Li

RUSSIAN ACADEMY OF SCIENCES
INSTITUTE OF PHILOSOPHY

M.V. LOMONOSOV
MOSCOW STATE UNIVERSITY
FACULTY OF PHILOSOPHY

LOGICAL INVESTIGATIONS
Volume 18

Centre of Humanitarian Initiatives
Moscow–St. Petersburg
2012

РОССИЙСКАЯ АКАДЕМИЯ НАУК
ИНСТИТУТ ФИЛОСОФИИ
МОСКОВСКИЙ ГОСУДАРСТВЕННЫЙ УНИВЕРСИТЕТ
ИМЕНИ М.В. ЛОМОНОСОВА
ФИЛОСОФСКИЙ ФАКУЛЬТЕТ

ЛОГИЧЕСКИЕ ИССЛЕДОВАНИЯ

Выпуск 18

Центр гуманитарных инициатив
Москва–Санкт-Петербург
2012

УДК 16/164
ББК 87.4
Л69

Логические исследования / Отв. ред. А.С. Карпенко; Ин-т философии РАН; философский ф-т МГУ им. М.В. Ломоносова. М.–СПб.: ЦГИ, 2012.

Вып. 18. — 2012. — 320 с. — ISBN 978-5-98712-073-6 (в пер.)

В данный сборник включены наиболее интересные результаты, полученные в различных областях логики за последнее время. Основное внимание уделено развитию неклассических логик и проблемам истории логики. Большой интерес представляет обзор И. Анеллиса логических работ и идей Чарльза Пирса. Г. Малиновский выявляет новые акценты в дискуссии о природе истинностных значений. Н.Н. Непейвода продолжает исследование уроков и значимости советского математического конструктивизма.

Сборник предназначен для всех интересующихся современной логикой и ее историей.

Подписной индекс в каталоге «Пресса России» 42046.
2-е полугодие 2012 г.

Logical Investigations. — Vol. 18. — M.–S.-Pb.: C.G.I., 2012. — 320 p. — ISBN 978-5-98712-073-6.

The present volume includes the most interesting results recently obtained in a number of researches areas of logic. The majority of publications are devoted to non-classical logics. Of great interest is the overview of the logical works and ideas of Charles Pierce in I. Anellis' paper. G. Malinowski intends to put a new thread into discussion on the nature of logical many-valuedness. N.N. Nepeivoda continues investigation of the lessons of Soviet mathematical constructivism.

The volumes is of interest to all who have interest in modern logic and in history of logic.

ISBN 978-5-98712-073-6

Логика в России и православная церковь[1]

В. А. Бажанов

abstract. Russia's government was suspicious toward philosophy and at the mid of XIX century ousted philosophy from University curriculum. Nevertheless ban of philosophy have no impact on logic which was taught by philosophers as well. Study of logic continued in all Russian Universities though the program was compiled by Moscow Spiritual academy and approved by Holy Synod. We discuss the feature of this program and stress crucial role of Orthodox Church in preserving logical traditions in Russia during XIX — turn of XX centuries.

Keywords: formal (traditional) logic, Orthodox church, logical education

Формальная (традиционная) логика в России во многом развивалась в контексте университетской философии, и хотя судьба университетской философии была непростой, особенно в провинциальных городах, логика страдала от метаморфоз с преподаванием философии в России в меньшей степени именно благодаря тому, что она преподавалась и в Духовных академиях (Казань, Киев, Москва, Петербург), и в Духовных семинариях (Воронеж, Вятка, Коломна, Нижний Новгород, Симбирск, Тверь и т.д.). Более того, достойный статус логики в Духовных учреждениях России и наличие подготовленных преподавателей логики из числа священнослужителей позволил обеспечить непрерывность логического образования в России XIX в. в университетах на «православной» территории, где преподавание философии в 1850 г. было запрещено. Так, Высочайшее повеление Николая I об ограничении преподавания философии в университетах и Ришельевском Лицее накладывало запрет на

[1]Работа поддерживалась грантами РГНФ (№10-03-00540а) и ФЦП Министерства образования и науки РФ «Научные и научно-педагогические кадры инновационной России» на 2009–2013 гг.

преподавание философии, но оно не касалось логики и психологии, которые также преподавались философами и числились философскими дисциплинами. В повелении говорилось: «Государь Император Высочайше повелеть соизволил:

1) С упразднением преподавания философии светскими профессорами в университетах Санкт-Петербурга, Московском, Св. Владимира, Харьковском и Казанском, а также в главном Педагогическом институте и Ришельевском лицее, возложить чтение логики и опытной психологии на профессоров богословия или законоучителей, назначенных к этой должности по сношению Министерства Народного Просвещения с духовным ведомством Православного исповедания.

2) Профессоров богословия и философии из лиц духовного сана в означенных выше университетах и главном педагогическом институте сравнить в окладах жалованья с ординарными профессорами, присовокупив к тому и производство квартирных денег, определенных по этому званию, если они не живут в церковных домах или не имеют казенного помещения. . .

6) Программы преподавания логики и опытной психологии утвердить по соглашению духовного православного ведомства с Министерством Народного Просвещения» [5, с. 1414].

Таким образом, правительство не разделяло мнения П.Я. Чаадаева о том, что русским западный силлогизм чужд. Любопытно, что данное Высочайшее повеление не касалось неправославных конфессиональных образовательных центров в России, например, университета в Дерпте. Священнослужители читали логику и в годы, свободные от гонения на философию, причем в некоторых университетах они являлись фактически постоянными преподавателями логики. Такое положение вещей имело место, например, в Императорском Казанском университете, где в разные периоды логику читали архимандрит Гавриил, священник Грузинской церкви в Казани А.П. Владимирский, профессора Казанской Духовной академии В.А. Снегирев, В.И. Несмелов. Духовные академии постоянно и успешно готовили преподавателей логики. Так, питомцами Киевской Духовной академии являлись такие известные преподаватели логики, как Д.М. Велланский (1774–1847), С.С. Гогоцкий (1813–1889), В.Н. Карпов (1798–1867), О.М. Новицкий (1806–1884), М.М. Троицкий

(1835–1899), П.Ф. Юркевич (1827–1874); Московской Духовной академии архимандрит Гавриил (1795–1868), М.И. Каринский (1840–1917), Н.И. Надеждин (1804–1856); Казанской Духовной академии В.А. Снегирев (1841–1889), Санкт-Петербургской Духовной академии М.И. Владиславлев (1840–1890); Костромской Духовной семинарии А.С. Лубкин (1771–1815), Нижегородской (и несколько курсов Казанской Духовной академии) — Ф.А. Зеленогорский (1839–1909) и др.

Православные журналы («Вера и разум», «Православный собеседник» и т.п.) постоянно и, видимо, весьма охотно публиковали статьи по логической проблематике (подробнее об истории логики в России см.: [4]).

Между Российскими университетами и Духовными академиями существовала тесная связь, которая выражалась не только в том, что священнослужители преподавали логику (и иные философские предметы) в светских университетах России, но и нередко переходили в них на постоянную работу. После Введения нового Устава Российских университетов 1863 г. начался усиленный отток ученых из Духовных академий в университеты. Так, в грамоте Казанского университета, врученной Казанской Духовной академии по случаю ее пятидесятилетия, говорится: «Прилив ученых сил из Казанской Духовной академии в Казанский университет особенно усилился со времени введения университетского Устава 1863 г., открывшего в университетах новые кафедры церковной истории и церковного права и возобновившего кафедру философии. Первые две из них замещались и замещены в настоящее время (1892 г. — *В.Б.*) в нашем университете исключительно питомцами Казанской Духовной академии, а кафедра философии во многом обязана содействию ее ученых сил» [6].

Бывало, что священнослужители выступали оппонентами по логическим диссертациям. Например, по диссертации крупного русского логика Л.В. Рутковского «Основные типы умозаключений», защищенной им в Казанском университете 23 апреля 1889 г., оппонентом являлся Ф.А. Курганов, профессор церковной истории Казанской Духовной академии. Другими оппонентами по защите Рутковского являлись профессора Казанского университета А.И. Смирнов и С.П. Орлов.

После октябрьского переворота, когда стали закрываться Духовные центры образования, российские университеты принимали в число преподавателей своих коллег-священнослужителей. Так, были приняты на работу в университет В.А. Керенский (о В.А. Керенском см.: [1]), М.Н. Ершов, а чуть раньше В.И. Несмелов – профессора Духовной академии. Совет университета постановлял: «а) пригласить в качестве временного преподавателя по кафедре философии профессора В.И. Несмелова, не подвергая его обычной, установленной для соискателя этого звания промоции, ввиду наличности у него солидных научных трудов и числящегося за ним долговременного стажа преподавания в в.у.з.; б) принимая во внимание исключительные заслуги профессора В.И. Несмелова и необеспеченность преподавания философских предметов на факультете, поручить ему, В.И. Несмелову, в 1920-21 учебном году чтение курсов логики 2 часа и истории новой философии 2 часа в неделю» [7].

Вскоре, однако, В.И. Несмелову запретили чтение лекций. Коллеги по кафедре философии после запрета на чтение лекций В.И. Несмелову обосновывали незаменимость и безусловную полезность преподавания В.И. Несмелова. В ход были пущены даже административные «ухищрения». Так, в явочном порядке Ученый совет факультета общественных наук (ФОН) на заседании от 20 июля 1921 г. постановил: «Ввиду того, что профессора бывшего историко-филологического факультета — В.А. Керенский, В.И. Несмелов и К.В. Харлампович не утверждены профессорами ФОН, а между тем имеющиеся в плане преподавания курсы не могут быть обеспечены преподаванием без означенных лиц... — поручить всем троим на правах временных преподавателей ведение... общих курсов... »

В.И. Несмелову поручались курсы логики и истории мировоззрений на правовом факультете [8]. К.И. Сотонин обращается в Совет ФОН со следующей запиской, призывающей решить вопрос о чтении лекций В.И. Несмеловым принципиально: «В.И. Несмелов — один из наиболее оригинальных и выдающихся русских мыслителей и то, что он был профессором в духовной академии, отнюдь не уменьшает его заслуг перед наукой. Все сочинения В.И. Несмелова несут след большого критического ума и совершенно чужды ненаучной догматичности и правоверной безапелляционности... Историческая объективность профессора Несмелова не раз проявлялась в том руководстве, которое он давал своим немалочисленным ученикам... Такому руководителю в области историко-философских наук мог бы позавидовать не один университет; и понятно, что, пройдя школу В.И. Несмелова, его ученики чувствовали затхлость, научную фальшивость академической псевдонауки и стремление перейти в свободную высшую школу... Но с наибольшим блеском талант профессора Несмелова раскрылся в теоретических сочинениях, посвященных преимущественно вопросам теории познания... Главное сочинение «Наука о человеке»... создало В.И. Несмелову всероссийскую известность как вполне самобытному мыслителю. То, что эта книга Несмелова выдерживает два издания, показывает, что мы имеем здесь дело с выдающимся явлением в области философской мысли... Если бы он писал не на русском, а на одном из западно-европейских языков, он имел бы мировое имя.

В.И. Несмелов чужд ортодоксальности религиозного мировоззрения. Он еще не сказал своего последнего слова, и можно было бы надеяться, что получивши, наконец, возможность свободного развития своих воззрений с университетской кафедры, он даст нам ряд новых блестящих трудов, но неожиданное увольнение разрушает эту надежду и лишает В.И. Несмелова возможности выявить свое творчество, принуждая его тратить свои ценные силы на бесплодную канцелярскую работу для добывания средств к существованию» (11 ноября 1921 г.) [9].

Нельзя не заметить в приведенной записке элементы нарождающегося «новояза» — ненаучная догматичность, правоверная безапелляционность и т.д. Их требовали соображения убедительности, призванные воззвать к чувствам и настроениям новых властей, «обласкать» их своей знакомостью и лояльностью, равно как и заверить их в чувствах богоборчества.

В 1921 г. «пайковая комиссия» Казанского университета ходатайствовала о назначении В.И. Несмелову и В.А. Керенскому, лишенным академического пайка, этого пайка «ввиду их незаменимости» [10]. Тем не менее, осенью 1922 г. по решению Народного Комиссариата по просвещению РСФСР В.И. Несмелов был исключен из списка преподавателей создававшегося вместо историко-философского факультета общественных наук. На его руках осталось четверо детей и жена... Становление советской власти ознаменовалось не только гонением на церковь, но и на формальную логику, которая рассматривалась как «метафизическая» по своей сущности науки. Она была исключена из всех учебных программ и не преподавалась вплоть до конца 1940 гг. [3].

Ныне Православная церковь располагает мощным потенциалом воздействия и на общество, и на сферу образования. Однако реформы высшего образования последнего времени ведут к значительным потерям логикой своих позиций в высшей школе. Православная церковь, похоже, утратила те традиции, которые были связаны с поддержкой логики в XIX — начале XX столетий, и (пока?) не проявляет ни малейшей озабоченности складывающимся положением вещей...

* * *

В 1850 г. в Московской Духовной академии составляется программа по логике, которая утверждается Святейшим Синодом и рассылается во все университеты России. Ее содержание, по-видимому, в целом совпадало с содержанием университетских курсов, которые читались до запрета преподавания философии. Однако о содержании последних мы можем косвенно судить лишь по учебникам. На настоящий момент мало известны университетские программы по логике (за исключением программы чтения математической логики, составленной в 1888 г. П.С. Порецким и которая носила неофициальный характер; подробнее см.: [2]). Поэтому анализ программы, составленной в Московской Духовной академии и одобренной особым комитетом при Священном Синоде, представляет значительный интерес как образец программы, основные пункты которой, по-видимому, были общими и для светских, и для религиозных образовательных центров [11]. В данной программе, предназначенной для университетов, надо учитывать религиозное происхождение данного документа.

Эта программа содержит следующие разделы: Введение; О началах мышления; О законах мышления; О формах мышления; Об опытном познании; О познании умозрительном.

Во Введении говорится о предмете логики, определяется точка логического воззрения на мышление, отношение логики к иным наукам, прежде всего к психологии, подчеркивается практическое применение логики к жизни. В примечании к этому разделу приводятся различные деления логики.

В разделе «О началах мышления» подчеркивается отношение логики к природе человеческого духа, который конечен, но имеет начало от существа бесконечного, и роль логики в изменениях человеческого самосознания. Однако это самосознание надо предостеречь от пагубного притязания на совершенную независимость и поставить в прямое подчинение Откровению.

В разделе «О законах мышления» дается представление о законе вообще и его приложении к мыслительной деятельности человека. Здесь обращается внимание на три основных закона мышления — законы тождества, противоположности (исключенного третьего) (обратите внимание: именно так! — *В.Б.*), основания — и их роль в мышлении.

В разделе «О формах мышления» излагаются вопросы, относящиеся к понятиям (и их видам), суждениям (и их видам) и умозаключениям (и их видам). В примечании к разделу рекомендуется рассмотреть вопрос о существовании врожденных понятий.

В разделе «Об опытном познании» говорится об истоках такого познания, его формах (наблюдение, опыт, свидетельство) и предположительном их характере, о вероятностных заключениях (наведение, аналогия, гипотеза). В примечании указывается на необходимость сказать об истинном Откровении Божественном и его важности для восполнения доступных для разума теоретических и практических истин в области естественного Богопознания.

В разделе «О познании умозрительном» указывается на математику и философию, которые в некотором смысле поднимают вопрос о необходимости веры для знания в его начале и о возможности колебания между догматизмом и скептицизмом.

Программа рекомендует и некоторые учебники по логике, причем только немецких авторов (Ф. Бахмана, учебник которого по логике к появлению программы уже имелся в русском переводе, Ф.А. Тренделенбурга, учебник которого был издан на русском только в 1868 г., а также Й. Зайлера). Ни один отечественный учебник, которых к моменту появления программы было в каком-то смысле достаточно, не рекомендовался. По-видимому, составители программы считали их не вполне совершенными. В программе, которая приводится ниже, по возможности сохранены синтаксические особенности оригинала.

Литература

[1] *Бажанов В.А.* Владимир Керенский: жизненный путь и академическая карьера // Вече, 2003. Вып. 14. С. 88–99.

[2] *Бажанов В.А.* П.С. Порецкий. Жизнь и научная деятельность пионера исследований в области математической логики в России // Логические исследования. Вып. 11. М.: Наука, 2004. С. 23–33.

[3] *Бажанов В.А.* Партия и логика. К истории одного судьбоносного постановления ЦК ВКП(б) 1946 года // Логические исследования. Вып. 12. М.: Наука, 2005. С. 32–48.

[4] *Бажанов В.А.* История логики в России и СССР. Концептуальный контекст университетской философии. М.: Канон+, 2007.

[5] Сборник постановлений Министерства Народного Просвещения. Т.III. СПб., 1855.

[6] Национальный архив Республики Татарстан (НА РТ). Фонд 977. Оп. Совет. Д. 8724. С. 36.

[7] НА РТ. Фонд 1337. Оп. 1. С. 103.

[8] НА РТ. Фонд 1339. Оп. 27. Д. 11. С. 44.

[9] НА РТ. Фонд 1337. Оп. 27. Д. 13. С. 82–84.

[10] НА РТ. Фонд 1337. Оп. 27. Д. 11. С. 58.

[11] НА РТ. Фонд 977. Оп. Совет ист.-фак. Д. 614.

Программа логики

Введение

Предмет логики есть мышление. Мышление есть деятельность ограниченного человеческого духа, стремящегося обнять в единстве сознания разнообразные предметы мира видимого, собственную природу и отношения их к Верховному началу всего.

Точка логического воззрения на мышление. Мышление должно быть преимущественно или предметом опыта, — рассматриваемое в своих действительных обнаружениях, или предметом умозрения, — рассматриваемое в своей сущности, в том, что есть и должно быть в нем всеобщего и необходимого, по требованию его начала и цели: первое исполняет Опытная Психология, последнее логика.

Отсюда определяется отношение логики к наукам вообще и к Психологии в особенности. Прочие науки суть плоды мышления, обращенного на те или другие предметы действительности; в логике же предметом мышления становится самомышление. Это обращение мышления на само себя возможно для него не иначе как посредством отвлечения от предметов сторонних к наблюдению собственных произведений и действий, таким образом в порядке происхождения логике предшествуют другие науки, и ближайшим образом — психология, в которой подвергается наблюдению естественный ход мышления в человеке. От сего наблюдения и при помощи его логика переходит уже к законам и формам, необходимым в мышлении по самой природе мыслящего духа, и начертывает правила, составляющие условия истинности человеческого мышления. В последнем отношении логика в свою очередь имеет обратное действие на все отрасли знания, как методологическое руководство.

Практическое применение ее к жизни. Так как логика рассматривает мышление в отношении а) к его началу, б) к общей цели, то она естественно делится на две части: теоретическую и практическую. В первой части раскрываются общие законы и формы мышления, из самой природы мыслящего духа происходящие, во всех людях необходимо имеющие свое действие и никакими условиями внешними со стороны предметов мышления не стесняемые. Во второй рассматривается мышление как свободная деятельность человека, долженствующая по возможности достигать своей цели, т.е. согласия с действительным бытием познаваемых предметов, или истины: здесь представляются внешнею, с одной стороны, границы, в которых является сия деятельность, вследствие зависимости от произвола человека и от условий бытия, как его собственного, так и самих предметов познания; с другой — средства, при которых мышление может быть согласно со своим предметом и достигать возможного совершенства.

Примечание. Другие деления логики, — на антропологическую и философскую, предлежательную и подлежательную, учение элементарное и систематику и т.п., или имеют в основании своем неправильный взгляд на мышление, как предмет логики (таковы первое и особенно второе), или не довольно точные (таково третье). Разделение логики на чистую и прикладную близко к представленному нами; только названия частей неудачны.

Что же касается пособий при изложении логики, то по неудовлетворительности и большею частью ложному направлению известных иностранных (собственно Германских) сочинений по сему предмету, можно пользоваться весьма немногими из них и то по частям, в чем какое оказывается более основательным. Теоретическую часть логики должны представить естественные законы и формы мышления в отношении к их коронному началу. Отсюда три главные отделения сей части:

1. о началах мышления
2. о законах и
3. о формах мышления.

О началах мышления

Понятие о начале вообще; различие между началом и первоначальным обнаружением, или исходной точкой. Мышление, как деятельность духовная, должно иметь начало внутреннее — в самой природе человеческого духа, оно есть видоизменение его самосознания; посему за коренное начало его должно быть признано то, что есть в самосознающем духе человеческом глубочайшего, деятельнейшего, всеобщего и несомненно истинного. Глубже всего человеческий дух сознает, что он небезначален, но имеет начало от Существа Бесконечного (действительное бытие идей и Бог в человеческом духе). Идея о Боге и есть именно: а) нечто высшее в нашем духе, — не собственно силою его мышления она производится, но врожденна ему свыше, и по необъятности своего содержания безмерно превосходит все другие представления и мысли наши; б) нечто деятельнейшее в духе, чему единственно обязаны мы непреодолимым стремлением к знанию или истине, которое удовлетворяется только в познании последней, Бесконечной причины всего; в) нечто общее всем людям, хотя различно ими понимаемые; наконец е) есть нечто такое, что не только истинно само в себе, но и составляет единственное условие, по которому возможно для человека истинное познание предметов, единственное ручательство в согласии законов и форм человеческого мышления с действительным бытием вещей — что могло бы уверить нас в сем согласии, если бы не нашли опоры в Единого истинного Виновника и бытия и мышления?

Таким образом, как удовлетворяющая всем показанным условиям врожденная идея о Боге должна быть признана коренным началом мышления.

Примечание. Можно ли признать таким началом самое сознание? Скудность содержания в чистом самосознании, мышлении есть действующее самосознание, следовательно, если началом мышления признают самосознание, то это значило бы вовсе остановить его без начала. Между тем признание указанного нами начала ограждает знание человеческое от ложного и пагубного притязания на совершенную независимость, и поставляет в прямое подчинение Откровению, как единственно верному источнику, из которого могут быть объяснены и восполнены не довольно внятные внушения врожденной идеи о Боге в падшем человеке. Сохранение разумности в науке при такой зависимости.

I
О законах мышления

Понятие о законе вообще и в приложении к мыслительной деятельности человека. Различие между законами, самим человеком составляемым для мышления, и законами естественными по самой природе мыслящего духа, необходимо определяющими каждое действие мышления. Понятие о сих последних.

Три основные законы мышления. В каждом действии мышления, поскольку оно есть раскрытие самосознания, необходимо предполагаемое а) мыслящий субъект — нечто такое, что во всех своих действиях сознает себя одним и тем же; это существенное тождество субъекта переходить и на его отдельные представления; каждое из них может быть сознаваемо не иначе, как равным самому себе, ничего, заключающего в себе противоречие, нельзя представить; закон тождества (закон противоречия) отличаемый некоторыми от сего закона, очевидно есть не более как его отрицательная сторона. б) предполагается нечто, от чего отличает себя субъект, — разнообразные предметы мышления: из сей противоположности субъекта представляемым предметам и самым представлением своим выходит новый закон для сих последних, по которому каждые из них есть для сознания уже не то, что все другие, — закон противоположности (исключенного третьего). в) предполагаемое мысленное соединение субъекта с предметом в сознании (преставление), что невозможно без основания, почему из множества возможных представлений предмета составляется именно то, а не другое, закон основания. Зависимость сих законов от идеи о Бесконечном существе, которое всегда и во всем одинаково с собою, и есть безусловное начало бытия вещей и мышления человеческого.

Раскрытие закона тождества: формула его положительная и отрицательная. Значения его в мышлении, как первого условия мышления; дальнейшее приложение к знанию — твердость познаний. Закон постоянства в бытии, соответствующий закону тождества в мышлении.

Раскрытие закона противоположности; противоположность действительная (предметная) и логическая (отвлеченная): формулы закона: значение его в мышлении, преимущественно как двигателя при переходе от одной мысли к другой; дальнейшее приложение к знанию, — разнообразие и определенность познаний; что соответствует сему закону в бытии (Principum indiscernibilium).

Раскрытие закона основания, что называется собственно логическим основанием, различие его от других оснований, наприм. психологического. Формулы сего закона. Значение его в мышлении, — завершение мыслительной деятельности под влиянием сего закона; дальнейшее приложение к знанию — связность и основательность познаний. Предметное значение сего закона — закон причинности в бытии; различие между основанием и причиной.

О формах мышления

Что такое форма деятельности вообще и мышления в частности? Общая естественная форма мышления — представление. Соответственно трем основным законам мышления, мы имеем и три главные формы представления. По силе внутреннего тождества с собою, мыслящий субъект стремится приводить к единству сознания разные образы предметов, и открывая в них сходные признаки, составляет понятие. Но разности представляемых предметов в понятии не исчезают, только закрываются для сознания; и выступая снова при встрече с другими представлениями, становятся в известное отношение (логическое) к ним: представление сего отношения есть суждение. Поелику же установляя определенное отношение между мыслимыми предметами, сознание наше требует основания для сего: то представление сего основания составляет третью и последнюю форму мышления, умозаключение. Взаимная зависимость всех трех форм.

Понятие как форма мышления, по которой многие предметы сходные между собой в известных признаках (качествах или действиях) соединяются в одно представление. Две стихии, составляющие понятие: объем, т.е., предмет заключающийся в понятии, и содержание, т.е. совокупность их сходных признаков. Значение понятия в мышлении, как первой формы, в которой единство сознания возвышается над разнообразием действительного бытия и чувственных воззрений. Касательно же предметного значения наших понятий должно заметить, что — как представление, составляемое чрез отвлечение от действительных предметов, понятие может и должно соответствовать их сущности, но это соответствие отнюдь не простирается до тождества или даже равенства с ними: в ограниченном человеческом духе понятие никогда не может вступить на степень такого созерцания, которое бы зараз обнимало до последней подробности и все предметы, и их признаки; разнообразие предметов необходимо устраняется из внимания; по мере их обобщения. Отсюда обратное отношение, всегда имеющие место между объемом и содержанием понятия.

Разности понятий по объему и содержанию. По объему понятия могут быть единичные, частные и общие; сравниваемых же между собою по объему, могут быть или подчиненные (понятия рода и вида), или соподчинения. В отношении к содержанию различаются понятия по степени ясности, с какою предносятся сознанию признаки предметов, или ими обнимаемых, — понятия, — темные, ясные, подробные и точные; сравниваемые между собою по содержанию понятия могут быть или сходные, или несходные, и последнем случае или согласимые, или противоположные. Бесплодность и неосновательность дальнейшего дробления понятий.

Примечание. Есть ли понятия врожденные? Значение и образование категорий, как высших отвлеченных понятий. Исчисление их: 1) понятия бытия — действительного, возможного и необходимого; 2) понятия оснований бытия — субстанций и принадлежности, причины действия, самодеятельности и приемлемости; 3) понятия качеств бытия, существенных и случайных, совершенства и недостатка, тождества, сходства и различия; 4) понятия количества — единства, множества и всеобщности, целого и частей, простого и сложного. Недостаток систематического выведения и точного распределения категорий. Как на дельное историческое исследование категорий можно указать на Geschichte der Kategorienlehre v. Ad. Trendelenburg. Berlin. 1846[2]. Вообще о понятиях более удовлетворительное исследование находим в Логике Бахмана[3] Ч.1 отд. IV.

Суждение, как форма мышления, в которой определяется отношение одного понятия к другому. Подлежащее и сказуемое суждение, логическая связь между ними. Отношение суждения к понятию: понятие — единство, суждение — разрешение сего единства. Значение суждения в мышлении, как необходимого перехода от одного понятия к другому; связность и определенность мышления, достигаемая посредством суждений. Поелику в суждении определяется или содержание понятия, или объем его, то суждения бывают двух родов.

В суждениях первого рода признаки предмета могут быть мыслимы или положительно, как данные в предмете, вне всякой зависимости от других предметов или от других признаков сего же предмета, — суждения категорические (субстанция и принадлежность); или предположительно, — как еще только возможные в данном предмете, в зависимости от известных предметов или от известных состояний сего же предмета, — суждения условные (основание и следствие). Совершеннейшая форма суждений сего рода есть определение.

[2]Тренделенбург Ф.А. (1802–1872) — немецкий логик и философ. На русском языке были изданы его «Логические исследования», ч. 1-2. М., 1868.

[3]Бахман Ф. (1785–1855) — немецкий логик. Его «Система логики» была переведена на русский язык преподавателем Санкт-Петербургской Духовной академии Вершинским и издана в Петербурге в 1831 г.

Понятие об определении. Предмет определения — понятие ограниченное по объему и содержанию; определяющее — родовой признак и видовое отличие. Два вида определений: определение вещи по ее сущности и по происхождению (генетические). Важность определения, как средоточия познаний о предмете. Достоинства определения: а) ясность, — неясные определения отрицательные, кругообразные, выспренные; б) острое соответствие предмету — определение теснейшее и обширнейшее.

В суждениях второго рода определяется объем подлежащего или в отношении к другим соподчиненным понятиям, в совокупности с которыми оно составляет область понятия высшего — суждения разделительные (взаимная противоположность членов разделительного суждения); или в отношении к низшим понятиям, его составляющим, — суждения раздробительные. Точная форма последних есть разделение. Понятие о разделении. Предмет, член и основание деления. Важность разделений для полноты и подробности знания. Достоинства разделения в выборе основания: а) единство, деления запутанные, б) твердость; в) целесообразность; касательно членов: а) взаимное различие их (смешение разделения с подразделением) и б) равенство суммы их делимому понятию, — разделение теснейшее и обширнейшее.

Кроме сих частных видов суждения известны еще общие видоизменения, которым подвергается в нем мышление, как деятельность ограниченная и по внутренней силе и со стороны и самих предметов.

Так, вследствие ограниченности каждого понятия в суждении о нем показывается или то, что принадлежит понятию, или то, что не принадлежит ему, — суждения утвердительные и отрицательные. Другое следствие ограниченности мышления есть постепенный переход от низшей степени суждения к высшей: так переходит наше мышление от суждений единичных и положительных (indicia assertoria) к частным и предположительным (indicia problemmatica) и достигает наконец суждений общих и решительных (indicia apodictica). Приложение сих видоизменений к исчисленным видам суждений.

Умозаключение (доказательство), как форма мышления, в которой одно суждение выводится из другого, как следствие из основания. Отношение умозаключения к суждению и понятию:

восстановления единства понятий, разрешенного в суждении. Значение его в мышлении как завершительного действия; глубина и основательность мышления. Умозаключение, как средство к познанию и выражению законов действительного бытия. Два рода умозаключений: умозаключения непосредственные и посредственные.

Во-первых, одно суждение составляется из другого чрез повторение и изменение понятий, в нем заключающихся, без посредства нового понятия или суждения. В этом случае или подлежащие данного суждения изменяется в объеме, — умозаключение подчинения; или делается перестановка подлежащего на место сказуемого и наоборот (причем также необходимо обращать внимание на объем каждого из них) — умозаключение превращения (syllogismus conversionis); или сказуемое изменяется из утвердительного в отрицательное и наоборот, — умозаключение противоположения (sillogismus oppositionis), сложная форма его — дилемма: строение ее, сила доказательная и условия правильности; или наконец такое изменение соединяется с перестановкой подлежащего и сказуемого, — умозаключение противопоставления (sillogismus contrapositionis).

В умозаключениях второго рода, между подлежащим и сказуемым данного суждения, посредствует новое понятие, третье, служащее опорой их соединения (две посылки и заключение). В этом случае или содержание среднего понятия (сказуемое большей посылки) наводится на предметы, составляющие объем его (подлежащее заключение), или наоборот, от частных предметов, составляющих объем сего понятия, делается заключение к содержанию целого понятия. Первое умозаключение прямое, — второе обратное. Строение того и другого, доказательная сила и условия правильности. Строение непрерывного ряда заключений (сорит). Паралогизм и софизм; происхождение софизмов и способ их разрешения; известнейшие софизмы в древности; софизмы в практической жизни.

Примечание. О пустых тонкостях в силлогистических фигурах. По простоте и отчетливости изложения заслуживает внимания трактат о суждении и умозаключении…

Практическая часть и логика должны рассмотреть мышление человеческое как деятельность, долженствующую достигать своей цели. Цель эта заключается в возможно точном соответствии мышления своему предмету по объему и содержанию, или в познании истины. По необъятности предмета и по ограниченности мыслящего субъекта, такое соответствие очевидно может быть достигаемо не иначе, как постепенно. Первоначально мышление состоит преимущественно под влиянием чувства внешнего и внутреннего, извещающего нас о явлениях природы и духа человеческого; отсюда уже возвышается к идеям ум, открывающим последнюю причину и конечную цель всего сущего: таким образом различаются две главные степени, или два рода познания; — познание опытное и умозрительное. Отсюда два отделения в практической части логики.

Об опытном познании

Мышление в пределах опыта также имеет различные степени; по самому предмету и внутренней силе. Ближайшим предметом его служат отдельные явления природы и жизни человеческой, в отношении к которым она обнаруживается наблюдением, — наглядное познание. Так как познание, ограничивающееся наблюдениями одного лица, составляет самую незначительную величину в сравнении с неисчерпаемым разнообразием предметов, то настоит нужда в обмене познаний между людьми, в котором бы эта скудость личной опытности по возможности восполняет общею опытностью человечества, познание историческое. То и другое познание различаются только размерами и способом преображения; предмет же их един — явления природы и человеческого духа. Когда же по вере в разумный порядок сущего и по самым указаниям опыта разум наш старается открыть в сих явлениях общие силы и законы: то в этом случае его деятельность обнаруживается рядом предположительных заключений, завершающих опытное познание.

Наглядное познание. Источник его: воззрения чувства внешнего и внутреннего. Характер его: очевидность, уверенность в истинность чувственного воззрения, нераздельная с самосознанием и несомненная при мысли о Едином истинном Виновнике природы и духа человеческого. Действительное бытие внешнего мира. Идеализм: логическая несообразность идеализма; вред-ные следствия его для науки; вред и странность идеализма в практической жизни.

Общая форма наглядности познания — наблюдение. Различие наблюдения от воззрения – участие свободы в наблюдении; целесообразность его. Возможность неправильных наблюдений. Условия их правильности: а) со стороны самого предмета наблюдение предмета — в его особенности и в связи с другими; б) со стороны лица наблюдающего — устранение случайных и постоянных недостатков в чувственных органах, чистота посредства между предметом и органом, соразмерная степень силы и продолжительности впечатления, поверка одного органа другим, сосредоточение внимания на предмете, ясность духа и свобода от предзанятых мнений, повторение наблюдения и т.п. Опыты (experimenta) как пособия наблюдений. Понятия об опытах, значение их — в упрощении, уяснении и расширении наблюдаемых действий природы. Условия успешности опытов: предварительные сведения, точнее определение задачи, снаряд и умение им пользоваться; повторение опытов и переход от одного к другому. Приложение сих правил к наблюдению внутренней жизни человека, трудность самонаблюдения и его особенности.

Историческое познание. Понятие о свидетельстве и вере исторической. Основание Исторической веры в природе человека, и ее различие от веры религиозной. Характер исторического познания – достоверность. Условия достоверности свидетельства: а) со стороны предмета — возможность его логическая и физическая (замеч. о чудесах); б) со стороны лица, свидетельствующего, — хорошо ли известно ему сообщаемое дело им, и точно ли он передает его? Внутренние и внешние средства к открытию того и другого. Усвоение свидетельства; подлинность свидетельства (задача и главные приемы герменевтики). Свидетельства непосредственные и посредственные; значение последних; ряд свидетельств, сличение свидетельств. Трудность пособия исторической критики; крайность ее.

Примечание. Нужные подробности касательно исторического и наглядного познания можно найти в Логике Бахмана Ч.Г. от. II и особенно в Vernunftlehre v. Sailer I. B. I. Th. I. Absehn[4].

О высочайшем свидетельстве истины в Божественном откро-

[4]Зайлер Й. М. (1751–1832) — немецкий теолог и философ.

вении. Понятие об истинном откровении Божественном. Необходимость Божественного откровения, как для поверки и восполнения, доступных для разума, теоретических и практических истин в области естественного Богопознания, так и для возведения ума к непостижимым тайнам Божественным, без принятия которых полное удовлетворение существенным потребностям духа человеческого невозможно. Признаки истинного откровения — а) в истине и возвышенности истин, в нем содержащихся, б) в достоинстве лиц, служивших органами чувств при его сообщении и в) в чудесных событиях, коими ознаменовано его возвещение и распространение. Нужное предостережение для разума: не сделать заключение от непостижимости к невозможности, и признавать необходимою при суждении о вещах Божественных внутреннюю жизнь в общении с духом Божьим (кор. 2, 10, 16).

Примечание. Хорошие о сем предмете замечания можно найти у Зайлера в I т. его Vernunftlehre ст. 2. о способности веры.

Вероятные заключения — от явлений к сущности. Нужда их по ограниченности человеческого опыта; основание — вера в единство законов бытия, как необходимое условие мышления (нелепость того предположения: будто законы и порядок, открывается в природе, суть дело только нашего мышления, а не существуют на самом деле). Явление относится по сущности двояко: как частное к общему и как действие к причине: отсюда два вида вероятных заключений а) наведение и аналогия, б) гипотеза.

Понятие о наведении и аналогии. Различие между ними по предмету (количество и качество); в порядке образования наведение предшествует аналогии; результат наведения — расширение познаний, результат аналогии — подробность их. Общий характер заключений чрез наведение и аналогию — вероятность: причина, законность и пределы сомнения при сих заключениях. Понятие о вероятности и ее степени: утвердительная и отрицательная сторона вероятного; исключения или инстанции. Различные виды вероятности: вероятность математическая — число сходных случаев, и динамическая — различный вес отдельных случаев. Правило касательно наведения и аналогии: точное исследование данных, определение отрицательных случаев, постепенность восхождения от низших заключений к высшим. Гипотеза, как заключение от данного явления к причине его еще неизвестной. Характер гипотетического заключения — вероятность, отгадывание действительной причины между многими возможными. Отношение гипотезы к наведению и аналогии; сходство и различие; влияние гипотезы на сии заключения, как мотива и дополнения их. Значение гипотезы в знании человеческом, и преимущественно в области естествознания. Вред от приступления к гипотезам; небрежность в наблюдениях, упорство против вразумлений опыта, шаткость знания; вред в практическом отношении и т.п. и правила для составления гипотез: гипотеза неуместна при возможности объяснения точного и при значительной невозможности объяснения (действия сверхъестественные); гипотеза должна быть согласна сама с собою и ее другими дознанными истинами; должна просто и непринужденно объяснять дело, — вспомогательные гипотезы; не должна принимать решительного тона.

Примечание. Всеми правилами касательно наведения и аналогии логика обязана Бэкону; в его Novum Organon можно найти самое точное, полное и богатое применениями изложение индуктивной методы.

Методы опытного познания вообще: поступательный (аналитический) ход мышления в опыте — от частного и случайного к общему и необходимому; зависимость его от опыта; необходимость в науке и богатые результаты. Отличительные черты опытного познания: ясность предмета и твердость суждения, основывающегося на самой действительности. Пределы опытного познания: неполнота сведений всегда ощутительная, несмотря на многочисленные открытия, и недостаток несомненности в выводах. Крайность чисто эмпирического направления.

За открытием общих сил и законов бытия опытными науками остается еще одно важнейшее дело — открыть разумные основания, на которых утверждаются сии силы и законы. Решение сей задачи выступает из пределов опыта, и составляет предмет умозрения.

II
О познании умозрительном

Источник умозрительного познания — идеи ума. Понятие об идее; различие идей от понятий по необъятности содержания,... и деятельной силе. Происхождение идей из одной существенной идеи о Бесконечном существе. Отношение идей к бытию вещей и субъекту мыслящему. Раскрытие идей в сознании при пособии опыта. Самодеятельность мышления под влиянием идей, обнаруживающихся идеальным построением (понятие об идеале; отношение идеала к действительности; идеалы предметов физических и духовных), идеальные построения может производить мышление: или в области феноменального бытия (в пространстве и времени), определяя его общие и необходимые формы, — математика; или же возвышаясь над сею областью и возводя все сущее к Верховному началу и последней цели бытия, — философия.

Математика имеет своим предметом вообще величину, определение и уверенность в возможности истинного знания невозможны без положительного откровения истины. Необходимость Веры для знания в начале, продолжении и конце его; истинное отношение знания к Вере. Вне сего отношения неизбежны две крайности в стремлении знания к его идеалу: слепое доверие к собственной теории — догматизм и отрицание возможности истинного знания — скептицизм.

Примечание. Подробное и полезное исследование о заблуждениях и предрассудках представляет Зайлер в "Vernunftlehre" II B. Von den Hindernissen im Erkennen der Wahrheit überhaupt.

На списке написано: Верно: Исправляющий должность начальника отделения Павлиновский; читал начальник первого отдела второго отделения Департамента Министерства Народного Просвещения Титулярный Советник Валериан Толвинский.

Логическая позиционность

К. И. Бахтияров

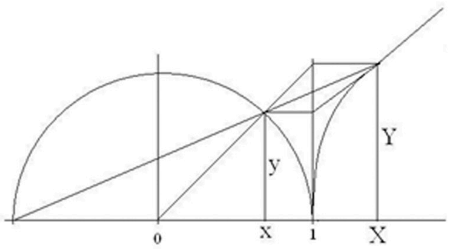
abstract. There are shown logic and geometrical sense of infinitely large and infinitesimal values. For the sample letters of a genetic code are taken. Symbols of universal language are entered as signs on a maximum and a minimum of hereditary variability. In the Matrix of Complementary based on non-Kronecker (left) tensor square we have blocks by the second letters. The matrix consists of 4 colours of psychotypes, each of which is in a miniature, operating as the fractal multiplier. Universal symbols show isomorphism of genetic code tables and Jung's mental types. The non-numeric positional principle in humanitarian area offers not smaller advantages, than positional numerical arithmetics. In universal language the functional words are made of one-letter operators to realize the macrolevel of a genetic code and emphasizes the necessity to turn from the molecular level to the anthropomorphic level — from molecules to characters.

Keywords: infinitely large and infinitesimal Complementary genetic code, positional principle

Nous sommes quelque
chose et ne sommes pas tout
B. Pascal
(Мы нечто, но не всё.
Б. Паскаль)

1 Логические бесконечно большие и бесконечно малые

«Паскаль прочувствовал обе бесконечности — бесконечно большого и бесконечно малого — и познал человеческую ограниченность, недостаточность и обусловленность», — писал М. Бубер в книге «Проблема человека» [1]. «В явлении “Ты” осуществляется подлинно актуализированная сущность откровения,.. заполняющего меня бесконечного по величине» [2, с. 469, 496]. Однако С.Л. Франк, так тонко проанализировавший сущность пары «я — Ты», считал: «Математически — и, тем самым, логически — отношение это выразить невозможно» [2, с. 495]. Связь между ними — это не отрицание, а ***гипербола***. Именно любовь всё гиперболизирует. Любить означает возвеличивать предмет своей любви, принижая себя. Любимая на картинах М. Шагала парит в небе, вызывая высокие чувства. Эта метафора выражает «***ее небесные черты***».



Переход от нижнего регистра к верхнему на компьютере осуществляется клавишей *Shift*. Обращение в верхний регистр с помощью гиперболы наглядно демонстрирует формула линзы, которая сводится к закону обратной пропорциональности: $\mathbf{X} = \frac{\mathbf{1}}{\mathbf{x}}$, где $\mathbf{x}$ и $\mathbf{X}$ — расстояния от фокуса до объекта и до изображения. Равномерным шагам Алисы от линзы (в точке 1) к бесконечности в изображении соответствуют сокращающиеся шаги зазеркальной Алисии к фокусу (в точке 0) [3].

П.А. Флоренский различал универсальную, божественную Истину (с Большой буквы) и человеческую истину (с маленькой буквы). «Бог — бесконечное бытие — снимает все противоречия конечных величин» [4, с. 135]. Однако, подчеркивая это, И.А. Герасимова утверждает, что «не стоит вкладывать в эти понятия количественный смысл» [4, с.136].

Обогащение математического аппарата всегда проводилось за счет обратных арифметических операций. Образно говоря: «кто был ничем, тот станет всем!». Для обозначения обратных величин введем апостроф: $x' = x^{-1} = \frac{1}{x}$. В предложенной логической системе неопределенности $\mathbf{N} = \mathsf{None}$ (ни истинно, ни ложно) соответствует значение $0 = \frac{0}{1}$, а нонсенсу $\mathbf{B} = \mathsf{Both}$ (и истинно, и ложно) — значение $0' = 0^{-1} = \frac{1}{0}$. Принятие неопределенности по умолчанию лучше презумпции лжи. Надо различать ложь-нонсенс $\mathbf{F}' = -1' = 1/-1$ и ложь-ошибку $\mathsf{F} = -1 = \frac{-1}{1}$, ибо это разные упорядоченные пары. Они находятся в разных окрестностях, являясь аналогами ***бесконечно больших*** и ***бесконечно малых***. Самодуальность инверсии: $(a \vee b)' = a' \vee b'$ упрощает выполнение операций. Например, $-1' \vee 0' = 0'$, но $-1 \vee 0' = 1$, так как $\frac{-1}{1} \vee \frac{1}{0} = \frac{1}{1}$ [5].

Имеем две пары противоположностей: ***по знаку*** $+1$ и -1, а ***по величине*** имеем актуально бесконечно малое — 0 и актуально бесконечно большое $\frac{1}{0}$. Геометрической моделью может служить ситуация *деления отрезка* [0; 1] *в данном отношении.* Для отрезка [A, B] отношение $\lambda = \frac{AM}{MB}$ удобнее задавать не одним числом, а парой чисел $\lambda = \frac{p}{q}$. При $p \to +\infty$ имеем $\frac{p}{q} = \frac{+1}{-1}$, а при $p \to -\infty$ получаем $\frac{p}{q} = \frac{-1}{+1}$. Склеивание двух различных отношений $\frac{-1}{1}$ и $\frac{1}{-1}$ при замене их одним числом -1 порождает парадокс А. Арно.

Проективная теоретическая система является универсальной для классических и неклассических теорий, ибо не зависит от метрики. Дело в том, что отношение не зависит от масштабов числителя и знаменателя. Однородные координаты позволяют сформулировать основания ***проективной логики*** [5].

2 Символы универсального языка

При создании универсального языка существенную помощь может оказать рассмотрение параллелизма между триплетами генетического кода и триграммами из древнекитайской «Книги перемен», на который возлагал такие большие надежды нобелевский лауреат по генетике Ф. Жакоб. В качестве символов-доминант универсального языка предлагаются знаки максимума **A** (=A, аденин) и минимума **V** (=C, цитозин), а в качестве символов-недоминант знаки слабого максимума **n** (=g, гуанин) и слабого минимума **u** (=u, урацил). «Донышкам» — триграммам с двумя и одной сплошными нижними чертами — соответствуют минимумы: ☱ $= \cup$ и ☳ $= \vee$. Обозначим их буквами **u** и **V** соответственно. Аналогично, «крышкам» соответствуют максимумы: ☴ $= \cap$ и ☶ $= \wedge$, которые удобно обозначать буквами **n** и **A** соответственно. Комплементарные пары образуют двойную спираль.

Тензорный квадрат ***матрицы кодов*** порождает ***матрицу аминокислот***

nn	**An**	**nA**	**AA**
Vn	**un**	**VA**	**uA**
nV	AV	nu	**Au**
VV	uV	Vu	**uu**

gly	**STOP**, **arg**/**ser**	**glu**/**asp**	**lys**/**asn**
arg	**STOP**, **trp**/**cys**	**gln**/**his**	**STOP**/**tyr**
ala	thr	val	**ile**, **met**/**ile**
pro	ser	leu	**leu**/**phe**

Стабильность имеет место, когда третий лишний в триплете; а мутабельность, когда есть альтернатива. Итак, 8 стабильных, безальтернативных и 8 мутабельных, имеющих по 2 альтернативы (для n, A / V, u), триплетов. Прикидка 8 + 2 x 8 = 24 за минусом 3 повторов дает 20 аминокислот плюс СТОП-сигнал.

Буквы генетического кода бывают большие (**A**, **V**) и малые (**n**, **u**), гласные (**A**, **u**) и согласные (**V**, **n**), выпуклые (**n**, **A**) и вогнутые (**u**, **V**). **Жирными** буквами выделены диграммы, порождающие ***более одной аминокислоты***, а тонкими буквами — коды, порождающие *единственую аминокислоту* в ячейке. Имеем две доминантные фамилии: гласная ***A** и согласная *V. Рассматривая комплементарные пары вида $(x_1, x_2) =$ (*First Name, Second Name*), исходим из приоритета фамилии. Для фамилий с большой буквы все определяет второй аспект, а для фамилий с малой буквы — первый аспект. Согласные обеспечивают безальтернативность, а гласные — альтернативность. Матрица состоит из 4-х блоков — мастей психотипов. Каждый блок является матрицей в миниатюре, действуя как фрактальный умножитель.

3 Масти психотипов К. Юнга

Д. Хофштадтером убедительно показана необходимость осмысления макроуровня генетического кода и подчеркивается необходимость перехода от молекулярного уровня к антропоморфному — от молекул к характерам. Центральные строительные блоки личности — характер и темперамент — имеют решающее значение во взаимопонимании [6].

Карточные фигуры и масти наглядно представляют физические (ФИ) и психические (ПСИ) аспекты реальности [7, 8]:

	Стат,	***Дин***
ира	▲ *в* *Валет*	♟**Д** **Дама**
ра	⍒ **Т** **Туз**	▼ *к* *Король*

$\otimes$

	Сенс,	***Интуит***
эмо	♢	♡
лого	♠	♣

=

	Стат / *Дин*		Стат / *Дин*	
ира	в ♢	**Д** ♢	в ♡	**Д** ♡
ра	**Т** ♢	к ♢	**Т** ♡	к ♡
ира	в ♠	**Д** ♠	в ♠	**Д** ♣
ра	**Т** ♠	к ♠	**Т** ♣	к ♣

=

п ***Медиа***	**А** **АРТИСТЫ**
V **ВЛАСТЬ**	***и*** ***Ученые***

Матрица Комплементарности, представляющая 16 психологических типов К.Юнга, является тензорным произведением матрицы физических свойств на матрицу психических свойств:

▲ ИраСтатЭ	♟ИраДинИ
⍒РаСтатИ	▼ РаДинЭ

$\otimes$

♢ ЭмоСенс	♡ ЭмоИнтуит
♠ ЛогоСенс	♣ ЛогоИнтуит

В матрице психических свойств имеем психомасти: ЭмоСенс — это ***медиа***, ЭмоИнтуит — это ***артисты*** (секс, умноженный на любовь), ЛогоСенс — это ***власть***, ЛогоИнтуит — это ***ученые***. В романе А. Соя «ЭмоБой» сделана попытка художественного отображения Эмо-мира, основанного на термине «Эмо», придуманном лидером группы «*Minor Thread*» Йаном Маккеем.

Для **рационалов** характерно совпадение: ИНТРОВЕРТ = статик, а *экстраверт* = динамик. Рациональные экстраверты динамики (Гюго, Гамлет, Джек, Штирлиц) страдают излишним консерватизмом. Рационалы тяготеют к стандартизации, интроверты замкнуты. Рациональные интроверты статики (ДРАЙЗЕР, МАКСИМ, ДОСТОЕВСКИЙ, РОБЕСПЬЕР) имеют склонность к формализму. Если рационал все планирует, то иррационал действует спонтанно.

Тензорное произведение дает матрицу с шахматным порядком:

	Статик	Динамик	Статик	Динамик
ирр	в ♢ Наполеон	Д ♢ ДЮМА	в ♡ Гексли	**Д** ♡ ЕСЕНИН
рац	**Т** ♢ ДРАЙЗЕР	к ♢ Гюго	**Т** ♡ ДОСТОЕВСКИЙ	к ♡ Гамлет
ирр	в ♠ Жуков	**Д** ♠ ГАБЕН	в ♣ Дон Кихот	**Д** ♣ БАЛЬЗАК
рац	**Т** ♠ МАКСИМ	к ♠ Штирлиц	**Т** ♣ РОБЕСПЬЕР	к ♣ Джек

Сенсорик — это ощущающий тип, который занят конкретными вещами, а интуиту образ дороже отдельных деталей. При интерпретации мы исходили из того, что красные масти (выпуклые фамильные буквы) — эмоциональный тип, черные (вогнутые фамильные буквы) — мыслительный тип, логики. В системе из 14 интертипных отношений 2 являются асимметричными, образуя кольца социального заказа» и социальной ревизии.

Учет базовых интертипных отношений позволил построить периодическую ПСИ-таблицу, которая открывает «*царский путь*» в изучение отношений ревизии и заказа. Первая линия характеризуется прямым порядком: *от восхода* ♠ — ♢ *до заката* ♡ — ♣. Вторая линия мастей имеет обратный порядок:

♠	♢	♡	♣	[!]	+/−
♣	♡	♢	♠	[?]	−/+

$\boxed{\text{Т}}$	в	$\boxed{\text{Т}}$	в
к	$\boxed{\text{Д}}$	к	$\boxed{\text{Д}}$

Следует рассматривать каждую линию мастей в сочетании с двумя линиями фигур.

Получаем две пары линий ревизии: – вперед слева направо. Например, имеем линию ревизии Д♣ БАЛЬЗАК — К♠ Штирлиц — Д♢ ДЮМА — К♡ Гамлет — Д♣ БАЛЬЗАК, которая является негативной. Социальная ревизия является отношением контроля, где в качестве опорного признака Г.Р. Рейнина рассматривается пара *позитивность — негативность*. Рациональный экстраверт Штирлиц (король пик) давит на иррационального интроверта ДЮМА (дама бубен).

Обведены клетки интровертов (тузы и дамы). Дополнительные клетки «мальчиков» (короли и валеты) образуют спирали экстравертов. Спирали заказа прочитываются назад справа налево. Пара линий фигур в сочетании с каждой линией мастей образуют две спирали интровертов. Для интровертов первой пары строк имеем синусоиду *деклатимного* (!) заказа, а для интровертов второй пары — синусоиду *квестимного* (?) заказа. Например, Штирлиц (король пик) является заказчиком для Дон Кихота (валет треф). Оба они экстраверты-квестимы, что облегчает совместную работу, ибо для квестима спор не самоцель, он не склонен к декларативности.

Наиболее комфортными являются отношения дуалов. Недаром говорят: *крайности сходятся.* Дуальные фигуры — дамы валетов и тузы королей для дуальных мастей ♠/♡ и ♣/♢. Например, В♠ Королев (Жуков) своего выбрал дуала Д♡ Гагарина (ЕСЕНИН), Д♢ Иоффе (ДЮМА) — дуала В♣ Курчатова (Дон Кихот). Я и моя внучка — тоже дуалы. Мой опыт участия в интертипных отношениях позволяет заключить, что знание психотипов дает возможность понять тех, кто является подзаказным (я по отношению к своему зятю), а также тех, кто находится в положении подревизного (моя внучка по отношению к своему отцу).

Поскольку экстраверты (короли и валеты) и интроверты (тузы и дамы) чередуются в таблице как клетки шахматной доски, то можно описать асимметричные интертипные отношения ревизии как ход ладьи и заказа как ход слона, а симметричное отношение дуалов как ход конем. Здесь приходят на ум карточные персонажи «Страны Чудес» и шахматные персонажи «Зазеркалья». «Логическая игра» Л. Кэрролла открывается посвящением «Моему другу — маленькой девочке», напоминая детям и взрослым о жизнерадостной и находчивой Алисе. Образно говоря, Логический Квадрат заковывает милую девочку в тяжелые латы Белого Рыцаря.

4 Принцип позиционности

В Логическом Квадрате невозможно преодолеть бездну между максимумом A и минимумом V. Наука четвертовала Природное Универсальное, «*подарив*» ему тюремную камеру с квадратным кругозором. В Матрице Комплементарности нет разрыва, ибо в ней круговое расположение элементов. ГЕНЕТИЧЕСКИЙ ПОДХОД В ЛОГИКЕ позволяет воочию увидеть ***замысел*** Природы [9].

Первым почти универсальным языком явилась математика, которая проявила тенденцию к захвату различных областей знания. Усвоив с детства позиционный способ нумерации, мы склонны недооценивать это замечательное культурное достижение человечества. Аналитизму присущ позиционный принцип. Сравните непозиционную запись римских чисел с позиционной записью арабских чисел. Например, XI = 11 или LV = 55. Однако в средние века декретом венецианской республики запрещались арабские цифры и вменялись к употреблению римские цифры.

Позиционный принцип в гуманитарной области дает не меньшие преимущества, чем в арифметике. В универсальном языке операторные слова составлены из однобуквенных операторов («букв»). Это реализует мечту Лейбница — сделать математику действительно универсальным языком. «Универсальное» буквально означает «единовращение» (от лат. *Unus* = один, *Versus* — причастие от *Vertere* = вращать). Это — «способность единичного поворачиваться разными гранями, ... многое, присущее одному предмету» [10]. Логическая ***позиционность*** может оказать существенную помощь в преодолении пропасти между естественным и искусственным интеллектом.

Литература

[1] *Бубер М.* Проблема человека // Бубер М. Я и Ты. М.: Высшая школа. 1993. С. 86.

[2] *Франк С.Л.* Непостижимое // Франк С.Л. Сочинения. М.: Правда. 1990. С. 469, 496.

[3] *Бахтияров К.И.* Логика с точки зрения информатики. М.: УРСС, 2002. С.41.

[4] *Герасимова И.А.* Единство множественности. М.: Альфа-М, 2010. С. 135.

[5] *Бахтияров К.И.* Как может рассуждать компьютер в духе булевой многозначности // Логические исследования. Вып. 17. М.-СПб.: ЦГИ, 2011. С.14–18.

[6] *Hofstadter D.* I am a Strange Loop. N.Y., 2007. P. 235, 299.

[7] *Бахтияров К.И.* ПСИ-фрактальность // Седьмые Смирновские чтения по логике. М.: Современные тетради, 2011. С.48–50.

[8] *Бахтияров К.И.* Новая игровая интерпретация психотипов // Философия науки и искусства. М.: Моск. гуманитарный университет, 2011. С.164–169.

[9] *Бахтияров К.И.* Квадрат Противоположностей и Матрица Комплементарности // Полигнозис. 2009, № 4. С.53–59.

[10] *Эпштейн М.* Знак пробела. М.: НЛО, 2004. С. 643.

Александр Иванович Введенский как логик. Часть II[1]

Б. В. Бирюков, Л. Г. Бирюкова

ABSTRACT. The paper is devoted to the logical ideas and the biography of the prominent Russian thinker Alexander Ivanovich Vvedenskiy (1856–1925).

Keywords: A.I. Vvedenskiy, history of logic, philosophical logic

Анализируя философские воззрения А.И. Введенского, нельзя обойти его дискуссию с Н.О. Лосским.

Николай Онуфриевич Лосский (1870–1965) был мыслителем с широким кругом философских интересов, создателем философского учения, названного им интуитивизмом. Как выразился В.В. Зеньковский,

> Лосский справедливо признается главой современных русских философов, имя его широко известно всюду, где интересуются философией, вместе с тем он едва ли не единственный русский философ, построивший систему философии в самом точном смысле слова [16].

Иные современные философские писатели склонны преувеличивать значимость вклада Лосского в философию, в частности в гносеологию и логику[2]. Начать придется с самой фигуры оппонента Введенского — оппонента, который был учеником Александра Ивановича, но не принял его кантианства.

---

[1] Первая часть работы опубликована в Выпуске 17 настоящего издания.

[2] Ср. следующие слова современного автора: «Лосскому удалось детально разработать и связать воедино три ветви философского знания — теорию бытия (онтологию), теорию знания (гносеологию) и теорию нравственного действия (этику)» [14, с. 349]. Неужто удалось?

Немного о личности и жизненном пути Н.О. Лосского[3], прожившего почти целое столетие (1870–1965). Николай Лосский был уроженцем Западного края России, учился в классической гимназии Витебска[4]. Как многие из его поколения, он поначалу увлекся «освободительными» идеями социалистического и атеистического толка, за что был исключен из гимназии, причем без права поступления в другие учебные заведения России. Поэтому он перебрался заграницу, в Швейцарию, где, постепенно отойдя от прежних взглядов, поступил на философский факультет университета в Берне. Вернувшись в Россию, стал учиться на естественно-научном отделении физико-математического факультета Петербургского университета, где специализировался по психофизиологии у П.Ф. Лесгафта, выдающегося русского педагога и врача, основоположника научного подхода к физическому воспитанию.

К философии молодой Лосский обратился только в 1894 г., поступив на историко-филологический факультет столичного университета, где его учителем был А.И. Введенский. Но не кантианство Введенского, а неолейбницианский персонализм А.А. Козлова, как можно судить, оказал решающее влияние на миросозерцание Лосского. Именно Козлов познакомил начинающего философа с Вл.С. Соловьевым, который привлек его к переводческой деятельности; Лосский, в частности, перевел книгу Ф. Паульсена «Иммануил Кант, его жизнь и учение», которую Б.В. Бирюков начал (но не закончил) читать, будучи в аспирантуре Института философии АН СССР в 1948–1949 годах[5]. Выдающейся заслугой Лосского явился осуществленный им перевод «Критики чистого разума» Канта, который ныне признан каноническим.

По завершении высшего образования Лосский был оставлен при университете для подготовки к профессорскому званию, и ему в 1901–1902 гг. была предоставлена научная командировка

---

[3]Сведения об этом почерпнуты из публикаций: [1, 35, 28].

[4]Он родился в одном из местечек Двинского уезда Витебской губернии. Хотя в роду преобладала польская кровь, семья ощущала себя русскими. Отец Лосского был обрусевшим поляком, православным, но мать была католического вероисповедания. В классическую гимназию Витебска Николай Лосский поступил в год смерти своего отца, в 1881 г.

[5]См. мою книгу: [4, глава 1, параграф 12].

заграницу. Он использовал ее для того, чтобы максимально расширить свой научно-философский кругозор, знакомясь на месте с философскими течениями Германии и Швейцарии. В Страсбурге он занимался в семинаре В. Виндельбанда, в Лейпциге стажировался в психологическом институте В. Вундта, в Геттингене работал у психолога-экспериментатора Г.Э. Мюллера. Естественно-научное образование Лосского позволяло ему войти в курс новейших зарубежных научно-философских направлений. Важным было также то, что когда начинающий русский мыслитель отправился на Запад, у него уже сформировались основоположения собственного философского учения. Ключевой для мировоззрения Н.О., пишет автор предисловия к «Избранному» Лосского, стала идея об «„имманентности всего всему“, о преодолении дуализма между сознанием и бытием в акте интуиции» [35, с. 5].

В 1903 г., после защиты диссертации, в которой учения психологии рассматривались в свете «волюнтаризма» [23], ему было присвоено ученое звание магистра философии. Затем Н.О. занялся «обоснованием интуитивизма» и в 1904–1905 гг. опубликовал результаты своих философских изысканий[6]. Защитив в 1907 г. эту работу как докторскую диссертацию, Лосский стал приват-доцентом, а затем, в 1916 г., экстраординарным профессором философии Петроградского университета; как и Введенский, преподавал он и на Высших женских курсах.

Интуитивизм Лосского вызвал оживленные обсуждения и критику — здесь выступали: Л.М. Лопатин, С.А. Алексеев (Аскольдов) — сын А.А. Козлова, Н.А. Бердяев, С.И. Поварнин и др.; что касается А.И. Введенского, то к интуитивизму Лосского он отнесся категорически отрицательно.

Молодой доцент столичного университета был очень активен и в 1912 г. основал, совместно с Э.Л. Радловым[7], влиятель-

---

[6]Соответствующий труд был напечатан в журнале «Вопросы философии и психологии» в 1904–1905 гг. под названием «Обоснование мистического эмпиризма». В виде книги — «Обоснование интуитивизма» — этот труд впервые увидел свет в 1906 г. [20] и потом переиздавался (1908; 1923, Берлин).

[7]Эрнест Леопольдович Радлов (1854–1928) был прежде всего историком философии. Выпускник Петребургского ун-та (по историко-филологическому факультету), он учился также в германских университе-

ное продолжающееся издание «Новые идеи в философии». Не чуждался Лосский и участия в общественно-политических событиях. В годы первой русской революции он вступил в партию конституционных демократов, во времена второй русской революции опубликовал брошюру «Чего хочет партия народной свободы (конституционно-демократическая)?». Он, таким образом, оказался частью силы, которая привела к крушению того православного «русского мира», поборником которого он всегда был.

В 1917–1921 гг. Н.О. оставался профессором университета в городе на Неве. В 1918 г. он стал близко к сердцу принимать судьбы православия и Русской Православной Церкви (не случайно его старший сын Владимир впоследствии стал за рубежом известным богословом и историком Церкви).

В 1921 г. Н.О. возглавил — вместе с тем же Э.Л. Радловым, тогда председателем Философского общества при Петроградском университете, — редакцию нового журнала «Мысль», который стал издаваться возродившимся Философским обществом. Однако после выхода трех номеров большевицкие власти закрыли журнал, а самого Н.О. в том же году уволили из университета как «идеалиста». В 1922 г. его арестовали и затем выслали из России — в числе тех выдающихся деятелей русской культуры и науки, которые подлежали изгнанию по решению главы коммунистического правительства. Вспомним, что в следующем, 1923 году, из того же университета уволили его оппонента профессора Введенского (который в том же году покинул сей мир). Так окончился спор Введенский — Лосский, о котором ниже пойдет речь.

Последующий долгий жизненный путь Николая Онуфриевича очертим пунктиром: Прага, Русский университет — Братислава, университет — Франция и США (у своего младшего сына, историка; работа в библиотеке Йельского университета над интересовавшими его вопросами) — Духовная академия Св. Владимира в Нью-Йорке (где Н.О. в 1947–1950 годах был профессо-

тах (Берлин, Лейпциг). Он перевел «Этику» Аристотеля и «Феноменологию духа» Гегеля, был автором работы о Владимире Соловьеве. Ему принадлежат «Очерки истории русской философии» (1912, 1922). В 1917–1924 гг. Радлов — директор Петроградской публичной библиотеки. С 1920 г. — член-корреспондент Российской Академии наук.

ром) — Лос-Анджелес (у сына) — Франция, Сен-Женевьев-де-Буа; кончина в возрасте 94 лет.

***

Перейдем теперь к философскому учению Лосского и к его спору с Введенским. Не станем прослеживать все детали полемики между ними. Заметим только, что критика воззрений Лосского содержалась в «Логике» Введенского, выпущенной в 1912 г. На это основатель интуитивизма в том же году ответил на страницах журнала «Вопросы философии и психологии», а затем выпустил брошюру «Логика проф. А.И. Введенского». Введенский дал на это ответ в своей «Логике» издания 1917 г., на которое мы и будем опираться. Что касается Лосского, то он продолжал критиковать своего учителя в своей «Логике» 1922 г. [19].

Начнем с того, что очертим философское учение Лосского, используя не только те сочинения, которые вышли при жизни его оппонента — Введенского, но и последующие труды Н.О.: раз сформировавшись, воззрения Лосского уже не менялись — варьировался контекст, вводились в рассмотрение новые темы, но главное оставалось неизменным. И с этим главным был не согласен Введенский.

Исходя из того, что всякое познание есть непосредственное вѝдение самой действительности, Лосский предпринял «положительное истолкование», как он говорил, и метафизического умозрения, и научного наблюдения, и религиозного опыта[8]. Согласно его взгляду, «в знании присутствует не копия, не символ, не явление познаваемой вещи, а сама эта вещь *в оригинале*»[9]. В другом своем сочинении Лосский поясняет:

---

[8]См. книжку: [25]; в эту книжку — 208 с. малого формата — вошли, как сказано в предуведомлении «От редакции», никогда прежде не публиковавшиеся работы Н.О. Лосского, написанные им в конце жизни (предположительно, в начале 50-х гг.).

[9]Цитата из труда «Обоснование интуитивизма», впервые опубликованного в журнале «Вопросы философии и психологии» в 1904 — 1905 гг., а затем изданного в виде книги. Этот труд был, таким образом, известен Введенскому. В 1922 г. в Петрограде готовилось третье издание этой книги, но в 1922 г. Лосский, как мы знаем, был выслан из советской России, и оно увидело свет в Берлине в 1924 г. Цитируется по книге [21, с. 77].

«...знание не есть копия предмета, оно не есть символ предмета, оно просто и прямо содержит в себе свой предмет *в подлиннике*, как опознанный. Акт непосредственного созерцания предметов в подлиннике я называю словом *интуиция*. Согласно теории знания, которую я начал разрабатывать в 1903 г., все наше достоверное знание получается не иначе, как посредством такого непосредственного наблюдения предметов в подлиннике. Поэтому свою теорию я называю *интуитивизмом*» [25, С. 137].

В то время как Введенский отвергал возможность метафизики в виде *знания*, Лосский считал метафизику центральной философской наукой. «Метафизика, — писал он, — есть *наука о мире как целом*; она дает *общую* картину мира как *основу* для всех частных утверждений о нем»[10]. Свое учение он называл *идеал-реализмом*, потому что оно означает «...непосредственное усмотрение очевидных законосообразных идеальных предметов...» [27, с. 239],

означает, что в мире есть, с одной стороны, *идеальное* бытие <...>, т.е. бытие сверхвременное и сверхпространственное, и, с другой стороны, *реальное* бытие, состоящее из *событий*, временных и пространственно-временных. Реальное бытие существует не иначе как на основе идеального. — Конкретный идеал-реализм находит в составе идеального бытия не только *отвлеченные* идеи, но и *конкретные идеальные начала*, именно субстанции или, точнее, субстанциальных деятелей [27, с. 132].

Различая чувственную и интеллектуальную интуицию, а также сверхчувственный опыт — мистическую интуицию, Лосский полагал, что в последней открывается Бог, а человеческое я обнаруживает себя как творческая сила, создающая, «в союзе с другими деятелями», свою духовную, душевную и телесную

[10] *Лосский Н.О.* Типы мировоззрений. Цит. по: [27, с. 5]. Книга представляет собой перепечатку публикаций: [24], [26], «Идеал-реализм» (Из книги «Общедоступное введение в философию», печатается — не полностью — по изданию [22]).

жизнь. Историки философии пишут о Лосском, что он возродил средневековое учение о реальном бытии универсалий, поскольку его интуитивизм строится на признании *реальности идеального бытия* [14, с. 356].

Лосский был убежден, что метафизика, как он ее понимает, входит «в состав *всякого мировоззрения*», дает сведения о подлинном бытии (о «вещах в себе»); эти сведения, впрочем, доставляют, по Лосскому, *все науки* [27, с. 8]. Это значит, что интуитивизм (как «конкретный органический идеал-реализм или персонализм») решительно отвергает кантианский критицизм. Лосский не согласен с Введенским, утверждавшим, что «метафизика как наука (о подлинном бытии, о „вещах в себе“) невозможна и что всякая метафизическая теория, также и материализм, недоказуема и неопровержима». Такое учение можно принять, только заняв позицию *агностицизма* и *феноменализма* [27, с. 65]. А резкие слова Лосского о том, что тот, кто видит в метафизике «лишь никчемное резонерство <. . . > тот обнаруживает недостаток философской культуры своего ума. . . », прямо бьют по Введенскому[11].

Возражая, Введенский указывал на непоследовательность Лосского:

> Он считает непозволительным, т.е. предвзятой предпосылкой, рассуждать о явлениях и вещах в себе, приглашает, взамен того, заняться только рассмотрением того, что̀ *прямо, непосредственно* дано в опыте, *независимо* от всякого подведения этого данного под истинное или кажущееся бытие; вместе с тем он же учит, что всякое бытие есть бытие в сознании (хотя и не в человеческом), а потому духовно, что материализм ошибочен, что человек состоит из комплекса духовных сущностей, которые прямо, непосредственно вкладываются одна внутрь другой и т.п.[12]

[11] Впрочем, сказаны они были в сочинении, увидевшем свет в 1931 г., т.е. тогда, когда Введенского уже не было в живых, — в цитировавшемся выше сочинении (см. [27, с. 8]).

[12] Здесь Введенский в подстрочном примечании приглашает читателя ознакомиться с тем, что сказано Лосским в его сочинениях «Обоснование интуитивизма» и «Основные учения психологии с точки зрения волюнтаризма».

Но, продолжает Введенский, как ни смотреть на метафизику — как на веру или как на знание, — подобный взгляд означает, что у нас уже возникло подозрение, что данные опыта могут быть не тождественными «истинному бытию», и поэтому «уже употребляются понятия вещей в себе и явления (иначе — истинного и кажущегося бытия), хотя и без этих названий». И далее Введенский добавляет, что под метафизикой он подразумевает учение об истинном бытии, т.е. о вещах в себе [7, с. 46].

Итак, Введенский и Лосский расходились в самом главном — первый отвергал возможность метафизического *знания*, второй был убежден в том, что развивает метафизику именно как знание. Введенский проводил резкую грань между логикой и метафизикой, Лосский же считал, что логические и метафизические принципы в своей основе совпадают, хотя первые значимы для знания, а вторые для бытия.

Прежде чем переходить к главному пункту спора между Введенским и Лосским — о четырех формах условно-категорических умозаключений, — мы коснемся несовпадения их взглядов по другим вопросам логики[13]. Они относятся к соотношению логики и гносеологии, к проблеме психологизма в логике, к истолкованию логики как средству открытия новых истин[14]. Отметим и различие взглядов двух философов на обобщение и на разграничение аналитических и синтетических суждений[15].

В то время как для Введенского логика была не зависимой от теории познания, Лосский считал, что она имеет гносеологические основания. Далее, мы видели, что Введенский — во всяком случае начиная с книги 1912 г. — отвергал в логике психологизм, и тем не менее Лосский упрекал его в том, что он недостаточно ясно разграничивает в познании логическое и психологическое; этот упрек адресуется прежде всего «Логике» 1909 г., в связи с чем в изданиях 1912 и особенно 1917 и 1922 гг. Введенский более четко разграничивает предметы этих наук.

[13]Здесь надо указать на тезисы: [32].

[14]См. указанную выше публикацию В.С. Поповой [32].

[15]О взглядах Лосского относительно логического отрицания см. [4, гл. 3, параграф 4].

Лосский не соглашается со своим учителем и в его отвержении «логики открытия» нового. Он был убежден, что объективная сторона научных открытий, с одной стороны, и доказательств уже открытых истин — с другой, совпадают, почему логика как наука о доказательствах есть вместе с тем наука об изобретениях и открытиях. Поскольку Введенский отвергал критику Миллем силлогизма как не расширяющего знание, он был вынужден признавать и эвристическое значение логического. «Но это, — проницательно заметила одна калининградская исследовательница, — вовсе не указывает на то, что он противопоставляет открытие и доказательство, он просто не отождествляет эти процессы» [32, с. 264].

Теперь о взгляде Введенского на обобщение. Он был прост и ясен. А.И. связывал обобщение с различением *общих* и *единичных* признаков предметов. Первые принадлежат многим предметам, сходным между собой в обладании этими признаками; вторые составляют то, чем отдельный предмет отличается от всех без исключения предметов, даже наиболее сходных с ним. Далее Введенский проводит различие между существенными и несущественными признаками. «Существенными признаками называются такие признаки, из которых каждый, взятый отдельно, необходим, а все вместе достаточны, чтобы отличить данный предмет, или же данную группу предметов, от всех остальных предметов». При этом существенность либо несущественность признака зависит не только от мыслимого нами предмета, но и от нашей точки зрения на него, почему для одного и того же предмета можно устанавливать различные определения.

У Введенского речь об обобщении заходит еще раз — когда он обращается к индукции. Рассматривая индуктивные доказательства, он относит их к обобщающим умозаключениям, основанным на принципе единообразия природы, и его частным случаем — на принципе причинности. На этом основании он не относит к индуктивным рассуждениям математическую индукцию (то, что А.И. подробно, на примере, объясняет происходящий при этом ход мысли, составляет положительную особенность логического учения Введенского), но признает, что в ней содержится обобщение.

Следует признать, что взгляды А.И. на роль обобщения в познании близки к тому, что общепринято в современной философской логике. Что касается Лосского, то сказать то же о его взглядах на данный вопрос мы остережемся — и это несмотря на то, что, как увидит читатель, в его воззрениях по этому вопросу были весьма глубокие соображения. В самом деле, рассмотрим следующую мысль Николая Онуфриевича:

> Реализм, особенно если он комбинируется с интуитивизмом (мистическим эмпиризмом), отвечает на вопрос о происхождении общих суждений и представлений[16] чрезвычайно просто: <. . . > различные <. . . > явления <. . . > заключают в себе одни и те же не просто сходные, а *тождественные* элементы или стороны (aspects); поскольку в них есть тождественное, они составляют один и тот же предмет и в действительности и в мышлении. Общее в вещах есть нечто первоначальное, непроизводное, поэтому и в мышлении оно не может быть произведено или сложено из чего-либо не общего [21, с. 241].

И в другом месте:

> Формально-идеальное бытие, число, отношение и т.п. есть всегда нечто *общее, т.е. каждое из них* единственно, однако присутствует во многих случаях бытия, разбросанного в разных местах пространства и отрезках времени. Это неудивительно, если формально-идеальные начала суть вневременные способы бытия и действования одного и того же сверхвременного и сверхпространственного деятеля: семь поступков, семь желаний, семь чувств имеют одну и ту же форму семеричности [27, с. 227–228].

В отличие от Введенского Лосский резко противопоставлял общее и единичное (индивидуальное). Он писал: «Конкретное

[16]В подстрочном примечании, относящемся к этим словам, говорится, что автор в данном случае не подвергает рассмотрению понятий в отличие от представлений.

имеет приоритет перед отвлеченным. *Индивидуальное господствует над общим*» [27, с. 227–228.]. Этот тезис получает у него следующую мотивировку. Настоящее индивидуальное, абсолютно индивидуальное наблюдается и опознается с величайшим трудом; даже когда мы стоим перед лицом единичной вещи и имеем в восприятии высоко дифференцированный ее образ, он в громадном большинстве случаев есть общее представление. «Труднее всего опознать во всякой вещи ее индивидуальность, т.е. то, в чем вещь оказывается единственною в мире, неповторимою и незаменимою ничем другим» [27, с. 250].

Лосский обращал внимание на то, что существуют области (например математика и механика), в которых научное обобщение производится на основании *единственного* случая. В качестве примера приводится доказательство теоремы о сумме углов треугольника, которое производится с помощью дедуктивных умозаключений для одного какого-нибудь, положим, остроугольного треугольника; «вслед за этим на основании отчетливого усмотрения, что величина суммы углов обусловливается не всеми свойствами данного остроугольного треугольника, а только теми, которые *тождественны* во всех треугольниках, доказанное положение утверждается относительно всякого треугольника вообще» [21, с. 276–277]. Введенский, конечно не отвергал подобного истолкования геометрических доказательств, но обращал внимание на другую сторону дела. Он указывал на то, что чертеж служит для того, чтобы пояснить каждый шаг в логических рассуждениях.

Мысль Лосского о «неполной индивидуализации представлений» свидетельствует о его проницательности, и она возражений со стороны его оппонента не вызывала. Однако когда мы вдумываемся в «идеал-реализм», предполагающий, что почти во всяком акте восприятия тождественное в вещах связано с их «субстанциальностью», будто бы переживаемой нами (как «субстанциальными деятелями»), становится понятным, что это учение было неприемлемо для Введенского.

Очень четко противоположность взглядов двух русских философов проявлялась в трактовке категорий гносеологии. Введенский, будучи сторонником философии Канта, четко различал мир явлений и мир «вещей в себе», знание *a priori* и *a posteriori*.

В логике он видел «проверку суждений», т.е. их оправдание или опровержение. Он писал:

> Основные методы оправдания суждений сводятся к двум: к простой установке (или, как выражаются иначе, к простому констатированию) данных опыта и к доказательству, так что всякий метод оправдания составляет либо видоизменение одного их этих, либо их разнообразные соединения между собой <...> Под доказательством же в логике подразумевается оправдание суждений посредством умозаключений [7, с. 105].

Наука, утверждал Введенский, только там, где есть умозаключения и доказательства, т.е. опосредствованное знание. Оно может быть различным по степени общности, но его расширение всегда происходит путем оправдания *синтетических* суждений, т.е. суждений, сказуемые (предикаты) которых содержат то, чего нет в подлежащем (субъекте). Что касается *аналитических* суждений, то их сказуемые, как мы уже говорили, образуют большую или меньшую часть содержания подлежащего, и для установления истинности аналитического суждения достаточно «расчленить» — проанализировать — его предикат. Введенский подчеркивал, что различение аналитических и синтетических суждений не носит психологического характера и никак не связано со способом их происхождения.

Но именно последний взгляд отстаивал Лосский. Он был убежден, что ему удалось устранить противоположности не только знания и бытия, но и «рационального и иррационального, априорного и апостериорного, общего и частного, аналитического и синтетического», утверждал, что все суждения имеют в одном отношении аналитический, а в другом синтетический характер. Он полагал, что его интуитивизм (мистический эмпиризм) выражает «органическое, живое единство мира» [21, с. 326–327, 334].

***

В современной логике, будь то логика философская или математическая, правильными признаются только две формы условно-категорических умозаключений — *modus ponens* и *modus tollens*, т.е. переходы от утверждения основания условного суждения к утверждению его следствия и от отрицания следствия к отрицанию основания. Движение же мысли от отрицания основания к отрицанию следствия и от утверждения следствия к утверждению основания не считается логически правомерным, хотя оно, подобное движение, может приводить к вероятным заключениям либо же, если имеется дополнительная информация, и к достоверным выводам.

Лосский решительно отверг различение правильных и неправильных условно-категорических умозаключений. Мы читаем:

> ...основание и следствие необходимо даны вместе: если есть основание, то на наших глазах возникает и следствие, если есть следствие, то мы можем проследить и его основание; точно так же отсутствие основания есть показатель отсутствия следствия, а отсутствие следствия есть показатель отсутствия основания. Таким образом получаются четыре формы перехода мысли от основания к следствию и наоборот [21, с. 286].

Создатель учения об интуитивизме считал, что отношение между основанием и следствием (действием) имеет как логический, так и онтологический характер. Термины «основание» и «следствие», согласно этому учению, обозначают всякую связь между двумя элементами, состоящую в том, что если дан один элемент, то и другой элемент также должен быть данным. Основание познания есть реальное основание своего следствия «и, значит, связано однозначно с полным своим следствием в обоих направлениях, т.е. в направлении от основания к следствию и от следствия к основанию». Поэтому если взять действие «во всей его конкретной полноте и абсолютной индивидуальности», то причиной его может быть «только один определенный, абсолютно индивидуальный комплекс событий» [21, с. 289, 292]. То, что традиционная логика в этом вопросе резко расходится с его взглядами, он объяснял тем, что она исходит из принципа множественности причин, согласно которому одно и то же явление природы может иметь различные причины. Лосский полагал, что именно этот принцип побуждает сомневаться в достоверности умозаключений от присутствия следствия и от отрицания основания.

Введенский убедительно раскрыл несостоятельность такого взгляда. В «Логике» 1917 г., показав различие между правильными и неправильными модусами условно-категорического силлогизма, он поместил параграф, озаглавленный «Ошибочность теории М.И. Владиславлева и Н.О. Лосского». Это название объясняется тем, что позиция основателя учения интуитивизма в данном вопросе была предвосхищена М.И. Владиславлевым — в его книге «Логика. Обозрение индуктивных и дедуктивных приемов мышления и исторические очерки»[17].

Опровержение взгляда Лосского на условно-категорические умозаключения было очень просто. Введенский показал, что отстаиваемые Лосским модусы опровергаются в математических рассуждениях, где ни о какой причинности и речи не может быть. Введенский приводит пример — пусть дано суждение «Если данный четырехугольник есть квадрат, то его диагонали равны»; и пусть мы удостоверились, что «данный четырехугольник не составляет квадрата». Разве можно на этом основании считать, что «диагонали данного четырехугольника не равны между собой»? Ведь четырехугольник может оказаться продолговатым прямоугольником или равнобедренной трапецией, диагонали которых тоже равны между собой.

Далее Введенский язвительно замечает, что поскольку защищаемые Лосским формы умозаключений он считает «неизбежным требованием интуитивизма, т.е. проповедуемой им метафизики», получается, что он наилучшим образом опровергает свой интуитивизм [7, с. 196].

Несостоятельной оказывается и попытка Лосского защитить спорные модусы путем ссылки на их использование при восстановлении прошлого, основанного на тех следах, которые они оставили в настоящем. Такое восстановление прошлого, справедливо указал Введенский, доказывается вовсе не теми просты-

---

[17] М.И. Владиславлев был также автором двухтомной «Психологии». Полное название труда, который имел в виду Введенский, таково: «Логика. Обозрение индуктивного и дедуктивного приемов мышления и исторические очерки логики Аристотеля, схоластической диалектики, логики формальной и индуктивной» [13].

ми условно-категорическими модусами, которые он защищает, но очень сложными соединениями многообразных допускаемых логикой умозаключений [7, с. 195].

Следует заметить, что эта критика, которой подверг Введенский взгляды Лосского, не прошла для него даром, что видно из приводимых Введенским слов Лосского (из его статьи «Логика проф. Введенского»). Лосский признал, что «хотя основание и полное следствие связаны однозначно как в прогрессивном, так и в регрессивном направлении, все же говорить о четырех модусах нельзя, потому что из формы суждения не видно, выражает ли предикат полное следствие из данного основания (из субъекта) или нет» [7, с. 197].

***

Особое место в труде «Логика как часть теории познания» занимает истолкование сути христианства. Главное в христианстве, писал А.И. Введенский, состоит «в живой вере в воскресение Христа». Слово «христианин», продолжал он, есть «название для исповедующих воскресение Христа», и кто отбрасывает веру в Его воскресение — пусть он и повторяет то, чему учил Христос, — не является христианином [8, с. 355]. В свете этих слов бесспорна убогость «религиозных» взглядов Льва Толстого. Отрицание Воскресения и «проповедь» евангелия без Спасителя не имеет ничего общего с православием; ее нельзя называть христианством, а если толстовцы хотят сохранить связь своего учения с Христом, то их представления можно назвать «христовством», писал А.И. Здесь стоит вспомнить известный труд М.В. Лодыженского «Сверхсознание» [18][18], где сопоставляется то, как смиренно уходили в мир иной христианские подвижники и как металась душа русского писателя в последние дни его жизни. Отсюда, в частности, следовал вывод, что Священный синод поступил правильно, когда отлучил Толстого от церкви и не придал никакого значения воплям, которые по этому поводу подняла «прогрессивная интеллигенция».

[18]Этому автору принадлежат еще два аналогичных труда. Личность и сочинения Митрофана Васильевича Лодыженского заслуживают отдельного освещения. В 90-е годы прошлого века я готовил книгу «Сверхсознание» для печати (отредактировал текст, сверил цитаты, подготовил комментарии), но все это пропало втуне: книга так и не увидела света.

Введенский также показал, как из ограниченности знания (установленного «критической» философией) вытекает сущность веры. Он приводил (в своем изложении) слова апостола Павла: «мы проповедуем Христа распятого, для иудеев скандал, а для эллинов безумие» (Первое послание к коринфянам **1**, 21-22) и «будь *безумным*, чтобы быть мудрым» (там же **3**, 18; подчеркнуто Введенским), но: «Братия! не будьте дети умом; на злое будьте младенцы, а по уму будьте совершеннолетни» (там же **14**, 20).

Широко известно изречение Тертуллиана, жившего на рубеже I и II вв., которое иные «религиоведы» истолковывают как отождествление веры с абсурдом. Соответствующее высказывание этого богослова широко использовалось советскими атеистами, утверждавшими несовместимость религии и науки. Введенский следующим образом раскрыл смысл слов великого теолога. Божественное Откровение не может быть предметом *логического* доказательства — оно лежит вне сферы логики, и поэтому может быть предметом только веры. Это и подчеркивает Тертуллиан, говоря «credo, quia absurdum est» (верую в это, *потому что* это нелепо) — невозможность того, во что он верит, он делает *основанием, подтверждением* своей веры [8, с. 348].

***

А.И. Введенский был первым — бессменным и единственным — председателем Философского общества при Петербургском университете, которое было создано в октябре — декабре 1897 г. (22 октября был утвержден Устав Общества, а первое заседание состоялось 7 декабря) и просуществовало до 1921 г., когда советские власти его закрыли. Общество издавало журнал «Вопросы философии и психологии», а также труды отечественных и зарубежных авторов. Когда ныне пишут о развернувшемся в советское время издании трудов классиков мировой философской мысли, может создаться впечатление, будто до революции подобной деятельности не было. Это не так. Только в трудах Петербургского Философского общества до 1917 г. в русском переводе были изданы сочинения Декарта, Беркли, Мальбранша, Аристотеля, Канта, Секста Эмпирика, Фихте; русскому читателю стали доступны «Логика» Канта и «Наука логики» Гегеля.

В Петербургском Философском обществе А.И. Введенский играл руководящую роль. Первое, теоретическое по тематике, заседание общества, состоявшееся как выше было сказано, 7 декабря 1897 г., открылось речью Александра Ивановича, в которой он говорил о том трудном пути, который философия — и вместе с ней логика — прошла в России[19]. Внимательно всматриваясь в развитие русской философии в XVIII–XIX веках, он показал, сколь тернистым оно было.

Историю русской философии А.И. разделил на три периода, различающиеся не только ее содержанием, но и отношением к ней российской власти, часто подозрительно-негативным. Первый период открывается вместе с основанием Московского университета в 1755 г.; он назван Введенским «подготовительным», так как началу философии в России положило усвоение «уже готовой» западно-европейской философии. В этот период русская мысль прошла путь увлечения вольтерьянством и вольфианством, но особого следа в культурной жизни России это не оставило. Второй период, период «господства германского идеализма», падает на первые две трети XIX века. В царствование Александра I преподавание философии было «широко поставлено не только в университетах и духовных академиях[20] , но даже

[19]Эта речь — под названием «Судьбы философии в России» — была напечатана в журнале «Вопросы философии и психологии» [10], а затем в том же году отдельно издана в Москве. Впоследствии А.И. включил ее в свою книгу «Философские очерки» [11]. Ныне она опубликована в книге: А.И. Введенский А.Ф. Лосев, Э.Л. Радлов, Г.Г. Шпет. «Очерки истории русской философии» [12]. Остальные работы, помещенные в этой книге — А.Ф. Лосева «Русская философия», Э.Л. Радлова «Очерк истории русской философии» и Г.Г. Шпета «Очерк развития русской философии» — существенно дополняют картину, нарисованную в статье А.И. Введенского. Следует заметить, что Э.Л. Радлову принадлежит «Очерк русской философской литературы XVIII-го века», помещенный в двух выпусках журнала «Мысль» — № 2 и 3. Этот журнал издавался Философским Обществом при Петербургском (Петроградском) университете как продолжение традиции довоенно-дореволюционного «Вестника философии и психологии». Оба номера вышли в 1922 г., и в первом из них была помещена «Часть общая» работы Радлова, а во втором номере — «Часть специальная», и в ней главное внимание было уделено логике. Полное библиографическое описание журнала «Мысль» будет дано ниже.

[20]В 1809 г. была открыта С.-Петербургская духовная академия, спустя десять лет — С.-Петербургский университет. Еще ранее — в 1802, 1803 и 1804 гг. были открыты соответственно Дерптский (Юрьевский), Казанский и Харьковский университеты.

в семинариях и гимназиях»; в число предметов, обязательных для гимназий, вошли логика и психология.

Здесь хочется прервать А.И. Введенского и на двух примерах показать, с каким трудом складывался в России философский, и в частности логический, язык. В 50-е годы прошлого столетия в букинистических магазинах можно было сравнительно недорого купить книги, выпущенные в XIX веке. В числе приобретенных могли быть переводные книги, в том числе учебник Баумейстера [36][21] и книга Тренделенбурга [34]. Эти книги разделяют шесть десятилетий, и удивительно, что и во второй из них мы в русском переводе встречаем «обороты» силлогизма вместо *модусов*, «наведение» вместо *индукции* и «обосновку» вместо современного *обоснования*. А что уж говорить о книге Баумейстера!

Но преподавание философских предметов было под постоянным давлением со стороны клерикальных кругов, и в 1850 г. философия была изгнана из университетов — на целых тринадцать лет. Светская философия, на которую в России сильно влияли воззрения немецких идеалистов, прежде всего Шеллинга, подвергалась со стороны властей, говорил А.И., «беспощадному гонению», и это распространялось на Харьковский, Казанский, Петербургский университеты[22], в меньшей мере — на Московский. Философию в этих условиях представляли естественники («натуралисты») и математики, среди которых А.И. особо выделял Лобачевского[23], который «философски анализировал» начала геометрии, что было немыслимо без учета широкого кру-

[21]За этим первым изданием в XVIII в. последовало 18 переизданий (причем в них очень скоро ссылка на «метод Вольфа» была снята). Эти сведения почерпнуты мной из фундаментальной Библиографии В. Риссе [37]. Из второго тома этой Библиографии, охватывающей 1801–1969 гг. [38], следует, что латинских переизданий этой книги в XIX веке уже не было.

[22]Аналогичная ситуация была и в киевском Университете Святого Владимира. Ср. публикацию Т.В. Пионтковской о логике в Императорском университете Св. Владимира [30].

[23]А.И. Введенский с горечью отмечал, что труды Лобачевского в России долгое время оставались незамеченными, и его имя «сравнительно недавно и лишь под влиянием западной науки стало пользоваться у нас надлежащими уважением и известностью. Россия так привыкла к самооплеванию, что не уважает никакого русского таланта, и даже гения, до тех пор, пока не услышит соответственного приказа с запада. Сходно, как с Лобачевским, она поступила и с Менделеевым, и с Толстым: не оцени их на западе, у нас еще долго не научились бы гордиться этими именами» [6, с. 145].

га идей западноевропейских философов и ученых, начиная с Декарта и Лейбница и кончая Риманом и Гельмгольцем[24]. Но умственное развитие в России никогда не прекращалось; в 30-40-е годы оно сосредоточилось во внеуниверситетской среде — в литературных кружках, в течениях славянофилов и западников.

Здесь рассказ А.И. Введенского уместно дополнить тем, что было сказано о развитии философии в России В.Ф. Асмусом. Он отмечал:

> характерное для второй половины XIX века явление: отставание университетской философии от уровня специальных философских исследований на Западе и от философского движения в России, развивавшегося вне университетов — в русской литературе и русской публицистике [2, с. 62].

Вернемся, однако, к Введенскому. «Изгнание философии из русских университетов, — писал он, — продолжалось тринадцать лет, вплоть до введения [университетского] устава

[24] В 1976 г. была опубликована рукопись Лобачевского «Начальные основания логики»[17], которую комментатор рукописи А.П. Норден (вопреки письменно высказанным мною сомнениям) счел конспектом «Логики» Канта. На деле же книга, которую конспектировал Лобачевский, была немецким руководством, составленным Кизеветтером, на что внимание обратил В.А. Бажанов; так как эта книга была учебным пособием, рекомендованным Советом Казанского ун-та [3]. Впрочем, это было известно и до Бажанова. Об этом писал известный математик и историк математической мысли, а также общественный деятель — А.В. Васильев (1853–1929) в свом труде о Лобачевском. Труд этот был издан только после свержения коммунистической власти [5], хотя он был подготовлен к изданию еще в 1927 г.; однако тираж этой книги не поступил в книготорговую сеть и в 1929 г. был уничтожен, судя по всему из-за «реакционности» автора. После этого данная тематика была монополизирована историками математики типа В.Ф. Кагана, которым труд Васильева был, судя по всему, известен, но замалчивался ими. Как пишет В.А. Бажанов [3, С. 59–60], ссылаясь на труд А.В. Васильева, с. 207–215, «Лобачевский тщательно конспектировал книгу Кизеветтера (J.C.C. Kiesewetter. Logik zum Gebräuche für Schulen. Berlin, 1796), представителя кантовской школы логической мысли», и добавляет, что великий русский математик «был знаком и с „Критикой чистого разума“ Канта, не разделяя, впрочем, взглядов последнего на природу математики» (следует ссылка на с. 208 труда А.В. Васильева). Стоит обратить внимание на то, что книга Иоганна Готфрида Карла Христиана Кизеветтера, слушателя лекций Канта по логике, была издана за пять лет до того, как Йеше опубликовал подготовленные им для печати логические лекции Канта (1801).

1863 г.»; но А.И. отметил, что преподавание логики не было прервано и в этот период, хотя и было отдано представителям духовного звания. Упомянутый устав открыл третий период развития философии в России — «период вторичного развития». Распространившиеся в это время на Западе материализм и позитивизм нашли своих сторонников и в России, но эти направления, утверждал А.И., сходят сами собой, уступая место идеалистическим и спиритуалистическим течениям.

В.Ф. Асмус, конечно, представил философское развитие в России как «борьбу материализма и идеализма», отметив, в частности, полемику между Н.Г. Чернышевским, в 1860 г. опубликовавшим работу «Антрополгический принцип в философии», и П.Д. Юркевичем[25], в том же году напечатавшим критическую статью, в которой указывалось, что Чернышевский, говоря словами В.Ф. Асмуса, «подменяет специфический предмет и специфические задачи психологии и философии предметом и задачей физиологии и вообще наук естественных» [2, с. 63].

Полемика между философствующим публицистом, каким был Чернышевский, и профессиональным философом Юркевичем получила — благодаря М.Н. Каткову — продолжение и широкий отзвук в русском образованном обществе. Полемика эта показала, что ни о какой «победе» материализма и позитивизма над идеализмом в русской мысли говорить не приходится. А.В. Введенский считал, что свидетельством тому была деятельность созданного в 1885 г. Московского психологического общества и содержание издававшегося этим обществом (с 1889 г.) журнала «Вопросы философии и психологии». В воссоздании университетской философии большую роль сыграли зарубежные научные командировки (в основном в Германию) таких будущих русских профессоров философии, как М.М. Троицкий

[25]Памфил Данилович *Юркевич* (1827–1874), выпускник Киевской духовной академии, был мыслителем широкого диапазона философских интересов; возглавив в 1861 г. кафедру философии в Московском ун-те, он читал лекции по истории философии, логике, психологии и педагогике. В познании он считал необходимым соединение логического дискурса с интуитивно-мистической компонентой и личностной установкой. В архиве этого философа-богослова сохранились многочисленные рукописи логического содержания. См. [31].

и М.В. Владиславлев. Дальнейшие имена известны — Вл. Соловьев, Лопатин, С.Н.Трубецкой…

Предоставим слово снова А.И. Введенскому. «Открывая первое в России Философское общество, естественно задуматься, что ожидает его?», — так начал он свою речь. Закончил же он ее выражением уверенности в том, что «русская философия воспитает деятелей, имеющих для жизни России значение не меньшее, чем славянофилы и западники, а для философии всего мира такое же, как и Лобачевский» [10, с. 26, 62]. И мы знаем, что уверенность Александра Ивановича оправдалась. За двадцатилетие, истекшее после его речи, в России возникла замечательная плеяда мыслителей и ученых. К сожалению, мысль А.И. о том, что развитие русской философии может в будущем встретить «какие-нибудь непреодолимые препятствия чисто внешнего характера» [10, С. 27], — осуществились: 1917 год пресек отечественное философское развитие.

Во время войны с Германией и последовавшей революции деятельность философских обществ (к тому времени таковые были не только в Петербурге) прекратилась; перестали выходить все философские журналы — «Вопросы философии и психологии», «Вера и разум», «Логос», «Христианская мысль» и др. Об этом говорится в предуведомлении «От редакции», опубликованном в новом философском журнале «Мысль» [29][26]. Там же сообщалось, что в марте 1921 г. Философское общество возобновило свою деятельность, но из-за болезни А.И. и по его просьбе обязанности председателя Общества были возложены на Э.Л. Радлова, до того заместителя («товарища») Введенского. В частности, в мае 1921 г. на заседании Общества с докладом выступил математик А.В. Васильев, в 1912–1917 гг. совместно с П.С. Юшкевичем издававший сборники «Новые идеи в математике»; тема выступления А.В. Васильева была — «К истории общего принципа относительности».

Но деятельность Общества была недолгой — вскоре его закрыли.

В справочнике П.В. Алексеева утверждается, что А.И. до конца своих дней оставался профессором в своем университе-

[26] В разделе «Хроника». Мне известны три выпуска этого журнала — все они относятся к 1922 г.

те [1, с. 171–172], но петербургские ученые, изучающие русскую философию (А.А. Ермичев), установили, что в 1923 г. он оказался на пенсии — это был результат проводившейся коммунистической властью политики «завоевания университетов изнутри». То, что ему так долго позволяли «профессорствовать», исследователи его жизни связывают с фактом его юношеской революционности и участием в студенческих волнениях, о чем было сказано выше.

***

В советские годы и в университете, и вне его А.И. Введенский старался всеми силами препятствовать упадку в России философской мысли. В частности, он участвовал в спорах 20-х годов, выступая против атеизма.

В докладе, прочитанном Введенским в марте 1922 г. в Петроградском Философском обществе, он говорил о вере в Бога и борьбе с атеизмом[27]. Так как система его аргументации представляется нам безукоризненной, а поднятая в статье тематика чрезвычайно важной, мы изложим здесь основные положения, сформулированные А.И.

Введенский ставил вопрос: действительно ли с достаточным распространением научных знаний исчезнет вера в Бога — и отвечает: «как бы широко ни распространялись научные знания, и как бы ни напрягал атеизм свои силы, вера в Бога никогда не исчезнет» [9, с. 30]. «Атеизм вовсе не порождение науки; он только цепляется за науку в ошибочной надежде найти в ней средство для самозащиты» [9, с. 19].

Гносеология, с полным правом утверждал Введенский, уже давно выяснила, что чисто научными доводами нельзя доказать «ни того, что Бог есть, ни того, что Его нет. И в то и в другое можно только веровать, причем наша вера и в том и в другом случае будет неопровержимой, т.е. нисколько не противоречащей ни логике, ни данным в опыте фактам; но ее нельзя обратить в доказанное знание» [9, с. 4]. Вопрос о существовании Бога чисто научным путем «навсегда неразрешим ни в ту, ни

[27] См.: [9]. В подстрочном примечании на первой странице статьи сказано: Доклад, прочитанный в Петроградском Философском обществе 19/6 марта 1922 г.

в другую сторону», и как бы атеисты ни напрягали свои силы, он никогда не исчезнет, ибо «...атеизм не в состоянии указать такой факт в природе, который исключал бы возможность допускать существование Бога — тем более, что атеизм есть тоже вера, только в несуществование Бога» [9, с. 3, 4, 9].

Атеисты утверждают, что всякое явление природы может быть объяснено ее законами. Но законы природы невозможно объяснить с помощью них самих; тем более необъяснимым оказывается существование «мира или природы»; а в природе нет ничего, подтверждающего атеизм.

Далее А.И. Введенский указал на факт того, что немало людей чувствует или ощущает Бога прямо, непосредственно, т.е. без всяких доводов и рассуждений, Чтобы сделать нагляднее, в чем состоит чувство Бога, А.И. приводит примеры переживания этого чувства, взятые им из книги Джемса «Многообразие религиозного опыта» [15]. Данные, собранные У. Джемсом, он дополнил аргументацией Вл. Соловьева [33] и писал: «Уверенность людей, прямо ощущающих Бога, в том, что Он существует, так сильна и непоколебима, что они обыкновенно считают ее не верой, а знанием»; в их душах «всегда будет сохраняться вера в Бога, несмотря ни на какие усилия воинствующего атеизма» [9, с. 10–14].

«Есть еще одна важная причина, поддерживающая сохранение веры в Бога», — продолжал Введенский, — это чуткая совесть, требующая уважения к человеческой личности и «отношения к человеку как к чему-то священному», и «пока не переведутся люди с чистой совестью, — не иссякнет вера в Бога» [9, С. 14–16]. Примем во внимание, что слова эти были произнесены в 1922 году, после кровопролитной Гражданской войны, в условиях непрекращающегося «красного террора», гонений на Православную Церковь, накануне изгнания из России цвета русской науки и культуры. В этих условиях естественен был поставленный Введенским вопрос о причинах современного ему русского воинствующего атеизма. Странным образом он не усмотрел его в сущности коммунистической идеологии — объяснял «чисто психологически, биографией Маркса». Мы знаем теперь, особенно после труда И.Р. Шафаревича о социализме как явлении мировой истории, что социальные революции, совершаемые во имя «светлого будущего», сопровождаются гонениями религии и церкви.

***

Из составленного Введенским обзора развития философской мысли в нашем отечестве на протяжении двух веков[28] мы видели, что наиболее устойчивой по отношению к идеологическим и административным воздействиям была *логика.* Из материала предшествующих глав видно, как интенсивно на рубеже XIX и XX веков развивалась наука о дискурсивном мышлении. Это развитие было нарушено революционными событиями, приведшими к утверждению в стране марксистской идеологии. Логика снова оказалась под официозно-идеологическим давлением, только совсем иного рода, нежели в XIX столетии. В 20-х гг. прошлого века формальная логика была в трудном положении. Ее третировали как выражающую «низшую» форму рационального познания, ее подчас квалифицировали как орудие реакции и даже «классового врага». Формальной логике и ее математическому варианту — символической логике противопоставляли «марксистскую диалектическую логику». Но, в отличие от некоторых других областей гуманитарного знания, логика плохо поддавалась «советизации». Между тем логическое невежество «кадров» (которые «решают все»), вызывавшееся тем, что ни в средней, ни в высшей школе обучаемых не знакомили с законами и правилами убедительно-аргументированного мышления, давало себя знать. Отсюда решение «партии и правительства», восстановившее логику в правах как предмета преподавания и

[28]Обзор этот, конечно, был и неполон, и несколько односторонен. Но он ценен тем, что принадлежал человеку, самому делавшему историю русской философско-логической мысли. О некоторых из упоминаемых А.И. Введенским имен и событий дальнейшие сведения можно почерпнуть из примечания издателей упомянутого журнала, из их предисловия к нему («Русская философия на путях самопознания: страницы истории»), а также, конечно, из работ А.Ф. Лосева, Э.Л. Радлова и Г.Г. Шпета, в этом журнале помещенных. Современный взгляд на дореволюционную «университетскую» философию представлен в упомянутой книге В.А. Бажанова. Эта книга, однако, построена преимущественно на материалах, касающихся Казанского ун-та. Кроме того, выделение «университетской» философии в качестве особой рубрики в развитии философской и логической мысли в нашем дореволюционном отечестве выглядит не очень убедительно.

сферы исследований. Однако с самого начала введение логики в качестве учебной дисциплины и области научных изысканий сопровождалось непрекращающимися спорами. Но это особый вопрос, и мы здесь не будем его касаться.

Литература

[1] *Алексеев П.В.* Философы России XIX–XX столетий. Биографии, идеи, труды. М.: Академический проект, 2002.

[2] *Асмус В.Ф.* Философия в Московском университете во второй половине XIX века // Ученые записки философского факультета. Вып. 190. М.: Изд-во МГУ, 1958.

[3] *Бажанов В.А.* Прерванный полет. История «университетской» философии и логики в России. М.: Изд-во МГУ, 1995. С. 18.

[4] *Бирюков Б.В.* Трудные времена философии. Отечественная логика, история и философия в последние сталинские годы. Часть 2. М.: Изд-во URSS, 2009.

[5] *Васильев А.В.* Николай Иванович Лобачевский (1792–1856). М.: «Наука», 1992.

[6] *Введенский А.И.* Логика, как часть теории познания. Второе, вполне переработанное, издание. СПб., 1912.

[7] *Введенский А.И.* Логика, как часть теории познания. Третье, вновь переработанное, издание. СПб., 1917.

[8] *Введенский А.И.* Логика, как часть теории познания. Четвертое издание, М.–Пг., 1922 (на обложке — 1923).

[9] *Введенский А.И.* Судьба веры в Бога в борьбе с атеизмом // Мысль. № 2. Март – апрель. СПб.: ACADEMIA, 1922. С. 3–20.

[10] *Введенский А.И.* Судьбы философии в России // Вопросы философии и психологии. СПб., 1898, кн. 42.

[11] *Введенский А.И.* Философские очерки. СПб., 1901, вып. 1.

[12] *Введенский А.И., Лосев А.Ф., Радлов Э.Л., Шпет Г.Г.* Очерки истории русской философии / Сост., вступит. статья и примечания Б.В. Емельянова и К.Н. Любутина. Свердловск: Изд-во Уральского ун-та, 1991.

[13] *Владиславлев М.И.* Логика. Обозрение индуктивного и дедуктивного приемов мышления и исторические очерки логики Аристотеля, схоластической диалектики, логики формальной и индуктивной. СПб., 1872.

[14] *Гайденко П.П.* Иерархический персонализм Н.О. Лосского // Н.О. Лосский. Чувственная, интеллектуальная и мистическая интуиция. М., 1995.

[15] *Джемс У.* Многообразие религиозного опыта. Русск. перев: М., 1910; переиздание — М., 1993

[16] *Зеньковский В.В.* История русской философии. Том II, ч. 1. Л.: Эго, 1991 [перепечатка издания: Ymca-Press. Париж, 1950].

[17] *Лобачевский Н.И.* Научно-педагогическое наследие. Руководство Казанским университетом. Фрагменты. Письма / Отв. ред. П.С. Александров и Б.Л. Лаптев. М.: «Наука», 1976. С. 581–594.

[18] *Лодыженский М.В.* Сверхсознание и пути к его достижению. Индусская Раджа-Йога и христианское подвижничество. СПб., 1911.

[19] *Лосский Н.О.* Логика. Суждение. Понятие. Пг., 1922; 2-е изд. — Берлин, 1923.

[20] *Лосский Н.О.* Обоснование интуитивизма. Спб. 1906.

[21] *Лосский Н.О.* Обоснование интуитивизма // Избранное. М.: Изд-во «Правда», 1991.

[22] *Лосский Н.О.* Общедоступное введение в философию. Франкфурт-на-Майне: изд-во «Посев», 1956.

[23] *Лосский Н.О.* Основные учения психологии с точки зрения волюнтаризма. СПб., 1903.

[24] *Лосский Н.О.* Типы мировоззрений; Введение в метафизику. Париж: изд-во «Современные записки», 1931.

[25] *Лосский Н.О.* Учение о перевоплощении; Интуитивизм. М.: Изд. группа «Прогресс», VIA, 1992.

[26] *Лосский Н.О.* Чувственная, интеллектуальная и мистическая интуиция. Париж, 1938.

[27] *Лосский Н.О.* Чувственная, интеллектуальная и мистическая интуиция. М.: Изд-во «Республика», 1995.

[28] *Мальцев С.И.* Лосский Николай Онуфриевич // Русская философия. Малый Энциклопедический словарь. М.: «Наука», 1995.

[29] Мысль. Журнал Петербургского Философского общества / Под ред. Э.Л. Радлова и Н.О. Лосского. № I. СПб.: ACADEMIA, 1922. С. 187.

[30] *Пионтковская Т.В.* О логике в Императорском университете Св. Владимира // Современная логика: проблемы теории, истории и применения в науке. VIII Общероссийская научная конференция. СПб., 2004. С. 307.

[31] *Плахтий М.П.* Формы мышления в рукописном наследии П.Д. Юркевича // Современная логика: проблемы теории, истории и применения в науке. Материалы IX Общероссийской научной конференции. СПб., 2006.

[32] *Попова В.С.* Некоторые аспекты логической дискуссии А.И.Введенского и Н.О.Лосского // Современная логика: проблемы теории, истории и применения в науке. Материалы IX Общероссийской научной конференции. СПб.: Издание Санкт-петербургского государственного ун-та, 2006.

[33] *Соловьев Вл.* Оправдание добра (1894-1895; отд. издание 1897); переиздание: Вл.Соловьев. Соч., т. I, М., 1988.

[34] *Тренделенбург А.* Логические исследования. Ч. 1 и 2. М.: Издание К. Солдатенкова, 1868.

[35] *Филатов В.П.* Жизнь и философская система Н.О. Лосского // Н.О. Лосский. Избранное. М.: Изд-во «Правда», 1991.

[36] *Baumeister F.Chr.* Institutiones philosophiae rationalis methodo Wolfii conscriptae. Vitembergae, 1735.

[37] *Risse W.* Bibliographia logica. Verzeichnis der Druckschriften zur Logik mit Angabe ihrer Fundorte. B. I: 1472–1800. Hildesheim: G. Olms Verlag, 1965.

[38] *Risse W.* Bibliographia logica. Verzeichnis der Druckschriften zur Logik mit Angabe ihrer Fundorte. B. II: 1801–1969. N.Y., 1973.

Логический плюрализм и неклассическая теория категорий

В. Л. Васюков

abstract. Logical pluralism prove to be much more intruiging phenomenon if we envisage its impact on elementary logical theories. Breaking the tenet of the unique (namely, classical) logical basis for those we find ourself in the realm of non-classical elementary logical theories based on the various non-classical logics. It is expecially important if we take into account that such theories underlie non-classical mathematics according to the apt slogan "there are as many mathematics as logics" — suffish it to recall relevant arithmetic, quantum set theory, fuzzy set theory, paraconsistent mathematics etc. In the paper non-classical axiomatic category theories are approached which are based on some non-classical categorical constructions.

Keywords: pluralism, non-classical categories, axiomatic category theory, category theory of categories

1 Введение

Сегодня логический плюрализм представляется совершенно естественной точкой зрения для большинства работающих логиков и кажется тривиальным обсуждать влияние, которое он оказывает на логические исследования в целом. Мы знаем, что существует множество разнообразных логических систем, а их взаимовлияние и соперничество представляется достаточно интересной сферой исследования современной логики и методологии (см. [6]). Но ситуация оказывается гораздо более интригующей, если мы обратимся к рассмотрению следствий логического плюрализма для элементарных логических теорий, где молчаливо предполагается, что в их основании лежит классическая логика.

Мы по-разному оцениваем эти последствия, принимая во внимание особенности семантики неклассических логических систем. Это вызвано тем, что мы можем интерпретировать элементарные теории в

- структурах, основанных на классической логике, и
- структурах, основанных на некласических логиках.

Дело в том, что при рассмотрении теоретико-множественных конструкций мы, как правило, подразумеваем, что с формальной точки зрения абстрактная теория множеств является элементарной логической теорией, основывающейся на классической логике. И как таковая она может быть модифицирована в своей логической части. Например, у нас имеется нечеткая теория множеств FZF, основанная на нечеткой логике FL [13], квантовая теория множеств на базе квантовой логики [12], паранепроттиворечивая теория множеств ZF_1, основанная на паранепротиворечивой логике да Косты [8], и т.д. Мы вольны выбрать любую из них для конструирования требуемых нам моделей (и множеств, которые нам нужны).

Но это не единственный способ. Мы можем использовать логические теории, основанные на классической логике (которые обычно рассматриваются без всякого обоснования как единственные настоящие элементарные логические теории), интерпретируя в них неклассические теории или эксплуатируя с этой целью конструкции соответствующих фрагментов классических элементарных теорий (даже не осознавая этого).

Следует также принять во внимание, что теории множеств не являются единственными подобными теориями. Нетрудно указать в связи с этим, например, на конструкцию релевантной арифметики [10], которая разработана как раз согласно такому «плюралистическому» алгоритму на базе релевантной логики. Другой пример еще более показателен — К.Мортенсен описывает противоречивую математику на базе паранепротиворечивой логики [11]. Похоже, что к данной ситуации более всего подходит лозунг, годящийся для всех этих случаев — «существует столько математик, сколько и логик».

Попробуем прояснить подробности этого лозунга на примере теории категорий, которая может быть преобразована в интересный пример неклассической элементарной логической теории.

2 Встраивание неклассических логик

Мы обнаруживаем множество неклассических логик в моделях, основанных на классических логиках. Среди них семантика возможных миров, алгебраическая семантика, топологическая семантика — просто потому, что они используют конструкции, построенные из множеств, источником которых является абстрактная теория множеств.

В теории категорий мы получаем интерпретации неклассических логик путем использования топосов функторов из малых категорий в категорию множеств Set. В качестве же множеств — объектов категории Set — мы берем классические множества абстрактной теории множеств Цермело–Френкеля ZF и сопоставляем их элементам алгебраической модели соответствующей неклассической логики. Именно так мы получаем интерпретацию интуиционистской логики путем использования алгебры Гейтинга P в роли малой категории и строя оценку интуиционистских формул с помощью Set^P-оценки $V : \Phi_0 \to Set^P(1, \Omega)$, которая выбирает некоторое множество для любого элемента P (см. [4]).

Если мы, распространяя этот метод на другие логики, попытаемся заменить алгебру Гейтинга на другую, например, алгебру да Косты, то мы сталкиваемся с проблемой интерпретации отрицания: в алгебре Гейтинга отрицание не является примитивной операцией в отличие от алгебры да Косты, потому совершенно неясно, как действовать в этом случае. Выход заключается, по-видимому, в использовании конструкции так называемых N-категорий. В рассматриваемом случае нам нужна CN-категория C, которая является категорией предпорядка, снабженной контравариантным функтором $N : \mathcal{C} \to \mathcal{C}$, таким, что

(i) в $\mathcal{C}$ имеются конечные произведения $\langle -, - \rangle$, копроизведения $[-, -]$ и $\mathcal{C}$ является дистрибутивной решеткой по отношению к ним, т.е.
$\langle [a, b], [a, c] \rangle \cong [a, \langle b, c \rangle]$ имеет место для любых объектов a, b, c из $\mathcal{C}$;

(ii) в $\mathcal{C}$ имеется инициальный объект 0 и терминальный объект 1, $1 \cong [a, Na]$ и $0 \cong \langle a^0, Na^0 \rangle$, где $a^0 = N\langle a, Na \rangle$;

(iii) для любого объекта a из $\mathcal{C}$ имеются стрелки $N^2 a \to a$ и $a^0 \to (Na)^0$ в $\mathcal{C}$;

(iv) $\mathcal{C}$ допускает экспоненцирование;

(v) $a \to b$ является стрелкой в $\mathcal{C}$ тогда и только тогда, когда $a \Rightarrow b \cong 1$ для любой пары объектов a, b в $\mathcal{C}$, где $a \Rightarrow b$ есть экспоненциал;

(vi) для любой пары объектов a, b в $\mathcal{C}$ имеется стрелка $a^0 \to (b \Rightarrow a) \Rightarrow ((b \Rightarrow Na) \Rightarrow Nb)$ в $\mathcal{C}$.

Теперь, строя топос $Set^{\mathcal{C}}$, мы получаем интерпретацию формул паранепротиворечивой логики да Косты C_1,которая будет основана на $Set^{\mathcal{C}}$-оценке, представляющей собой функцию $V : \Phi_0 \to Set^{\mathcal{C}}(1, \Omega)$, сопоставляющую каждой пропозициональной переменной π_i некоторое истинностное значение $V(\pi_i) = 1 \rightarrowtail \Omega$ (см. [14]).

Другим примером является интерпретация релевантной логики R в категории $Set^{\mathcal{A}}$-функторов из RN-категории $\mathcal{A}$ в категорию множеств Set [1]. Здесь RN-категория $\mathcal{A}$ является (групоидальной) категорией предпорядка, наделенной ковариантным бифунктором $\otimes : \mathcal{A} \times \mathcal{A} \to \mathcal{A}$, таким, что

(i) в $\mathcal{A}$ имеются конечные произведения $\langle -, - \rangle$, копроизведения $[-, -]$ и $\mathcal{A}$ дистрибутивна по отношению к ним;

(ii) для любых объектов a, b, c в $\mathcal{A}$ имеются следующие естественные изоморфизмы:

$a \otimes [b, c] \cong [a \otimes b, a \otimes c]$,
$[b, c] \otimes a \cong [b \otimes a, c \otimes a]$,
т.е. бифунктор сохраняет копроизведения;

(iii) $\mathcal{C}$ допускает экспоненцирование относительно $\otimes$, т.е. следующая диаграмма коммутирует

$$\begin{tikzcd}
(a \Rightarrow b) \otimes a \arrow[r, "ev"] & b \\
c \otimes a \arrow[u, "\hat{g} \otimes 1_a"] \arrow[ur, "g"'] &
\end{tikzcd}$$

где $\Rightarrow$ есть экспоненциал;

(iv) выполняются следующие функторные уравнения:

(a) $(g_1 f_1) \otimes (g_2 f_2) = (g_1 \otimes g_2)(f_1 \otimes f_2)$;

(b) $1_A \otimes 1_B = 1_{A \otimes B}$.

Интерпретация формул R здесь основывается на $Set^{\mathcal{A}}$-оценке, являющейся функцией $V : \Phi_0 \to Set^{\mathcal{A}}(1, \Omega)$, сопоставляющей каждой пропозициональной переменной π_i некоторое истинностное значение $V(\pi_i) = 1 \rightarrowtail \Omega$.

Еще одним случаем является интерпретация квантовой логики в топосе $Set^{\mathcal{E}}$, где $\mathcal{E}$ есть ортомодулярная решетка, которая может рассматриваться в некотором смысле как перевод квантовой логики (основанной на ортомодулярной решетке) в контекст универсума множеств [2]. Здесь $\mathcal{E}$ есть ортомодулярная категория, т.е. категория, снабженная контравариантным функтором $N : \mathcal{E} \to \mathcal{E}$, таким, что

(i) в $\mathcal{E}$ имеется инициальный объект 0 и терминальный объект 1;

(ii) в $\mathcal{E}$ имеются конечные произведения $\langle -, - \rangle$ и конечные копроизведения $[-.-]$;

(iii) $N^2 a \cong a$ для любого объекта a в $\mathcal{E}$; $\langle a, Na \rangle \cong 0, [a, Na] \cong 1$ для любого объекта a в $\mathcal{E}$;

(iv) $N[a, b] \cong \langle Na, Nb \rangle, N\langle a, b \rangle \cong [Na, Nb]$ для любой пары объектов a, b в $\mathcal{E}$.

(v) если $a \to b$ есть стрелка в $\mathcal{E}$, то $[a, \langle Na, b \rangle] \cong b$ для любых двух объектов a, b в $\mathcal{E}$.

Соответствующая интерпретация некоторых систем квантовой логики получается таким же образом, путем использования $Set^{\mathcal{E}}$-оценки.

3 Неклассические категории

По-видимому, топосы являются не единственными категорными универсумами, пригодными для интерпретации неклассических логик. Более тщательный анализ этого вопроса показывает, что мы можем расширить конструкцию топоса подобно тому, как вводятся неклассические теории множеств, для получения более естественной категорной семантики неклассических логик. Первым шагом на этом пути будет рассмотрение конструкции *потоса* или *топоса да Косты* - категорного эквивалента алгебры да Косты (см. [3]).

Потос представляет собой паранепротиворечивый универсум, в котором можно развивать паранепротиворечивую математику подобно тому, как это было сделано в случае интуиционистской математики в топосах. В потосе паранепротиворечивость абсолютно имманентна и, более того, она лежит в основе всех конструкций, она глобальна и универсальна. Здесь уже классическая математика выступает как артефакт в паранепротиворечивом универсуме, как некоторое локальное отклонение от паранепротиворечивой регулярности. Таким образом, например, при интерпретации C_n-систем можно использовать неистинностно-функциональную оценку, в то время как истинностно-функциональная оценка становится характеристикой лишь случая булевых топосов, которые теперь являются частным случаем потосов.

Более формально, потос C можно определить как декартово замкнутую категорию, которая также комплементарно замкнута и содержит классификатор подобъектов. Комплементарная замкнутость C означает, что

(i) для любого объекта a из C имеется объект a', такой, что в C существуют стрелки $a'' \to a$ и $a^o \to (a')^o$, где $a^o = \langle a, a' \rangle'$,

(ii) $1 \cong [a, a'], 0 \cong \langle a^o, a^{o\prime} \rangle$,

(iii) для любых двух объектов в C имеется стрелка $a^o \to (b \Rightarrow a) \Rightarrow ((b \Rightarrow a') \Rightarrow b')$, где $b \Rightarrow a$ представляет собой экспоненциал.

Как следствие введенной новой конструкции приходится рассматривать новую категорию паранепротиворечивых множеств $PSet$, где в качестве объектов используются ZF_1-множества паранепротиворечивой теории множеств (см. [8]). Система ZF_1 согласуется с теорией множеств Цермело–Френкеля ZF_0 так же, как паранепротиворечивое первопорядковое исчисление с равенством согласуется с классическим. В то же время категория

$PSet$ оказывается не топосом, но потосом множеств, и поэтому может быть построена интерпретация в потосе $PSet^A$ и можно доказать полноту C_1 по отношению к подобной семантике.

Рассмотренная выше конструкция топоса $Set^{\mathcal{E}}$, где $\mathcal{E}$ является ортомодулярной решеткой, может рассматриваться, в некотором смысле, как перевод квантовой логики (основанной на ортомодулярной решетке) в контекст интуиционистского универсума, поскольку Set представляет собой топос (будучи интуиционистской конструкцией по своему происхождению). Но всегда ли нам нужен именно интуиционистский универсум в качестве основы подобного рассмотрения? Представляется более стественным использовать категории, содержащие квантовую логику в качестве своей внутренней структуры. Существуют формулировки квантовой теории множеств (см. [12]) ZF, которые отличаются от классической теории множеств, и это позволяет думать, что подобные множества не порождают топос. В этом случае $QSet^{\mathcal{E}}$ (где $QSet$ является категорией квантовых множеств) не будет топосом и рассмотренная выше интерпретация проваливается.

Чтобы обойти подобные трудности, можно рассмотреть конструкцию *квантоса*, которую можно охарактеризовать как неклассическую модификацию топоса с некоторой дополнительной структурой, позволяющей истолковать частичность отрицания в квантовой логике [15]. Квантос $\mathcal{Q}$ представляет собой биполную категорию, которая также комплементарно замкнута, ортомодулярна и имеет классификатор подобъектов Ω. Комплементарная замкнутость означает, что

(i) для любого объекта b из $\mathcal{Q}$ имеется объект a', такой, что $a'' \cong a$ и для любой стрелки $a \to b$ в $\mathcal{Q}$ имеется стрелка $b' \to a'$;

(ii) $\langle a, a' \rangle \cong 0, [a, a'] \cong 1$ для любого объекта a из $\mathcal{Q}$;

(iii) $[a, b]' \cong \langle a', b' \rangle, \langle a, b \rangle' \cong [a', b']$ для любых двух объектов a, b из $\mathcal{Q}$.

Ортомодулярность означает, что

(iv) *если* $a \to b$ есть стрелка в $\mathcal{Q}$, то $[a, \langle a', b \rangle] \cong b$ для любых двух объектов a, b из $\mathcal{Q}$.

Категория $QSet$ оказывается квантосом и точно так же доказывается, что категория $QSet^{\mathcal{E}}$ тоже будет квантосом. Одни и те же системы квантовой логики интерпретируются в обоих типах квантосов гораздо более естественно, чем это делается в случае $Set^{\mathcal{E}}$. В некотором смысле квантосы можно рассматривать как квантовый категорный универсум для квантовологических исследований.

4 Классическая элементарная теория категорий

Наконец, как уже было сказано, с логической точки зрения теория категорий может рассматриваться как элементарная теория, чьи «категорные» нелогические аксиомы добавляются к первопорядковому исчислению с равенством. Подобный подход был реализован в 60–70-х гг. У. Хэтчером, Ж. Бланом и М.-Р. Доннадью и другими. Формально подход Блана и Доннадью можно описать следующим образом.

Язык элементарной аксиоматизированной теории категорий $ETAC$ определяется с помощью

(i) счетного множества переменных двух типов: переменных типа объект $x_1, x_2, ...$ и переменных типа стрелки $f, g, h, ...$;

(ii) логических констант: $\Rightarrow, \Leftrightarrow, \wedge, \vee, \neg, \exists, \forall, =$;

(iii) тернарного предиката $D(-,-,-)$, где первая переменная есть переменная типа стрелки, а две остальные являются переменными типа объект ($D(f, x_1, x_2)$ означает «f есть стрелка из x_1 в x_2»);

(iv) тернарного предиката $\Gamma(-,-,-)$, где все переменные являются переменными типа стрелки ($\Gamma(f, g, h)$ означает «h есть композиция f и g»).

$ETAC$ аксиоматизируется с помощью следующих схем аксиом:

Ax1. $\forall f \exists! x_1, x_2 [D(f, x_1, x_2)]$

Ax2. $\forall x_1 \exists i [\Phi(x_1, i) \wedge D(i, x_1, x_1)]$, где $\Phi(x_1, i)$ есть формула

$$\forall f, g, x_2, x_3 [D(f, x_1, x_2) \wedge D(g, x_3, x_1) \Rightarrow \Gamma(i, f, f) \wedge \Gamma(g, i, g)]$$

Ax3. $\forall h \Gamma(f,g,h) \Rightarrow \exists x_1, x_2, x_3[D(f,x_1,x_2) \wedge D(g,x_2,x_3) \wedge D(h,x_1,x_3)]$

Ax4. $D(f,x_1,x_2) \wedge D(g,x_2,x_3) \Rightarrow \exists h \Gamma(f,g,h)$

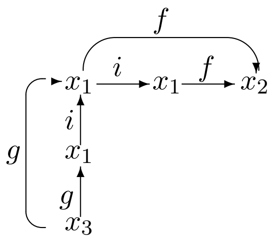
Ax5. $\Gamma(f,g,h) \wedge \Gamma(f,g,h\prime) \Rightarrow h = h'$

Ax6. $\Gamma(f,g,k) \wedge \Gamma(g,h,l) \wedge \Gamma(f,l,m) \wedge \Gamma(k,h,m') \Rightarrow m = m'$

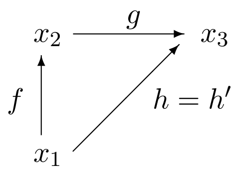
Интуитивный смысл этих аксиом можно было бы передать с помощью следующих диаграмм:

Ax1. $x_1 \xrightarrow{f} x_2$

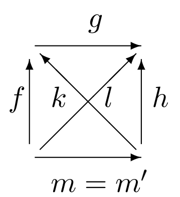
Ax2.



Ax3,Ax4,Ax5.



Ax6.



Для описания структуры категорий нам необходим метаязык, позволяющий описывать строение конкретной категории. Подобный язык элементарной теории категории категорий CC образуется путем добавления к языку $ETAC$ следующих нелогических символов:

- символы констант типа объект **0,1,2,3**;
- символы констант типа стрелка σ,$\delta_0, \delta_1, \tau, \alpha, \beta, \gamma$;
- $|-|$, функциональный символ, определенный на переменных типа объект с областью значений на переменных типа стрелка;
- $d_{(-)}$, функциональный символ, определенный на переменных типа объект с областью значений на переменных типа стрелка.

Аксиомы CC выглядят следующим образом:

Ax2-1. Конъюнкция всех аксиом $ETAC$.

Ax2-2.

$$\begin{tikzcd} \mathbf{0} \arrow[r, "\sigma"'] & \mathbf{1} \arrow[r, bend left, "\delta_0"] \arrow[r, bend right, "\delta_1"'] & \mathbf{2} \arrow[l, "\tau"'] \arrow[r, "\gamma"'] \arrow[r, bend left, "\alpha"] \arrow[r, bend right, "\beta"'] & \mathbf{3} \end{tikzcd}$$

где все константы различны, **0** является инициальным объектом, **1** является терминальным объектом и **2** есть генератор.

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 2-1. *Интерпретация формулы ETAC в терминах объектов CC.* Пусть ф будет регулярной формулой в языке $ETAC$ (т.е. такой, что в ней нет свободных переменных, каждая переменная связана квантором). Известно, что всякая формула является эквивалентной регулярной формуле. Пусть $A, B, \ldots, C$ есть n переменных типа объект со свободными переменными типа объект из ф, и пусть $f, g, \ldots, h$ будут m переменными типа стрелка со свободными переменными типа стрелка. Пусть $a, b, \ldots, c; x, y, \ldots, z$ будут $m + n$ переменными типа стрелка, отличные друг от друга и отличные от $f, g, \ldots, h$, и A' есть переменная типа объект. Определим формулу теории CC

$$\Phi^*(A'; a, b, \ldots, c; x, y, \ldots, z),$$

которую для удобства назовем интерпретацией ф в A', индукцией по длине формулы. Если ф есть $D(f, B, C)$, тогда $\Phi^*(A; x, b, c)$ будет формулой

$$x : 2 \to A \wedge b : 1 \to A \wedge c : 1 \to A \wedge \delta_0 x = b \wedge \delta_1 x = c.$$

Если ф есть (f, g, b), тогда $\Phi^*(A; x, y, z)$ (обозначаемая так же как $x._A y = z$) будет формулой

$$\bigwedge_{u=x,y,z} u : 2 \to A \wedge \exists t : 3 \to A(\alpha t = x, \beta t = y, \gamma t = z).$$

Если ф есть $\psi_1 \wedge \psi_2$, тогда $\Phi^*(A'; a, \ldots; x, \ldots)$ будет формулой

$$\psi_1^*(A'; a, \ldots; x, \ldots) \wedge \psi_2^*(A'; a, \ldots; x, \ldots).$$

Если ф есть $\exists B\psi(B, C, \ldots; f, \ldots)$, тогда $\Phi^*(A\prime; c, \ldots; x, \ldots)$ будет формулой

$$\exists b : 1 \to A\psi * (A; b, c, \ldots; x, \ldots),$$

где b отлично от $\{c, \ldots; x, \ldots\}$. Если ф есть $\exists f\psi$, тогда $\Phi^*(A; b, \ldots; y, \ldots)$ будет формулой

$$x : 2 \to A\psi^*(A; b, \ldots; x, y, \ldots),$$

где x отлично от $\{b, \ldots; y, \ldots\}$. Если ф есть $\neg\psi$, тогда $\Phi^*(A; a, \ldots; x, \ldots)$ будет формулой

$$\neg\psi^*(A; a, \ldots; x, \ldots).$$

Обозначим $A \vDash$ ф для $CC \vdash \Phi(A)$. Говорят, что x является:

стрелкой в A для $(CC \vdash x : 2 \to A)$, обозначая это как $x \in A$,

объектом в A для $(CC \vdash x : 1 \to A)$, обозначая это как $x \in A$,

элементом A для x есть стрелка или объект в A.

Ax2-3. $\forall A(A \vDash E)$, где E представляет собой конъюнкцию аксиом $ETAC$.

Каждый объект CC будет называться категорией, а каждая стрелка будет называться функтором.

Ax2-4 *(конечные пределы и копределы).* Для каждой пары категорий существует произведение и копроизведение. Для каждой пары функторов с общей областью и кообластью существует уравнитель и коуравнитель.

Ax2-5 *(обратный образ суммы).* Пусть

$$\begin{tikzcd} & A+B \arrow[dl, "i"'] \arrow[dr, "j"] & \\ A & & B \end{tikzcd}$$

где i и j являются инъекциями суммы:

$(\forall x : 2 \to A + B)[(\exists y : 2 \to A(x = yi))$ или $(\exists y : 2 \to B(x = yj))]$.

Ax2-6. Это декартово замкнутая категория.

Обозначим A^B экспоненциал A и B и

$$e_A^B : B \times A^B \to A$$

есть функтор оценки. A^B и e_A^B определяются с помощью свойства универсальности

$$\forall f : B \times Z \to A \exists! h : Z \to A^B [(1(B) \times h) e_A^B = f.$$

h будет называться экспоненциально сопряженной с f и будет обозначаться $\tilde{f}$.

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 2-2 *(дискретная категория).* A является дискретной (*дискретом*) тогда и только тогда, когда

$$\forall x : 2 \to A \exists y : 1 \to A(x = \tau y).$$

Ax2-7. $|A|$ является дискретом и d_A является мономорфизмом и

$$(\forall \text{дискрета } B)(\forall f : B \to A)(\exists! h : B \to |A|)(h d_A = f).$$

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 2-3 (*символ* $|-|$ *для переменной типа стрелки*). Пусть $f : A \to B$, в таком случае $g = |f|$ тогда и только тогда, когда $d_A f = |f| d_B$.

Ax2-8 (*выбора*). $(\forall f : A \to B)(A \ncong 0$ и $B-$дискрет $\Rightarrow \exists g : B \to A(fgf = f))$.

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 2-4. *Базис эскиза* $\mathcal{E}$ состоит из трех категорий (A_1, A_2, A_3) и функторов d_0, d_1, c, e, a_0, a_1 между этими категориями, таких, что:

$$\begin{tikzcd} A_1 \arrow[r, "e"'] & A_2 \arrow[l, bend right=60, "d_1"'] \arrow[l, bend left=60, "d_0"] & A_3 \arrow[l, "c"] \arrow[l, bend right=60, "a_1"'] \arrow[l, bend left=60, "a_0"] \end{tikzcd}$$

Базис эскиза $\mathcal{E}(A)$, *ассоциированного с* A, состоит из:

$$A_i = |A^i|(i = 1, 2, 3) \qquad d_1 = |A^{\delta_i}|(i = 0, 1)$$

$$a_0 = |A^{\alpha}| \text{ и } a_1 = |A^{\beta}| \text{ и } \mathrm{c} = |A^{\gamma}|.$$

Нотация: $\mathcal{E}$ есть база эскиза,

$$\Phi_{\mathcal{E}}(A_4; b_0, b_1, e_0, e_1, f_0, f_1)$$

обозначает соответствующую формулу:

$$A_4 \underset{f_i}{\overset{b_i}{\rightrightarrows}} A_5 \text{ и } A_2 \xrightarrow{e_i} A_3 \ (i = 0, 1)$$

$$\text{и } \left\{ \begin{array}{c} e_0 a_1 = d_1 c \\ e_0 a_0 = I(A_2) \end{array} \right. \quad \text{и } \left\{ \begin{array}{c} e_1 a_0 = d_0 e \\ e_1 a_1 = I(A_1) \end{array} \right.$$

$$\text{и } \left\{ \begin{array}{c} f_0 a_1 = b_0 a_1 \\ f_0 c = b_0 c \end{array} \right. \quad \text{и } \left\{ \begin{array}{c} f_1 a_0 = b_0 a_0 \\ f_1 a_1 = b_1 c \end{array} \right.$$

и $(A_4; b_0, b_1)$ является расслоенным произведением (a_1, a_0) проекций b_0, b_1 относительно дискретов.

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 2-5. *Эскиз* $\mathcal{E}$ есть база эскиза, для которой $(A_3; a_1, a_0)$ является расслоенным произведением (d_0, d_1) с проекциями (a_1, a_0) относительно дискретов и

$$ed_0 = ed_1 = I(A_1) \text{ и } \mathrm{c}d_i = a_i d_i \quad (i = 0, 1)$$

и

$$\Phi_{\mathcal{E}}(A_4; b_0, b_1, e_0, e_1, f_0, f_1) \Rightarrow \bigwedge_{i=0,1} e_i c = I(A_2) \text{ и } f_0 c = f_1 c$$

Гомоморфизм $\mathcal{H}$ *базисов эскизов* из $\mathcal{E}$ в $\mathcal{E}'$ задается тремя гомоморфизмами

$$H_i : A_i \to A'_i \ (i = 1, 2, 3).$$

Здесь

$$\mathcal{H} = (H_1, H_2, H_3) \text{ и } H_i : \mathcal{E} \to \mathcal{E}'.$$

Гомоморфизм $H(h)$ *базисов эскизов, ассоциированных с функтором* $h : A \to B$, определяется как:

$$H(h) = (|h^1|, |h^2|, |h^3|) \text{ или } H(h) : \mathcal{E}(A) \to \mathcal{E}(B).$$

Гомоморфизм эскизов из эскиза $\mathcal{E}$ в $\mathcal{E}'$ представляет собой гомоморфизм базисов эскизов (H_1, H_2, H_3), для которых справедливо:

$$eH_2 = H_1 e' \text{ и } H_3 a'_0 = a_0 H_2 \text{ и } H_3 a'_1 = a_1 H_2 \text{ и } H_3 c' = cH_2.$$

ОПРЕДЕЛЕНИЕ *композиции двух гомоморфизмов эскизов*: пусть

$$\mathcal{E} \xrightarrow{H} \mathcal{E}' \xrightarrow{K} \mathcal{E}'',$$

где

$$H = (H_1, H_2, H_3) \text{ и } K = (K_1, K_2, K_3),$$

тогда $HK : \mathcal{E} \to \mathcal{E}''$ есть

$$HK = (H_1 K_1, H_2 K_2, H_3 K_3).$$

Нетрудно убедиться, что в метакатегории эскизов объекты представляют собой эскизы, а стрелки будут гомоморфизмами эскизов.

Ax2-9 (*конструкция категорий и функторов эскизов*).

1^0. $\forall A \forall B \forall h : A \to B, \mathcal{E}(A)$ и $\mathcal{E}(B)$ являются эскизами и $H(h)$ есть гомоморфизм эскизов из $\mathcal{E}(A)$ в $\mathcal{E}(B)$.

2^0. Для любых эскизов $\mathcal{E}$ и $\mathcal{E}'$, любых гомоморфизмов эскизов $H : \mathcal{E} \to \mathcal{E}'$ существуют A и A', и существует один и только один $h : A \to A'$, и существует изоморфизм эскизов ψ и ψ', такие, что диаграмма

$$\begin{tikzcd}
\mathcal{E} \arrow[r, "H"] \arrow[d, "\psi"'] & \mathcal{E}' \arrow[d, "\psi'"] \\
\mathcal{E}(A) \arrow[r, "H(h)"'] & \mathcal{E}(B)
\end{tikzcd}$$

коммутативна.

5 Неклассические элементарные теории категорий

Существуют другие варианты аксиоматики теории категорий, позволяющие передать более сложные категорные структуры и конструкции. При этом они могут быть основаны на другом выборе нелогических предикатов. Так, в работе [9] строится паранепротиворечивая теория категорий OB_1, основанная на паранепротиворечивой логике да Косты, с одной стороны, и на теории категорий Убиньи–Боша OB — с другой. В OB_1 в отличие от теорий, основанных на классической логике, мы можем конструировать и рассматривать противоречивые структуры, которые по своей природе не являются классическими теоретико-множественными структурами.

Действуя подобным образом, мы получаем паранепротиворечивую теорию категории категорий PCC, основанную на паранепротиворечивой логике и рассмотренной выше теории Блана–Доннадью CC. Базисной логикой PCC является $C_1^=$ (паранепротиворечивая логика предикатов с равенством, надстроенная над логикой C_1 да Косты). Специфика аксиоматики PCC сводится к следующему: если A есть аксиома CC, то A и A^* (A^* получается путем замены всех вхождений $\neg$ на $\neg^*$, где $\neg^* A$ означает $\neg A \wedge A^o$ и A^o есть сокращение для $\neg(A \wedge \neg A)$) будут аксиомами PCC.

ТЕОРЕМА 1. *Пусть F будет формулой языка CC. Тогда если F является теоремой CC, то F^* есть теорема PCC.*

Доказательство. Является следствием аксиом CC и PCC и того факта, что $\neg^*$ представляет собой классическое отрицание (см. [8]). Q.E.D.

ТЕОРЕМА 2. *CC содержится в PCC.*

Доказательство. Это следует из того факта, что C_1 лежит в основании $C_1^=$. Q.E.D.

ТЕОРЕМА 3. *PCC является паранепротиворечивой системой.*

Доказательство. Если добавить расселово множество к PCC, т.е. множество $R = \{x : x \notin x\}$ где $x \notin x$ означает $\neg(x \in x)$ (слабое отрицание), то результирующая система не будет тривиальной (см. [7]).

Таким образом, PCC является очень сильной системой, в которой мы можем развить не только всю классическую математику, но также и исследовать такие «противоречивые» математические структуры, как расселово множество. В PCC мы можем сконструировать другие типы «противоречивых» структур, не являющихся классическими теоретико-множественными структурами по своей природе. Например, мы можем рассмотреть некоторую форму парадокса Рассела. С этой целью введем следующее определение

$A \preccurlyeq B =_{def} \neg(A \to 1 \to |B|)$.

Рассмотрим категорию K, такую, что

$A \preccurlyeq K \leftrightarrow \neg(A \preccurlyeq A)$.

Как следствие, получаем

$K \preccurlyeq K \leftrightarrow \neg(K \preccurlyeq K)$

и

$K \preccurlyeq K \wedge \neg(K \preccurlyeq K)$. Q.E.D.

Действуя сходным образом, мы можем рассмотреть квантовую теорию категории категорий QCC, основанную на первопорядковой квантовой логике с равенством и рассмотренной выше теории Блана–Доннадью. Специфика языка квантовой логики, в частности принципиальное отсутствие в нем связки импликации, в этом случае, например, приводит к тому, что нам не требуется наличия в аксиоматике QCC аксиомы **Ax2-6**, превращающей категорию категорий в декартово замкнутую категорию.

Более того, наша категория категорий должна обладать структурой, подобной квантосу, в частности быть ортомодулярной категорией, чтобы получить возможность моделировать ортомодулярноое отрицание. Отсюда нам потребуются дополнительные аксиомы, позволяющие адекватно интерпретировать квантовую логику в категориях.

Литература

[1] *Васюков В.Л.*. Интерпретация релевантной логики в топосах // Логика и В.Е.К. М., 2004. С. 112-121.
[2] *Васюков В.Л.* Квантовая логика. *М.:* Per Se, 2005.
[3] *Васюков В.Л.* Паранепротиворечивые категории для паранепротиворечивой логики // Логические исследования, вып. 17, М.-СПб.: Центр гуманитарных инициатив, 2011. С. 69-83.
[4] *Голдблатт Р.* Топосы. Категорный анализ логики. М., 1983.
[5] *Blanc G., Donnadieu M. R.* Axiomatisation de la categorie des categories // Cah. Topol. Geom. Different. XVII, 2, 1976. P. 1-38.
[6] *Beall J.C. and Restall G.* Logical Pluralism // Australasian Journal of Philosophy, 78, 2000. P. 475–493.
[7] *N.C.A.da Costa.* On Paraconsistent Set Theory // Logique et Analyse 115, 1986. P. 361-371.
[8] *N.C.A.da Costa.* Paraconsistent Mathematics // Frontiers of Paraconsistent Logic / D.Batens, C.Mortensen, G.Priest and J.-P. van Bendegem (eds.), Research Studies Press Ltd., Baldock, Hartfordshire, England, 2000. P. 166-179.
[9] *N.C.A.da Costa, Bueno O., Volkov A.* Outline of a Paraconsistent Category Theory // Alternative Logics. Do Science Need Them? / Weingartner P. (Ed.), Springer, Berlin, Heidelberg, New York, 2004. P. 95-114.
[10] *Meyer R. K.* Relevant Arithmetic // Bulletin of the Section of Logic of the Polish Academy of Sciences, 5, 1976. P. 133–137.
[11] *Mortensen K.* Inconsistent Mathematics. Dordrecht: Kluwer, 1995.
[12] *Takeuti G.* Quantum Set Theory // Current Issues on quantum logic / Beltrametti S., Fraassen B. Van (eds.). New York; London: Plenum, 1981. P. 303-322.
[13] *Takeuti G. and Titani S.* Fuzzy Logic and Fuzzy Set Theory // Arch. Math. Log., 1992. P. 17-18.
[14] *Vasyukov V. L.* Paraconsistency in Categories // Frontiers of Paraconsistent Logic / D. Batens, C.Mortensen, G. Priest and J.-P. van Bendegem (eds.), Research Studies Press Ltd., Baldock, Hartfordshire, England, 2000. P. 263-278.
[15] *Vasyukov V. L.* Quantum Categories for Quantum Logic (в печати).

П.А. Флоренский о противоречии (логико-методологический анализ)[1]

И. А. Герасимова

abstract. In the theological tradition antinomy, taken as self-contradiction, connection to the thesis and antithesis into a single entity, is understood as the best way to express the integrity of Divine Truth. This conclusion is a common place or antinomic strategies of different religious traditions. Does the concept of logical contradiction express the meaning of antinomy? Analysis of Florensky's texts leads to the idea ofdistiguishing between aspects of logic, reasoning and rhetoric. This distinction helps to investigate the religious texts employing on scientific methodology.

Keywords: Florensky, antinomy, logical contradicion, theology, logic, reasoning, rhetoric

1 Особенности использования языка логики о. Павлом Флоренским

Проблема соотношения логики и теологии становится вновь актуальной в связи с расширением культурологических и религиоведческих исследований. Немалый интерес среди специалистов вызвали труды о. Павла Флоренского, посвященные анализу священных текстов, в котором религиозный мыслитель привлекает методы зарождавшейся математической логики. Он называет ее логистикой. Тексты П.А. Флоренского и особенно «Глава VII. Письмо шестое: противоречие» в книге «Столп и утверждение истины» [12, 13] вызвал дискуссию среди логиков. Основной вопрос, который ставит Флоренский, это проблема выражения Божественной Истины средствами рассудка. Мыслитель обсуждает традиционную проблему передачи бесконечных смыслов конечными средствами языка и логики. Флоренский вслед за Кантом видит решение проблемы в антиномичной стратегии.

[1]Работа выполнена при поддержке РГНФ, грант № 11-03-00761а.

Антиномичность, мыслимая как самопротиворечивость, соединение тезиса и антитезиса в одно целое, в данной традиции понимается как наилучший способ выражения целостности высшей Истины. Для обоснования своих идей мыслитель воспользовался принципами и формальным языком классической логики высказываний — новой для начала XX в. области научного знания. Отмечу, что изучение основ логики во времена Флоренского входило в состав обязательных предметов в богословских учреждениях. Встают вопросы: насколько язык математической логики оказывается адекватным для выражения основной идеи Флоренского? Насколько адекватно понятие логического противоречия представляет понятие антиномии?

Логическому анализу текстов Флоренского посвящен ряд работ, среди которых выделим таких авторов, как Б.В. Бирюков [2, 3], В.А. Бочаров [4], И.П. Прядко [3] и Е.А. Сидоренко [11]. Мнения специалистов разделились. Камнем преткновения стал анализ интерпретации Флоренским задачи Кэррола [11]. Если сформулировать условия задачи на языке логики, то можно поставить вопрос о выводимости из посылок:

$q \to r\,(1)$ и $p \to (q \to \neg r)\,(2)$

формулы $p \to \neg q\,(3)$.

Бирюков в работе 1999 г., а затем в совместной работе с Прядко 2010 г. пишет:

«Флоренский показывает, что данная выводимость в классической пропозициональной логике имеет место, и это используется им для опровержения того, будто Священное Писание и православная догматика противоречивы» [3, с. 59]. Бочаров справедливо замечает, что данная выводимость именно в классической логике не имеет места. Шаг за шагом критикуя логический анализ Бирюкова, Бочаров возмущается оценкой логической компетентности Флоренского. В отношении последнего позиция Бочарова крайне негативная: «Что за абракадабру выдает нам “великий логик”?» — возмущается автор [4, с. 124].

Для каких же целей Флоренский разбирает задачу Кэррола?

Вывод богослова простой: там, где логик или рационалист видит противоречие, духовно просветленный человек усматривает антиномию — средство выразить полноту Божественной Истины. В примере Флоренского q означает противоречивость

Св. Писания и догматики Церкви, r — их небожественное происхождение, а p — состояние духовного просветления.

Идеи Флоренского подробно были исследованы Е.А. Сидоренко. Он выявил недочеты логического анализа философа, о которых последний как не специалист мог и не подозревать. Вместе с тем была предложена реконструкция рассуждения о противоречивости Священного Писания на основе средств немонотонной и паранепротиворечивой логики. Сидоренко предложил вариант реконструкции задачи Кэррола, в котором принимаются оба утверждения:

$q \to r$ (1) и $p \to (q \to \neg r)$ (2).

Если воспользоваться языком немонотонной логики, оказывается позитивно решенной проблема совместимости противоречивости некоторого объекта с божественностью его происхождения. «Если в случае духовного просветления объект (в нашем случае это было Священное Писание) выступает как высшее единство, то его предстающая обыденному (духовно непросветленному) сознанию противоречивость как раз и говорит о божественном его происхождении», — делает вывод Сидоренко [11, с. 182]. Первое высказывание отражает позицию рационалиста, а второе — позицию мистика. Наличие противоречия не ведет к тривиальным следствиям.

Представляется, что Сидоренко наиболее близко подошел к пониманию смысла философско-логических размышлений Флоренского.

Попробуем вдуматься в текст Флоренского путем медленного чтения. Следующий вывод напрашивается с самого начала: в текстах Флоренского формальная запись на искусственном языке логики не согласуется с переводами формул и пояснениями на естественном (русском) языке. Формулы записаны на языке логики, доступной для указанного времени (работа «Столп и утверждение истины» вышла в свет в 1914 г.). А именно — на языке классической логики.

В соответствии с уровнем научного познания начала XX в. Флоренский не различает импликацию и условную связку естественного языка «если, то», а также импликацию и логическое следование. Предполагается, что классическая импликация, условная связка и логическое следование имеют общий смысл. Логика классов (логическая экспликация понятий на формальном языке) не отличается от логики высказываний. В чем же упрощение? Нет оговорки относительно использования формальных средств для представимости выражений естественного языка. Перевод с естественного языка на формальный, и обратно, оказывается чисто условным и не адекватным с современной точки зрения.

Рассмотрим пример Флоренского. Поясняя задачу Кэррола (формулы 1,2), Флоренский приводит в качестве частного случая пример: «Небо — голубое; на закате небо — красное. Что можно заключить отсюда?» [13, с. 503]. Его перевод в язык классической логики: «Обозначим: “небо” — q, “голубое” — r, “на закате”, т.е.: “когда закат”, “если закат”, “закатное”, — p» [11, с. 503]. Напрашивается перевод на язык логики предикатов. Можно использовать язык логики классов. Можно использовать выразительные возможности неклассических логик. Сам Флоренский не делает различий между языком логики высказываний и логики предикатов. О выразительных возможностях неклассических логик ему неизвестно.

Философ говорит на языке логистики, невзирая на правила этого языка. Его мысль выходит за пределы классических формализмов. С точки зрения современного уровня познания можно сказать, что выразительные средства языков неклассических логик позволяют эксплицировать смысл многих рассуждений Флоренского, но отнюдь не всех.

Любопытная деталь. Мысль Флоренского порой выходит за пределы логических стандартов и никакими формальными средствами ее не выразить. Приведу красноречивый пример. Флоренский отличает ложь от антиномии добавлением знака истины в формулу антиномии. Данный шаг, на мой взгляд, свидетельствует о том, что все дело не в новых формализмах, изобретенных логиками, а в попытке выразить содержательные идеи на формальном языке, что выходит за пределы возможностей логики. Нетрудно убедиться, что следующие рассуждения философско-богословские, а не логические.

В формуле (X) к логическому противоречию добавляется знак истины (Veritatis) — V, где P — знак антиномии.

$$P = (p \cap \neg p) \cap V \quad (X)$$

«Переводя формулу (X) на обычный язык, скажем, — поясняет Флоренский, — “Антиномия есть такое предложение, которое, будучи истинным, содержит в себе совместно тезис и антитезис, так что недоступно никакому возражению”. Прибавка же символа V, подымая антиномию над плоскостью рассудка, и есть то, что отличает антиномию P от лжи $\wedge$ (перевернутое V или $\neg$V), лежащей в плоскости рассудочной и определяемой формулой:

$\wedge = (p \cap \neg p) \quad (XI)$» [12, с.152].

Как же отличить ложь от антиномии?

Флоренский следует богословскому решению: последнее слово за духовным авторитетом, которому дарована способность постигать сущность, проявление божественной истины в мирской жизни.

2 Вопрос о рациональном и мистическом познании

Исторически данный вопрос рассматривался как рационалистами, так и мистиками. На языке Флоренского именно антиномия отражает восприятие божественной истины человеком исходя из возможностей его природы. В божественной истине совпадают форма и содержание, она целостна.

«Но, воспринятое и усвоенное тварью, знание Истины ниспадает во время и пространство, — во время многообразия личного и в пространство многообразия общественного. Этим дважды разрывается непосредственное единство формы и содержания, и знание Истины делается знанием об Истине. Знание же об Истине есть истина» [12, с. 141].

Используя язык современной эпистемологии, можно сказать, что здесь предполагается личностное и социокультурное восприятие божественной истины, ее понимание, интерпретация и репрезентация (представленность в обусловленном традициями и менталитетом языке). Когнитивные стили рационалиста и мистика различны. Интерес представляет мнение самих мистиков о мистиках. При чтении текстов духовных учений в восприятие смысла вводится позиция, которая порой опускается неискушенным читателем: *чтобы понять, что говорят, стоит оценить того, кому говорят.* Представляется важным прояснить историко-культурную традицию отношения к Священным текстам.

На становящееся христианское богословие несомненное влияние оказала комментаторская традиция неоплатоников. В древнейших цивилизациях Ближнего Востока была хорошо разработана пропедевтика «говорения по сознанию». Укажем на два распространенных в поздней античности аргументативно-методологических подхода в прочтении текстов. В Афинской школе неоплатоников использовали экзегетический метод, введенный в школьную практику Ямвлихом (основатель сирийской школы неоплатоников, ок. 245/250–ок. 326). «Отличительными особенностями этого метода, — поясняет исследователь античности С.В. Месяц, — были: 1) "принцип единства толкования", требующий разъяснять смысл отдельных частей текста в согласии с его основной темой, и 2) обычай толковать одну и ту же фразу с разных точек зрения: этической (=психологической), физической, теологической, как бы выясняя ее значение на разных уровнях неоплатонической реальности.

Теологическое толкование, в свою очередь, требовало умения различать в комментируемом тексте два способа раскрытия божественных истин: ***образный*** и ***символический***» [9, с. 640]. Считалось, что образный способ используется преимущественно философами в пропедевтических целях пробуждения разумной части души и ее подготовки к чистому рассуждению. Символический способ встречается в мифах и присущ людям, достигшим высших мистических совершенств. Из сказанного становится ясно, что один и то же древний текст не только может трактоваться по-разному, но и будет воспринят по-разному в соответствии с уровнем сознания и когнитивным стилем читателя. Принцип единства толкования выполнял в том числе и защитную функцию, запрещая «вырывать фразу из контекста».

Аргументативная и комментаторская школа неоплатоников оказала влияние на последующих ученых, в том числе и на христианских экзегетов. Христианский мыслитель, учитель Церкви Ориген (185–254) в фундаментальном для становящегося вероучения сочинении «О началах» разделял тех, кто следует ***букве***, ***душе и духу Писания***. Простые люди должны назидаться обычным и историческим смыслом (тело Писания), душевные люди будут переживать смысл в эмоционально-образных формах (например, притчи), но преуспевшие в совершенстве могут подняться до понимания тайной, сокровенной мудрости (дух Писания) [10, с. 258–294]. Не все места Писания могут быть прочитаны буквально, а в кажущихся противоречиях стоит искать высшие, духовные смыслы. Ориген отрицал плотно-телесную природу ума. Сознание не есть функция мозга, если продолжить эту мысль на современном языке, но мозг «участвует» в работе сознания (ума). Преображение природного человека в духовное существо идет по пути очищения и преображения его животной природы.

Следуя библейскому мудрецу Соломону, александрийский богослов обращает внимание на два рода чувств: «один род чувств — смертный, тленный, человеческий; другой род — бессмертный и духовный» [10, с. 47], причем «чувство ума» гораздо выше телесных чувств. Словосочетание «чувство ума» не может передавать тот смысл, который вкладывается в вычислительное, отвлеченное мышление. Имеется в виду духовный ум, который в традиции ассоциируется с чистым сердцем — не физическим органом, но средоточием духовных (божественных) познавательных сил. «Этим-то божественным чувством — не очей, но чистого сердца, т.е. ума — и могут видеть Бога все те, которые достойны (Его)», — поясняет Ориген. В ортодоксальной православной традиции Оригена чтут как учителя церкви, заложившего основы богословия, но не более. Многие положения учения Оригена, которое в философском отношении квалифицируется как христианский неоплатонизм, были отвергнуты в ходе становления официальной доктрины. Среди его учеников по определению церкви оказались и святые, и еретики.

Древнейшая религиозная традиция отдавать предпочтение мистическому перед рациональным в свое время была узаконена бесспорным авторитетом — апостолом Павлом, который занимал крайнюю позицию в отношении образованности и учености. В противостоянии с фарисеями и греческими книжниками противопоставлялось человеческое знание и премудрость Божия, ведь «мир своею мудростью не познал Бога в премудрости Божией» (1 Кор 1, 21). Духовный разум немногих подвижников отличается от отягощенного плотью душевного разума большинства людей. На пути богопознания, по мысли апостола, мистический путь предпочтителен. Павел так напутствовал учеников: «Желаю, чтобы вы все говорили языками; но лучше, чтобы вы пророчествовали; ибо пророчествующий превосходнее того, кто говорит языками, разве он потом и будет изъяснять, чтобы церковь получила назидание» (1 Кор 14, 5). Пророк несет миссию посредника между Богом и людьми, с Богом он общается на незнакомом языке, доступном разуму духовному, но в откровениях и назиданиях опирается на человеческие языки. «А потому, — поясняет Павел, — говорящий на незнакомом языке, молись о даре истолкования» (1 Кор 14, 13). Учение сердца вошло в богословскую традицию, оно получило дальнейшее развитие в русской философской традиции Серебряного века, что отразилось и в творчестве Флоренского.

То, что имеют в виду под «виденьем очами сердца» или духоразумением, при современном восприятии можно понимать как проявление множественных граней интуиции в высших творческих озарениях. Духоразумение, «умное видение», чувствознание — синонимы способности мгновенного непосредственного распознавания сущности, — способности, которой еще предстоит раскрыться в будущем [6].

В самом начале шестого письма Флоренский разграничивает духовное постижение и рациональное. Духовное постижение описывается как целостное переживание в фаворском свете, при этом сознание

> «подымается над "двойною гранью времени и пространства" и входит в вечность, тут, в этом миге провозвещения, Провозглашающий Истину и Провозвещаемая Истина всячески совпадают» [12, с. 143].

Если рациональное познание связано с исследованием, анализом и последующим синтезом, как далее поясняет Флоренский, то в основе мистического постижения лежит тождество объекта и субъекта. К целостности ума ведет его очищение. Очищение от чего? От мирского, а именно: страстей, мирских желаний, власти рассудочного ума. В последнем случае Флоренский говорит о необходимости самоотвержения рассудка, который ведет к односторонности принятием той или иной точки зрения или позиции [12, с. 161]. Показательно отношение к ереси:

«Ересь, даже мистическая, есть рассудочная односторонность, утверждающая себя, как все. $\rho\varepsilon$ — выбор; избрание, склонность или расположение к чему-нибудь, затем избранное, избранный образ мыслей и, отсюда, партия, секта, философская школа. Одним словом, в слове содержится идея односторонности, какого-то прямолинейного сосредоточения на одном из многих возможных утверждений. Православие вселенско, а ересь — по существу партийна» [12, с.161].

Стоит различать путь к Божественной Истине и ее достижение. Сами подвижники и мистики стоят на различных ступенях просветления, их переживания не безусловны, еще отягощены личностным. Только последние приближены к Божественной Истине.

«Самый разум раздроблен и расколот, и только очищенный богоносный ум святых подвижников несколько цельнее: в нем началось срастание разломов и трещин, в нем болезнь бытия залечивается, раны мира затягиваются, ибо и сам-то он — оздоровляющий орган мира» [12, с. 159].

Флоренский поддерживает традицию разграничивать людей по степени духовного развития, по способностям воспринимать Божественную Истину. От трехчастной формулы «тело, душа, дух» на заре христианства в оформившейся религии перешли к двухчастной «тело, душа-дух», что нашло выражение в формулировке «следовать букве или следовать духу Писания». В философских исследованиях по книжности средневековой Руси принято считать, что Писание допускает буквалистское и аллегорическое прочтение[2]. Представляется, что эти установки в методологическом отношении требуют прояснения, и, возможно, свой вклад внесет анализ проблемы антиномий.

3 Попытка представить язык аргументации на языке логики

В тексте Флоренского широко используются идеи, принципы и термины теории аргументации.

Напомню основной тезис Флоренского:

Божественная истина может быть выражена на языке рассудка только как антиномия. Форма антиномии наиболее полно отражает тот или иной аспект (свойство) Божественной Истины.

[2] См., например, комментарии В.В. Милькова к изданию космологических произведений книжности древней Руси [8].

Рассмотрим ***логический*** и ***аргументативный*** аспекты данного вопроса.

Флоренский поясняет:

«Жизнь бесконечно полнее рассудочных определений <...> Рассудочная формула тогда и только тогда может быть превыше нападений жизни, если она всю жизнь вберет в себя, со всем ее многообразием и со всеми ее наличными и имеющими быть противоречиями. Рассудочная формула может быть истиною тогда и только тогда, если она, так сказать, предусматривает все возражения на себя и отвечает на них. (Подчеркнуто мною. — *И.Г.*). Но, чтобы предусмотреть все возражения, — надо взять не их именно конкретно, а предел их. Отсюда следует, что истина есть такое суждение, которое содержит в себе и предел всех отменений его, или, иначе, истина есть суждение самопротиворечивое» [12, с. 146–147].

Логический и аргументативный аспекты представлены в данном отрывке совершенно ясно. Действительно, в практике аргументации существует немало техник (например, средневековая хрия — мини-речь), предусматривающих возражения и снимающих их. В повседневных и специальных практиках типа юридической или богословской возражения, как правило, представляются такие, какие можно опровергнуть. Если формулировку тезиса довести до крайней позиции, то возникает возможность использовать средства классической логики, которая четко противопоставляет высказывание и его отрицание, истину и ложь (нет ничего среднего). По мысли Флоренского, объединение тезиса и антитезиса может дать полноту выражения смысла и, следовательно, приблизить к Божественной Истине.

Правомерен вопрос: действительно ли понятия тезиса и антитезиса в аргументации адекватно выразимы через высказывание и его отрицание? Как показывает логический анализ, например проделанный Сидоренко, ответ отрицательный. Скорее корректно использовать средства неклассических логик — релевантной, паранепротиворечивой, эпистемической. В большинстве ситуаций союз «и», соединяющий тезис и антитезис, отражает метауровень языка. Скорее речь идет о возможной истине и возможной лжи, о возможности тезиса или возможности антитезиса. Само суждение (p), входя в состав отрицания (не – p) меняет свой смысл, поскольку изменен контекст. Правильней было бы писать, например, p — тезис, q — антитезис. Делаем вывод: средств классической логики недостаточно для выражения тезиса и антитезиса в аргументативных ситуациях. Соединение тезиса и антитезиса по типу дополнительности выполняет ценную методологическую роль, восполняя пробелы в неполноте информации. В стремлении воспроизвести полноту жизненной ситуации рациональный ум мысленно моделирует множество ситуаций, обнаруживая множество граней единой целостности.

4 Почему необходимы антиномии?

Логический аспект мы уже рассмотрели. Антиномии воссоздают полноту аргументативной ситуации, скажем современным языком, по принципу дополнительности. Впервые интерпретацию антиномий по принципу дополнительности предложил математик А.Н. Паршин [15]. Методология выдвижения альтернатив или моделей в современной науке составляет основу неклассической рациональности.

В вопросе об антиномиях имеются также риторический и психологический аспекты. Дело в том, что крайняя поляризация, противоречивость, преувеличение (гипербола) или преуменьшение (литота), доведение до нелепости, до карикатуры, провокационные вопросы имеют особое значение для человеческого восприятия и понимания. Их можно назвать риторическими приемами, побуждающими человека мыслить, порождать смыслы. В искусстве несомненно противоречивость, крайнее противостояние предпочитается дополнительности. Для профессионального музыканта «противоречивая противоположность» имеет несомненное преимущество перед «дополнительностью». В философском отношении это означает, что принципу единства множественного (принципу дополнительности) предпочитается принцип динамики противоположностей. Считается, что в истории музыки переход от контрапунктического (времена Баха) к комплементарному началу ознаменовал стратегию сглаживания противоречий. Мнение профессионала:

> «В этом переходе возвышался голос поздней эпохи, а еще — голос культуры, которая все примиряет, собирает и хранит собранные богатства на благо полноты и космополитичности искусства. Но в то же время примирение и собирание указывают на культуру, которая усыпляет бодрые силы духа своей

благодушно-отзывчивой терпимостью. Complementum, дополнение, притупляет внимание, принимая диагональное целое как неизбежную и, однако, несиюминутную данность, как дело времени, идущего само собой и неспешно. Contrario будоражит ум, взывает к чувствам, оживляет дух, сообщает звуковой диагонали несколько авантюрный характер, который требует для рискованно-стремительного, или, иначе говоря, орнаментально подобного, завоевания вертикали. Complementum растягивает и ослабляет, contrario предельно сжимает и усиливает музыкальное выражение» [14, с. 14–15].

Эффект доведенного до предела обострения используется в особых практиках остановки «ума» в дзен-буддизме (коаны), в буддизме Махаяны. В определенном смысле Флоренский поддерживает религиозно-психологическую традицию «трасцендирования», выхода за пределы привычного мышления и опыта с тем, чтобы возбудить интуицию и спровоцировать духовные состояния сознания. Сама логика (логический ум) помогает достичь состояний просветления.

Развивая мысль о формулировке (X), Флоренский пишет:

«В области же сверхчувственной и, значит, сверхрассудочной прибавка V в определение антиномии указывает составной признак ее, ее духовное единство, ее сверхчувственную реальность, и, в Духе Святом это единство, эта реальность непосредственно переживаются и постигаются» [12, с.153].

Итак, самое главное в использовании антиномий — это возможность с их помощью достичь переживания сверхчувствнной реальности. Даже относительно антиномий рационалиста Канта Флоренский отмечает:

«Нет нужды, если собственные его антиномии неудачны: дело — в переживании антиномичности» [12, с.159].

Священная книга полна антиномиями, и из всех авторитетов о. Павел выделяет апостола Павла.

«Причина чему — весьма простая. Глубина теософского умозрения сочетается у Павла с диалектической формой, тогда как у других священных писателей форма несколько афористична, или же систематическая. Рассудок не предрасположен здесь ждать связности, и потому за афористической разрозненностью не сразу замечает противоречия. Но диалектическое изложение настраивает рассудок ждать связности, и когда связность нарушается “угловою точкою”, где сходятся тезис с антитезисом, то рассудок невольно вздрагивает: это явно требуется от него жертва собою» [12, с.164].

Можно сделать общий вывод относительно логики в культурных традициях. По прямому назначению логика используется в *познании* как методологический инструмент, в *общении* она составляет основу рациональной аргументации, в аспекте *творчества* логические стратегии используются в целях обновления мышления рациональным способом, а именно путем формулировки парадоксальных утверждений, противоречащих стереотипам и догмам. Парадокс по праву считают двигателем научного поиска. *Трансцендирование* можно назвать чрезвычайной (неспецифической) ситуацией, в которой логика выступает против самой логики, против организуемого по нормам логики и грамматики рационального мышления с целью вывести мышление за рамки рациональности, раскрыть существование иных уровней сознания и иных уровней реальности [5]. Неявно в мысли Флоренского объединены все четыре аспекта. С формированием символической логики произошло разделение логики и психологии. Флоренского можно обвинить в психологизме, однако, заметим, мыслитель поддерживает традицию своего времени, укорененную в образовании, соединять логику, психологию и теорию познания.

5 Анализ примеров

Рассмотрим некоторые примеры догматических антиномий, приводимые о.Павлом [12, с. 165]. В отношении благодати тезис гласит:

> «Когда умножился грех, стала преизобиловать благодать (Рим 5, 20)».

Антитезис:

> «Оставаться ли нам в грехе, чтобы умножилась благодать? Никак» (Рим 6 10, 6, 15).

На первый взгляд, просматривается противоречие. Однако это не логическое противоречие в смысле истинности высказывания и его отрицания. При медленном чтении можно показать, что в случае тезиса и антитезиса берутся разные контексты, которые задают разные смыслы благодати. В философской литературе распространен методологический прием, называемый *экземплификацией*. Под экземплификацией понимается демонстрация частного случая некоего общего правила. Подразумевается, что частный случай может иметь специфические особенности. В отношении тезиса речь идет о проявлении принципа противоположностей в крайнем пределе, когда увеличение одной стороны не ведет к односторонности, а задействует другую сторону специфическим образом. На данную особенность поляризации сил в свое время обратил внимание Питирим Сорокин, назвав законом социальной поляризации: во времена катастроф и кризисов большинство людей нравственно падает, но меньшинство резко взмывает вверх, проявляя духовные качества («середина вымывается»). Мир может погрязнуть в грехе, но немногие праведники, набирая духовную силу в преодолении препятствий, компенсируют общее равновесие сил добра и зла.

Развивая тезис, можно реконструировать рассуждение: «если благодать возрастает, когда мир все более погрязает в грехе, то значит можно все более грешить, соответственно, возрастет и благодать». Апостол Павел опровергает: «Нет никогда!». Разбирая данный пример, полезно различать понятие следования в логике (по правилам строгой формальной науки) и прагматическое следование в теории аргументации. В данном конкретном примере прагматическое следование допускает онтологическое понимание, если принять во внимание проявление принципа противоположностей в частных случаях (прием экземплификации). Тезис описывает ситуацию поляризации сил, которую можно усилить до известного предела, когда возможен, говоря научным языком, фазовый переход. Если грех беспредельно возрастает, то вступает в действие высшая сила, восстанавливающая справедливость. Низший полюс уничтожается. На богословском языке это означает приход времени мирового очищения от безмерно распространившегося нравственного разложения (например, всемирный потоп). Поясняя божественный промысел в отношении всемирного потопа, Иоанн Златоуст пишет: «Итак, поелику вселенная имела нужду в полном очищении, и надлежало омыть ее от всякой нечистоты, и уничтожить всю закваску прежнего развращения, так, чтобы не осталось и следа нечестия, но произошло как бы обновление стихий, то Господь поступил подобно искусному художнику, который, взяв сосуд, обветшалый от времени и изъеденный, так сказать, ржавчиною, бросает его в огонь, и согнав с него всю ржавчину, переделывает его, преобразует и приводит в прежнее благообразие» [7, с. 251].

Возможен иной исход, если устремиться к восстановлению баланса между человеческой греховностью и благодатью высших сил. Смысл антитезиса прозрачен: путь спасения — единственный для каждой души. Временная ситуация сурового испытания должна быть преодолена каждым христианином. Крайность — лишь временное испытание, которое дано как веха на пути спасения, совершенствования. Таким образом, тезис и антитезис воссоздают полноту, если принять во внимание временной ряд событий, особенность разворачивания динамики противоположных начал по закону цикличности. Если тезис можно оценить как сущее (фактическое положение дел), то антитезис фиксирует должное. Опять-таки сущее и должное дополняют друг друга в цепи прагматических (морально-религиозных) рассуждений.

Еще одна аргументативная пара относительно понимания благодати.

Тезис.

> «Всякий, пребывающий в Нем (Христе), не согрешает» (1 Ин 3, 6)
>
> «Всякий рожденный от Бога, не делает греха — и он не может грешить» — (1 Ин 3, 9).

Антитезис.

> «Если говорим, что не имеем греха, — обманываем самих себя, и истины нет в нас» (1 Ин 1, 8).

Возможно прочтение: и тезис, и антитезис не безусловны, а условны, соотнесены с духовным состоянием верующего и уровнем его духовного развития. В случае тезиса говорится о сознании или уме подвижника, достигшего уровня сознания Христа, соединившего свой дух с Божественным Духом. В реальной жизни подобные состояния слияния с божественным духом возможны как озарения, духовные прорывы, трансценденции, другими словами, моменты времени, в которых временное соединяется с вечным. Однако, как уже говорилось, подвижничество — это скорее путь, а не конечное состояние, «не делать греха» — цель, ценностная установка, которой должна быть подчинена жизнь христианина. Если тезис касается должного, то антитезис говорит о сущем, фактическом состоянии дел. Соединяя сущее и должное, тезис и антитезис дополняют друг друга.

Воспроизведем полностью высказывание из Первого соборного послания святого апостола Иоанна Богослова:

> «Всякий, пребывающий в Нем, не согрешает; всякий согрешающий не видел Его и не познал Его» (1 Ин 3, 6).

Отдельно взятая фраза покажется ясной и вполне выразимой средствами классической логики: дан четкий критерий греха и отрицание кажется классическим. Тем не менее, классическое по структуре высказывание в структуре целостного контекста таковым не является. Данное высказывание является заключительным в отрывке, в котором указывается на процесс богопознания:

> Возлюбленные! Мы теперь дети Божии; но еще не открылось, что́ будем. Знаем только, что, когда откроется, будем подобны Ему, потому что увидим Его, как Он есть. И всякий, имеющий сию надежду на Него, очищает себя так, как Он чист. Всякий делающий грех, делает и беззаконие, и грех есть беззаконие. И вы знаете, что Он явился для того, чтобы взять грехи наши, и что в Нем нет греха. Всякий, пребывающий в Нем не согрешает; всякий согрешающий не видел Его и не познал Его. (1 Ин 3, 2-6).

Классичность последней фразы скорее является аргументативно-риторическим приемом, позволяющим придать четкость формуле греховности. Путь богопознания — это путь очищения, изжития своей греховной человечески-земной природы, конечной целью которого станет приближение к природе Христа. На пути к Богу людей без греха нет, но сама греховность не монолит, соотношения чистоты и греховности разные.

Восстановим контекст высказывания (тезиса) «*Всякий, рожденный от Бога, не делает греха — и он не может грешить*» в Послании Иоанна. В Послании «рожденному от Бога» противопоставляется «делающий от диавола».

> Кто делает правду, тот праведен, подобно как Он праведен. Кто делает грех, тот от диавола, потому что сначала диавол согрешил. Для сего-то и явился Сын Божий, чтобы разрушить дела диавола. Всякий, рожденный от Бога, не делает греха, потому что семя Его пребывает в нем; и он не может грешить, потому что рожден от Бога. (1 Ин 3, 7-9).

В несовершенном мире вселенской борьбы добра и зла дела человеческие могут быть и от Бога, и от диавола. Семена Бога в душе человека могут произрасти, а могут и не произрасти. Одновременно с тезисом оказывается верным и антитезис об обманчивости собственной негреховности.

Рассмотрим приводимую Флоренским следующую аргументативную пару относительно понятия ***веры***.

Тезис утверждает, что вера

Свободна и зависит от доброй воли человека (Ин 3, 16-18).

Антитезис утверждает противоположное. Вера —

Дар Божий и не находится в воле человека, но — в воле привлекающего ко Христу Отца (Ин 6, 44).

Оба отрывка представляют собой выводы рассуждений из Евангелия от Иоанна. Смысл тезиса и антитезиса становится понятным, если принять во внимание соотнесенность сказанного с духовным развитием человека. Верно утверждение «каждому по вере дается». Проходя опыт жизни, человек свободен в выборе: верить или не верить в Христа (тезис), и в то же время антитезис говорит о том, что вера даруется по воле Бога. Согласно богословским представлениям, человек в опыте жизненной борьбы может обрести веру, сама вера в божественное даром не дается, ее нужно заслужить и к ней нужно быть готовым. Видимая классичность логической ситуации при вдумчивом чтении оказывается поверхностной. Контекст тезиса и антитезиса явно неклассичен, в предпосылках подразумевается требование соотнесенности с духовным развитием человека. Сомневающимся в Его божественной природе Христос говорит: «не ропщите между собою. Никто не может придти ко Мне, если не привлечет его Отец, пославший Меня; и Я воскрешу его в последний день» (Ин 6, 43-44).

В последнем примере догматических антиномий Флоренского «пришествие Христа» видимая логическая форма, на первый взгляд, опять-таки выглядит классической. Относительно цели пришествия Христа тезис говорит:

Для суда над миром. «На суд пришел Я в мир» (Ин 9, 39).

Антитезис:

Не для суда над миром: «Я пришел не судить мир» (Ин 12, 47) [6, с. 165].

Восстановим текст полностью. В Евангелии от Иоанна Иисус обращается к ученикам и неверующим фарисеям:

На суд пришел Я в мир сей, чтобы невидящие видели, а видящие стали слепы (Ин 9, 39).

Невидящие — не познавшие Бога, а видящие — фарисеи, другими словами, «ложно видящие», которым Иисус сказал:

Если бы вы были слепы, то не имели бы на себе греха; но как вы говорите, что видите, то грех остается на вас (Ин 9, 41).

Выразительность восстановленного текста из Евангелия от Иоанна (Ин 9, 39) достигается риторическим приемом нарочитого использования эффекта несоответствия логической формы и внутреннего содержания. Логик отметит: люди видящие и невидящие делятся по разным основаниям. Здесь нет противоречия, но задействован риторический эффект.

Вернемся к примеру Флоренского. В антитезисе смысл «судить» в оригинальном тексте из Писания совпадает со смыслом «осуждать». Неверующим Христос говорит:

Я свет **принес** в мир, чтобы всякий верующий в Меня не оставался во тьме. И если кто услышит Мои слова и не поверит, Я не сужу его; ибо Я пришел не судить мир, но спасти мир. Отвергающий меня и не принимающий слов Моих имеет судью себе: слово, которое Я говорил, оно будет судить его в последний день. Ибо Я говорил не от Себя; но пославший Меня Отец (Ин 12, 46-49).

К богопониманию и вере каждый человек идет сам. Иногда вера приходит только к концу жизни. В описываемой конкретной ситуации многие из начальников уверовали во Христа, но «ради фарисеев не исповедовали, чтобы не быть отлученными от синагоги» (Ин 12, 42). Именно к данному конкретному адресату обращены слова Христа. В итоге тезис и антитезис дополняют друг друга, воспроизводя разные жизненные ситуации. Слово Христа, его проповедь разделили людей на верующих и неверующих. В этом смысле состоялся суд. Но сам Иисус не осуждает непонимающих и сомневающихся, Его Слово станет окончательным судьей в последний день. Противоречие тезиса и антитезиса не является формально-логическим в смысле классической логики. Форма антиномии, представленая внешне как логическое противоречие, призвана создать сильнейший риторический эффект, побуждая к эмоциональному переживанию.

«Будучи здесь и теперь, она [истина] должна быть символом Вечности» [12, с. 145], — пишет Флоренский. Ограниченный ум человека может выразить Божественную Истину, но в рациональном познании она выразима в форме антиномии.

В проведенном исследовании были использованы идеи неклассических логик и теории аргументации. Анализ позволяет сделать выводы, ценные для практики аргументации. Внешняя форма логического противоречия в смысле классической логики позволяет кристаллизировать мысль, четко разделяя «за» и «против», доведя до пределов выразительности тезис и противопоставляемый ему антитезис. Форму логического противоречия тезиса и антитезиса Флоренский называет антиномией. В данном случае антиномию, с учетом принципов аргументации, можно квалифицировать как риторический прием, в котором используется форма логического противоречия. Главная цель антиномии — побудить к эмоциональному переживанию и размышлению. В приводимых о. Павлом примерах антиномий тезис и антитезис связываются друг с другом по принципу дополнительности, например, как пара должное и сущее, как фазы в динамическом процессе, как соотнесенные с разными адресатами. Даны примеры рассуждений, основанные на прагматическом следовании.

Медленно вчитываясь в тексты Флоренского, невольно поражаешься интуиции и богатому воображению философа-богослова, который пытался опираться на достижения науки своего времени, но мысль которого не вписывалась в тесные рамки доступного научного языка. Как это ни парадоксально, но из некорректного использования средств логики богословом (на уровне науки того времени) современный исследователь может извлечь пользу, задумавшись над соотношением принципов классической логики и практики аргументации. По-новому предстает вопрос о психологизме в логике. В истории науки борьба с психологизмом шла на фоне становящейся символической логики и разделения наук, но сегодня в разгар междисциплинарных и трансдисциплинарных исследований актуален вопрос об объединении усилий разных сфер познания, о многогранном диалоге. В общем контексте гуманитарных исследований привлечение логики к анализу культурологических и религиоведческих проблем представляется актуальным.

Литература

[1] *Бажанов В. А.* Логика в России и православная церковь // Седьмые Смирновские чтения. Материалы научной конференции. Москва. 22-24 июня 2011. М., 2011.

[2] *Бирюков Б. В.* Из истории математической логики в России: "Задача Кэролла"в трактовке о.Павла Флоренского // Логические исследования. Вып.6. М., 1999.

[3] *Бирюков Б. В., Прядко И. П.* Проблема логического противоречия и русская религиозная философия // Логические исследования. Вып. 16. 2010.

[4] *Бочаров В. А.* Павел Флоренский и логика // Седьмые Смирновские чтения. Материалы научной конференции. Москва. 22-24 июня 2011. М., 2011.

[5] *Герасимова И. А.* Единство множественного (эпистемологический анализ культурных практик). М., 2010.

[6] *Герасимова И. А.* Духовные способности: идеалы и реальность // Дельфис. №4, 2009.

[7] *Златоуст* // Иже во святых отца нашего Иоанна Златоустого архиепископа Константинопольского избранные творения. Беседы на Книгу Бытия. Т.1. XXV. 6. Репринтное издание. М., 1993.

[8] Космологические произведения в книжности Древней Руси. Ч.I. Тексты геоцентрической традиции. Ч.II. Тексты плоскостно-комарной и других космологических традиций // Памятники древнерусской мысли. Исследования и тексты. Вып. IV (1-2). СПб.: ИД "Мiръ". Ч.I, 2008. Ч.II. 2009.

[9] *Месяц С. В.* Прокл // Античная философия. Энциклопедический словарь. М., 2008. С.640.

[10] *Ориген.* О началах. Самара, 1993.

[11] *Сидоренко Е. А.* Логика. Парадоксы. Возможные миры. (Размышления о мышлении в девяти очерках). М., 2002.

[12] *Флоренский П. А.* Столп и утверждение истины. Глава VII. Письмо шестое: противоречие. Т.1 (I). М., 1990.

[13] *Флоренский П. А.* Столп и утверждение истины. Т.2 (I). М., 1990.

[14] DE MUSICA. Фрагменты старых трактатов из собрания мастеров XXVI Магистра Музыки, заново скомпонованные им самим в подражание мастерам прошлого и пересказанные в переводе его подмастерьем в духе свободных фантазий и новейших теорий. СПб.: Композитор. 2004.

[15] *Паршин А. Н.* Дополнительность и симметрия // Вопросы философии. № 4. 2007. С. 84–104.

Логика и техника: от теории электрических цепей к наносистемотехнике

В. Г. Горохов

ABSTRACT. Relay and switching circuits is the first model of the realization of the logical operations in modern technology. The concept of the equivalent operator electric circuits played one of the important roles in electrical engineering and especially in communication engineering. Each functional element of this circuit correspondents with the definite mathematical formulation or mathematical operation (differentiation, integration etc.). Such method of the construction and transformation of structural schemes of the automatic control systems and algebra of the structural transformation was developed by academician B.N. Petrov.

Keywords: logic circuitry, relay and switching circuit, electric circuit theory, theory of servomechanisms, simulation modeling, nano systems engineering

Проблема соотношения логики и техники в нашей стране имеет давнюю историю. Достаточно назвать работы Виктора Ивановича Шестакова [4, 5], Гелия Николаевича Поварова [20] и Дмитрия Александровича Поспелова [22], посвященные методам анализа и синтеза релейно-переключающих, или контактных схем. Данная статья посвящена истории развития этой проблематики через теорию автоматического регулирования, алгоритмические языки имитационного моделирования социально-экономических систем с выходом на нанотехнологию.

1 Теория релейно-переключающих схем

Релейно-переключающие схемы стали первой моделью для реализации логических операций в современной технике. На рис. 1

приведены основные логические элементы и соответствующие им логические операции [25].

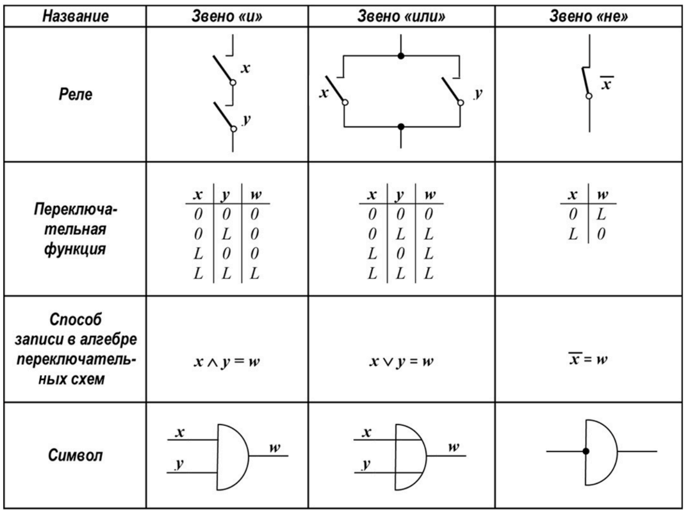


Рис. 1

Но это было только начало. С появлением полупроводниковой техники релейно-контактные схемы в вычислительных устройствах были заменены на поставленные им в соответствие транзисторные схемы. Таблицу релейно-контактных и транзисторных схем, реализующих элементарные функции булевой алгебры, см. в [11, с. 149].

И хотя использование релейно-контактных элементов для построения логических схем вычислительных машин не оправдало себя ввиду низкой надежности, больших габаритов, большого энергопотребления и низкого быстродействия, релейно-контактные схемы начинают играть роль особых абстрактных объектов по отношению к их физически-конструктивной реализации в виде транзисторных схем. Они становятся посредниками между конструктивными схемами технических систем и их логико-математическим описанием. В этом смысле теория релейно-переключающих схем стала идеализированной моделью, хотя и основывающейся на анализе функционирования некоторых реальных объектов, но абстрагированной от их конкретного физического содержания. Алгебра логики переключающих схем «является орудием, которое может быть использовано для исследования сложных комбинационных и последовательных сетей с целью определения удовлетворительной схемы расположения контактов или отклонения неудовлетворительной такой схемы с минимальными затратами времени и усилий. ...Хотя алгебра переключательных схем может быть использована для проектирования простых электрических цепей, наиболее значительные успехи были достигнуты при применении этой алгебры для проектирования тех электрических схем, в которых управляющее и выходное воздействия являются сложными и взаимодействующими» [60, p. 282, 305]. Схематическое представление (см. рис. 2) ставится в соответствие определенным алгебраическим выражениям:

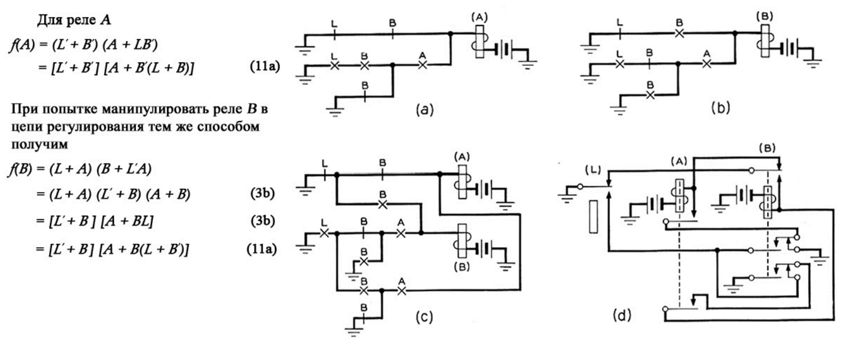


Рис. 2

Электрическая схема на рис. (c) получена с помощью комбинирования первых двух схем таким образом, что на реле L требуется только одно переключение. Однако требуется сделать два переключателя B. На рис. (d) показан распределитель импульсов [60, p. 304].

Однако такая констелляция техники и логики запрограммирована в самой природе технической теории. В структуре любой научной теории наряду с концептуальным и математическим аппаратом важную роль играют теоретические схемы, образующие своеобразный внутренний скелет теории. Эти схемы представляют собой совокупность абстрактных объектов, ориентированных, с одной стороны, на применение соответствующего математического аппарата, а с другой — на мысленный эксперимент, т.е. на проектирование возможных экспериментальных ситуаций. Это — особые идеализированные представления (теоретические модели), которые часто выражаются графически (геометрически) или логически. В технике такого рода графические изображения играют еще более существенную роль, чем в естественной науке, поскольку одна из особенностей инженерного мышления заключается в оперировании схемами и модельными представлениями.

В научной теории имеют место *три основных уровня теоретических схем*: функциональные, поточные и структурные схемы.

Структурная схема исследуемой системы фиксирует конструктивное расположение ее элементов и связей, т.е. ее структуру с учетом предполагаемого способа реализации, и представляет собой теоретический набросок этой структуры с целью создать проект экспериментально-измерительной ситуации вместе с экспериментальным оборудованием. Структурная схема технической системы фиксирует те узловые точки, на которые замыкаются потоки (процессы функционирования): единицы оборудования, детали или даже целые технические комплексы, представляющие собой конструктивные элементы различного уровня. Такие схемы, однако, сами уже являются результатом некоторой идеализации. Это — пока еще теоретический набросок структуры будущей технической системы, который может помочь разработать ее проект, или исходное теоретическое описание существующей системы с целью ее теоретического расчета и поиска возможностей для усовершенствования.

Поточная схема описывает естественные, например, физические (электрические, механические, гидравлические и т.д.) процессы, протекающие в исследуемой системе, т.е. ее функционирование, и опирается на естественнонаучные, например, физические, представления. Однако в принципе это могут быть любые естественные процессы — не только физические, но и химические, биологические. Блоки таких схем отражают различные действия, выполняемые над естественным процессом элементами технической системы в ходе ее функционирования.

Функциональная схема фиксирует общее представление об исследуемой естественной или искусственной системе независимо от способа ее реализации и является общей для целого класса таких систем. Блоки этой схемы фиксируют только те свойства элементов системы, ради которых они включены в нее для выполнения общей цели, и выражают обобщенные логико-математические операции, а отношения между ними — определенные логико-математические зависимости. Однако они могут быть выражены и в виде декомпозиции взаимосвязанных функций, направленных на выполнение общей цели, предписанной данной системе, на основе которой строится алгоритм функционирования этой системы и выбирается ее конфигурация.

Транзисторные (*структурные*) схемы и релейно-контактные (*поточные*) схемы, реализующие элементарные функции булевой алгебры — конъюнкцию и дизъюнкцию, представленные в виде *функциональных* схем, и являются репрезентативным примером такого трехуровнего строения технической теории (см. рис. 2). Структурные схемы могут быть реализованы и на основе других элементов — электронных ламп, ферритовых сердечников, а позже интегральных схем или наносхем.

В естественнонаучной теории главное внимание уделяется не структурным, а поточным схемам, т.е. объяснению и предсказанию хода естественных процессов. Одна же из основных задач функционирования развитой технической теории заключается в тиражировании типовых структурных схем для всевозможных инженерных требований и условий, формулировка практико-методических рекомендаций инженеру-проектировщику. Ее абстрактным объектам обязательно должен соответствовать класс гипотетических технических систем, которые еще не созданы. В ней важен не только анализ, но и синтез теоретических схем новых технических систем. Поэтому Клод Шэннон, один из основоположников теории релейно-контактных схем, в своей классической работе «Символический анализ релейно-контактных схем» отдельную главу посвящает синтезу таких схем [57]. Конструктивная функция технической теории как раз и состоит в ее опережающем развитии по отношению к инженерной практике.

Функциональные схемы в теории электрических цепей, например, представляют собой графическую форму математического описания состояния электрической цепи. Каждому функциональному элементу такой схемы соответствует определенное математическое соотношение или вполне определенная математическая операция (дифференцирование, интегрирование и т.п.). Порядок расположения и характеристики функциональных элементов адекватны электрической схеме. Так, при расчете электрических цепей с помощью теории графов элементы электрической схемы — индуктивности, емкости, сопротивления и т.д. — заменяются по определенным правилам особым идеализированным функциональным элементом — унистором, который имеет только одно функциональное свойство пропустить электрический ток лишь в одном направлении. К полученной после такой замены однородной теоретической схеме могут быть применены топологические методы анализа электрических цепей.

На основе функциональной схемы составляется система уравнений, которая решается с помощью определенных математических методов (например, матричных). Эти уравнения получаются на основе физических законов (Ома, Кирхгофа и других), устанавливающих, например, зависимость между параметрами протекающего в цепи электрического тока и ее элементов[1]. Известные из условия задачи их конкретные численные значения позволяют в результате решения данных уравнений вычислять неизвестные параметры тока и элементов цепи. На функциональной схеме проводится решение математической задачи с помощью стандартной методики расчета типовых способов решения задач на основе применения ранее доказанных теорем. Для этого функциональная схема по определенным правилам преобразования приводится к типовому виду (см. рис. 3).

---

[1] «Простейшей и ... совершенно удовлетворительной основой для составления уравнений теориии электрических цепей являются законы Кирхгофа» [31, р. 287].

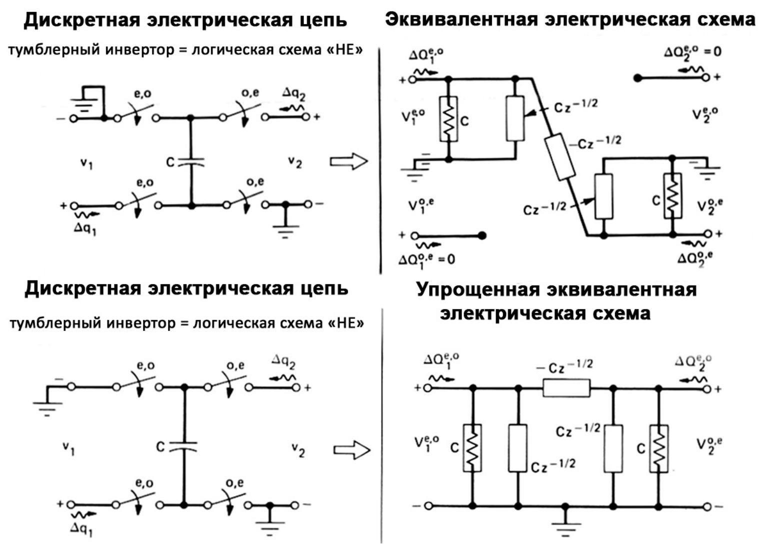


Рис. 3

Пример одного из унифицированных стандартных модулей (тумблерный инвертор, соответствующий логической схеме «НЕ») из общей библиотеки таких блоков для электрических схем с управляющим конденсатором [46, p. 739, 745].

Концепция эквивалентных электрических схем сыграла важную роль в электротехнике и особенно в технике связи. Одним из первых разработчиков этой концепции был математик и физик Георг Кэмпбэл, долгое время работавший в компании Белл-телефон, который, анализируя перекрестные помехи[2] в телефонных линиях, установил, что они зависят от емкостных связей, образующихся между длинными линиями [36, 43]. В своем меморандуме он пропагандирует метод поэтапных дедуктивных аппроксимаций [35] и ставит в соответствие исследуемым реальным электрическим цепям различные схемы замещения, например, мостовую или трансформаторную на основе идентичности их коэффициента пропускания и импеданса (выраженного математически)[3].

[2]Взаимные искажения сигналов, «захлестывание», «перетекание» сигнала из одного канала связи в другой, электрические наводки, вызванные сигналами в соседних проводах, мешающие связи.

[3]Полное или комплексное сопротивление среды распространению электромагнитных волн, измеряемое в омах.

И если первоначально концепция эквивалентных электрических схем использовалась для описания пассивных электрических цепей, т.е. состоящих только из пассивных элементов — сопротивлений, емкостей и индуктивностей [53], то позднее была развита «общая теория активных[4] электрических цепей» [53, p. 593-594] (см. рис. 4 А) и нелинейных схем, например, транзисторов [32, 13] (см. рис. 4 Б).

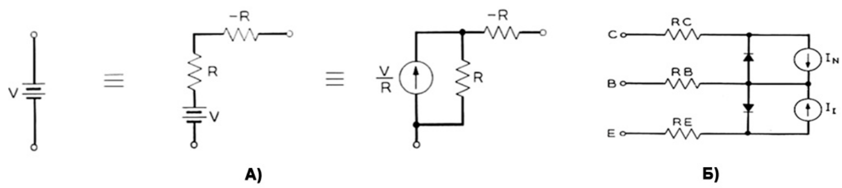
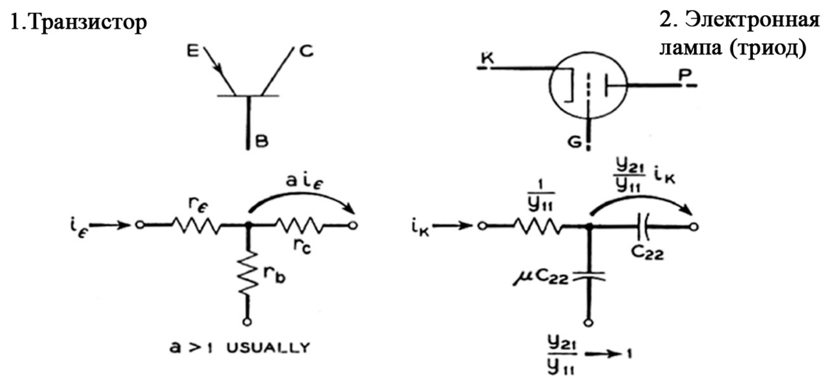


Рис. 4

А) Эквивалентные схемы для идеального источника напряжения [45, p. 284]. Б) Модель транзистора [32, p. 1190].

С точки зрения эквивалентных схем теории электрических цепей отдельные ключевые элементы, такие, например, как транзистор и электронная лампа, являются полностью аналогичными по своему принципу действия, хотя и имеют совершенно различную физическую природу. Поэтому они отображаются на уровне функциональных схем аналогичными эквивалентными схемами замещения (см. рис. 5).



[4]Активным называется элемент, содержащий в своей структуре источник электрической энергии.

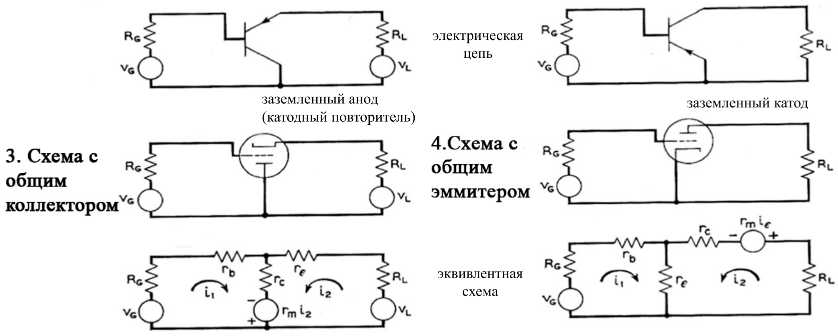


Рис. 5.

Аналогичность транзистора и электронной лампы [56, p. 375].

Одной из таких функциональных схем стали *операторные схемы*, использующие для анализа электрических цепей операционное исчисление, которое возникло сначала как частный методический прием для инженерных расчетов, а затем было обобщено на любые электрические схемы. Впоследствии операторное исчисление было переработано в еще более абстрактную форму, в которой оно нашло применение в самых разнообразных областях науки и техники[5]. Существуют определенные правила преобразования таких операторных схем, которые позволяют упростить их и, в конечном итоге, привести к скелетной (математической) схеме, где ветви изображаются просто линиями, а узлы — точками. Именно с помощью скелетной схемы составляются необходимые системы уравнений, решение которых позволяет рассчитать параметры цепи, и доказываются теоремы. «...Дифференциальные соотношения для оригиналов заменяются алгебраическими соотношениями для изображений, отражающими все исходные данные задачи, включая начальные условия. В этом и состоит суть операторного метода расчета переходных процессов: дифференциальные уравнения, описывающие переходный процесс, заменяются алгебраическими уравне-

[5]Операционное исчисление было разработано известным английским физиком и электротехником Оливером Хэвисайдом как «мощный метод решения дифференциальных уравнений теории электрических цепей», а затем получило «широкое применение не только в теории электрических цепей, но и для решения дифференциальных уравнений в математической физике» [31, p. 685].

ниями для изображений. Полученные операторные связи допускают схемную интерпретацию» (см. рис. 6) [18].

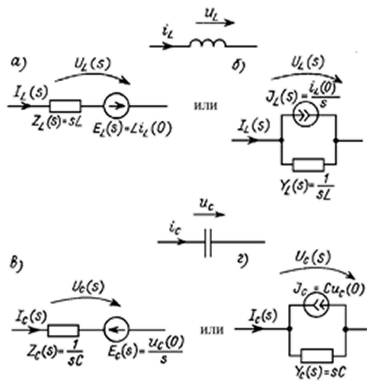
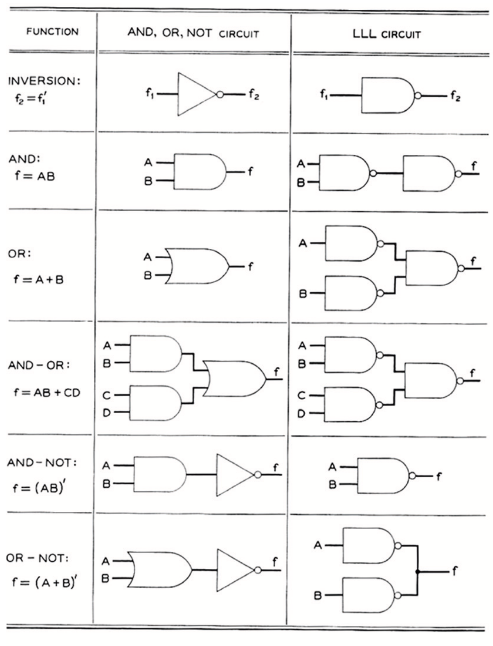


Рис. 6

Эквивалентные операторные схемы элементов электрической цепи: а) индуктивности, в) емкости.

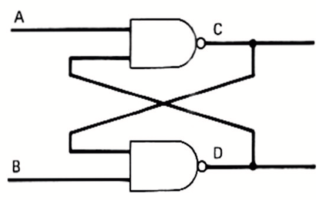
К середине двадцатого столетия в теории цепей формируется новый этап, связанный с междисциплинарным исследованием различных типов цепей, не только электрических, но и кинематических, гидравлических и т.п. (см, например: [54, p. 1513]). В результате теория цепей превратилась в междисциплинарную техническую теорию — теорию автоматического регулирования, которая стала следующим важным шагом в развитии взаимоотношений логики и техники. «Абстрактное представление компонентов систем привело к развитию» «мета-языка», «в котором манипулирование конфигурациями электрических цепей стало естественным следствием математики ... Идеи линейных систем, возникшие в технике связи, были распространены на другие области, такие как техника автоматического регулирования ... Инженеры из сфер техники связи и техники автоматического регулирования развили новый способ использования этих моделей, в которых такие абстрактные понятия, как, например, полюса, ... или созвездие сигналов получили вполне осязаемую идентичность и ими стали оперировать самым конкретным образом ... Было достигнуто очень важное сочетание математического моделирования систем, методов проектирования и компьютерной поддержки проектирования и анализа. ... это позволило инженерам работать одновременно с эквивалентными моделями различного рода. ... И во все большей степени стало возможным конструировать устройства и системы, тесно связанные с математическими идеализациями» [29, pp. 333–334].

Это направление получило дальнейшее развитие в связи с применением для расчета электрических цепей компьютерной техники. Стали разрабатываться особые алгоритмы и моделирующие программы для логического проектирования электрических схем и их испытания с целью обнаружения неисправностей (см., например: [33]), а также логические схемы (см. рис.7А), эквивалентные различным электрическим или электронным схемам (см. на рис. 7В изображение триггера — спускового элемента многих элекронных схем, который может быть реализован на различной физической основе, например, в виде транзисторной схемы).



А)

A	B	$\overline{A\cdot B}$
3	0	1
3	1	3
3	2	Q
3	3	3



Б)

Рис. 7

А) Эквивалентные логические схемы (LLL — low-level logic — логические схемы с низкими логическими уровнями) [30, p. 2069]. В) Реализация таблицы истинности в виде логической схемы: таблица истинности (вверху) и схема триггера (внизу) [33, p. 1457, 1458].

2 Теория автоматического регулирования (ТАР)

Первоначально различного типа системы автоматического регулирования исследовались и рассчитывались по-разному. Однако постепенно формируются общие методы расчета, анализа и синтеза следящих систем. Классическая теория цепей стала постепенно превращаться «в чисто математическую дисциплину, которая оперирует с абстрактными структурами» [3, с. 870], и специализированный раздел знания более широкой научной дисциплины — теории систем. «Отличительной чертой теории систем является ее всеобщность и абстрактность, то, что она математически рассматривает свойства систем, а не их физическую форму. Таким образом, для теории систем неважно является ли система электрической, механической или химической. Главным являются математические соотношения между переменными, описывающими поведение системы» [10, с. 878] (см. также [39, p. 18–51]). В период становления ТАР уже появились такие классические технические науки, как, например, теория механизмов и машин и теоретическая радиотехника и электротехника. Поэтому ее формирование осуществлялось в двух основных направлениях: во-первых, за счет обобщения уже выработанных в этих дисциплинах теоретических средств и способов решения типовых задач и, во-вторых, в плане развития единого математического аппарата.

Первое направление развернулось примерно в 40–50-х гг. XX века, с одной стороны, на базе обобщения разработанных в теоретической радиотехнике способов анализа электрических цепей с помощью так называемых эквивалентных схем и соответствующих эквивалентных преобразований [16], а с другой стороны, для классификации и структурного анализа систем автоматического регулирования (динамических цепей) были использованы и обобщены методы классификации и структурного анализа механизмов, выработанные в теории механизмов для исследования кинематических цепей [8]. При этом стали «пользоваться терминами механики в более общем смысле, распространяя их и на иные динамические системы» [7, с. 5] (см. также [24]).

В обобщенных структурных схемах ТАР дается единообразное описание систем автоматического регулирования независимо от конкретного конструктивного воплощения и типа протекающего в них естественного процесса — гидравлического, электрического, механического или пневматического. Все эти системы с математической точки зрения являются подобными: «...элементы регуляторов строятся на принципах использования электрической, тепловой и механической энергии. ...Тем не менее характер процессов, протекающих в системах автоматического регулирования в целом и в отдельных элементах цепи регулирования, во многом аналогичны. Математическое описание этих процессов оказывается одинаковым для самых разнообразных устройств независимо от их конструкции и принципа действия» [14, с. 10–11]. При создании конкретного устройства для выполнения определенной функции с заданными параметрами необходимо перевести эти, в основном физические, данные на математический язык и затем решать задачу за письменным столом так, чтобы получить нужные результаты в наилучшей системе автоматического регулирования [24]. Причем критерий качества такой системы формулируется математически, а реализация может быть в виде самых разнообразных конструкций. Эквивалентная электрическая модель сложного гидравлического устройства, позволяющая дать его упрощенное представление, и преобразование ее в блок-схему, компоненты которой выражают алгебраически математические соотношения между входом и выходом, была разработана Брауном и Кэмпбелом в 1948 г. [38, p. 112, 137] (цит. по: [28, p. 33]).

Одним из важнейших приложений ТАР, или, как ее называют в западной литературе, теории сервомеханизмов, стала радиолокация. Радиолокационные станции соединили в себе сложные электронные и электрические системы с настолько же сложными механическими блоками. Для управления, например, сложным движением радиолокационной антенны стали разрабатываться сначала аналоговые автоматические следящие системы (см., например: [21]).

Второе направление начало активно разрабатываться с 50-х гг., когда задачами ТАР занялись математики, что способствовало быстрому развитию линейной теории управления. В результате были разработаны единые математические методы анализа и синтеза систем автоматического регулирования практически любого типа независимо от способа их инженерной реализации. «По-видимому, теория автоматического регулирования единственная область техники, целесообразность которой обусловлена не общностью решаемых проблем или машин, с которыми приходится иметь дело, а с математическими методами» [2, с. 3].

Для обеспечения эффективного функционирования ТАР необходимо было ликвидировать разрыв между таким единым математическим описанием и разнородными поточными и структурными теоретическими схемами, к которым оно применялось. Такие схемы часто заимствовались из соответствующих технических наук без какой-либо перестройки. Это привело к выделению особого звена — регулятора — механических, гидравлических, электрических и т.п. устройств, к которым наиболее хорошо применимы данные методы, как объекта исследования ТАР[6].

Развиваются общие методы исследования различных типов регуляторов, составляются сравнительные таблицы эквивалентных механических, электрических и гидравлических регуляторных схем и их частотных характеристик (см., например [52, s. 256–257]). Понятия, принципы анализа и математический аппарат, развитые первоначально в одной из частей ТАР, например, для исследования регуляторов в теории электрических цепей, нашли применение в других ее областях. Это стимулировало развитие особых структурных схем, обобщенных по отношению к частным теоретическим схемам теории механизмов, теоретической радиотехники и электротехники, гидравлики и т.д.

Для анализа обобщенных структурных схем стали применяться такие математические методы, как теория графов, векторный анализ, теория матриц и т.п. (см. на рис. 8 реализацию матричного уравнения в виде такой блок-схемы). «Язык и схемы, используемые для анализа систем автоматического регулирования, увели от физических систем в сторону систем, просто описываемых с помощью разработанного метаязыка. . . . Однако блок-схемы и математические абстракции дали нечто большее, чем просто средства коммуникации. . . . моделирование сделало системы автоматического контроля более доступными для

[6]Примеры различной реализации колебательного звена — функционального элемента систем автоматического регулирования см. в [14, с. 17].

сложной математики. Но, пожалуй, наиболее важно то, что они позволили решать теперь проблемы на бумаге, а не в лаборатории. С помощью абстрактного моделирования стало возможным исследовать новые разработки с точки зрения стабильности, оптимизации, живучести, адаптивности и других свойств систем регулирования без обращения к физическим системам». Математическое моделирование позволило абстрагировать решение инженерных проблем от способов их физической реализации [28, p. 33,34].

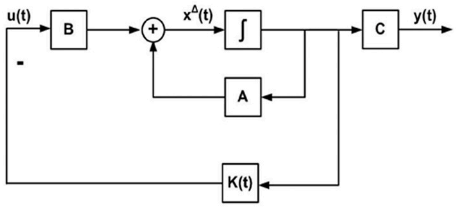


Рис. 8
Схема оптимального регулятора, построенного на основе матричного уравнения [63].

Такой метод структурных преобразований схем автоматических систем и адекватный им математический аппарат — алгебра структурных преобразований — был разработан академиком Б.Н. Петровым. В своей краткой и элегантной работе «О построении и преобразовании структурных схем», выполненой под руководством академика Н.Н. Лузина, он пишет: «При анализе и синтезе различных автоматических систем (регулирования, управления, следящих, телемеханических и т.п.), в особенности когда рассматриваются сложные системы, большое значение имеет ясное представление об их структуре, динамических свойствах отдельных элементов и их взаимодействии ... Однако, насколько нам известно, не существует методики построения достаточно удобных и наглядных структурных схем, которые не только фиксировали бы наличие отдельных элементов в системе и связей между ними, но отображали бы динамические свойства этих элементов и характер воздействия их друг на друга. В настоящей работе делается попытка найти способ построения подобных схем ... Структурные схемы способствуют наглядному представлению о характере и структуре системы, облегчают анализ сложных систем и сравнение различных систем и вариантов их между собой, дают возможность произвести качественную оценку системы — установить наличие жестких и гибких обратных связей и других воздействий в системе, установить астатичность или наличие статизма системы и, кроме того, позволяют провести строгую и обоснованную классификацию автоматических систем» [19, с. 1146, 1162]. Такого рода обобщение в структурных схемах автоматического регулирования открыло целую серию исследований, направленных на анализ общей структуры сложных систем, независимо от способа их реализации (см. рис. 9).

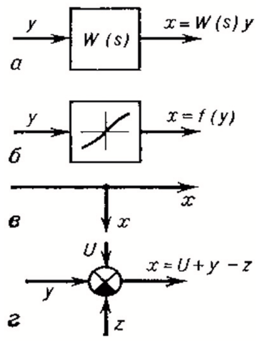


Рис. 9
Изображение элементов структурных схем: *а* — линейное звено; *б* — функциональный преобразователь; *в* — узел; *г* — сумматор; $W(s)$ — передаточная функция; y, U, z — входные воздействия (сигналы); x — выходная величина (сигнал) [6].

Одним из таких направлений были автоматизированные системы управления предприятиями и отраслями промышленности, которые внедрялись в 70-е гг. прошлого века как в нашей стране, так и за рубежом, прежде всего на предприятиях военно-промышленного комплекса с целью оптимизации его весьма дорогостоящей и сложной многоуровневой деятельности. Здесь первоначально господствовало кибернетическое представление об управлении как реакции управляющего воздействия на отклонения регулируемой величины от запланированного результата. Это было связано с тем, что в данную отрасль пришли в основном инженеры, воспитанные на представлениях теории автоматического регулирования, показавшей свою успешную применимость в сфере проектирования чисто технических систем. Предприятия же и в еще большей степени отрасли промышленности и их системы управления представляют собой сложные социально-экономические системы, для описания которых концептуальных структур ТАР и даже киберенетики оказалось недостаточно.

Одной из интересных для нашей темы попыток алгоритмического описания сложных видов управленческой деятельности, подлежащей автоматизации, было создание формульно-операторного языка в Институте кибернетики Академии наук УССР, позволявшего в унифицированном виде описать действовавшие и новые организационные процедуры (подробнее см. [26]). В связи со свертыванием правительственной программы разработки АСУ, которая была тесно связана с плановой экономикой, исследования в этом направлении не получили дальнейшего развития. Однако это стимулировало серию исследований абстрактного уровня — так называемого структурного анализа, направленного на исследование общей структуры сложных систем. Для этого стали применяться современные математические средства, прежде всего топологические методы, например, теория графов, векторный анализ, а также теория матриц и т.д. При структурных исследованиях систем автоматического регулирования «в них не остается иного содержания, кроме связей, их числа, дифференциального порядка, знака и конфигурации», выявляются взаимные связи элементов системы, ее структура, что дает возможность «единообразно исследовать различные по своей природе системы» [17, с. 11–12].

Именно потребность моделирования сложных процессов и систем (прежде всего в сфере управления промышленными предприятиями[7] выдвинула в 1970-е гг. проблему создания специ-

[7]Речь шла о моделировании информационных процессов на предприятии в условиях новой ориентации экономики предприятия на применение компьютерной техники, поскольку любое предприятие стало рассматриваться не просто как бюрократическая в смысле Макса Вебера структура, а как система по переработке информации. (См.: [49, s. 5–6]). По мысли теоретиков этой новой ориентации иммитационное моделирование должно помочь схватить предприятие в единстве и исследовать его общие структурные и процессуальные (имеется в виду процесс производства) взаимосвязи. (См. [48, s. 4, 7, 34, 37].)

альных программных средств такого рода моделирования, которое получило название имитационного моделирования[8]. «В социальных науках, физических науках, инженерии и сфере бизнеса существует множество проблем, которые могут быть выражены в математической форме, но нет аналитических методов для их решения. Компьютерное моделирование все в большей мере призвано исследовать такие проблемы». Модели сложных физических, экономических и социальных систем, с одной стороны, становятся все более приближенными к реальности, а с другой — все труднее формулируемыми в математической форме. Кроме того, создание компьютерных моделей сталкивалось с большими трудностями со стороны специалистов, недостаточно владеющих средствами современного программирования [63, p. 1–3]. Именно поэтому возникла необходимость разработки специально для этих целей особых языков программирования, которые получили название алгоритмических языков имитационного моделирования, ставших своего рода посредниками между структурным представлением сложных систем и их описанием на языках программирования высокого уровня. То есть фактически речь шла о развитии промежуточного уровня абстрактных теоретических схем между словесным и чисто математическим описаниями, который можно отнести к сфере особого квази-логического представления[9]. Компьютерная имитация часто рассматривается как символическая система — посредник между обычным языком и математикой, поэтому в ходе моделирования, программирования и модельного эксперимента выделяются следующие основные уровни абстрактного описания реальных систем: «концептуальная модель, логическая модель и компьютерная модель (программный код)» [47, s. 220]. Нас в данной статье будут интересовать именно особенности построения среднего уровня (т.е. логической модели).

Описываемые в рамках имитационной программы теории ста-

[8] «Имитационной называется модель, которая воспроизводит все элементарные явления, составляющие функционирования исследуемой системы во времени с сохранением их логической структуры и последовательности» [12].

[9] Примером такого описания могут служить операторные схемы Янова. «Первой работой, посвященной общей теории преобразования алгоритмов, явилась работа Ю.И. Янова «О логических схемах алгоритмов» [41].

новятся более точными (эта точность задается за счет использования синтаксических структур языков программирования), чем сформулированные на обычном языке. В то же время они являются более гибкими, чем обычным путем математически формализованные теории. Во многих науках, например, социальных науках, психологии, науках о поведении, где теории традиционно не могут быть настолько же формализованными и точными, как математизированные физические теории, такого рода логическая работа приводит к экспликации их теоретических положений и понятий, вскрытию разрывов в аргументации и обосновании теоретических предположений, проведению конструктивной критики этих теорий.

3 Алгоритимические языки имитационного моделирования

Особенность этих языков заключается в том, что каждый такой язык имеет тщательно разработанную систему абстракций, закрепленных в соответствующей концептуальной схеме и представляющих собой основу для формализации. В качестве примера рассмотрим один из «самых удачных на то время проблемно-ориентированных языков программирования» — GPSS (Система общецелевого моделирования — General Purpose Systems Simulator). «Проблемной областью GPSS являются системы массового обслуживания (системы с очередями). ...Основой имитационных алгоритмов в GPSS является дискретно-событийный подход...». Целью его создания было обеспечение пользователя инструментом, который мог использоваться и не программистом. Общий метод в разработке имитационных приложений состоит в том, что в качестве их основы берется простейшая модель, к которой затем добавляються все новые и новые детали. GPSS для этого хорошо приспособлен[10].

[10] «Первая версия системы появилась в 1961 году и называлась GPSS. Далее последовательно друг за другом появились GPSS II (1963), GPSS III (1965), GPSS/360 (1967), GPSS V (1971). Все эти версии были разработаны и поддерживались фирмой IBM. Наиболее удачны были две последние версии. ...Появление персональных ЭВМ и принципиально новых идей и подходов взаимодействия человека с ЭВМ не могло не отразиться на GPSS. Он несколько утратил свою привлекательность. Появились новые системы моделирования, использующие возможности новой техники — оператив-

Структура моделируемой системы описывается в GPSS в форме блок-схемы, вычерченной из заранее определенных стандартных блоков. Каждый тип блока представляет собой специфическую деятельность, т.е. характеризует некоторую базисную операцию, которая осуществляется в системе. Наиболее важный класс объектов — это транзакты, которые движутся в системе, производя ряд воздействий на ее статические элементы (системное оборудование) — установки (средства обслуживания, устройства для последовательной обработки транзактов), хранилища (память, склад — служит параллельной обработке транзактов) и логические переключатели, выполняющие функцию регуляторов потоков в модели и имеющие два состояния («вкючен» и «выключен»). «Язык GPSS представляет собой интерпретирующую языковую систему, применяющуюся для описания пространственного движения объектов. Такие динамические объекты в GPSS называются транзактами и представляют собой элементы потока. В процессе имитации транзакты "создаются" и "уничтожаются". ... Каждый транзакт имеет набор параметров» [12]. Подобно реальному объекту, перемещающемуся в моделируемой системе, транзакт совершает движение через программу, выполняя тем самым ее операторы. Для наблюдения за функционированием модели используются статистические элементы языка, к которым относятся очереди (ведут подсчет среднего числа задержанных транзактов и средней продолжительности таких задержек) и таблицы, которые используются для исследования частот любой случайной величины. Учет очередей составляет одну из основных функций этой системы моделирования, причем «основные выходные данные, такие как очереди и статистика, получаются автоматически без какого-либо программирования» [34, p. 569].

ность, интерактивность, наглядность при разработке моделей и проведении исследований. Но, пройдя нелегкий путь переосмысления и адаптации к новым условиям, GPSS выжил. Огромный потенциал, заложенный в алгоритмах дискретно-событийного подхода к моделированию, исключительно лаконичная проблемная ориентация языка и энтузиазм разработчиков позволил это сделать. ... Таким образом, GPSS активно развивался и развивается. ... В последние годы в связи с возрождением интереса к GPSS начали появляться много новых учебно-методических материалов» [9]. См. также [23, [27, 40].

Главным для GPSS является имитирование процессов функционирования системы, описываемых блок-схемой, которая фактически представляет собой поточную теоретическую схему. Блоки этой схемы, связанные со статическими элементами, характеризуют определенные состояния системы в процессе ее функционирования, а блоки, связанные с транзактами, — связи перехода между этими состояниями. Линии, соединяющие блоки, указывают пути движения транзактов в системе, т.е. описывают последовательность происходящих в ней событий. Описание модели в виде блок-схемы автоматически переводится в машинную кодовую модель, представляющую собой функциональную (математическую) теоретическую схему. В то же время каждому из элементов модели могут соответствовать различные реальные объекты: установка может означать кассу в банке или причал в порту, хранилище может быть дорогой или гаванью, логический переключатель — реле или светофором, а транзакты — автомобилями, судами или сообщениями. Отношения между ними отражаются в «очередях» и «таблицах».

На рис. 10 приводится пример поточной схемы для простейшей портовой системы [15], но это может быть и описание алгоритма проектирования или процесса обработки деталей на промышленном предприятии. Алгоритмический язык имитационного моделирования — GPSS — «является инструментом, который инженер-системотехник может использовать для конструирования способной к саморазвитию модели и манипулирования ею. Он может быть использован для моделирования совершенно различных физических систем». Однако важно учитывать, что любые такие модели не в состоянии полно отражать оригинал. «Моделирование — это не копирование. Имитационная (или математическая) модель располагает относительно небольшим числом свойств, которые соответствуют (правда, всегда с помощью аппроксимации) моделируемой реальности». Модель, выраженная в подобном языке, служит основой для проведения компьютерных экспериментов (т.е. варьирования параметрами модели) и сбора статистических данных для последующего их сравнительного анализа [58, p. 33–35].

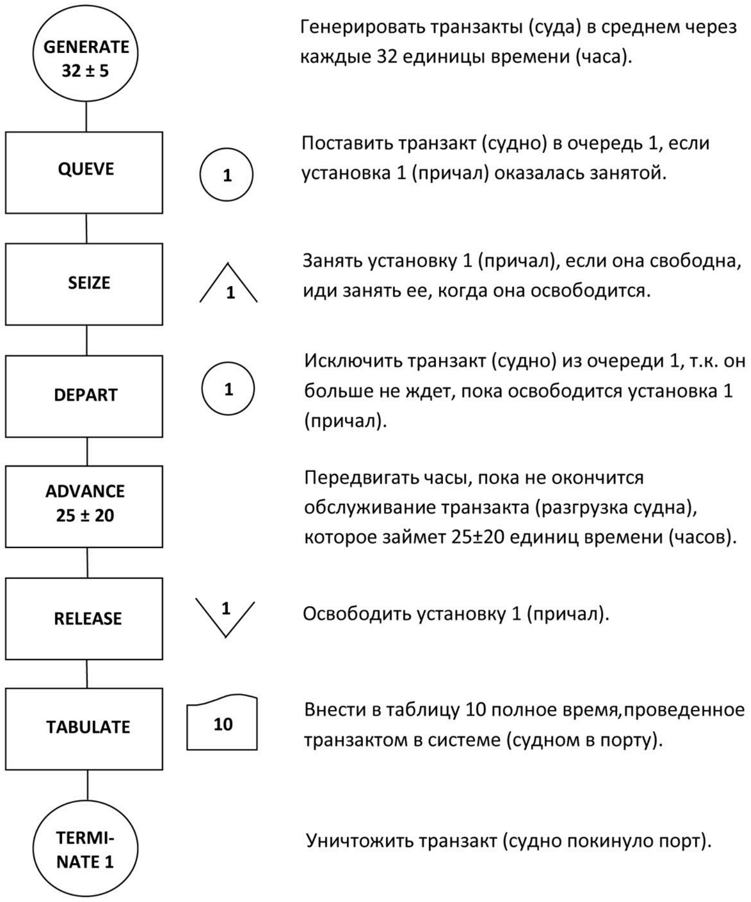


Рис. 10

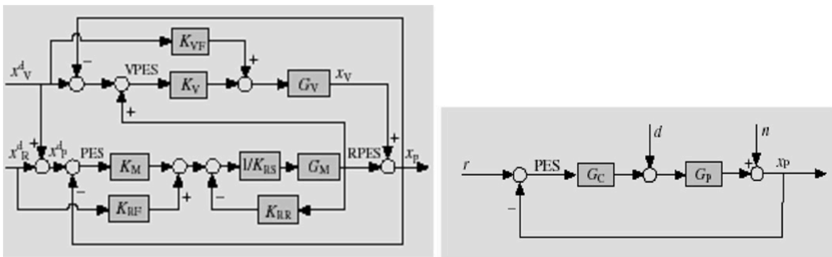
Представление жизни модели (порта) как течение временных транзактов (судов), продвигающихся в модели и обслуживающихся в постоянных устройствах (портовых терминалах) [15, с. 475]. Условные обозначения на блок-диаграммах GPSS (Подробнее см.: 37, 55, 61]): GENERATE — Генерирует транзакты через A единиц времени, модифицированных B с задержкой C, D транзактов, с приоритетом E, форматом FБ; QUEVE — Обеспечивает занятие B мест в очереди A; SEIZE — Занимает устройство с номером A; DEPART — Обеспечивает освобождение в очереди A B единиц; ADVANCE — Задерживает транзакт на время A±B, если B — const, или A·B, если B — функция; RELEASE — Освобождает устройство с номером A; TABULATE — Табулирует значения входящих транзактов в таблице A; TERMINATE — Уничтожает A транзактов.

Таким образом, строго определенные понятия алгоритмических языков имитационного моделирования позволяют осуществить формализацию различных аспектов модели и реализовать ее на компьютере. В понятиях алгоритмических языков имитационного моделирования задается «образ» объекта, детерминированный той или иной математической теорией, интерпретацией которой является данный язык (например, теорией массового обслуживания). Поэтому концептуальный каркас такого языка в значительной степени определяет и область его применения. Для описания взаимосвязей элементов системы, а также системы и системного окружения и для ее иерархического представления используются главным образом теория множеств и исчисление предикатов.

Особое значение имитационное моделирование на ЭВМ приобретает в рамках системотехники.

4 Логические схемы в наносистемотехнике

В системотехнике в отличие от классической технической теории математические схемы строятся не только над уровнем поточных, но и структурных схем. В ней формируются особые *абстрактные структурные схемы*, представляющe собой обобщение структурных схем теории автоматического регулирования, теории сетей связи, теории синтеза релейно-контактных схем и логических схем вычислительных машин и т.п., которые развиваются в структурном анализе сложных систем и позволяют «изучать объект в наиболее чистом виде», анализировать конфигурацию системы, степень связности и надежности ее элементов безотносительно к их конструктивному исполнению. *Абстрактные алгоритмические схемы* обобщены в кибернетике и описывают преобразования потока субстанции (вещества, энергии и информации) независимо от его реализации, дают идеализированное представление функционирования любой системы (в том числе и самой системотехнической деятельности, рассмотренной как система) и являются исходным пунктом компьютерного программирования. Они — результат абстрагирования от качественной определенности протекающего через систему и преобразуемого ею естественного процесса (который лишь в частном случае будет физическим процессом). Увеличение вычислительных мощностей компьютеров сделало возможным определение не только макроструктур, но и с высокой точностью геометрической и электронной структуры больших молекул. Это положило начало новому этапу развития системотехники — наносистемотехники, где методы и схемы ТАР также нашли свое применение (см. на рис. 11 структурную схему, описывающую систему автоматического регулирования нанодиска — Disk Drive Servo Control).



a) **b)**

Рис. 11

а) самонастраивающийся микропривод, b) структурная схема сервомеханизма на наноуровне — Disk drive servo control (PES — расположение сигнала ошибки; биение — r, нарушение выхода — d, и помехи при измерении — n; $GP(s$ и $GC(s)$ представляют привод движения диска и регулятор, а r и xp — трэк биения и главную позицию, соответственно [59, p. 969, 974].

Нас в данной статье, однако, интересует соотношение наносистемотехники с логикой. Ниже приводятся примеры реализации стандартных логических элементов «не», «или», «и» с помощью молекулярных переключателей и составления из них простейших логических схем. Например, на рис. 12 продемонстрирована комбинационная логическая схема (комбинаторная логика) на молекулярном уровне. Генерация сигналов производится с помощью видимого или ультрафиолетового света, который вызывает химические изменения в *молекулярном ключе*, работающем фактически аналогично механическому перекючателю в релейно-контактных схемах.

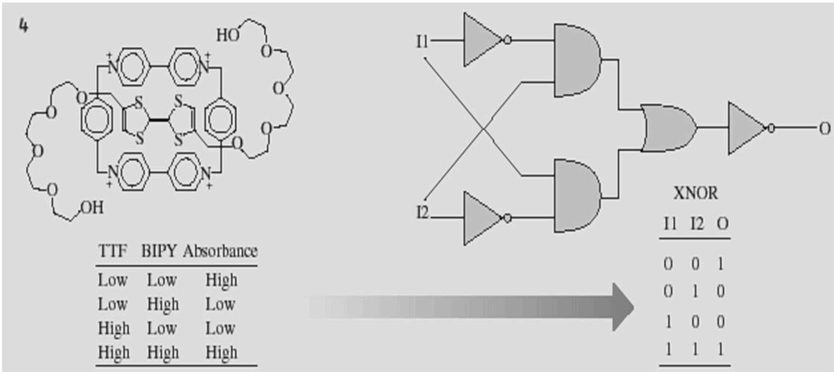


Рис. 12

Пропускаемость заряда через комплекс 4 является высокой, если к блоку tetrathiafulvalene (TTF) приложено высокое входное электрическое напряжение, и это стимулирует блоки bipyridinium (BIPY) иметь высокое напряжение, и наоборот. Сигнал преобразования системы 4 переводится в таблицу истинности схемы «исключающее НЕ-ИЛИ» [59, p. 18] (см. на рис. справа).

Еще одним интересным применением наносистемотехники являетя спинтроника, использующая в качестве ключевого элемента «спиновый клапан» (“spin valve”), схематически показанный на рис. 13. В классической электронике спин (собственный магнитный момент) электрона не играл никакой роли[11], а в спинтронике именно это его свойство используется в качестве ключевого элемента[12].

[11]В полупроводниках электрон рассматривается вместе с «дырками» как взаимосвязанная пара, а в спинтронике учитывается спин электрона, т.е. направление его вращения, что не принимается во внимание в классической электронике [51, p. 185].

[12]В так называемой магниторезистивной памяти — MRAM (Magnetoresistive RAM), которая сможет заменить механически действующий жесткий диск современных компьютеров, информация запоминается благодаря использованию различных состояний спина электрона, меняя спин у отдельного электрона в единственном атоме. Это может привести к созданию квантовых компьютеров, обладающих большим быстродействием и меньшим потреблением энергии (см. [50, p. 27], особенно если они будут строиться на графеновой основе [42].

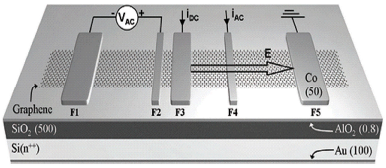


Рис. 13

Спиновый вентиль (*рисунок слева*) на основе использования эффекта полевого транзистора на двухмерной графеновой структуре (тонкий графеновый слой, толщиной в один атом): на схеме изображены детекторы (F2, F1), электроды (F3, F4) и ферромагнитный кобальтовый электрод (F5), переносимый электрон (E), постоянный (IDC) и переменный (IAC) электрический токи, переменное электрическое напряжение (VAC). Наблюдается явный биполярный (изменение от положительного к отрицательному знаку под влиянием изменения направления постоянного электромагнитного поля) «спинный сигнал» [44, p. 10].

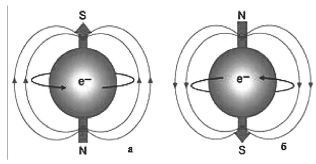


Рис. 14

Рисунок иллюстрирует спин электрона [42][13].

Таким образом, для современной науки и техники совершенно неважно, как, собственно говоря, выглядит действительная реальность. Важно лишь то, что ученый и инженер с ее помощью могут правильно заранее спланировать и реализовать свою деятельность и получить желаемые результаты. Этой цели и служат разнообразные графические представления и модели, которые развиваются сегодня и в наносистемотехнике. Хотя такое графическое представление еще далеко от совершенства,

[13] В дополнение к электрическим свойствам электрона в электронике могут быть использованы его магнитные свойства — спин. Спинтроника может быть рассмотрена как основа технологии создания квантового компьютера, поскольку она позволяет манипулировать электроном как квантово-механической волной, а не как частицей [50, p. 27].

поскольку оно является лишь первой попыткой построить абстрактную алгоритмическую модель нанопроцесса, называемого самосборкой наноструктур.

На рис. 15 показана последовательность фотохимических превращений краунсодержащих красителей в растворах в присутствии катионов металлов. Варьируя концентрацию катионов и длину волны возбуждающего света, можно изменить направление фотохимических превращений [1].

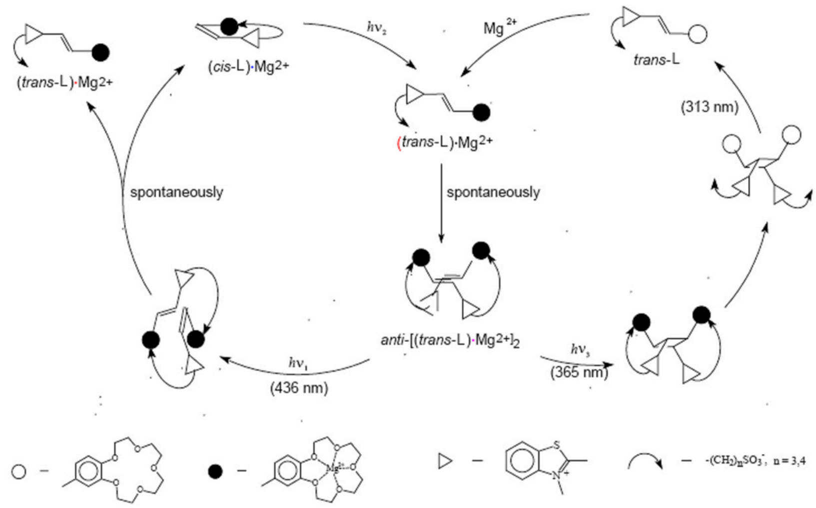


Рис. 15

Относительно приведенной на рис. 15 схемы синтеза наноструктур можно повторить слова академика РАН Б.Н. Петрова, сказанные им еще в 1945 г. относительно структурных схем теории автоматического регулирования: «При анализе и синтезе различных... систем..., в особенности, когда рассматриваются сложные системы, большое значение имеет ясное представление об их структуре, динамических свойствах отдельных элементов и их взаимодействии... Структурные схемы способствуют наглядному представлению о характере и структуре системы, облегчают анализ сложных систем и сравнение различных систем и вариантов их между собой, дают возможность произвести качественную оценку системы ...» [19, с. 1146, 1142].

Таким образом, как в научных теориях, так и в прикладных областях возрастает роль построения различного рода логических моделей, призванных, с одной стороны, объединять разрозненные дисциплинарные научные знания, а с другой — служить своего рода «проектом» будущих разработок, ориентированных на применение.

Литература

[1] *Алфимов М.В.* Фотоника супрамолекулярных наноразмерных структур // Статья доступна на сайте http://www.photonics.ru/pics/5136ref/alf_article.pdf

[2] *Ауслендер Д.М.* Развитие науки об автоматическом управлении // Динамические системы управления. Труды американского общества инженеров-механиков. 1972. Т. 94. №1.

[3] *Белевич В.* Краткая история развития теории цепей // Труды института радиоинженеров. 1962. Т. 50. №5. Часть 1.

[4] *Бирюков Б.В.* К проблеме приоритета в открытии логической теории релейно-контактных схем. Документы из архива Виктора Ивановича Шестакова // Логические исследования. Вып. 15. М.: Наука, 2009.

[5] *Бирюков Б.В., Шахов В.И.* Первые приложения логики к технике: Эренфест, Герсеванов и Шестаков. От применения логики к расчету сооружений и релейным схемам к логической теории размерностей физических величин // Логические исследования. Вып. 14. М.: Наука, 2007.

[6] *Воронов А.А.* Структурная схема // БСЭ. http://dic.academic.ru/dic.nsf/bse/136582/

[7] *Воронов А.А.* Элементы теории автоматического регулирования. М.: Военное изд-во, 1950.

[8] *Гальперин И.И.* Структурное исследование регулируемых систем // Известия ВТИ. 1941. №4.

[9] *Девятков В.В.* GPSS http://www.gpss.ru/

[10] *Заде Л.* От теории цепей к теории систем // Труды института радиоинженеров. 1962. Т. 50. №5. Ч. 1.

[11] *Захаров В.Н., Поспелов Д.А., Хазацкий В.Е.* Системы управления. М.: Энергия, 1977.

[12] Имитационное моделирование на языке GPSS / Сост. Алтаев А.А. Улан-Удэ: Изд-во ВСГТУ, 2001. http://www.ict.edu.ru/ft/004998/Mtduksi2.pdf

[13] *Колосов С.П., Сидоров Ю.А.* Нелинейные двухполюсники и четырехполюсники. М.: Высшая школа, 1981.

[14] *Лернер А.Я.* Расчленение систем автоматического регулирования на элементы. М.: Машгиз, 1949.

[15] Машинные имитационные эксперименты с моделями экономических систем / Под ред. Нейлора Т.М. М.: Мир, 1975 (Neylor T.H. (Ed.) Computer Simulation Experiments with Models of Economic Systems. N.Y.: John Wiley & Sons, 1971).

[16] *Михайлов А.* Метод гармонического баланса в теории автоматического регулирования // Автоматика и телемеханика. 1938. №3.

[17] *Нечипоренко В.И.* Структурный анализ и методы построения сложных систем. М.: Сов. Радио, 1977.

[18] *Новгородцев А.Б.* 30 лекций по теории электрических цепей. Электронный учебник. Санкт-Петербургский Государственный Технический Университет, Кафедра Теоретических Основ Электротехники (Версия 2.00, 2002 г.) http://eelib.narod.ru/toe/Novg_2.01/index.htm

[19] *Петров Б.Н.* О построении и преобразовании структурных схем // Известия АН СССР. ОТН, 1945.

[20] *Поваров Г.Н.* Метод синтеза вычислительных и управляющих контактных схем // Автоматика и телемеханика. 1957. №2.

[21] *Попов Е П.* Следящая система http://www.cultinfo.ru/fulltext/1/001/008/103/202.htm

[22] *Поспелов Д. А.* Логические методы анализа и синтеза схем. М.: Энергия, 1974.

[23] *Сталл И.* GPSS – 40 ЛЕТ РАЗВИТИЯ. Департамент управления высшего уровня экономики Стокгольмской школы экономики. Труды конференции WSC-2001, 9-12 декабря 2001 года / Перевод с английского к.т.н. Девятков В.В. (Элина-Компьютер, г. Казань) - http://www.gpss.ru/paper/stahl/index_w.html

[24] Теория следящих систем / Под ред. Х. Джеймса, Н. Никольса, Р. Филлипса. М.: Ин. Лит., 1953 (пер. с англ.: Theory of servomechanisms. Ed. by H. James, N. Nichols, R. Phillips. N.Y. – L.: MIT, 1947).

[25] *Хофер А., Герхард Г.* Графические методы в управлении. М.: Экономика, 1971.

[26] *Шкурба В.В.* Формульно-операторный язык // Автоматизированные системы управления предприятием. Киев, 1969.

[27] *Шрайбер Т. Дж.* Моделирование на GPSS. М.: Машиностроение, 1980.

[28] *Bergbreiter S.* Moving from Practice to Theory: Automatic Control after World War II // History of Science, University of California, Berkeley, 2005 - http://www.cs.berkeley.edu/~sbergbre/publications/BergbreiterHIS285S.pdf

[29] *Bissell Ch.* Models and 'black boxes': mathematics as an enabling technology in the history of communications and control engineering // Revue d'Histoire des Sciences. Vol. 57 (2). http://www.persee.fr/web/revues/home/prescript/article/rhs_0151-4105_2004_num_57_2_2215

[30] *Cagle W.B., Menne R.S., Skinner R.S., Staehler R.E., Underwood M.D.* No. 1 ESS Logic Circuits and Their Application to the Design of the Central Control // Bell System Technical Journal. 1964. Vol. 43. Iss. 5.

[31] *Carson J.R.* Electric Circuit Theory and the Operational Calculus // Bell System Technical Journal. 1925. Vol. 4. Iss. 4.

[32] *Cermak I.A., Kirby Mrs. D.B.* Statistical Circuit Design: Nonlinear Circuits and Statistical Design // Bell System Technical Journal. 1971. Vol. 50. Iss. 4.

[33] *Chappel S.G., Elmendorf C.H., and Schmidt L.D.* LAMP: Logic-Circuit Simulators // Bell System Technical Journal. 1974. Vol. 53. Iss. 8.

[34] *Crain R.C.* Simulation using GPSS/H // Proceedings of the 1997 Winter Simulation Conference / S. Andradottir, K. J. Healy, D. H. Withers, and B. L. Nelson (eds.). Piscataway, New Jersey: Institute of Electrical and Electronics Engineers, 1997 - http://citeseerx.ist.psu.edu/viewdoc/download?doi=10.1.1.24.1192&rep=rep1&type=pdf

[35] *Dr. Campbell's* Memoranda of 1907 and 1912 // Bell System Technical Journal. 1935. Vol. 14. Iss. 4. October 1935.

[36] *George A. Campbell* 1870 - 1954 // Bell System Technical Journal. Vol. 34. Iss. 1. January 1955 .

[37] *Gordon G.* The Application of GPSS V to Discrete System Simulation. Englewood Cliffs, New Jersey: Prentice-Hall, Inc., 1975.

[38] *Gordon S.* Brown and Donald P. Campbell. Principles of Servomechanisms: Dynamics and Synthesis of Closed-Loop Control Systems. New York: John Wiley & Sons, Inc., 1948.

[39] *Gosling W.* The Design of Engineering Systems. London: Heywood & Company Ltd, 1962.

[40] GPSS - 40 лет: перспективы развития. http://www.gpss.ru/paper/wsc2001/index_w.html

[41] http://knigechka.blogspot.com/2009/10/32.html

[42] http://www.natureasia.com/asia-materials/highlight.php?id=264
[43] *Jewett, F.B. Dr. George A. Campbell* // Bell System Technical Journal, 1935,Vol. 14, Iss. 4
[44] *Jozsa C., Tombros N., Popinciuc M., Jonkman H.T., Wees B.J. van.* Graphene spintronics — injection and transport // NIM workshop “Interactions in Hybrid Nanosystems”. Frauenworth, 2008.
[45] *Kozemchak E.B., Murray-Lasso M.A.* Computer-Aided Circuit Design by Singular Imbedding // Bell System Technical Journal. 1969. Vol. 48. Iss. 1.
[46] *Laker K.R.* Equivalent Circuits for the Analysis and Synthesis of Switched Capacitor Networks // Bell System Technical Journal, 1979. Vol. 58. Iss. 3.
[47] *Liebl Fr.* Simulation: problemorientierte Einführung. München; Wien: R. Oldenbourg Verlag, 1995.
[48] *Ludewig J.* Simulationsmodelle ganzer Unternehmungen. Wiesbaden: Betriebswirtschaftlicher Verlag Dr. Th. Gabler, 1969.
[49] *Muller W.* Die Simulation betriebswirtschaftlicher Informationssysteme. Wiesbaden: Betriebswirtschaftlicher Verlag Dr. Th. Gabler, 1969.
[50] Nanotechnology Innovation for Tomorrow’s World. European Communities, 2004.
[51] *Ohno H., Matsukura F.* A ferromagnetic III±V semiconductor: (Ga,Mn)As // Solid State Communications. 2001. Vol. 117. http://www.elsevier.com/locate/ssc
[52] *Pestel E., Kolmann E.* Grundlagen der Regeltechnik. Braunschweig: Friedr. Vieweg & Sohn, 1968.
[53] *Peterson L.C.* Equivalent Circuits of Linear Active Four-Terminal Networks // Bell System Technical Journal. 1948. Vol. 27. Iss. 4.
[54] *Rausch R.G.* The Analysis of Valve-Controlled Hydraulic Servomechanisms // Bell System Technical Journal. 1959. Vol. 38. Iss. 6.
[55] *Rosmann H.* Simulation mit GPSS. Munchen: R. Oldenbourg Verlag Gmbh, 1978.
[56] *Ryder R.M., Kircher R.J.* Some Circuit Aspects of the Transistor // Bell System Technical Journal. 1949. Vol. 28. Iss. 3.
[57] *Shannon C.* Symbolic Analysis of Relay and Switching Circuits // Trans. of the Amer. Institute of Electr. Engineers. 1938. Vol. 57. http://dspace.mit.edu/bitstream/handle/1721.1/11173/34541425.pdf?sequence=1
[58] *Smith Jr. E.C.* Simulation in Systems Engineering // IBM Systems Journal. 1962. Vol. 1. Iss. 1.
[59] Springer Handbook of Nanotechnology // B. Bhushan (Ed.). Berlin, Heidelberg, New York: Springer Verlag, 2004.
[60] *Staehler R.E.* An Application of Boolean Algebra to Switching Circuit Design // Bell System Technical Journal. 1952. Vol. 31. Iss. 2.
[61] *Weber K., Trzebiner R., Tempelmeier H.* Simulation mit GPSS. Berlin und Stuttgart: Verlag Paul Haupt, 1983.
[62] *Wintz N.J.* The Kalman filter on time scales. A Dissertation Presented to the Faculty of the Graduate School of the Missouri University of Science and Technology in Partial Fulfillment of the Requirements for the Degree Doctor of Philosophy in Mathematics, 2009 - http://scholarsmine.mst.edu/thesis/pdf/Wintz_09007dcc806c8092.pdf
[63] *Wyman F.P.* Simulation modeling: a guide to using SIMSCRIPT. N.Y., London etc.: John Wiley & Sons, Inc., 1970.

Четыре следования, три порядка, две матрицы, одна бирешетка

Л. Ю. Девяткин

ABSTRACT. In this paper it is shown how four consequence relations defined in terms of designated and anti-designated values allow to produce a six-element bilattice on the basis of two arbitrary finite-valued logical matrices for a propositional language L.

Keywords: product of logical matrices, anti-designated values, consequence relation

В настоящей работе будет показано, как основе четырех попарно различных отношений логического следования, которые можно определить в терминах выделенных и анти-выделенных значений, и двух произвольных конечнозначных матриц для некоторого пропозиционального языка L можно построить шестиэлементную бирешетку с порядками по отношению логического следования и классу тавтологий.

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 1. Пусть дан пропозициональный язык L. Логическая матрица $\mathfrak{M} =< \mathcal{A}, D >$, где $\mathcal{A}$ есть некоторая алгебра, а D выделенное подмножество множества-носителя $\mathcal{A}$, является матрицей для L, е.т.е. для каждого n число n-арных базовых операций $\mathcal{A}$ равно числу n-арных связок в L.

Тогда можно установить взаимно-однозначное соответствие между связками из L и операциями из $\mathcal{A}$ соответствующей местности и определить оценку L-формулы (далее — «формулы») A в $\mathfrak{M}$ следующим образом:

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 2. Оценка v формулы A в $\mathfrak{M}$ есть отображение L на $\mathcal{A}$, такое что

- если A есть пропозициональная переменная, то $v(A) \in V$, где V есть множество-носитель $\mathcal{A}$;

- если $A_1, A_2, \cdots, A_n$ есть формулы, и $\mathbb{C}$ есть n-арная связка из L, то $v(\mathbb{C}(A_1, A_2, \cdots, A_n)) = f^n(v(A_1), v(A_2), \cdots, v(A_n))$, где f^n есть операция из $\mathcal{A}$, соответствующая $\mathbb{C}$.

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 3. Формула A логически следует из множества формул Γ в $\mathfrak{M}$ ($\Gamma \models (\mathfrak{M})B$), е.т.е. не существует оценки v в $\mathfrak{M}$, такой что $v[\Gamma] \subseteq D(\mathfrak{M})$ (то есть, каждая формула из Γ принимает значение, выделенное в $\mathfrak{M}$) и $v(A) \notin D(\mathfrak{M})$.

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 4. Формула A является тавтологией в $\mathfrak{M}$ ($\models (\mathfrak{M})B$), е.т.е. A логически следует из любого (в том числе пустого) множества формул Γ в $\mathfrak{M}$.

Обозначим как $C(\mathfrak{M})$ множество упорядоченных пар $< \Gamma, B >$, таких что Γ есть множество формул, B — формула и $\Gamma \models (\mathfrak{M})B$. Обозначим как $T(\mathfrak{M})$ множество тавтологий $\mathfrak{M}$. Ясно, что каждая пара $< Fm, \models (\mathfrak{M}) >$, где Fm есть множество формул языка L, а $\models (\mathfrak{M})$ есть отношение логического следования, заданное на Fm, порождает собственные классы $C(\mathfrak{M})$ и $T(\mathfrak{M})$.

Если $\mathfrak{A}$ и $\mathfrak{B}$ есть матрицы для L, можно установить взаимнооднозначное соответствие между их базовыми операциями. Это позволяет определить следующую операцию на $\mathfrak{A}$ и $\mathfrak{B}$:

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 5. Будем называть произведением матриц $\mathfrak{A}$ и $\mathfrak{B}$ ($\mathfrak{A} \times \mathfrak{B}$) такую матрицу $\mathfrak{C}$, что

- $V(\mathfrak{C})$ есть прямое произведение $V(\mathfrak{A})$ и $V(\mathfrak{B})$;

- каждой паре соответствующих k-арных базовых операций $f^k(x_1, x_2, \cdots, x_k)$ из $\mathfrak{A}$ и $g^k(y_1, y_2, \cdots, y_k)$ из $\mathfrak{B}$ взаимнооднозначно сопоставлена базовая операция h^k из $\mathfrak{C}$, причем $h^k(< x_1, y_1 >, < x_2, y_2 >, \cdots, < x_k, y_k >) = < f^k(x_1, x_2, \cdots, x_k), g^k(y_1, y_2, \cdots, y_k) >$;

- значение $< x_i, y_j >$ в $\mathfrak{C}$ является выделенным ($< x_i, y_j > \in D(\mathfrak{C})$), е.т.е. $x_i \in D(\mathfrak{A})$ и $y_j \in D(\mathfrak{B})$;

- значение $< x_i, y_j >$ в $\mathfrak{C}$ является анти-выделенным ($< x_i, y_j > \in D^*(\mathfrak{C})$), е.т.е. $x_i \notin D(\mathfrak{A})$ и $y_j \notin D(\mathfrak{B})$.

Таким образом, $\mathfrak{C}$ оказывается модифицированной матрицей, где к классам выделенных и невыделенных значений добавляется третий — класс анти-выделенных значений, и каждый элемент множества-носителя $\mathfrak{C}$ принадлежит одному из трех классов. Матрицы такого типа называются q-матрицами [4]. Можно определить четыре различных отношения логического следования в произвольной q-матрице $\mathfrak{N}$.

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 6.

1. $\Gamma \vDash_t (\mathfrak{N})B$, е.т.е. не существует оценки v в $\mathfrak{N}$, такой что $v[\Gamma] \subseteq D(\mathfrak{N})$ и $v(A) \notin D(\mathfrak{N})$ (классическое следование);

2. $\Gamma \vDash_f (\mathfrak{N})B$, е.т.е. не существует оценки v в $\mathfrak{N}$, такой что $v[\Gamma] \subseteq \overline{D^*(\mathfrak{N})}$ (то есть, ни одна из формул не принимает анти-выделенное в $\mathfrak{N}$ значение) и $v(A) \in D^*(\mathfrak{N})$ (см. [1]);

3. $\Gamma \vDash_q (\mathfrak{N})B$, е.т.е. не существует оценки v в $\mathfrak{N}$, такой что $v[\Gamma] \subseteq \overline{D^*(\mathfrak{N})}$ и $v(A) \notin D(\mathfrak{N})$ (q-следование, [4]);

4. $\Gamma \vDash_p (\mathfrak{N})B$, е.т.е. не существует оценки v в $\mathfrak{N}$, такой что $v[\Gamma] \subseteq D(\mathfrak{N})$ и $v(A) \in D^*(\mathfrak{N})$ (p-следование, [2]).

Каждое из этих отношений характеризует собственные классы формул $C^i(\mathfrak{N})$ и $T^i(\mathfrak{N})(i \in \{t, f, q, p\})$ языка, матрицей для которого является $\mathfrak{N}$. В матрицах, где $D \cap D^* = \varnothing$, между полученными отношениями следования имеет место порядок по $\subseteq$, где $\vDash_q$ есть минимум, а $\vDash_p$ есть максимум [6]:

УТВЕРЖДЕНИЕ 1.

i. $C^q(\mathfrak{N}) \subseteq C^t(\mathfrak{N})$;

ii. $C^q(\mathfrak{N}) \subseteq C^f(\mathfrak{N})$;

iii. $C^t(\mathfrak{N}) \subseteq C^p(\mathfrak{N})$;

iv. $C^f(\mathfrak{N}) \subseteq C^p(\mathfrak{N})$.

Ясно, что Утверждение 1 выполняется для $\mathfrak{C} = (\mathfrak{A} \times \mathfrak{B})$. Аналогичный порядок имеет место между $C(\mathfrak{A})$, $C(\mathfrak{B})$, $C^q(\mathfrak{C})$ и $C^p(\mathfrak{C})$.

УТВЕРЖДЕНИЕ 2. *Пусть* $\mathfrak{C} = (\mathfrak{A} \times \mathfrak{B})$. *Тогда имеет место следующее:*

i. $C^q(\mathfrak{C}) \subseteq C(\mathfrak{A})$;

ii. $C^q(\mathfrak{C}) \subseteq C(\mathfrak{B})$;

iii. $C(\mathfrak{A}) \subseteq C^p(\mathfrak{C})$;

iv. $C(\mathfrak{B}) \subseteq C^p(\mathfrak{C})$.

Доказательство. *(i)* Пусть $\Gamma \vDash_q (\mathfrak{C})B$ и $\Gamma \nvDash (\mathfrak{A})B$. Тогда существует оценка v в $\mathfrak{A}$, такая что $v[\Gamma] \subseteq D(\mathfrak{A})$ и $v(A) \notin D(\mathfrak{A})$. В этом случае, по определению $\mathfrak{C}$, $w[\Gamma] \subseteq \overline{D^*(\mathfrak{C})}$ и $w(A) \notin D(\mathfrak{C})$ при некоторой оценке w в $\mathfrak{C}$. Следовательно $\Gamma \nvDash_q (\mathfrak{C})B$, что противоречит условию. Доказательство для *(ii)* аналогично.

Теперь докажем *(iii) и (iv)*. Пусть $\Gamma \nvDash_q (\mathfrak{C})B$ и B следует из Γ в $\mathfrak{A}$ или $\mathfrak{B}$. Тогда существует оценка w в $\mathfrak{C}$, такая что $v[\Gamma] \subseteq D(\mathfrak{C})$ и $v(A) \in D^*(\mathfrak{C})$. Это возможно только в том случае, когда имеются оценки v в $\mathfrak{A}$ и u в $\mathfrak{B}$, при которых $v[\Gamma] \subseteq D(\mathfrak{A})$ и $v(A) \notin D(\mathfrak{A})$, а также $u[\Gamma] \subseteq D(\mathfrak{B})$ и $u(A) \notin D(\mathfrak{B})$. Однако тогда $\Gamma \nvDash (\mathfrak{A})B$ и $\Gamma \nvDash (\mathfrak{B})B$. Q.E.D.

Итак, $\vDash_q$ снова оказывается минимумом, а $\vDash_p$ — максимумом. То есть, из Утверждений 1 и 2 можно сделвать вывод, что имеет место решетка с четырьмя промежуточными элементами. Как выясняется, на данных элементах также можно задать порядок по $\subseteq$, однако на этот раз речь пойдет о классах тавтологий.

УТВЕРЖДЕНИЕ 3. *Пусть* $\mathfrak{C} = (\mathfrak{A} \times \mathfrak{B})$. *Тогда имеет место следующее:*

i. $T^t(\mathfrak{C}) \subseteq T(\mathfrak{A})$;

ii. $T^t(\mathfrak{C}) \subseteq T(\mathfrak{B})$;

iii. $T(\mathfrak{A}) \subseteq T^f(\mathfrak{C})$;

iv. $T(\mathfrak{B}) \subseteq T^f(\mathfrak{C})$.

Доказательство. В действительности могут быть доказаны более сильные утверждения: *(v)* $T^t(\mathfrak{C}) = T(\mathfrak{A}) \cap T(\mathfrak{B})$; *(vi)* $T^f(\mathfrak{C}) = T(\mathfrak{A}) \cup T(\mathfrak{B})$. Доказательство *(v)* представлено в [5]. Докажем *(vi)* (доказательство аналогичного факта в другой формулировке имеется в [5] и [3]).

Пусть формула A принадлежит множеству $T(\mathfrak{A}) \cup T(\mathfrak{B})$. Тогда $A \in T(\mathfrak{A})$ или $A \in T(\mathfrak{B})$ (в неисключающем смысле). Если $A \in T(\mathfrak{A})$, то $v(A) \in D(\mathfrak{A})$ при каждой оценке v в $\mathfrak{A}$. Но тогда, согласно определению $\mathfrak{A} \times \mathfrak{B}$, не существует оценки w в $\mathfrak{C}$, при которой $w(A) \in D^*(\mathfrak{C})$. Следовательно, $A \in T^f(\mathfrak{C})$. Аналогично для $A \in T(\mathfrak{B})$.

Теперь пусть $A \notin T(\mathfrak{A})$ или $A \notin T(\mathfrak{B})$. Тогда существуют оценка v в $\mathfrak{A}$, такая что $v(A) \notin D(\mathfrak{A})$ и оценка u в $\mathfrak{B}$, такая что $u(A) \notin D(\mathfrak{B})$. Но тогда, по определению $\mathfrak{A} \times \mathfrak{B}$, существует оценка w в $\mathfrak{C}$, при которой $w(A) \in D^*(\mathfrak{C})$ и $A \notin T^f(\mathfrak{C})$. Q.E.D.

Из определений $\vDash_t (\mathfrak{N})$, $\vDash_f (\mathfrak{N})$, $\vDash_q (\mathfrak{N})$, $\vDash_p (\mathfrak{N})$, а также определения тавтологии вытекает, что $T^t(\mathfrak{N}) = T^q(\mathfrak{N})$ и $T^f(\mathfrak{N}) = T^p(\mathfrak{N})$.

Таким образом, произвольные логические матрицы $\mathfrak{A}$ и $\mathfrak{B}$ для пропозиционального языка L и их произведение $\mathfrak{C}$ с четырьмя отношениями следования образуют шестиэлементную бирешетку систем $< Fm, \vDash (\mathfrak{A}) >$, $< Fm, \vDash (\mathfrak{B}) >$, $< Fm, \vDash_t (\mathfrak{C}) >$, $< Fm, \vDash_f (\mathfrak{C}) >$, $< Fm, \vDash_q (\mathfrak{C}) >$ и $< Fm, \vDash_p (\mathfrak{C}) >$, в которой первый порядок есть порядок по включению класса C, а второй порядок — по включению класса T.

В заключение отметим одно полезное следствие. Из полученных результатов, в частности, вытекают критерии эквивалентности матриц для L по классу тавтологий и по отношению логического следования: $T(\mathfrak{A}) = T(\mathfrak{B})$, е.т.е. $T^t(\mathfrak{A} \times \mathfrak{B}) = T^f(\mathfrak{A} \times \mathfrak{B})$; $C(\mathfrak{A}) = C(\mathfrak{B})$, е.т.е. $C^p(\mathfrak{A} \times \mathfrak{B}) = C^q(\mathfrak{A} \times \mathfrak{B})$.

Литература

[1] *Dunn J.M.* Partiality and its dual // Studia Logica. V. 66. 2000. Pp. 5–40.

[2] *Frankowski S.* Formalization of a plausible inference // Bulletin of the Section of Logic. V. 33. 2004. Pp. 41–52.

[3] *Kalicki J.* A test for the equality of truth-tables // The Journal of Symbolic Logic. V. 17. № 3. 1952. Pp. 161–163.

[4] *Malinowski G.* Inferential many-valuedness // Philosophical logic in Poland, *J.Woleński* (ed.). Synthese Library, Kluwer Academic Publishers, Dordrecht. 1994. Pp. 74–84.

[5] *Rescher N.* Many-Valued Logic. New York (McGraw-Hill), 1969. Reprinted: Aldershot (Gregg Revivals), 1993. Pp. 96–101.

[6] *Shramko Y.*, *Wansing H.* Entailmant realtions and/as truth values // Bulletin of the Section of Logic. V. 36:3/4. 2007. Pp. 131–143.

К проблеме выразимости операций характеристических матриц паранепротиворечивых и параполных логик

Н. А. Знаменская

abstract. The following expressibilities are constructed: (1) implication of every logical matrix $\mathcal{M}_{PCont}$, $\mathcal{M}_{PCont(1)}$ and $\mathcal{M}_{PComp(1)}$ in terms of the operations of the logical matrix $\mathcal{M}_{LPF}$, (2) implication of every logical matrix $\mathcal{M}_{PCont}$, $\mathcal{M}_{LPF}$ and $\mathcal{M}_{PComp(1)}$ in terms of the operations of the logical matrix $\mathcal{M}_{PCont(1)}$, (3) implication of every logical matrix $\mathcal{M}_{PCont}$, $\mathcal{M}_{LPF}$ and $\mathcal{M}_{PCont(1)}$ in terms of the operations of the logical matrix $\mathcal{M}_{PComp(1)}$. Also it's proven that the implications of the logical matrices $\mathcal{M}_{LPF}$, $\mathcal{M}_{PCont(1)}$ and $\mathcal{M}_{PComp(1)}$ are not expressible in terms of the operations of the logical matrix $\mathcal{M}_{PCont}$.

Keywords: matrix, operation, implication, valuation, expressibilitiy, paraconsistent logic, paracomplete logic

В [1] построена трехзначная характеристическая матрица для паранепротиворечивой логики PCont (обозначаем эту матрицу через $\mathcal{M}_{PCont}$), в [2] — трехзначная характеристическая матрица для параполной логики LPF[1] (обозначаем эту матрицу через $\mathcal{M}_{LPF}$), в [3] — трехзначные характеристические матрицы для паранепротиворечивой логики PCont(1) (обозначаем эту матрицу через $\mathcal{M}_{PCont(1)}$) и параполной логики PComp(1) (обозначаем эту матрицу через $\mathcal{M}_{PComp(1)}$). В предлагаемой работе конструируются тождества, выражающие: 1) импликацию каждой матрицы $\mathcal{M}_{PCont}$, $\mathcal{M}_{PCont(1)}$, $\mathcal{M}_{PComp(1)}$ через операции матрицы $\mathcal{M}_{LPF}$, 2) импликацию каждой матрицы $\mathcal{M}_{PCont}$, $\mathcal{M}_{LPF}$, $\mathcal{M}_{PComp(1)}$ через операции матрицы $\mathcal{M}_{PCont(1)}$, 3) импликацию каждой матрицы $\mathcal{M}_{PCont}$, $\mathcal{M}_{LPF}$, $\mathcal{M}_{PCont(1)}$ через операции матрицы $\mathcal{M}_{PComp(1)}$. Кроме того, доказывается, что импликации

[1] В [4] и [5] логика LPF обозначена посредством PComp.

логических матриц $\mathcal{M}_{LPF}$, $\mathcal{M}_{PCont(1)}$ и $\mathcal{M}_{PComp(1)}$ не являются выразимыми через операции матрицы $\mathcal{M}_{PCont}$.

Следуя [1], [2] и [3], воспроизведем (с точностью до обозначения элементов носителей матриц и матричных операций) определения этих логических матриц.

Характеристическая матрица из [1] для PCont есть логическая матрица
$\langle\{1, \frac{1}{2}, 0\}, \{1, \frac{1}{2}\}, \{\neg, \&, \vee, \supset_{\boldsymbol{PCont}}\}\rangle$, где

	$\neg$
1	0
$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{2}$
0	1

$\&$	1	$\frac{1}{2}$	0
1	1	$\frac{1}{2}$	0
$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{2}$	0
0	0	0	0

$\vee$	1	$\frac{1}{2}$	0
1	1	1	1
$\frac{1}{2}$	1	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{2}$
0	1	$\frac{1}{2}$	0

$\supset_{\boldsymbol{PCont}}$	1	$\frac{1}{2}$	0
1	1	$\frac{1}{2}$	0
$\frac{1}{2}$	1	$\frac{1}{2}$	0
0	1	1	1

Характеристическая матрица из [2] для LPF есть логическая матрица $\langle\{1, \frac{1}{2}, 0\}, \{1\}, \{\neg, \&, \vee, \supset_{\boldsymbol{LPF}}\}\rangle$. Характеристическая матрица из [3] для PCont(1) есть логическая матрица $\langle\{1, \frac{1}{2}, 0\}, \{1, \frac{1}{2}\}, \{\neg, \&, \vee, \supset_{\boldsymbol{PCont(1)}}\}\rangle$. Характеристическая матрица из [3] для PComp(1) есть логическая матрица $\langle\{1, \frac{1}{2}, 0\}, \{1\}, \{\neg, \&, \vee, \supset_{\boldsymbol{PComp(1)}}\}\rangle$. Операции $\supset_{\boldsymbol{LPF}}, \supset_{\boldsymbol{PCont(1)}}, \supset_{\boldsymbol{PComp(1)}}$ задаются следующими таблицами:

$\supset_{\boldsymbol{LPF}}$	1	$\frac{1}{2}$	0
1	1	$\frac{1}{2}$	0
$\frac{1}{2}$	1	1	1
0	1	1	1

$\supset_{\boldsymbol{PCont(1)}}$	1	$\frac{1}{2}$	0
1	1	1	0
$\frac{1}{2}$	1	1	0
0	1	1	1

$\supset_{\boldsymbol{PComp(1)}}$	1	$\frac{1}{2}$	0
1	1	0	0
$\frac{1}{2}$	1	1	1
0	1	1	1

Существуют различные определения выразимости операций через операции. Здесь мы придерживаемся определений 1–3, предлагаемых В. М. Поповым. Условимся использовать символы $p_1, p_2, p_3, \dots$ в качестве переменных, а символы (,) и **,** в качестве технических символов. Определения 1 и 2, а также формулируемые далее условия предполагают, что $F_1, \dots, F_k$ (k — целое положительное число) есть операции на непустом множестве M, а $s_1, \dots, s_k$ есть попарно различные символы, каждый из которых отличен от любого из символов (,),**,**,$p_1, p_2, p_3, \dots$

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 1. $F_1 \dots F_k s_1 \dots s_k$-формулы:

(1) для всякого целого положительного числа n p_n есть $F_1 \dots F_k s_1 \dots s_k$-формула,

(2) если $i \in \{1, \ldots, k\}$ и ранг операции F_i есть 0, то s_i есть $F_1 \ldots F_k s_1 \ldots s_k$-формула,

(3) если $i \in \{1, \ldots, k\}$ и ранг операции F_i отличен от 0 и равен l, а $A_1, \ldots, A_l$ есть $F_1 \ldots F_k s_1 \ldots s_k$-формулы, то $s_i(A_1\mathbf{,} \ldots \mathbf{,} A_l)$ есть $F_1 \ldots F_k s_1 \ldots s_k$-формула,

(4) ничто другое не есть $F_1 \ldots F_k s_1 \ldots s_k$-формула.

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 2. $F_1 \ldots F_k s_1 \ldots s_k$-оценки:

$F_1 \ldots F_k s_1 \ldots s_k$-оценкой называем отображение множества всех переменных во множество M.

Можно доказать, что существует единственное отображение, обозначим его через $||^{F_1 \ldots F_k s_1 \ldots s_k}$, удовлетворяющее условиям:

(1) $|\ |^{F_1 \ldots F_k s_1 \ldots s_k}$ есть отображение в M декартова произведения множества всех $F_1 \ldots F_k s_1 \ldots s_k$-формул на множество всех $F_1 \ldots F_k s_1 \ldots s_k$-оценок,

(2) если n есть целое положительное число и v есть $F_1 \ldots F_k s_1 \ldots s_k$-оценка, то $|p_n, v|^{F_1 \ldots F_k s_1 \ldots s_k} = v(p_n)$,

(3) если $i \in \{1, \ldots, k\}$, ранг операции F_i есть 0 и v есть $F_1 \ldots F_k s_1 \ldots s_k$-оценка, то $|s_i, v|^{F_1 \ldots F_k s_1 \ldots s_k} = F_i$,

(4) если $i \in \{1, \ldots, k\}$, ранг операции F_i отличен от 0 и равен l, $A_1, \ldots, A_l$ есть $F_1 \ldots F_k s_1 \ldots s_k$-формулы и v есть $F_1 \ldots F_k s_1 \ldots s_k$-оценка, то $|s_i(A_1\mathbf{,} \ldots \mathbf{,} A_l), v|^{F_1 \ldots F_k s_1 \ldots s_k} = F_i(|A_1, v|^{F_1 \ldots F_k s_1 \ldots s_k}, \ldots, |A_l, v|^{F_1 \ldots F_k s_1 \ldots s_k})$.

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 3. Операция g выразима через операции $f_1, \ldots, f_k$ (k — целое положительное число), если операции g, $f_1, \ldots, f_k$ являются операциями на одном и том же непустом множестве, существуют попарно различные символы $s_1, \ldots, s_k$, каждый из которых отличен от любого из символов $(,), \mathbf{,}, p_1, p_2, p_3, \ldots$ и существует такая $f_1 \ldots f_k s_1 \ldots s_k$-формула Φ, что выполняются следующие условия:

(1) если ранг операции g равен 0, то для всякой $f_1 \ldots f_k s_1 \ldots s_k$-оценки v $g = |\Phi, v|^{f_1 \ldots f_k s_1 \ldots s_k}$,

(2) если ранг операции g есть целое положительное число n, то для всякой $f_1 \dots f_k s_1 \dots s_k$-оценки v верно, что $g(v(p_1), \dots, v(p_n)) = |\Phi, v|^{f_1 \dots f_k s_1 \dots s_k}$.

Очевидны следующие утверждения (1)–(4).

(1) Символы $\neg, \&, \vee, \supset$ попарно различны и каждый из них отличен от любого из символов $(,), ,, p_1, p_2, p_3, \dots$

(2) Операции $\boldsymbol{\neg}, \boldsymbol{\&}, \boldsymbol{\vee}, \boldsymbol{\supset}_{\boldsymbol{PCont}}, \boldsymbol{\supset}_{\boldsymbol{LPF}}, \boldsymbol{\supset}_{\boldsymbol{PCont(1)}}, \boldsymbol{\supset}_{\boldsymbol{PComp(1)}}$ являются операциями на одном и том же множестве (на множестве $\{1, \frac{1}{2}, 0\}$).

(3) $\neg p_1, p_1 \& p_2, p_1 \vee p_2$ и $p_1 \supset p_2$ есть $\boldsymbol{\neg}\,\boldsymbol{\&}\,\boldsymbol{\vee}\,\boldsymbol{\supset}_{\boldsymbol{LPF}}$ $\neg\&\vee\supset$-формулы, $\boldsymbol{\neg\&\vee}\ \boldsymbol{\supset}_{\boldsymbol{PCont(1)}}$ $\neg\&\vee\ \supset$-формулы и $\boldsymbol{\neg\&\vee}\ \boldsymbol{\supset}_{\boldsymbol{PComp(1)}}$ $\neg\&\vee\ \supset$-формулы[2] (внешние скобки опускаем, как это принято).

(4) Если $f_1, \dots, f_k$ (k — целое положительное число) суть операции на некотором непустом множестве, то для всякого i (i есть целое положительное число, меньшее или равное k) операция f_i выразима через операции $f_1, \dots, f_k$.

ТЕОРЕМА 1 (о выразимости, операций матриц $\mathcal{M}_{PCont}$, $\mathcal{M}_{PCont(1)}$ и $\mathcal{M}_{PComp(1)}$ через операции матрицы $\mathcal{M}_{LPF}$).

Всякая операция $\boldsymbol{\neg}, \boldsymbol{\&}, \boldsymbol{\vee}, \boldsymbol{\supset}_{\boldsymbol{PCont}}, \boldsymbol{\supset}_{\boldsymbol{PCont(1)}}, \boldsymbol{\supset}_{\boldsymbol{PComp(1)}}$ выразима через операции $\boldsymbol{\neg}, \boldsymbol{\&}, \boldsymbol{\vee}, \boldsymbol{\supset}_{\boldsymbol{LPF}}$.

Доказательство. В свете утверждений (1)–(4) и определения 3 понятно, что для доказательства Теоремы 1 достаточно доказать утверждение (5).

(5) Для всякой $\boldsymbol{\neg\&\vee}\ \boldsymbol{\supset}_{\boldsymbol{LPF}}$ $\neg\&\vee\ \supset$-оценки v: $v(p_1) \boldsymbol{\supset}_{\boldsymbol{PCont}} v(p_2) = |(\neg p_1 \supset p_2) \supset p_2, v|^{\boldsymbol{\neg\&\vee\supset}_{\boldsymbol{LPF}}\neg\&\vee\supset}$, $v(p_1) \boldsymbol{\supset}_{\boldsymbol{PCont(1)}} v(p_2) = |\neg((\neg p_2 \supset \neg p_1) \supset \neg(p_1 \supset p_1)), v|^{\boldsymbol{\neg\&\vee\supset}_{\boldsymbol{LPF}}\neg\&\vee\supset}$, $v(p_1) \boldsymbol{\supset}_{\boldsymbol{PComp(1)}} v(p_2) = |\neg((p_1 \supset p_2) \supset \neg(p_1 \supset p_1)), v|^{\boldsymbol{\neg\&\vee\supset}_{\boldsymbol{LPF}}\neg\&\vee\supset}$.

[2] Автор надеется, что естественное для данного контекста использование инфиксной, а не префиксной, записи не создаст трудности для читателя.

Докажем утверждение (5).

(5.1) v_0 есть $\boldsymbol{\neg\&\vee\supset_{LPF}}\neg\&\vee\supset$-оценка (допущение).

Используя утверждение (5.1) и определение отображения $||^{\boldsymbol{\neg\&\vee\supset_{LPF}}\neg\&\vee\supset}$, получаем, что (5.2) $|(\neg p_1 \supset p_2) \supset p_2, v_0|^{\boldsymbol{\neg\&\vee\supset_{LPF}}\neg\&\vee\supset} = (\boldsymbol{\neg} v_0(p_1) \boldsymbol{\supset_{LPF}} v_0(p_2)) \boldsymbol{\supset_{LPF}} v_0(p_2)$, $|\neg((\neg p_2 \supset \neg p_1) \supset \neg(p_1 \supset p_1)), v_0|^{\boldsymbol{\neg\&\vee\supset_{LPF}}\neg\&\vee\supset} = \boldsymbol{\neg}((\boldsymbol{\neg} v_0(p_2) \boldsymbol{\supset_{LPF}} \boldsymbol{\neg} v_0(p_1)) \boldsymbol{\supset_{LPF}} \boldsymbol{\neg}(v_0(p_1) \boldsymbol{\supset_{LPF}} v_0(p_1)))$, $|\neg((p_1 \supset p_2) \supset \neg(p_1 \supset p_1)), v_0|^{\boldsymbol{\neg\&\vee\supset_{LPF}}\neg\&\vee\supset} = \boldsymbol{\neg}((v_0(p_1) \boldsymbol{\supset_{LPF}} v_0(p_2)) \boldsymbol{\supset_{LPF}} \boldsymbol{\neg}(v_0(p_1) \boldsymbol{\supset_{LPF}} v_0(p_1)))$.

Опираясь на табличные определения операций $\boldsymbol{\supset_{PCont}}$, $\boldsymbol{\supset_{PCont(1)}}, \boldsymbol{\supset_{PComp(1)}}, \boldsymbol{\neg}$ и $\boldsymbol{\supset_{LPF}}$, получаем, что

(5.3) $v_0(p_1) \boldsymbol{\supset_{PCont}} v_0(p_2) = (\boldsymbol{\neg} v_0(p_1) \boldsymbol{\supset_{LPF}} v_0(p_2)) \boldsymbol{\supset_{LPF}} v_0(p_2)$, $v_0(p_1) \boldsymbol{\supset_{PCont(1)}} v_0(p_2) = \boldsymbol{\neg}((\boldsymbol{\neg} v_0(p_2) \boldsymbol{\supset_{LPF}} \neg v_0(p_1)) \boldsymbol{\supset_{LPF}} \boldsymbol{\neg}(v_0(p_1) \boldsymbol{\supset_{LPF}} v_0(p_1)))$, $v_0(p_1) \boldsymbol{\supset_{PComp(1)}} v_0(p_2) = \boldsymbol{\neg}((v_0(p_1) \boldsymbol{\supset_{LPF}} v_0(p_2)) \boldsymbol{\supset_{LPF}} \boldsymbol{\neg}(v_0(p_1) \boldsymbol{\supset_{LPF}} v_0(p_1)))$.

(5.4) $v_0(p_1) \boldsymbol{\supset_{PCont}} v_0(p_2) = |(\neg p_1 \supset p_2) \supset p_2, v_0|^{\boldsymbol{\neg\&\vee\supset_{LPF}}\neg\&\vee\supset}$, $v_0(p_1) \boldsymbol{\supset_{PCont(1)}} v_0(p_2) = |\neg((\neg p_2 \supset \neg p_1) \supset \neg(p_1 \supset p_1))$, $v_0|^{\boldsymbol{\neg\&\vee\supset_{LPF}}\neg\&\vee\supset}$, $v_0(p_1) \boldsymbol{\supset_{PComp(1)}} v_0(p_2) = |\neg((p_1 \supset p_2) \supset \neg(p_1 \supset p_1)), v_0|^{\boldsymbol{\neg\&\vee\supset_{LPF}}\neg\&\vee\supset}$ (из (5.2) и (5.3)).

Снимая допущение (5.1) и обобщая, получаем, что верно утверждение (5). Q.E.D.

ТЕОРЕМА 2 (о выразимости операций матриц $\mathcal{M}_{PCont}$, $\mathcal{M}_{LPF}$ и $\mathcal{M}_{PComp(1)}$ через операции матрицы $\mathcal{M}_{PCont(1)}$).

Всякая операция $\boldsymbol{\neg}, \boldsymbol{\&}, \boldsymbol{\vee}, \boldsymbol{\supset_{PCont}}, \boldsymbol{\supset_{LPF}}, \boldsymbol{\supset_{PComp(1)}}$ *выразима через операции* $\boldsymbol{\neg}, \boldsymbol{\&}, \boldsymbol{\vee}, \boldsymbol{\supset_{PCont(1)}}$.

Доказательство. В свете утверждений (1)–(4) и определения 3 понятно, что для доказательства Теоремы 2 достаточно доказать утверждение (6).

(6) Для всякой $\boldsymbol{\neg\&\vee\supset_{PCont(1)}}\neg\&\vee\supset$-оценки v: $v(p_1) \boldsymbol{\supset_{PCont}} v(p_2) = |(p_1 \supset \neg((p_2 \supset p_1) \supset p_1)) \vee p_2, v|^{\boldsymbol{\neg\&\vee\supset_{PCont(1)}}\neg\&\vee\supset}$, $v(p_1) \boldsymbol{\supset_{LPF}} v(p_2) = |(p_1 \supset \neg p_1) \vee p_2, v|^{\boldsymbol{\neg\&\vee\supset_{PCont(1)}}\neg\&\vee\supset}$, $v(p_1) \boldsymbol{\supset_{PComp(1)}} v(p_2) = |\neg p_2 \supset \neg p_1, v|^{\boldsymbol{\neg\&\vee\supset_{PCont(1)}}\neg\&\vee\supset}$.

Докажем утверждение (6).

(6.1) v_0 есть $\boldsymbol{\neg\&\vee\supset_{PCont(1)}}\neg\&\vee\supset$-оценка (допущение).

Используя утверждение (6.1) и определение отображения $||^{\neg\&\vee\supset_{PCont(1)}\neg\&\vee\supset}$, получаем, что (6.2) $|(p_1 \supset \neg((p_2 \supset p_1) \supset p_1)) \vee p_2, v_0|^{\neg\&\vee\supset_{PCont(1)}\neg\&\vee\supset} = (v_0(p_1) \supset_{PCont(1)} \neg((v_0(p_2) \supset_{PCont(1)} v_0(p_1)) \supset_{PCont(1)} v_0(p_1))) \vee v_0(p_2)$, $|(p_1 \supset \neg p_1) \vee p_2, v_0|^{\neg\&\vee\supset_{PCont(1)}\neg\&\vee\supset} = (v_0(p_1) \supset_{PCont(1)} \neg v_0(p_1)) \vee v_0(p_2)$, $|\neg p_2 \supset \neg p_1, v_0|^{\neg\&\vee\supset_{PCont(1)}\neg\&\vee\supset} = \neg v_0(p_2) \supset_{PCont(1)} \neg v_0(p_1)$.

Опираясь на табличные определения операций $\supset_{PCont}$,$\supset_{LPF}$, $\supset_{PComp(1)}$, $\neg$, $\vee$ и $\supset_{PCont(1)}$, получаем, что

(6.3) $v_0(p_1) \supset_{PCont} v_0(p_2) = (v_0(p_1) \supset_{PCont(1)} \neg((v_0(p_2) \supset_{PCont(1)} v_0(p_1)) \supset_{PCont(1)} v_0(p_1))) \vee v_0(p_2)$, $v_0(p_1) \supset_{LPF} v_0(p_2) = (v_0(p_1) \supset_{PCont(1)} \neg v_0(p_1)) \vee v_0(p_2)$, $v_0(p_1) \supset_{PComp(1)} v_0(p_2) = \neg v_0(p_2) \supset_{PCont(1)} \neg v_0(p_1)$.

(6.4) $v_0(p_1) \supset_{PCont} v_0(p_2) = |(p_1 \supset \neg((p_2 \supset p_1) \supset p_1)) \vee p_2, v_0|^{\neg\&\vee\supset_{PCont(1)}\neg\&\vee\supset}$, $v_0(p_1) \supset_{LPF} v_0(p_2) = |(p_1 \supset \neg p_1) \vee p_2, v_0|^{\neg\&\vee\supset_{PCont(1)}\neg\&\vee\supset}$, $v_0(p_1) \supset_{PComp(1)} v_0(p_2) = |\neg p_2 \supset \neg p_1, v_0|^{\neg\&\vee\supset_{PCont(1)}\neg\&\vee\supset}$ (из (6.2) и (6.3)).

Снимая допущение (6.1) и обобщая, получаем, что верно утверждение (6).

Q.E.D.

ТЕОРЕМА 3 (о выразимости операций матриц $\mathcal{M}_{PCont}$, $\mathcal{M}_{LPF}$ и $\mathcal{M}_{PCont(1)}$ через операции матрицы $\mathcal{M}_{PComp(1)}$).

Всякая операция $\neg, \&, \vee, \supset_{PCont}, \supset_{LPF}, \supset_{PCont(1)}$ *выразима через операции* $\neg, \&, \vee, \supset_{PComp(1)}$.

Доказательство. В свете утверждений (1)–(4) и определения 3 понятно, что для доказательства Теоремы 3 достаточно доказать утверждение (7).

(7) Для всякой $\neg\&\vee\supset_{PComp(1)}\neg\&\vee\supset$-оценки v: $v(p_1) \supset_{PCont} v(p_2) = |((p_2 \supset p_1) \supset \neg p_1) \vee p_2, v|^{\neg\&\vee\supset_{PComp(1)}\neg\&\vee\supset}$, $v(p_1) \supset_{LPF} v(p_2) = |(p_1 \supset p_2) \vee p_2, v|^{\neg\&\vee\supset_{PComp(1)}\neg\&\vee\supset}$, $v(p_1) \supset_{PCont(1)} v(p_2) = |\neg p_2 \supset \neg p_1, v|^{\neg\&\vee\supset_{PComp(1)}\neg\&\vee\supset}$.

Докажем утверждение (7).

(7.1) v_0 есть $\neg\&\vee\supset_{PComp(1)}\neg\&\vee\supset$-оценка (допущение).

Используя утверждение (7.1) и определение отображения $||^{\neg\&\vee\supset_{PComp(1)}\neg\&\vee\supset}$, получаем, что (7.2) $|((p_2 \supset p_1) \supset \neg p_1) \vee p_2, v_0|^{\neg\&\vee\supset_{PComp(1)}\neg\&\vee\supset} = ((v_0(p_2) \supset_{PComp(1)} v_0(p_1)) \supset_{PComp(1)}$

$\neg v_0(p_1)) \vee v_0(p_2)$, $|(p_1 \supset p_2) \vee p_2, v_0|^{\neg\&\vee\supset_{PComp(1)}\neg\&\vee\supset} = (v_0(p_1) \supset_{PComp(1)} v_0(p_2)) \vee v_0(p_2)$, $|\neg p_2 \supset \neg p_1, v_0|^{\neg\&\vee\supset_{PComp(1)}\neg\&\vee\supset} = \neg v_0(p_2) \supset_{PComp(1)} \neg v_0(p_1)$.

Опираясь на табличные определения операций $\supset_{PCont}$,$\supset_{LPF}$, $\supset_{PCont(1)}$, $\neg$, $\vee$ и $\supset_{PComp(1)}$, получаем, что

(7.3) $v_0(p_1) \supset_{PCont} v_0(p_2) = ((v_0(p_2) \supset_{PComp(1)} v_0(p_1)) \supset_{PComp(1)} \neg v_0(p_1)) \vee v_0(p_2)$, $v_0(p_1) \supset_{LPF} v_0(p_2) = (v_0(p_1) \supset_{PComp(1)} v_0(p_2)) \vee v_0(p_2)$, $v_0(p_1) \supset_{PCont(1)} v_0(p_2) = \neg v_0(p_2) \supset_{PComp(1)} \neg v_0(p_1)$.

(7.4) $v_0(p_1) \supset_{PCont} v_0(p_2) = |((p_2 \supset p_1) \supset \neg p_1) \vee p_2, v_0|^{\neg\&\vee\supset_{PComp(1)}\neg\&\vee\supset}$, $v_0(p_1) \supset_{LPF} v_0(p_2) = |(p_1 \supset p_2) \vee p_2, v_0|^{\neg\&\vee\supset_{PComp(1)}\neg\&\vee\supset}$, $v_0(p_1) \supset_{PCont(1)} v_0(p_2) = |\neg p_2 \supset \neg p_1, v_0|^{\neg\&\vee\supset_{PComp(1)}\neg\&\vee\supset}$ (из (7.2) и (7.3)).

Снимая допущение (7.1) и обобщая, получаем, что верно утверждение (7).

Q.E.D.

ЛЕММА. Пусть s_1, s_2, s_3 и s_4 есть попарно различные символы, каждый из которых отличен от любого из символов (,), ,, $p_1, p_2, p_3, \ldots$, а v есть такая $\neg\&\vee\supset_{PCont}$ $s_1s_2s_3s_4$-оценка, что $v(p_i) = \frac{1}{2}$ для всякого целого положительного числа i.

Для всякой $\neg\&\vee\supset_{PCont}$ $s_1s_2s_3s_4$-формулы A верно, что $|A, v|^{\neg\&\vee\supset_{PCont}s_1s_2s_3s_4} = \frac{1}{2}$.

Лемма доказывается индукцией по построению $\neg\&\vee\supset_{PCont}$ $s_1s_2s_3s_4$-формулы.

ТЕОРЕМА 4 (о невыразимости $\supset_{LPF}$, $\supset_{PCont(1)}$ и $\supset_{PComp(1)}$ через операции матрицы $\mathcal{M}_{PCont}$).

Операции $\supset_{LPF}$, $\supset_{PCont(1)}$ и $\supset_{PComp(1)}$ не являются выразимыми через операции $\neg, \&, \vee, \supset_{PCont}$.

Доказательство. Доказажем, что $\supset_{LPF}$ не является выразимой через операции $\neg, \&, \vee, \supset_{PCont}$.

Доказательство проводим от противного.

(1) $\supset_{LPF}$ выразима через $\neg, \&, \vee, \supset_{PCont}$ (допущение).

(2) Существуют попарно различные символы s_1, s_2, s_3, s_4, каждый из которых отличен от любого из символов (,), ,, $p_1, p_2, p_3, \ldots$ и существует такая $\neg\&\vee\supset_{PCont}$ $s_1s_2s_3s_4$-формула Φ, что для

всякой $\neg\&\vee\supset_{\boldsymbol{PCont}}$ $s_1s_2s_3s_4$-оценки v верно, что $v(p_1) \supset_{\boldsymbol{LPF}} v(p_2) = |\Phi, v|^{\neg\&\vee\supset_{\boldsymbol{PCont}} s_1s_2s_3s_4}$ (из (1), по определению 3).

Пусть $(3) s'_1, s'_2, s'_3, s'_4$ есть попарно различные символы, каждый из которых отличен от любого из символов (,), ,, $p_1, p_2, p_3, \ldots$, а Φ' есть такая $\neg\&\vee\supset_{\boldsymbol{PCont}}$ $s'_1s'_2s'_3s'_4$-формула, что для всякой $\neg\&\vee\supset_{\boldsymbol{PCont}}$ $s'_1s'_2s'_3s'_4$-оценки v верно, что $v(p_1) \supset_{\boldsymbol{LPF}} v(p_2) = |\Phi', v|^{\neg\&\vee\supset_{\boldsymbol{PCont}} s'_1s'_2s'_3s'_4}$.

Очевидно, что (4) существует такая $\neg\&\vee\supset_{\boldsymbol{PCont}}$ $s'_1s'_2s'_3s'_4$-оценка v, что $v(p_i) = \frac{1}{2}$ для всякого целого положительного числа i.

Пусть (5) v' есть такая $\neg\&\vee\supset_{\boldsymbol{PCont}}$ $s'_1s'_2s'_3s'_4$-оценка, что $v'(p_i) = \frac{1}{2}$ для всякого целого положительного числа i.

(6) $|\Phi', v'|^{\neg\&\vee\supset_{\boldsymbol{PCont}} s'_1s'_2s'_3s'_4} = \frac{1}{2}$ (из (3) и (5), по Лемме).

(7) $v'(p_1) \supset_{\boldsymbol{LPF}} v'(p_2) = |\Phi', v'|^{\neg\&\vee\supset_{\boldsymbol{PCont}} s'_1s'_2s'_3s'_4}$ (из (3) и (5)).

Опираясь на утверждения (6) и (7), получаем, что

(8) $v'(p_1) \supset_{\boldsymbol{LPF}} v'(p_2) \neq 1$.

(9) $v'(p_1) \supset_{\boldsymbol{LPF}} v'(p_2) = 1$ (из того, что $v'(p_1) = v'(p_2) = \frac{1}{2}$, по определению $\supset_{\boldsymbol{LPF}}$).

Утверждение (9) противоречит утверждению (8). Следовательно, неверно допущение (1). Но тогда $\supset_{\boldsymbol{LPF}}$ не является выразимой через $\neg, \&, \vee, \supset_{\boldsymbol{PCont}}$.

Доказательство того, что $\supset_{\boldsymbol{PCont(1)}}$ не является выразимой через операции $\neg, \&, \vee, \supset_{\boldsymbol{PCont}}$, и доказательство того, что $\supset_{\boldsymbol{PComp(1)}}$ не является выразимой через операции $\neg, \&, \vee, \supset_{\boldsymbol{PCont}}$, аналогичны данному выше доказательству того, что $\supset_{\boldsymbol{LPF}}$ не является выразимой через операции $\neg, \&, \vee, \supset_{\boldsymbol{PCont}}$.

Q.E.D.

Автор выражает благодарность В. М. Попову за постановку проблемы и сделанные им исправления в черновом варианте статьи и А. С. Карпенко, прорецензировавшему статью и сообщившему, что уже в работе [6] приведены те же, что и в настоящей статье, тождества, выражающие импликацию $\supset_{\boldsymbol{PCont(1)}}$ через операции матрицы $\mathcal{M}_{PComp(1)}$ и импликацию $\supset_{\boldsymbol{PComp(1)}}$ через операции матрицы $\mathcal{M}_{PCont(1)}$ (в целях сохранения целостности изложения мы не стали опускать здесь обоснование указанных тождеств).

Литература

[1] *Розоноэр Л. И.* О выявлении противоречий в формальных теориях. 1 // Автоматика и телемеханика, № 6, 1983. С. 113–124.

[2] *Avron A.* Natural 3-valued Logics: Characterization and proof theory // Journal of Symbolic Logic. Vol. 56. 1991. P. 276–294

[3] *Попов В. М.* Между Par(1) и множеством всех формул // Объединенный научный журнал. № 7–8 (254-255). М., 2011. С. 35–39.

[4] *Попов В. М.* Между Par и множеством всех формул // Материалы 6 конференции «Смирновские чтения по логике 2009». С. 93–95.

[5] *Знаменская Н. А., Попов В. М.* Паранормальная логика PContPComp как пересечение паранепротиворечивой логики PCont и параполной логики PComp // Материалы 6 конференции «Смирновские чтения по логике 2009». С.63–65.

[6] *Томова Н. Е.* Импликативные расширения регулярных логик Клини // Логические исследования. Вып. 16. М.-СПб., 2010. С.63–65.

Логические системы Лесневского

Н. Г. Москвицова

abstract. The paper “Lesniewski’s systems of logic” is devoted to three systems of logic of the polish logician St. Lesniewski. Lesniewski intended to construct the consistent foundations of mathematics, and then his strategy was fighting with the closure of the language and ability to control the system’s openness by the especial rules of the inference. In this paper we consider the systems of Protothetic, Ontology and Mereology, and also their peculiar features and Lesniewski’s contribution to the logic. We briefly describe the formation of Lesniewski’s systems and characteristic properties of each system.

Keywords: Lesniewski, protothetic, ontology, mereology

В конце XIX века велся поиск возможности доказательства непротиворечивости математики. Такая попытка была предпринята Г. Фреге за счет сведения математики к логике. Он опирался на теорию множеств Г. Кантора. Однако и попытка Фреге, и теория множеств Кантора оказались противоречивыми. Обнаружение противоречивости привело к поиску возможностей «спасти» от противоречий и теорию множеств, и попытку Фреге путем создания в первом случае аксиоматической теории множеств, а во втором — теории типов.

Ученик К. Твардовского и один из значительнейших представителей Львовско-Варшавской школы, Станислав Лесневский (1886–1939) проявил интерес к проблеме обоснования математики и предпринял попытку ее решения исходя из собственных философских воззрений. Но для этого необходимо было предварительно построить некий вариант точной и непротиворечивой логики. Исходя из этой задачи, им к 1925 году были построены три логические системы — Мереология, Прототетика и Онтология (исчисление имен). Исходной системой здесь является Прототетика, над которой надстраивается Онтология, а завершает всю эту иерархию Мереология.

Своей задачей я вижу исследование сохранившихся работ самого Ст. Лесневского, его учеников и последователей, выявления характерных черт систем Лесневского и установления их научного значения.

1 Становление теорий Лесневского

Станислав Лесневский родился 30 марта 1886 года в Серпухове. Он учился в грамматической школе в Иркутске, где работал его отец, а в 1904 году вместе с еще четырьмя польскими студентами был зачислен в университет. В студенческие годы он посетил несколько лекций Г. Корнелиуса в Мюнхене.

Диссертацию Лесневский писал во Львове под руководством ведущего философа того времени К. Твардовского. Защитил диссертацию по философии в 1912 году.

Под влиянием статьи Я. Лукасевича «On the Principle of Contradiction in Aristotle», опубликованной на польском языке в Кракове в 1910 году, Лесневский заинтересовался современной формальной логикой и особенно парадоксом Рассела, которым занимался последующие одиннадцать лет.

В период с 1911 по 1914 год Лесневский опубликовал семь статей по логике на польском языке:

1. «Вклад в анализ экзистенциальных предложений», 1911;
2. «Попытка доказательства онтологического принципа противоречия», 1912;
3. «Логические исследования», 1913 (русский перевод первых вышеуказанных двух статей);
4. «Всякая ли истина вечна, или есть также истина без начала», 1913;
5. «Критика логического принципа исключенного третьего», 1913;
6. «Является ли класс классов, не подчиненный им, подчиненным самому себе», 1914;
7. «Теория множеств в «Философских основаниях» Б. Бернштейна», 1914.

Позже Лесневский называл эти ранние работы незрелыми и неактуальными, однако уже в них прослеживается особый тип мышления, предвосхитивший идеи мереологии [10, p. VIII].

Среди интересных пунктов этих работ следует отметить:

1) новые аргументы против существования универсалий,

2) критику конвенционализма,

3) первое различение языка и метаязыка,

4) концепцию семантических категорий, позднее противопоставленную аналогичной теории Б. Рассела,

5) первый анализ представления о множестве в так называемом собирательном смысле (позднее развито внутри системы Мереологии).

В период с 1911 по 1915 год Лесневский выступил с докладами по этим семи работам перед Варшавским психологическим обществом. В одной из работ впервые представлена теория классов, позже переименованная в Мереологиию [10, Introduction, p. IX].

С 1915 по 1918 год Лесневский жил в Москве, где преподавал математику в польской средней школе (пансион мадам Якубовски). Пребывая в Москве, он прочитал много лекций на собраниях польских групп и учреждений. Среди названий этих лекций числятся — «Проблема непротиворечивой теории множеств», «Антиномии формальных теорий и языка», «Основные проблемы современной философии», «Философские основания марксизма». Именно в этот период Лесневский сформулировал и опубликовал на польском языке первый вариант формальной системы Мереологии под названием «Основания общей теории множеств», 1916.

По возвращении в Польшу Лесневский присоединяется к группе молодых математиков под руководством З. Янушевского и С. Мазуркевича, которые занимались основаниями математики.

С 1919 по 1939 год (вплоть до самой смерти) Лесневский занимал должность профессора философии математики в Варшавском университете.

Важный период для математической логики в Польше начался публикацией нового журнала *Fundamenta Mathematicae* в 1920 году. Эту дату считают датой рождения Польской школы математики. Лесневский был членом редакционной коллегии Fundamenta с самого начала до 1928 года.

С 1918 по 1927 год Лесневский читает несколько лекций, представленных в Секции логики Варшавского философского института (среди них — «Об одной из теорем теории отношений» (1918) и «О степенях грамматических функций» (1921)). Он строит первый вариант своей второй логической системы — Онтологии. Этот вариант был представлен в двух последующих работах под общим названием — «Об основаниях онтологии». Параллельно он читает две лекции в секции логики в рамках II Польского Философского Конгресса: «Об основаниях онтологии» и «Об основаниях логистики» (Львов, сентябрь 1927).

В работе «Об основаниях математики» 1927 года Лесневский анализирует концепции и замечания о множествах, высказанные Г. Кантором, Г. Фреге, Ф. Хаусдорфом, В. Серпиньским, А. Френкелем, Е. Цермело и Б. Расселом, показывая, что все они неудачны [1, с. 39]. Источник этих неудач, согласно Лесневскому, кроется в постулировании двух принципов:

1) в утверждении существования пустого множества и

2) в невразумительных попытках рассмотрения множеств как объемов понятий.

В качестве альтернативы в 1914–1916 гг. Лесневский разрабатывал Мереологию, представляющую собой теорию частей. Однако неудовлетворенность основаниями Мереологии приводит его вначале к построению более фундаментальной системы Онтологии, а затем и Прототетики, лежащей в основании обеих.

Таким образом, новая система оснований математики Лесневского состоит из трех частей: Прототетики, Онтологии и Мереологии.

Онтологию Лесневский стал разрабатывать 1919 году. Мереология, как формальная система, была построена в 1920 году, а в письменном виде предстала на суд логико-математического сообщества только в 1930-м. Онтология охватывает теорию предикатов (свойств), классов, отношений, теорию тождества.

Построение Прототетики как самой общей из систем Лесневского, тесно связанной с Онтологией, началось в 1921 году, хотя ее идеи можно найти уже в ранних работах Лесневского. Она была аксиоматизирована в 1929 году, но к работе над ней Лесневский вернулся в 1938-м. Прототетика — это логика пропозициональных форм с кванторами, связывающими переменные любого порядка. Особенность ее состоит именно в том, что квантифицировать можно все.

У Лесневского не было необходимости вводить обычную первопорядковую логику, поскольку можно доказать, что Онтология содержит не только первопорядковую, но и 0-порядковую предикатную логику (логику высказываний) без принятия дополнительных аксиом и правил вывода [10, Introduction, p. XV].

2 Прототетика

Прототетика является обобщением пропозиционального исчисления. Простейшее обобщение состоит в добавлении к выражениям пропозиционального исчисления кванторов, связывающих пропозициональные переменные. Высказывание в Прототетике является, таким образом, замкнутой формулой. Исходные связки Прототетики — кванторы и импликация. Дальнейшее обобщение пропозиционального исчисления — это система, которую Лесневский назвал расширенной теорией дедукции.

Чтобы перейти от элементарной Прототетики к системам, теоремы которых содержат выражения, принадлежащие тем семантическим категориям, которые мы можем определить, начиная с категории предложений, мы должны добавить новые правила вывода. В качестве таких правил выступают правила верификации или экстенсиональности. В зависимости от выбора одного из этих правил мы получаем разные, но эквивалентные друг другу системы Прототетики [12, p. 49].

Согласно Лесневскому, все выражения Прототетики делятся на классы, называемые семантическими категориями. Это деление в некоторой степени связано с теорией типов: в обеих теориях деление на семантические категории позволяет избежать логических антиномий. Существенное различие между ними состоит в том, что теория типов имеет дело с индивидами, классами и отношениями, в то время как Лесневский говорит о выражениях логики — элементах языка.

Базисная семантическая категория в Прототетике — категория высказываний. Все пропозициональные переменные принадлежат категории высказываний. Все выражения, не принадлежащие к базисной семантической категории и не являющиеся кванторами и скобками, являются функторами. Кванторы и скобки в Прототетике — синкатегорематические выражения, и им не приписывается никакая семантическая категория. Лесневский никогда не рассматривал в своих системах квантор существования. Несмотря на то что в многочисленных теоремах Онтологии Лесневского появляется квантор существования, он всегда может быть заменен последовательностью символов, состоящей из знаков отрицания и кванторов общности.

Квантификация в смысле Лесневского ближе всего к подстановочной квантификации. У Лесневского кванторы есть уже на пропозициональном уровне. Критерий Куайна («существовать — быть значением квантифицированной переменной») не применим к подстановочной квантификации, поскольку в системах Лесневского переменная пробегает по множеству, существование которого мы не можем постулировать (проблема существования универсалий). У Лесневского нет свободных переменных — все они являются разного рода сложными конструктами.

Для систем Лесневского характерно то, что определения приравниваются теоремам системы. Лесневский отказывается от расселовского понимания определения как сокращения. Определения Лесневского — это выражения, теоремы. Они записываются либо в виде эквивалентности, либо в форме двух импликаций. Введение определений автоматически делает их аксиомами системы.

Иногда введение определений изменяет саму систему таким образом, что она становится креативной. В то же время определения обладают свойством *переводимости*, т. е. во вновь полученной с помощью определения системе для каждой формулы, содержащей определяемый термин, всегда найдется соответствующий эквивалент формул из предыдущей системы [1, с. 36].

Стратегией Лесневского [1, с. 38] была борьба с замкнутостью языка. Креативность систем Лесневского, обусловленная введением и особенностью определений, влечет открытость систем. Контроль над новыми системами осуществляется посредством правил вывода (в частности, правил экстенсиональности и верификации). Эти правила позволяют сохранять открытость систем.

Все результаты, получаемые в стандартном пропозициональном исчислении, получаются и в Прототетике.

В Прототетике имеют место следующие три аксиомы:

A1. $\forall pqr((p \to q) \to ((q \to r) \to (p \to r)))$

A2. $\forall pq(q \to (p \to q))$

A3. $\forall pq((p \to q) \to p) \to p))$

Все теоремы стандартного пропозиционального исчисления (с импликацией и отрицанием в качестве единственных связок) являются следствиями A1–A3 [12, p. 54].

Для формулировки некоторых характеристических теорем Прототетики требуются следующие определения:

D1. $\forall p(as(p) \equiv p)$,

D2. $\forall p(vr(p) \equiv (p \equiv p))$,

D3. $\forall p(fl(p) \equiv (p \equiv \neg p))$,

D4. $1 = \forall p(p \equiv p)$,

D5. $0 = \forall p(p)$,

D1–D3 определяют функторы пропозиционального исчисления. Другие два определения определяют константы семантической категории высказываний. Символы as, vr, fl суть сокращения для функторов «утверждение» (assertio), «истина» (verum) и «ложь» (falsum) соответственно.

Приведем характеристические законы прототетики Лесневского [12, p. 55–59]:

1 *Закон экстенсиональности:*

(a) $\forall f, p, q((p \equiv q) \to (f(p) \equiv f(q)))$

Все функции от одного аргумента в элементарной Прототетике являются истинностными функциями.

2 *Закон количества функций:*

(b) $\forall f((\forall p f(p) \equiv as(p)) \vee (\forall p f(p) \equiv vr(p)) \vee (\forall p f(p) \equiv fl(p)) \vee (\forall p f(p) \equiv \neg p))$

Всякая пропозициональная функция от одного аргумента эквивалентна одной из четырех функций: $as(p)$, $vr(p)$, $fl(p)$ или $\neg p$. Этими функциями исчерпываются все альтернативы пропозициональных функций от одного аргумента.

3 *Закон развития:*

(c) $\forall f, p\,((f(1) \equiv p) \vee (f(0)\,\&\,\neg p))$

Всякая пропозициональная функция $f(p)$ после замены p любым истинным высказыванием эквивалентна выражению $f(1)$, а после замены любым ложным высказыванием — $f(0)$.

4 *Закон верификации:*

(d) $\forall f, p\,((f(1)\,\&\,f(0) \to f(p))$

Всякая функция от одного аргумента, удовлетворяемая выражениями 1 и 0, в элементарной Прототетике удовлетворяется любым выражением.

5 *Закон предела функции:*

(e) $\forall f(\forall p f(p) \equiv (f(1)\,\&\,f(0))$

Эту теорему можно использовать для определения квантора общности посредством конъюнкции и терминов 1 и 0. Термины «закон развития» и «теорема о пределе функции» заимствованы из алгебры логики [6, p. 50, 123].

6 *Обобщенный закон предела функции:*

(f) $\forall f, q(\forall p f(p) \equiv (f(q)\,\&\,f(\neg q)))$.

Пропозициональная функция от одного пропозиционального аргумента удовлетворяется любым высказыванием, если и только если она удовлетворяется двумя любыми противоречивыми высказываниями.

Законы (a)–(f) могут быть обобщены также для функций с большим числом аргументов. Все законы Прототетики являются эквивалентными друг другу.

Правила вывода в системах Прототетики, как было сказано выше, могут быть различными. Так, *правило подстановки* не разрешает подставлять на место сложных выражений другие выражения. Вместо свободных переменных, пробегающих по функторам любой семантической категории, подставляются константы или переменные той же семантической категории.

Правило отделения может применяться только к таким импликациям и эквивалентностям, которым не предшествуют кванторы:

Пусть высказывание $\forall p(\alpha)$ — теорема всех систем Прототетики, высказывание $\forall p(\alpha \to \beta)$ — теорема систем с единственной примитивной связкой — импликацией, а высказывание $\forall p(\alpha \equiv \beta)$ — теорема системы с примитивной связкой — эквивалентностью. Поскольку правила вывода позволяют нам проносить квантор через импликацию и эквивалентность, мы получаем следующие теоремы: $\forall p(\alpha) \to \forall p(\beta)$ и $\forall p(\alpha) \equiv \forall p(\beta)$. А теперь к обоим высказываниям можно применить правило отделения.

Правило верификации у Лесневского является обобщением правила, сформулированного Лукасевичем. Правило Лукасевича позволяет добавлять к системе пропозиционального исчисления любое высказывание, для которого выполняется следующее условие: выражения, полученные в результате подстановки в высказывание вместо одной из его пропозициональных переменных значения 1 и 0, являются теоремами этой системы. Выражения 1 и 0 здесь выступают верификаторами пропозициональных переменных. Для обобщения правила верификации нам нужно уметь получать верификаторы для выражений любой семантической категории. Это можно сделать путем введения определения эквивалентности двух функторов, принадлежащих к любой, но общей для обоих функторов семантической категории. Схема определения выглядит так:

$$\forall\varphi,\psi((\varphi\equiv\psi)\equiv\forall\xi_1,\ldots,\xi_n(\varphi(\xi_1\ldots\xi_n)\equiv\psi(\xi_1\ldots\xi_n))).$$

Выражения 1 и 0 суть верификаторы пропозициональной переменной, а функторы, определенные с помощью определений, имеющих вышеприведенную структуру, являются верификаторами функторной переменной φ. Эти определения содержат верификаторы аргументов функтора φ, которые имеют более низкий семантический порядок, чем переменная φ.

Правило верификации можно сформулировать так:

Пусть α — произвольное высказывание Прототетики. Если всякое высказывание, получаемое из α путем подстановки в α верификаторов вместо какого-либо из свободных вхождений функтора, будет теоремой этой системы, то α также будет теоремой системы [12, p. 84].

Первая система Прототетики S содержит в качестве единственной примитивной связки импликацию, а в качестве правил вывода — правила подстановки, отделения, добавления и удаления квантора и правило верификации. Ее единственная аксиома имеет следующий вид:

A1. $\forall f,g(f(\forall p(p\to p))\to(f(\forall p(p))\to f(q)))$.

Другая система $S1$ получается при замене правила верификации на правило экстенсиональности, которое гласит:

Для данного одноаргументного функтора, по крайней мере второго семантического порядка, закон экстенсиональности, сформулированный для данного функтора, является теоремой системы [12, p. 86].

Для систем S и $S1$ доказана их эквивалентность и полнота.

Помимо S и $S1$ существует система $S2$, единственный примитивный термин которой — эквивалентность. Список ее аксиом выглядит так:

A1. $\forall p,q,r((p\equiv q)\equiv((r\equiv q)\equiv(p\equiv r)))$

A2. $\forall p,q((p\equiv q)\equiv\forall f(f(p)\equiv f(q)))$

A3. $\forall p,q((p\equiv q)\equiv(\forall f(f(p)\equiv f(q))\equiv(p\equiv q)))$

A4. $\forall f(f(\forall p(p)) \equiv (f(\forall p(p) \equiv \forall p(p)) \equiv \forall q(f(\forall p(p) \equiv f(q)))))$.

Правилами вывода системы $S2$ являются:

1. Правило отделения (если эквивалентность двух высказываний — теорема в $S2$, и первое из этих высказываний — теорема в $S2$, то и второе высказывание — теорема $S2$),
2. Правило подстановки,
3. Правило пронесения квантора общности через эквивалентности,
4. Правило эквивалентности (любой закон экстенсиональности вида эквивалентности является теоремой $S2$),
5. Правило определения: любое правильно построенное определение есть теорема $S2$; такие определения являются эквивалентностями.

Импликация в $S2$ может быть определена в терминах эквивалентности и конъюнкции следующим образом:

$$\forall p, q((p \to q)) \equiv ((p \,\&\, q \equiv p)),$$

где конъюнкцию, в свою очередь, можно определить двумя способами:

D1. $\forall p, q(p \,\&\, q \equiv \forall f(p \equiv (f(p) \equiv f(q))))$.

D2. $\forall p, q(p \,\&\, q \equiv \forall f(p \equiv (\forall r(p \equiv f(r)) \equiv \forall r(q \equiv f(r)))))$.

Доказано, что система $S2$ полна, а все теоремы системы $S1$ суть теоремы $S2$. Таким образом, три системы Прототетики полны и эквивалентны друг другу.

В результате добавления к $S2$ правила экстенсиональности получается система $S3$. Условная переформулировка $S3$ была названа $S4$ (в ней появляются новые аксиомы и меняется набор правил вывода).

Система S5 явилась окончательной формой Прототетики. В ней содержится незначительная модификация правила определения: дефиниендумы помещаются в правую сторону эквивалентности (а не слева) и используются те же правила, что и в $S3$. Различие в том, что это делает доказательства короче, поскольку позволяет применять распределение квантора общности и правило отделения к определениям, без использования теоремы о симметричности эквивалентности [15, p. 456–459].

3 Онтология

Прототетика — часть Онтологии. В обеих теориях имеется одна и та же иерархия семантических категорий.

В Онтологии соединены две теории, введенные Лесневским, — теория семантических категорий и теория отношения «ε» [7, p. 85]. Отношение «ε» не имеет фиксированного значения. Так, в первопорядковой элементарной онтологии Лесневского отношение «ε» трактуется как «есть». В других системах оно может иметь совершенно иное значение.

В работе Ст. Лесневского «Об основаниях математики» мы находим: «Я использовал термин “онтология” для разработанной мною теории, поскольку это не противоречило моей “лингвистической интуиции”, именно ввиду того факта, что я сформулировал в этой теории класс “общих принципов бытия”» [13, p. 7].

В теоремах Онтологии нет пропозициональных переменных. В языке Онтологии имеются только номинальные и пропозициональные функторы, поскольку всякий функтор в системах Лесневского составляет вместе с аргументами выражение, принадлежащее либо категории высказываний, либо категории имен [13, p. 11].

Фундаментальное свойство подразделения выражений на семантические категории состоит в том, что всякая пропозиция и всякая пропозициональная функция всегда остаются пропозицией и пропозициональной функцией, если выражение, образующее их часть, заменяется выражением, принадлежащим той же семантической категории. В случае, когда заменяющее и заменяемое выражения принадлежат разным семантическим категориям, мы получаем бессмысленное выражение.

Кроме функторов пропозиционального исчисления в теоремах элементарной Онтологии появляются также константные функторы первого порядка. Так, только переменные, встречающиеся в этих теоремах, являются номинальными (индивидными) переменными, которые могут быть ограничены кванторами. Также теоремы элементарной Онтологии содержат индивидные константы [13, p. 11].

Элементарная онтология Лесневского является полной алгеброй множеств. С формальной точки зрения, она представляет собой теорию атомарной и полной булевой алгебры [7, p. 85]. Булева алгебра атомарна, если каждый из ее элементов, отличный от 0, содержит в себе атом (элемент, отличный от 0 и не содержащий никаких элементов, отличных от него самого и от 0-го элемента). Отдельные объекты, десигнаты непустых единичных имен, являются такими элементами. Булева алгебра полна, если для каждого класса ее элементов булева сумма этих элементов также принадлежит алгебре. В алгебре множеств такая сумма есть множество всех индивидов, каждый из которых принадлежит, по крайней мере, одному множеству данного класса. Пустые элементы булевой алгебры суть те объекты, которые могли бы быть записаны посредством пустого имени, к примеру, имени Λ, определенного таким образом:

$$a \,\varepsilon\, \Lambda \centerdot \equiv \centerdot a \,\varepsilon\, a \centerdot \; \& \; \sim (a \,\varepsilon\, a) \centerdot$$

Отношение ε в булевой алгебре может быть определено как отношение, имеющее место между элементами A и B, если и только если A — атом, а B — элемент, содержащий A. В Онтологии Лесневского принимаются следующие два правила вывода:

1. Правило онтологического определения и
2. Правило онтологической экстенсиональности.

Первое правило — определение множества путем указания единичных множеств, которые оно содержит, т. е. определение элемента булевой алгебры посредством указания ее атомов:

$$a \,\varepsilon\, \varphi\{\ldots\} \centerdot \equiv \centerdot a \,\varepsilon\, a \,\&\, \Psi(\ldots a \ldots).$$

Пропозицию «$a \ \varepsilon \ a$» в булевой алгебре следует читать: «a есть атом». Лесневский определяет ее как «a есть объект».

Второе правило соответствует теореме, утверждающей, что множества, состоящие из одинаковых единиц, тождественны, т. е. элементы булевой алгебры, состоящие из одинаковых атомов, тождественны:

$\forall f, g((a)(a\,\varepsilon\, f\{\dots\} \equiv a\,\varepsilon\, g\{\dots\}) \equiv \forall\Omega(\Omega <f>\equiv \Omega <g>))[7, p.90].$

Правило определения обеспечивает возможность определения произвольных функций булевой алгебры. Именно Лесневский первым дал описание этих правил, и это было достижением исторической важности.

Но остаются открытыми, к примеру, философские проблемы. Лесневский строил Онтологию, рассматривая ее как формальную теорию объектов. Слово «есть», соответствующее символу «ε», имеет онтологическое значение. Согласно этому значению, пропозиция формы «a есть b» истинна, если только субъект пропозиции — непустое имя, т. е. если десигнат субъекта существует в онтологическом мире. Кроме того, как мы знаем, субъект должен быть единичным именем, а предикат должен относиться к субъекту. Таким образом, следующая пропозиция истинна:

Коперник есть поляк.

Следовательно, элементарная онтология, если вслед за Лесневским считать термин «ε» сокращением слова «есть», является теорией определенного реального отношения, названного отношением «быть чем-то».

Единственная аксиома Онтологии сформулирована Ст. Лесневским в 1920 г. и может быть записана следующим образом:

Ax: $(x\varepsilon X) \equiv \exists y(y\varepsilon x)\,\&\,\forall y, z(y\varepsilon x\,\&\,z\varepsilon x \to y\varepsilon z)\,\&\,\forall y(y\varepsilon x \to y\varepsilon X).$

Приведем также фундаментальный закон Онтологии:

(I) $x\varepsilon X\,\&\,y\varepsilon x \to x\varepsilon y.$

4 Мереология

Мереология — самая ранняя из систем Лесневского. Первоначально предполагалось, что она будет действовать как теория множеств. Таков был заголовок, под которым был опубликован большой ее фрагмент в Москве в 1916 г. [11].

Мереология — теория слова «часть», понимаемого как «кусок» (piece) некоторого объекта. Часть объекта не может быть пустой, она содержится в объекте, но не заполняет его весь.

Хотя в этой теории используются термины «класс» и «множество», она значительно беднее других аксиоматических теорий множеств. Сам Лесневский отказался от идеи рассмотрения своей системы как теории множеств и в более поздних работах давал ей название «мереология».

С точки зрения Лесневского, существует только одно исходное отношение «быть элементом» ($x \in y$), а отношение включения вводится исключительно по определению.

Базовое отношение «часть — целое» является составным:

$A \,\varepsilon\, prB$ *(читается, как «A есть часть B)*, где pr — функтор с одним аргументом [2].

В мереологии не проходит парадокс Рассела. Поскольку у Лесневского целое рассматривается как самая большая часть, парадокс Рассела элиминируется. Рассмотрим аксиомы Мереологии.

A1. $x \,\varepsilon\, pr(y) \,\&\, y \,\varepsilon\, pr(z) \to x \,\varepsilon\, pr(z)$ — транзитивность.

A2. $x \,\varepsilon\, pr(y) \to \neg(y \,\varepsilon\, pr(x))$ — антисимметричность.

A3. $x \,\varepsilon\, pr(y) \to y \,\varepsilon\, y$ — непустота.

A4. $x \,\varepsilon\, Kl(Y) \,\&\, z \,\varepsilon\, Kl(Y) \to x = z$ — единичность класса.

Приведем также определения «быть элементом» и «быть коллективным классом», соответственно Df1 и Df2.

Df1. $x \,\varepsilon\, el(y) \equiv x \,\varepsilon\, x \,\&\, (x \,\varepsilon\, pr(y) \vee x = y)$,

Df2. $x \,\varepsilon\, Kl(Y) \equiv x \,\varepsilon\, x \,\&\, \forall z(z \,\varepsilon\, Y \to z \,\varepsilon\, el(x)) \,\&\, \exists z(z \,\varepsilon\, el(x) \to \exists r, t(r \,\varepsilon\, Y \,\&\, t \,\varepsilon\, el(z) \,\&\, z \,\varepsilon\, el(r)))$, где $Kl(Y)$ — свойство быть коллективным классом.

Мереологию можно отнести к тем теориям, в которых имеет значение тот факт, что все элементы должны иметь эквиваленты в действительности. В подобных теориях нулевой элемент не имеет физической интерпретации. Кажется, что именно таковым было намерение Лесневского в развитии Мереологии, когда он говорил, что «часть» означает столько же, сколько «кусок», и «класс А» — столько же, сколько «груда/масса А». Таким же было намерение Х.С. Леонарда и Н. Гудмана, которые спустя пятнадцать лет после Лесневского и независимо от него сформулировали теорию, схожую с Мереологией, которую они назвали исчислением индивидов [9, p. 45–55]. Дж. Х. Вудгер использовал Мереологию в формализации биологии [14, p. 5–18].

Исследование трудов Лесневского представляется мне очень важным. Эта важность обусловлена тем, что логические системы Лесневского во многом предвосхитили поздние и более известные результаты современной логики. Несмотря на то что труды самого Ст. Лесневского практически не доступны и его идеи дошли до нас в интерпретации его учеников и последователей, я считаю, что историческое значение его трудов несправедливо недооценено, и необходимо восполнить этот пробел.

Литература

[1] *Васюков В.Л.* Формальная феноменология, М.: Наука, 1999.
[2] *Васюков В.Л.* Материалы лекций «Логические проблемы онтологии». Философский факультет МГУ, кафедра логики. Март 2007.
[3] *Цирулис Я. П.* Прототетика без типовой неопределенности выражений // Латвийский математический ежегодник. Вып. 23 (Рига). 1979. С. 166–178,
[4] *Цирулис Я. П.* Традиционные средства вывода в Прототетике // Латвийский математический ежегодник. Вып. 23 (Рига). 1979. С. 179–193.
[5] *Chwistek L.* Principle of Inconsistency in the Light of the Recent Research of Bertrand Russell // Dissertations of the Polish Academy of Science, historical and philosophical department. Vol. 30, 1912.
[6] *Couturat L.* L'Algebre de la logique. Paris, 1914.
[7] *Grzegorczyk A.* The Systems of Lesniewski in relation to contemporary logical research // Studia Logica. Vol. III, 1955.
[8] *Le Blanc O.V.* Lesniewski's Computative Protothetic. 1991.
[9] *Leonard H. S., Goodman N.* The Calculus of Individuals and its Uses //Journal of Symbolic Logic. Vol. 5, 1940.
[10] *Lesniewski St.* Collected Works. PWN-Polish Scientific Publishers-Warszawa. Vol. I, 1992.
[11] *Lesniewski St.* Podstawy ogolnej teorii mnogosci (Foundations of the General set theory), I. M., 1916.
[12] *Slupecki J.* St. Lesniewski's Protothetics // Studia Logica. Vol. I, Warszawa, 1953.
[13] *Slupecki J.* St. Lesniewski's Calculus of Names // Studia Logica. Vol.III, Warszawa, 1955.
[14] *Woodger J. H.* Axiomatic Method in Biology. Cambridge, 1937.
[15] *Urbaniak R.* Lesniewski's Systems of Logic and Mereology; History and Reevaluation. Calgary, Alberta, 2008.

Конструктивная математика: обзор достижений, недостатков и уроков. Часть II[1]

Н. Н. Непейвода

abstract. Lessons of soviet constructivism and their relations to practice are displayed here.

Keywords: intuitionism, constructivism, realizability, computability, applications of constructivism

1 Введение

В данной работе рассматриваются принципы и достижения советского конструктивизма. Его недостатки и соотношения с другими конструктивными школами будут представлены в следующей части обзора.

2 Алгоритмы и реализуемость

С. К. Клини в 1941–1945 годах дал первую интерпретацию конструктивной теории в рамках классической (обратная интерпретация была дана еще раньше Гливенко): рекурсивную реализуемость, которая является конкретизацией реализуемости по Колмогорову, если наши функции — алгоритмы, а функции отождествляются с вычисляющими их программами. Рассмотрим конструкцию Клини подробнее, преобразовав ее таким образом, чтобы она как можно меньше зависела от конкретной формализации понятия алгоритма. Для этой цели дадим аксиоматическое описание понятия алгоритма (оно взято из книги [7]). Это позволяет работать над любым имеющимся множеством исходных программ и типов данных, что соответствует всему духу нашего изложения и требуется для приложений в информатике.

[1]Первая часть работы опубликована в 17 выпуске настоящего издания.

Основное свойство алгоритма — выполнимость на соответствующем устройстве, которым может быть и организационная система (так называемые бизнес-процессы). Тьюринг доказал, что общая модель исполнителя обладает любопытным свойством, которое вовсю используется в современной информатике: есть один исполнитель (*универсальный*), который в принципе может смоделировать поведение и результаты любого другого (если отвлечься от таких “мелочей”, как затрачиваемое время и другие ресурсы). А именно:

(Аксиома универсального алгоритма) Имеется такой алгоритм Υ, что для любого другого алгоритма φ найдется его код $\lceil\varphi\rceil$, такой, что результаты вычисления $\varphi(x)$ и $(\Upsilon\ [\lceil\varphi\rceil, x])$ совпадают для любого x.

Например, таким исполнителем для программ на обычных языках является машина вместе с операционной системой и транслятором.

Возникает вопрос: а почему данное утверждение сразу не записано формально? В частности потому, что оно ограничивает набор возможных формализаций понятия алгоритма и отсекает некоторые из порою принимаемых по привычке вариантов.

Прежде всего, из анализа аксиомы универсального алгоритма видно, что неудобно брать в качестве данных сами объекты. Лучше пользоваться их структурами. Таким образом, лучше брать не универс U, а множество кортежей над ним U^*. Из технических соображений к U целесообразно добавить два логических значения **ИСТИНА** и **ЛОЖЬ** (если их там не было).

Раз у нас есть множество кортежей, то нужно иметь элементарные операции над кортежами. Практика и теория совместно показали, что достаточно иметь одну двухместную операцию CONS (см. [3]), присоединяющую свой первый аргумент в качестве первого элемента списка ко второму элементу. Первый ее элемент произвольный, а второй — обязательно список. Кроме того, нужны несколько одноместных операций: две, значением которых являются произвольные кортежи либо объекты:

(TAIL x), удаляющая из кортежа его первый элемент;
(HEAD x), выделяющая первый элемент кортежа x, —

и предикаты:

ATOM	Проверяет, является ли x элементом U.
SIMPLE	Проверяет, что x — кортеж из одного элемента.
TRUE	Проверяет, что x — атом, равный ИСТИНА.
FALSE	Проверяет, что x — атом, равный ЛОЖЬ.
NULL	Проверяет, что x — пустой кортеж [ ].

Пустой кортеж обозначаем NIL[2]. Через эти операции выражение, стоящее в аксиоме об универсальном алгоритме, записывается следующим образом:

(1) $(\Upsilon\ (\mathsf{CONS}\ \ulcorner\varphi\urcorner\ (\mathsf{CONS}\ x\ \mathsf{NIL})))$

Конечные кортежи с фиксированным числом элементов определяются следующим образом:

> Выражение $(\mathsf{CONS}\ t_1\ \cdots\ (\mathsf{CONS}\ t_n\ \mathsf{NIL})\cdots)$ обозначается $[t_1, \ldots, t_n]$.

Термы, построенные из заданных известных алгоритмов и предикатов при помощи перечисленных выше операций и имеющие лишь одну свободную переменную x, называются *простейшими композициями* алгоритмов. В компьютерах программа-транслятор — универсальный алгоритм в смысле нашей аксиомы, а алгоритмический язык — кодирование алгоритмов. Из рассмотрения данного частного случая кодирования видно, что некоторые простые операции над программами тоже должны быть алгоритмичны, а именно:

(Аксиома композиций) Если имеется простейшая композиция переменных алгоритмов $\varphi_1,\ \ldots,\ \varphi_n$

$$T\lfloor\varphi_1,\ \ldots,\ \varphi_n\rfloor,$$

то имеется алгоритм, выдающий для кортежа кодов $[\ulcorner\varphi_1\urcorner,\ \ldots,\ \ulcorner\varphi_n\urcorner]$ код $\ulcorner T\lfloor\varphi_1,\ \ldots,\ \varphi_n\rfloor\urcorner$.

Такие кодирования алгоритмов являются *главными вычислимыми нумерациями* (см. [4]).

ЛЕММА 1. *Из двух принятых выше аксиом следует невозможность построить всюду определенный универсальный алгоритм.*

---

[2] В отличие от языка Lisp он атомом не считается.

Доказательство. Рассмотрим выражение

$$(\psi\ x) \stackrel{\triangle}{=} [(\Upsilon\ \ [x,x])\,,\mathsf{NULL}]\,.$$

Это — простейшая композиция, и она является алгоритмом. Пусть π — ее код. Тогда $(\Upsilon\ [\pi,\pi])$ есть по определению универсального алгоритма $(\psi\ \pi)$. По определению ψ, последнее выражение записывается как $([\Upsilon\ [\pi,\pi]), \mathsf{NULL}]$. Таким образом, мы получили, что кортеж $\Upsilon([\pi,\pi])$ не меняется после добавления еще одного элемента, чего не может быть.

Следовательно, значение $(\Upsilon\ [\pi,\pi])$ не определено. Q.E.D.

Видно, как тесно связаны элементы формализации. Приняв две естественные аксиомы вычислимости, нужно рассматривать частично определенные функции. Таким образом, слишком рано заменив слова естественного языка на “точные” математические термины, заходим в тупик.

Заметим, что результат о неопределенности не запрещает недетерминированных алгоритмов, которые при одних и тех же начальных данных могут давать разные результаты. Поэтому мы везде старались говорить осторожно: дает тот же результат. Утверждение, что алгоритм μ на входных данных a может давать результат b, обозначается

$$(\mu\ a) \to b.$$

Равенство используется лишь в том случае, если результат имеется и только один.

Таким образом, точная формальная запись свойств универсальной функции:

$$(2)\quad (\Upsilon\ \ (\mathsf{CONS}\ \ \ulcorner\varphi\urcorner\ \ (\mathsf{CONS}\ x\ \mathsf{NIL}))) \to y \iff (\varphi\ x) \to y.$$

Но даже формально безупречная формулировка содержательно может подвести, поскольку часто важен не только конечный результат, но и процесс его вычисления.

Последний принцип дает возможность определять процедуры рекурсивно, сами через себя. Чтобы максимально ясно выразить его, воспользуемся идеей Дж. Маккарти. Заметим, что простейшие композиции, в которых последним применялся предикат, можно сами рассматривать как предикаты, поскольку любое их возможное значение может быть только логическим. Такие предикаты назовем *простейшими алгоритмическими.* Определим условные термы следующим образом:

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 1. Если t — простейшая композиция, то t — условный терм.

Если P — простейший алгоритмический предикат, а t и u — условные термы сигнатуры σ, то

$$\mathsf{if}\ P\ \mathsf{then}\ t\ \mathsf{else}\ u\ \mathsf{fi}$$

условный терм той же сигнатуры. Его значения определяются следующим образом:

$$\begin{array}{c} \mathsf{if}\ P\ \mathsf{then}\ t\ \mathsf{else}\ u\ \mathsf{fi} \to b \\ (P\&t \to b) \vee (\neg P\&r \to b). \end{array} \quad \Longleftrightarrow$$

Таким образом, если условие не определено, то условный терм тоже не определен, а вот если одно из выражений не определено, то условный терм может быть определен.

(Аксиома о рекурсивном определении) Если все функции сигнатуры σ проинтерпретированы как алгоритмы, ψ не входит в σ, а $t\lfloor\psi, x\rfloor$ — условный терм со свободной переменной x в сигнатуре σ, пополненной ψ, то имеется алгоритм ψ, такой, что

$$(\psi\ a) \to b \iff t\lfloor\psi, a\rfloor \to b.$$

Это определение записывается в форме

$$(\psi\ x) \leftarrow t\lfloor\psi, x\rfloor.$$

ПРИМЕР 1. Рекурсивное определение функции, выделяющей последний элемент кортежа, может быть задано следующим образом:

```
(LAST x) ←
 if (ATOM x) then NIL else
  if (NULL x) then NIL else
   if (NULL (TAIL x)) then (HEAD x) else
    (LAST (TAIL x))
 fi fi fi
```

Не уточняется, какое значение принимают исходные функции на неподходящих аргументах (скажем, функция TAIL, если ей подать атом или пустой кортеж). Пример 1 показывает, что можно просто определять новые алгоритмы так, чтобы сомнительные случаи исключались заранее (оставались в другой альтернативе условного терма). Так что если нужна всюду определенность элементарных композиций, то эти функции можно доопределить произвольным образом.

ПРИМЕР 2. Поскольку доказано, что не все алгоритмы определены на всех значениях, естественно ожидать, что главная операция рекурсивного определения приводит к неопределенным функциям. И в самом деле, рассмотрим

$$(\mathsf{ERR}\ x) \leftarrow (\mathsf{CONS}\ \mathsf{NIL}\ (\mathsf{ERR}\ \ x)).$$

Вычисление данного алгоритма не может привести ни к какому результату ни при каком значении x. В самом деле, результат должен быть кортежем, поскольку последней применяется функция CONS. Но ни один список не остается сам собой после добавления в него еще одного элемента.

Заметим, что при стандартной семантике рекурсивных процедур не определен гораздо более простой алгоритм:

$$(\mathsf{ERR1}\ x) \leftarrow (\mathsf{ERR1}\ x).$$

Логически привести к противоречию предположение о существовании значения не удается, и можно представить себе семантику алгоритмического языка, раскрывающего такие определения в тождественную функцию (тоже подходящую в качестве решения такого рекурсивного уравнения).

Из неопределенности вычислимых функций (функций, определяемых алгоритмами) следует, что не для всякого предиката множество его истинности можно задать всюду определенным вычислимым предикатом. Появляются следующие определения:

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 2. Множество называется *разрешимым*, если имеется всюду определенный алгоритм, вычисляющий его характеристическую функцию (таким образом, данный алгоритм должен всегда давать логическое значение и только одно; такой алгоритм называется *вычислимым предикатом*). Множество называется *перечислимым*, если имеется однозначный алгоритм, дающий значение ИСТИНА тогда и только тогда, когда элемент принадлежит данному множеству[3].

Например, множество троек $\langle A, a, b\rangle$, где A — код алгоритма, таких, что алгоритм с кодом A дает значение b на входных данных a, является перечислимым, но не разрешимым.

Заметим, что дополнения некоторых перечислимых множеств могут быть неперечислимы.

Рассмотрим еще одну аксиому вычислимости, которая отражает, что алгоритмы выполняются шаг за шагом и выдают решение через конечное число шагов. Соответственно, привлекая компьютерные аналогии, вспоминаем, что некоторые программы не переводятся машиной на свой язык, а исполняются при помощи специальной программы-интерпретатора. Существование интерпретатора — более сильное свойство, чем существование универсальной функции, и может быть записано следующим образом. Пусть PAIR — вычислимый предикат, проверяющий, является ли объект кортежем из двух элементов (он легко строится).

(Аксиома перечислимости) Имеются такая функция (*универсальный интерпретатор*) UI и предикат UT (*пошаговый тестер*), такие,что

1. $(\mathsf{UI}x) \to y \equiv (\mathsf{TRUE}\ (\mathsf{UT}\ x\ y)$;
2. $(\mathsf{UI}x) \to y \supset (\mathsf{PAIR}\ x) \wedge (\mathsf{PAIR}\ y)$;
3. Для любого алгоритма φ $(\varphi\ a) \to b$ тогда и только тогда, когда имеется кортеж C, первым членом которого является пара $[\lceil\varphi\rceil, a]$, все последующие члены получаются из предыдущего применением функции UI:

$$(\mathsf{UI}\ [\lceil\varpi_i\rceil, a_i]) \to [\lceil\varpi_{i+1}\rceil, a_{i+1}],$$

а последний имеет вид $[\mathsf{NIL}, b]$.

Используя аксиому перечислимости, можно построить вычислимый предикат Ψ, проверяющий, что данный кортеж является протоколом применения универсального интерпретатора, и на последнем шаге получаем окончательный результат.

Если принять аксиому перечислимости, то, в частности, для натуральных чисел любое множество, такое, что и оно само и

[3]Но алгоритм может не давать никакого значения, если элемент множеству не принадлежит.

его дополнение являются перечислимыми, разрешимо. Правда, для действительных чисел и других сложных (не кодируемых достаточно просто натуральными числами) объектов ситуация может быть несколько сложнее.

Порою нужна не разрешимость, а более слабое понятие: *отделимость*.

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 3. Множество Z *отделяет* два непересекающихся множества X и Y, если $X \subset Z$, $Y \subset \bar{Z}$.

Таким образом, отделимость — понятие относительное. Она зависит от рассматриваемой системы множеств и универса.

ЛЕММА 2. **(Теорема о неотделимости)** *Имеются два перечислимых множества X и Y, таких, что нет разрешимого множества Z, отделяющего их.*

Идея доказательства. В качестве таких двух множеств можно взять

$$\{[x,y] \mid (\Upsilon\ [x,y]) \to 0\}\,,$$
$$\{[x,y] \mid (\Upsilon\ [x,y]) \to 1\}\,.$$

Если предикат равенства вычислим, то любые два одноэлементных множества отделимы. Но, скажем, для действительных чисел естественно, в частности, рассматривать вычислимость на базисе некоторых стандартных непрерывных аналитических функций ($\cdot$, $+$, $-$, $\backslash$, exp, sin, cos, ln…) и предиката $<$, определенного как частичный, чтобы сохранить непрерывность: если $x = y$, то значение $x < y$ не определено. Поэтому естественно появляется понятие отделимых элементов: два элемента отделимы, если есть вычислимый предикат, истинный на одном из них и ложный на другом.

Имеется просто формулируемая и общая теорема, показывающая, что для свойств вычислимых функций нельзя почти никогда надеяться на разрешимость. Детерминированный алгоритм φ называется *экстенсиональным* по первому аргументу, если для всех A и B, таких, что функции, ими вычисляемые, одинаковы, имеем $\varphi([A]{*}X) \to y \iff \varphi([B]{*}X) \to y$. Таким образом, он на одинаковых функциях дает одинаковые результаты.

ЛЕММА 3. **(Теорема Успенского–Райса)** *Пусть предикат равенства разрешим. Тогда, если экстенсиональный алгоритм* *всюду определен, то он не зависит от первого аргумента, т. е.*

$$\forall x, y\,(x, y \text{ — \textit{коды алгоритмов}} \supset \\ \forall z, u\,((\varphi\ [x] * z) \to u \iff (\varphi\ [y] * z) \to u)).$$

Доказательство. Рассуждаем от противного. Пусть есть такое z, что $\psi = \lambda x\,(\varphi\ [x] * z)$ не является тождественной функцией.

Пусть ERROR — нигде не определенная функция, а e — код одного из алгоритмов, ее вычисляющих. Пусть $(\varphi\ [e] * z) \to a$. Тогда, по экстенсиональности φ, для любого кода e_0 нигде не определенной функции $(\varphi\ [e_0]*z) \to a$. Поскольку ψ не является тождественной, найдется такой код d, соответствующий некоторой вычислимой функции χ, что $(\varphi\ [d]*z) \to b$. Теперь построим следующее определение:

(3) $(\xi\ f\ x\ y) \leftarrow \mathsf{if}\ (\mathsf{ATOM}\ (\Upsilon\ f\ x))\ \mathsf{then}\ (\chi\ y)\ \mathsf{else}\ (\chi\ y)\ \mathsf{fi}.$

Эта функция нигде не определена, если $(f\ x)$ не определено, в противном случае, при фиксированных f, x дает χ. Таким образом, проверяя, чему равно $(\varphi\ \lambda y\,(\xi\ f\ x\ y))$, мы могли бы проверить, применима ли функция к аргументу, что является неразрешимой проблемой. Q.E.D.

И наконец, рассмотрим систему алгоритмов, которая обычно представляется в книгах по теории вычислимости. Она может быть описана следующим образом.

Имеется бесконечно много атомов — натуральные числа. Истину отождествляем с 1, ложь — с 0. Имеются две исходные функции и один предикат, определенные на атомах:

$(\mathsf{S}\ n)$, дающая по n $n+1$,
$(\mathsf{Pd}\ n)$, дающая по $n>0$ $n-1$, а для 0 — NULL;
$(\mathsf{Z}\ n)$, предикат, проверяющий, равен ли его аргумент 0.

Такие алгоритмы, конечно же, детерминированы, поскольку детерминированы исходные функции, и называются *рекурсивными функциями*. Соответственно, множества, разрешимые при помощи рекурсивных функций, называются *рекурсивно разрешимыми*, а перечислимые с их помощью — *рекурсивно перечислимыми*.

ПРИМЕР 3. Построим алгоритм, осуществляющий сложение двух натуральных чисел:

$$(\mathsf{PLUS}\ m\ n) \leftarrow \mathsf{if}\ (\mathsf{Z}\ n)\ \mathsf{then}\ m\ \mathsf{else}\ (\mathsf{PLUS}\ m\ (\mathsf{Pd}\ n))\ \mathsf{fi}.$$

Другой способ определения алгоритмов дан в определении оператора Mu, строящего минимальное значение n, при котором $(\phi\ [m,n]) = 0$.

$$(\mathsf{Muk}\ \phi\ \ m\ k) \leftarrow if\ (\mathsf{Z}\ (\phi\ m\ k))\ \mathsf{then}\ k\ \mathsf{else}\ (\mathsf{Muk}\ \phi\ m\ (\mathsf{S}\ k))\ \mathsf{fi};$$
$$(\mathsf{Mu}\ \phi\ m) \leftarrow (\mathsf{Muk}\ \phi\ m\ 0).$$

Здесь сначала вводится вспомогательный алгоритм, а сама рекурсия идет в другом направлении, чем обычно. Такая операция часто обозначается *квантором минимизации*, введенным Д. Гильбертом:

$$\mu n\,(P\ n),$$

где P — алгоритмический предикат.

Есть экспериментальный факт, степень подтвержденности которого в настоящий момент неизмеримо выше, чем у любого естественнонаучного принципа: все изобретенные детерминированные алгоритмы выражаются как рекурсивные схемы над примененным базисом исходных функций. Как и принято в естественных науках, это экспериментальное наблюдение возведено в ранг общего утверждения, но в отличие от, скажем, законов Ньютона скромно называется *тезис Черча* (может быть, правильнее было бы добавить сюда еще и Тьюринга):

> Любой содержательный замкнутый в себе (не использующий источников ввода, отличных от заранее заданного аргумента) алгоритм выражается в любой из принятых в настоящее время в математике формализаций понятия алгоритма (в частности, как рекурсивная схема).

Из этого тезиса следует строгое утверждение, которое доказано для всех используемых в математике понятий алгоритма:

все они эквивалентны в том смысле, что алгоритмически определимые функции над минимальным базисом понятий совпадают[4]. Но еще более важно то, что для всех явно выделенных в математике способов построения алгоритмов найдено их представление, согласующееся с тезисом Черча[5].

Внимание! Тезис Черча работает лишь в том случае, если мы рассматриваем вычислительные устройства сами по себе, без физических датчиков для ввода данных и без взаимодействия с человеком. Эту оговорку практически никто никогда не делает.

Любое частное определение алгоритмов задает пространство в смысле примера 7 из первой части статьи, в котором построено чум-пространство программно определимых функций, поскольку мы принимаем аксиому перечислимости.

Из аксиомы перечислимости и аксиомы о рекурсивном определении следует аксиома об универсальном алгоритме.

Теперь можно определить реализуемость по Клини формул произвольной теории, над объектами которой введено понятие вычислимости, такое, что универсальный интерпретатор определим.

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 4. Определим операцию построения по формуле теории формулы, означающей ее реализацию $\circledR\lfloor A, \varsigma\rfloor)$, где ς — терм. В определении предполагается, что переменные ζ, ζ_1 и так далее не входят в исходные формулы.

---

[4]Тут есть две ловушки. Во-первых, совпадение определимости не означает сопоставимости ресурсов, необходимых для вычисления данной конкретной функции различными понятиями алгоритма. Так что утверждение, что все можно вычислить на машине Тьюринга, является типичной для математиков демагогией, когда смешивают модальности ‘в принципе возможно’ и ‘практически возможно’. Во-вторых, если исходный базис произвольный, то даже определимость начинает различаться. Рекурсивные схемы — мощнейший в смысле относительной определимости аппарат теории алгоритмов.

[5]Есть одно исключение, найденное автором. Если имеются вращающиеся черные дыры, то в принципе можно организовать вычислительный процесс таким образом, чтобы получить ответ на неразрешимую задачу, но при этом нужно самому успешно совершить путешествие сквозь такую черную дыру в другую вселенную. Таким образом, в некотором смысле тезис Черча и общая теория относительности друг другу противоречат. Глубинные взаимосвязи научного знания гораздо сильнее, чем можно вообразить, наблюдая современную науку, разделенную на почти невзаимодействующие отрасли.

1. Если A — элементарная формула, то

$$®\lfloor A,\zeta\rfloor = A\&(\mathsf{NULL}\ \zeta)$$

2.
$$\begin{gathered}®\lfloor A\&B,\zeta\rfloor = \\ \neg(\mathsf{ATOM}\ \zeta)\&\neg(\mathsf{NULL}\ (\mathsf{TAIL}\ \zeta))\&®\lfloor A,(\mathsf{HEAD}\ \zeta)\rfloor \\ \&®\lfloor B,(\mathsf{HEAD}\ (\mathsf{TAIL}\ \zeta))\rfloor.\end{gathered}$$

3.
$$\begin{gathered}®\lfloor A\vee B,\zeta\rfloor = \\ \neg(\mathsf{ATOM}\ \zeta)\&\neg(\mathsf{NULL}\ (\mathsf{TAIL}\ \zeta))\& \\ ((\mathsf{NULL}\ (\mathsf{HEAD}\ \zeta))\Rightarrow ®\lfloor A,(\mathsf{HEAD}\ (\mathsf{TAIL}\ \zeta))\rfloor)\& \\ (\neg(\mathsf{NULL}\ (\mathsf{HEAD}\ \zeta))\Rightarrow ®\lfloor B,(\mathsf{HEAD}\ (\mathsf{TAIL}\ \zeta))\rfloor).\end{gathered}$$

4.
$$\begin{gathered}®\lfloor A\Rightarrow B,\zeta\rfloor = \\ \forall\zeta_1(®\lfloor A,\zeta_1\rfloor\Rightarrow\exists C\,(\Psi\ (\mathsf{CONS}\ [\zeta_1,\zeta]\ C))\& \\ ®\lfloor B,(\mathsf{LAST}\ (\mathsf{LAST}\ C))\rfloor)).\end{gathered}$$

5. $®\lfloor\neg A,\zeta\rfloor = (\mathsf{NULL}\ \zeta)\&\neg\exists\zeta_1\,®\lfloor A,\zeta_1\rfloor$

6.
$$\begin{gathered}®\lfloor\exists x\,A,\zeta\rfloor = \\ \neg(\mathsf{ATOM}\ \zeta)\&\neg(\mathsf{NULL}\ (\mathsf{TAIL}\ \zeta)) \\ \&®\lfloor A[x\mid(\mathsf{HEAD}\ \zeta)],(\mathsf{HEAD}\ (\mathsf{TAIL}\ \zeta))\rfloor.\end{gathered}$$

7.
$$\begin{gathered}®\lfloor\forall x\,A,\zeta\rfloor = \\ \forall x\,\exists C\,(\Psi\ (\mathsf{CONS}\ [\zeta,x]\ C))\& \\ ®\lfloor A(x),(\mathsf{LAST}\ (\mathsf{LAST}\ C))\rfloor)).\end{gathered}$$

Заметим, что в определении реализуемости не понадобился даже предикат равенства или какой-то другой двухместный предикат. Пункты нашего определения переводят на язык абстрактных алгоритмов пункты определения Колмогорова. При этом алгоритм отождествляется с кодом его программы.

Рассмотрим, как в конструктивной теории с реализуемостью по Клини выражаются некоторые свойства функций. Прежде всего, следуя Клини, формально выразим тезис Черча.

$$\begin{gathered}\forall x\,(\neg A(x)\Rightarrow\exists y\,B(x,y))\Rightarrow \\ \exists z\forall x\,(\neg A(x)\Rightarrow \\ \exists u\,(\Upsilon\ [z,x])\to u\&\forall u\,(\Upsilon\ [z,x])\to u\Rightarrow B(x,u))\end{gathered}\tag{4}$$

В большинстве теорий из тезиса Черча следуют, в частности, результаты, несовместимые с классической логикой. Например, если выразимо на языке нашей теории хоть одно неразрешимое свойство $U(x)$, то реализуема формула

(5) $\neg\forall x\,(U(x) \vee \neg U(x))$.

Тем самым мы получаем конструктивную характеризацию классической логики: она полностью приемлема конструктивно, если в теории все свойства разрешимы. То есть теория должна быть полна. Поэтому, в частности, в элементарной геометрии или в алгебраической теории действительных чисел классическая логика как раз на месте. В полной теории она не может привести к «грязным» теоремам существования.

Реализуемость, понимаемая классически, влечет в случае перечислимых типов данных важный логический принцип:

Принцип конструктивного подбора

(6)
$$\forall x\,(A(x) \vee \neg A(x)) \& \neg\neg\exists x\,A(x) \Rightarrow \exists x\,A(x).$$

Этот принцип часто называют *принцип Маркова* и обозначают **PM**.

Содержательно принцип конструктивного подбора означает важный практический вывод: если у нас есть способ проверки корректности решения и алгоритм перебора всех возможных значений типа данных, то можно спокойно применять для обоснования корректности задачи поиска классическую логику. Если в принципе процесс должен закончиться, мы просто запустим программу и дождемся ее остановки.

Новые выразительные возможности открываются и в плане выражения неспособности что-то сделать алгоритмически. Например, теорема Успенского–Райса о невозможности эффективного распознавания свойств алгоритмов может быть переформулирована для абстрактных типов (например, функций, множеств…) следующим образом:

(7)
$$\begin{gathered}\forall X : \mathsf{Function}\,\exists b : \mathsf{Bool}\; A(X,b) \Rightarrow \\ \exists b : \mathsf{Bool}\,\forall X : \mathsf{Function}\; A(X,b)\end{gathered}$$

(формулировка открыта Троэлстра).

3 Советский конструктивизм

А. А. Марков (1947) на базе теории алгоритмов предложил вариант конструктивизма, базирующийся на традиционном естественнонаучном материализме и рационализме. Первоначально он использовал в качестве основы конструктивного понимания математических суждений реализуемость по Клини. Но он, так же, как и Брауэр, поставил задачу конструктивной переработки не какой-то отдельной теории, а всей математики, как она тогда понималась.

По рассказам самого Андрея Андреевича, переход к конструктивизму стимулировали его работы во время Второй мировой войны. Она в значительной степени решилась соревнованием математиков, расшифровывавших коды противников и изобретавших надежные коды для своих войск. А. А. Марков работал именно на этом сверхсекретном фронте и на своем опыте убедился, насколько трудно отличить математические результаты, дающие метод их использования, от тех, которые остаются лишь идеальными. Так что Марков решил придать математике более прикладной характер. И путь к этому он увидел в брауэровском подходе.

Поскольку по своему мировоззрению А. А. был убежденным естественнонаучным материалистом, философские основания подхода Брауэра были для него неприемлемы. Но, поскольку он был действительно свободомыслящим, а не из тех, которые допускают для других свободу мыслить так же, как они, и падают в обморок (или начинают говорить непристойности) при одном упоминании имени Бога, он четко и объективно проанализировал со своей точки зрения достижения Брауэра и всегда воздавал ему должное как отцу-основателю нового направления.

Сам Марков выделил три основные абстракции, на которых, с точки зрения естественнонаучного рационализма, базируется математика.

Абстракция отождествления. Она сформулирована косвенным образом Г. Лейбницем в его определении равенства: «Равные объекты — обладающие одинаковыми свойствами». Если понимать это с точки зрения информатики, то, поскольку предметов с совершенно одинаковыми свойствами просто нет, нам остается переформулировать абстракцию отождествления следующим образом:

«Мы отказываемся рассматривать в математической формализации некоторые свойства, различающие предметы, и тем самым отождествляем их».

Абстракция потенциальной бесконечности. Считается выполнимым любое конечное число действий, построение сколь угодно сложных конечных объектов. Абстрагируемся от ограниченности времени, памяти и других ресурсов.

Абстракция актуальной бесконечности. Бесконечные процессы и бесконечные совокупности можно рассматривать как завершенные объекты и свободно оперировать с ними.

Таким образом, А. А. Марков заменил гильбертовское понятие «идеальных объектов» и брауэровские «идеальные умственные построения» внешне безобидными с точки зрения примитивного материализма абстракциями от реально существующих объектов. Это было необходимо сделать в те времена, когда распоясавшиеся «свободомыслящие» набрасывались на любое место, где им чудился призрак идеализма или Бога[6]. Надо заметить, что, как всегда, когда человек вынужден как можно точнее и выразительнее перевести понятия на другой язык, Марков выявил новые важные стороны математических идеализаций и упорядочил их в единую систему. Эта система идеализаций в дальнейшем послужила толчком к открытию логик реальной осуществимости.

Основные предположения советского конструктивного направления в математике можно выразить следующим образом:

1. Математические объекты, рассматриваемые в конструктивизме, являются конструктивными объектами: результатами конечных комбинаций простейших действий над четко различимыми исходными сущностями. В конкретной реализации конструктивными объектами почти всегда были слова в конечном алфавите. Но порою рассматривались и

[6]Из советского уголовного кодекса было выброшено понятие «идеальной совокупности преступлений», т. е. нескольких преступлений, совершаемых одним и тем же действием, поскольку оно пахло идеализмом.

другие типы конструктивных объектов (например, конечные графы). В этом отношении советская конструктивная математика четко поставила вопрос о представлении данных, исключительно важный для информатики и полностью игнорировавшийся и классической, и интуиционистской теорией.

2. Все действия являются алгоритмами. Алгоритмы задаются своими программами. Алгоритмы рассматривались лишь над фиксированным базисом конструктивных объектов и лишь над стандартным базисом исходных действий. В этом отношении советская конструктивная математика явилась шагом назад по сравнению с классической для потребностей информатики, где оказались наиболее применимы высокоуровневые алгебраические и топологические структуры.

3. Некоторые конструктивные объекты могут отождествляться и называться равными. Здесь впервые было систематически исследовано влияние множественных представлений одного и того же объекта на алгоритмы работы с ним. Это кладезь идей для современной информатики, практически не затронутый ею.

4. Не предполагалось, что все проблемы решены, и что в областях, имеющих дело с актуальной бесконечностью, они могут быть все решены. Но по поводу любой конкретной точно поставленной проблемы, касающейся конструктивных объектов, конструктивисты были уверены, что при желании она может быть решена человечеством. Таким образом, советский конструктивизм в максимально возможной степени сохранял веру в познаваемость мира и в прогресс. Незнание никогда не рассматривалось как нечто большее, чем временный статус. Принцип «*ignoramus et ignorabimus*» столь же был чужд для советских конструктивистов, как и почти для всех естественнонаучных рационалистов.

5. Конструктивизм полностью принимал абстракции отождествления и потенциальной осуществимости и безогово-

рочно отвергал для себя абстракцию актуальной бесконечности.

6. Конструктивизм позиционировал себя как альтернативу классической математике, а не как ее «могильщика». Классическая математика должна была лишь согласиться на равных разговаривать с конструктивистами и мирно сосуществовать с ними, стремясь к взаимопониманию и взаимообогащению. Но этого большинство «классиков» как раз и не могло допустить. «Практические» математики, к реальной практике никакого отношения не имевшие и интересовавшиеся лишь доказательством теорем, отождествили точность с привычной им манерой изложения и оказались нетерпимыми к малейшим отступлениям от нее.

Надо сказать, что советский конструктивизм оказался мощным психологическим орудием вовлечения активно работающих математиков в конструктивную парадигму. По видимости он не противоречил традиционному «точному» мышлению, но постепенно перестраивал ум на новые рельсы не менее радикально, чем интуиционизм. Многие ученики Маркова и его учеников, даже внешне ушедшие в совсем другие области, говорили о том, что метод конструктивного мышления им сильно помогает на практике, хотя прямо результаты конструктивизма они применить не могут.

В последнее время метод конструктивного мышления (правда, уже в другой обстановке и на другом уровне) успешно применен для подготовки специалистов-информатиков высокого уровня.

А. А. Марков заметил, что из принятых им посылок вытекает целесообразность принятия принципа конструктивного подбора. Но этот принцип оказался более фундаментальным, чем простое концептуальное следствие из методологических предположений. Это установил Н. А. Шанин, разработав алгоритм конструктивного понимания математических суждений (*конструктивная расшифровка*). Опишем его.

Прежде всего, в практических конструктивных теориях естественно предполагать по крайней мере возможность снятия двойного отрицания с элементарных формул. В противном случае внутри них спрятаны скрытые объекты и построения, что кажется крайне нежелательным. На самом деле почти всегда элементарные формулы разрешимы.

В алгоритме конструктивной расшифровки предполагается, что с элементарных формул можно снимать двойное отрицание.

Далее, поскольку по определению универсального интерпретатора предикат Ψ разрешим, по принципу конструктивного подбора с формулы $\exists x(\Psi\ \alpha\ x)$ можно снимать двойное отрицание. Таким образом, с утверждения, что алгоритм дает результат при конкретных исходных данных, можно снимать двойное отрицание. Осмысленность алгоритмического терма в конструктивизме обозначается $!t$.

Формулы, составленные из элементарных и $!t$ без помощи связок $\vee$ и $\exists$, называются *устойчивыми*[7]. С устойчивых формул можно снимать двойное отрицание (а, значит, и навешивать его с сохранением эквивалентности). Следовательно, их реализации можно считать тривиальными. Для устойчивых формул применима в полном объеме классическая логика, в которой исключена связка $\vee$ и квантор $\exists$ (что не ограничивает общности, поскольку данные связки выразимы через остальные). Поэтому устойчивые формулы называем еще *классическими*.

Формулы, реализации которых нетривиальны, Шанин назвал *содержащими конструктивную задачу* или *проблемными*. Его алгоритм конструктивной расшифровки выявляет эту задачу и делит формулу на две части: конструктивное построение и его обоснование.

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 5. Строим по каждой формуле A, не являющейся классической, формулу $\mathbf{Ш}\lfloor A\rfloor$, определяемую при помощи вспомогательной классической формулы $\mathbf{Ш}_0\lfloor A, x\rfloor$. Для большинства неклассических формул выполнено

$$\mathbf{Ш}\lfloor A\rfloor = \exists x\ \mathbf{Ш}_0\lfloor A, x\rfloor.$$

[7]Сам Н. А. Шанин и советские конструктивисты называли их “нормальными”. Мы систематически изгоняем традиционные в математике абсолютно бессодержательные названия типа “нормальный”. Практика показала, что их употребление в диалоге со специалистами из других предметных областей дезориентирует обе стороны.

В оставшихся же случаях результирующая формула оказывается классической, и тем самым наша формула эквивалентна классической[8].

1. $\mathbf{Ш}\lfloor A\rfloor = A$ для классических формул.

2. Если A — проблемная формула, а B — классическая, то

$$\mathbf{Ш}\lfloor A \Rightarrow B\rfloor = \forall x\,(\mathbf{Ш}_0\lfloor A, x\rfloor \Rightarrow B).$$

3. Если A — проблемная формула, то $\mathbf{Ш}\lfloor\neg A\rfloor{=}\forall x\,\neg\,\mathbf{Ш}_0\lfloor A, x\rfloor$.

4. Если оба члена дизъюнкции классические, то

$$\mathbf{Ш}_0\lfloor A \vee B, x\rfloor = ((\mathsf{TRUE}\ x) \Rightarrow A)\&((\mathsf{FALSE}\ x) \Rightarrow B)\& \\ \neg(\neg(\mathsf{TRUE}\ x)\&\neg(\mathsf{FALSE}\ x)).$$

$$\mathbf{Ш}\lfloor A \vee B\rfloor = \exists x\ \mathbf{Ш}_0\lfloor A \vee B, x\rfloor.$$

5. Если A — проблемная формула, а B — классическая, то

$$\mathbf{Ш}_0\lfloor A\&B, x\rfloor = \mathbf{Ш}_0\lfloor A, x\rfloor\&B, \\ \mathbf{Ш}\lfloor A\&B\rfloor = \exists x\ \mathbf{Ш}_0\lfloor A\&B, x\rfloor.$$

6. Если B — проблемная формула, а A — классическая, то

$$\mathbf{Ш}_0\lfloor A \Rightarrow B, x\rfloor = (A \Rightarrow !(\Upsilon\ [x, \mathsf{NIL}])\&\,\mathbf{Ш}_0\lfloor B, (\Upsilon\ [x, \mathsf{NIL}])\rfloor,$$

$$\mathbf{Ш}\lfloor A \Rightarrow B\rfloor = \exists x\ \mathbf{Ш}_0\lfloor A \Rightarrow B, x\rfloor.$$

7. Если A — проблемная формула, а B — классическая, то

$$\mathbf{Ш}_0\lfloor A \vee B, x\rfloor = \\ ((\mathsf{TRUE}\ (\mathsf{HEAD}\ x)) \Rightarrow \mathbf{Ш}_0\lfloor A, (\mathsf{HEAD}\ (\mathsf{TAIL}\ x))\rfloor)\& \\ ((\mathsf{FALSE}\ (\mathsf{HEAD}\ x)) \Rightarrow B)\& \\ \neg(\neg(\mathsf{TRUE}\ (\mathsf{HEAD}\ x))\&\neg(\mathsf{FALSE}\ (\mathsf{HEAD}\ x))).$$

$$\mathbf{Ш}\lfloor A \vee B\rfloor = \exists x\ \mathbf{Ш}_0\lfloor A \vee B, x\rfloor.$$

[8]Порою сильно отличающейся от исходной.

8. Если оба члена конъюнкции проблемные, то

$$\mathbf{Ш}_0\lfloor A\&B, x\rfloor = \mathbf{Ш}_0\lfloor A, (\mathsf{HEAD}\ x)\rfloor \& \mathbf{Ш}_0\lfloor B, (\mathsf{HEAD}\ (\mathsf{TAIL}\ x))\rfloor,$$

$$\mathbf{Ш}\lfloor A\&B\rfloor = \exists x\ \mathbf{Ш}_0\lfloor A\&B, x\rfloor.$$

9. Если оба члена дизъюнкции проблемные, то

$$\begin{aligned}\mathbf{Ш}_0\lfloor A \vee B, x\rfloor = ((&\mathsf{TRUE}\ (\mathsf{HEAD}\ x)) \Rightarrow \\ &\mathbf{Ш}_0\lfloor A, (\mathsf{HEAD}\ (\mathsf{TAIL}\ x))\rfloor)\& \\ ((&\mathsf{FALSE}\ (\mathsf{HEAD}\ x)) \Rightarrow \mathbf{Ш}_0\lfloor B, (\mathsf{HEAD}\ (\mathsf{TAIL}\ x))\rfloor)\& \\ &\neg(\neg(\mathsf{TRUE}\ (\mathsf{HEAD}\ x))\&\neg(\mathsf{FALSE}\ (\mathsf{HEAD}\ x))).\end{aligned}$$

$$\mathbf{Ш}\lfloor A \vee B\rfloor = \exists x\ \mathbf{Ш}_0\lfloor A \vee B, x\rfloor.$$

10. Если оба члена импликации проблемные, то

$$\begin{aligned}&\mathbf{Ш}_0\lfloor A \Rightarrow B, x\rfloor = \\ &\quad \forall z\, (\mathbf{Ш}_0\lfloor A \Rightarrow B, z\rfloor \Rightarrow !(\Upsilon\ [x, z])\& \mathbf{Ш}_0\lfloor B, (\Upsilon\ [x, z])\rfloor),\end{aligned}$$

$$\mathbf{Ш}\lfloor A \Rightarrow B\rfloor = \exists x\ \mathbf{Ш}_0\lfloor A \Rightarrow B, x\rfloor.$$

11. Если $A(z)$ — классическая, то

$$\mathbf{Ш}_0\lfloor \exists z\, A(z), x\rfloor = A(x),$$

$$\mathbf{Ш}\lfloor \exists z\, A(z)\rfloor = \exists x\ \mathbf{Ш}_0\lfloor \exists z\, A(z), x\rfloor.$$

12. Если $A(z)$ — проблемная, то

$$\mathbf{Ш}_0\lfloor \exists z\, A(z), x\rfloor = \mathbf{Ш}_0\lfloor A((\mathsf{HEAD}\ x)), (\mathsf{HEAD}\ (\mathsf{TAIL}\ x))\rfloor,$$

$$\mathbf{Ш}\lfloor \exists z\, A(z)\rfloor = \exists x\ \mathbf{Ш}_0\lfloor \exists z\, A(z), x\rfloor.$$

13. Если $A(z)$ — проблемная, то

$$\mathbf{Ш}_0\lfloor \forall z\, A(z), x\rfloor = \forall z\, (!(\Upsilon\ [x, z])\& \mathbf{Ш}_0\lfloor A(z), (\Upsilon\ [x, z])\rfloor),$$

$$\mathbf{Ш}\lfloor \forall z\, A(z)\rfloor = \exists x\ \mathbf{Ш}_0\lfloor \forall z\, A(z), x\rfloor.$$

В этом определении сокращены лишние части, которые получаются при прямом применении реализуемости по Клини. Как показал Клини, конструктивная расшифровка Шанина с классической точки зрения эквивалентна его реализуемости. Алгоритм Шанина, при большей громоздкости описания, выявляет некоторые важные стороны понимания суждений в советском конструктивизме. Многие из выявленных при создании этого алгоритма свойств важны для применения конструктивизма (не только советского) с целью анализа понятий информатики.

ПРИМЕР 4. **Сравнение конструктивной расшифровки и утверждения о реализуемости формулы.**

Рассмотрим формулу

(8) $\neg\forall x(A(x)\vee\neg A(x))$,

где $A(x)$ — полностью классическая неразрешимая формула (не содержащая даже ссылок на принцип конструктивного подбора) вида $\forall x(\mathsf{NULL}\ (\varphi\, x))$, где φ — функция, всюду определенность и однозначность которой устанавливается самыми элементарными средствами (например, в арифметике примитивно-рекурсивная функция). Пусть эта функция определена термом языка, так что дальнейших сложностей нет. Тогда утверждение о реализуемости формулы (8) выглядит следующим образом:

$$
\begin{gathered}
(9)\quad \exists x\,(\forall\zeta\,\neg(\forall z\,\neg(\mathsf{ATOM}\ \zeta)\&\neg(\mathsf{NULL}\ (\mathsf{TAIL}\ \zeta))\&\\
((\mathsf{NULL}\ (\mathsf{HEAD}\ \zeta))\Rightarrow\forall x_1\,(!(\Upsilon\ [(\mathsf{HEAD}\ (\mathsf{TAIL}\ \zeta)),x_1])\&\\
\forall\zeta_2\,((\Upsilon\ [(\mathsf{HEAD}\ (\mathsf{TAIL}\ \zeta)),x_1])\to\zeta_2\Rightarrow(\mathsf{NULL}\ \zeta_2)\&A(z))\&\\
(\neg(\mathsf{NULL}\ (\mathsf{HEAD}\ \zeta))\Rightarrow\\
\forall\zeta_3\,\neg\forall x_3\,(!(\Upsilon\ [\zeta_3,x_3])\&\forall\zeta_4\,((\Upsilon\ [\zeta_3,x_3])\to\zeta_4\Rightarrow(\mathsf{NULL}\ \zeta_4))\&\\
(\mathsf{NULL}\ (\mathsf{HEAD}\ (\mathsf{TAIL}\ \zeta)))))\&(\mathsf{NULL}\ x)\&\neg A(z))
\end{gathered}
$$

Приведем шанинскую расшифровку той же формулы.

$$
\begin{gathered}
(10)\quad \forall\zeta\,\neg\forall x\,(!(\Upsilon\ [\zeta,x])\&\\
((\mathsf{TRUE}\ (\Upsilon\ [\zeta,x]))\Rightarrow A(x))\&((\mathsf{FALSE}\ (\Upsilon\ [\zeta,x]))\Rightarrow\neg A(x))).
\end{gathered}
$$

По шанинской формулировке легко усмотреть, что она утверждает отсутствие разрешающего алгоритма, а вот по клиниевской… Она загромождена множеством лишних тривиальных построений. А если формула $A(x)$ сформулирована чуть посложнее, ситуация становится просто безнадежной.

Интересна дискуссия между Н.А. Шаниным и С.К. Клини по поводу соотношения их расшифровок. Клини утверждал, что Шанин ничего нового не сделал, а Шанин подметил то, что полностью игнорируется «практическими» математиками, но важно для информатиков. Его алгоритм четче по структуре, яснее по результату и, самое главное, идемпотентен: дважды применив его к формуле, мы ничего не изменяем по сравнению с первым применением. А реализация по Клини будет разбухать неограниченно.

Алгоритм конструктивной расшифровки можно переписать в абстрактные теории без понятия алгоритма, основываясь на типах данных. То, от чего он существенно зависит, было нами сформулировано выше. Поэтому сфера применимости шанинской расшифровки гораздо шире советского конструктивизма.

В этом алгоритме формула четко делится на построение объекта (квантор $\exists$) и обоснование проделанного построения. Формула делится на конструктивную и дескриптивную части. Если построение уже осуществлено, то обосновывать его можно средствами классической математики. Правда, в дальнейшем Н.А. Шанину такой вывод (который он сам сделал) показался слишком оппортунистическим и он отказался от собственного алгоритма.

Но можно пойти и в другую сторону. В обосновании построения можно разрешить идеальные объекты, в том числе и актуальную бесконечность. Все равно обосновывать программы, опираясь лишь на те понятия, которые используются при их непосредственном исполнении, невозможно. Приходится вводить *призраки*, которые необходимы для понимания и обоснования программы, но как минимум бесполезны в ходе ее исполнения. Призраками могут быть в том числе и существенно нефинитные объекты (например, количество шагов процедуры можно оценивать ординалами, а для получения оценок точности вычислений применять нестандартные действительные числа).

Явное признание вычислимости алгоритмичностью приносит немало выгод. Рассмотрим в связи с этим пример Шпекера, строящий опровержение утверждения о сходимости возрастающей ограниченной сверху последовательности без помощи метода провокации, который подвержен критике.

ПРИМЕР 5. В любом абстрактном понятии алгоритма можно смоделировать натуральные числа как кортежи вида

$$[\mathsf{NIL}, \ldots, \mathsf{NIL}].$$

Понятие натурального числа разрешимо.

$$(\mathsf{NAT}\ x) \leftarrow \textbf{if}\ (\mathsf{NULL}\ x)\ \textbf{then true else} \\ (\mathsf{NULL}\ (\mathsf{HEAD}\ x))\&(\mathsf{NAT}\ (\mathsf{TAIL}\ x))\ \textbf{fi}$$

Равенство натуральных чисел разрешимо.

$$(\mathsf{NATEQ}\ x\ y) \leftarrow (\mathsf{NAT}\ x)\&(\mathsf{NAT}\ y)\&\textbf{if}\ (\mathsf{NULL}\ x)\ \textbf{then}\ (\mathsf{NULL}\ y) \\ \textbf{else}\ (\mathsf{NATEQ}\ (\mathsf{TAIL}\ x)\ \mathsf{TAIL}\ y))\ \textbf{fi}$$

Поэтому можно свободно пользоваться последовательностями объектов (конечно же, алгоритмическими). Для любого понятия алгоритма существует счетно-перечислимое (т. е. являющееся множеством значений последовательности) неразрешимое множество. Поскольку алгоритмически можно определить лишь счетное множество множеств, а множество всех множеств натуральных чисел сложнее (несчетно)[9], есть неразрешимое множество натуральных чисел, а, значит, не все счетно-перечислимые множества натуральных чисел разрешимы. Возьмем неразрешимое счетно-перечислимое множество натуральных чисел X. Тогда по определению счетной перечислимости имеется алгоритмическая последовательность натуральных чисел, порождающая все элементы этого множества. По разрешимости равенства натуральных чисел ее можно модифицировать (просто исключая повторяющиеся элементы) таким образом, что она будет перечсислять его без повторений. Поскольку множество неразрешимо, она будет перечислять его элементы в некотором неизвестном порядке. Такую последовательность обозначим α. Построим ряд

[9]Мы отказываемся употреблять давно уже ставшее невежественным чтение мощности бесконечных множеств как «числа элементов в них». Это одна из мер сложности описания бесконечного множества.

$$(11)\ \mathrm{Sp} = \sum_{i=0}^{\infty} \frac{1}{2^{(\alpha\ i)}}$$

Если бы было можно построить последовательность стягивающихся сегментов, сходящуюся к его сумме, был бы построен разрешающий предикат для множества X, просто вычисляя Sp с точностью $\frac{1}{2^{n+2}}$, чтобы проверить принадлежность $n \in X$.

Литература

[1] *Ершов Ю. Л.* Теория нумераций. М.: Наука, 1977. 416 с.

[2] *Митчелл Дж.* Основания языков программирования. М.; Ижевск: РХД, 2010. 720 с.

[3] *Городняя Л. В.* Основы функционального программирования. М: ИНТУИТ, 2004. 270 с.

[4] *Ершов Ю. Л.* Теория нумераций. М.: Наука, 1977. 416 с.

[5] *Колмогоров А. Н.* Zur deutung der intuitionistischen Logik // Math. Z., **35** (1932), 58–65.

[6] *Непейвода А. Н.* О сюръективной импликации в реверсивной логике. // Смирновские чтения **5**, (2009). С. 72–74.

[7] *Непейвода Н. Н.* Прикладная логика. Новосибирск: НГУПресс, 2000. 448 с.

[8] *Непейвода Н. Н.* О прикладных теориях с суперинтуиционистскими логиками // Логические исследования. Вып. 7. С. 61–71. М.: Наука, 2000.

[9] *Непейвода Н. Н., Скопин И. Н.* Основания программирования. М.; Ижевск, 2004.

[10] *Непейвода Н. Н.* Конструктивная математика: обзор достижений, недостатков и уроков. Часть I // Логические исследования. Вып. 17. М.; СПб, 2011. С. 191–239.

[11] *Шанин Н. А.* О конструктивном понимании математических суждений. Тр. МИАН СССР, **52**, 1958. С. 226–311.

[12] *Шурыгин В. А.* Основы конструктивного математического анализа. М.: URSS, 2009. 326 с.

[13] *Brouwer L.E.J.* Over de grondslagen der wiskunde. Thesis. Amsterdam, 1907.

[14] *Brouwer L.E.J.* De onbetrouwbaarheid der logische principes // Tijdschrift voor wijsbegeerte, **2**, 1908.

[15] *Brouwer L.E.J.* Intuitionisme en formalisme. Groningen, 1912.

[16] *Brouwer L.E.J.* Besitzt jede reele Zahl eine dezimalbruchentwicklung?// Proc. Acad. Amsterdam, **23**. P. 949–954.

[17] *Brouwer L. E. J.* Richtlijnen der intuitionistische wiskunde // Proc. Acad. Amsterdam, **50**, 339. 1947.

[18] *Glivenko V.* Sur la logique de M.Brouwer // Academie Royale de Belgique. Bulletins de la classe des sciences. Ser. 5, **14**, 1928. P. 225–228.

[19] *Glivenko V.* Sur quelques points de la logique de M.Brouwer // Academie Royale de Belgique. Bulletins de la classe des sciences. Ser. 5, **15**, 1929. P.183–188.

[20] *Kleene S.C.* Introduction in metamathematics. New-York: 1952 (русский перевод *С.К. Клини.* Введение в метаматематику. М., 1957).

[21] *Kreisel G., Lacombe D.* Ensembles récursivement measurables et ensembles récursivement ouvert les fermes // Compt. rend Acad. si. Paris **245**, № 14 (1957). P. 1106–1109.

[22] *Kreisel, G., Troelstra A. S.* Formal systems for some branches of intuitionistic analysis // Ann Math Log, **1**:229–387. 1970.

[23] *Martin-Löf P.* Notes on constructive mathematics. Almqvist & Wiskell, Stockholm, 1970.

[24] *Troelstra A. S.* History of Constructivism in the Twentieth Century // University of Amsterdam, ITLI Prepublication Series ML-91-05, 1991.

[25] *Troelstra A. S.* From Constructivism to Computer Science // Theoretical Computer Science **211**, 233–252. 1999.

Интерполяционная теорема для простой паранормальной логики $Int_{0,\omega}$[1]

В. М. Попов

abstract. A proof of interpolation theorem for simple paranormal logic $Int_{0,\omega}$ is proposed.

Keywords: quasi-elementary formula, paranormal logic, interpolation theorem

Предлагается доказательство интерполяционной теоремы для простой паранормальной логики $Int_{0,\omega}$.

Определяем язык L как пропозициональный язык, алфавиту которого принадлежат только $\&, \vee, \supset$ (бинарные логические связки языка L), $\neg$ (унарная логическая связка языка L),), ((технические символы языка L), p_1, p_2, p_3, ... (пропозициональные переменные языка L). Принимаем сокращение «пп» для выражения «пропозициональная переменная языка L». Определение L-формулы обычно: (1) всякая пп есть L-формула, (2) если A и B есть L-формулы, то $(A\&B)$, $(A \vee B)$, $(A \supset B)$, $(\neg A)$ есть L-формулы, (3) ничто другое не есть L-формула. Условимся, что $\mathbf{N}$ есть множество всех целых положительных чисел и для всякой L-формулы A $W(A)$ есть множество всех пп, входящих в A. Квазиэлементарной L-формулой называем L-формулу, в которую не входят ни $\&$, ни $\vee$, ни $\supset$. Очевидно, что для всякой квазиэлементарной L-формулы E число всех вхождений связки $\neg$ в E есть целое неотрицательное число (называем это число длиной квазиэлементарной L-формулы E). Ясно, что для всякой пп p и всякого n из $\mathbf{N}$ существует единственная квазиэлементарная L-формула A, удовлетворяющая условию: p входит в A и число всех вхождений связки $\neg$ в A равно n. Для всякой пп

[1]Работа выполнена при поддержке РФФИ, грант №10-06-00224а.

p и всякого n из $\mathbf{N}$ обозначаем через $(\neg^{(n)}p)$ квазиэлементарную L-формулу, в которую входит p и число всех вхождений связки $\neg$ в которую равно n. Следуя [1], определяем исчисления $HInt_{0,0}$ и $HInt_{0,\omega}$ гильбертовского типа. Язык этих исчислений есть L. Множеству всех аксиом исчисления $HInt_{0,0}$ принадлежат все те и только те L-формулы, каждая из которых имеет хотя бы один из следующих видов (здесь A, B и C — формулы):

(I) $((A \supset B) \supset ((B \supset C) \supset (A \supset C)))$,
(II) $(A \supset (A \vee B))$,
(III) $(B \supset (A \vee B))$,
(IV) $((A \supset C) \supset ((B \supset C) \supset ((A \vee B) \supset C)))$,
(V) $((A\&B) \supset A)$,
(VI) $((A\&B) \supset B)$,
(VII) $((C \supset A) \supset ((C \supset B) \supset (C \supset (A\&B))))$,
(VIII) $((A \supset (B \supset C)) \supset ((A\&B) \supset C))$,
(IX) $(((A\&B) \supset C) \supset (A \supset (B \supset C)))$,
(X,0) $((\neg B) \supset (B \supset A))$,
(XI,0) $((B \supset (\neg(A \supset A))) \supset (\neg B))$.

Множеству всех аксиом исчисления $HInt_{0,\omega}$ принадлежат все те и только те L-формулы, каждая из которых имеет вид (X,0) $((\neg D) \supset (D \supset A))$ или (XI,ω) $((D \supset (\neg(A \supset A))) \supset (\neg D))$ (где A есть L-формула, а D есть L-формула, не являющаяся квазиэлементарной L-формулой), или имеет хотя бы один из видов (I)–(IX). Правило modus ponens в L является единственным правилом исчисления $HInt_{0,0}$ и единственным правилом исчисления $HInt_{0,\omega}$. Доказательства в $HInt_{0,0}$ ($HInt_{0,0}$-доказательства) и доказательства в $HInt_{0,\omega}$ ($HInt_{0,\omega}$-доказательства) строятся обычным для исчислений гильбертовского типа образом. Стандартно определяются длина $HInt_{0,0}$-доказательства, длина $HInt_{0,\omega}$-доказательства, $HInt_{0,0}$-доказуемая L-формула и $HInt_{0,\omega}$-доказуемая L-формула. Для всякой L-формулы A запись «$HInt_{0,0} \vdash A$» означает, что A есть $HInt_{0,0}$-доказуемая L-формула, а запись «$HInt_{0,\omega} \vdash A$» — что A есть $HInt_{0,\omega}$-доказуемая L-формула. Обозначаем множество всех $HInt_{0,0}$-доказуемых L-формул через $Int_{0,0}$, а множество всех $HInt_{0,\omega}$-доказуемых L-формул — через $Int_{0,\omega}$.

ЗАМЕЧАНИЕ. Можно доказать, что (**1**) $Int_{0,0}$ и $Int_{0,\omega}$ являются логиками в L (в смысле [1]), то есть являются непустыми множествами L-формул, каждое из которых замкнуто относительно modus ponens в L и относительно подстановки L-формулы в L-формулу вместо пп, и (**2**) $Int_{0,\omega}$ строго включается в $Int_{0,0}$. При этом, согласно [1]: (**а**) $Int_{0,0}$ равно множеству всех интуиционистских тавтологий в языке L, то есть $Int_{0,0}$ является интуиционистской логикой в языке L, (**б**) $Int_{0,\omega}$ есть простая паранормальная логика.

Интерполяционная теорема (первоначально доказанная в [4] для классической логики предикатов) доказана в [3] для интуиционистской логики предикатов. С помощью интерполяционной теоремы для интуиционистской логики предикатов можно обосновать следующую интерполяционную теорему для интуиционистской логики в языке L (то есть для $Int_{0,0}$).

Для всяких L-формул A и B: если $(A \supset B)$ есть интуиционистская тавтология в языке L и $W(A) \cap W(B) \neq \oslash$, то существует такая L-формула C, что $(A \supset C)$ и $(C \supset B)$ являются интуиционистскими тавтологиями в языке L и $W(C) \subseteq W(A) \cap W(B)$.

Цель предлагаемой работы — доказательство интерполяционной теоремы для $Int_{0,\omega}$.

ТЕОРЕМА (Интерполяционная теорема для $Int_{0,\omega}$). *Для всяких L-формул A и B: если $(A \supset B) \in Int_{0,\omega}$ и $W(A) \cap W(B) \neq \varnothing$, то существует такая L-формула C, что $(A \supset C) \in Int_{0,\omega}$, $(C \supset B) \in Int_{0,\omega}$ и $W(C) \subseteq W(A) \cap W(B)$.*

Доказательство. В предлагаемом здесь доказательстве интерполяционной теоремы для $Int_{0,\omega}$ использованы нижеследующие леммы (0)–(12).

Условимся, что для всякого n из $\mathbf{N}$, для всяких попарно различных пп $q_1,\ldots,q_n$ и всяких A, $B_1,\ldots,B_n$, являющихся L-формулами, $[q_1 \ldots q_n/B_1 \ldots B_n](A)$ обозначает результат одновременной подстановки L-формул $B_1,\ldots,B_n$ в L-формулу A вместо пп $q_1,\ldots,q_n$ соответственно.

ЛЕММА 0. *Для всякого n из $\mathbf{N}$, для всяких попарно различных пп $q_1,\ldots,q_n$ и для всяких L-формул A, $B_1,\ldots,B_n$: если $HInt_{0,\omega} \vdash A$, то $HInt_{0,\omega} \vdash [q_1 \ldots q_n/B_1 \ldots B_n](A)$.*

Лемма 0 доказана индукцией по длине $HInt_{0,\omega}$-доказательства.

Доказана также следующая лемма 1.

ЛЕММА 1. *Существует единственное отображение ψ множества всех L-формул в себя, удовлетворяющее условиям: (1) для всякой пп q верно, что $\psi(q) = q$, (2) для всякой пп q верно, что $\psi((\neg q)) = (\neg(q\&q))$, (3) для всякой L-формулы A, не являющейся пп, верно, что $\psi((\neg A)) = (\neg\psi(A))$, (4) для всяких L-формул A и B и для всякой бинарной логической связки $\bullet$ языка L верно, что $\psi((A \bullet B)) = (\psi(A) \bullet \psi(B))$.*

Отображение, существование и единственность которого утверждается в лемме 1, обозначаем через dub. Опираясь на лемму 1, можно доказать (индукцией по длине $HInt_{0,0}$-доказательства) лемму 2.

ЛЕММА 2. *Для всякой L-формулы A: если $HInt_{0,0} \vdash A$, то $HInt_{0,\omega} \vdash dub(A)$.*

Определение: негативно-регулярной L-формулой называем такую L-формулу A, в которую не входит ни одна L-формула вида $(\neg q)$, где q есть пп.

ЛЕММА 3. *Для всякой негативно-регулярной L-формулы A верно, что $dub(A) = A$.*

Лемма 3 доказана индукцией по построению L-формулы.

ЛЕММА 4. *Для всякой L-формулы A верно, что $W(dub(A)) = W(A)$.*

Лемма 4 доказана индукцией по построению L-формулы.

Доказана также следующая лемма 5.

ЛЕММА 5. *Пусть F есть L-формула, $n \in \boldsymbol{N}$, $q_1,\ldots,q_n$ есть попарно различные пп, $W(F) = \{q_1, \ldots, q_n\}$, k есть наибольшее целое положительное число в $\{u | u \in \boldsymbol{N}$ и существует такая пп q, что $(\neg^{(u)}q)$ входит в $F\}$, и $r_1^1, \ldots, r_1^k, \ldots, r_n^1, \ldots, r_n^k$ есть попарно различные пп, ни одна из которых не принадлежит множеству $\{q_1, \ldots, q_n\}$. Тогда существует единственное отображение φ множества всех L-формул в себя, удовлетворяющее условиям:*

- *(a) для всякой пп p верно, что $\varphi(p) = p$,*
- *(b) для всякого m из $\boldsymbol{N}$ и для всякой пп, не принадлежащей множеству $\{q_1, \ldots, q_n\}$, верно, что $\varphi((\neg^{(m)}p)) = (\neg^{(m)}p)$,*

(c) *для всякого такого* m *из* $\boldsymbol{N}$, *что* $m > q$, *и для всякого* i *из* $\{1,\ldots,n\}$ *верно, что* $\varphi((\neg^{(m)}q_i)) = (\neg\varphi((\neg^{(m-1)}q_i)))$,

(d) *для всякого такого* m *из* $\boldsymbol{N}$, *что* $m \leq k$, *и для всякого* i *из* $\{1,\ldots,n\}$ *верно что* $\varphi((\neg^{(m)}q_i)) = r_i^m$,

(e) *для всякой* L*-формулы* A, *не являющейся квазиэлементарной* L*-формулой, верно, что* $\varphi((\neg A)) = (\neg\varphi(A))$,

(f) *для всяких* L*-формул* A *и* B *и для всякой бинарной логической связки* $\bullet$ *языка* L *верно, что* $(\varphi(A \bullet B)) = (\varphi(A) \bullet \varphi(B))$.

ЛЕММА 6. *Пусть* F *есть* L*-формула,* $n \in \boldsymbol{N}$, $q_1,\ldots,q_n$ *есть попарно различные пп,* $W(F) = \{q_1,\ldots,q_n\}$, k *есть наибольшее целое положительное число в* $\{u | u \in \boldsymbol{N}$ *и существует такая пп* q, *что* $(\neg^{(u)}q)$ *входит в* $F\}$, $r_1^1,\ldots,r_1^k,\ldots,r_n^1,\ldots,r_n^k$ *есть попарно различные пп, ни одна из которых не принадлежит множеству* $\{q_1,\ldots,q_n\}$, *а* φ *есть отображение множества всех* L*-формул в себя, удовлетворяющее условиям (a)–(f), сформулированным в лемме 5. Тогда для всякой* L*-формулы* A*: если* $HInt_{0,\omega} \vdash A$, *то* $HInt_{0,0} \vdash \varphi(A)$.

Лемма 6 доказана индукцией по длине $HInt_{0,\omega}$-доказательства.

ЛЕММА 7. *В условиях леммы 6 верно, что* $\varphi(A)$ *есть квазиэлементарная* L*-формула для всякой квазиэлементарной* L*-формулы* A.

Доказательство леммы 7, базирующееся на использовании определения отображения φ, тривиально.

ЛЕММА 8. *В условиях леммы 6 верно, что для всякой* L*-формулы* A*: если* $W(A) \subseteq \{q_1,\ldots,q_n\}$ *и длина всякой квазиэлементарной* L*-формулы, входящей в* A, *не больше* k, *то всякая квазиэлементарная* L*-формула, входящая в* $\varphi(A)$, *является пп.*

Лемма 8 доказана индукцией по построению L-формулы.

ЛЕММА 9. *В условиях леммы 6 верно, что для всякой* L*-формулы* A*: если* $W(A) \subseteq \{q_1,\ldots,q_n\}$ *и длина всякой квазиэлементарной* L*-формулы, входящей в* A, *не больше* k, *то* $[r_1^1 \ldots r_1^k \ldots r_n^1 \ldots r_n^k /\ (\neg^{(1)}q_1)\ldots(\neg^{(k)}q_1)\ldots(\neg^{(1)}q_n)\ldots(\neg^{(k)}q_n)](\varphi(A)) = A$.

Лемма 9 доказана индукцией по построению L-формулы.

ЛЕММА 10. *В условиях леммы 6 верно, что для всякой L-формулы A: если $W(A) \subseteq \{q_1, \ldots, q_n\}$, длина всякой квазиэлементарной L-формулы, входящей в A, не больше k и $HInt_{0,0} \vdash \varphi(A)$, то $HInt_{0,\omega} \vdash A$.*

Лемма 10 доказана с использованием лемм 0, 2, 3, 8 и 9.

ЛЕММА 11. *Для всяких L-формул A и B: если $(A \supset B)$ есть интуиционистская тавтология в языке L и $W(A) \cap W(B) \neq \varnothing$, то существует такая L-формула C, что выполняются следующие условия: (а) $(A \supset C)$ и $(C \supset B)$ являются интуиционистскими тавтологиями в языке L, (б) $W(C) \subseteq W(A) \cap W(B)$, (в) C есть негативно-регулярная L-формула.*

Доказательство леммы 11 проведено с использованием (1) интерполяционной теоремы для интуиционистской логики в языке L (формулировка этой теоремы приведена выше), (2) утверждения о том, что для всякой пп q L-формула $((q \supset (q\&q))\&((q\&q) \supset q))$ является интуиционистской тавтологией в языке L, и (3) следующей теоремы об эквивалентной замене: если A и B есть такие L-формулы, что $((A \supset B)\&(B \supset A))$ есть интуиционистская тавтология в L, то для всякой L-формулы M, в которую входит A, интуиционистской тавтологией в языке L является $((M \supset M')\&(M' \supset M))$, где M' есть результат замены в M некоторых вхождений L-формулы A вхождениями L-формулы B.

ЛЕММА 12. *В условиях леммы 6 верно, что для всякой L-формулы A, входящей в F, $\varphi(A)$ есть негативно-регулярная L-формула.*

Доказательство.

Лемма 12 вытекает из нижеследующих подлеммы 1 и подлеммы 2.

ПОДЛЕММА 1. В условиях леммы 6 верно, что: (1) всякая пп p, входящая в F, такова, что $\varphi(p)$ есть негативно-регулярная L-формула, (2) всякие L-формулы A и B, входящие в F, таковы, что если $\varphi(A)$ и $\varphi(B)$ есть негативно-регулярные L-формулы и $(A\&B)$ входит в F, то $\varphi((A\&B))$ есть негативно-регулярная L-формула, (3) всякие L-формулы A и B, входящие в F, таковы, что если $\varphi(A)$ и $\varphi(B)$ есть негативно-регулярные L-формулы и

$(A \vee B)$ входит в F, то $\varphi((A \vee B))$ есть негативно-регулярная L-формула, (4) всякие L-формулы A и B, входящие в F, таковы, что если $\varphi(A)$ и $\varphi(B)$ есть негативно-регулярные L-формулы и $(A \supset B)$ входит в F, то $\varphi((A \supset B))$ есть негативно-регулярная L-формула, (5) всякая L-формула A, входящая в F, такова, что если $\varphi(A)$ есть негативно-регулярная L-формула и $(\neg A)$ входит в F, то $\varphi((\neg A))$ есть негативно-регулярная L-формула.

ПОДЛЕММА 2. Для всякой L-формулы F и для всякого множества P L-формул: **если (1)** всякая пп, входящая в F, принадлежит P, **(2)** всякие L-формулы A и B, входящие в F, таковы, что если они принадлежат P и $(A\&B)$ входит в F, то $(A\&B) \in P$, **(3)** всякие L-формулы A и B, входящие в F, таковы, что если они принадлежат P и $(A \vee B)$ входит в F, то $(A \vee B) \in P$, **(4)** всякие L-формулы A и B, входящие в F, таковы, что если они принадлежат P и $(A \supset B)$ входит в F, то $(A \supset B) \in P$, и **(5)** всякая L-формула A, входящая в F, такова, что если $A \in P$ и $(\neg A)$ входит в F, **то** $(\neg A) \in P$, то всякая L-формула, входящая в F, принадлежит P.

Q.E.D.

Доказательство интерполяционной теоремы для $Int_{0,\omega}$.

(1) A_0 и B_0 есть L-формулы (допущение).

(2) $(A_0 \supset B_0) \in Int_{0,\omega}$ и $W(A_0) \cap W(B_0) \neq \varnothing$ (допущение). Индукцией по построению L-формулы можно доказать, что

(3) для всякой L-формулы G верно, что $W(G)$ есть непустое конечное множество пп.

(4) $(A_0 \supset B_0)$ есть L-формула (из (1), по определению L-формулы).

(5) $W((A_0 \supset B_0))$ есть непустое конечное множество пп (из (3) и (4)). Пусть

(6) $n \in \mathbf{N}$, $q_1, \ldots, q_n$ есть попарно различные пп, $W((A \supset B)) = \{q_1, \ldots, q_n\}$. Допустим, что

(7) не существует такое u из $\mathbf{N}$, что для некоторой пп p $(\neg^{(u)}p)$ входит в $(A_0 \supset B_0)$.

(8) $(A_0 \supset B_0) \in Int_{0,0}$ (из того, что $(A_0 \supset B_0) \in Int_{0,\omega}$ (см. (2)), и того, что $I_{0,\omega} \subseteq Int_{0,0}$ (см. замечание)).

(9) Существует такая L-формула C, что $((A_0 \supset C) \in Int_{0,0}$, $(C \supset B_0) \in Int_{0,0}$ и $W(C) \subseteq W(A_0) \cap W(B_0)$ (из (1) и того, что

$W(A_0) \cap W(B_0) \neq \varnothing$ (см. (2)), по интерполяционной теореме для $Int_{0,0}$). Пусть

(10) C_0 есть L-формула, $(A_0 \supset C_0) \in Int_{0,0}$, $(C_0 \supset B_0) \in Int_{0,0}$ и $W(C_0) \subseteq W(A_0) \cap W(B_0)$. Опираясь на (10) и определение множества $Int_{0,0}$, получаем, что

(11) $HInt_{0,0} \vdash (A_0 \supset C_0)$ и $HInt_{0,0} \vdash (C_0 \supset B_0)$.

(12) $HInt_{0,\omega} \vdash dub((A_0 \supset C_0))$ и $HInt_{0,\omega} \vdash dub((C_0 \supset B_0))$ (из (11) и того, что $(A_0 \supset C_0)$ и $(C_0 \supset B_0)$ есть L-формулы, по лемме 2).

(13) $HInt_{0,\omega} \vdash (dub(A_0) \supset dub(C_0))$ и $HInt_{0,\omega} \vdash (dub(C_0) \supset dub(B_0))$ (из (12), по определению dub и по лемме 1). В свете (7) ясно, что

(14) не существует такое u из $\mathbf{N}$, что для некоторой пп p $(\neg^{(u)}p)$ входит в A_0, и не существует такое u из $\mathbf{N}$, что для некоторой пп p $(\neg^{(u)}p)$ входит в B_0.

(15) $dub(A_0) = A_0$ и $dub(B_0) = B_0$ (из (1) и (14), по лемме 3).

(16) $HInt_{0,\omega} \vdash (A_0 \supset dub(C_0))$ и $HInt_{0,\omega} \vdash (dub(C_0) \supset B_0)$ (из (13) и (15)).

(17) $W(dub(C_0)) = W(C_0)$ (из того, что C_0 есть L-формула (см. (10)), по лемме 4).

(18) $W(dub(C_0)) \subseteq W(A_0) \cap W(B_0)$ (из того, что $W(C_0) \subseteq W(A_0) \cap W(B_0)$ (см. (10)), и (17)).

(19) Существует такая L-формула C, что $HInt_{0,\omega} \vdash (A_0 \supset C)$, $HInt_{0,\omega} \vdash (C \supset B_0)$ и $W(C) \subseteq W(A_0) \cap W(B_0)$ (из (16), (18) и того, что $dub(C_0)$ есть L-формула). Снимая допущение (7), получаем, что

(20) если не существует такое u из $\mathbf{N}$, что для некоторого i из $\{1, \ldots, n\}$ $(\neg^{(u)}q_i)$ входит в $(A_0 \supset B_0)$, то существует такая L-формула C, что $HInt_{0,\omega} \vdash (A_0 \supset C)$, $HInt_{0,\omega} \vdash (C \supset B_0)$ и $W(C) \subseteq W(A_0) \cap W(B_0)$. Допустим, что

(21) существует такое u из $\mathbf{N}$, что для некоторой пп p $(\neg^{(u)}p)$ входит в $(A_0 \supset B_0)$.

(22) $\{u | u \in \mathbf{N}$ и существует такая пп p, что $(\neg^{(u)}p)$ входит в $(A_0 \supset B_0)\} \neq \varnothing$ (из (21)). Ясно, что

(23) $\{u | u \in \mathbf{N}$ и существует такая пп p, что $(\neg^{(u)}p)$ входит в $(A_0 \supset B_0)\}$ есть конечное множество. Опираясь на (22) и (23), получаем, что

(24) в $\{u | u \in \mathbf{N}$ и существует такая пп p, что $(\neg^{(u)}p)$ входит в

$(A_0 \supset B_0)\}$ существует наибольшее целое положительное число. Пусть

(25) k есть наибольшее целое положительное число в $\{u|u \in \mathbf{N}$ и существует такая пп p, что $(\neg^{(u)}p)$ входит в $(A_0 \supset B_0)\}$. Учитывая, что множество $\{q_1, \ldots, q_n\}$ конечно, а множество всех пп бесконечно, положим, что

(26) $r_1^1, \ldots, r_1^k, \ldots, r_n^1, \ldots, r_n^k$ есть попарно различные пп, ни одна из которых не принадлежит множеству $\{q_1, \ldots, q_n\}$.

(27) Существует единственное отображение φ множества всех L-формул в себя, удовлетворяющее условиям (a), (b), (c), (d), (e) и (f), сформулированным в лемме 5 (из (4), (6), (25) и (26), по лемме 5). Пусть

(28) φ_0 есть отображение множества всех L-формул в себя, удовлетворяющее условиям: (a$'$) для всякой пп p верно, что $\varphi_0(p) = p$, (b$'$) для всякого m из $\mathbf{N}$ и для всякой пп, не принадлежащей множеству $\{q_1, \ldots, q_n\}$, верно, что $\varphi_0((\neg^{(m)}p)) = (\neg^{(m)}p)$, (c$'$) для всякого такого m из $\mathbf{N}$, что $m > k$, и для всякого i из $\{1, \ldots, n\}$ верно, что $\varphi_0((\neg^{(m)}q_i)) = (\neg\varphi_0((\neg^{(m)}q_i)))$, (d$'$) для всякого такого m из $\mathbf{N}$, что $m \leq k$, и для всякого i из $\{1, \ldots, n\}$ верно, что $\varphi_0((\neg^{(m)}q_i)) = r_i^m$, (e$'$) для всякой L-формулы A, не являющейся квазиэлементарной L-формулой, верно, что $\varphi_0((\neg A)) = (\neg\varphi_0(A))$, (f$'$) для всяких L-формул A и B и для всякой бинарной логической связки $\bullet$ языка L верно, что $\varphi_0((A \bullet B)) = (\varphi_0(A) \bullet \varphi_0(B))$.

(29) $HInt_{0,0} \vdash \varphi_0((A_0 \supset B_0))$ (из (4), (6), (25), (26) и (28), по лемме 6).

(30) $\varphi_0((A_0 \supset B_0)) = (\varphi_0(A_0) \supset \varphi_0(B_0))$ (из (1) и пункта (f$'$) утверждения (28)).

(31) $HInt_{0,0} \vdash (\varphi_0(A_0) \supset \varphi_0(B_0))$ (из (29) и (30)).

(32) Если $W(\varphi_0(A_0)) \cap W(\varphi_0(B_0)) = \varnothing$, то существует такая L-формула C, что $HInt_{0,\omega} \vdash (A_0 \supset C)$, $HInt_{0,\omega} \vdash (C \supset B_0)$ и $W(C) \subseteq W(A_0) \cap W(B_0)$.

Докажем утверждение (32).

(32.1) $W(\varphi_0(A_0)) \cap W(\varphi_0(B_0)) = \varnothing$ (допущение). Известно, что верно следующее утверждение (32.2).

(32.2) Для всяких L-формул A и B: если $(A \supset B)$ есть интуиционистская тавтология в L и $W(A) \cap W(B) = \varnothing$, то $(\neg A)$ есть интуиционистская тавтология в L или B есть интуиционистская тавтология в L. Опираясь на утверждения (31), (32.1) и (32.2), получаем, что

(32.3) $(\neg\varphi_0(A_0))$ есть интуиционистская тавтология в L или $(\varphi_0(B_0))$ есть интуиционистская тавтология в L.

(32.4) $(\neg\varphi_0(A_0))$ есть интуиционистская тавтология в L (допущение). Отсюда и из того, что ни одна интуиционистская тавтология в L не является квазиэлементарной L-формулой, получаем, что

(32.5) $(\neg\varphi_0(A_0))$ не есть квазиэлементарная L-формула.

(32.6) $\varphi_0(A_0)$ не есть квазиэлементарная L-формула (из (32.5), по определению квазиэлементарной L-формулы).

(32.7) A_0 не есть квазиэлементарная L-формула (из (1), (4), (6), (25), (26), (28) и (32.6), по лемме 7).

(32.8) $\varphi_0((\neg A_0)) = (\neg\varphi_0(A_0))$ (из (1), (32.7) и пункта (c$'$) утверждения (28)).

(32.9) $\varphi_0((\neg A_0))$ есть интуиционистская тавтология в L (из (32.4) и (32.8)). В свете утверждения (6) ясно, что

(32.10) $W((\neg A_0)) \subseteq \{q_1, \ldots, q_n\}$. Опираясь на (25) и (32.7), получаем, что

(32.11) длина всякой квазиэлементарной L-формулы, входящей в $(\neg A_0)$, не больше k.

(32.12) $Int_{0,\omega} \vdash (\neg A_0)$ (из того, что $(\neg A_0)$ есть L-формула, (4), (6), (25), (26), (28), (32.9), (32.10) и (32.11), по лемме 10). Вспомнив, что $W(A_0) \cap W(B_0) = \varnothing$, положим, что

(32.13) $x \in W(A_0) \cap W(B_0)$. Понятно, что тогда

(32.14) x есть пропозициональная переменная языка L и

(32.15) $(\neg(x \supset x))$ есть L-формула. Используя утверждение (1), (32.7), (32.15), определение L-формулы и определение аксиомы исчисления $HInt_{0,\omega}$, получаем, что

(32.16) $((\neg A_0) \supset (A_0 \supset (\neg(x \supset x))))$ есть аксиома исчисления $HInt_{0,\omega}$. Но тогда ясно, что

(32.17) $HInt_{0,\omega} \vdash ((\neg A_0) \supset (A_0 \supset (\neg(x \supset x))))$. Опираясь на утверждения (32.12) и (32.17), получаем, что

(32.18) $HInt_{0,\omega} \vdash (A_0 \supset (\neg(x \supset x)))$. Простое доказательство нижеследующего утверждения (32.19) не приводим.

(32.19) $HInt_{0,\omega} \vdash ((\neg(x \supset x)) \supset B_0)$.

(32.20) $W((\neg(x \supset x))) = \{x\}$ (из (32.14) и (32.15), по определению W).

(32.21) Существует такая L-формула C, что: $HInt_{0,\omega} \vdash (A_0 \supset C)$, $HInt_{0,\omega} \vdash (C \supset B_0)$ и $W(C) \subseteq W(A_0) \cap W(B_0)$ (из (32.13), (32.15), (32.18), (32.19) и (32.20)). Снимая допущение (32.4), получаем, что

(32.22) если $(\neg\varphi_0(A_0))$ есть интуиционистская тавтология в L, то существует такая L-формула C, что: $HInt_{0,\omega} \vdash (A_0 \supset C)$, $HInt_{0,\omega} \vdash (C \supset B_0)$ и $W(C) \subseteq W(A_0) \cap W(B_0)$.

(32.23) $\varphi_0(B_0)$ есть интуиционистская тавтология в L (допущение). В свете утверждения (6) очевидно, что

(32.24) $W(\varphi_0(B_0)) \subseteq \{q_1, \ldots, q_n\}$. Опираясь на утверждение (25), получаем, что

(32.25) длина всякой квазиэлементарной L-формулы, входящей в B_0, не больше k.

(32.26) $HInt_{0,\omega} \vdash B_0$ (из (1), (4), (16), (25), (26), (28), (32.23), (32.24) и (32. 25) по лемме 10). Учитывая, что $W(A_0) \cap W(B_0) \neq \varnothing$, положим, что

(32.27) $y \in W(A_0) \cap W(B_0)$. Разумеется, тогда

(32.28) y есть пп и

(32.29) $(y \supset y)$ есть L-формула. Опираясь на утверждения (32.26) и (32. 29), нетрудно доказать, что

(32.30) $HInt_{0,\omega} \vdash ((y \supset y) \supset B_0)$. Можно доказать также, что

(32.31) $HInt_{0,\omega} \vdash (A_0 \supset (y \supset y))$.

(32.32) $W((y \supset y)) = \{y\}$ (из (32.28) и (32.29), по определению W).

(32.33) Существует такая L-формула C, что: $HInt_{0,\omega} \vdash (A_0 \supset C)$, $HInt_{0,\omega} \vdash (C \supset B_0)$ и $W(C) \subseteq W(A_0) \cap W(B_0)$ (из (32.27), (32.29), (32.30), (32. 31) и (32.32)). Снимая допущение (32.23), получаем, что

(32.34) если $\varphi_0(B_0)$ есть интуиционистская тавтология в L, то существует такая L-формула C, что: $HInt_{0,\omega} \vdash (A_0 \supset C)$, $HInt_{0,\omega} \vdash (C \supset B_0)$ и $W(C) \subseteq W(A_0) \cap W(B_0)$.

(32.35) Существует такая L-формула C, что: $HInt_{0,\omega} \vdash (A_0 \supset C)$, $HInt_{0,\omega} \vdash (C \supset B_0)$ и $W(C) \subseteq W(A_0) \cap W(B_0)$ (из (32.3), (32.23) и (32.34)). Снимая допущение (32.1), получаем, что если $W(\varphi_0(A_0)) \cap W(\varphi_0(B_0)) = \varnothing$, то существует такая L-формула C, что: $HInt_{0,\omega} \vdash (A_0 \supset C)$, $HInt_{0,\omega} \vdash (C \supset B_0)$ и $W(C) \subseteq W(A_0) \cap W(B_0)$.

Утверждение (32) доказано.

(33) Если $W(\varphi_0(A_0)) \cap W(\varphi_0(B_0)) \neq \varnothing$, то существует такая L-формула C, что: $HInt_{0,\omega} \vdash (A_0 \supset C)$, $HInt_{0,\omega} \vdash (C \supset B_0)$ и $W(C) \subseteq W(A_0) \cap W(B_0)$.

Докажем утверждение (33).

(33.1) $W(\varphi_0(A_0)) \cap W(\varphi_0(B_0)) \neq \varnothing$ (допущение). Ясно, что

(33.2) $\varphi_0(A_0)$ и $\varphi_0(B_0)$ являются L-формулами.

(33.3) $(\varphi_0(A_0) \supset \varphi_0(B_0)) \in Int_{0,0}$ (из 31), по определению множества $Int_{0,0}$).

(33.4) $(\varphi_0(A_0) \supset \varphi_0(B_0))$ есть интуиционистская тавтология в языке L (из (33.3) и того, что $Int_{0,0}$ есть множество всех интуиционистских тавтологий в языке L).

(33.5) Существует такая L-формула C, что: $(\varphi_0(A_0) \supset C)$ и $(C \supset \varphi_0(B_0))$ есть интуиционистские тавтологии в L, $W(C) \subseteq W(\varphi_0(A_0)) \cap W(\varphi_0(B_0))$ и C есть негативно-регулярная L-формула (из (33.1), (33.2) и (33.4), по лемме 11). Пусть

(33.6) C_0 есть L-формула, $(\varphi_0(A_0) \supset C_0)$ и $(C_0 \supset \varphi_0(B_0))$ есть интуиционистские тавтологии в L, $W(C_0) \subseteq W(\varphi_0(A_0)) \cap W(\varphi_0(B_0))$ и C есть негативно-регулярная L-формула.

(33.7) $(\varphi_0(A_0) \supset C_0) \in Int_{0,0}$ и $(C_0 \supset \varphi_0(B_0)) \in Int_{0,0}$ (из (33.6) и того, что $Int_{0,0}$ есть множество всех интуиционистских тавтологий в языке L).

(33.8) $(\varphi_0(A_0) \supset C_0)$ и $(C_0 \supset \varphi_0(B_0))$ являются $HInt_{0,0}$-доказуемыми L-формулами (из (33.7), по соглашению об обозначении).

(33.9) $HInt_{0,0} \vdash (\varphi_0(A_0) \supset C_0)$ и $HInt_{0,0} \vdash (C_0 \supset \varphi_0(B_0))$ (из (33.8), по соглашению об использовании «$HInt_{0,0} \vdash$»).

(33.10) $HInt_{0,\omega} \vdash dub((\varphi_0(A_0) \supset C_0))$ и $HInt_{0,\omega} \vdash dub((C_0 \supset \varphi_0(B_0)))$ (из (33.9), по лемме 2).

(33.11) $HInt_{0,\omega} \vdash (dub(\varphi_0(A_0)) \supset dub(C_0)$ и $HInt_{0,\omega} \vdash (dub(C_0) \supset dub(\varphi_0(B_0)))$ (из (33.10), по лемме 1).

(33.12) $dub(C_0) = C_0$ (из(33.6), по лемме 3). Очевидно, что

(33.13) L-формулы A_0 и B_0 входят в L-формулу $(A_0 \supset B_0)$.

(33.14) $\varphi_0(A_0)$ и $\varphi_0(B_0)$ есть негативно-регулярные L-формулы (из (1), (4), (6), (25), (26), (28) и (33.13), по лемме 12).

(33.15) $dub(\varphi_0(A_0)) = \varphi_0(A_0)$ и $dub(\varphi_0(B_0)) = \varphi_0(B_0)$(из (33.14), по лемме 3).

(33.16) $HInt_{0,\omega} \vdash (\varphi_0(A_0) \supset C_0)$ и $HInt_{0,\omega} \vdash (C_0 \supset \varphi_0(B_0))$ (из (33.11), (33.12) и (33.15)). Понятно, что

(33.17) произведение k на n есть целое положительное число, $r_1^1, \ldots, r_1^k, \ldots, r_n^1, \ldots, r_n^k$ есть попарно различные пп, а $(\neg^{(1)}q_1), \ldots, (\neg^{(k)}q_1), \ldots, (\neg^{(1)}q_n), \ldots, (\neg^{(k)}q_n)$ есть L-формулы. Условившись вместо «$[r_1^1 \ldots r_1^k \ldots r_n^1 \ldots r_n^k \,/\, (\neg^{(1)}q_1) \ldots (\neg^{(k)}q_1) \ldots (\neg^{(1)}q_n) \ldots (\neg^{(k)}q_n)]$» использовать «$S$» и опираясь на (33.16) и (33.17), получаем по лемме 0, что

(33.18) $HInt_{0,\omega} \vdash S((\varphi_0(A_0) \supset C_0))$ и $HInt_{0,\omega} \vdash S((C_0 \supset \varphi_0(B_0)))$. Используя дистрибутивность S относительно импликации $\supset$, получаем, что

(33.19) L-формула $S((\varphi_0(A_0)) \supset C_0)$ есть L-формула $(S(\varphi_0(A_0)) \supset S(C_0))$, а L-формула $S((C_0 \supset \varphi_0(B_0)))$ есть L-формула $(S(C_0) \supset S(\varphi_0(B_0)))$.

(33.20) $HInt_{0,\omega} \vdash (S(\varphi_0(A_0)) \supset S(C_0))$ и $HInt_{0,\omega} \vdash (S(C_0) \supset S(\varphi_0(B_0)))$ (из (33.18) и (33.19), по соглашению об использовании «S»). В свете утверждений (6) и (25) ясно, что

(33.21) $W(A_0) \subseteq \{q_1, \ldots, q_n\}$, $W(B_0) \subseteq \{q_1, \ldots, q_n\}$, длина всякой квазиэлементарной L-формулы, входящей в A_0, не больше k, длина всякой квазиэлементарной L-формулы, входящей в B_0, не больше k.

(33.22) $S(\varphi_0(A_0)) = A_0$ и $S(\varphi_0(B_0)) = B_0$ (из (4), (6), (25), (26), (28) и (33.21), по лемме 9).

(33.23) $HInt_{0,\omega} \vdash (A_0 \supset S(C_0))$ и $HInt_{0,\omega} \vdash (S(C_0) \supset B_0)$ (из (33.20) и (33.22)).

(33.24) $W(C_0) \subseteq W(\varphi_0(A_0)) \cap W(\varphi_0(B_0))$ (из(33.6)).

(33.25) $W(C_0) \subseteq W(\varphi_0(A_0))$ и $W(C_0) \subseteq W(\varphi_0(B_0))$ (из (33.24)). Очевидно следующее утверждение

(33.26), имеющее семиотический характер. (33.26) Для всякого m из $\mathbf{N}$, для всяких L-формул A, B, $C_1, \ldots, C_m$ и для всяких попарно различных пп $s_1, \ldots, s_m$: если $W(A) \subseteq W(B)$, то $W([s_1 \ldots s_m \,/\, C_1 \ldots C_m](A)) \subseteq W([s_1 \ldots s_m \,/\, C_1 \ldots C_m](B))$.

(33.27) $W(S(C_0)) \subseteq W(S(\varphi_0(A_0)))$ и $W(S(C_0)) \subseteq W(S(\varphi_0(B_0)))$ (из (33.2), (33.6), (33.17), (33.25) и (33.26)).

(33.28) $W(S(C_0)) \subseteq W(A_0)$ и $W(S(C_0)) \subseteq W(B_0)$ (из (33.22) и (33.27)).

(33.29) $W(S(C_0)) \subseteq W(A_0) \cap W(B_0)$ (из (33.28)).

(33.30) Существует такая L-формула C, что: $HInt_{0,\omega} \vdash (A_0 \supset C)$, $HInt_{0,\omega} \vdash (C \supset B_0)$ и $W(C) \subseteq W(A_0) \cap W(B_0)$ (из того, что $S(C_0)$ есть L-формула, и утверждений (33.23) и (33.29)). Снимая допущение (33.1), получаем, что если $W(\varphi_0(A_0)) \cap W(\varphi_0(B_0)) \neq \varnothing$, то существует такая L-формула C, что: $HInt_{0,\omega} \vdash (A_0 \supset C)$, $HInt_{0,\omega} \vdash (C \supset B_0)$ и $W(C) \subseteq W(A_0) \cap W(B_0)$.

Утверждение (33) доказано.

(34) Существует такая L-формула C, что: $HInt_{0,\omega} \vdash (A_0 \supset C)$, $HInt_{0,\omega} \vdash (C \supset B_0)$ и $W(C) \subseteq W(A_0) \cap W(B_0)$ (из (32) и (33)). Снимая допущение (21), получаем, что

(35) если существует такое u из $\mathbf{N}$, что для некоторой пп p $(\neg^{(u)}p)$ входит в $(A_0 \supset B_0)$, то существует такая L-формула C, что: $HInt_{0,\omega} \vdash (A_0 \supset C)$, $HInt_{0,\omega} \vdash (C \supset B_0)$ и $W(C) \subseteq W(A_0) \cap W(B_0)$.

(36) Существует такая L-формула C, что: $HInt_{0,\omega} \vdash (A_0 \supset C)$, $HInt_{0,\omega} \vdash (C \supset B_0)$ и $W(C) \subseteq W(A_0) \cap W(B_0)$ (из (20) и (35)). Опираясь на (36) и соглашение об обозначении, получаем, что

(37) существует такая L-формула C, что: $(A_0 \supset C) \in Int_{0,\omega}$, $(C \supset B_0) \in Int_{0,\omega}$ и $W(C) \subseteq W(A_0) \cap W(B_0)$. Снимая допущения (1) и (2) и обобщая, получаем, что для всяких L-формул A и B: если $(A \supset B) \in Int_{0,\omega}$ и $W(A) \cap W(B) \neq \varnothing$, то существует такая формула C, что $(A \supset C) \in Int_{0,\omega}$, $(C \supset B) \in Int_{0,\omega}$ и $W(C) \subseteq W(A) \cap W(B)$.

Интерполяционная теорема для $Int_{0,\omega}$ доказана.

Q.E.D.

Литература

[1] *Попов В.М.* Секвенциальные аксиоматизации простых паралогик //Логические исследования. Вып. 16. Центр гуманитарных инициатив, М.; СПб., 2010. С. 205–220.

[2] *Смирнов В.А.* Формальный вывод и логические исчисления. М., 1972.

[3] *Шютте К.* Интерполяционная теорема для интуиционистской логики предикатов //Математическая теория логического вывода. М., 1967. С. 285–295.

[4] *Craig W.* Linear reasoning. A new form of the Herbrand-Gentzen theorem //Journal of Symbolic Logic. 1957. Vol. 22. P. 250–268.

Замечание. В публикации В.М. Попова «Секвенциальная аксиоматизация паранормальной логики $PContPComp$» (Логические исследования. Вып. 17. С. 240–245) на стр. 243–244 в формулировке правила ВОКЛ, в формулировке правила ВИП и в формулировке ВОИП имеются опечатки. Правильные формулировки этих правил таковы:

$$\frac{((\neg A) \bullet \Gamma) \to \Theta \qquad ((\neg B) \bullet \Gamma) \to \Theta}{((\neg(A \& B)) \bullet \Gamma) \to \Theta} \textit{ (ВОКЛ)}$$

$$\frac{(A \bullet \Gamma) \to (\Theta \bullet B)}{\Gamma \to (\Theta \bullet (A \supset B))} \textit{ (ВИП)}$$

$$\frac{\Gamma \to (\Theta \bullet A) \qquad \Gamma \to (\Theta \bullet (\neg B))}{\Gamma \to (\Theta \bullet (\neg(A \supset B)))} \textit{ (ВОИП)}$$

В публикации В.М. Попова «Секвенциальные аксиоматизации пропозициональных логик нельсоновского типа» (Логические исследования. Вып. 17. С. 246–250) допущены ошибки:

(1) утверждение о том, что для исчисления $GPCont(N)$ верна теорема об устранимости сечения,

(2) утверждение о том, что позитивный фрагмент логики $PCont(N)$ равен позитивному фрагменту интуиционистской пропозициональной логики,

(3) утверждение о том, что логика $PCont(N)$ не имеет конечной характеристической матрицы.

В исчислении $GPCont(N)$ сечение неустранимо, позитивный фрагмент логики $PCont(N)$ равен позитивному фрагменту классической (а не интуиционистской) пропозициональной логики. Логика $PCont(N)$ имеет конечную характеристическую матрицу, поскольку, как показал В.О. Шангин, $PCont(N)$ равна трехзначной логике, являющейся множеством всех теорем исчисления $PCont$, построенного в работе Л.И. Розоноэра «О выявлении противоречий в формальных теориях.1» (Автоматика и телемеханика. № 6, 1983).

О двух предполных классах трехзначной логики Лукасевича

Н. Н. Преловский

abstract. Two submaximal classes of 3-valued functionally complete iterative system are characterized in the paper. These two classes are functionally precomplete classes of the famous Łukasiewicz's logic.

Keywords: Łukasiewicz logic, functional class, submaximal class, iterative system

Данная работа посвящена анализу вопросов, связанных с критерием функциональной полноты замкнутых классов функций, соответствующих различным трехзначным логикам. Известный критерий функциональной полноты был сформулирован А.В. Кузнецовым и приводится в [11]. Необходимым условием для применения данного критерия является перечисление всех предполных классов, содержащихся в исследуемом классе. Поиск предполных классов систем функций, соответствующих различным трехзначным логикам, приобретает в связи с этим немаловажное значение в решении вопроса о функциональной полноте.

В работе С.В. Яблонского [12] содержится описание восемнадцати предполных классов трехзначной логики Поста P_3, что позволяет сформулировать необходимое и достаточное условие полноты в этой системе. М.Ф. Раца в [7] описал десять предполных классов трехзначной логики Гейтинга H_3 $S_0, \ldots, S_9$. В.К. Финн в [9] дал описание одиннадцати предполных классов трехзначной логики Бочвара B_3. Работы Раца и Финна также позволяют сформулировать необходимые и достаточные условия полноты замкнутого класса функций в H_3 и B_3.

Однако для трехзначной логики Лукасевича L_3, являющейся, как H_3 и B_3, функционально неполной (т. е. $L_3 \subset \mathrm{P}_3$ и $\mathrm{P}_3 \not\subset L_3$), аналогичные результаты отсутствуют. Из теоремы 2 в [7] следует, что H_3 предполна в L_3. Тем не менее, в известной литературе отсутствует описание предполных в L_3 классов функций, отличных от H_3. Ниже будут рассмотрены два других предполных класса трехзначной логики Лукасевича, а также приведены доказательства их предполноты.

1 Основные понятия

Сделаем предварительно несколько замечаний, касающихся используемой нотации, а также дадим определения основных понятий, встречающихся в настоящей работе.

В качестве переменных для аргументов функций используются латинские буквы x, y, z, возможно с индексами. Для обозначения значений переменных используются греческие буквы α, β и γ также возможно с индексами. Запись функций осуществляется с использованием известного понятия формулы логики высказываний [7]. Аргументы функций, как и сами функции, принимают значения из множества $\{1, 1/2, 0\}$. Значение $1/2$ будем называть промежуточным. В рассмотрении используются понятия операции суперпозиции, замыкания системы функций относительно операции суперпозиции, замкнутого класса, функционально полного и предполного классов, а также понятие базиса.

Дадим вначале определение операции суперпозиции.

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 1. Если имеется система функций

$$\{f_1(x_1, ..., x_n), ..., f_r(x_1, ..., x_n)\},$$

то суперпозицией функций данной системы называется либо функция, полученная из уже имеющихся функций путем замены переменных, либо, если установлено, что функции $f_j^i(x_{1_{ij}}, ..., x_{n_{ij}}), ..., f_m^k(x_{1_{km}}, ..., x_{n_{km}})$, а также функция $f_t^s(x_{j_{st}}, ..., x_{m_{st}})$ являются суперпозициями исходной системы, то и функция

$$f_t^s(f_j^i(x_{1_{ij}}, ..., x_{n_{ij}}), ..., f_m^k(x_{1_{km}}, ..., x_{n_{km}}))$$

также является суперпозицией функций данной системы.

Говоря неформально, речь идет о всевозможных подстановках вместо аргументов исходной системы функций. Буквы F и G

будем в дальнейшем использовать для обозначения произвольных систем и классов функций.

В [4], [11], [12] содержится определение замыкания и замкнутого класса функций.

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 2. Множество $[F]$ называется замыканием системы (класса) функций F, если оно содержит все суперпозиции функций над классом F и не содержит никаких других функций.

Оператор замыкания $[\dots]$ удовлетворяет следующим четырем условиям:

- $F \subseteq [F]$
- $[[F]] = [F]$
- $F \subseteq G \Rightarrow [F] \subseteq [G]$
- Множество функций F замкнуто, если $F = [F]$

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 3. Систему функций называем базисом данного класса функций, если она эквивалентна этому классу, но никакая ее собственная подсистема не эквивалентна ему. Система функций G, эквивалентная классу F, называется (функционально) полной в этом классе, т. е. G (функционально) полна в $F \Leftrightarrow_{def} [G] = F$

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 4. Система функций G, функционально полная в классе $F = P_k$, где P_k есть k-значная логика Поста, называется функционально полной (о логиках Поста см. [5, с. 88–91]).

Самым важным для дальнейшего рассмотрения является следующее понятие ***предполного в*** $\boldsymbol{F}$ ***класса***.

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 5. Если G и F — замкнутые классы функций и $G \subset F$, но $F \not\subset G$, то G называется предполным в F, если и только если замыкание объединения класса G и функции $f(x_1, \dots, x_n)$ такой, что $f(x_1, \dots, x_n) \in F$ и $f(x_1, \dots, x_n) \notin G$, совпадает с F, т. е. G предполон в $F \Leftrightarrow_{def} f(x_1, \dots, x_n) \in F \& f(x_1, \dots, x_n) \notin G \Rightarrow [G \cup f(x_1, \dots, x_n)] = F$, где $[G \cup f(x_1, \dots, x_n)]$ есть замыкание теоретико-множественного объединения.

ЗАМЕЧАНИЕ 1. Множество функций k-значной логики Поста P_k, где $k \in \{2, 3, \dots\}$, есть множество $\{f(x_1, \dots, x_n) : \{0, 1, \dots,$

$k - 1\}^n \longmapsto \{0, 1, \ldots, k - 1\}\}$, где $\{0, 1, \ldots, k - 1\}^n$ есть декартова n-ая степень множества $\{0, 1, \ldots, k - 1\}$. В частности, множество функций P_3 содержит все функции, аргументы которых, как и сами функции, принимают значения из множества $\{0,\ 1,\ 2\}$. В настоящей работе приняты иные обозначения для элементов множества значений функций и их аргументов: значение 0 остается без изменений; вместо значения 1 пишем $1/2$; вместо значения 2, используем 1.

ЗАМЕЧАНИЕ 2. С понятием предполноты непосредственно связано определяемое индуктивно понятие глубины.

ЗАМЕЧАНИЕ 3.

- Класс функций, соответствующий k-значной логике Поста P_k, имеет глубину $d(P_k)$, равную нулю;

- Если класс $F \subseteq P_k$ имеет глубину $d(F)$, равную n, и класс G предполон в F, то $d(G) = n + 1$.

В частности, любой предполный в P_k класс имеет глубину $d(F) = 1$.

2 Класс функций, соответствующий трехзначной логике Лукасевича

Самой известной и исторически первой неклассической многозначной логикой является трехзначная логика Лукасевича L_3. Дальнейшие результаты имеют отношение к данной логике, поэтому имеет смысл рассмотреть ее специально. В данном разделе будет также доказано утверждение о том, что множество функций логики Лукасевича является предполным в трехзначной логике Поста и совпадает с множеством функций, сохраняющих неравенство промежуточного значения в P_3, а именно: $L_3 = \{f(x_1, \ldots, x_n) \in P_3 : \forall \langle \alpha_1, \ldots, \alpha_n \rangle\, (\neg \exists i \in \{1, 2, \ldots, n\}(\alpha_i = 1/2) \Rightarrow f(\alpha_1, \ldots, \alpha_n) \neq 1/2)\}$. Множество функций логики Лукасевича может быть определено как замыкание системы функций $\{\neg_L x, \mathrm{x} \to y\}$, где $\neg_L x = 1 - \mathrm{x}$, а функция $\mathrm{x} \to y$, называемая импликацией Лукасевича, определятся таблично:

$\to$	1	1/2	0
1	1	1/2	0
1/2	1	1	1/2
0	1	1	1

Заметим, что существуют и другие системы функций, полные в L_3. В частности, в дальнейшем будут использоваться следующие полные в L_3 системы функций: $\{\neg_L x, \Box\mathrm{x}, x \vee y\}$, $\{\neg_L x, \Diamond\mathrm{x}, x \vee y\}$ и $\{\neg_L x, \nabla\mathrm{x}, x \vee y\}$, — где функция $\Box$x называется оператором необходимости, функция $\Diamond$x называется оператором возможности, а функция ∇x называется оператором случайности (см. [6, разд. 2.1.2]). Функция $x \vee y$ есть $\max(x, y)$. Дадим табличные определения операторов необходимости, возможности и случайности:

x	$\Box$x	$\Diamond$x	∇x
1	1	1	0
1/2	0	1	1
0	0	0	0

Очевидно, что все вышеприведенные функции удовлетворяют условию сохранения неравенства промежуточного значения, а операция суперпозиции сохраняет свойство удовлетворения данному условию. Покажем теперь, что добавление к полной в L_3 системе функций функции из P_3, не сохраняющей неравенства промежуточного значения, дает систему, полную в P_3.

Для этого используем утверждение, содержащееся в [5], а именно: добавление к функциям из L_3 функции T(x), принимающей значение 1/2 на всех значениях x, дает систему, полную в P_3. Функция T(x) называется оператором Слупецкого.

Рассмотрим функцию $f(x_1, \ldots, x_n) \in \mathrm{P}_3$, такую, что:

$$\exists \langle \alpha_1, \ldots, \alpha_n \rangle \, (\neg \exists i \in \{1, 2, \ldots, n\}(\alpha_i = 1/2) \& f(\alpha_1, \ldots, \alpha_n) = 1/2).$$

Поскольку L_3 содержит константы 1 и 0, может быть осуществлена подстановка соответствующих констант вместо переменных x_i $(1 \leq i \leq n)$ в $f(x_1, \ldots, x_n)$ в зависимости от того, чему равны соответствующие значения α_i в $\langle \alpha_1, \ldots, \alpha_n \rangle$. В результате получим функцию, тождественно равную промежуточному значению. Следовательно, $[L_3 \cup f(x_1, \ldots, x_n)] = \mathrm{P}_3$, что и требовалось доказать.

3 Класс K_3^D диагональных функций

Докажем теперь предполноту класса диагональных функций K_3^D в L_3. Для доказательства потребуется использовать функции сильной логики Клини K_3. Базовыми в K_3 являются функции $\{\neg_L x, x \vee y\}$, где, как и прежде, $x \vee y = \max(x, y)$, а $\neg_L x = 1 -$ x.

Класс K_3^D определяется следующим образом:

$K_3^D = \{f(x_1, \ldots, x_n) \in L_3 : \forall \langle \alpha_1, \ldots, \alpha_n \rangle, \langle \beta_1, \ldots, \beta_n \rangle$
$((\exists i \in \{1, 2, \ldots, n\}(\alpha_i = 1/2) \Rightarrow (f(\alpha_1, \ldots, \alpha_n) = 1 \Rightarrow$
$\forall \langle \alpha'_1, \ldots, \alpha'_n \rangle (f(\alpha'_1, \ldots, \alpha'_n) = 1))) \ \& \ (\exists j \in \{1, 2, \ldots, n\}(\beta_j = 1/2) \Rightarrow$
$(f(\beta_1, \ldots, \beta_n) = 0 \Rightarrow \forall \langle \beta'_1, \ldots, \beta'_n \rangle (f(\beta'_1, \ldots, \beta'_n) = 0))))\}$,
где $\langle \alpha'_1, \ldots, \alpha'_n \rangle$, $\langle \beta'_1, \ldots, \beta'_n \rangle$ есть результаты произвольных замен всех вхождений значения $1/2$ в $\langle \alpha_1, \ldots, \alpha_n \rangle$ и $\langle \beta_1, \ldots, \beta_n \rangle$, соответственно, на единицы и нули.

ЗАМЕЧАНИЕ 4. Предыдущее определение означает, что каждый из наборов значений $\langle \alpha_1, \ldots, \alpha_n \rangle$, $\langle \beta_1, \ldots, \beta_n \rangle$ порождает, возможно, пустой класс подстановок $\langle \alpha'_1, \ldots, \alpha'_n \rangle$, $\langle \beta'_1, \ldots, \beta'_n \rangle$ единиц и нулей в исходные наборы. Эти подстановки могут быть просто и естественно описаны при помощи введенного Ю.В. Ивлевым в [4] понятия квазифункции.

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 6. Под квазифункцией будем понимать соответсвие, в силу которого определенный объект из некоторого множества соотносится с некоторым объектом из определенного подмножества того же самого множества.

Дадим табличное определение одноместной квазифункции $\varphi(x)$:

x	$\varphi(x)$
1	1
1/2	1/0
0	0

Здесь запись $1/0$ означает, что значению $1/2$ ставится в соответствие 1 или 0. С использованием данной квазифункции определение класса K_3^D может быть записано в следующем виде:

$K_3^D = \{f(x_1, \ldots, x_n) \in L_3 : \forall \langle \alpha_1, \ldots, \alpha_n \rangle ((\exists i \in \{1, 2, \ldots, n\}$ $(\alpha_i = 1/2)) \Rightarrow ((f(\alpha_1, \ldots, \alpha_n) \in \{1, 0\}) \Rightarrow (f(\alpha_1, \ldots, \alpha_n) = f(\varphi(\alpha_1), \ldots, \varphi(\alpha_n)))))\}$.

ЗАМЕЧАНИЕ 5. Классу K_3^D принадлежат все функции сильной регулярной логики Клини K_3, а также константы 1 и 0, т. е. $[K_3 \cup \{1, 0\}] \subset \mathrm{K}_3^D$. Однако K_3^D не принадлежит ни одна из функций $\Box$x, $\Diamond$x, ∇x, а также импликация Лукасевича $x \to y$. Следовательно, класс диагональных функций не совпадает с классом функций логики Лукасевича. Данный класс содержит и функции, не являющиеся регулярными, по Клини. Примером такой функции является $\psi(x, y)$, определяемая следующей таблицей:

ψ	1	1/2	0
1	1	1/2	1
1/2	1/2	1	1/2
0	1	1/2	1

Докажем, что K_3^D является замкнутым. Для этого достаточно показать, что если функции $f(x_1, \ldots, x_s)$, $f_1(x_{11}, x_{21}, \ldots, x_{n1})$, $f_2(x_{12}, x_{22}, \ldots, x_{n2}), \ldots, f_s(x_{1s}, x_{2s}, \ldots, x_{ns})$ принадлежат K_3^D, то и функция $\Phi = f(f_1(x_{11}, x_{21}, \ldots, x_{n1}), f_2(x_{12}, x_{22}, \ldots, x_{n2}), \ldots, f_s(x_{1s}, x_{2s}, \ldots, x_{ns}))$ также принадлежит K_3^D. Поскольку функции $f(x_1, \ldots, x_s)$, $f_1(x_{11}, x_{21}, \ldots, x_{n1})$, $f_2(x_{12}, x_{22}, \ldots, x_{n2})$, $\ldots$, $f_s(x_{1s}, x_{2s}, \ldots, x_{ns})$ принадлежат L_3, то на всех наборах $\langle \alpha_{11}, \alpha_{21}, \ldots, \alpha_{n1}, \alpha_{12}, \alpha_{22}, \ldots, \alpha_{n2}, \ldots, \alpha_{1s}, \alpha_{2s}, \ldots, \alpha_{ns} \rangle$ и $\langle \beta_{11}, \beta_{21}, \ldots, \beta_{n1}, \beta_{12}, \beta_{22}, \ldots, \beta_{n2}, \ldots, \beta_{1s}, \beta_{2s}, \ldots, \beta_{ns} \rangle$ значений переменных x_{11}, $x_{21}, \ldots, x_{n1}, x_{12}, x_{22}, \ldots, x_{n2}, \ldots, x_{1s}, x_{2s}, \ldots, x_{ns}$, не содержащих вхождений промежуточного значения, функция Φ, очевидно, удовлетворяет определению K_3^D.

Если же в наборе значений переменных функции Φ имеются вхождения промежуточного значения, то Φ либо принимает промежуточное значение, либо значение Φ принадлежит множеству $\{1, 0\}$. В первом случае функция Φ удовлетворяет условиям определения класса K_3^D. Во втором случае данная функция также удовлетворяет условиям определения, поскольку для каждой из функций f_j $(1 \leq j \leq s)$ будет иметь место один из следующих случаев:

1. Если значение функции f_j на некотором наборе значений переменных равняется $1/2$, то на любых соответствующих поднаборах $\left\langle \alpha'_{1j}, \ldots, \alpha'_{nj} \right\rangle$ и $\left\langle \beta'_{1j}, \ldots, \beta'_{nj} \right\rangle$ значений переменных $x_{1j}, x_{2j}, \ldots, x_{nj}$ значение f_j принадлежит $\{1,\ 0\}$.

Однако поскольку $f(x_1, \ldots, x_s)$ принадлежит K_3^D, то и функция Φ не изменит в этом случае своего значения.

2. Если f_j принадлежит множеству $\{1,\ 0\}$, то так как $f_j \in \mathrm{K}_3^D$, значение данной функции не изменится на любых соответствующих поднаборах $\left\langle \alpha'_{1j}, \ldots, \alpha'_{nj} \right\rangle$ и $\left\langle \beta'_{1j}, \ldots, \beta'_{nj} \right\rangle$ значений переменных $x_{1j}, x_{2j}, \ldots, x_{nj}$, а следовательно, значение функции Φ не изменится и в этом случае.

Следовательно, функция Φ также принадлежит K_3^D, что и требовалось доказать.

ТЕОРЕМА 1. *Класс диагональных функций* K_3^D *является предполным в* L_3.

Доказательство. Добавим к функциям K_3^D функцию $f(x_1, \ldots, x_n) \in L_3$, такую что $f(x_1, \ldots, x_n) \notin \mathrm{K}_3^D$. Поскольку $f(x_1, \ldots, x_n) \notin \mathrm{K}_3^D$, возможны случаи:

1. Существует набор $\langle \alpha_1, \ldots, \alpha_n \rangle$ значений переменных $x_1, \ldots, x_n$ такой, что в $\langle \alpha_1, \ldots, \alpha_n \rangle$ имеются вхождения промежуточного значения и $f(\alpha_1, \ldots, \alpha_n) = 1$. А также существует набор $\langle \alpha'_1, \ldots, \alpha'_n \rangle$, в котором все вхождения промежуточного значения в $\langle \alpha_1, \ldots, \alpha_n \rangle$ заменены на единицы и нули, такой, что $f(\alpha'_1, \ldots, \alpha'_n) \neq 1$. Так как $f(x_1, \ldots, x_n)$ принадлежит множеству функций логики Лукасевича, то $f(\alpha'_1, \ldots, \alpha'_n) \neq 1/2$, поскольку в $\langle \alpha'_1, \ldots, \alpha'_n \rangle$ не имеется вхождений значения $1/2$. Следовательно, $f(\alpha'_1, \ldots, \alpha'_n) = 0$. Осуществим теперь подстановку соответствующих констант вместо всех α_i $(1 \leq i \leq n)$, принадлежащих множеству $\{1,\ 0\}$ в $\langle \alpha_1, \ldots, \alpha_n \rangle$, в функцию $f(x_1, \ldots, x_n)$. На место незатронутых предыдущей подстановкой переменных в $f(x_1, \ldots, x_n)$ подставим функции x и $\neg_L$x в зависимости от того, какие константы (1 или 0 соответственно) были подставлены в $\langle \alpha'_1, \ldots, \alpha'_n \rangle$ вместо каждого из вхождений значения $1/2$ в $\langle \alpha_1, \ldots, \alpha_n \rangle$. Такие подстановки могут быть осуществлены, поскольку K_3^D содержит функции 1, 0 и $\neg_L$x.

В результате получим функцию $f'(x)$, зависящую от одной переменной, такую, что $f'(1/2) = 1$ и $f'(1) \neq 1$ или $f'(0) \neq 1$. Следовательно, $f'(x)$ совпадает с одной из трех функций:

x	$f'_1(x)$
1	0
1/2	1
0	1

x	$f'_2(x)$
1	1
1/2	1
0	0

x	$f'_3(x)$
1	0
1/2	1
0	0

Функции f'_2(x) и f'_3(x) совпадают с операторами $\Diamond$x и ∇x, соответственно. Функция $\neg_L f'_1$(x) эквивалентна оператору $\Box$x. Так как класс K_3^D содержит функции $\neg_L$x и $x \vee y$, а системы $\{\neg_L$x, $\Box$x,
$x \vee y\}$, $\{\neg_L$x, $\Diamond$x, $x \vee y\}$ и $\{\neg_L$x, ∇x, $x \vee y\}$ являются полными в L_3 (см. [5, разд. 2.1.2]), то $[K_3^D \cup f(x_1, \ldots, x_n)] = L_3$.

Рассмотрение случая 1 завершено.

2. Существует набор $\langle\beta_1, \ldots, \beta_n\rangle$ значений переменных $x_1, \ldots,$ x_n такой, что в $\langle\beta_1, \ldots, \beta_n\rangle$ имеются вхождения промежуточного значения и $f(\beta_1, \ldots, \beta_n) = 0$. А также существует набор $\langle\beta'_1, \ldots, \beta'_n\rangle$, в котором все вхождения промежуточного значения в $\langle\beta_1, \ldots, \beta_n\rangle$ заменены на единицы и нули, такой, что $f(\beta'_1, \ldots,$ $\beta'_n) \neq 0$. Так как $f(x_1, \ldots, x_n)$ принадлежит множеству функций логики Лукасевича, то $f(\beta'_1, \ldots, \beta'_n) \neq 1/2$, поскольку в $\langle\beta'_1, \ldots, \beta'_n\rangle$ не имеется вхождений значения $1/2$. Следовательно, $f(\beta'_1, \ldots, \beta'_n) = 1$. Осуществим теперь подстановку соответствующих констант вместо всех β_j $(1 \leq j \leq n)$, принадлежащих множеству $\{1,\ 0\}$ в $\langle\beta_1, \ldots, \beta_n\rangle$, в функцию $f(x_1, \ldots, x_n)$. На место незатронутых предыдущей подстановкой переменных в $f(x_1, \ldots, x_n)$ подставим функции x и $\neg_L$x в зависимости от того, какие константы (1 или 0 соответственно) были подставлены в $\langle\beta'_1, \ldots, \beta'_n\rangle$ вместо каждого из вхождений значения $1/2$ в $\langle\beta_1, \ldots, \beta_n\rangle$. Такие подстановки могут быть осуществлены, поскольку K_3^D содержит функции 1, 0 и $\neg_L$x.

В результате получим функцию $f'(x)$, зависящую от одной переменной, такую, что $f'(1/2) = 0$ и $f'(1) \neq 0$ или $f'(0) \neq 0$. Следовательно, $f'(x)$ совпадает с одной из трех функций:

x	$f'_1(x)$
1	1
1/2	0
0	0

x	$f'_2(x)$
1	0
1/2	0
0	1

x	$f'_3(x)$
1	1
1/2	0
0	1

Функция f'_1(x) эквивалентна оператору $\Box$x. А функции $\neg_L f'_2$(x) и $\neg_L f_3'$(x) совпадают с операторами $\Diamond$x и ∇x соответственно. Так как класс K_3^D содержит функции $\neg_L$x и $x \vee y$, а системы $\{\neg_L \mathrm{x}, \Box \mathrm{x}, x \vee y\}$, $\{\neg_L \mathrm{x}, \Diamond \mathrm{x}, x \vee y\}$ и $\{\neg_L \mathrm{x}, \nabla \mathrm{x}, x \vee y\}$ являются полными в L_3 (см. [5, разд. 2.1.2]), то $[K_3^D \cup f(x_1, \ldots, x_n)] = L_3$.

Рассмотрение случая 2 завершено.

Доказательство теоремы завершено. Q.E.D.

Таким образом, установлено, что класс диагональных функций является предполным в классе функций трехзначной логики Лукасевича.

4 Класс H_3^*, двойственный трехзначной логике Гейтинга

В [7] было показано, что класс функций трехзначной логики Гейтинга H_3 является предполным в L_3. В этом разделе будет доказана теорема о том, что и класс H_3^*, двойственный H_3, также предполон в L_3. В доказательстве предполноты H_3 существенным образом используется тот факт, что множество функций данного класса совпадает с множеством функций, дистрибутивных относительно функции $\neg\neg$x, где $\neg x$ эквивалентно функции $\neg_L \Diamond x$ логики Лукасевича. А именно: $\mathrm{H}_3 = \{f(x_1, \ldots, x_n) \in L_3 : \neg\neg f(x_1, \ldots, x_n) = f(\neg\neg x_1, \ldots, \neg\neg x_n)\}$. Достаточно заметить, что $\neg\neg \mathrm{x} = \neg_L \Diamond \neg_L \Diamond x = \Box \Diamond x = \Diamond x$. Тогда приведенное определение можно заменить эквивалентным ему:

$$\mathrm{H}_3 = \{f(x_1, \ldots, x_n) \in L_3 : \Diamond f(x_1, \ldots, x_n) = f(\Diamond x_1, \ldots, \Diamond x_n)\}$$

Таким образом, ***двойственный к*** H_3 ***класс*** может быть определен следующим способом[1]:

$$\mathrm{H}_3^* = \{f(x_1, \ldots, x_n) \in L_3 : \Box f(x_1, \ldots, x_n) = f(\Box x_1, \ldots, \Box x_n)\}$$

Докажем, что класс H_3^* является замкнутым. Для этого достаточно показать, что если функции $f(x_1, \ldots, x_s)$, $f_1(x_{11}, x_{21}, \ldots, x_{n1})$, $f_2(x_{12}, x_{22}, \ldots, x_{n2})$, $\ldots$, $f_s(x_{1s}, x_{2s}, \ldots, x_{ns})$ принадлежат H_3^*, то и функция $\Phi = f(f_1(x_{11}, x_{21}, \ldots, x_{n1}), f_2(x_{12}, x_{22}, \ldots, x_{n2}), \ldots, f_s(x_{1s}, x_{2s}, \ldots, x_{ns}))$ также принадлежит H_3^*.

[1]Заметим, что класс H_3^*, по всей видимости, совпадает с классом функций логики G_3^*, впервые рассмотренной А. С. Карпенко в [5] под названием трехзначной логики Брауэра.

Так как функция $f(x_1, \ldots, x_s)$ принадлежит H_3^*, то $\Box\Phi = f(\Box f_1(x_{11}, x_{21}, \ldots, x_{n1}),\ \Box f_2(x_{12}, x_{22}, \ldots, x_{n2}), \ldots,\ \Box f_s(x_{1s}, x_{2s}, \ldots, x_{ns}))$. Поскольку каждая из функций f_j $(1 \le j \le s)$ принадлежит H_3^*, то для них выполняются равенства $\Box f_j(x_{1j}, x_{2j}, \ldots, x_{nj}) = f_j(\Box x_{1j}, \Box x_{2j}, \ldots, \Box x_{nj})$. Следовательно, $\Box\Phi = f(f_1(\Box x_{11}, \Box x_{21}, \ldots, \Box x_{n1}), f_2(\Box x_{12}, \Box x_{22}, \ldots, \Box x_{n2}), \ldots, f_s(\Box x_{1s}, \Box x_{2s}, \ldots, \Box x_{ns}))$.

Значит, функция Φ также принадлежит H_3^*, что и требовалось доказать.

Для доказательства предполноты H_3^* потребуется использовать функции трехзначной логики Брауэра G_3^*. Исходными в логике Брауэра являются функции $\{\neg_{G_3^*}x, x\&y, x \vee y, x \Leftarrow y\}$, где $x\&y = \min(x, y)$, $x \vee y = \max(x, y)$, а функции $\neg_{G_3^*}x$ и $x \Leftarrow y$ определяются следующими таблицами:

x	$\neg_{G_3^*}x$
1	0
1/2	1
0	1

$\Leftarrow$	1	1/2	0
1	0	0	0
1/2	1	0	0
0	1	1/2	0

H_3^* содержит функцию $\Box$x, в силу очевидного равенства $\Box\Box$x $=$ $\Box\Box$x. Покажем, что все исходные функции G_3^* принадлежат H_3^*, то есть $G_3^* \subset \text{H}_3^*$. Для этого построим истинностные таблицы для каждой из функций, входящих в следующие пары:

1. $\Box\neg_{G_3^*}x$, $\neg_{G_3^*}\Box x$;
2. $\Box(x\&y)$, $\Box x\&\Box y$;
3. $\Box(x \vee y)$, $\Box x \vee \Box y$;
4. $\Box(x \Leftarrow y)$, $\Box x \Leftarrow \Box y$

Приведем здесь в качестве примера таблицы всех пар функций.

1.

$\Box$	$\neg_{G_3^*}$	x
0	0	1
1	1	1/2
1	1	0

$\neg_{G_3^*}$	$\Box$	x
0	1	1
1	0	1/2
1	0	0

2.

$\Box$	$(x$	$\&$	$y)$
1	1	1	1
0	1	1/2	1/2
0	1	0	0
0	1/2	1/2	1
0	1/2	1/2	1/2
0	1/2	0	0
0	0	0	1
0	0	0	1/2
0	0	0	0

$\Box$	x	$\&$	$\Box$	y
1	1	1	1	1
1	1	0	0	1/2
1	1	0	0	0
0	1/2	0	1	1
0	1/2	0	0	1/2
0	1/2	0	0	0
0	0	0	1	1
0	0	0	0	1/2
0	0	0	0	0

3.

$\Box$	$(x$	$\vee$	$y)$
1	1	1	1
1	1	1	1/2
1	1	1	0
1	1/2	1	1
0	1/2	1/2	1/2
0	1/2	1/2	0
1	0	1	1
0	0	1/2	1/2
0	0	0	0

$\Box$	x	$\vee$	$\Box$	y
1	1	1	1	1
1	1	1	0	1/2
1	1	1	0	0
0	1/2	1	1	1
0	1/2	0	0	1/2
0	1/2	0	0	0
0	0	1	1	1
0	0	0	0	1/2
0	0	0	0	0

4.

$\Box$	$(x$	$\Leftarrow$	$y)$
0	1	0	1
0	1	0	1/2
0	1	0	0
1	1/2	1	1
0	1/2	0	1/2
0	1/2	0	0
1	0	1	1
0	0	1/2	1/2
0	0	0	0

$\Box$	x	$\Leftarrow$	$\Box$	y
1	1	0	1	1
1	1	0	0	1/2
1	1	0	0	0
0	1/2	1	1	1
0	1/2	0	0	1/2
0	1/2	0	0	0
0	0	1	1	1
0	0	0	0	1/2
0	0	0	0	0

Перейдем теперь к доказательству основной теоремы этого раздела.

ТЕОРЕМА 2. *Класс* H_3^* *является предполным в* L_3.

Доказательство. Рассмотрим функцию $f(x_1, \ldots, x_n) \in L_3$ такую, что $f(x_1, \ldots, x_n) \notin \text{Н}_3^*$. Заметим, что Н_3^* содержит функции $\{\Box x, x \vee y\}$. Следовательно, для доказательства утверждения теоремы достаточно показать, что $\neg_L x \in [\text{Н}_3^* \cup f(x_1, \ldots, x_n)]$, так как система функций $\{\neg_L x, \Box x, x \vee y\}$ является полной в L_3. Поскольку $f(x_1, \ldots, x_n) \notin \text{Н}_3^*$, то существует набор $\langle \alpha_1, \ldots, \alpha_n \rangle$ значений переменных $x_1, \ldots, x_n$, такой, что $\Box f(\alpha_1, \ldots, \alpha_n) \neq f(\Box \alpha_1, \ldots, \Box \alpha_n)$. Так как $\Box 1 = 1$ и $\Box 0 = 0$, и $f(x_1, \ldots, x_n) \in L_3$, то в $\langle \alpha_1, \ldots, \alpha_n \rangle$ имеются вхождения промежуточного значения. Осуществим подстановку переменной x, вместо всех вхождений промежуточного значения в $f(\alpha_1, \ldots, \alpha_n)$. На место переменных, не затронутых предыдущей подстановкой в $f(x_1, \ldots, x_n)$, подставим константы 1 или 0 в зависимости от того, чему равны соответствующие $\alpha_j \in \{1, 0\}$ $(1 \leq j \leq n)$ в $\langle \alpha_1, \ldots, \alpha_n \rangle$. Такие подстановки могут быть осуществлены, поскольку константы 1 и 0 принадлежат классу Н_3^*. В результате получим функцию $f'(x)$, зависящую от одной переменной, такую, что: а) $f'(1/2) = f(\alpha_1, \ldots, \alpha_n)$; и б) $f'(0) = f(\Box \alpha_1, \ldots, \Box \alpha_n)$ (так как $\Box 1/2 = 0$, а $\Box 1 = 1$ и $\Box 0 = 0$). Поскольку функция $\Box$x удовлетворяет условию $\forall x, y (x = y \Rightarrow \Box x = \Box y)$, то из а) следует, что $\Box f'(1/2) = \Box f(\alpha_1, \ldots, \alpha_n)$. Таким образом, получаем $\Box f'(1/2) = \Box f(\alpha_1, \ldots, \alpha_n) \neq f(\Box \alpha_1, \ldots, \Box \alpha_n) = f'(0)$, и отсюда $\Box f'(1/2) \neq f'(0)$. Следовательно, $f'(x)$ совпадает с одной из шести функций $f_1'(x), \ldots, f_6'(x)$:

x	$f_1'(x)$	$f_2'(x)$	$f_3'(x)$	$f_4'(x)$	$f_5'(x)$	$f_6'(x)$
1	1	0	0	1	1	0
1/2	1/2	1/2	1	1	0	0
0	1	1	0	0	1	1

Покажем теперь, что функция $\neg_L x$ может быть получена с использованием каждой из функций $f_1'(x), \ldots, f_6'(x)$ и, быть может, других функций из Н_3^*. А именно покажем, что $\neg_L x = \Box x \Leftarrow f_1'(x) = f_2'(x) = \Box x \Leftarrow (\neg_{G_3^*} f_3'(x) \vee x) = \Box x \Leftarrow (\neg_{G_3^*} f_4'(x) \vee x) = \Box x \Leftarrow (f_5'(x) \vee x) = \Box x \Leftarrow (f_6'(x) \vee x)$. Приведем таблицы полученных функций:

$\Box$	x	$\Leftarrow$	f_1'	(x)
1	1	0	1	1
0	1/2	1/2	1/2	1/2
0	0	1	1	0

$\Box$	x	$\Leftarrow$	$(\neg_{G_3^*}$	f'_3	(x)	$\vee$	$x)$
1	1	0	1	0	1	1	1
0	1/2	1/2	0	1	1/2	1/2	1/2
0	0	1	1	0	0	1	0

$\Box$	x	$\Leftarrow$	$(\neg_{G_3^*}$	f'_4	(x)	$\vee$	$x)$
1	1	0	0	1	1	1	1
0	1/2	1/2	0	1	1/2	1/2	1/2
0	0	1	1	0	0	1	0

$\Box$	x	$\Leftarrow$	$(f'_5$	(x)	$\vee$	$x)$
1	1	0	1	1	1	1
0	1/2	1/2	0	1/2	1/2	1/2
0	0	1	1	0	1	0

$\Box$	x	$\Leftarrow$	$(f'_6$	(x)	$\vee$	$x)$
1	1	0	0	1	1	1
0	1/2	1/2	0	1/2	1/2	1/2
0	0	1	1	0	1	0

Таким образом, теорема о предполноте класса H_3^*, двойственного трехзначной логике Гейтинга, в L_3 доказана. Q.E.D.

Литература

[1] *Гаврилов Г. П.* О мощности множеств замкнутых классов конечной высоты в PA0 // ДАН. 1964. Т. 158. № 3. С. 503–506.

[2] *Гаврилов Г. П., Яблонский С. В.* Функции алгебры логики и классы Поста. М.: Наука, 1966.

[3] *Захарова Е. Ю., Кудрявцев В. Б., Яблонский С. В.* О предполных классах в k-значных логиках // ДАН. 1969. Т. 186. № 3. С. 509–512.

[4] *Ивлев Ю. В.* Модальная логика. М.: Изд-во Моск. ун-та, 1991.

[5] *Карпенко А. С.,* Логики Лукасевича и простые числа, М.: URSS, 2007.

[6] *Карпенко А. С.* Многозначные логики / Сер. Логика и компьютер. М.: Наука, 1997.

[7] *Раца М. Ф.* О классе функций трехзначной логики, соответствующем первой матрице Яськовского. Кишинев. С. 185–213.

[8] *Раца М. Ф.* О классе функций логики, соответствующей первой матрице Яськовского // Исследования по общей алгебре. Кишинев. 1965. С. 99–110.

[9] *Финн В. К.* О критерии функциональной полноты в В3 // Исследования по формализованным языкам и неклассическим логикам. М.: Наука, 1974. С. 194–199.

[10] *Яблонский С. В.* О функциональной полноте в трехзначном исчислении // ДАН. 1954. Т. 95. № 6. С. 1153–1155.

[11] *Яблонский С. В.* Введение в дискретную математику. М.: Наука, 1986.

[12] *Яблонский С. В.* Функциональные построения в k-значной логике // Труды математического института имени В. А. Стеклова. 1958. Т. 51. С. 5–142.

Отношение логического следования в трактатах Северина Боэция[1]

Л. Г. Тоноян

ABSTRACT. Definition of logic following in the doctrine of Boethius is considered in this article. The author investigates not available in Russian language treatises of Boethius «De hypotheticis syllogismis», «In Ciceronis Topica» etc. Following problems are solved in research: a parity of sillogistics of Aristotle and stoics, a parity of categorical and conditional judgements, definition of logic following at Boethius, the reason of occurrence of «wrong moduses» in the doctrine of Boethius.

Keywords: logical doctrine of Boetsius's, relation of logic, hypothetical syllogisms, «wrong moduses» of hypothetical syllogisms

Боэций (480–525) — одна из ключевых фигур в истории логики. Конгениальный переводчик на латынь «Органона» Аристотеля, он сумел передать логику античного греческого мира средневековому латинскому Западу, где стал считаться вторым после Аристотеля авторитетом в логике. Но в Новое время Боэцию стали отводить лишь роль комментатора трактатов Аристотеля. Однако в его логических трактатах мы встречаем положения, не имеющие соответствия в трактатах Аристотеля. Так, например, при рассмотрении гипотетических силлогизмов у Боэция мы сталкиваемся с «неправильными» модусами, т.е. с модусами, в которых, с нашей точки зрения, нарушено правило логического следования. В статье мы постараемся дать ответ на вопрос, как Боэций понимал отношение логического следования, и попробуем объяснить причину возникновения «неправильных» модусов, а также некоторых других нововведений Боэция.

[1]Исследование поддержано РГНФ, грант №11-03-00170а.

1 Античные концепции логического следования

Одной из главных задач логики является универсальное определение логического следования, а одной из проблем истории логики остается вопрос о соотношении силлогистики Аристотеля и логической системы стоиков. Ведь именно стоикам ставят в заслугу открытие логики высказываний и соответствующую ей формулировку логического следования. Но так было не всегда. Формирование математической логики, вновь возникший интерес к логическому учению стоиков, проявленный в начале XX века, в корне изменили традиционные представления и привели к новым попыткам реконструкции стоического учения. В результате этих исследований возобладало мнение о принципиальном различии логических учений стоиков и перипатетиков. Так, считается, что в основе аристотелевской силлогистики лежит связь терминов, а в основе стоической логики — связь предложений. Прояснению этого вопроса, а также и некоторых других поможет, по всей видимости, обращение к логическим трактатам Боэция, содержание которых еще не нашло подробного анализа в наших историко-логических исследованиях. Трактаты написаны римским логиком 6 в. н.э., хорошо знакомым, как с силлогистикой Аристотеля, так и с не дошедшими до нас работами стоиков и перипатетиков.

Какие источники позволяют говорить о логике стоиков как самостоятельной системе? Несмотря на то что логика составляет одну из трех основных частей философии стоиков, фрагментов этой части учения насчитывается менее всего. Сочинения основателей Стои (Зенон, Хризипп) были утрачены, а поздние стоики логикой специально не занимались. В качестве источников используются фрагменты из произведений Секста Эмпирика, Диогена Лаэртского, ссылки Цицерона, Галена и некоторых других античных ученых. Собственно как о логике говорится только лишь о Хризиппе, при этом считается, что он детально разработал логическое учение Стои. Что же тогда было сделано Хризиппом в области формальной логики (а не гносеологии) по сравнению с Аристотелем? Прежде всего, отметим, что ни один из исследователей не отрицает влияния на стоиков аристотелевской силлогистики и модальной логики мегариков (Диодора Кроноса и Филона).

Изложим вкратце то, что известно о логике Хризиппа из текстов Секста Эмпирика и Диогена Лаэртского. Если силлогистика Аристотеля построена на родовидовых отношениях между терминами, то стоиков интересует причинная, условная связь между телесными сущностями и явлениями, поэтому в основу рассуждений они кладут не категорические (А есть В), а условные предложения (*если первое, то второе*). Условные высказывания составляют у стоиков один из трех видов сложных высказываний. Двумя другими Хризипп считает конъюнкцию: *первое и второе*, и дизъюнкцию: *первое либо второе.* Истинность сложных высказываний может быть установлена либо эмпирически — через проверку истинности каждого простого высказывания, либо логически — путем формальной совместимости простых высказываний [1, с. 172]. Наибольший интерес представляет собой формальная (аналитическая) истинность условных высказываний: истинный вывод в них аналитически следует из истинной посылки. Такое высказывание стоики называли «знаком» (греч. сэмейон) [1, с. 197, 203]. Поскольку человеку свойственна последовательность мыслей, то знак состоит для него в следующем: «если это, то это». Только «знаки», согласно стоикам, способны выражать причинную связь. Поскольку исследование именно причинной связи ставится в заслугу стоикам, мы более подробно осветим трактовку ими условной связи. Другие виды связи — конъюнкция и дизъюнкция — выводятся из условного высказывания и разъясняют его. Так, при рассмотрении конъюнкции Хризипп выделяет отрицание конъюнкции, и указывает, что предложение «не вместе первое и не-второе» тождественно предложению «если первое, то второе». Дизъюнкция «или первое, или второе» понимается только в смысле строгого, контрадикторного разделения, и истинна только когда одно из простых суждений истинно. В форме «либо не первое, либо второе» дизъюнкция тождественна условному предложению «если первое, то второе». Иначе говоря, сводимость конъюнкции и дизъюнкции к импликации позволяет считать их видами одного гипотетического высказывания, в котором из наличия или отсутствия первого можно сделать вывод о наличии или отсутствии второго. Таким образом, возникает гипотетический силлогизм, который стоики считали главным инструментом познания. Основой логической системы стоиков считают выделенные Хризиппом пять не нуждающихся в доказательстве видов гипотетического силлогизма. Они неоднократно встречаются в источниках, например, во «Введении в логику» Галена [2], у Секста Эмпирика [1, т. 1, с. 193–194, т. 2, с. 292–293] и др.

1. Если первое, то второе; первое, следовательно, второе.

2. Если первое, то второе; не второе, следовательно, не первое.

3. Не вместе первое и второе; первое, следовательно, не второе.

4. Либо первое, либо второе; первое, следовательно, не второе.

5. Либо первое, либо второе; не второе, следовательно, первое.

Теперь обратимся к исследованиям, проведенным в XX веке. Проблеме логического следования в учении стоиков посвящена статья немецкого исследователя Юргена Мау «Стоическая логика. Ее место по отношению к аристотелевской силлогистике и современному исчислению высказываний» [3]. Ю. Мау, проведя обзор основных исследовательских работ XX века по логике стоиков (Поленца, Мейтса, Лукасевича, Бохеньского и др.), указывает, что в результате этих исследований закрепилась точка зрения, согласно которой принципиальное значение имеет тот факт, что Аристотель строил свою систему на связи терминов, а Хризипп исследовал связь между целыми высказываниями. И при этом Бохеньский полагает, что логические исследования проходили в рамках одной школы, считая, что в дошедших до нас источниках под «старшими» перипатетиками подразумеваются Теофраст и Эвдем, а под «младшими» — стоики с Хризиппом во главе. Форма категорического суждения *A есть B* у Теофраста эквивалентна форме импликации *если первое, то второе* у Хризиппа.

Ю. Мау указывает, что Аристотель использует в силлогистике метод сведения к абсурду, который является специальным видом гипотетического доказательства. В «Первой Аналитике» [4] Аристотель пишет, что доказательства такого вида он хотел бы изложить систематически в другом месте. Александр Афродизийский в комментарии к данному отрывку добавляет, что Теофраст взял на себя выполнение этой намеченной учителем задачи и установил систему гипотетических выводов, которая в своем ядре уже содержала упомянутые аксиомы Хризиппа. Таким образом, стоическая логика выросла из логических исследований как мегариков, так и перипатетиков. Вплоть до второй половины I в. н.э. не могло идти даже речи о противоположности между аристотелевской и стоической логикой. Судя по всем источникам, это было одно направление ученых, считает Ю.Мау. Положение изменилось после опубликования Андроником Родосским в 30-х гг. I в. сочинений Аристотеля, когда стали широко использоваться для обучения логике логические методы, разработанные самим Аристотелем. Из греческих источников особый интерес, по мнению Ю.Мау, представляет сочинение эпикурейца Филодема («О знаках и заключениях на основании знаков»). Папирус с этим сочинением случайно сохранился в пепле извергшегося в 79 г. н.э. Везувия. Здесь излагается спор между самим эпикурейцем Филодемом и стоиком Дионисием Киренским о том, как понимать условную, или причинную связь. Речь идет о том, может ли и как должно доказываться что-либо с помощью знака. Сэмейон, по разъяснению Секста Эмпирика, — знак, а также признак, доказательство — истинный первый член законного условного предложения, который доказывает (выводит) неочевидный второй член в качестве истинного. Стоик утверждает в сочинении Филодема, что такое условное предложение только тогда имеет доказательную силу, когда связь устанавливается перепроверкой с помощью контрапозиции. Отметим, что таким же образом определяется отношение логического следования и в современных учебниках[2].

[2] «Чтобы установить, является ли рассуждение последовательным, необходимо прочитать его по схеме: “Если А, то В, тогда всегда, если не-В, то не-А”. Эта схема имеет следующий чисто логический смысл: “Если из А логически следует В, то из не-В логически следует не-А”... Если отношение логического следования отсутствует при “обратном прочтении”, то оно не имеет места и в исходном рассуждении. Данное правило получило в логике название “*правила контрапозиции*” и является эффективным средством проверки последовательности рассуждений, состоящих из простых или элементарных высказываний... Применяя правило контрапозиции, мы

То есть, как мы видим, стоик предлагает эпикурейцу аналитическую, а не фактическую проверку истинности условного суждения. Предложение «если есть движение, то есть вакуум» только тогда обоснованно, указывает стоик, когда истинна контрапозиция «если нет вакуума, то нет движения». Так называемая аналогия, т.е. частое наблюдение взаимосвязи и отсутствие очевидно подтвержденной противоположности (на чем настаивали эпикурейцы), не достаточна для установления истинности такой импликации. Эпикуреец, который в этом сочинении, не в пример другим эпикурейцам, не только не выражает антипатии к логике, но и разбирается в ней не хуже стоика, возражает на это, что контрапозиция может быть хорошим критерием, но, однако, не единственным. Напротив, истинность такой импликации основана на том, что «невозможно первому члену импликации быть истинным, в то время как второй не истинен». Эпикуреец в этом рассуждении использует определение стоиков, а именно знаменитую таблицу значений Филона, что указывает на то, что спор вокруг импликации существовал не внутри стоической школы, а давно уже вышел за ее пределы. Как же стоическая логика, точнее, александрийская школа диалектики, уточняла понятие импликации?

С точки зрения современной математической логики ценность стоической логики состоит в том, что используемое этой эллинистической школой диалектики определение условной связи точно соответствует тому, что называется материальной импликацией [1, т. 1, с. 172–173]. Но это не единственное стоическое определение импликации, к тому же оно, как известно, идет не от стоиков, а от мегарика Филона, при этом представляет собой лишь одно из часто используемых определений. Секст Эмпирик приводит и другие, предлагает решить вопрос об обязательном определении и при этом не ограничивается учением стоиков. Речь идет больше о мегарике Диодоре Кроносе, учение которого унаследовали стоики. «Филон говорит, что правильная связь —

одновременно определяем, связаны ли посылки и заключение по смыслу и существует ли между ними отношение логического следования. Если мы получаем одновременное выполнение обоих условий, это означает, что рассматриваемое рассуждение является последовательным. Если не выполняется хотя бы одно из условий (связь по смыслу или наличие логического следования), то такое рассуждение будет непоследовательным» [5].

та, которая не начинается от истинного, чтобы кончиться ложным, как, например, выражение “если существует день, то я разговариваю”, при условии, что будет день и я буду разговаривать; Диодор же считает правильным то, что не могло и не может, начавшись от истинного, кончаться ложным. По его мнению, только что высказанная связь кажется ложной, так как, если существует день, но я замолчал, она началась истинным и кончилась ложным; а следующая связь истинна: “если нет неделимых основных частиц бытия, то существуют неделимые основные частицы бытия”, так как, начинаясь от ложного, она будет заканчиваться, по его мнению, истинным. Те же, которые вводят сочетание, считают связь правильной, когда противоположное ее заключение противоречит ее предыдущему. По их мнению, все высказанные связи будут ошибочными, а истинна следующая: “если существует день, то существует день”. Судящие же по выразительности говорят, что такая связь правильна, в которой конец, по значению, содержится в предыдущем. По их мнению, “если существует день, то существует день” и всякая удвоенная связь, по всей видимости, будет ложной, так как невозможно, чтобы что-нибудь содержалось в самом себе». [1, т. 2, с. 282]. Из этого отрывка мы можем выделить, по крайней мере, три определения импликации. Определение импликации как состоящей из тождественных высказываний, по мнению Мау, либо вообще не стоическое, либо принадлежит какой-то малой группе стоиков, поскольку согласно всем другим источникам импликация из двух тождественных высказываний допустима. Возможно, этой точки зрения придерживались академики-скептики направления Карнеада. В сочинении же Филодема стоик говорит: «Недопустим “знак” такой формы: так как люди среди нас смертны, то люди везде смертны. Напротив, допустимо следующее: так как люди среди нас — поскольку они люди — смертны, то люди везде смертны». Эта последняя импликация есть «знак» и соответствует вышеприведенному определению, так как благодаря добавлению «поскольку они есть люди» второй член сложного суждения логически содержится в первом.

Ю. Мау считает, что сочинение Филодема убедительно показывает, что оба противника прошли одну и ту же логическую школу — александрийскую школу диалектики. Определение импликации, которое использовали стоики, не было специфически стоическим, а широко обсуждалось среди других школ. Так, в данном сочинении Филодем защищает эпикурейскую точку зрения наличия пустоты при наличии движения методом аналогии. Эпикуреец говорит, что его способ доказательства по аналогии идентичен в основе стоическому способу контрапозиции, который соответствует третьему определению условной связи. Эпикурейцы основывали свои научные положения на отсутствии положений, противоречащих очевидному. Эпикуреец указывает, что для «знака» недостаточно того, чтобы оба факта в наблюдении вместе повторялись, но необходимо, чтобы присоединялся постоянно факт отсутствия того, что противоречит очевидному. А это, собственно, и предполагает метод контрапозиции. Например, если день, то светло. Противоречащим очевидному мыслилось бы положение, при котором наступил бы день, а светло не стало бы. Только такой случай исключается первым определением импликации. Из этого примера видно, что эпикурейский метод не противоречит стоическому. Их позиции различны, но средства по существу сходны, причем средства именно логические, а не эпистемические. Здесь вновь возникает все тот же вопрос: почему в споре отсутствуют указания на аристотелевскую силлогистику? Обычно это объясняют тем, что метафизические воззрения стоиков противоречили аристотелевским. Но это объяснение не является удовлетворительным, так как уже Теофраст и Эвдем при развитии аристотелевской логики разрабатывали обсуждаемые здесь гипотетические выводы. Причина заключается, возможно, в следующем. Построенная на родовидовых связях аристотелевская силлогистика предназначалась в основном для решения задач естествознания — задач определения и классификации, как это представлено в «Истории животных» Аристотеля. Напротив, расцветшая в александрийское время математика и строго систематизированная этика стоиков нуждались в несколько иных логических средствах, не рассмотренных подробно Аристотелем. По мнению Ю. Мау, логика высказываний была выработана в основном стоиками, потому что именно эта философская школа нуждалась в таком средстве позитивного доказательства. Однако было ли такое средство принципиально новым? Современная логика показала, что система

Аристотеля и система стоиков не исключают друг друга. Категорическое высказывание в логике предикатов выражается через импликацию. На возможность перевода категорического высказывания в условное указал Гален во «Введении в логику» и на этом основании объединил аристотелевскую и стоическую системы. Во всяком случае, мы видим, что уже в трудах Аристотеля и его учеников была заложена та мощная логическая система, которая предвосхитила позднейшие открытия. Завершая статью, Ю. Мау делает следующие выводы: 1) в античности имелась одна логическая школа, общая для представителей всех философских школ; 2) уже в то время были заложены основания логики, применяющей исчисления; 3) эти положения для исчислений возникли не вне чистой логики, а составляли с ней единство, так же как тогдашние естественные науки не могли быть отделены от натурфилософии.

В заключение своей статьи Ю. Мау выражает сожаление, что не смог проследить продолжение этой традиции в раннем средневековье, прежде всего у Боэция и Марциана Капеллы. Этот труд мы взяли в данной статье по мере сил на себя, привлекая для анализа, прежде всего, трактат Боэция «О гипотетических силлогизмах» [6].

2 Отношение логического следования в трактате Боэция «О гипотетических силлогизмах»

В трактате Боэция сразу обращает на себя внимание тот факт, что исследование о гипотетических силлогизмах опирается не на работы стоиков, а лишь на труды Аристотеля и его учеников Теофраста и Эвдема, имена которых вместе с однократным упоминанием Цицерона только и встречаются в трактате. Мы знаем, что Аристотель начал исследовать виды сложных суждений [7][3], но, видимо, не успел закончить. Эту работу, как уже было сказано, проделали его ученики Теофраст и Эвдем, которым и принадлежит разработка схем гипотетических силлогизмов, часть из которых стоики выбрали в качестве «простых недоказываемых аргументов». Однако эта работа учеников Аристоте-

[3]Об условных суждениях см. «Топика» II , 5, 112 a 16–23, об исключающей дизъюнкции — «Топика» II, 6, 112 a 24–31, а также другие рассуждения в «Первой Аналитике».

ля в оригинале не сохранилась. Мы предполагаем, что данный трактат Боэция в большей степени является переложением идей, а возможно, и самого трактата Теофраста и/или Эвдема.

Согласно Боэцию, всякий силлогизм состоит из предложений, которые могут быть либо категорическими (простыми): *человек есть животное*, либо гипотетическими, условными: *если есть день, то есть свет.*

Гипотетические предложения состоят из категорических. В речи два предложения *человек есть животное*, и *если есть человек, то есть животное* почти не различаются, но различие между ними все же есть. Во-первых, первое высказывание — простое, второе — сложное. Во-вторых, в первом субъект принимает имя предиката (*человек* принимает имя *животное*), во втором виде предложений выдвигается некоторое условие, например, *если родила, то имела соитие с мужем.* Здесь не говорится, указывает Боэций, что *родить* есть то же, что *иметь соитие с мужем*, а лишь указывается, что родов не было бы, если бы не было соития с мужем. Значит, термины могут и не принимать имена друг друга. Боэций хочет показать, что форма одного предложения легко преобразуется в форму другого, но это не означает их полного совпадения. Если первое предложение в силлогизме — гипотетическое, то он называется гипотетическим. Но так как всякое гипотетическое предложение состоит из категорических, то гипотетический силлогизм также можно отнести к числу категорических. Таким образом, силлогизм, в том числе гипотетический, представляет собой и связь предложений, и, поскольку всякое предложение состоит из терминов, также и связь терминов. Это важное замечание Боэция, говорящее о том, что принципиального различия между связью предложений и связью терминов нет, и поэтому гипотетические силлогизмы можно свести к категорическим. Гипотетическое предложение, состоящее из простых — либо утвердительных, либо отрицательных, предполагает 4 сочетания: Утвердительные высказывания: 1) *если a, то b*, 2) *если не-a, то b.* Отрицательные высказывания: 3) *если a, то не-b*, 4) *если не-a, то не-b.*

По обычаю «младших» перипатетиков, т.е. стоиков, такие сочетания записываются так: *если 1-ое, то 2-ое*, и т.д. Следование, по Боэцию, это связь терминов, которую он понимает не только в смысле материальной импликации, но в смысле связи особого рода терминов. Связь следования одного термина из другого носит двоякий характер: либо они связаны привходящим образом, к примеру, *если огонь жаркий, то небо круглое*, либо последовательность заключена в самой природе. Во втором случае имеются два варианта: 1) связь терминов выражает не причинную связь, а только родовидовую (*если человек, то животное*). Здесь вид выступает основанием, а род — следствием, хотя на самом деле причина и начало вида есть род; 2) связь терминов, следование носит необходимый причинный характер, к примеру, *если Земля заслоняет Луну, то происходит лунное затмение*. Далее Боэций рассматривает следование с точки зрения модальной силлогистики, используя определение необходимого и невозможного, данные Аристотелем. Он приходит к выводу, что необходимым следование будет только: 1) если есть первое, то необходимо есть второе, и 2) если второго нет, то необходимо, чтобы не было первого. Связь терминов в гипотетическом силлогизме, таким образом, приобретает не условный, а необходимый характер, а гипотетические силлогизмы становятся не диалектическими, а аподиктическими. Заметим, что в трактате Боэция определение логического следования разъясняется через контрапозицию терминов.

Из дальнейшего анализа Боэция мы видим, что определение логического следования через контрапозицию он относит к Аристотелю. Оно неоднократно и в явной форме дано Аристотелем в так называемом доказательстве через невозможное (impossibilitas).

Следование *если есть a, то есть b* имеет место, когда, признав *a*, необходимо признать *b*. То, что *a* необходимо влечет *b*, доказывается через невозможное: *если будет a, необходимо быть b, поэтому, если не будет b, не будет и a. Предположим, что b нет, но при этом есть, если такое возможно, a. Но сказано, что если есть a, необходимо признать b. Следовательно, мы установили, что b и будет и не будет одновременно, что невозможно. Невозможно, значит, не быть b и при этом быть a* [6].

Эта трактовка следования принадлежит Аристотелю, как и проверка следования при помощи контрапозиции. Не совсем понятно, почему приписывают такое понимание следования мегарикам, а позже стоикам. Приведем пример из «Топики», где Аристотель объясняет следование через контрапозицию. «Например, если человек — живое существо, тогда то, что не живое существо, не есть человек. И точно так же и в других случаях. Действительно, здесь следование обратное. Ибо из бытия человеком следует бытие живым существом, но из небытия человеком не следует небытие живым существом, а, наоборот, из небытия живым существом следует небытие человеком. Итак, во всех такого рода случаях надо это считать правильным. Например, если красивое приятно, то неприятное некрасиво. Если же последнее не (правильно), то и первое не (правильно). И точно так же если неприятное некрасиво, то красивое приятно» [7, с. 386–387]. Из этого отрывка Аристотеля мы можем сделать еще один вывод: если категорическое высказывание можно свести к условному, то операции противопоставления предиката, используемой Аристотелем, будет соответствовать контрапозиция условного высказывания.

Далее Боэций переходит к вопросу о том, как отрицается условное предложение. Такому предложению противопоставляется то, которое отрицает его сущность. Сущность же этих предложений в том, чтобы сохранить необходимость следования. Если кто прямо опровергает условное предложение, то сделает так, чтобы разрушить следование одного из другого. *Если есть a, то есть b* опровергается тем, что показывается, что после того, как установлено a, не следует сразу b, и, может быть, термина b и вовсе нет. То есть термин b не необходим, а возможен. Значит, условное предложение отрицается таким образом: *если есть a, то нет b.*

Здесь отменим следующее: Боэций считает, что отрицанием $(a \to b)$ должно быть не $\sim (a \to b)$, как мы ожидаем, но $(a \to\sim b)$. И это можно объяснить так: из отрицания следования $(a \to b)$ следует отрицание консеквента $\sim b$: $\sim (a \to b) \to (a \to\sim b)$.

Как и Теофраст, Боэций рассматривает сложные суждения не только как связь предложений, но и как связь терминов, из которых составлены сложные суждения. То есть категорическое суждение представлено как условное:

1. $a \to b$: если есть человек, то есть животное;

2. $\sim a \to b$: если нет дня, то ночь;

3. $a \to \sim b$: если есть черное, то нет белого;

4. $\sim a \to \sim b$: если нет животного, то нет человека.

Отрицанием 1) будет 3), так как надо отрицать сущность термина. Термин Боэций использует в форме предиката, со связкой есть, и отмечает, что условное предложение 2) имеет место только для противоречащих терминов (*есть день*, *есть ночь*). Заметим, что для 1) и 4) приведен пример отношения подчинения между терминами (*человек*, *животное*).

Далее исследуются гипотетические силлогизмы, состоящие из двух терминов, из трех терминов и из четырех терминов. Выстраивая из указанных нами посылок, состоящих из двух терминов, схемы известных нам как modus ponens (MP) и modus tollens (MT) силлогизмов (их получается 8), Боэций добавляет для посылки $\sim a \to b$ два «неправильных» модуса (всего получается 10 модусов):

1. $\sim a \to b, b \vdash \sim a$

2. $\sim a \to b, a \vdash \sim b$

Как же он объясняет это следование? Дело в том, что данная посылка характеризует отношение между противоречащими терминами, и поэтому силлогизм проходит:

1. *Если не день, то ночь. Ночь, следовательно, не день.*

2. *Если не день, то ночь. День, следовательно, не ночь.*

Дальше Боэций переходит к силлогизмам, посылки которых состоят из двух гипотетических предложений, и соответственно из четырех терминов: $(a \to b) \to (c \to d)$.

Учитывая, что каждый их четырех терминов может отрицаться, Боэций составляет 40 (из них 8 «неправильных») модусов. Сочетаются посылки сначала по схеме модуса ponens, потом — модуса tollens. То есть предложение $(a \to b) \to (c \to d)$ имеет ту же структуру, что и $(a \to b)$. И точно так же как в силлогизмах с посылкой $(a \to b)$, образуются 8 «неправильных» модусов, к примеру:

1. $(a \to \sim b) \to (c \to d), (a \to b) \vdash (c \to \sim d)$

2. $(a \to \sim b) \to (c \to d), (c \to d) \vdash (a \to \sim b)$

В них «не природа связи, а свойства терминов (terminorum proprietas) создают следование». Аналогичные модусы возникают из гипотетических посылок, состоящих из трех терминов: $a \to (b \to c)$ и $(a \to b) \to c$. Здесь Боэций образует из посылки $a \to (b \to c)$ 20 (из них 4 «неправильных») модусов, из посылки $(a \to b) \to c$ также 20 $(16 + 4)$ модусов. Таким образом, добавляется еще 8 «неправильных» модусов, аналогичных модусам (1) и (2), например:

1. $\sim a \to (b \to c), a \vdash b \to \sim c$
2. $(a \to \sim b) \to c, a \vdash b \to \sim c$

Боэций так объясняет появление этих модусов: «Здесь потому есть вывод на той и другой стороне, что эти предложения могут излагаться в терминах непосредственно противоположных (immediata contraria), так как в них утверждение одного термина отрицает другой, а отрицание одного утверждает другой» [6, с. 298].

Далее он переходит к посылкам, состоящим из двух гипотетических предложений, но из трех терминов, т.е. имеющих один общий термин. Состоящие из трех терминов Боэций распределяет по трем фигурам, каждая из которых имеет как правильные, так и неправильные модусы.

Изобразим три фигуры гипотетических силлогизмов Боэция (как они даны им в тексте без заключений), отличающиеся как от фигур Теофраста, так и от фигур Филопона и Александра Афродизийского:

I фигура	II фигура	III фигура
$A \to B$	$A \to B$	$B \to A$
$B \to C$	не-$A \to C$	$C \to$ не-A

Схемы Теофраста

I фигура	II фигура	III фигура
$A \to B$	$A \to B$	$A \to C$
$B \to C$	не-$A \to C$	$B \to$ не-C
$A \to C$	не-$C \to B$	$A \to$ не-B

Схемы Александра Афродизийского

I фигура	II фигура	III фигура
$A \to B$	$A \to B$	$A \to B$
$B \to C$	$C \to$ не-B	не-$A \to C$
$A \to C$	$A \to$ не-C	не-$B \to C$

Схемы Филопона

I фигура	II фигура	III фигура
$A \to B$	$A \to B$	не-$B \to$ не-A
$B \to C$	не-$C \to$ не-B	$B \to C$
$A \to C$	не-$A \to$ не-C	не-$A \to$ не-C

У Боэция по каждой фигуре образуются 8 модусов, контрапозицией заключения добавляются еще 8 модусов (итого по трем фигурам 48 модусов), среди которых «неправильных» нет. Приведем пример по второму модусу первой фигуры:

$a \to b, b \to\sim c \vdash a \to\sim c$: *если человек, то животное, если животное, то не камень. Значит, если человек, то не камень.*

Всего модусов с соединительными посылками насчитывается 10+10+40+20+20+48=148 , которые методично, с содержательными примерами выписываются Боэцием. Из них 20 «неправильных». После этого Боэций переходит к гипотетическим силлогизмам с разделительными посылками. Их, как и условных посылок, 4 вида:

1. a либо b: *либо болен, либо здоров,*

2. $\sim a$ либо b: *либо нет человека, либо есть животное,*

3. a либо $\sim b$: *либо есть животное, либо нет человека,*

4. $\sim a$ либо $\sim b$: *либо не белое, либо не черное.*

По мнению Боэция, эти посылки сходны с соединительными и должны иметь столько же модусов, сколько имели те. Разделительные силлогизмы из первой посылки —- это известные нам modus ponendo tollens (MPT) и modus tollendo ponens (MTP):

1. a либо $b, a \vdash\sim b$

2. a либо $b, \sim a \vdash b$

3. a либо $b, b \vdash \sim a$

4. a либо $b, \sim b \vdash a$

Поскольку Боэций, как Аристотель и Теофраст, понимает дизъюнкцию только как строгую (что опять-таки связано со свойствами терминов), все модусы с разделительными суждениями без привычных нам ограничений оказываются выполнимыми.

Закономерно возникает вопрос: почему посылками силлогизмов выступают только условные и разделительные суждения, но не суждения с союзом «и». Почему нет известных нам правил удаления и введения конъюнкции. Конъюнкция не выступает посылкой силлогизма по той причине, что между терминами соединительного суждения нет четкого логического отношения: ни взаимного исключения, ни необходимого следования.

Итак, какие выводы можно сделать из данного трактата Боэция? Теория гипотетических силлогизмов намечалась в трудах Аристотеля, но не была им построена. Она была развита Теофрастом и Эвдемом в несохранившихся трудах. О стоиках и их логической системе не упоминается. Как и у стоиков, отношение логического следования определяется через контрапозицию. Идею объяснения следования через контрапозицию Боэций относит к аристотелевскому доказательству через невозможное, которое, в свою очередь, вытекает из аристотелевских категорий возможного и необходимого. Но при этом говорится не о следовании одного предложения из другого, а о следовании одного термина из другого. В отличие от стоиков Боэций не считает связь предложений иной, чем связь терминов. Классификация силлогизмов производится по числу терминов. Те, что начинаются с условной посылки, делятся на два типа: МП и МТ. Из-за свойств терминов добавляются два «неправильных» модуса. Далее, независимо от числа терминов (2, 3 или 4), силлогизмы строятся либо по схеме МП, либо по схеме МТ с добавлением аналогичных «неправильных модусов». Итого получается 148 модусов с условными посылками. Часть из них получена путем контрапозиции заключений, как у Аристотеля в категорических силлогизмах. Таким образом, операции противопоставления предикату категорического высказывания ставится в соответствие контрапозиция условного.

Далее добавляются силлогизмы с разделительными посылками и выводятся модусы MPT и MTP. Эти 4 модуса (MP и MT, MPT и MTP) и составляют систему гипотетических силлогизмов Теофраста. Собственно, эти модусы мы уже отметили у Аристотеля. У стоиков к этим 4 гипотетическим силлогизмам добавлен так называемый модус Хризиппа, с отрицанием конъюнкции. То, что среди рассмотренных Боэцием схем нет этого третьего в списке стоиков модуса, указывает на то, что Боэций пользовался при написании трактата только работами Теофраста и Эвдема (о чем сам и говорит), но не работами стоиков. Что касается вклада Боэция, этот вопрос трудно решить, так как трактаты Теофраста утеряны. Но мы можем сделать предположение, что, как и в случае с трактатами Аристотеля, Боэций глубоко изучил материал, сам классифицировал модусы и, возможно, вывел свои. Главный вопрос: кто добавил «неправильные» модусы, сопроводив их учением о свойствах терминов? По крайней мере, у Аристотеля мы не нашли таких положений. Хотя есть замечания, что разделительные суждения предполагают взаимоисключающие термины. Не исключено, что это может быть добавление Боэция. Так же как и обращение частноотрицательных суждений.

Таким образом, Боэций трактует логическое следование не как материальную импликацию, а как связь терминов, которая к тому же согласуется со свойствами этих терминов.

3 Отношение логического следования в трактатах Боэция «Комментарии на “Топику” Цицерона» и «О топических различиях». Анализ Боэцием «недоказуемых» стоиков

Теорию гипотетических силлогизмов Боэций развивает также в трактатах «Комментарии к “Топике” Цицерона» и «О топических различиях». Проблемам, анализируемым в этих трактатах, посвящены опубликованные нами статьи [8, 9], а в данной статье мы рассмотрим только одну проблему, связанную с «неправильными» модусами в анализируемой Боэцием стоической аксиоматике. Отметим, что эти два трактата, в отличие от разобранного выше, написаны позже и базируются на работах стоиков, а не перипатетиков. Несмотря на это, Боэций по-прежнему трактует логическое следование как связь терминов. «Топика» Цицерона, написанная в I в. до н. э., является, по-видимому, самым ранним источником, в котором излагаются схемы «недоказуемых» стоиков, при этом список включает не 5, а 7 силлогизмов: «К ним (пяти. — *Л. Т.*) добавляют отрицание соединения: “Ложно, что первое и второе; но первое, следовательно, не второе”». Это шестой способ. Седьмой: «Ложно, что и первое, и второе; но не первое, следовательно, второе» [10, с. 68–69].

Здесь к тексту Цицерона сделано следующее примечание издателей: «Шестой и седьмой способы не имеют логического смысла. Не ясно, ошибка ли это Цицерона или позднейших рукописей» [10, с. 488].

Предположение о том, что Цицерон мог ошибиться в описании последнего модуса, маловероятно, так как этот список повторяется с небольшими изменениями у греческих и латинских авторов, как находящихся под влиянием Цицерона, так и ссылающихся на других авторов. Так, Кассиодор указывает в качестве источника труды Мария Викторина, Туллия Марцелла и даже Варрона. Исследователь логики Стои М. Фреде [11] предполагает, что у Хрисиппа было 5 схем, а его последователи, поздние стоики, добавили новые. В связи со сказанным может вызвать интерес то место Комментариев Боэция к «Топике» Цицерона, где он анализирует 7 «недоказуемых». Интерес этот подогревается еще и тем, что в своем основном труде по этой теме, в трактате «О гипотетических силлогизмах», Боэций вовсе не приводит этот список. Позднее, комментируя «Топику» Цицерона, Боэций располагал уже другими, стоическими источниками. При этом он все же замечает, что все об условных силлогизмам он уже изложил в книгах «О гипотетических силлогизмах», теперь же прибавляет лишь то, что могло бы истолковать мысли Цицерона. Как в «Комментариях на “Топику” Цицерона», так и в трактате «О топических различиях» Боэций излагает учение стоиков о 7 «недоказуемых»: «Следовательно, из тех предложений, которые связаны, получится первый и второй модусы гипотетического силлогизма, если же прибавляется отрицание в связанное предложение, состоящее из двух утвердительных, и, сверх того, отрицается само предложение, то это дает третий модус; из дизъюнктивных предложений различным способом прибавленное дает четвертый и пятый модусы, а тот, и другой, выраженные через отрицание — шестой и седьмой» [12, 1135B –1137A].

Для лучшего понимания всего отрывка изобразим модусы в символической форме и приведем примеры Боэция к ним:

I. $1 \to 2, 1 \vdash 2$: если день, то светло, при этом день, светло;

II. $1 \to 2, \sim 2 \vdash\sim 1$: *если есть день, то светло; при этом не светло, значит, нет дня;*

III. $\sim (1 \to\sim 2), 1 \vdash 2$: *неверно, что если есть день, нет света, но день есть, значит, есть свет;*

IV. $(1\underline{\vee}2), 1 \vdash\sim 2$: *либо день, либо ночь, но день, значит, не ночь;*

V. $(1\underline{\vee}2), \sim 1 \vdash 2$: *либо день, либо ночь, при этом не день, значит, ночь;*

VI. $\sim (1\&2), 1 \vdash\sim 2$: *неверно, что и день и ночь, при этом день, значит, не ночь;*

VII. $\sim (1\&2), \sim 1 \vdash 2$: *неверно, что и день и ночь, при этом не день, значит, ночь.*

Для первого модуса Боэций приводит и другой пример: *если человек, то смеющееся существо; при этом человек, значит, смеющееся*; а также: *при этом смеющееся, значит, человек.* Причина обратного следования в том, что человек и смеющееся — равные термины.

В третьем модусе Боэций видит двойное отрицание консеквенции, которое дает утверждение. При этом Боэций замечает, что Цицерон привел два примера из четырех возможных: предложения, состоящего из двух отрицательных, и предложения, состоящего из утверждения и отрицания. Боэций добавляет еще два и примеры ко всем.

IIIa. $\sim (1 \to 2), 1 \vdash\sim 2$: *неверно, что если бодрствует, то спит, при этом бодрствует, значит, не спит.*

IIIb. $\sim (\sim 1 \rightarrow \sim 2), \sim 1 \vdash 2$: *неверно, что если нет дня, нет ночи, при этом дня нет, значит, ночь.*

IIIc. $\sim (\sim 1 \rightarrow 2), 1 \vdash 2$: *неверно, что если нет дня, есть свет, при этом есть день, значит, есть свет.*

Шестой модус и седьмой выводятся из четвертой и пятой дизъюнктивных посылок, но, естественно, после того, как дизъюнкция заменяется соединительной связкой и присоединяется отрицание. Шестой и седьмой модусы могут проходить только в тех предложениях, в которых необходимо имеется другое, как день или ночь, больной или здоровый, а чего-либо среднего между ними нет [12, 1133A–1135B].

Из этого отрывка видно, что Боэций располагает стоическим источником, и гораздо увереннее, чем Цицерон или Секст Эмпирик, справляется с логической операцией отрицания. У Цицерона, например, в тексте нет упоминания о снятии двойного отрицания. Можно подивиться тому, с какой методической дотошностью разбирает Боэций каждый случай, нередко при этом повторяясь, однако для нас, историков логики, это обстоятельство оборачивается хорошей стороной — мы через многие столетия имеем точное изложение логических взглядов античных авторов.

Отметим сразу, что в отличие от списка Цицерона, шестой модус не повторяет третий. Все схемы, кроме первых двух, имеют в виду взаимоисключающие термины и предложения. Поэтому и седьмой модус, как указывает Боэций, проходит, хотя, как мы уже говорили, его логическая форма не является общезначимой. Правильность такого рода модусов Боэций в своем трактате «О гипотетических силлогизмах» обосновывает, предлагая учение о свойствах терминов. А именно, если термины взаимоисключающие и между ними нет третьего термина, то добавляется целый ряд модусов, которые можно считать правильными. Впрочем, и в наши дни, мы излагаем модусы условно-категорических силлогизмов ponendo tollens и tollendo ponens с известными оговорками. Примечательно, что Боэций нигде не говорит о нестрогой дизъюнкции. Это не совсем понятно, ибо ему должна была быть известна так называемая нестрогая дизъюнкция, которую грамматики стали исследовать, начиная со II в.[4]

Вплоть до наших дней дизъюнкция воспринимается в первую очередь как строгая. Но дизъюнкция — это не просто деление, а различные способы противопоставления. Если мы соотнесем понятие дизъюнкции с отношениями в логическом квадрате, то получим:

- $p \underline{\vee} q$: контрадикторность;
- $\sim (p \& q)$: контрарность;
- $p \vee q$; $\sim (\sim p \& \sim q)$: субконтрарность.

То, что мы называем нестрогой дизъюнкцией, издавна существует в логике под названием субдизъюнкции. При этом различали две формы субдизъюнкции: 1) когда члены субдизъюнкции не могут быть одновременно истинными, но, возможно, могут быть одновременно ложными, 2) когда могут быть одновременно истинными, но не могут быть вместе ложными. Пример Авла Геллия соответствует субдизъюнкции I: в высказывании «либо ты бежишь, либо прогуливаешься...» члены дизъюнкции должны взаимно исключать друг друга, в то время как их отрицания могут быть вместе истинными.

- $1 \underline{\vee} 2$: дизъюнкция;
- $\sim (1 \& 2)$: субдизъюнкция I;
- $1 \vee 2$; $\sim (\sim 1 \& \sim 2)$: субдизъюнкция II.

Как видим, термин «субдизъюнкция» введен достаточно корректно: дизъюнкция есть конъюнкция двух субдизъюнкций — I и II: $1 \underline{\vee} 2 \leftrightarrow \sim (1 \& 2) \& \sim (\sim 1 \& \sim 2)$.

Если соотнести виды субдизъюнкций с видами противопоставлений, то увидим, что субдизъюнкция I соответствует контрарности, а субдизъюнкция II — субконтрарности (см. выше).

[4]Впервые грамматический союз, соответствующий неисключающей дизъюнкции, употреблен в Дигестах — римском сборнике юридических текстов II в.

Теперь мы можем выдвинуть следующую версию добавления стоиками 6 и 7 модусов гипотетического силлогизма: посылка 7 модуса подразумевала субдизъюнкцию II $[1 \vee 2; \sim(\sim 1 \& \sim 2)]$, т. е., в современном понимании нестрогую дизъюнкцию, которая в 4 и 5 модусах не могла быть учтена. А субдизъюнкция I нашла выражение в 3 модусе, для которого Хрисипп приводил следующий пример: «неверно, что некто родился при восходе Сириуса и умрет в море, при этом он родился при восходе Сириуса, значит, он не умрет в море». Высказывания «родиться при восходе Сириуса» и «умереть в море» не могут быть вместе истинными, но могут быть вместе ложными, т.е., несомненно, был такой человек, который не родился при восходе Сириуса и не умер в море. И тогда, говоря о таком человеке: «неверно, что он родился при восходе Сириуса и умер в море» — мы будем иметь истинное высказывание. Таким образом, в 3, и, возможно, в 6 модусах действительно подразумевается антиконъюнкция, она же субдизъюнкция I. Но 7 модус подразумевает, по-видимому, нестрогую дизъюнкцию, т.е. субдизъюнкцию II.

Наша версия оказалась в некотором отношении сходной с версией, представленной в книге известных историков логики В. и М. Нилов. Они предложили следующую реконструкцию семи модусов [13, с. 180]:

1. Если первое, то второе, но первое; значит, второе.
2. Если первое, то второе, но не второе; значит, не первое.
3. Не вместе первое и не второе, не первое; поэтому второе.
4. Либо первое, либо второе, но первое; значит, не второе.
5. Либо первое, либо второе, но не первое; значит, второе
6. Не вместе первое и второе, но первое; значит, не второе.
7. Не вместе не первое и не второе, но не первое; значит, второе.

Как видим, авторы полагают, что посылка 7 модуса подразумевает нестрогую дизъюнкцию, т.е. указанную нами субдизъюнкцию II, но объясняют это тем, что переписчики пропустили два отрицания, когда копировали эти модусы. С таким объяснением трудно согласиться, во-первых, потому, что среди источников есть независимые друг от друга, а во-вторых, оно слишком уж внелогическое.

Логическим объяснением перечисленных нами «неправильных» модусов является сложность формализации отношения логического следования.

Проведенный анализ трактатов Боэция позволяет сделать вывод о том, что логическое следование связывает в равной степени и термины и предложения. Именно учет свойств терминов (противоположных, противоречащих либо подчиненных) объясняет введение «неправильных», необщезначимых модусов силлогизмов. Ведь между терминами существуют те же отношения, что и между простыми высказываниями в логическом квадрате. А простые высказывания выражаются в виде сложных, условных, неся в себе разнообразие свойств терминов. Боэций не считает, что стоическая и аристотелевская силлогистика имеют принципиальное отличие и предпринимает немало усилий, чтобы доказать обратное — их взаимосвязь.

Литература

[1] *Секст Эмпирик.* Против ученых // Секст Эмпирик. Соч. В 2-х т. М., 1976.

[2] *Galen.* Einfuerung in die Logik. Kritisch-exegetischer Kommentar mit deutscher Uebersetzung von J.Mau. Berlin, 1960.

[3] *Jurgen Mau.* Stoische Logik. Ihre Stellung gegenueber der Aristotelischen Syllogistik und dem modernem Aussagenkalkuel // Hermes 85, 1957.

[4] *Аристотель.* Первая Аналитика // Аристотель. Соч. В 4-х т. Т. 2. М., 1978. 29. 45b 19.

[5] *Федоров Б.И.* Доказательство и опровержение // Логика / Под ред. Мигунова А.И., Микиртумова И.Б., Федорова Б.И. М., 2010. С. 201–202.

[6] *A.M. Severino Boezio* De hypotheticis syllogismis. Paideia Editrice Brescia, 1969.

[7] *Аристотель.* Топика // Соч. В 4-х т. Т. 2. М., 1978.

[8] *Тоноян Л.Г.* Учение о гипотетических силлогизмах в Комментарии Боэция к «Топике» Цицерона // Логико-философские штудии — 3 / Под ред. Слинина Я.А., Лисанюк Е.Н. Санкт-Петербургское философское общество, Санкт-Петербург, 2005. С. 98–116.

[9] *Тоноян Л.Г.* Была ли ошибка в «Топике» Цицерона? // Вестник Санкт-Петербургского университета. 2004. Сер.6. Вып. 3. С. 62–67.

[10] *Цицерон.* Топика. Перевод А.Е.Кузнецова // Цицерон. Эстетика. Трактаты. Письма. М. 1994. С. 56–81.

[11] *Frede M.* Die Stoische Logik. Goettingen, 1974. S. 157–167.

[12] *Stump E.* Boethius's In Ciceronis Topica. Cornell University Press, Ithaca and London, 1988.

[13] *W. Kneale, M. Kneale.* The development of logic. Oxford, 1962.

Логика функционального следования[1]

В. И. Шалак

abstract. The aim of this paper is formulation of a notion of functional consequence and it's axiomatisation. Problem of completeness is still open.

Keywords: grounds of logic, functional consequence

Ни для кого не секрет, что наше интуитивное понимание и употребление в языке логической связки «если. . . , то. . . » отлично от смысла связки материальной импликации. Если бы это было не так, то в силу противоречивости естественного языка мы давно пришли бы к выводу, что Луна сделана из зеленого сыра. Недаром, объясняя студентам, что из ложных посылок в классической логике следует все что угодно, наталкиваешься на непонимание и недоверие. Стремление более точно эксплицировать условную связь и логическое следование привело к построению многих неклассических логик. Из них более всего на слуху релевантные логики. К сожалению, их семантика далека от прозрачности, что дает пищу для справедливой критики.

Помимо отношения релевантности интуитивное понимание условной связи имеет черты причинной или функциональной связи. В настоящей работе мы хотим сформулировать подход к построению логики на основе именно функционального понимания следования.

В первом приближении можно принять, что *из A функционально следует B, если и только если существует функция f, которая позволяет в каждой модели на основании значения формулы A вычислить значение формулы B.*

[1]Работа выполнена при поддержке РГНФ, грант № 11-03-00761а.

Мы пока никак не конкретизировали язык и понятие модели, поскольку хотим, чтобы наше будущее определение было максимально общим.

Очевидно, что понятие функционального следования не совпадает с классическим. Если взять язык и семантику классической логики высказываний, то мы сразу получим ряд «парадоксальных» функциональных следований. Например, согласно нашему определению, из A следует $\neg A$, поскольку, если известно истинностное значение формулы A, то значение формулы $\neg A$ определяется однозначно. Это «парадоксально» лишь с точки зрения классической логики, но в обыденном употреблении языка примеры такого следования встречаются на каждом шагу. Если кому-либо сказать, что A — истинно, и спросить о значении $\neg A$, то в ответ мы услышим, что $\neg A$ — ложно. В данном случае речь идет не об утверждении, что имеет место $\neg A$, а лишь о том, что значение $\neg A$ легко вычислить, коль скоро известно значение A. В то же время функциональное понимание следования очевидным образом обладает и рядом полезных свойств, которыми не обладает классическая логика, например, оно блокирует следование $A \wedge \neg A \models B$.

Мы не хотим ограничиваться языком и семантикой классической логики, поскольку она была создана для решения совсем других задач. Вместо этого рассмотрим более абстрактный язык и более абстрактную семантику, которые, при необходимости, могут быть адаптированы для различных частных случаев.

Исходные символы

1. $x, y, z, \ldots \in Var$ — множество переменных языка;
2. $F^i, G^j, H^u, \ldots$ — множество связок языка, где i, j, u — индексы, указывающие на местность связок;
3. $), ($ — скобки.

Формулы

1. Каждая переменная языка есть формула;
2. Если $A_1, \ldots, A_i$ — формулы, а F^i — i-местная связка, то $F^i(A_1, \ldots, A_i)$ — формула;
3. Ничто другое формулой не является.

Модели

Моделью нашего языка будем называть пару $M = < D, I >$, где D — непустое множество, а I — функция интерпретации, сопоставляющая каждой логической связке F^i некоторую операцию $I(F^i) : D \times \ldots^i \times D \to D$.

Оценки

Множеством оценок Val в модели M будем называть множество всех функций из Var в D, т.е. $Val = D^{Var}$.

Значение формулы в модели

Для фиксированной модели $M = < D, I >$ значение формулы A при оценке $v \in Val$ определяется очевидным образом:

1. $|x|_v = v(x)$, если x — переменная;
2. $|F^i(A_1, \ldots, A_i)|_v = I(F^i)(|A_1|_v, \ldots, |A_i|_v)$.

Теперь мы готовы к тому, чтобы строго определить центральное понятие функционального следования $\Gamma \parallel\!= A$, где Γ — конечное множество формул, а A — формула. Ограничение лишь конечными множествами не является принципиальным и понятие следования может быть легко обобщено на бесконечный случай.

*Из множества формул $\Gamma = \{B_1, \ldots, B_n\}$ **функционально следует** формула A, если и только если для каждой модели M существует такая функция f, что для всякой оценки $v \in Val$ имеет место $|A|_v = f(|B_1|_v, \ldots, |B_n|_v)$.*

$$\{B_1, \ldots, B_n\} \parallel\!= A \ \Leftrightarrow\ \forall M \exists f \forall v (|A|_v = f(|B_1|_v, \ldots, |B_n|_v))$$

Легко проверить, что определенное нами отношение функционального следования удовлетворяет известным условиям Тарского:

1. Если $A \in \Gamma$, то $\Gamma \parallel\!= A$;
2. Если $\Gamma \parallel\!= A$ и $\Gamma \subseteq \Delta$, то $\Delta \parallel\!= A$;
3. Если $\Gamma \parallel\!= B$ и $\Gamma \cup \{B\} \parallel\!= A$, то $\Gamma \parallel\!= A$.

В дополнение к этому отношение функционального следования является структурным, т.е. из $\Gamma \Vert\!= A$ следует $e(\Gamma) \Vert\!= e(A)$, где e — подстановка на множестве формул языка.

Это означает, что определенное нами отношение следования задает логику в смысле Тарского.

Следующим естественным шагом должна стать аксиоматизация отношения функционального следования.

Правдоподобным кандидатом на аксиоматизацию являются следующие две схемы аксиом и одно правило:

$Ax.1\ \Gamma \cup A \Vdash A$

$Ax.2\ \Gamma \cup \{A_1, \ldots, A_n\} \Vdash F^n(A_1, \ldots, A_n)$ — для каждой связки F^n языка

Правило: $\Gamma \Vdash B;\ \Gamma \cup \{B\} \Vdash A \ \Rightarrow\ \Gamma \Vdash A$

Определенное так отношение $\Vdash$ тривиальным образом разрешимо. Существует простой синтаксический критерий, который позволяет определить, когда $\Gamma \Vdash A$ имеет место, а когда нет. Формулируется он следующим образом. Пусть $Vars(C)$ — множество всех переменных, входящих в формулу C. Тогда $\{B_1, \ldots, B_n\} \Vdash A$, если и только если существует такая формула C, что $Vars(C) \subseteq \{x_1, \ldots, x_n\}$, и формула A графически равна результату одновременной подстановки $C[B_1/x_1, \ldots, B_n/x_n]$.

Легко проверить, что для отношения $\Vdash$ имеет место теорема о непротиворечивости, т.е. если $\Gamma \Vdash A$, то $\Gamma \Vert\!= A$.

На вопрос о полноте предложенной аксиоматики относительно функционального следования ответить сложнее. Исходя из содержательного понимания следования, есть уверенность, что система полна, но доказать это пока не удается. Для иллюстрации сложностей, с которыми приходится сталкиваться, приведем пример.

Для простоты возьмем язык, в котором есть всего одна двухместная связка.

Пусть есть некоторая формула A. Если теорема о полноте имеет место, то $A \Vert\!= B$, если и только если B графически равна A, или является более сложной формулой, построенной путем одних лишь комбинаций двухместной связки и A. То есть существует такая формула C, что $Vars(C) = \{x\}$, и формула B графически равна C$[A/x]$. Но доказать это не удается.

Можно показать, что отношение $\|=$ обладает многими свойствами, подтверждающими полноту функциональной логики относительно предложенной семантики.

Например, если $A \|= B$, то $Var(A) = Var(B)$, как и должно быть в случае, если формула B графически равна результату некоторой подстановки $C[A/x]$.

Если посредством $Len(A)$ обозначить длину формулы A, т.е. число вхождений в нее различных переменных, то из $A = B$ следует, что $Len(B)$ кратно $Len(A)$, как и должно быть в случае, если формула B графически равна некоторой подстановке $C[A/x]$.

Если длина формулы A равна длине формулы B, то это, в случае полноты логики, может иметь место лишь тогда, когда формула A графически равна формуле B. Но этого доказать не получается.

Можно высказать предположение, что сложности, с которыми пришлось столкнуться, связаны с какими-то фундаментальными свойствами исследуемой проблемной области, хотя нельзя исключить и того, что решение окажется очень простым.

Вопрос о полноте построенного исчисления относительно функционального следования остается открытым.

How Peircean was the "'Fregean' Revolution" in Logic?[1]

Irving H. Anellis

abstract. The work in logic of Charles Peirce is surveyed in light of the characteristics enumerated by historian of logic J. van Heijenoort as defining the original innovations in logic of Frege and which together are said to be the basis of what has come to be called the "Fregean revolution" in logic and which are said to constitute the elements of Frege's Begriffsschrift of 1879 as the "founding" document of modern logic.

Keywords: history of logic, modern logic, algebraic logic, abstract algebraic logic; propositional logic; first-order logic; quantifier elimination, equational classes, relational systems

As editor of the very influential anthology *From Frege to Gödel* [104] (hereafter FFTG), historian of logic Jean van Heijenoort (1912–1986) did as much as anyone to canonize as historiographical truism the conception, initially propounded by Bertrand Russell (1872–1970), that modern logic began with the publication in 1879 of the *Begriffsschrift* [24] of Gottlob Frege (1848–1925), and thereby establishing Frege as the founder of modern logic. Van Heijenoort [104, p. vi] did this by relegating, as a minor sidelight in the history of logic, perhaps "interesting in itself" but of little historical impact, the tradition of algebraic logic of George Boole (1815–1864), Augustus De Morgan (1806–1871), Charles Sanders Peirce (1839–1914), William Stanley Jevons (1835–1882), John Venn (1834–1923), and Ernst Schröder (1841–1902).

The attitudes of Frege, as expressed, e.g., in his review of Schröder's *magnum opus* (see, e.g. [21]), and Edmund Husserl (1859–1938) (see, e.g. [43]) toward algebraic logic were more strongly negative than even Russell's or van Heijenoort's. We recall, for example,

[1] A complete and detailed account of the historical and technical background for this survey is available at: `http://www.cspeirce.com/menu/library/aboutcsp/anellis/csp-frege-revolu.pdf`.

the chastisement by Schröder's student Andreas Heinrich Voigt (1860–1940) [109] of Husserl's assertion in "Der Folgerungscalcul und die Inhaltslogik" [43, p. 171] that algebraic logic is not logic, and Frege's ire at Husserl for regarding Schröder, rather than Frege, as the first in Germany to work in symbolic logic. Not only that; Voigt pointed out that much of what Husserl claimed as original for his own work in logic was already to be found in Frege and Peirce.

In his review of the first volume of Schröder's *Vorlesungen über die Algebra der Logik* [90], Frege [29, p. 452] wrote that: "Alles dies ist sehr anschaulich, unbezweifelbar; nur schade: es ist unfruchtbar, und es ist keine Logik." [All this is very intuitive, undoubtedly; just a shame: it is unfruitful, and it is no logic.]

Russell was one of the most enthusiastic early supporters of Frege and contributed significantly to the conception of Frege as the originator of modern mathematical logic, although he never explicitly employed the specific term "Fregean revolution". In his recollections, he states that many of the ideas that he thought he himself originated, he later discovered had already been first formulated by Frege (see, e.g. [34, p. 245], for Russell's letter to Louis Couturat (1868–1914) of 25 June 1902), and some others were due to Giuseppe Peano (1858–1932) or the inspiration of Peano.

Russell's extant notes and unpublished writings demonstrate that significant parts of logic that he claimed to have been the first to discover were already present in the logical writings of Peirce and Schröder (see [1] and [3] for details)[2]. With regard to Russell's claim, to having invented the logic of relations, he was later obliged to admit (see [3, p. 281], quoting a letter to Couturat of 2 June 1903) that Peirce and Schröder had already "treated" of the subject, so that, in light of his own work, it was unnecessary to "go through" them.

We also find that Russell not only read Peirce's "On the Algebra of Logic" of 1880 [65] and "On the Algebra of Logic: A Contribution to the Philosophy of Notation" of 1885 [69] and the first volume of Schröder's *Vorlesungen über die Algebra der Logik* earlier than his

[2]Russell's library, including manuscripts and notes, are held at The Bertrand Russell Archives, The William Ready Division of Archives and Research Collections, Mills Memorial Library, McMaster University, Hamilton, Ontario, Canada.

statements suggest: there are extant notes for these dating from ca. 1900–1901 (see [1] and [3, p. 282]), and had known the work and many results even earlier, in the writing of his teacher Alfred North Whitehead (1861–192), as early as 1898, if not earlier, when reading the galley proofs of Whitehead's *Treatise of Universal Algebra* [110] of 1898, coming across references again in Peano, and was being warned by Couturat not to short-change the work of the algebraic logicians (see [3] for details).

What historiography of logic calls the "Fregean revolution" was articulated in detail by Jean van Heijenoort.

In FFTG [104], and which historiography of logic has for long taken as embracing all of the significant work in mathematical logic, van Heijenoort described Frege's *Begriffsschrift* of 1879 [24] as of singular significance for the history of logic, comparable, if at all, only with Aristotle's *Prior Analytics*, as opening "a great epoch in the history of logic…" [104, p. vi]. In his posthumously published "Historical Development of Modern Logic" [106], originally written in 1974, he makes the point more forcefully still of the singular and unmatched significance of Frege and his *Begriffsschrift* booklet of a mere 88 pages; he began this essay with the unequivocal and unconditional declaration [106, p. 242] that: "Modern logic began in 1879, the year in which Gottlob Frege (1848–1925) published his *Begriffsschrift*." Van Heijenoort goes on to explain [106, p. 242] that: "In less than ninety pages this booklet presented a number of discoveries that changed the face of logic. The central achievement of the work is the theory of quantification; but this could not be obtained till the traditional decomposition of the proposition into subject and predicate had been replaced by its analysis into function and argument(s). A preliminary accomplishment was the propositional calculus, with a truth-functional definition of the connectives, including the conditional. Of cardinal importance was the realization that, if circularity is to be avoided, logical derivations are to be *formal*, that is, have to proceed according to rules that are devoid of any intuitive logical force but simply refer to the typographical form of the expression; thus the notion of formal system made its appearance. The rules of quantification theory, as we know them today, were then introduced. The last part of the book belongs to the *foundations of mathematics*, rather than to logic, and presents a logical definition of the notion of mathematical sequences. Frege's contribution marks one of the sharpest breaks that ever occurred in the development of a science".

Frege's friend and University of Jena colleague Paul Ferdinand Linke (1876–1955) helped disseminate the concept of a Fregean revolution, writing, at a time when the ink was barely dry on the second edition of Whitehead and Russell's *Principia Mathematica* (1925–27) [112], when he wrote [51, pp. 226–227]: "...the great reformation in logic...originated in Germany at the beginning of the present century...was very closely connected, at least at the outset, with mathematical logic. For at bottom it was but a continuation of ideas first expressed by the Jena mathematician, Gottlob Frege. This prominent investigator has been acclaimed by Bertrand Russell to be the first thinker who correctly understood the nature of numbers. And thus Frege played an important role in...mathematical logic, among whose founders he must be counted".

We cannot help but notice a significant gap in the choices of material included in FFTG — all of the work of the algebraic logicians are absent, not just for Boole and De Morgan, whose work began to appear in the 1840s, and for their most influential and popular followers, Jevons and Venn, whose work appeared in the critical period of the 1870s up to 1900, and even for the work by Peirce and Schröder that appeared in the years which FFTG, a work purporting to completeness, and that despite the fact that FFTG includes work that refer back, often explicitly, to contributions in logic by Peirce and Schröder, even while Frege and his work remains virtually unmentioned in any of the other selections found in FFTG. The exclusion of Peirce and Schröder in particular from FFTG is difficult to understand if for no other reason than that their work is cited by many of the other authors whose work is included, and in particular is utilized by Leopold Löwenheim (1878–1957) and Thoralf Albert Skolem (1887–1963), whereas Frege's work is hardly cited at all in any of the other works included in FFTG; the most notable exceptions being the exchange between Russell and Frege concerning Russell's discovery of his paradox [104, pp. 124–128] and Russell's references to Frege in his paper of 1908 on theory of types ([86]; see [104, pp. 150–182]). The work of the algebraic logicians is excluded because, in van Heijenoort's estimation, and in that of the majority of historians and philosophers — almost all of whom have since at least the 1920s, accepted this judgment, that the work of the algebraic logicians falls outside of the Fregean tradition, and therefore does not belong to modern mathematical logic. Van Heijenoort makes the distinction as one primarily between algebraic logicians, most notably Boole, De Morgan, Peirce, and Schröder, and logicians who worked in quantification theory, first of all Frege, and with Russell as his most notable follower. For that, the logic that Frege created, as distinct from algebraic logic, was *mathematical* logic.

Hans Sluga [98], following van Heijenoort's distinction between followers of Boole and followers of Frege, labels the algebraic logicians "Boolean" and distinguishes them from the "Fregeans". The most important member of the Fregeans being Russell, the Booleans including not only of course Boole and De Morgan, but logicians such as Peirce and Schröder who combined, refined, and further developed the algebraic logic and logic of relations established by Boole and De Morgan.

Russell, in addition to the strong and well-known influence which Peano had on him, was a staunch advocate, and indeed one of the earliest promoters, of the conception of a "Fregean revolution" in logic, although he himself never explicitly employed the term itself. Nevertheless, we have such pronouncements, for example in his manuscript on "Recent Italian Work on the Foundations of Mathematics" of 1901 (see [87, pp. 350–362]) in which he contrasts the conception of the algebraic logicians with that of Hugh MacColl (1837–1909) and Frege, by writing that: "It has been one of the bad effects of the analogy with ordinary Algebra that most formal logicians (with the exception of Frege and Mr. MacColl) have shown more interest in logical equations than in implication". This view was echoed by van Heijenoort, whose chief complaint regarding the algebraic logicians was that they "tried to copy mathematics too closely, and often artificially" [104, p. vi].

In elaborating the distinguishing characteristics of mathematical logic and, equivalently, enumerating the innovations which Frege-allegedly-wrought to create mathematical logic, van Heijenoort (in "Logic as Calculus and Logic as Language" [105, p. 324]) listed:

1) a propositional calculus with a truth-functional definition of connectives, especially the conditional;

2) decomposition of propositions into function and argument instead of into subject and predicate;

3) a quantification theory, based on a system of axioms and inference rules; and

4) definitions of *infinite sequence* and *natural number* in terms of logical notions (i.e. the logicization of mathematics).

In addition, Frege, according to van Heijenoort and adherents of the historiographical conception of a "Fregean revolution":

5) presented and clarified the concept of *formal system*; and

6) made possible and gave a use of logic for philosophical investigations (especially for philosophy of language).

Moreover, in the undated, unpublished manuscript notes "On the Frege-Russell Definition of Number"[3], van Heijenoort claimed that Russell was the first to introduce a means for

7) separating singular propositions, such as "Socrates is mortal" from universal propositions such as "All Greeks are mortal"

among the "Fregeans". Yet, judging the "Fregean revolution" by the (seven) supposedly defining characteristics of modern mathematical logic, we should include Peirce as one of its foremost participants, if not one of its initiators and leaders. At the very least, we should count Peirce and Schröder among the "Fregean's rather than the 'Booleans' were they are ordinarily relegated and typically have been dismissed by such historians as van Heijenoort as largely, if not entirely, irrelevant to the history of modern mathematical logic, which is 'Fregean' ".

Donald Gillies [32] is perhaps the leading contemporary adherent and advocate of the conception of the "Fregean revolution", and has

[3]Held in Box 3.8/86-33/2 of Van Heijenoort Nachlaß: Papers, 1946–1983; Archives of American Mathematics, University Archives, Barker Texas History Center, University of Texas at Austin.

emphasized in particular the nature of the revolution a replacement of the ancient Aristotelian paradigm of logic by the Fregean paradigm. The centerpiece of this shift is the replacement of the subject–predicate syntax of Aristotelian propositions by the function–argument syntax offered by Frege (i.e. van Heijenoort's second criterion). The Booleans are numbered among the Aristotelians because they adhere to the subject–predicate syntax.

Whereas van Heijenoort and Willard Van Orman Quine (1908–2000) (see, e.g. [81, p. i]) stressed in particular the third of the defining characteristics of Fregean or modern mathematical logic, the development of a quantification theory, Gillies [32] argues in particular that Boole and the algebraic logicians belong to the Aristotelian paradigm, since, he explains, they understood themselves to be developing that part of Leibniz's project for establishing a *mathesis universalis* by devising an arithmeticization or algebraicization of Aristotle's categorical propositions and therefore of Aristotelian syllogistic logic, and therefore retaining, despite innovations in symbolic notation that they devised, the subject–predicate analysis of propositions.

What follows is a quick survey of Peirce's work in logic, devoting attention to Peirce's contributions to all seven of the characteristics that purportedly distinguish the Fregean from the Aristotelian or Boolean paradigms. While concentrating somewhat on the first, where new evidence displaces Jan Łukasiewicz (1878–1956), Emil Leon Post (1897–1954), and Ludwig Wittgenstein (1889–1951) as the originators of truth tables, and on the third, which most defenders of the conception count as the single most crucial of those defining characteristics. The replacement of the subject–predicate syntax with the function–argument syntax is ordinarily accounted of supreme importance, in particular by those who argue that the algebraic logic of the "Booleans" is just the symbolization, in algebraic guise, of Aristotelian logic. But the question of the nature of the quantification theory of Peirce, Oscar Howard Mitchell (1851–1889), and Schroeder as compared with that of Frege and Russell is tied up with the ways in which quantification is handled.

The details of the comparison and the mutual translatability of the two systems is better left for another discussion. Suffice it here to say that Norbert Wiener (1894–1964) dealt with the technicalities in detail in his doctoral thesis for Harvard University of 1913, *A Comparison Between the Treatment of the Algebra of Relatives by Schröder and that by Whitehead and Russell* [113], and concluded that there is nothing that can be said in the *Principia Mathematica* [111] of Whitehead and Russell that cannot, with equal facility, be said in the Peirce–Schröder calculus, as presented in Schröder's *Algebra der Logik* [90][4]. After studying logic with Josiah Royce (1855–1916) and Peirce's correspondent Edward V. Huntington (1874–1952), Wiener went on for post-graduate study at Cambridge University with Whitehead, and debated with Russell concerning the results of his doctoral dissertation. Russell claimed in reply that Wiener considered only "the more conventional parts of *Principia Mathematica*" (see [33, p. 130]).

With that in mind, I want to focus attention on the question of quantification theory without ignoring the other points.

1 Peirce's propositional calculus with a truth-functional definition of connectives, especially the conditional

Consider the following formulas:

Peano–Russell: $[(\sim c \supset a) \supset (\sim a \supset c)] \supset \{(\sim c \supset a) \supset [(c \supset a) \supset a]\}$

Peirce: $[(\bar{c} \prec a) \prec (\bar{a} \prec c)] \prec \{(\bar{c} \prec a) \prec [(c \prec a) \prec a]\}$

Schröder: $[(c' \in a) \in (a' \in c)] \in \{(c' \in a) \in [(c \in a) \in a]\}$

Clearly, for propositional logic, the differences are entirely and solely notational[5].

In the manuscript "On the Algebraic Principles of Formal Logic"[6], written in the autumn of 1879 — the very year in which Frege's *Begriffsschrift* appeared, Peirce (see [73, p. 23]) explicitly identified his "claw" or "hook" of illation ($\prec$) as the "copula of inclusion" and defined material implication or logical inference, *illation*, as "1st, $A \prec A$, whatever A may be. 2nd, If $A \prec B$, and $B \prec C$, then $A \prec C$." From there, he immediately connected his definition with

[4][33] is an expository survey of Wiener's thesis. [6, pp. 429–444] reproduces the introduction and concluding chapter of [113].

[5]See, e.g. [22] on Peirce's propositional logic.

[6]Peirce's Nachlaß was originally located in Harvard University's Widener Library and is now located in Harvard's Houghton Library, with copies of all materials located in the Max H. Fisch Library at the Institute for American Thought, Indiana University–Purdue University at Indianapolis [IUPUI].

truth-functional logic, by asserting that: "This definition is sufficient for the purposes of formal logic, although it does not distinguish between the relation of inclusion and its converse. Were it desirable thus to distinguish, it would be sufficient to add the real truth or falsity of $A -\!\!< B$, supposing the existence of A". The following year, Peirce continued along this route: in "The Algebra of Logic" of 1880 [65, p. 8, 21], he wrote that $A -\!\!< B$ is explicitly defined as "A implies B", and $A \overline{-\!\!<} B$ defines "A does not imply B".

Moreover, we are able to distinguish universal and particular propositions, affirmative and negative, according to the following scheme:

A.	$a -\!\!< b$	All A are B	(universal affirmative)
E.	$a -\!\!< \bar{b}$	No A are B	(universal negative)
I.	$\breve{a} -\!\!< b$	Some A are B	(particular affirmative)
O.	$\breve{a} -\!\!< b$	Som A are not B	(particular negative)

And in 1885 in "On the algebra of logic: a contribution to the philosophy of notation" [69, p. 184, 186–187], Peirce sought to redefine categoricals as hypotheticals and presented a propositional logic.

In the manuscript fragment "Algebra of Logic (Second Paper)" written in the summer of 1884, Peirce reiterated his definition of 1880, and explained in greater detail there that: "In order to say 'If it is a it is b', let us write $a -\!\!< b$. The formulae relating to the symbol $-\!\!<$ constitute what I have called the algebra of the copula... The proposition $a -\!\!< b$ is to be understood as true if either a is false or b is true, and is only false if a is true while b is false".

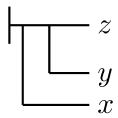
It was at this stage that Peirce undertook the truth-functional analysis of propositions and of proofs, and also introduced specific truth-functional considerations, saying that, for **v** the symbol for "true" and **f** the symbol for "false", the propositions $\mathbf{f} -\!\!< a$ and $a -\!\!< \mathbf{v}$ are true, and either one or the other of $\mathbf{v} -\!\!< a$ or $a -\!\!< \mathbf{f}$ are true, depending upon the truth or falsity of a, and going on to further analyze the truth-functional properties of the "claw"[7].

[7]For the historical background for Peirce's work in truth-functional logic and his development of truth tables, along with an account of his own work in truth-functional logic and truth tables for triadic logic, see [3]. For further details, and an account of Peirce's truth tables for bivalent logic of 1883–93, see [4].

In Peirce's conception, as found in his "Description of a notation for the logic of relatives…" of 1870 [64], the Aristotelian syllogism becomes a hypothetical proposition, with material implication as its main connective; he writes *Barbara* as

$$\begin{array}{rl} \text{If} & x -\!\!< y, \\ \text{and} & y -\!\!< z \\ \text{then} & x -\!\!< z. \end{array}$$

In Frege's *Begriffsschrift* notation [24, §6] this same argument would be rendered as



which, in the familiar Peano-Russell notation, is just $[(x \supset y) \bullet (y \supset z)] \supset (x \supset z)$. Ironically, Schröder, even complained about what he took to be Peirce's (and MacColl's) efforts to base logic on the propositional calculus, which he called the "MacColl-Peircean propositional logic" (see [90, I, pp. 89-592] and especially [90, II, p. 276]).

John Shosky [95] distinguished between the truth table technique, what we typically call *truth-functional analysis*, from the truth table device, the arrangement of truth-functional analysis in matrix form, what we typically call the *truth table*. In opposition to the canonical view that the earliest identifiable truth tables were presented, nearly simultaneously, between 1920 and 1922 by Łukasiewicz [53], Post [76] and [77], and Wittgenstein [114], Shosky provided an example of truth tables discovered on the verso of a typescript by Russell dating from 1912. He neglects the evidence that Peirce had devised truth tables for a trivalent logic as early as 1902–09 and had worked out a truth table for the sixteen binary propositional connectives, the latter based upon the work of Christine Ladd [46, esp. p. 62], which in turn was based upon the work of Jevons [44, p. 135] (see [71, 4.262]; see also [49], [23], [15], [103], [115], as well as [49], [4], and [5]). Moreover, while carrying out his work in 1883–84 on what was to planned as the second half of the article of 1880 "On the Algebra of Logic" for the *American Journal of Mathematics* on the algebra of relations, Peirce produced a manuscript "On the Algebra of Logic" and the accompanying supplement, in which we find what unequivocally would today be labeled as an indirect or abbreviated truth table for the formula $\{\overline{((a -\!\!\!< b)} -\!\!\!< c) -\!\!\!< d\} -\!\!\!< e$, as follows:

$$\begin{array}{cccccc}
\{\overline{((a -\!\!\!< b)} -\!\!\!< c) -\!\!\!< d\} -\!\!\!< e \\
\mathbf{f} \quad \mathbf{f} \quad \mathbf{f} \quad \mathbf{f} -\!\!\!< \mathbf{f} \\
\mathbf{f} \quad \mathbf{v} \qquad\quad \mathbf{v} \quad \mathbf{f} \\
- \quad - \quad - \quad - \ \mathbf{v}
\end{array}$$

(see [4]). The whole of the undated eighteen-page manuscript "Logic of Relatives", also identified as composed *circa* 1883–84, is devoted to a truth-functional analysis of the conditional, which includes the equivalent, in list form, of the truth-table for $x -\!\!\!< y$, as follows:

$$\begin{array}{cccc}
 & x -\!\!\!< y & & \\
 & \text{is true} & \text{is false} & \\
 & \text{when} & \text{when} & \\
x = \mathbf{f} & y = \mathbf{f} & x = \mathbf{v} & y = \mathbf{f} \\
x = \mathbf{f} & y = \mathbf{v} & & \\
x = \mathbf{v} & y = \mathbf{v} & &
\end{array}$$

Peirce also wrote there that: "It is plain that $x -\!\!\!< y -\!\!\!< z$ is false only if $x = \mathbf{v}$, $(y -\!\!\!< z) = \mathbf{f}$, that is only if $x = \mathbf{v}, y = \mathbf{v}, z = \mathbf{f}\ldots$"

Finally, in the undated manuscript "An Outline Sketch of Synechistic Philosophy" identified as composed in 1893, we have an unmistakable example of a truth-table matrix for a proposition and its negation, as follows:

	t	f
t	t	f
f	t	t

which is clearly and unmistakably equivalent to the truth-table matrix for $x -\!\!\!< y$ in the contemporary configuration, expressing the same values as we note in Peirce's list in the 1883–84 manuscript "Logic of Relatives". That the multiplication matrices are the most probable inspiration for Peirce's truth-table matrix is that it appears alongside matrices for a multiplicative two-term expression of linear algebra for $\{i, j\}$ and $\{i, i - j\}$. Indeed, it is virtually the same table, and in roughly — i.e., apart from inverting the location within the respective tables for antecedent and consequent — the same configuration as that found in the notes, taken in April 1914 by Thomas Stearns Eliot (1888–1965) in Russell's Harvard University logic course (as reproduced at [95, p. 23]), where we have:

$$p \vee q \quad q\left\{\overbrace{\begin{array}{c|c|c} & \mathrm{T} & \mathrm{F} \\ \hline \mathrm{T} & \mathrm{T} & \mathrm{T} \\ \hline \mathrm{F} & \mathrm{T} & \mathrm{F} \end{array}}^{p}\right. \qquad p \supset q \quad q\left\{\overbrace{\begin{array}{c|c|c} & \mathrm{T} & \mathrm{F} \\ \hline \mathrm{T} & \mathrm{T} & \mathrm{T} \\ \hline \mathrm{F} & \mathrm{F} & \mathrm{T} \end{array}}^{p}\right. \qquad {\sim}p \vee {\sim}q \quad q\left\{\overbrace{\begin{array}{c|c|c} & \mathrm{T} & \mathrm{F} \\ \hline \mathrm{T} & \mathrm{T} & \mathrm{T} \\ \hline \mathrm{F} & \mathrm{T} & \mathrm{F} \end{array}}^{p}\right.$$

The first published instance by Peirce of a truth-functional analysis which satisfies the conditions for truth tables, but not as yet constructed in tabular form, is in Peirce's 1885 paper "On the Algebra of Logic: A Contribution to the Philosophy of Notation" [69, p. 189–190] in which he gave a proof, using the truth-table method of what has come to be known as *Peirce's Law*: $((A \to B) \to A) \to A$, his "fifth icon", whose validity he tested using truth-functional analysis. In an untitled paper written in 1902 as subsequently published posthumously [71, 260–262][8], Peirce displayed the following table for three terms, x, y, z, writing **v** for *true* and **f** for *false*:

x	y	z
v	**v**	**v**
v	**f**	**f**
f	**v**	**f**
f	**f**	**v**

where z is the term derived from an [undefined] logical operation on the terms x and y. In February 1909, while working on his trivalent logic, Peirce applied the tablular method to various connectives, for example negation of x, as $\overline{x}$, in his *Logic Notebook 1865–1909* (see [23]), and with **V**, **F**, and **L** are the truth-values true, false, and indeterminate or unknown respectively, which he called "limit"[9].

[8]Now identified as "The Simplest Mathematics"; January 1902 (Chapter III. The Simplest Mathematics (Logic III)). For the truth table matrix, see [71, 4.262].

[9]Under the title "On Triadic Logic", the relevant fragment, dated 23 February 1909, was published in [36, p. 217–224].

Russell's rendition of Wittgenstein's tabular definition of negation, as written out on the verso of a page from Russell's transcript notes, using 'W' (wahr) and 'F' (falsch) (see [95, p. 20]), where the negation of p is written out by Wittgenstein as $p \between q$, with Russell adding '$=\sim p$", to yield: $p \between q =\sim p$ is

p	q
W	W
W	F
F	W
F	F

Within the same time frame as the work on truth tables of Post, Łukasiewicz, and Wittgenstein, is the work of Ivan Ivanovich Zhegalkin (1896–1947), who, independently provided a Boolean-valued truth-functional analysis of propositions of propositional logic [117] and its extension to first-order logic [118], undertaking to apply truth tables to the formulas of propositional calculus and first-order predicate calculus. He employed a technique resembling those employed by Peirce-Mitchell-Schröder, Löwenheim, Skolem, and Jacques Herbrand (1908–1931) to write out an expansion of logical polynomials and assigning them Boolean values[10].

2 Decomposition of propositions into function and argument instead of into subject and predicate

In the opening sentence of his *Methods of Logic* [81, p. i], clearly referring to the year that Frege's *Begriffsschrift* was published, Quine wrote: "Logic is an old subject, and since 1879 it has been a great one". J. Brent Crouch [18, p. 155], quoting Quine, takes this as evidence that historiography continues to hold Frege's work as seminal and the origin of modern mathematical logic, and appears in the main to concur, saying that Frege's *Begriffsschrift* is "one of the first published accounts of a logical system or calculus with quantification and a function-argument analysis of propositions. There can be no doubt as to the importance of these introductions,

[10]See Part 2, "3. Peirce's quantification theory, based on a system of axioms and inference rules" for equations of the logic of relatives as logical polynomials and the Peirce-Schröder method of expansion of quantified formulas as logical sums and products.

and, indeed, Frege's orientation and advances, if not his particular system, have proven to be highly significant for much of mathematical logic and research pertaining to the foundations of mathematics". This ignores a considerably important aspect of the history of logic, and more particularly much of the motivation which the Booleans had in developing a "symbolical algebra".

The "Booleans" were well acquainted, from the 1820s onward, with the most recent French work in function theory of their day, and although they did not explicitly employ a function-theoretic syntax in their analysis of propositions, they adopted the French algebraic approach, favored by Joseph-Louis Lagrange (1736–1813), Adrien-Marie Legendre (1752–1833), and Augustin-Louis Cauchy (1789–1857), to functions over the function-argument syntax which Frege adapted from the analysis, including in particular as found in the work of his teacher Karl Weierstrass (1815–1897). So there was some justification in the assertion by Russell that the algebraic logicians were more concerned with logical equations than with implication[11].

We see this in the way that the Peirceans approached indexed logical polynomials. It it easier to understand the full implications when examined from the perspective of quantification theory. But, as a preliminary, we can consider Peirce's logic of relations and how to interpret these function-theoretically.

If an early example is wanted, consider, e.g., Boole's definition in *An Investigation of the Laws of Thought* [12, p. 71]: "Any algebraic expression involving the symbol x is termed a function of x, and may be represented under the abbreviated form $f(x)$," following which binary functions and n-ary functions are allowed, along with details for dealing with these as elements of logical equations in a Boolean-valued universe.

We may summarize the crucial distinctions by describing the core of Aristotle's formal logic as a syllogistic logic, or logic of terms, and the propositions and syllogisms of logic having a subject-predicate syntax, entirely linguistic, the principle connective for which, the copula, is the copula of existence, which is metaphysically based

[11]On the connections between the work in the algebra of functions, or "operational calculus" and the development of algebraic logic, in particular by De Morgan and Boole, see, e.g. [47], [48], [79], [80], and [59]. For Boole's work in particular on the role of functions in his algebraic logic, see, e.g. [84].

and concerns the inherence of a property, whose reference is the predicate, in a subject; Boole's formal logic as a logic of classes, the terms of which represent classes, and the copula being the copula of class inclusion, expressed algebraically; and De Morgan's formal logic being a logic of relations whose terms are relata, the copula for which is a relation, expressed algebraically. It is possible then to say that Peirce in his development dealt with each of these logics, Aristotle's, Boole's, and De Morgan's, in turn, and arrived at a formal logic which combined, and then went beyond, each of these, by allowing his copula of illation to hold, depending upon context, for terms of syllogisms, classes, and propositions, and expanding these to develop a quantification theory as well, in his logic of relatives.

Gilbert Ryle (1900–1976) although admittedly acknowledging that the idea of *relation* and the resulting relational inferences were "made respectable" by De Morgan nevertheless attributed to Russell, in *The Principles of Mathematics* [85] — rather than to Peirce — their codification and to Russell — rather than to Peirce and Schröder — their acceptance, again by Russell in the *Principles*. Ryle [88, p. 9–10] wrote: "The potentialities of the xRy relational pattern, as against the overworked s–p pattern, were soon highly esteemed by philosophers, who hoped by means of it to order all sorts of recalitrances in the notions of knowing, believing. . . ".

Mitchell [55] defined indexed logical polynomials, such as '$l_{i,j}$', as functions of a class of terms, in which for the logical polynomial F as a function of a class of terms $a, b, \ldots,$ of the universe of discourse U, $F1$ is defined as "All U is F" and Fu is defined as "Some U is F", and Peirce defined identity in second-order logic on the basis of Leibniz's Identity of Indiscernibles, as $l_{i,j}$, meaning that every predicate is true/false of both i, j. What Mitchell produces is a refinement of the notation that Peirce himself had devised for his algebra of relatives from 1867 forward, enabling the distinction between the terms of the polynomials by indexing of terms, and adding the index of the quantifiers ranging over the terms of the polynomials. Mitchell's improvements were immediately adopted by Peirce [68] and enabled Peirce to develop, as we shall see, a first-order quantification theory fully as expressive as Frege's.

The necessary apparatus to translate between relational expressions and functional expresses is provided, in contemporary terms, by Ramsey's Maxim (see, e.g. [111, I, p. 27]). Suppose that we have a binary relation aRb. This is logically equivalent to the function-theoretic expression $R(a, b)$, where R is a binary function taking a and b as its arguments. A function is a relation, but a special kind of relation, then, which associates one element of the *domain* (the universe of objects or terms comprising the arguments of the function) to precisely one element of the *range* (or *codomain*, the universe of objects or terms comprising the values of the function). So, clearly, Pierce's logical polynomials expressing relations can be rewritten in function-theoretical terms.

This takes us to the next point: that among Frege's creations that characterize what is different about the mathematical logic created by Frege and helps define the "Fregean revolution", *viz.*, a quantification theory based on a system of axioms and inference rules.

3 Peirce's quantification theory based on a system of axioms and inference rules

Despite numerous historical evidences to the contrary, as has been suggested as long ago as the 1950s, e.g. by — in chronological order — George D. W. Berry [11], Richard Beatty [10], and the late Richard Milton Martin (1916–1985) [54], we still find, even in the most recent issue of the Peirce *Transactions*, repetition by J. Brent Crouch [18] of the old assertion by Quine from his *Methods of Logic* [81, p. i]. Crouch [18, p. 155] thus writes: "In the opening sentence of his *Methods of Logic*, W. V. O. Quine writes, 'Logic is an old subject, and since 1879 it has been a great one'. Quine is referring to the year in which Gottlob Frege presented his *Begriffschrift*, or 'concept–script', one of the first published accounts of a logical system or calculus with quantification and a function–argument analysis of propositions. There can be no doubt as to the importance of these introductions, and, indeed, Frege's orientation and advances, if not his particular system, have proven to be highly significant for much of mathematical logic and research pertaining to the foundations of mathematics". And this despite the fact that Quine himself eventually repudiated this assertion, long before it came to the attention of Crouch. Quine himself, that is, ultimately acknowledged in 1985 [82] and again in 1995 [83] that Peirce had developed a quantification theory just a few years after Frege. More accurately, Quine began developing a quantification theory more than a decade prior to the publication of Frege's *Begriffsschrift* of 1879 [24], but admittedly did not have a fully developed quantification theory until 1885, six years after the appearance of the *Begriffsschrift*.

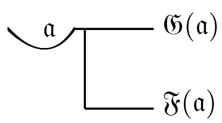
Peirce's efforts to develop what was to become his first-order quantification theory in his 1883 "The Logic of Relatives" [68] begun at least as early as 1867, in his "On an Improvement in Boole's Calculus of Logic" [63] and further enhanced by the notational innovations by O. H. Mitchell in his "On a New Algebra of Logic" of 1883 [55], and more fully articulated and perfected two years later in Peirce's "On the Algebra of Logic: A Contribution to the Philosophy of Notation" [69] in which we have not only a first-order quantification theory but also a second-order quantification theory, the latter admittedly not yet as well developed as the first-order theory. But even more importantly that Pierce's system dominated logic in the final decades of the nineteenth century and first two decades of the twentieth largely through the efforts of Schröder, in particular in his *magnum opus*, *Vorlesungen über die Algebra der Logik* [90], whereas Frege's work exerted scant influence[12], and that largely negative, until brought to the attention of the wider community by Russell, beginning with his *Principles of Mathematics* of 1903 [85], largely through the introduction of and efforts to circumvent or solve the Russell paradox. Thus, by 1885, Peirce had not only a fully developed first-order theory, which he called the *icon*

[12][14] collects and provides English translations of most of the reviews of the *Begriffsschrift* that appeared immediately following its publication and gives the canonical view of the reception of Frege's *Begriffsschrift* [14, p. 15–20]. Most of those reviews, like Venn's [107], were only a few pages long, if that, and emphasized the "cumbrousness" of the notation and lack of originality of the contents. The most extensive and what was that of Schröder [89], which remarks upon the lack of originality and undertakes a detailed discussion of the contents as compared with his own work and the work of Peirce, criticizing in particular Frege's failure to familiarize himself with the work of the algebraic logicians. Schröder's review sparked a literary battle between himself and Frege and their respective defenders. [99] advances the conception that Frege's reputation was established by Russell, while [108] argues that Frege's *Begriffsschrift* received a respectable amount of attention after its appearance in consideration of the fact of its authorship by an investigator making his first entry into the field.

of the second intention, but a good beginning at a second-order theory, as found in his "On the Algebra of Logic: A Contribution to the Philosophy of Notation" [69].

The final version of Peirce's first-order theory uses indices for enumerating and distinguishing the objects considered in the Boolean part of an equation as well as indices for quantifiers, a concept taken from Mitchell. Peirce denoted the existential and universal quantifiers by 'Σ_i' and 'Π_i' respectively, as logical sums and products, and individual variables $i, j, \ldots$, are assigned to both quantifiers and predicates, that is, to both quantifiers and to the distinct terms of the logical polynomials of the Boolean part of the equation. He then wrote '$l_{i,j}$' for 'i is the lover of j'. Then "Everybody loves somebody" is written in Peirce's quantified logic of relatives as $\Pi_i \Sigma_j l_{i,j}$ i.e. as "Everybody is the lover of somebody". In Peirce's own exact expression, as found in his "On the Logic of Relatives" [47, p. 200], we have "$\Pi_i \Sigma_j l_{i,j} > 0$ means that everything is a lover of something". That is, Peirce defined the existential and universal quantifiers by 'Σ_i' and 'Π_i' respectively, as logical sums and products, e.g., $\Sigma_i x_i = x_i + x_j + x_k \ldots$, and $\Pi_i x_i = x_i \exists x_j \exists x_k$, and individual variables $i, j, k, \ldots$, are assigned both to quantifiers and predicates. In the Peano–Russell notation these are of course $(\exists x)F(x) = F(x_i) \vee F(x_j) \vee F(x_k)$ and are $(\forall x)F(x) = F(x_i) \bullet F(x_j) \bullet F(x_k)$ respectively.

The difference between the Peirce–Mitchell–Schröder formulation, then, of quantified propositions is purely cosmetic, and both are significantly notationally simpler than Frege's. Frege's rendition of the proposition "For all x, if x is F, then x is G", i.e. $(\forall x)[F(x) \supset G(x)]$, for example, is



Not only that; recently, Calixto Badesa [8], [9] and Geraldine Brady [13] traced the details of the development of the origins of the special branches of modern mathematical logic known as *model theory*, which is concerned with the properties of consistency, completeness, and independence of mathematical theories including of course the various logical systems, and *proof theory*, concerned with studying the soundness of proofs within a mathematical or logical system. This route runs from Peirce and his student Mitchell, through Schröder to Löwenheim, Skolem, and — I would add — Herbrand. It was based upon the Peirce–Mitchell technique for elimination of quantifiers by quantifier expansion that the Löwenheim-Skolem Theorem [LST] allows logicians to determine the validity within a theory of the formulas of the theory and is in turn the basis for Herbrand's Fundamental Theorem [FT] which can best be understood as a strong version of LST[13].

Model theory, and especially LST, developed in large measure from Löwenheim's 1915 "Über Möglichkeiten im Relativkalkul" [52], Skolem's 1920 "Logisch-kombinatorische Untersuchungen über die Erfüllbarkeit oder Beweisbarkeit mathematischer Sätze..." [96] and Herbrand's 1930 doctoral thesis *Recherches sur la théorie des démonstration* [40], especially its fifth chapter, using Peirce and Schröder's techniques. Proof theory and especially FT arose in the the work of Herbrand [40] studying the work of Hilbert, using Peirce and Schröder's techniques and starting from the work of Löwenheim and Skolem, and most especially of Lowenheim. Meanwhile Alfred Tarski (1902—1983) inspired by the work of Peirce and Schröder, and Tarski's students, advanced algebraic logic, beginning in 1941 (see [101]; see also [3], [4], [7]) giving us Tarski's and Steven Givant's work (in particular in their *Formalization of Set Theory without Variables* [102] on Peirce's Fundamental Theorem (see [3]). Tarski's doctoral thesis (see [100]) displayed a keen awareness of Schröder's work; and both he [100] and Cooper Harold Langford (1895—1964) (see [50]) used the Peirce-Schröder quantifier elimination method as found in the work of Löwenheim and Skolem, although Langford gave no indication that he was aware of the work of either Löwenheim or Skolem (see [56, p. 248]). Tarski [101, p. 73–74] is very explicit in clearly expressing the influence and inspiration of Schröder, and especially of Peirce, as the origin of his own work.

The original version of what came to be known as LST as stated by Löwenheim [52, p. 450, §2, p. Satz 2] is simply that: *If a well-formed formula of first-order predicate logic is satisfiable, then it is* $\aleph_0$*-satisfiable.* Not only that: in the manuscript "The Logic of Relatives: Qualitative and Quantitative" of 1886 Peirce himself is

[13] [2] includes a discussion of the relation of FT to LST.

making use of what is essentially a finite version of LST (see [74, p. 374] and the associated note at [74, p. 464, n. 374.31-36]), that

If F is satisfiable in every domain, then F is $\aleph_0$-satisfiable;

that is:

If F is n-satisfiable, then F is $(n+1)$-satisfiable

and, indeed, his proof was in all respects similar to that which later appeared in Löwenheim's 1915 paper [52], where, for any $\kappa < \lambda$, a product vanishes (i.e. is satisfiable), and its κ^{th} term vanishes. In its most modern and strict form the LST says that: *For a κ-ary universe, a well-formed formula F is $\aleph_0$-satisfiable if it is κ-valid for every finite κ, provided there is no finite domain in which it is invalid.*

Herbrand's FT was developed in order to answer the question: *what finite sense can generally be ascribed to the truth property of a formula with quantifiers, particularly the existential quantifier, in an infinite universe?* The modern statement of FT is: *For some formula F of classical quantification theory, an infinite sequence of quantifier-free formulas $F_1, F_2, \ldots,$ can be effectively generated, for F provable in (any standard) quantification theory, if and only if there exists a κ such that F is (sententially) valid; and a proof of F can be obtained from F_κ.*

For both LST and FT the elimination of quantifiers carried out as expansion in terms of logical sums and products, as defined by Mitchell-Peirce-Schröder, is an essential tool. Moreover, it was precisely the Mitchell–Peirce–Schröder definition, in particular as articulated by Schröder in his *Algebra der Logik*, that provided this tool for Löwenheim, Skolem, and Herbrand.

4 Peirce's definition of infinite sequence and natural number in terms of logical notions (i.e. the logicization of mathematics)

Frege developed his theory of sequences defined in terms of logical notions in the third and final part of the *Begriffsschrift* [24, th. III, §§23–31], giving us first the ancestral relation and then the proper ancestral, the latter required in order to guarantee that the sequences arrived at are well-ordered. With the ancestral proper he is finally able to define mathematical induction as well.

In "On the Logic of Number" of 1881 [66] Peirce set forth an axiomatization of number theory, starting from his definition of *finite set*, to obtain natural numbers. Given a set N and R a relation on N, with 1 an element of N; with definitions of *minimum*, *maximum*, and *predecessor* with respect to R and N given, Peirce's axioms in modern terminology are:

1. N is partially ordered by R.
2. N is connected by R.
3. N is closed with respect to predecessors.
4. 1 is the minimum element of N; N has no maximum.
5. Mathematical induction holds for N.

It is in this context important to consider Sluga's testimony [97, p. 96–180] that it took Frege five years beyond the completion of date 18 December 1897 for the *Begriffschrift* to provide the promised elucidation of the concept of number following his recognition that there are logical objects and realizing that he had not successfully incorporated that recognition into the *Begriffsschrift*. Certainly, if Pierce in 1881 had not yet developed a complete and coherent logical theory of number, neither, then, had Frege before 1884 in *Die Grundlagen der Arithmetik* [28].

The only significant differences between the axiomatization of number theory by Richard Dedekind (1831—1914) in *Was sind und was sollen die Zahlen* [20] and Pierce's was that Dedekind started from *infinite sets* rather than finite sets in defining natural numbers, and that Dedekind is explicitly and specifically concerned with the real number continuum, that is, with infinite sets. This is because Peirce rejected the real continuum in favor of Leibnizian infinitesimals. Moreover, Peirce rejected transfinite sets maintaining the position that Cantor and Dedekind were unable to logically support the construction of the actual infinite, and that only the potential infinite could be established logically[14]. Nevertheless, Dedekind's set

[14]For discussions of Peirce's criticisms of Cantor's and Dedekind's set theory see e.g. [19] and [57].

theory and Peirce's and consequently their respective axiomatizations of number theory are equivalent. This equivalence of Peirce's axiomatization of natural numbers to that of Dedekind (as well as that of Giuseppe Peano's 1889 *Arithmetices principia* [60]) is demonstrated by Paul Bartram Shields (in [93] and [94]). The similarities between Peirce's axiom system and Dedekind's led Peirce to accuse Dedekind of plagiarizing his "Logic of Number". Francesco Gana [31] examined Peirce' claim against Dedekind and concluded that it was unjustified, that Dedekind was unfamiliar with Peirce's work.

Peirce did not turn his attention specifically and explicitly to infinite sets until engaging and studying the work of Dedekind and Georg Cantor (1845—1918), especially Cantor, and did not publish any of his further work in detail, although he did offer some hints in publications such as his "The Regenerated Logic" of 1896 [70][15].

The technical centerpiece of Dedekind's mathematical work was in number theory, especially algebraic number theory. His primary motivation was to provide a foundation for mathematics and in particular to find a rigorous definition of real numbers and of the real-number continuum upon which to establish mathematical analysis in the style of Karl Weierstrass. This means that he sought to axiomatize the theory of numbers based upon that rigorous definition of the real numbers and the construction of the real number system and the continuum which could be employed in defining the theory of limits of a function for use in the differential and integral calculus, real analysis, and related areas of function theory. His concern, in short, was with the rigorization and arithmetization of analysis.

For Peirce, on the other hand, the object behind his axiomatization of the system of natural numbers was stated in "On the Logic of Number" [66, p. 85] as establishing that "elementary propositions concerning number… are rendered [true] by the usual demonstrations". He therefore undertook "to show that they are strictly syllogistic consequences from a few primary propositions", and he asserted "the logical origin of these latter, which I here regard as definitions", but for the time being takes as given.

[15]Some of Peirce's published writings and manuscripts relating to mathematics, including set theory, have recently appeared in [75].

In short. Peirce here wants to establish that the system of natural numbers can be developed axiomatically by deductive methods (i.e. "syllogistically") applying his logic of relations and that the system of natural numbers can be constructed by this means on the basis of some logical definitions[16].

Whether this is tantamount, from the philosopher's standpoint, to the logicism of Frege has been the subject of considerable debate and likewise depends upon whether one distinguishes, e.g., between logicism and "protologicism"[17].

5 Peirce's presentation and clarification of the concept of formal system

I would suggest that, even if Peirce nowhere formally and explicitly set forth his conception of a formal system, it is present and implicit in much of his work, in "On the Logic of Number" [66] for example, in the explication of the purpose of his project of deducing, in a logically coherent and explicit manner, and in strict accordance with deductive inference rules on the basis of a few essential and carefully chosen and well-defined "primary propositions" — definitions, and the propositions requisite for deriving and expressing the elementary propositions — axioms — of mathematics concerning numbers.

We consider the assertion by Geraldine Brady, who wrote in *From Peirce to Skolem* [13, p. 14] of Peirce's "failure to provide a formal system of logic, in the sense of Frege's. The motivation to create a formal system is lacking in Peirce...", and he thus "made no attempt at an all-encompassing formal system". We are constrained to admit that there is in Peirce no one set of axioms by which to derive all of logic, still less, all of mathematics. Rather, what we have is an on-going experiment in developing the basis of a logic that answers to specific purposes and has as its ultimate goal the creation of a calculus that serves as a tool for the wider conception

[16] We understand, here, however, that by the time he wrote those lines, Peirce had already translated syllogisms as implications within his algebraic logic (see "Peirce's propositional calculus with a truth-functional definition of connectives, especially the conditional").

[17] There is a vast literature on the question of whether or not Peirce was or was not a logicist, and, if so, to what extent; part of a lengthy and continuing debate, [35], [41] [58], and [21] are among a very small sampling of the more recent entries in this discussion.

of logic as a theory of signs. Rephrased, Peirce did not, either in one complete and coherent work or even over time, produce a single, all-encompassing formal system; rather, he produced a series of formal systems, often informally presented. Moreover, these systems, much like the systems of his predecessors and colleagues, most notably De Morgan, Boole, and Schröder, worked not with a universal universe of discourse, or universal domain, such as Frege's *Universum*, but with specific universes of discourse. Any one of his formal systems, that is, applied to what Schröder termed a *Gebiet*. In other words, Peirce presented formal systems each one of which was, in Schröder's terminology, a *Gebietkalkul*. (This is the basis of the discussion between Peano and Schröder of the comparative values of Peano's pasigraphy and Peirce's logical system[18].)

6 Peirce's logic and semiotics, making possible, and giving, a use of logic for philosophical investigations (especially for philosophy of language)

Van Heijenoort's understanding of Frege's conception of application of his logical theory for philosophical investigations and in particular for philosophy of language can be seen as two-fold, although van Heijenoort in particular instances envisioned it in terms of analytic philosophy. On the one hand, Frege's logicist program was understood as the centerpiece, and concerned the articulation of sciences, mathematics included, developed within the structure of the logical theory; on the other hand, it is understood more broadly as developing the logical theory as a universal language.

Distinguishing *logic as calculus* and *logic as language* van Heijenoort [104, p. 1–2] (see also [105]), taking his cue directly from Frege (see [24, p. XI]) understood the "Booleans" or algebraic logicians as concerned to treat logic as a mere calculus (see [25], [26], [27], [29]), whereas Frege and the "Fregeans" see their logic to be both a calculus and a language, but first and foremost as a language. It is in this regard that Frege (in [29]) criticized Schröder, although he had the entire algebraic tradition in mind, from Boole to Schröder (see

[18] See Schröder [91] and [92], responding to specific Peano's claim, at [61, p. 52], and in general to the work of Peano and his school in their publications in the *Rivista di matematiche* and the *Formulario*; see also [62]).

[25], [26] [27], [29]). This was in response to Schröder's assertion, in his review of 1880 of Frege's *Begriffsschrift*, that Frege's system "does not differ essentially from Boole's formula language", adding: "With regard to its major content the *Begriffsschrift* could actually be considered a *transcription* of the Boolean formula language" [89, p. 83][19].

As early as 1865 Peirce defined logic as the science of the conditions which enable symbols in general to refer to objects[20]. For Peirce (as expressed in "The Nature of Mathematics" of *ca.* 1895; see [75, p. 7]) "Logic is the science which examines signs, ascertains what is essential to being sign and describes their fundamentally different varieties, inquires into the general conditions of their truth, and states these with formal accuracy, and investigates the law of development of thought, accurately states it and enumerates its fundamentally different modes of working", while what he called "critic" is that part of logic which is concerned explicitly with deduction, and is, thus, a calculus. This suggests, to me at least, that for Peirce logic is both a calculus (as critic) and a language (as semiotic theory); a calculus in the narrow sense, a language in the broader sense.

7 Peirce's distinguishing singular propositions, such as "Socrates is mortal", from universal propositions such as "All Greeks are mortal"

The problem of distinguishing singular from universal propositions was one of the primary, if not the primary, initial motivation for Peirce in undertaking his work in "On an Improvement in Boole's Calculus of Logic" [63]. That work had the goal of improving Boole's algebraic logic by developing a quantification theory which would introduce a more perspicuous and efficacious use of universal and existential quantifiers into Boole's algebra and likewise permit a

[19] My emphasis. Schröder [89, p. 83] first writes: "Am wirksamsten mochte aber zur Richtigstellung der Ansichten die begrundete Bemerkung beitragen dass die Frege'sche 'Begriffsschrift' gar nicht so wesentlich von Boole's Formelsprache sich wie die Jenaer Recension vielleicht auch der Verfasser ausgemacht annimmt", and then [89, p. 84]: "Diesem ihrem Hauptinhalte nach konnte man die Begriffsschrift geradezu eine Umschreibung der Booleschen Formelsprache nennen. . . "

[20] I owe this historical point to Nathan Houser.

clear distinction between singular propositions and universal propositions.

That work comes to full fruition in 1885 with the Mitchell–Peirce notation for quantified formulas with both indexed (as we discussed in consideration of Peirce's quantification theory based on a system of axioms) and inference rules (see also [54]).

Nevertheless singular propositions, especially those in which definite descriptions rather than proper names occur, have also been termed "Russellian propositions" so-called because of their designation by Russell in terms of the iota quantifier or iota operator employing an inverted iota to be read as "the individual x"; thus, e.g., $(\imath x)(x)$ (see [111, I, p. 32]), and we have, e.g.: "Scott $=$ $(\imath x)(x$ wrote Waverley)".

In *Principia Mathematica* [111, I, p. 54] Whitehead and Russell write "$\phi!x$" for the first-order function of an individual, that is, for any value of the variable which involves only individuals; thus, for example, we might write "$\mu!$"(Socrates) for "Socrates is a man". In the section on "Descriptions" of *Principia* [111, I, p. 181] the iota operator replaces the notation "$\phi!x$" for singulars with "$(\imath x)\Phi(x)$" so that one can deal with definite descriptions as well as names of individuals.

8 On the relations between the algebraic logicians and the "logisticians"

The concept of a distinction between logic as calculus and logic as language was briefly remarked by Russell's student Philip Edward Bertrand Jourdain (1879—1919) in the "Preface" [45] to the English translation [17] by Lydia Gillingham Robinson (1875–?) of *L'algèbra de la logique* [16] of Louis Couturat (1868—1914), a work which fell into the former group, and of the dual development of symbolic logic along these two lines; but Jourdain also admits that the line of demarcation between logicians, such as Boole, De Morgan, Jevons, Venn, Peirce, Schröder, and Ladd-Franklin, working in the aspect of symbolic logic as a *calculus ratiocinator*, and those, the "logisiticans", such as Frege, Peano, and Russell, working in its aspect as a *lingua characteristica* is neither fixed nor precise. He wrote [32, p. iv]: "We can shortly, but very fairly accurately, characterize the dual development of the theory of symbolic logic during the last sixty years as follows: The calculus ratiocinator aspect of symbolic logic was developed by Boole, De Morgan, Jevons, Venn, C. S. Peirce, Schröder, Mrs. Ladd-Franklin and others; the lingua characteristica aspect was developed by Frege, Peano and Russell. Of course there is no hard and fast boundary-line between the domains of these two parties. Thus Peirce and Schröder early began to work at the foundations of arithmetic with the help of the calculus of relations; and thus they did not consider the logical calculus merely as an interesting branch of algebra. Then Peano paid particular attention to the calculative aspect of his symbolism. Frege has remarked that his own symbolism is meant to be a *calculus ratiocinator* as well as a *lingua characteristica*, but the using of Frege's symbolism as a calculus would be rather like using a three-legged stand-camera for what is called "snap-shot" photography, and one of the outwardly most noticeable things about Russell's work is his combination of the symbolisms of Frege and Peano in such a way as to preserve nearly all of the merits of each". Jourdain's reference to "'snap-shot' photography" might well put us in mind of Peirce's comparison of his work in logic with that of Russell when he wrote (see [72, p. 91]) that: "My analyses of reasoning surpasses in thoroughness all that has ever been done in print, whether in words or in symbols — all that De Morgan, Dedekind, Schröder, Peano, Russell, and others have done — to such a degree as to remind one of the differences between a pencil sketch of a scene and a photograph of it".

There is little doubt that Peirce was aware of Frege's work. We know that, at the very least, Christine Ladd-Franklin included (at [46, pp. 70-71]) Frege's *Begriffsschrift* in the bibliography of her "On the Algebra of Logic" for *Studies in Logic* [46] edited by Peirce; that his student Allan Marquand owned a copy of Frege's *Begriffsschrift*; and that the Johns Hopkins University library owned a copy, acquired on 5 April 1881, while Peirce was on the Hopkins faculty; that Peirce received an offprint of Schröder's review of the *Begriffsschrift* [89], and that it has a note in green pencil on it in Peirce's hand: "Formal Logic"[21]; and it is held that Pierce may have sent someone at the University of Jena — where Frege was on the faculty —

[21]See [37], [38], [39, p. 134–137] for discussion of what is and is not known about the interactions between Peirce and Frege.

offprints of his own work, but it is unclear whether in fact he did so, or to whom[22].

How, then, shall we characterize the relation between the "Booleans" and the "Fregeans"? More concretely, how characterize their respective influences upon one another and specifically between Peirce and Frege or relative independence of their achievements in logic?

Randall R. Dipert [22] noted that Peirce was not averse to employing numerical values, not just 1 and 0, for evaluating the truth of propositions, rather than *true* and *false*, but a range of numerical values. He also noted that the formulas employed by Peirce were depending upon the context in which they occurred allowed to have different interpretations so that their terms might represent classes rather than propositions; and hence it would be over-simplifying the history of logic to argue that Peirce was a precursor in these respects of Frege, or anticipated Frege or someone else, certainly not directly, the more so since, whatever Frege knew about Peirce, he first learned belatedly and second-hand through Schröder's numerous references to Peirce in the *Algebra der Logik*.

The heart of the matter for us is to attempt to assess the question of how Peircean the "Fregean revolution" in logic. That is: to what extent did Peirce (and his students and adherents) obtain those elements that characterize the "Fregean" revolution in logic? Our reply must be: "To a considerable extent" but not necessarily all at once and in one particular publication.

To this end, we would do well to borrow the assessment of Jay Zeman who wrote [116, p. 1] that: "Peirce developed independently of the Frege–Peano–Russell (FPR) tradition all of the key formal results of that tradition. He did this in an algebraic format similar to that employed later in *Principia Mathematica*..."

Our account of the criteria and conditions that van Heijenoort set forth as the defining characteristics of modern mathematical logic that have been credited to Frege and in virtue of which Frege is acclaimed the originator, and hence for which he has been judged to be the founder of modern mathematical logic provides substantiation for the assertion by Zeman that Peirce and his coworkers achieved

[22] I owe this point to N. Houser but neither of us have as yet been able to discover the details.

substantially all if not all in the same precise articulation and formulation as Frege, nor everything within the confines of a single work or a single moment. What can be asserted is that over the period of the most productive span of his lifetime as a researcher into formal logic, effectively between the mid-1860s to mid-1890s, Peirce, piecemeal and haltingly, achieved very similar if not quite the same results as did Frege, the latter primarily, but not exclusively, within the confines of his *Begriffsschrift* of 1879. But throughout this period and well into the next it was the work in logic of Peirce and his coworkers, especially Schröder, that dominated the field and that influenced and continued to influence workers in mathematical logic up until Russell, first slowly, with his *Principles of Mathematics*, and Whitehead and Russell together, then expansively, in particular with the appearance in the mid-1920s of the second edition of their *Principia Mathematica*, took the field from the "Booleans" and consummated the "Fregean revolution" in logic. A reassessment of the accomplishments of Peirce's contributions to, and originality in, logic has taken place in recent years in which Hilary Putnam was a leading figure (see [78]), and in which Quine came to participate (see [82] and [83]), and it has been shown (see, e.g. [3]) that much of the work that Russell arrogated to himself (and some of which he attributed to Frege or Peano) not only can be found in Peirce's publications.

References

[1] *Anellis, I. H.* Schröder material at the Russell archives, *Modern Logic* 1:237–247, 1990/91.

[2] *Anellis, I. H.* The Löwenheim-Skolem theorem, theories of quantification, and proof theory. In: T. Drucker, editor, *Perspectives on the History of Mathematical Logic*. Boston/Basel/Berlin: Birkhäuser, 1991. Pp. 71–83.

[3] *Anellis, I. H.* Peirce rustled, Russell pierced: How Charles Peirce and Bertrand Russell viewed each other's work in logic, and an assessment of Russell's accuracy and role in the historiography of logic, *Modern Logic* 5:270–328, 1995; electronic version: `http://www.cspeirce.com/menu/library/aboutcsp/anellis/csp$\&$br.htm`.

[4] *Anellis, I. H.* Tarski's development of Peirce's logic of relations, in [Houser, Roberts, & Van Evra 1997], 271-–303.

[5] *Anellis, I. H.* The genesis of the truth-table device, *Russell: the Journal of the Russell Archives* (n.s.) 24:55–70, 2004; on-line abstract available at: `http://digitalcommons.mcmaster.ca/russelljournal/vol24/iss1/5/`.

[6] *Anellis, I. H.* Peirce's truth-functional analysis and the origin of the truth table, *History and Philosophy of Logic* 33:87–97, 2012; preprint available at: `http://arxiv.org/abs/1108.2429`.

[7] *Anellis, I. H. and Houser, N.* The nineteenth century roots of universal algebra and algebraic logic: A critical-bibliographical guide for the contemporary logician. In: H. Andréka, J. D.Monk and I. Németi, editors, *Colloquia Mathematica Societis Janos Bolyai 54. Algebraic Logic, Budapest (Hungary)*, 1988. Amsterdam/London/New York: Elsevier Science/North-Holland, 1991, pp. 1-36.

[8] *Badesa, C. El teorema de Löwenheim en el marco de la teoría de relativos.* Ph.D. thesis, University of Barcelona; published: Barcelona: Publicacions, Universitat de Barcelona, 1991.

[9] *Badesa, C.* (M. Maudsley, translator), *The Birth of Model Theory: Löwenheim's Theorem in the Frame of the Theory of Relatives.* Princeton/Oxford: Princeton University Press, 2004.

[10] *Beatty, R.* Peirce's development of quantifiers and of predicate logic, *Notre Dame Journal of Formal Logic* 10:64–76, 1969.

[11] *Berry, G. D. W.* Peirce's contributions to the logic of statements and quantifiers. In: P. P. Wiener and F. H. Young, editors, *Studies in the Philosophy of Charles Sanders Peirce.* Cambridge, MA: Harvard University Press, 1952. Pp. 153–165.

[12] *Boole, G. An Investigation of the Laws of Thought, on which are founded the Mathematical Theories of Logic and Probabilities.* London: Walton & Maberly, 1854.

[13] *Brady, G. From Peirce to Skolem: A Neglected Chapter in the History of Logic.* Amsterdam/New York: North-Holland, 2000.

[14] *Bynum, T. W.* On the life and work of Gottlob Frege. In: T. W. Bynum, editor and translator, *Conceptual Notation and Related Articles.* Oxford: Clarendon Press, 1972. Pp. 1–54.

[15] *Clark, W. G.* New light on Peirce's iconic notation for the sixteen binary connectives. In: [42], pp. 304–333.

[16] *Couturat, L. L'algèbra de la logique.* Paris: Gauthier-Villars, 1905.

[17] *Couturat, L.* (Lydia Gillingham Robinson, translator), *The Algebra of Logic.* Chicago/London: The Open Court Publishing Company, 1914.

[18] *Crouch, J. B.* Between Frege and Peirce: Josiah Royce's structural logicism, *Transactions of the Charles S. Peirce Society* 46:155–177, 2011.

[19] *Dauben, J.* Peirce on continuity and his critique of Cantor and Dedekind, In: K. L. Ketner and J,N. Ransdell, editors, *Proceedings of the Charles S. Peirce Bicentennial International Congress.* Lubbock: Texas Tech University Press, 1981. Pp. 93–98.

[20] *Dedekind, R. Was sind und was sollen die Zahlen?* Braunschweig: F. Vieweg, 1888.

[21] *De Waal, C.* Why metaphysics needs logic and mathematics doesn't: Mathematics, logic, and metaphysics in Peirce's classification of the sciences, *Transactions of the Charles S. Peirce Society* 41:283–297, 2005.

[22] *Dipert, R.* Peirce's propositional logic, *Review of Metaphysics* 34:569–595, 1981.

[23] *Fisch, M. H. and Turquette, A. R.* Peirce's triadic logic, *Transactions of the Charles S. Peirce Society* 2:71–85, 1966.

[24] *Frege, G. Begriffsschrift, eine der arithmetischen nachgebildete Formelsprache des reinen Denkens.* Halle: Verlag von Louis Nebert, 1879.

[25] *Frege, G.* Booles rechnende Logik und die Begriffsschrift (1880/81). In: [30], 9–52.

[26] *Frege, G.* Booles logische Formelsprache und die Begriffsschrift (1882). In: [30], 53–59.

[27] *Frege, G.* Über den Zweck der Begriffsschrift, *Jenaischer Zeitschrift für Naturwissenschften* 16(Suppl.-Heft II):1—10, 1883.

[28] *Frege, G. Die Grundlagen der Arithmetik.* Breslau: Verlag von Wilhelm Koebner, 1884.

[29] *Frege, G.* Kritische Beleuchtung einiger Punkte in E. Schröders *Vorlesungen über die Algebra der Logik, Archiv für systematische Philosophie* 1:433–456, 1895.

[30] *Frege, G.* (H. Hermes, F. Kambartel, and F. Christian Simon Josef Kaulbach, editors, *Nachgelassene Schriften.* Hamburg: F. Meiner Verlag, 1969; 2nd enlarged ed., 1983.
[31] *Gana, F.* Peirce e Dedekind: la definizione di insiemi finito, *Historia Mathematica* 12:203–218, 1985.
[32] *Gillies, D. A.* The Fregean revolution in logic // D. A. Gillies (ed.) *Revolutions in Mathematics.* Oxford: Clarendon Press, 1992; paperback edition, 1995. P. 265–305.
[33] *Grattan-Guinness, I.* Wiener on the logics of Russell and Schröder: An account of his doctoral thesis, and of his discussion of it with Russell, *Annals of Science* 32:103–132, 1975.
[34] *Griffin, N.* (editor), *The Selected Letters of Bertrand Russell*, Vol. I: *The Private Years*, 1884—1914. Boston/New York/ London, Houghton Mifflin, 1992.
[35] *Haack, S.* Peirce and logicism: Notes towards an exposition, *Transactions of the Charles S. Peirce Society* 29:33–56, 1993.
[36] *Haack, S. and Lane, R.* (editors), *Pragmatism, Old and New: Selected Writings.* Amherst, NY: Prometheus, 2006.
[37] *Hawkins, B. S. Frege and Peirce on Properties of Sentences in Classical Deductive Systems.* Ph.D. thesis, University of Miami, 1971.
[38] *Hawkins, B. S.* Peirce's and Frege's systems of notation. In: K. L. Ketner, J. M. Ransdell, C. Eisele, M.H. Fisch, and C. S. Hardwick, editors, *Proceedings of the C. S. Peirce Bicentennial International Congress, 1976.* (Lubbock, Texas: Tech Press, 1991. P. 381–389.
[39] *Hawkins, B. S.* Peirce and Russell: The history of a neglected 'controversy' // [42]. P. 111–146.
[40] *Herbrand, J. Recherches sur la théorie des démonstration.* Ph.D. thesis, University of Paris, 1930; reprinted: Prace Towarzystwa Naukowego Warszawskiego, Wydzial III, no. 33, 1930.
[41] *Houser, N.* On "Peirce and logicism": A response to Haack, *Transactions of the Charles S. Peirce Society* 29:57–67, 1993.
[42] *Houser, N., Roberts, D., and Van Evra, J.* (editors), *Studies in the Logic of Charles Sanders Peirce.* Indianapolis/ Bloomington: Indiana University Press, 1997.
[43] *Husserl, E.* Der Folgerungscalcul und die Inhaltslogik, *Vierteljahrsschrift für wissenschaftliche Philosophie* 15:168–189, 1891.
[44] *Jevons, W. S. The Principles of Science, a Treatise on Logic and Scientific Method.* London: Macmillan & Co., 1874; 3rd ed., 1879.
[45] *Jourdain, P. E. B.* Preface. In: [17], pp. i-v.
[46] *Ladd[-Franklin], C.* On the algebra of logic. In: [67], 17—71, 1883.
[47] *Laita, L. M. A Study of the Genesis of Boolean Logic*, Ph.D. thesis, University of Notre Dame, 1975.
[48] *Laita, L. M.* The influence of Boole's search for a universal method in analysis on the creation of his logic, *Annals of Science* 34:163–176, 1977.
[49] *Lane, R.* Peirce's triadic logic reconsidered, *Transactions of the Charles S. Peirce Society* 35:284–311, 1999.
[50] *Langford, C. H.* Some theorems on deducibility, *Annals of Mathematics* (2)28:16–40, 1927.
[51] *Linke, P.*(E. L. Schaub, translator), The present state of logic and epistemology in Germany, *The Monist* 36:222–255, 1926.
[52] *Löwenheim, L.* Über Möglichkeiten im Relativkalkül, *Mathematische Annalen* 76:447–470, 1915.
[53] *Łukasiewicz, J.* O logice trójwartościowej, *Ruch filozorfczny* 5:169–171, 1920.
[54] *Martin, R. M.* On individuality and quantification in Peirce's published logic papers, 1867—1885, *Transactions of the Charles S. Peirce Society* 12:231–245, 1976.

[55] *Mitchell, O. H.* On a new algebra of logic. In: [67], 72–106.

[56] *Moore, G. H.* Reflections on the interplay between mathematics and logic, *Modern Logic* 2:281–311, 1992.

[57] *Moore, M. E.* Peirce's Cantor. In: M. E. Moore, editor, *New Essays on Peirce's Mathematical Philosophy.* Chicago/La Salle: Open Court, 2010. Pp. 323–362.

[58] *Nubiola, J. C. S.* Peirce: Pragmatism and logicism, *Philosophia Scienti* 1(2):121–130, 1996.

[59] *Panteki, M. Relationships between Algebra, Differential Equations and Logic in England: 1800-–1860*; Ph.D. thesis, C.N.A.A., London. 1992.

[60] *Peano G. Arithmetices principia, nova methodo exposita.* Torino: Bocca, 1889.

[61] *Peano, G.* Notations de logique mathématique (Introduction au Formulaire de mathématiques). Torino: Tipografia Guadagnini, 1894.

[62] *Peckhaus, V.* Ernst Schröder und die "pasigraphischen Systeme" von Peano und Peirce, *Modern Logic* 1:174–205, 1990/91.

[63] *Peirce, C. S.* On an improvement in Boole's calculus of logic (Paper read on 12 March 1867), *Proceedings of the American Academy of Arts and Sciences* 7:250–261, 1868.

[64] *Peirce, C. S.* Description of a notation for the logic of relatives, resulting from an amplification of the conceptions of Boole's calculus of logic, *Memoirs of the American Academy* 9:317–378, 1870.

[65] *Peirce, C. S.* On the algebra of logic, *American Journal of Mathematics* 3:15–57, 1880.

[66] *Peirce, C. S.* On the logic of number, *American Journal of Mathematics* 4:85—95, 1881.

[67] *Peirce, C. S.* editor, *Studies in Logic by Members of the Johns Hopkins University.* Boston: Little, Brown & Co., 1883.

[68] *Peirce, C. S.* The logic of relatives. In: [67], 187–203.

[69] *Peirce, C. S.* On the algebra of logic: a contribution to the philosophy of notation, *American Journal of Mathematics* 7: 180–202, 1885.

[70] *Peirce, C. S.* The regenerated logic, *The Monist* 7:19–40, 1896.

[71] *Peirce, C. S.* (C. Hartshorne and P. Weiss, editors), *Collected Papers of Charles Sanders Peirce*, Vol. IV: *The Simplest Mathematics.* Cambridge, Mass., Harvard University Press, 1933; 2nd ed., 1961.

[72] *Peirce, C. S.* (C. Hartshorne and P. Weiss, editors), *Collected Papers of Charles Sanders Peirce*, vol. V: *Pragmatism and Pragmaticism.* Cambridge, Mass.: Harvard University Press, 1934.

[73] *Peirce, C. S.* (C. J. W. Kloesel, editor), *Writings of Charles S. Peirce: A Chronological Edition*, vol. 4: 1879—1884. Bloomington/Indianapolis: Indiana University Press, 1989.

[74] *Peirce, C. S.* (C. J. W. Kloesel, editor), *Writings of Charles S. Peirce: A Chronological Edition*, vol. 5: 1884—1886. Bloomington/Indianapolis: Indiana University Press, 1993.

[75] *Peirce, C. S.* (M. E. Moore, editor), *Philosophy of Mathematics: Selected Writings.* Bloomington/Indianapolis: Indiana University Press, 2010.

[76] *Post, E. L. Introduction to a General Theory of Elementary Propositions*, Ph.D. thesis, Columbia University. Abstract presented in *Bulletin of the American Mathematical Society* 26:437; abstract of a paper presented at the 24 April meeting of the American Mathematical Society, 1920.

[77] *Post, E. L.* Introduction to a general theory of elementary propositions, *American Journal of Mathematics* 43:169–173, 1921.

[78] *Putnam, H.* Peirce the logician, *Historia Mathematica* 9:290–301, 1982.

[79] *Pycior, H. M.* George Peacock and the British origins of symbolical algebra, *Historia Mathematica* 8:23-45, 1981.

[80] *Pycior, H. M.* Augustus De Morgan's algebraic work: The three stages, *Isis* 74:211–226, 1983.

[81] *Quine, W. Methods of Logic.* London: Routledge & Kegan Paul, 2nd ed., 1962.

[82] *Quine, W.* In the logical vestibule, *Times Literary Supplement*, July 12, 1985, p. 767; reprinted as MacHale on Boole. In: W. Quine, *Selected Logic Papers.* Cambridge, MA: Harvard University Press, enlarged edition, 1995. Pp. 251–257.

[83] *Quine, W.* Peirce's logic. In: K. L. Ketner, editor, *Peirce and Contemporary Thought: Philosophical Inquiries.* New York: Fordham University Press, 1995. Pp. 23–3. (An abbreviated version appears in the enlarged edition of his *Selected Logic Papers*, pp. 258-–265.

[84] *Rosser, J. B.* Boole and the concept of a function, Celebration of the Centenary of "The Laws of Thought"by George Boole, *Proceedings of the Royal Irish Academy* 57, sect. A, no. 6, 117—120, 1955.

[85] *Russell, B. Principles of Mathematics.* Cambridge: Cambridge University Press, 1903.

[86] *Russell, B.* Mathematical logic as based on the theory of types, *American Journal of Mathematics* 30:222–262, 1908.

[87] *Russell, B.* (G. H. Moore, editor), *Towards the "Principles of Mathematics 1900-02*, vol. 3 of *The Collected Papers of Bertrand Russell.* London/New York: Routledge, 1993.

[88] *Ryle, G.* Introduction. In: A. J. Ayer, *et. al., The Revolution in Philosophy.* London: Macmillan & Co.; New York: St. Martin's Press, 1957. Pp. 1–12.

[89] *Schröder, E.* Rezension von G. Freges *Begriffsschrift, Zeitschrift für Mathematik und Physik, Historisch-literaturische Abteilung* 25:81–93, 1880.

[90] *Schröder, E. Vorlesungen über die Algebra der Logik (exacte Logik)*, 3 vols. Leipzig: B. G. Teubner, 1890-1905.

[91] *Schröder, E.* Über Pasigraphie, ihren gegenwärtigen Stand und die pasigraphische Bewegung in Italien. In F. Rudio, Hsg., *Verhandlungen des Ersten Internazionalen Mathematiker-Kongressses in Zurich von 9. bis 11. August 1897.* Leipzig: B. G. Teubner, 1898. Pp. 147-162.

[92] *Schröder, E.* On pasigraphy: Its present state and the pasigraphic movement in Italy, *The Monist* 9:44-62, 320, 1898.

[93] *Shields, P. Charles S. Peirce on the Logic of Number.* Ph.D. thesis, Fordham University, 1981.

[94] *Shields, P.* Peirce's axiomatization of arithmetic. In: [42], pp. 43-52.

[95] *Shosky, J.* Russell's use of truth tables, *Russell: the Journal of the Russell Archives* (n.s.) 17:11-26, 1997.

[96] *Skolem, T.* Logisch-kombinatorische Untersuchungen über die Erfüllbarkeit oder Beweisbarkeit mathematischer Sätze nebst einem Theoreme über dichte Mengen, *Videnkapsselskapels Skrifter* (Mathematisk-naturvidenskabelig klasse), 1(4):1-36, 1920.

[97] *Sluga, H. Gottlob Frege.* London: Routledge & Kegan Paul, 1980.

[98] *Sluga, H.* Frege against the Booleans, *Notre Dame Journal of Formal Logic* 28:80-98, 1987.

[99] *Stroll, A.* On the first flowering of Frege's reputation, *Journal of the History of Philosophy* 4:72-81, 1966.

[100] *Tarski, A.* 0 wyrszie peirwotnym logistyki, *Prezglad Filozoficzny* 2:68-89, 1923.

[101] *Tarski, A.* On the calculus of relations, *Journal of Symbolic Logic* 6:73–89, 1941.

[102] *Tarski, A. and Givant, S. A Formalization of Set Theory without Variables.* Providence: American Mathematical Society, 1987.

[103] *Turquette, Atwell R.* Peirce's icons for deductive logic. In: E.C. Moore & R. S. Robins (eds.), á Studies in the Philosophy of Charles Sanders Peirce (2^{nd} Series). Amherst: University of Massachusetts Press, pp. 95–108, 1964.

[104] *Van Heijenoort, J.* (editor), *From Frege to Gödel: A Source Book in Mathematical Logic, 1879–1931.* Cambridge, MA: Harvard University Press, 1967.

[105] *Van Heijenoort, J.* Logic as calculus and logic as language, *Synthése* 17, 324-330, 1967.

[106] *Van Heijenoort, J.* Historical development of modern logic, *Modern Logic* 2:242-255, 1992.

[107] *Venn, J. Review of G.* Frege, *Begriffsschrift, Mind* (o.s.) 5:297, 1880.

[108] *Vilkko, R.* The reception of Frege's Begriffsschrift, *Historia Mathematica* 25:412–422, 1998.

[109] *Voigt, A.* Was ist Logik?, *Vierteljahrsschrift fur wissenschaftliche Philosophie* 16:289–332, 1892.

[110] *Whitehead, A. N. W. A Treatise of Universal Algebra.* Cambridge: Cambridge University Press, 1898.

[111] *Whitehead, A. N. and Russell, B. Principia Mathematica*, 3 vols. Cambridge: Cambridge University Press, 1910-13.

[112] *Whitehead, A. N. and Russell, B. Principia Mathematica*, vol. I. Cambridge: Cambridge University Press, 2^{nd} ed., 1925.

[113] *Wiener, N. A Comparison between the Treatment of the Algebra of Relatives by Schroeder and that by Whitehead and Russell.* Ph.D. thesis, Harvard University (Harvard transcript and MIT transcript), 1913.

[114] *Wittgenstein, L.* (C. K. Ogden, translator, with an introduction by B. Russell), *Tractatus logico-philosophicus/Logisch-philosophische Abhandlung.* London: Routledge & Kegan Paul, 1922.

[115] *Zellweger, S.* Untapped potential in Peirce's iconic notation for the sixteen binary connectives. In: [42], pp. 334-386.

[116] *Zeman, J.* The birth of mathematical logic, *Transactions of the Charles S. Peirce Society* 22:1-22, 1986.

[117] *Жегалкин, И. И.* О технике вычислений предложений в символической логике, *Математический сборник* (1) 34:9-28, 1927.

[118] *Жегалкин, И. И.* Арифметизация символической логики, *Математический сборник* (1) 35:11-77, 1928; 36:205-338, 1929.

Gnosticism or: How Logic Fits My Mind

Marcus Kracht

ABSTRACT. In this paper I propose a particular algorithm by means of which humans come to understand the meaning of a logical formula. This algorithm shows why it is that some formulae are intuitively easy to understand while others border on the impossible. It also shows that the natural propositional logic is intuitionistic logic, not classical logic.

Keywords: logic, semantics, compositionality, intuitionism

1 Introduction

In this essay I wish to discuss the following question:

> How is it that we humans come to understand what is being said?

At first blush this might seem to be just a linguistic question. And it also seems that the answer is really simple and has been given by Montague and might run as follows:

> Theoretically, all we need is the meanings of the elementary constituents (say, words) and the grammatical rules, and then we just calculate the meanings of the sentences according to these rules.

Even though semantics is a domain of linguistics, the basic principles according to which these calculations can (and perhaps do) proceed, are however of strictly logical character: first-order predicate logic, λ-calculus or the like. So, in effect, linguistics borrowed heavily from logic. And we expect therefore that a logician has a story to tell on how a complex expression is or should be evaluated.

And he does. Montague, along with many others dealing with this problem, was a logician. And he believed that formal semantics can essentially be seen as a branch of logic. I basically agree. Yet, there are some problems that need to be addressed.

1. The standard story is not realistic. Nobody calculates e. g. intersections of infinite sets. Thus, the meanings are not the sort of things we can successfully manipulate. There must be something else that we use instead.

2. There is evidence that not all formulae are born alike. Some are easy to understand others next to impossible. This difference cannot be explained with the standard algorithms.

3. Actual semantic calculations do not stop because some word is undefined. In the standard picture, however, this should be the case.

4. Formal semantics does not provide correlates for topic and focus. Yet there is evidence that they interact with the logical structure. No account is given of that fact.

And so we are left with the feeling that there is much more to be said about the idea of calculating meanings. For a logician it must seem that there is an obvious solution: try proof theory. And indeed, attempts have been made to base semantics on proof theory rather than model theory. This idea goes back at least to Dummett ([2], for a recent assessment see [6])[1]. My own thinking has been centered around the idea that some sort of proof theoretic calculus might be the answer. Yet proposals I have seen in this direction are insufficient; they do not stress enough the dynamic nature of proofs. Indeed, Dummett thinks that understanding means knowing what constitutes a proof for the proposition; this is static thinking. But, while a proof theorist might ultimately be disinterested in how we get at proofs, for the questions raised above this is a vital problem to address. We could dynamify Dummetts theory as follows: understanding is the process of running through some proof of the proposition and validating it. But the exercise is sterile[2]. Exchanging one piece of notation for another will not do. In Dummetts case I still wonder how the basic problem is solved by using mathematical

[1] Also [3] contains a recent linguistics proposal. See also [8] and references therein.

[2] In my view a somewhat better view would be to be able to come up with a "proof" oneself. This latter notion however seems to be too strong on many occasions.

proofs. For certain things are provable but still seem to be beyond comprehension. What I am looking for is *understanding the process of understanding* or, as I have come to call the theory of this process, *gnosticism*. Gnosticism argues that understanding is inherently similar to proof theory in that it must break the formulae in a certain way to see "what is in them". Though this bears resemblance to the Dummett–Prawitz theory of meaning — not the least because it gives us intuitionistic logic (IL) in the propositional case, — it turns out to be essentially weaker than IL in the predicate logic case, since the format for doing proofs is quite dissimilar. I shall not discuss predicate logic here, however.

What I am going to describe here is a calculus which I formulated in [5]. In it I break with the commonplace idea that there is a neat division between syntactic expressions and meanings and that computations of meaning can be delayed until the full structure of the expression has been settled.

2 The Standard View

Here is how one standardly proceeds to define syntax and semantics for propositional logic. The alphabet is

(1) $A := \{\mathtt{p}, \mathtt{0}, \cdots, \mathtt{9}, \wedge, \neg, \vee, \rightarrow, \mathtt{(}, \mathtt{)}\}$

Well-formed formulae (wffs) are defined inductively:

1. $\mathtt{p}$ is a wff.
2. If e is a wff, so are $e^\frown\mathtt{0}$, $e^\frown\mathtt{1}$, $\cdots$, $e^\frown\mathtt{9}$.
3. If e and e' are wff, so are $\mathtt{(}^\frown\neg^\frown e^\frown\mathtt{)}$. $\mathtt{(}^\frown e^\frown\wedge^\frown e'^\frown\mathtt{)}$, $\mathtt{(}^\frown e^\frown\vee^\frown e'^\frown\mathtt{)}$ and $\mathtt{(}^\frown e^\frown\rightarrow^\frown e'^\frown\mathtt{)}$.

The wffs of the form $\mathtt{p}u$, where u is a string of digits, are called *variables*. The meaning is given either in terms of truth or in terms of assignments. Truth is truth-under-an-assignment, and so a truth-based account starts with a valuation, β, which is a function giving each variable a value from $\{0, 1\}$ and then proceeding as usual bottom up. The meaning based approach needs no such function. Let Ass denote the set of all asignments and $\beta \in \mathrm{Ass}$:

1. If v is a variable, $[v] := \{\beta : \beta(v) = 1\}$.

2. $[(^\frown\neg^\frown e^\frown)] = \text{Ass} - [v]$.
3. $[(^\frown e^\frown\wedge^\frown e'^\frown)] = [e] \cap [e']$.
4. $[(^\frown e^\frown\vee^\frown e'^\frown)] = [e] \cup [e']$.
5. $[(^\frown e^\frown\to^\frown e'^\frown)] = (\text{Ass} - [e]) \cup [e']$.

3 Gnosticism

In gnosticism, none of the above clauses are considered satisfactory. Recall that we are not after an objective (i. e. model theoretic) meaning (for which the above may in fact suffice) but after a procedure that humans may be said to apply. Though I do not make any claims here about whether humans actually *do* reason in this way, nevertheless I claim that the algorithm developed below has essential chracteristics of the one that is being used[3]. This cannot be said of the above definitions. The meaning based definition uses infinite sets and so is out of the question. These sets are not what we actually compute. The truth based account however presents too little. It does not give justice to the idea that the variables really are indefinite in truth. (It must be admitted, though, that in natural language we hardly face variables of this kind. Sentences of ordinary language must be considered constants, rather.)

So, if none of these are good enough, what might be a solution? The proposed solution is in a nutshell an account based on internal semiosis. The semiosis can be reduced in this context to an algorithm that uses the definitions to unpack the meanings and wrap them back up again. It is best to see an example. The arrow "$\to$" is commonly explained (informally) as follows:

> Faced with the problem of judging the truth of "$(\phi\to\chi)$", first you assume the premiss "ϕ", then you check whether the conclusion "χ" holds. If so, the "$(\phi\to\chi)$" is judged true, otherwise not.

This is basically Ramsey's idea. To execute this mentally, we need to be able to perform a number of actions: (1) assume something is

[3] I am even not sure that there is a single universal algorithm. But then again there ought to be some sort of characteristics for the human thinking process, and this is what I am looking for.

the case, (2) reason with assumptions *as if they were true*, and (3) retract assumptions on need.

This is therefore the core of the idea: I propose a certain array of mental operations which I claim are fundamental to human reasoning. Logical connectives are defined by appealing to these fundamental operations rather than by pointing to some objective reality. It then turns out that the semantic correlate of logical connectives seen in these terms is not a set of assignments but rather a certain mental procedure. Although the procedure in itself may correlate with some reality (conjunction = copresence of facts), this is mostly not the way we come to understand them[4].

A key ingredient from our point of view is the *judgement*. This can be both a psychological act and a simple (eternal) fact. The latter use is nowadays more widespread in logic. We write "$\vdash \phi$" to state that ϕ is (universally) true. This means that ϕ is a theorem of the logic. On the other hand, seen as an act we may write (as Frege in fact did) "$\vdash \phi$" to state that *an act of judging* ϕ *true occurs* (see [9]). The notation leaves a lot implicit that could be added, for example the subject and the time point. Thus we could write "$\vdash_{j,12:00} \phi$" to state that John judged ϕ true at noon. It is then clear that two successive judgement acts may yield different results, while a formula either is or isn't a theorem, something that cannot change over time. For example, "This door is closed" may change in truth value, so it may be judged true at some point and false at another. It does seem to me, though, that this notation can only be used from the outside as a description of what is going on. From the inside (which is the perspective I am adopting here) no such discrimination of time and author is necessary or useful. When I make a judgement, neither do I keep track of time nor do I ask who is judging. It is only when adding this fact to the memory of past actions that I must start to label it with some time. Also, when someone else makes a claim then all I can appreciate is that he expresses a judgement. However, that in itself is not the judgement that is being expressed. It is my judgement of there being a fact

[4]Recall that this is about the computation of meaning. For its justification I still believe that intuitionism or its ilk are rather ill prepared. I do think that we humans entertain meaning realism deep down ([1]) and this serves to justify our thinking. But when it comes to reasoning it is hard to imagine anything but an intuitionistic conception of meanings.

that some judgement is expressed. Only this will enter my mind.

In addition to judging a formula true we can judge it false, possible, true in the future, almost true, necessary, desirable, and so on. There is no limit on the distinctions that can be drawn here, or the *modes of judgement*. Judgements are specific *noetic acts*, or acts of thought. Another such act is *assuming*. I write "$\dashv\!\exists\ \phi$" to say that ϕ is being assumed. Notice that assumptions are not judgements. Judgements assert attitudes we already have towards propositions. These attitudes are mostly stable, while assumptions are of temporary nature. We are free to assume any proposition at any moment and also to retract this assumption. Also, as explained in [5] the attitude expressed in the judgement ("holding true" if judging something true) is not seen as a relation between the individual and the propositions at that moment but rather between the individual and a formulae, though the intention is that the formulae represent the propositions they ordinarily stand for. For example, while "$(\phi\wedge\phi)$" expresses the same proposition (logically speaking) as "ϕ", the act of judging "$(\phi\wedge\phi)$" true is a different judgement than that of juding "ϕ" true, as the objects of judgement differ. The reason for that should be clear: it is not always trivial to see that different formulae are saying the same (it may even be undecidable). This is the reason I use quotation marks. They should remind us that formulae are mostly seen as material strings (for example, when presented for judgement) and should at that point not be confused with their meaning.

The mind possesses the ability to judge propositions according to certain modes. Thus, presented with a mode, say "$\vdash$" and some proposition "ϕ" it will come up with a verdict. (I ignore the case where no verdict is reached.) The verdict is either *that the formula holds* or *that it is not said to hold*. In the first case the judgement is performed: the act "$\vdash\ \phi$" occurred. In the second case, however, all we can say is that the act "$\vdash\ \phi$" did *not* occur. Technically, no judgement has been issued. The proposed judgement failed. There is often a confusion between "$\nvdash\ \phi$" (that is, "ϕ" is not judged true) and "$\dashv\ \phi$" (that is, "ϕ" is judged false). As if to say that the judges who acquitted someone thought he was innocent. In fact, when they acquit him they only said he was *not found guilty of the charge*. Thus they might simply fail to have enough evidence to sentence him. So they did not say that the person was innocent. Also, they might have found him guilty of some other charge had he been accused of that instead. Likewise, refusing to call a book "good" is not actually saying that it is bad (again, we might lack the evidence), even though such a conclusion is not unreasonable.

4 Gnostic Calculus

I shall now present a sketch of the gnostic calculus. In it, we distinguish between judgement dispositions and judgements. A judgement disposition is a triple $\Delta \succ \phi$, where Δ is a set of formulae, $\succ$ a mode and ϕ a formula. The disposition is said to be *unconditional* if $\Delta = \varnothing$, and *conditional* otherwise. A *theory* is a set of judgement dispositions. A marked proposition is either of the form ϕ or of the form $\ulcorner\phi$ where ϕ is a formula. A *slate* is a sequence of (marked) propositions. A *mental state* is a triple

(2) $\langle T, S, A\rangle$

where T is a theory, S a slate, and A maybe either empty or contain a single judgement. T consists of all the judgement dispositions that an individual has. It may contain, for example, the disposition to hold true-in-the-future "the summer harvest is good" on condition that is true "it rains in May". Crucially, these dispositions need not be logical laws. A is the *attention cell.* It is the one spot where the mind actually *performs* judgements. The slate contains a record of past judgements so as to make them available for reasoning.

It is perhaps best to see an example. We start with the null state $\sigma_0 := \langle\varnothing, \varnothing, \varnothing\rangle$. In particular, $T = \varnothing$. There is a general rule that says we may assume at any moment any proposition. So, we proceed from this initial state to

(3) $\langle\varnothing, \varnothing, \dashv\!\varepsilon\ \phi\rangle$

The fact that this assumption has been made can be recorded in the slate as follows:

(4) $\langle\varnothing, \ulcorner\phi, \varnothing\rangle$

The little corner "$\ulcorner$" reminds us of the fact that the proposition ϕ has been assumed.

There is next a general rule that states that anything assumed is also true.

(5) $\langle \varnothing, \ulcorner \phi, \vdash \phi \rangle$

And, finally, a general rule allows to abstract an assumption by introducing an arrow:

(6) $\langle \varnothing, \varnothing, \vdash (\phi \to \phi) \rangle$

An empty slate means furthermore that the formula judged true is also unconditionally true. Notice that the computation *ends* in a judgement of a complex formula. There is no way the calculus could begin with such a judgement (unless T is not empty). What this says is that judging "$(\phi \to \phi)$" true is not direct; it is indirect or *mediated*. Reasoning is essential in getting there. The longer it takes the more difficult it is.

The demonstration may have inolved T, but in our case it is clear that T plays no role. We have established that $(\phi \to \phi)$ is universally (i. e. logically) true. I would like to caution the reader a little, though. Another way to read this is actually as follows: the arrow encodes the fact that the truth of the premiss was needed to establish the truth of the consequent. From the perspective of gnosticism, the arrow is there to allow us to encode a complex judgement pattern into a single formula.

Here is another sequence (items are concatenated into lists using the semicolon ";").

$$
(7) \quad
\begin{array}{l}
\langle \varnothing, \varnothing, \dashv \phi \rangle \\
\langle \varnothing, \phi, \varnothing \rangle \\
\langle \varnothing, \phi, \dashv \chi \rangle \\
\langle \varnothing, \phi; \chi, \varnothing \rangle \\
\langle \varnothing, \phi; \chi, \vdash \phi \rangle \\
\langle \varnothing, \phi, \vdash (\chi \to \phi) \rangle \\
\langle \varnothing, \varnothing, \vdash (\phi \to (\chi \to \phi)) \rangle
\end{array}
$$

The full set of rules is this.

Assumption From $\langle T, S, \varnothing \rangle$ pass to $\langle T, S, \dashv \phi \rangle$.

$\dashv$-Conversion From $\langle T, S, \dashv \phi \rangle$ pass to $\langle T, S; \ulcorner \phi, \varnothing \rangle$.

$\vdash$-Conversion From $\langle T, S, \vdash \phi \rangle$ pass to $\langle T, S; \phi, \varnothing \rangle$.

$\dashv$-Activation From $\langle T, S, A \rangle$ pass to $\langle T, S, \vdash \phi \rangle$ provided S contains $\ulcorner \phi$.

$\vdash$-Activation From $\langle T, S, A\rangle$ pass to $\langle T, S, \vdash \phi\rangle$ provided S contains ϕ.

Reflection From $\langle T, S; \ulcorner\phi, \vdash \chi\rangle$ pass to $\langle T, S, \vdash (\phi \to \chi)\rangle$.

Forgetting From $\langle T, S; \phi; S', A\rangle$ pass to $\langle T, S; S', A\rangle$.

Firing From $\langle T, S, \vdash \phi\rangle$ pass to $\langle T, S, \vdash \chi\rangle$, provided S contains $(\phi \to \chi)$.

These rules are all optional. "From α pass to β" is thus to be interpreted as an option to change one's state from α to β.

Notice that while we may forget facts, it is not allowed to forget assumptions. The following is a weaker formulation of the rule.

From $\langle T, S; \phi, A\rangle$ pass to $\langle T, S, A\rangle$.

Also, we may in all cases require A to be empty before we make the next step. We can also replace "S contains ϕ" by "S contains ϕ or $\ulcorner\phi$". None of these changes affect the power of the calculus except that derivations may have different overall length.

If you want to understand the role of T here is a general reasoning rule for it.

Phatic Enaction From $\langle T, S, A\rangle$ pass to $\langle T, S, \succ\delta\rangle$ provided that there is a set Δ such that

1. $\Delta \succ \delta \in T$, and
2. all members of Δ occur in S.

From this calculus we may derive the following logical theory. We write "$\Delta \Vdash \phi$" if the state $\langle \varnothing, \Delta, \vdash \phi\rangle$ can be reached from σ_0. In particular, "$\Vdash \phi$" if the state $\langle \varnothing, \varnothing, \vdash \phi\rangle$ can be reached from σ_0. Notice the following general monotonicity property.

THEOREM 1. *If $\langle T, S, A\rangle$ can be reached from $\langle T, S', A'\rangle$ then $\langle T', S, A\rangle$ can be reached from $\langle T', S', A'\rangle$, provided that $T \subseteq T'$.*

The proof is easy. It is due to the fact that the rules do not change T. (Throughout this paper we will not deal with rules that change T, although the possibility is an interesting one.)

THEOREM 2. *The consequence relation "$\Vdash$" coincides with intuitionistic derivability for "$\to$".*

So we get intuitionistic logic, though only for the language in "$\to$".

5 Why Do We Not Get Classical Logic?

The reason we do not get classical logic is because in classical logic $(\phi \to \chi)$ does not actually mean that we perform a forward reasoning. The parts of the formula are not ordered temporally, only linearly. The basic ingredient to the gnostic calculus is however forward reasoning coupled with a massive use of the deduction theorem (= Reflection). For example, Frege's formula

(8) $((\phi \to (\chi \to \psi)) \to ((\phi \to \chi) \to (\phi \to \psi)))$

is quite perspicuous when reduced via (DT).

(9) $(\phi \to (\chi \to \psi)); (\phi \to \chi); \phi \vdash \psi$

Thus it can be proved in the following way: make the assumptions in the order shown, and derive ψ. Use Reflection three times.

On the other hand, (DT) is powerless in view of Peirce's formula

(10) $(((\phi \to \chi) \to \phi) \to \phi)$

The best we can do is

(11) $((\phi \to \chi) \to \phi) \vdash \phi$

But that does not help very much. Thus, as the calculus is decidedly based on forward reasoning using (DT), it shows that Peirce's formula tells us something quite different about $\to$.

There are now different takes on the story. One is to say that the inner engine of the mind is too weak to grasp Peirce's formula. The other, which I will adopt here, is that the definition of $\to$ used above does not cover the meaning of $\to$ in classical logic. Indeed, one will notice that one thing cannot be derived in this system: the two-valuedness. There is basically only one mode of judgement, acceptance. If we want to introduce classical logic, we have several options.

1. We take it on faith: we add Peirce's formula as an axiom (which still means it is opaque). Thus, T contains the formula "`(((p0→p1)→p0)→p0)`". This requires the use of either variables or schematic letters, see below on that.

2. We add another mode, falsity ($\dashv$), and a principle that declares that any formula must be accepted or rejected. However, I argue against disjunction at the level of modes, so that option is out.

3. We add more connectives and get classical logic by introducing, for example, the law of the excluded middle. However, this too requires some faith. Even though `(p0∨(¬p0))` is at first blush more perspicuous, it still cannot be fully resolved in the gnostic calculus.

Below I shall turn to other connectives. This will provide yet another oportunity to obtain classical logic "through the back door".

6 On Dispositions

The meaning of "$\Delta \succ \phi$" is as follows:

> $\Delta{\succ}\phi \in T$ iff the subject has the disposition to immediately accept the judgement "$\succ\phi$" provided that he also immediately accepts every member of Δ as true.

The special case $\Delta = \varnothing$ deserves mentioning.

> $\succ\phi \in T$ iff the subject has the disposition to immediately accept the judgement "$\succ\phi$".

This means the following. If the subject were to put the formula "ϕ" before his mind and consider it in the mode $\succ$ he would accept the judgement. Moreover, the acceptance is immediate, it proceeds without further mediation. This distinguishes members of T (direct dispositions) from others (called mediated or indirect dispositions). For example, althouth a subject will respond eventually with acceptance upon presented with the formula "`(ϕ→ϕ)`" even if T does not contain it, this response is not immediate. For we need several steps to get there.

Thus action occurs only when the mind (or someone else) actually poses the judgement, whether "ϕ" has (or is) $\succ$.

It may be thought that it is enough to just ponder the formula, and the mode will appear right away. That is, if I ponder the formula "that Caesar has won the battle of Waterloo", I will immediately reject it. That is, my mind prompts the mode of rejection ("$\dashv$"), which it finds appropriate for that sentence. There is no denying that such a habit of choosing the best fit mode exists, but I am not sure that it always yields an answer (I may simply be in the dark of what to think about certain things), or that the answer is even unique. I may come to conclude, for example, on pondering "$2+2=4$" that is true, and I will not think that it also *will be true*. So if the mode is "true-in-the-future", it will not occur to me that this formula is also accepted under that mode. But when prompted with the mode "true-in-the-future" I might also accept that latter judgement.

7 Other Connectives

Let us see how we can add connectives to the language. The easiest is conjunction. Consider the following rules.

Left Elimination Pass to $\langle T, S, \vdash \phi\rangle$, provided $(\phi\wedge\chi)$ is in S.

Right Elimination Pass to $\langle T, S, \vdash \chi\rangle$, provided $(\phi\wedge\chi)$ is in S.

Introduction Pass to $\langle T, S, \vdash (\phi\wedge\chi)\rangle$, provided that ϕ and χ are contained in S.

It is easy to verify that we can derive the axioms for conjunction of Int.

When we look at disjunction, matters are a bit more complex.

Left Introduction Pass to $\langle T, S, \vdash (\phi\vee\chi)\rangle$, provided ϕ is in S.

Right Introduction Pass to $\langle T, S, \vdash (\phi\vee\chi)\rangle$, provided χ is in S.

Elimination Pass to $\langle T, S, \vdash \psi\rangle$, provided that $(\phi\to\psi)$, $(\chi\to\psi)$ and $(\phi\vee\chi)$ are contained in S.

This allows to deduce the commonly known axioms of Int.

With respect to negation we may either introduce the connective itself, or introduce 0 and define $(\neg\phi)$ as $(\phi\to 0)$. I choose the latter path. Thus, we need rules for 0. Here is the only one:

Ex falso quodlibet Pass from $\langle T, S, A\rangle$ to $\langle T, S, A'\rangle$ provided that 0 is in S.

With this we can derive the standard axioms as follows.

(12) $((\neg\phi)\to(\phi\to\chi))$

is the same as

(13) $((\phi\to 0)\to(\phi\to\chi))$

$$\begin{array}{ll}
 & \langle\varnothing,\varnothing,\varnothing\rangle \\
 & \langle\varnothing,\varnothing,\dashv (\phi\to 0)\rangle \\
 & \langle\varnothing,\ulcorner(\phi\to 0),\varnothing\rangle \\
 & \langle\varnothing,\ulcorner(\phi\to 0),\dashv \phi\rangle \\
 & \langle\varnothing,\ulcorner(\phi\to 0);\ulcorner\phi,\varnothing\rangle \\
(14) & \langle\varnothing,\ulcorner(\phi\to 0);\ulcorner\phi,\vdash 0\rangle \\
 & \langle\varnothing,\ulcorner(\phi\to 0);\ulcorner\phi;\vdash 0,\varnothing\rangle \\
 & \langle\varnothing,\ulcorner(\phi\to 0);\ulcorner\phi;\vdash 0,\vdash \chi\rangle \\
 & \langle\varnothing,\ulcorner(\phi\to 0);\ulcorner\phi,\vdash \chi\rangle \\
 & \langle\varnothing,\ulcorner(\phi\to 0),\vdash (\phi\to\chi)\rangle \\
 & \langle\varnothing,\varnothing,\vdash ((\phi\to 0)\to(\phi\to\chi))\rangle
\end{array}$$

The second formula to be derived is this:

(15) $((\phi\to\chi)\to((\phi\to(\neg\chi))\to(\neg\phi)))$

or, after rewriting

(16) $((\phi\to\chi)\to((\phi\to(\chi\to 0))\to(\phi\to 0)))$

This is Frege's formula (after permuting the first two premises):

(17) $((\phi\to(\chi\to 0))\to((\phi\to\chi)\to(\phi\to 0)))$

So, we conclude that the calculus can easily be upgraded to Int. However, once we have the new connectives we may also get classical logic, if we simply add the rule that allows to judge "$(\phi\vee(\neg\phi))$" true.

8 Variables

I shall briefly comment on the use of variables. In the presentation I made sure to use schematic letters. These are not variables of the language but rather letters standings in for formulae. The language itself may choose to have variables or not. In general, natural languages do not have so much in terms of variables. Base propositions are definite: "The door is closed", "I like cheese", "France is in Europe", and so on. All these sentences have truth values that we cannot assign freely. Indeed, in Greek philosophy, modes of judgement were roughly given like this:

> If the first then the second. The first. Therefore the second[5].

Here, the phrases "the first", "the second" are actual variables. However, are they variables in the sense of logic or are they schematic? In other words, do they quantify over propositions or do they quantify over sentences? In natural language it seems that they do the latter; in logic the answer is not so easy. I have made a point [4] that consequence relations should be understood with variables ranging over sentences. Yet for truth conditions it seems that we still want to opt for propositions, that is, definable sets of possible worlds.

The difference may be deemed marginal but they generally call for a different formulation of the rules. Schematic letters exclude a rule of substitution. It makes no sense to substitute for expressions. Consider again Peirce's formula. Suppose we want to take this formula as an axiom. The way to do this is to add the formula "`(((p0→p1)→p0)→p0)`" to T. If we do so, we have to use letters for variables. These are not schematic, as they really have to be encoded in some formula. Or else we would have to provide for a schematic rule that allows to judge any instance of the formula true. The latter would look like this:

Peirce-Introduction Pass from $\langle T, S, A\rangle$ to $\langle T, S, (((\phi\to\chi)\to\phi)\to\phi)\rangle$.

When we do this, however, either method we use means that we take Peirce's formula *on faith*. It cannot be derived, it is simply stipulated. So how can it enter the theory T? How could Charles Peirce ever have come to the conclusion that it is to be judged true? My answer is twofold. On the one hand there is a gap between the objective truth and the truth that we can assess. There are propositions whose truth we do not know and yet we assert that they are either true or false. If we build that into the definition of our connectives, we end up with standard truth tables. This route

[5]This is due to Chrysippos. In fact, he used Greek ordinals (α' for "the first", and β' for "the second") but the essence is the same.

however needs to be couched in terms of this calculus, something which I must leave for another occasion. It would however provide the only avenue for justifying classical logic. On the other hand, there is another process going on, a process which is capable of changing T. I call this process *learning*. The more evidence we have to some formula the more we are inclined to judge it true. This of course is not necessarily because we have made any progress in understanding its content. We may simply have been told that it is true (by some authority, say a teacher or a textbook). Whatever the reasons are, they are *different* from the process of gnostic understanding, though it is not excluded to add formulae that are provable (like, for example, "$(\phi\to\phi)$").

9 Conversions and Meaning

Not unlike proof theory, the meaning of expressions is covered by the rules that govern the calculus. The rules for "$\wedge$", for example, exactly regulate when "$(\phi\wedge\chi)$" is judged true. It is judged true if (and only if) both "ϕ" and "χ" are judged true. For classical logic (and a host of others) this is actually sufficient.

We can now do semantics in the following way. Suppose I possess a concept "cat". Write "cat'" for this concept. Then I can understand the word "cat" by connecting it with this concept as follows.

Elimination From $\langle T, S, \vdash \mathtt{cat}(x)\rangle$ pass to $\langle T, S, \vdash \mathsf{cat}'(x)\rangle$

Introduction From $\langle T, S, \vdash \mathsf{cat}'(x)\rangle$ pass to $\langle T, S, \vdash \mathtt{cat}(x)\rangle$

I call these types of rules *conversion rules*. Notice that I use English words in the same way as mental concepts. This is done on purpose. There is no way we can suppose that speakers have formed a particular concept for every existing word of English. They may know the words but otherwise be clueless as to what they mean. This is in part Putnam's problem of meaning [7], though he frames it as a problem of having the right meaning. Here I wish to say that it may actually be of not much help to suggest that the counterpart of "elm" is a concept of elmhood which I possess. Rather, I may in fact have no such concept. It does not, however, stop me from processing these words and reason with the word. For it may well be the case that I know a few things about elms that I can use successfully without thinking that I know exactly what they are[6]. Thus, the mental calculus shold be able to use words even if no concept exists to back them.

Given that, we can also have rules of this form:

Elimination From $\langle T, S, \vdash \texttt{chat}(x)\rangle$ pass to $\langle T, S, \vdash \texttt{cat}(x)\rangle$

Introduction From $\langle T, S, \vdash \texttt{cat}(x)\rangle$ pass to $\langle T, S, \vdash \texttt{chat}(x)\rangle$

These rules effectively determine the meaning of (French) "chat" in terms of (English) "cat" rather than translating it directly into the concept.

Interestingly, when a word is ambiguous it allows for two pairs of conversion rules. This may actually create dangerous situations. For example, a "bank" may be a financial institution and a place to sit on. Having both rules means that if something is called a bank it may at the same time be tought a financial institution *and* a place to sit on, because we may apply both rules of conversion for "bank". The way to prevent this, though, is not to exclude these conversion rules but rather to make them destroy the input before moving on (as is done here). Note that factual usage by humans suggests that they fix an understanding of the words and do not easily allow mixing.

Conversion rules are very important for our capability to do reasoning. Suppose we have judged a formula false. How can this affect our behaviour? Obviously, after we have made the judgement it is lost as soon as a new judgement is being made. However, it is often the case that we want to remember temporarily that we have performed that judgement. Then we would like to put it on the slate. This requires however that we put it down in form of a fact. The way to do this is to allow to convert "$\dashv \phi$" into "$\vdash (\neg\phi)$". The formula stored on the slate is thus "$(\neg\phi)$". Note that the intermediate judgement "$\vdash (\neg\phi)$" may or may not occur, depending on the exact formulation of the conversion. What is important is that the negation sign is a way to reduce the judgement of falsity into a judgement of truth of some formula. Likewise, when we introduce

[6] I note in passing that the calculus does not allow to specify whether or not knowledge of meaning is complete or not. Whether or not that is good, remains to be seen.

appropriate connectives we can convert other judgements into judgements of truth.

10 General Significance

The mental model presented here needs to be connected with the intended mode. When we judge "ϕ" true we intend to say that ϕ is actually true. Likewise, when we reject "ϕ" we do want to say that it is false. We are, at least in certain circumstances, well aware of our incomplete knowledge. Then we will not say, for example, that not judging "φ" true actually means that it is false[7]. Thus, I am endorsing alethic realism, though with a somewhat odd twist. For I am claiming that while we may entertain a belief in classical logic with respect to the objective truth conditions of an expression, we may still find them useless in our own subjective assessment of its meaning. This has uneasy philosophical consequences which I have not been able to resolve. One is a certain schizophrenic attitude towards logical connectives like implication, for which the objective and the subjective meanings diverge [8]. The happy coincidence, though, is that the subjective calculus is at least correct and so whatever is subjectively true is also objectively true.

Now, I have said that the modes of "truth" and "falsity" are independent. This raises the question whether there is a guarantee that we can exclude contradictory judgements? In my view the answer is "no"; furthemore, there should not be such a guarantee. First, it is well known that there are propositions that are neither true nor false (due to presupposition failure, for example). Also, there are sentences which we may judge true *and* false. What changes is the viewpoint under which we call them true or false. This may be perplexing because one is used to the idea that judgements are made of propositions, and they should have a definite meaning. But here judgements are judgements of *sentences*; the fact that sentences may be ambiguous leads straightforwardly to four valued logic. Vagueness does, too. It is another question as to how we can get rid of it. But if the language is used to express thoughts, then the

[7] Furthermore, there are cases in which we miscalculate. We judge true where we should have refrained, and conversely. These things happen, but are not the concern of this paper.

[8] Precisely what is observed in reality. The literature on how to interpret implication could not be more diverse.

ambiguity inherent in the expressions is a factor not to be ignored.

To give a logical example, consider the language above but with all brackets erased. The formula "$\phi\wedge\chi\vee\psi$" may under certain circumstances be both true and false. Suppose namely that ϕ is false, χ is true and ψ is true. Then the formula may be judged true because ψ is judged true (Right Introduction for disjunction). Or it may be be judged false since ϕ is judged false (after formulation of an appropriate rule for the rejection of a conjunction).

This is a problem that creates much confusion. It is true that the same fact cannot both be the case and not be the case. But since a sentence may be made true by many facts, and also be made true in different ways, it is not clear that we cannot both accept and reject a sentence. For example, for a book to be "red" we may decide that what it needs to have is a red cover. However, if the cover also has pictures in it, it is not clear what exactly makes a cover "red" and how much the presence of other colours disturb its redness. We may invent a list of criteria, but they all seem to be post hoc. We formulate a judgement but it all seems to depend in subtle ways on the context how the judgement comes out eventually. In my opinion it is wrong to say that all this is encoded in the notion of being red (or of being a red cover). There may be no a priori fixed way of applying the meaning of such a simple concept as "red" in various circumstances, and consequently no fixed answer to the question whether a given object falls under the concept in these circumstances.

If this is so, the significance of the calculus is far wider. It shows us that the mental calculus must be partly removed from reality for the reason that the objects that are being manipulated lack a clearly defined semantics to begin with. It seems that the semantics is often discovered after the judgement. It may disappoint philosophers, but in my view it is a fact of life. We ought to learn to live with it.

References

[1] *William P. Alston.* A Realist Conception of Truth. Cornell University Press, Ithaca and London, 1996.

[2] *Michael Dummett.* What is a theory of meaning? (ii). In G. Evans and J. McDowell, editors, Truth and Meaning. Oxford University Press, Oxford, 1976.

[3] *Nissim Francez and Roy Dyckhoff.* Proof Theoretic Semantics for a Natural Language Fragment. Linguistics and Philosophy, 33:447–477, 2010.

[4] *Marcus Kracht.* Judgement and Consequence Relations. Journal of Applied Nonclassical Logic, 20:223 – 235, 2010.
[5] *Marcus Kracht.* Gnosis. Journal of Philosophical Logic, 40:397 – 420, 2011.
[6] *Peter Pagin.* Compositionality, understanding and proofs. Mind, 118:713–737, 2010.
[7] *Hilary Putnam.* Representation and Reality. MIT Press, Cambridge, Mass., 1988.
[8] *Aarne Ranta.* Type-Theoretical Grammar. Oxford University Press, 1994.
[9] *Nicholas J. J. Smith.* Frege's Judgement Stroke and the Conception of Logic as the Study of Inference not Consequence. Philosophy Compass, 2009.

Multiplying logical values[1]

Grzegorz Malinowski

abstract. The modern history of many-valuedness starts with Łukasiewicz's construction of three-valued logic. This pioneering, philosophically motivated and matrix based construction, first presented in 1918, was in 1922 extended to n-valued cases, including two infinite ones. Soon several constructions of many-valued logic appeared and the history of the topic became rich and interesting. However, as it is widely known, the problem of interpretation of multiple values is still among vexed questions of contemporary logic.

With the paper, which essentially groups my earlier settlements, from [3], [4], [7] and [8], I intend to put a new thread into discussion on the nature of logical many-valuedness. The topics, touched upon, are: matrices, tautological and non-tautological many-valuedness, Tarski's structural consequence and the Lindenbaum–Wójcicki completeness result, which supports the Suszko's claim on logical two-valuedness of any structural logic. Consequently, two facets of many-valuedness — referential and inferential — are unravelled. The first, fits the standard approach and it results in multiplication of semantic correlates of sentences, and not logical values in a proper sense. The second many-valuedness is a metalogical property of inference and refers to partition of the matrix universe into more than two disjoint subsets, used in the definition of inference.

Keywords: three-valued logic, many-valuedness, matrix, tautology, consequence operation, structurality, logical two-valuedness, Suszko's Thesis, non-fregean logic, logical three-valuedness, inferential many-valuedness, inferential values.

1 Tautological many-valuedness

A referential construction of a many-valued logic starts with the choice of the sentential language L, i.e. an algebra $L = (For, F_1, \ldots, F_m)$ freely generated by the set of variables $Var = \{p, q, r, \ldots\}$. Formulas, i.e. elements of For, are then built from variables using

[1]The paper is an extended version of the invited lecture to the international conference "7th Smirnov's Readings in Logic" June 22–24, 2011, Moscow (Russia).

the operations $F_1, \ldots, F_m$ representing the sentential connectives. In most cases, either the language of the classical sentential logic

$$L_k = (For, \neg, \rightarrow, \vee, \wedge, \leftrightarrow)$$

with negation ($\neg$), implication ($\rightarrow$), disjunction ($\vee$), conjunction ($\wedge$), and equivalence ($\leftrightarrow$), or some of its reducts is considered. Subsequently, one defines an algebra A similar to L and chooses a non-empty subset D of designated elements of the universe of A. Any such interpretation structure

$$M = (A, D)$$

is called logical *matrix*.

Traditionally, the system of sentential logic is defined as the set of all formulas taking for every valuation h (a homomorphism) of L in M

$$\mathrm{E}(M) = \{\alpha \in For : \text{for every } h \in \mathrm{Hom}(L, A), h(\alpha) \in D\},$$

called the *content* of M. Thus, the classical matrix based on $\{0, 1\}$ and the connectives defined by the classical truth-tables has the form of

$$M_2 = (\{0, 1\}, \neg, \rightarrow, \vee, \wedge, \leftrightarrow, \{1\})$$

Obviously, then $\mathrm{E}(M_2) = TAUT$, the set of *tautologies*. That is why we shall also sometimes refer to $\mathrm{E}(M)$ as *the set of tautologies of* M even if the matrix M is not classical.

If the content of a multiple-element matrix M does not coincide with $TAUT$, $\mathrm{E}(M) \neq TAUT$, we say that M defines *tautologically many-valued logic*. The best known example of this kind is the historically first construction by Łukasiewicz's in [2], here presented as

$$M_3 = (\{0, 1/2, 1\}, \neg, \rightarrow, \vee, \wedge, \leftrightarrow, \{1\})$$

with the connectives defined by the tables:

x	¬ x
0	1
1/2	1/2
1	0

→	0	1/2	1
0	1	1	1
1/2	1/2	1	1
1	0	1/2	1

∨	0	1/2	1
0	0	1/2	1
1/2	1/2	1/2	1
1	1	1	1

$\wedge$	0	½	1
0	0	0	0
½	0	½	½
1	0	½	1

$\leftrightarrow$	0	½	1
0	1	½	0
½	½	1	½
1	0	½	1

Since e.g. $p \vee \neg p$ and $\neg(p \wedge \neg p)$ take the value ½ when p takes ½, and thus they are not Łukasiewicz tautologies, $\mathrm{E}(M_3) \neq TAUT$.

Subsequently, to see that the separate multiplication of values of the base matrix is not sufficient for getting many-valued logic, consider the following three-element matrix, cf. [7],

$N_3 = (\{0, t, 1\}, \neg, \rightarrow, \vee, \wedge, \leftrightarrow, \{t, 1\})$,

x	¬ x
0	1
t	0
1	0

$\rightarrow$	0	t	1
0	1	t	1
t	0	t	t
1	0	t	1

$\vee$	0	t	1
0	0	t	1
t	t	t	1
1	1	1	1

$\wedge$	0	t	1
0	0	0	0
t	0	t	t
1	0	t	1

$\leftrightarrow$	0	t	1
0	1	0	0
t	0	t	t
1	0	t	1

It is easy to show, that $\mathrm{E}(N_3) = TAUT$. Thus, N_3 determines the system of tautologies of the classical logic and it is not tautologically many-valued. To verify that, notice that due to the choice of the set of designated elements $\{t, 1\}$, with every $h\alpha \in Hom(L, A)$ the classical valuation $h^* \in Hom(L, M_2)$ corresponds in a one-to-one way such that $h\alpha \in \{t, 1\}$ iff $h^*\alpha = 1$.

2 Structurality and its matrix representation

The notion of matrix consequence is a natural generalisation of the classical consequence: a relation $\models_M \subseteq 2^{For} \times For$ is a *matrix consequence* of M provided that for any $X \subseteq For, \alpha \in For$

$X \models_M \alpha$ iff for every $h \in Hom(L, A)(h\alpha \in D$ whenever $hX \subseteq D)$.

It is obvious that $\mathrm{E}(M) = \{\alpha : \emptyset \models_M \alpha\}$. The classical consequence is the matrix consequence of M_2, $\models_{M_2}$. Therefore, if M determines non-classical set of tautologies then $\models_M \neq \models_{M_2}$, and the logic identified with the consequence $\models_M$ is not many-valued in the second sense. Again, the Łukasiewicz matrix consequence $\models_{M_3}$ is a good example. On the other hand, the consequence relation determined by the matrix N_3 is "entirely" classical, $\models_{N_3} = \models_{M_2}$.

In the end, let us mention that in the literature one may find examples of matrices, whose content coincides with set of classical tautologies, $TAUT$, but their consequence relation is non-classical. The matrix S_3 is one of the kind:

$$S_3 = (\{0, t, 1\}, \neg, \rightarrow, \vee, \wedge, \leftrightarrow, \{t, 1\}),$$

where

x	¬ x
0	1
t	1
1	0

→	0	t	1
0	1	1	1
t	1	1	1
1	0	0	1

∨	0	t	1
0	0	0	1
t	0	0	1
1	1	1	1

∧	0	t	1
0	0	0	0
t	0	0	0
1	0	0	1

↔	0	t	1
0	1	1	0
t	1	1	0
1	0	0	1

Since t and 0 are indistinguishable by the truth tables in formulas containing the connectives, thus practically in all formulas except the propositional variables, and that both values are distinguished, we obtain $\mathrm{E}(S_3) = TAUT$. Accordingly, M_2 is the only two-element matrix which might determine $\models_{S_3}$. Simultaneously, $\models_{S_3} \neq \models_{M_2}$, since, for example,

$$\{p \rightarrow q, p\} \models_{M2} q \ \text{ while not } \ \{p \rightarrow q, p\} \models_{M3} q.$$

To verify this it simply suffices to turn over a valuation h such that $hp = \mathrm{t}$ and $hq = 0$, cf. [7].

The last example shows that it is indispensable to make a distinction between tautological and consequential many-valuedness. Accordingly, the classical system of tautologies was extended to a three-valued logic and this extension was assured by rules of inference and not by rejection of logical laws.

The consequence relation has an important algebraic counterpart. With any $\models_M$ there may be uniquely associated an operation Cn_M : $2^{For} \to 2^{For}$ such that

$\alpha \in \mathrm{Cn}_M(X)$ if and only if $X \models_M \alpha$.

Cn_M is called a *matrix consequence operation* of M. The distinguishing property of the logic generated by M, i.e. $\models_M$ and Cn_M, is its *structurality*: for any substitution, i.e. an endomorphism of the language, e $\in END(L)$,

$X \models_M \alpha$ implies $eX \models_M e\alpha$, or equivalently

$\alpha \in Cn_M(X)$ implies $e\alpha \in Cn_M(eX)$.

The concept of structural sentential logic is the ultimate generalisation of the notion of the matrix consequence operation. A *structural logic* for L is identified with a Tarski's consequence $\mathrm{C} : 2^{For} \to 2^{For}$,

(T0) $X \subseteq \mathrm{C}(X)$
(T1) $\mathrm{C}(X) \subseteq \mathrm{C}(Y)$ whenever $X \subseteq Y$
(T2) $\mathrm{C}(\mathrm{C}(X)) = \mathrm{C}(X)$,

satisfying the condition of structurality,

(S) $e\mathrm{C}(X) \subseteq \mathrm{C}(eX)$ for every *substitution* of L.

Structural logics are characterizable through their set of logical laws and schematic rules of inference. The most important property of these logics is their matrix representation: for every such C a class of matrices $\underline{\mathrm{K}}$ exists such that C is the intersection of $\{\mathrm{Cn}_M : \mathrm{M} \in \underline{\mathrm{K}}\}$:

$\mathrm{C}(X) = \cap\{\mathrm{Cn}_M(X) : M \in \underline{\mathrm{K}}\}$,

for any $X \subseteq For$.

The property just mentioned is a version of Lindenbaum–Wójcicki completeness theorem, see [12], which was proved using the Lindenbaum bundle $\mathbf{L}$, i.e. the class of all Lindenbaum matrices of the form $(L, C(X))$, $\mathbf{L} = \{\ (L, C(X)) : X \subseteq For\}$. This fact, when combined with the non-Fregean approach by Suszko [10], importantly subscribes to the problem of our interest.

3 Logical two-valuedness

The generalization of the truth-functionality principle constituting the base of matrix description of the classical logic is at the heart of the matrix method. Accordingly, the search for common features of the both: many-valued and classical, bivalent logics, is natural. The first serious attempts with this respect can be traced back to early 1950-ies. Especially, to Rosser and Turquette project of formalization of a class of finite-valued *standard logics*, cf. [9]. The main feature of the sentential part of standard logics was their definitional ability to indicate the counterparts of the classical negation, implication, disjunction, conjunction, and equivalence connectives, which with respect to the division between the undistinguished and distinguished sets of values behave as the classical connectives with respect to the falsity and truth. An important continuation of the idea is due to Bloom and Brown, who in [1] introduced and studied *classical abstract logics* in which the properties of respective connectives are described by the consequence operation of the logic (the idea of such a characterization may be traced back to Tarski).

Accordingly, in the 1970's the investigations of logical formalizations bore several descriptions of many-valued constructions in terms of zero-one valuations, see e.g. [7]. The approach to the problem by R. Suszko, the author of non-Fregean logic, cf. [10], is the most thoroughly justified. The methodology of this approach will also support our characterization of inferentially many-valued logics.

The base of R. Suszko's philosophy was the distinction between semantic correlates of sentences and their logical values. The author argues that potentially there is no limitation as to the number of correlates of sentences, though there are only two logical values corresponding to $Truth$ and $Falsity$. In this perspective, all traditionally (i.e. tautologically or consequentially) many-valued logics are also logically two-valued and they may be regarded only as *referentially many-valued* but not *logically many-valued*. Recall that the core of the Fregean approach is the so-called *Fregean Axiom*, see [10], identifying semantic correlates of sentences and their logical values.

Suszko underlines the referential character of homomorphisms associating sentences with their possible semantic correlates (i.e. referents or situations) and sets them against the *logical valuations* being zero-one-valued functions on For and, thus, setting apart the referential and the logical *valuedness*. Suszko claims that each sentential logic, i.e. a *structural* consequence relation, can be determined by a class of logical valuations and thus, it is *logically two-valued*. The arguments, supporting the *Suszko's thesis*, are based on the completeness of any structural consequence C with respect to a Lindenbaum bundle.

Given a sentential language L and a matrix $M = (A, D)$ for L, the set of valuations TV_M is defined as:

$$\mathrm{TV}_M = \{\mathrm{t}_h : h \in \mathrm{Hom}(L, A)\},$$

where

$$t_h(\alpha) = \begin{cases} 1 & \text{if} \quad h(\alpha) \in D \\ 0 & \text{if} \quad h(\alpha) \notin D. \end{cases}$$

Consequently, the matrix consequence operation $\models_M$ may be described using valuations as follows:

$$X \models_M \alpha \text{ iff for every } t \in TV_M \ t(\alpha) = 1 \text{ whenever } t(X) \subseteq \{1\}.$$

The definition of logical valuations may be simply repeated with respect to any structural consequence operation C using its Lindenbaum bundle. Thus, each structural logic (L, C) can be determined by a class of logical valuations of the language L or, in other words, *it is logically two-valued.*

The justification of the thesis on logical two-valuedness of an important family of logics lacks, however, a uniform description of TV_C's i.e. classes of valuations C-adequate, and in each particular case to find TV_C is a matter of an elaboration. Below, we discuss the case of finite Łukasiewicz logics.

The original example, given by Suszko, see [11] and [7], presents a relatively easily definable and readable set of logical valuations LV_3 for the $(\neg, \rightarrow)$ — version of the three-valued Łukasiewicz logic. Accordingly, LV_3 is the set of all functions $t : For \rightarrow \{0, 1\}$ such that for any $\alpha, \beta, \gamma \in For$ the following conditions hold:

(0) $\mathrm{t}(\gamma) = 0$ or $\mathrm{t}(\neg\gamma) = 0$

(1) $\mathrm{t}(\alpha \to \beta) = 1$ whenever $\mathrm{t}(\beta) = 1$
(2) if $\mathrm{t}(\alpha) = 1$ and $\mathrm{t}(\beta) = 0$, then $\mathrm{t}(\alpha \to \beta) = 0$
(3) if $\mathrm{t}(\alpha) = \mathrm{t}(\beta)$ and $\mathrm{t}(\neg\alpha) = \mathrm{t}(\neg\beta)$, then $\mathrm{t}(\alpha \to \beta) = 1$
(4) if $\mathrm{t}(\alpha) = \mathrm{t}(\beta) = 0$ and $\mathrm{t}(\neg\alpha) \neq \mathrm{t}(\neg\beta)$, then $\mathrm{t}(\alpha \to \beta) = \mathrm{t}(\neg\alpha)$
(5) if $\mathrm{t}(\neg\alpha) = 0$, then $\mathrm{t}(\neg\neg\alpha) = \mathrm{t}(\alpha)$
(6) if $\mathrm{t}(\alpha) = 1$ and $\mathrm{t}(\beta) = 0$, then $\mathrm{t}(\neg(\alpha \to \beta)) = \mathrm{t}(\neg\beta)$
(7) if $\mathrm{t}(\alpha) = \mathrm{t}(\neg\alpha) = \mathrm{t}(\beta)$ and $\mathrm{t}(\neg\beta) = 1$, then $\mathrm{t}(\neg(\alpha \to \beta)) = 0$.

The uniform description of all finite LV_n for $n \geqslant 3$ requires the use of more compound formulas with the well known one-argument connectives $a_0, a_1, \ldots, a_{n-1}$ of Rosser and Turquette, definable by means of Ł-implication and Ł-negation, cf. [9]. Thus, for any $h \in Hom_n$

$$h(a_i(\alpha)) = \begin{cases} 1 & \text{if } h(\alpha) = i/n-1 \\ 0 & \text{otherwise.} \end{cases}$$

Given $n \geqslant 2$, LV_n is then the set of all functions $t \in 2^{FM}$ such that for any $\alpha, \beta, \gamma \in FM$ the following conditions are satisfied:

(1) $t(\gamma) = t(a_{n-1}(\gamma)); t(\neg\gamma) = t(a_0(\gamma))$.

(2) For each $\gamma \in For$ exactly one of the following equalities holds: $t(a_0(\gamma)) = 1$ or $t(a_1(\gamma)) = 1 \ldots$ or $t(a_{n-1}(\gamma)) = 1$.

(3) $t(a_i(\gamma)) = 1$ or $t(\neg a_i(\gamma)) = 1$; $t(a_i(\neg\gamma)) = t(a_{n-i-1}(\gamma))$.

(4) $t(a_i(a_j(\gamma))) = \begin{cases} 0 & i \neq 0 \text{ and } i \neq n-1 \\ t(a_j(\gamma)) & i = n-1 \\ t(\neg a_j(\gamma)) & i = 0. \end{cases}$

(5) $t(\alpha \to \beta) = 1$ if $t(a_{i_1}(\alpha)) = t(a_{i_2}(\beta)) = 1$ and $i_1 \leqslant i_2$, $t(a_i(\alpha \to \beta)) = 1$ if $t(a_{i_1}(\alpha)) = t(a_{i_2}(\beta)) = 1$ where $i_1 > i_2$ and $i = (n-1) - i_1 + i_2$.

The last description, originally given and thoroughly justified in [4], is algebraic in its spirit, since the function corresponding to Rosser and Turquette connectives, as well as their counterparts are used in several algebraic formalizations of many-valued logic. This naturally suggests that some other classes of logics may have similar two-valued characterization.

4 Inferential three-valuedness

Logical two-valuedness of any structural logic is a direct consequence of the construction of matrices and the division of the sets A of their elements into two complementary subsets of designated and undesignated elements: D and $A-D$, respectively. And, the $0-1$ valuations are but characteristic functions of the sets of formulas, which are actually associated, via a homomorphism of the language into the matrix, with designated referents. The conclusion that getting out of logical two-valuedness might be made on the basis of a non-complementary division of the set A of referential values.

In [8] a generalisation of Tarski's concept of consequence operation related on the idea that the rejection and acceptance need not be complementary was proposed. The central notions of the framework are counterparts of the concepts of matrix and consequence relation — both distinguished by the prefix "q" which may be read as "quasi". Where L is a sentential language and A is an algebra similar to L, a *q-matrix* is a triple

$$M^* = (A, D^*, D),$$

where D^* and D are disjoint subsets of the universe A of A ($D^* \cap D = \emptyset$). D^* are then interpreted as sets of *rejected* and *distinguished* elements values of M, respectively. For any such M^* one defines the relation $\vdash_{M*}$ between sets of formulae and formulae, a *matrix q-consequence of* M^* putting for any $X \subseteq For, \alpha \in For$

$$X \models_{M^*} \alpha \text{ iff for every } h \in Hom(L, A)(h\alpha \in D \text{ whenever } hX \cap D^* = \emptyset).$$

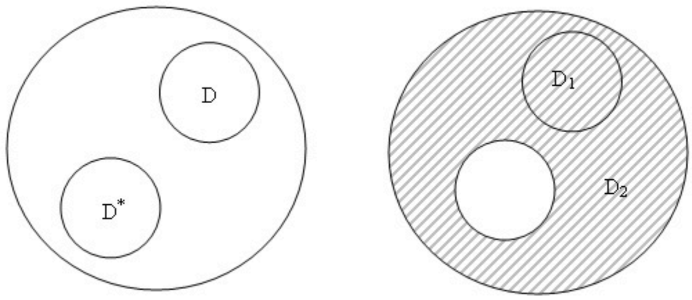
The relation of q-consequence was designed as a formal counterpart of reasoning admitting rules of inference which from non-rejected assumptions lead to accepted conclusions. The q-concepts coincide with usual concepts of matrix and consequence only if $D^* \cup D = A$, i.e. when the sets D^* and D are complementary. Then, the set of rejected elements coincides with the set of non-designated elements.

Sometimes, it is convenient to consider the alternate of q-matrix M^* received in result of replacing D^* with $A - D^*$. Then, after renaming we consider the matrix $M_* = (A, D_2, D_1)$, where $D_2 =$

$A - D^*$ and $D_1 = D$. Note that, then $D_2 \supseteq D_1$. Accordingly,

$X \models_{M^*} \alpha$ iff for every $h \in Hom(L, A)(h\alpha \in D_1$ whenever $hX \in D_2)$.

This way of expressing the q-consequence will be used in the next Section.



$D^* \cap D = \varnothing$
$D^* \cup D \neq A$

$D_2 \supseteq D_1$

For every $h \in Hom(L, A)$ a function $k_h : For \to \{0, {}^1/_2, 1\}$

$$k_h(\alpha) = \begin{cases} 0 & \text{if} \quad h(\alpha) \in D^* \\ {}^1\!/_2 & \text{if} \quad h(\alpha) \in A - (D^* \cup D) \\ 1 & \text{if} \quad h(\alpha) \in D. \end{cases}$$

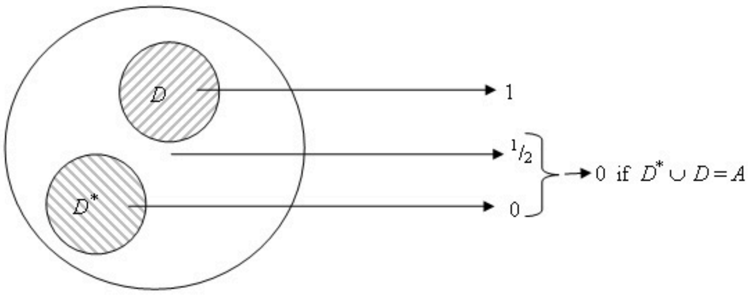
may be associated. And, given an inference matrix M^* for L we put $KV_{M^*} = \{k_h : h \in Hom(LA)\}$, and define $\models_{M^*}$ by

$X \models_{M^*} \alpha$ iff for every $k_h \in \mathrm{KV}_{M^*}$ if $k_h(X) \subseteq \{{}^1\!/_2, 1\}$, then $k_h(\alpha) = 1$.

With each relation $\models_{M^*}$ one may associate the operation $Wn_{M^*} : 2^{For} \to 2^{For}$ putting

$Wn_{M^*}(X) = \{\alpha : X \models_{M^*} \alpha\}$.

This is a kind of a three-valued description of $\models_{M^*}$. Notice that KV_{M^*} reduces to TV_M and $\models_{M^*}$ to $\models_M$ when $D^* \cup D = A$. It is worth emphasising that this is a case only exceptionally: for the ordinary (structural) consequence relation. In general, the description remains three-valued. Therefore a q-logic (L, Wn_{M^*}) is either two- or three-valued.



The following example proves that the three-valued q-logics exist, cf. [8]. Take the three-element q-matrix

$$Ł_q^3 = (\{0, {}^1\!/\!_2, 1\}, \neg, \rightarrow, \vee, \wedge, \leftrightarrow, \{0\}, \{1\}),$$

where the connectives are defined as in the Łukasiewicz three-valued logic. Then, for any $p \in Var$, it is not true that $\{p\} \vdash_{M^*} p$. To see this, it suffices to consider the valuation sending p into $\frac{1}{2}$.

The more striking is perhaps the fact that even logics generated by some two-element q-matrices may be logically three-valued.

Though different, the two approaches coincide on contents. Note, that

For any q-matrix $M^* = (A, D^*, D)$ and a corresponding matrix $M = (A, D)$, $Wn_{M^*}(\emptyset) = Cn_M(\emptyset) = E(M)$.

This is a very important observation. It means that any logical system may equally well be extended to logically two-valued logic (L, Cn_M) or to a three-valued logic (L, Wn_{M^*}). Obviously, depending on the quality and cardinality of M the two kinds of extensions may define different logics. Moreover, in several cases it is also possible to define two (or more) different inferential extensions of a given system. The idea was applied in [5] to make a distinction between two "indistinguishable" modal connectives of the four-valued modal system of Łukasiewicz.

The q-framework is general. In [8] an inference operation of which Wn_{M^*} is a prototype was introduced and studied. An operation $W : 2^{For} \to 2^{For}$ is a *q-consequence operation* provided that for every $X, Y \subseteq For$

(W1) $W(X \cup W(X)) = W(X)$
(W2) $W(X) \subseteq W(Y)$ whenever $X \subseteq Y$.

W is called structural if for any substitution $e \in End(\mathcal{L})$

(S) $eW(X) \subseteq W(eX)$.

Where M^* is any inference matrix, Wn_{M^*} is structural. In turn, all Lindenbaum's tools may be adopted to structural inference operations W to exactly the same effect. Thus, the bundle of Lindenbaum's inference matrices

$$W_X = (\ For\ ,\ For - (X \cup W(X))\ ,\ W(X))$$

may be used to prove, cf.[8], that

For every structural inference operation W there is a class $\underline{K}$ of inferential matrices such that

$$Wn_K(X) = \bigcap\{Wn_{M^*}(X) : M^* \in \underline{K}\}.$$

Following the line of constructing the valuations corresponding to the classes of matrices, here applied to q-matrices, we may get a necessary description of any structural q-logic (L,W). Accordingly, we conclude that any such construction is logically *two-* or *three-valued.*

5 More inferential values?

Extending the inferential approach to more values and thus getting logical n-valuedness for $n > 3$ seems easy: apply the method of construction described in Section 4 and divide matrix universe into more than three mutually disjoint subsets. However, the next step, i.e. construction of an appropriate matrix $q(n)$-consequence is not evident. On the other hand, no natural lattice-theoretic combination of q-consequences is possible, since q-consequence operations on a given language form a lattice, see [6].

In [3] a partial solution of the problem is provided. Using special bundle of finite linear matrices with the unary functions "labelling" appropriate subsets, the construction of a compositional operation was defined, which in the "inferential" terms is more than 3 valued.

The construction is based on a finite algebra $\underline{E}_n = (E_n, f_1, f_2, \ldots, f_m)$ where $n \geq 2$ and $E_n = \{1, 2, 3, \ldots, n\}$. Next, it is required that among the functions of $\underline{E}_n$, primitive or definable, there are unary functions $\delta_1, \delta_2, \ldots, \delta_n$:[2]

$$\delta_i(x) = \begin{cases} n & \text{if} \quad x \geq i+1 \\ 1 & \text{if} \quad x < i+1. \end{cases}$$

Let $\mathrm{L} = (E_n, F_1, F_2, \ldots, F_m)$ be the language to which $\underline{E}_n$ is similar. Assume that $D_k = \{k, k-1, \ldots, n\}$ and $D_l = \{l, l+1, \ldots, n\}$, for $k < l$ and, finally take the q-matrix:[3]

$M^o_{k,l} = (\underline{E}_n, D_k, D_l)$,

Consider its q-inference,

$X \vdash M^o_{k,l}\alpha$ iff for every $h \in Hom(\underline{L}, \underline{E}_n)$ (If $h(X) \subseteq D_k$ then $h(\alpha) \in D_l$),

and the matrix $M^n = (\underline{E}_n, \{n\})$ and its consequence $\models^n_M$

$X \models^n_M \alpha$ iff for every $h \in Hom(\underline{L}, \underline{E}_n)$ (If $h(X) \subseteq \{n\}$, then $h(\alpha) \in \{n\}$).

Let $\delta_k(X) =_{df} \{\delta_k(\beta) : \beta \in X\}$ and notice that

$X \vdash^o_{M_{k,l}} \alpha$ iff $\delta_k(X) \models^n_M \delta_l(\alpha)$,

and, finally, that

$Qn_{M_{k,l}}(X) = \{\alpha : X \vdash^o_{M_{k,l}} \alpha\} = \{\alpha : \delta_k(X) \models^n_M \delta_l(\alpha)\}$.

The last equation shows two descriptions of sets $Qn_{M_{k,l}}(X)$ and thus, descriptions of the matrix q-consequence operation $Qn_{M_{k,l}}$.

[2]Such functions are definable in standard logics, cf. [9], a family of which contains most of the known finite-valued calculi. They are also widely used in modern formulations of Post algebras.

[3]In the second formulation provided in Section 4.

The crucial concept of a multidimensional matrix and its inference is defined using a decreasing sequence of non-empty subsets of E_n, $D_{s-1}, \ldots, D_1$:

$$D_{s-1} \supseteq D_{s-2} \supseteq \ldots \supseteq D_1,$$

such that $E_n - D_{s-1} \neq \emptyset$.

The structure

$$\mathbf{M}_s = (\underline{E}_n, D_{s-1}, D_{s-2}, \ldots, D_1)$$

is referred to as an *s dimensional q-matrix*. The notion of an s dimensional q-matrix is a direct generalization of the concept of q-matrix; every q-matrix is three dimensional and "standard" matrices are two dimensional. Next to that, as compatible with the appropriate consequence-like operation Q^s defined below, the partitions correspond directly to logical values, see [3] for details.

The notion of s dimensional q-matrix inference which would keep the correspondence preserved to a higher degree is then defined using the bundle $\mathbf{M^s}$ of q-matrices associated with $\mathbf{M_s}$:

$$\mathbf{M^s} = \{(E_n, D_{s-1}, D_{s-2}), (E_n, D_{s-2}, D_{s-3}), \ldots, (\underline{E}_n, D_2, D_1)\},$$

or, equivalently, by

$$\mathbf{M^s} = \{M_{s-2}, M_{s-3}, \ldots, M_1\},$$

where $M_{s-i} =_{df} (\underline{E}_n, D_{s-i+1}, D_{s-i})$, $i = 1, \ldots, s-2$.

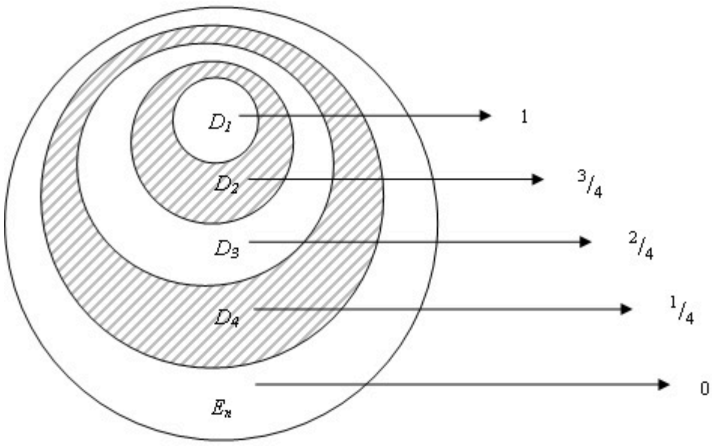
Now, if $Q_i = Wn_{M_{s-i}}$ is the matrix q-consequence of M_{s-i}, then the operation $Q^s : 2^{For} \to 2^{For}$ defined as superposition of Q_{s-2}, $Q_{s-3}, \ldots, Q_2, Q_1$, $Q^s = Q_{s-2} \circ Q_{s-3} \circ \ldots \circ Q_2 \circ Q_1$, which for every set of formulas X:

$$Q^s(X) = Q_{s-2}(Q_{s-3}(\ldots(Q_2(Q_1(X)))\ldots)),$$

satisfies the starting requirements.

The definition of multiple-element valuations is slightly involved. To outline the idea of it, fully discussed in [3], we shall consider the case of 5-dimensional matrix q-consequence W determined by a matrix $\mathbf{M}_5 = (\underline{E}_n, D_4, D_3, D_2, D_1)$.

As one may expect, the logic determined by W should be inferentially five-valued. One may also expect that, as in the three-valued case of q-consequence, the valuations should be in correspondence with homomorphisms from L into E_n, i.e. the referential assignments sending formulas into the matrix universe. Accordingly, valuations are functions mapping appropriate subsets of E_n into the five-valued set of logical (inferential) values, say into $\{0,{}^1/_4,{}^2/_4,{}^3/_4,1\}$. The subsets of E_n, mapped in subsequent values are respectively: $E_n - D_4, D_4 - D_3, D_3 - D_2, D_2 - D_1, D_1$. The following diagram



depicts the association.

6 Final remarks

The modern conceptual treatment of many-valuedness was possible due to matrices introduced to logic on the turn of 20th century. The matured matrix methodology, as a part of a general theory of logical calculi, cf. [12], essentially extended the possibilities.

In the paper we discussed two kinds of matrix based referential many-valuedness: tautological and consequential. The first case occurs, when the multiplication of elements of matrix universe results in a smaller set of logical truths, i.e. set properly included in the set of all classical tautologies, see Section 1. Otherwise, it is possible to get many-valuedness using the matrix consequence: conservatively, saving the classical set of tautologies, or non-conservatively. The first case requires the use of "non-classical rules" of inference, see Section 2.

The concept of many-valuedness becomes more involved on the grounds of the theory of structural consequence operations, since logics thus defined are often characterizable with the classes of matrices, cf. [12]. So, sometimes it may be difficult to say to what degree a given logic is (referentially, or algebraically) "many-valued". The situation essentially changes in view of the Suszko's methodology inspired by the non-Fregean approach in which denotations of sentences i.e. referential, or algebraic values are different entities from logical values. Accordingly, due to the Suszko's Thesis, every structural logic is logically two-valued.

The construction of q-consequence was the first step towards logical many-valuedness, or more precisely, to inferential three-valuedness. The methodological background for structural q-logics has already been elaborated: the q-consequence is described through modification of Tarski's conditions for consequence and the q-matrix methodology as a generalisation of the standard matrix approach, is provided. Finally, the Lindenbaum–Wójcicki's - like completeness result leads to the conclusion that any structural q-logic is logically two- or three-valued. Accordingly, the logical three-valuedness departs naturally from the division of the matrix universe into three subsets and the (ST) counterpart says that any inference based on a structural q-consequence may have a bivalent or a three-valued description, cf. Section 3.

The discussion of possibilities for further exploration of the idea of logical n-valuedness for $n > 3$ showed that the only evident step to be made consists of a division of the matrix universe into more than three subsets. Therefore, instead of the general approach to logically many-valued inference, only finite linear matrices with one-argument functions "labelling" subsets of elements of the matrix were considered. Unfortunately, even for the case, which is important, getting uniform description of properties of logically more-valued consequence-like relation is not easy. So, one may only say, that the construction presented in Section 4 proves that logically n-valued logics do exist. The problem of getting general description and elaboration of methodology for such devices still remains open.

It should be also underlined, that getting a general axiomatization of structural s-dimensional q-consequence, as well as its completeness proof, seems very hard indeed. Perhaps the algebraic hints given in Section 3 may help in making further steps toward even more general theory of many-valued inference.

References

[1] *Bloom, S. L., Brown D. J.* Classical abstract logics, Dissertationes Matematicae, CII, 1973, 43–52.

[2] *Łukasiewicz, J.* O logice trójwartościowej, Ruch Filozoficzny, 5, 1920, 170–171. English tr. On three-valued logic [in:] Borkowski, L. (ed.) Selected works, North-Holland, Amsterdam, 87-88.

[3] *Malinowski, G.* 'Beyond three inferential values', Studia Logica, 92, 2009, 203–213.

[4] *Malinowski, G.* Classical characterization of n-valued Łukasiewicz calculi, Reports on Mathematical Logic, 9, 1977, 41-45.

[5] *Malinowski, G.* 'Inferential intensionality', Studia Logica, 76, 2004, 3–16.

[6] *Malinowski, G.* 'Lattice properties of a protologic inference', Studies in Logic, Grammar and Rhetoric, 4 (17), Language, Mind and Mathematics, 2001, 51–58.

[7] *Malinowski, G.* Many-valued logics, Oxford Logic Guides, 25, Clarendon Press, Oxford, 1993.

[8] *Malinowski, G.* Q-consequence operation, Reports on Mathematical Logic, 24, 1990, 49–59.

[9] *Rosser, J. B., Turquette, A. R.* Many-valued logics, North-Holland, Amsterdam, 1952.

[10] *Suszko, R.* Abolition of the Fregean Axiom [in:] Parikh, R. (ed.) Logic Colloquium, Symposium on Logic held at Boston, 1972–73, Lecture Notes in Mathematics, vol. 453, 1972, 169–239.

[11] *Suszko, R.* The Fregean Axiom and Polish Mathematical Logic in the 1920s, Studia Logica, XXXVI (4), 1977, 377–380.

[12] *Wójcicki R.* Theory of logical calculi. Basic theory of consequence operations, Synthese Library, 199. Kluwer Academic Publishers, Dordrecht, 1988.

Наши авторы

БАЖАНОВ Валентин Александрович	— заслуженный деятель науки РФ, доктор философских наук, профессор, заведующий кафедрой философии Ульяновского государственного университета.
БАХТИЯРОВ Камиль Ибрагимович	— доктор философских наук, профессор кафедры высшей математики МГАУ им. В.П. Горячкина.
БИРЮКОВ Борис Владимирович	— доктор философских наук, профессор, заведующий Межвузовским Центром исследования чтения и информационной культуры (при МГЛУ).
БИРЮКОВА Любовь Гавриловна	— кандидат философских наук, доцент кафедры высшей математики Российского экономического университета им. Г.В. Плеханова.
ВАСЮКОВ Владимир Леонидович	— доктор философских наук, заведующий кафедрой истории и философии науки Института философии РАН.
ГЕРАСИМОВА Ирина Алексеевна	— доктор философских наук, ведущий научный сотрудник сектора логики Института философии РАН.
ГОРОХОВ Виталий Георгиевич	— доктор философских наук, ведущий научный сотрудник сектора междисциплинарных проблем научно-технического развития Института философии РАН.
ДЕВЯТКИН Леонид Юрьевич	— кандидат философских наук, и.о. старшего научного сотрудника сектора логики Института философии РАН.

ЗНАМЕНСКАЯ Наталия Андреевна	— аспирант кафедры логики философского факультета МГУ им. М.В. Ломоносова.
МОСКВИЦОВА Наталья Григорьевна	— аспирант кафедры логики философского факультета МГУ им. М.В. Ломоносова.
НЕПЕЙВОДА Николай Николаевич	— доктор физико-математических наук, профессор, главный научный сотрудник Института программных систем им. А.К. Айламазяна РАН.
ПОПОВ Владимир Михайлович	— кандидат философских наук, доцент кафедры логики философского факультета МГУ им. М.В. Ломоносова.
ПРЕЛОВСКИЙ Николай Николаевич	— кандидат философских наук, младший научный сотрудник сектора логики Института философии РАН.
ТОНОЯН Лариса Грачиковна	— кандидат философских наук, доцент кафедры логики Санкт-Петербургского государственного университета.
ШАЛАК Владимир Иванович	— доктор философских наук, ведущий научный сотрудник сектора логики Института философии РАН.
ANELLIS Irving H.	— Ph.D. in philosophy. Visiting Research Associate, Peirce Edition, Institute for American Thought, Indiana University-Purdue University at Indianapolis, Indianapolis, USA.
KRACHT Marcus	— professor, Faculty of Linguistics & Literary Studies, University of Bielefeld, Germany.
MALINOWSKI Grzegorz	— professor, Department of Logic, University of Lodz, Poland.

К сведению авторов

Ежегодник *Логические исследования* принимает к публикации статьи, содержащие изложение оригинальных результатов из различных областей современной логики, ранее не публиковавшиеся и не представленные к публикации в других изданиях.

Статья должна быть представлена в электронном виде и оформлена в формате LaTeX 2_ε (по согласованию с редколлегией в MS Word). При подготовке статьи в LaTeX 2_ε необходимо использовать стиль li.sty. Стилевой файл li.sty, заглавный файл li.tex, а также пример оформления статьи можно найти по адресу: `http://iph.ras.ru/page48601066.htm`

Объем статьи не должен превышать 30 печатных страниц в указанном формате. Статья обязательно должна содержать аннотацию (не более 100 слов) и ключевые слова (3-5 слов/словосочетаний) на русском и английском языке.

При подготовке электронного варианта статьи особое внимание следует уделить следующим моментам оформления статьи:

- Аннотация, ключевые слова, теоремы, леммы, доказательства, примеры и т.п. должны набираться с использованием соответствующих окружений.

- Иллюстративный материал (рисунки, таблицы, диаграммы) готовится стандартными средствами LaTeX'а. Рисунки могут быть также подготовлены в любом графическом редакторе и представлены в формате eps.

- Примечания, сноски к тексту статьи делаются постранично с использованием сквозной нумерации.

- Для знаков кавычек следует использовать символы `<<` и `>>`. Для «кавычек „внутри“ кавычек» — символы `,,` и ``` `` ```.

- Тире ставится следующим образом: «Логика`~---` это наука о правильных рассуждениях».

- Цитированная литература помещается в конце статьи общим списком в алфавитном порядке и оформляется как окружение thebibliography. В тексте ссылка на источник из списка литературы оформляется стандарным образом с помощью команды `\cite`.

  В библиографии должны быть указаны: для книг (монография, сборник и т.д.) — фамилия и инициалы автора, название книги, место издания (город), издательство, год издания; для журнальных статей — фамилия и инициалы автора, название статьи, название журнала, год издания, том, номер (выпуск), страницы (первая и последняя).

Со статьей также необходимо выслать

- сведения об авторе/авторах:

  - фамилия, имя, отчество полностью,
  - ученые степени и звания,
  - должность, место работы;

- название статьи и ФИО автора(ов) на английском языке.

Плата с авторов за публикацию рукописей не взимается.

Статьи следует направлять по адресу
LogicalInvestigations@gmail.com

Information for authors

Logical Investigations accepts for submission papers containing original results in all areas of logic. The papers should not have been published or simultaneously submitted to another publication.

Papers should be submitted electronically in the LaTeX 2_ε format (special permission of the editorial board is needed for submissions to be made in the MS Word format). While typesetting a paper, the style file li.sty and the master file li.tex should be used; both files, along with a sample paper file, can be accessed at `http://eng.iph.ras.ru/page49940199.htm`

Papers should not exceed 30 pages in the above mentioned format. A paper should have an abstract in English not exceeding 100 words and a list of keywords (3 to 5 words or phrases).

Special attention should be paid to the following aspects of typesetting a paper:

- Abstract, keywords, theorems, lemmas, proofs, etc, should be typeset using respective environments.
- Figures, tables, and diagrams should be typeset using LaTeX. For pictures .eps files can also be used.
- Footnotes should appear at the bottom of the page and should be numbered sequentially throughout the paper.
- For quotation marks, symbols ``` ``and'' ``` should be used. For nested quotation marks, symbols `` `and' `` should be used.
- A hyphen should be typeset as follows: "This theorem`~---` unlike the rest in this paper`~---` is really important".

Together with the paper, the following information should be submitted:
- The full names of the authors
- Deegres
- Associated institution

Authors are not charged for the publication.

Submissions should be emailed to the following address:
LogicalInvestigations@gmail.com

Содержание

Table of contents

Научное издание

Логические исследования
Вып. 18

Утверждено к печати
Ученым Советом
Института философии РАН,
Ученым Советом
Философского факультета
МГУ им. М.В. Ломоносова

Компьютерный набор выполнен
в Интитуте философии РАН

Компьютерная верстка
Н.Е. Томова

Редактор
Е.А. Жукова

Художник
Н.Н. Попов

Издательство «Центр гуманитарных инициатив»
190031, г. Санкт-Петербург, Столярный переулок, дом 10-12,
e-mail: unikniga@yandex.ru, unibook@mail.ru
Руководитель центра Соснов П.В.

По вопросам реализации книги обращаться: «Университетская книга–СПб»; в Москве — ООО «Университетская книга–СПб» тел.:(495) 915-32-84, e-mail: ukniga-m@libfl.ru; в Санкт-Петербурге — ООО «Университетская книга-СПб» тел.:(812) 640-08-71, e-mail: ukniga1@westcall.net

Розничные издательские продажи: в Санкт-Петербурге — магазин «Книжный окоп» (широкий ассортимент гуманитарной литературы)
В.О., Тучков переулок, д. 11, тел. (812) 323-85-84
в Москве — www.notabene.ru (495) 745-15-36

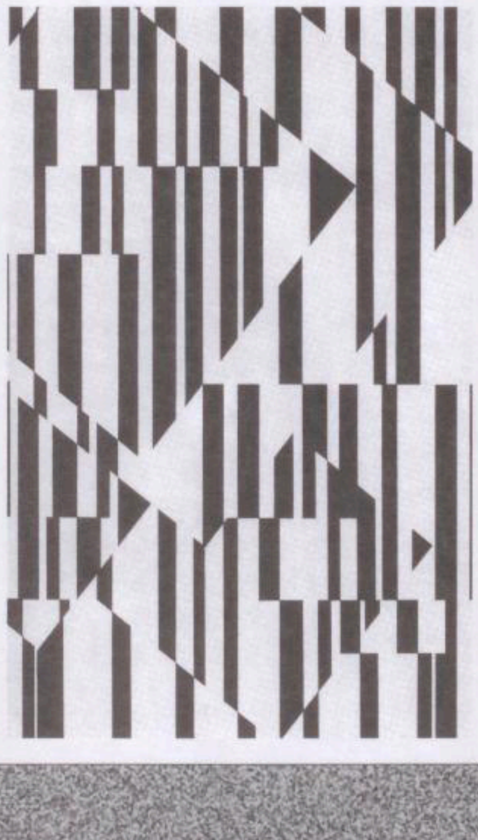
Подписано в печать 03.05.2012
Гарнитура Таймс. Формат 60x90 1/16. Бумага офсетная. Печать офсетная. Усл.печ.л.14. Уч.-изд.л. 13. Тираж 1000 экз. Заказ

Отпечатано в типографии «Галерея печати»
(ООО «Студия») «НП-Принт»
Санкт-Петербург, Измайловский пр., д. 29
тел.: (812) 324-65-15, mail@npprint.com

Подписной индекс в каталоге «Пресса России» 42046.
2-е полугодие 2012 г.

В.А. Бочаров
В.И. Маркин

СИЛЛОГИСТИЧЕСКИЕ ТЕОРИИ



Л.Ю. ДЕВЯТКИН

ТРЕХЗНАЧНЫЕ СЕМАНТИКИ ДЛЯ КЛАССИЧЕСКОЙ ЛОГИКИ ВЫСКАЗЫВАНИЙ