, A \bullet \Gamma) \rightarrow \Theta}{(A \bullet \Gamma) \rightarrow \Theta} \text{ (СЛ)}, \quad \frac{\Gamma \rightarrow (\Theta \bullet A, A)}{\Gamma \rightarrow (\Theta \bullet A)} \text{ (СП)}, \\
\\
\frac{\Gamma \rightarrow \Theta}{(A \bullet \Gamma) \rightarrow \Theta} \text{ (ДЛ)}, \quad \frac{\Gamma \rightarrow \Theta}{\Gamma \rightarrow (\Theta \bullet A)} \text{ (ДП)}, \\
\\
\frac{(A \bullet \Gamma) \rightarrow \Theta}{((A \& B) \bullet \Gamma) \rightarrow \Theta} \text{ (ВКЛ}_1\text{)}, \quad \frac{(A \bullet \Gamma) \rightarrow \Theta}{((B \& A) \bullet \Gamma) \rightarrow \Theta} \text{ (ВКЛ}_2\text{)}, \\
\\
\frac{\Gamma \rightarrow (\Theta \bullet A) \quad \Gamma \rightarrow (\Theta \bullet B)}{\Gamma \rightarrow (\Theta \bullet (A \& B))} \text{ (ВКП)}, \\
\\
\frac{((\neg A) \bullet \Gamma) \rightarrow \Theta \quad ((\neg A) \bullet \Gamma) \rightarrow \Theta}{((\neg(A \& B)) \bullet \Gamma) \rightarrow \Theta} \text{ (ВОКЛ)}, \\
\\
\frac{\Gamma \rightarrow (\Theta \bullet (\neg A))}{\Gamma \rightarrow (\Theta \bullet \neg(A \& B))} \text{ (ВОПК}_1\text{)}, \quad \frac{\Gamma \rightarrow (\Theta \bullet (\neg A))}{\Gamma \rightarrow (\Theta \bullet \neg(B \& A))} \text{ (ВОПК}_2\text{)}, \\
\\
\frac{(A \bullet \Gamma) \rightarrow \Theta \quad (B \bullet \Gamma) \rightarrow \Theta}{((A \vee B) \bullet \Gamma) \rightarrow \Theta} \text{ (ВДЛ)}, \quad \frac{\Gamma \rightarrow (\Theta \bullet A)}{\Gamma \rightarrow (\Theta \bullet (A \vee B))} \text{ (ВДП}_1\text{)}, \\
\\
\frac{\Gamma \rightarrow (\Theta \bullet A)}{\Gamma \rightarrow (\Theta \bullet (B \vee A))} \text{ (ВДП}_2\text{)}, \quad \frac{((\neg A) \bullet \Gamma) \rightarrow \Theta}{((\neg(A \vee B)) \bullet \Gamma) \rightarrow \Theta} \text{ (ВОДЛ}_1\text{)}, \\
\\
\frac{((\neg A) \bullet \Gamma) \rightarrow \Theta}{((\neg(B \vee A)) \bullet \Gamma) \rightarrow \Theta} \text{ (ВОДЛ}_2\text{)},
\end{array}$$

$$\begin{aligned}
& \frac{\Gamma \rightarrow (\Theta \bullet (\neg A)) \quad \Gamma \rightarrow (\Theta \bullet (\neg B))}{\Gamma \rightarrow (\Theta \bullet (\neg(A \vee B)))} \text{ (ВОДП)}, \\
& \frac{\Gamma \rightarrow (\Theta \bullet A) \quad (B \bullet \Sigma) \rightarrow \Theta}{(((A \supset B) \bullet \Gamma) \bullet \Sigma) \rightarrow (\Theta \bullet \Sigma)} \text{ (ВИЛ)}, \quad \frac{(A \bullet \Gamma) \rightarrow \Theta}{\Gamma \rightarrow (\Theta \bullet (A \supset B))} \text{ (ВИП)}, \\
& \frac{(A, \neg B \bullet \Gamma) \rightarrow \Theta}{((\neg(B \supset A)) \bullet \Gamma) \rightarrow \Theta} \text{ (ВОИЛ)}, \\
& \frac{\Gamma \rightarrow (\Theta \bullet A) \quad \Gamma \rightarrow (\Theta \bullet (\neg A))}{\Gamma \rightarrow (\Theta \bullet (\neg(A \supset B)))} \text{ (ВОИП)}, \\
& \frac{(A \bullet \Gamma) \rightarrow \Theta}{(\neg \neg A \bullet \Gamma) \rightarrow \Theta} \text{ (ВООЛ)}, \quad \frac{\Gamma \rightarrow (\Theta \bullet A)}{\Gamma \rightarrow (\Theta \bullet \neg \neg A)} \text{ (ВООП)}, \\
& \frac{\Gamma \rightarrow (\Theta \bullet A) \quad (B \bullet \Sigma) \rightarrow \Theta}{(((A \supset B) \bullet \Gamma) \bullet \Sigma) \rightarrow (\Theta \bullet \Sigma)} \text{ (сечение)}.
\end{aligned}$$

Множество всех основных секвенций исчисления GPContPComp есть множество всех секвенций, каждая из которых имеет вид $A \rightarrow A$ или $A, \neg A \rightarrow B, \neg B$. Выводы в секвенциальном исчислении GPContPComp строятся обычным для секвенциального типа исчислений образом (см., например, [1] и [4]). Для GPContPComp имеет место теорема об устранимости сечения (подробное доказательство этой теоремы методом Генцена, предложенным в [1], проведено в дипломной работе Знаменской Н.А. «Теорема об устранимости сечения для секвенциального исчисления, аксиоматизирующего пересечение паранепротиворечивой логики Розоноэра с ее параполным напарником» (МГУ, философский факультет, кафедра логики, 2010, научный руководитель Попов В.М.)).

Тот факт, что секвенциальное исчисление GPContPComp аксиоматизирует логику PContPComp , устанавливает нижеследующая теорема.

ТЕОРЕМА. *Для всякой формулы A : секвенция $\rightarrow A$ доказуема в GPContPComp тогда и только тогда, когда $A \in \text{PContPComp}$.*

Литература

- [1] *Генцен Г.* Исследования логических выводов // Математическая теория логического вывода. М., 1967.
- [2] *Знаменская Н.А., Попов В.М.* Паранормальная логика $PContPComp$ как пересечение паранепротиворечивой логики $PCont$ и парapolной логики $PComp$ // Шестые смирновские чтения по логике. Материалы международной научной конференции 17-19 июня 2009. М., 2009. С. 63-65.
- [3] *Попов В.М.* Между Par и множеством всех формул // Шестые смирновские чтения по логике. Материалы международной научной конференции 17-19 июня 2009. М., 2009. С. 93-95.
- [4] *Смирнов В.А.* Формальный вывод и логические исчисления // Смирнов В.А. Теория логического вывода. М., 1999. С. 16-233.

Секвенциальные аксиоматизации пропозициональных логик нельсоновского типа¹

В. М. Попов

ABSTRACT. The sequent systems axiomatizing four Nelson's type logics are presented.

Ключевые слова: секвенция, исчисление, паранормальная логика, паранепротиворечивая логика, парapolная логика

Формулируются свободные от сечения секвенциальные аксиоматизации четырех пропозициональных логик, родственных логикам, определяемым построенными в [5] и в [6] исчислениями N и N^- . В [5] предложены секвенциальные исчисления N_s и N_s^- , первое из которых эквивалентно исчислению N , а второе — исчислению N^- . Построенные ниже секвенциальные исчисления $\text{GPComp}(N)$ и $\text{GPar}(N)$ эквивалентны с точностью до несущественных деталей секвенциальному исчислению, являющемуся пропозициональной частью исчисления N_s , и секвенциальному исчислению, являющемуся пропозициональной частью исчисления N_s^- соответственно.

Язык L всех рассматриваемых здесь логик есть стандартный пропозициональный язык, алфавиту которого принадлежат все следующие символы и только они: $\&$, $\vee$, $\supset$ (бинарные логические связки языка L), $\neg$ (унарная логическая связка языка L), $)$ и $($ (технические символы языка L), $p_1, p_2, p_3, \dots$ (пропозициональные переменные языка L). Допускаем применение обычных соглашений об опускании скобок в L -формулах и используем «формула» вместо « L -формула». Опишем исчисления

¹Работа выполнена при поддержке РГНФ, проект № 10-03-00570а.

$\text{HPar}(\mathbf{N})$, $\text{HPContPComp}(\mathbf{N})$, $\text{HPCont}(\mathbf{N})$ и $\text{HPComp}(\mathbf{N})$ гильбертовского типа, индуцирующие интересные нас логики. Множеству всех аксиом исчисления $\text{HPar}(\mathbf{N})$ принадлежат все те и только те формулы, каждая из которых имеет хотя бы один из следующих семнадцати видов (здесь и далее A , B и C есть формулы):

- (I) $(A \supset B) \supset ((B \supset C) \supset (A \supset C))$,
- (II) $A \supset (A \vee B)$,
- (III) $A \supset (B \vee A)$,
- (IV) $(A \supset C) \supset ((B \supset C) \supset ((A \vee B) \supset C))$,
- (V) $(A \& B) \supset A$,
- (VI) $(A \& B) \supset B$,
- (VII) $(C \supset A) \supset ((C \supset B) \supset (C \supset (A \& B)))$,
- (VIII) $(A \supset (B \supset C)) \supset ((A \& B) \supset C)$,
- (IX) $((A \& B) \supset C) \supset (A \supset (B \supset C))$,
- (X) $\neg(A \vee B) \supset (\neg A \& \neg B)$,
- (XI) $(\neg A \& \neg B) \supset \neg(A \vee B)$,
- (XII) $\neg(A \& B) \supset (\neg A \vee \neg B)$,
- (XIII) $(\neg A \vee \neg B) \supset \neg(A \& B)$,
- (XIV) $\neg(A \supset B) \supset (\neg A \& B)$,
- (XV) $(\neg A \& B) \supset \neg(A \supset B)$,
- (XVI) $\neg\neg A \supset A$,
- (XVII) $A \supset \neg\neg A$.

Множеству всех аксиом исчисления $\text{HPContPComp}(\mathbf{N})$ принадлежат все те и только те формулы, каждая из которых имеет хотя бы один из видов (I)-(XVII) или имеет вид $(A \& \neg A) \supset (B \vee \neg B)$. Множеству всех аксиом исчисления $\text{HPCont}(\mathbf{N})$ принадлежат все те и только формулы, каждая из которых имеет хотя бы один из видов (I)-(XVII) или имеет вид $(B \vee \neg B)$. Множеству всех аксиом исчисления $\text{HPComp}(\mathbf{N})$ принадлежат все те и только формулы, каждая из которых имеет хотя бы один из видов (I)-(XVII) или имеет вид $(A \& \neg A) \supset B$. Каждое из исчислений $\text{HPar}(\mathbf{N})$, $\text{HPContPComp}(\mathbf{N})$, $\text{HPCont}(\mathbf{N})$, $\text{HPComp}(\mathbf{N})$ имеет единственное правило вывода — правило *modus ponens* в L . Во всяком из этих исчислений выводы (в частности, доказательства) строятся обычным для гильбертовского типа исчис-

лений образом. Опираясь на вышеприведенные определения исчислений $\text{HPar}(N)$, $\text{HPContPComp}(N)$, $\text{HPCont}(N)$, $\text{HPComp}(N)$ и данные в [2] определения исчислений HPar , HPContPComp , HPCont , HPComp , замечаем, что язык всех указанных исчислений есть L , каждое из этих исчислений имеет единственное правило вывода — правило *modus ponens* в L , выводы (в частности, доказательства) во всех этих исчислениях строятся обычным для гильбертовского типа исчислений образом, множество всех аксиом исчисления HPar (исчисления HPContPComp , исчисления HPCont , исчисления HPComp) есть объединение множества всех аксиом исчисления $\text{HPar}(N)$ (исчисления $\text{HPContPComp}(N)$, исчисления $\text{HPCont}(N)$, исчисления $\text{HPComp}(N)$ соответственно) с множеством всех формул вида $((A \supset B) \supset A) \supset A$. Кроме того, можно доказать, что формула $((p_1 \supset p_2) \supset p_1) \supset p_1$ недоказуема ни в одном из исчислений $\text{HPar}(N)$, $\text{HPContPComp}(N)$, $\text{HPCont}(N)$, $\text{HPComp}(N)$. Таким образом, исчисления $\text{HPar}(N)$, $\text{HPContPComp}(N)$, $\text{HPCont}(N)$, $\text{HPComp}(N)$ являются собственными сужениями исчислений HPar , HPContPComp , HPCont , HPComp соответственно. Определяем $\text{Par}(N)$ как множество всех формул, доказуемых в $\text{HPar}(N)$. Аналогично определяем $\text{PContPComp}(N)$, $\text{PCont}(N)$ и $\text{PComp}(N)$. Термины «логика», «паранепротиворечивая логика» и «паранормальная логика» далее используем в соответствии с их определениями, данными в [3]. Можно доказать, что

- (а) $\text{Par}(N)$ и $\text{PContPComp}(N)$ есть различные паранормальные логики, при этом $\text{Par}(N) \subseteq \text{PContPComp}(N)$,
- (б) $\text{PCont}(N)$ есть паранепротиворечивая, но не параполная логика,
- (в) $\text{PComp}(N)$ есть параполная, но не паранепротиворечивая логика,
- (г) $\text{PContPComp}(N) \subseteq \text{PCont}(N) \cap \text{PComp}(N)$, но $\text{PContPComp}(N)$ и $\text{PCont}(N) \cap \text{PComp}(N)$ не равны.

Приступим теперь к конструированию секвенциальных исчислений $\text{GPar}(N)$, $\text{GPContPComp}(N)$, $\text{GPCont}(N)$, $\text{GPComp}(N)$. Построение каждого из этих исчислений аналогично построению исчисления GPContPComp в работе [3]. Обозначая через

ВИП(N) секвенциальное правило, являющееся множеством всех упорядоченных пар вида $\langle (A \bullet \Gamma) \rightarrow B, \Gamma \rightarrow A \supset B \rangle$, где Γ — последовательность формул, определяем множество всех правил вывода каждого из исчислений $GPar(N)$, $GPContPComp(N)$, $GPCont(N)$ и $GPComp(N)$ как такое множество M , что $\Pi \in M$ тогда и только тогда, когда Π есть ВИП(N) или любое, исключая ВИП, правило вывода исчисления $GPContPComp$. Множество всех основных секвенций исчисления $GPar(N)$ есть множество всех секвенций вида $A \rightarrow A$. Множество всех основных секвенций исчисления $GPContPComp(N)$ есть объединение множества всех основных секвенций исчисления $GPar(N)$ с множеством всех секвенций вида $A, \neg A \rightarrow B, \neg B$. Множество всех основных секвенций исчисления $GPCont(N)$ есть объединение множества всех основных секвенций исчисления $GPar(N)$ с множеством всех секвенций вида $\rightarrow A, \neg A$. Множество всех основных секвенций исчисления $GPComp(N)$ есть объединение множества всех основных секвенций исчисления $GPar(N)$ с множеством всех секвенций вида $A, \neg A \rightarrow$. Выводы во всех секвенциальных исчислениях $GPar(N)$, $GPContPComp(N)$, $GPCont(N)$ и $GPComp(N)$ строятся обычным для этого типа исчислений образом. Для каждого из этих исчислений доказана теорема об устранимости сечения. С использованием этой теоремы показано, что исчисления $GPar(N)$, $GPContPComp(N)$, $GPCont(N)$, $GPComp(N)$ являются секвенциальными аксиоматизациями логик $Par(N)$, $PContPComp(N)$, $PCont(N)$, $PComp(N)$, соответственно. Точнее, доказана теорема о том, что для всякой логики $\mathbf{L}$ из $\{Par(N), PContPComp(N), PCont(N), PComp(N)\}$ и для всякой формулы A верно, что секвенция $\rightarrow A$ выводима в $\mathbf{GL}$ тогда и только тогда, когда $A \in \mathbf{L}$. Можно доказать также следующее **утверждение**: позитивный фрагмент любой из логик $Par(N)$, $PContPComp(N)$, $PCont(N)$, $PComp(N)$ является позитивным фрагментом интуиционистской пропозициональной логики, язык которой есть L . В свете **утверждения** ясно, что ни одна из логик $Par(N)$, $PContPComp(N)$, $PCont(N)$, $PComp(N)$ не имеет конечной характеристической матрицы. Тем не менее, все эти логики разрешимы. Разрешимость любой из указанных логик вытекает из разрешимости построенного выше секвенциального исчисления, аксиоматизирующего эту логику. В свою

очередь, для каждого исчисления $GPar(N)$, $GPContPComp(N)$, $GPCont(N)$, $GPComp(N)$ разрешимость доказывается генценовским методом, который впервые применен в [1]. При этом в ходе применения генценовского метода для доказательства разрешимости исчисления $\mathbf{G}$ из $\{GPar(N), GPContPComp(N), GPCont(N), GPComp(N)\}$ используется нижеследующая теорема об обобщенной подформульности $\mathbf{G}$ -выводов, а не аналог теоремы 2.513 из [1] (теоремы о подформульности LI -выводов и LK -выводов).

ТЕОРЕМА. Пусть $\mathbf{G} \in \{GPar(N), GPContPComp(N), GPCont(N), GPComp(N)\}$.

Если формула A есть подформула формулы, входящей в некоторую секвенцию, принадлежащую $\mathbf{G}$ -выводу, последняя секвенция которого есть S , то

- (1) *если A не имеет вид $\neg B$ ни для какой формулы B , то A есть подформула некоторой формулы, входящей в S ,*
- (2) *если A имеет вид $\neg B$ для некоторой формулы B , то по крайней мере одна из формул B или $\neg B$ есть подформула некоторой формулы, входящей в S .*

В заключение заметим, что естественно возникающая проблема построения свободной от сечения секвенциальной аксиоматизации логики $PCont(N) \cap PComp(N)$ открыта.

Литература

- [1] Генцен Г. Исследования логических выводов // Математическая теория логического вывода. М., 1967. С.9-74.
- [2] Попов В.М. Между Par и множеством всех формул // Шестые смирновские чтения по логике. Материалы международной научной конференции 17-19 июня 2009. М., 2009. С. 93-95.
- [3] Попов В.М. Секвенциальная аксиоматизация паранормальной логики $PContPComp$ // В настоящем сборнике.
- [4] Смирнов В.А. Формальный вывод и логические исчисления // Смирнов В.А. Теория логического вывода. М., 1999. С. 16-233.
- [5] Almkudad A., Nelson D. Constructible falsity and inexact predicates // J. Symb. Log. 1984. Vol. 49. № 1. P. 231-233.
- [6] Nelson D. Constructible falsity // J. Symb. Log. 1949. Vol. 14. № 1. P. 16-26.

Об одном некартезианском расширении системы E^1

Н. Н. ПРЕЛОВСКИЙ

ABSTRACT. In this paper a non-Cartesian extension of relevant system E (of entailment) is considered.

Ключевые слова: тезис Сушко, релевантная логика, некартезианская логика, расширение системы E

В «Размышлениях о первой философии» [1] Рене Декарт пишет: «Итак, я сделаю предположение, что не всеблагой Бог, источник истины, но какой-то злокозненный гений, очень могущественный и склонный к обману, приложил всю свою изобретательность к тому, чтобы ввести меня в заблуждение: я буду мнить небо, воздух, землю, цвета, очертания, звуки и все вообще внешние вещи всего лишь пригрезившимися мне ловушками, расставленными моей доверчивости усилиями этого гения; я буду рассматривать себя как существо, лишенное рук, глаз, плоти и крови, каких-либо чувств: обладание всем этим, стану я полагать, было лишь моим ложным мнением; я прочно укореню в себе это предположение и тем самым даже если не в моей власти окажется познать что-то истинное, по крайней мере, от меня будет зависеть отказ от признания лжи, и я, укрепив свой разум, уберегу себя от обманов этого гения, каким бы он ни был могущественным и искусным».

Отметим, что уверенность Декарта в возможности избежать обманов злокозненного гения при помощи отрицания всего, что кажется истинным, по всей видимости, основана на хорошо известном свойстве классической логики, согласно которому, отрицая неистинные положения, мы получаем положения истинные.

¹Работа выполнена при поддержке РГНФ, грант № 11-03-00761а.

Однако многозначные логики, выступающие в качестве возможных альтернатив классики, в общем случае не обладают выше-названным свойством. Поэтому логики, в которых отрицание не являющегося истинным суждения само не обязательно является истинным, можно назвать *некартезианскими*.

Более того, в большинстве известных многозначных логик, как и в классической логике, имеется достаточное количество выразительных языковых средств для различения каждой пары значений в наименьших по мощности характеристических для данных логик матрицах. Быть может, именно это свойство логических построений играет ключевую роль во всей аргументации Декарта? Поясним, что подразумевается под различением пар значений в логической матрице. Для этого дадим ряд определений.

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 1 (Язык, формулы, множества формул).

Языком будем называть пару $L = \langle \{p_1, p_2, \dots\}, \{C_{n_1}, C_{n_2}, \dots, C_{n_m}\} \rangle$, где $\{p_1, p_2, \dots\}$ есть счетное множество пропозициональных переменных, а $\{C_{n_1}, C_{n_2}, \dots, C_{n_m}\}$ — конечное множество n_i -местных логических связок, $1 \leq i \leq m$.

С помощью F будем обозначать множество всех правильно построенных в языке L формул. Формулы из F будем обозначать греческими буквами α, β, δ , возможно, с индексами. Для обозначения произвольных множеств формул из F будем использовать заглавные греческие буквы Γ, Δ, Θ , возможно, с индексами.

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 2 (Логика, логическая система).

Под логикой будем понимать пару $LOG = \langle F, \vdash_{LOG} \rangle$, где $\vdash_{LOG}$ есть отношение логического следования между множествами формул и формулами, определенное на F .

Логической системой (исчислением), соответствующей (соответствующим) логике LOG , будем называть пару $LS(LOG) = \langle \Delta_A, R \rangle$, где Δ_A есть конечное множество формул из F , называемых схемами аксиом, а R есть конечное множество правил вывода в стандартной Гильбертовской формулировке, такую, что обычным образом определенное в $LS(LOG)$ отношение выводимости в точности совпадает с отношением следования $\vdash_{LOG}$.

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 3 (Логическая матрица, оценка, семантика).

Под логической матрицей будем понимать пару $M = \langle V, D \rangle$,

где V есть непустое множество логических значений, $D \subset V$ – непустое множество выделенных значений.

Оценкой ξ в матрице M будем называть гомоморфное отображение $\xi: F \mapsto V$.

В дальнейшем будут также использоваться стандартные понятия выполнимости и общезначимости формул, а также следования в матрице M и характеристической матрицы.

Под матричной семантикой логики LOG будем понимать множество всех оценок $SEM(LOG) = \{\xi_i: F \mapsto V\}$.

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 4 (Различение значений матрицы M). Значения v_1 и v_2 матрицы M называются различимыми, если и только если:

- $v_1 \in D \Leftrightarrow v_2 \notin D$, либо
- в F имеется формула $\alpha(p_i)$, включающая лишь вхождения логических связок и единственной пропозициональной переменной p_i , такая, что $\forall \xi_1, \xi_2 \in SEM(LOG)$:

$$\xi_1(p_i) \in \{v_1, v_2\} \ \& \ \xi_2(p_i) \in \{v_1, v_2\} \ \& \ \xi_1(p_i) \neq \xi_2(p_i) \Rightarrow \\ \xi_1(\alpha(p_i)) \in D \Leftrightarrow \xi_2(\alpha(p_i)) \notin D.$$

Заметим, что в наименьших по мощности характеристических матрицах большинства известных многозначных логик, как и в классической логике, любая пара значений v_1 и v_2 является различимой в указанном выше смысле. Однако данное свойство не является априорно присущим произвольной многозначной логике. Логика, в наименьших по мощности характеристических матрицах которых имеются неразличимые значения, могут быть названы *сильно некартезианскими*.

Сильно некартезианские логики играют важную роль в дискуссиях вокруг так называемого тезиса Сушко, согласно которому все логики являются логически двузначными. Эта роль обусловлена тем, что для сильно некартезианских логик невозможно построить бивалентную семантику в соответствии с алгоритмами, приводящимися в серии работ К. Калейро и других авторов (например, в [2]).

Рассмотрим теперь, чтобы не быть голословными, одну интересную сильно некартезианскую логику $Sm_4^{\sim 2}$. Множество связок языка L данной логики есть множество $\{\sim, \vee, \wedge, \rightarrow\}$.

Оценками в семантике $SEM(Sm_4^{\sim})$ будем считать всевозможные гомоморфные отображения $\S: F \mapsto \{t, b, n, f\}$ в соответствии со следующими истинностными таблицами:

$\vee$	t^*	b	n	f
t^*	t	t	t	t
b	t	b	t	b
n	t	t	n	n
f	t	b	n	f

$\wedge$	t^*	b	n	f
t^*	t	b	n	f
b	b	b	f	f
n	n	f	n	f
f	f	f	f	f

$\rightarrow$	t^*	b	n	f
t^*	t	f	f	f
b	t	t	f	f
n	t	f	t	f
f	t	t	t	t

x	$\sim x$
t^*	f
b	n
n	b
f	t

Будем также считать, что на множестве истинностных значений $\{t, b, n, f\}$ установлен следующий частичный порядок: $t \geq b \geq f, t \geq n \geq f$. Данный порядок сохраняется и на произвольных подмножествах множества $\{t, b, n, f\}$.

Следование в семантике $SEM(Sm_4^{\sim})$ определяется стандартным образом, как сохранение выделенного значения от посылок к заключениям.

Исчисление $Sm_4^{\sim}$ является расширением системы Е (of Entailment) релевантной логики. Система $Sm_4^{\sim}$ является взрывоопасным³ расширением системы Е.

Значения b и n являются в матрице данной логики неразличимыми в указанном выше смысле. Это означает, что для данной

² $Sm_4^{\sim}$ является сокращенным названием для четырехзначной логики, табличные определения связок которой совпадают с табличными определениями связок матрицы Смайли с одним выделенным значением и инволюцией в качестве отрицания. О матрице Смайли см. в [3], [4].

³Термин «взрывоопасная (explosive)» в отношении к логике является распространенным в англоязычной литературе обозначением для непарапротиворечивых логик.

логики невозможно построить бивалентную семантику, используя алгоритм Калейро. По-видимому, решающим фактом здесь является то, что логика $Sm_4^\sim$ является модальной, поскольку попытки уменьшить мощность матрицы, соответствующей данной логике, приводят к тому, что общезначимые модальные формулы теряют свою общезначимость.

Литература

- [1] *Декарт Р.* Размышления о первой философии // Декарт Р. Сочинения. Т. 2. М.: Мысль. 1994. С. 20.
- [2] *Caleiro C., Carnielli W., Coniglio M. E., Marcos J.* Two's company: The humbug of many logical values // J.-Y. Beziau (ed.) Logica Universalis. Birkhäuser Verlag. 2005. P. 169–189.
- [3] *Anderson A., Belnap N.* Entailment: The Logic of Relevance and Necessity. Vol. I. Princeton University Press. 1975. P. 161-162.
- [4] *Карпенко А.С.* Развитие многозначной логики. М.: URSS, 2010. С. 141-142.

Естественные p -логики

Н. Е. ТОМОВА

ABSTRACT. In this paper the notion of p -logic is generalied and the class of natural p -logics and it's functional properties are considered. It is shown that paraconsistent logic $\mathbf{P}^1$ and paracomplete logic $\mathbf{I}^1$ are functionally equivalent. In conclusion natural p -logics are presented as a lattice.

Ключевые слова: трехзначные логики, p -логики, естественные p -логики, решетка естественных p -логик, функциональные свойства p -логик

В работе [3] по аналогии с понятием p -алгебры и дважды p -алгебры вводится понятие p -логики и дважды p -логики. P -логика задается связками $\vee, \wedge, \neg$, дуальная p -логика — связками $\vee, \wedge, \neg$. $\vee$ и $\wedge$ есть обычные $\max$ (дизъюнкция) и $\min$ (конъюнкция), а $\neg$ и $\neg$ задаются следующими таблицами:

p	$\neg p$	$\neg p$
1	0	0
$\frac{1}{2}$	0	1
0	1	1

Логика со связками $\vee, \wedge, \neg$ и $\neg$ есть дважды p -логика.

В данной статье обобщается понятие p -логики и рассматривается класс естественных p -логик, подробно исследуются функциональные свойства этого класса систем.

При определении класса естественных p -логик ключевую роль играет заданный нами в [4] класс естественных импликаций.

Посредством импликации¹ следующим образом определим дизъюнкцию:

$$x \vee y =_{Df} (x \rightarrow_i y) \rightarrow_i y \quad (1 \leq i \leq 28).$$

¹Здесь и далее импликации с указанными номерами см. в [4].

В результате получаем 18 уникальных дизъюнкций. Далее определим двойственную связку — конъюнкцию:

$$x \wedge^i y =_{Df} \sim (\sim x \vee^i \sim y) (1 \leq i \leq 18).$$

Таким образом, имеем 18 естественных p -логик (логик со связками $\{\vee^i, \wedge^i, \sim\}$, где $(1 \leq i \leq 18)$) и соответственно 18 естественных дуальных p -логик (логик со связками $\{\vee^i, \wedge^i, \lceil\}$, где $(1 \leq i \leq 18)$). Приведем таблицы истинности, соответствующие дизъюнкциям и конъюнкциям естественных p -логик, и перенумеруем их.

$\vee^1$	1	$\frac{1}{2}$	0
1	1	1	1
$\frac{1}{2}$	1	$\frac{1}{2}$	1
0	1	$\frac{1}{2}$	0

$\wedge^1$	1	$\frac{1}{2}$	0
1	1	$\frac{1}{2}$	0
$\frac{1}{2}$	0	$\frac{1}{2}$	0
0	0	0	0

$\vee^2$	1	$\frac{1}{2}$	0
1	1	1	1
$\frac{1}{2}$	1	$\frac{1}{2}$	0
0	1	$\frac{1}{2}$	0

$\wedge^2$	1	$\frac{1}{2}$	0
1	1	$\frac{1}{2}$	0
$\frac{1}{2}$	0	$\frac{1}{2}$	0
0	0	0	0

$\vee^3$	1	$\frac{1}{2}$	0
1	1	1	1
$\frac{1}{2}$	1	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{2}$
0	1	$\frac{1}{2}$	0
$\wedge^3$	1	$\frac{1}{2}$	0
1	1	$\frac{1}{2}$	0
$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{2}$	0
0	0	0	0
$\vee^4$	1	$\frac{1}{2}$	0
1	1	1	1
$\frac{1}{2}$	1	0	1
0	1	0	0
$\wedge^4$	1	$\frac{1}{2}$	0
1	1	1	0
$\frac{1}{2}$	0	1	0
0	0	0	0
$\vee^5$	1	$\frac{1}{2}$	0
1	1	1	1
$\frac{1}{2}$	1	0	0
0	1	0	0
$\wedge^5$	1	$\frac{1}{2}$	0
1	1	1	0
$\frac{1}{2}$	1	1	0
0	0	0	0
$\vee^6$	1	$\frac{1}{2}$	0
1	1	1	1
$\frac{1}{2}$	1	0	$\frac{1}{2}$
0	1	0	0
$\wedge^6$	1	$\frac{1}{2}$	0
1	1	1	0
$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{2}$	1	0
0	0	0	0
$\vee^7$	1	$\frac{1}{2}$	0
1	1	1	1
$\frac{1}{2}$	1	1	1
0	1	1	0
$\wedge^7$	1	$\frac{1}{2}$	0
1	1	0	0
$\frac{1}{2}$	0	0	0
0	0	0	0
$\vee^8$	1	$\frac{1}{2}$	0
1	1	1	1
$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{2}$	1	1
0	1	1	0
$\wedge^8$	1	$\frac{1}{2}$	0
1	$\frac{1}{2}$	0	0
$\frac{1}{2}$	0	0	$\frac{1}{2}$
0	0	0	0
$\vee^9$	1	$\frac{1}{2}$	0
1	1	1	1
$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{2}$	1
0	1	$\frac{1}{2}$	0
$\wedge^9$	1	$\frac{1}{2}$	0
1	1	$\frac{1}{2}$	0
$\frac{1}{2}$	0	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{2}$
0	0	0	0
$\vee^{10}$	1	$\frac{1}{2}$	0
1	1	1	1
$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{2}$	1
0	1	1	0
$\wedge^{10}$	1	$\frac{1}{2}$	0
1	1	0	0
$\frac{1}{2}$	0	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{2}$
0	0	0	0

$\vee^{11}$	1	$\frac{1}{2}$	0
1	1	1	1
$\frac{1}{2}$	1	$\frac{1}{2}$	1
0	1	1	0

$\wedge^{11}$	1	$\frac{1}{2}$	0
1	1	0	0
$\frac{1}{2}$	0	$\frac{1}{2}$	0
0	0	0	0

$\vee^{12}$	1	$\frac{1}{2}$	0
1	1	1	1
$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{2}$	0	1
0	1	0	0

$\wedge^{12}$	1	$\frac{1}{2}$	0
1	1	1	0
$\frac{1}{2}$	0	1	$\frac{1}{2}$
0	0	0	0

$\vee^{13}$	1	$\frac{1}{2}$	0
1	1	$\frac{1}{2}$	1
$\frac{1}{2}$	1	0	1
0	1	1	0
$\wedge^{13}$	1	$\frac{1}{2}$	0
1	1	0	0
$\frac{1}{2}$	0	1	0
0	0	$\frac{1}{2}$	0
$\vee^{14}$	1	$\frac{1}{2}$	0
1	1	$\frac{1}{2}$	1
$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{2}$	0	1
0	1	1	0
$\wedge^{14}$	1	$\frac{1}{2}$	0
1	1	0	0
$\frac{1}{2}$	0	1	$\frac{1}{2}$
0	0	$\frac{1}{2}$	0
$\vee^{15}$	1	$\frac{1}{2}$	0
1	1	$\frac{1}{2}$	1
$\frac{1}{2}$	1	$\frac{1}{2}$	1
0	1	$\frac{1}{2}$	0
$\wedge^{15}$	1	$\frac{1}{2}$	0
1	1	$\frac{1}{2}$	0
$\frac{1}{2}$	0	$\frac{1}{2}$	0
0	0	$\frac{1}{2}$	0
$\vee^{16}$	1	$\frac{1}{2}$	0
1	1	$\frac{1}{2}$	1
$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{2}$	1
0	1	$\frac{1}{2}$	0
$\wedge^{16}$	1	$\frac{1}{2}$	0
1	1	$\frac{1}{2}$	0
$\frac{1}{2}$	0	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{2}$
0	0	$\frac{1}{2}$	0
$\vee^{17}$	1	$\frac{1}{2}$	0
1	1	1	1
$\frac{1}{2}$	1	$\frac{1}{2}$	1
0	1	0	0
$\wedge^{17}$	1	$\frac{1}{2}$	0
1	1	1	0
$\frac{1}{2}$	0	$\frac{1}{2}$	0
0	0	0	0
$\vee^{18}$	1	$\frac{1}{2}$	0
1	1	1	1
$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{2}$	1
0	1	0	0
$\wedge^{18}$	1	$\frac{1}{2}$	0
1	1	1	0
$\frac{1}{2}$	0	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{2}$
0	0	0	0

Обратим внимание на то, что среди естественных p -логик присутствует p -логика со связками $\vee^3$ и $\wedge^3$. Заметим, что $\vee^3$ и $\wedge^3$ есть обычные $\max$ (дизъюнкция) и $\min$ (конъюнкция), т.е. $\vee^3, \wedge^3, \lceil$ есть p -логика, описанная в [3]. В этой же работе показано, что трехзначная логика Лукасевича $\mathbf{L}_3$ есть дважды p -логика, т.е. в нашем обозначении логика со связками $\vee^3, \wedge^3, \lceil, \rfloor$.

Рассмотрим функциональные свойства полученного класса естественных p -логик, а также выясним, какие известные трехзначные логики им соответствуют.

УТВЕРЖДЕНИЕ 1. *Естественные p -логики со связками $\vee^i, \wedge^i, \lceil$ и $\vee^i, \wedge^i, \rfloor$, где $(1 \leq i \leq 18$ и $i \neq 3)$, функционально эквивалентны.*

Доказательство. Функциональная эквивалентность логик со связками $\vee^i, \wedge^i, \lceil$ и $\vee^i, \wedge^i, \rfloor$, где $(1 \leq i \leq 18$ и $i \neq 3)$ следует из соотношений (1)–(3):

$$(1) \quad i \in \{1, 4, 7, 8, 9, 10, 11, 12, 13, 14, 15, 16, 17, 18\}$$

- $$\begin{aligned} & [p =_{Df}] (p \wedge^i \lceil p), \\ & \lceil p =_{Df} \lceil (p \vee^i \lceil \lceil p); \\ (2) \quad & i \in \{2, 5\} \\ & [p =_{Df}] ((p \vee^i \lceil p) \wedge^i \lceil p), \\ & \lceil p =_{Df} \lceil ((p \wedge^i \lceil p) \vee^i \lceil \lceil p); \\ (3) \quad & [p =_{Df}] (p \vee^6 \lceil p), \\ & \lceil p =_{Df} \lceil (p \wedge^6 \lceil p). \end{aligned}$$

Утверждение доказано.

Q.E.D.

Таким образом, поскольку логики со связками $\vee^i, \wedge^i, \lceil$ и $\vee^i, \wedge^i, \lceil$, где $(1 \leq i \leq 18 \text{ и } i \neq 3)$, функционально эквивалентны, достаточно будет рассмотреть логики со связками $\vee^i, \wedge^i, \lceil$.

Далее, нам понадобится следующее утверждение.

УТВЕРЖДЕНИЕ 2. *В естественных p -логиках со связками $\vee^i, \wedge^i, \lceil$, где $i \in \{1, 2, 6, 8, 9, 10, 12, 13, 14, 15, 16, 18\}$, выражимо отрицание $\sim$.*

Доказательство. В силу ранее доказанного утверждения 1 доказательство утверждения 2 следует из соотношений (1)–(4):

- $$\begin{aligned} (1) \quad & i \in \{1, 2, 9, 15, 16\} \\ & \sim p =_{Df} \lceil p \wedge^i (\lceil p \vee^i p); \\ (2) \quad & i \in \{8, 10, 12, 14, 18\} \\ & \sim p =_{Df} (p \vee^i \lceil p) \wedge^i \lceil p; \\ (3) \quad & \sim p =_{Df} (p \vee^6 \lceil p) \wedge^6 \lceil p; \\ (4) \quad & \sim p =_{Df} \lceil p \wedge^{13} (\lceil p \vee^{13} p). \end{aligned}$$

Утверждение доказано.

Q.E.D.

Перейдем к рассмотрению взаимоотношений между естественными p -логиками.

УТВЕРЖДЕНИЕ 3. *P -логики со связками $\vee^i, \wedge^i, \lceil$ ($i \in \{4, 5, 7\}$) попарно функционально эквивалентны.*

Доказательство. При доказательстве будем учитывать ранее доказанное утверждение 1.

Сначала покажем эквивалентность логик со связками $\vee^5, \wedge^5, \sqcap$ и $\vee^7, \wedge^7, \sqcap$. Это верно, в силу следующих соотношений:

$$\begin{aligned} (1) \quad & p \vee^7 q =_{Df} \sqcap p \vee^5 \sqcap q, \\ & p \wedge^7 q =_{Df} (p \vee^5 p) \wedge^5 (q \vee^5 q); \\ (2) \quad & p \vee^5 q =_{Df} \sqcap [p \vee^7 \sqcap [q, \\ & p \wedge^5 q =_{Df} (p \vee^7 p) \wedge^7 (q \vee^7 q). \end{aligned}$$

Далее покажем, что логика со связками $\vee^7, \wedge^7, \sqcap$ функционально эквивалентна логике со связками $\vee^4, \wedge^4, \sqcap$.

Это справедливо в силу следующих соотношений:

$$\begin{aligned} (1) \quad & p \vee^7 q =_{Df} \sqcap p \vee^4 \sqcap q, \\ & p \wedge^7 q =_{Df} (p \vee^4 p) \wedge^4 (q \vee^4 q); \\ (2) \quad & p \vee^4 q =_{Df} ((\sqcap q \wedge^7 \sqcap p) \vee^7 \sqcap [q] \vee^7 \sqcap [p, \\ & p \wedge^4 q =_{Df} ((\sqcap q \wedge^7 [q] \wedge^7 \sqcap p) \vee^7 (p \wedge^7 q)). \end{aligned}$$

Таким образом, утверждение доказано.

Q.E.D.

Заметим, что паранепротиворечивая логика $\mathbf{P}^1$ [10] есть логика с исходными связками $\sqcap$ и $\rightarrow_7$. Оказалось, $\mathbf{P}^1$ можно представить в терминах *естественных* p -логик.

УТВЕРЖДЕНИЕ 4. Логика $\mathbf{P}^1$ есть p -логика со связками $\vee^7, \wedge^7, \sqcap$.

Доказательство. Покажем, что логика со связками $\sqcap$ и $\rightarrow_7$ функционально эквивалентна логике со связками $\vee^7, \wedge^7, \sqcap$. Это справедливо, поскольку имеют место следующие соотношения:

$$\begin{aligned} (1) \quad & p \vee^7 q =_{Df} ((p \rightarrow_7 q) \rightarrow_7 q), \\ & p \wedge^7 q =_{Df} (\sqcap p \rightarrow_7 q) \text{ или } p \wedge^7 q =_{Df} (\sqcap p \vee^7 \sqcap q); \end{aligned}$$

$$(2) \ p \rightarrow_7 q =_{Df} (\sqcap (p \vee^7 p)) \vee^7 (q \vee^7 q).$$

Утверждение доказано.

Q.E.D.

В работе [11] исследуется так называемая трехзначная *параполная* логика $\mathbf{I}^1$, дуальная к $\mathbf{P}^1$. Это логика с одним выделенным значением и с исходными связками $\sqcap$ и $\rightarrow_5$. Как и $\mathbf{P}^1$, логика $\mathbf{I}^1$ представима в терминах *естественных* p -логик.

УТВЕРЖДЕНИЕ 5. Логика $\mathbf{I}^1$ есть p -логика со связками $\vee^5$, $\wedge^5$, $\sqcap$.

Доказательство. Покажем, что логика со связками $\sqcap$ и $\rightarrow_5$ функционально эквивалентна логике со связками $\vee^5$, $\wedge^5$, $\sqcap$. Это справедливо, поскольку имеют место следующие соотношения:

$$\begin{aligned} (1) \quad & p \vee^5 q =_{Df} ((p \rightarrow_5 q) \rightarrow_5 q), \\ & p \wedge^5 q =_{Df} (\sqcap [p \rightarrow_5 q]) \text{ или } p \wedge^5 q =_{Df} (\sqcap [p \vee^5 q]); \\ (2) \quad & p \rightarrow_5 q =_{Df} (\sqcap (p \vee^5 p)) \vee^5 (q \vee^5 q). \end{aligned}$$

Утверждение доказано.

Q.E.D.

Таким образом, следствием доказанных утверждений 3–5, является тот факт, что логики $\mathbf{P}^1$ и $\mathbf{I}^1$, ранее рассматриваемые в литературе исключительно как дуальные по отношению друг к другу и совершенно различные, с функциональной точки зрения представляют собой одну и ту же логику.

Заметим, что кроме $\mathbf{P}^1$ и $\mathbf{I}^1$ появилась некоммутативная функционально эквивалентная им логика со связками $\vee^4$, $\wedge^4$, $\sqcap$, которую обозначим посредством $\mathbf{T}^8$.

В статье [9] указано, что логики $\mathbf{P}^1$ и $\mathbf{I}^1$ являются *комбинацией* двух изоморфов² классической логики $\mathbf{C}_2$, содержащихся в $\mathbf{B}_3$, однако, поскольку эти логики функционально эквивалентны, справедливо говорить о том, что логика $\mathbf{P}^1(\mathbf{I}^1)$ *содержит* два изоморфа классической логики $\mathbf{C}_2$.

²Адаптируя терминологию Д.А. Бочвара [1] к языку настоящей работы, под трехзначным изоморфом $\mathbf{C}_2$ понимается фрагмент трехзначной логики по классу тавтологий, совпадающий с $\mathbf{C}_2$. Подробно об изоморфах см. [2].

Далее, рассмотрим другой класс естественных p -логик. Для удобства обозначим p -логику со связками $\vee^8, \wedge^8, \lceil$ как логику $\mathbf{T}^7$. Тогда можем указать целый класс p -логик, эквивалентных $\mathbf{T}^7$.

УТВЕРЖДЕНИЕ 6. *P -логика со связками $\vee^i, \wedge^i, \lceil$ ($i \in \{1, 2, 6, 10, 12, 13, 18\}$) функционально эквивалентна логике $\mathbf{T}^7$.*

Доказательство. Учитывая ранее доказанное утверждение 2 и определение конъюнкции в p -логике, при доказательстве эквивалентности соответствующих p -логик достаточно показать взаимовыразимость дизъюнкций соответствующих p -логик. При доказательстве также будем учитывать следствие из доказанного утверждения 1, т.е. тот факт, что в p -логиках со связками $\vee^i, \wedge^i, \lceil$, где ($1 \leq i \leq 18$ и $i \neq 3$) выразимо отрицание $\lceil$.

- (а) Покажем, что p -логика со связками $\vee^i, \wedge^i, \lceil$ ($i \in \{10, 12, 13, 18\}$) и логика $\mathbf{T}^7$ функционально эквивалентны. Это имеет место в силу соотношений:

$$(1) \quad p \vee^{10} q =_{Df} p \vee^8 \lceil q, \\ p \vee^8 q =_{Df} ((p \vee^{10} \lceil \lceil q) \vee^{10} \lceil q);$$

$$(2) \quad p \vee^{18} q =_{Df} p \vee^8 ((\lceil q \wedge^8 \lceil p) \vee^8 \lceil q), \\ p \vee^8 q =_{Df} (p \vee^{18} \lceil \lceil q) \vee^{18} \lceil q);$$

$$(3) \quad p \vee^{12} q =_{Df} ((p \vee^8 q) \wedge^8 (\lceil q \vee^{18} \lceil p)) \vee^8 \lceil q, \\ p \vee^8 q =_{Df} (p \vee^{12} q) \vee^{12} \lceil q);$$

$$(4) \quad p \vee^{13} q =_{Df} \lceil \lceil q \vee^{13} ((q \vee^{13} p) \wedge^{13} (\lceil q \vee^{13} \lceil p)), \\ p \vee^{13} q =_{Df} (q \vee^{12} p) \vee^{12} (p \vee^{12} q).$$

- (б) Далее покажем, что p -логика со связками $\vee^i, \wedge^i, \lceil$ ($i \in \{1, 2, 6\}$) и логика $\mathbf{T}^7$ функционально эквивалентны. Это имеет место в силу соотношений:

$$(1) \quad p \vee^1 q =_{Df} (\lceil p \wedge^2 \lceil q) \vee^2 (p \vee^2 q), \\ p \vee^2 q =_{Df} (\lceil \lceil p \vee^1 \lceil q) \wedge^1 (p \vee^1 q);$$

$$(2) \quad p \vee^2 q =_{Df} q \vee^6 (p \vee^6 q), \\ p \vee^6 q =_{Df} ((q \vee^2 p) \wedge^2 (\neg q \vee^2 \neg q)) \vee^2 \neg p;$$

$$(3) \quad p \vee^8 q =_{Df} p \vee^6 ((\neg q \wedge^6 \neg p) \vee^6 (\neg p \wedge^6 \neg q)), \\ p \vee^6 q =_{Df} ((p \vee^8 \neg q) \vee^8 \neg p) \wedge^8 (\neg q \vee^8 \neg p).$$

Очевидно, доказательство утверждения 6 следует из доказанных положений (а) и (б).

Q.E.D.

Далее,

УТВЕРЖДЕНИЕ 7. P -логика со связками $\vee^i, \wedge^i, \neg$ ($i \in \{9, 14, 16\}$) есть трехзначная логика Лукасевича $\mathbf{L}_3$.

Доказательство.

- (а) Сначала покажем, что p -логики со связками $\vee^9, \wedge^9, \neg, \vee^{14}, \wedge^{14}, \neg$ и $\vee^{16}, \wedge^{16}, \neg$ попарно функционально эквивалентны. Учитывая определение конъюнкции в p -логике и то, что в указанных p -лógicaх выразимы $\sim$ и $\neg$ (утверждения 1, 2), доказательство положения (а) следует из соотношений (1) и (2):

$$(1) \quad p \vee^9 q =_{Df} (p \vee^{16} q) \vee^{16} (\neg q \wedge^{16} \neg p), \\ p \vee^{16} q =_{Df} (\sim q \wedge^9 q) \vee^9 (p \vee^9 q); \\ (2) \quad p \vee^{16} q =_{Df} ((p \vee^{14} q) \vee^{14} (\neg p \wedge^{14} \neg p)) \vee^{14} q, \\ p \vee^{14} q =_{Df} ((p \vee^{16} \neg q) \vee^{16} (q \vee^{16} \neg p)) \wedge^{16} ((\neg q \wedge^{16} \neg p) \vee^{16} (\neg p \wedge^{16} \neg q)).$$

- (б) Докажем, что, например, p -логика со связками $\vee^{16}, \wedge^{16}, \neg$ есть $\mathbf{L}_3$.

Это справедливо, с одной стороны, в силу функциональной полноты $\mathbf{L}_3$, с другой стороны, в силу того, что посредством связок $\vee^{14}, \wedge^{14}, \neg$ определима импликация логики Лукасевича (в нашем обозначении $\rightarrow_3$)³.

$$p \rightarrow_3 q =_{Df} ((\sim p \wedge^{14} q) \vee^{14} (\neg q \vee^{14} \neg p)).$$

³Для доказательства достаточно определить импликацию Лукасевича, поскольку известно, что в логике со связками $\vee^{14}, \wedge^{14}, \neg$ выразимо отрицание Лукасевича $\sim$ (доказанное ранее утверждение 2).

Таким образом, утверждение 7 доказано.

Q.E.D.

УТВЕРЖДЕНИЕ 8. *P -логики со связками $\vee^{11}, \wedge^{11}, \rfloor$ и $\vee^{17}, \wedge^{17}, \rfloor$ функционально эквивалентны.*

Доказательство. Доказательство утверждения следует из соотношений:

- $$\begin{aligned} (1) \quad & p \vee^{11} q =_{Df} p \vee^{17} (q \vee^{17} p), \\ & p \wedge^{11} q =_{Df} q \wedge^{17} (p \wedge^{17} q); \\ (2) \quad & p \vee^{17} q =_{Df} ((p \vee^{11} q) \wedge^{11} q) \vee^{11} p, \\ & p \wedge^{17} q =_{Df} ((p \wedge^{11} q) \vee^{11} q) \wedge^{11} p. \end{aligned}$$

Утверждение доказано.

Q.E.D.

Для удобства p -логику со связками $\vee^{11}, \wedge^{11}, \rfloor$ обозначим **T⁵**. P -логику со связками $\vee^{15}, \wedge^{15}, \rfloor$ обозначим **T⁶**.

Таким образом, класс естественных p -логик разбивается на пять подклассов: это p -логики, функционально эквивалентные логике Лукасевича **L₃**, p -логики, функционально эквивалентные логике Сетте **P¹**, p -логики, функционально эквивалентные логикам **T⁵**, **T⁶**, **T⁷** соответственно. Связки конъюнкции и дизъюнкции в **T⁷** и **T⁶** являются некоммутативными. Интересно, что для логики **T⁵** получили два эквивалентных построения с некоммутативными связками $(\vee^{17}, \wedge^{17})$ и коммутативными $(\vee^{11}, \wedge^{11})$.

Заметим, что таблицы для связок $\vee^{11}, \wedge^{11}$ логики **T⁵** встречаются в работе [5], где приводится классификация трехзначных логик значения, исходя из свойств соответствующих им универсальных алгебр. Логика со связками $\vee^{11}, \wedge^{11}$ относится к классу слабых исчерпывающих логик значения.

В работе [7] описаны 11 предполных классов логики Бочвара **B₃** и логика **T⁶** является одним из них. Заметим, с этой точки зрения, логика **P¹** есть класс всех внешних функций. Покажем, что это так.

В работе [8] В.И. Шестаков определяет штрих Шеффера γ для внешних связок **B₃**

γ	1	$\frac{1}{2}$	0
1	0	0	0
$\frac{1}{2}$	0	0	1
0	0	1	1

Это множество связей он обозначает как $\mathbf{B}_1$. Тогда докажем следующее утверждение:

УТВЕРЖДЕНИЕ 9. *Логика $\mathbf{P}^1$ есть $\mathbf{B}_1$.*

Доказательство. Докажем функциональную эквивалентность $\mathbf{P}^1$ и $\mathbf{B}_1$.

Очевидно, связи $\mathbf{P}^1$ есть внешние связи $\mathbf{B}_1$, т.е. они определяются посредством штриха Шеффера γ .

Далее посредством связей логики $\mathbf{P}^1$ определим штрих Шеффера γ . Согласно ранее доказанному утверждению 4, логика $\mathbf{P}^1$ есть логика со связками $\vee^7, \wedge^7, \lceil$, также в $\mathbf{P}^1$ выразимо отрицание $\rceil$ (доказанное утверждение 1). Тогда определить штрих Шеффера можно следующим образом:

$$p \gamma q =_{Df} (\lceil p \wedge^7 \lceil q) \vee^7 (\lceil p \wedge^7 \rceil q).$$

Утверждение 9 доказано.

Q.E.D.

Здесь стоит отметить, что класс внешних связей был впервые выделен в 1938 г. Д.А. Бочваром [1]. Как только что указывалось, специально этот класс рассмотрен в [8]. Здесь же представлены нормальные формы для $\mathbf{B}_1$. Далее, в работе В.К. Финна [7] описаны все предполные классы $\mathbf{B}_1$ — семь классов.

При изучении функциональных свойств p -логик относительно логики $\mathbf{P}^1$ справедливо следующее утверждение:

УТВЕРЖДЕНИЕ 10. *$\mathbf{P}^1$ функционально вложима в некоторую p -логику со связками $\vee, \wedge, \lceil$, если p -логика обладает следующими свойствами:*

- (1) *p -логика функционально эквивалентна дважды p -логике (т.е. в p -логике выразимо отрицание $\lceil$);*

- (2) связки $\vee, \wedge$ являются *C-расширяющими*, т.е. сохраняются классические значения, когда аргументы принимают значения из множества $\{0, 1\}$.

Доказательство. Для доказательства утверждения покажем, что посредством связок $\vee, \wedge, \neg$ выразимы связки логики $\mathbf{P}^1$. Очевидно, достаточно показать, что выразимы $\vee^7, \wedge^7$.

$$p \vee^7 q =_{Df} \neg \neg p \vee \neg \neg q,$$

$$p \wedge^7 q =_{Df} \neg \neg p \wedge \neg \neg q.$$

Утверждение 10 доказано.

Q.E.D.

Очевидными следствиями утверждения 10 являются следующие: (1) $\mathbf{P}^1 \subset \mathbf{L}_3$; (2) $\mathbf{P}^1 \subset \mathbf{T}^7$; (3) $\mathbf{P}^1 \subset \mathbf{T}^6$; (4) $\mathbf{P}^1 \subset \mathbf{T}^5$.

Далее покажем, что логики $\mathbf{T}^5$ и $\mathbf{T}^6$ функционально независимы, т.е. $\mathbf{T}^5 \not\subset \mathbf{T}^6$ и $\mathbf{T}^6 \not\subset \mathbf{T}^5$.

$\mathbf{T}^6 \not\subset \mathbf{T}^5$, так как согласно утверждению 2 в $\mathbf{T}^6$ выразимо отрицание $\sim$, в то время как посредством связок $\mathbf{T}^5$ отрицание $\sim$ определить невозможно⁴. С другой стороны, как было ранее упомянуто, логика $\mathbf{T}^6$ есть предполный в $\mathbf{B}_3$ класс функций. Из построения нормальных форм (*I-J-с.д.н.ф.*) для логики $\mathbf{B}_3$ [6] следует, что, например, дизъюнкция $\vee^{11}$ логики $\mathbf{T}^5$ не определима в $\mathbf{B}_3$, а значит, ее нельзя определить и с помощью связок $\mathbf{T}^6$. Таким образом, $\mathbf{T}^5 \not\subset \mathbf{T}^6$.

УТВЕРЖДЕНИЕ 11. Логика $\mathbf{T}^5$ функционально вложима в логику $\mathbf{T}^7$.

Доказательство. Для доказательства достаточно посредством связок $\vee^1, \wedge^1, \neg$ определить дизъюнкцию $\vee^{11}$. Это можно сделать, например, так:

$$p \vee^{11} q =_{Df} (p \vee^1 q) \vee^1 p.$$

Утверждение 11 доказано.

Q.E.D.

⁴Свойства $\vee, \wedge$ логики $\mathbf{T}^5$ таковы, что (1) они принимают значение $\frac{1}{2}$ только в одном случае — при значении аргументов $\frac{1}{2}$; (2) $x \vee x = x$ и $x \wedge x = x$. Таким образом, посредством связок $\vee, \wedge, \neg, \neg$ определить $\sim$ нельзя.

УТВЕРЖДЕНИЕ 12. *Логика $\mathbf{T}^6$ функционально вложима в логику $\mathbf{T}^7$.*

Доказательство. Для доказательства достаточно посредством связок $\vee^1, \wedge^1, \downarrow$ определить дизъюнкцию $\vee^{15}$. Это можно сделать, например, так:

$$p \vee^{15} q =_{Df} (\downarrow p \wedge^1 \downarrow q) \vee^1 q.$$

Утверждение 12 доказано.

Q.E.D.

С другой стороны, свойства связок логики $\mathbf{T}^7$ таковы, что $\mathbf{T}^7$ не вложима ни в $\mathbf{T}^5$, ни в $\mathbf{T}^6$.

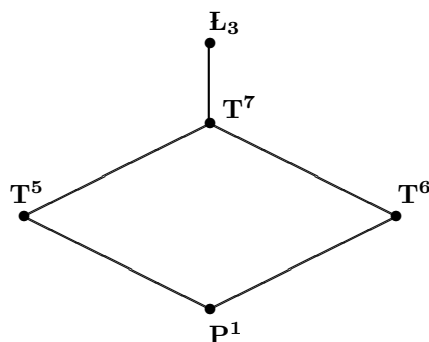
$\mathbf{T}^7 \not\subset \mathbf{T}^5$, так как согласно утверждению 2 в $\mathbf{T}^7$ выразимо отрицание $\sim$, в то время как было ранее указано, посредством связок $\mathbf{T}^5$ отрицание $\sim$ определить невозможно.

$\mathbf{T}^7 \not\subset \mathbf{T}^6$, поскольку $\mathbf{T}^6 \subset \mathbf{B}_3$, и из построения нормальных форм (I - J -с.д.н.ф.) для логики $\mathbf{B}_3$ [6] следует, что, например, дизъюнкция $\vee^1$ логики $\mathbf{T}^7$ не определима в $\mathbf{B}_3$, а значит, ее нельзя определить и с помощью связок $\mathbf{T}^6$.

Далее, в силу функциональной предполноты логики $\mathbf{L}_3$ верно, что $\mathbf{T}^7 \subset \mathbf{L}_3$. Однако $\mathbf{L}_3$ не вложима в $\mathbf{T}^7$, в противном случае, в $\mathbf{T}^7$ была бы выразима, например, сильная регулярная дизъюнкция $\vee$. Возьмем в качестве исходных связок $\mathbf{T}^7$ связки $\vee^1, \wedge^1, \downarrow$.

Имеем: $0 \vee \frac{1}{2} = \frac{1}{2} \vee 0 = \frac{1}{2} \vee \frac{1}{2} = \frac{1}{2}$. Свойства связок $\vee^1, \wedge^1$ таковы, что невозможно определить такую связку $\vee^x$, чтобы $0 \vee^x \frac{1}{2} = \frac{1}{2} \vee^x 0 = \frac{1}{2}$ или $1 \vee^x \frac{1}{2} = \frac{1}{2} \vee^x 1 = \frac{1}{2}$. Подобные рассуждения дают основания говорить, что $\mathbf{L}_3 \not\subset \mathbf{T}^7$.

В результате, класс естественных p -логик образует решетку по отношению функционального вложения одной логики в другую, и в качестве элементов решетки выступают трехзначные логики — логика Лукасевича $\mathbf{L}_3$, логика Сетте $\mathbf{P}^1$, а также новые логики $\mathbf{T}^5, \mathbf{T}^6, \mathbf{T}^7$:

Рис.1. Решетка естественных p -логик

Литература

- [1] Бочвар Д.А. Об одном трехзначном исчислении и его применении к анализу парадоксов классического расширенного функционального исчисления // Математический сборник. 1938. Т. 4. № 2. С. 287-308.
- [2] Девяткин Л.Ю. Многозначные изоморфы классической пропозициональной логики. Дис. ... канд. филос. наук. М., 2008.
- [3] Карпенко А.С. P -логики // Современная логика: проблемы теории, истории и применения в науке. (Материалы X Общероссийской научной конференции, 26-28 июня 2008 г., Санкт-Петербург.) СПб., 2008. С. 278-280.
- [4] Томова Н.Е. Импликативные расширения регулярных логик Клини // Логические исследования. Вып. 16. М., 2010. С. 233-258.
- [5] Финн В.К., Аншаков О.М., Григория Р.Ш., Забежайло М.И. Многозначные логики как фрагменты формализованной семантики // Семиотика и информатика. 1980. Вып. 15. С. 27-60.
- [6] Финн В.К. Аксиоматизация некоторых трехзначных исчислений высказываний и их алгебр // Философия в современном мире. Философия и логика. М.: Наука, 1974. С. 398-438.
- [7] Финн В.К. О критерии функциональной полноты для ВЗ // Исследования по формализованным языкам и неклассическим логикам. М.: Наука, 1974. С. 194-199.
- [8] Шестаков В.И. Об одном фрагменте исчисления Д.А. Бочвара // Информационные вопросы семиотики, лингвистики и автоматического перевода. ВИНТИ. Вып. 1. М., 1971.
- [9] Karpenko A.S. A maximal paraconsistent logic: The combination of two three-valued isomorphs of classical propositional logic // Fronties of Paraconsistent Logic. Baldock: Research Studies Press, 2000. P. 181-187.
- [10] Sette A.M. On propositional calculus P1 // Mathematica Japonica. 1973. Vol. 18. № 3. P. 173-180.
- [11] Sette A.M. and Carnielli W.A. Maximal weakly-intuitionistic logics // Studia Logica. 1995. Vol. 55. P. 181-203.

Два подхода к построению логики¹

В. И. ШАЛАК

ABSTRACT. The aim of this paper is a comparative analysis of two conceptually different approaches to the construction of logic. The first approach, going from Aristotle, called traditional, the second can be called semiotic.

Ключевые слова: основания логики, онтологические предпосылки, эпистемические предпосылки, семиотика

Целью настоящей работы является сравнительный анализ двух концептуально различных подходов к построению логики. Первый подход, идущий от Аристотеля, назовем *традиционным*, второй — *семиотическим*.

Прежде чем приступить к анализу, уточним понимание логики, которого мы будем придерживаться.

«Логика — это нормативная наука о формах и приемах интеллектуальной познавательной деятельности, осуществляемой с помощью языка» [2, с. 9].

Важной чертой логики является нормативность. Смысл ее в следующем:

«Задача логики состоит в том, чтобы ответить на вопрос: как мы должны мыслить, если хотим достичь цели познавательного процесса — получить адекватные знания об исследуемых объектах. Логика, таким образом, является наукой не о сущем, а о должном, наукой нормативной. Она вырабатывает нормы, критерии правильности осуществления интеллектуальных процедур, формируя тем самым

¹Работа выполнена при поддержке РГНФ, грант № 11-03-00761а.

некий канон, стандарт, идеал, следование которому является необходимым условием успешного осуществления научной и вообще любой рациональной деятельности» [2, с. 19].

1 Традиционный подход

При традиционном подходе построение логики начинается с принятия ряда онтологических предпосылок. Эти предпосылки в самом общем виде содержат ответ на вопрос, как устроен мир. Они являются отправной точкой, из которой разворачивается построение логики как науки. Начальные онтологические предпосылки традиционного подхода заключались в том, что *мир состоит из вещей и свойств, которыми эти вещи могут обладать*.

Вслед за онтологическими принимаются определенные эпистемические предпосылки. Они говорят о том, каким образом знания о мире получают представление в языке. Основными языковыми единицами, выполняющими эту функцию, считаются предложения. Характер отношения предложений к явлениям окружающей реальности фиксируется в понятии истинности.

«... тот, кто говорит о вещах в соответствии с тем, каковы они есть, говорит истину, тот же, кто говорит о них иначе, — лжет...» [Платон, Кратил, 385b];

«... говорить о сущем, что его нет, или о не-сущем, что оно есть, — значит говорить ложное; а говорить о том, что сущее есть и не-сущее не есть, — значит говорить истинное» [Аристотель, Метафизика, IV, 7, 1011b 25].

Свойство предложений *быть истинными* подчиняется законам, которые получили название законов логики. Изначально это были *закон тождества, закон противоречия и закон исключенного третьего*. Поскольку считалось, что субъектно-предикатная структура простых предложений воспроизводит объективно существующие отношения между вещами и свойствами, эти законы одновременно получили и онтологическую интерпретацию. Чтобы познание было возможным, законы мысли должны были следовать законам бытия.

Третьей составляющей традиционного подхода к построению логики является формулировка целей познания.

Для Аристотеля целью познания было постижение вечных форм, существующих посредством отдельных вещей. Он разделял восходящее к Пармениду различие знания и мнения.

«Предмет знания и знание отличаются от предмета мнения и от мнения, ибо знание направлено на общее и основывается на необходимых положениях; необходимое же есть то, что не может быть иначе. Многое же хотя и истинно и существует, но может быть и иным. Ясно поэтому, что о нем нет науки» [Аристотель. Вторая Аналитика, 88 b 30-35].

Очевидно, что логика, в основу которой кладутся вполне конкретные предположения об устройстве мира, о характере его отражения в языке и целях познания, исторически ограничена и рано или поздно перестанет удовлетворять запросам реальной научной практики.

Логика Аристотеля с небольшими изменениями просуществовала вплоть до XIX в., когда наступила пора пересмотра ее оснований. В науке, и в первую очередь в математике, к тому времени были получены впечатляющие результаты, но они не имели логического обоснования. Была осознана ограниченность онтологии вещей и свойств, и на смену ей пришла онтология вещей и отношений, в которых эти вещи могут находиться. Свойства стали рассматривать как частный случай отношений. Было введено понятие пропозициональных функций, аргументами которых являются наборы индивидов, а значениями — Истина или Ложь. Это, в свою очередь, потребовало отказаться от жесткого параллелизма логических структур и структур естественного языка. Новая удобная символика позволила приступить к созданию искусственных языков. Многие математические теории получили строгое логическое обоснование. Если бы этим были удовлетворены все потребности реформы логики, то она еще долго сохраняла бы за собой звание канона. Однако ее дальнейшее развитие носило драматический характер.

Пророческими оказались слова Н.А. Васильева, сказанные им в 1912 г.:

«В логике мы присутствуем при падении Великой Китайской стены: „эллинической и средневековой логики“. Мы присутствуем при неуклонном созидании „логики нового времени“ творческими усилиями нескольких поколений. [...] Нужно расширить ее пределы, удостовериться в бесконечности возможных логических систем. Тот, кто удостоверится в этом, будет испытывать ощущения Джордано Бруно, когда впервые в его воображении предстала бесконечность физической Вселенной, когда разлетелись вдребезги хрустальные сферы неба. Все современное движение в логике есть восстание против Аристотеля, медленно, шаг за шагом идет это восстание то в одном пункте, то в другом. Трудно предсказывать будущее» [3, с. 123].

Интуитивно прозрачная онтология вещей и свойств оказалась логически невозможной. Предположение о том, что каждому свойству соответствует совокупность вещей им обладающих, вело к противоречию. В качестве альтернативных онтологий были предложены теория типов и несколько вариантов теории множеств. Выбор какой-либо из них зависел от личных предпочтений исследователя или соображения целесообразности для решения той или иной задачи. В результате появилось несколько математик.

Оценки отношения предложений языка к познаваемой реальности в терминах Истины или Лжи также подверглись критическому пересмотру. В современной логике не ограничиваются двумя истинностными значениями. Количество возможных значений достигло континуума. Придать им какой-то содержательный смысл практически невозможно. Появились логики с провалами истинностных значений, противоречивыми и нечеткими значениями. Понятие истинностного значения стало играть в логике все более и более техническую роль.

Н.А. Васильев, вводя различие эмпирической логики и металогики, отказался от обязательной онтологической интерпретации предложений языка. Законы мысли могут уже не следовать законам бытия. В результате варьирования логических законов не осталось ни одного, который не был бы отброшен в той или

иной системе логики. Как и в случае с неевклидовой геометрией, то, что Н.А. Васильев называл воображаемой логикой, обрело реальность. Самый известный пример — логика квантовой механики.

Изменились и цели познания. Нас окружает изменчивый мир, наши ресурсы ограничены, мы более не надеемся познать абсолютную истину. Это также налагает отпечаток на допустимые способы рассуждений и получаемые выводы.

В результате всех трансформаций логика потеряла свой нормативный характер. Она перестала быть *«канон, стандартом, идеалом, следование которому является необходимым условием успешного осуществления научной и вообще любой рациональной деятельности»*. Окружающая реальность распалась на множество фрагментов, каждому из которых, если следовать традиционному подходу, соответствует своя логика. Вступая в сферу непознанного, мы уже не можем быть уверены в том, каким правилам должны следовать наши рассуждения, чтобы предохранить нас от заблуждений.

Закономерным итогом эволюции традиционного подхода явилась универсальная логика Ж.И. Безье. Это уже не очередной свод логических законов, а построенная по аналогии с универсальной алгеброй теория всех возможных логик. Ж.И. Безье сравнил ее с ящиком инструментов, используемых при построении конкретных логических систем для конкретных проблемных областей. Искусство таких построений схоже с приготовлением майонеза, когда из различных ингредиентов, временных, деонтических, эротетических и др. операторов, получают нечто пригодное для анализа и проведения конкретных типов рассуждений [5].

Из науки о должном логика превратилась в науку о возможном.

2 Семиотический подход

Закономерно задаться вопросом, возможен ли другой подход к построению логики, который, пусть в иных формах, но позволил бы сохранить за ней роль универсального инструмента интеллектуального познания, роль *«нормативной науки о формах и приемах интеллектуальной познавательной деятельности, осуществляемой с помощью языка»*?

Обратим внимание на очевидный факт, что добытые людьми знания всегда получали и будут получать оформление в языке совершенно независимо от того, к какой области реальности они относятся. Это справедливо для знаний о внутреннем мире человека и знаний об окружающей нас физической реальности. Это справедливо для знаний о мире квантово-механических явлений, для знаний о макром мире и для космологических теорий о происхождении и эволюции вселенной. Какие бы дополнительные предположения об устройстве мира ни принимались, знания все равно будут получать представление в языке. Это является необходимым условием их накопления и передачи от поколения к поколению. Не может существовать единственного языка, который был бы пригоден для этих целей и всегда сохранял это качество. Если мы хотим, чтобы логика действительно стала нормативной наукой, мы должны отвлечься от всякой специфики конкретных языков и взглянуть на них лишь как на абстрактные знаковые системы. Именно знаковая природа языка делает его универсально применимым для представления знаний о любой реальности и о любом ее фрагменте. Но содержится ли в столь абстрактно понимаемом языке хоть что-то относящееся к логике?

Первая зацепка, которую мы обнаруживаем, заключается в том, что язык как абстрактная знаковая система устроен иерархически.

«Язык представляет собой систему и единое целое. Он организуется как упорядоченный набор различных и служащих различению “знаков”, которые обладают свойством разлагаться на единицы низшего порядка и соединяться в единицы более сложные. Эта большая структура, включающая в себя меньшие структуры нескольких уровней, и придает форму содержанию мысли. [...] Языковая форма является тем самым не только условием передачи мысли, но прежде всего условием ее реализации. Мы постигаем мысль уже оформленной языковыми рамками» [1, с. 105].

Выражения языка, рассматриваемые как знаки, призваны выполнять функцию быть представителями различных объектов

мысли. Это все что о них можно сказать. О конкретной природе объектов мысли заранее ничего не известно. Это могут быть вещи, свойства, функции, отношения и т.д. Их объединяет лишь то, что все они являются объектами мысли и в этом смысле совершенно равноправны. Разбиение объектов мысли на категории возможно, но произойти это может только в результате познавательной деятельности субъекта познания.

Язык логического субъекта, еще не приступившего к процессу познания, в информационном смысле пуст. Он не содержит даже констант для представления конкретных объектов мысли, поскольку ничто еще не поименовано. Чтобы иметь возможность говорить о произвольных выражениях языка, нам потребуются переменные, пробегающие по этим выражениям. Для представления иерархической структуры выражений языка понадобится синтаксическая операция, позволяющая на самом абстрактном уровне из более простых выражений языка строить более сложные. Можно показать, что, с математической точки зрения, достаточно ограничиться всего лишь одной бинарной синтаксической операцией. Для ее представления удобно использовать скобки. В этом случае построение сложных выражений языка будет производиться по схеме:

Если A и B — выражения языка, то (AB) также выражение языка.

Но логика не сводится к одним лишь выражениям языка. Она предполагает существование правил рассуждений — рационально обоснованных переходов от одних выражений языка к другим. Каким может быть обоснование таких правил в языке как знаковой системе?

Великая сила языка как инструмента познания заключается в том, что он позволяет нам оперировать объектами внеязыковой реальности на знаковом уровне. Это оперирование можно представить как цепочку переходов от одних выражений языка к другим. В процессе манипулирования языковыми выражениями связь между ними и объектами внеположной реальности не должна теряться. Это является необходимым условием правильности нашей языковой деятельности. Одни переходы между выражениями обосновываются уже известными свойствами

соотнесенных им объектов мысли. Другие — получают обоснование благодаря свойствам самого языка. В самом общем виде отношение следования между выражениями языка как знаками можно определить следующим образом:

Из посылок $\Sigma = \{B_1, \dots, B_n\}$ следует выражение A , если и только если существует правило R , которое позволяет на основании значений посылок Σ определить значение выражения A .

Сформулированная таким образом идея рассуждения не нуждается в уточнении того, о каких конкретно языковых выражениях идет речь, какова природа соответствия между этими выражениями и внеязыковой реальностью, что представляет собой эта реальность.

Определенное нами отношение следования обладает рядом свойств.

Если выражение A уже содержится среди посылок Σ , значения которых известны, то тем самым известно и значение A .

Следующее свойство позволяет строить цепочки переходов от одних выражений к другим. Рассуждения могут состоять из нескольких шагов, если между ними имеется связь.

Если существует правило R , которое позволяет на основании значений посылок Σ определить значение выражения A , и существует правило Q , которое позволяет на основании значения A определить значение выражения B , то последовательное применение этих двух правил R и Q позволит на основании значений посылок Σ определить значение B .

Справедливость этих двух свойств обоснована самим определением следования, но если ограничиться только ими, полученная в результате система рассуждений окажется слишком бедной. Она будет адекватна языку, содержащему лишь простые выражения. Мы пока что никоим образом не учли тот факт, что язык, наряду с простыми, содержит также сложные выражения, значения которых зависят от значений входящих в них более простых выражений. Если мы знаем значения выражений

A и B , то мы можем определить значение (AB) . Это свойство имеет место не по причине конкретной семантики, а по причине нашего понимания языка — что значения сложных выражений определяются значениями составляющих их частей. Когда мы формулируем в языке некое новое сообщение для передачи другим, мы уверены, что адресат поймет нами сказанное, поскольку и мы, и он пользуемся одним языком с одним и тем же синтаксисом, одной и той же семантикой. Это и является обоснованием следующего правила.

Если из посылок Σ следует A , и из Σ следует B , то из Σ следует (AB) .

Очевидно, что перечисленные выше свойства не предполагают каких-либо онтологических или эпистемических допущений. Они базируются на абстрактных свойствах самого языка, а не на гипотетических свойствах окружающего мира.

Семиотический подход к построению логики этим не исчерпывается. В основе его дальнейшего развертывания лежат уже не свойства языка, а наблюдение за особенностями деятельности логического субъекта.

Ситуация, в которой некоторый объект выступает в роли знака, содержит три обязательных элемента: *знак*, *означаемое* и *интерпретатора*. Их взаимоотношение заключается в том, что *знак* представляет (репрезентирует, замещает) *означаемое* для *интерпретатора*. Такую ситуацию называют знаковой или *семиозисом*. Роль интерпретатора в семиозисе играет логический субъект. Данная роль наделяет его правом расширять язык новыми знаками. Без этого никакое новое знание не могло бы получить представления в языке. Одни знаки он вводит в язык, чтобы репрезентировать те или иные явления окружающего мира или произвольные объекты мысли. Вследствие этого помимо логической они несут еще и внелогическую нагрузку. Другие знаки он вводит в язык без какого-либо обращения к внеположенной реальности, и потому правила оперирования ими должны быть отнесены к логике.

Если имеется некоторое выражение языка, которое по каким-то причинам представляет для логического субъекта особый интерес, он может запомнить его, воспользовавшись для этого операцией определения.

«В логике определением (дефиницией) называют логическую процедуру придания строго фиксированного смысла языковым выражениям (терминам языка)» [2, с. 197].

Одними из самых простых и распространенных являются явные определения. Они имеют следующую лингвистическую форму:

$$A =_{def} B.$$

Левая часть этого выражения, обозначенная буквой A , называется *определяемым* (дефиниендумом), а правая часть, обозначенная буквой B , — *определяющим* (дефиниенсом). Символ $=_{def}$ «указывает, что принята конвенция считать, что выражение A означает то же самое, что и выражение B » [2, с. 201]. В левой части определения обязательно присутствует новый так называемый определяемый термин, который логический субъект вводит в свой язык, расширяя его.

Поскольку введение явных определений не влечет за собой принятия каких-либо предпосылок об окружающем мире, а является своего рода соглашением, которое логический субъект заключает с самим собой, расширим определение следования следующим образом.

Из посылок Σ и определений Δ следует A , если и только если существует правило R , которое позволяет на основании определений Δ и значений посылок Σ определить значение A .

Определяемый термин — это не просто новая константа языка. За ним закрепляется роль знака — *представителя структуры дефиниенса определения*. С того момента, когда принято определение, это становится личным знанием логического субъекта как интерпретатора знаковой системы. Поэтому отношение следования обладает следующим тривиальным свойством.

Если T — определяемый термин, введенный одним из определений Δ , а Σ — множество посылок, то из Δ и Σ следует T .

Коль скоро левая и правая части определения означают одно и то же, этим можно пользоваться при построении рассуждений, свободно заменяя одно другим.

«Явные определения обладают одним замечательным свойством — определяемые и определяющие части могут в любом контексте замещаться друг на друга, то есть для них верно следующее правило:

$$\frac{C =_{def} D, \quad K[C]}{K[D/C]}$$

называемое правилом замены по дефиниции. . . . Это правило позволяет использовать явные определения в процессах дедуктивного вывода» [2, с. 207].

Обоснование данного правила считается настолько очевидным, что обычно его даже не приводят. С использованием правила замены часто строят свои рассуждения люди, даже не знакомые с тем, что такое логика.

Так как, согласно правилу замены, значение выражения $K[D/C]$ совпадает со значением $K[C]$, это позволяет нам сформулировать еще одно свойство следования.

Если из посылок Σ и множества определений Δ , содержащего $C =_{def} D$, следует выражение $K[C]$, то из Σ и Δ будет следовать выражение $K[D/C]$.

Может показаться, что введение определений и правило их замены не дают ничего принципиально нового. Действительно, если рассматривать явные определения чисто экстенционально, то значение левой части всего лишь совпадает со значением правой. Но дело в том, что помимо значений обе части явных определений обладают еще и структурой. Заменяя в ходе рассуждения определяемое на определяющее, логический субъект оперирует не со значениями выражений, а со сложными языковыми структурами, и в этом смысле переход, совершаемый от одного выражения к другому, на символическом уровне не является тождественным.

Существуют ли другие свойства отношения следования, которые пока что ускользнули от нашего внимания? На этот вопрос

мы можем дать отрицательный ответ. Перечисленный нами набор свойств в математически строгом смысле является полным и потому может служить основанием логики, создаваемой на пути семиотического подхода.

В этой логике могут быть представлены любые эффективные рассуждения [4]. Интересной ее особенностью является то, что большинство известных логических систем теряют в ней свой прежний статус и превращаются в прикладные теории. В этом нет ничего удивительного, поскольку это является прямым следствием принимаемых в них онтологических и эпистемических предпосылок. В то же время некоторые из традиционно понимаемых теорий приобретают более высокий логический статус.

Если обратиться к истории науки, то в ней можно обнаружить попытки строить рассуждения в духе семиотического подхода. Прежде всего имеется в виду то, что уже в наше время получило не слишком удачное название *рецептурной математики*. Правила для вычисления площади прямоугольного участка земли по его сторонам, правила для вычисления объемов пирамид и т.д. служили семантическим обоснованием для перехода от одних выражений языка к другим. Рано или поздно такая практика потребовала бы выделения универсальных правил рассуждений, т.е. построения логики на основе семиотического подхода. Исторически, по причине быстрого распространения более успешной эллинистической культуры, этого не произошло, и логика стала развиваться по уже известному пути, что в конце концов привело к ее дроблению на множество частных методов и постепенной потере статуса философской дисциплины.

Литература

- [1] Бенвенист Э. Категории мысли и категории языка // Общая лингвистика. Благовещенск: БГК им. И.А. Бодуэна де Куртенэ, 1998. С. 104-114.
- [2] Бочаров В.А., Маркин В.И. Основы логики. Учебник. М.: Космополис, 1994.
- [3] Васильев Н.А. Логика и металогики // Воображаемая логика. Избранные труды. М.: Наука, 1989. С. 94-123.
- [4] Шалак В.И. Протологики: новый взгляд на природу логического // Дисс. ... докт. филос. наук. М., 2010.
- [5] Beziau J-Y. 13 Questions about Universal Logic // Bulletin of the Section of Logic. V. 35, №2/3, 2006. P.133-150.

О генетическом методе

В. И. ШАЛАК

ABSTRACT. The aim of this paper is to answer the question what is the genetic method for constructing theories. The distinctive feature of genetic theories is the use of functional languages, and proof in these theories is essentially based on the structure of terms.

Ключевые слова: генетический метод, генетическое рассуждение, геометрия Евклида, рекурсивная арифметика, функциональный язык, реляционный язык

1 Введение

Время от времени в логической литературе можно встретить упоминания о генетическом стиле мышления, генетических способах рассуждений, генетической дедукции и о генетическом методе построения теорий в его противопоставлении аксиоматическому [1, 3, 6, 7, 10, 11]. При этом авторы, как правило, ограничиваются лишь примерами, которые, по их мнению, должны быть отнесены к генетическим, а также перечисляют возможные отличительные признаки, но не формулируют сути генетического подхода столь же ясно и строго, как это было сделано, например, в отношении аксиоматического. Вопрос о том, что же такое генетические способы рассуждений и что такое генетический метод построения теорий, остается без ответа.

Большинство авторов сходятся во мнении, что исторически первой теорией, построенной генетическим методом, была геометрия Евклида [9, 13]. Она занимает в истории науки уникальное место, поскольку долгое время была *одним из наиболее почитаемых разделов математики* и служила едва ли не идеальным образцом для подражания при построении научных теорий. Курьез, связанный с геометрией Евклида, заключается в том, что, несмотря на общее убеждение в ее дедуктивном характере, до сих пор нет ясного понимания, в чем его специфика и

на каких теоретических принципах основывалась эта дедукция. Дело в том, что во время написания «Начал» Евклида и вплоть до XIX в. существовала единственная созданная Аристотелем законченная логическая теория, язык которой был слишком беден, чтобы в нем могли быть представлены сложные математические понятия и доказательства теорем геометрии. Сказанное относится не только к геометрии, но и к другим математическим дисциплинам, которые более двух тысяч лет развивались без видимой опоры на логику.

2 Геометрия Евклида

В 1899 году Д. Гильбертом была предложена логически строгая аксиоматизация геометрии [2], которая, однако, сильно отличалась от своей прародительницы как по набору исходных понятий, так и по виду аксиом.

Так, например, если у Евклида первый постулат геометрии сформулирован следующим образом:

«Допустим:

1. Что от всякой точки до всякой точки <можно> провести линию» [9, с. 14],

то Д. Гильберт передает его посредством двух аксиом:

«I1. Для любых двух точек A, B существует прямая a , принадлежащая каждой из этих двух точек A, B .

I2. Для двух точек A, B существует не более одной прямой, принадлежащей каждой из точек A, B » [2, с. 57].

Если Евклид говорит о возможности через две точки *провести линию*, то у Д. Гильберта речь идет об *отношении принадлежности* между уже существующими линиями и точками. Уже этого примера достаточно, чтобы заметить принципиальное отличие двух подходов к построению геометрии.

С подробным анализом «Начал» Евклида можно ознакомиться в комментариях к ним Д.Д. Мордухая-Болтовского [8]. Он, в частности, пишет:

«Только отказавшись от проектирования в прошлое современных формально-логических понятий, мы будем в состоянии понять, что представляли для самого Евклида постулаты. Евклид вовсе не приписывал идеального существования геометрическим объектам, как это делал Платон. При доказательстве какой-нибудь теоремы производилось построение нужной геометрической фигуры, которая, таким образом, и вызывалась к существованию. Возможность существования прямой, круга и т.д. обуславливалась признанием возможности производящего их акта, мы сказали бы — построения. Более того, признание возможности этого акта вынуждало к признанию некоторых истин; так, признавая согласно постулату 3 возможность описывания кругов, мы тем самым приходили к признанию необходимости пересечения кругов, проходящих через центры друг друга. [...] При таком понимании геометрия перестает быть чисто логической дисциплиной: линейка и циркуль с дозволенными операциями служат для убеждения так же, как и силлогизм» [8, с. 238-241].

Попробуем понять, почему именно такой подход к построению геометрии был избран Евклидом.

С нашей точки зрения, причины этого следует искать в общих философских представлениях об устройстве окружающего мира и языке как конечном средстве объективации знаний. Мир представлялся состоящим из вещей и свойств, которыми эти вещи могут обладать. Познание было возможно, если законы мысли следовали законам бытия. Субъектно-предикатная структура предложений естественного языка, по мысли древних философов, отражала объективно существующие связи между вещами и свойствами. В то же время отношения, даже такие простые, как «*x* больше *y*», не обладали объективным существованием. С этой проблемой сталкивается Сократ в диалоге Платона «Теэтет».

И значит, если бы тебе сказали, что один человек головою больше другого, а другой головою меньше,

ты не принял бы этого утверждения, но решительно его отклонил, заявивши так: „Я могу сказать лишь одно — что всякая вещь, которая больше другой вещи, такова лишь благодаря большому, то есть она становится больше благодаря большому, а меньшее становится меньшим лишь благодаря малому, то есть малое делает его меньшим“. А если бы ты признал, что один человек головою больше, а другой меньше, тебе пришлось бы, я думаю, опасаться, как бы не встретить возражения: прежде всего в том, что большее, у тебя есть большее, а меньшее — меньшее по одной и той же причине, а затем и в том, что большее делает бóльшим малое, — ведь голова-то мала! [Платон, Теэтет, 100е-101а].

В приведенной цитате обращает на себя внимание следующее. Сократ видит проблему в приписывании предиката *быть бóльшим*, но не испытывает трудностей в употреблении этого же термина в смысле результата сравнения вещей. Возможно, это и есть ключ к пониманию Евклида.

Если объективное существование отношений не вписывалось в онтологию вещей и свойств, то возможность совершать действия с вещами, создавать из них более сложные конструкции, производить измерения, не противоречила этой онтологии. Можно было смешать вино с водой и получить разбавленное вино. Можно было сосчитать корабли в порту, измерить высоту храма. Можно было соединить две точки прямой линией и получить отрезок. Но сказать, что две точки и линия находятся в отношении принадлежности, было бессмыслицей.

Чтобы получить сложный подлежащий исследованию геометрический объект, требовалось *вызвать его к существованию* путем построения. По Евклиду, набор элементарных действий, используемых для построения геометрических объектов, невелик и перечислен в трех постулатах 1, 2 и 3:

«Допустим:

- 1. Что от всякой точки до всякой точки <можно> провести линию.*
- 2. И что ограниченную прямую <можно> непрерывно продолжать до прямой.*

3. *И что из всякого центра и всяким раствором <может быть> описан круг.*
4. *И что все прямые углы равны между собой.*
5. *И если прямая, падающая на две прямые, образует внутренние и по одну сторону углы, меньшие двух прямых, то продолженные эти две прямые неограниченно встретятся с той стороны, где углы меньшие двух прямых» [9, с. 14-15].*

Четвертый постулат часто относят к аксиомам, поскольку он не говорит о способе построения, а содержит утверждение о равенстве прямых углов. Знаменитый пятый постулат является инструкцией по нахождению точки пересечения двух линий. Он не содержит указания, где именно пересекутся эти линии, но призывает продолжать их до нахождения требуемой точки. Сегодня мы уже знаем, как вычислить расстояние, на котором линии пересекутся.

Силлогистика Аристотеля — это теория отношений в сфере общих терминов. В то время еще не существовало понятия функции, и потому оно не могло быть включено в логику. Но ничто не мешало говорить и рассуждать о результатах выполнения тех или иных действий, коль скоро эти результаты также были вещами.

3 Объекты генетических теорий

Многие исследователи подчеркивают, что одной из отличительных особенностей генетического подхода к построению теорий является *«способ введения их объектов»* [10, с. 422]. Если посмотреть на структуру доказательств Евклида, то начинаются они либо с подробной демонстрации того, каким образом строится объект, подлежащий дальнейшему исследованию, либо со ссылок на ранее построенные объекты. В современной логике пошаговому построению геометрических объектов соответствует композициональная структура термов. Отношение чертежа к соответствующему идеальному геометрическому объекту то же, что и отношение знака к означаемому. Чертежи, создаваемые путем ограниченного набора доступных операций, играли не только иллюстративную роль, но и роль *формального языка геометрии*. Чертеж выступал в роли термина. В отличие от

современных линейных языков язык геометрии был принципиально двумерным. Его недостатком было лишь отсутствие информации об очередности построения, поскольку один и тот же геометрический объект мог быть получен различными способами. Поэтому, во избежание двусмысленности, геометрический чертеж с необходимостью должен был сопровождаться словесными комментариями о выполненных действиях. Дальнейшие рассуждения о свойствах объекта существенным образом опирались именно на способ его построения (структуру терма). Чертеж (терм) должен был оставаться перед глазами на протяжении всего рассуждения. Иногда в ходе доказательства требовалось дополнить чертеж новыми деталями (построить новый терм). Способ введения объектов геометрии Евклида был исторически обусловлен. Но отсюда вовсе не следует, что он был плох. Наглядная структура термов геометрии значительно облегчала дальнейшие рассуждения и даже позволяла обходиться без принятия дополнительных аксиом, необходимость которых была осознана значительно позже.

Еще одним примером теории, объекты которой вводятся генетически, является арифметика. Натуральные числа получаются путем последовательного прибавления единицы к числу ноль. В языке арифметики их задают посредством индуктивных определений и представляют в виде потенциально бесконечной последовательности термов $< 0, S(0), S(S(0)), S(S(S(0))), \dots >$. Операции сложения и умножения определяются рекурсивно путем сведения сложных термов к более простым. Благодаря этому структура арифметических термов однозначно кодирует способ их вычисления.

- $x + 0 = x$
- $x + S(y) = S(x + y)$
- $x \times 0 = 0$
- $x \times S(y) = (x \times y) + x$

Кроме логического отношения равенства никакие другие отношения в арифметике не являются необходимыми, их всегда

можно ввести посредством определений. При этом следует отметить, что удобная символика для записи арифметических выражений существовала не всегда, и долгое время, как и в случае с геометрией, ученые были вынуждены обходиться громоздкими словесными описаниями. Но они все-таки могли проводить рассуждения и доказывать сложные теоремы.

Если сравнить способы введения объектов в двух рассмотренных выше теориях, то обнаружится, что в геометрии, в отличие от арифметики, индуктивные определения не используются. В арифметике все числа порождаются путем прибавления единицы к постулируемому существующим единственному числу 0, а в геометрии точки, к которым также могут применяться операции, предполагаются уже существующими. В результате множество натуральных чисел оказывается счетным, а множество точек и соответственно множество идеальных объектов геометрии — континуальны.

4 Логическая техника

В качестве второго отличия генетических теорий от аксиоматических указывают на используемую *«логическую технику»* [10, с. 422].

«... в качестве логических средств для развития генетической теории достаточно индуктивных определений и процессов, формализуемых в теории рекурсивных функций» [10, с. 430].

В подтверждение этой точки зрения можно было бы привести книгу Р. Гудстейна, где примитивно рекурсивная арифметика формализована в виде исчисления равенств [5, С. 185]. Каждая теорема данного исчисления — это утверждение о равенстве двух арифметических термов. Английский оригинал книги Р. Гудстейна имеет подзаголовок *«A development of recursive arithmetic in a logic-free equation calculus»*, который в русскоязычном издании был не совсем точно переведен как *«Развитие рекурсивной арифметики в исчислении равенств, свободном от логических связей»*.

В эквациональном исчислении Р. Гудстейна доказательный переход от одного выражения к другому обосновывается исключительно рекурсивными определениями функций (структурой

термов, представляющих эти функции) и свойствами отношения равенства, которое *«по содержанию соответствует чему-то такому, что в известном смысле предшествует определению какого-бы то ни было предиката, а именно — возможности различения элементов индивидуальной области»* [4, с. 209]. Все правила вывода — прямые.

При всей стройности и красоте таких теорий все-таки не следует отождествлять используемую в них логическую технику с генетическим стилем мышления. Рекурсивный стиль мышления является лишь частным случаем генетического.

Обратимся еще раз к Евклиду. Кроме постулатов, в его геометрии есть и аксиомы.

- «1. Равные одному и тому же равны и между собой.*
- 2. И если к равным прибавляются равные, то и целые будут равны.*
- 3. И если от равных отнимаются равные, то остатки будут равны.*
- 4. И если к неравным прибавляются равные, то целые будут не равны.*
- 5. И удвоенные одного и того же равны между собой.*
- 6. И половины одного и того же равны между собой.*
- 7. И совмещающиеся друг с другом равны между собой.*
- 8. И целое больше части.*
- 9. И две прямые не содержат пространства»* [9, с. 15].

Для наглядной записи первых шести аксиом воспользуемся символом отношения равенства « $=$ » и функциональными символами « $..+..$ », « $..-..$ », « $.. \times ..$ », « $../..$ ».

Первая аксиома — это транзитивность и симметричность отношения равенства.

- 1. Если $a = c$ и $b = c$, то $a = b$.*

Следующие пять аксиом говорят о конгруэнтности равенства.

- 2. Если $a = b$ и $c = d$, то $a + c = b + d$.*
- 3. Если $a = b$ и $c = d$, то $a - c = b - d$.*

4. Если $\neg(a = b)$ и $c = d$, то $\neg(a + c = b + d)$.

5. Если $a = b$, то $a \times 2 = b \times 2$.

6. Если $a = b$, то $a/2 = b/2$.

Седьмая аксиома определяет один из способов вычисления характеристической функции отношения равенства между геометрическими объектами. Два объекта равны (конгруэнтны), если их можно совместить друг с другом.

Аксиомы нужны Евклиду для того, чтобы доказывать свойства геометрических объектов. Рассуждая, он использует не только прямые правила, но и косвенные. Так, например, уже в шестом предложении первой книги «Начал» [9, с. 20-21], содержащем утверждение, что если углы в основании треугольника равны, то равны и прилежающие к ним стороны, Евклид прибегает к рассуждению от противного, приходит к противоречию с восьмой аксиомой и отсюда заключает, что стороны равны. Как и положено в рассуждении от противного, он вынужден использовать снятие двойного отрицания: *«Значит, АВ не будет не равной АС; значит, она ей равна»* [9, с. 21]. В другом, более раннем, издании «Начал» снятие двойного отрицания передано словами: *«Чего ради АВ не будет неравна АС; следовательно равна»* [13, с. 13]. Но закон снятия двойного отрицания не относится к числу законов конструктивной логики.

Единственное, что объединяет рассуждения в рекурсивной арифметике и в геометрии Евклида, — это опора на структуру термов, которая в случае арифметики представлена рекурсивными определениями функций, а в случае геометрии — очередностью выполнения операций при построении чертежей.

5 Генетический метод в научной практике

Генетический подход к построению и развертыванию теорий обнаруживается не только в математике, но и в других науках. На это обращает внимание В.С. Степин [11]. Он приводит ряд примеров из научной практики, которые наиболее адекватно описываются именно в терминах генетического стиля мышления.

«При анализе теоретических текстов обнаруживается, что даже в высокоразвитых теориях, широко использующих приемы формализованной аксиома-

тики, кроме формально-аксиоматической части существует некоторый принципиальный неформальный остаток, причем организованный вовсе не по нормам аксиоматико-дедуктивного построения.

Выясняется, что в процессе дедуктивного развертывания теории наряду с аксиоматическими приемами рассуждения большую роль играет генетически-конструктивный метод построения знаний, причем выступающий в форме своего содержательного варианта» [11, с. 127].

Законы классической механики содержат самое общее описание механического взаимодействия тел, представленных как материальные точки. Их можно применить и для анализа осцилляторов, но прежде необходимо выявить все элементы исследуемой модели и уточнить характер взаимодействия между ними. Лишь после этого с использованием законов механики можно получить уравнение малых колебаний.

«В рассуждениях физика осциллятор играет примерно ту же роль, что и геометрическая фигура в рассуждениях математика. Он позволяет установить связь между силой и величиной отклонения материальной точки от положения равновесия, что, в свою очередь, приводит к конкретизации второго закона Ньютона и превращению его в уравнение колебаний» [11, с. 129-130].

Осцилляторную модель можно описать и с помощью реляционного языка, но для этого она уже должна быть представлена в виде некоторого мысленного конструкта. Поэтому более естественным способом описания модели является ее представление в языке именно в виде конструкта по аналогии с тем, как это делается в геометрии. После этого следует изучение характера взаимодействия элементов модели (структуры терма) и на основе этого делаются заключения о ее свойствах. Такой способ рассуждений, от мысленного конструкта к его свойствам, характерен для многих естественных наук.

«Развертывание знаний осуществляется в этом случае путем мысленного экспериментирования с

абстрактными объектами, исследование связей которых позволяет выявлять новые признаки абстрактных объектов и вводить новые абстракции» [11, с. 132].

Мысленно невозможно экспериментировать с никак не структурированными точками, которыми, по сути, и являются индивиды реляционных моделей. Такое экспериментирование становится возможным в том случае, если индивид ассоциирован со структурой из функционально связанных элементов. В этом и заключается, с нашей точки зрения, суть генетического метода.

6 Выводы

С формальной точки зрения, генетический метод построения теорий и генетический стиль мышления имеют лишь историческую ценность. Отличительным признаком генетического метода является использование функциональных языков, которые по своим выразительным возможностям не превосходят, но и не уступают реляционным [12]. Функциональным языкам принадлежит всего лишь исторический приоритет.

С концептуальной точки зрения, разница между генетическим и аксиоматическим подходами значительна. Генетический подход предлагает смотреть на мир как состоящий из вещей, свойств и функциональных связей между вещами. Такой взгляд на мир внутренне динамичен и лучше соответствует нашим интуитивным представлениям. При аксиоматическом, экзистенциальном подходе, мир статичен. В нем ничто не возникает, и ничто не исчезает. Он состоит из уже существующих вещей, находящихся друг с другом в тех или иных отношениях. Даже время в нем статично. Это всего лишь множество точек, находящихся между собой в отношении *раньше-позже*.

Современной формой построения генетических теорий является их аксиоматизация в языках с функциональными символами и равенством. Допускается расширение языков одноместными предикатными символами.

В случае использования чистых реляционных языков объект исследования, будучи представлен переменной или в лучшем случае константой, описывается одним или несколькими высказываниями, говорящими о том, в каких отношениях он нахо-

дится с другими объектами предметной области. Единственным способом анализа свойств такого объекта является логическая дедукция других реляционных высказываний о нем.

В функциональных языках объект исследования представлен термом той или иной степени сложности. Выявление его свойств происходит посредством анализа структуры терма. Рекурсивное сведение свойств объекта к свойствам составляющих его под-объектов является всего лишь частным случаем методов анализа. Неконструктивные способы рассуждений в функциональных языках также являются допустимыми. Они позволяют обнаруживать свойства, возникающие за счет более сложной организации объекта исследования, и лишь частично могут быть объяснены свойствами его подобъектов.

Литература

- [1] *Бирюков Б.В.* О научных результатах Германа и Роберта Грассманов в свете последующих исследований логики мышления // Грассман Г., Грассман Р. Логика и философия математики. Избранное. М.: Наука, 2008. С. 347-457.
- [2] *Гильберт Д.* Основания геометрии. ОГИЗ, Москва; Ленинград, 1948. С. 57.
- [3] *Гильберт Д.* О понятии числа // Основания геометрии. ОГИЗ, Москва; Ленинград, 1948. С. 315-321.
- [4] *Гильберт Д., Бернайс П.* Основания математики. Логические исчисления и формализация арифметики. М.: Наука, 1982.
- [5] *Гудстейн Р.Л.* Рекурсивная теория чисел // Рекурсивный математический анализ. М.: Наука, 1970.
- [6] *Клини С.К.* Введение в метаматематику. М.: Иностранная литература, 1957.
- [7] *Крушинский А.А.* Генетический тип дедукции — альтернатива традиционно понимаемой дедукции как выводу из аксиом // Логические исследования. Вып. 14. М.: Наука, 2007. С. 176-186.
- [8] *Мордухай-Болтовский Д.Д.* Комментарии // Начала Евклида. Книги I-VI. ОГИЗ, Москва-Ленинград, 1948. С. 221-446.
- [9] Начала Евклида. Книги I-VI. ОГИЗ, Москва; Ленинград, 1948.
- [10] *Смирнов В.А.* Генетический метод построения научной теории // Логико-философские труды В.А. Смирнова. М.: Эдиториал УРСС, 2001. С. 417-437.
- [11] *Степин В.С.* Теоретическое знание. М.: Прогресс-Традиция, 2003.
- [12] *Шалак В.И.* Логика функций vs логика отношений // Логические исследования. Вып. 16. М.: Наука. С. 259-271.
- [13] *Эвклидовыхъ Начальъ восемь книгъ* // Пер. Ф. Петрушевского. Санкт-Петербургъ, 1819.

Системы натурального вывода для некоторых логик с истинностными провалами и логик с пресыщенными оценками¹

В. О. ШАНГИН

ABSTRACT. In the paper we present Fitch-style natural deduction systems of some logics with truth-value gluts and truth-value gaps. We show that natural deduction systems of the logics in question can be set up with different formulations of either the disjunction elimination rule or the negation introduction rule. We give a constructive proof that for each natural deduction system N of a logic α , a formula A is N -provable iff A is a α -theorem.

Ключевые слова: теория доказательств, натуральный вывод, неклассическая логика, логики с истинностными провалами и с пресыщенными оценками, правило исключения дизъюнкции

Введение

Задается стандартный пропозициональный язык L с алфавитом $\{p_1, q_1, r_1, p_2, \dots, (,), \wedge, \vee, \supset, \neg\}$. Определение формулы языка L обычно. Буквы $A, B, C, D, A_1, \dots$ обозначают произвольные формулы языка L . Буквы $\Gamma, \Delta, \Gamma_1, \dots$ обозначают произвольные конечные множества формул языка L .

В работе используются аксиоматические системы для некоторых логик с истинностными провалами и логик с пресыщенными оценками. Мы используем аксиоматическую систему HPar для логики Par [3], аксиоматическую систему HPCont для логики PCont [5], аксиоматическую систему HPComp для логики

¹Исследование выполнено при финансовой поддержке РГНФ в рамках научно-исследовательского проекта РГНФ («Логика с истинностными провалами и логики с пресыщенными оценками: семантики обобщенных оценок и аксиоматизации посредством исчислений с правилами оперирования комплексами логических связок»), проект № 10-03-00570а.

PComp [1] и аксиоматическую систему HPContPComp для логики PContPComp [4]. Объем статьи не позволяет дать описание данных работ, поэтому их знание предполагается. Некоторые результаты данной работы представлены без доказательств в [6].

Статья структурирована следующим образом. В параграфе 1 задается формулировка системы натурального вывода NPar для логики Par. На основе NPar с использованием различных ограничений для правила введения отрицания задаются формулировки систем натурального вывода NPCont, NPSComp и NPContPComp для логик PCont, PComp и PContPComp соответственно. Параграф 2 посвящен метатеоретическим свойствам систем, предложенным в параграфе 1. В параграфе 3 на основе NPar с использованием различных ограничений для правила исключения дизъюнкции задаются формулировки систем натурального вывода NPCont*, NPSComp* и NPContPComp* для логик PCont, PComp и PContPComp соответственно. Параграф 4 посвящен метатеоретическим свойствам систем, предложенным в параграфе 3.

1 Система натурального вывода для логики Par и системы натурального вывода с правилом введения отрицания для логик PCont, PComp и PContPComp

Система натурального вывода NPar. Задаются следующие NPar-правила (формула слева от «/» называется посылкой, а формула справа от «/» — заключением)². Отметим, что, например, правило $\vee_{\text{и}}$ трехпослочно, а правило $\supset_{\text{в}}$ однопослочно.

$\wedge_{\text{и}1}: A \wedge B / A; \wedge_{\text{и}2}: A \wedge B / B; \wedge_{\text{в}}: A, B / A \wedge B;$
 $\vee_{\text{и}}: A \vee B, [A] C, [B] C / C; \vee_{\text{в}1}: A / A \vee B; \vee_{\text{в}2}: B / A \vee B;$
 $\supset_{\text{и}}: A \supset B, A / B; \supset_{\text{в}}: [C] B / C \supset B; \supset_{\text{р}}: [A \supset B] A / A^3;$
 $\neg\neg_{\text{и}}: \neg\neg A / A; \neg\neg_{\text{в}}: A / \neg\neg A; \neg\vee_{\text{и}1}: \neg(A \vee B) / \neg A;$
 $\neg\vee_{\text{и}2}: \neg(A \vee B) / \neg B; \neg\vee_{\text{в}}: \neg A, \neg B / \neg(A \vee B);$
 $\neg\wedge_{\text{и}}: \neg(A \wedge B) / \neg A \vee \neg B; \neg\wedge_{\text{в}1}: \neg A / \neg(A \wedge B); \neg\wedge_{\text{в}2}: \neg B / \neg(A \wedge B);$
 $\neg\supset_{\text{и}}: \neg(A \supset B) / A \wedge \neg B; \neg\supset_{\text{в}}: A \wedge \neg B / \neg(A \supset B).$

²Данные правила делятся на правила введения и исключения логической связки или комплекса логических связок.

³Правило Пирса, $\supset_{\text{р}}$, ошибочно не добавлено ко всем системам натурального вывода в [6], [7].

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 1. Выводом в системе NPar (NPar-выводом) называется непустая конечная последовательность формул, удовлетворяющая следующим условиям: каждая формула есть либо посылка, либо получена из предыдущих по одному из NPar-правил; при применении правила $\supset_v$ ($\supset_p$) все формулы, начиная с последней неисключенной посылки C ($A \supset B$) и вплоть до результата применения данного правила, исключаются из дальнейших шагов вывода; при применении правила $\forall_i$ все формулы, начиная с посылки A и вплоть до формулы C , а также все формулы, начиная с посылки B и вплоть до формулы C , исключаются из дальнейших шагов вывода.

NPar-выводом формулы B из непустого множества посылок Γ (сокращенно $\Gamma \vdash_{NPar} B$) называется NPar-вывод, в котором множество неисключенных посылок есть Γ и последняя формула есть формула B . NPar-доказательством формулы B называется NPar-вывод формулы B из пустого множества неисключенных посылок. NPar-теоремой называется формула B , для которой имеется NPar-доказательство.

Рассмотрим двухпосылочное правило введения отрицания $\neg_v$: $[C] D, \neg D / \neg C$. Добавление правила $\neg_v$ к множеству NPar-правил вместе с требованием, что формула C — это последняя неисключенная посылка в выводе, дает систему натурального вывода для классической логики высказываний адекватную системе NP, предложенной в [2]. С другой стороны, мы рассмотрим три правила введения отрицания ($PCont\neg_v$, $PComp\neg_v$ и $PContPComp\neg_v$), которые получаются введением различных ограничений на вид формулы C в правиле $\neg_v$. Мы покажем, что добавление правила $PCont\neg_v$ ($PComp\neg_v$ / $PContPComp\neg_v$) к множеству NPar-правил вместе с требованием, что формула C — это последняя неисключенная посылка в выводе, дает систему натурального вывода $NPCont$ ($NPComp$ / $NPContPComp$) для неклассической пропозициональной логики $PCont$ ($PComp$ / $PContPComp$). Данный подход аналогичен [3], где различные ограничения на вид основной секвенции дают секвенциальные исчисления GK_2 , $GPar$, $GPCont$ для классической логики высказываний и неклассических пропозициональных логик Par и $PCont$.

Система натурального вывода $NPCont$ ($NPComp$ / $NPContPComp$). Добавляем к множеству NPar-правил правило

$\mathbf{PCont}_{\neg B} (\mathbf{PComp}_{\neg B} / \mathbf{PContPComp}_{\neg B})$: $[C] D, \neg D / \neg C$, где C имеет вид $A \vee \neg A$ ($\neg A \supset (A \supset B) / (A \wedge \neg A) \supset (B \vee \neg B)$).

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 2. Выводом в системе $\mathbf{NPCont}$ ($\mathbf{NPComp} / \mathbf{NPContPComp}$) называется непустая конечная последовательность формул, удовлетворяющая условиям определения 1, а также следующему условию: при применении $\mathbf{PCont}_{\neg B}$ ($\mathbf{PComp}_{\neg B} / \mathbf{PContPComp}_{\neg B}$) все формулы, начиная с последней неисключенной посылки C и вплоть до результата применения данного правила, исключаются из дальнейших шагов вывода.

$\mathbf{NPCont}$ ($\mathbf{NPComp} / \mathbf{NPContPComp}$)-выводом формулы B из непустого множества посылок Γ (сокращенно $\Gamma \vdash_{\mathbf{NPCont}(\mathbf{NPComp}/\mathbf{NPContPComp})} B$) называется $\mathbf{NPCont}$ ($\mathbf{NPComp} / \mathbf{NPContPComp}$)-вывод, в котором множество неисключенных посылок есть Γ и последняя формула есть формула B . $\mathbf{NPCont}$ ($\mathbf{NPComp} / \mathbf{NPContPComp}$)-доказательством формулы B называется $\mathbf{NPCont}$ ($\mathbf{NPComp} / \mathbf{NPContPComp}$)-вывод формулы B из пустого множества неисключенных посылок. $\mathbf{NPCont}$ ($\mathbf{NPComp} / \mathbf{NPContPComp}$)-теоремой называется формула B , для которой имеется $\mathbf{NPCont}(\mathbf{NPComp}/\mathbf{NPContPComp})$ -доказательство.

2 Метатеоретические свойства $\mathbf{NPar}$, $\mathbf{NPCont}$, $\mathbf{NPComp}$ и $\mathbf{NPContPComp}$

Для исследования метатеоретических свойств $\mathbf{NPar}$, $\mathbf{NPCont}$, $\mathbf{NPComp}$ и $\mathbf{NPContPComp}$ мы используем аксиоматические системы $\mathbf{HPar}$, $\mathbf{HCont}$, $\mathbf{HComp}$ и $\mathbf{HContPComp}$ для логик $\mathbf{Par}$, $\mathbf{Cont}$, $\mathbf{Comp}$ и $\mathbf{ContPComp}$ [3, 5, 1, 4]. Отметим, что в любой из данных аксиоматических систем доказуемы формулы $((A \wedge B) \supset C) \supset (A \supset (B \supset C))$, $(A \supset (B \supset C)) \supset ((A \wedge B) \supset C)$ и имеется теорема дедукции.

ТЕОРЕМА 1. $\Gamma \vdash_{\mathbf{NPar}} A \Leftrightarrow \Gamma \vdash_{\mathbf{HPar}} A$.

Доказательство. Доказательство $\Leftarrow$. Достаточно показать, что все $\mathbf{HPar}$ -правила выводимы в $\mathbf{NPar}$. Рассмотрим правила $(A \supset C) \supset ((B \supset C) \supset ((A \vee B) \supset C))$ и $((A \supset B) \supset A) \supset A$. Остальные случаи аналогичны.

$$\vdash_{\mathbf{NPar}} (A \supset C) \supset ((B \supset C) \supset ((A \vee B) \supset C))$$

1. $A \supset C$ — посылка
2. $B \supset C$ — посылка
3. $A \vee B$ — посылка
4. A — посылка
5. C — $\supset_{\text{и}}$: 1, 4
6. B — посылка
7. C — $\supset_{\text{и}}$: 2, 6
8. C — $\vee_{\text{и}}$: 3, 5, 7 [4–5], [6–7]
9. $(A \vee B) \supset C$ — $\supset_{\text{в}}$: 8 [3–8]
10. $(B \supset C) \supset ((A \vee B) \supset C)$ — $\supset_{\text{в}}$: 9 [2–9]
11. $(A \supset C) \supset ((B \supset C) \supset ((A \vee B) \supset C))$ — $\supset_{\text{в}}$: 10 [1–10]

$\vdash_{NPar} ((A \supset B) \supset A) \supset A$

1. $(A \supset B) \supset A$ — посылка
2. $A \supset B$ — посылка
3. A — $\supset_{\text{и}}$: 1, 2
4. A — $\supset_{\text{р}}$: 3 [2–3]
5. $((A \supset B) \supset A) \supset A$ — $\supset_{\text{в}}$: 4 [1–4]

Доказательство $\Rightarrow$. Покажем сначала лемму 1.

ЛЕММА 1. $\Gamma \vdash_{NPar} A \Rightarrow \vdash_{HPar} (\Gamma^\wedge) \supset A$, где $(\Gamma^\wedge)$ — это $\wedge$ -образ множества формул Γ , заданный следующим образом:

Если Γ пусто, то $(\Gamma^\wedge) \supset A$ есть A ;

Если $\Gamma = \{D_1, D_2, \dots, D_m\}$, $m \geq 1$, то $(\Gamma^\wedge) \supset A$ есть $(D_1 \wedge (D_2 \wedge \dots \wedge D_m) \dots) \supset A$.

Доказательство. Доказательство ведется методом двойной математической индукции по длине n и числу применений s NPar-правил в $\Gamma \vdash_{NPar} A$.

Базис: $s = 0$. Тогда $A \in \Gamma$.

Этому выводу соответствует NPar-доказательство формулы $(\Gamma^\wedge) \supset A$:

1. $(\Gamma^\wedge) \supset A$ — NPar-аксиома⁴

Итак, мы доказали лемму для всех NPar-выводов, в которых нет ни одного применения NPar-правил.

Теперь предположим (IH): лемма верна для всех NPar-выводов с числом d применений NPar-правил, $d \leq s$. Покажем, что лемма верна для всех NPar-выводов с числом $s + 1$ применений NPar-правил.

Число рассматриваемых случаев зависит от числа NPar-правил⁵.

Случай 1. Формула A имеет вид $\neg\neg B$ и получена по $\neg\neg_B$ из B_i , $1 \leq i < n + 1$.

Тогда $\Gamma \vdash_{NPar} A$ принимает следующий вид:

Γ
 $\dots$
 $i. B$
 $\dots$
 $n+1. \neg\neg B \text{ — } \neg\neg_B: i$

Этому выводу соответствует NPar-доказательство формулы $(\Gamma^\wedge) \supset \neg\neg B$:

- i'. $(\Gamma^\wedge) \supset B$ — NPar-теорема (IH)

i'+1. $B \supset \neg\neg B$ — NPar-аксиома

⁴Без потери общности, данная формула является частным случаем NPar-аксиомы $(A \wedge B) \supset B$, если $n \geq 2$. Если $n = 1$, то данная формула является NPar-аксиомой $A \supset A$.

⁵Аналогичные случаи мы пропустим.

$i'+2.$ $((\Gamma^\wedge) \supset B) \supset ((B \supset \neg\neg B) \supset ((\Gamma^\wedge) \supset \neg\neg B))$ — HPar-аксиома

$i'+3.$ $(\Gamma^\wedge) \supset \neg\neg B$ — $\supset_{\text{и}}$: $i', i'+1, i'+2$ (2 раза)

Случай 2. Формула A имеет вид $B_k \supset B_j$ и получена по $\supset_{\text{в}}$ из B , $1 \leq j < n+1$, $1 \leq k < n+1$.

Тогда $\Gamma \vdash_{NPar} A$ принимает следующий вид:

Γ

...

$k.$ C — посылка

...

$j.$ B

...

$n+1.$ $C \supset B$ — $\supset_{\text{в}}$: j [$k-n$]

Этому выводу соответствует HPar-доказательство формулы $(\Gamma^\wedge) \supset (C \supset B)$:

$j'.$ $((\Gamma^\wedge) \wedge C) \supset B$ — HPar-теорема (ИИ)

$j'+1.$ $((\Gamma^\wedge) \wedge C) \supset B \supset ((\Gamma^\wedge) \supset (C \supset B))$ — HPar-теорема

$j'+2.$ $(\Gamma^\wedge) \supset (C \supset B)$ — $\supset_{\text{и}}$: $j', j'+1$

Q.E.D.

Теорема 1 следует из леммы 1 и $\Gamma \vdash_{HPar} A \Leftrightarrow \vdash_{HPar} (\Gamma^\wedge) \supset A$.

Q.E.D.

ТЕОРЕМА 2. $\Gamma \vdash_{NPCont} A \Leftrightarrow \Gamma \vdash_{HPCont} (\Gamma^\wedge) \supset A$

Доказательство. Доказательство $\Leftarrow$. Достаточно дополнить случай $\Leftarrow$ теоремы 1 NPCont-доказательством $A \vee \neg A$.

1. $\neg(A \vee \neg A)$ — посылка

2. $A \multimap \neg \vee_{\text{и}1}: 1$
3. $\neg A \multimap \neg \vee_{\text{и}2}: 1$
4. $\neg \neg(A \vee \neg A) \multimap \text{PCont} \neg_{\text{в}}: 2, 3 [1-3]$
5. $A \vee \neg A \multimap \neg_{\text{и}}: 4$

Доказательство $\Rightarrow$. Покажем сначала лемму 2.

ЛЕММА 2. $\Gamma \vdash_{\text{NPCont}} A \Rightarrow \vdash_{\text{HPCont}} (\Gamma^\wedge) \supset A$.

Доказательство. К рассмотренным в лемме 1 случаям добавляется следующий.

Формула A имеет вид $\neg \neg(C \vee \neg C)$ и получена по $\text{PCont} \neg_{\text{в}}$ из B_k и B_h , $1 \leq k < n+1$, $1 \leq h < n+1$, $m < n+1$.

Тогда $\Gamma \vdash_{\text{NPCont}} A$ принимает следующий вид:

- $$\begin{array}{l}
 \Gamma \\
 \dots \\
 m. \neg(C \vee \neg C) \multimap \text{посылка} \\
 \dots \\
 k. B \\
 \dots \\
 h. \neg B \\
 \dots \\
 n+1. \neg \neg(C \vee \neg C) \multimap \neg_{\text{в}}: k, h [m-n]
 \end{array}$$

Этому выводу соответствует HPCont-доказательство формулы $(\Gamma^\wedge) \supset \neg \neg(C \vee \neg C)$:

- $k'. ((\Gamma^\wedge) \supset \neg(C \vee \neg C)) \supset B_k \multimap \text{HPCont-теорема (IH)}$
- $k'+1. ((\Gamma^\wedge) \supset \neg(C \vee \neg C)) \supset \neg B_k \multimap \text{HPCont-теорема (IH)}$
- $k'+2. C \vee \neg C \multimap \text{HPCont-аксиома}$
- $k'+3. (C \vee \neg C) \supset \neg \neg(C \vee \neg C) \multimap \text{HPCont-аксиома}$

$k'+4.$ $\neg\neg(C \vee \neg C) \multimap_{\text{и}} k'+2, k'+3$

$k'+5.$ $\neg\neg(C \vee \neg C) \supset ((\Gamma^\wedge) \supset \neg\neg(C \vee \neg C))$ — HPCont-аксиома

$k'+6.$ $(\Gamma^\wedge) \supset \neg\neg(C \vee \neg C) \multimap_{\text{и}} k'+4, k'+5$

Q.E.D.

Теорема 2 следует из леммы 2 и $\Gamma \vdash_{\text{HPCont}} A \Leftrightarrow \vdash_{\text{HPCont}} (\Gamma^\wedge) \supset A$.

Q.E.D.

ТЕОРЕМА 3. $\Gamma \vdash_{\text{NPComp}} A \Leftrightarrow \Gamma \vdash_{\text{HPComp}} (\Gamma^\wedge) \supset A$

Доказательство. Доказательство аналогично доказательству теоремы 2.

Q.E.D.

ТЕОРЕМА 4. $\Gamma \vdash_{\text{NPContPComp}} A \Leftrightarrow \Gamma \vdash_{\text{HPContPComp}} (\Gamma^\wedge) \supset A$

Доказательство. Доказательство аналогично доказательству теоремы 2.

Q.E.D.

3 Системы натурального вывода с правилом исключения дизъюнкции для логик PCont, PComp и PContPComp

В данном параграфе мы зададим альтернативные формулировки систем натурального вывода NPCont*, NComp* и NPContPComp* для логик PCont, PComp и PContPComp. В отличие от формулировок систем натурального вывода из параграфа 2, где главную роль играет правило введения отрицания, в данных формулировках главную роль играет правило исключения дизъюнкции.

Рассмотрим следующие двухпосылочные правила *исключения дизъюнкции*: **PCont** $\vee_{\text{и}}$: $[A] C, [\neg A] C / C$; **PComp** $\vee_{\text{и}}$: $A \vee B, \neg A / B$ и **PContPComp** $\vee_{\text{и}}$: $A \vee (B \vee \neg B), \neg A / B \vee \neg B$. Покажем, что добавление правила PCont $\vee_{\text{и}}$ (PComp $\vee_{\text{и}}$ / PContPComp $\vee_{\text{и}}$) к множеству NPar-правил дает систему натурального вывода NPCont* (NComp* / NPContPComp*) для логики PCont (PComp / PContPComp).

Система натурального вывода $NPCont^*$ ($NPComp^*$ / $NPContPComp^*$). Добавляем к множеству $NPar$ -правил правило $PCont\vee_{\text{и}}$ ($PComp\vee_{\text{и}}$ / $PContPComp\vee_{\text{и}}$).

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 3. Выводом в системе $NPComp^*$ ($NPContPComp^*$) называется непустая конечная последовательность формул, удовлетворяющая условиям определения 1. Выводом в системе $NPCont^*$ называется непустая конечная последовательность формул, удовлетворяющая условиям определения 1, а также следующему условию: при применении правила $PCont\vee_{\text{и}}$ и все формулы, начиная с посылки A и вплоть до формулы C , а также все формулы, начиная с посылки $\neg A$ и вплоть до формулы C , исключаются из дальнейших шагов вывода.

$NPCont^*$ ($NPComp^*$ / $NPContPComp^*$)-выводом формулы B из непустого множества посылок Γ (сокращенно $\Gamma \vdash_{NPCont^*(NPComp^*/NPContPComp^*)} B$) называется $NPCont^*$ ($NPComp^*$ / $NPContPComp^*$)-вывод, в котором множество неисключенных посылок есть Γ и последняя формула есть формула B . $NPCont^*$ ($NPComp^*$ / $NPContPComp^*$)-доказательством формулы B называется $NPCont^*$ ($NPComp^*$ / $NPContPComp^*$)-вывод формулы B из пустого множества неисключенных посылок. $NPCont^*$ ($NPComp^*$ / $NPContPComp^*$)-теоремой называется формула B , для которой имеется $NPCont^*$ ($NPComp^*$ / $NPContPComp^*$)-доказательство.

4 Метатеоретические свойства $NPCont^*$, $NPComp^*$ и $NPContPComp^*$

Аналогично параграфу 2, для исследования метатеоретических свойств $NPCont^*$, $NPComp^*$ и $NPContPComp^*$ используем аксиоматические системы $NPCont$, $NPComp$ и $NPContPComp$ [3, 5, 1, 4].

ТЕОРЕМА 5. $\Gamma \vdash_{NPCont^*} A \Leftrightarrow \Gamma \vdash_{NPCont} A$.

Доказательство. Доказательство $\Leftarrow$. Достаточно дополнить случай $\Leftarrow$ теоремы 1 $NPCont^*$ -доказательством $A \vee \neg A$.

1. A — посылка
2. $A \vee \neg A$ — $\vee_{\text{в1}}$: 1

3. $\neg A$ — посылка
4. $A \vee \neg A$ — $\vee_{\text{в2}}$: 3
5. $A \vee \neg A$ — $\text{PCont}\vee_{\text{и}}$: 2, 4 [1–2], [3–4]

Доказательство $\Rightarrow$. Покажем сначала лемму 3.

ЛЕММА 3. $\Gamma \vdash_{\text{NPCont}*} A \Rightarrow \vdash_{\text{HPCont}} (\Gamma^\wedge) \supset A$.

Доказательство. К рассмотренным в лемме 1 случаям добавляется следующий: формула A имеет вид C и получена по $\text{PCont}\vee_{\text{и}}$ из B_k и B_h , $m < n + 1$, $s < n + 1$, $1 \leq k < n + 1$, $1 \leq h < n + 1$.

Тогда $\Gamma \vdash_{\text{NPCont}*} A$ принимает следующий вид:

- Γ
- ...
- m. B — посылка
- ...
- k. C
- ...
- s. $\neg B$ — посылка
- ...
- h. C
- ...
- n+1. C — $\text{PCont}\vee_{\text{и}}$: k, h [m–k], [s–h]

Этому выводу соответствует HPCont-доказательство формулы $(\Gamma^\wedge) \supset C$:

- k'. $((\Gamma^\wedge) \wedge B) \supset C$ — HPCont-теорема (ИН)
- k'+1. $((\Gamma^\wedge) \wedge \neg B) \supset C$ — HPCont-теорема (ИН)

- k'+2. $((\Gamma^\wedge) \wedge B) \supset C \supset ((\Gamma^\wedge) \supset (B \supset C))$ — HPCont-теорема
- k'+3. $((\Gamma^\wedge) \wedge \neg B) \supset C \supset ((\Gamma^\wedge) \supset (\neg B \supset C))$ — HPCont-теорема
- k'+4. $(\Gamma^\wedge) \supset (B \supset C) - \supset_{\text{и}}: k', k'+2$
- k'+5. $(\Gamma^\wedge) \supset (\neg B \supset C) - \supset_{\text{и}}: k'+1', k'+3$
- k'+6. $(\Gamma^\wedge) - \text{посылка}$
- k'+7. $B \supset C - \supset_{\text{и}}: k'+4, k'+6$
- k'+8. $\neg B \supset C - \supset_{\text{и}}: k'+5, k'+6$
- k'+9. $B \vee \neg B - \text{HPCont-аксиома}$
- k'+10. $(B \supset C) \supset ((\neg B \supset C) \supset ((B \vee \neg B) \supset C)) - \text{HPCont-аксиома}$
- k'+11. $C - \supset_{\text{и}}: k'+7, k'+8, k'+9, k'+10$ (3 раза)
- k'+12. $(\Gamma^\wedge) \supset C - \text{теорема дедукции: } k'+11$

Q.E.D.

Теорема 5 следует из леммы 3 и $\Gamma \vdash_{\text{HPCont}} A \Leftrightarrow \vdash_{\text{HPCont}} (\Gamma^\wedge) \supset A$. Q.E.D.

ТЕОРЕМА 6. $\Gamma \vdash_{\text{NPComp}^*} A \Leftrightarrow \Gamma \vdash_{\text{HPComp}} A$.

Доказательство. Доказательство $\Leftarrow$. Достаточно дополнить случай $\Leftarrow$ теоремы 1 NPComp*-доказательством $\neg A \supset (A \supset B)$.

1. $\neg A - \text{посылка}$
2. $A - \text{посылка}$
3. $A \vee B - \vee_{\text{в1}}: 2$
4. $B - \text{PComp}\vee_{\text{и}}: 1, 3$
5. $A \supset B - \supset_{\text{в}}: 4 [2-4]$
6. $\neg A \supset (A \supset B) - \supset_{\text{в}}: 5 [1-5]$

Доказательство $\Rightarrow$. Покажем сначала лемму 4.

ЛЕММА 4. $\Gamma \vdash_{\text{NPComp}^*} A \Rightarrow \vdash_{\text{HPComp}} (\Gamma^\wedge) \supset A$.

Доказательство. К рассмотренным в лемме 1 случаям добавляется следующий: формула A имеет вид C и получена по $\text{RComp}\forall_{\text{и}}$ из B_k и B_h , $1 \leq k < n+1$, $1 \leq h < n+1$.

Тогда $\Gamma \vdash_{\text{NPComp}*} A$ принимает следующий вид:

Γ
 $\dots$
 $k. A \vee C$
 $\dots$
 $h. \neg A$
 $\dots$
 $n+1. C - \text{RComp}\forall_{\text{и}}: k, h$

Этому выводу соответствует NPComp -доказательство формулы $(\Gamma^\wedge) \supset C$:

$k'. (\Gamma^\wedge) \supset A \vee C - \text{NPComp-теорема (ИН)}$
 $k'+1. (\Gamma^\wedge) \supset \neg A - \text{NPComp-теорема (ИН)}$
 $k'+2. \neg A \supset (A \supset C) - \text{NPComp-аксиома}$
 $k'+3. ((\Gamma^\wedge) \supset \neg A) \supset ((\neg A \supset (A \supset C)) \supset ((\Gamma^\wedge) \supset (A \supset C))) - \text{NPComp-аксиома}$
 $k'+4. (\Gamma^\wedge) \supset (A \supset C) - \supset_{\text{и}}: k'+1, k'+2, k'+3 \text{ (2 раза)}$
 $k'+5. C \supset C - \text{NPComp-аксиома}$
 $k'+6. (A \supset C) \supset ((C \supset C) \supset ((A \vee C) \supset C)) - \text{NPComp-аксиома}$
 $k'+7. (\Gamma^\wedge) - \text{посылка}$
 $k'+8. A \vee C - \supset_{\text{и}}: k', k'+7$
 $k'+9. A \supset C - \supset_{\text{и}}: k'+4, k'+7$
 $k'+10. C - \supset_{\text{и}}: k'+5, k'+6, k'+8, k'+9 \text{ (3 раза)}$
 $k'+11. (\Gamma^\wedge) \supset C - \text{теорема дедукции: } k'+10$

Q.E.D.

Теорема 6 следует из леммы 4 и $\Gamma \vdash_{HPComp} A \Leftrightarrow \vdash_{HPComp} (\Gamma^\wedge) \supset A$.
Q.E.D.

ТЕОРЕМА 7. $\Gamma \vdash_{NPContPComp^*} A \Leftrightarrow \Gamma \vdash_{HPContPComp} A$.

Доказательство. Доказательство $\Leftarrow$. Достаточно дополнить случай $\Leftarrow$ теоремы 1 NPContPComp*-доказательством $(A \wedge \neg A) \supset (B \vee \neg B)$.

1. $A \wedge \neg A$ — посылка
2. A — $\wedge_{и1} : 1$
3. $\neg A$ — $\wedge_{и2} : 1$
4. $A \vee (B \vee \neg B)$ — $\vee_{в1} : 2$
5. $B \vee \neg B$ — PContPComp $\vee_{и}$: 3, 4
6. $(A \wedge \neg A) \supset (B \vee \neg B)$ — $\supset_{в} : 5$ [1-5]

Доказательство $\Rightarrow$. Покажем сначала лемму 5.

ЛЕММА 5. $\Gamma \vdash_{NPContPComp^*} A \Rightarrow \vdash_{HPContPComp} (\Gamma^\wedge) \supset A$.

Доказательство. К рассмотренным в лемме 1 случаям добавляется следующий: формула A имеет вид $C \vee \neg C$ и получена по PContPComp $\vee_{и}$ из B_k и B_h , $1 \leq k < n + 1$, $1 \leq h < n + 1$.

Тогда $\Gamma \vdash_{NPContPComp^*} A$ принимает следующий вид:

- Γ
- ...
- k. $A \vee (C \vee \neg C)$
- ...
- h. $\neg A$
- ...
- n+1. $C \vee \neg C$ — PContPComp $\vee_{и}$: k, h

Этому выводу соответствует HPContPComp -вывод формулы $(\Gamma^\wedge) \supset (C \vee \neg C)$:

- k' . $(\Gamma^\wedge) \supset (A \vee (C \vee \neg C))$ — HPContPComp -теорема (ИН)
- $k'+1$. $(\Gamma^\wedge) \supset \neg A$ — HPContPComp -теорема (ИН)
- $k'+2$. $(\Gamma^\wedge)$ — посылка
- $k'+3$. $A \vee (C \vee \neg C) - \supset_{\text{И}}: k', k'+2$
- $k'+4$. $\neg A - \supset_{\text{И}}: k'+1, k'+2$
- $k'+5$. A — посылка
- $k'+6$. $A \wedge \neg A - \wedge_{\text{В}}: k'+4, k'+5$
- $k'+7$. $(A \wedge \neg A) \supset (C \vee \neg C)$ — HPContPComp -аксиома
- $k'+8$. $C \vee \neg C - \supset_{\text{И}}: k'+6, k'+7$
- $k'+9$. $A \supset (C \vee \neg C)$ — теорема дедукции: $k'+8$
- $k'+10$. $(C \vee \neg C) \supset (C \vee \neg C)$ — HPContPComp -аксиома
- $k'+11$. $(A \supset (C \vee \neg C)) \supset (((C \vee \neg C) \supset (C \vee \neg C)) \supset ((A \vee (C \vee \neg C) \supset (C \vee \neg C)) \supset (C \vee \neg C)))$ — HPContPComp -аксиома
- $k'+12$. $C \vee \neg C - \supset_{\text{И}}: k'+3, k'+9, k'+10, k'+11$ (3 раза)
- $k'+13$. $(\Gamma^\wedge) \supset (C \vee \neg C)$ — теорема дедукции: $k'+12$

Q.E.D.

Теорема 7 следует из леммы 5 и $\Gamma \vdash_{\text{HPContPComp}} A \Leftrightarrow \vdash_{\text{HPContPComp}} (\Gamma^\wedge) \supset A$. Q.E.D.

Литература

- [1] Avron A. Natural 3-valued logics: characterization and proof theory // Journal of Symbolic Logic. 1991. Vol. 56. №1. P. 276–294.
- [2] Бочаров В.А., Маркин В.И. Введение в логику: учебник. М.: ИД «Форум»: ИНФРА-М, 2008.
- [3] Попов В.М. Секвенциальные формулировки паранепротиворечивых логических систем // Синтаксические и семантические исследования неэкстенциональных логик (под ред. Смирнова В.А.). М.: Наука, 1989. С. 285–289.
- [4] Попов В.М. Между Par и множеством всех формул // Материалы VI Международной конференции «Смирновские чтения» (отв. ред. Маркин В.И.). М.: Современные тетради, 2009. С. 93–95.
- [5] Розоноэр Л.И. О выявлении противоречий в формальных теориях. I // Автоматика и телемеханика, №6. М.: Наука, 1983. С. 113–124.

- [6] *Шангин В.О.* Системы натурального вывода для логик Par , PCont , PComp и PContPComp // Материалы Научной конференции «Логика, методология, науковедение: актуальные проблемы и перспективы». Ростов-на-Дону, 2010.
- [7] *Шангин В.О.* Системы натурального вывода для паранепротиворечивых логик, родственных логике, индуцированной исчислением V1 А. Арруда // Материалы Международной конференции «„Воображаемая логика“ Н.А. Васильева и современные неклассические логики». Казань, 2010. С. 106-108.

Наши авторы

АРХИЕРЕЕВ

Николай Львович

— кандидат философских наук, доцент кафедры информационного права, информатики и математики РПА Минюста РФ.

БАХТИЯРОВ

Камиль Ибрагимович

— доктор философских наук, профессор кафедры высшей математики МГАУ им. В.П. Горячкина.

БИРЮКОВ

Борис Владимирович

— доктор философских наук, профессор, заведующий Межвузовским Центром исследования чтения и информационной культуры (при МГЛУ).

БИРЮКОВА

Любовь Гавриловна

— кандидат философских наук, доцент кафедры высшей математики Российского экономического университета им. Г.В. Плеханова.

ВАСЮКОВ

Владимир Леонидович

— доктор философских наук, заведующий кафедрой истории и философии науки Института философии РАН.

ВЛАДИМИРОВ

Антон Алексеевич

— кандидат физико-математических наук, старший научный сотрудник Вычислительного Центра им. А.А. Дородницына РАН.

ГОРБУНОВ

Игорь Анатольевич

— кандидат физико-математических наук, доцент кафедры алгебры и математической логики Тверского государственного университета.

ГРИГОРЬВ

Олег Михайлович

— кандидат философских наук, ассистент кафедры логики философского факультета МГУ им. М.В. Ломоносова.

ДЕВЯТКИН

Леонид Юрьевич

— кандидат философских наук, научный сотрудник сектора логики Института философии РАН.

ЗАЙЦЕВ

Дмитрий Владимирович

— кандидат философских наук, доцент кафедры логики философского факультета МГУ им. М.В. Ломоносова.

ИЛЬИН

Алексей Алексеевич

— старший преподаватель кафедры логики философского факультета МГУ им. М.В. Ломоносова.

КАРПЕНКО

Александр Степанович

— доктор философских наук, профессор, заведующий сектором логики Института философии РАН.

ЛЕДНИКОВ

Евгений Евгеньевич

— доктор философских наук, профессор кафедры философии Московской академии тонкой химической технологии им. М.В. Ломоносова.

МАРКИН

Владимир Ильич

— доктор философских наук, профессор, заведующий кафедрой логики философского факультета МГУ им. М.В. Ломоносова.

НЕПЕЙВОДА

Николай Николаевич

— доктор физико-математических наук, профессор, заведующий кафедрой теории и методологии информатики Удмуртского государственного университета.

ПОПОВ

Владимир Михайлович

— кандидат философских наук, доцент кафедры логики философского факультета МГУ им. М.В. Ломоносова.

ПРЕЛОВСКИЙ

Николай Николаевич

— аспирант сектора логики Института философии РАН.

ТОМОВА

Наталья Евгеньевна

— кандидат философских наук, научный сотрудник сектора логики Института философии РАН.

ШАЛАК

Владимир Иванович

— доктор философских наук, старший научный сотрудник сектора логики Института философии РАН.

ШАНГИН

Василий Олегович

— кандидат философских наук, ассистент кафедры логики философского факультета МГУ им. М.В. Ломоносова.

К сведению авторов

Ежегодник *Логические исследования* принимает к публикации статьи, содержащие изложение оригинальных результатов из различных областей современной логики, ранее не публиковавшиеся и не представленные к публикации в других изданиях.

Статья должна быть представлена в электронном виде и оформлена в формате $\text{\LaTeX} 2_{\epsilon}$ (по согласованию с редколлегией в MS Word). При подготовке статьи в $\text{\LaTeX} 2_{\epsilon}$ необходимо использовать стиль li.sty. Стилиевой файл li.sty, заглавный файл li.tex, а также пример оформления статьи можно найти по адресу: <http://iph.ras.ru/page48601066.htm>

Объем статьи не должен превышать 30 печатных страниц в указанном формате. Статья обязательно должна содержать аннотацию (не более 100 слов) и ключевые слова (3-5 слов/словосочетаний) на русском и английском языке.

При подготовке электронного варианта статьи особое внимание следует уделить следующим моментам оформления статьи:

- Аннотация, ключевые слова, теоремы, леммы, доказательства, примеры и т.п. должны набираться с использованием соответствующих окружений.
- Иллюстративный материал (рисунки, таблицы, диаграммы) готовится стандартными средствами $\text{\LaTeX}$ 'а. Рисунки могут быть также подготовлены в любом графическом редакторе и представлены в формате eps.
- Примечания, сноски к тексту статьи делаются постранично с использованием сквозной нумерации.

- Для знаков кавычек следует использовать символы << и >>. Для «кавычек „внутри“ кавычек» — символы , , и ‘ ‘.
- Тире ставится следующим образом: «Логика~--- это наука о правильных рассуждениях».
- Цитированная литература помещается в конце статьи общим списком в алфавитном порядке и оформляется как окружение thebibliography. В тексте ссылка на источник из списка литературы оформляется стандартным образом с помощью команды \cite.

В библиографии должны быть указаны: для книг (монография, сборник и т.д.) — фамилия и инициалы автора, название книги, место издания (город), издательство, год издания; для журнальных статей — фамилия и инициалы автора, название статьи, название журнала, год издания, том, номер (выпуск), страницы (первая и последняя).

Со статьей также необходимо выслать

- сведения об авторе/авторах:
 - фамилия, имя, отчество полностью,
 - ученые степени и звания,
 - должность, место работы;
- название статьи и ФИО автора(ов) на английском языке.

**Плата с авторов за публикацию рукописей не
взимается.**

Статьи следует направлять по адресу
LogicalInvestigations@gmail.com

Information for authors

Logical Investigations accepts for submission papers containing original results in all areas of logic. The papers should not have been published or simultaneously submitted to another publication.

Papers should be submitted electronically in the L^AT_EX 2_ε format (special permission of the editorial board is needed for submissions to be made in the MS Word format). While typesetting a paper, the style file li.sty and the master file li.tex should be used; both files, along with a sample paper file, can be accessed at <http://eng.iph.ras.ru/page49940199.htm>

Papers should not exceed 30 pages in the above mentioned format. A paper should have an abstract in English not exceeding 100 words and a list of keywords (3 to 5 words or phrases).

Special attention should be paid to the following aspects of typesetting a paper:

- Abstract, keywords, theorems, lemmas, proofs, etc, should be typeset using respective environments.
- Figures, tables, and diagrams should be typeset using L^AT_EX. For pictures .eps files can also be used.
- Footnotes should appear at the bottom of the page and should be numbered sequentially throughout the paper.
- For quotation marks, symbols ‘ ‘and’ ’ should be used. For nested quotation marks, symbols ‘and’ should be used.
- A hyphen should be typeset as follows: “This theorem~--- unlike the rest in this paper~--- is really important”.

Together with the paper, the following information should be submitted:

- The full names of the authors
- Degrees
- Associated institution

Authors are not charged for the publication.

Submissions should be emailed to the following address:

LogicalInvestigations@gmail.com

Содержание

Н.Л. АРХИЕРЕЕВ	
Семантика допустимых множеств оценок для S5.	
Разрешающая процедура	5
К.И. БАХТИЯРОВ	
Как может рассуждать компьютер в духе булевой	
многозначности	14
Б.В. БИРЮКОВ, Л.Г. БИРЮКОВА	
Александр Иванович Введенский как логик. Часть I	34
В.Л. ВАСЮКОВ	
Паранепротиворечивые категории для	
паранепротиворечивой логики	69
А.А. ВЛАДИМИРОВ	
О понятии конечного множества в конструктивной	
математике	84
И.А. ГОРБУНОВ	
Хорошо определенные логики	95
Л.Ю. ДЕВЯТКИН	
О некоторых функциональных свойствах трехзначных	
матриц для классической логики	109
Д.В. ЗАЙЦЕВ, О.М. ГРИГОРЬЕВ	
Две истины — одна логика	121
А.А. ИЛЬИН	
Традиционная силлогистика с отрицательными	
терминами	140

А.С. КАРПЕНКО	
На пути к протологике	152
Е.Е. ЛЕДНИКОВ	
Знание и мнение: их роль в науке и коммуникации	167
В.И. МАРКИН	
Сингулярные расширения силлогистики Лукасевича	173
Н.Н. НЕПЕЙВОДА	
Конструктивная математика: обзор достижений, недостатков и уроков. Часть I	191
В.М. ПОПОВ	
Секвенциальная аксиоматизация паранормальной логики $P\text{Cont}P\text{Comp}$	240
В.М. ПОПОВ	
Секвенциальная аксиоматизация пропозициональных логик нельсоновского типа	246
Н.Н. ПРЕЛОВСКИЙ	
Об одном некартезианском расширении системы E	251
Н.Е. ТОМОВА	
Естественные p -логики	256
В.И. ШАЛАК	
Два подхода к построению логики	269
В.И. ШАЛАК	
О генетическом методе	281
В.О. ШАНГИН	
Системы натурального вывода для некоторых логик с истинностными провалами и логик с пресыщенными оценками	293
НАШИ АВТОРЫ	309
К СВЕДЕНИЮ АВТОРОВ	311

Table of contents

N.L. ARKHIEREEV	
Semantic of possible sets of truth-values for S5.	
Decision procedure.	5
K.I. BAKHTIYAROV	
How computer may think in terms of boolean	
many-valueness	14
B.V. BIRYUKOV, L.G. BIRYUKOVA	
Alexander Ivanovich Vvedenskiy as logician. Part I	34
V.L. VASYUKOV	
Paraconsistent categories for paraconsistent logic	69
A. A. VLADIMIROV	
On a concept of non-infinite set in constructive	
mathematics	84
I.A. GORBUNOV	
Well-defined logics	95
L.Y. DEVYATKIN	
On some functional properties of three-valued	
logical matrices for classical logic	109
D.V. ZAITSEV, O.M. GRIGORIEV	
Bipartite truth — one logic	121
A.A. ILYIN	
Traditional syllogistic with negative terms	140
A.S. KARPENKO	
Towards protologic	152

E.E. LEDNIKOV	
Knowledge and belief: its role in science and communication	167
V.I. MARKIN	
Singular extensions of Łukasiewicz syllogistic	173
N.N. NEPEIVODA	
Constructive mathematic: review of progress, lacks and lessons. Part I	191
V.M. POPOV	
Sequential axiomatization of paranormal logic PContPComp	240
V.M. POPOV	
Sequential axiomatization of propositional Nelson's type logics	246
N.N. PRELOVSKY	
A non-Cartesian extension of system E	251
N.E. TOMOVA	
Natural p -logics	256
V.I. SHALACK	
Two approaches to the construction of logic	269
V.I. SHALACK	
About genetic method	281
V.O. SHANGIN	
Natural deduction systems of some logics with truth-value gluts and truth-value gaps.....	293
OUR AUTHORS	309
INFORMATION FOR AUTHORS	313

Научное издание

Логические исследования

Вып. 17

*Утверждено к печати
Ученым Советом
Института философии РАН,
Ученым Советом
Философского факультета
МГУ им. М.В. Ломоносова*

Компьютерный набор выполнен
в Институте философии РАН

Компьютерная верстка
Н.Е. Томова

Редактор
Е.А. Жукова

Художник
Н.Н. Попов

Издательство «Центр гуманитарных инициатив»

190031, г. Санкт-Петербург, Столярный переулок, дом 10-12,

e-mail: unikniga@yandex.ru, unibook@mail.ru

Руководитель центра Соснов П.В.

По вопросам реализации книги обращаться: «Университетская книга—СПб»; в Москве — ООО «Университетская книга—СПб» тел.: (495) 915-32-84, e-mail: ukniga-m@libfl.ru; в Санкт-Петербурге — ООО «Университетская книга—СПб» тел.: (812) 640-08-71, e-mail: ukniga1@westcall.net

Розничные издательские продажи: в Санкт-Петербурге — магазин «Книжный окоп» (широкий ассортимент гуманитарной литературы) В.О., Тучков переулок, д. 11, тел. (812) 323-85-84
в Москве — www.notabene.ru (495) 745-15-36

Подписано в печать 10.04.2011

Гарнитура Таймс. Формат 60х90 1/16. Бумага офсетная. Печать офсетная. Усл.печ.л.14. Уч.-изд.л. 13. Тираж 1000 экз. Заказ

Отпечатано в типографии «Галерея печати»

(ООО «Студия») «НП-Принт»

Санкт-Петербург, Измайловский пр., д. 29

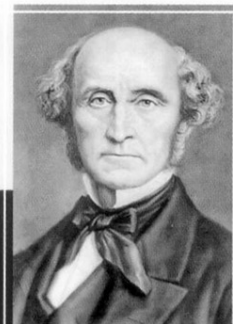
тел.: (812) 324-65-15, mail@npprint.com

Подписной индекс в каталоге «Пресса России» 42046.

2-е полугодие 2011 г.

Дж. Ст. Милль

Выдающийся английский философ,
экономист, социолог, психолог,
общественный деятель,
теоретик либерализма



СИСТЕМА ЛОГИКИ СИЛЛОГИСТИЧЕСКОЙ И ИНДУКТИВНОЙ



**ИЗ НАСЛЕДИЯ МИРОВОЙ
ФИЛОСОФСКОЙ МЫСЛИ**

ЛОГИКА



А. С. Карпенко

РАЗВИТИЕ МНОГОЗНАЧНОЙ ЛОГИКИ

$$\left\{ \bigwedge_{i=1}^n ((-x_1 \& \dots \& -x_{i-1} \& -x_{i+1} \& \dots \& -x_n) \Rightarrow \perp x_i) \right\}$$

$n = 2, 3, 4, 5, \dots$

$$\perp x =_{df} x \vee \neg x$$

