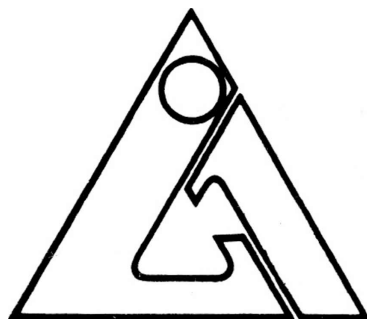


РОССИЙСКАЯ АКАДЕМИЯ НАУК
ИНСТИТУТ ФИЛОСОФИИ



LOGICAL INVESTIGATIONS

Vol. 2



MOSCOW "NAUKA" 1993

ЛОГИЧЕСКИЕ ИССЛЕДОВАНИЯ

Выпуск 2



МОСКВА "НАУКА" 1993

ББК 87.4
Л 69

Рецензенты:
доктора философских наук
Л.Б.Баженов, В.А.Бочаров, И.П.Меркулов

Редколлегия:
Смирнов В.А. (отв.редактор),
Анисов А.М., Арутюнова Н.Д., Бежанишвили М.Н., Быстров П.И.,
Войшвилло Е.К., Герасимова И.А., Карпенко А.С.,
Непейвода Н.Н., Успенский В.А., Финн В.К.

Редактор издательства Е.А.Жукова

*Федеральная целевая программа
книгоиздания России*

**Л 69 Логические исследования. Вып. 2.- М.: Наука, 1993 г.- 304 с.
ISBN 5-02-008172-8**

Во втором выпуске "Логических исследований" публикуются доклады о логических системах и онтологии С.Лесневского, сделанные на российско-японской конференции, а также результаты исследований по релевантным, временным, вероятностным, многозначным и многомерным логикам. Значительный интерес вызывает перевод классической работы Я.Лукасевича "О детерминизме" и статья о влиянии этой работы на современную логику.

Для логиков, философов и специалистов в области компьютерных наук.

0301060000-342
Л ————— 37-1993 II полугодие
042(02)-93

ББК87.4

ISBN 5-02-008172-8

© Институт философии РАН, 1993

© Российская академия наук, 1993

ОТ РЕДКОЛЛЕГИИ

Второй выпуск логических исследований подготовлен Логическим центром Института философии РАН и Общественным институтом логики, когнитологии и развития личности.

В этом выпуске публикуются доклады и сообщения, сделанные на российско-японской конференции по онтологии С.Лесневского (статьи А.Ишимото и П.Сагала, В.А.Смирнова, С.А.Павлова, А.Ишимото, И.А.Герасимовой). Ряд работ посвящен релевантным логикам и теории логического следования (Е.А.Сидоренко, П.И.Быстров, В.М.Попов). В статье А.В.Смирнова предложена интерактивная система построения выводов в исчислении предикатов. Эта система реализована на компьютере.

В книге публикуется перевод классической статьи польского логика Яна Лукасевича "О детерминизме". В статье А.С.Карпенко дается обстоятельный анализ влияния идей Лукасевича на современную логику.

В.А.Смирнов на основе идей российского логика Н.А.Васильева конструирует новый тип логики - многомерную логику. А.М.Анисов строит компьютерную модель становления. А.С.Карпенко предлагает новый подход к классификации логик. Некоторые работы выполнены при поддержке Фонда фундаментальных исследований.

ИНТЕРПРЕТАЦИЯ ОНТОЛОГИИ ЛЕСНЕВСКОГО: ПРОПОЗИЦИОНАЛЬНЫЙ ФРАГМЕНТ ОНТОЛОГИИ ЛЕСНЕВСКОГО И РОДСТВЕННЫЕ СИСТЕМЫ¹

Проблема наилучшего способа прояснения смысла Онтологии Лесневского продолжает занимать философски ориентированных логиков. В сущности есть два подхода к этой задаче прояснения смысла или экспликации: (1) попытка перевести Онтологию или ее части на язык, более удобный и привычный для большинства современных логиков и философов. Locus classicus этого подхода стала работа А.Н.Прайора "Существование у Лесневского и Рассела" [8], и (2) попытка ввести ключевой термин (термины) Онтологии непосредственно через диаграммы, логические игры или другие неформальные подходы. Работы Д.П.Генри [1] и Ч. Лежевски [7] попадают под эту рубрику. Один из авторов настоящей статьи сделал некоторые предложения в духе второго подхода в работе [9]. Настоящая статья, однако, относится к первому подходу. Это попытка перевести или эксплицировать часть Онтологии в систему первопорядковой логики предикатов, которую Давид Гильберт характеризовал как логическую колыбель всех теорий. Логическая колыбель знакома и по консенсусу понятна, а цель состояла в том, чтобы сделать Онтологию понятной путем перевода. Таким образом, авторы данной статьи следуют по стопам Прайора.

Одно важное различие между Онтологией, общей логикой имен Лесневского и стандартными версиями теории квантификации заключается в том, что Онтология не содержит допущения о существовании. Это также отличает Онтологию от класса теорий, подобных "Principia Mathematica" (PM) Рассела и Уайтхеда. В PM предполагается, что переменные низшего типа пробегают по существующим индивидам. На языке Лесневского можно сказать, что PM предполагает, что переменные низшего типа имеют индивидуальные имена для объектов подстановки и что универсум PM не может быть пуст, потому что этого не позволяет логическое ядро, лежащая в основе PM теория квантификации. Прайор предлагает переинтерпретировать лежащую в основе логику в подстановочной манере, позволяя, таким образом, квантифицировать, не обращая внимания на части речи, и следовательно, согласно Прайору, делая Онтологию расселовской теорией классов без переменных низшего типа - без переменных, несущих экзистенциальный смысл. Это означает существенную трансформацию расселовской теории классов; но данное и родственные ему усложнения не будут рассматриваться в настоящей статье.

¹ Пер. с англ. Н.А.Алешиной

Прайор замечает, что формальное развитие расселовской теории без переменных низшего типа не свободно от трудностей. Но, держась базисной логики предикатов, мы должны оказаться в состоянии обойти эти проблемы при экспликации частей Онтологии. Мы можем перейти теперь к синтаксическому и семантическому решению этой задачи.

Мы докажем среди прочего, что пропозициональный фрагмент или подсистема (элементарной) Онтологии Лесневского полон относительно его интерпретации в первопорядковой логике предикатов с равенством. Интерпретация эта была предложена Прайором [8] с целью следать Онтологию Лесневского менее загадочной и более привычной для тех, кто с ней недостаточно знаком или, возможно, кому не слишком нравится логика Лесневского (дальнейшее является переработанным вариантом статьи Ишимото [3]).

1. Предварительные синтаксические замечания и перевод

Предлагаемый пропозициональный фрагмент Онтологии Лесневского L_1 есть система, включающая все формулы следующего вида в качестве аксиом:

$$\begin{aligned} & \vdash \in (a,b) \supset \in (a,a), \\ & \vdash \in (a,b) \wedge \in (b,c). \supset \in (a,c), \\ & \vdash \in (a,b) \wedge \in (b,b). \supset \in (b,a), \end{aligned}$$

с (классической) пропозициональной логикой в качестве базисной. Последняя схема аксиом заимствована из Канаи [5] и заменяет исходную $\vdash \in (a,b) \wedge \in (b,c). \supset \in (b,a)$. Это упрощает построение L_1 .

С другой стороны, (элементарная) Онтология Лесневского, обозначаемая L , есть наименьшая система, включающая все формулы следующего вида (знаменитая единственная схема аксиом для (элементарной) Онтологии Лесневского):

$$\begin{aligned} & \vdash \in (a,b) \equiv \\ & \quad .(\exists x) \in (x,a) \\ & \quad \wedge (x)(y)(\in (x,a) \wedge \in (y,b). \supset \in (x,y)) \\ & \quad \wedge (x)(\in (x,a) \supset \in (x,b)), \end{aligned}$$

и все примеры теорем первопорядкового исчисления предикатов (без равенства), замкнутого относительно правил логики.

Правильно построенные формулы L_1 (L) определяется хорошо известным методом в терминах лесневскианского сингулярного включения и других символов, необходимых для построения классической пропозициональной (предикатной) логики с условием, что для свободных и связанных переменных, пробегающих по именам, используются различные буквы.

Мы теперь можем (вслед за Прайором [8]) определить правило перевода, которое преобразует каждую формулу L_1 в формулу, принадлежащую первопорядковой логике предикатов с равенством:

$$T \in (a, b) = F_b \iota x F_a x,$$

$$T A \wedge B = T A \wedge T B,$$

$$T A \vee B = T A \vee T B,$$

$$T A \supset B = T A \supset T B,$$

$$T \sim A = \sim T A,$$

где $F_a, F_b, \dots$ - одноместные предикатные переменные, соответствующие (свободным) именованным переменным $a, b, \dots$ (точнее, соответствие само составляет часть перевода), в то время как $F_b \iota x F_a x$ есть расселовская определенная дескрипция, которая определяется контекстуально, с областью действия дескрипции, ограниченной рассматриваемой одноместной предикатной переменной. В дальнейшем предполагается, что $\wedge, \vee, \supset$ и $\sim$ суть все логические символы, необходимые для построения L_1 .

Теорема о непротиворечивости. Если A доказуема в L_1 , то TA есть теорема первопорядковой логики предикатов с равенством.

Теорема доказывается индукцией по длине доказательства A .

Базис индукции, соответствующий случаю нелогических аксиом L_1 , доказывается следующим образом:

$T \in (a, b) \supset \in (a, a)$ получается из

$$\exists x (F_b x \wedge F_a x) \wedge \forall x \forall y (F_a x \wedge F_a y \supset x = y) \supset$$

$$\supset \exists x (F_a x \wedge F_a x) \wedge \forall x \forall y (F_a x \wedge F_a y \supset x = y),$$

что легко доказуемо в первопорядковой логике предикатов с равенством.

Для того, чтобы доказать

$T \in (a, b) \wedge \in (b, c) \supset \in (a, c)$, предположим, что:

$$(1) \exists x (F_b x \wedge F_a x) \wedge \forall x \forall y (F_a x \wedge F_a y \supset$$

$$\supset x = y) \wedge \exists x (F_c x \wedge F_b x) \wedge \forall x \forall y (F_b x \wedge F_b y \supset x = y),$$

$$(2) \exists x (F_b x \wedge \sim F_a x),$$

из чего следует существование x и y таких, что

$$(3) F_b x \wedge F_a x,$$

$$(4) F_b y \wedge \sim F_a y.$$

Из последнего конъюнкта (1) получаем $x = y$, что в свою очередь порождает противоречие $F_a x \wedge \sim F_a x$ при условии (3) и (4). Отсюда следует отрицание (2), а именно

$$(5) \forall x (F_b x \supset F_a x),$$

что в конъюнкции с третьим и вторым конъюнктами (1) дает искомого $F_c \iota x F_a x$.

$T \in (a,b) \wedge \in (b,c). \supset \in (b,c)$ не представляет никаких трудностей.

Если учесть, что отделение, которое составляет единственное правило вывода L_1 , является также правилом вывода первопорядковой логики предикатов с равенством, индукционные шаги доказаны.

Для доказательства обращения теоремы о непротиворечивости, а именно теоремы о полноте, необходимы некоторые предварительные леммы и определения, которые будут даны в следующем разделе.

2. Теорема о полноте.

Пусть дана модель $\langle M, \in \rangle$ для L_1 . Элемент a из M называется атомом (модели), если в ней истинно $\in(a,a)$. Существует безатомная модель для L_1 , например модель $\langle M, \in \rangle$, в которой ложно $\in(a,b)$ для всех $a, b \in M$.

Отметим, что мы используем те же именные переменные для обозначения элементов модели, так что формулы L_1 иногда понимаются как их интерпретации в модели. Однако никакой двусмысленности при этом не возникает.

Лемма. Если модель $\langle M, \in \rangle$ для L_1 не содержит атомов, то в ней можно построить другую модель $\langle M_1, \in_1 \rangle$ для L_1 , такую, что $M \subseteq M_1$ и $\in$ есть ограничение $\in_1$ на $M \times M$.

Если дана модель $\langle M, \in \rangle$ для L_1 , не содержащая атомов, мы добавляем к ней новый элемент d и определяем другую модель $\langle M_1, \in_1 \rangle$ так, что $M_1 = M \cup \{d\}$, истинно $\in_1(d,d)$, ложно $\in_1(d,a)$ и $\in_1(a,d)$ для $a \in M$, одновременно $\in_1 = \in$ для $a, b \in M$.

Поскольку d не входит в M , $\langle M_1, \in_1 \rangle$ без сомнения образует модель в том смысле, что любая формула (L_1) делается истинной или ложной (но не одновременно), если встречающимся в ней именным переменным приписываются значения из M_1 .

Остается, однако, показать, что $\langle M_1, \in_1 \rangle$ действительно образует модель для L_1 , и это доказывается путем демонстрации того, что все примеры аксиом L_1 истинны в $\langle M_1, \in_1 \rangle$, что в свою очередь следует из истинности в $\langle M_1, \in_1 \rangle$ формул следующего вида:

$$\begin{array}{l|l} \in(d,d) \supset \in(d,d), & \\ \in(d,a) \supset \in(d,d), & \\ \in(a,d) \supset \in(a,a), & \\ \hline \in(d,d) \wedge \in(d,d). \supset \in(d,d), & \\ \in(d,d) \wedge \in(d,a). \supset \in(d,a), & \\ \in(d,a) \wedge \in(a,d). \supset \in(d,d), & \\ \in(d,a) \wedge \in(a,b). \supset \in(d,b), & \\ \in(a,d) \wedge \in(d,b). \supset \in(a,b), & \\ \in(a,b) \wedge \in(b,d). \supset \in(a,d), & \end{array}$$

$$\begin{array}{l|l}
\in(a,d) \wedge \in(d,d) \supset \in(a,d), & \\
\in(d,d) \wedge \in(d,d) \supset \in(d,d), & \\
\in(d,a) \wedge \in(a,a) \supset \in(a,d), & \\
\in(a,d) \wedge \in(d,d) \supset \in(d,a), &
\end{array}$$

где a и b пробегают по M , в то время как $\in$ представляет $\in_1$. (Это оправдано определением $\in_1$ и будет использоваться в дальнейшем.) Понятно также, что первые три, следующие семь, и последние три формулы соответствуют первой, второй и третьей схемам (нелогических) аксиом L_1 .

Утверждение относительно $\in_1$ следует из его определения. Кроме того, несложным короллариумом к этой лемме является утверждение, что формулы, не содержащие d , имеют то же истинностное значение в $\langle M_1, \in_1 \rangle$, что и в $\langle M, \in \rangle$.

Может, однако, иметь место сингулярность данной модели L_1 . Если дана модель $\langle M, \in \rangle$ для L_1 , элемент b из M называется сингулярным (в модели), если b не является атомом модели, и существует атом a , единственным образом определенный в модели при истинности в ней $\in(a,b)$.

Единственность понимается здесь на основе отношения конгруэнтности между двумя элементами a и b из M , которая определяется как истинность $\in(a,b)$ и $\in(b,a)$ в модели. Нетрудно доказать, что таким образом определенное отношение конгруэнтности отвечает всем требованиям к конгруэнтности. Например,

$$\in(a,b) \wedge \in(b,a) \supset A(a) \supset A(b),$$

доказывается индукцией по длине $A(a)$.

Примером модели, сингулярной в этом смысле, может служить модель $\langle M, \in \rangle$ такая, что $M = \{a, b\}$, истинно $\in(a,a)$ и $\in(a,b)$, в то же время ложно $\in(b,a)$ и $\in(b,b)$. Очевидно, что таким образом определенная модель является сингулярной моделью L_1 с единственным сингулярным элементом b . Ясно также, что сингулярная модель для L_1 содержит атом.

Лемма. Если дана сингулярная модель $\langle M, \in \rangle$ для L_1 , мы можем построить несингулярную модель $\langle M_2, \in_2 \rangle$ для L_1 , такую, что $M \subset M_2$ и $\in$ является ограничением $\in_2$ на $M \times M$.

Если $\langle M, \in \rangle$ является сингулярной моделью L_1 , мы добавляем в M новый элемент d и определяем другую модель $\langle M_2, \in_2 \rangle$ так, что $\in_2(d,d)$, $\in_2(d,b)$, $\sim \in_2(b,d)$, $\sim \in_2(a,d)$ и $\sim \in_2(d,a)$ истинны в ней для любого другого элемента a из M , в то время как $\in_2 = \in$ для любой пары элементов из M .

Для доказательства того, что построенная таким образом модель $\langle M_2, \in_2 \rangle$ является моделью L_1 , достаточно показать, что все примеры аксиом L_1 истинны в $\langle M_2, \in_2 \rangle$, а это в свою очередь может быть получено из истинности в $\langle M_2, \in_2 \rangle$ следующих формул:

	$\in(d,d) \supset \in(d,d),$	
	$\in(d,a) \supset \in(d,d),$	
	$\in(d,b) \supset \in(d,d),$	
	$\in(a,d) \supset \in(a,a),$	
	$\in(b,d) \supset \in(b,b),$	
.	$\in(d,d) \wedge \in(d,d). \supset \in(d,d),$	
.	$\in(d,d) \wedge \in(d,a). \supset \in(d,a),$	
.	$\in(d,d) \wedge \in(d,b). \supset \in(d,b),$	
.	$\in(d,a) \wedge \in(a,d). \supset \in(d,d),$	
.	$\in(d,a) \wedge \in(a,c). \supset \in(d,c),$	
.	$\in(d,a) \wedge \in(a,b). \supset \in(d,b),$	
.	$\in(d,b) \wedge \in(b,d). \supset \in(d,d),$	
.	$\in(d,b) \wedge \in(b,a). \supset \in(d,a),$	
.	$\in(d,b) \wedge \in(b,b). \supset \in(d,b),$	
.	$\in(a,d) \wedge \in(d,d). \supset \in(a,d),$	
.	$\in(a,d) \wedge \in(d,c). \supset \in(a,c),$	
.	$\in(a,d) \wedge \in(d,b). \supset \in(a,b),$	
.	$\in(b,d) \wedge \in(d,d). \supset \in(b,d),$	
.	$\in(b,d) \wedge \in(d,a). \supset \in(b,a),$	
.	$\in(b,d) \wedge \in(d,b). \supset \in(b,b),$	
.	$\in(a,c) \wedge \in(c,d). \supset \in(a,d),$	
.	$\in(a,b) \wedge \in(b,d). \supset \in(a,d),$	
.	$\in(b,a) \wedge \in(a,d). \supset \in(b,d),$	
.	$\in(b,b) \wedge \in(b,d). \supset \in(b,d),$	
.	$\in(d,d) \wedge \in(d,d). \supset \in(d,d),$	
.	$\in(d,a) \wedge \in(a,a). \supset \in(a,d),$	
.	$\in(d,b) \wedge \in(b,b). \supset \in(b,d),$	
.	$\in(a,d) \wedge \in(d,d). \supset \in(d,a),$	
.	$\in(b,d) \wedge \in(d,d). \supset \in(d,b),$	

где a и c пробегает по M , исключая те элементы, которые являются сингулярными в M , b пробегает по сингулярным элементам M . Очевидно, что модель $\langle M_2, \in_2 \rangle$ не содержит сингулярных элементов.

Утверждение, касающееся сингулярного включения в новой модели, следует из определения включения, а из него самого сле-

дует, что истинностное значение формул, не содержащих d , остается в новой модели прежним.

Мы можем теперь доказать теорему о полноте L_1 относительно первопорядковой логики предикатов с равенством. С этой целью предположим, что формула A недоказуема в L_1 . Тогда мы строим (методом Хенкина) максимально непротиворечивое множество (формул L_1) относительно L_1 , включающее $\sim A$, при этом свободные переменные пробегают по именованным переменным. На основе максимально непротиворечивого множества (формул), которое несомненно является единственным образом определенным, определяется модель $\langle M, \in \rangle$ таким образом, чтобы B была истинна в этой модели тогда, и только тогда, когда $B \in M$ для любой формулы B из L_1 . В соответствии с двумя предшествующими леммами мы можем предположить, что модель $\langle M, \in \rangle$ содержит атом и в ней нет сингулярных элементов.

На основе модели $M = \langle M, \in \rangle$ для L_1 определяется модель $N = \langle N, =, F_a, F_b, \dots \rangle$ первопорядковой логики предикатов с равенством следующим образом:

$$\begin{aligned} N &= \{x: \in(x, x) \text{ истинно в } M \\ &\quad (\text{т.е., } x \text{ есть атом в } M)\} = \\ &= \{ \langle x, y \rangle : \in(x, y) \text{ и } \in(y, x) \text{ истинны в } M \}, \\ F_a &= \{x: \in(x, a) \text{ истинно в } M\}, \\ F_b &= \{x: \in(x, b) \text{ истинно в } M\}, \\ &\dots \end{aligned}$$

Модель N , определенная таким образом, образует модель для первопорядковой логики предикатов с равенством. В действительности N не пусто, так как M содержит по крайней мере один атом. Отношение тождества на N , с другой стороны, удовлетворяет всем требованиям к тождеству, что доказывается аналогично подобному доказательству для тождества в модели для L_1 (см. выше).

Лемма. *Предположим, что A истинна в M если и только если $T A$ истинна в N для любой атомарной формулы A из L_1 . Тогда B истинна в M е.т.е. $T B$ истинна в N для любой формулы B из L_1 .*

Это доказывается индукцией по длине B с учетом перевода T .

Лемма. *Для любых $a, b \in M$, $\in(a, b)$ истинно в M е.т.е. $T \in(a, b)$, а именно $F_b a$ и $F_a b$ истинно в N .*

Предположим, что $\in(a, b)$ истинно в M . Тогда мы имеем истинность в M $\in(a, a)$, что вместе с истинностью $\in(a, b)$ дает истинность $F_b a \wedge F_a a$ в N ввиду определения N . Отсюда следует истинность в N $\exists x (F_b x \wedge F_a x)$.

Предположим, далее, что в N истинно $F_a x \wedge F_a y$, то есть в M истинно $\in(x, a)$ и $\in(y, a)$. Так как $\in(x, a)$ и, следовательно, $\in(a, a)$ истинны в M , истинность $\in(y, a)$ дает истинность в M $\in(a, y)$, что вместе с истинностью $\in(x, a)$ дает истинность в M $\in(x, y)$. Аналогично мы получаем истинность $\in(y, x)$, что вместе дает истинность в N $x = y$. Так как x и y - произвольные элементы N , мы получили доказательство истинности в N $\forall x \forall y (F_a x \wedge F_a y \supset x = y)$, что

вместе с истинностью $\exists x (F_b x \wedge F_a x)$ дает нам истинность в N $F_b < x F_a x$ а именно, $T \in (a, b)$.

В другую сторону: предположим, что в N истинно $F_b < x F_a x$, т.е. $T \in (a, b)$. Предположим, далее, если это возможно, что a не является атомом M , а именно $\in(a, a)$ в M не истинно. С учетом истинности в N $\exists x (F_b x \wedge F_a x)$ существует $x (\in N)$ такой, что $\in(x, a)$ истинно в M . С другой стороны, из истинности $\forall x \forall y (F_a x \wedge F_a y \supset x = y)$ в N следует единственность такого x в M . Отсюда, однако, следует, что a есть сингулярный элемент M , что противоречит гипотезе о несингулярности M .

Из истинности в M $\in(a, a)$ и $\in(x, a)$ получаем истинность $\in(a, x)$, что вместе с истинностью $\in(x, b)$ дает доказательство истинности искомого $\in(a, b)$ в M .

Это завершает доказательство леммы.

Теперь напомним, что A недоказуемо в L_1 . А поэтому не истинно в модели M , которая является максимально непротиворечивым множеством (формул), содержащим $\sim A$. По двум предшествующим леммам $T A$, следовательно, ложно в N , которая является моделью первопорядковой логики предикатов с равенством. С учетом непротиворечивости первопорядковой логики предикатов с равенством $T A$ недоказуемо в этой логике.

Соединив этот результат с теоремой о непротиворечивости, доказанной в предыдущем разделе, получаем:

Теорема о полноте. Для любого A из L_1 , A есть теорема L_1 , если и только если $T A$ доказуемо в первопорядковой логике предикатов с равенством.

Другими словами, L_1 полна относительно ее интерпретации в первопорядковой логике предикатов с равенством. (Более конструктивное доказательство см. в работах Кобаяши - Ишимото [6] и Ину - Ишимото - Кобаяши [2]).

3. Взаимосвязь между L_1 и L

В этом разделе мы рассмотрим взаимосвязь между L_1 и L , а именно (элементарной) онтологией Лесневского.

Лемма. Модель для L не сингулярна.

Чтобы доказать эту лемму, предположим, что a - сингулярный элемент модели M для L . Тогда существует единственный элемент b из M , такой, что в M истинно $\in(b, a)$. Отсюда следует, что в M истинны следующие формулы:

$$(\exists x) \in(x, a)$$

$$(x)(y) (\in(x, a) \wedge \in(y, a) \supset \in(x, y)),$$

$$(x) (\in(x, a) \supset \in(x, b)).$$

С учетом единственной аксиомной схемы L истинность этих формул в M влечет истинность $\in(a, b)$. Тем не менее, $\in(a, b)$ не

истинно в M , так как его истинность превратила бы a в атом. Однако это не может иметь места для сингулярного элемента.

Лемма. L не может быть получена из L_1 путем добавления какого-либо аппарата квантификации.

Если бы L могла быть получена таким образом, следующие формулы были бы теоремами первопорядковой логики предикатов (без равенства):

- . $(x)(y) (\in(x,y) \supset \in(x,x))$
- . $(x)(y)(z) (\in(x,y) \wedge \in(y,z) \supset \in(x,z))$
- . $(x)(y)(\in(x,y) \wedge \in(y,y) \supset \in(y,x)) \supset A,$

где A есть генерализация единственной аксиомы L .

Антецедент этого условного высказывания истинен в сингулярной модели для L_1 , пример которой приведен в предшествующем разделе. Однако A не является истинной в сингулярной модели, как показывает только что доказанная лемма. Данная формула, следовательно, не является теоремой первопорядковой логики предикатов. Таким образом, показано, что кванторное обобщение L_1 не подходит для L .

Лемма. Модель для L_1 , не являющаяся сингулярной, образует модель для L .

Для доказательства леммы достаточно показать, что любой пример аксиомы L истинен в несингулярной модели M для L_1 .

Импликация слева направо эквивалентна конъюнкции следующих формул:

- . $\in(a,b) \in (\exists x) \in(x,a),$
- . $\in(a,b) \in (x)(y)(\in(x,a) \wedge \in(y,a) \supset \in(x,y)),$
- . $\in(a,b) \in (x)(\in(x,a) \supset \in(x,b)),$

для которых легко показать, что они истинны в M .

Чтобы доказать, что в M истинна обратная импликация, предположим, если это возможно, что истинно

- . $(\exists x) \in(x,a)$
- . $(x)(y)(\in(x,a) \wedge \in(y,a) \supset \in(x,y))$
- . $(x)(\in(x,a) \supset \in(x,b)),$

и ложно $\in(a,b)$ в M .

Далее, a не является атомом в M , так как допущение о том, что a - атом, ведет к истинности $\in(a,b)$ в соответствии с третьим конъюнктом, что противоречит предположению о ложности $\in(a,b)$.

Так как a не является атомом в M , a будет сингулярным элементом в M , как видно из второго конъюнкта приведенной выше формулы. Но это противоречит нашей гипотезе, что M несингулярна.

Теорема отделения. Если бескванторная формула A (из L) есть теорема L , то она доказуема в L_1 .

Предположим, если это возможно, что A не есть теорема L_1 . Тогда существует модель для L_1 , которая фальсифицирует A . По лемме из предыдущего раздела, эта модель несингулярна. По предыдущей лемме, эта модель будет образовывать в то же время и модель для L . Тогда, в противоречии с нашим допущением, в этой модели A истинно. (Недавно теорема отделения была доказана Такано [11] чисто синтаксически.)

4. Заключение

Как говорилось во введении, целью статьи является прояснение смысла онтологии Лесневского, которая вызывает дискомфорт у многих философов и логиков. Существуют два способа сделать это, как мы говорили. Один заключается в том, чтобы понимать онтологию Лесневского непосредственно, так сказать, феноменологически. Другой состоит в интерпретации онтологии при помощи логики предикатов, в которую онтология погружается. Данная статья представляет собой как раз попытку следовать второй линии по стопам Прайора [8], достигая кульминации в теореме полноты во втором разделе, ограничиваясь L_1 , т.е. пропозициональным фрагментом онтологии. (О подобном результате относительно L , а именно элементарной онтологии Лесневского, см. Смирнов [10].)

В заключение мы хотели бы исследовать доказательство теоремы о полноте более детально с философской точки зрения. При конструировании максимально непротиворечивого множества, представляющего собой в то же время модель для L , напомним, результирующая модель не является единственным образом определенной по отношению к модели для первопорядковой логики предикатов с равенством. С онтологической точки зрения, возможно, нас не устраивает такой результат. Но если мы вспомним, что к последней модели мы прибегаем лишь для установления недоказуемости формулы, соответствующей формуле, недоказуемой в L_1 , это не составляет никаких трудностей, по крайней мере по отношению к синтаксису L_1 . Кстати, провал единственности порождает идеалистическую интерпретацию построения предложенной модели. Другими словами, построение модели мыслится как субъективное действие с нашей стороны, которое производится с целью понять данную формулу либо внутри L_1 , либо при помощи логики предикатов.

Все эти вопросы будут рассмотрены более детально в другой статье.

ЛИТЕРАТУРА

1. *Henry D.P. Medieval Logic and Metaphysics. London 1972.*
2. *Inoue T., Ishimoto A., Kobayashi M. Axiomatic Rejection for the Propositional Subsystem of Lesniewski's Ontology (в печати).*

3. *Ishimoto A.* A Propositional Fragment of Lesniewski's Ontology. //Stud. Log. Vol. 36. 1977.
4. *Ishimoto A.* An Idealistic Approach to Situation Semantics. //Proc. of Int. Symp. on Language and AI. 1986. Amsterdam - N.Y., Oxford - Tokyo. 1987.
5. *Kanai N.* The Propositional Subsystem of Lesniewski's Ontology and its Simplified Version (in Japanese). //Philosophy of Science. Japan. Vol. 21. 1988.
6. *Kobayashi M., Ishimoto A.* A Propositional Fragment of Lesniewski's Ontology and its Formulation by the Tableau Method// Stud. Log. Vol. 41. 1982.
7. *Lejewski Cz.* Zu Lesniewskis Ontologie. Ratio, Vol. 1, 1958.
8. *Prior A.* Existence in Lesniewski and Russell. Formal Systems and Recursive Function. Amsterdam, 1963.
9. *Sagal P.T.* On How Best to Make Sense of Lesniewski's Ontology. //Notre Dame J. of Formal Logic. Vol. 14. 1973.
10. *Smirnov V.A.* Embedding of the Elementary Ontology of Stanislaw Lesniewski into the Monadic Second-Order Calculus of Predicates. //Stud. Log. Vol. 42. 1983; & Vol. 45. 1986.
11. *Takano M.* Separation Theorem and Translation Theorem Concerning the Subsystem of Lesniewski's Elementary Ontology. (В печати).

ДЕФИНИЦИАЛЬНАЯ ЭКВИВАЛЕНТНОСТЬ ЭЛЕМЕНТАРНОЙ ОНТОЛОГИИ И ОБОБЩЕННОЙ СИЛЛОГИСТИКИ ОККАМОВСКОГО ТИПА

Исчисление имен было построено Ст. Лесневским как альтернатива расселовской системы логики. Эта система не беднее системы Рассела. С другой стороны, исчисление имен Лесневского замышлялось как естественное обобщение традиционной логики. Б.Рассел четко различал собственные имена и общие имена; эти имена, согласно Б.Расселу, принадлежат к разным семантическим категориям или типам. В противоположность этому, по Ст. Лесневскому, имена, вне зависимости, являются ли они общими, единичными или пустыми, принадлежат к одной и той же семантической категории. В этом подход Лесневского родственен аристотелевской силлогистике.

Целью статьи является доказательство дефинициальной эквивалентности предложенной мною силлогистики С2Д, обогащенной аксиомой атомности, элементарной онтологии Ст. Лесневского ЕО.

Элементарная онтология Лесневского имеет один тип переменных - именные. В качестве именных переменных будем использовать буквы S, M, P. Атомарная формула имеет вид $S \in P$: S есть P. Формулы строятся с помощью пропозициональных связок и кванторов. Отметим, что теория квантификации стандартна, однако, она не референциальная, а подстановочная.

Аксиомами элементарной онтологии ЕО будут:

1. $\forall S \forall P (S \in P) \equiv \exists Q (Q \in S) \& \forall Q \forall M (Q \in S \& M \in S \supset Q \in M) \& \forall Q (Q \in S \supset Q \in P)$
2. $\forall P \exists S \forall Q (Q \in S) \equiv Q \in Q \& \neg (Q \in P)$
3. $\forall P \forall Q \exists S \forall M (M \in S \equiv M \in P \& M \in Q)$

Две последние аксиомы введены Иванусем, чтобы обеспечить некреативность определений. С помощью определений введем операции пересечения, объединения и дополнения:

$$M \in S \cap P \equiv M \in S \& M \in P$$

$$M \in S \cup P \equiv M \in S \vee M \in P$$

$$M \in S' \equiv M \in M \& \neg (M \in S)$$

Мною была предложена аксиоматика силлогистики, реализующая идею Оккама (а также ряда арабских логиков), что утвердительные категорические суждения утверждают непустоту субъекта, а отрицательные - нет. Эта система силлогистики С2 следующая:

1. $ASM \& AMP \supset ASP$ barbara
2. $ASM \& EMP \supset ASP$ celarent
3. $ASP \supset ISP$
4. $ESP \supset EPS$ обращение E
5. $ISP \equiv \neg ESP$
6. $OSP \equiv \neg ASP$
7. $ISP \supset ASS$

Последняя аксиома выражает идею, что субъект истинных утвердительных суждений не пуст. ASS как и ISS не доказуемы в системе C2, они выражают непустоту термина S.

Система C2 может быть расширена до системы со сложными терминами, назовем эту расширенную систему C2Д. Помимо простых терминов имеются сложные термины, образованные с помощью операций дополнения ', пересечения $\cap$ и объединения $\cup$. Впервые такая аксиоматизация была предложена В.А.Бочаровым. Я предложил следующую аксиоматику. К аксиомам 1-7 системы C2 добавляем следующие пять аксиом:

8. $ASP \supset ESP'$
9. $ASS \& ESP' \supset ASP$
10. $E(S \cap P)M \supset E(M \cap S)P$
11. $EM(S \cup P) \equiv EMS \& EMP$
12. $EM(S \cap P)' \equiv EMS' \& EMP'$

Было доказано, что C2Д дефинициально эквивалентна булевой алгебре классов.

Если силлогистику, в частности C2 и C2Д, формулировать в рамках теории квантификации, то в терминах силлогистики мы можем сформулировать аксиому атомности. Предварительно введем необходимые понятия. Прежде всего отметим, что формула $\forall P(APS \supset ASP)$ эквивалентна $\forall P(APS \supset \forall M(AMM \supset AMS \equiv AMP))$ и выражает условие, что S включает не более одного элемента. Как отмечено выше, ASS выражает, что S не пусто, то есть включает по крайней мере один элемент. Теперь мы можем ввести понятие атома: $At(S)$ если и только если под S подпадает ровно один элемент. В символике силлогистики:

$$At(S) =_{df} ASS \& \forall P(APS \supset ASP)$$

Теперь мы можем сформулировать аксиому атомности в терминах силлогистики $\forall S(ASS \supset \exists P(At(P) \& APS))$. Эта аксиома утверждает, что в каждый непустой термин включается атомный термин. Теперь нетрудно сформулировать аксиому атомности непосредственно, без вспомогательного предиката $At(S)$. После замены $At(S)$ его определением и некоторых преобразований аксиома атомности будет следующей:

13. $\forall S(AS \supset \exists P(\forall Q(AQP \supset APQ) \& APS))$.

Обозначим расширение системы C2Д аксиомой атомности C2ДА.

Теорема. Система силлогистики C2ДА дефинициально эквивалентна системе элементарной онтологии ЕО.

Для доказательства необходимо расширить систему C2ДА определением отношения "ЕСТЬ" (ϵ), систему ЕО определением силлогистических операторов А, Е, I, О.

$S\epsilon P$ содержательно означает, что S синглетон и все, что есть S, есть P. Поэтому расширим C2ДА следующим определением:

$$D1. \quad S\epsilon P \equiv \forall M(AMS \supset ASM) \& ASP$$

Систему ЕО (вместе с определениями $\cap$, $\cup$, $'$) расширим определениями операторов А, Е, I, О.

$$ASP \equiv \exists M(M\epsilon S) \& \forall M(M\epsilon S \supset M\epsilon P)$$

$$D2. \quad ESP \equiv \forall M(M\epsilon S \supset \neg(M\epsilon P))$$

$$ISP \equiv \exists M(M\epsilon S \& M\epsilon P)$$

$$OSP \equiv \exists M(M\epsilon S) \supset \exists M(M\epsilon S \& \neg(M\epsilon P))$$

Лемма 1. Если α доказуема в ЕО + D2, то α доказуема в C2Д2 + D1, т.е. $EO + D2 \subseteq C2DA + D1$

Доказательство.

(1)	1. $S\epsilon P$	допущение
	2. $\forall M(AMS \supset ASM) \& ASP$	D1;1
	3. $ASP \supset ASS$	док.в C2ДА
	4. $\forall M(AMS \supset ASM) \& ASS$	2,3
	5. $\exists Q(\forall M(AMQ \supset AQM) \& AQS)$	$\exists$ в;4
	6. $\exists Q(Q\epsilon S)$	D1;5

Отсюда
 $S\epsilon P \supset \exists Q(Q\epsilon S)$

(2)	1. $S\epsilon P$	допущение
	2. $\forall M(AMS \supset ASM) \& ASP$	D1;1
	3. $Q\epsilon S \& M\epsilon S$	допущение
	4. $\forall X(AXQ \supset AQX) \& AQS$	D1;3
	5. $\forall X(AXM \supset AMX) \& AMS$	D1;3
	6. $\forall X(AXQ \supset AQX)$	$\&$ у;4
	7. $\forall M(AMS \supset ASM)$	$\&$ у;2
	8. $AQS \supset ASQ$	$\&$ у;7
	9. AQS	$\&$ у;4
	10. ASQ	$\supset$ у;8,9
	11. AMS	$\&$ у;5
	12. $AMS \& ASQ \supset AMQ$	акс.1
	13. AMQ	$\supset$ у;10,11,12

14. $\forall X (AXQ \supset AQX)$	$\&y;4$
15. $AMQ \supset AQM$	$\forall y;14$
16. AQM	$\supset y;13,15$
17. $\forall X (AXQ \supset AQX) \& AQM$	$\&b;14,16$
18. $Q \in M$	$D1;17$
19. $Q \in S \& M \in S \supset Q \in M$	$\forall b;3-18$
20. $\forall Q \forall M (Q \in S \& M \in S \supset Q \in M)$	

Таким образом:
 $S \in P \supset \forall Q \forall M (Q \in S \& M \in S \supset Q \in M)$

(3)	1. $S \in P$	допущение
	2. $Q \in S$	допущение
	3. $\forall M (AMS \supset ASM) \& ASP$	$D1;1$
	4. $\forall M (AMQ \supset AQM) \exists AQS$	$D1;2$
	5. $AQS \& ASP \supset AQP$	акс.
	6. AQP	$\supset y;3,4,5,$
	7. $\forall M (AVQ \supset AQM)$	$\&y;4$
	8. $\forall M (AMQ \supset AQM) \& AQP$	$\&b;7,6$
	9. $Q \in P$	$D1;8$
	10. $\forall Q (Q \in S \supset Q \in P)$	$\supset b;2-9; \forall b$

Отсюда

$$S \in P \supset \forall Q (Q \in S \supset Q \in P)$$

Из соотношений (1)-(3) получаем, что в обобщенной силлогистике доказуема

$$S \in P \supset \exists M (M \in S) \& \forall Q \forall M (Q \in S \& M \in S \supset Q \in M) \& \forall Q (Q \in S \supset Q \in P).$$

Докажем в С2ДА перевод $\exists M (M \in S) \& \forall M \forall N (M \in S \supset M \in N) \supset S \in S$. Переводом $M \in S$ будет $AMS \& \forall X (AXM \supset AMX)$, для краткости будем писать $AMS \& At(M)$.

Доказательство проведем от противного.

1. $\exists M (At(M) \& AMS)$	посылка
2. $\forall M \forall N (At(M) \& At(N) \& AMS \& ANS \supset At(N) \& AMN)$	посылка
3. $\neg ASS \vee \exists Q (AQS \& \neg ASQ)$	допущение
4. AXS	$\exists y;1$
5. $AXS \supset ASS$	док. в С2ДА
6. ASS	$\supset y;4,5;$
7. $\exists Q (AQS \& \neg ASQ)$	$\forall y;3,6,$
8. AQS	$\exists y; \&y;7$
9. $\neg ASQ$	$\exists y; \&y;7$
10. $ASS \& ESQ' \supset ASQ$	аксиома 9
11. $\neg ESQ'$	из 10,6,9
12. ISQ'	из 11

13.	$A(S \cap Q')(S \cap Q')$	из 12 и док. ф-лы $IST \supset A(S \cap P)(S \cap P)$
14.	$A(S \cap Q')(S \cap Q') \supset \exists M(At(M) \& AM(S \cap Q'))$	акс. атомности
15.	$\exists M(At(M) \& AM(S \cap Q'))$	$\supset y$; 13, 4
16.	$At(M)$	$\exists y$; 15
17.	$AM(S \cap Q')$	$\exists y$; 15
18.	$AM(S \cap Q') \supset AMS \& AMQ'$	док. ф-ла C2ДА
19.	AMS	$\supset y$; & y; 17, 18
20.	$AMQ'e$	$\supset y$; & y; 17, 18
21.	AQQ	из 8 и акс. $AQS \supset AQQ$
22.	$AQQ \supset \exists N(At(N) \& ANQ)$	акс. атомности
23.	$At(N) \& ANQ$	$\supset y$; 21, 22, $\exists y$
24.	$At(N) \& AMS$	из 23,8, акс.1
25.	$At(M) \& AMS$	& в; 16, 19
26.	AMN	из 2, 24, 24
27.	AMQ	из 23, 26
28.	$AMQ \supset EMQ'$	акс.8
29.	EMQ'	$\supset y$; 27, 28

30. Противоречие 20,29

Таким образом, из двух посылок выводима $ASS \& \forall Q(AQS \supset ASQ)$, то есть $S \varepsilon S$.

Теперь нетрудно вывести из $\exists M(M \varepsilon S)$, $\forall M \forall N(M \varepsilon S \& N \varepsilon S \supset N \varepsilon S)$ и $\forall M(M \varepsilon S \supset M \varepsilon P)$ формулу $S \varepsilon P$, то есть $ASP \& \forall Q(AQS \supset ASQ)$.

- | | | |
|----|--|----------|
| 1. | $\forall M(At(M) \& AMS \supset At(M) \& ASP)$ | посылка |
| 2. | $ASS \& At(S)$ | доказано |
| 3. | ASP | из 1,2 |
| 4. | $ASP \& \forall Q(AQS \supset ASQ)$ | 2,3 |

Мы ссылались как на доказуемые на следующие формулы:
 $ISP \supset A(S \cap P)(S \cap P)$ и $AM(S \cap P) \supset AMS \& AMP$.

Но их нетрудно доказать в C2ДА. Из аксиом 8,9 получаем $ASP \equiv ASS \& ESP' (I)$

- | | | |
|----|-------------------------------------|--------------|
| 1. | $AM(S \cap P)$ | посылка |
| 2. | $AMM \& EM(S \cap P)'$ | (I),1 |
| 3. | $EM(S \cap P)' \equiv EMS' \& EMP'$ | акс.12 |
| 4. | $EMS' \& EMP'$ | 2,3 |
| 5. | $AMM \& EMS'$ | 2,4 |
| 6. | $AMM \& EMP'$ | 2,4 |
| 7. | $AMS \& AMP$ | из 3,5,6,(I) |

Таким образом, перевод аксиом элементарной онтологии доказуем в С2ДА. Покажем, что определения D2 доказуемы в обобщенной силлогистике.

(1) $ASP \equiv \exists M(M \varepsilon S) \& \forall M(M \varepsilon S \supset M \varepsilon P)$

- | | |
|--|--------------------|
| 1.ASP | посылка |
| 2.ASP $\supset$ ASS | док. в С2ДА |
| 3.ASS | $\supset y; 1, 2,$ |
| 4.ASS $\supset \exists M(AMS \& \forall Q(AQM \supset AMQ))$ | акс. атомности |
| 5. $\exists M(AMS \& \forall Q(AQM \supset AMQ))$ | $\supset y; 3, 4$ |
| 6. $\exists M(M \varepsilon S)$ | D1; 5 |

Выведем из ASP второй член конъюнкции:

- | | |
|---|-----------------------------|
| 1.ASP | посылка |
| 2.AMS & At(M) | допущение |
| 3.AMS | $\& y, 2$ |
| 4.AMP | 1, 3 |
| 5.At(M) & AMP | 2, 4 |
| 6. $\forall M(M \varepsilon S \supset M \varepsilon P)$ | $\supset v; 2-5, \forall v$ |

Теперь докажем справа налево методом от противного:

- | | |
|---|---|
| 1. $\exists M(At(M) \& AMS)$ | посылка |
| 2. $\forall M(At(M) \& AMS \supset At(M) \& AMP)$ | посылка |
| 3. $\neg ASP$ | допущение |
| 4.ASS | из 1, $\exists y; \& y, AMS \supset ASS$ |
| 5. $\neg ASS \vee ISP'$ | |
| 6.ISP' | 4, 5 |
| 7.A(S $\cap$ P')(S $\cap$ P') | из 5. и $ISP \supset A(S \cap P)(S \cap P)$ |
| 8.A(S $\cap$ P')(S $\cap$ P') $\supset \exists X(At(x) \& AX(S \cap P'))$ | акс. атомности |
| 9.At(x) & AX(S $\cap$ P') | 7, 8, $\exists y$ |
| 10. $\forall M(AT(M) \supset (AMS \supset AMP))$ | из 2 |
| 11.AXS $\supset$ AXP | 9, 10 |
| 12.AX(S $\cap$ P') $\supset$ AXS & AXP' | док. формула. |
| 13.AXS & AXP' | $\supset y, 9, 12$ |
| 14.AXP | 11, 13 |
| 15.Противоречие 13, 14 | |

Таким образом $\exists M(M \varepsilon S) \& M(M \varepsilon S \supset M \varepsilon P) \supset ASP$ доказуема в С2ДА + D1.

Перейдем к следующему определению: $ESP \equiv \forall M(M \varepsilon S \supset \neg(M \varepsilon P))$

Докажем слева направо:

- | | | |
|----|--|------------------|
| 1. | ESP | посылка |
| 2. | $M \varepsilon S$ | допущение |
| 3. | AMS & At(M) | D1; 2 |
| 4. | $M \varepsilon P$ | допущение |
| 5. | AMP & At(M) | D1; 4 |
| 6. | EMP | 1, 3, акс. 2 |
| 7. | Противоречие | 5, 6 |
| 8. | $\neg(M \varepsilon P)$ | $\neg v; 4-7$ |
| 9. | $\forall M(M \varepsilon S \supset \neg(M \varepsilon P))$ | $\supset v; 2-8$ |

Справа налево:

1. $\forall M(M \in S \supset \neg(M \in P))$ посылка
2. $\forall M(At(M) \& AMS \supset \neg(At(M) \& AMP))$ D1;1
3. $\forall M(At(M) \supset (AMS \supset \neg AMP))$ лог.выск;2
4. $\neg ESP$ допущение
5. ISP силл.;4
6. $A(S \cap P)(S \cap P)$ силл.;5
7. $A(S \cap P)(S \cap P) \supset \exists Q(At(Q) \& AQ(S \cap P))$ акс. ат.
8. $At(Q) \& AQ(S \cap P) \supset \exists y;6,7, \exists y$
9. $AQS \& AQP$ силл.;8
10. $AQS \supset \neg AQP$ $\forall y;3,8$
11. Противоречие 9,10
12. ESP $\neg y,4-11$

Перейдем к следующему определению: $ISP \equiv \exists M(M \in S \& M \in P)$.

Слева направо:

1. ISP посылка
2. $A(S \cap P)(S \cap P)$ силл.;1
3. $A(S \cap P)(S \cap P) \supset \exists M(At(M) \& AM(S \cap P))$ акс. ат.
4. $\exists M(At(M) \& AM(S \cap P)) \supset \exists y;2,3$
5. $AM(S \cap P) \supset AMS \& AMP$ док. в силл.
6. $\exists M(At(M) \& AMS \& AMP)$ 4,5

Справа налево:

1. $\exists M(M \in S \& M \in P)$ посылка
2. $\exists M(At(M) \& AMS \& AMP)$ D1;1
3. $AMS \& AMP$ $\exists y;2$
4. $AMS \& AMP \supset ISP$ док.
5. ISP $\supset y;3,4$

Перейдем к определению O.

$$OSP \equiv \exists M(M \in S) \supset \exists M(M \in S \& \neg(M \in P))$$

Поскольку мы доказали

$$ASP \equiv \exists M(M \in S) \& \forall M(M \in S \supset M \in P),$$

то получим $\neg ASP \equiv \neg(\exists M(M \in S) \& \forall M(M \in S \supset M \in P))$ и

$$OSP \equiv \exists M(M \in S) \supset \exists M(M \in S \& \neg(M \in P))$$

Нам остается доказать две аксиомы, добавленные Иванусем и обеспечивающие некреативный характер определений в элементарной онтологии.

1.	$At(Q) \& AQS'$	допущение
2.	$AQS' \supset \neg AQS$	док.
3.	$\neg AQS$	$\supset y; 1, 2$
4.	$AQS' \supset AQQ$	док.
5.	AQQ	$\supset y; 1, 4$
6.	$At(Q) \& AQS$	7 допущение
7.	Противоречие	1, 6
8.	$\neg (At(Q) \& AQS)$	$\neg v; 6-7$
9.	$At(Q) \& AQQ \& \neg (At(Q) \& AQS)$	$\& y; \& v; 1, 5, 8$
10.	$At(Q) \& AQS' \supset At(Q) \& AQQ \& \neg (At(Q) \& AQS)$	$\supset v; 1-9$

Формула

$At(Q) \& AQS \supset AQS'$

доказуема:

1.	$\forall M (AMQ \supset AQM) \& AQQ$	доп.
2.	$\neg AQS$	доп.
3.	$AQQ \& EQS' \supset AQS$	доказ.
4.	$\neg AQQ \vee IQS'$	2, 3
5.	IQS'	1, 4,
6.	$A(Q \cap S') (Q \cap S')$	5
7.	$A(Q \cap S') (Q \cap S') \supset \exists X (At(X) \& AX(Q \cap S'))$	док.
8.	$At(X)$	$\supset y; 6, 7 \exists y; \& y$
9.	$AX(Q \cap S')$	$\supset y; 6, 7$
10.	$AX(Q \cap S') \supset AXQ \& AXS'$	док.
11.	$AXQ \& AXS'$	$\supset y; 8, 9$
12.	AQX	1, 11
13.	AQS'	11, 12

Теперь легко доказать аксиому Ивануся справа налево:

1.	$At(Q) \& AQQ \& \neg (At(Q) \& AQS)$	доп.
2.	$At(Q) \& \neg AQS \supset AQS'$	док.
3.	$At(Q) \supset \neg AQS$	$\& y; 1$
4.	$At(Q)$	$\& y; 1$
5.	$\neg AQS$	$\supset y; 3, 4$
6.	$At(Q) \& AQS'$	$\& v; 4, 5$
7.	AQS'	$\supset y; 2, 6$
8.	$At(Q) \& AQS'$	$\& v; 4, 7$

Отсюда и из предыдущего доказательства получаем:

$\forall Q (At(Q) \& AQS' \equiv At(Q) \& AQQ \& \neg (At(Q) \& AQS))$
 $\forall S \exists P \forall Q (At(Q) \& AQP \equiv At(Q) \& AQQ \& \neg (At(Q) \& AQS))$
 $\forall S \exists P \forall Q (Q \in P \equiv Q \in Q \& \neg (Q \in S))$

В силлогистике C2ДА доказуема $AX(S \cap P) \equiv AXS \& AXP$, но если $A \equiv B$ доказуема, то доказуемо и $C \& A \equiv C \& B$.

По этому правилу имеем

$$At(X) \& AX(S \cap P) \equiv At(X) \& AXS \& At(X) \& AXP$$

и, навешивая кванторы:

$$-Q\forall X(At(X) \& AXQ \equiv At(X) \& AXS \& At(X) \& AXP$$

и окончательно имеем:

$$\forall S \forall P \exists Q \forall X (X \in Q \equiv X \in S \& X \in P).$$

Определения $\cap, \cup, \epsilon$ в онтологии доказуемы в С2ДА.

$$M \epsilon S \cap P \equiv M \epsilon P$$

$$1. AM(S \cap P) \equiv AMS \& AMP$$

док. в С2ДА

$$2. At(M) \& AM(S \cap P) \equiv At(M) \& AMS \& AMP$$

из $A \equiv B / C \& A \equiv C \& B$

$$3. M \epsilon S \cap P \equiv M \epsilon S \& M \epsilon P$$

опр. ϵ ; 2

Прежде чем доказывать $M \epsilon S' \epsilon \equiv M \epsilon M \& \neg(M \epsilon S)$ в С2ДА, докажем вспомогательное утверждение

$$At(S) \vdash ISP \supset ASP$$

1.	$At(S)$	пос.	
2.	ISP	пос.	
3.	$ASS \& \forall Q (AQS \supset ASQ)$	(1); 1	
4.	$\neg ASP$	доп.	
5.	$ASS \& ESP \epsilon \supset ASP$	акс. 9	
6.	$\neg ASS \vee ISP \epsilon$	4, 5	
7.	ISP'	3, 5	
8.	$ISP' \supset A(S \cap P')(S \cap P')$	док.	
9.	$A(S \cap P')(S \cap P') \supset \exists X (At(x) \& AX(S \cap P'))$	акс. ат.	
10.	$At(x) \& AX(S \cap P')$	7, 8, 9; $\exists y$	
11.	$AX(S \cap P') \supset AXS \& AXP'$	док.	
12.	AXS	10, 11	
13.	AXP'	10, 11	
14.	ASX	3, 12	
15.	ASP'	3, 13	
16.	$ASP' \equiv ASS \& ESP$	док.	
17.	ESP	4, 5	
18.	$\perp$	2, 17	
19.	ASP	$\neg y, 4-18$	

Теперь докажем определение '.
Слева направо

1.	$M\epsilon S'$	посылка
2.	$At(M)\&AMS'$	D1;1
3.	$AMS'\supset AMM$	док.
4.	AMM	$\&y; \supset y; 2,3$
5.	$At(M)\&AMS$	доп.
6.	AMS	$\&y; 5$
7.	$\perp$	2,6
8.	$\neg (At(M)\&AMS)$	$\neg B; 5-7$
9.	$AMM\&At(M)\&\neg (At(M)\&AMS)$	4,1,8
10.	$M\epsilon M\&\neg (M\epsilon S)$	D1;9

Справа налево

1.	$M\epsilon M\&\neg (M\epsilon S)$	пос.
2.	$At(M)\&AMM$	D1;1
3.	$\neg (At(M)\&AMS)$	D1;1
4.	$\neg AMS$	2,3
5.	$\forall Q(AQM\supset AMQ)$	2, At(M)
6.	$At(M)\&(IMS\supset AMS)$	док.
7.	$At(M)\&\neg AMS\supset EMS'$	6
8.	EMS	$\supset y; 2,4,7$
9.	$AMM\&EMS\supset AMS'$	док.
10.	AMS'	$\supset y; 2,8,9$
11.	$At(M)\&AMS'$	2,10
12.	$M\epsilon S'$	D1;11

Поскольку логика высказываний и правила квантификации в C2ДА и EO совпадают, то лемма 1 доказана.

Л е м м а 2. Если формула α доказуема в C2ДА+D1, то она доказуема в EO+D2, то есть $C2ДА + D1 \subseteq EO + D2$.

Доказательство аксиом 1-12 просто. Более сложно доказывается аксиома 13 - аксиома атомности.

1.ASM& $\supset$ ASP

1.ASM&	посылка
2. $\exists N(N\epsilon S)\&\forall Q(Q\epsilon S\supset Q\epsilon M)$	$\&y; 1; D2$
3. $\exists P(P\epsilon M)\&\forall Q(Q\epsilon M\supset Q\epsilon P)$	$\&y; 1; D2$
4. $\exists N(N\epsilon S)$	$\&y; 2$
5. $Q\epsilon S\supset Q\epsilon M$	$\&y; \forall y; 2$
6. $Q\epsilon M\supset Q\epsilon P$	$\&y; \forall y; 3$
7. $Q\epsilon S\supset Q\epsilon P$	$\supset tr.; 5,6$
8. $\forall Q(Q\epsilon S\supset Q\epsilon P)$	$\forall B; 7$
9. $\exists N(N\epsilon S)\&\forall Q(Q\epsilon S\supset Q\epsilon P)$	$\&B; 2,8$
10.ASP	D2;9

2.ASM&EMP $\supset$ ESP

1.ASM&EMP	посылка
2. $\exists N(N\epsilon S) \& \forall N(N\epsilon S \supset N\epsilon P)$	$\&y;1;D2$
3. $\forall Q(Q\epsilon M \supset \neg(Q\epsilon P))$	$\&y;1;D2$
4. $N\epsilon S \supset N\epsilon M$	$\&y;\forall y;2$
5. $N\epsilon M \supset \neg(N\epsilon P)$	$\forall y;3$
6. $N\epsilon S \supset \neg(N\epsilon P)$	$\supset tr.;4,5$
7. $\forall N(N\epsilon S \supset \neg(N\epsilon P))$	$\forall B;6$
8.ESP	$D2;7$

3.ASP $\supset$ ISP

1. $\exists N(N\epsilon S) \& \forall N(N\epsilon S \supset N\epsilon P)$	посылка
2. $N\epsilon S$	$\&y;\exists y;1$
3. $N\epsilon S \supset N\epsilon P$	$\forall y;1$
4. $N\epsilon P$	$\supset y;2,4$
5. $\exists N(N\epsilon S \& N\epsilon P)$	$\&B;\exists B;2,4$

4.ESP $\supset$ EPS

$$\forall Q(Q\epsilon S \supset \neg(Q\epsilon P)) \supset \forall Q(Q\epsilon P \supset \neg(Q\epsilon S))$$

5.ISP $\equiv \neg$ ESP

$$\exists N(N\epsilon S \& N\epsilon P) \equiv \neg \forall N(N\epsilon S \supset \neg(N\epsilon P))$$

6.OSP $\equiv \neg$ ASP

$$(\exists N(N\epsilon S) \supset \exists N(N\epsilon S \& \neg(N\epsilon P))) \equiv \neg(\exists N(N\epsilon S) \& \forall N(N\epsilon S \supset N\epsilon P))$$

7.ISP $\supset$ ASS

$$\exists N(N\epsilon S \& N\epsilon P) \supset \exists N(N\epsilon S) \& \forall N(N\epsilon S \supset N\epsilon S)$$

8.ASP $\supset$ ESP ϵ

1.	$\exists N(N\epsilon S) \& \forall N(N\epsilon S \supset N\epsilon P)$	доп.
2.	$N\epsilon S$	доп.
3.	$N\epsilon P$	$\&y;\forall y;1$
4.	$N\epsilon P\epsilon$	доп.
5.	$N\epsilon P\epsilon \equiv N\epsilon N \& \neg(N\epsilon P)$	Опр. ϵ
6.	$N\epsilon N \& \neg(N\epsilon P)$	$\supset y;4,5$
7.	$\neg(N\epsilon P)$	$\&y;6$
8.	$\perp$	3,7
9.	$\neg(N\epsilon P\epsilon)$	$\neg B;4-8$
10.	$\forall N(N\epsilon S \supset \neg(N\epsilon P\epsilon))$	$\supset B;2-9$
11.	$\exists N(N\epsilon S) \& \forall N(N\epsilon S \supset N\epsilon P) \supset \forall N(N\epsilon S \supset \neg(N\epsilon P\epsilon))$	$\supset B;1-10$

9. ASS & ES $\vdash$ ASP

1.	$\exists N(N \varepsilon S) \& \forall N(N \varepsilon S \supset N \varepsilon S)$	посылка
2.	$\forall Q(Q \varepsilon S \supset \neg(Q \varepsilon P \varepsilon))$	посылка
3.	$Q \varepsilon S$	доп.
4.	$\neg(Q \varepsilon P \varepsilon)$	$\forall y; 2$
5.	$Q \varepsilon P \varepsilon \equiv Q \varepsilon Q \& \neg(Q \varepsilon P)$	Опр. ε
6.	$\neg(Q \varepsilon Q \& \neg(Q \varepsilon P))$	4, 5
7.	$Q \varepsilon Q \supset Q \varepsilon P$	6
8.	$Q \varepsilon S \supset Q \varepsilon Q$	док. в EO
9.	$Q \varepsilon Q$	$\supset y; 3, 8$
10.	$Q \varepsilon P$	$\supset y; 7, 9$
11.	$\forall Q(Q \varepsilon S \supset Q \varepsilon P)$	$\supset B; 3-10; \forall B$

10. E(S $\cap$ P)M $\supset$ E(M $\cap$ S)P

1.	$\forall Q(Q \varepsilon S \cap P \supset \neg(Q \varepsilon M))$	посылка
2.	$Q \varepsilon M \cap S$	доп.
3.	$Q \varepsilon P$	доп.
4.	$\forall Q(Q \varepsilon M \cap S \equiv Q \varepsilon M \& Q \varepsilon S)$	Опр. $\cap$
5.	$Q \varepsilon M$	2, 4
6.	$Q \varepsilon S$	2, 4
7.	$Q \varepsilon S \& Q \varepsilon P$	$\& B; 6, 3$
8.	$Q \varepsilon S \cap P$	4, 6
9.	$\neg(Q \varepsilon M)$	$\forall y; \supset y; 1, 8$
10.	$\perp$	5, 9
11.	$\neg(Q \varepsilon P)$	$\neg y; 3-10$
12.	$Q \varepsilon M \cap S \supset \neg(Q \varepsilon P)$	$\supset B; 2-11$
13.	$\forall Q(Q \varepsilon M \cap S \supset \neg(Q \varepsilon P))$	$\forall B; 12$

11. EM(S $\cup$ P) $\equiv$ EMS & EMP

$\forall Q(Q \varepsilon M \supset \neg(Q \varepsilon S \cup P)) \equiv \forall Q(Q \varepsilon M \supset \neg(Q \varepsilon S \vee Q \varepsilon P)) \equiv \forall Q(Q \varepsilon M \supset \neg(Q \varepsilon S) \& \neg(Q \varepsilon P)) \equiv \forall Q(Q \varepsilon M \supset \neg(Q \varepsilon S)) \& \forall Q(Q \varepsilon M \supset \neg(Q \varepsilon P)).$

12. EM(S $\cap$ P) $\varepsilon \equiv$ EMS ε & EMP ε

$\forall Q(Q \varepsilon M \supset \neg(Q \varepsilon (S \cap P) \varepsilon)) \equiv \forall Q(Q \varepsilon M \supset \neg(Q \varepsilon Q \& \neg(Q \varepsilon S \cap P)))$
 $\equiv \forall Q(Q \varepsilon M \supset (Q \varepsilon Q \supset Q \varepsilon S \& Q \varepsilon P)) \equiv$
 $\equiv \forall Q(Q \varepsilon M \& Q \varepsilon Q \supset Q \varepsilon S) \& \forall Q(Q \varepsilon M \& Q \varepsilon Q \supset Q \varepsilon P).$

Но $Q \varepsilon S \varepsilon \equiv Q \varepsilon S$ и отсюда $Q \varepsilon S \equiv Q \varepsilon Q \& \neg(Q \varepsilon S \varepsilon).$

Продолжая

$\equiv \forall Q(Q \varepsilon M \& Q \varepsilon Q \supset Q \varepsilon Q \& \neg(Q \varepsilon S \varepsilon)) \& \forall Q(Q \varepsilon M \& Q \varepsilon Q \supset Q \varepsilon Q \& \neg(Q \varepsilon P \varepsilon))$
 $\equiv \forall Q(Q \varepsilon M \supset \neg(Q \varepsilon S \varepsilon)) \& \forall Q(Q \varepsilon M \supset \neg(Q \varepsilon P \varepsilon)) \& \forall Q(Q \varepsilon M \supset \neg(Q \varepsilon P \varepsilon)))$

На последнем шаге мы используем эквивалентность $Q \varepsilon M \equiv Q \varepsilon M \& Q \varepsilon Q.$

Докажем теперь аксиому атомности.

13. $\forall S(AS \supset \exists P(\forall Q(AQP \supset APQ) \& APS))$

1.	ASS	посылка
2.	$\exists N(N \in S)$	из 1
3.	$N \in S$	$\exists y; 2$
4.	$N \in S \supset N \in N$	док. в EO
5.	$N \in N$	$\supset y; 3, 4$
6.	$\exists M(M \in N)$	$\exists v; 5$
7.	$M \in N$	доп.
8.	$M \in N \& N \in S \supset M \in S$	док. в EO
9.	$M \in S$	$\supset y; 7, 3, 8$
10.	$\forall M(M \in N \supset M \in S)$	$\supset v; 7-9; \forall v$
11.	$\exists M(M \in N) \& \forall M(M \in N \supset M \in S)$	$\& v; 6, 10$
12.	$\exists M(M \in Q) \& \forall M(M \in Q \supset M \in N)$	доп.
13.	$M \in N$	доп.
14.	$T \in Q$	$\& y; \exists y; 12$
15.	$T \in N$	$\& y; \forall y; 12, 14$
16.	$N \in N \supset \forall X \forall Y (X \in N \& Y \in N \supset X \in Y)$	док. в EO
17.	$\forall X \forall Y (X \in N \& Y \in N \supset X \in Y)$	$\supset y; 5, 16$
18.	$M \in T$	$\forall y; \& v; \supset y; 13, 15, 17$
19.	$M \in T \& T \in Q \supset M \in Q$	док. в EO
20.	$M \in Q$	18, 14, 19
21.	$\forall M(M \in N \supset M \in Q)$	$\supset v; 13-20; \forall v$
22.	$\exists M(M \in N) \& \forall M(M \in N \supset M \in Q)$	$\& v; 6, 21$
23.	$\forall Q(\exists M(M \in Q) \& \forall M(M \in Q \supset M \in N) \supset \exists M(M \in N) \& \forall M(M \in N \supset M \in Q))$	$\supset v; 12-22; \forall v$
24.	23 & 11	
25.	$\exists P(\forall Q(\exists M(M \in Q) \& \forall M(M \in Q \supset M \in P) \supset \exists M(M \in P) \& \forall M(M \in P \supset M \in Q)) \& \exists M(M \in P) \& \forall M(M \in P \supset M \in S))$	$\exists v; 24$
26.	$\exists P(\forall Q(AQP \supset APQ) \& APS)$	

Теперь докажем в элементарной онтологии D1, то есть

$$S \in P \equiv \forall M(AM \supset AS \supset M) \& APS.$$

Нам надо доказать

$$S \in P \equiv \forall M(\exists N(N \in M) \& \forall N(N \in M \supset N \in S)) \supset \exists Q(Q \in S) \& \forall Q(Q \in S \supset Q \in M) \& \exists R(R \in S) \& \forall R(R \in S \supset R \in P))$$

По аксиоме онтологии мы имеем:

$$S \in P \equiv \forall M \forall N(M \in S \& N \in S \supset M \in N) \& \exists R(R \in S) \& \forall R(R \in S \supset R \in P).$$

Нам достаточно доказать, что $\forall M \forall N(M \in S \& N \in S \supset M \in N)$ эквивалентно $\forall M(\exists N(N \in M) \& \forall N(N \in M \supset N \in S) \supset \exists Q(Q \in S) \& \forall Q(Q \in S \supset Q \in M))$

Справа налево

1.	$\forall M(\exists N(N \in M) \& \forall N(N \in M \supset N \in S) \supset \exists Q(Q \in S) \& \forall Q(Q \in S \supset Q \in M))$	посылка
2.	$X \in S \& Y \in S$	доп.
3.	$Y \in S \supset Y \in Y$	док. в EO
4.	$Y \in Y$	$\supset y; 2, 3$
5.	$\exists N(N \in Y)$	$\exists v; 4$
6.	$Y \in S \supset \forall N(N \in Y \supset N \in S)$	док. в EO
7.	$\forall N(N \in Y \supset N \in S)$	$\supset y; 2, 6$
8.	$\exists N(N \in Y) \& \forall N(N \in Y \supset N \in S)$	$\& v; 5, 7$
9.	$\exists Q(Q \in S) \& \forall Q(Q \in S \supset Q \in Y)$	$\forall y; \supset y; 1, 8$
10.	$\forall Q(Q \in S \supset Q \in Y)$	$\& y; 9$
11.	$X \in S \supset X \in Y$	$\forall y; 10$
12.	$X \in Y$	$\supset y; 2, 11$
13.	$X \in Y \& Y \in S \supset X \in Y$	$\supset v; 2-12$
14.	$\forall M \forall N(M \in S \& N \in S \supset M \in N)$	$\forall v; 13$

Слева направо

1.	$\forall M \forall N(M \in S \& N \in S \supset M \in N)$	посылка
2.	$\exists N(N \in M) \& \forall N(N \in M \supset N \in S)$	доп.
3.	$X \in M$	$\& y; \exists y; 2$
4.	$X \in M \supset X \in S$	$\& y; \forall y; 2$
5.	$X \in S$	$\supset y; 3, 4$
6.	$\exists Q(Q \in S)$	$\exists v; 5$
7.	$Q \in S$	доп.
8.	$Q \in S \& X \in S \supset Q \in X$	$\forall y; 1$
9.	$Q \in X \& v,$	$\supset y; 7, 5, 8$
10.	$Q \in X \& X \in M \supset Q \in M$	док. в EO
11.	$Q \in M$	$\& v; \supset y; 9, 3, 10$
12.	$\forall Q(Q \in S \supset Q \in M)$	$\supset y; 7-11; \forall v$
13.	$\exists Q(Q \in S) \& \forall Q(Q \in S \supset Q \in M)$	$\& v; 6, 12$
14.	$\exists N(N \in M) \& \forall N(N \in M \supset N \in S) \supset \exists Q(Q \in S) \& \forall Q(Q \in S \supset Q \in M)$	$\supset v; 2-13$

Таким образом, мы доказали эквивалентность первой и последней формул построенного выше вывода и отсюда следует, что $S \in P \equiv \forall M(AMS \supset ASM) \& ASP$ доказуема в онтологии Лесневского.

Поскольку пропозициональная логика и теория квантификации совпадают, то лемма 2 доказана. Из лемм 1 и 2 получаем доказательство основной теоремы: $C2DA + D1$ эквивалента $EO + D2$, то есть элементарная онтология дефинициально эквивалентна обобщенной силлогистике с аксиомой атомности.

Если строить обобщенную силлогистику не на базе первопорядковой теории квантификации, а на столь же богатой, как и онтология Лесневского (неэлементарная), то мы будем просто иметь другую силлогистическую формулировку онтологии Лесневского. Эта онтология может быть построена в терминах

силлогистики, что ранее неоднократно утверждалось последователями Лесневского. Но при этом не уточнялось, какая силлогистика имеется в виду, и я не встретил в литературе точного доказательства этого утверждения. Настоящая статья дает строгое доказательство дефинициальной эквивалентности обобщенной атомной силлогистики и онтологии Лесневского.

ЛИТЕРАТУРА

1. Смирнов В. А. Логические методы анализа научного знания. М., Наука, 1987.
2. Iwanus B. On Lesniewski's elementary ontology. *Studia Logika*, 1973, Vol. 31.
3. Slupecki I. S. Lesniewski's calculus of names. *Studia Logica*, 1955, v. 3.
4. Smirnov V. A. Strict embedding of elementary ontology into the monadic second-order calculus of predicates admitting the empty individual domain.- *Studia Logica*, 1987, Vol XLVI, N1.
5. Смирнов В. А. Вступительная статья в кн.: Инголс Д.Г. "Введение в индийскую логику Навья-ньяя", М., 1975.
6. Бочаров В. А. Булева алгебра в терминах силлогистики. - Логические исследования, М., ИФАН, 1983.
7. Васильев Н. А. Воображаемая логика.- Избранные труды. М., Наука, 1989.
8. Smirnov V.A. The logical ideas of N. A. Vasiliev and modern logic. *Logic, Methodology and Philosophy of Science*, VIII (Fenstad I. E., Frolov I. T., Hilpinen R.), *Studies in Logic and the Foundations of Mathematics*, Vol.126, Amsterdam 1989.

ПОГРУЖЕНИЕ ЭЛЕМЕНТАРНОЙ ОНТОЛОГИИ ЛЕСНЕВСКОГО В СЕМАНТИЧЕСКИ ЗАМКНУТУЮ ТЕОРИЮ ОБОЗНАЧЕНИЯ

В данной статье рассматриваются взаимоотношения исчисления имен Лесневского [10] с семантически замкнутой теорией обозначения, предложенной в [1, 9], и также проводится их сопоставление с формализованной Лукасевичем [2] силлогистикой Аристотеля, дополненной аксиомой отбрасывания.

Следующие положения, выраженные в естественном языке, необходимо принимать во внимание для понимания смысла исходных понятий элементарной онтологии Лесневского, иначе называемой исчислением имен.

В онтологии Лесневского отношение между именами x и y описывается термином ϵ , соответствующим связке "есть" естественного языка.

Считается, что предложение " x есть y " (символически $x \epsilon y$) имеет смысл для любых имен x, y : пустых, единичных, общих.

Принимается, что предложение $x \epsilon y$ истинно, если и только если имя x единично, и его объем включается в объем имени y .

Покажем, что условия истинности предложения со связкой "есть", употребляемой в смысле онтологии Лесневского, могут быть выражены в терминах теории обозначения, в построении которой будем исходить из следующих содержательных предпосылок.

Отношение обозначения – это сложное отношение, составной частью которого является конвенционально устанавливаемое соответствие между знаками и объектами, которые являются денотатами этих знаков. Здесь мы ограничимся рассмотрением знаков только в отношении к объектам, составляющим объем знака, абстрагируясь от смысла знаков. Если представлять знаки как имеющие значение и смысл, или экстенсионал и интенсионал, то в данном подходе построение теории обозначения начинается в экстенсиональном измерении.

Для совместного рассмотрения пустых, единичных и общих имен будем следовать той традиции, в которой общие имена так же, как единичные, являются обозначающими и принадлежат одной и той же семантической категории.

Знаки некоторого языка, предназначенные для обозначения разного рода объектов, сами могут быть обозначаемы в метаязыке и поэтому, в свою очередь, являются объектами в качестве денотатов для других знаков метаязыка. При этом в начале построения нет необходимости отделять множество объектов, являющихся денотатами, от множества объектов, являющихся именами, а также от множества объектов, являющихся именами имен.

Исходя из этих предпосылок, будем описывать отношение обозначения знаков или имен к объектам как отношение объектов к объектам, которые можно рассматривать в качестве знаков или денотатов в зависимости от устанавливаемого отношения обозначения между ними. Таким образом, из трех категорий переменных - имен, концептов и объектов будем использовать для начала только одну - категорию объектов.

Свойства отношения обозначения будем задавать аксиоматически.

Тот факт, что объект z обозначает объект x , будем символизировать формулой $(z \sigma x)$. Вместо переменных z и x в эту формулу могут подставляться только имена собственные различных объектов. Сами же объекты могут быть как некоторыми вещами, которые не являются знаками, так и знаками, которые в свою очередь могут быть пустыми, единичными или общими.

Также будем использовать функцию именования $n(x)$, значением которой будут объекты, являющиеся собственными именами ее аргументов.

Будем также рассматривать два абстрактных объекта: истину и ложь (T, F), именами которых по традиции, идущей от Фреге, будут служить предложения.

Чтобы не смешивать семантические категории предложений и имен, для различения утвердительного употребления предложений как правильно построенных формул некоторого языка от неутвердительного употребления предложений в качестве имен истины или лжи, будем использовать оператор $*$ следующим образом.

Положим, что если P - п.п.ф., то P^* - терм, то есть имя. Этот оператор подобен оператору $[]$, который использует В.А.Смирнов в комбинированном исчислении предложений и событий [6].

1. Язык исчисления для аксиоматической теории обозначения

Алфавит

$c, T, F, \dots$	индивидуальные константы для объектов
$x, y, z, \dots$	индивидуальные переменные для объектов,
σ	предикатный символ для отношения обозначения,
n	функциональный символ для функции обозначения
$*$	символ оператора, преобразующего п.п.ф. в термы.
$\neg, \supset, \forall, =$	логические символы
$(,)$	технические символы

Правила образования термов и п.п.ф.

1.1. Если t - индивидуальная переменная или константа, то t - терм.

1.2. Если t - терм, то $n(t)$ - терм.

1.3. Если t_1 и t_2 - термы, то $(t_1 \sigma t_2)$, $(t_1 = t_2)$ - п.п.ф.

1.4. Если p, q - п.п.ф. и t есть индивидуальная переменная,

то $(\neg p)$, $(p \supset q)$, $(\forall t p)$ есть п.п.ф.

1.5. Если p есть п.п.ф., то p^* есть терм.

Метапеременные: $t, t_1, t_2 \dots$ для термов,

$p, p_1, p_2 \dots$ для п.п.ф.

Принимаются аксиомы и правила вывода узкого исчисления предикатов с равенством. Остальные связки и символы: $\wedge, \vee, \equiv, \exists$ задаются стандартным образом.

Определения

D1.1 $Zn(z) =_{df} \exists x (z \sigma x)$

Знаком или именем будем называть объект z , который обозначает (или которому соответствует) некоторый объект x .

D1.2 $Ind(z) =_{df} \exists! x (z \sigma x)$

Единичным знаком будем называть объект z , который обозначает только один объект x .

Аксиомы существования

A1.1 $\exists z \forall x (z \sigma x),$

смысл которой состоит в том, что существует знак, обозначающий любой объект. Примером такого знака в естественном языке могут быть слова "объект", "предмет".

A1.2 $\forall x \exists z ((z \sigma x) \wedge Ind(z)),$

смысл которой состоит в том, что каждый объект может быть обозначен единичным именем.

A1.3 $\exists y \forall x \neg (y \sigma x),$

которая говорит о существовании объектов, которые ничего не обозначают.

Процедура перехода от языка-объекта к метаязыку нужна для определения семантических понятий. Поэтому введем аксиоматически функцию именования, которая позволяет сопоставить термам и п.п.ф. языка-объекта их имена в метаязыке.

Аксиомы именования

A2.1 $\forall x (n(x) \sigma x)$

A2.2 $\forall x Ind(n(x)) ,$

которые говорят, что всякий аргумент функции именования обозначается ее значением и все значения функции именования есть единичные имена.

Аксиомы Фреге

Черч, следуя Фреге, постулирует два абстрактных объекта, называемых истинностными значениями, - истину и ложь, которые не тождественны друг другу:

A3.1 $T \neq F,$

и объявляет, что все истинные предложения обозначают истину,

$$A3.2 \quad p \equiv (p^* \sigma T),$$

а все ложные предложения обозначают ложь

$$A3.3 \quad \neg p \equiv (p^* \sigma F).$$

При этом предложения, рассматриваемые в неутвердительном смысле, то есть как имена, являются собственными именами.

$$A3.4 \quad \text{Ind}(p^*)$$

Так как в данной теории возможно употребление имен любых объектов, в том числе и предложений как имен, а также имен их имен и так далее, то она пригодна для описания семантически замкнутых языков.

По мнению Тарского появление семантических парадоксов связано с семантической замкнутостью языка. Поэтому мы должны быть готовы к встрече с трудностями и парадоксами.

В связи с этим имеет значение наличие следующей модели, использующей арифметику без умножения Пресбургера S_+ .

Пусть k, d - натуральные числа, тогда формула $(k \sigma d)$ есть сокращение для следующей формулы

$$(k \sigma d) =_{df} ((k = d + d) \vee (k + d = d + 7)).$$

$$T = 1, \quad F = 0.$$

Функция именования интерпретируется следующим образом

$$n(d) =_{df} (d + d).$$

Значениями п.п.ф. будут элементы множества $\{0, 1\}$.

$$k^* =_{df} (k + k).$$

2. Погружение элементарной онтологии Лесневского в аксиоматическую теорию обозначения (АТО)

Определим объемные отношения для знаков и объектов, которые потребуются в дальнейшем.

Будем говорить, что x включается по объему в y , если и только если всякий объект, обозначаемый x , также обозначается и y

$$D2.1 \quad (x \leftarrow y) =_{df} \forall z ((z \sigma x) \supset (z \sigma y)).$$

x тождествен по объему y , если и только если x и y включают друг друга по объему

$$D2.2 \quad (x \rightleftharpoons y) =_{df} \forall z ((z \sigma x) \equiv (z \sigma y)).$$

x и y не пересекаются по объему, если и только если не существует объекта, который одновременно обозначается x и y

$$D2.3 \quad (x \mid y) =_{df} \neg \exists z ((z \sigma x) \wedge (z \sigma y)).$$

Теперь в терминах аксиоматической теории обозначения выразим условия истинности предложения $x \in y$.

Требование, чтобы имя x было единичным, выражается предикатом $\text{Ind}(x)$, а требование, чтобы объем имени x включался в объем имени y , выражается формулой $(x \leftarrow y)$. Исходя из этого определим формулу $x \in y$:

$$D2.4 \quad x \in y =_{df} \text{Ind}(x) \wedge (x \leftarrow y).$$

При этом выполняется требование, чтобы вместо x , y могли подставляться имена любого объема, так как их наличие обеспечивается благодаря аксиомам существования.

Исходя из этого определения доказывается утверждение

T2.1 $x \in y \equiv \exists x \, x \in y \wedge \forall x_3 \forall x_4 ((x_3 \in x \wedge x_4 \in x \supset x_3 \in x_4) \wedge \forall x (x \in x \supset x \in y))$, являющееся единственной аксиомой элементарной онтологии Лесневского.

Последние соотношения показывают, что термин $\in$, определяемый в теории обозначения, рассматривается тем самым в ней как сложное понятие, в отличие от онтологии Лесневского, в которой $\in$ есть исходный неразложимый термин.

Элементарную онтологию Лесневского сопоставляют с атомной алгеброй классов.

Формула $\text{Ind}(x)$ может рассматриваться как условие атомности. Принято считать, что x есть атом, если x не пуст и всякий непустой класс, который включается в x , равнообъемен ему. Условие непустоты термина x выражается формулой $Z_n(x)$.

Имеем теорему, которая показывает, что формула $\text{Ind}(x)$ эквивалентна условиям атомности, выраженных в терминах АТО

$$T2.2 \quad \text{Ind}(x) \equiv Z_n(x) \wedge \forall y (Z_n(y) \supset ((y \leftarrow x) \supset (y \approx x))).$$

Поэтому для условия атомности не будем вводить отдельное определение, а будем использовать вместо него формулу $\text{Ind}(x)$.

Формула, аналогичная T2.3, служит аксиомой атомности в атомной алгебре имен и атомной алгебре классов. Алгебру имен Лесневского обсудим ниже.

Также имеет место следующая теорема атомности.

$$T2.3 \quad \forall x \, Z_n(x) \supset \exists y (\text{Ind}(y) \wedge (y \leftarrow x))$$

В онтологии Лесневского имеется формула $x \in x$, эквивалентная условию атомности.

$$T2.4 \quad x \in x \equiv \text{Ind}(x)$$

3. Погружения силлогистики

Для того чтобы более подробно сравнить между собой исчисления имен Лесневского и аксиоматическую теорию обозначений, рассмотрим погружение в них силлогистики.

В элементарной онтологии формулы силлогистики определяются следующим образом:

$$D3.1.1 \quad Axy =_{df} \forall x (x \in x \supset x \in y)$$

$$D3.1.2 \quad Ixy =_{df} \exists x (x \in x \wedge x \in y)$$

Функторы Е и О определяются здесь и далее через А и I.

$$D3.1.3 \quad Exy =_{df} \neg Ixy$$

$$D3.1.4 \quad Oxy =_{df} \neg Axy$$

Пользуясь введенными определениями формул силлогистики, доказывается ряд теорем. Сравнивая полученные результаты с утверждениями формализованной силлогистики, предложенной Лукасевичем, видно, что не все утверждения последней доказываются в системе Лесневского.

В частности, недоказуемой является аксиома Ixx , из чего следует, что некоторые законы силлогистики не принадлежат онтологии.

При формализации силлогистики Аристотеля отмечают [2, 5], что термины силлогистики должны быть непустыми.

Поэтому в теории обозначения определим формулы силлогистики на области непустых знаков. Переменные в этой области обозначим z_1 и $z_2, \dots$. Определим ограниченные кванторы.

$$D3.2.1 \quad \exists z P(z) =_{df} \exists x (Zn(x) \wedge P(x))$$

$$D3.2.2 \quad \forall z P(z) =_{df} \forall x (Zn(x) \supset P(x))$$

$$D3.3.1 \quad Az_1 z_2 =_{df} (z_1 \leftarrow z_2)$$

$$D3.3.2 \quad Iz_1 z_2 =_{df} \neg(z_1 | z_2)$$

При таком определении все аксиомы Лукасевича следуют из соответствующих теорем данной системы.

$$T3.1 \quad \forall z Azz,$$

$$T3.2 \quad \forall z Izz,$$

$$T3.3 \quad \forall z_1 \forall z_2 \forall z_3 ((Az_2 z_3 \wedge Az_1 z_2) \supset Az_1 z_3),$$

$$T3.4 \quad \forall z_1 \forall z_2 \forall z_3 ((Az_2 z_3 \wedge Iz_1 z_2) \supset Iz_1 z_3).$$

В ней также доказывается теорема

$$T3.5 \quad \neg \forall z_1 \forall z_2 \forall z_3 ((Az_1 z_2 \wedge Az_3 z_2) \supset Iz_1 z_3),$$

из которой следует, что силлогизм $(Az_1 z_2 \wedge Az_3 z_2) \supset Iz_1 z_3$ является невыводимым в данной системе. Это показывает, что данная теорема соответствует аксиоме отбрасывания Лукасевича. Эта теорема доказывается благодаря тому, что на основе аксиом существования можно выбрать знаки, из которых строится контрпример к формуле $(Az_1 z_2 \wedge Az_3 z_2) \supset Iz_1 z_3$.

4. Равенство, функция именования и обратная для нее

Условия равенства объектов, формулируемые в терминах АТО, выражаются следующими теоремами.

$$T4.1 \quad (x = y) \equiv \exists z (Ind(z) \wedge (z \sigma x) \wedge (z \sigma y)),$$

которая говорит, что объект x и объект y равны, если и только если существует единичное имя, которое обозначает x и объект y .

$$T4.2 \quad (x = y) \equiv \forall z ((z \sigma x) \equiv (z \sigma y)),$$

которая говорит, что объект x и объект y равны, если и только если они обозначаются одними и теми же именами.

Следующая теорема говорит о том, что функция именования является монотонной

$$T4.3 \quad (x = y) \equiv (n(x) = n(y)).$$

Обратной для функции именования будет u -функция, которая в качестве своих значений имеет денотаты от аргументов. Эта функция определяется контекстуально и является частично определенной

$$D4.1 \quad (y = u(x)) =_{df} (n(y) = x).$$

Для функции именования и u -функции имеет место теорема

$$T4.4 \quad u(n(x)) = x$$

и следствие ее

$$u(n(p^*)) = p^*.$$

Приведем здесь теорему, являющуюся непосредственным следствием A2.1.

$$T4.5 \quad (n(p^*) \sigma p^*).$$

Определим дельта-функцию

$$D4.2 \quad \delta(x) =_{df} \begin{cases} T, & \text{если } (x = F) \\ F, & \text{если } (x \neq F), \end{cases}$$

имеющую то свойство, что она не имеет фиксированной точки.

$$T4.6 \quad \forall x \neg (x = \delta(x)).$$

Отметим также, что присоединение к аксиоматической теории обозначения неограниченной функции подстановки ведет к противоречию.

T4.7 В АТО не существует неограниченной функции подстановки, контекстуально определяемой следующим образом:

$$sb(n(f(c)), n(x)) =_{df} n(f(x)),$$

где $f(x)$ - произвольная функция.

Отсюда следует, что в АТО для функции подстановки необходимо вводить ограничения.

Отличительной особенностью АТО является наличие в ней автономных имен, не приводящее к парадоксам.

$$D4.3 \quad An(x) =_{df} (x \sigma x)$$

$$T4.8 \quad \exists x An(x)$$

Для неавтонимных объектов имеет место теорема

$$T4.9 \quad \neg \exists y \forall x ((y \sigma x) \equiv \neg A_n(x)),$$

которая говорит, что не существует имени, равнообъемного предикату неавтонимности.

5. Введение предиката истинности

В подходе Тарского к определению семантических понятий объектный язык, метаязык, метаметаязык разграничены между собой и семантические понятия рассматриваются отдельно в каждом из этих семантически незамкнутых языков.

Согласно Тарскому предикат "быть истинным" должен удовлетворять следующей схеме:

X - истинное высказывание тогда и только тогда, когда p ,
где вместо p подставляется любое высказывание, а вместо X его имя.

Следующую формулу можно рассматривать как содержательно соответствующую схеме Тарского.

$$T(x) \equiv p \wedge (x \sigma p^*) \quad (1)$$

Чтобы избежать трудностей, связанных с парадоксом Лжеца, введем частично определенный предикат $T(x)$ [4, 8], содержательно рассматриваемый как предикат истинности. Для этого преобразуем формулу (1), используя следствия из аксиомы Фреге А3.2 и теорему Т4.5.

$$D5.1 \quad T(n(p^*)) =_{df} \exists x ((n(p^*) \sigma x) \wedge (x \sigma T) \wedge Ind(x))$$

Исходя из этого определения, имеем теорему.

$$T5.1 \quad T(n(p^*)) \equiv p.$$

Предикат истинности здесь определен не на всем универсуме, а только на именах, являющихся значениями функции именования, аргументами которой являются п.п.ф.

Исследуем семантическое замыкание языка аксиоматической теории обозначения.

D5.2 О семантическом замыкании языка L будем говорить в том смысле, что в L для каждого терма и для каждой п.п.ф. существуют их имена и он включает семантические понятия, относящиеся ко всем термам или п.п.ф. данного языка, такие, как отношение обозначения и предикат истинности. (См. также [7].)

Несмотря на ограничения, накладываемые на подстановку в частично определенный предикат $T(x)$, его области определения достаточно, чтобы рассматривать предикат истинности по отношению ко всем п.п.ф. языка АТО. Следовательно, имеем теорему.

T5.2 Язык АТО семантически замкнут, если

(i) в качестве отношения обозначения выступает символ σ языка АТО,

- (ii) функцию именования $n(x)$ используем для образования имен любых термов,
 (iii) предикат истинности $T(x)$ задается определением D5.1.

6. Расширение языка АТО

В знаковых системах обязательно рассматриваются процедуры образования новых знаков. Будем вводить новые знаки с помощью операций объединения, пересечения и разности (их символы $\cup$, $\cap$, $/$), а также с помощью оператора цитирования q и оператора дескрипции ϵ . Правила образования термов и п.п.ф., а также аксиомы будем формулировать по порядку рассмотрения новых операций.

Алгебра имен

Операции объединения, пересечения и разности образуют новые объекты и знаки по определенным правилам, которые задают алгебру имен. В алфавит исчисления АТО добавим символы операций $\cup$, $\cap$, $/$, и следующие правила образования термов.

6.1 Если t_1, t_2 - термы, то $(t_1 \cup t_2)$, $(t_1 \cap t_2)$, (t_1 / t_2) - термы.

Аксиомы алгебры имен

$$A4.1 \quad \forall x_2 ((x \cup y) \sigma x_2) \equiv ((x \sigma x_2) \vee (y \sigma x_2))$$

$$A4.2 \quad \forall x_2 ((x \cap y) \sigma x_2) \equiv ((x \sigma x_2) \wedge (y \sigma x_2))$$

$$A4.3 \quad \forall x_2 ((x / y) \sigma x_2) \equiv ((x \sigma x_2) \wedge \neg(y \sigma x_2))$$

Дополнение знака x определим как разность универсального знака и знака x . При этом воспользуемся символом $/$, чтобы не умножать число логических символов.

$$D6.1 \quad Un(x) =_{df} \forall x_1 (x \sigma x_1)$$

$$D6.2 \quad (/ y \sigma x_2) =_{df} \exists x (Un(x) \wedge ((x / y) \sigma x_2))$$

Алгебра имен Лесневского имеет ту особенность, что в ней возможны креативные определения. Для обеспечения некреативности определений Иванусь добавил к аксиоме Лесневского еще две аксиомы.

В алгебре имен АТО имеем следующие теоремы, из которых следуют формулы, соответствующие аксиомам Ивануся.

$$T6.1 \quad \forall x \ x \epsilon /y \equiv ((x \epsilon x) \wedge \neg(x \epsilon y))$$

$$T6.2 \quad \forall x \ x \epsilon (y_1 \cap y_2) \equiv ((x \epsilon y_1) \wedge (x \epsilon y_2))$$

Цитирование выражений языка-объекта

Для того чтобы говорить об именах и выражениях языка, в метаязыке пользуются цитированием этих имен и выражений. Как правило, принимается, что все имена и знаки являются выражениями некоторого языка, построенными из букв или символов

алфавита этого языка. Зададим правила построения символьных выражений (S-выражений) языка АТО.

6.2.1 Если t - символ из алфавита, то t - S-выражение.

6.2.2 Если t_1 и t_2 - S-выражения, то $t_1 t_2$ - S-выражение.

То, что некоторые объекты являются S-выражениями и служат для обозначения других объектов, будем выражать с помощью предиката "быть S-выражением" $Se(x)$.

Аксиомы для символьных выражений

A5.1 $\forall x (Zn(x) \supset Se(x))$

A5.2 $\neg \forall x (Se(x) \supset Zn(x))$

Имена метаязыка, сформированные в виде цитируемого выражения языка-объекта, будем строить с помощью оператора цитирования q .

6.3 Если t - S-выражение, то $q(t)$ - терм.

Введение дескрипций

Представляет интерес включить в рассмотрение имена вида "некоторый (тот, такой) x , что $F(x)$ ". Для такого рода дескрипций имеем следующие правила образования и аксиомы.

Пусть $F(t)$ - п.п.ф., в которую входит терм t .

Аксиомы для дескрипций

A6.1 $\exists y F(y) \equiv Zn(q(\epsilon x F(x)))$,

которая утверждает референтативное истолкование кванторов.

A6.2 $\forall y (F(y) \supset (q(\epsilon x F(x)) \sigma y))$,

которая говорит, что объем дескрипции включает в себя объем предиката, фигурирующего в дескрипции.

Определим контекстуально формулу $F(\epsilon x F(x))$, которая позволяет оперировать ϵ -термами.

D6.3 $F(\epsilon x F(x)) =_{df} Zn(q(\epsilon x F(x)))$

Имеем следующие теоремы, аналогичные соотношениям для ϵ -оператора Гильберта.

T6.3 $\exists y F(y) \equiv F(\epsilon x F(x))$

T6.4 $\forall y F(y) \equiv F(\epsilon x \neg F(x))$

T6.5 $(F(y) \supset F(\epsilon x F(x)))$

Четырехзначная сентенциальная логика

Множество формул, включающее все аксиомы и теоремы АТО, образуют множество имен истины. Определим предикат $Tn(x)$, имеющий место только для собственных имен истины. Множество собственных имен истины будем называть универсумом истины.

D6.4 $Tn(x) =_{df} (x \sigma T) \wedge Ind(x)$

Исходя из того, что существуют предложения, как, например, высказывания о фактах или математические суждения, которые обозначают истину, но не входят в класс п.п.ф. АТО или, иначе говоря, не являются предложениями о чисто семантических истинах, имеет смысл класс п.п.ф. АТО расширить, что будет соответствовать расширению объема предиката $Tn(x)$.

Для этого достаточно ввести переменные для предложений (сентенциальные переменные $s, s_1, s_2 \dots$) и ввести одну логическую связку: импликацию $\rightarrow$, которую будем определять на расширенном классе п.п.ф. обычным образом, то есть предложение $(A \rightarrow B)$ истинно, если A ложно или B истинно, и предложение $(A \rightarrow B)$ ложно, если A истинно и B ложно.

Обобщим правила образования п.п.ф., включив формулы со связкой $\rightarrow$ в расширенный класс п.п.ф., метапеременными для которых будут служить символы A, B .

Для большей степени общности рассмотрения аксиомы Фреге А3.2, А3.3 не будут распространяться на расширенный класс п.п.ф.

Обобщим определение предиката истинности на область имен расширенного класса п.п.ф. следующим образом

$$D6.5 \quad T(n(A^*)) =_{df} \exists x ((n(A^*) \sigma x) \wedge (x \sigma T) \wedge Ind(x))$$

Введем следующие сокращения:

$$D6.6 \quad \vdash A =_{df} T(n(A^*))$$

$$D6.7 \quad \neg A =_{df} (A \rightarrow (\vdash A \wedge \neg \vdash A)) \quad \text{отрицание}$$

$$D6.8 \quad \neg A =_{df} \vdash \neg A \quad \text{предикат ложности}$$

$$D6.9 \quad \ulcorner A =_{df} (\vdash A \wedge \neg \neg A) \quad \text{предикат истинности и неложности}$$

$$D6.10 \quad (A \supset B) =_{df} (\ulcorner A \rightarrow \ulcorner B)$$

Для п.п.ф. и расширенного класса п.п.ф. имеем следующие теоремы:

$$T6.6 \quad \vdash P \equiv P,$$

$$T6.7 \quad \text{Не имеет места, что } \vdash A \supset A,$$

которые говорят о том, что в то время как предложение A может не быть двузначным, предложение об истинности A всегда двузначно.

Аксиомы для импликации

$$A7.1 \quad \vdash (A \rightarrow B) \equiv \neg A \vee \vdash B,$$

$$A7.2 \quad \neg(A \rightarrow B) \equiv \vdash A \wedge \neg B.$$

Правило вывода $A, (A \supset B) / B$

Приведенные определения и аксиомы для импликации задают 4-валентную сентенциальную логику [3]. Эту логику можно сформулировать отдельно от АТО, используя только две связки: $\neg$ (читается "ложно") и импликации $\rightarrow$. Поэтому назовем ее логикой ложности FL4.

Логика FL4 имеет четырехзначную модель, относительно которой она непротиворечива и полна. Четыре значения истинности следующие: истинность и неложность, ложность и неистинность, истинность и ложность, ни истинность, ни ложность.

В рамках FL4 определяются логические операторы, которые можно поставить в определенное соответствие с операторами таких логик, как логики истины Вригта, логики Белнапа, Клини, Бочвара, паранепротиворечивые логики Приста, Асеньо-Тамбурино, Сетте и ряда других.

В заключение отметим, что проведенное рассмотрение показывает, что элементарная онтология Лесневского погружается в соответствии со смыслом ее терминов в естественном языке в аксиоматическую теорию обозначения, а также проведено сравнение силлогистики, сформулированной в исчислении имен и в теории обозначения с формализованной Лукасевичем системой силлогистики. Рассмотрен ряд основных понятий теории обозначения, таких, как отношение обозначения, понятие знака, функции именования, подстановки, предикат истинности. Также рассмотрены операции со знаками и правила образования новых знаков.

ЛИТЕРАТУРА

1. Крымский С.Б., Павлов С.А. Вопросы металогической теории знаков // VII Всесоюзный симпозиум по логике и методологии науки. Киев, 1976.
2. Лукасевич Я. Аристотелева силлогистика с точки зрения современной формальной логики. М., 1959.
3. Павлов С.А. Логика с терминами "истинно" и "ложно" // Философские основания неклассических логик // Труды научно-исследовательского семинара по логике ИФАН СССР // М., 1990.
4. Павлов С.А. Неклассический подход к теории обозначения // Логические методы в компьютерных науках // Труды научно-исследовательского семинара по логике ИФАН СССР // М., 1991.
5. Смирнов В.А. Погружение силлогистики в исчисление предикатов // Логическая семантика и модальная логика. М., 1967.
6. Смирнов В.А. Комбинированные исчисления предложений и событий и логика истины фон Вригта // Исследования по неклассическим логикам. IV Советско-финский colloquium М., 1989.
7. Смирнова Е.Д. Логическая семантика и философские основания логики. М., 1986.
8. Kripke S. Outline of a Theory of Truth // Journal of Philosophy. Vol.72. 1975.
9. Pavlov S.A. Axiomatic approach to the Theory of Denotation and Lesniewski's Calculus of Names // 8 International Congress of Logic, Methodology and Philosophy of Science. Abstracts Vol.1. Moscow, 1987.
10. Slupecki J. St.Lesniewski's Calculus of Names // Studia Logica Vol.III 1955. Warszawa.

ЛОГИЧЕСКАЯ ГРАММАТИКА: ЛОГИКО-ОНТОЛОГИЧЕСКИЙ ОБЗОР¹

1. Введение

Статей, монографий и книг, посвященных генеративной и трансформационной грамматике, включая ее обобщенные версии, сейчас удивительно много. Тем не менее, к сожалению, эти исследования, думается, без какого-либо исключения, не способны ни объяснить, ни обосновать логические отношения между предложениями естественных языков, скажем, русского или английского. В частности, подход к естественному языку, развиваемый последователями Хомского, несмотря на весьма разработанный аппарат, не дает ни объяснения, ни обоснования таких логических отношений, как (логическая) синонимия, противоречие, непротиворечивость, и, возможно, что наиболее важно, следование.

Поясним ситуацию на примере следующих предложений английского языка:

- 1.1. Socrates is a human being.
Сократ есть человек.
- 1.2. Every human being is an animal.
Каждый человек суть животное.
- 1.3. Socrates is an animal.
Сократ есть животное.

Интуитивно нетрудно заметить, что 1.1 и 1.2 вместе вынуждают 1.3. Другими словами,

$$1.4. 1.1 \wedge 1.2 \supset 1.3$$

образует логически истинное высказывание, безотносительно к смыслу слов, входящих в него.

Как уже упоминалось ранее, разнообразные виды грамматик типа Хомского чрезвычайно неподходящи для объяснения или обоснования логик, которые неявно присутствуют в дискурсах повседневных разговоров, хотя мы всецело осознаем множество выдающихся достижений последователей Хомского в анализе структур естественного языка.

Ситуация изменилась к концу 60-х годов с появлением грамматик Монтегю в версии, изложенной в ставшей классической работе РТQ. Тем не менее, для нас ясно, что исследователи грамматик Монтегю потерпели неудачу в отражении онтологических аспектов естественных языков. Фактически, большинство статей, написанных по следам РТQ, оказались невосприимчивыми

¹ Пер. с англ. И.А.Герасимовой

к утонченным теоретико-модальным структурам предикатной логики, охватывающим естественный язык.

В настоящей статье будут предложены три различных подхода для того, чтобы прояснить создавшуюся ситуацию и сделать ее более или менее приемлемой с точки зрения стандартного логико-лингвистического анализа.

Первый подход можно охарактеризовать как силлогистический, поскольку естественный язык рассматривается как разновидность силлогистической системы, которая сама имеет древнюю историю. Как будет показано дальше, все простые логические отношения, просматриваемые в естественном языке, бережно сохраняются при таком подходе. Кроме того, будет дано обоснование предлагаемой логики с точки зрения феноменологии. Те требования, которые сопровождают силлогистику на протяжении всей ее истории, начиная с Аристотеля, характерны и для соответствующей пропозициональной логики.

Во втором подходе естественный язык, развиваемый как силлогистическая система, будет охвачен онтологией Лесневского, которая с точки зрения онтологии более современна, нежели силлогистика, так как содержит аппарат квантификации. Этот подход будет обоснован с помощью модельных конструкций типа Хенкина, которые здесь, с нашей точки зрения отражают субъективные аспекты языка.

Третий подход, исходящий из второго, представляет собой метод, близкий традициям Монтегю. Логика естественного языка будет перефразирована в логику предикатов в своих составных частях.

В заключении этого раздела нам хотелось бы сказать несколько слов о нашем онтологическом кредо. Мы считаем, что в нашем универсуме существуют только универсалии, представленные именами и отношениями, которые появляются во втором и в третьем подходах. Имена и отношения рассматриваются не иначе, как временные сущности, призванные помочь в понимании универсалий. Грубо говоря, одна и та же универсалия мыслится как относящаяся к различным множествам индивидов, универсалия не задает единственным образом соответствующее множество. Это платонистическое кредо будет сопровождать нас на протяжении всей статьи.

2. Силлогистический подход

В раскрытии понимания логики естественного языка как силлогистики для начала рассмотрим некоторые предложения английского языка, такие, как

2.11. The boy runs. Этот мальчик бежит.

2.12. Some boys run. Некоторые мальчики бегают.

2.13. Every boy runs. Каждый мальчик бежит.

Их логическая или силлогистическая структура выглядит следующим образом:

2.21. ((the boy) run),

2.22. ((some boy) run),

2.23. ((every boy) run).

Здесь "boy"-"мальчик" и "run"-"бежать" - оба принадлежат категории, которая, как уже было упомянуто, образует универсалии, представленные этими именами (в смысле онтологии Лесневского). Составные существительные, такие как, "boy and girl" - "мальчик и девочка", здесь не будут рассматриваться, так как для них нам понадобятся дополнительные средства абстракции.

Для того чтобы внести ясность, "the"-"этот", "some"-"некоторый" и "every"-"каждый" будут впредь представлены с помощью I и A соответственно, последние суть эпсилон-оператор Лесневского, I и A функторы силлогистики. Таким образом, 2.21, 2.22 и 2.23 теперь будут иметь следующую форму:

2.31. ((boy) run),

2.32. ((I boy) run),

2.33. ((A boy) run).

Каждая из этих форм является формулой силлогистики брентановского типа с оператором Лесневского ϵ . Расширенная таким образом силлогистика брентановского типа будет обозначаться как B- ϵ .

B- ϵ определяется как наименьший класс формул, включающий все подстановочные случаи тавтологий, так же как и формулы, полученные из них с помощью аксиом системы L_1 :

2.41. $\vdash Aaa$,

2.42. $\vdash Abc \wedge Aab \supset Aac$ (Barbara),

2.43. $\vdash Abc \wedge Iba \supset Iac$ (Datisi),

2.44. $\vdash Iab \supset Iaa$,

2.45. $\vdash \sim Iaa \supset Aab$,

2.46. $\vdash \epsilon ab \supset Aab$,

2.47. $\vdash \epsilon ab \wedge Abc \supset \epsilon ac$,

будучи замкнутой относительно правила отделения или modus ponens. В результате получается, что классическая пропозициональная логика сохраняется в предложенном варианте силлогистики.

Правильно построенные формулы B- ϵ , которые в то же самое время являются предложениями естественного языка, в данном случае английского, определяются известным образом в терминах конечной или счетно-бесконечной совокупности имен $a, b, c, \dots$ трех силлогистических функторов, а именно ϵ, A и I , рядом логических символов, подходящих для развития классической пропозициональной логики, и некоторыми техническими символами. (Правильно построенные формулы будут расширены в явно определенную последовательность. Самые крайние скобки будут опускаться.) Введенные указанным образом формулы будут обозначаться металогическими переменными $A, B, C, \dots$, которые будут служить этой цели на протяжении всей статьи. Эти символы, равно как и другие, имеют только металогический смысл.

Многие вещи, где играет роль логика, можно прояснить с помощью В-Е - силлогистики.

Тем не менее, некоторые предположения, которые часто используются в повседневных рассуждениях, не охватываются описанной выше В-Е - силлогистикой. Это видно на примере предложений:

- 2.51. The boy loves Mary.
Этот мальчик любит Мэри.
- 2.52. The boy loves a (some) girl.
Этот мальчик любит (какую-то) девочку.
- 2.53. The boy loves every girl.
Этот мальчик любит каждую девочку.
- 2.54. A (some) boy loves Mary.
(Какой-то) мальчик любит Мэри.
- 2.55. A (some) boy loves a (some) girl.
(Какой-то) мальчик любит (какую-то) девочку.
- 2.56. A (some) boy loves very girl.
(Какой-то) мальчик любит каждую девочку.
- 2.57. Every boy loves Mary.
Каждый мальчик любит Мэри.
- 2.58. Every boy loves a (some) girl.
Каждый мальчик любит (какую-нибудь) девочку.
- 2.59. Every boy loves every girl.
Каждый мальчик любит каждую девочку.

Каждое из предложений не имеет отношения к В-Е силлогистике.

Нам бы хотелось, чтобы нас поняли - все эти предложения имеют более глубокую логическую структуру, такую, как:

- 2.61. ($\in$ boy) [love ($\in$ Mary)],
- 2.62. ($\in$ boy) [love (I girl)],
- 2.63. ($\in$ boy) [love (A girl)],
- 2.64. (I boy) [love ($\in$ Mary)],
- 2.65. (I boy) [love (I girl)],
- 2.66. (I boy) [love (A girl)],
- 2.67. (A boy) [love ($\in$ Mary)],
- 2.68. (A boy) [love (I girl)],
- 2.69. (A boy) [love (A girl)],

где собственное имя "Mary" мыслится как $\in$ Mary или the Mary. [], с одной стороны, есть функция с двумя аргументами, а именно отношениями, т.е. транзитивными глаголами и существительными фразами, а именно такими выражениями, как $\in$ Mary, I boy, A girl и подобными.

Список 2.61-2.69 допускает также другое прочтение:

- 2.71. [($\in$ boy) love] ($\in$ Mary),
- 2.72. [($\in$ boy) love] (I girl),
- 2.73. [($\in$ boy) love] (A girl),
- 2.74. [(I boy) love] ($\in$ Mary),
- 2.75. [(I boy) love] (I girl)
- 2.76. [(I boy) love] (A girl)

- 2.77. [(A boy) love] ($\in$ Mary),
 2.78. [(A boy) love] (I girl)
 2.79. [(A boy) love] (A girl),

где [] вновь есть функция двух предметов, имеющих те же самые категории, что и [] в случаях 2.61-2.69. Тем не менее, в 2.71-2.79 она понимается как функция, примененная слева направо по отношению к глаголу "love". Для того чтобы различить эти два вида, введем для них специальные символы. Функция, используемая в 2.61-2.69, будет обозначаться как []₁, тогда как другая как []₂.

Остается неизвестным, является ли силлогистическая система, расширенная за счет двух типов функции [], аксиоматизированной или нет, хотя, как уже было упомянуто, В- $\in$ силлогистика аксиоматизирована.

Если ограничиться В- $\in$ силлогистикой в узком смысле, то имеются два пути в ее обосновании, особенно это касается рассуждений, совершаемых с ее помощью.

Первый путь лежит через феноменологический метод, который настраивает на интуитивное понимание силлогистических выводов. Последователи феноменологии стараются свести обоснованность к виду интуиции, которая далее не анализируется. Такую возможность можно считать правомерной, если ограничиться простыми рассуждениями, которые обычно содержатся в монографиях по феноменологии. Но она порождает противоположные доводы при обсуждении соответствия феноменологии формальной логике. Тем не менее, можно считать, что это к лучшему, так как ситуация не воспринимается серьезно ни феноменологами, ни исследователями современной логики. Отсюда следует, что необходим более аналитичный метод, основанный на современной логике, в частности на онтологии Лесневского, в рамках которой ставится проблема обоснованности логических выводов. Перейдем к так называемой *второй ступени* логики естественного языка.

3. Версия логической грамматики Лесневского

В этом разделе предложения английского языка, приведенные в 2.21-2.23, 2.51-2.59, будут пониматься как формулы онтологии Лесневского, дополненной бинарными отношениями (транзитивными глаголами) и просто операторами абстракции.

С этой точки зрения (элементарная) онтология Лесневского вводится формально как наименьший класс формул, содержащий все подстановочные случаи аксиом:

- 3.11. $\vdash \in ab \equiv . (\exists x) \in xa,$
 $\wedge (x) (\in xa \supset \in xb),$
 $\wedge (x) (y) (\in xa \wedge \in ya. \supset \in xy),$

или в упрощенном варианте:

- 3.12. $\vdash \in ab \equiv . ((\exists x) \in xa \wedge \in xb)$

$$(x)(y)(\in xa \wedge \in ya \supset \in xy),$$

будучи замкнутым относительно правил квантификации. Здесь $(\in a)b$, $(Aa)b$ и $(Ia)b$ сокращаются как $\in ab$, Aab , Iab соответственно. Далее имеем:

$$3.21. (x)(y)(R(x,y) \supset \wedge \in xx \in yy),$$

для бинарного отношения R . Из 3.21 следует, что реляционные термы рассматриваются как атомы, а именно, имя x , такое, что $\in xx$

$$3.31. \vdash Aab \equiv (x)(\in xa \supset \in xb),$$

$$3.32. \vdash Iab \equiv (\exists x)(\in xa \supset \in xb).$$

Определения функторов $[]_1$ и $[]_2$ выглядят следующим образом:

$$3.41. ([]_1 R) \in b = \lambda x (\in b \lambda y R(x,y)),$$

$$3.42. ([]_1 R) Ib = \lambda x (I b \lambda y R(x,y)),$$

$$3.43. ([]_1 R) A b = \lambda x (A b \lambda y R(x,y)),$$

$$3.51. \in b([]_2 R) = \lambda y (\in b \lambda x R(x,y)),$$

$$3.52. I b([]_2 R) = \lambda y (I b \lambda x R(x,y)),$$

$$3.53. A b([]_2 R) = \lambda y (A b \lambda x R(x,y)),$$

где $[]_1$ ($[]_2$) здесь понимаются как функции, определяющие место аргументов, численность которых равна двум, впереди (или позади) отношения R . Для того чтобы элиминировать все функторы, не принадлежащие (элементарной) онтологии Лесневского, нам дополнительно потребуется λ -конверсия в качестве правила.

Дополнив элементарную онтологию Лесневского аксиомами, предложения 2.31-2.33, 2.61-2.69 и 2.71-2.79 можно свести к формулам элементарной онтологии, содержащей только $\in$ и отношения вместе с квантификационным аппаратом.

Следующие формулы являются примерами подобных редукций:

$$3.62. (\exists x)(\in x \text{ boy} \wedge \in x \text{ run}) \text{ (для 2.32),}$$

$$3.63. (x)(\in x \text{ boy} \supset \in x \text{ run}) \text{ (для 2.33),}$$

$$3.64. \in \text{boy} \lambda x (\in \text{Mary} \lambda y \text{ love}(x,y)) \equiv \text{love}(\text{boy}, \text{Mary}) \\ \text{(для 2.61),}$$

где, как уже было упомянуто, "Mary" используется вместо собственного имени.

$$3.65. I \text{boy} \lambda x (I \text{girl} \lambda y \text{ love}(x,y)) \equiv \\ \equiv (\exists x)(\exists y)(\in x \text{ boy} \wedge \in y \text{ girl} \wedge \text{love}(x,y)) \text{ (для 2.66).}$$

$$3.66. A \text{boy} \lambda x (A \text{girl} \lambda y \text{ love}(x,y)) \equiv \\ \equiv (x)(\in x \text{ boy} \supset (y)(\in y \text{ girl} \supset \text{love}(x,y))) \text{ (для 2.69).}$$

$$3.67. \in \text{Mary } \lambda y (I \text{ boy } \lambda x \text{ love } (x,y)) \equiv$$

$$\equiv (\exists x) (\in x \text{ boy} \wedge \text{love } (x, \text{Mary})) \text{ (для 2.73).}$$

В результате этих редукций достигается, например, эквивалентность следующих формул:

$$\text{Bill } (([]_1 \text{ love}) (\in \text{Mary}))$$

$$\text{и } (\text{Bill } (\text{love } []_2)) (\in \text{Mary}),$$

которые соответствуют de dicto и de re - прочтениям предложения

$$\text{Bill loves Mary.}$$

Как хорошо известно, эти два прочтения не эквивалентны в общем случае.

Перед тем, как завершить этот раздел, нам бы хотелось сделать замечания относительно "be" как транзитивного глагола, здесь понимаемого как "=".

Для того чтобы прояснить свойства глагола "be", рассмотрим следующие две типичные формулы:

$$3.71. \text{Bill is Jack. Билл есть Джек.}$$

$$3.72. \text{Mary is a student. Мэри есть студентка,}$$

которые с помощью 3.41 и 3.42 можно свести к:

$$3.81. (\in \text{Bill})([]_1 =)(\in \text{Jack})$$

$$\text{Bill} = \text{Jack},$$

$$3.82. ((\in \text{Mary})([]_1 =)(I \text{ student})).$$

Правая сторона 3.81 также получается с помощью 3.41 с заменой 3.51. В данном случае различие между $[]_1$ и $[]_2$ не имеет места.

4. Модельные конструкции

Перед тем, как перейти к моделям для онтологии Лесневского, дополненной отношениями, нам потребуется понятие R-замкнутых формул, предложенное Шимидзу.

Определение 4.1. R-замкнутая формула есть формула A онтологии Лесневского с отношениями такая, что

$$RA. \equiv A,$$

где R определяется индукцией по длине формул следующим образом:

$$R \in ab = \in ab,$$

$$R(a,b) = R(a,b),$$

$$RA \wedge B = .RA \wedge RB,$$

$$RA \vee B = .RA \vee RB,$$

$$R \sim A = \sim RA,$$

...

$$R(x) A(x) = (x)(\in xx \supset A(x)),$$

$$R(\exists x) A(x) = (\exists x)(\in xx \wedge A(x)).$$

Грубо говоря, R-замкнутые формулы есть формулы такие, что кванторы в них понимаются, если так можно сказать, как пробегающие по атомам.

В качестве примера R-замкнутых формул можно привести 3.11, 3.12 и 3.21, которые все являются схемами аксиом онтологии Лесневского, а также все случаи предложений английского языка в их редуцированных формах. R-замкнутые формулы будут играть важную роль в последующих модельных конструкциях.

Сейчас мы перейдем к конструированию моделей заданного множества предложений в редуцированных формах. Для этого обратимся к методу Хенкина, который уже успешно применялся для доказательства полноты систем логики предикатов как первого, так и высших порядков.

В соответствии с методом Хенкина заданное множество предложений в редуцированных формах вместе со всеми подстановками аксиом онтологии Лесневского, расширенной отношениями, будучи непротиворечивым, расширяется до максимально непротиворечивого множества формул. Последнее, разумеется, содержит первоначально данное множество формул.

После построения модели как максимально непротиворечивого множества формул перед нами возникает следующая онтологическая картина:

4.11. Имеется счетно бесконечная совокупность атомов x , которая задается формулами формы $\in xx$, принадлежащими максимально непротиворечивому множеству и являющимися истинными в нем.

4.12. Любое имя a , которое может быть и атомом, могло бы пониматься как множество атомов x таких, что $\in xa$.

4.13. Любое отношение R понимается как множество упорядоченных пар $\langle x, y \rangle$ таких, что $R(x, y)$ принадлежит максимально непротиворечивому множеству, будучи истинным в нем.

Исходя из этой картины, описанной более или менее основательно, перейдем к другой, возможно более ясной:

4.21. Прежде всего, и этому придается особое значение, атомы, кроме тех, которые содержатся в заданных формулах до редукции, имеют теневую природу от рождения только в процессе конструирования хенкинского типа максимально непротиворечивого множества формул, которое, бесспорно, задается единственным образом. В действительности таких максимально непротиворечивых множеств - континуум.

4.22. Более того, эти теневые атомы никогда не выходят на поверхность предложений. Даже в редуцированных формах они принимают участие только как связанные переменные.

4.24. Имена и отношения по Лесневскому не затрагиваются модельными конструкциями, оставаясь теми же самыми на протяжении всего процесса конструирования, хотя они меняются как различные множества, возникающие из пустого множества и становящиеся более исчерпывающими.

4.23. Онтологически, в соответствии с нашим кредо, можно положительно расценивать тот факт, что имена и отношения Лесневского создают универсалии безотносительно к множествам, которым они соответствуют.

Описав максимально непротиворечивые множества формул, можно предложить следующую модель для первопорядковой логики предикатов с равенством $\langle D, F_a, F_b, \dots, R_S, R_T, \dots, = \rangle$, где $D = \{x: \in x \mid x \text{ принадлежит к максимально непротиворечивому множеству}\};$

$F_a = \{x: \in x \mid a \text{ принадлежит к максимально непротиворечивому множеству}\};$

$F_b = \{x: \in x \mid b \text{ принадлежит к максимально непротиворечивому множеству}\};$

...

$R = \{ \langle x, y \rangle : S(x, y) \text{ принадлежит к максимально непротиворечивому множеству} \};$

$R = \{ \langle x, y \rangle : T(x, y) \text{ принадлежит к максимально непротиворечивому множеству} \};$

...

$= = \{ \langle x, y \rangle : \in x \text{ и } \in y \text{ принадлежат к максимально непротиворечивому множеству} \}.$

Нетрудно показать, что онтология Лесневского, дополненная отношениями и некоторыми предложениями естественного языка в их редуцированных формах, включается в первопорядковую логику предикатов с равенством благодаря такой трансформации T , что:

$$T \in ab = F_b \cup xF_a x,$$

$$TR(a, b) = T_R(\cup xF_a x, \cup xF_b x),$$

$$TA \wedge B = TA \wedge TB,$$

$$TA \vee B = TA \vee TB,$$

где $F_b \cup xF_a x$ есть определенная дескрипция расселовского типа.

В результате мы подошли к формулировке языка понимания. В соответствии с развиваемой теорией язык понимания есть не что иное, как конструкция модели, в которой предложения, предназначенные для понимания, строятся как истинные. В нашем случае модель определяется как максимально непротиворечивое множество формул, включающее заданное множество предложений. Можно на этом этапе остановиться, оставив за онтологией Лесневского объяснение содержания понимаемых предложений, либо обратиться к первопорядковой предикатной логике, построенной на основе предшествующей модели.

Опять-таки следует подчеркнуть, что конструируемое в этих целях максимально непротиворечивое множество не определяется единственным образом, с точки зрения метода Хенкина. Другими словами, наше понимание языка субъективно; в его основе лежит понимание имен и отношений Лесневского как универсалий, которые остаются инвариантными во всех вариациях всевозможных моделей.

ДИЛЕММА ЭКСТЕНСИОНАЛЬНОСТИ-ИНТЕНСИОНАЛЬНОСТИ И КОНТЕКСТЫ С ПРОПОЗИЦИОНАЛЬНЫМИ УСТАНОВКАМИ

Исследуются условия субъектно-ориентированного представления знания в логических системах. Прослеживается динамика смыслопорождения, выделяются объективированные и субъективные компоненты смысла. Перспектива разработок логических систем эпистемического типа связывается со структурным подходом в семантике. Идеи структурирования семантического понятия смысла определили предлагаемую стратегию реконструкции интенциональной логики Монтегю, в результате которой лишь часть эпистемических контекстов имеет интенциональную интерпретацию.

1. Смыслопрочтение и смыслопорождение

Эпистемические системы можно считать наиболее ярким проявлением субъектно-ориентированного представления знания. Это происходит благодаря наличию явного личностного элемента в эпистемических контекстах типа "я полагаю, что", "мой коллега уверен, что" и т.п. Ведет ли сам факт введения в анализ эпистемических и вообще психологических предикатов к проникновению в логику так называемого психологизма и будет ли правильным избавиться от него, оставив за скобками субъективную освещенность смысла, как это сделал Фреге на заре логической семантики? Попытаемся ответить на эти и другие вопросы, обратившись к современным дискуссиям по философии сознания и эпистемологии.

Под субъектно-ориентированным представлением знания понимают такой способ подачи результатов познавательной деятельности, при котором дается четкое указание на субъект этой деятельности. Последний может пониматься как конкретное лицо или группа лиц, либо как фиксированная точка зрения (теория), с позиций которой рассматривается объект. Когда исследуется акт познания в психологическом ракурсе, то часто выделяют явную и скрытую работу сознания (под- и надсознание). Во время интуитивного озарения, интеллектуального созерцания как бы происходит "непосредственное усмотрение" субъектом объекта, при этом чувственные и рациональные стороны сознания как бы притушеваются, отходят на периферию. Об этих особых творческих состояниях говорят как о слитности субъекта с объектом, взаимопроникновении их и невозможности установить точные границы между ними. Однако при переходе на уровень рефлексивного осмысления цельность объекта пропадает, мир предстает предметно-расчлененным, а сам субъект можно понимать в виде довольно сложного

структурного образования. К усложнению приводит, с одной стороны, расщепленность индивидуальных сознаний, многих "Я", а с другой стороны - коммуникативные intersubjective взаимодействия.

Имеется ряд направлений в логике и искусственном интеллекте, где пытаются учитывать комплексный характер субъективного фактора при построении формальных моделей. Вводятся такие понятия, как области рассуждений, полаганий (believe-domain), "клетки представлений" (belief-cells), фреймы разума (frame of mind), фрагменты, независимые картины мира у одного субъекта¹. Данные исследования можно расценивать как шаг на пути создания моделей, представляющих собой более утонченную имитацию механизмов сознания (finegrained models). От простого постулирования различных областей полаганий переходят к характеристике отношений между ними, созданию архитектурных семантических ансамблей.

Думается, что при решении этих задач было бы полезным принять во внимание такой фактор, как динамика смыслообразования. Осознание необходимости переключения внимания на становящееся бытие в современных дискуссиях по эпистемологии связано с поиском новых типов рациональности. Происходит отказ от идеалов классического понимания истины и научности, в том числе от обращения со смыслом по аналогии обращения с вещью, которую можно познать, воспроизвести и передать другому. Предполагается заменить модель смыслопрочтения моделью смыслопорождения, смыслообразования. Само познание при этом мыслится как творческий процесс постоянного смыслопорождения, на всех этапах которого (выработки, передачи, восприятия и толкования смысла) происходит взаимодействие неявного (неартикулированного) и явного (рефлексивного) уровней состояния сознания. Существенно то, что в этом процессе можно выделить относительно устойчивые состояния, этапы, на которых происходит объективизация смысла, придание общезначимого характера результатам познания. В этом случае концептуальный язык моделей, теорий может иметь объектно-ориентированный характер с преобладанием безличностной формы выражения мысли.

Какие же выводы из этого можно сделать для логической семантики? Ясно, что многообразие личностных контекстов (ситуаций с четко проявленным субъективным элементом) ведет к многообразию субъектно-объектных отношений. Проследим, какое влияние оказывает динамика смыслопорождения и структура субъективности на интенциональность контекстов.

¹ В отечественной литературе этот подход развивается автором [2,3], В.А.Смирновым [4]. На зарубежные исследования оказал существенное влияние Д.Льюис. Ввели эти идеи в искусственный интеллект Р.Сталнакер, Фагин, Халперн, Мур. См. обзор по эпистемической логике [5]. В традициях финской школы в данном направлении работает В.Рантала.

2. Дилемма экстенциональности-интенциональности

Как известно, понятия интенционала и экстенционала впервые были введены Карнапом и предназначались для экспликации понятий смысла и значения языкового выражения. Так, например, под экстенсионалом предложения понимается его истинностное значение, а интенционал есть пропозиция, им выражаемая. Работы Монтегю по интенциональным логикам с ключевым различием пары понятий интенционал-экстенционал [6] дали жизнь многим направлениям как в самой логике, так и в ее приложениях к анализу естественного языка. Подход Монтегю предполагает параллель между интерпретацией интенционала выражения s как функции, которая однозначно задает экстенционал c относительно каждого возможного мира, и смыслом выражения s , который однозначно задает значение c . Возникает вопрос, является ли интенциональность-экстенциональность, жестко закрепленным свойством? Всегда ли выражения одного и того же типа при переводе на язык интенциональной логики строго интенциональны, а другие - строго экстенциональны? А если нет, то каковы критерии выбора одного из членов дилеммы при оценке условий истинности целого контекста? В частности, во всех ли случаях контексты с пропозициональными установками следует понимать интенционально?

На первый вопрос ответ был дан незамедлительно. В одних случаях одно и то же выражение следует интерпретировать интенционально, а в других - экстенционально. Рассмотрим примеры из знаменитой работы Монтегю PTQ. Термин "температура" в (1) понимается экстенционально, а в (2) интенционально [6, с.268]:

(1) Температура равна девяносто;

(2) Температура повышается;

(1') $\exists y[\forall x[\text{temperature}'(x) \leftrightarrow x=y] \wedge [\forall y]=n]$;

(2') $\exists y[\forall x[\text{temperature}'(x) \leftrightarrow x=y] \wedge \text{rise}'(y)]$

Напомним, что переменные x и y пробегают по интенционалам индивидов, то есть по индивидуальным концептам, n есть константа "девяносто", $\text{temperature}'$ и rise' суть переводы соответствующих выражений английского языка в язык интенциональной логики. Запись $[\forall y]$ означает, что во внимание принимается значение экстенционала интенциональной переменной y . Запись $\wedge n$ означает, что во внимание принимается интенционал (экстенциональной) константы n (девяносто). При экстенциональной трактовке (2), используя закон тождества равных, можно прийти к бессмыслице типа

(3) "девяносто" повышается;

(4) $\text{rise}'(\wedge n)$.

Заметим, что в (1) речь идет о фиксации статического состояния, а в (2) - о динамическом процессе. Интенциональность возникает из-за необходимости усложнения структуры представления

информации. Для (1) достаточно рассмотреть одно состояние (возможный мир), в случае с (2) просматривается множество состояний (возможных миров) или моментов времени. То же самое можно сказать о паре глаголов "находить" и "искать", которая отражает совершение кратковременного и длительного действия соответственно.

Поместим (1) и (2) в контексты с пропозициональными установками:

(4) Джон утверждает, что температура равна девятисто.

(5) Джон утверждает, что температура повышается.

Не трудно предположить, что интенциональность (5) следует, по крайней мере, из интенциональности придаточного предложения (1). Следуя Монтегю, можно предложить референциальное прочтение (4):

(4') $\exists y[\forall x[\text{temperature}'(x) \leftrightarrow x = y] \wedge \text{assert-that}'(^j, ^{[[^y] = n})]$.

j есть перевод собственного имени John в язык ИЛ.

Как видно, референциальное прочтение пропозициональных установок предполагает явное выделение точек зрения наблюдателя (природы, оракула) и индивида (субъекта пропозициональной установки) и, соответственно, различения двух типов квантификации - объектной (публичной, общезначимой, природной) и субъектной (индивидуальной, перцептивной). При референциальном прочтении показывают, что термины, входящие в область действия пропозициональной установки, можно понимать в их обычном смысле, если они образуют смысловые единицы наблюдателя, то есть входят в смысловое поле, просматриваемое наблюдателем. При описании именно этого компонента значения можно использовать экстенционалы выражений. Смысловое значение, отражающее точку зрения носителя пропозициональной установки, понимается интенционально. Это означает, что либо сами термины, либо их сочленения (то есть приложения функтора к аргументу) имеют интенциональную интерпретацию. В примере (4') имеются выражения j и $^{[[^y] = n]}$, где знак " $^$ " есть знак интенционала. Мы придерживаемся другой точки зрения на природу интенциональности и попытаемся показать, что способы приложения функтора к аргументу для одних и тех же выражений могут варьироваться в зависимости от контекста. Другими словами, не всегда пропозициональные установки следует интерпретировать интенционально.

Предположим, что Джон на вопрос о температуре, после просмотра показаний градусника, отвечает, что температура равна девятисто. В данном случае, разница между способами представления информации - объектно-ориентированным и субъектно-ориентированным - не играет особой роли, важно фиксировать сам факт, то есть результат изменения температуры. Ссылку на утверждение можно понимать как ссылку на источник информации. При желании можно указать и в (1) на источник информации, так как любое

языковое выражение субъектно нагружено, а различия возникают в форме, способе представления знания в языке. При соответствующей перестройке семантики, как, например, в логиках с дифференциацией областей полагания, возможно одноплоскостное представление и (1) и (4), то есть экстенциональное прочтение. Например, зададим ссылки на источник информации в подстрочном индексе, тогда (1) и (4) будут выглядеть так:

(1'') $\exists y[\forall x[\text{temperature}'(x) \leftrightarrow x=y] \wedge [\forall y]=n]_{ob}$,

(4'') $\exists y[\forall x[\text{temperature}'(x) \leftrightarrow x=y] \wedge [\forall y]=n]_j$,

где ob есть ссылка на наблюдателя (observer), а j - на Джона.

В общем случае экстенциональная трактовка субъектно-нагруженных выражений языка связана с моментами объективации смысла, придания ему общезначимого характера в процессе смыслопорождения. Экстенциональность связана с выбором относительно простых (одноплоскостных) семантических способов представления информации.

3. Эпистемические ситуации

Перейдем к рассмотрению эпистемических контекстов в плане интенциональности-экстенциональности их значений.

Предположим, что основное намерение наблюдателя заключается в том, чтобы выразить информацию об объекте. При этом акцент делается на самой пропозиции, а указание источника информации имеет второстепенное значение. Подгруппу данного типа составляют случаи, когда нечто утверждается (или отрицается) об объекте. Если имеются прямые свидетельства и наблюдатель уверен в их достоверности, то возможно отождествление наблюдателя с рассматриваемой точкой зрения, которая выдается как отражающая объективное понимание. В таких случаях обычно опускают эпистемические обороты типа "я утверждаю" и выражают суждение в безличностной форме, как например,

(5) На вершине холма пылал большой костер.

В других случаях данного типа наблюдатель стремится отделить себя от поступающей извне информации. Акт утверждения (отрицания) происходит на основании косвенных источников информации, причем часто имеется непосредственный контакт с источником, например, имеется явная оценка другим человеком некоторого положения дел, и в целом складывающаяся ситуация пронизана взаимопониманием и доверием. Например, предложение

(6) Иван утверждает, что Петр имеет роман Достоевского "Идиот", а Федор утверждает, что он взял его в библиотеке

можно интерпретировать всецело экстенционально, как бы делая проекцию разных смысловых планов на план наблюдателя.

Поясним, что мы имеем в виду под проекцией различных смысловых планов на один. Представим себе, что мы рассматриваем пейзаж, искусно изображенный живописцем на холсте. Всматриваясь и вживаясь в образы родной природы, мы начинаем ощущать свежесть раннего утра, ароматы просыпающихся цветов и трав, пронизывающий легкий ветерок... Ощущения покоя и гармонии реальные, но навеяны они изображением на холсте. Перед нами картина, которая представляет собой проекцию физического трехмерного пространства на двумерную плоскость или, по другому говоря, проекцию реального мира на язык символического изображения. Но этот упрощенный язык символического изображения помогает нам "входить" и ощущать жизнь реального цельного мира.

По аналогии с картиной можно и язык рассматривать как некоторое измерение (плоскость), на которое проецируется деятельность различных когнитивных планов сознания. Кроме того, в самом языке находит отражение постоянное проецирование объемного смыслового поля, складывающегося в ходе интересубъективного взаимодействия, на выделенную смысловую плоскость. Последнее, в частности, означает возможность достижения некоторого единообразия в семантическом представлении информации. Например, проекция на план наблюдателя в (6) делает возможным единообразное приписывание значений выражениям по всему предложению в целом. Различие в смысловых полях Ивана и Федора в данном случае не принимается во внимание.

Заметим, что как по картине можно восстановить образ реального пространства, так и по смысловой проекции в языке можно восстановить смысловой объем. Собственные имена можно рассматривать лишь как индикаторы областей полаганий. Эти индикаторы являются своего рода "спящими" почками. В обычных условиях спящие почки не распускаются. Они идут в рост в экстремальных условиях, когда, казалось бы, растение погибло (заморозки, повреждение коры грызунами), и на нем не осталось ни одной живой ветки. Через спящие почки вступают в действие резервные силы растения, помогающие ему выжить. При нормальном ходе событий индикаторами источников информации ("спящими почками") можно пренебречь, но их можно и "пустить в рост", то есть осуществить проверку источника. Со "спящими почками" (6) будет выглядеть следующим образом:

(6') [Петр имеет роман Достоевского "Идиот"]Иван и
[он взял его в библиотеке]Федор

Рассматриваемая интерпретация эпистемических контекстов подходит для компьютерного моделирования в распределенной среде, где каждый процесс выполняет свою подзадачу и идет постоянный обмен информацией в ходе исполнения общей программы. В этих целях требуется унификация языковых средств (переменных) и гарантия истинности утверждений о решении подзадач.

Рассмотрим группу ситуаций, когда информация об объекте носит вероятностный характер, а в языке она выражается терминами типа полагания. В случае прямых свидетельств употребляются обороты "мне кажется", "представляется", "возможно" и т.п. На косвенные источники информации, которые ни проверить, ни опровергнуть наблюдатель не может, однако им доверяет и их использует в своих рассуждениях, указывают обороты типа "как считают физики", "с точки зрения общей теории относительности". Этот класс ситуаций также допускает экстенциональное прочтение, но в отличие от первой подгруппы требует привлечения вероятностных средств представления информации.

Экстенциональное прочтение допускается и при прочтении контекстов, где имеется нейтральное отношение наблюдателя и к пропозиции, и к ее автору. Простое воспроизведение мысли "чужого" без ее интерпретации через дословное, буквальное повторение изреченного лучше всего в языке передается прямой речью либо близкой к ней косвенной с оборотами типа "сказал, что". К данному типу относится, например, цитирование текста. Возможна проекция сказанного на одну плоскость. Но в отличие от предыдущих ситуаций здесь выбирается план автора пропозиции, а не наблюдателя.

Интенциональное прочтение эпистемических контекстов связано с выделением двух и более планов представления информации. Можно проследить, по крайней мере, две линии - автора (или "носителя пропозициональной установки") и наблюдателя. Наблюдатель выражает свое собственное отношение и к пропозиции и к ее автору, как бы вводит свою струю в формирование смысла. Если экстенциональное прочтение более связано с констатацией фактического положения дел, то интенциональное чаще всего связано с выражением оценки рассматриваемой ситуации.

Оценка наблюдателем положения дел осуществляется в стремлении осмыслить явно высказанную чужую мысль и выразить ее своими словами. Контексты с оборотами "знает, что", "ошибается в том, что", "вообразил себе, что" предполагают, по крайней мере, различие двух субъективных планов. В первом случае придаточное предложение истинно и с точки зрения наблюдателя, и с точки зрения носителя установки. В двух последних случаях ситуация характеризуется парой противоположных значений - истинно и ложно. Например, выражение "вообразил себе, что" подразумевает, что автор имеет одно представление об объекте, а наблюдатель - другое. Используя данную фразу, наблюдатель пытается выразить свое несогласие с точкой зрения автора. Отсюда в семантике целесообразно ввести не одну, а две системы измерения (два множества возможных миров, представляющих два субъективных видения).

К данному типу следует отнести ситуации, когда наблюдатель отделяет себя от другой точки зрения и не принимает ее. Например, в случаях оригинальности, неортодоксальности, непривычности рассматриваемых взглядов при невозможности их проверить. Такая

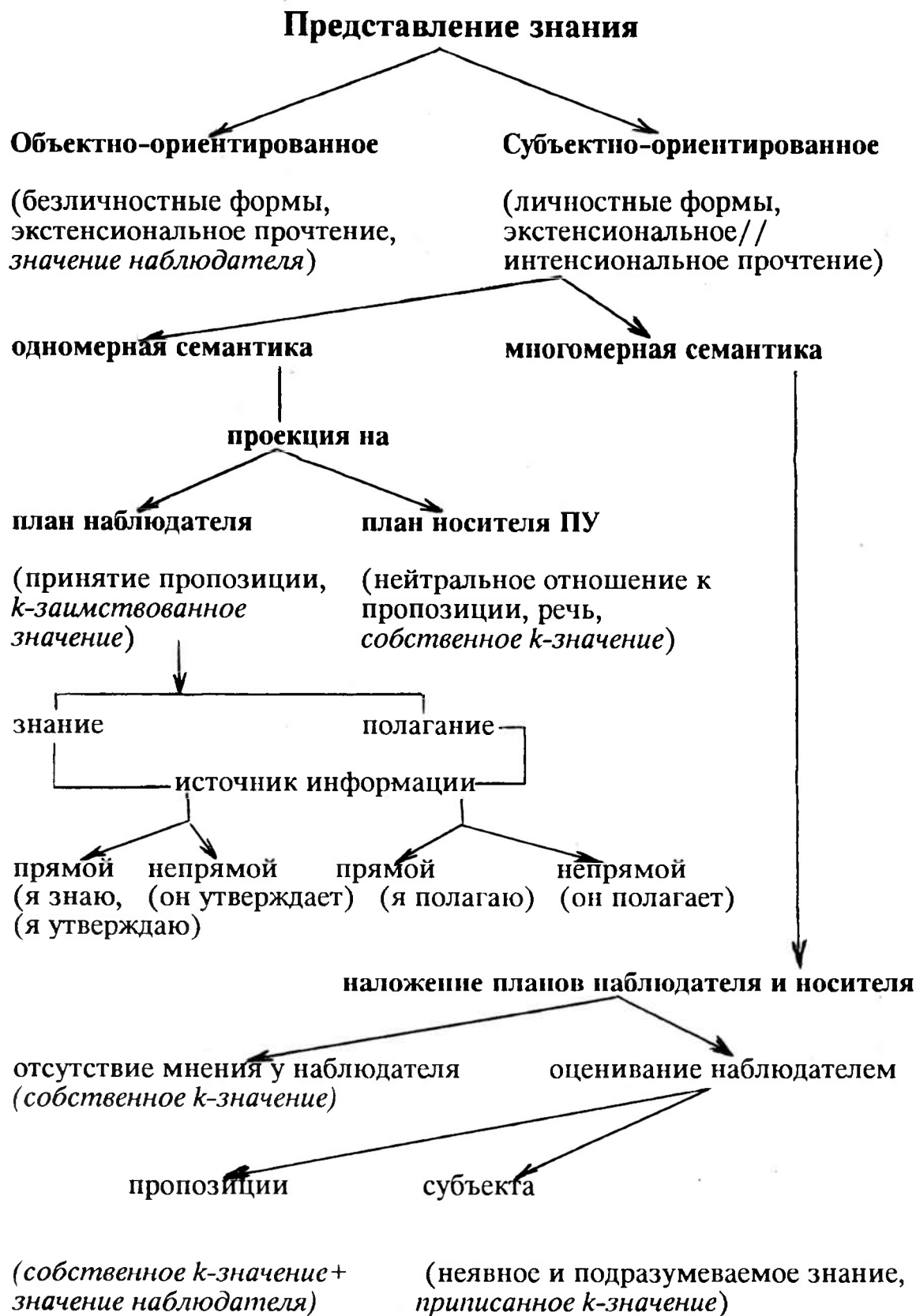
особенность смысла ведет к особым сочетаниям в возможных мирах и четкому разделению систем измерений.

Очень часто модальности типа эпистемических выражают результаты наблюдения за поведением другого человека, результаты анализа его намерений, представлений, когнитивных состояний. В таких ситуациях как бы происходит приписывание мыслей, полаганий, желаний и т.п. "чужому сознанию" и создается собственная модель "другого Я". В результате подобного моделирования "чужого сознания" становится возможным объяснение поведения и предсказание возможных действий другого человека. В акте речи дается оценка самому субъекту, его отношению к миру и окружающим, а не высказанной субъектом мысли. Следует иметь в виду, что созданный в сознании наблюдателя образ субъекта с различной степенью адекватности может отражать черты оригинала. Отсюда в семантику также целесообразно ввести несколько планов рассмотрения и использовать интенциональные средства.

Семантическая многоплановость субъектно-ориентированных контекстов еще более усиливается, если учесть иерархичность индивидуальных сознаний наблюдателя и наблюдаемого. На этом вопросе мы подробно останавливаться не будем, отметим лишь то, что в перспективе возможен более утонченный анализ. Открытым вопросом является нахождение подходящих соотношений, переходов между различными областями полаганий.

Суммируя вышесказанное, можно отметить, что субъектно-ориентированные формы представления знания предполагают расщепленность субъекта в субъектно-объектном познавательном отношении. Нами были проанализированы различные соотношения позиций внешнего наблюдателя и внутреннего субъекта (или носителя соответствующего ментального акта или пропозициональной установки) и было отмечено, что им соответствуют определенные языковые формы. Более того, представляется полезным выделить соответствующие типы семантических значений. Обозначим через k носителя пропозициональной установки. Под *собственным k -значением* языкового выражения α будем понимать значение α , данное носителем пропозициональной установки. *Приписанное k -значение* языкового выражения α есть значение, данное наблюдателем выражению α , находящемуся в контексте пропозициональной k -установки. Под *k -заимствованным значением* α имеется в виду значение α , используемое наблюдателем и заимствованное им у k -носителя. И, наконец, следует выделить то значение выражения, которое дается самим наблюдателем. В этих случаях будем говорить о значении наблюдателя. Если наблюдатель сам выступает в роли носителя пропозициональной установки, то будем говорить о *значении k -наблюдателя*.

Следующая схема дает наглядное представление о предложенной классификации:



5. Интенциональная логика

Можно провести реконструкцию интенциональной логики Монтегю в PTQ, следуя предложенной методологической стратегии. Основная идея заключается в структурировании множества типов и множества возможных миров. Множество типов Type есть наименьшее множество Y такое, что

- (1) $e, t \in Y$;
- (2) если $a, b \in Y$, то $\langle a, b \rangle \in Y$;
- (3) если $a \in Y$, то $\langle s, a \rangle \in Y$;
- (4) если $a \in Y$, то $\langle sk, a \rangle$, где $k \in K$.

e есть индекс категории выражений для сущностей (индивидов), t - индекс категории истинно-значных выражений (повествовательных предложений), s - индекс категории выделенных смыслов (план наблюдателя, sk - индекс категории эпистемических смыслов (планов носителей пропозициональных установок).

Следующее определение вводит множество ME_a - множество осмысленных выражений типа a (meaningful expression):

- (1) Каждая переменная и константа типа a принадлежит ME_a .
- (2) Если $\alpha \in ME_a$ и u есть переменная типа b , то $\lambda u \alpha \in ME_{\langle b, a \rangle}$.
- (3) Если $\alpha \in ME_{\langle a, b \rangle}$ и $\beta \in ME_a$, то $\alpha(\beta) \in ME_b$.
- (4) Если $\alpha, \beta \in ME_t$, то $\alpha = \beta \in ME_t$.
- (5) Если $\varphi, \psi \in ME_t$ и u - переменная, то $\neg \varphi$, $[\varphi \wedge \psi]$, $[\varphi \vee \psi]$, $[\varphi \rightarrow \psi]$, $[\varphi \leftrightarrow \psi]$, $\forall u \varphi$, $\exists u \varphi$, $\Box \varphi$, $W \varphi$, $H \varphi \in ME_t$.
- (6) Если $\varphi \in ME_t$ и $\alpha \in ME_t$, то $\underline{\alpha} \varphi, \varphi \in ME_t$.
- (7) Если $\alpha \in ME_a$, то $[\wedge \alpha] \in ME_{\langle s, a \rangle}$.
- (8) Если $\alpha \in ME_a$, то $[\wedge \alpha]_k \in ME_{\langle sk, a \rangle}$.
- (9) Если $\alpha \in ME_{\langle s, a \rangle}$, то $[\vee \alpha] \in ME_a$.
- (10) Если $\alpha \in ME_{\langle sk, a \rangle}$, то $[\vee \alpha]_k \in ME_a$.
- (11) Ничего, кроме перечисленного в пунктах (1)-(10), ME_a не принадлежит.

В отличие от PTQ вводятся три новых пункта в определение множества осмысленных выражений категории a ME_a , а именно (6), (8) и (10). Формулу $\underline{\alpha} \varphi$ можно прочесть как " α утверждает, что φ ", для $\varphi_{\underline{\alpha}}$ можно предложить следующее прочтение: "от α известно, что φ ".

Заметим, что в интенциональной логике имеются специальные модальные операторы - необходимости, W - будущего времени, H - прошедшего времени. Выражения естественного языка "необходимо", "будет так, что", "было так, что" не имеют прямого соответствия с вышеуказанными операторами, модальные операторы

входят лишь в качестве составной части сложного выражения языка интенциональной логики, являющегося перевод соответствующего выражения естественного языка. Мы предлагаем проделать процедуру аналогично этой, введя дополнительные эпистемические операторы и затем использовать их при переводе эпистемических выражений.

Напомним, что $[\wedge\alpha]$ обозначает выражение, имеющее в качестве экстенционала интенционал выражения α . $[\vee\alpha]$ - осмысленно, если только α - выражение, обозначающее интенционал, тогда $[\vee\alpha]$ обозначает соответствующий экстенционал. Обе формулы принадлежат языку наблюдателя. $[\wedge\alpha]_k$ вводится для обозначения *k-интенционала*, другими словами, интенционал выражения α , находящегося в плане носителя пропозициональной установки, $[\vee\alpha]_k$ есть соответствующий *k-экстенционал*.

Пусть A, I, J, U есть некоторые непустые множества, которые рассматриваются как: A - множество сущностей, J - множество моментов времени, I - множество глобальных возможных миров, U - есть семейство множеств локальных возможных миров: $U = \{U_k : k \in K\}$. Пусть Φ есть семейство функций: $\Phi = \{\Phi_k : k \in K\}$. Φ_k следует понимать как функцию выбора, которая по множествам I и J выбирает локальные миры из U_k , т.е. $\Phi_k : I \times J \rightarrow U_k$. С данного типа семантикой более подробно можно ознакомиться по статье автора в [3]. Пусть $k \in K$. Тогда для любого k $u_k \in i$, где $i \in I$. u_k можно понимать как локальную историю, описывающую поведение эпистемического к-субъекта. $u_k(j)$ есть локальный возможный мир локальной истории u_k во время j .

Определим $D_{a,A,I,J,U}$ - множество возможных значений (possible denotations) типа a , соответствующих A, I, J, U . Пусть X и Y есть некоторые множества. X^Y есть множество всех функций с областью определения Y и значениями из X :

$$D_{e,A,I,J,U} = A,$$

$$D_{t,A,I,J,U} = \{0,1\},$$

$$D_{\langle a,b \rangle, A, I, J, U} = D_{a,A,I,J,U}^{D_{b,A,I,J,U}},$$

$$D_{\langle s,a \rangle, A, I, J, U} = D_{a,A,I,J,U}^{I \times J},$$

$$D_{\langle sk,a \rangle, A, I, J, U} = D_{a,A,I,J,U}^{Q_k}, \text{ где } Q_k \subseteq U_k \text{ и } Q_k = \{x : x \in \Phi_k(i,j)\} \\ \text{для всех } \langle i,j \rangle \in I \times J\}.$$

Как видно из определения, константам языка дается двойная оценка: они имеют значения и относительно глобальных историй, и относительно локальных. Пусть g есть функция, приписывающая значения константам языка. Под *интерпретацией* $\mathbb{M}$ понимается следующая упорядоченная шестерка $\langle A, I, J, U, \leq, F \rangle$, где (1) A, I, J, U есть непустые множества, (2) $\leq$ - отношение линейного порядка, заданное на J , (3) F - функция с областью определения на множестве всех констант, (4) если $a \in \text{Type}$ и $\alpha \in \text{Con}_a$, то

$$F(\alpha) \in D_{a,A,I,J,U}^{I \times J} \cup D_{a,A,I,J,U}^{Qk}.$$

Пусть g есть функция, приписывающая значение переменным, т.е. функция, определенная на множестве всех переменных и такая, что $g(u) \in D_{a,A,I,J,U}$.

Если α есть осмысленное выражение, то под $\alpha^{\mathfrak{M},g}$ понимается интенционал α относительно $\mathfrak{M}$ и g . $\alpha^{\mathfrak{M},i,j,g}$ есть экстенционал α относительно $\mathfrak{M},i,j,g$, где $\langle i,j \rangle \in I \times J$. Новыми будут понятия k -интенционала $\alpha^{\mathfrak{M},\Phi k,g}$, и k -экстенционала $\alpha^{\mathfrak{M},\Phi k(i,j),g}$ для некоторого $k \in K$. За точку соотнесения берется пара $\langle i,j \rangle$, где $i \in I$ - глобальный мир, а $j \in J$ - момент времени. Понятия экстенционала и интенционала вводятся рекурсивным определением.

(1) Если α - константа, то $\alpha^{\mathfrak{M},g}$ есть $F(\alpha)$.

(2) Если α - переменная, то $\alpha^{\mathfrak{M},i,j,g}$ есть $g(\alpha)$.

Шаги для сложных формул мы опускаем, они полностью соответствуют определениям в РТQ, за исключением новых выражений:

(n) Если $\alpha \in ME_a, \varphi \in ME_t$, то $[\underline{\alpha}\varphi]^{\mathfrak{M},i,j,g} = 1$ е.т.е. $[\varphi]^{\mathfrak{M},\Phi k(i,j),g} = 1$ для некоторого $k \in K$.

(n+1) $\alpha \in ME_a, \varphi \in ME_t$, то $[\varphi \underline{\alpha}]^{\mathfrak{M},i,j,g} = 1$ е.т.е. $[\varphi]^{\mathfrak{M},\Phi k(i,j),g} = 1$ и $[\varphi]^{\mathfrak{M},i,j,g} = 1$.

(l) Если $\alpha \in ME_a$, то $[\wedge \alpha]_k^{\mathfrak{M},i,j,g}$ есть такая функция h с областью $I \times J$, что для любых $\langle i,j \rangle$ $h(\langle i,j \rangle) = \alpha^{\mathfrak{M},\Phi k(i,j),g}$.

(l+1) Если $\alpha \in ME_{\langle sk,a \rangle}$, то $[\vee \alpha]_k^{\mathfrak{M},i,j,g}$ есть $\alpha^{\mathfrak{M},\Phi k(i,j),g}(\langle i,j \rangle)$,

то есть функциональное значение k -интенционала, приложимого к точке соотнесения $\langle i,j \rangle$.

Если $\alpha \in ME_a$, то $[\wedge \alpha]^{\mathfrak{M},i,j,g}$ есть $\alpha^{\mathfrak{M},g}$ - интенционал относительно глобального мира. Если $\alpha \in ME_a$, то $[\wedge \alpha]_k^{\mathfrak{M},i,j,g}$ есть $\alpha^{\mathfrak{M},\Phi k,g}$ - интенционал относительно локального мира. Если $\alpha \in ME_{\langle s,a \rangle}$, то $[\vee \alpha]^{\mathfrak{M},i,j,g}$ есть $\alpha^{\mathfrak{M},i,j,g}(\langle i,j \rangle)$ экстенционал относительно локального мира.

Рассмотрим теперь возможность перевода выражений естественного языка в язык модифицированной интенциональной логики. Пропозициональные установки, выражаемые глаголами типа "полагает", "утверждает", "знает", более не влияют на интенциональность контекста, так как она в данном случае зависит всецело от временного аспекта: движения по временной оси J (горизонтالي). Движение по оси локальных состояний некоторого глобального состояния (вертикали) определяет структуру экстенционала данного

выражения в точке $j \in J$. Отличие контекстов пропозициональных установок от безличностных форм высказываний проявляются в усложнении структуры экстенционала языкового выражения, наряду с обычным экстенсионалом приходится рассматривать и особые k -экстенсионалы. В то же время семантика допускает возможность проекции планов носителей пропозициональных установок на план наблюдателя и придания k -экстенсионалам статуса "спящих почек", простых индикаторов информации. Если интенциональную логику Монтегю расценивать как представляющую линейную семантическую размерность, то предложенную модификацию можно рассматривать как плоскостную семантическую размерность: горизонталь по оси времени, и вертикаль по оси эпистемических состояний. Интенционал зависит от горизонтали, а экстенционал от вертикали.

Обратимся к примеру из PTQ : "Bill walks" (Билл ходит пешком). Данное предложение имеет экстенсиональную трактовку:

$[walk'*(b)]$,

где звездочка $*$ указывает на экстенсиональную позицию глагола $walk$, а " b " есть константа, обозначающая $Bill$. В этом случае мы имеем дело со значениями предложения в поле наблюдателя. Поместим данное высказывание в контекст с пропозициональной установкой:

John believes that Bill walks.

Джон полагает, что Билл ходит пешком.

Возможны различные прочтения последнего. Если имеется в виду личностное мнение Джона относительно Билла, то следует использовать форму для передачи собственного k -значения:

$[j[walk'*(b)]]$,

где j - константа, обозначающая Джона а всему выражению соответствует формула языка интенциональной логики $[\alpha\varphi]$.

Предположим, что рассматриваемое предложение адекватно по смыслу предложению "As it is known from John, Bill walks" (Как известно от Джона, Билл ходит пешком). Используем перевод для передачи k -заимствованного значения:

$[walk'*(b);j]$.

В ситуации, когда речь идет об оценке наблюдателем ментальных состояний субъекта, лучше употребить приписанное k -значение:

Believe-that'*($j[walk'*(b)]$).

При данном прочтении глагол "believe" стоит в экстенсиональной позиции и по отношению к субъекту (j) и по отношению к высказыванию. Высказывание в целом рассматривается лишь в поле наблюдателя: в глобальной точке соотнесения $\langle i,j \rangle$.

Предложение "A price rises" ("Цена повышается") интерпретируется интенционально, так как имеет временную окраску:

$$\exists x[\text{price}'(x) \wedge \text{rise}'(x)],$$

где x - переменная, пробегающая по индивидам концептам. В контексте с пропозициональной установкой "John believes that a price rises" ("Джон полагает, что цена повышается") при собственном k -значении имеем *de re* перевод:

$$\exists x[\text{price}'(x) \wedge j[\text{rise}'(x)]].$$

Приписанное k -значение дает следующий *de dicto* перевод:

$$\text{Believe-that}'(j, \exists x[\text{price}'(x) \wedge \text{rise}'(x)]),$$

где глагол "believe" стоит в экстенциональной позиции к субъекту и интенциональной к пропозиции.

При *de re* переводе получаем:

$$\exists x[\text{price}'(x) \wedge \text{Believe-that}'(j, \text{rise}'(x))].$$

Предложение "John finds a unicorn" ("Джон находит единорога") имеет экстенциональный перевод:

$$\exists u[\text{unicorn}' * \wedge \text{find}' * (j, u)].$$

Предложение "Mary believes that John finds a unicorn" (Мэри полагает, что Джон находит единорога) при *de re* прочтении и собственном k -значении будет иметь следующий перевод:

$$\exists u[\text{unicorn}' * \wedge \underline{m}[\text{find}' * (j, u)]].$$

Возможен *de dicto* вариант:

$$\underline{m}[\exists u[\text{unicorn}' * \wedge \text{find}' * (j, u)]].$$

Интенциональное прочтение *de dicto* варианта:

$$\underline{m}^{\wedge}[\exists u[\text{unicorn}' * \wedge \text{find}' * (j, u)]].$$

Данное предложение можно интерпретировать в смысле заимствованного k -значения:

$$\exists u[\text{unicorn}' * \wedge [\text{find}' * (j, u)]_m],$$

$$\exists u[\text{unicorn}' * \wedge \text{find}' * (j, u)]_m].$$

Интерпретация гнездовых полаганий возможна лишь в случае приписанного k -значения:

Mary believes that John believes that Bill walks.

Мэри полагает, что Джон полагает, что Билл ходит пешком.

$\text{Believe-that}' * (m, \text{Believe-that}' * (j, \text{walk}' * (b)))$.

Рассмотрение гнездовых полаганий других типов, а также смешанные виды, например,

$$[\text{Believe-that}' * (j, \text{walk}(b))]_m$$

требует введения отношения достижимости на локальных мирах. Понятие зависимости полаганий и соответствующая модификация эпистемической логики были исследованы в [7].

ЛИТЕРАТУРА

1. Аршинов В.И., Свирский Я.И. От смыслопрочтения к смыслопорождению // Вопросы философии, 1992. N2.
2. Герасимова И.А. Логический анализ рассуждений на основании личностных знаний // Синтаксические и семантические исследования неэкстенциональных логик. М., 1989.
3. Герасимова И.А. Распределенные системы с точки зрения эпистемической логики // Логические исследования. Вып.1. М., 1993.
4. Смирнов В.А. Многомерные логики // Наст. издание.
5. Mc Arthur Gregory L. Reasoning about knowledge and belief: a survey // Computational Intelligence. 1988. Vol.4.N3.
6. Formal philosophy. Selected papers of Richard Montague. New Haven, 1974.
7. Zhisheng Huang. Dependency of Belief in distributed systems // Institute for Language, Logic and Information. University of Amsterdam, 1989. Preprint.

ДИНАМИЧЕСКАЯ ИНТЕРПРЕТАЦИЯ ВЫСКАЗЫВАНИЙ

В классической логике высказываний принимается допущение, что в языке имеются так называемые элементарные высказывания. Они являются высказываниями об элементарных фактах, которые либо имеют место, либо - нет. В зависимости от этого соответствующее элементарное высказывание либо истинно, либо ложно. Одним из существенных свойств элементарных фактов является то, что они независимы. Наличие либо отсутствие того или иного элементарного факта никак не влияет на другие элементарные факты.

Допустим, что среди действий, которые может выполнять некий субъект, также можно выделить элементарные действия. Их элементарность заключается в том, что после выполнения таких действий соответствующий им отдельный элементарный факт начинает иметь место. На остальные же элементарные факты такие действия не оказывают никакого влияния. Другими словами, мы принимаем допущение, что между элементарными действиями и элементарными фактами имеется взаимнооднозначное соответствие. Отсюда следует, что будет иметь место также взаимнооднозначное соответствие между элементарными действиями и элементарными высказываниями. Из элементарных высказываний можно строить сложные высказывания, множество которых в конечном счете является булевой структурой. Естественно попробовать сопоставить не только элементарным, но и сложным высказываниям некоторые действия и выяснить их свойства.

Рассмотрим следующую модель. Пусть у нас на столе разложены игральные карты. Ни одна из них не лежит на другой. Ими мы будем представлять элементарные факты. Если карта лежит вверх рубашкой, то имеет место элементарный факт. Если же карта лежит рубашкой вниз, то элементарный факт не имеет места. Каждому элементарному факту сопоставим элементарное высказывание, которое истинно тогда и только тогда, когда имеет место соответствующий элементарный факт. Сопоставим также каждому элементарному факту элементарное действие, которое будет заключаться в переворачивании соответствующей карты, если данный элементарный факт не имеет места. Из-за имеющегося взаимнооднозначного соответствия между элементарными высказываниями и элементарными действиями можно принять, что мы имеем дело просто с двумя видами интерпретации высказываний - статической и динамической. В случае динамической интерпретации высказываниям сопоставляются действия, направленные на такое изменение возможного мира, в результате которого данное высказывание становится истинным. Если мы теперь рекурсивно разумным образом определим, какие действия соответствуют сложным высказы-

ваниям, то эти высказывания приобретут две ипостаси. С одной стороны, их можно рассматривать как описания возможных миров, с другой стороны, их можно рассматривать как программы, в результате выполнения которых можно прийти к возможному миру удовлетворяющему этому описанию. Нет необходимости говорить, что такая двойственная трактовка высказываний весьма привлекательна. Перейдем теперь к систематическому изучению возможных динамических интерпретаций высказываний.

Если в нашем языке формула A представляет некоторое высказывание, то соответствующее ему действие будем представлять посредством $[A]$. Его можно понимать следующим образом "сделать так, чтобы A было истинным".

Свойства действий и различных способов их композиции изучают в динамических логиках. Предлагаемые системы также можно рассматривать как некоторые варианты динамических логик.

Прежде всего зададим язык, который обозначим посредством $\mathcal{L}_1$. Он состоит из:

- | | |
|---|-----------------------------|
| 1. $p, q, r, s, \dots \in Var$
переменных. | множество пропозициональных |
| 2. $\&, \vee, \rightarrow, \neg$ | - логические связки. |
| 3. $[,], (,)$ | - скобки. |

Определим множество **BF** булевых формул.

1. $\text{Var} \subseteq \text{BF}$.
2. Если $A, B \in \text{BF}$, то и $\neg A, (A \& B), (A \vee B) \in \text{BF}$.
3. Ничто другое булевой формулой не является.

Определим множество **FM** формул.

1. $\mathbf{BF} \subseteq \mathbf{FM}$.
2. Если $A \in \mathbf{BF}$, $B \in \mathbf{FM}$, то $[A]B \in \mathbf{FM}$.
3. Если $A, B \in \mathbf{FM}$, то и $\neg A$, $(A \& B)$, $(A \vee B)$, $(A \rightarrow B) \in \mathbf{FM}$.
4. Ничто другое формулой не является.

Формулы вида $[A]B$ можно читать следующим образом "всякий раз, когда мир изменен таким образом, что в нем имеет место A , в нем имеет место также и B ".

Для заданного нами языка построим реляционную семантику. В качестве множества возможных миров возьмем множество всех приписываний истинностных значений пропозициональным переменным $Val = \{0, 1\}^{Var}$. Обычным образом распространим эти приписывания на множество всех булевых формул.

Теперь нам нужно сопоставить каждой булевой формуле некоторое отношение достижимости на множестве Val . Это отношение достижимости как раз и будет семантическим представлением действия, соответствующего данной булевой формуле. Соответствие будет осуществлять функция $\llbracket \cdot \rrbracket : BF \rightarrow 2^{Val \times Val}$, которую мы сейчас определим. Пусть $s[A]t$ служит у нас сокращением для $\langle s, t \rangle \in \llbracket A \rrbracket$, где $s, t \in Val$. Посредством $s \simeq_p t$ будем обозначать тот факт, что приписывания s и t отличаются возможно лишь значением, сопоставляемым переменной p .

Что значит выполнить в мире s некоторое элементарное действие $[p]$? Это значит, что если в мире s уже имеет место p , то выполнение соответствующего действия ничего в нем не изменит. Если же p ложно в мире s , то он должен быть изменен в мир t , который отличается от s лишь тем, что в нем истинно p . Все другие элементарные высказывания имеют в t то же самое значение, что и в s . Аналогично предлагается рассматривать и действие, которое соответствует отрицанию элементарного высказывания. Отличие лишь в том, что в мире t элементарное высказывание p ложно. Такое понимание действий и отражается первым пунктом определения:

$$1. s[p]t \Leftrightarrow t(p)=1, s \simeq_p t. \quad s, t \in Val, p \in \{\neg p, p\}$$

Пункт определения отношения достижимости в случае дизъюнктивных высказываний почти не нуждается в комментариях.

$$2. s[A \vee B]t \Leftrightarrow s[A]t \text{ или } s[B]t.$$

Следует, однако, обратить внимание на то, что в соответствии с пунктом 2, если даже высказывание $A \vee B$ истинно в s , выполнение действия $[A \vee B]$ может привести к миру t , который отличен от s . Можно было бы заменить пункт 2 на 2':

$$2'. s[A \vee B]t \Leftrightarrow (s(A \vee B)=1, s=t) \text{ или } (s(A \vee B)=0, s[A]t) \text{ или } (s(A \vee B)=0, s[B]t).$$

Тем не менее я считаю первый вариант более естественным и в настоящей работе останавливаюсь на нем.

Случай конъюнкции требует более детальных объяснений. Дело в том, что действие, соответствующее конъюнктивному высказыванию $A \& B$, должно нести черты параллелизма. Ведь оно заключается в том, чтобы одновременно сделать истинными A и B . Как это записать? Мне неизвестны удобные способы это сделать. Вместо этого предлагается имитировать параллелизм последовательностью действий, характерной особенностью которой является то, что результаты действий в этой последовательности не отменяют друг друга, а наоборот накапливаются к концу. Это мы отразим в следующем пункте определения:

$$3. s[A \& B]t \Leftrightarrow (s[A] \circ [B]t, t(A)=1) \text{ или } (s[B] \circ [A]t, t(B)=1).$$

Здесь $[A] \circ [B]$ - обычная композиция бинарных отношений.
Следующие три пункта определения объяснений не требуют.

4. $s[\neg\neg A]t \Leftrightarrow s[A]t.$
5. $s[\neg(A \vee B)]t \Leftrightarrow s[(\neg A \& \neg B)]t.$
6. $s[\neg(A \& B)]t \Leftrightarrow s[(\neg A \vee \neg B)]t.$

Определим отношение $s \models A$ - "при приписывании s истинна формула A ":

$$s \models p \Leftrightarrow s(p) = 1$$

.....

.....

.....

$$s \models [A]B \Leftrightarrow \forall t(s[A]t \Rightarrow t \models B).$$

Формула A общезначима е. и т. е. $\forall s(s \models A)$.

Класс общезначимых формул аксиоматизируем посредством аксиом и правил вывода классической логики высказываний плюс следующих аксиом и одного правила вывода:

- Ax.1 $[A](B \rightarrow C) \rightarrow ([A]B \rightarrow [A]C)$
- Ax.2 $[\neg\neg A]B \Leftrightarrow [A]B$
- Ax.3 $[A \vee B]C \Leftrightarrow ([A]C \& [B]C)$
- Ax.4 $[\neg(A \vee B)]C \Leftrightarrow [(\neg A \& \neg B)]C$
- Ax.5 $[A \& B]C \Leftrightarrow ([A][B](A \rightarrow C) \& [B][A](B \rightarrow C))$
- Ax.6 $[\neg(A \& B)]C \Leftrightarrow [(\neg A \vee \neg B)]C$
- Ax.7 $([A]B \& [A]C) \rightarrow [A](B \& C)$
- Ax.8 $[P]A \Leftrightarrow \neg[P]\neg A$
- Ax.9 $[P](A \vee B) \rightarrow ([P]A \vee [P]B)$
- Ax.10 $[P]q \Leftrightarrow q \quad p \neq q$

$$\frac{\vdash A \rightarrow B}{\vdash [A]B}$$

Интересным и на первый взгляд неожиданным является то, что для всякой формулы $A \in \mathbf{FM}$ существует эквивалентная ей булева формула $B \in \mathbf{BF}$. Это наводит на мысль, что скобки $[]$ представляют просто одну из шестнадцати связок классической логики. Тем не менее это не так. Можно показать, что $[]$ не является истинностно-функциональной связкой. Пусть $s(p) = 0$ и $s(q) = 0$. Тогда $s \models [p]p$, но $s \not\models [p]q$.

В построенной логике имеет место правило замены эквивалентных формул в виде:

$$\frac{\vdash A \leftrightarrow B}{\vdash [C]A \leftrightarrow [C]B}$$

С другой стороны, правило замены эквивалентных формул в виде:

$$\frac{\vdash A \leftrightarrow B}{\vdash [C]A \leftrightarrow [C]B}$$

не имеет места. Не является доказуемой также формула:

$$[A \vee \neg A]C \leftrightarrow [B \vee \neg B]C$$

Из интересных формул в построенной логике доказуема:

$$[A]A$$

Более того, если булева формула A выполнима, то доказуема формула:

$$\neg[A]\neg A$$

К языку $\mathcal{L}_1$ можно было бы добавить стандартные связки различных способов композиции действий. При желании это легко сделать.

Более интересным является, конечно, же случай логики предикатов. Как теперь сопоставить формулам языка некоторые действия? На чем определять отношение достижимости? Возможны два основных подхода. В первом подходе отношение достижимости задается на множестве приписываний значений индивидуальным переменным языка. Во втором подходе отношение достижимости задается на множестве моделей языка. В этом втором подходе интересным является случай, когда отношение достижимости задано на множестве моделей с фиксированным универсумом индивидов, т.е. фактически оно задано на множестве интерпретаций языка в фиксированной области. Возможны и смешанные подходы.

Для начала рассмотрим первый подход.

В большинстве языков программирования имеется так называемый оператор присваивания $:=$. С его помощью может быть представлено действие по присваиванию некоторой переменной x значения терма t следующим образом:

$$x := t$$

Всякий раз после выполнения такого действия истинно равенство $x = t$ (при условии, что x не входит в t). Равносильным образом

операцию присваивания можно было бы представить действием $[x=t]$, которое могло бы читаться как - "найти такое значение переменной x , при котором истинно равенство $x=t$ ". Этот пример довольно хорошо иллюстрирует суть первого подхода.

Зададим язык $\mathcal{L}_2$. Он состоит из:

1. Var - множество индивидуальных переменных.
2. $Func$ - множество функциональных символов.
3. $Pred$ - множество предикатных символов.
4. $\&, \vee, \neg, \rightarrow$ - логические связки.
5. $\exists, \forall$ - кванторы.
6. $[], (), ()$ - скобки.

Определим множество $Term$ термов.

1. $Var \subseteq Term$.
2. Если $t_1, \dots, t_n \in Term$ и $f^n \in Func$, то $f^n(t_1, \dots, t_n) \in Term$.
3. Ничто другое термом не является.

Определим множество BF булевых формул.

1. Если $P^n \in Pred$ и $t_1, \dots, t_n \in Term$, то $P^n(t_1, \dots, t_n) \in BF$.
2. Если $A, B \in BF$, то и $\neg A, (A \& B), (A \vee B) \in BF$.
3. Если $y \in Var$ и $A \in BF$, то $\exists y A, \forall y A \in BF$.
4. Ничто другое булевой формулой не является.

Определим множество FM формул.

1. $BF \subseteq FM$.
2. Если $A \in BF, B \in FM, x \in Var$, то $[A]_x B \in FM$.
3. Если $A, B \in FM$, то и $\neg A, (A \& B), (A \vee B), (A \rightarrow B) \in FM$.
4. Если $y \in Var$ и $A \in FM$, то $\exists y A, \forall y A \in FM$.
5. Ничто другое формулой не является.

Моделью нашего языка будем называть тройку $M = \langle M, I, Val \rangle$, где M - непустое множество индивидов, $Val = M^{Var}$ - множество всех приписываний значений индивидуальным переменным, а I - функция интерпретации функциональных и предикатных символов, такая, что:

1. Если $fn \in Func$, то $I(fn) \in MM_{хп}$.
2. Если $P^n \in Pred$, то $I(P^n) \in \{0, 1\}^{M_{хп}}$.

Определим $|t|_v$ - значение терма t в модели M при приписывании $v \in Val$:

1. Если $t \in Var$, то $|t|_v = v(t)$.
2. Если $t = f^n(t_1, \dots, t_n)$, то $|f^n(t_1, \dots, t_n)|_v = I(f^n)(|t_1|_v, \dots, |t_n|_v)$.

Определим $|A|_v$ - значение булевой формулы A в модели M при приписывании $v \in Val$:

1. $|P^n(t_1, \dots, t_n)|_v = I(P^n)(|t_1|_v, \dots, |t_n|_v)$.
2. $|\neg A|_v = 1 - |A|_v$.
3. $|A \& B|_v = \min(|A|_v, |B|_v)$.
4. $|A \vee B|_v = \max(|A|_v, |B|_v)$.
5. $|\forall y A|_v = \begin{cases} 1, & \text{если } \forall u \simeq_y v \ |A|_u = 1 \\ 0 & \text{в противном случае} \end{cases}$
6. $|\exists y A|_v = \begin{cases} 1, & \text{если } \exists u \simeq_y v \ |A|_u = 1 \\ 0 & \text{в противном случае} \end{cases}$

Определим функцию $[] : BFXFin(2^{Var}) \rightarrow 2^{Val \times Val}$, которая сопоставляет паре, состоящей из булевой формулы и конечного множества индивидуальных переменных, отношение достижимости на множестве Val . $v[A]_x u$ будет служить сокращением для $\langle v, u \rangle \in [](A, x)$. Посредством $v \simeq_x u$ будем обозначать тот факт, что приписывания v и u отличаются возможно лишь значениями, сопоставляемыми переменным из множества x .

1. $v[P^n(t_1, \dots, t_n)]_x u \Leftrightarrow v \simeq_x u, |P^n(t_1, \dots, t_n)|_u = 1, v, u \in Val, P \in \{P, \neg P\}$
2. $v[A \vee B]_x u \Leftrightarrow v[A]_x u \text{ или } v[B]_x u$.
3. $v[A \& B]_x u \Leftrightarrow (v[A]_x \circ [B]_x u, |A|_u = 1) \text{ или } (v[B]_x \circ [A]_x u, |B|_u = 1)$.
4. $v[\forall y A]_x u \Leftrightarrow v[A]_x u, |\forall y A|_u = 1$.
5. $v[\exists y A]_x u \Leftrightarrow v[A]_{x,y} w$, для некоторого $w \simeq_y u$.
6. $v[\neg \neg A]_x u \Leftrightarrow v[A]_x u$.
7. $v[\neg(A \& B)]_x u \Leftrightarrow v[\neg A \vee \neg B]_x u$.
8. $v[\neg(A \vee B)]_x u \Leftrightarrow v[\neg A \& \neg B]_x u$.

9. $v[\neg\forall yA]_x u \Leftrightarrow v[\exists y\neg A]_x u$.
 10. $v[\neg\exists yA]_x u \Leftrightarrow v[\forall y\neg A]_x u$.

Определим отношение $M, v \models A$ - "в модели M при приписывании v истинна формула A ".

$$M, v \models P^n(t_1, \dots, t_n) \Leftrightarrow |P^n(t_1, \dots, t_n)|_v = 1$$

.....

$$M, v \models [A]_x B \Leftrightarrow \forall u \in Val(v[A]_x u \Rightarrow M, u \models B).$$

Формула A общезначима е. и т.е. $\forall M \forall v (M, v \models A)$.

В формуле $[A]_x B$ все индивидные переменные из списка x связаны в A и в B . Класс общезначимых формул аксиоматизируем посредством аксиом и правил вывода классической логики предикатов плюс следующих аксиом и правил вывода:

- Ax.1 $[A]_x (B \rightarrow C) \rightarrow ([A]_x B \rightarrow [A]_x C)$
 Ax.2 $[\neg\neg A]_x B \Leftrightarrow [A]_x B$
 Ax.3 $[A \vee B]_x C \Leftrightarrow ([A]_x C \& [B]_x C)$
 Ax.4 $[A \& B]_x C \Leftrightarrow ([A]_x [B]_x (A \rightarrow C) \& [B]_x [A]_x (B \rightarrow C))$
 Ax.5 $[\neg(A \vee B)]_x C \Leftrightarrow [\neg A \& \neg B]_x C$
 Ax.6 $[\neg(A \& B)]_x C \Leftrightarrow [\neg A \vee \neg B]_x C$
 Ax.7 $[\forall y A]_x B \Leftrightarrow [A]_x (\forall y A \rightarrow B)$
 Ax.8 $[\exists y A]_x B \Leftrightarrow [A]_{x,y} B$ y не встречается в B
 Ax.9 $[\neg\forall y A]_x B \Leftrightarrow [\exists y \neg A]_x B$
 Ax.10 $[\neg\exists y A]_x B \Leftrightarrow [\forall y \neg A]_x B$
 Ax.11 $[P^n(t_1, \dots, t_n)]_x A \Leftrightarrow \forall \mathbf{X} (P^n(t_1, \dots, t_n) \rightarrow A)$
 $\vdash A \rightarrow B$

 $\vdash [A]_x B$

Оказывается, что в этой логике имеет место эквивалентность $[A]_x B \Leftrightarrow \forall x (A \rightarrow B)$. Поэтому все аксиомы и правило вывода можно заменить на эту единственную формулу.

Этот результат является несколько неожиданным. Означает ли он то, что в случае логики предикатов мы потерпели неудачу? Отнюдь. Нашей задачей было проинтерпретировать формулы логики предикатов как бинарные отношения на множестве приписываний значений индивидным переменным. И мы это сделали. То же, что имеется такой естественный перевод формул нашей логики в классическую логику предикатов, говорит о внутренней согласованности наших определений.

Сопоставление формулам логики предикатов отношения достижимости на множестве приписываний значений индивидуальным переменным позволяет рассматривать логику как особый язык программирования. Этот язык отличен от PROLOG'a, в котором вычисление значений переменных получается как побочный результат дедукции целевого утверждения из некоторого множества формул, описывающих предметную область. Отличен он и от систем синтеза программ по логическим выводам в интуиционистской логике.

В этом языке имеется набор некоторых базисных предикатов и функций над определенной областью, которая либо уже имеется, как, например, арифметика, либо может быть описана с помощью некоторой булевой формулы $A(x_1, \dots, x_n)$. Затем посредством формулы $B(x_1, \dots, x_n)$ описывается целевое состояние. Интерпретатор по правилам нашего определения отношения достижимости ищет новые значения переменных. При этом ему указывается, значения каких переменных могут быть изменены в процессе вычисления.

Такой язык весьма напоминает язык запросов к базам данных. Например, если имеется база данных на сотрудников некоторого предприятия, то реализация запроса:

БОЛЬШЕ(Возраст(x),40)

будет заключаться в поиске тех сотрудников, возраст которых больше 40 лет.

Покажем, что в построенном языке могут быть вычислены все примитивно рекурсивные функции. При этом мы будем понимать вычислимость в смысле определенного нами отношения достижимости.

Пусть в нашем языке имеются: функциональная константа 0, одноместный функтор N и бинарный предикат равенства =. Покажем, что в этом языке мы можем вычислить любую примитивно рекурсивную функцию при интерпретации на области натуральных чисел 0 как 0 и N как функции следования.

Для этого нужно показать, что мы можем вычислить следующие базисные функции:

- (a) Нуль-функцию $Z(x) = 0$;
- (b) Функцию следования $S(x) = x + 1$;
- (c) Функцию проекции $U_i^n(x_1, \dots, x_n) = x_i$, $n \geq 1$, $1 \leq i \leq n$.

Для вычисления нуль-функции определим бинарный предикат Zero следующим образом:

$$\text{Zero}(x, y)_{\text{def}} \equiv y = 0$$

Для вычисления функции следования определим бинарный предикат Next следующим образом:

$$\text{Next}(x, y)_{\text{def}} \equiv y = N(x)$$

Для вычисления функции проекции определим $n+1$ -местный предикат Pr следующим образом:

$$\text{Pr}_i^n(x_1, \dots, x_n, y)_{\text{def}} \equiv x_1 = x_1 \& \dots \& x_n = x_n \& y = x_i$$

Теперь базисные функции могут быть вычислены с помощью соответствующих программ-запросов:

$$[\text{Zero}(x, y)]_y$$

$$[\text{Next}(x, y)]_y$$

$$[\text{Pr}_i^n(x_1, \dots, x_n, y)]_y$$

После выполнения программы переменная y хранит значение функции.

Теперь нам нужно показать, что функции, определяемые через подстановку и рекурсию, также вычислимы в нашем языке.

Пусть функции:

$$f(y_1, \dots, y_k)$$

$$g_1(x_1, \dots, x_n)$$

.....

.....

.....

$$g_k(x_1, \dots, x_n)$$

вычислимы с помощью формул:

$$F(y_1, \dots, y_k, z)$$

$$G_1(x_1, \dots, x_n, w_1)$$

.....

.....

.....

$$G_k(x_1, \dots, x_n, w_k)$$

Покажем, что в нашем языке вычислима и функция

$$f(g_1(x_1, \dots, x_n), \dots, g_k(x_1, \dots, x_n))$$

Для этого определим $k+1$ -местный предикат H следующим образом:

$$H(x_1, \dots, x_k, y)_{\text{def}} \equiv \exists w_1 \dots w_k (G_1(x_1, \dots, x_n, w_1) \& \dots \\ \dots \& G_k(x_1, \dots, x_n, w_k) \& F(w_1, \dots, w_k, y))$$

Результат подстановки будет вычислим с помощью программы-запроса:

$$[H(x_1, \dots, x_n, y)]$$

После выполнения программы переменная y хранит значение функции.

Схема определения через рекурсию выглядит следующим образом:

$$h(x_1, \dots, x_n, 0) = f(x_1, \dots, x_n),$$

$$h(x_1, \dots, x_n, y + 1) = g(x_1, \dots, x_n, y, h(x_1, \dots, x_n, y)).$$

Пусть в нашем языке функции:

$$f(x_1, \dots, x_n),$$

$$g(x_1, \dots, x_n, y, z)$$

вычислимы с помощью формул:

$$F(x_1, \dots, x_n, w)$$

$$G(x_1, \dots, x_n, y, z, v)$$

Определим $n + 2$ -местный предикат H следующим образом:

$$H(x_1, \dots, x_n, y, u)_{\text{def}} \equiv ((y = 0) \& F(x_1, \dots, x_n, u)) \vee (\neg(y = 0) \& \exists t s (\text{Next}(t, y) \& H(x_1, \dots, x_n, t, s) \& G(x_1, \dots, x_n, t, s, u)))$$

Значение функции $h(x_1, \dots, x_n, y)$ вычисляется с помощью программы-запроса:

$$[H(x_1, \dots, x_n, y, u)]_u$$

После выполнения программы переменная u хранит значение функции.

Покажем теперь, что в нашем языке вычислимы не только примитивно рекурсивные, но и все рекурсивные функции. Для этого достаточно показать, что функции, определяемые посредством оператора минимизации, вычислимы. Определение посредством оператора минимизации выглядит следующим образом:

Для каждой функции $f(x_1, \dots, x_n, y)$

$$\mu y(f(x, y)) = \begin{cases} \text{наименьший } y, \text{ такой, что} \\ (i) f(x, z) \text{ определено для всех } z \leq y \text{ и} \\ (ii) f(x, y) = 0, \text{ если такой } y \text{ существует,} \\ \text{не определено в противном случае} \end{cases}$$

Пусть в нашем языке функция $f(x, y)$ вычислима посредством формулы: $F(x, y, u)$. Определим бинарный предикат M :

$$M(x, y)_{\text{def}} \equiv F(x, y, 0) \& \forall z ((z \geq y) \vee \neg F(x, z, 0))$$

Значение функции $\mu y(f(x, y))$ вычисляется с помощью программы-запроса:

$$[M(x, y)]_y$$

После выполнения программы переменная y хранит значение функции.

Если бы мы захотели реализовать этот язык в виде языка программирования, нам пришлось бы наложить некоторые ограничения на вид программ-запросов. Так, нам пришлось бы запретить положительные вхождения кванторов всеобщности и отрицательные вхождения кванторов существования. С другой стороны, мы могли бы расширить язык ограниченными кванторами, которые могут иметь произвольные вхождения, если область их квантификации конечна. В результате такой модификации языка мы получили бы в точности язык семантического программирования (Σ -программирования), концепция которого была выдвинута и изучается в работах новосибирских логиков.

Перейдем теперь ко второму подходу, когда отношение достижимости определяется на множестве интерпретаций языка в фиксированной области. При этом мы сперва рассмотрим случай бескванторного исчисления предикатов.

Язык $\mathcal{L}_3$ состоит из:

1. Var - множество индивидуальных переменных.
2. $Func$ - множество функциональных символов.
3. $Pred \cup \{=\}$ - множество предикатных символов.
4. $\&, \vee, \rightarrow, \neg$ - логические связки.
5. $[,], (,)$ - скобки.

Определим множество $Term$ термов.

1. $Var \subseteq Term$.
2. Если $t_1, \dots, t_n \in Term$ и $f^n \in Func$, то $f^n(t_1, \dots, t_n) \in Term$.
3. Ничто другое термом не является.

Определим множество BF булевых формул.

1. Если $P^n \in Pred$ и $t_1, \dots, t_n \in Term$, то $P^n(t_1, \dots, t_n) \in BF$.
2. Если $A, B \in BF$, то и $\neg A, (A \& B), (A \vee B) \in BF$.
3. Ничто другое булевой формулой не является.

Определим множество FM формул.

1. $BF \subseteq FM$.
2. Если $t_1, t_2 \in Term$, то $t_1 = t_2 \in FM$.
3. Если $A \in FM, B \in FM$, то $[A]B \in FM$.
4. Если $A, B \in FM$, то и $\neg A, (A \& B), (A \vee B), (A \rightarrow B) \in FM$.

5. Ничто другое формулой не является.

Интерпретацией термов и булевых формул нашего языка в непустом множестве M будем называть всякую функцию i , которая определена на множестве $Func \cup Pred \cup Term \cup BF$ и удовлетворяет следующим условиям:

1. Если $x \in Var$, то $i(x) \in M$.
2. Если $f^n \in Func$, то $i(f^n) \in M^{M \times n}$.
3. Если $P^n \in Pred$, то $i(P^n) \in \{0,1\}^{M \times n}$.
4. Если $t_1, \dots, t_n \in Term$ и $f^n \in Func$, то $i(f^n(t_1, \dots, t_n)) = i(f^n)(i(t_1), \dots, i(t_n))$.
5. Если $t_1, \dots, t_n \in Term$ и $P^n \in Pred$, то $i(P^n(t_1, \dots, t_n)) = i(P^n)(i(t_1), \dots, i(t_n))$.
6. $i(\neg A) = 1 - i(A)$
7. $i(A \& B) = \min(i(A), i(B))$.
8. $i(A \vee B) = \max(i(A), i(B))$.

Моделью для нашего языка будем называть пару $M = \langle M, I \rangle$, где M - непустое множество индивидов, а I - множество всех интерпретаций термов и булевых формул нашего языка в множестве M . Посредством $i \sim_{P(t)} j$ мы будем обозначать тот факт, что интерпретации i и j отличаются возможно лишь интерпретацией предикатного символа P . Причем для любого индивида $a \in M$ отличного от $j(t)$ $i(P)(a) = j(P)(a)$.

Определим функцию $[] : BF \rightarrow 2^{1 \times 1}$, которая сопоставляет булевым формулам отношение достижимости на множестве I .

1. $i[P^n(t_1, \dots, t_n)]j \Leftrightarrow i \sim_{P(t_1, \dots, t_n)} j, i(P^n(t_1, \dots, t_n)) = 1, j \in I$
2. $i[A \vee B]j \Leftrightarrow i[A]j$ или $i[B]j$.
3. $i[A \& B]j \Leftrightarrow (i[A] \circ [B]j, j(A) = 1)$ или $(i[B] \circ [A]j, j(B) = 1)$.
4. $i[\neg \neg A]j \Leftrightarrow i[A]j$.
5. $i[\neg(A \& B)]j \Leftrightarrow i[\neg A \vee \neg B]j$.
6. $i[\neg(A \vee B)]j \Leftrightarrow i[\neg A \& \neg B]j$.

Определим отношение M, i

$\models A$ - "в модели M при интерпретации i истинна формула A ".

$$M, i \models P^n(t_1, \dots, t_n) \Leftrightarrow i(P^n(t_1, \dots, t_n)) = 1$$

.....

$$M, i \models [A]B \Leftrightarrow \forall j \in I (i[A]j \Rightarrow M, j \models B).$$

Формула A общезначима е. и т.е. $\forall M \forall i (M, i \models A)$.

Класс общезначимых формул аксиоматизируем посредством аксиом и правил вывода классической логики высказываний плюс следующих аксиом и правила вывода:

- Ax.1 $[A](B \rightarrow C) \rightarrow ([A]B \rightarrow [A]C)$
 Ax.2 $[\neg \neg A]B \leftrightarrow [A]B$
 Ax.3 $[A \vee B]C \leftrightarrow ([A]C \& [B]C)$
 Ax.4 $[A \& B]C \leftrightarrow ([A][B](A \rightarrow C) \& [B][A](B \rightarrow C))$
 Ax.5 $[\neg(A \vee B)]C \leftrightarrow [\neg A \& \neg B]C$
 Ax.6 $[\neg(A \& B)]C \leftrightarrow [\neg A \vee \neg B]C$
 Ax.7 $([A]B \& [A]C) \rightarrow [A](B \& C)$
 Ax.8 $[P^n(t_1, \dots, t_n)]A \leftrightarrow \neg[P^n(t_1, \dots, t_n)]\neg A$
 Ax.9 $[P^n(t_1, \dots, t_n)](A \vee B) \rightarrow [P^n(t_1, \dots, t_n)]A \vee [P^n(t_1, \dots, t_n)]B$
 Ax.10 $[P^n(t_1, \dots, t_n)]Q^m(t'_1, \dots, t'_m) \leftrightarrow Q^m(t'_1, \dots, t'_m) \quad P \neq Q$
 Ax.11 $[P^n(t_1, \dots, t_n)]P^n(t'_1, \dots, t'_n) \leftrightarrow (\&_{k=1}^n t_k = t'_k) \vee \vee P^n(t'_1, \dots, t'_n)$
 Ax.12 $[\neg P^n(t_1, \dots, t_n)]P^n(t'_1, \dots, t'_n) \leftrightarrow (\vee_{k=1}^n t_k \neq t'_k) \& \& P^n(t'_1, \dots, t'_n)$

$$\vdash A \rightarrow B$$

$$\vdash [A]B$$

В какой области может найти применение построенная нами логика? В качестве примера можно привести проблему планирования и выполнения действий. Допустим, что речь идет о выполнении действий в мире кубиков. Пусть в языке имеется бинарный предикатный символ ЛЕЖИТ_НА.

Предложение ЛЕЖИТ_НА(кубик1,кубик2) истинно е. и т.е. кубик1 лежит на кубике2. Допустим, что в настоящий момент это предложение истинно. Если мы теперь снимем кубик1 с кубика2, то наше предложение станет ложным. Это произойдет вследствие того, что изменится интерпретация предикатного символа ЛЕЖИТ_НА. При новой интерпретации пара <кубик1,кубик2> уже не будет принадлежать области истинности предиката.

ЛИТЕРАТУРА

1. Агафонов В.Н., Борщев В.Б., Воронков А.А. Логическое программирование в широком смысле// Логическое программирование. М., 1988.

ПОНЯТИЕ ПОНЯТИЯ¹

1. Введение

Мышление есть понятийная деятельность. Можно было бы поэтому сказать, что никогда не уменьшится значимость главы "Понятие" в учебниках по логике. Однако, напротив, современные учебники по логике полностью избегают темы "Понятие". Если в традиционных учебниках была схема "Понятие - Суждение - Умозаключение", то в большинстве современных учебников используется схема "Формальные системы: Теория доказательства (Синтаксис), Теория моделей (Семантика)", а то, что сохранилось от главы "Понятие", в лучшем случае составляет главу об определении.

Такое развитие событий можно объяснить разными причинами; не все, что связано с так называемой "математической", или "символической", логикой заслуживает немедленного одобрения - серьезнейшую ее критику можно найти в [6].

Одна из мотиваций отказа от темы "Понятие" состоит в том, что ее традиционная трактовка часто связывалась с психологизмом [5]. Платонистская концепция понятия вышла из моды, и его стали трактовать как своего рода ментальную сущность. С другой стороны, немецкая спекулятивная философия (Гегель и пр.) скорее запутала, чем прояснила понятие понятия.

К счастью, логическая реакция на создавшуюся ситуацию была реализована такими логически и философски великолепными фигурами, как Больцано, Мейнонг, в некотором отношении также Гуссерль и, конечно, Фреге.

Первым и, быть может, самым выдающимся из них был Больцано; его и Фреге концепции понятия будут кратко обсуждены здесь. Затем мы сопоставим две важнейшие альтернативные логические концепции понятия, и заключительный параграф будет посвящен транспарантной интенциональной логике Тихого как наиболее адекватному средству логической трактовки понятий.

2. Больцано

Общее в концепциях Больцано, Фреге и Тихого то, что все они - платонистские концепции. Именно благодаря этой особенности все эти логики не испытывали затруднений в понимании понятий как нементальных сущностей. Поэтому все они автоматически защищены от опасности психологизма и вытекающего из него разрушительного проникновения в логику эмпирического фактора.

¹ Пер. с англ. А.Л.Блинова

Ключевое понятие, на основе которого Больцано определяет понятие, - это понятие "предложения в себе" ("Satz-an-sich", см. [2] в связи с нижеследующим текстом). Если предложение есть языковое выражение или - когда его мыслят - ментальная сущность, то предложение-в-себе - это то, что остается от предложения, когда мы не заботимся об акте произнесения, написания или мышления данного предложения. Должно быть ясным, что нечто остается и одиозный платонизм - на самом деле очень согласующийся с интуицией и естественный базис для такого анализа. Результат этой абстракции Больцано - это, очевидно, то, что данное предложение имеет общего со всеми его переводами на другие языки; это та сущность, о которой есть данное предложение.

Вопрос же "Что это за сущность, о которой есть предложение?" - это один из самых фундаментальных вопросов логической семантики естественного языка. Иными словами, теория Больцано принадлежит к обширному классу теорий значения.

Решающее значение здесь имеет то, что Больцаново предложение-в-себе структурировано, т.е., вообще говоря, оно состоит из частей ("Bestandtheile"). Нет нужды подчеркивать, что предложение-в-себе, будучи внеязыковым, не может состоять из языковых частей. Таким образом, составные части больцанова предложения-в-себе лучше всего понимать как значения, как мы теперь сказали бы, осмысленных частей данного предложения. Эти составные части, которые сами не являются предложениями-в-себе, Больцано называет "Vorstellungen an sich" (можно сказать, "идеи"). Грубо говоря, есть два рода идей. Идеи, которые просты (не имеют составных частей) и касаются в точности одного объекта, причем этот объект есть некоторое конкретное "изменение нашей души", причиненное некоторым восприятием ("Это, которое красно"), называются "Anschauungen" (можно сказать "образы"). Остальные же идеи - это как раз и есть понятия ("Begriffe").

Понятия часто суть понятия о некоторых объектах, но не всегда. Есть "безобъектные" понятия, которые не являются понятиями о каком-либо объекте - по причине такой комбинации их частей, которая возможна, но (как бы мы сказали) семантически противоречива (такие "воображаемые понятия", как "круглый квадрат"), или по причине эмпирических обстоятельств ("стеклянная гора"). Таким образом, Больцано допускает не только всеобщие понятия (многие современные ему логики признавали только их, считая, что всеобщность - существенное свойство понятий); есть также "пустые" понятия и "индивидуальные" понятия, т.е. понятия в точности об одном объекте. Для непустых понятий Больцано определяет то, что мы сейчас назвали бы "экстенционалами" ("Umfang"); грубо говоря, это - множество объектов, о которых есть данное понятие.

Сегодня мы, конечно, знаем, что "экстенционал" зависит от состояния мира в данный момент времени, но зависимость от возможных миров была скрыта от Больцано (никакое влияние Лейбница в этом отношении недоказуемо, [8]), а зависимость от вре-

мени он исключал эксплицитно, поскольку экстенсионал для него вневременен в том смысле, что он включает в себя каждый объект, попадающий под рассматриваемое понятие в какой бы то ни было момент времени (так, что экстенсионал понятия *человек* состоит из всех прошлых, настоящих и будущих людей).

Чрезвычайно интересно понятие "Inhalt" понятия (может быть, "содержание", если мы хотим избежать термина "интенсионал" в его традиционном расплывчатом употреблении). Поскольку понятие, вообще говоря, сложно, т.е. состоит из более, чем одной части, некоторые могут быть также понятиями или даже предложениями-в-себе, Больцано определяет содержание понятия как множество (collection) этих частей, независимо от способа, каким они взаимосвязаны. Так, содержание понятия *ученый сын неученого отца* тождественно понятию *неученый сын ученого отца*, хотя эти понятия различны.

Это общее понятие содержания гораздо интереснее, чем традиционное, согласно которому содержание понятия - это, грубо говоря, перечень так называемых существенных свойств (атрибутов) объектов, подпадающих под данное понятие. Больцано показывает, что это понятие содержания существенно отличается от традиционного; между прочим, его концепция дала ему возможность отбросить традиционное учение об "обратном отношении" между "экстенсионалом" (объемом) и содержанием.

Больцано доказал целый ряд утверждений о понятиях; они выходят далеко за рамки того, чему учит традиционная доктрина (поддерживаемая, главным образом, логикой Пор-Рояля). В разделе 4 мы увидим, почему его теория плодотворна.

3. Фреге

Мы уже говорили, что и Фреге был платонистом. В этом отношении для него было характерно различие между языковыми выражениями и их значениями. Здесь мы не будем касаться истории различения им "смысла" и "референции"; что же касается понятий, он считал их значениями "предикативных" выражений. Таким образом, объект не может быть предиктирован относительно чего бы то ни было, а понятие, как его определял Фреге, есть то, что может быть предиктировано.

Есть по меньшей мере две проблемы, которые Фреге не в состоянии решить. Во-первых, по необходимости для Фреге трудна ситуация, когда одно понятие предиктируется в отношении другого. Его решение ("пример с лошастью", [5]) неудовлетворительно. На самом деле мы должны понимать, что в распоряжении Фреге не было теории типов ни в какой форме - по меньшей мере, когда он начинал формулировать свою концепцию понятия. Что касается второй проблемы, Фреге в [4] рассматривает арифметические выражения (" $2 \times 2^3 + 2$ ") и пытается показать, что все выражения, представляющие одно и то же число, ассоциируются с одним и тем же значением. Отвлекаясь от того, что мы не можем говорить о

"предикативном характере" таких выражений, мы должны видеть, что Больцано считал бы, что таким выражениям соответствуют различные понятия: он был более последовательным в своем платонизме. С другой стороны, концепция Фреге в этом отношении не была неизменной: он колебался между концепцией понятия как (платонистски) неструктурированной и (платонистски) структурированной сущностью [6].

4. Понятие: структурированный или неструктурированный объект

Дать экспликацию термина - это, в хорошо известном карнаповом смысле, значит определить этот термин в соответствии с некоторым интуитивным пониманием этого термина.

Какую интуицию мы связываем с термином "понятие"?

Кажется, что понятия должны помогать нам идентифицировать объекты в соответствии с некоторым критерием. Так, понятие *кот* должно идентифицировать свойство "кот-ости" - 1-я точка зрения; со 2-ой точки зрения, само свойство "кот-ости" идентифицирует отдельные объекты, т.е. индивиды, которые - при данных обстоятельствах - оказались котами.

Эта вторая точка зрения выглядит довольно привлекательной и может быть охарактеризована с помощью следующего принципа:

Понятия суть интенционалы.

Ясно, что это - концепция Черча. Даже если мы не принимаем точку зрения Черча, в соответствии с которой пропозиции являются разновидностью понятия, мы можем сказать:

Понятия суть интенционалы, не являющиеся пропозициями.

Таким образом, индивидные концепты (*Президент США*), свойства (*кот*, или *быть котом*), отношения в интенциональном смысле (*любить*) суть примеры понятий.

Интенциональные логики - поскольку они используют понятие возможных миров - определяют интенционалы как функции, область задания которых есть множество возможных миров W . Стало быть, индивидные концепты отображают W в предметную область U , свойства индивидов отображают W в множества всех подмножеств области U , n -местные отношения в интенциональном смысле отображают W в множество всех подмножеств множества U^n и т.д. (Можно учитывать зависимость инстансов понятия от времени: если "хронология" - это произвольное отображение из множества временных точек, то интенционалы будут отображениями из W в множество соответствующих хронологий.)

Как ни привлекательна эта концепция, она не может решить некоторые важные семантические проблемы - так называемые проблемы Парадокса анализа [1]. Эти проблемы связаны с "концептуальными" (или "понятийными") установками, и их можно также рассматривать как проблемы, связанные с пропозициональными установками. Рассмотрим в качестве примера следующий вывод:

Чарльз полагает, что $2 = 2$.

Первое простое число есть 2.

Чарльз полагает, что первое простое число есть 2.

В этом выводе используется подстановочная схема, которая, несомненно, валидна:

	$F[a]$	формула F содержит термин " a "
	$b = a$	
(S)	----	
	$F[b]$	

Однако ясно, что (S) некорректно. Почему же в данном случае нельзя использовать правильную схему (S)?

Если понятие = интенционал, то понятие первого простого числа есть "пустой" ("vacuous") интенционал, ассоциирующий каждый возможный мир с числом 2. Полагание Чарльза, как это видно из заключения вывода (1), зависит от его установки по отношению к понятию *первое простое число*. Если это понятие есть упомянутый выше пустой интенционал, то ничто не мешает ему вывести указанное выше заключение: (понятие числа) 2 и *первое простое число* суть одно и то же понятие в соответствии с нашим отождествлением понятий с интенционалами. Тогда остается один выход: отказаться от этого отождествления. *Понятия не суть интенционалы.*

Обдумывая неудовлетворительность этого отождествления, мы можем заметить, что использование понятий предполагает использование некоторых шагов, заданных структурой данного понятия. Но интенционалы суть отображения, т.е. у них отсутствует структура. Из (пустого) отображения $W \rightarrow 2$ мы не можем увидеть, что на самом деле имеет в виду понятие *первое (натуральное) число, имеющее в точности два делителя*. Структура этого понятия не отражена отображением самим по себе.

Теперь мы заговорили о "структуре понятия". Возвращаясь к началу этого параграфа, мы теперь исследуем 1-ю точку зрения, в соответствии с которой понятие, скажем, *кот*, идентифицирует (или: детерминирует) свойство "кот-ости". Из этой экспликации выясняется, что интенционалы (индивидуальные 'концепты', свойства, отношения в интенциональном смысле и т.д.) - это нечто такое, что мы получаем только благодаря соответствующим понятиям.

Таким образом, скорее о больцановской, чем о фрегеовой концепции можно сказать, что она может решить даже парадокс анализа.

Итак, выбрав принцип:

Концепты суть конструкции объектов (включая интенционалы)

(с возможным ограничением объектами, отличающимися от истинностных значений и пропозиций), мы получаем возможность решить следующую проблему:

Вторая посылка схемы (S) соответствует второй посылке вывода (1): рассматриваемое тождество утверждает, что понятие *первое простое число* конструирует то же самое число, что и понятие *два*. Однако эта посылка не утверждает, что эти понятия тождественны. Поскольку полагание включает в себя некоторую установку по отношению к понятиям, а в нашем случае это установка Чарльза по отношению к понятию *два* и его установка по отношению к понятию *первое простое число* в заключении, отсутствует связующее звено между посылками и заключением : схема (S) не может быть применена, потому что "b" во второй посылке отлично от "b" в заключении. На самом деле, при создании неправильного вывода (1) была применена правильная схема fp

$$\begin{array}{l} F[a] \\ b = a \\ \hline F[b'] \quad (b' \neq b) \end{array}$$

Это объяснение интуитивно также и в том смысле, что оно не использует развитый логический аппарат. В последнем, 5-м, разделе, мы лишь вкратце охарактеризуем принципы транспарантной интенциональной логики, которая и обеспечивает адекватный аппарат.

5.Транспарантная интенциональная логика (ТИЛ)

Первый вариант ТИЛ, сформулированный в многочисленных статьях Павла Тихого [7], может быть назван первопорядковым вариантом. В его основании лежит модификация простой теории типов, и он работает с транспарантно понимаемыми лямбда-терминами. Типы определяются как порождаемые множеством элементарных типов, являющихся попарно непересекающимися базовыми коллекциями; сложные типы суть индуктивно определяемые множества (всюду определенных) и частичных функций, отображающих n -ки элементов типов $T_1, \dots, T_n$, соответственно, в тип T_0 ; такие типы обозначаются $(T_0 \ T_1 \dots T_n)$. Для целей логического анализа естественного языка элементарные типы таковы:

i (йота; предметная область, элементы - индивиды),

o (омикрон; множество истинностных значений $\{T, F\}$),

τ (тау; множество временных точек, также действительных чисел),

ω (омега; логическое пространство, элементы - возможные миры).

Ключевое понятие ТИЛ, уже в его первом варианте, - это понятие конструкции. Конструкции определяются индуктивно: атомы суть объекты (всегда элементы какого-либо типа) и переменные (любого типа). Применение (или: композиция) Y к $X_1, \dots, X_n$ (обозначаемая $[YX_1 \dots X_n]$) либо неправильно, т.е. не конструирует

никакого объекта; например, применения функции деления к любой паре, второй элемент которой - 0, либо дает в результате значение функции, конструируемой с помощью $X_1, \dots, X_n$. Абстракция (или: замыкание) $\lambda x_1 \dots x_n u$ конструирует функцию с n -ками объектов (порождаемых всеми оцениваниями) в качестве аргументов, которая дает в результате для произвольной n -ки значение (если таковое существует), которое конструируется с помощью Y после подстановки элементов данной n -ки вместо произвольного вхождения x_i в Y .

Это только приблизительное воспроизведение точных определений, которые можно найти, например, в [7]. Важно, что конструкции не суть соответствующие лямбда-термины: последние обозначают первые ("транспарантность").

Интенционалы суть $((\alpha\tau)\omega)$ - объекты, т.е. функции, определенные на возможных мирах и выдающие на выходе хронологии данного типа α . Так, пропозиции суть $((o\tau)\omega)$ - объекты, свойства индивидов суть $((o(i)\tau)\omega)$ - объекты и т.д. Таким образом, в этом 1-м варианте ТИЛ отношение полагания было бы $((o(i)((o\tau)\omega))\tau)\omega$ - объектом (сокращенная нотация делает ω и τ нижними индексами: $(o(i)o\tau\omega)\tau\omega$), т.е. функцией, которая в мире W_i в момент времени t дает на выходе некоторое отношение (в экстенциональном смысле) между индивидами и пропозициями. Стало быть, этот вариант не может решить нашу проблему.

Основной недостаток 1-го варианта состоит в том, что в нем конструкции могут конструировать только объекты (в сущности, любого типа). 2-й вариант (см [6]) основан на некоторой модификации разветвленной теории типов. Атомами являются только переменные (произвольного типа). Объекты более не являются атомарными конструкциями - они конструируются посредством особой конструкции "тривиализации" (0_X конструирует X , где X - произвольный объект). Другие конструкции суть "исполнение" (1_X конструирует то, что конструируется посредством X ; если X не является конструкцией, то 1_X некорректно), "двойное исполнение", смысл очевиден), композиция и замыкание. Тогда типы определяются так, чтобы избежать порочного круга: первопорядковые типы суть те, что были определены выше, тогда определены конструкции n -ого порядка, и типы $n+1$ -ого порядка содержат коллекцию конструкций n -ого порядка и всех типов n -ого порядка. Таким образом, обозначив тип конструкций n -ого порядка $*n$, мы бы теперь ассоциировали отношение полагания с типом $(0 \ i \ *i)\tau\omega$.

Этот беглый обзор основных инструментов ТИЛ не может заменить систему точных определений и теорем. Мы хотели лишь охарактеризовать философию и средства, используемые в ТИЛ.

Именно второй вариант ТИЛ дает нам возможность получить соответствующую интуиции и поддающуюся логической трактовке экспликацию термина "понятие":

Понятия суть конструкции,
или, если угодно, *Понятия суть α -конструкции, где $\alpha \neq 0$ и $\alpha \neq 0_{\tau\omega}$.*

Примечание. Билер в [1], используя совершенно иной подход, приходит к экспликации, которая, в сущности, тождественна нашей.

Приложение.

Нетрудно получить конструкцию, соответствующую понятию *первое простое число* (или: являющуюся этим понятием). Пусть "*Fp*" - сокращенное обозначение этой конструкции. Далее, пусть *w*, *t* - ω -, τ - переменная, соответственно; *B* - отношение полагания; *Ch* - индивид Чарльз; = - отношение тождества (типы их очевидны). Тогда неправильный вывод (1) анализируется следующим образом ("*B_{wt}*" обозначает "*[[Bw]^t]*":

$$\frac{\lambda w \lambda t [\circ B_{wt} \circ Ch [\circ = \circ^2 \circ^2]]}{[\circ = {}^1Fp \circ^2]} \\ \lambda w \lambda t [\circ B_{wt} \circ Ch \circ [\circ = {}^1Fp \circ^2]]$$

Вторая посылка не оправдывает подстановки 1Fp вместо $\circ^2$ в первой посылке: установка Чарльза направлена на конструкцию, а не на конструируемый объект. В самом деле, если бы вторая посылка была анализируема как

$$[\circ = \circ({}^1Fp) \circ^2],$$

то подстановка была бы оправдана. Однако такой анализ был бы адекватен, если бы вторая посылка вывода (1) означала: *быть числом, которое есть первое простое число* - это то же понятие, что и *два*, что, конечно, на самом деле не имеет места.

Прага, сентябрь 1990

ЛИТЕРАТУРА

1. Bealer G. Quality and concept. Oxford, 1982.
2. Bolzano B. Wissenschaftslehre. Sulzbach, 1837
3. Church A. Introduction to Mathematical Logic 1. Princeton, 1956
4. Frege G. Function und Bedeutung. Vandenhoeck et Ruprecht, Göttingen. 1966. S.17-39
5. Über Begriff und Gegenstand. Ibidem. S.66-81
6. Tichy P. The Foundations of Frege's Logic. De Gruyter. 1988
7. The Logic of Temporal Discourse //Linguistics and Philosophy. 1980, N4. P.343-369
8. Sebestik J. The construction of Bolzano's Logical System //"Bolzano's Wissenschaftslehre", an International Workshop. Firenze, 1987.

СИСТЕМА ИНТЕРАКТИВНОГО ДОКАЗАТЕЛЬСТВА ТЕОРЕМ*

В настоящей статье описана система интерактивного поиска доказательства *Deductio*. Она позволяет строить доказательства, гарантируя их корректность. При этом пользователю доступны различные средства автоматизации.

Подобного рода проекты активно развиваются сейчас в различных научных центрах. Но описываемая здесь система обладает той особенностью, что она рассчитана на работу не с одной какой-либо логической системой, а с довольно широким их классом. Для этого используется специальный язык описания логических систем. И как только некоторая логическая система описана в терминах этого языка, она поддерживается программой.

Описываемая здесь система реализована для IBM PC - совместимых компьютеров. Разработка осуществлена при содействии Института Логики, Когнитологии и Развития Личности. В ней, кроме автора настоящей статьи, участвовали А.А.Фокин, А.Е.Новодворский, А.В.Михалев, а также В.А.Смирнов, обеспечивший теоретико-логическую поддержку разработок.

В основе системы *Diductio* лежит понятие вывода. Но обычно используемое понятие вывода как последовательности формул, каждая из которых либо является аксиомой, либо получена из предыдущих по правилам вывода, не соответствует структуре, возникающей при поиске доказательства человеком. (А наша система рассчитана на совместный человеко-машинный поиск доказательства.) "Человеческое" доказательство обычно не является линейным. Оно содержит вспомогательные доказательства, обычно называемые леммами. При этом происходит сведение решаемой задачи к некоторым другим подзадачам, которые решаются как бы независимо. Этой структуре соответствует понятие субординатного вывода (см 1,2). Субординатный вывод - это последовательность формул и вспомогательных выводов. Такая структура представляется нам достаточно гибкой для работы с различными логическими системами. Итак, под выводом мы понимаем последовательность формул и вспомогательных выводов, где каждая формула получена из предшествующих формул и выводов по правилам вывода. Вспомогательный вывод также может содержать вспомогательные

* Работа выполнена при поддержке Российского Фонда фундаментальных исследований, грант 93-06-10708.

выводы. В процессе построения вывода мы оперируем с конструкцией, которая до завершения доказательства выводом не является, будем ее называть деревом поиска вывода.

Набор допустимых правил вывода определяется выбором логической системы. Дерево поиска вывода может также содержать объект, который мы будем называть "дыркой" и обозначать "|-". Это та самая "дыра" в доказательстве, в удалении которой и состоит задача построения доказательства. Она как бы отделяет уже доказанные формулы от той, которую требуется доказать. Процедура поиска доказательства можно считать завершенной, если построен вывод, не содержащий "дырок".

По отношению к формулам, входящим в вывод, могут быть применены те или иные правила вывода. Но при работе с системой вложенных выводов возникает вопрос, какие формулы из числа уже доказанных можно использовать при работе с некоторым фиксированным выводом. Мы будем считать, что допустимо использование тех формул, которые входят в вывод, с которым мы работаем, а также всех тех посылок, использование которых допустимо в старшем по отношению к нему выводе. Таким образом, действует своего рода "правило наследования посылок", в соответствии с которым в лемме могут использоваться предположения, сделанные в теореме, но не наоборот. В ряде логических систем "правило наследования посылок" может быть более сложным - но для нас важно наличие такого правила: *Deductio* всегда будет следить за тем, чтобы использовались только посылки, которые допустимо использовать в данном выводе (подвыводе). При работе в *Deductio* пользователь видит визуализацию вывода в одном из окон на экране :

2	$\forall x A(x)$	
4	$A(t1)$	
6	$\neg \exists z A(z)$	
5	-	
7	$A(t2)$	
6	$\neg \exists z A(z)$	

Вывод может быть визуализирован различными способами - в зависимости от привычек и вкуса пользователя, но это подробнее будет описано позже.

Пожалуй, теперь пора привести пример построения вывода с помощью Deductio. В качестве логической системы мы выбираем NEC, она подробно описана в сборнике "Логика и компьютер", впрочем мы будем указывать каждый раз, какое правило вывода применяется. Попробуем вывести формулу

из пустого набора посылок.

Сначала надо ввести исходные данные. Для этого, нажав клавишу <Esc>, войдем в меню и выберем <UTILITY>, а затем <Clear>. Клавишей <Пробел> вывираем строку заключения, набираем формулу¹ $((A \supset B) \supset A) \supset A$ и нажимаем <Enter>. Клавишей <Esc> выходим из режима ввода данных. Вот что появляется на экране:

1 | - 

2 $((A \supset B) \supset A) \supset A$

1 | -

¹ Для набора формулы можно дополнительно использовать функциональные клавиши (в том числе в сочетании с регистровыми клавишами Shift, Ctrl, Alt). Символы, соответствующие функциональным клавишам, высвечиваются в нижней строке экрана.

Итак, в верхнем окне высвечивается следующая фигура поиска вывода:

1 |-
2 ((A $\supset$ B) $\supset$ A) $\supset$ A

Выбираем правило $\supset_{-ai}$ $\frac{\Gamma, A|-B}{\Gamma|-A \supset B}$. К каким формулам его

применять, указывать не надо, так как для Deductio ясно из контекста, что в качестве "A $\supset$ B" надо взять формулу ((A $\supset$ B) $\supset$ A) $\supset$ A, поскольку именно она стоит после "дырки". Вывод на экране теперь принимает вид:

1 $\rightarrow$?
2 ((A $\supset$ B) $\supset$ A) $\supset$ A $\supset_{-ai,1}$

Это означает, что для доказательства формулы (2) надо построить некоторый вспомогательный вывод (1). Поставленная перед нами задача сведена к подзадаче. Поэтому в анализе формулы (2) записано, что она получена по правилу $\supset_{-ai}$ из подвывода (леммы)(1). Но лемма еще не доказана. Об этом говорит и обозначение " $\rightarrow$?". Как только мы докажем лемму, его заменит " $\rightarrow$ +".

Теперь, как принято говорить, "рассмотрим лемму (1)". Для этого установим курсор на этой строке и нажмем <Ins>². (Если захотим вернуться на прежний уровень, то надо будет нажать . Тогда мы выйдем из подвывода на предыдущий уровень.) В качестве текущей задачи теперь стоит построение подвывода, который и выводится на экран:

лемма (1): 3 (A $\supset$ B) $\supset$ A assumption (допущение)
4 |-
5 A

Применим правило $\supset_{-ae}$: . Получаем:

лемма (1): 3 (A $\supset$ B) $\supset$ A assumption
4 $\rightarrow$?
6 $\rightarrow$?
5 A $\supset_{-e, 3,4,6}$

Доказательство леммы (1) распалось на две подзадачи, соответственно на леммы (4) и (6).

Рассмотрим подвывод (4) (т. е. войдем в этот подвывод).

лемма (4) 3 (A $\supset$ B) $\supset$ A assumption
7 |-A assumption
8 |-
9 A $\supset$ B

²Здесь, как и во всех прочих местах, можно использовать "мышь", нажав дважды на левую кнопку.

Формула (3) "досталась по наследству" от старшего вывода, формула (7) является допущением текущего подвывода, а доказать надо (9).

Странная на первый взгляд нумерация формул объясняется тем, что формулы получают номера в порядке своего появления. Впрочем, можно произвести перенумерацию формул (и, соответственно, ссылок на них в анализе), воспользовавшись командой <Renum> из меню <Utility>. Но для нас номера формул нужны в первую очередь в качестве имен, по которым мы указываем формулы в анализе.

Применим теперь правило $\supset_ai$, описанное выше, и получим:

лемма (4) 3 $(A \supset B) \supset A$ assumption
 7 $\neg A$ assumption
 8 $\rightarrow?$
 9 $A \supset B$ $\supset_i, 8$

Таким образом, искомый вывод сводится к лемме (8) :

лемма (8) 3 $(A \supset B) \supset A$ assumption
 7 $\neg A$ assumption
 10 A assumption
 11 $\mid$ -
 12 B

где формулы (3) и (7) "достались по наследству", а (10) -

допущение леммы (8). Теперь по правилу $\perp_si$:

получаем: $\Gamma, A, \neg A \mid - \Delta$

лемма (8) 3 $(A \supset B) \supset A$ assumption
 7 $\neg A$ assumption
 10 A assumption
 13 $\perp$ - $\perp_i, 10, 7$
 11 $\mid$ -
 12 B

При применении последнего правила вывода Deductio необходимо также знать, к каким формулам правило применяется. Это указание осуществляется установкой курсора на соответствующих формулах. Теперь в лемме (8) мы имеем противоречие, позволяющее завершить ее доказательство,

применив правило $\perp_del_2$: $\frac{}{\Gamma, \perp \mid - \Delta}$

лемма (8) 3 $(A \supset B) \supset A$ assumption
 7 $\neg A$ assumption
 10 A assumption
 13 $\perp$ $\perp_i, 10, 7$
 12 B $\perp_del_2, 13$

Лемма (8) теперь не содержит "дырки", все входящие в нее формулы доказаны, и лемма доказана.

Остается доказать лемму (6).

лемма (6): 3 $(A \supset B) \supset A$ assumption
 14 A assumption
 15 |-
 16 A

Здесь требуется доказать то, что известно нам из допущения, поэтому доказательство леммы завершается автоматически.

лемма (6): 3 $(A \supset B) \supset A$ assumption
 14 A assumption
 16 A equ, 14

Тем самым доказана и "основная" теорема - формула (2). Теперь воспользуемся визуализацией, показывающей всю систему вложенных подвыводов, т. е. все доказательство в целом.

3		$(A \supset B) \supset A$	assumption
7		$\neg A$	assumption
10		A	assumption
13		$\perp$	$\perp_i, 10, 7$
12		B	$\perp_{del_2}, 13$
9		$A \supset B$	$\supset_i, 10-12$
14		A	assumption
16		A	equ, 14
5		A	$\supset_e, 3, 7-9, 14-16$
2		$((A \supset B) \supset A) \supset A$	$\supset_{ai}, 3-5$

Как нетрудно увидеть, лемма (1) - это формулы с 3 по 5, лемма (4) - с 7 по 9 и т. д.

Этот пример, на наш взгляд, дает некоторое представление о характере работы Deductio с выбранной логической системой. В дальнейшем будет предложен ряд примеров построения выводов в других логических системах.

Остановимся теперь на средствах описания правил вывода. Но перед этим необходимо уточнить, что понимается под формулой, входящей в вывод.

Используемый язык допускает следующие типы знаков:

ind. var	индивидуальные переменные
tindiv	временные индивидуальные переменные
func	функциональные знаки
tfunc	временные функциональные знаки
predic	предикатные константы
loglinc	логические связки
quant	кванторы

Каждому из этих типов соответствует список букв алфавита, с которых начинаются по умолчанию имена знаков (в данной версии Deductio имя состоит из буквы с числовым индексом: A, B15,&, x3 Кроме того, зафиксированы знаки:

G	глобальная подстановка
S	локальная подстановка
F (с индексом)	знак формулы
T (с индексом)	знак терма.

Их смысл будет объяснен ниже, по мере определения языка описания правил вывода.

Формула, входящая в вывод, строится обычным образом из индивидуальных переменных, функциональных и предикатных знаков, связок и кванторов. Только такая формула может быть введена в качестве исходных данных. При применении правил вывода могут возникать расширенные формулы, содержащие также временные индивидуальные и временные функциональные знаки. Они, строго говоря, не являются формулами и используются в качестве вспомогательных конструкций.

Закрепление букв за типами знаков осуществляется в файле описания логической системы, который создается и изменяется средствами обычного текстового редактора. Там же можно явно описать сигнатуру. Для каждой связки, предикатного или функционального знака и т.п. можно указать количество аргументов (местность знака), а также расположение аргументов: слева (префиксная форма записи), справа (постфиксная) или с двух сторон от знака (инфиксная). Можно также задать приоритет знака (для сокращения скобок). Заметим, что приоритет действует только внутри данного типа и, например, любой функциональный знак будет связывать аргументы сильнее предикатного, а предикатный знак - сильнее логических связок.

Если местность знака не задана явно в сигнатуре, то она будет определена по контексту при первой встрече этого знака (в правилах вывода, а если там нет - в выводе). В таком случае должна употребляться обязательно префиксная форма записи с использованием скобок для списка аргументов. Тип знака определяется по умолчанию. При всех дальнейших появлениях знака от него будет требоваться уже зафиксированная местность, как если бы он был описан явно. Нарушения этого условия вызовут появление сообщения об ошибке.

Для записи правил вывода мы будем, наряду с формулами, пользоваться схемами формул. Схема формулы может дополнительно (по сравнению с формулой) включать "знаки формулы" F_i и "знаки терма" T_i , которые можно рассматривать как переменные метаязыка, пробегающие по формулам и термам соответственно. Она может также содержать символ подстановки в формулу вместо терма индивидуальной переменной,

а вместо индивидуальной переменной - временной переменной или временной функции, что обозначается соответственно $S(T, x F)$, $S(x, t F)$ и $S(x, w F)$, где F - некоторая формула, x - индивидуальная переменная. Подставляемый терм определяется в процессе диалога с программой, а в случае t и w генерируется каждый раз новая временная переменная t_i (т. е. t с новым индексом) или новая временная функция w_i , аргументами которой являются свободные переменные формулы F (она может рассматриваться как сокращенная запись ϵ -терма), после чего и производится подстановка.

Схема формулы может проверяться на соответствие некоторой формуле. Схема формулы и формула соответствуют (гомологичны) друг другу, если имеют одинаковую структуру. Чтобы быть более точным, они соответствуют, если формула может быть получена из схемы формулы подстановкой вместо временных переменных - термов, вместо абстрактных формул F_i - формул, а вместо индивидуальных переменных - индивидуальных переменных.

Применение правила вывода состоит, во-первых, из обнаружения некоторого контекста в выводе, а во-вторых, в изменении вывода за счет добавления формул или вспомогательных выводов. В связи с этим можно выделить три типа правил вывода: синтетические (прямое правило), аналитические (косвенное правило) и глобальная подстановка.

Синтетические правила, при обнаружении в выводе формул определенного вида, позволяют добавить формулы (выше "дырки"). Они не изменяют условия задачи (заключения) и не формируют вспомогательных выводов. Запись такого правила должна содержать список схем формул, входящих в вывод, и список схем порождаемых формул. Мы разделяем эти два списка знаком " $=>$ ". Вот пример правила такого типа:

$$F1 \ \& \ F2 \Rightarrow F1; F2$$

Это правило позволяет, при наличии в выводе конъюнкции двух формул, добавить в вывод обе эти формулы.

Аналитические правила, при наличии в выводе посылок определенного вида и при определенном виде заключения, позволяют свести задачу к подзадачам, т. е. заменить "дырку" на вспомогательный вывод (один или несколько). Запись аналитического правила должна содержать список схем формул, входящих в вывод, и список схем вспомогательных выводов. При этом список схем формул должен содержать "дырку" и заключение - это является критерием "аналитичности". А под списком схем вспомогательных выводов понимается опять же список схем формул, среди которых есть "дырка" и заключение (формула, стоящая после "дырки"). Иными словами, аналитическое правило вывода состоит из эталонной (искомой в

выводе) схемы вывода и списка схем порождаемых выводов. Например:

$$\vdash F1 \supset F2 \Rightarrow F1 \vdash F2$$

позволяет сделать переход:

$$\begin{array}{ccc} 1 & \dots & 1 \\ 2 & \vdash & 4 \mid A \\ 3 & A \supset B & 5 \mid \vdash \\ & \Rightarrow & 6 \mid B \\ & & 3 & A \supset B \end{array}$$

Здесь эталонной схемой вывода является $\vdash F1 \supset F2$, а список схем порождаемых выводов состоит из одного элемента $F1 \vdash F2$. Предлагаемый вывод соответствует эталонной схеме, так как в качестве заключения содержит импликацию. При этом А соответствует F1, В - F2. Тогда будет порожден вспомогательный вывод, который замещает "дырку". Это вывод В из А.

Еще пример:

$$F1 \vee F2 \vdash F3 \Rightarrow F1 \vdash F3 / F2 \vdash F3$$

позволяет сделать переход

$$\begin{array}{ccc} 1 & A \vee B & 1 & A \vee B \\ 2 & \vdash & 2 \mid & A \\ 3 & C & 4 \mid \vdash & C \\ & \Rightarrow & 5 \mid & \\ & & 2 \mid & B \\ & & 4 \mid \vdash & \\ & & 5 \mid & C \\ & & 3 & C \end{array}$$

Здесь список схем порождаемых выводов состоит из двух членов, и соответственно строятся два вспомогательных вывода.

Как уже было отмечено, в той части правила вывода, которая описывает генерируемые формулы или вспомогательные выводы, могут присутствовать выражения

$$S \ T, x \ F \qquad S \ x, ti \ F \qquad S \ x, wi \ F$$

В этом случае при выполнении правил вывода будет произведена генерация новой временной переменной или функции и осуществлена подстановка в формулу.

При определении соответствия между формулами из вывода и схемами формул из правил вывода некоторые соответствующие пары Deductio находит по контексту (это, например, в любом случае будет с формулой - заключением), другие же потребуется указать явно - для этого в программе есть специальные диалоговые средства.

Третий тип правил вывода состоит ровно из одного правила глобальной подстановки, которое записывается в виде:

$$\Rightarrow G$$

то есть оно не требует никакого контекста. Действие этого

правила состоит в подстановке во все формулы вывода вместо всех вхождений некоторой временной переменной t_i терма. Терм надо указать явно. Можно провести подстановку термов сразу вместо нескольких временных переменных.

Временные переменные попадают в вывод, поскольку мы не знаем сразу, какой терм следует выбрать, скажем, при снятии квантора общности. Мы устраняем эти "недоделки", применяя глобальную подстановку. Это своего рода способ отложить выбор терма на более удобное время.

В предложенной форме записи набор правил вывода системы NEC (Natural calc. with ϵ -term, Classic)³ будет выглядеть следующим образом:

$\vdash F1 \& F2 \Rightarrow \vdash F1 / \vdash F2$	$\&_{ai}$
$F1; F2 \Rightarrow F1 \& F2$	$\&_{si}$
$F1 \& F2 \Rightarrow F1$	$\&_{se_1}$
$F1 \& F2 \Rightarrow F2$	$\&_{se_2}$
$\vdash F1 \vee F2 \Rightarrow \neg F1 ; \neg F2 \vdash \perp$	$\vee_{ai}$
$F1 \vee F2 \vdash F3 \Rightarrow F1 \vdash F3 / F2 \vdash F3$	$\vee_{ae}$
$F1 \Rightarrow F1 \vee F2$	$\vee_{si_1}$
$F2 \Rightarrow F1 \vee F2$	$\vee_{si_2}$
$\neg F1 ; F1 \vee F2 \Rightarrow F2$	$\vee_{se}$
$\vdash F1 \supset F2 \Rightarrow F1 \vdash F2$	$\supset_{ai}$
$F1 \supset F2 \vdash F3 \Rightarrow \neg F3 \vdash F1 / F2 \vdash F3$	$\supset_{ae}$
$F2 \Rightarrow F1 \supset F2$	$\supset_{si}$
$F1; F1 \supset F2 \Rightarrow F2$	$\supset_{se}$
$\vdash \neg F \Rightarrow F \vdash \perp$	$\neg_{ai}$
$\vdash F \Rightarrow \neg F \vdash \perp$	$\neg_{ae_1}$
$\neg F \vdash \perp \Rightarrow \vdash F$	$\neg_{ae_2}$
$F; \neg F \Rightarrow \perp$	$\perp_{si}$
$\perp \vdash F \Rightarrow F$	$\perp_{del}$
$\vdash \forall x F \Rightarrow \vdash S_{x,w} F$	$\forall_{ai}$
$\forall x F \Rightarrow S_{x,t} F$	$\forall_{se}$
$\vdash \exists x F \Rightarrow \neg \exists x F \vdash S_{x,t} F$	$\exists_{ai_i}$
$F \Rightarrow \exists x S_{T,x} F$	$\exists_{si}$
$\exists x F \Rightarrow S_{x,w} F$	$\exists_{se}$
$\Rightarrow G$	GlobSubst

³Подробно описание этой системы см. в гл.4 книги (2)

GlobSubst - правило глобальной подстановки, действие которого уже объяснялось. Остановимся на правилах, использующих символ локальной подстановки S. Правило

$$\forall_se \quad \forall x F \Rightarrow S x, t F$$

позволяет снимать квантор общности, при этом выбор терма, подставляемого в формулу вместо кванторной переменной откладывается за счет использования временной переменной.

Правило

$$\forall_ai \quad |- \forall x F \Rightarrow |- S x, w F$$

позволяет свести доказательство $\forall x F$ к построению вывода F для некоторого правильного терма.

Локальная подстановка вместо индивидуальной переменной временного терма или функция организована таким образом, что подстановка производится вместо всех свободных вхождений этой переменной. Кроме того, процедура глобальной подстановки, при замене временной переменной термом, также контролирует, чтобы свободные переменные, входящие в терм, не попали в область действия кванторов. Этим обеспечивается правильность подстановки.

При навешивании кванторов, Deductio спрашивает, по какой переменной следует проводить квантификацию.

В правилах вывода можно пометить переменные, по которым это правило сильное, например, переменную x в правиле

$$\exists x F \Rightarrow S x, w F$$

При применении сильных правил проводится проверка на наличие варьированности переменных. В данной версии программы для этого проверяется довольно сильное условие: "сильная" переменная не должна присутствовать свободно в посылках данного подвывода (в старших подвыводах может). При этом не учитывается, от каких посылок зависит используемая формула, то есть это условие является достаточным, но не необходимым. В последующих версиях программы это условие будет ослаблено. В системе NEC сильными являются правила $\forall_ai$ и $\exists_se$.

Можно также пометить абстрактные формулы, которые не должны содержать свободных вхождений некоторой переменной.

Представляет интерес правило $|-_del$, позволяющее удалить "дырку" из вывода, добавив в посылочную часть формулу, совпадающую с заключением. Таким способом завершается построение вывода без формирования новых подвыводов. Построение будет завершено, когда все "дырки", в том числе во вложенных подвыводах, будут удалены.

Классическое аксиоматическое исчисление высказываний запишется в виде:

$\Rightarrow F1; F1 \supset F2 \Rightarrow F2$	ModPon
$\Rightarrow F1 \& F2 \supset F1$	&1
$\Rightarrow F1 \& F2 \supset F2$	&2
$\Rightarrow F1 \supset (F2 \supset (F1 \& F2))$	&3
$\Rightarrow F1 \supset (F1 \vee F2)$	$\vee 1$
$\Rightarrow F2 \supset (F1 \vee F2)$	$\vee 2$
$\Rightarrow (F1 \supset F2) \supset ((F3 \supset F2) \supset ((F1 \vee F3) \supset F2))$	$\vee 3$
$\Rightarrow F1 \supset (F2 \supset F1)$	$\supset 1$
$\Rightarrow (F1 \supset (F2 \supset F3)) \supset ((F1 \supset F2) \supset (F1 \supset F3))$	$\supset 2$
$\Rightarrow (F1 \supset F2) \supset ((F1 \supset \neg F2) \supset \neg F1)$	$\neg 1$
$\Rightarrow \neg \neg F \supset F$	$\neg 2$

Правила сформулированы в "Логика и компьютер", стр.28, где A/F1, B/F2, C/F3

Исчисление представлено здесь в виде правил вывода, позволяющих, вне зависимости от контекста, добавлять аксиомы. Правило *modus ponens* имеет обычный смысл.

Для записи классического аксиоматического исчисления предикатов надо добавить следующие правила вывода:

$F \Rightarrow \forall v S v1, v F$	gener
$\Rightarrow \forall v (F2 \supset F1) \supset (F2 \supset \forall v F1)$	$\forall 1$
$\Rightarrow \forall v F \supset S v1, T F$	$\forall 2$
$\Rightarrow \exists v (F1 \supset F2) \supset (\exists v F1 \supset F2)$	$\exists 2$
$\Rightarrow F \supset \exists v S T, v F$	$\exists 1$
$F \Rightarrow S v1, v2 F$	subst

где F2 не содержит v свободно, а правило обобщения (gener.) является сильным по v.

Правила вывода вводятся из файла описания в виде символьных строк, которые компилируются во внутреннее представление (или же выдается сообщение об ошибке). Правило дополнительно снабжается именем (по нему мы будем выбирать правило из меню), именем для анализа⁴, а также - при необходимости - указанием на индивидуальные переменные, по отношению к которым правило сильное, и указанием на знаки абстрактных формул (Fi), которые не должны содержать (при

⁴ Имя для анализа записывается в анализ формулы вместе с номерами формул, из которых она была получена. Имя для анализа, вообще говоря, отлично от имени правила. Это удачно используется в системе NEC. Имена для анализа выбраны в ней с таким расчетом, что построенный вывод является субординатным выводом в системе натурального вывода. Таким образом, за счет несовпадения имен правил вывода и анализа можно добиться, чтобы вывод, построенный в одной системе, образованной "поисковыми" правилами, являлся правильно построенным выводом другой "внешней" системы.

замене реальными формулами) свободных вхождений некоторой переменной.

Остановимся теперь на основах интерфейса программы Deductio.

В течение всего времени работы пользователю доступен просмотр текущего субординатного вывода. При этом возможно использование различных способов визуализации вывода, на чем мы остановимся подробнее ниже. Из режима просмотра можно либо перейти в главное меню (нажав <Esc>), либо выполнить правило вывода (сразу - по функциональной клавише, или нажав <Пробел>, - из меню правил вывода) В дальнейшем мы опять окажемся в режиме просмотра.

При просмотре вывода используются различные способы визуализации вывода, но клавиши <Ins> и неизменно позволяют перейти на один уровень ниже или выше (т. е. войти в подвывод или выйти из него). Вне зависимости от того, какие изменения произойдут при этом на экране, изменится наша "точка зрения" и, соответственно, набор доступных формул, критерий контроля варьированности, доказываемое заключение и прочее. Из существующих следует упомянуть следующие способы визуализации:

1. Строчная:

выводится одна формула с номером и анализом.

2. Подвывод (с наследуемыми посылками):

выводятся столбцом формулы подвывода, к которым добавлены сверху посылки, полученные от старшего вывода по "правилу наследования". Этот способ позволяет сосредоточиться на текущей подзадаче, имея при этом "все необходимое и ничего лишнего", удобен при поиске вывода. Нижестоящие подвыводы имеют каждый по представителю: строке "-->+" или "-->?" в зависимости от того, завершено ли доказательство подвывода.

3. Полный вывод:

выводятся столбцом формулы, входящие в главный вывод и во все подвыводы на всю глубину. Каждый из подвыводов выделен вертикальной чертой слева. То есть чем больше глубина вложенности подвывода, тем больше вертикальных черт слева от него. Эта визуализация соответствует способу записи, используемому в натуральном выводе. Способ удобен для распечатки.

4. Дерево:

выводится в явном виде дерево вывода, вершинами которого являются формулы, а ребрами - правила вывода, по которым одна формула получена из других. Возможно одновременное использование нескольких различных визуализаций в различных окнах.

За счет использования "правила наследования формул" нам удастся избежать переписывания формул при открытии подвывода. Определенное единообразие достигается и за счет того, что каждый подвывод имеет в старшем выводе строку-представителя. Это соответствует трактовке подвывода как особого вида элемента вывода.

Deductio обеспечивает определенные удобства при работе "вручную", например, он берет на себя работу по переписыванию формул, записи анализа, сам применяет правила вывода. Но главное - гарантия правильности построенного вывода.

Программа обладает рядом дополнительных возможностей, облегчающих работу. Это, во-первых, средства сохранения данных на диске. О возможности хранения на диске конфигурации, включая правила вывода, написано выше. Но можно также сохранять на диске (и считывать с него) и сам вывод. Для этого в подменю <Utility> есть команды <Load> и <Save>. Там же есть команды распечатки вывода <Print> и формирования текстового файла, содержащего вывод в "красивом" виде - <Export>.

Более сильное средство сохранения вывода содержится в подменю <Protocol>. Команда <Start Protocol> сначала сохраняет вывод на диске, а затем устанавливает режим, при котором все команды, изменяющие вывод, заносятся в протокол вместе с необходимыми данными (номерами используемых формул и т. д.). Прекратить протоколирование можно или командой <Stop Protocol>, или уничтожением текущего вывода (например, при загрузке другого вывода). Если файл, содержащий протокол, загрузить (командой <Load>), то сначала загрузится вывод в том виде, в каком он был в момент начала протоколирования. После этого Deductio спросит, надо ли читать данные из протокола, и, при утвердительном ответе, перейдет в режим чтения протокола. В этом случае при каждом нажатии на <Пробел> Deductio будет повторять по шагам те действия, которые проводились во время протоколирования. Программа как бы прокручивает отснятый фильм. При нажатии на <Esc> Deductio выйдет из режима чтения протокола, а при <Enter> - прокрутит сразу все шаги до конца протокола. При протоколировании можно создавать "точки прерывания", тогда после нажатия на <Enter> протокол будет читаться не до конца, а до ближайшей такой точки. После этого можно снова нажать <Enter> и перейти к следующей точке прерывания, либо двигаться шаг за шагом, нажимая <Пробел>. Режимом протоколирования можно воспользоваться как для возврата на несколько шагов назад, так и для попытки повторить доказательство для другой логической системы.

Deductio снабжена также рядом мощных средств, помогающих строить вывод. К ним относятся такие средства, как сокращение лишних формул и подвыводов в выводе, генерализация формул (если мы, находясь в подвыводе, вывели формулу, опираясь только на формулы вышестоящего вывода, то и полученная формула может быть перенесена в вышестоящий вывод), предварительная фильтрация правил вывода (отбор правил, которые можно в принципе применить в данный момент), проведение унификации (т. е. нахождение такой системы подстановок термов вместо временных переменных, при которой все подвыводы (или данный подвывод) будут замкнуты).

ЛИТЕРАТУРА

- 1 Смирнов В. А. Формальный вывод и логические исчисления//М., 1972.
- 2 Логика и компьютер. Моделирование рассуждений и проверка правильности программ //М.,1990
- 3 Suppes P. Takahashi S. An interactive calculus Theorem-prover for continuity Properties. //J. Symbolic Computation 7.1989
- 4 Suppes P. Three Current Tutoring Systems and Future Needs // Stanford.CA 1991.
- 5.Harper R., Honsell F., Plotkin G.. A framework on defining logics. In Proc. of the 2nd Annual Logic in Computer Sc. Conf., Ithaca// NY. June 1987.
- 6.Sawamura, Minami,Ohashi. Proof methods based on Sheet of Thought in EUODHILOS, //Fujitsu lab. Research Report. 1992.

ОПРЕДЕЛИМОСТЬ КАЧЕСТВЕННОЙ НЕЗАВИСИМОСТИ СОБЫТИЙ ЧЕРЕЗ РАСШИРЕННЫЕ ИНДИКАТОРНЫЕ ФУНКЦИИ¹

Основной целью данной статьи является определение отношения вероятностной независимости событий через отношение качественного порядка на множестве расширенных индикаторных функций событий.

1. Введение

Отношение порядка $\succeq$ на множестве событий часто интерпретируется как качественное вероятностное упорядочивание, т.е. в следующем интуитивном смысле: $A \succeq B$ означает $P(A) \geq P(B)$. Существует обширная литература, посвященная исследованию условий, гарантирующих существование такого вероятностного представления для некоторого множества упорядоченных событий (краткий обзор см., напр., в Суппес и Занотти [5]). В этой статье мы рассматриваем качественное отношение вероятностной независимости $\perp$; знак $\perp$ должен интерпретироваться следующим образом:

$A \perp B$ если и только если $P(A \cap B) = P(A)P(B)$

Отношение независимости $\perp$ изучалось в литературе, по крайней мере, с работы Домотора [1]. В этой работе было дано определение $\perp$ в терминах качественного порядка на множестве картезианских произведений элементов множества $\mathcal{F}$: $A \perp B$ е.т.е. $A \cap B \times \Omega \sim A \times B$ для всех $A, B \in \mathcal{F}$ ($\sim$ есть отношение эквивалентности, индуцированное $\succeq$; $A \times B \succeq C \times D$ е.т.е. $P(A)P(B) \geq P(C)P(D)$). Домотор вывел из этого определения некоторые основные свойства $\perp$. В книге Кранца, Льюса, Суппеса и Тверски [4] также для определения независимости использовалось четырехместное отношение. Другой подход был избран в книге Файна [2]. Файн предложил набор аксиом для $\succeq$ и $\perp$.

В этой статье отношение вероятностной независимости событий определяется в терминах качественного упорядочения расширенных индикаторных функций событий.

2. Неопределимость отношения $\perp$ в терминах качественного порядка на множестве событий

Некоторые естественные элементарные аксиомы для отношения независимости были даны Файном [2]:

¹ Пер. с англ. Н.А.Алесиной

- I1. $A \perp B \Rightarrow B \perp A$;
 I2. $A \perp \Omega$;
 I3. $A \perp B \Rightarrow A \perp \neg B$;
 I4. $B \cap C = \emptyset, A \perp B, A \perp C \Rightarrow A \perp (B \cup C)$;
 I5. $A \perp B, C \perp D, B \succeq D \Rightarrow (A \succeq C \Rightarrow A \cap B \succeq C \cap D),$
 $(A \succ C, B \succ \emptyset \Rightarrow A \cap B \succ C \cap D).$

Он доказал, что эти условия гарантируют существование вероятностного приписывания P , согласующегося с $\succeq$, и операции G , такой, что

$$A \perp B \text{ т.е. } P(A \cap B) = G(P(A), P(B)).$$

Чтобы сделать операцию G ассоциативной, Файн предлагает следующую аксиому:

- I6. $A \perp B \cap C, B \perp C, A' \cap B' \perp C', A' \perp B', A \approx A', B \approx B', C \approx C' \Rightarrow A \cap B \cap C \approx A' \cap B' \cap C'.$

Другое свойство, невыводимое из I1 - I6, есть

- I7. $A \perp B, B \perp C, A \perp B \cap C \Rightarrow C \perp A \cap B.$

Остается открытым вопрос, является ли $\perp$ (интерпретируемое как $A \perp B$ если и только если $P(A \cap B) = P(A)P(B)$) конечно аксиоматизируемым. В системе Файна независимость событий не следует из $P(A \cap B) = G(P(A), P(B))$ (интуитивно, из того, что вероятность пересечения равна произведению вероятностей). Он считает, что этот факт согласуется с духом обычной теории вероятностей. Аксиомы Файна I1 - I7 не влекут свойство дистрибутивности G относительно сложения, т.е. не задают количественной интерпретации, в которой G соответствовала бы умножению.

Однако легко показать, что отношение независимости неопределимо в терминах событий и качественного порядка на их множестве; этот результат составляет часть фольклора данной области, но, насколько нам известно, нигде не был записан.

Теорема 1. Пусть $(\Omega, \succeq, \perp)$ таковы, что:

1. Ω есть конечное непустое множество;
2. $\succeq$ есть отношение на множестве подмножеств Ω , удовлетворяющее аксиомам Скотта:

$$S1. A \succeq B \text{ или } B \succeq A;$$

$$S2. A \succeq \emptyset;$$

$$S3. \Omega \succeq \emptyset;$$

S4. для всех подмножеств $A_0, \dots, A_n, B_0, \dots, B_n$ из Ω , если $A_j \succeq B_j$ для $0 \leq j < n$, и для всех ω из Ω

$$A_0^i(\omega) + \dots + A_n^i(\omega) = B_0^i(\omega) + \dots + B_n^i(\omega),$$

то $A_n \succeq B_n$, где A^i есть индикаторная функция события A .

3. $\perp$ есть отношение, удовлетворяющее аксиомам Файна I1 - I7, приведенным выше.

Тогда отношение независимости $\perp$ неопределимо в терминах структуры $(\Omega, \succeq)$.

Доказательство.

Рассмотрим следующую структуру: $\Omega = \{a, b, c, d\}$, $\succeq$ задано следующим образом:

$$0 \prec a \prec b \prec c \prec a+b \prec a+c \prec d \prec b+c \prec a+d \prec a+d \prec a+b+c \prec b+d \prec c+d \prec a+b+d \prec a+c+d \prec b+c+d \prec a+b+c+d.$$

Пусть событие $A = \{a, b\}$, $B = \{b, d\}$. Мы покажем, что этой структуре можно дать две различных количественных интерпретации, причем обе сохраняют порядок, но в одной из них A и B независимы: $P(A \cap B) = P(A)P(B)$, а во второй это неверно; понятие независимости согласуется с файновскими аксиомами.

$$P1: a = 10/80, b = 15/80, c = 22/80, d = 33/80; a+b+c+d = 1.$$

$$P2: a = 10/80, b = 15/80, c = 21/80, d = 33/80.$$

В первом случае $15/80 = 25/80 \times 48/80$, во втором $16/80 \neq 26/80 \times 48/80$. Следовательно, по принципу Падоя $\perp$ неопределимо в терминах $(\Omega, \succeq)$. ■

3. Определение независимости в терминах расширенных индикаторных функций

Понятие расширенной индикаторной функции использовалось в книге Суппеса и Занотти [5] для того, чтобы дать простое множество условий для существования вероятностной меры, согласующейся с качественным порядком.

Пусть Ω будет множеством элементарных событий, $\mathcal{F}$ алгеброй событий на Ω . Пусть A^i будет индикаторной функцией (или характеристической функцией) события A . Алгебра $\mathcal{F}^*$ расширенных индикаторных функций относительно $\mathcal{F}$ есть наименьшая полугруппа (по операции сложения функций), включающая индикаторные функции всех событий из $\mathcal{F}$.

Легко убедиться, что расширенные индикаторные функции являются случайными переменными особого вида (принимающими неотрицательные целые значения). Интуитивный смысл качественного упорядочивания состоит в том, что $A^* \succeq B^*$ ($A^*, B^* \in \mathcal{F}^*$) если и только если математическое ожидание A^* больше или равно математическому ожиданию B^* . Естественно, для $A, B \in \mathcal{F}$ $A^i \succeq B^i$ е.т.е. $A \succeq B$.

Определение 1 (Суппес, Занотти [5]). Пусть Ω есть непустое множество, $\mathcal{F}$ алгебра множеств над Ω , и $\succeq$ бинарное отношение на $\mathcal{F}$ алгебре расширенных индикаторных функций относительно $\mathcal{F}$. Тогда качественная алгебра $(\Omega, \mathcal{F}^*, \succeq)$ количественно выполняма

тогда и только тогда, когда следующие аксиомы выполняются для всех A^*, B^* и C^* из $\mathcal{F}^*$:

Аксиома 1. Отношение $\succeq$ есть слабый порядок на $\mathcal{F}^*$;

Аксиома 2. $\Omega^i \succ \emptyset^i$;

Аксиома 3. $A^* \succeq \emptyset^i$;

Аксиома 4. $A^* \succeq B^*$ е.т.е. $A^* + C^* \succeq B^* + C^*$;

Аксиома 5. Если $A^* \succ B^*$, то для всякого C^* и D^* из $\mathcal{F}^*$ существует положительное целое число n такое, что $nA^* + C^* \succeq nB^* + D^*$.

(Строгий порядок $\succ$ определяется обычным образом: $A^* \succ B^*$ е.т.е. $A^* \succeq B^*$ и неверно, что $B^* \succeq A^*$; nA^* значит $A^* + \dots + A^*$ n раз). В книге Суппеса и Занотти [5] доказано, что необходимым и достаточным условием для существования строго согласующейся вероятностной меры на $\mathcal{F}$ является возможность обобщения $\succeq$ с $\mathcal{F}$ на $\mathcal{F}^*$ такого, что $(\Omega, \mathcal{F}^*, \succeq)$ является количественно выполнимой, и эта мера единственна для $\mathcal{F}^*$. Однако в их репрезентационной теореме и в других подобного рода требование нормирования P к 1 имеет произвольный характер, т.е. форма представления допускает умножение на произвольную положительную константу. У Суппеса и Занотти [5] репрезентационная теорема формулируется в терминах функции математического ожидания E для расширенных индикаторных функций, удовлетворяющей следующим очевидным свойствам для любых A^* и B^* из $\mathcal{F}^*$:

E1. $E(A^*) \geq E(B^*)$ е.т.е. $A^* \succeq B^*$;

E2. $E(A^* + B^*) = E(A^*) + E(B^*)$.

Ясно, что если функция E , определенная на $\mathcal{F}^*$, удовлетворяет *E1* и *E2*, то тем же свойством будет обладать и αE , где α есть любое положительное действительное число. С другой стороны, единственное универсальное свойство независимости для положительных вероятностей, а именно независимость Ω от Ω , может быть сформулировано как дополнительное условие, которое фиксирует E единственным образом:

E3. $E((\Omega \cap \Omega)^i) = E(\Omega^i)E(\Omega^i)$.

Из аксиом Определения 1 легко следует, что $E(\emptyset^i) = 0$, $E(\Omega^i) \geq 0$, и поэтому из *E3* получаем, что $E(\Omega^i) = 1$. Мы также получаем не произвольное нормирование вероятностной меры: для A из $\mathcal{F}$

E4. $P(A) = E(A^i)$.

Предшествующие замечания необходимы для того, чтобы избежать впечатления парадокса в нашем определении независимости событий в терминах расширенных индикаторных функций, поскольку удовлетворительное определение независимости, для которого можно доказать

$$A \perp B \text{ если и только если } P(A \cap B) = P(A)P(B),$$

очевидным образом предполагает, что вероятностная мера нормируется к 1. Мы пришли бы к парадоксу, если бы постулировали это только после того, как дали определение $\perp$. Как показывают приведенные выше соображения, это не так.

Данные замечания приводят к следующей теореме о представлении, более сильной, чем в книге Суппеса и Занотти [5].

Теорема 2. Если структура $(\Omega, \mathcal{F}, \succeq)$ удовлетворяет Определению 1, то существует единственная функция математического ожидания E на $\mathcal{F}^*$ и единственная вероятностная мера, удовлетворяющая E1 - E4.

В терминах Определения 1 мы теперь определяем независимость следующим образом:

Определение 2. $A \perp B$ если, и только если,

$$a. \forall m \forall m' \forall n \forall n' (m \Omega^i \preceq n A^i \ \& \ m' \Omega^i \preceq n' B^i \Rightarrow m m' \Omega^i \preceq n n' (A \cap B)^i)$$

$$b. \forall m \forall m' \forall n \forall n' (m \Omega^i \succeq n A^i \ \& \ m' \Omega^i \succeq n' B^i \Rightarrow m m' \Omega^i \succeq n n' (A \cap B)^i).$$

Интуитивный смысл $A \perp B$ заключается в том, что A и B независимы; т.е. $E((A \cap B)^i) = E(A^i)E(B^i)$ и $P(A \cap B) = P(A)P(B)$.

В книге Суппеса, Кранца, Льюса и Тверски [4] дано доказательство (основанное на статье Суппеса и Занотти [6]) в несколько иной терминологии того, что условия $a.$ и $b.$ гарантируют, что это свойство выполняется. Мы приведем здесь это доказательство.

Теорема 3. Если даны структура $(\Omega, \mathcal{F}, \succeq)$, удовлетворяющая Определению 1, с единственной функцией математического ожидания E и мерой, удовлетворяющими E1 - E4, то для A, B в $\mathcal{F}$ $P(A \cap B) = P(A)P(B)$ е.т.е. $A \perp B$.

Доказательство.

Чтобы доказать теорему, мы определяем, для каждого A^i из $\mathcal{F}^*$, множество S_A :

$$S_A = \{m/n: m \Omega^i \succeq n A^i\}.$$

Легко показать, что S_A непусто и имеет наибольшую нижнюю границу, которая и задает единственную функцию математического ожидания E :

$$E(A^i) = \text{наиб.нижн.гр.} S_A.$$

Для независимых A и B (см. Определение 2) если $m/n \in S_A$, $m'/n' \in S_B$, то $mm'/nn' \in S_A \cap S_B$, и поэтому

$$E((A \cap B)^i) \leq E(A^i)E(B^i).$$

Затем мы определяем $T_A = \{m/n: m \Omega^i \preceq n A^i\}$. Каждое множество T_A очевидно является непустым и имеет наименьшую верхнюю границу. Мы должны показать, что

$$\text{наим.верхн.гр.} T_A = \text{наиб.нижн.гр.} S_A = E(A^i).$$

Допустим, что

$$\text{наим.верхн.гр.} T_A < \text{наиб.нижн.гр.} S_A$$

(очевидно, что имеет место $\text{наим.верхн.гр.}T_A \geq \text{наиб.нижн.гр.}S_A$). Тогда должны существовать такие целые числа m и n ,

$$\text{что } \text{наим.верхн.гр.}T_A < m/n < \text{наиб.нижн.гр.}S_A.$$

Тогда из левой части мы получаем $m\Omega^i > nA^i$, а из правой - $m\Omega^i < nA^i$, что противоречит свойствам $\preceq$.

Аналогично со случаем S_A , определение T_A влечет

$$E((A \cap B)^i) \geq E(A^i)E(B^i),$$

а вместе они дают

$$E((A \cap B)^i) = E(A^i)E(B^i).$$

4. Некоторые свойства 1

Теперь мы покажем, что аксиомы Файна $I1 - I7$ выводимы элементарным образом.

Теорема 4. *Аксиомы Файна для независимости $I1 - I7$ выводимы из аксиом 1 - 5 Определения 1 и определения независимости.*

Доказательство.

Доказательство для $I1 - I3$ тривиально:

$I4$. Если $B \cap C = \emptyset$, то $B^i + C^i = (B \cup C)^i$ и $(A \cap B)^i + (A \cap C)^i = ((A \cap B) \cup (A \cap C))^i$.

Мы должны доказать, что

$$\forall m \forall m^* \forall n \forall n^* (m\Omega^i \geq nA^i \ \& \ m^*\Omega^i \geq n^*(B \cup C)^i \Rightarrow mm^*\Omega^i \geq nn^*(A \cap (B \cup C))^i) \text{ (и то же самое для } \preceq).$$

Пусть $m\Omega^i \geq nA^i$ и $m^*\Omega^i \geq n^*(B \cup C)^i$. Так как B и C не пересекаются,

$m^*\Omega^i \geq n^*(B^i + C^i)$ и $m^*\Omega^i \geq n^*B^i + n^*C^i$. Существуют m' , m'' такие, что $m' + m'' = m^*$ и

$m'eWi \geq n^*B^i$, $m''Wi \geq n^*C^i$ (из свойств $\geq$ и $+$). Так как $A \perp B$ и $A \perp C$, $mm'eWi \geq nn^*(A \cap B)^i$ и $mm''Wi \geq nn^*(A \cap C)^i$, и поэтому $m(mm' + m'')Wi \geq nn^*((A \cap B)^i + (A \cap C)^i)$. Это дает нам $mm^*Wi \geq nn^*((A \cap B) \cup (A \cap C))^i$; из булевой алгебры получаем $mm^*Wi \geq nn^*(A \cap (B \cup C))^i$.

Доказательство для $\preceq$ аналогично.

Перед тем, как доказывать $I5$, мы должны доказать следующую лемму:

Лемма. Если $A \perp B$, то

$$I5'. \forall m \forall m' \forall n \forall n' (m\Omega^i \geq nA^i \cap m'\Omega^i > n'B^i \Rightarrow mm'\Omega^i > nn'(A \cap B)^i).$$

$$I5''. \forall m \forall m' \forall n \forall n' (m\Omega^i \preceq nA^i \ \& \ m'\Omega^i < n'B^i \Rightarrow mm'\Omega^i < nn'(A \cap B)^i).$$

Доказательство.

$I5'$. Пусть $A \perp B$. Тогда

1. $\forall m \forall m' \forall n \forall n' (m\Omega^i \geq nA^i \& m'\Omega^i \geq n'B^i \Rightarrow mm'\Omega^i \geq nn'(A \cap B)^i)$;
2. пусть $m\Omega^i \geq nA^i$;
3. пусть $m'\Omega^i \geq n'B^i$;
4. $\exists n^* (n^* m'\Omega^i \geq nn'B^i + B^i)$ из 3, Аксиома 5;
5. $n^* m'\Omega^i \geq (n n' + 1)B^i$ из 4;
6. $mn^* m'\Omega^i \geq n(n^* n' + 1)(A \cap B)$ из 1, 2, 5;
7. $mn^* m'\Omega^i \geq nn^* n'(A \cap B)^i + n(A \cap B)$ из 6;
8. $mn^* m'\Omega^i > nn^* n'(A \cap B)^i$ из 7;
9. $mm'\Omega^i > nn'(A \cap B)^i$ из 8.

I5". (Доказательство аналогично.)

Теперь мы продолжим доказательство Теоремы 4.

I5. Мы должны рассмотреть два случая:

1. $A^i > C^i, B^i > D^i$: очевидно, что $\exists m \exists m' \exists n \exists n' (m\Omega^i < nA^i, m'\Omega^i \geq nC^i, m'\Omega^i < n'B^i, m'\Omega^i \geq n'D^i)$; поэтому, для некоторых mm' и nn' , $nn'(A \cap B)^i > mm'\Omega^i \geq nn'(C \cap D)^i$, а это значит, что $(A \cap B)^i > (C \cap D)^i$.
2. $A^i > C^i, C^i > \emptyset^i, B^i > D^i$: существуют m, n такие, что $nA^i < m\Omega^i$, $(n+1)A^i \geq m\Omega^i$, то же самое для C^i . Поскольку $B^i > D^i$, существуют такие n', m' , что $nB^i < m'\Omega^i \geq (n' + n')D^i$. Теперь мы получаем $n'(n+1)(A \cap B)^i > mm'\Omega^i \geq n(n' + n')(C \cap D)^i$, или $n'n(A \cap B)^i + n'(A \cap B)^i > n'n(C \cap D)^i + nn'(C \cap D)^i$. Поскольку $n' \leq nn'$, $(A \cap B)^i > (C \cap D)^i$.

I6. Пусть $m\Omega^i \geq nA^i, m'\Omega^i \geq n'B^i, m''\Omega^i \geq n''C^i$. Поскольку $A \approx A', B \approx B', C \approx C'$, то же самое верно и для A'^i, B'^i, C'^i .

Далее, $m'm''\Omega^i \geq n'n''(B \cap C)^i$ (потому что $B \perp C$) и $mm'm''\Omega^i \geq nn'n''(A \cap B \cap C)^i$ (потому что $A \perp (B \cap C)$).

Поскольку $A' \perp B'$, $mm'm''\Omega^i \geq nn'(A' \cap B')^i$, и, так как $A' \cap B' \perp C'$, $mm'm''\Omega^i \geq nn'n''(A' \cap B' \cap C')^i$. Мы получаем

$\forall m \forall m' \forall m'' \forall n \forall n' \forall n'' (m\Omega^i \geq nA^i \& m'\Omega^i \geq n'B^i \& m''\Omega^i \geq n''C^i \Rightarrow \Rightarrow (mm'm''\Omega^i \geq nn'n''(A \cap B \cap C)^i \& mm'm''\Omega^i \geq nn'n''(A' \cap B' \cap C')^i))$. Очевидно, что, если $A \cap B \cap C < A' \cap B' \cap C'$, то существуют m^*, n^* такие, что $n^*(A \cap B \cap C) \leq m^*\Omega < n^*(A' \cap B' \cap C')$. Мы всегда можем найти k , такое, что km^* и kn^* могут быть представлены как произведения m, m', m'' и n, n', n'' , соответственно, для которых верно $m\Omega^i \geq nA^i, m'\Omega^i \geq n'B^i, m''\Omega^i \geq n''C^i$. Но, как мы доказали, это значит, что $mm'm''\Omega^i \geq nn'n''(A' \cap B' \cap C')^i$, что противоречит допущению. Тот же способ рассуждения работает для случая

$A \cap B \cap C > A' \cap B' \cap C'$. Поэтому $A \cap B \cap C \approx A' \cap B' \cap C'$.

I7. Мы должны доказать, что

$\forall m'' \forall m^* \forall n'' \forall n^* (m'' \Omega^i \succeq n'' C^i \& m^* \Omega^i \succeq n^* (A \cap B)^i \Rightarrow$
 $\Rightarrow m'' m^* \Omega^i \succeq n'' n^* (A \cap B \cap C)^i)$, и то же самое для $\preceq$.

Предположим, что для некоторых m'' , n'' , m^* , n^* это неверно. Это значит, что

$m'' \Omega^i \succeq n'' C^i \& m^* \Omega^i \succeq n^* (A \cap B)^i \& m'' m^* \Omega^i \prec n'' n^* (A \cap B \cap C)^i$.

Как и в предыдущем доказательстве, мы прежде всего устанавливаем, что, если $m^* \Omega^i \succeq n^* (A \cap B)^i$, то существует некоторое k , такое, что $km^* = mm'$, $kn^* = nn'$ и $m \Omega^i \succeq n A^i$,

$m' \Omega^i \succeq n' B^i$. Отсюда получаем

$mm' m'' \Omega^i \succeq nn' n'' (A' \cap B' \cap C')^i$

$km^* m'' \Omega^i \succeq kn^* n'' (A' \cap B' \cap C')^i$

$m^* m'' \Omega^i \succeq n^* n'' (A' \cap B' \cap C')^i$, что противоречит допущению.

После того, как мы повторим такое же рассуждение для $\preceq$, мы получаем оба условия для $C \perp A \cap B$. ■

ЛИТЕРАТУРА

1. Domotor Z. Probabilistic relational structures and their applications// Technical report 144// Institute for Mathematical Studies in the Social Sciences, Stanford University. 1969.
2. Fine T. Theories of probability: An examination of foundations. N.Y. Academic Press. 1973.
3. Krantz D.H., Luce R.D., Suppes P., & Tversky A. Foundations of measurement. Vol.1. N.Y. Academic Press. 1971.
4. Suppes P., Krantz D.H., Luce R.D., & Tversky A. Foundations of measurement. Vol.11. N.Y. Academic Press. 1989.
5. Suppes P., & Zanotti M. Necessary and sufficient conditions for existence of a unique measure strictly agreeing with a qualitative probability ordering// Journal of Philosophical Logic. Vol.5. 1976. P.431-438.
6. Suppes P., Zanotti M. Qualitative axioms for random-variable representation of extensive quantities. 1991.

ВЕРОЯТНОСТНАЯ ЛОГИКА В ИСКУССТВЕННОМ ИНТЕЛЛЕКТЕ

Исследования по вероятностной логике получили в последнее время новый стимул к развитию в связи с приложениями логики к искусственному интеллекту. Как известно, многие рассуждения в экспертных системах носят вероятностный характер, а именно: используются правила вывода, гарантирующие лишь определенную степень надежности, и неточные (вероятные) данные. В то же время, как отмечается, например в [11], техника представления таких рассуждений часто не имеет глубокого теоретического обоснования и использует методы *ad hoc*. Этот пробел в создании логических моделей вероятностных рассуждений призваны восполнить, например, работы [11] и [3].

Исследование логик с вероятностными операторами или функторами представляет, кроме того, самостоятельный логический и философский интерес помимо приложений к экспертным системам. Так, в работе Дж.Халперна и др., о которой речь пойдет ниже, предлагается аппарат, который позволяет эксплицировать различие субъективной и частотной интерпретаций вероятности. Интересным представляется исследование связи между вероятностными и модальными суждениями, введение так называемых *graded modalities*, построение моделей типа Крипке для вероятностных логик.

Важнейшим вопросом с точки зрения приложений вероятностной логики к искусственному интеллекту является нахождение разумного компромисса между выразительными возможностями языка вероятностной логики и такими ее характеристиками, как полнота и разрешимость. Важно решить, какого типа высказывания должны быть выразимы в данной логике: о вероятностях, представленных действительными числами, или только рациональными, или достаточно конечного множества рациональных чисел; высказывания типа "вероятность A равна r " или необходимы также утверждения типа "вероятность A больше или равна r " или "вероятность A больше вероятности B в n раз (на число m)" и т.д. Что должно представлять собой A : формулу исчисления высказываний, исчисления предикатов, содержит ли A утверждения о вероятностях или нет, и т.п.? Все эти проблемы касаются синтаксиса вероятностной логики.

Несмотря на то что вероятность (по сравнению с необходимостью, возможностью и другими понятиями, которые исследуются в модальной логике) - понятие в математическом смысле хорошо определенное, наличие аксиоматики Колмогорова не снимает всех семантических проблем. Одна из них связана с возможностью различных интерпретаций понятия вероятности, а именно частотной (по Карнапу - вероятность₁) и индуктивной (по Кранпу - вероятность₂). Чтобы избежать хрестоматийного примера с летающими

птицами и Твити, который приводится в работе [5], рассмотрим такие утверждения:

(1) "Вероятность того, что у эрдель-терьера общительный характер, больше 0,5";

(2) "Вероятность того, что у Барона (данного эрдель-терьера) общительный характер, больше 0,5".

В первом случае вероятности легко дать естественную частотную интерпретацию, во втором это невозможно. Как правило, утверждения второго типа понимаются таким образом: доля возможных миров, в которых условие выполняется, т.е. у Барона общительный характер, больше 0,5. Для вероятностной логики, в которой исследуются утверждения о вероятности₂, строится семантика возможных миров с вероятностной мерой, определенной на множестве миров или на множестве правильно построенных формул языка. В то же время, для вероятности₁ такая семантика не будет адекватной. Утверждение (1) не предполагает, что по крайней мере в половине возможных миров у всех эрдель-терьеров общительный характер или что-то в этом роде. В нем утверждается, что в данном действительном мире произвольный эрдель-терьер обладает общительным характером с вероятностью, большей 0,5, или, что то же самое, доля эрдель-терьеров с общительным характером во всем множестве эрдель-терьеров больше 0,5. Поэтому в семантике меру естественнее задавать на множестве индивидов. Хотя в принципе, как показано в работе [1], по вероятностной модели первого типа можно построить вероятностную модель второго типа, и наоборот, тем не менее ясно, что выбор семантики для вероятностной логики существенен.

В работах [3], [5] и [1] анализируются следующие логики.

i. Логика AX_{MEAS} , в которой рассматриваются формулы вида

$$a_1\omega(\Phi_1) + \dots + a_k\omega(\Phi_k) \geq c,$$

где $a_1, \dots, a_k, c$ - целые числа, $\Phi_1, \dots, \Phi_k$ - пропозициональные формулы, а $\omega(\Phi_i)$ - терм, соответствующий вероятности Φ_i . В семантике $\omega(\Phi_i)$ сопоставляется действительное число. Вероятностная доля в модели определена на множестве возможных миров. Дана полная аксиоматизация такой логики, включая аксиомы для линейных неравенств. Проблема разрешимости для выполнимости является NP-полной (как для пропозициональной логики).

Для более слабого языка, допускающего только формулы вида $\omega(\Phi) \geq c$, без линейных комбинаций, аксиоматизация не найдена (отметим это на будущее).

ii. Логика, в которой допускаются произведения вероятностных термов, т.е. можно говорить об условных вероятностях. Такая логика также разрешима.

iii. Если допускаются переменные по действительным числам, т.е. рассматриваются формулы вида

$$(3+x)\omega(\Phi)\omega(\Phi \wedge \Phi) + 2\omega(\Phi) \geq z,$$

получается разрешимая логика. Система аксиом $AX_{FO-MEAS}$ включает аксиомы теории замкнутых полей действительных чисел.

iv. Первопорядковая логика также с мерой на возможных мирах, с двумя сортами переменных: по действительным числам и по индивидам; для термов, пробегающих по действительным числам, определены операции $+$, $\times$, и отношения $=$ и $>$. Такая логика неразрешима и аксиоматизируема (однако для конечных моделей размером не больше N могут быть построены полные и разрешимые логические системы с соответствующей аксиомой, утверждающей, что существует не больше N индивидов).

v. Такое же положение с первопорядковой логикой, в семантике которой вероятностная мера строится на области интерпретации.

Последний факт не является неожиданным в связи с результатами, полученными на другом пути построения вероятностной логики. Этот путь заключается в том, чтобы в синтаксисе вероятностной логики для представления вероятностных утверждений пользоваться не функторами, а модальными операторами или обобщенными кванторами. Тогда утверждение "Вероятность A больше или равна r " будет записываться не в виде " $\omega(A) \geq r$ ", а $P_r A$ или $[P_{\geq r} A](\bar{x})$. Обобщенные кванторы рассматриваются в [8]. Там дана аксиоматизация для логики с высказываниями типа "вероятность A больше или равна r ", которую авторы [3] дать затруднились. Фактически, логика, построенная в [8], соответствует описанной выше логике типа v: A является первопорядковой формулой, мера задается на индивидуальной области. Как уже было сказано, отрицательный результат для v неслучаен, так как в [8] использованы нефинитные средства: в языке допускаются бесконечные дизъюнкции и конъюнкции определенного вида.

В статье [2] был предложен класс логик для модальных операторов типа "вероятность...больше или равна r ", но с одним существенным ограничением: в модели для логики $P_r D$ функция вероятности принимает значения в фиксированном конечном множестве F . Каждая из таких логик полна и, как показано в статье [7], разрешима.

Представляют интерес и еще более слабые качественные понятия вероятности, например, рассмотренные в [4] операторы $\geq$: $\Phi \geq \psi$ должно пониматься как "вероятность Φ больше или равна вероятности ψ ". Сегерберг и Гарденфорс давали для такой логики стандартную вероятностную семантику возможных миров. Однако выясняется, что для этой логики и для логик $P_r D$ (с операторами только для рациональных чисел) может быть построена более простая семантика, а именно модели типа Крипке с конечным числом достижимых миров (см.[6], [7]), т.е. их можно рассматривать как *graded modalities*. Вместо приписывания вероятностной меры можно ограничиться простым подсчетом отношения числа миров, выполняющих формулу и достижимых из данного мира, ко всему числу миров, достижимых из данного. При этом доказано, что каждая непротиворечивая формула имеет конечную выполняющую модель.

По-видимому, впервые вероятностные операторы были предложены в статье Р.Монтегю [10]. Мы предлагаем логику PL1 с та-

кими операторами для семантики, приблизительно сходной с семантикой, предложенной Монтегю (аксиоматизации для своей логики Монтегю не давал).

Логика PL1

Алфавит PL1 включает:

- 1) пропозициональные переменные ($p_1, \dots, p_n, \dots$);
- 2) логические константы $\neg, \wedge (\rightarrow, \vee, \equiv$ вводятся по определению);
- 3) унарные модальные операторы Pr для каждого действительного r ;
- 4) технические символы: $(,)$.

Метасимволы $A, B, \dots$ используются для формул, $\Rightarrow, \Leftrightarrow$ - для "если...то" и "если и только если" соответственно, $Pr, P(r+s), P(r-s)$ и т.д. - для операторов.

Определение правильно построенной формулы (п.п.ф.) является обычным; если A есть п.п.ф., то PrA есть п.п.ф. PrA должно читаться как "вероятность A в точности равна r ".

Определение 1. Модель для PL1 $\mathcal{M} = \langle W, \rho_w, \mu_w \rangle$, где

W - непустое множество возможных миров;

ρ_w - функция оценки (для каждого $w \in W$);

μ - функция вероятности из множества всех п.п.ф. (или 2^W) в $[0,1]$ (конечно аддитивная).

Условия истинности определяются как обычно.

$\mathcal{M}, w \models PrA \Leftrightarrow \mu_w(A) = r$ (или $\mu_w(Q_A) = r$, где $Q_A = \{w' : \mathcal{M}, w' \models A\}$).

A истинна в $\mathcal{M}$ ($\mathcal{M} \models A$) е.т.е. для всех $w \in W$, $\mathcal{M}, w \models A$. A общезначима ($\models A$) е.т.е. A истинна во всех моделях.

Определение 2. Множество PL1-аксиом включает все подстановочные примеры следующих схем (для всех A, B , а также действительных r, s, t):

A0. Все пропозициональные тавтологии;

A1. $P1(A \vee \neg A)$

A2. $Pr(A \wedge B) \wedge Ps(A \wedge \neg B) \rightarrow P(r+s)A$

A3. $\neg PrA, r \notin [0,1]$

A4. $PrA \rightarrow \neg PsA (r \neq s)$.

Правила вывода:

MP. $\vdash A, \vdash A \rightarrow B \Rightarrow \vdash B$.

R1. $\vdash A \equiv B \Rightarrow \vdash PrA \equiv PrB$.

RC. $\vdash Pr_1 B_1 \wedge \dots \wedge Pr_n B_n \rightarrow \neg PsA$ для всех $s \neq r \Rightarrow \vdash Pr_1 B_1 \wedge \dots \wedge Pr_n B_n \rightarrow PrA$.

Понятие доказательства в PL1 сформулируем следующим образом.

Определение 3. Во-первых, выводом формулы A из множества формул Γ является последовательность формул, каждая из которых является либо аксиомой, либо элементом Γ , либо получена из предыдущих формул по правилам вывода, и последняя формула этой последовательности есть формула A . Все применения $R1$ и RC должны встречаться в выводе только до того, как вводятся посылки. Во-вторых, если для некоторой последовательности формул метаязыка Γ' и метаформулы A' верно, что существует последовательность метаформул такая, что каждый элемент этой последовательности есть схема аксиомы или элемент Γ' или получен из предыдущих элементов при помощи (схем) правил вывода, и последняя метаформула этой последовательности есть A' , то для любого множества формул Γ , являющегося примером Γ' , и любой формулы A , являющейся примером A' , имеет место $\Gamma \vdash_{PL1} A$.

Таким образом, выводом является последовательность формул, полученная подстановкой из метавывода. Под метавыводом имеется в виду обычный вывод в метаязыке.

Мы будем писать $\vdash A$ и $\Gamma \vdash A$ вместо $PL1 \vdash A$ и $\Gamma \vdash_{PL1} A$.

Сделаем некоторые неформальные комментарии относительно связи аксиом $PL1$ и стандартных аксиом теории вероятности. $A1$ и $A2$ соответствуют аксиоме нормировки и конечной аддитивности соответственно. Необходимость $A4$ и $R1$ очевидна. Определяя понятие п.п.ф., мы не требовали, чтобы $r, s, t, r+s, t-r$ принадлежали $[0,1]$ (чтобы иметь возможность использовать $A2$, например, в косвенном выводе типа

$$P1(A \wedge B), P1(A \wedge \neg B) \Rightarrow P2A; \neg P2A \Rightarrow \neg P1(A \wedge B) \text{ или } \neg P1(A \wedge \neg B)).$$

Поэтому нам нужна $A3$. Единственное подозрительное правило - RC . Чтобы доказать, что "для всех $s \neq r \vdash B \rightarrow \neg P_s A$ ", мы должны использовать метасимволы в выводе, а точнее, использовать метавыводы, соответствующие бесконечному числу выводов в объектном языке, для всех значений индексов при операторах, для которых $s \neq r$.

Теорема 1 (дедукции). $\Gamma, A \vdash B \Rightarrow \Gamma \vdash A \rightarrow B$.

Доказательство. Поскольку $R1$ и RC не применялись к Γ , мы имеем $\Gamma, A, \Theta \vdash B$ при помощи только MP , где Θ есть множество всех результатов применения $R1$ и RC к аксиомам. Поэтому $\Gamma, \Theta \vdash A \rightarrow B$, так как $\vdash \Theta, \Gamma \vdash A \rightarrow B$.

Теорема 2. Для всех A, B, r, s :

- a. $\vdash Pr(A \wedge B) \wedge PtA \rightarrow P(t-r)(A \wedge \neg B)$;
- b. $\vdash PrA \equiv P(1-r) \neg A$;
- c. $\vdash PO(A \wedge \neg A)$;
- d. $\vdash PrA \wedge PsB \wedge Pt(A \wedge B) \rightarrow P(r+s-t)(A \vee B)$;
- e. $\vdash PrA \wedge PsB \wedge Pt(A \vee B) \rightarrow P(r+s-t)(A \wedge B)$;

- f. $\vdash PrA \wedge Pt \wedge (A \wedge B) \wedge Ps(A \vee B) \rightarrow P(t+s-r)B$;
g. $\vdash \neg(A \wedge B) \Rightarrow \vdash PrA \wedge PsB \rightarrow P(r+s)(A \vee B)$;
h. $\vdash \neg(A \wedge B) \Rightarrow \vdash PrA \wedge Pt(A \vee B) \rightarrow P(t-r)B$;
i. $\vdash A \rightarrow B \Rightarrow PrA \rightarrow \neg PsB \ (s < r)$.

Доказательство.

- a. 1. $\vdash Pr(A \wedge B) \wedge Ps(A \wedge \neg B) \rightarrow P(r+s)A$ A2
2. $\vdash Pr(A \wedge B)PtA \wedge Ps(A \wedge \neg B) \rightarrow P(r+s)A, r+s \neq t$ 1, A0
3. $\vdash RtA \rightarrow \neg P(r+s)A, r+s \neq t$ A4
4. $\vdash Pr(A \wedge B) \wedge PtA \wedge Ps(A \wedge \neg B) \rightarrow \neg P(r+s)A, r+s \neq t$ 3, A0
5. $\vdash Pr(A \wedge B) \wedge PtA \rightarrow \neg Ps(A \wedge \neg B), s \neq t-r$ 2, 4, A0
6. $\vdash Pr(A \wedge B) \wedge PtA \rightarrow P(t-r)(A \wedge \neg B)$ 5, RC
- b. 1. $\vdash A \equiv (A \vee \neg A) \wedge A$ A0
2. $\vdash PrA \equiv Pr((A \vee \neg A) \wedge A)I,$ R1
3. $\vdash \neg A \equiv (A \vee \neg A) \wedge \neg A$ A0
4. $\vdash P(1-r)\neg A \equiv P(1-r)((A \vee \neg A) \vee \neg A)$ 3, R1
5. $\vdash P1(A \vee \neg A)$ A1
6. $\vdash Pr((A \vee \neg A) \wedge A) \wedge P1(A \vee \neg A) \rightarrow P(1-r)((A \vee \neg A) \wedge \neg A)$ a
7. $\vdash P(1-r)((A \vee \neg A) \wedge \neg A) \wedge P1(A \vee \neg A) \rightarrow Pr((A \vee \neg A) \wedge A)$ a
8. $\vdash Pr((A \vee \neg A) \wedge A) \rightarrow P(1-r)((A \vee \neg A) \wedge \neg A)$ 5, 6
9. $\vdash P(1-r)((A \vee \neg A) \wedge \neg A) \rightarrow Pr((A \vee \neg A) \wedge A)$ 5, 7
10. $\vdash Pr((A \vee \neg A) \wedge A) \equiv P(1-r)((A \vee \neg A) \wedge \neg A)$ 8, 9
11. $\vdash PrA \equiv P(1-r)\neg A$ 2, 4, 10

c. (из A2 и b).

- d. 1. $\vdash (A \vee B) \wedge \neg B \equiv A \wedge \neg B$ A0
2. $\vdash (A \vee B) \wedge B \equiv B$ A0
3. $\vdash P(r-t)((A \vee B) \wedge \neg B) \equiv P(r-t)(A \wedge \neg B)$ 1, R1
4. $\vdash Ps((A \vee B) \wedge B) \equiv PsB$ 2, R1
5. $\vdash Pt(A \wedge B) \wedge PrA \rightarrow P(r-t)(A \wedge \neg B)$ a
6. $\vdash Pt(A \wedge B) \wedge PrA \rightarrow P(r-t)((A \vee B) \wedge \neg B)$ 3, 5

$$7. \vdash P(r-t)((A \vee B) \wedge \neg B) \wedge Ps((A \vee B) \wedge B) \rightarrow P(r+s-t)(A \vee B) \quad A2$$

$$8. \vdash PrA \wedge PsB \wedge Pt(A \wedge B) \rightarrow P(r+s-t)(A \vee B) \quad 4, 6, 7$$

e. 1. $\vdash PrA \equiv P(1-r)\neg A$

b

2. $\vdash PrB \equiv P(1-r)\neg B$

b

3. $\vdash A \vee B \equiv \neg(\neg A \wedge \neg B)$

A0

4. $\vdash Pt(A \vee B) \equiv Pt\neg(\neg A \vee \neg B)$

3, R1

5. $\vdash Pt\neg(\neg A \vee \neg B) \equiv P(1-t)(\neg A \wedge \neg B)$

b

6. $\vdash Pt(A \vee B) \equiv P(1-t)(\neg A \wedge \neg B)$

4, 5

7. $\vdash P(1-r)\neg A \wedge P(1-r)\neg B \wedge P(1-t)(\neg A \wedge \neg B) \rightarrow$
 $\rightarrow P(1-(r+s-t))(\neg A \wedge \neg B)$

d

8. $\vdash PrA \wedge PsB \wedge Pt(A \vee B) \rightarrow P(r+s-t)(A \wedge B)$

7, 1, 2, 6

f. 1. $\vdash PrA \wedge Ps(A \wedge B) \rightarrow P(r-s)(A \wedge \neg B)$

a

2. $\vdash P(r-s)((A \vee B) \wedge \neg B) \equiv P(r-s)(A \wedge \neg B)$

d. (3)

3. $\vdash PrA \wedge Ps(A \wedge B) \rightarrow P(r-s)((A \vee B) \wedge \neg B)$

1, 2

4. $\vdash Pt(A \vee B) \wedge P(r-s)((A \vee B) \vee \neg B) \rightarrow P(t+s-r)((A \vee B) \wedge B)$

a

5. $\vdash P(t+s-r)((A \vee B) \wedge B) \equiv P(t+s-r)B$

d.(4)

6. $\vdash PrA \wedge Pt(A \wedge B) \wedge Ps(A \vee B) \rightarrow P(t+s-r)$

4, 3, 5

g. (из e. и $\vdash \neg(A \wedge B) \Rightarrow \vdash PO(A \wedge B)$ при помощи R1 и b.)

h. (из f. и $\vdash \neg(A \wedge B) \Rightarrow \vdash PO(A \wedge B)$ при помощи R1 и b.)

i. 1. $\vdash A \rightarrow B \Rightarrow \vdash A \equiv A \wedge B$

A0

2. $\vdash A \rightarrow B \Rightarrow \vdash PrA \equiv A \wedge B$

1, R1

3. $\vdash Pr(A \wedge B) \wedge PsB \rightarrow P(s-r)(A \wedge \neg B)$

a

4. $\vdash \neg P(s-r)(A \wedge \neg B)$, если $s < r$

A3

5. $\vdash Pr(A \wedge B) \rightarrow \neg PsB, s < r$

3, 4, A0

6. $\vdash (A \rightarrow B) \Rightarrow \vdash PrA \rightarrow \neg PsB, s < t$

2, 5

Теорема 3 (непротиворечивость). В PL1: $\vdash A \Rightarrow \models A$.

Доказательство. Общезначимость аксиом очевидна. MP и $R1$ также очевидным образом сохраняют общезначимость. Докажем, что RC имеет то же свойство:

1. $\models Pr_1 B_1 \wedge \dots \wedge Pr_n B_n \rightarrow \neg Ps A$ для всех $s \neq r$ допущение
2. $\mu_w(B_1) = r_1, \dots, \mu_w(B_n) = r_n \Rightarrow \mu_w(A) \neq s$ для всех $s \neq r$ 1
3. $\exists t (\mu_w(A) = t)$
4. $\mu_w(B_1) = r_1, \dots, \mu_w(B_n) = r_n \Rightarrow \mu_w(A) = r$ 2, 3
5. $\models Pr_1 B_1 \wedge \dots \wedge Pr_n B_n \rightarrow Pr A$ 4

Теорема 4 (полнота). В $PL1$: $\models A \Rightarrow \vdash A$.

Доказательство. Докажем, что если $\not\models \neg A$, то для некоторых μ и w имеет место $\mu, w \models A$. Доказательство ведется индукцией по модальной степени формулы A .

Определение 4.

- (i) Если A не содержит модальных операторов, то $M(A) = 0$;
- (ii) $M(\neg A) = M(A)$;
- (iii) $M(A \wedge B) = \max(M(A), M(B))$;
- (iv) $M(Pr A) = M(A) + 1$.

Каждую формулу A $PL1$ можно представить в виде дизъюнкции конъюнкций вида $B_0 \wedge Pr_1 B_1 \wedge \dots \wedge Pr_n B_n \wedge \neg Pr_{n+1} B_{n+1} \wedge \dots \wedge \neg Pr_m B_m$, $0 \leq n \leq m$, где B_0 (возможно пустое) не содержит операторов; каждое B_i ($1 \leq i \leq m$) имеет ту же форму, что и A , но его модальная степень меньше степени A на 1. Дизъюнкция выполнима, если хотя бы одна из таких конъюнкций выполнима. Поэтому без потери общности мы можем ограничиться рассмотрением формул вида $B_0 \wedge Pr_1 B_1 \wedge \dots \wedge Pr_n B_n \wedge \neg Pr_{n+1} B_{n+1} \wedge \dots \wedge \neg Pr_m B_m$.

Итак, пусть $A \equiv B_0 \wedge Pr_1 B_1 \wedge \dots \wedge Pr_n B_n \wedge \neg Pr_{n+1} B_{n+1} \wedge \dots \wedge \neg Pr_m B_m$.
(0) Если $A \equiv B_0$, A выполнима е.т.е. A не есть отрицание пропозициональной тавтологии. Но в этом случае $\vdash \neg A$ в силу $A0$.

(n) $\Rightarrow$ (n+1). Допустим, что теорема доказана для $M(A) = n$. Мы докажем ее для $n+1$. Идея доказательства заимствована из [2] и [3].

Рассмотрим конъюнкции вида $B \sim_1 \wedge \dots \wedge B \sim_m$, где $B \sim_i$ есть B_i или $\neg B_i$. Так как $M(B \sim_i) < M(A)$, мы допускаем по индукции, что каждое непротиворечивое описание состояния выполнимо. Обозначим эти непротиворечивые описания состояний $\beta_1, \dots, \beta_k$. Очевидно, что $\vdash \neg(\beta_i \wedge \beta_j)$, $i \neq j$, и что $m_w(\beta_i \vee \beta_j)$ в нашей модели должно быть равно $\mu_w(\beta_i) + \mu_w(\beta_j)$.

Наша задача состоит в построении такой μ_w , что

$$\mu_w(B_i) \in [0, 1], \quad \sum_{i=1}^k \mu_w(\beta_i) = 1$$

$$\mu_w(B_1) = r_1$$

...

$$\begin{aligned}\mu_w(B_n) &= r_n \\ \mu_w(B_{n+1}) &\neq r_{n+1} \\ &\dots \\ \mu_w(B_m) &\neq r_m\end{aligned}$$

Каждое B_i эквивалентно некоторой дизъюнкции β_j :

$$\begin{aligned}\vdash Pr_1 B_1 &\equiv Pr_1(\beta_{11} \vee \dots \vee \beta_{1u}) \\ &\dots \\ \vdash Pr_n B_n &\equiv Pr_n(\beta_{n1} \vee \dots \vee \beta_{nv}) \\ \vdash Pr_{n+1} B_{n+1} &\equiv Pr_{n+1}(\beta_{(n+1)1} \vee \dots \vee \beta_{(n+1)w}) \\ \vdash Pr_m B_m &\equiv Pr_m(\beta_{m1} \vee \dots \vee \beta_{mz})\end{aligned}$$

Мы можем переписать систему уравнений следующим образом:

$$\begin{aligned}\text{A. } \mu_w(\beta_1) + \dots + \mu_w(\beta_k) &= 1 \\ \mu_w(\beta_{11}) + \dots + \mu_w(\beta_{1u}) &= r_1 \\ &\dots \\ \mu_w(\beta_{n1}) + \dots + \mu_w(\beta_{nv}) &= r_n \\ \text{B. } \mu_w(\beta_i) &\geq 0 \\ \mu_w(\beta_{(n+1)1}) + \dots + \mu_w(\beta_{(n+1)w}) &\neq r_{n+1} \\ &\dots \\ \mu_w(\beta_{m1}) + \dots + \mu_w(\beta_{mz}) &\neq r_m\end{aligned}$$

Если эта система имеет решение, то модель легко построить: ρ_w строится так, что $w \models B_0$; μ_w определяется системой уравнений.

Мы докажем, что если система не имеет решения, то $\vdash \neg 4$.

Стандартный метод решения системы линейных уравнений описан, например, в [9]. Он состоит в последовательном исключении неизвестных переменных.

Рассмотрим пример:

$$\begin{aligned}(1) \quad x_1 + x_2 &= 0.2 \\ (2) \quad x_2 + x_3 &= 0.3 \\ (3) \quad x_1 + x_3 &= 0.4\end{aligned}$$

Из (1) получается $x_1 = 0.2 - x_2$. Мы исключаем x_1 из (3):

$$(1') \quad x_1 = 0.2 - x_2$$

$$(2') x_2 + x_3 = 0.3$$

$$(3') x_3 = 0.4 - 0.2 + x_2$$

Из (2') мы получаем $x_2 = 0.3 - x_3$. Затем мы исключаем x_2 из (3'):

$$(1'') x_1 = 0.2 - x_2$$

$$(2'') x_2 = 0.3 - x_3$$

$$(3'') x_3 = 0.2 + 0.3 - x_3$$

Из (3'') мы получаем $x_3 = 0.25$.

Лемма 1. Если система A имеет единственное решение, например,

$$\mu_w(\beta_1) = x_1, \dots, \mu_w(\beta_k) = x_k \text{ то } \vdash A \rightarrow Px \beta \wedge \dots \wedge Px \beta_k$$

Доказательство. Для всех $s_1, \dots, s_k$:

$$1. \vdash Ps_1\beta_1 \wedge \dots \wedge Ps_k\beta_k \rightarrow P(s_1 + \dots + s_k)(\beta_1 \vee \dots \vee \beta_k) \quad \text{теорема 2(g)}$$

$$2. \vdash Ps_1\beta_1 \wedge \dots \wedge Ps_k\beta_k \wedge P_1(\beta_1 \vee \dots \vee \beta_k) \wedge Pr_1(\beta_{11} \vee \dots \vee \beta_{1u}) \rightarrow P(r_1 - s_{12} - \dots - s_{1u})\beta_{11} \quad T2(h)$$

$$3. \vdash Pr_i(\beta_{11} \vee \beta_{i1} \vee \dots \vee \beta_{ij}) \wedge P(r_1 - s_{12} - \dots - s_{1u})\beta_{11} \rightarrow P(r_i - r_1 + s_{12} + \dots + s_{1u})(\beta_{i1} \vee \dots \vee \beta_{ij})$$

T2(h)

Если система имеет единственное решение, мы исключаем таким образом все неизвестные переменные и получаем на каком-то шаге x :

$$x. \vdash Ps_1\beta_1 \wedge \dots \wedge Ps_k\beta_k \wedge P_1(\beta_1 \vee \dots \vee \beta_k) \wedge Pr_1B_1 \wedge \dots \wedge Pr_nB_n \rightarrow$$

$$\rightarrow P(a_1r_1 \pm \dots \pm a_nr_n)\beta_k$$

T2(h)

$$x+1. \vdash P(a_1r_1 \pm \dots \pm a_nr_n)\beta_k \rightarrow \neg Ps_k\beta_k,$$

$$\text{если } s_k \neq a_1r_1 \pm \dots \pm a_nr_n$$

A4

$$x+2. \vdash Ps_1\beta_1 \wedge \dots \wedge Ps_{k-1}\beta_{k-1} \wedge P_1(\beta_1 \vee \dots \vee \beta_k) \wedge Pr_1B_1 \wedge \dots \wedge Pr_nB_n \rightarrow$$

$$\rightarrow P(a_1r_1 \pm \dots \pm a_nr_n)\beta_k$$

$$x, x+1, RC$$

...

$$x+2k. \vdash P_1(\beta_1 \vee \dots \vee \beta_k) \wedge Pr_1B_1 \wedge \dots \wedge Pr_nB_n \rightarrow$$

$$P(a_1r_1 \pm \dots \pm a_nr_n)\beta_k \wedge \dots \wedge P(b_1r_1 \pm \dots \pm b_nr_n)\beta_1, \text{ где}$$

$$a_1r_1 \pm \dots \pm a_nr_n = x_n, \dots, b_1r_1 \pm \dots \pm b_nr_n = x_1.$$

$$x+3k. A \vdash Px_1\beta_1 \wedge \dots \wedge Px_n\beta_n$$

$$x+2k$$

Чтобы сделать доказательство более ясным, рассмотрим пример, соответствующий приведенному выше:

$$\vdash A \equiv P_{0.2}(\beta_1 \vee \beta_2) \wedge P_{0.3}(\beta_2 \vee \beta_3) \wedge P_{0.4}(\beta_1 \vee \beta_3)$$

1. Для всех s_1, s_2, s_3

$$\vdash Ps_1\beta_1 \wedge Ps_2\beta_2 \wedge Ps_3\beta_3 \wedge P_{0.2}(\beta_1 \vee \beta_2) \rightarrow P_{(0.2-s_2)}\beta_1,$$

$$\text{т.к. } \vdash \neg(\beta_1 \wedge \beta_2)$$

T2(h)

$$2. \vdash P_{0.2-s_2}\beta_2 \wedge P_{0.4}(\beta_1 \vee \beta_3) \rightarrow P_{(0.2+s_2)}\beta_3,$$

$$\text{т.к. } \vdash \neg(\beta_1 \wedge \beta_2)$$

T2(h)

$$3. \vdash Ps_1\beta_1 \wedge Ps_2\beta_2 \wedge Ps_3\beta_3 \wedge P_{0.3}(\beta_2 \vee \beta_3) \rightarrow P_{(0.3-s_3)}\beta_2$$

$$\text{т.к. } \vdash \neg(\beta_2 \wedge \beta_3)$$

T2(h)

$$4. \vdash Ps_2\beta_2 \wedge Ps_3\beta_3 \wedge P_{(0.2+s_2)}\beta_3 \wedge P_{(0.3-s_3)}\beta_2 \rightarrow \neg P_{(0.3-s_3)}\beta_2,$$

для всех $s_2 \neq 0.3-s_3$

A4

$$5. \vdash Ps_2\beta_2 \wedge Ps_3\beta_3 \wedge P_{(0.2+s_2)}\beta_3 \rightarrow \neg P_{(0.3-s_3)}\beta_2,$$

для всех $s_2 \neq 0.3-s_3$

A0

$$6. \vdash Ps_2\beta_2 \wedge Ps_3\beta_3 \wedge P_{(0.2+s_2)}\omega_3 \rightarrow P_{(0.3-s_3)}\beta_2,$$

где $s_2 = 0.3-s_3$

RC

$$7. \vdash Ps_2\beta_2 \wedge Ps_3\beta_3 \wedge P_{(0.2+s_2)}\beta_3 \wedge \rightarrow P_{(0.2+0.3-s_3)}\beta_3$$

(6)

$$8. \text{ для всех } s_3 \neq 0.5-s_3 \vdash Ps_1\beta_1 \wedge Ps_2\beta_2 \wedge A \rightarrow \neg Ps_3\beta_3 \quad (7)$$

$$9. \vdash Ps_1\beta_1 \wedge Ps_2\beta_2 \wedge A \rightarrow P_{0.25}\beta_3$$

RC

...

Из анализа доказательства леммы 1 видно, что

1) если система A выполнима, то

$$\vdash A \rightarrow Pa_1r_1 \pm \dots \pm a_nr_n C \wedge Pb_1r_1 \pm \dots \pm b_nr_n C \text{ для некоторого } C, \text{ причем}$$

$$a_1r_1 \pm \dots \pm a_nr_n \neq b_1r_1 \pm \dots \pm b_nr_n; \text{ следовательно,}$$

$$\vdash Pa_1r_1 \pm \dots \pm a_nr_n C \rightarrow \neg Pb_1r_1 \pm \dots \pm b_nr_n C \text{ по A4 и, таким образом,}$$

$$\vdash A \rightarrow PrC \wedge \neg PrC, \text{ т.е. } \vdash \neg A;$$

2) если система $A \cup B$ невыполнима, в то время, как A имеет (единственное) решение, которое противоречит условиям B , тогда это единственное решение противоречит либо условию $\mu_w(\beta_i) \geq 0$, и тогда $\vdash \neg A$ в силу $A3$, либо противоречит условию $\mu_w(\beta_1) + \dots + \mu_w(\beta_l) \neq r$, соответствующему тому факту, что $\vdash A \rightarrow \neg Pr_l(\beta_1 \vee \dots \vee \beta_l)$, и в то же время $\vdash A \rightarrow Pr_l(\beta_1 \vee \dots \vee \beta_l)$ по лемме 1 и теореме 2(g), так что снова $\vdash \neg A$.

Следствие 1. Если $PL1 \nvdash \neg A$, то для некоторого конечного $M, M, w \models A$.

Доказательство. (Выполняющая модель, построенная в теореме 4, конечна).

Теорема 5 (некомпактность). $PL1$ не обладает свойством компактности.

Доказательство. Рассмотрим простой контрпример:

$$\{ \neg Pr A \text{ для всех } r \in [0, 1] \}$$

Это множество непротиворечиво, но невыполнимо. Его невыполнимость следует из того, что вероятность в модели должна быть определена для всех формул. Чтобы показать непротиворечивость этого множества, рассмотрим следующую интерпретацию: мера определена только для $\emptyset$ и W (для тавтологий и противоречий). Аксиомы $PL1$ в такой системе общезначимы; правила вывода сохраняют общезначимость (для правила RC это будет доказано ниже). Если A выполняется не во всех мирах, но, по крайней мере, в одном (или не является ни тавтологией, ни противоречием), в модели истинно $\{ \neg Pr A \text{ для всех } r \in [0, 1] \}$.

Доказательство для RC . Пусть в семантике мера определена только для W и $\emptyset$. Допустим, что посылка правила общезначима, т.е. истинна во всех моделях:

$$1. \models Pr_1 B_1 \wedge \dots \wedge Pr_n B_n \rightarrow \neg Ps A \text{ для всех } s \neq r$$

$$2. \forall M \forall w [\mu_w(B_1) = r_1 \wedge \dots \wedge \mu_w(B_n) = r_n \Rightarrow \mu_w(A) \neq s \text{ для всех } s \neq r]$$

3. Поскольку мера определена только для W и $\emptyset$, $\mu_w(B_1) = r_1 \wedge \dots \wedge \mu_w(B_n) = r_n$ либо ложно, и тогда из этой посылки следует все, что угодно, в том числе и $\mu_w(A) = r$, либо истинно для всех моделей, поскольку приписывание вероятности W и $\emptyset$ определяется однозначно. В этом случае мы имеем

$$4. \forall M \forall w [\mu_w(A) \neq s \text{ для всех } s \neq r]$$

5.1. Пусть $r = 0$. Нет модели (и мира), в котором A можно было бы приписать значение, отличное от 0. Это значит, что A всегда ложно (область истинности A равна $\emptyset$). Следовательно, $\models P0A$.

5.2. Пусть $r = 1$. Аналогично, если A нельзя приписать никакой меры, кроме 1, значит A нельзя сделать ложной ни в каком мире, следовательно, A - тавтология и $\models P1A$.

5.3. Пусть $r \neq 0$ и $r \neq 1$. Если ни в какой модели A нельзя приписать вероятность, равную 0, A - тавтология, но A нельзя также приписать вероятность, равную 1. Значит, случай 5.3. невозможен.

$$6. \models Pr A \text{ и, следовательно, } \models Pr_1 B_1 \wedge \dots \wedge Pr_n B_n \rightarrow Pr A.$$

Теорема 6 (разрешимость). $PL1$ разрешима.

Доказательство. Как видно из построения выполняющей модели, проблема выполнимости формулы модальной степени n сводится к решению системы линейных уравнений и к установлению выполнимости для формул модальной степени $n-1$. Проблема выполнимости для формул степени 0 разрешима. Поскольку n конечно, она разрешима и для формул степени n .

Некоторые утверждения, связанные с RC

Рассмотрим три типа моделей для вероятностной логики:

- (а) описанный выше;
- (б) модели, в которых функция вероятности определена на некоторой алгебре $Q \subseteq 2W$;
- (с) модели, в которых вероятность определена только для какого-то произвольного множества формул или подмножеств W .

Если $\forall \mu [\mu(B_1) = r_1 \wedge \dots \wedge \mu(B_n) = r_n \Rightarrow \mu(A) \neq s \text{ для всех } s \neq r]$, то для всех типов моделей верно:

Утверждение 1. $\forall \mu$ (если $r_1, \dots, r_n \in Q$, то $r \in Q$);

Утверждение 2. $\forall \mu$ (если $\nvdash PrA$, то $\vdash A \equiv A'$, где A' содержит только пропозициональные переменные, встречающиеся в $B_1, \dots, B_n$).

Для (а) и (б) верно:

Утверждение 3. $\forall \mu (\mu(B_1) = r_1 \wedge \dots \wedge \mu(B_n) = r_n \Rightarrow \mu(A) = r)$.

В случае (с) это неверно.

Доказательство.

1. Решение системы линейных уравнений, соответствующей $\mu(B_1) = r_1 \wedge \dots \wedge \mu(B_n) = r_n$, имеет следующую форму: $x_i = a_1 r_1 \pm \dots \pm a_n r_n$, где $a_1, \dots, a_n$ целые числа и $r_1, \dots, r_n \in Q$. Поэтому в соответствии с леммой 1, $r \in Q$.

2. Пусть $\beta_1, \dots, \beta_k$ есть описания состояний, соответствующие $B_1, \dots, B_n$. Допустим, что система уравнений, соответствующая $\mu(B_1) = r_1 \wedge \dots \wedge \mu(B_n) = r_n$, имеет единственное решение $\mu(\beta_1) = x_1, \dots, \mu(\beta_k) = x_k$. Та же система уравнений определяет значение $\mu(A)$. Это значит, что A может быть построена с помощью только $\beta_1, \dots, \beta_k$.

Если система имеет много решений, то $Pr_1 B_1 \wedge \dots \wedge Pr_n B_n PsA$, $s \neq r$, должно быть выполнимо.

Если система не имеет решения, $\angle \times \partial K \leq \mu$ противоречива (такой меры не существует).

3. Доказательство утверждения 3 для случая (а) содержится в статье; для (б) оно следует из утверждения 2 (так как A принадлежит алгебре, существует значение $\mu(A)$).

Заключение

В данной статье рассматривался в некотором смысле самый простой, исходный вариант вероятностной логики – логика, имеющая дело с утверждениями вида "вероятность...в точности равна r ". Была дана аксиоматизация для пропозиционального случая. Анализируя доказательства полноты и разрешимости системы PL1,

легко убедиться, что для любой разрешимой базисной логики - для одноместного исчисления предикатов, для логики предикатов при условии, что модели имеют размер не больше N , - эти результаты остаются в силе.

Рассмотрим логику PL1 с точки зрения практических приложений. Очевидно, что в этом случае достаточно операторов только для рациональных чисел (возможно даже, с учетом пределов точности, конечного множества рациональных операторов, как в PFD). Надо отметить, что если операторы в PL1 имеются только для рациональных чисел, а μ может принимать любые значения из $[0,1]$, RC все равно сохраняет общезначимость (см. утверждение 1). Мы можем построить систему PL2 с одними только рациональными операторами (так что она будет адекватна конечным крипкевским структурам):

$$\mathbb{M}, w \models PrA \Leftrightarrow \frac{|w':wRw' \wedge w' \models A|}{|w':wRw'|}$$

Легко видеть, что если $r_1, \dots, r_n$ в теореме 4 являются рациональными числами, то мы можем построить такую модель: $\beta_1, \dots, \beta_k$ определяют возможные миры и т.д. (см.: [6]).

Можно также отказаться от итерации операторов, как в [3]. Это, естественно, сильно упростит разрешающую процедуру.

Однако выразительные возможности языка PL1 очень ограничены. Результаты работы [3] и других, упоминавшихся в начале статьи, свидетельствуют о том, что прямой зависимости между выразительными возможностями языка вероятностной логики и ее разрешимостью и полнотой не существует. Часто найти аксиоматизацию для более бедных систем оказывается сложнее (ср., например, [8] и [3]). Целью настоящей статьи было скорее способствовать завершению картины, нежели построить действительно практически полезную систему. Видимо, в случае логик AX_{MEAS} и $AX_{FO-MEAS}$ мы имеем дело с наилучшими из возможных результатов.

Я благодарна за обсуждение статьи и данные при этом советы М. ван Ламбалгену, В. ван дер Хуку, Й. ван Бен temu и П. И. Быстрову.

ЛИТЕРАТУРА

1. Abadi M., Halpern J.V. Decidability and expressiveness for first-order logics of probability// IBM Research Report, 1989.
2. Fattorosi-Barnaba M., Amati G. Modal operators with probabilistic interpretations, 1// Stud. Log. 1987. N4. p. 383-393.
3. Fagin R., Halpern J.V., Megiddo N. A logic for reasoning about probabilities// IBM Research Report RJ 6190, 1988.
4. Gardenfors P. Qualitative probability as an intensional logic// J. Phil. Log. 1985. N4. P. 171-185.
5. Halpern J.V. An analysis of first-order logics of probability// IBM Research Report. 1989.

6. *Hoek W.,van der.* Qualitative modalities// Report Free Univ. of Amsterdam. 1990.
7. *Hoek W.,van der.* Some considerations on the logic $P_F D$ // Report Free Univ. of Amsterdam. 1990.
8. *Keisler H.J.* Probability quantifiers// Model-Theoretic Logics. N.Y.,1985. P.509-555.
9. *Kemeny J.,Snell J.L.,Thompson G.L.* Introduction to finite mathematics. N.Y.,1957.
10. *Montague R.* Pragmatics// Contemp. Philos. 1969. Vol.1. P.51-62.
11. *Nilsson N.* Probabilistic logic// Artificial Intelligense, 1986. V.28. P.71-87.

ТЕОРЕМА ДЕДУКЦИИ ДЛЯ КЛАССИЧЕСКИХ И НЕКЛАССИЧЕСКИХ ИСЧИСЛЕНИЙ

Как известно, в классической логике под теоремой дедукции имеется в виду утверждение, согласно которому выводимость в соответствующем исчислении формулы B из посылок Γ и A (символически: $\Gamma, A \vdash B$) означает, что в этом исчислении существует вывод импликации $A \rightarrow B$ из Γ , т.е. имеет силу $\Gamma \vdash A \rightarrow B$. Эвристическая значимость указанной теоремы достаточно высока, так как она позволяет, в частности, сводить проблему вывода формул вида $A_1 \rightarrow \dots \rightarrow A_n \rightarrow B$ из посылок Γ к менее сложной проблеме вывода B из посылок $\Gamma, A_1, \dots, A_n$.

Чтобы более ясно сформулировать основные цели данной работы, напомним определение логического вывода из посылок, которое мы будем называть стандартным.

Д1. Логическим выводом высказывания (формулы) B из посылок $\Gamma = \{A_1, \dots, A_n\}$ ($n \geq 0$) в исчислении (теории) T называется конечная последовательность высказываний (формул) $B_1, \dots, B_m$ ($m \geq 1$) такая, что последний член последовательности B_m совпадает с B , и для всякого B_i ($1 \leq i \leq m$): (а) B_i есть одна из посылок $A_1, \dots, A_n$; или (б) B_i - теорема исчисления (теории) T ; или (в) B_i получается из двух предшествующих членов последовательности по правилу МР (модус поненс); или (г) B_i представляет собой конъюнкцию двух предшествующих членов последовательности (по правилу адъюнкции: ПА). (Примечание: если в языке теории нет знака конъюнкции, то пункт (г) должен быть опущен. Этот пункт, очевидно, не нужен в теориях, в которых имеет силу аналог классического принципа: $A \rightarrow \dots \rightarrow B \rightarrow AB$, который и позволяет обойтись без этого пункта.)

Из приведенного определения видно, что верность утверждения $\Gamma \vdash B$ гарантирует справедливость любого утверждения $\Gamma, A \vdash B$, а значит в классической логике в силу теоремы дедукции также и $\Gamma \vdash A \rightarrow B$, где A является совершенно произвольным. Ясно поэтому, что в исчислениях, в которых описывается импликация (условная связка), отличная от материальной импликации и предполагающая некоторую содержательную связь между антецедентом и консеквентом истинного условного высказывания, теорема дедукции в приведенной выше форме оказывается принципиально несостоятельной.

Вместе с тем нахождение какого-то подходящего аналога теоремы дедукции для исчислений с неклассическими видами импликаций представляется чрезвычайно важным. И дело не только в уже указанной эвристической значимости этой теоремы. Без этого трудно обосновать содержательную оправданность условной связки, предлагаемой соответствующим исчислением. На это указывает

уже тот факт, что в естественных рассуждениях при обосновании истинности условных высказываний обычно используется прием, равносильный применению теоремы дедукции.

Так, чтобы доказать верность условного предложения вида $A \rightarrow B$, считается достаточным показать, что существует некоторое множество истинных предложений Γ таких, что из Γ и A выводимо B . Иными словами, используется правило косвенного вывода, позволяющее переходить от $\Gamma, A \vdash B$ к $\Gamma \vdash A \rightarrow B$. При этом, что важно подчеркнуть, в естественных рассуждениях некоторым интуитивным, обусловленным здравым смыслом образом избегают тех некорректных последствий, к которым могло бы привести это правило при его ничем не ограниченном применении. Строгая экспликация условий корректного применения теоремы (лучше сказать: принципа) дедукции в естественных рассуждениях оказывается весьма нетривиальной проблемой (подробнее об этом см. в [2]), решение которой хотя и возможно, но мало пригодно при практической работе с исчислениями.

Попытка адаптации и поиска подходящей формулировки теоремы дедукции для исчислений с неэкстенциональной импликацией неизбежно связана с использованием двух взаимосвязанных и взаимодополняющих возможностей. Одна состоит в поиске подходящей переформулировки стандартного определения вывода, а другая - в нахождении адекватных ограничительных условий, при которых от $\Gamma, A \vdash B$ можно переходить к $\Gamma \vdash A \rightarrow B$ с соответствующей импликацией.

Недостатки такого подхода при поисках адекватного исчислению или хотя бы уместной для него формулировки теоремы дедукции достаточно очевидны. К ним относится в первую очередь тот, что определение логического вывода приходится менять в зависимости от свойств описываемой исчислением импликации, принимая всякий раз новое понимание вывода не только в смысле логических принципов, на которые в выводе можно опираться, но и в смысле норм его построения. Подобная релятивизация в понимании вывода, конечно же, не может считаться достоинством. К тому же, мы имеем в таком случае с *ad hoc* определениями, которые ко всему могут быть весьма далеки от содержательного и используемого в естественных рассуждениях понимания вывода.

Скажем, уже в рамках пустой теории, а значит и любой теории вообще, в соответствии с Д1 имеет силу утверждение $A \rightarrow . A \rightarrow B, A \vdash B$ (1). Представим теперь, что имеются исчисления Т1 и Т2, для первого из которых утверждение $A \rightarrow . A \rightarrow B \vdash A \rightarrow B$ является верным, а для второго - нет. Каким образом обосновать правомерность перехода от (1) к (2) в одном случае и неправомерность в другом?

В принципе можно, конечно, для всякого исчисления рекурсивно описать весь класс верных для него утверждений вида $\Gamma, A \vdash B$, к которым применима теорема дедукции (см., например, [2], [4]). Но это мало что дает в практическом смысле, являясь по существу

некоторой (секвенциального типа) переформулировкой исчисления и не будучи никак связанным с реальными процедурами вывода.

Имеется также иной путь, когда шаги стандартного вывода сопровождаются определенного типа анализом, позволяющим судить, может ли к соответствующей посылке быть применен принцип дедукции (см.[1]). Подобного рода анализ, однако, детерминирован некоторой предварительной идеологией и весьма трудно адаптируем к изменению класса доказуемых в исчислениях теорем.

Сформулируем теперь основную цель настоящей работы. Она состоит в том, чтобы дать такое определение логического вывода из данных посылок, которое обеспечило бы справедливость некоторой общей формулировки теоремы дедукции для широкого класса логических исчислений. Причем это определение должно быть таким, чтобы класс следствий из данных посылок Γ во всякой теории T в силу предлагаемого определения был в точности тем же, что и в силу стандартного определения Д1.

Последнее требование соответствующим образом детерминирует круг тех исчислений, для которых будет справедлива предложенная формулировка теоремы дедукции. Дело в том, что, как уже было отмечено, некоторые утверждения о выводимости вида $\Gamma \vdash B$ могут быть получены в рамках даже просто пустой теории в силу разрешенности использовать правило модус поненс. Используя принцип дедукции, из таких утверждений можно получать формулы, которые могут не быть теоремами принятого исчисления. Такие исчисления не являются валидными для принципа дедукции. Валидными для принципа дедукции мы будем называть исчисления (теории), в которых имеют силу такие естественные для импликации принципы, как:

- (1) саморефлексивность - $A \rightarrow A$;
- (2) самодистрибутивность - $(A \rightarrow (B \rightarrow C)) \rightarrow (A \rightarrow B \rightarrow A \rightarrow C)$;
- (3) и (4) два закона транзитивности -
 $A \rightarrow B \rightarrow B \rightarrow C \rightarrow A \rightarrow C$ и $B \rightarrow C \rightarrow A \rightarrow B \rightarrow A \rightarrow C$; а также
- (5) закон утверждения консеквента - $(A \rightarrow B) \rightarrow B$, где A - произвольная теорема теории.

Пусть последовательность $B_1, \dots, B_m$ представляет собой вывод из данных посылок Γ в соответствии с определением Д1. Будем говорить, что использование правила МР в представленном выводе является нормализованным, если и только если для каждого члена последовательности B_i ($1 \leq i \leq m$), который получен из двух предшествующих членов последовательности B_k и B_l , выполнены следующие условия: (1) если B_k - большая посылка, т.е. имеет вид $B_l \rightarrow B_i$, то она предшествует в последовательности меньшей B_l , и (2) между B_l и B_i не находится никакой член последовательности B_j , внесенный в нее на том основании, что B_j входит в число посылок из Γ .

Поясним, что в будущем определении нормализованного вывода мы намерены реализовать требование, чтобы большая посылка при использовании правила МР предшествовала меньшей. Полный

смысл этого требования станет ясен позднее. Пока же скажем только, что оно определенным образом ограничивает возможный порядок вхождения посылок в вывод. Что же касается условия (2), то оно используется как чисто технический прием, блокирующий возможности обойти некоторым образом условие (1). Использование МР в соответствии с (2) не считается нормализованным не только в случае, когда в последовательности вывода A и $A \rightarrow B$, к которым применяется это правило, стоят в указанном порядке, но также и тогда, когда при требуемом порядке их вхождения $A \rightarrow B$ является посылкой из Γ , а A есть результат применения МР к членам последовательности, предшествующим $A \rightarrow B$. Рассмотрим, например, два вывода:

- | | |
|------------------------------|-----------------------------|
| 1. $A \rightarrow A$ (теор.) | 1. $A \rightarrow C$ (пос.) |
| 2. A (пос.) | 2. A (пос.) |
| 3. $A \rightarrow B$ (пос.) | 3. $C \rightarrow B$ (пос.) |
| 4. A (1,2, МР) | 4. C (1,2, МР) |
| 5. B (3,4, МР) | 5. B (3,4, МР) |

Использование МР в обоих приведенных выводах, хотя оно и удовлетворяет условию (1), не является нормализованным. И в том и в другом случаях шаг (4) после шага (3) приводит к нарушению условия (2).

И еще одно естественное соглашение. Будем говорить, что член B_i последовательности вывода $B_1, \dots, B_m$ зависит от члена последовательности B_k , если и только если имеют место случаи: (1) $i = k$, т.е., B_i зависит только от себя самого, (2) B_k является одним из членов последовательности, из которых B_i получено по правилу МР или ПА, (3) если B_i зависит от B_j , а B_j зависит от B_k , то B_i зависит от B_k .

Установить, от каких членов последовательности вывода $B_1, \dots, B_m$ зависит ее последний член B_m , очевидно, можно в результате следующей простой процедуры. Сначала отмечаются те шаги вывода, на основании которых B_m получено непосредственно. Если таковые имеются (а они могут отсутствовать, когда B_m включено в последовательность как теорема или посылка), то отмечаются последовательно, пока процедура не закончится, шаги, на основании которых получены уже отмеченные члены последовательности. Тогда можно утверждать, что B_m зависит от тех и только тех членов последовательности, которые оказались отмеченными.

Теперь можно перейти к требуемому определению.

Д2. Нормализованным логическим выводом формулы B из посылок $\Gamma = \{A_1, \dots, A_n\}$ в теории T называется конечная последовательность формул $B_1, \dots, B_m$ ($m \geq 1$), удовлетворяющая следующим условиям:

(1) B_m совпадает с B , и для всякого B_i ($1 \leq i \leq m$): (а) B_i есть одна из посылок $A_1, \dots, A_n$; или (б) B_i есть теорема теории T ; или (в) B_i получается из предшествующих формул последовательности по пра-

вилу МР при нормализованном его использовании; или (2) V_i есть конъюнкция двух предшествующих членов последовательности (правило ПА). (Примечание: V_i рассматривается в последовательности $V_1, \dots, V_m$ как посылка или как теорема соответственно только тогда, когда V_i включено в последовательность именно в этом качестве.)

(2) Формула V_m зависит от каждой из посылок, включенных в последовательность $V_1, \dots, V_m$.

Убедимся в том, что Д2, несмотря на его серьезные отличия от Д1, не изменяет класса следствий, получаемых из тех же посылок. Начнем с отсутствующего в Д1 пункта (2). Является очевидным, что этот пункт никак не может ограничить числа следствий, которые можно получать в соответствии с Д1, поскольку запрещает лишь явное использование тех посылок, без которых при получении соответствующего следствия можно обойтись.

Пункт (1) определения Д2 содержит не имеющее места в стандартном определении требование, связанное с ограничением на использование МР. Данное ограничение, однако, также не может никак сказаться на классе следствий из данных посылок, поскольку запись формул, к которым применяется правило МР, в порядке, требуемом определением Д2, не влечет к отказу от каких-либо следствий, которые с помощью этого правила могут быть получены.

Таким образом, можно считать доказанной следующую универсальную для любого логического исчисления метатеорему:

МТ1. В любом исчислении Т классы следствий из данных посылок, которые (следствия) могут быть получены в силу определений Д1 и Д2 соответственно, в точности совпадают.

Требование, которое мы выдвигали при построении определения нормализованного логического вывода, выполнено. Различие между Д1 и Д2 состоит только в том, что не всякая конечная последовательность $V_1, \dots, V_m$, которая является выводом В из Г с точки зрения Д1, будет нормализованным выводом в соответствии с Д2. При этом всякий нормализованный вывод является выводом в смысле Д1, и всякий вывод В из Г в смысле Д1 может быть нормализован, т.е. может быть построена соответствующая последовательность, являющаяся выводом из Г в соответствии с Д2.

Обобщенная теорема дедукции, которую нам теперь предстоит сформулировать, будет опираться на структуру соответствующего нормализованного вывода. В связи с этим потребуются некоторые дополнительные терминологические соглашения.

Пусть $V_1, \dots, V_m$ есть нормализованный вывод В из Г в некоторой теории Т. Выделим в этой последовательности такой ее член V_k с наименьшим индексом, после которого в выводе не использовалось правило адъюнкции ПА. Пусть теперь $A_1, \dots, A_n$ есть все те члены последовательности, не обязательно различающиеся, которые в указанном порядке входят в нее в качестве посылок, начиная с шага V_k . Пусть далее Г' - список всех тех посылок из Г, которые были ис-

пользованы в выводе до шага B_k . И, наконец, пусть Γ'' - список тех посылок из Γ , которые не были использованы в выводе, т.е. не встречались в последовательности вывода в качестве посылок.

Мы имеем, таким образом, три списка посылок Γ'' , Γ' и $A_1, \dots, A_n$, которые в своей совокупности исчерпывают список Γ и каждый из которых в конкретном случае может быть пустым.

Выражение $\Gamma'', \Gamma', A_1, \dots, A_n \vdash B$ будем называть *нормализованной записью утверждения* $\Gamma \vdash B$ для нормализованного вывода B из Γ , имеющего вид $B_1, \dots, B_m$.

Заметим, что число различных нормализованных выводов B из Γ может быть достаточно большим, а в силу отсутствия запретов на произвольное включение в последовательность вывода теорем, на повторение членов последовательности, не являющихся посылками, оно, вообще говоря, является бесконечным. В принципе, такие запреты можно было бы ввести, но в теоретическом плане это не существенно, а в практическом им следуют без необходимости специальных оговорок. Вместе с тем, каждому нормализованному выводу соответствует всегда только одна (с точностью до порядка посылок в Γ'' и Γ') нормализованная запись.

Теорема дедукции может быть сформулирована теперь следующим образом:

MT2. (Теорема дедукции) Если $B_1, \dots, B_m$ есть нормализованный вывод B из посылок Γ в валидной для принципа дедукции теории T , и $\Gamma'', \Gamma', A_1, \dots, A_n \vdash B$ есть соответствующая этому выводу нормализованная запись утверждения $\Gamma \vdash B$, то в T имеет силу всякое утверждение $\Gamma'', \Gamma', A_1, \dots, A_{i-1} \vdash A_i \rightarrow \dots \rightarrow A_n \rightarrow B$ ($1 \leq i \leq n$).

Напоминаем, что под теориями, валидными для принципа дедукции, имеются в виду такие теории и исчисления, в которых для фигурирующей в них импликации имеют силу перечисленные выше принципы (1)-(5). Сейчас, когда дана формулировка теоремы дедукции, ясно, что ограничение рамками только таких теорий связано с возможностью получить указанные принципы уже в пустой теории в силу определения нормализованного вывода и теоремы дедукции, точнее, соответствующего этой теореме преобразования посылок вывода в антецеденты выводимого высказывания. Возьмем в качестве примера принцип дистрибутивности импликации. Убедимся, что для любой теории, в том числе пустой, является верным утверждение

$$A \rightarrow B \rightarrow C, A \rightarrow B, A \vdash C.$$

- | | |
|---|--------------------------------|
| 1. $A \rightarrow B \rightarrow C$ (пос.) | 4. $B \rightarrow C$ (1,3, MP) |
| 2. $A \rightarrow B$ (пос.) | 5. B (2,3, MP) |
| 3. A (пос.) | 6. C (4,5,MP) |

Утверждение, верность которого подтверждает приведенный вывод, как легко убедиться, имеет нормализованную запись, что позволяет воспользоваться теоремой дедукции, получая при этом

принцип самодистрибутивности импликации. Аналогичным образом обстоит дело и с другими названными принципами. Таким образом, если бы мы воспользовались нашей теоремой дедукции в невалидных для принципа дедукции теориях, то имели бы возможность получить утверждения в этих теориях неприемлемые.

Рассмотрим несколько примеров, раскрывающих характерные особенности сформулированной теоремы дедукции.

Выше мы уже обратили внимание на утверждение

$$A \rightarrow . A \rightarrow B, A \vdash B.$$

Посмотрим, каким образом блокируется применение теоремы дедукции к этому утверждению в случае, когда в исчислении не имеет силы принцип сокращения. В соответствии с Д2 вывод этого утверждения выглядит следующим образом:

- | | |
|---|------------------|
| 1. $A \rightarrow . A \rightarrow B$ (пос.) | 4. A (пос.) |
| 2. A (пос.) | 5. B (3,4, МР) |
| 3. $A \rightarrow B$ (1,2, МР) | |

Определение Д2, очевидно, не позволит нам избавиться от вторичного использования посылки A , так как требует, чтобы большая посылка при использовании МР предшествовала меньшей. В связи с этим нормализованной записью обсуждаемого утверждения будет

$$A \rightarrow . A \rightarrow B, A, A \vdash B,$$

а это значит, что теорема дедукции не позволяет осуществить сокращения повторяющегося члена импликации. Вместе с тем в исчислениях, где принцип сокращения действует, имеется возможность, используя его в выводе, обойтись без повторного употребления посылки A , а значит и воспользоваться теоремой дедукции.

В дальнейшем, чтобы не записывать достаточно тривиальных выводов, будем говорить, что верное в некотором исчислении T утверждение вида $\Gamma; A_1, \dots, A_n \vdash B$ является для T нормализованным только тогда, когда в T существует соответствующий этому утверждению нормализованный вывод. И это будет означать, что в силу теоремы дедукции в T имеет место всякое утверждение

$$\Gamma; A_1, \dots, A_{i-1} \vdash A_i \rightarrow . \dots \rightarrow . A_n \rightarrow B \quad (1 \leq i \leq n).$$

Нетрудно убедиться, скажем, что верное в релевантных исчислениях E и R утверждение

$$A \rightarrow . C \rightarrow A \rightarrow B, A, C \vdash B$$

является нормализованным для R , но не является таковым для E . Аналогично обстоит дело и для утверждений

$$A \rightarrow . B \rightarrow C, B, A \vdash C \text{ и } A, A \rightarrow B \vdash B,$$

которые нормализованы для R , но не для E . Причем блокирование от принятия неприемлемых для E утверждений достигается, как легко убедиться, в названных случаях исключительно за счет упорядоченного использования посылок правила МР. В исчислении R

это требование легко обходится за счет имеющегося здесь принципа

$$A \rightarrow A \rightarrow B \rightarrow B,$$

который позволяет использовать посылки модуса в ином порядке.

Посмотрим теперь, в чем состоит смысл ограничений, связанных с использованием правила ПА. Утверждение вида

$$AB \rightarrow C, A, B \vdash C$$

является в силу Д2 верным во всякой теории с соответствующим языком. Если, однако, в теории нет принципа экспортации, как, например, в релевантных исчислениях, то получить его за счет теоремы дедукции также невозможно, так как приведенное утверждение в таких теориях не является нормализованным. Это видно из следующего вывода:

- | | |
|------------------------------|-------------------|
| 1. $AB \rightarrow C$ (пос.) | 4. AB (2,3, ПА) |
| 2. A (пос.) | 5. C (1,4, МР) |
| 3. B (пос.) | |

В данном выводе нет ни одной посылки, после которой не использовалось бы правило адъюнкции. Поэтому список посылок, к которым могла бы быть применена теорема дедукции, пуст.

А вот в случае верного в релевантной логике утверждения

$$A \rightarrow B, A \rightarrow C; A \vdash BC$$

мы можем применить теорему дедукции только к посылке A , взяв конъюнкцию двух других посылок и воспользовавшись соответствующей теоремой релевантной логики.

Обобщенно говоря, ограничения, связанные с использованием правила ПА в выводе, не позволяют в нормализованных утверждениях о выводимости заменять входящую в список посылок конъюнкцию списком составляющих ее высказываний. Такая замена возможна лишь в случаях, когда в процессе вывода оказывается возможным обойтись без конъюнктивного объединения соответствующих посылок или их следствий за счет ПА.

Заметим, что имея дело с конкретными исчислениями, можно для каждого из них вводить свое специфическое понимание нормализованного вывода. По-видимому, наибольший практический смысл может иметь анализ и описание допустимых для тех или иных исчислений преобразований нормализованных утверждений о выводимости. Так, например, в случае исчисления Е в нормализованных утверждениях о выводимости можно менять местами посылки A_i и A_{i+1} , когда последняя имеет вид импликации. Для исчисления R порядок посылок в списке $A_1, \dots, A_n$ вообще, как легко понять, не имеет значения. А для неклассических исчислений любое верное утверждение $\Gamma \vdash B$ независимо от порядка входящих в Γ посылок оказывается нормализованным. Причина понятна. Во-первых, классический принцип $A \rightarrow B \rightarrow A$ позволяет включить в по-

следовательность вывода любую посылку. Во-вторых, наличие закона экспортации дает возможность обойтись без ПА. И в-третьих, в классической логике нет никаких ограничений на перестановку членов импликации.

Рассматривая те возможности, которые допускают разные исчисления при преобразованиях нормализованных утверждений о выводимости, можно получать важные сравнительные характеристики как самих исчислений, так и описываемых в них импликаций. Возможен также обратный путь. Идти от принятия некоторых правил преобразований нормализованных утверждений к построению соответствующих им исчислений. Скажем, класс преобразований, допускаемых исчислением E , можно было бы дополнить вполне уместным с содержательной точки зрения и не противоречащим идеологии этого исчисления разрешением сокращать повторяющиеся посылки в списке $A_1, \dots, A_n$. А затем найти соответствующее новому классу преобразований исчисление. Оно, как легко понять, окажется промежуточным между E и R . Вообще говоря, на указанном пути можно показать, что число такого рода промежуточных между E и R исчислений бесконечно. Здесь нет необходимости останавливаться на этом вопросе, так как он подробно исследован, хотя и в связи с иными проблемами, в [2] и [3].

Детальное доказательство теоремы дедукции MT2 было бы чрезвычайно громоздким. Вместе с тем определение Д2, на которое опирается эта теорема, с его явным требованием зависимости последней формулы последовательности вывода ото всех встречающихся в этой последовательности посылок делает справедливость MT2 достаточно очевидной.

Действительно, пусть в некоторой теории T , валидной для принципа дедукции, существует нормализованный вывод $B_1, \dots, B_m$, которому соответствует нормализованное утверждение $\Gamma; A_1, \dots, A_n \vdash B$. Согласно принятым требованиям к таким утверждениям после появления в последовательности вывода посылки A_1 правило ПА в выводе не используется. В связи с этим последний член последовательности B_m , совпадающий с B , может зависеть от A_n только в одном из следующих четырех случаев: (1) A_n совпадает с B_m , (2) A_n использовано только как меньшая посылка МР, (3) A_n использовано только как большая посылка МР, (4) A_n использована и как меньшая и как большая посылка МР.

Анализ всех перечисленных случаев показывает, что наличия во всякой рассматриваемой теории принципов (1)-(5) достаточно для применения теоремы дедукции к посылке A_n , а явное использование этих принципов в последовательности вывода позволяет получить нормализованное утверждение

$$\Gamma; A_1, \dots, A_{n-1} \vdash A_n \rightarrow B.$$

А этого достаточно для доказательства MT2.

Обращаем внимание, что МТ2 адекватна для любой теории Т, где она имеет силу, в смысле следующей метатеоремы:

МТ3. Утверждение $\Gamma \vdash A \rightarrow B$ верно во всякой валидной для принципа дедукции теории Т, если и только если в Т существует нормализованный вывод, которому соответствует нормализованное утверждение $\Gamma; A \vdash B$.

Действительно, раз существует вывод $A \rightarrow B$ из Γ , его всегда можно нормализовать. Конечной формулой последовательности нормализованного вывода будет $A \rightarrow B$. Добавив к этой последовательности формулы A (как посылку) и B (как результат МР), мы, очевидно, получим нормализованный вывод B из Γ и A , а значит требуемое $\Gamma; A \vdash B$. Обратное утверждение получается на основании МТ2. Таким образом, МТ3 доказана.

МТ3 показывает, что в определении нормализованного вывода и условиях применения теоремы дедукции МТ2 не содержится каких-либо ограничений, по причине которых при верности $\Gamma \vdash A_1 \rightarrow \dots \rightarrow A_n \rightarrow B$ нельзя было бы одновременно не иметь нормализованного утверждения $\Gamma; A_1, \dots, A_n \vdash B$.

Возьмем, например, верное во всех обсуждаемых теориях утверждение: $\vdash A \rightarrow B \rightarrow B \rightarrow A \rightarrow A \rightarrow A$. Можно убедиться, что соответствующее утверждение $A \rightarrow B, B \rightarrow A, A \vdash A$ является нормализованным. Это демонстрируется следующей последовательностью:

- | | |
|-----------------------------|------------------|
| 1) $A \rightarrow B$ (пос.) | 4) B (1,3, МР) |
| 2) $B \rightarrow A$ (пос.) | 5) A (2,4, МР) |
| 3) A (пос.) | |

Конечно, на практике строить такие выводы, когда следствие входит в число посылок, не имеет никакого смысла. Однако подобные выводы могут оказаться необходимыми для внутренних целей теории, а главное, они вполне законны, так как представляют собой подстановочные случаи вполне естественных выводов. В рассмотренном случае - это вывод из $A \rightarrow B, B \rightarrow C$ и A , где вместо C , которое может быть произвольным, фигурирует A .

В заключение отметим, что принятое нами определение нормализованного вывода позволяет, как и стандартное, считать верными, во-первых, утверждения вида $\vdash B$ (т.е. допускает возможность вывода из пустого списка посылок), а во-вторых, писать вместо пустого списка посылок произвольный список Γ . Поэтому верность утверждения вида $A \vdash B$ в Т совсем не означает, что в Т имеет место $\vdash A \rightarrow B$. Такое несоответствие может рассматриваться как определенный недостаток. Скажем, сторонник релевантной логики может считать неприемлемым не только

$\vdash A \rightarrow B \rightarrow B$, но и $A \vdash B \rightarrow B$.

Устранения указанного несоответствия можно достигнуть, вводя запрет на вывод из пустого списка посылок. При этом надо наложить очевидные ограничения на теорему дедукции. Во-первых,

необходимо исключить возможность получения в соответствии с теоремой дедукции утверждений вида $\Gamma \vdash B$, в которых Γ не содержит ни одной посылки, использованной в нормализованном выводе, на основании которого применяется эта теорема. Исключение может быть сделано для случая, когда Γ - пусто. Но если такое исключение делается, то, и это во-вторых, утверждение вида $\vdash B$ должно пониматься исключительно как утверждение о доказуемости, которое не допускает обычно принятой интерпретации в терминах выводимости и поэтому не позволяет поставить перед знаком доказуемости произвольных посылок.

ЛИТЕРАТУРА

1. Войшвилло Е.К. Философско-методологические аспекты релевантной логики// М., 1988.
2. Сидоренко Е.А. Логическое следование и условные высказывания// М., 1983.
3. Сидоренко Е.А. Логические выводы, доказательства и теория дедукции// Логика научного познания. М., 1987. С. 73-93
4. Смирнов В.А. Логические методы анализа научного знания// М., 1987.

РЕЛЕВАНТНЫЕ СИСТЕМЫ С ГЛОБАЛЬНЫМИ ПРАВИЛАМИ ВЫВОДА

Современные исследования в области неклассической логики позволяют прийти к выводу, что доказательства метатеорем о наиболее важных свойствах формальных систем с релевантной импликацией часто зависят от тех методов и средств, которые используются при их построении. Собственно говоря, релевантная логика не является в этом смысле исключением. Это подтверждается следующим простым примером. Теорема об устранении сечения недоказуема для некоторых расширений модальной системы S_4 , так называемой Брауэровой системы, и S_5 в их стандартных, "традиционных" формулировках и доказуема для этих же систем, если они построены с учетом некоторых новых или дополнительных средств. Дело, по-видимому, заключается в том, что дедуктивные свойства логического исчисления с неклассическими логическими связками существенным образом зависят от принципов, лежащих в основе синтаксического построения этого исчисления.

Логическая система может быть задана различными способами: аксиоматически, в виде табличного исчисления и т.д. Не все из них одинаково удобны для анализа выводов. Самые широкие возможности в этом плане открывают секвенциальные исчисления и системы натурального вывода. Если же речь идет о стандартизации выводов, нормализации выводов и других подобных процедурах, первостепенное значение приобретает известная теорема Генцена об устранении сечения в различных ее вариантах. Существует конкретная проблема - представить логическую систему в секвенциальной форме таким образом, чтобы имела место теорема об устранимости сечения. В области неклассических логик эта проблема нетривиальна.

В данной работе предлагается один из возможных методов построения секвенциальных исчислений с релевантной импликацией, который, по моему мнению, открывает новые возможности в плане нормализации выводов в логических системах, получивших название релевантных. В основе метода лежат выдвинутые О.Ф.Серебрянниковым идеи о различении существенных и несущественных вхождений подформул в данную формулу и использовании понятия пути в дереве секвенций. Понятие пути в выводе, по-видимому, впервые было эффективно использовано Д.Правицем в доказательстве нормализационной теоремы для системы натурального вывода [5]. Введение такого понятия в формулировку секвенциальных исчислений по существу означает нетрадиционную трактовку правил вывода. В стандартных формулировках все правила вывода локальны в том смысле, что корректность их применения

зависит только от вида секвенций, являющихся посылками данного правила. Однако можно применять правила иного типа, а именно - правила, регламентирующие переход от одних секвенций к другим в зависимости от того, каковы выводы секвенций, являющихся их посылками. Другими словами, корректность применения таких правил (назовем их глобальными правилами) всегда зависит не только от вида их посылок, но и от состояния выводов этих посылок.

1. Секвенциальное исчисление GR

Для формулировки исчисления GR используются стандартный язык пропозициональной логики, обычные понятия секвенции, дерева секвенций, главной и боковой формул некоторого применения секвенциального правила вывода, параметрического предка (потомка) и др. Везде далее $A, B, C, \dots$ обозначают формулы, возможно не содержащие логических связок (элементарные формулы, или пропозициональные переменные), $\Gamma, \Theta, \Delta, \Psi$ - конечные, возможно пустые, списки формул, $\&$ - конъюнкция, $\vee$ - дизъюнкция, $\supset$ - импликация, $\neg$ - отрицание. Буквы греческого алфавита α, β будут иногда использоваться в качестве метазнаков для произвольных формул. Все понятия, введенные в работах [2], [3] и [4], специально не определяются за исключением тех случаев, когда они модифицированы и требуют особых пояснений.

В формулировке GR существенно различие между *формулой* и *вхождением формулы в секвенцию (в дерево секвенций)*. Понятие вхождения формулы в конечный список формул предполагается известным. Каждое вхождение формулы α в списки Γ и Θ считается фиксированным вхождением α в секвенцию $\Gamma \rightarrow \Theta$. Некоторое фиксированное вхождение α в секвенцию S называется членом этой секвенции, причем вхождение α в Γ считается антецедентным (членом), а вхождение α в Θ - сукцедентным (членом) секвенции S . Соответственно фиксируется каждое вхождение секвенции S в дерево секвенций Σ . Таким образом, если имеется m вхождений формулы α в секвенцию S и n вхождений секвенции S в дерево секвенций Σ , то имеется ровно $m \cdot n$ фиксированных вхождений α в Σ . Например, в секвенции $A, A \& B, A, B \rightarrow B, A$ имеются одно вхождение формулы $A \& B$, два вхождения формулы B и три вхождения формулы A . Если в некотором Σ содержится n вхождений этой секвенции, то в Σ имеется $n, 2n$ и $3n$ фиксированных вхождений формул $A \& B, B$ и A соответственно. Понятия параметрического предка и потомка фиксированного вхождения формулы в Σ естественным образом получаются из понятий параметрического предка и потомка данной формулы и не требуют дополнительных объяснений.

Ключевым понятием для GR является понятие пути в дереве секвенций. Пусть Σ есть дерево секвенций, построенное из основных секвенций вида $A \rightarrow A$ с помощью некоторых правил вывода, а S - конечная секвенция Σ .

Определение 1. Пусть S_i есть некоторое вхождение основной секвенции в дерево секвенций Σ . Контрарной парой дерева Σ называется пара формул, являющихся членами S_i .

Определение 2. Путь w в Σ от члена B секвенции S к члену этой секвенции C есть наименьшая последовательность формул $A_1, \dots, A_n$ такая, что A_1 графически совпадает с B , A_n графически совпадает с C и для любого i ($1 \leq i \leq n$) выполняется один из следующих пунктов:

- (1) A_i является параметрическим потомком (предком) A_{i+1} ;
- (2) A_i графически совпадает с главной формулой, а A_{i+1} - с боковой формулой некоторого применения правила вывода в Σ , или A_i графически совпадает с боковой формулой, а A_{i+1} - с главной формулой некоторого применения правила вывода в Σ ;
- (3) A_i графически совпадает с антецедентным (сукцедентным) членом, а A_{i+1} - с сукцедентным (антецедентным) членом одного и того же вхождения основной секвенции в Σ ;
- (4) A_i графически совпадает с левой (правой) формулой, а A_{i+1} - с правой (левой) формулой одного и того же применения сечения в Σ .

Составляющая некоторого пути w в Σ есть любой член A_i последовательности $A_1, \dots, A_n$, удовлетворяющей Определению 2. При этом, если A_i графически совпадает с антецедентным (сукцедентным) членом некоторой секвенции, то она считается отрицательным (положительным) вхождением A_i в Σ . Если по крайней мере для двух составляющих пути w выполняется пункт (3) Определения 2, то будем говорить, что путь w содержит контрарную пару или проходит через контрарную пару. Очевидно, что в общем случае некоторый путь в дереве секвенций может содержать несколько графически совпадающих или различных контрарных пар или не содержать ни одной контрарной пары. Если две составляющие α и β пути w связаны таким образом, что α является членом контрарной пары, а β получена из α в результате применений логических правил вывода, то будем говорить, что β происходит от α .

Исчисление GR формулируется следующим образом.

Основная секвенция: $A \rightarrow A$

Логические правила вывода:

$$(\rightarrow \&) \frac{\Gamma \rightarrow \Theta, A \quad \Gamma \rightarrow \Theta, B}{\Gamma \rightarrow \Theta, A \& B};$$

$$(\vee \rightarrow) \frac{A, \Gamma \rightarrow \Theta \quad B, \Gamma \rightarrow \Theta}{A \vee B, \Gamma \rightarrow \Theta};$$

$$\begin{array}{ll}
(\&\rightarrow) \frac{A, \Gamma \rightarrow \Theta}{A \& B, \Gamma \rightarrow \Theta} & (\&\rightarrow) \frac{B, \Gamma \rightarrow \Theta}{A \& B, \Gamma \rightarrow \Theta}; \\
(\rightarrow \vee) \frac{\Gamma \rightarrow \Theta, A}{\Gamma \rightarrow \Theta, A \vee B}; & (\rightarrow \vee) \frac{\Gamma \rightarrow \Theta, B}{\Gamma \rightarrow \Theta, A \vee B}; \\
(\neg \rightarrow) \frac{\Gamma \rightarrow \Theta, A}{\neg A, \Gamma \rightarrow \Theta}; & (\neg \rightarrow) \frac{A, \Gamma \rightarrow \Theta}{\Gamma \rightarrow \Theta, \neg A}; \\
(\supset \rightarrow) \frac{\Gamma \rightarrow A \quad B, \Delta \rightarrow \Theta}{A \supset B, \Gamma, \Delta \rightarrow \Theta} & (\rightarrow \supset) \frac{A, \Gamma \rightarrow B}{\Gamma \rightarrow A \supset B}
\end{array}$$

при условиях, что

- в дереве секвенций Σ , конечной секвенцией которого является посылка правила $(\rightarrow \supset)$ имеются: (1) такой содержащий по крайней мере одну контрарную пару путь от каждого antecedентного вхождения формулы A_n в Σ к формуле B , что составляющая этого пути A_{n+1} не является параметрическим потомком A_n ; (2) такой содержащий по крайней мере одну контрарную пару путь от каждого сукцедентного вхождения формулы B_k в Σ к формуле A , что составляющая этого пути B_{k+1} не является параметрическим потомком B_k ; (3) пути от каждого antecedентного вхождения C_m в Σ любого члена списка Γ к формуле B , причем каждый из этих путей проходит по крайней мере через одну контрарную пару, и в каждом из них составляющая C_{m+1} не является параметрическим потомком C_m ;

- для дерева секвенций, конечной секвенцией которого является левая посылка правила $(\supset \rightarrow)$, выполняется пункт (3) предыдущего условия с заменой в его формулировке B на A ;

Структурные правила:

$$\begin{array}{ll}
(\rightarrow p) \frac{\Gamma \rightarrow \Theta, A, B, \Psi}{\Gamma \rightarrow \Theta, B, A, \Psi}; & (p \rightarrow) \frac{\Gamma, A, B, \Delta \rightarrow \Theta}{\Gamma, B, A, \Delta \rightarrow \Theta}; \\
(\rightarrow c) \frac{\Gamma \rightarrow \Theta, A, A}{\Gamma \rightarrow \Theta, A}; & (c \rightarrow) \frac{A, A, \Gamma \rightarrow \Theta}{A, \Gamma \rightarrow \Theta}; \\
(\rightarrow w) \frac{\Gamma \rightarrow \Theta}{\Gamma \rightarrow \Theta, A}; & (w \rightarrow) \frac{\Gamma \rightarrow \Theta}{A, \Gamma \rightarrow \Theta}.
\end{array}$$

Сечение:

$$(\text{cut}) \frac{\Gamma \rightarrow A \quad A, \Delta \rightarrow \Theta}{\Gamma, \Delta \rightarrow \Theta},$$

при условии, что в дереве секвенций Σ_1 , конечной секвенцией которого является левая посылка данного правила, имеются пути от каждого вхождения C_i в Σ_1 любого члена списка Γ к формуле A , причем каждый из этих путей проходит по крайней мере через одну контрарную пару и в каждом из них составляющая C_{i+1} не является параметрическим потомком C_i .

GR-вывод секвенции S есть построенное с помощью перечисленных правил дерево секвенций Σ , вершинами которого являются основные секвенции, конечной секвенцией - секвенция S , и для всякого применения правил $(\rightarrow \supset)$, $(\supset \rightarrow)$ и (cut) в Σ соблюдается относящееся к данному применению условие. Секвенция S выводима, или доказуема, в GR если и только если построен GR-вывод, конечной секвенцией которого является S . Любое поддерево Σ_1 GR-вывода Σ , заканчивающееся секвенцией S_1 , называется подвыводом GR-вывода Σ и является GR-выводом секвенции S_1 .

Примечание 1. При определении путей в GR-выводе обе боковые формулы некоторого применения правила $(\rightarrow c)$ или $(c \rightarrow)$ считаются параметрическими предками главной формулы данного применения правила. Очевидно, что формула сечения не имеет параметрических потомков, а формулы, появляющиеся в выводе в результате применений правил $(w \rightarrow)$ и $(\rightarrow w)$, и члены основной секвенции не имеют параметрических предков.

Примечание 2. В исчислении GR выводимыми, или доказуемыми, выражениями являются секвенции. Однако при этом следует иметь в виду, что говорить об отдельно взятой секвенции как о выводимом объекте фактически не имеет смысла в силу глобального характера некоторых правил вывода в GR. Согласно формулировке исчисления, некоторая секвенция S может считаться выводимой в том и только в том случае, когда предъявлен другой синтаксический объект, а именно - GR-вывод, конечной секвенцией которого является S . В этом смысле GR представляет собой набор средств для порождения объектов, каждый из которых представляет собой пару (Σ, S) , где Σ есть GR-вывод, а S - его конечная секвенция. Секвенции традиционно рассматриваются как метаутверждения о выводимости формул (в рамках той или иной логической системы). В случае с GR эта традиция сохраняется, но при этом утверждения о выводимости носят более сложный характер, поскольку каждой секвенции S сопоставлена синтаксическая конструкция (также состоящая из секвенций), представляющая собой систему выводимостей, порождающую S . Это свойство GR явным образом проявляется при определении формульных образов выводимых секвенций.

Пример 1.

$B \rightarrow B$		
$B \rightarrow B, C$	$C \rightarrow C$	$A \rightarrow A$
$B \rightarrow C, B$	$C \rightarrow C, B$	$A \rightarrow A, C$
$B \vee C \rightarrow C, B$	$A \rightarrow C, A$	
$A \& (B \vee C) \rightarrow C, B$	$A \& (B \vee C) \rightarrow C, A$	
$A \& (B \vee C) \rightarrow C, A \& B$		
$A \& (B \vee C) \rightarrow C, (A \& B) \vee C$		
$A \& (B \vee C) \rightarrow (A \& B) \vee C, C$		
$A \& (B \vee C) \rightarrow (A \& B) \vee C, (A \& B) \vee C$		
$A \& (B \vee C) \rightarrow (A \& B) \vee C$		
$\rightarrow A \& (B \vee C) \supset (A \& B) \vee C$		

Данное дерево секвенций является корректным GR-выводом секвенции $\rightarrow A \& (B \vee C) \supset (A \& B) \vee C$, поскольку единственное применение правила $(\rightarrow \supset)$ удовлетворяет соответствующему условию.

Пример 2.

$A \rightarrow A$	
$(\rightarrow w)$	$A \rightarrow A, B$
$(\rightarrow p)$	$A \rightarrow B, A$
$(\vee \rightarrow)$	$A \vee B \rightarrow B, A$
$(\neg \rightarrow)$	$\neg A, A \vee B \rightarrow B$
$(p \rightarrow)$	$A \vee B, \neg A \rightarrow B$
$* (\rightarrow \supset)$	$\neg A \rightarrow (A \vee B) \supset B$
$(\rightarrow \supset)$	$\rightarrow \neg A \supset ((A \vee B) \supset B)$

Несмотря на то, что здесь последнее применение правила $(\rightarrow \supset)$ вполне корректно, данное дерево секвенций не является GR-выводом секвенции $\rightarrow \neg A \supset ((A \vee B) \supset B)$, а его поддереву не является GR-

выводом секвенции $\neg A \rightarrow (A \vee B) \supset B$. Отмеченное * применение правила ($\rightarrow \supset$) не удовлетворяет необходимому условию, а именно - в дереве секвенций, конечной секвенцией которого является посылка данного применения правила, нет соответствующего условию пути от каждого вхождения формулы B в это дерево к формуле $A \vee B$. В то же время поддерево секвенций, заканчивающееся применением правила ($p \rightarrow$), является GR-выводом секвенции $A \vee B, \neg A \rightarrow B$. Таким образом, единственное некорректное применение правила вывода блокирует возможность получения GR-вывода какой-либо секвенции.

Определение 3. Рангом GR-вывода по члену его конечной секвенции A называется общее число параметрических предков формулы A , содержащихся в данном выводе.

Определение 4. Применение в GR-выводе правила сокращения называется регулярным, если одна из боковых формул данного применения одновременно является главной формулой применения одного из логических правил вывода.

Для исчисления GR верно следующее утверждение (об устранимости сечения).

Утверждение 1. Если можно построить GR-вывод некоторой секвенции S , то можно построить GR-вывод этой секвенции, не содержащий применений правила (cut).

Для доказательства применяется метод, изложенный в [1]. Специфика его состоит в том, что из исходного вывода устраняется сечение без предварительной замены его на смещение или какое-либо другое подобное правило. При этом используются следующие две леммы.

Лемма 1. Любой не содержащий сечений GR-вывод секвенции S , который заканчивается единственным нерегулярным применением сокращения, можно преобразовать в свободный от сечений GR-вывод секвенции S , заканчивающийся единственным регулярным применением сокращения, причем ранг нового вывода по любому члену его конечной секвенции не будет превышать ранг исходного вывода по этому же члену.

Лемма доказывается так же, как и соответствующая лемма о регулярности сокращений для модального секвенциального исчисления (см. [1]). При этом исключаются случаи, касающиеся модальных правил, и нужно следить лишь за тем, чтобы преобразования исходного вывода не нарушали его корректности, то есть не нарушались бы условия применения правил для импликации. Нетрудно убедиться, что все необходимые условия действительно остаются в силе.

Лемма 2. Пусть в некотором не содержащем применений сечения GR-выводе существует такой его подвывод Σ с конечной секвенцией $\Gamma \rightarrow C, B$, что (1) секвенция $\Gamma \rightarrow C, B$ является посылкой такого применения логического правила, заключением которого является секвенция $\Gamma \rightarrow C, C$, и (2) имеются пути от каждого вхождения любого члена A_k списка Γ в Σ к формуле C , причем каждый из

этих путей проходит по крайней мере через одну контрарную пару и в каждом из них составляющая A_{k+1} не является параметрическим потомком A_k . Тогда в выводе Σ имеется такой подвывод Σ_1 секвенции $\Gamma \rightarrow A$, что Σ_1 сохраняет свойство (2) вывода Σ , и секвенцию $\Gamma \rightarrow C$ можно получить из $\Gamma \rightarrow A$ последовательным применением сукцедентных логических правил, если формулы A и C не являются одной и той же формулой.

Справедливость этой леммы нетрудно показать возвратной индукцией по длине l вывода Σ , где l есть общее число применений правил вывода в Σ . Если выполняются условия леммы, то в Σ всегда можно однозначно указать такую секвенцию S , которая либо графически совпадает с секвенцией $\Gamma \rightarrow C$, либо последняя может быть получена из S последовательным применением сукцедентных логических правил, и тем самым выделить требуемый подвывод. Действительно, в силу пункта (2) условия леммы, невозможно, чтобы формула C была введена с помощью правила $(\rightarrow w)$. Значит C либо является членом некоторого вхождения основной секвенции в Σ , либо происходит от члена некоторого вхождения основной секвенции в Σ . В первом случае формулы A и C совпадают и требуемым подвыводом будет подвывод с конечной секвенцией $\Gamma \rightarrow C$. Во втором случае, на путях к формуле C , указанных в пункте (2) условия леммы, фиксируется общая их составляющая A (являющаяся подформулой формулы C), и та секвенция, сукцедентным членом которой является A , выделяется в качестве конечной секвенции некоторого вывода. Очевидно, что этот вывод и будет требуемым подвыводом Σ_1 вывода Σ , заканчивающимся секвенцией $\Gamma \rightarrow A$.

Основной индукцией в доказательстве Утверждения 1 является индукция по числу применений правил вывода в исходном GR-выводе. В случае, когда рассматривается применение правила сечения, используется дополнительная двойная индукция по стандартно определяемой степени и рангу этого применения сечения (рангом некоторого применения сечения считается сумма рангов выводов (см. Определение 3) левой и правой посылок по формуле данного применения сечения) (см. [1]). Ряд случаев доказательства тривиальны или не требуют отдельных пояснений. Здесь приводятся лишь наиболее важные из них, связанные с применениями правил для импликации или требующие применения дополнительных лемм.

Случай 1. Пусть ранг сечения равен 2 и конец исходного вывода имеет вид:

$$\begin{array}{c}
 \begin{array}{c} A, \Gamma \rightarrow B \\ (\rightarrow \supset) \hline \Gamma \rightarrow A \supset B \end{array} \quad \begin{array}{c} \Delta \rightarrow A \quad B, \Delta_1 \rightarrow \Theta \\ (\supset \rightarrow) \hline A \supset B, \Delta, \Delta_1 \rightarrow \Theta \end{array} \\
 (\text{cut}) \hline \Gamma, \Delta, \Delta_1 \rightarrow \Theta
 \end{array}$$

Тогда конец результирующего вывода будет следующим

$$\begin{array}{c} \Delta \rightarrow A \quad A, \Gamma \rightarrow B \\ \text{(cut)} \frac{}{} \\ \Gamma, \Delta \rightarrow B \quad B, \Delta_1 \rightarrow \Theta \\ \text{(cut)} \frac{}{} \\ \Gamma, \Delta, \Delta_1 \rightarrow \Theta \end{array}$$

Оба применения сечения корректны, имеют степень, меньшую степени сечения исходного вывода и устранимы по индуктивному предположению.

Случай 2. Степень сечения произвольна, при этом ранг сечения больше 2.

Случай 2.1. Левый ранг сечения равен единице, а правый ранг превышает единицу.

Пусть конец исходного вывода имеет вид:

$$\begin{array}{c} \Gamma \rightarrow C \quad \text{(R)} \frac{C, \Delta_1 \rightarrow \Theta_1}{C, \Delta \rightarrow \Theta} \\ \text{(cut)} \frac{}{} \\ \Gamma, \Delta \rightarrow \Theta \end{array},$$

где (R) - применение однопосылочного правила вывода.

Пусть (R) есть применение правила ($\rightarrow \supset$). Тогда конец исходного вывода будет следующим

$$\begin{array}{c} \Gamma \rightarrow C \quad (\rightarrow \supset) \frac{A, C, \Delta \rightarrow B}{C, \Delta \rightarrow A \supset B} \\ \text{(cut)} \frac{}{} \\ \Gamma, \Delta \rightarrow A \supset B \end{array}$$

Конец результирующего вывода:

$$\begin{array}{c} \Gamma \rightarrow C \quad C, A, \Delta \rightarrow B \\ \text{(cut)} \frac{}{} \\ A, \Gamma, \Delta \rightarrow B \\ (\rightarrow \supset) \frac{}{} \\ \Gamma, \Delta \rightarrow A \supset B \end{array}$$

Ранг этого сечения на единицу меньше ранга сечения исходного вывода, следовательно, оно устранимо в силу индуктивного предположения. Применение сечения в результирующем выводе корректно.

Пусть правая посылка сечения является заключением правила ($\supset \rightarrow$), то есть конец исходного вывода имеет вид:

$$\begin{array}{c}
\frac{C, \Gamma \rightarrow A \quad B, C, \Delta \rightarrow \Theta}{(\supset \rightarrow) \frac{\Delta_1 \rightarrow C \quad C, A \supset B, \Gamma, \Delta \rightarrow \Theta}{(\text{cut}) \frac{\Delta_1, A \supset B, \Gamma, \Delta \rightarrow \Theta}}
\end{array}$$

Конец результирующего вывода будет следующим:

$$\begin{array}{c}
\frac{\Delta_1 \rightarrow C \quad C, \Gamma \rightarrow A \quad \Delta_1 \rightarrow C \quad C, B, \Delta \rightarrow \Theta}{(\supset \rightarrow) \frac{\Delta_1, \Gamma \rightarrow A \quad B, \Delta_1, \Delta \rightarrow \Theta}{A \supset B, \Delta_1, \Delta_1, \Delta, \Gamma \rightarrow \Theta}} \\
\frac{(\supset \rightarrow) \frac{(\supset \rightarrow) \frac{(\supset \rightarrow) \frac{\Delta_1, A \supset B, \Gamma, \Delta \rightarrow \Theta}{(\text{cut}) \frac{\Delta_1, A \supset B, \Gamma, \Delta \rightarrow \Theta}}}{(\text{cut}) \frac{\Delta_1, A \supset B, \Gamma, \Delta \rightarrow \Theta}}}{(\text{cut}) \frac{\Delta_1, A \supset B, \Gamma, \Delta \rightarrow \Theta}}
\end{array}$$

где двойная черта означает необходимое число последовательных применений правил сокращения и перестановки. Оба применения сечения имеют ранг меньше ранга применения сечения в исходном выводе и устранимы по индуктивному предположению. Все применения правил в результирующем выводе корректны.

Пусть правая посылка сечения является заключением применения правила $(c \rightarrow)$, причем формула сечения графически совпадает с главной формулой $(c \rightarrow)$. Тогда, согласно Лемме 1, это применение сокращения регулярно, и если в нем одна из боковых формул одновременно является главной формулой применения однопосылочного логического правила, то конец результирующего вывода будет иметь вид:

$$\begin{array}{c}
\frac{C^*, C, \Delta \rightarrow \Theta}{(R) \frac{C, C, \Delta \rightarrow \Theta}{(c \rightarrow) \frac{\Gamma \rightarrow C \quad C, \Delta \rightarrow \Theta}{(\text{cut}) \frac{\Gamma, \Delta \rightarrow \Theta}}}}
\end{array}$$

где C^* есть боковая, а C - главная формула правила (R) .

В этом случае конец результирующего вывода выглядит следующим образом

$$\begin{array}{c}
\frac{\Gamma \rightarrow C \quad C, C^*, \Delta \rightarrow \Theta}{(\text{cut}) \frac{C^*, \Gamma, \Delta \rightarrow \Theta}{(R) \frac{\Gamma \rightarrow C \quad C, \Gamma, \Delta \rightarrow \Theta}{(\text{cut}) \frac{\Gamma, \Gamma, \Delta \rightarrow \Theta}{(p \rightarrow), (p \rightarrow) \frac{\Gamma, \Delta \rightarrow \Theta}}}}
\end{array}$$

Ранг нижнего применения сечения равен 2, а ранг верхнего - меньше ранга применения сечения в исходном выводе. Значит, оба эти применения сечения корректны и устранимы по индуктивному предположению.

Случай 2.2. Левый ранг сечения равен единице, правый ранг больше единицы.

Пусть левая посылка сечения является заключением применения правила $(\rightarrow c)$, а главная формула применения сокращения графически совпадает с формулой сечения. Согласно Лемме 1, данное применение сокращения регулярно. В том случае, когда одна из боковых формул данного применения сокращения является главной формулой применения однопосылочного логического правила, конец исходного вывода имеет вид:

$$\begin{array}{c}
 \Gamma \rightarrow C, C^* \\
 (R) \frac{}{\Gamma \rightarrow C, C} \\
 (\rightarrow c) \frac{}{\Gamma \rightarrow C} \quad C, \Delta \rightarrow \Theta \\
 (cut) \frac{}{\Gamma, \Delta \rightarrow \Theta}
 \end{array}$$

Согласно Лемме 2, в выводе посылки правила (R) найдется секвенция $\Gamma \rightarrow A$, которая может быть преобразована в секвенцию $\Gamma \rightarrow C$. Значит, нижняя часть результирующего вывода будет иметь следующий вид:

$$\begin{array}{c}
 \Gamma \rightarrow A \\
 \hline \\
 \hline \\
 \Gamma \rightarrow C \quad C, \Delta \rightarrow \Theta \\
 (cut) \frac{}{\Gamma, \Delta \rightarrow \Theta}
 \end{array}
 ,$$

где двойная черта означает последовательное применение сукцедентных логических правил (см. Лемму 2). Ранг сечения здесь меньше ранга применения сечения в исходном выводе, и, значит, оно устранимо по индуктивному предположению. Корректность применения правил сохраняется.

Все остальные возможные случаи и подслучаи доказательства Утверждения 1 не вызывают затруднений, и их рассмотрение предоставляется читателю.

2. Эквивалентность GR и аксиоматической системы R

Пусть существует GR-вывод секвенции S , которая имеет вид $A_1, \dots, A_n \rightarrow B_1, \dots, B_m$, где $n \geq 0$ при $m > 0$ или $m \geq 0$ при $n > 0$. Пара (Σ, S) означает, что имеется вывод Σ секвенции S .

Формульный образ $\varphi(\Sigma, S)$ секвенции S есть формула, построенная согласно следующим пунктам:

- 1) $\varphi(\Sigma, \rightarrow B_1, \dots, B_m)$, $m \geq 1$, есть $B_1 \vee \dots \vee B_m$;
- 2) $\varphi(\Sigma, A_1, \dots, A_n \rightarrow)$, $n \geq 1$, есть $\neg A_1 \vee \dots \vee \neg A_n$;
- 3) $\varphi(\Sigma, A_1, \dots, A_n \rightarrow B)$, $n \geq 1$, $A_1 \supset (\dots \supset (A_n \supset B) \dots)$, если в Σ существуют пути от каждого антецедентного вхождения A_i формулы A_i ($1 \leq i \leq n$) в Σ к формуле B и от каждого сукцедентного вхождения B_k формулы B в Σ к формуле A_i , причем все эти пути обладают свойствами, указанными в пунктах (3) и (2) условия применения правила $(\rightarrow \supset)$ в **GR**; в противном случае $\varphi(\Sigma, A_1, \dots, A_n \rightarrow B)$ есть $\neg A_1 \vee \dots \vee \neg A_n \vee B$.
- 4) $\varphi(\Sigma, A \rightarrow B_1, \dots, B_m)$, $m \geq 1$, есть $A \supset (B_1 \vee \dots \vee B_m)$, если в Σ существуют пути от каждого антецедентного вхождения A_i формулы A в Σ к одному из сукцедентных членов B_k ($1 \leq k \leq m$) и от каждого сукцедентного вхождения B_j формулы B_k ($1 \leq k \leq m$) в Σ к формуле A_i , причем любой из этих путей обладает свойствами, указанными в пунктах (3) и (2) условия применения правила $(\rightarrow \supset)$ в **GR**; в противном случае $\varphi(\Sigma, A \rightarrow B_1, \dots, B_m)$ есть $\neg A \vee B_1 \vee \dots \vee B_m$.
- 5) $\varphi(\Sigma, A_1, \dots, A_n \rightarrow B_1, \dots, B_m)$, $m > 1$, $n > 1$, есть $A_1 \supset (\dots \supset (A_n \supset (B_1 \vee \dots \vee B_m)) \dots)$, если в Σ существуют пути от каждого антецедентного вхождения A_i любого члена A_i ($1 \leq i \leq n$) в Σ к одному из сукцедентных членов B_k ($1 \leq k \leq m$) и от каждого сукцедентного вхождения B_l формулы B_k ($1 \leq k \leq m$) к формуле A_i , причем все эти пути обладают свойствами, указанными в пунктах (3) и (2) условия применения правила $(\rightarrow \supset)$ в **GR**; в противном случае $\varphi(\Sigma, A_1, \dots, A_n \rightarrow B_1, \dots, B_m)$ есть $\neg A_1 \vee \dots \vee \neg A_n \vee B_1 \vee \dots \vee B_m$.

Примечание 3. Из пунктов 3-5 определения формульного образа следует, что возможен еще один случай, когда формульный образ секвенции, доказуемой в **GR**, является "классическим", а именно - $\varphi(S, A_1, \dots, A_n \rightarrow B_1, \dots, B_m)$, $m > 1$, $n > 1$, есть $(A_1 \supset (\dots \supset (\neg B_1 \supset \dots \supset (\neg B_{m-1} \supset B_m) \dots)))$, только если в Σ существуют пути от каждого антецедентного вхождения A_j любого члена A_i ($1 \leq i \leq n$) в S к любому сукцедентному члену B_k ($1 \leq k \leq m$) и от каждого сукцедентного вхождения B_l любого члена B_k в Σ к любому антецедентному члену A_j , причем все эти пути обладают соответствующими свойствами (см. пункты (3) и (2) условия применения правила $(\rightarrow \supset)$ в **GR**).

Используя данное определение формульного образа, можно доказать следующее

Утверждение 2. Если существует **GR**-вывод Σ секвенции S , то $\varphi(\Sigma, S)$ есть доказуемая формула пропозициональной релевантной системы **R**.

Доказательство состоит в том, чтобы показать, что

- 1) формульный образ основной секвенции доказуем в **R**;

2) любое правило вывода **GR**, кроме сечения, производно в **R** в том смысле, что если формульные образы посылок некоторого правила доказуемы в **R**, то и формульный образ заключения этого правила тоже доказуем в **R**;

3) сечение устранимо из **GR**-выводов.

Первый пункт тривиален, поскольку $A \supset A$ является аксиомой системы **R**, третий пункт обоснован Утверждением 1. Обоснование второго пункта представляет собой чисто техническую процедуру построения выводов из соответствующих посылок в аксиоматической системе **R**.

Утверждение 3. Если формула α выводима в **R**, то можно построить **GR**-вывод секвенции $\rightarrow \alpha$.

Для доказательства достаточно показать, что

- можно построить **GR**-вывод секвенции $\rightarrow \alpha$, если α есть аксиома системы **R**;
- правила системы **R** производны в **GR**.

Первое осуществимо без каких-либо трудностей (пример два содержит **GR**-вывод одного из вариантов так называемой аксиомы дистрибутивности). Что же касается производности двух правил системы **R**, то достаточно использовать $(\rightarrow \&)$

$$(\rightarrow \&) \frac{\rightarrow A \quad \rightarrow B}{\rightarrow A \& B}$$

или сечение в случае с *modus ponens*

$$(\text{cut}) \frac{\begin{array}{c} A \rightarrow A \quad B \rightarrow B \\ (\supset \rightarrow) \hline \rightarrow A \supset B \quad A \supset B, A \rightarrow B \\ (\text{cut}) \hline \rightarrow A \quad A \rightarrow B \end{array}}{\rightarrow B}$$

Из утверждений 2 и 3 непосредственно следует

Утверждение 4. Исчисление **GR** дедуктивно эквивалентно системе **R**, то есть формула α доказуема в **R** тогда и только тогда, когда секвенция $\rightarrow \alpha$ доказуема в **GR**.

Заключительные замечания. Под системой **R** здесь имеется в виду известное аксиоматическое пропозициональное исчисление, не содержащее никаких логических констант, кроме связок $\&$, $\vee$, $\neg$ и релевантной импликации (для обозначения которой в данном случае используется не стрелка, а символ $\supset$). Такую формулировку **R** можно найти в многочисленных работах по релевантной логике.

Из утверждений 1 и 4 следует, что возможна формулировка полной системы **R**, в которой устранимо правило сечения.

Метод, использованный для построения GR, позволяет получить секвенциальные формулировки других релевантных систем, в частности, "интуиционистского" варианта системы R, а также различных ее подсистем и расширений. Это достигается соответствующей модификацией условий, регулирующих корректность применения правил для импликации и, возможно, сечения. Подробное рассмотрение возможных модификаций выходит за рамки данной статьи.

ЛИТЕРАТУРА

1. Быстров П.И. Методы устранения сечения в неклассических логиках // Исследования по неклассическим логикам. М., 1989. С. 219-235.
2. Генцен Г. Исследования логических выводов // Математическая теория логического вывода. М., 1967. С. 9-74.
3. Карри Х. Основания математической логики. М., 1969. Гл. 5D.
4. Клини С.К. Введение в метаматематику. М., 1957.
5. Prawitz D. Natural deduction. Stockholm, 1965.

ДВА ЗАМЕЧАНИЯ И ОДИН ВОПРОС ОТНОСИТЕЛЬНО АКСИОМАТИЗАЦИИ ИМПЛИКАТИВНЫХ ЛОГИК

На одном из семинаров в секторе логики Института философии РАН при обсуждении вопросов, связанных с аксиоматизацией имплицативных логик, были, в частности, сделаны два следующих замечания.

Замечание 1 (В.М.Попов): можно доказать, что если к имплицативной системе $R_{\supset}$, определяемой аксиомами рефлексивности и транзитивности имплицации, перестановки и сокращения посылок и правилами подстановки и модус поненс (эта система формализует имплицативный фрагмент системы R релевантной имплицации [1]) добавить в качестве единственной новой аксиомы закон Пирса - формулу $((p \supset q) \supset p) \supset p$, то получится система, формализующая имплицативный фрагмент классической пропозициональной логики, а если $R_{\supset}$ расширить только за счет добавления в качестве аксиомы "ослабленного закона Пирса" - формулы $((((p \supset q) \supset p) \supset p) \supset q) \supset q$, то получится система, формализующая имплицативный фрагмент интуиционистской пропозициональной логики.

Замечание 2 (А.С.Карпенко): из работы Вайсберга извлекается доказательство того, что систему, формализующую имплицативный фрагмент классической пропозициональной логики, можно получить, добавляя закон Пирса в качестве единственной новой аксиомы к более слабой, чем $R_{\supset}$, системе - к системе, которая отличается от $R_{\supset}$ только отсутствием аксиомы сокращения посылок: $(p \supset (p \supset q)) \supset (p \supset q)$.

Покажем, что указанными способами можно формализовать имплицативные фрагменты классической и интуиционистской пропозициональной логик. Формулы всех рассматриваемых систем строятся в стандартно определяемом пропозициональном языке, алфавит которого содержит только пропозициональные переменные $p, q, r, p_1, q_1, r_1, \dots$, знак $\supset$ имплицации и круглые скобки. Каждая из рассматриваемых здесь систем гильбертовского типа в качестве правил вывода содержит только правило подстановки и правило модус поненс.

Поскольку определение понятия доказательства дается обычным образом для каждой из этих систем, то эти системы полностью определяются перечнем их аксиом.

Аксиомы системы $Int_{\supset}$, формализующей имплицативный фрагмент интуиционистской пропозициональной логики:

$$p \supset (q \supset p);$$

$$(p \supset (q \supset r)) \supset ((p \supset q) \supset (p \supset r)).$$

Аксиомы системы $Cl_{\supset}$, формализующей импликативный фрагмент классической пропозициональной логики:

$p \supset (q \supset p)$;
 $(p \supset (q \supset r)) \supset ((p \supset q) \supset (p \supset r))$;
 $((p \supset q) \supset p) \supset p$.

Аксиомы системы $R_{\supset}$:

$p \supset p$;
 $(p \supset q) \supset ((q \supset r) \supset (p \supset r))$;
 $(p \supset (q \supset r)) \supset (q \supset (p \supset r))$;
 $(p \supset (p \supset q)) \supset (p \supset q)$.

Аксиомы системы $R'_{\supset}$ - это аксиомы системы $R_{\supset}$, за исключением последней аксиомы сокращения посылок.

Множество всех аксиом системы $R_{\supset} + ((p \supset q) \supset p) \supset p$ - это объединение множества всех аксиом системы $R_{\supset}$ с одноэлементным множеством $\{((p \supset q) \supset p) \supset p\}$. Аналогично задаются аксиомы систем $R_{\supset} + (((p \supset q) \supset p) \supset p) \supset q$; $R'_{\supset} + ((p \supset q) \supset p) \supset p$ и $R'_{\supset} + (((p \supset q) \supset p) \supset p) \supset q$.

Наша цель - доказать следующие Утверждения I и II, составляющие содержание Замечания 1, и Утверждение III (ср. Замечание 2).

Утверждение I.

Множество всех теорем системы $R_{\supset} + (((p \supset q) \supset p) \supset p) \supset q$ равно множеству всех теорем системы $Int_{\supset}$.

Утверждение II.

Множество всех теорем системы $R_{\supset} + ((p \supset q) \supset p) \supset p$ равно множеству всех теорем системы $Cl_{\supset}$.

Утверждение III.

Множество всех теорем системы $R'_{\supset} + ((p \supset q) \supset p) \supset p$ равно множеству всех теорем системы $Cl_{\supset}$.

Для доказательства этих утверждений воспользуемся секвенциальными формулировками $GInt_{\supset}$, $GR_{\supset}$, $GR'_{\supset}$ систем $Int_{\supset}$, $R_{\supset}$, $R'_{\supset}$ соответственно. Адекватность этих формулировок соответствующим системам вытекает из результатов работ [1], [3], [4]¹. Понятие доказательства определяется стандартно для всех формулируемых здесь секвенциальных исчислений, поэтому для их задания достаточно указать их основные секвенции и правила вывода. Условимся о том, что заглавными буквами латинского алфавита будут обозначаться формулы, а буквами греческого алфавита - конечные (включая пустую) последовательности формул.

Множество всех основных секвенций любого из исчислений $GInt_{\supset}$, $GR_{\supset}$, $GR'_{\supset}$ - это множество всех секвенций вида $A \rightarrow A$. Правила исчисления $GInt_{\supset}$:

¹ Адекватность исчисления GI исчислению $I(I \{In_{\mathbb{E}}, R_{\mathbb{E}}, R'_{\mathbb{E}}\})$ означает следующее: для всякой формулы A секвенция A доказуема в GI тогда и только тогда, когда A доказуема в I .

$$\begin{array}{c}
\frac{A, \Gamma \rightarrow B}{\Gamma \rightarrow A \supset B} \text{ (r1);} \quad \frac{\Gamma \rightarrow A \quad B, \Delta \rightarrow \Theta}{A \supset B, \Gamma, \Delta \rightarrow \Theta} \text{ (r2);} \\
\frac{A, A, \Gamma \rightarrow \Theta}{A, \Gamma \rightarrow \Theta} \text{ (r3);} \quad \frac{\Gamma \rightarrow \Theta}{A, \Gamma \rightarrow \Theta} \text{ (r4);} \\
\frac{\Gamma, A, B, \Delta \rightarrow \Theta}{\Gamma, B, A, \Delta \rightarrow \Theta} \text{ (r5).}
\end{array}$$

Правила исчисления GR : r1, r2, r3, r5.

Правила исчисления $GR'_{\supset}$: r1, r2, r5.

Доказательство утверждения I.

Достаточно доказать:

1_I) всякая аксиома $R_{\supset} + (((p \supset q) \supset p) \supset p) \supset q$ доказуема в $Int_{\supset}$;

2_I) всякая аксиома $Int_{\supset}$ доказуема в $R_{\supset} + (((p \supset q) \supset p) \supset p) \supset q$.

Для доказательства 1_I) достаточно для каждой аксиомы A системы $R_{\supset} + (((p \supset q) \supset p) \supset p) \supset q$ построить доказательство в $GInt_{\supset}$ секвенции $\rightarrow A$. Если A является аксиомой системы $R_{\supset}$, то доказательство в $GInt_{\supset}$ секвенции $\rightarrow A$ очевидно. Доказательство в $GInt_{\supset}$ секвенции $\rightarrow (((p \supset q) \supset p) \supset p) \supset q$ следующее:

$$\begin{array}{c}
\frac{p \rightarrow p}{(p \supset q) \supset p, p \rightarrow p} \\
\frac{p \rightarrow ((p \supset q) \supset p) \supset p \quad q \rightarrow q}{((p \supset q) \supset p) \supset p \supset q, p \rightarrow q} \\
\frac{p, ((p \supset q) \supset p) \supset p \supset q \rightarrow q}{((p \supset q) \supset p) \supset p \supset q \rightarrow p \supset q \quad p \rightarrow p} \\
\frac{(p \supset q) \supset p, ((p \supset q) \supset p) \supset p \supset q \rightarrow p}{((p \supset q) \supset p) \supset p \supset q \rightarrow ((p \supset q) \supset p) \supset p \quad q \rightarrow q} \\
\frac{((p \supset q) \supset p) \supset p \supset q, ((p \supset q) \supset p) \supset p \supset q \rightarrow q}{((p \supset q) \supset p) \supset p \supset q \rightarrow q} \\
\rightarrow (((p \supset q) \supset p) \supset p) \supset q \supset q
\end{array}$$

Для доказательства 2_I) требуется показать, что в $R_{\supset} + (((p \supset q) \supset p) \supset p) \supset q$ доказуемы две формулы $p \supset (q \supset p)$ и $(p \supset (q \supset r)) \supset ((p \supset q) \supset (p \supset r))$. Вторая из них доказуема в $R_{\supset} + (((p \supset q) \supset p) \supset p) \supset q$, так как доказуема в $R_{\supset}$. В последнем легко убедиться, построив доказательство в $GR_{\supset}$

секвенции $\rightarrow (p \supset (q \supset r)) \supset ((p \supset q) \supset (p \supset r))$. Формула $p \supset (q \supset p)$ доказуема в $R_{\supset} + (((p \supset q) \supset p) \supset p) \supset q$, так как получается по правилу модус поненс из доказуемых в этой системе формул

$((((p \supset (p \supset (p \supset p))) \supset p) \supset p) \supset (p \supset (q \supset p))) \supset (p \supset (q \supset p))$

и

$((p \supset (p \supset (q \supset p))) \supset p) \supset p \supset (p \supset (q \supset p))$.

Первая из этих формул доказуема в $R_{\supset} + (((p \supset q) \supset p) \supset p) \supset q$, так как является подстановочным случаем аксиомы $((((p \supset q) \supset p) \supset p) \supset q)$ этой системы.

Вторая формула доказуема в этой системе, так как доказуема в $R_{\supset}$.

Действительно, в $GR_{\supset}$ доказуема секвенция

$\rightarrow ((p \supset (p \supset (q \supset p))) \supset p) \supset p \supset (p \supset (q \supset p))$:

$$\begin{array}{c}
 \frac{q \rightarrow q \quad p \rightarrow p}{p \rightarrow p} \\
 \frac{p \rightarrow p \quad q \supset p \quad q \rightarrow p}{p \supset (q \supset p), p, q \rightarrow p} \\
 \frac{p \supset (p \supset (q \supset p)), p, p, q \rightarrow p}{p, p, q \rightarrow (p \supset (p \supset (q \supset p))) \supset p} \\
 \frac{p, p, q \rightarrow (p \supset (p \supset (q \supset p))) \supset p}{p, q \rightarrow (p \supset (p \supset (q \supset p))) \supset p} \\
 \frac{p, q \rightarrow (p \supset (p \supset (q \supset p))) \supset p \quad p \rightarrow p}{((p \supset (p \supset (q \supset p))) \supset p) \supset p, q, p \rightarrow p} \\
 \frac{((p \supset (p \supset (q \supset p))) \supset p) \supset p, q, p \rightarrow p}{q, ((p \supset (p \supset (q \supset p))) \supset p) \supset p, p \rightarrow p} \\
 \frac{q, p, ((p \supset (p \supset (q \supset p))) \supset p) \supset p \rightarrow p}{p, ((p \supset (p \supset (q \supset p))) \supset p) \supset p \rightarrow q \supset p} \\
 \frac{p, ((p \supset (p \supset (q \supset p))) \supset p) \supset p \rightarrow q \supset p}{((p \supset (p \supset (q \supset p))) \supset p) \supset p \rightarrow p \supset (q \supset p)} \\
 \rightarrow ((p \supset (p \supset (q \supset p))) \supset p) \supset p \supset (p \supset (q \supset p))
 \end{array}$$

Доказательство утверждения II.

Достаточно доказать:

1_{II}) всякая аксиома $R_{\supset} + ((p \supset q) \supset p) \supset p$ доказуема в $Cl_{\supset}$;

2_{II}) всякая аксиома $Cl_{\supset}$ доказуема в $R_{\supset} + ((p \supset q) \supset p) \supset p$.

Утверждение 1_{II} очевидно. Поскольку $((p \supset q) \supset p) \supset p$ есть аксиома системы $R_{\supset} + ((p \supset q) \supset p) \supset p$, а формула $(p \supset (q \supset r)) \supset ((p \supset q) \supset (p \supset r))$, как уже отмечалось, доказуема в этой системе, для доказательства утверждения 2_{II} остается доказать, что формула $p \supset (q \supset p)$ является теоремой этой системы. Для этого, учитывая утверждение 1, достаточно доказать, что формула $((p \supset q) \supset p) \supset q$ является теоремой системы

$R_{\supset} + ((p \supset q) \supset p) \supset p$. Используя исчисление $GR_{\supset}$, (адекватное системе $R_{\supset}$), нетрудно доказать, что для всяких формул A и B в системе $R_{\supset}$ (следовательно, и в системе $R_{\supset} + ((p \supset q) \supset p) \supset p$) доказуема формула $A \supset ((A \supset B) \supset B)$. Но тогда в системе $R_{\supset} + ((p \supset q) \supset p) \supset p$ доказуема формула

$$(((p \supset q) \supset p) \supset p) \supset (((((p \supset q) \supset p) \supset p) \supset q) \supset q),$$

являющаяся подстановочным частным случаем схемы $A \supset ((A \supset B) \supset B)$. А поскольку в $R_{\supset} + ((p \supset q) \supset p) \supset p$ доказуема формула $((p \supset q) \supset p) \supset p$, то по правилу модус поненс в этой системе доказуема формула $((((p \supset q) \supset p) \supset p) \supset q) \supset q$.

Доказательство утверждения III.

Достаточно доказать:

1_{III}) всякая аксиома $R'_{\supset} + ((p \supset q) \supset p) \supset p$ доказуема в $Cl_{\supset}$.

2_{III}) всякая аксиома $Cl_{\supset}$ доказуема в $R'_{\supset} + ((p \supset q) \supset p) \supset p$.

Утверждение 1_{III} очевидно. В силу утверждения 2 для доказательства 2_{III} достаточно показать, что в $R'_{\supset} + ((p \supset q) \supset p) \supset p$ доказуема формула $(p \supset (p \supset q)) \supset (p \supset q)$. Используя исчисление $GR'_{\supset}$ и соответствующую теорему об адекватности, можно показать, что формула

$$\begin{aligned} & (((q \supset ((p \supset (p \supset q)) \supset q)) \supset q) \supset q) \supset \\ & \supset (((p \supset (p \supset q)) \supset (p \supset q)) \supset \\ & \supset q) \supset ((p \supset (p \supset q)) \supset (p \supset q))) \end{aligned}$$

доказуема в $R'_{\supset}$ (см. Приложение), а значит и в $R'_{\supset} + ((p \supset q) \supset p) \supset p$. В $R'_{\supset} + ((p \supset q) \supset p) \supset p$ доказуем сукцедент этой формулы, так как в $R'_{\supset} + ((p \supset q) \supset p) \supset p$ доказуем антецедент этой формулы, являющийся подстановочным случаем аксиомы $((p \supset q) \supset p) \supset p$, и множество всех теорем этой системы замкнуто относительно модус поненс. Итак, в $R'_{\supset} + ((p \supset q) \supset p) \supset p$ доказуема формула $((p \supset (p \supset q)) \supset (p \supset q)) \supset q \supset ((p \supset (p \supset q)) \supset (p \supset q))$, являющаяся антецедентом также доказуемой в этой системе формулы

$$\begin{aligned} & (((p \supset (p \supset q)) \supset (p \supset q)) \supset q) \supset ((p \supset \\ & \supset (p \supset q)) \supset (p \supset q))) \supset ((p \supset (p \supset q)) \supset \\ & \supset (p \supset q)) \end{aligned}$$

Последняя формула является подстановочным случаем формулы $((p \supset q) \supset p) \supset p$.

Значит, в силу замкнутости множества всех теорем системы $R'_{\supset} + ((p \supset q) \supset p) \supset p$ относительно правила модус поненс, формула $(p \supset (p \supset q)) \supset (p \supset q)$ доказуема в этой системе.

Открытая проблема:

Равно ли множество всех теорем системы $R_{\supset} + (((p \supset q) \supset p) \supset p) \supset q$ множеству всех теорем системы $Int_{\supset}$?

Приложение. В системе $GR_{\supset}$ доказуема секвенция

$$\begin{aligned} & \rightarrow (((q \supset ((p \supset (p \supset q)) \supset q)) \supset q) \supset q) \supset \\ & \supset (((p \supset (p \supset q)) \supset (p \supset q)) \supset q) \supset ((p \supset (p \supset q)) \supset (p \supset q))). \end{aligned}$$

Для сокращения записи вывода обозначим буквой A формулу $p \supset (p \supset q)$, а буквой B - формулу $p \supset q$.

Доказательство:

$$\begin{array}{c}
 \frac{A \rightarrow A \quad q \rightarrow q}{q \rightarrow q \quad A \supset q, A \rightarrow q} \\
 \frac{q \supset (A \supset q), q, A \rightarrow q}{q, A \rightarrow (q \supset (A \supset q)) \supset q \quad q \rightarrow q} \\
 \frac{((q \supset (A \supset q)) \supset q) \supset q, q, A \rightarrow q}{p \rightarrow p \quad q, ((q \supset (A \supset q)) \supset q) \supset q, A \rightarrow q} \\
 \frac{p \rightarrow p \quad p \supset q, p, ((q \supset (A \supset q)) \supset q) \supset q, A \rightarrow q}{A, p, p, ((q \supset (A \supset q)) \supset q) \supset q, A \rightarrow q} \\
 \frac{p, A, p, ((q \supset (A \supset q)) \supset q) \supset q, A \rightarrow q}{A, p, ((q \supset (A \supset q)) \supset q) \supset q, A \rightarrow B} \\
 \frac{p, ((q \supset (A \supset q)) \supset q) \supset q, A \rightarrow A \supset B \quad q \rightarrow q}{(A \supset B) \supset q, p, ((q \supset (A \supset q)) \supset q) \supset q, A \rightarrow q} \\
 \frac{p, (A \supset B) \supset q, ((q \supset (A \supset q)) \supset q) \supset q, A \rightarrow q}{(A \supset B) \supset q, ((q \supset (A \supset q)) \supset q) \supset q, A \rightarrow B} \\
 \frac{(A \supset B) \supset q, A, ((q \supset (A \supset q)) \supset q) \supset q \rightarrow B}{A, (A \supset B) \supset q, ((q \supset (A \supset q)) \supset q) \supset q \rightarrow B} \\
 \frac{(A \supset B) \supset q, ((q \supset (A \supset q)) \supset q) \supset q \rightarrow A \supset B}{((q \supset (A \supset q)) \supset q) \supset q \rightarrow ((A \supset B) \supset q) \supset (A \supset B)} \\
 \rightarrow (((q \supset (A \supset q)) \supset q) \supset q) \supset (((A \supset B) \supset q) \supset (A \supset B))
 \end{array}$$

ЛИТЕРАТУРА

1. Anderson A.R., Belnap N.D.Jr, Entailment: The Logic of Relevance and Necessity. Vol.1. Princeton University Press, Princeton, 1975.
2. Wajsberg M. Contributions to metalogic 1937 // Wajsberg M. Logical works. Polish Academy of Sciences Institute of Philosophy and Sociology. Wroclaw, 1977.
3. Генцен Г. Исследования логических выводов // Математическая теория логического вывода. М., 1967.
4. Смирнов В.А. Формальный вывод и логические исчисления. М., 1972.

ЛОГИКА ВЕТВЯЩЕГОСЯ ВРЕМЕНИ КАК ИНСТРУМЕНТ СПЕЦИФИКАЦИИ И ВЕРИФИКАЦИИ ПАРАЛЛЕЛЬНЫХ ПРОГРАММ

В настоящей статье рассматриваются вопросы, связанные с использованием формализма логики ветвящегося времени для описания вычислительных свойств и верификации параллельных программ.

Несколько слов об истории предмета. В 1977 г. А.Пнуели [10] предложил использовать временную логику в качестве основы доказательства корректности параллельных компьютерных программ. До того времени большинство исследований опиралось на технику доказательства, предложенную Р.Флойдом [4] для последовательных программ и аксиоматизированную Хоаром. В то время как метод индуктивных утверждений для доказательства инвариантных свойств (частичной корректности, например) обобщался для параллельных программ достаточно естественно, метод "правильно построенных множеств" для доказательства эвентуальных свойств оказался неприемлемым в силу присущего параллельным программам индетерминизма.

А.Пнуели использовал линейную временную логику, язык которой содержит унарные операторы G (всегда), F (когда-либо), N (в следующий момент). Однако впоследствии выяснилось, что для описания всех возможных типов свойств, характеризующих правильное вычислительное поведение параллельных программ, языка только с унарными операторами недостаточно. Л.Лампорт был первым, кто заметил это и предложил добавить бинарный оператор as long as [7]. Практически одновременно с Лампортом, так же в 1980 году, Д.Габбай, А.Пнуели, С.Шелах и Й.Стави предложили в [5] логику с бинарным оператором линейного времени Until ("до тех пор, пока не") и доказали, что в ней выразимы все возможные вычислительные свойства параллельных программ. Позже с целью использования для верификации параллельных программ З.Манна и А.Пнуели построили дедуктивную систему, состоящую из трех частей: временной (линейной), программной и части, формализующей свойства области, на которой работает данная программа.

В 1981 г. М.Бен-Ари, З.Манна и А.Пнуели в [1] высказали идею о том, что более адекватной для рассуждений о параллельных программах является логика ветвящегося в будущее времени, поскольку она отражает индетерминистический характер параллельных программ (параллельные программы могут иметь более одного возможного выполнения). Они предложили логику UB (Unified Branching Time Logic) с тремя неопределяемыми унарными операторами ветвящегося времени $\forall G$ ("в следующий момент всегда"),

аксиоматизировали эту логику и описали разрешающую процедуру для выполнимости. UB-логика была расширена до логики CTL (Computation Tree Logic) в статье Е.Эмерсона и Е.Кларка [2] путем добавления двух бинарных операторов ветвящегося времени $\forall(\dots\text{Until}\dots)$ и $\exists(\dots\text{Until}\dots)$. В настоящее время существует несколько версий CTL-логики (CTL^* , ECTL, FCTL, ECTL^+ , FCTL^+), различающихся выразительными возможностями.

Существует несколько критериев оценки "хорошести" той или иной временной логики для применения в анализе параллельных вычислений. Один из них - насколько *естественно* выражаются в ее языке различные программные свойства ([6], [3]). Логика ветвящегося времени с while-операторами составляет одну из частей предлагаемой дедуктивной системы, используемой для верификации параллельных программ.

Добавим к языку логики UB два бинарных оператора $w_{\square}$ и $w_{\diamond}$, означающие:

$A w_{\square} B$ - "На всех ветвях A будет истинна до тех пор, пока B будет истинна";

$A w_{\diamond} B$ - "На одной из ветвей A будет истинна до тех пор, пока B будет истинна".

Временные формулы с этими операторами интерпретируются на древовидных структурах $\tau = \langle S, \rho \rangle$, где S есть непустое множество состояний, ρ - бинарное отношение на S: $\rho \subseteq S \times S$. $s \rho t$ означает, что t есть непосредственно следующее за s состояние. ρ сериально, т.е. $\forall s \exists t (s \rho t)$, и иррефлексивно, т.е. $\forall s \neg (s \rho s)$. ρ^* - транзитивное замыкание ρ . β_s есть ветвь, выходящая из S, линейно упорядоченное подмножество S.

Если $\|\varphi\|_s^v$ - функция оценки формулы φ в состоянии s при приписывании v пропозициональных букв состояния, то имеют место следующие условия истинности для введенных операторов:

$\|A w_{\square} B\|_{sn} = 1$ iff $\forall bs [\exists t (t \in bs \ \& \ \|B\|_{tn} = 0 \ \& \ \forall u (u \in bs \ \& \ ur^*t \Rightarrow \|A\|_{un} = 1 \ \& \ \|B\|_{un} = 1)) \vee \forall z (z \in bs \Rightarrow \|A\|_{zn} = 1)]$;

$\|A w_{\diamond} B\|_{sn} = 1$ iff $\exists bs [\exists t (t \in bs \ \& \ \|B\|_{tn} = 0 \ \& \ \forall u (u \in bs \ \& \ ur^*t \Rightarrow \|A\|_{un} = 1 \ \& \ \|B\|_{un} = 1)) \vee \forall z (z \in bs \Rightarrow \|A\|_{zn} = 1)]$.¹

¹ Условия истинности для унарных операторов логики UB:

$$GA_s^v = 1 \text{ iff } \beta_s \ t(t_s \beta \ \overset{v}{t} \ A = 1);$$

$$GA_s^v = 1 \text{ iff } \beta_s \ t(t_s \beta \ \overset{v}{t} \ A = 1);$$

$$NA_s^v = 1 \text{ iff } t(s \rho t \ \overset{v}{t} \ A = 1).$$

FA, FA, NA - дуалы.

Определения истинности формулы в структуре и общезначимости обычные.

Из семантических условий видно, что все унарные операторы могут быть определены через while-операторы:

Dfn 1. $G_{\Box} A \equiv A \text{ w}_{\Box} \text{true}$; Dfn 2. $G_{\Diamond} A \equiv A \text{ w}_{\Diamond} \text{true}$;

Dfn 3. $N_{\Box} A \equiv \text{false w}_{\Box} \neg A$.

Мы предлагаем следующую аксиоматизацию пропозициональной логики с while-операторами (UBw-логики):

AxO. Аксиомные схемы пропозиционального исчисления;

Ax1. $G_{\Box} (A \rightarrow B) \rightarrow (G_{\Box} A \rightarrow G_{\Box} B)$;

Ax2. $G_{\Diamond} (A \rightarrow B) \rightarrow (G_{\Diamond} A \rightarrow G_{\Diamond} B)$;

Ax3. $N_{\Box} (A \rightarrow B) \rightarrow (N_{\Box} A \rightarrow N_{\Box} B)$;

Ax4. $A \text{ w}_{\Box} B \equiv N_{\Box} \neg B \vee N_{\Box} (A \wedge B \wedge A \text{ w}_{\Box} B)$;

Ax5. $A \text{ w}_{\Diamond} B \equiv \neg N_{\Box} B \vee \neg N_{\Box} (\neg A \vee \neg B \vee \neg (A \text{ w}_{\Diamond} B))$;

Ax6. $G_{\Box} (C \rightarrow N_{\Box} (\neg B \vee (C \wedge A))) \rightarrow N_{\Box} (C \rightarrow A \text{ w}_{\Box} B)$;

Ax7. $G_{\Box} (C \rightarrow \neg N_{\Box} (B \wedge (\neg C \vee \neg A))) \rightarrow \neg N_{\Box} (C \wedge \neg (A \text{ w}_{\Diamond} B))$;

Ax8. $A \text{ w}_{\Box} B \rightarrow A \text{ w}_{\Diamond} B$;

Ax9. $A \text{ w}_{\Box} B \rightarrow \neg (\neg A \text{ w}_{\Diamond} B)$;

Правила вывода: R1: MODUS PONENS;

R2: if $\vdash A$, then $\vdash G_{\Box} A$.

Аксиомные схемы Ax4 и Ax5 - это так называемые аксиомы неподвижной точки. Ax6, Ax7 - варианты аксиомы индукции относительно while-операторов. Ax8 и Ax9 устанавливают связь между двумя бинарными операторами. Если в аксиомах Ax4-Ax9 формула B будет заменена константой true, а C на A в Ax6, Ax7, мы получим UB-систему. Имеют место следующие теоремы:

Теорема 1: UBw-система содержит UB-систему в качестве фрагмента.

Теорема 2: Формулы $A \text{ w}_{\Box} B$, $A \text{ w}_{\Diamond} B$ невыразимы в UB.

Теорема 3: UBw полна и непротиворечива относительно семантики ветвящегося времени.

Теорема 4: UBw разрешима.

(Существует экспоненциальная процедура разрешимости для выполнимости.)

Для использования UBw-логики в спецификации вычислительных свойств параллельных программ необходимо ввести определенные изменения в ее семантику и синтаксис.

Что касается семантики, нам нужно привести ее в соответствие с вычислительной моделью параллельной программы, в которой параллельное вычисление процессов $P_1, \dots, P_n$ параллельной программы $P = P_1 \parallel \dots \parallel P_n$ моделируется как последовательность атомарных

команд из разных процессов путем индетерминистического интерливинга (переслаивания) [9]. Параллельная программа, начавшись в данном исходном состоянии, может следовать одному из возможно бесконечного числа своих вычислительных путей. Таким образом, вычислительная модель данной параллельной программы представляет собой дерево такое, что:

а) Корень дерева - исходное состояние параллельной программы P .

$S_0 = \langle \tilde{l}^0, \tilde{\eta}^0 \rangle$, где $\tilde{l}^0 = l_1^0, \dots, l_n^0$ - исходные метки всех параллельных процессов $P_1, \dots, P_n$, $\tilde{\eta}^0 = \eta_1^0, \dots, \eta_r^0$ - исходные значения программных переменных $y_1, \dots, y_r$ из области D^P , на которой работает данная параллельная программа.

б) Каждая ветвь дерева представляет собой возможное вычисление данной параллельной программы. *Выполняющая ветвь* β^P - это последовательность программных состояний $\beta^P = S_0, S_1, S_2, \dots$ такая, что каждое последующее программное состояние связано с непосредственно предшествующим состоянием выполнением некоторого перехода τ из параллельного процесса P_j , представляющего программную команду вида $C(\bar{y}) \rightarrow \bar{y} := h(\bar{y})$, где $C(\bar{y})$ есть "охраняющее" условие данного перехода, некоторое логическое выражение, $\bar{y} := h(\bar{y})$ - программное утверждение, а именно, присваивание, в котором h - функция преобразования значений программных переменных $\bar{y} = y_1, \dots, y_r$.

Если $S_i = \langle l_1, \dots, l_g, \dots, l_n; \tilde{\eta} \rangle$, то после некоторого перехода t из процесса P_j $S_{i+1} = \langle l_1, \dots, l'_g, \dots, l_n; h(\tilde{\eta}) \rangle$ (j -шаг, или j -переход).

в) Возможен холостой шаг, когда $S_i = S_{i+1}$, т.е. $\tilde{l} = \tilde{l}'$ и $\tilde{\eta} = \tilde{\eta}'$.

г) Каждая выполняющая ветвь представляет собой результат справедливого планирования параллельных процессов в ходе вычисления программы $P = P_1 \parallel \dots \parallel P_n$: если процесс P_j данной параллельной программы возможен в ходе некоторого вычисления этой программы бесконечно часто, то выполняющая ветвь должна содержать бесконечное число j -шагов. Временные формулы интерпретируются теперь на таких вычислительных деревьях.

В синтаксис вносим следующие дополнения:

- 1) язык расширяем до первопорядкового с равенством;
- 2) разделяем индивидуальные переменные на глобальные, которые не изменяют своих значений на протяжении вычисления данной параллельной программы, и локальные (программные), которые изменяют свои значения в процессе вычисления программы;

3) добавляем множество пропозициональных переменных вида alt_j , $\text{alt}_{j\dots}$, пробегающих по выражениям типа "Процесс P_j находится в метке l^n ".

Дополненный таким образом язык UBw-логики позволяет нам выразить все известные в литературе типы вычислительных свойств, характеризующих правильность параллельных программ, а именно инвариантные - свойства, сохраняющиеся на протяжении всего вычисления программы и выражающиеся с помощью операторов $G_{\square}$ и $G_{\diamond}$; эвентуальные - свойства, которые имеют место *когда-либо* в ходе вычисления программы и выражаются операторами $F_{\square}$ и $F_{\diamond}$; и свойства предшествования, характеризующие вычисления, в ходе которых между определенными вычислительными событиями устанавливаются некоторые временные отношения, и описываемые бинарными временными операторами (в нашем случае - while-операторами), например, свойство справедливой ответственности. Описание свойств последнего типа и послужило причиной введения нами операторов $w_{\square}$ и $w_{\diamond}$. В литературе (см.[2]) для этой цели часто используются until-операторы. Однако, на наш взгляд, while-операторы более естественно описывают свойства предшествования. Одна из причин - близость свойств предшествования к инвариантным свойствам [MP]. Последние выражаются с помощью операторов $G_{\square}$ и $G_{\diamond}$. А как можно заметить, while-операторы в силу их семантической "природы" ближе к $G_{\square}$ и $G_{\diamond}$ (см. Dfn 1, 2), чем until-операторы²:

$$G_{\square} A \equiv A w_{\square} \text{true}; \quad G_{\diamond} A \equiv A w_{\diamond} \text{true}; \\ G_{\square} A \equiv \neg(\text{true} U_{\square} \neg A); \quad G_{\diamond} A \equiv \neg(\text{true} U_{\diamond} \neg A).$$

Для верификации параллельных программ мы предлагаем использовать дедуктивный аппарат первопорядковой UBw-логики³, дополненный пятью программными аксиомами:

$$P1. \text{atl}_j^i \rightarrow \text{atl}_j^i \quad (k \neq i);$$

Процесс не может находиться одновременно в двух метках.

$$P2. \text{atl}_j \rightarrow N_{\square}(\text{atl}_{j'} \vee \text{atl}_j, \text{ где } l_j' - \text{метка, следующая непосредственно за } l_j.$$

Каждый процесс либо активен, либо совершает холостой шаг.

² Условия истинности until-операторов следующие:

$$A U B_{\square}^{\gamma} = 1, \text{ если и только если } \beta [t(\xi \beta \gamma \vee B = 1 \ \& \ u(u \beta^* \& u_{\square}^{\gamma} t \ A = 1)];$$

$$A U B_{\diamond}^{\gamma} = 1, \text{ если и только если } \beta [t(t \ S \beta \ \& \gamma \vee B = 1 \ \& \ u_{\square}^{\gamma} u \beta^* \& u_{\square}^{\gamma} t \ A = 1)].$$

³ К системе аксиом пропозициональной UBw мы добавляем две аксиомные схемы $Ax10. xGA \rightarrow GxA; Ax11. A \rightarrow NA$, если формула A не содержит локальных переменных, а вместо $Ax0$ принимаем $Ax0'$: Аксиомные схемы первопорядкового исчисления.

P3. $atl_j \wedge N \Box l_j' \rightarrow \neg(N \Diamond atl_1' \vee \dots \vee N \Diamond atl_{j-1}' \vee N \Diamond atl_{j+1}' \vee \dots \vee N \Diamond atl_n')$;

За один шаг может быть осуществлен только один переход одного из процессов.

P4. $atl \wedge N \Box atl \wedge A \rightarrow N \Box A$, $atl = atl_1, \dots, atl_n$;

Если программа совершает холостой шаг, то ничего не изменится. Аксиомы P1 - P4 соответствуют условию интерливинга.

P5. $atl_j \wedge \epsilon_{ij} \rightarrow F \Box \neg atl_j$.

Если процесс возможен (его следующий переход готов к выполнению, т.е. его охраняющее условие ϵ_{ij} истинно), то когда-либо он будет выполнен.

Аксиома P5 соответствует условию справедливого планирования.

Теперь посмотрим, как "работает" построенная система при верификации конкретных параллельных программ. Нам необходим ряд производных правил, с помощью которых мы сможем, проанализировав структуру данной параллельной программы, установить базисные модально-временные утверждения, из которых в дальнейшем с помощью аксиом и правил вывода нашей системы получаем окончательный результат. Особенно важными в этом отношении являются инвариантные правила, с помощью которых устанавливаются базисные инварианты, т.е. формулы вида $G \Box \alpha$, $G \Diamond \alpha$. При доказательстве инвариантных свойств нам необходимо установить, что интересующее нас свойство g имеет место в исходном состоянии и сохраняется каждым переходом каждого параллельного процесса данной программы.

Если под α понимать формулу, описывающую исходные условия данной параллельной программы, т.е. $atl_1^0 \wedge \dots \wedge atl_n^0 \wedge Z$, где $atl_1^0, \dots, atl_n^0$ - исходные метки всех параллельных процессов и Z - предусловие + исходные значения программных переменных, то ИНВ-правило запишется именно в такой форме, которая нужна для доказательства того, что интересующее нас свойство γ является инвариантным для данной параллельной программы:

$$\begin{array}{l}
n \\
a) \vdash \bigwedge_{i=1}^n \text{atli}0 \wedge Z \rightarrow \gamma \\
b) \vdash \text{atl} \wedge \gamma \rightarrow N_{\Box} \gamma \quad \text{для всех } l \in L_P \\
\hline
n \\
c) \vdash \bigwedge_{i=1}^n \text{atli}^0 \wedge Z \rightarrow G_{\Box} \gamma \wedge \gamma
\end{array}$$

Свойство γ - инвариант всех возможных вычислений данной параллельной программы - (с), если установлено, что γ имеет место в исходном состоянии этой программы - (а) и сохраняется каждым переходом каждого параллельного процесса этой параллельной программы - (b).

Для доказательства наличия у параллельной программы свойств предшествования, выражаемых в нашем языке формулами с while-операторами, мы предлагаем использовать на первом этапе доказательства два производных правила.

Первое - для установления свойств предшествования, которые выполняются для всех возможных вычислений данной параллельной программы, $w_{\Box}$ -правило

$$\begin{array}{l}
a) \vdash \text{atl} \wedge \alpha \rightarrow N_{\Box} (\alpha \wedge (\neg \sigma \vee \gamma)) \quad \text{для всех } l \in L_P \\
b) \vdash \text{atl} \wedge N_{\Box} \text{atl} \wedge \alpha \rightarrow (\sigma \rightarrow \gamma) \quad \text{atl} = \bigwedge_{i=1}^n \text{atl}_i \\
\hline
c) \vdash \alpha \rightarrow \gamma \text{ while}_{\Box} \sigma
\end{array}$$

В первой посылке: если до программы имеет место свойство α , то после каждого перехода оно сохранится и, кроме того, будет иметь место свойство γ или свойство $\neg \sigma$.

Во второй посылке: если в ходе вычисления по любому возможному сценарию данная параллельная программа делает холостой шаг, т.е. ничего не меняется (это может быть, например, при терминации), и до него имеет место свойство α , то при условии наличия свойства σ свойство γ также присуще этой программе.

Тогда, исходя из этих посылок, мы можем заключить, что если свойство α присуще данной параллельной программе, то в ходе ее вычисления по любому возможному сценарию свойство γ будет иметь место, пока будет иметь место свойство σ .

Второе правило - для установления свойств предшествования, которые выполняются только для некоторых возможных вычислений данной параллельной программы, $w_{\Diamond}$ -правило

- a) $\vdash \text{atl} \wedge \alpha \rightarrow \neg N_{\square}((\sigma \wedge \neg \gamma) \vee \neg \alpha)$ для всех $l \in L_p$
 b) $\vdash \text{atl} \wedge \neg N_{\square} \neg \text{atl} \wedge \alpha \rightarrow (\sigma \rightarrow \gamma)$
-
- c) $\vdash \alpha \rightarrow \gamma \text{ while } \diamond \sigma$

Пример доказательства наличия у параллельной программы свойств предшествования, характеризующих ее правильное вычислительное поведение. Рассмотрим следующую параллельную программу.

$Z = (\text{nextinput} = u_0 \wedge t = 1 \wedge b = s = a = 0)$

cobegin

"отправитель": "адресат":

цикл:

цикл:

r^0 : if $b = a$ then $b := b + 1$ m^0 : if $t = k$ then $\text{nextoutput} := \text{inf}$

$d := \text{nextinput}$ fi; $t := t + 1$ fi;

r^1 : отправить (b, d) к (s, inf) m^1 : отправить $(t + 1)$ к (a)

конец цикла. конец цикла.

coend.

"Отправитель" посылает "адресату" последовательность сообщений $U = u_0, u_1, u_2, \dots$. "Адресат" посылает обратно к "отправителю" подтверждение о том, что сообщение им получено. Однако передачи в обоих направлениях могут быть нарушены по каким-либо обстоятельствам и тогда "отправитель" будет получать подтверждения не в том порядке, каком он посылал сообщения, а это в свою очередь нарушит весь порядок коммуникаций, поскольку получение подтверждения не на то сообщение, которое послано последним, исказит последовательность отправления сообщений. Поэтому необходимо найти способ стабилизации коммуникаций, гарантирующий, что получаемые сообщения будут подтверждаться "адресатом" в том же порядке, каком они посылаются "отправителем".

Основная идея решения - посылать сообщение u_i "адресату" вместе с контрольным битом (b) и отправлять обратно подтверждение вместе с контрольным битом (t) . Приведенная выше параллельная программа реализует эту идею.

Пояснения к программе "отправитель-адресат".

Пара переменных (s, inf) может рассматриваться как почтовый ящик адресата, переменная a - как почтовый ящик отправителя.

l^0 - получение подтверждения;

l^1 - посылка сообщения, понимается как приписывание контрольного бита b к s и сообщения d к inf ; эта операция зацикливается с теми же данными, пока нет соответствующего подтверждения со стороны адресата;

m^0 - получение сообщения;

m^1 - посылка подтверждения, понимается как приписывание контрольного бита $t+1$ к a ; эта операция зацикливается с теми же данными, пока нет следующего сообщения.

Правильность этой программы, т.е. обеспечение ею подтверждения сообщений в порядке их поступления, определяется наличием у нее свойств, которые могут быть выражены следующими формулами:

C1: $\theta \rightarrow (\text{inf} = u_0) \text{ while}_{\square} (\text{at } m^0 \wedge s = t)$

При наличии соответствующих исходных условий: пока выполнение программы находится в метке m^0 и $s = t$, подтверждается сообщение u_0 .

C2: $\text{at } m^0 \wedge s = t \wedge \text{inf} = u_i \rightarrow (\text{inf} = u_{i+1}) \text{ while}_{\square} (\text{at } m^0 \wedge s = t)$

Если процесс-"адресат" подтверждает в текущий момент сообщение u_i , то в дальнейшем пока выполнение программы будет находиться в метке m^0 и $s = t$, будет подтверждаться и сообщение u_{i+1} .

Для доказательства правильности программы "отправитель-адресат" нам понадобится ряд инвариантов:

Ин.а) $G_{\square} (d = u_i \rightarrow \text{nextinput} = u_{i+1})$

Ин.б) $G_{\square} ((s = t \rightarrow t = b \wedge \text{inf} = d) \wedge (b = a \rightarrow t \neq b))$

Все эти инварианты верифицируются по ИНВ-правилу с учетом исходных условий⁴.

Пусть $\beta_i = (t = b \rightarrow d = u_i)$

Проверим, что $\vdash (\text{atl}^0 \vee \text{atl}^1 \vee \text{atm}^1) \wedge \beta_i \rightarrow N_{\square} \beta_i$

Для l^1 и m^1 проверка тривиальна, так как β_i не содержит s , inf и a .

Для l^0 . Если $b = a$, то в силу Ин.б) имеем:

$\vdash \text{atl}^0 \wedge b = a \wedge \beta_i \rightarrow \text{atl}^0 \wedge b = a \wedge t \neq b \wedge \text{nextinput} = u_i$.

Кроме того, $\vdash \text{atl}^0 \wedge b = a \wedge t \neq b \wedge \text{nextinput} = u_i \rightarrow N_{\square} (t = b \rightarrow d = u_i)$ (по программе). В силу транзитивности, получаем $\vdash \text{atl}^0 \wedge b = a \wedge \beta_i \rightarrow N_{\square} \beta_i$; отсюда - $\vdash (\text{atl}^0 \vee \text{atl}^1 \vee \text{atm}^1) \wedge \beta_i \rightarrow N_{\square} \beta_i$ - (A).

Из Ин.б) выводима еще одна формула, необходимая для доказательства C1 и C2:

$\vdash \beta_i \wedge s = t \rightarrow \text{inf} = u_i$ - (B).

Пусть $\alpha^0 = \beta^0 \wedge (\text{atm}^0 \rightarrow s = t)$

Доказательство C1.

Стратегию доказательства C1 подсказывает $w_{\square}$ -правило. Докажем посылку а) этого правила.

$\text{at} \chi = \text{atl}^0 \vee \text{atm}^1 \vee \text{atl}^1$

⁴ "Технику" получения этих инвариантов опускаем.

$$1) \vdash at\chi \wedge \alpha^0 \rightarrow N_{\square}\beta^0.$$

из (A),

$$2) \vdash atl^0 \wedge \alpha^0 \rightarrow N_{\square}\alpha^0.$$

инвариант программы⁵

$$3) \vdash at\chi \wedge \alpha^0 \rightarrow N_{\square}(atm^0 \wedge s=t \rightarrow inf=u_0) \wedge N_{\square}\alpha^0$$

1), 2), (B), R2,

теорема UBw

$$4) \vdash atm^0 \wedge \alpha^0 \rightarrow N_{\square}(atm^0 \wedge s=t \rightarrow inf=u_0) \wedge N_{\square}\alpha^0$$

(B),

$$5) \vdash (at\chi \vee atm^0) \wedge \alpha^0 \rightarrow N_{\square}(atm^0 \wedge s=t \rightarrow inf=u_0) \wedge N_{\square}\alpha^0$$

3), 4) для всех

методик программы.

Посылка а) $w_{\square}$ -правила доказана.

Вторая посылка устанавливается следующим образом.

Поскольку оба процесса программы - циклы и поэтому нет термимации (конечных меток), а также нет синхронизирующих команд, которые могут задержать выполнение цикла, постольку

$\neg((at\chi \vee atm^0) \wedge \alpha_0 \rightarrow N_{\square}(at\chi \vee atm^0))$. Отсюда, в силу теоремы КИВ $\vdash (at\chi \vee atm^0) \wedge N_{\square}(at\chi \vee atm^0) \wedge \alpha \rightarrow (atm^0 \wedge s=t \rightarrow inf=u_0)$.

Это и есть вторая посылка $w_{\square}$ -правила. Тогда по $w_{\square}$ -правилу заключаем, что

$$\vdash \alpha^0 \rightarrow (inf=u_0)w_{\square}(atm^0 \wedge s=t) \quad - (D).$$

Можно доказать, что $\theta \rightarrow \alpha^0$, где $\theta = atl^0 \wedge$

$\wedge atm^0 \wedge nextinput=u_0 \wedge t=1 \wedge b=s=a=0$ и

$$\alpha^0 = (t=b \rightarrow d=u_0) \wedge (atm^0 \rightarrow s=t) \quad - (E).$$

Тогда $\vdash \theta \rightarrow (inf=u_0)w_{\square}(atm^0 \rightarrow s=t) \quad - D, E, \text{ транз.}$

C1 доказана.

Доказательство C2.

Пусть $\alpha = atm^0 \rightarrow s=t \rightarrow inf=u_i \wedge (atm^0 \rightarrow s=t)$

В доказательстве C2 следуем $w_{\square}$ -правилу.

Доказательство посылки а):

$$1) \vdash at\chi \wedge \alpha \rightarrow N_{\square}(atm^0 \rightarrow s=t \rightarrow inf=u_{i+1}) \wedge N_{\square}\alpha$$

(A), (B)

⁵ "Технику" получения этих инвариантов опускаем.

$$2) \vdash \text{atm}^0 \wedge \alpha \rightarrow N_{\square}(\text{atm}^0 \rightarrow s=t \rightarrow \text{inf}=u_{i+1}) \wedge N_{\square}\alpha$$

аналогично 4) из док-ва С1

$$3) \vdash (\text{atx} \vee \text{atm}^0) \wedge \alpha \rightarrow N_{\square}(\text{atm}^0 \rightarrow s=t \rightarrow \text{inf}=u_{i+1}) \wedge N_{\square}\alpha$$

1), 2)

При доказательстве второй посылки рассуждаем аналогично предыдущему случаю. По $w_{\square}$ -правилу заключаем, что

$$\vdash \alpha \rightarrow (\text{inf}=u_i+1) w_{\square} (\text{atm}^0 \wedge s=t).$$

Поскольку $\vdash \text{atm}^0 \wedge s=t \wedge \text{inf}=u_i \rightarrow \alpha$ (в силу теорем КИВ), получаем

$$\vdash \text{atm}^0 \wedge s=t \wedge \text{inf}=u_i \rightarrow (\text{inf}=u_{i+1}) w_{\square} (\text{atm}^0 \wedge s=t).$$

С2 доказана.

Параллельная программа "отправитель-адресат" действительно обеспечивает правильную коммуникацию между "отправителем" и "адресатом", гарантируя подтверждение сообщений в порядке их получения.

ЛИТЕРАТУРА

1. Ben-Ari M., Manna Z., Pnueli A. The temporal logic of branching time // Acta Informatica. Vol.20. 1983. P.207-226.
2. Clarke E., Emerson E. Using branching time logic to synthesize synchronization skeletons // Science of Computing Programming. Vol. 1982. P.241-266.
3. Emerson E., Halpern J. "Sometimes" and "not never" revisited: on branching versus linear time // Proc. ACM Symposium on Principles of Programming Languages. Paris, 1983. P.127-140.
4. Floyd R. Assigning meaning to programs // Proc. of Symposium in Applied Mathematics. N.Y., 1967. P.19-32.
5. Cabbay D., Pnueli A., Shelah S., Stavi J. On temporal analysis of fairness // Proc. of ACM Symposium on Principles of Programming Languages. Las-Vegas, 1980. P.163-173.
6. Kroger F. A generalised nexttime operator in temporal logic // J. of Computer and System Science. Vol.29. № 1.1984. P.80-98.
7. Lamport L. "Sometimes" is sometimes "not never" // Proc. of ACM Symposium on Principles of Programming Languages. Las-Vegas, 1980.
8. Manna Z., Pnueli A. Verification of concurrent programs: proving eventualities by well-founded ranking // ACM TOPLAS. Vol.3 1983. P.236-249.
9. Manna Z., Pnueli A. Verification on concurrent programs: temporal framework // The correctness problem in Computer Science. L.: Academic Press. 1981. P.215-273.
10. Pnueli A. The temporal logic of programs // Proc. 18th IEEE Symposium on the Foundation of Computer Science. San-Francisco, 1977. P.46-57.

МОДЕЛИРОВАНИЕ СТАНОВЛЕНИЯ НА ЭВМ

Построенная в данной работе модель течения времени или становления ни в коей мере не претендует на учет всех сторон темпоральности. Более того, сложность этой модели находится на таком предельно низком уровне, какой вообще можно было допустить, не боясь полностью утратить свойство адекватности моделируемому феномену. Следующая особенность предлагаемой модели связана с возможностью реализовать ее на реально существующих персональных компьютерах.

1. Процедуры Creation, Oblivion и Past

В компьютерной программе, выполнение которой моделирует течение времени, роль моментов времени фактически (в дальнейшем это будет уточнено) играют массивы, занимающие всю (или почти всю) доступную для размещения информации оперативную память. Точнее говоря, попытка объявить в программе еще один массив должна приводить к ошибке, связанной с нехваткой памяти. Философский смысл данного требования в том, что течение времени изменяет все, что может быть изменено. В ходе становления изменяются как сами моменты времени, так и составляющие их события. Размещение (или даже только возможность размещения) в оперативной памяти момента-массива, не вовлеченного в процесс становления, было бы подобно возникновению неподвижного слоя воды в быстро текущем потоке.

Однако без островков неподвижности не обойтись, если мы не желаем впасть в ересь мутакаллимов, учивших, что мир каждое мгновение уничтожается и затем творится заново [1]. Становление обеспечивает определенную преемственность между новым и старым и подчиняется законам, воплощенным (в данном случае) в командах компьютерной программы. Будем считать, что эти законы неизменны, т.е. процесс выполнения программы не приводит к каким-либо преобразованиям самой программы. Такой подход, впрочем, соответствует сложившейся практике программирования и понятен без длинных разъяснений. Однако мы должны учитывать и возможность эволюции самих законов становления, или, говоря языком модели, самопреобразований программы в ходе ее выполнения.

Можно реализовать и эту возможность, поскольку в современных ЭВМ и данные, и программные команды представлены одним и тем же способом – и те, и другие являются последовательностями нулей и единиц. Одно и то же двоичное число в одном случае может быть проинтерпретировано процессором как код операции, в другом – как код операнда. Однако данная возможность не учитывается в рассматриваемой модели ввиду нежелательности появления на

этой стадии изложения новых усложнений, затрудняющих понимание сути дела.

Если моменты времени представлены в модели при помощи массивов, то естественно считать элементы массивов событиями. Внутренняя структура событий сейчас не важна, поэтому будем в качестве событий использовать целые положительные числа (число 0, по определению, событием не считается). Разделение событий на группы также оставим в стороне, поэтому массивы-моменты будут одномерными. Утверждение "В момент времени t произошло событие s " будет, таким образом, означать, что в памяти компьютера расположен одномерный массив t , содержащий число s .

Выполнение программы, написанной на BASIC-ке, будет сводиться к многократному вызову в определенном порядке трех процедур.

Процедура Creation. Говоря неформально, эта процедура обеспечивает появление нового. Было бы очень странным, если бы новое появлялось в прошлом. То, что было, может исчезать, но в том, что было, не может возникнуть нечто новое. Ошибочно думать, что прошлое неизменно. Оно изменяется, но не так, как будущее. Будущее - это процесс приобретений, прошлое - процесс потерь. Изменения прошлого состоят во все возрастающих, по мере его отдаления, утратах. Вывод, стало быть, состоит в том, что события входят в мир через настоящее, оставаясь затем в прошлом и, возможно, теряясь в нем. Как только настоящее становится прошлым, оно перестает быть настоящим. Ему на смену приходит новое настоящее. Процедура Creation и обеспечивает появление нового настоящего. Ее роль заключается в заполнении массива (всегда одного и того же) информацией, для получения которой используется оператор BASIC-а RND.

Действие RND (по крайней мере в том варианте BASIC-а, которым пользовался автор) в интересующем нас аспекте сводится к следующему. Если в программе встречается выражение вида $RND(n)$, где n - целое число, превышающее единицу, то результатом выполнения выражения будет случайное (точнее, псевдослучайное) целое число k , находящееся в интервале $1 \leq k \leq n$. Для наших целей удобнее считать, что оператор RND действует недетерминированным образом, так что предсказать появление конкретного числа невозможно в принципе.

Чтобы сделать числа-события, происходящие в модели, достаточно разнообразными, в качестве аргумента оператора RND в процедуре Creation будем использовать число 1000 000 000.

Итак, при вызове процедуры Creation массив, выбранный ею в качестве момента настоящего, заполняется (псевдослучайными) числами из интервала от 1 до 1000 000 000. Как только массив оказывается полным, выполнение процедуры завершается.

Процедура Oblivion. Это процедура забвения. Прежде чем при помощи процедуры Creation будет создано новое настоящее, часть информации о событиях "старого" настоящего должна быть забыта.

Почему часть, а не вся информация? По той причине, что настоящее в реальной действительности оставляет следы, не исчезает полностью в следующее мгновение. Наше "вчера" - это бывшее настоящее, которое нельзя ни усилиями человеческой памяти, ни использованием любых мысленных приборов и устройств вернуть в актуальное бытие. Нельзя, поскольку какие-то из вчерашних событий уже безвозвратно утрачены. Предотвратить потерю части информации о настоящем невозможно, так как ресурсы пространства-памяти ограничены и нигде будет размещено новое настоящее, идущее на смену прежнему.

Так же, как настоящее должно уступить место грядущему настоящему, "вчера" переходит в "позавчера", освобождая путь для нового "вчера", вновь теряя при этом информацию о событиях благодаря процедуре Oblivion. Вообще переход любого прошлого момента времени в более далекое прошлое сопровождается потерями, определяемыми этой процедурой. Так что процедуре Oblivion подвержены в итоге все моменты - от настоящего до самого далекого прошлого. При этом, поскольку ресурсы памяти ограничены (память реальных компьютеров конечна), самый ранний момент прошлого, находящийся в памяти, на очередном шаге становления не может быть сохранен даже частично - для этого потребовался бы еще один массив-момент, но нехватка памяти делает его объявление невозможным. В конце концов данный момент должен исчезнуть полностью. Память о событиях, случившихся в этот момент, оказывается утраченной навсегда.

С технической точки зрения действие процедуры Oblivion состоит в обнулении ненулевых элементов обрабатываемого массива, выбранных (псевдо)случайным образом при помощи оператора RND. Поскольку, по определению, событиями считаются только числа, превышающие единицу, появление нуля не позволяет сказать, какое число-событие находилось на месте нуля: ведь это число-событие выбиралось (псевдо)случайным образом из достаточно обширного интервала целых чисел.

Процедура Oblivion сначала обрабатывает массивы с меньшим объемом занимаемой памяти, а затем переходит на массивы большей величины. Как мы увидим, такой порядок соответствует темпоральному отношению "раньше, чем", т.е. потеря информации происходит вначале в более ранних моментах времени, а затем в более поздних. Информация из настоящего теряется последней.

Процедура Past. Назначение процедуры состоит в пересылке сохранившегося после работы процедуры Oblivion объема информации в прошлое. Так, если массив-момент t является настоящим, а затем с помощью Oblivion теряет часть информации, то оставшаяся информация должна уйти в прошлое, освободив место в массиве t для новой информации, получаемой при использовании процедуры Creation. Если ближайшее прошлое - это массив t' , то процедура Past пересылает сохранившиеся события из массива-момента t в массив-момент t' . В результате образуется момент прошлого t' . В

последующем сохранившаяся информация из t' должна быть отправлена в массив-момент t'' - более далекое прошлое для t , чем t' , и т.д.

Можно было бы сказать, что процедура Past создает прошлое. Однако процесс создания прошлого принципиальным образом отличается от процесса создания настоящего. Отличие прошлого от настоящего состоит в том, что в прошлом сохранилось не все, что было в настоящем; часть содержания настоящего оказывается потерянной. По существу, создание прошлого - это разрушение настоящего. Может быть, было бы лучше назвать процедурой, создающей прошлое, процедуру Oblivion? Однако без переноса обломков настоящего в соответствующую область прошлого тоже не обойтись. Поэтому логичнее считать, что прошлое создается и процедурой Oblivion, и процедурой Past, причем именно в указанном порядке, т.е. начинает создавать прошлое Oblivion, а завершает процесс Past.

На долю процедуры Creation остается создание настоящего. В отличие от процесса создания прошлого, основывающегося на актах разрушения и забвения, процесс создания настоящего является актом творческого созидания. Пусть в модели этот акт представлен выбором числа из известной заранее совокупности, пусть сам выбор имеет не случайный, а псевдослучайный характер - тем не менее, до известной степени, процедура Creation имитирует творческий выбор одной из альтернатив, составляющих сферу возможного. В модели эта сфера ограничена 1000 000 000 вариантов. Не так уж мало. Если бы выбор вариантов в модели действительно осуществлялся подлинно случайным (а не псевдо-случайным) образом, то это был бы ни на чем не основанный выбор, конкретный результат которого в принципе нельзя предсказать, хотя заранее известно, что это будет целое число s из интервала $1 \leq s \leq 1000000000$. Но предвидеть появление конкретного числа из указанного интервала, повторим, было бы невозможно в принципе.

Как тут не вспомнить А.Бергсона, утверждавшего, что будущее нельзя предвидеть, его можно только пережить [2]. Поистине, будущее предвидится путем его осуществления. Поэтому в нашей модели отсутствуют моменты будущего. Не можем же мы (даже обладая ресурсами памяти) выбрать будущие события до того, как произведен сам акт выбора! Вместе с тем ничто не мешает (при наличии свободной памяти) ввести категорию стабильных событий, событий, существующих в каждый момент времени или появляющихся периодически. Достаточно было бы, например, в нулевой элемент $t(0)$ массива-момента настоящего t положить некоторое число k и не затрагивать в процедуре Oblivion элемент $t(0)=k$. Тогда событие k было бы вечным событием, всегда присутствующим в настоящем. Его можно было бы однозначно предвидеть, и мы имели бы простейшую имитацию астрономического предвидения будущего, о котором писал Бергсон.

Мы видим, что незамысловатые рассуждения о том, что будущее становится настоящим, настоящее становится прошлым, а

прошлое переходит в еще более далекое прошлое, явно недостаточны при описании течения времени. Становление - сложный процесс, включающий в себя ряд этапов, без которых не обойтись даже в наиболее простых моделях течения времени. Но было бы крайне непоследовательным считать, что эти этапы протекают во времени. Они и есть время. Укажем в этой связи на неправомерность присвоения звания моментов времени любым шагам процесса становления. Это не моменты времени, а этапы создания моментов времени в ходе течения времени. Последовательность этапов становления не есть последовательность моментов времени или последовательность мгновений.

2. Программа BECOMING

Рассмотрим написанную на языке BASIC программу BECOMING, моделирующую течение времени. Приведем вначале текст самой программы.

```
1 REM Программа BECOMING
5 X1%=38 : X2%=800 : X3%=2000 : X4%=4000
8 DIM V1%(X1%) : DIM V2%(X2%) :
  DIM V3%(X3%) : DIM V4%(X4%)
10 PROCCreation
20 PROCObivion("V4%")
30 PROCPast("V3%")
40 PROCCreation
50 PROCObivion("V3%")
60 PROCObivion("V4%")
70 PROCPast("V2%")
80 PROCPast("V3%")
90 PROCCreation
100 PROCObivion("V2%")
110 PROCObivion("V3%")
120 PROCObivion("V4%")
130 PROCPast("V1%")
140 PROCPast("V2%")
150 PROCPast("V3%")
160 PROCCreation
200 REPEAT
210 PROCObivion("V1%")
220 PROCObivion("V2%")
230 PROCObivion("V3%")
240 PROCObivion("V4%")
250 PROCPast("V1%")
260 PROCPast("V2%")
270 PROCPast("V3%")
280 PROCCreation
290 PRINT "METAMOMENT"
300 UNTIL FALSE
310 END
320 :
330 DEF PROCCreation
340 FOR I%=1 TO X4%
350 V4%(I%)=RND(10000000000)
```

```

360 NEXT I%
370 ENDPROC
380 :
390 DEF PROCObivion(X$)
400 C% = 0 : E% = 0
410 IF X$ = "V1%"
    FOR I% = 1 TO X1% : V1%(I%) = 0 :
    NEXT I% : GOTO 570
420 IF X$ = "V2%" GOTO 450
430 IF X$ = "V3%" GOTO 490
440 IF X$ = "V4%" GOTO 530
450 REPEAT
460 E% = RND(X2%)
470 IF V2%(E%) > 0 V2%(E%) = 0 : C% = C% + 1
480 UNTIL C% = X2% - X1%
485 GOTO 570
490 REPEAT
500 E% = RND(X3%)
510 IF V3%(E%) > 0 V3%(E%) = 0 : C% = C% + 1
520 UNTIL C% = X3% - X2%
525 GOTO 570
530 REPEAT
540 E% = RND(X4%)
550 IF V4%(E%) > 0 V4%(E%) = 0 : C% = C% + 1
560 UNTIL C% = X4% - X3%
570 ENDPROC
580 :
590 DEF PROCPast(X$)
600 C% = 0
610 IF X$ = "V1%" GOTO 640
620 IF X$ = "V2%" GOTO 700
630 IF X$ = "V3%" GOTO 760
640 FOR I% = 1 TO X1%
650 REPEAT
660 C% = C% + 1
670 UNTIL V2%(C%) > 0
680 V1%(I%) = V2%(C%)
690 NEXT I%
695 GOTO 820
700 FOR I% = 1 TO X2%
710 REPEAT
720 C% = C% + 1
730 UNTIL V3%(C%) > 0
740 V2%(I%) = V3%(C%)
750 NEXT I%
755 GOTO 820
760 FOR I% = 1 TO X3%
770 REPEAT
780 C% = C% + 1
790 UNTIL V4%(C%) > 0
800 V3%(I%) = V4%(C%)
810 NEXT I%
820 ENDPROC

```

После комментария, содержащегося в первой строке программы BECOMING, следует строка номер 5, определяющая размерность массивов целых чисел, объявленных в строке 8. Так как

массивов четыре, моментов времени также будет всего четыре. Однако дальнейшее увеличение количества моментов, если их число остается конечным, никакой принципиально новой ситуации в данном случае не создает. Объем массива V4% (предназначенного для хранения событий настоящего) выбран таким образом, чтобы два "настоящих" не могли разместиться в памяти персонального компьютера BBC Acorn, на котором выполнялась программа BECOMING.

Для других персональных компьютеров, снабженных интерпретаторами или компиляторами BASIC-а, размеры массива V4% могут быть совершенно другими. Важно только, чтобы два таких массива нельзя было одновременно разместить в управляемой BASIC-ом области оперативной памяти. Это требование философского порядка, так как никаким разумным образом невозможно (в рамках динамической концепции времени) оправдать возможность сосуществования двух равноправных "настоящих".

Более того, вообще попытка добавить в строке 5 объявление еще одного массива должна приводить к ошибке, связанной с нехваткой памяти при выполнении программы BECOMING. В противном случае наличие лишь четырех массивов-моментов нельзя содержательно оправдать. Кроме того, массивы должны иметь попарно различные размеры (как это и сделано в строке 5), так как в соответствии с общим принципом динамической концепции времени переход в прошлое связан с потерей информации. Следовательно, массивы, хранящие информацию о более далеком прошлом, должны быть меньшего объема, чем массивы, хранящие информацию о менее далеком прошлом.

3. Этап роста множества моментов

Выполнение строк с 10 по 160 однозначно соответствует шагам этапа инициализации множества моментов времени. Так, шаг 1 соответствует строке 10 программы, шаг 2 - строке 20 и т.д., т.е. шаг i соответствует строке $10 \times i$ программы BECOMING, вплоть до шага $i = 16$ включительно.

Этап инициализации, или, проще говоря, создания множества моментов модельного времени, необходим по следующей причине. После выполнения строки 5 память компьютера будет распределена между массивами V1%, V2%, V3% и V4%, которые, однако, мы не можем считать моментами времени. Ведь, по определению, моментом времени называется множество событий, а ни один из перечисленных массивов еще не содержит ни одного события, т.е. целого числа $s > 0$.

Ясно, что массивы подлежат заполнению событиями. Но как это сделать? Если сначала превратить массив V4% в момент времени, а затем наполнить событиями массив V3%, то получится, что момент, содержащийся в V4%, наступил раньше, чем момент, содержащийся в V3%. Однако предполагалось, что наибольший по

размерам массив V4% хранит события настоящего. Но настоящее не может наступить раньше прошлого. Если, с другой стороны, сначала заполнить V3%, то (с содержательной точки зрения) именно V3% и является моментом настоящего времени, поскольку других моментов пока просто нет! Не можем же мы, не впадая в противоречие со здравым смыслом, с самого начала объявить события из V3% прошлыми. Ведь тогда получилось бы, что существует прошлое, никогда не бывшее настоящим.

К счастью, можно избежать создавшихся трудностей. Путь, ведущий к выходу из тупика, содержит 16 шагов. Проследим за этими шагами (попутно указывая, с помощью каких процедур программы BECOMING осуществляются эти шаги).

На первом шаге вызывается процедура Creation (строка 10), определение которой занимает строки с 330 по 370. Работая в цикле, процедура полностью заполняет массив V4% событиями, т.е. ненулевыми числами, выбираемыми оператором RND. На этом шаге после его завершения существует один-единственный момент - момент настоящего, содержащийся в массиве V4%. Никаких других моментов еще нет, прошлого нет, отношение "раньше, чем" не определено.

На втором шаге не создается еще какой-либо момент времени - как мы видели, это привело бы к парадоксам, - а уничтожается часть событий момента настоящего при помощи вызова процедуры Oblivion (см. строку 20) с параметром X\$ = "V4%", т.е. в качестве параметра берется имя массива V4%, подлежащего частичному (в данном случае) обнулению. Недетерминированный выбор уничтожаемых событий имитируется оператором RND. После стирания части событий настоящего уже нет. Но и прошлого в собственном смысле еще нет - здесь фактически промежуточный этап создания прошлого.

Шаг 3 завершает создание первого момента прошлого при помощи вызова процедуры Past с именем массива V3% в качестве параметра (строка 30). В ходе выполнения процедуры Past все спасшиеся от уничтожения события бывшего настоящего пересылаются в массив V3%, который заполняется этими событиями целиком. В результате шаг 3 завершается созданием момента прошлого, содержащегося в массиве V3%. Момент из V3% - действительно момент прошлого, так как все события, составляющие этот момент, когда-то были событиями настоящего. Вместе с тем никаких других моментов нет: настоящее перестало быть настоящим, "провалилось" в прошлое, массивы V1% и V2% вообще не содержат ни одного события, поэтому не содержат и моментов времени.

Но массив V4% содержит события! Должен ли он считаться моментом времени? Вроде бы, раз массив содержит события, его следует отнести к моментам. Но, строго говоря, моментами времени мы называем множества событий. В конце концов не столь существенно, что эти множества в программе BECOMING представлены массивами. Важнее то, что с теоретико-множественной

точки зрения множество событий в массиве V4% и множество событий в массиве V3% совпадают. Тем самым как множества событий массивы V4% и V3% равны. Они как бы склеиваются в одно множество. Если бы существовало хоть одно событие, принадлежащее V4%, но не принадлежащее V3% или наоборот, то мы имели бы дело с разными множествами событий и тем самым - с разными моментами времени. Но чего нет, того нет: на шаге 3 существует лишь одно множество событий, являющееся единственным моментом прошлого при отсутствии настоящего.

На шаге 4 впервые возникают два момента времени. Появляется возможность определить отношение "раньше, чем", ответив на вопрос о последовательности возникновений этих моментов. На этом шаге вновь вызывается процедура Creation, заново создающая настоящее. Поскольку момент V3% уже был в памяти перед тем, как появился новый момент V4%, естественно считать, что V3% раньше, чем V4%.

На шаге 5 более ранний момент времени подвергается частичному уничтожению. Второй момент остается неизменным. С интуитивной точки зрения частично стертый момент по-прежнему предшествует во времени моменту, сохранившемуся неизменным, так как события "нестабильного" момента появились в памяти компьютера раньше, чем события "стабильного" момента. Но нестабильность момента означает, что идет процесс его трансформации в некий другой момент. В некотором смысле подвергшийся преобразованиям момент и момент, сохраняющий свою стабильность на очередном шаге становления, относятся к категориям разного рода. Так или иначе, мы будем определять модельное временное отношение "раньше, чем" только на "стабильных" моментах. Ситуации стабильности возникают на этапе инициализации на шагах 1, 4, 9 и 16, а на циклическом этапе - на шаге 0. Лишь на этих шагах (за исключением шага 1, когда имеется единственный момент времени) будет определено отношение R, являющееся модельным аналогом отношения "раньше, чем".

На шаге 6 частичному уничтожению подвергается момент настоящего (аналогично тому, как это происходило на шаге 2).

Шаг 7 состоит в переносе событий из второго по величине массива в третий по величине массив, который заполняется целиком и представляет впервые образованный еще один момент прошлого.

Шаг 8 аналогичен шагу 7, за исключением того, что перенос событий осуществляется из наибольшего массива во второй по величине массив.

Шаг 9. На этом шаге впервые завершается создание трех "полноценных" моментов времени, и, как уже говорилось, между ними устанавливается модельное отношение "раньше, чем".

Шаги с 10 по 16 полностью аналогичны предыдущим. Отличие заключается только в том, что эти шаги приводят к образованию четырех моментов времени, упорядоченных в соответствии с порядком появления в памяти.

4. Циклический этап

На этом этапе программа BECOMING входит в бесконечный цикл преобразований временного ряда. Количество моментов более не возрастает из-за нехватки памяти.

Шаг 0. После выполнения шага 16 управление передается на шаг 1 цикла. Это означает, что перед выполнением первого шага цикла в памяти расположен "полноценный" ряд из 4 моментов т.е. ряд, аналогичный тому, который должен появиться на шаге 0. Можно считать поэтому, что выполнение цикла начинается с шага 0, роль которого первоначально играет шаг 16, завершающий этап инициализации.

На шаге 1 самый ранний момент времени с помощью процедуры Oblivion подвергается полному уничтожению (массив V1% обнуляется). Полному - потому что сохранившуюся в первом моменте информацию невозможно (даже частично!) переслать в более далекое прошлое из-за нехватки памяти. Между тем требуется место для новой информации.

Шаги 2 - 7 ничем не отличаются от шагов 10 - 15 этапа инициализации. В программе BECOMING этим шагам соответствует одна и та же последовательность процедур, вызываемых с теми же самими параметрами.

5. Временные понятия в компьютерной среде

В чем смысл программы BECOMING? Она моделирует течение времени или становление. Каким образом мы часто поступаем, когда требуется ввести в рассмотрение время? Вначале уславливаемся, например, что временем называется любое линейно упорядоченное множество, удовлетворяющее следующим аксиомам:

- (1) $\forall x \neg(x < x)$,
- (2) $\forall x \forall y \forall z (x < y \ \& \ y < z \rightarrow x < z)$,
- (3) $\forall x \forall y (x < y \vee y < x \vee x = y)$.

Любая модель этих аксиом считается теперь множеством моментов времени, упорядоченных "темпоральным" отношением "<". Скажем, множество Z целых чисел удовлетворяет всем аксиомам (1) - (3) и потому может быть взято в качестве модели времени.

По сути программа BECOMING играет по отношению ко времени ту же самую роль, что и множество Z . И то, и другое - конкретные примеры моделей времени. Но BECOMING - модель динамического времени, а Z - модель статического времени.

Введем ряд новых понятий, относящихся к программе BECOMING. Предположим, выполнение BECOMING находится на таком этапе, когда осмысленным становится вопрос о значениях,

присвоенных элементам объявленных в BECOMING четырех массивов. Будем говорить в этом случае, что массивы заполнены.

Каждый заполненный массив из множества $ARRAY = \{V1\%, V2\%, V3\%, V4\%\}$ будем рассматривать как функцию из множества $\{1, 2, \dots, n\}$ (где n - уменьшенная на 1 размерность массива) в некоторое подмножество множества $V = \{0, 1, \dots, 1000000000\}$.

Обозначая через $dom(f)$ и $rng(f)$ области определения и значения функции f соответственно, положим

$$RNG = \{m \mid \exists v (v \in ARRAY \ \& \ rng(v) = m)\}.$$

Назовем множество m из RNG квазимоментом (времени), если 0 принадлежит m и найдется число, отличное от 0 , также принадлежащее m :

$$Квазимомент(m) \Leftrightarrow (m \in RNG \ \& \ 0 \in m \ \& \ \exists x (x > 0 \ \& \ x \in m)).$$

Содержательно множество m является квазимоментом, если оно содержит какие-либо события (роль которых играют отличные от нуля целые положительные числа), но может быть расширено при помощи добавления других событий путем замены нулевых значений соответствующего массива на ненулевые.

Множество m из RNG является моментом (времени), если $\neg(0 \in m)$. Это эквивалентно утверждению $\forall x (x \in m \rightarrow x > 0)$. Итак,

$$Момент(m) \Leftrightarrow (m \in RNG \ \& \ \forall x (x \in m \rightarrow x > 0)).$$

Содержательно множество m является моментом, если оно не может быть расширено при помощи добавления новых событий посредством замены нулевых значений соответствующего массива ненулевыми из-за того, что все элементы этого массива имеют значения, отличные от 0 .

Множество всех квазимоментов и всех моментов обозначим через K и через M соответственно. Из определений немедленно следует, что $K \cap M = \emptyset$. На множестве $K \cup M$ определим (неформально) отношение *квазираньше, чем*, обозначив его через KR :

$m \ KR \ m'$, если и только если вызов процедуры, сформировавшей m , предшествовал вызову процедуры, сформировавшей m' .

"Нормальное" отношение R , соответствующее привычному "раньше, чем", является сужением отношения KR на множество моментов M :

$$m \ R \ m' \Leftrightarrow (m \in M \ \& \ m' \in M \ \& \ m \ KR \ m').$$

Введем еще два важных определения. Назовем упорядоченную пару $KW = \langle K \cup M, KR \rangle$ *квазиметамоментом*, если $K \neq \emptyset$.

Упорядоченная пара $W = \langle K \cup M, R \rangle$ является *метамоментом*, если $K = \emptyset$ и $M \neq \emptyset$.

В соответствии с этими определениями метамоментам соответствуют на этапе инициализации шаги 1, 4, 9 и 16, а на циклическом этапе - шаги 1 и 0. Все остальные шаги обоих этапов порождают квазиметамоменты.

Существенно, что на каждом шаге становления возникает квазиметамомент или метамомент и притом только один. Два различных метамомента или два различных квазиметамомента сосуществовать вместе не могут - для их размещения не хватит памяти компьютера. Памяти хватает для размещения одного и только одного метамомента или квазиметамомента.

Предположим, что процесс выполнения программы BECOMING находится на таком этапе, когда в памяти компьютера размещен метамомент M .

Моментом настоящего назовем момент $h \in M$, удовлетворяющий условию $(\forall m \in M)(mRh \vee m = h)$.

Множество моментов прошлого P образуем при помощи условия $P \approx \{m \mid m \in M \ \& \ mRh\}$.

Казалось бы, настала очередь моментов будущего. Однако в рассматриваемой модели моменты будущего отсутствуют. Ведь момент - это множество событий (считающихся одновременными в рамках момента). Появление в памяти событий "будущего" означает, что эти события уже произошли. Тем самым к таким событиям применима оценка ("уже"), которая характерна как раз для событий, не являющихся будущими, - для событий прошлого и настоящего. Это прошлое уже произошло, и это настоящее уже есть. Не скажешь ведь, что будущее "уже будет".

Лингвистический запрет в данном случае соответствует онтологическому запрету отождествления сбывшегося и не сбывшегося (хотя так бывает далеко не всегда - естественный язык не всегда онтологичен). Тем более не должен нарушаться онтологический запрет в модели, претендующей на "схватывание" - пусть в сильно упрощенном виде - основных черт течения времени.

Однако просто сказать, что будущего нет, и этим ограничиться - значит дать ввести себя в заблуждение. В определенном смысле будущее существует, но это существование нельзя трактовать по типу прошлого и настоящего.

Теперь настала пора обсудить и доводы Мак-Таггарта об иллюзорности времени [3]. Допустим, событие s есть настоящее, т.е. $s \in h$. Означает ли это, что s было будущим и будет прошлым? "Было будущим", согласно Мак-Таггарту, равнозначно "является будущим в некоторый момент прошлого". Пусть этим моментом прошлого будет $m \in P$. Можно ли утверждать, что событие s является будущим в момент m ? Нет, поскольку будущее - это то, что наступает вслед за настоящим, а m - момент прошлого. Но ведь m когда-то был моментом настоящего? Опять-таки нет, потому что m - осколок, след исчезнувшего настоящего. И когда m входил составной частью в это ушедшее настоящее, появление события s отнюдь не было предопределено: в будущем могло случиться так,

что $m \in P$ и $\neg(s \in h)$ (равно как могло случиться $m \in P$ и $s \in h$, $\neg(m \in P)$ и $\neg(s \in h)$ или $\neg(m \in P)$ и $s \in h$). Произошло так, что $m \in P$ и $s \in h$, но это дело случая, реализовавшегося в момент "теперь", а не предуготовленного будущим. Во времена Гая Юлия Цезаря просто не существовало времени, в котором пребывала Анна Стюарт, и, значит, событие ее смерти не было будущим. В те времена было неизбежным событие: смерти Цезаря, но и тут будущее не было полностью фиксированным: заговор мог быть раскрыт, Цезарь мог умереть от внезапной болезни и т.д.

Далее, "будет прошлым", по Мак-Таггарту, эквивалентно "является прошлым в некоторый момент будущего". Применительно к рассматриваемому примеру получается, что в будущем, когда момент настоящего h перейдет в прошлое, событие s станет событием прошлого. Однако моментом прошлого станет не момент h , а какая-то его часть. И вновь ничем не предопределено, что событие s останется в этой части. Как знать, быть может, когда-нибудь в веках начисто потеряются следы существования диктатора Юлия Цезаря и королевы Анны Стюарт.

Стало быть, как то, что событие настоящего s было будущим, так и то, что s будет прошлым, весьма проблематично. Так что же, доводы Мак-Таггарта следует признать ошибочными? Думается, Мак-Таггарт прав в главном - его рассуждения показывают, что такие темпоральные характеристики, как прошлое, настоящее и будущее, не могут быть заданы при помощи рядов, являющихся, по сути, геометрическими образованиями. Когда шла речь о проблематичности судьбы события s или события смерти королевы Анны, имелся в виду негеометрический, программный аспект реальности, который невозможно представить комбинацией геометрических рядов. Время - это геометрический ряд, взятый вместе с программой его преобразования; но по отдельности эти компоненты не образуют времени.

6. Гарантированность будущего и свойство f-корректности программ

Существует совершенно не поддающаяся учету в геометрических построениях асимметрия между осуществившимся прошлым и неосуществившимся будущим: тот факт, что настоящее и прошлое обрело бытие, не означает, что тем самым гарантирован и переход в бытие будущего. Рассмотрим простейший пример. Предположим, мы собираемся запустить программу BECOMING. На этом этапе нет смысла вести разговор о прошлом, настоящем и будущем применительно к тем объектам, которые будут вызваны к жизни лишь действительным выполнением BECOMING на компьютере. Предположим, далее, что BECOMING запущена и произвела метамомент W . Но в этот момент ее выполнение было прервано. Если прерывание сопровождалось потерей данных в оперативной памяти, то опять-таки объект анализа перестает существовать, как и до вклю-

чения BECOMING. Однако если прерывание носило "мягкий" характер и все данные (включая метамомент W и саму программу BECOMING) остались в целостности и сохранности, объект анализа налицо, в нем сохраняется информация о прошлом, которое, несомненно, было, и т.д.

Но как быть в этом случае с будущим? С ним возникает странная ситуация: мир, в котором есть прошлое и есть настоящее, но в котором нет будущего. Нет, ибо больше не функционирует программа BECOMING, именно от действий которой зависит, быть будущему или нет. Заметим: от дальнейших действий BECOMING уже не зависит, существовать прошлому или нет, так как она не в состоянии отменить факт таких действий в прошлом. Но вот будущее может наступить и не наступить.

Серьезное возражение против предложенных соображений в пользу программной асимметрии между прошлым и будущим состоит в том, что как событие включения программы BECOMING, так и событие ее прерывания являются внешними по отношению к порождаемым ею структурам. Даже если в памяти ЭВМ в условиях прерывания находится метамомент W , он уже не может выполнять функции метамомента по сути, поскольку суть дела состоит не только в том, что метамомент - это модель статического времени, целиком поддающаяся описанию стандартными логико-математическими средствами, но и в том, что метамомент - конструкция временная, преходящая, лишь в этом случае заслуживающая названия метамомента. Если же никаких дальнейших изменений метамомента W не предвидится, то перед нами уже не метамомент.

Мы полностью согласны с возражениями такого рода. Действительно, следует сосредоточиться на внутренних свойствах программы BECOMING и особенностях ее выполнения, абстрагируясь от таких привходящих внешних обстоятельств, как возможность "мягкого" или "жесткого" прерывания, наличие тока в электрической цепи, питающей компьютер, исправность оборудования и т.п.

Для чего тогда было приводить все эти внешние соображения? С единственной целью: четко отделить их от аргументов, составляющих внутреннюю суть рассматриваемой проблемы. Основной тезис остается прежним: в моделях динамического времени существует программно обусловленная асимметрия между прошлым и настоящим, с одной стороны, и будущим - с другой. Проанализируем природу данной асимметрии более подробно.

На практике важны только те программы, которые рано или поздно завершают свою работу. Но поиск решения задачи моделирования течения времени парадоксальным образом требует как раз программ, которые не должны останавливаться в каком-либо итоговом состоянии. Эти программы обязаны функционировать теоретически неограниченно долго за счет наличия в них бесконечных циклов. В противном случае возникает проблема оправдания завершения течения времени или становления в каком-либо состоянии.

Поставив задачу создать программу или комплекс программ, моделирующих различные аспекты течения времени, при попытке ее практического решения на реальных ЭВМ мы неизбежно сталкивались с проблемой начала становления. Модель должна была с чего-то начинать, подобно тому, как программа BECOMING начала с этапа инициализации или роста множества моментов модельного времени.

Не обсуждая сейчас вопрос о том, оправданно ли наличие начального этапа становления с концептуальных позиций, подчеркнем его необходимость с точки зрения техники программирования на реальных компьютерах. Но каким образом должно завершиться функционирование этой модели? Если вновь не упоминать о концептуальной стороне дела, то какие аргументы технического порядка можно привести в пользу тезиса о необходимости останова модели? При этом имеются в виду аргументы, касающиеся программных текстов, а не указания на то, что рано или поздно придется выключить аппаратуру, поддерживающую течение модельного времени, если только до этого она сама не выйдет из строя, и т.п.

Нам неизвестны аргументы подобного рода. Более того, позволим себе усомниться в том, что они вообще существуют. Действительно, если программа динамически моделирует переход от прошлого и настоящего к будущему, вновь и вновь осуществляя этот переход в ходе выполнения, не видно каких-либо зацепок, наличие которых послужило бы основанием для предотвращения очередного перехода. Ведь один переход в принципиальном плане не отличается от другого, и коль скоро осуществился один переход, почему не должен осуществиться другой?

Можно было бы попытаться найти оправдание программным образом реализованному завершению модельного становления в том, что реальные компьютеры являются автоматами с конечным числом возможных состояний, в силу чего рано или поздно процесс течения модельного времени начнет повторять сам себя. Иначе говоря, программы, моделирующие становление на реальных ЭВМ посредством бесконечных циклов, неизбежно осуществляют в той или иной форме реализацию идеи вечного возвращения.

Однако остается непонятным, почему требуется заботиться о предотвращении вечного возвращения. В конце концов вопрос о допустимости вечного возвращения относится к числу концептуальных и предрешать его решение по формально-техническим соображениям нет оснований. Напротив, с технической точки зрения моделировать переход от прошлого к будущему удобнее при помощи бесконечных циклов, что влечет осуществление вечного возвращения. Так что вопрос скорее в том, насколько важны философские аргументы против вечного возвращения и достаточен ли их вес для того, чтобы изыскивать средства борьбы с технически совершенными бесконечными циклами в программах, моделирующих становление.

Небезынтересно отметить следующее: на реальных ЭВМ можно организовать потенциально бесконечный цикл, направленный в будущее, но нельзя построить потенциально бесконечный цикл, направленный в прошлое. С одной стороны, сколько шагов ни сделал компьютер, выполняя программу $\mathbb{Z}$, число этих шагов остается конечным. С другой стороны, может случиться так, что число шагов по выполнению программы $\mathbb{Z}$ в будущем неограниченно. Первая особенность реальных компьютерных моделей времени делает неизбежным существование начала времени, вторая - обуславливает вечное возвращение при неограниченном определенным числом повторении части команд программы $\mathbb{Z}$.

Ограничения, присущие реализованным на действительно существующих ЭВМ моделям становления, могут быть преодолены только в абстракции. Но здесь остается зафиксировать три выявленные черты реальных моделей становления: во-первых, в этих моделях время имеет начало; во-вторых, в них переход от прошлого и настоящего к будущему технически осуществляется при помощи бесконечных циклов (поскольку никаких естественных ограничений на количество шагов в циклах не существует); и, в-третьих, при достаточно долгом функционировании моделей неизбежно происходит многократное повторение уже происходившего - вечное возвращение.

Отсутствие естественных ограничений на количество шагов в циклах становления, обусловленное однотипностью всех переходов от прошлого и настоящего к будущему, не означает, что в действительности эти переходы на самом деле будут однотипны. Например, если при выполнении программы $\mathbb{Z}$ процессор смог успешно выполнить переход к метамоменту W и затем, пытаясь осуществить переход к следующему метамоменту, попал в тупиковую ситуацию ("завис") по вине программы, требующей от него одновременного выполнения взаимоисключающих действий, то мы по сути имеем дело с переходами двух различных типов.

В отличие от фатальной предопределенности начала времени в реальных моделях, появление тупиковых ситуаций или дедлоков, обрывающих течение модельного времени, отнюдь не является теоретически неизбежным. Не являются теоретически неизбежными и остановки (нормальные завершения процессов вычислений; речь не идет об аварийных остановках или авоствах, связанных с неисправностью аппаратуры) программ ввиду возможности использовать бесконечные циклы.

Итак, вырисовывается следующая картина переходов от прошлого и настоящего к будущему в компьютерных моделях становления, реализованных на существующих в действительности ЭВМ (при отвлечении от вопросов физического порядка, связанных с аппаратной частью компьютеров).

Прежде всего процесс осуществления переходов имеет начало. В последующем возможны три варианта развития данного процесса.

Во-первых, может наступить останов – нормальное завершение работы программы, которое, однако, трудно оправдать в условиях равноправия переходов. Почему один переход должен заканчиваться новым будущим, а другой – завершать становление, не позволяя тем самым будущему наступить?

Во-вторых, возможен дедлок: состояние, при котором не только не наступает будущее, но и не происходит нормального завершения работы программы из-за возникновения программных противоречий, которые процессор не в состоянии разрешить. Как и останов, дедлок нарушает однотипность темпоральных переходов и прерывает становление.

В-третьих, процесс модельного становления может осуществляться теоретически неограниченно в ходе выполнения содержащегося в программе бесконечного цикла. При этом все переходы от прошлого и настоящего к будущему осуществляются успешно. Тем самым наступление будущего гарантировано. Другой вопрос, что это за будущее. Кроме того, как уже говорилось, мы отвлекаемся от ограничений физического порядка (исправность аппаратуры, наличие тока в электрической цепи, эволюция физической Вселенной и т.п.).

Гарантированность будущего – вот что дает с теоретической точки зрения организация бесконечных циклов в программах, моделирующих течение времени. Подобно тому как останов являлся необходимым условием правильности программ, решающих задачи традиционных типов, отсутствие останова является тем условием, которое необходимо для успешного построения при помощи программных конструкций моделей становления.

Введем понятие *безостановочной программы*, в основе которого, как ясно из самого названия, лежит идея неограниченного выполнения программных команд в отсутствие остановов и дедлоков. Строго говоря, в ситуации дедлока выполнение порожденного программой процесса не завершается определенным состоянием, однако в то же время нельзя сказать, что продолжается нормальное выполнение процесса. Тем не менее мы будем рассматривать дедлок как логический авост, а не как вариант безостановочности.

Так как количество инструкций или команд, входящих в состав компьютерной программы, конечно, безостановочность работы программы предполагает возникновение бесконечного цикла в процессе ее выполнения. При этом некоторые инструкции безостановочной программы будут выполняться неограниченное число раз.

Программу $\mathfrak{B}$, содержащую инструкцию I , назовем *I -безостановочной*, если в процессе выполнения $\mathfrak{B}$ количество выполнений инструкции I неограниченно.

Поскольку программа $\mathfrak{B}$ может иметь различные вхождения одной и той же инструкции, во избежание неопределенности условимся, что каждое вхождение любой инструкции в программу $\mathfrak{B}$

снабжено номером, отличающимся от номеров всех других вхождений.

Например, в BECOMING можно считать инструкциями строки этой программы (не обращая внимания на то, что строки иногда содержат несколько операторов), а номерами инструкций - номера строк. Вообще любую программу $\mathbb{B}$ будем представлять как конечную последовательность инструкций.

I1
I2
.
.
.
In

Внутренняя сложность инструкций не будет приниматься в расчет. Для удобства использования введенных понятий в символических выражениях безостановочность программы $\mathbb{B}$ будем представлять посредством записи $\mathbb{B}\perp$, а I_j -безостановочность $\mathbb{B}$ обозначать через $\mathbb{B}(I_j)\perp$.

Если Q - утверждение об объектах, находящихся в памяти компьютера, то запись $\{\mathbb{B}(I_j)\}Q$ означает, что всякий раз после выполнения инструкции I_j программы $\mathbb{B}$ утверждение Q истинно (в неформальном смысле этого слова). В этом случае будем говорить, что Q является *инвариантом инструкции I_j* или *I_j -инвариантом*.

Примем также сокращение

$$\{\mathbb{B}(I_j)\perp\}Q \approx \mathbb{B}(I_j)\perp \ \& \ \{\mathbb{B}(I_j)\}Q .$$

По аналогии с понятием правильной программы определим понятие темпоральной корректности относительно будущего, или, для краткости, f -корректности.

Пусть $\mathbb{B}$ - программа, содержащая инструкцию I_j , и Q - утверждение, относящееся к используемым программой $\mathbb{B}$ данным. Назовем программу $\mathbb{B}$ *частично f -корректной* относительно I_j и Q , если верна импликация

$$\mathbb{B}(I_j)\perp \rightarrow \{\mathbb{B}(I_j)\}Q .$$

Иначе говоря, при данных I_j и Q программа $\mathbb{B}$ является частично f -корректной, если утверждение о I_j -безостановочности $\mathbb{B}$ влечет утверждение о I_j -инвариантности Q .

По определению, программа $\mathbb{B}$ является *тотально f -корректной* относительно I_j и Q , если верно

$$\{\mathbb{B}(I_j)\perp\}Q .$$

Другими словами, при данных I_j и Q программа $\mathbb{B}$ тотально f -корректна, если она частично f -корректна и к тому же I_j -безостановочна.

Подобно ситуации с частичной правильностью, легко подобрать тривиальные примеры частично f -корректных программ. Так, частично f -корректной будет в силу определения любая программа $\mathbb{B}$, обязательно заканчивающая свою работу остановом или попада-

нием в дедлок, поскольку в этом случае антецедент $\mathfrak{B}(I_j) \perp$ импликации $\mathfrak{B}(I_j) \perp \rightarrow \{\mathfrak{B}(I_j)\} Q$ будет ложным независимо от того, какая инструкция из $\mathfrak{B}$ используется и каково утверждение Q , что всю импликацию превращает в истинное высказывание.

Настоящую свою сложность понятие частичной f -корректности обнаруживает тогда, когда наряду с возможностью останова или дедлока программы $\mathfrak{B}$ будет существовать и возможность ее попадания в бесконечный цикл. В такой ситуации нельзя будет утверждать со стопроцентной уверенностью $\mathfrak{B} \perp$, что исключает тотальную f -корректность. Однако в силу того, что $\mathfrak{B} \perp$ возможно, высказывание вида "Если $\mathfrak{B} \perp$, то ..." может иметь нетривиальный смысл, поскольку не исключена реализация антецедента этого высказывания.

Как и в случае тотальной правильности, тотальная f -корректность является целью, к которой следует стремиться при создании программ (при этом правильные программы, решающие традиционные задачи, должны останавливаться; тогда как корректные программы, моделирующие становление, должны быть безостановочными). Если доказана импликация $\mathfrak{B}(I_j) \perp \rightarrow \{\mathfrak{B}(I_j)\} Q$, то этого еще недостаточно и следует попытаться доказать $\mathfrak{B}(I_j) \perp$.

Но относительно каких инструкций и утверждений следует устанавливать тотальную f -корректность? Все зависит от той конкретной программы $\mathfrak{B}$, которая реализует определенный вариант динамической концепции времени. При этом выбор I_j и Q , разумеется, не продиктован однозначно. Например, в случае программы BECOMING в качестве Q можно взять высказывательную форму

(*) В памяти компьютера @ находится метамомент X .

Однако при выполнении программы BECOMING в большинстве ситуаций в памяти компьютера находятся структуры, не являющиеся метамоментами. Поэтому (*) следует соотносить не с любой инструкцией BECOMING, а только с некоторыми. Подходящей будет, например, инструкция I280, так как после ее выполнения в памяти должен появиться метамомент.

После этого можно рассмотреть либо высказывание о частичной f -корректности

(pf) $\text{BECOMING}(I280) \perp \rightarrow \{\text{BECOMING}(I280)\} (*)$,

либо высказывание о тотальной f -корректности

(tf) $\{\text{BECOMING}(I280) \perp\} (*)$,

считая высказывательную форму (*) истинной всякий раз, когда в памяти M_m компьютера @ после выполнения инструкции I280 находится какой-нибудь метамомент.

Именно потому, что истинность высказывательной формы (*) не должна зависеть от конкретного метамомента, символ "X" в ней является свободной переменной, а не именем определенного метамомента. Вместо (*) можно было взять предложение

(**) $\exists X$ (X находится в памяти компьютера @ & X - метамомент),

имеющее в контексте рассматриваемого примера тот же самый смысл.

Верны ли высказывания (pf) и (tf), утверждающие соответственно частичную и тотальную f-корректность программы BECOMING относительно I280 и (*)? Чтобы получить ответ на поставленный вопрос, требуется либо доказать, что эти высказывания верны, либо их опровергнуть. Мы, однако, оставим в стороне попытки доказательства или опровержения утверждений (pf) и (tf). Дело в том, что программа BECOMING предназначена для запуска на реальных компьютерах. Последнее обстоятельство накладывает свой отпечаток на программу BECOMING. Многие особенности примененного в ней алгоритма обусловлены используемым языком программирования (отнюдь не приспособленного к моделированию времени) и частными деталями, относящимися к конкретной реализации языка, механизмам распределения памяти и т.п. Между тем эти особенности программы BECOMING затрудняют проведение доказательств утверждений, подобных (pf) и (tf), заставляя тратить время и усилия на учет их влияния в ущерб сути обсуждаемой проблемы.

Только что сказанное верно, даже если отвлечься от физических сторон процесса выполнения программы BECOMING (таких, как неизбежность его завершения, возможность неверного выполнения программных команд и т.д.) - отмеченные недостатки являются недостатками самого алгоритма, лежащего в основе программы BECOMING, и не устраняются переходом к рассмотрению данной программы как идеального объекта.

Экономя время и место, ограничимся следующим утверждением. Если считать, что программа BECOMING выполняется на идеальном компьютере (по определению не делающем ошибок и не изнашивающемся!), то высказывание (tf) будет истинным. Иными словами, программа BECOMING как идеальный объект является тотально f-корректной относительно инструкции I280 и высказывательной формы (*). Скептики могут убедиться в справедливости сделанного утверждения самостоятельно, рассмотрев алгоритм работы программы BECOMING.

ЛИТЕРАТУРА

1. Молчанов Ю.Б. Четыре концепции времени в философии и физике. М., 1977. С. 32 - 33.
2. Бергсон А. Время и свобода воли. М., 1910.
3. McTaggart J.E. The Nature of Existence. V.II. Cambridge, 1927.
4. Анисов А.М. Время и компьютер. Негеометрический образ времени. М., 1991.

Я.Лукасевич

О ДЕТЕРМИНИЗМЕ¹

Данная статья представляет собой переработанную ректорскую речь, прочитанную в Варшавском университете на торжественной церемонии начала 1922-23 учебного года. По своему обыкновению я прочитал ее по памяти. Текст речи позднее был отредактирован письменно, но в печати не появился.

На протяжении 24 лет, прошедших с той поры, я неоднократно возвращался к редактированию текста речи, совершенствуя ее стиль и содержание. Основные положения, однако, были оставлены без изменения, что в первую очередь относится к критике аргументов в пользу детерминизма.

К моменту произнесения речи факты и теории из области атомной физики, приведшие в дальнейшем к возрастанию значения детерминизма, не были еще известны. Я не дополнил статью размышлениями в данной области, не желая отклониться от первоначального текста речи и чтобы не испортить целостность ее конструкции.

Дублин, ноябрь 1946 г.

* * *

1. Согласно старому академическому обычаю ректор начинает учебный год лекцией на церемонии торжественного открытия. В этой лекции он обязан изложить свое научное кредо и суммировать результаты своих исследований.

Итогом философских исследований является философская система, всесторонний взгляд на мир и на жизнь. Подобной системы представить я не в состоянии, так как я не верю, чтобы в настоящее время удалось бы создать философскую систему, удовлетворяющую требованиям научного метода.

Вместе с несколькими товарищами по работе я причисляю себя к узкому ныне кругу тех философов и математиков, которые в качестве предмета либо основы своих исследований избрали *математическую логику*. Великий математик и философ Лейбниц положил начало этой науке, но его начинания на этой стезе подверглись забвению, так что в середине XIX века Джордж Буль стал вторым творцом математической логики. В наше время Готтлоб Фреге в Германии, Чарльз Пирс в Америке и Бертран Рассел были выдающимися представителями этой науки.

В Польше культивирование математической логики принесло более изобильные и ценные плоды, нежели во многих других странах. Возникли у нас логические системы, не только гораздо более совершенные, чем традиционная логика, но более совершенные,

¹ Перевод В.Л.Васюкова выполнен с первого издания этой статьи: Lukaszewicz J. Z zagadnien logiki i filozofii. Pisma wybrane. Warszawa, 1961. S.114-126.

нежели предшествующие системы математической логики. Возможно, мы более других осознали, что представляет собой дедуктивная система и как надлежит подобную систему строить. Мы первые уяснили себе связь математической логики со старинными системами формальной логики. Главным же образом усвоили *меру научной строгости*, намного превышающую существовавшие до сих пор требования.

С позиции этой новой меры несравненная, как она представлялась до сих пор, строгость математических наук перестала быть таковой. Степень строгости, устраивающая математиков, нас уже не устраивает. Мы требуем, чтобы каждая ветвь математики представляла собой безукоризненно построенную дедуктивную систему. Мы хотим знать, какие аксиомы лежат в основе каждой такой системы и какие правила вывода принимаются. Требуем, чтобы доказательства проводились согласно правилам, были полными и позволяли провести механическую проверку. Нас не удовлетворяют обычные доказательства математиков, начинающиеся обычно "с середины", полные пропусков и беспрестанно апеллирующие к интуиции. Если в этом случае математика не выдержала испытания, когда к ней применили новую меру строгости, как же выдержат это испытание другие науки, менее совершенные, нежели математика? Как же устоит философия, в которой так часто фантастическая спекуляция заглушает методичное исследование?

Когда с мерой строгости, созданной при помощи математиков, мы подходим к великим философским системам Платона или Аристотеля, Декарта или Спинозы, Канта или Гегеля, то эти системы распадаются в наших руках как карточные домики. Их основные понятия туманны, главнейшие утверждения непонятны, рассуждения и доказательства нестроги; логические же теории, лежащие так часто в глубине этих систем, почти все ложны. Философию необходимо перестроить, начиная с оснований, вдохнуть в нее научный метод и подкрепить ее новой логикой. О решении этих задач один человек не может и мечтать; это будет труд поколений и умов, гораздо более мощных, чем те, которые когда-либо до сих пор появлялись на земле.

2. Таково мое научное *кредо*. Будучи не в силах дать философскую систему, я тем не менее попробую в этой лекции коснуться определенной проблемы, которую не должно оставить в стороне ни одно философское учение, и которая тесно связана с моими логическими исследованиями. Сразу же признаюсь, что и эту проблему я не в силах охватить во всех деталях с той научной строгостью, которую требую сам от себя. Это только лишь весьма несовершенная попытка, которую когда-либо кто-то сможет использовать, чтобы построить на основании этих примитивных изысканий учение более строгое и зрелое.

Я хотел бы повести речь о детерминизме. Под детерминизмом я понимаю нечто большее, чем точка зрения непризнания свободы воли. Свое понимание поясню вначале на примере:

Вчера в полдень Ян встретился с Павлом на рынке Старого Мяс-та в Варшаве. Событие вчерашней встречи сегодня уже не суще-ствует. Тем не менее данное вчерашнее событие сегодня не пред-ставляет собой лишь иллюзию, но какую-то часть действительности, с которой и Ян и Павел должны считаться. Оба они помнят вчерашнюю встречу. В них сегодня остались последствия или следы этой встречи. Каждый из них мог бы присягнуть перед судом, что вчера в полдень видел другого на рынке Старого Мяс-та в Варшаве.

Основываясь на этих данных, я говорю: "в каждый момент се-годняшнего дня *истинно*, что вчера в полдень Ян встретился с Пав-лом на рынке Старого Мяс-та в Варшаве". Говоря так, я не имею в виду, что в каждый момент сегодняшнего дня истинно *высказыва-ние* подобного содержания; подобное высказывание может вообще не существовать, если его никто не выскажет или о нем не поду-мает. Оборот речи: "истинно в момент t , что p ", причем под "моментом" я понимаю неделимый момент времени, а под " p " ка-кое-либо высказывание о событиях, я употребляю вместо выраже-ния: "имеет место в момент t , что p ". Это последнее выражение я пока что не в состоянии проанализировать.

Примем, что то, что произошло, отменить мы не в силах. *Facta infecta fieri non possunt*². То, что хоть однажды было истиной, оста-нется ею навсегда. Всякая истина остается навечно. Эти высказы-вания кажутся интуитивно ясными. Итак, примем, что если некий предмет A есть b в момент t , то в каждый момент *позднее* t истинно, что A есть b в момент t . Если вчера в полдень Ян встретился с Пав-лом на рынке Старого Мяс-та в Варшаве, то в каждый момент позд-нее вчерашнего полудня истинно, что вчера в полдень Ян встре-тился с Павлом на рынке Старого Мяс-та в Варшаве.

Возникает вопрос: истинно ли было и в каждый момент, ранее вчерашнего полудня, что вчера в полдень Ян встретился с Павлом на рынке Старого Мяс-та в Варшаве? Было ли это истинно поза-вчера и за год до того, и в момент рождения Яна и в каждый мо-мент, предшествующий его рождению? Все ли, что когда-либо осу-ществится и когда-то будет истинным, уже сегодня истинно и было им всегда? Извечна ли всякая истина?

Здесь уже интуиция нас подводит. Проблема становится спор-ной. Детерминист ответит утвердительно на эти вопросы, индетер-минист отрицательно. *Ибо под детерминизмом я понимаю точку зрения, гласящую, что если A является b в момент t , то истинно в любой момент, предшествующий t , что A есть b в момент t .*

Тот, кто принимает подобную точку зрения, не может по-раз-ному трактовать будущее и прошлое. Поскольку все, что когда-ни-будь осуществится и когда-нибудь будет истинным, сегодня уже

² Сделанного не воротишь - лат.

истинно, было им извечно, то будущее точно так же осуществлено, как и прошлое. Только лишь еще не наступило. Детерминист рассматривает события, происходящие в мире, как повторную демонстрацию кинодрамы, отснятой где-то во всемирной киностудии. Мы находимся внутри представления и хотя каждый из нас не только зритель, но и участник действия, тем не менее финал фильма нам не известен. Но этот финал есть, существует с начала представления, ибо весь фильм отснят бесконечно давно. В этом фильме заранее предусмотрены все наши роли, все наши приключения и жизненные коллизии, все наши решения и злые и добрые поступки, и предвидены моменты и твоей и моей смерти. Во всемирной драме мы выступаем лишь в роли марионеток. Нам не остается ничего другого, как только созерцать зрелище и терпеливо ожидать конца.

Подобная точка зрения странна и совсем не очевидна. Но тем не менее известны два очень сильных убедительных аргумента, свидетельствующих в пользу детерминизма. Один из них, идущий от Аристотеля, основывается на логическом принципе исключенного третьего, второй, известный еще стоикам, на физическом принципе причинности. Я постараюсь эти два аргумента, несмотря на их трудность и сухость, изложить как можно доступнее.

3. Два принципа, из которых один отрицает другой, мы называем *противоречащими*. За примером обратимся к Аристотелю. Взаимно противоречащими являются высказывания: "завтра произойдет морское сражение" и "завтра не произойдет морское сражение". К противоречащим принципам имеют отношение два известных принципа, ведущие свои начала от Аристотеля: принцип исключения противоречия и принцип исключенного третьего. *Принцип исключения противоречия* гласит, что два взаимно противоречащих высказывания не могут быть одновременно истинными, т.е. что одно из них должно быть ложным. Этого важного принципа, суть которого Аристотель, а вслед за ним многие мыслители считают глубинной опорой нашего мышления, мы далее не будем касаться. Нас интересует в первую очередь *принцип исключенного третьего*. Он гласит, что два противоречащих высказывания не являются одновременно ложными, а следовательно одно из них, либо первое, либо второе, должно быть истинным. Морское сражение завтра либо произойдет, либо не произойдет. *Tertium non datur*³. Между членами этой альтернативы нет ничего промежуточного, нет ничего третьего, которое, будучи истиной, опровергало бы оба эти члена. Бывает, правда, порой, что когда двое спорят и один называет белым то, что другой считает черным, то оба они ошибаются, а подлинная истина лежит где-то посередине. Но называть что-либо белым и принимать его за черное, это еще не противоречие: противоречащими были бы высказывания, что одно

³ Третьего не дано - лат.

и то же *есть белое и не есть белое*. Здесь истина не может лежать посередине между этими высказываниями, но должна примкнуть к одному из них.

Поскольку так оно и есть и поскольку, возвращаясь к примеру из повседневной жизни, Петр сегодня скажет: "Ян завтра в полдень будет дома", а Павел возразит ему, говоря: "Ян не будет завтра в полдень дома", постольку один из них скажет правду. Кто именно, об этом мы можем сегодня еще не знать, но узнаем, придя завтра в полдень к Яну. Если мы застанем его дома, то сегодня *Петр* сказал правду, а если Ян ушел из дома, то правду сказал сегодня *Павел*.

Итак, либо уже сегодня истинно, что Ян будет завтра в полдень дома, либо уже сегодня истинно, что Ян не будет завтра дома в полдень. И не только сегодня, но и в произвольный момент t , если кто-то выскажет " p ", а кто-то другой, противореча ему, выскажет "не- p ", то один из них в момент t сказал правду. Ибо либо " p " истинно, либо "не- p " истинно. И абсолютно все равно, имели ли место в действительности эти высказывания, либо о них никто даже не подумал: суть дела лишь в том, что либо истинно в момент t , что " p ", либо истинно в момент t , что "не- p ". Данная альтернатива, очевидным образом, интуитивно оправдана. В случае нашего примера она принимает следующий вид:

(а) *В момент t истинно, что Ян будет завтра в полдень дома, либо в момент t истинно, что Ян не будет завтра в полдень дома.*

Запомним это высказывание как первую посылку нашего рассуждения.

Вторая посылка не основывается ни на одном из логических принципов. В общих чертах ее можно сформулировать в форме следующего условного высказывания: "Если истинно в момент t , что p , то p ". В данном высказывании " p " может означать произвольное высказывание, равно как утвердительное, так и отрицательное. Полагая в качестве " p " отрицательное высказывание: "Ян не будет завтра в полдень дома", получаем:

(б) *Если в момент t истинно, что Ян не будет завтра в полдень дома, то Ян не будет завтра в полдень дома.*

Эта посылка интуитивно также кажется очевидной. Ибо если в определенный, в общем-то произвольный, момент, например, сейчас, истинно, что Ян не будет завтра в полдень дома, так как мы знаем, что только что он выехал далеко и надолго, то незачем заходить завтра к Яну: наверняка не застанем его дома.

Обе посылки мы принимаем без доказательства как интуитивно очевидные. На них основывается тезис детерминизма, вывод которого мы проведем с максимальной строгостью в соответствии с так называемой теорией дедукции.

4. Сегодня благодаря математической логике мы знаем, что фундаментальной логической системой является не убогий фраг-

мент логики имен, называемый силлогистикой Аристотеля, но несравненно более важная, чем силлогистика, логика высказываний. Законами этой логики интуитивно пользовался Аристотель, а систематически разработали ее стоики во главе с Хрисиппом. В наше время создал логику высказываний в почти совершенной аксиоматической форме Готтлоб Фреге в 1879 г., независимо от Фреге открыл и обогатил ее новыми методами и положениями Чарльз Пирс в 1895 г., а под именем "теории дедукции" поставил ее во главе математики и логики, одновременно сделав ее широко известной в научном мире, Бертран Рассел в 1910 г.

Теория дедукции должна стать так же повсеместно известной, как известна элементарная математика. Ибо она охватывает важнейшие способы вывода, используемые в науке и жизни. Она учит нас, как правильно использовать такие общие выражения, как "не", "и", "или", "если..., то..." С тремя способами вывода, охватываемыми теорией дедукции, мы познакомимся в процессе настоящего рассуждения. Данное рассуждение мы начнем со второй посылки.

Эта посылка представляет собой условное высказывание типа "если α , то не- β ", причем " α " означает высказывание "в момент t истинно, что Яна не будет завтра в полдень дома", а " β " означает высказывание "Ян будет завтра в полдень дома". В посылке имеет место отрицание высказывания " β ", т.е. высказывание "не- β ": "Яна не будет завтра в полдень дома". Согласно теории дедукции из посылки "если α , то не- β " следует вывод "если β , то не- α ". Ибо поскольку " α " влечет за собой "не- β ", то " α " и " β " взаимно исключают друг друга, а следовательно " β " влечет за собой "не- α ". В согласии с этим способом вывода мы преобразуем посылку (b) в высказывание:

(c) *Если Ян будет завтра в полдень дома, то в момент t не истинно, что Яна не будет завтра в полдень дома.*

Перейдем к новой посылке: она представляет собой альтернативу типа " γ " или " α ", причем " γ " означает высказывание "в момент t истинно, что Ян будет завтра в полдень дома", а " α " означает, как и раньше, высказывание "в момент t истинно, что Яна не будет завтра в полдень дома". Согласно теории дедукции из предпосылки " γ или α " следует вывод "Если не- α , то γ ". Так что альтернатива истинна тогда и только тогда, когда хотя бы один из ее членов истинен. Если же ложен второй член, то должен быть истинен первый член. Следуя этому способу вывода, преобразуем посылку (a) в высказывание:

(d) *Если в момент t не истинно, что Яна не будет завтра в полдень дома, то в момент t истинно, что Ян будет завтра в полдень дома.*

Сопоставим теперь между собой высказывания (с) и (d). Оба они представляют собой условные высказывания, причем конsequent условного высказывания (с) совпадает с антецедентом условного высказывания (d). Это следствие того, что оба эти высказывания типа "если β , то не- α " и "если не- α , то γ ". Из обеих данных высказываний как из посылок следует, согласно теории дедукции, вывод: "Если β , то γ ". Так как истинно, что "если первое, то второе" и "если второе, то третье", то истинно, что также, что "если первое, то третье". Это закон условного силлогизма, известный еще Аристотелю. Помня, что " β " означает высказывание "Ян будет завтра в полдень дома", а " γ " означает высказывание "в момент t истинно, что Ян будет завтра в полдень дома", получаем как результат вывода:

(е) *Если Ян будет завтра в полдень дома, то в момент t истинно, что Ян будет завтра в полдень дома.*

Момент t произволен, следовательно, это может быть либо момент завтрашнего полудня, либо момент раньше или позже него. Отсюда следует, что если Ян будет завтра в полдень дома, то истинно в любой, а потому и *в каждый момент*, что Ян будет завтра в полдень дома. Вообще говоря, мы показали на примере, что если A есть b в момент t , то истинно *в каждый момент*, а значит в каждый момент *раньше t* , что A есть b в момент t . Мы доказали тезис детерминизма, взяв в качестве исходного пункта принцип исключенного третьего.

5. Второй аргумент в пользу детерминизма основывается на принципе причинности. Трудно изложить понятным образом этот аргумент. Ибо ни выражение "причина", ни высказывание "принцип причинности" до сих пор не имеют в науке установившегося значения. Связан с ними только некоторый интуитивный смысл, который я постараюсь уловить, приведя несколько пояснений.

То, что электрический звонок звучит сейчас у входа в мою квартиру, я называю событием, происходящим сейчас. То, что Ян находится дома в момент t , я называю событием, происходящим в момент t . Каждое событие происходит где-то и когда-то. Высказывание, относящееся к событию, является единичным и содержащим заключение о месте и времени.

Событие F , происходящее в момент s , я называю *причиной* события G , происходящего в момент t , а событие G *следствием* события F , если момент s предшествует моменту t и когда события F и G связаны между собой таким образом, что в силу известных нам законов, управляющих событиями, можно из высказывания, подтверждающего событие F , вывести высказывание, подтверждающее событие G . Например, нажатие кнопки в электрическом звонке я называю причиной срабатывания звонка и на основании известных мне законов физики, на которых основано устройство электрического звонка, я могу из высказывания, подтверждающего первый факт, вывести высказывание, утверждающее второй факт.

Из определения причины вытекает, что отношение причинности является транзитивным. Это означает, что если мы рассмотрим какие-нибудь события F, G и H , то если F есть причина G и G есть причина H , то F есть причина H .

Под *принципом причинности* я понимаю высказывание, гласящее, что каждое событие G , происходящее в момент t , имеет своей причиной некоторое событие F , происходящее в момент s , предшествующий моменту t , причем в каждый момент позже s и раньше t происходят события, являющиеся одновременно следствиями факта F и причинами события G .

В этих разъяснениях я постарался схватить следующее интуитивное содержание: событие, являющееся причиной, происходит раньше события, являющегося следствием. Сначала я нажимаю кнопку, потом звучит звонок, несмотря на то, что нам казалось, что оба события происходят одновременно. Если существует событие, служащее причиной чего-нибудь, то неминуемо произойдет после него событие, являющееся следствием этой причины. Если я нажму кнопку, то прозвучит звонок. Ибо из причины можно вывести следствие, а так как вывод истинен, если истинны его предпосылки, точно так же должно существовать следствие, если существует его причина. Ничего не происходит без причины. Звонок "сам по себе" не зазвонит. Это может произойти только вследствие предшествующих событий. Во множестве наступающих одно за другим событий, упорядоченных по отношению причинности, нет ни перерывов, ни скачков. С момента нажатия кнопки до момента звучания звонка беспрестанно происходят события, из которых каждое является следствием нажатия кнопки и одновременно причиной звучания звонка, причем каждое более раннее из этих событий является причиной каждого более позднего.

6. После этих разъяснений аргумент, выводящий тезис детерминизма из принципа причинности, станет, может быть, более понятным. Положим, что в момент t происходит некоторое событие F : например, Ян находится дома в момент завтрашнего полудня. Событие F имеет своей причиной некоторое событие F_1 , происходящее в момент t_1 , предшествующий моменту t . Событие F_1 имеет опять своей причиной некоторое событие F_2 , происходящее в момент t_2 , предшествующий моменту t_1 . Поскольку согласно принципу причинности, каждое событие имеет своей причиной некоторое предшествующее событие, постольку рассуждение это можно повторять без конца. Получаем тогда бесконечную цепь событий, идущую вспять:

$$in\ inf. \leftarrow \dots F_n F_{n-1}, \dots F_2 F_1, F,$$

ибо они происходят во все более предшествующие моменты:

$$in\ inf. \leftarrow \dots t_n, t_{n-1}, \dots, t_2, t_1, t.$$

В этой цепи каждое предшествующее событие является причиной каждого последующего, так как отношение причинности является транзитивным. Кроме того, поскольку событие F_n , происходящее в момент t_n , является причиной события F , происходящего в момент t , то, согласно принципу причинности, в каждый момент, следующий за t_n , но предшествующий t , происходят события, являющиеся одновременно следствиями события F_n и причинами события F . Все эти события установить в ряд мы не можем, поскольку их бесконечно много, но некоторые из них мы выделяем как F_{n-1}, F_2, F_1 .

До сих пор, по-видимому, все было в порядке, теперь же начинается самая важная часть аргумента. Детерминист склонен был бы рассуждать далее так:

Поскольку цепь все более уходящих в прошлое событий, являющихся причиной события F , бесконечна, постольку в каждый момент, предшествующий t , а следовательно и в *настоящий* момент и в каждый прошедший момент происходит какое-нибудь событие, являющееся причиной события F . Если, следовательно, имеет место событие, что Ян будет завтра в полдень дома, то уже сегодня существует причина этого события, как существует она, впрочем, в каждый момент, предшествующий завтрашнему полудню: раз уже существует или существовала причина, то незамедлительно будут существовать и все следствия этой причины. Итак, уже сегодня истинно, что Ян будет завтра в полдень дома, и было это истинным извечно. Вообще говоря, если A есть b в момент t , то в каждый момент, *предшествующий* t , истинно, что A есть b в момент t , потому что в каждый момент, предшествующий t , существуют причины этого события. Положение детерминизма было бы доказано в силу принципа причинности.

Таковы два самых сильных аргумента, которые можно привести в защиту детерминизма. Должны ли мы согласиться с этими аргументами? Должны ли мы поверить, что все в мире происходит по необходимости, а любое свободное и творческое действие есть лишь иллюзия, или мы должны также отвергнуть принцип причинности вместе с принципом исключенного третьего?

7. Существуют два знаменитых лабиринта, писал Лейбниц, в которых часто заблуждается наш разум: один из них - это вопрос свободы и необходимости, второй - проблема непрерывности и бесконечности. Написав так, Лейбниц не догадывался, что эти два лабиринта образуют единое целое, а свобода, насколько она существует, прячется в каком-нибудь уголке вечности.

Действительно, не было бы свободы, если бы в каждый момент существовали бы причины всех событий, которые когда-либо произойдут. К счастью, принцип причинности не заставляет нас принимать это следствие. Нам на помощь приходит бесконечность и непрерывность.

Аргумент, основывающий тезис детерминизма на принципе причинности, является ошибочным. Ибо неверно, что если Ян дома в момент завтрашнего полудня, то бесконечная цепь причин этого события должна достигать настоящего момента и каждого прошедшего момента. Эта цепь может иметь своей нижней границей момент, который позднее настоящего, следовательно, еще не наступил. Очевидным образом это следует из следующих рассуждений:

Представим себе время в виде прямой линии и некоторый отрезок времени упорядочим как интервал $(0,1)$ числовой прямой. Положим, что настоящему моменту отвечает точка 0, некоторое будущее событие происходит в момент 1, а причины этого события происходят в моменты, помеченные действительными числами, большими $1/2$. Тогда цепь причин бесконечна и началом, или первой причиной, не обладает. Ибо эта первая причина должна была бы действовать в момент, отвечающий наименьшему действительному числу больше $1/2$, а такого числа *не существует*: не существует даже наименьшего *рационального* числа больше $1/2$. Во множестве действительных чисел, а точно так же во множестве рациональных чисел, упорядоченных по величине, нет двух чисел, непосредственно следующих одно за другим или соседствующих друг с другом: между каждыми двумя числами найдется третье, а следовательно, их существует бесконечно много. Точно так же не существует двух моментов, наступающих один за другим или соседствующих друг с другом: между каждыми двумя моментами найдется третий, а следовательно, найдется их бесконечно много. В рассматриваемой нами цепи каждое событие имеет, согласно принципу причинности, свою причину в каком-то предшествующем событии и цепь этих причин бесконечна, но имеет своей нижней границей момент $1/2$, который позднее настоящего момента 0 и еще не наступил. Этой границы данная цепь причин не может пересечь, а следовательно, не может достигнуть настоящего момента.

Это доказательство показывает, что могут существовать причинные цепи, которые еще не начались, а целиком лежат в будущем. Такая точка зрения представляется не только логически возможной, но и действительно кажется более умеренной, нежели высказывание, что даже каждое мельчайшее будущее событие имеет свою причину, действующую с сотворения мира. Я не сомневаюсь, по крайней мере, что некоторые будущие события имеют свои причины уже сегодня и имели их извечно. Небесные явления, затмения солнца или луны астрономы предвидят на много лет вперед с точностью до минуты и секунды, основываясь на наблюдениях и законах движения небесных тел. Но то, что такая-то и именно такая муха, которая сегодня еще вообще не существует, зажжужжит мне над ухом в самый полдень 7 сентября будущего года, этого еще никто сегодня предвидеть не в силах, а высказывание о том, что это будущее поведение этой будущей мухи имеет уже сегодня свои причины и имело их извечно, кажется скорее фантазией, чем утверждением, имеющим хотя бы тень научного обоснования.

Рушится тогда аргумент, основанный на принципе причинности. Можно быть глубоко убежденным, что ничего не происходит без причины и что каждое событие имеет своей причиной какое-нибудь событие прошлого, но тем не менее не быть детерминистом. Нам остается рассмотреть аргумент, основанный на принципе исключенного третьего.

8. Этот аргумент, хотя и независимо от предыдущего, лишь тогда становится действительно понятным, если мы примем, что каждое событие имеет свои причины, существующие извечно. Объясним это вновь на нашем примере из повседневной жизни. Положим, что Ян будет завтра в полдень дома. Принимая извечное существование причин всех событий, мы должны признать, что и в настоящий момент существует причина завтрашнего пребывания Яна в доме. Затем в настоящий момент истинно, или *положение дел таково* в настоящий момент, что Ян будет завтра в полдень дома. Это не совсем ясное высказывание: "в момент t положение дел таково, что p ", которое я не сумел ранее проанализировать, имеет теперь для высказываний " p ", говорящих о прошедших событиях, полностью понятный смысл. В настоящий момент *положение дел таково*, что Ян будет завтра в полдень дома, означает, что в настоящий момент существует событие, которое является *причиной* завтрашнего пребывания Яна дома, а эта причина содержит в себе то будущее следствие так же, как вывод содержится в посылках. Причина будущего события, утверждаемого в высказывании " p ", существующая в момент t , является *действительным эквивалентом* высказывания: "положение дел в момент t таково, что p ".

Точно так же мы можем рассуждать, если положим, что Ян не будет завтра в полдень дома. Ибо принимая извечное существование причин всех событий, мы должны признать, что и в настоящий момент существует причина завтрашнего отсутствия Яна дома. Высказывание же: "в настоящий момент истинно, т.е. положение дел в настоящий момент таково, что Ян не будет завтра в полдень дома", имеет свой действительный эквивалент в причине этого факта, существующий в настоящее время.

Поскольку Ян либо будет завтра в полдень дома, либо не будет, то в настоящий момент либо существует причина его завтрашнего пребывания в доме, либо существует причина его завтрашнего отсутствия, при очевидном предположении, что причины всех событий существуют извечно. Поэтому в настоящий момент истинно, что Ян будет завтра в полдень дома, либо истинно в настоящий момент, что Ян не будет завтра в полдень дома. Аргумент, основанный на принципе исключенного третьего, находит свое подкрепление в аргументе, основанном на принципе причинности.

9. Однако оказалось, что этот второй аргумент не имеет доказательной силы. Ибо ничто не мешает нам положить, согласно предыдущим рассуждениям, что в настоящий момент не существует

еще причины завтрашнего пребывания Яна дома, ни причины его завтрашнего отсутствия. Ведь может так случиться, что бесконечная цепь причин, вызывающая к жизни завтрашнее пребывание или отсутствие Яна в доме, лежит в будущем и еще не началась. Просто говоря, вопрос, будет ли Ян завтра в полдень дома или не будет, в данный момент еще *открыт*. Как рассуждать в таком случае?

По-видимому, мы могли бы сказать так: высказывание "в настоящий момент t истинно, что Ян будет завтра в полдень дома" не имеет действительного эквивалента, ибо не существует в момент t причина этого события, и ничто нас, вдобавок, не заставляет признать это высказывание истинным. Ведь может так случиться, что Яна *не будет* завтра в полдень дома. Точно так же высказывание "в настоящий момент t истинно, что Яна не будет завтра в полдень дома", не имеет действительного эквивалента, ибо не существует в момент t причины этого события, и опять нас ничто не вынуждает признать это высказывание истинным. Ведь может случиться так, что Ян *будет* завтра в полдень дома. Ничто не мешает нам поэтому оба эти высказывания отбросить как ложные и признать их отрицание: "*не истинно* в момент t , что Ян будет завтра в полдень дома". Необоснованно тогда условное высказывание (е), которое мы ранее вывели: "если Яна не будет завтра в полдень дома, то в момент t истинно, что Ян будет завтра в полдень дома". Ибо антецедент этого высказывания станет истинным, когда Ян будет завтра в полдень дома, а консеквент его станет ложным, если выберем такой момент t , предшествующий завтрашнему полудню, в который не существует еще причина завтрашнего пребывания Яна дома. С необоснованностью же условного высказывания (е) становится необоснованным и тезис детерминизма "если A есть b в момент t , то в каждый предшествующий t момент истинно, что A есть b в момент t' ", коль скоро можно переменным A, b и t придать такие значения, что антецедент этого тезиса превратится в истину, а консеквент станет ложным.

Если при допущении, что какое-то будущее событие не является сегодня еще предрешенным, тезис детерминизма становится ошибочным, то и доказательство из принципа исключенного третьего должно содержать ошибки. Действительно, отбрасывая высказывания "в момент t истинно, что Ян будет завтра в полдень дома" и "в момент t истинно, что Ян не будет завтра в полдень дома" как ложные, мы должны отбросить и альтернативу (а), которая состоит из этих высказываний в качестве своих членов и которая была отправной точкой доказательства. Ибо альтернатива, оба члена которой ложны, сама ложна. Ложным одновременно становится условное высказывание (d): "если в момент t неверно, что Ян не будет завтра в полдень дома, то истинно в момент t , что Ян будет завтра в полдень дома", который мы получили путем преобразования предпосылки (а), ибо мы признаем антецедент этого высказывания, а отвергаем его консеквент. Следовательно, одна из посылок и одно

из звеньев ошибочны; ничего удивительного, что они приводят к ошибочному выводу.

Следует отметить, что отбрасывая альтернативу (а), мы не нарушаем принцип исключенного третьего, ибо члены этой альтернативы не остаются между собой в отношении противоречия. Противоречивы лишь высказывания: "Ян будет завтра в полдень дома" и "Ян не будет завтра в полдень дома", а альтернатива, составленная из двух этих высказываний: "Ян будет завтра в полдень дома либо Яна не будет завтра в полдень дома" должна быть истинна согласно принципу исключенного третьего. Но высказывания: "в момент t истинно, что Ян будет завтра в полдень дома" и "в момент t истинно, что Ян не будет завтра в полдень дома" не противоречат друг другу, так как одно из них не является отрицанием другого и альтернатива, составленная из них, не должна быть истинна. Посылку (а) мы вывели из принципа исключенного третьего на основе чисто интуитивных рассуждений, а не в силу какого-нибудь логического принципа. Интуитивные рассуждения могут ввести в заблуждение и, по-видимому, это и произошло в нашем случае.

10. Несмотря на то что этот результат кажется логически безукоризненным, он не удовлетворяет меня полностью. Ибо он не удовлетворяет всем моим интуитивным представлениям. А именно, я считаю, что существует разница между случаем, в котором мы не принимаем высказывания: "в настоящий момент истинно, что Ян будет завтра в полдень дома", потому что завтрашнее пребывание или отсутствие Яна дома в настоящий момент еще не предопределено, и случаем, когда не принимаем это высказывание потому, что только в этом втором случае у нас есть право *отбросить* это высказывание и сказать *'неверно* в настоящий момент, что Ян будет завтра в полдень дома"; в первом же случае мы не можем ни принять, ни отбросить это высказывание, но должны наше суждение *отсрочить*.

Этот способ поведения находит свое обоснование и в жизни и в разговорном языке. Когда завтрашнее пребывание или отсутствие Яна в доме еще в настоящий момент не предрешено, то мы говорим: *"возможно, что Ян будет завтра в полдень дома, но также возможно, что Яна не будет завтра в полдень дома"*. Когда же в настоящий момент уже существует причина завтрашнего отсутствия Яна в доме, то мы говорим, поскольку причина нам известна: *"невозможно, чтобы Ян был завтра в полдень дома"*. При допущении, что завтрашнее пребывание или отсутствие Яна в доме в настоящий момент еще не предрешено, высказывание "в настоящий момент истинно, что Ян будет завтра в полдень дома" не может быть ни принято, ни отброшено, что означает, что мы не можем считать это высказывание ни истинным, ни ложным. Как следствие этого, и отрицание данного высказывания: "в настоящий момент неверно, что Ян будет завтра в полдень дома" не может быть ни принято, ни отброшено, то есть мы не можем его считать ни

истинным, ни ложным. Предыдущее рассуждение, которое основывалось на том, что мы отбросили первое из этих высказываний, а приняли второе, сейчас не может быть применено. В особенности условное высказывание (d), которое мы ранее отвергли, поскольку приняли его антецедент, а отвергли консеквент, не должно быть сейчас отвергнуто, поскольку ведь неверно, что мы принимаем антецедент этого высказывания, а отвергаем консеквент. А поскольку это высказывание вместе с посылкой (с), которая, по-видимому, не подвергается никаким сомнениям, достаточны для обоснования тезиса детерминизма, поэтому создается впечатление, что аргумент Аристотеля опять приобретает доказательную силу.

11. Однако дела обстоят иначе. Лишь сейчас, как мне кажется, мы получаем решение, которое не только отвечает нашей интуиции, но и точке зрения самого Аристотеля. Ибо Стагирит, формулируя свой аргумент в пользу детерминизма, сформулировал его лишь с той целью, чтобы позднее его опровергнуть: в знаменитой главе 9 "*Об истолковании*" Аристотель, по-видимому, приходит к выводу, что альтернатива "завтра произойдет морское сражение или завтра не произойдет морское сражение" уже сегодня истинна и необходима, но сегодня еще не истинно, что "завтра произойдет морское сражение" или "завтра не произойдет морское сражение". Эти высказывания относятся к случайным будущим событиям и, как таковые, сегодня не являются еще *ни истинными, ни ложными*. Так понимали Аристотеля стоики, которые боролись с ним как детерминисты, и так понимали его эпикурейцы, которые вместе с Аристотелем защищали индетерминизм.

Рассуждая подобным образом, Аристотель нарушает не столько принцип исключенного третьего, сколько один из глубочайших принципов всей нашей логики, который, кстати, он сам первый и провозгласил, а именно тот принцип, что *каждое высказывание либо истинно, либо ложно*, то есть может принимать одно и только одно из двух логических значений: истинность или ложность. Этот принцип я называю *принципом двузначности*. С полным пониманием того, о чем тут идет речь, настойчиво защищали в древности этот принцип стоики, а опровергали его эпикурейцы. Этот принцип, ввиду того, что он лежит в основе логики, не может быть доказан. Ему можно лишь доверять, а доверяет ему тот, кому он кажется очевидным. Поэтому мне ничто не препятствует этот принцип не признать и принять, что кроме истинности и ложности существуют еще другие логические значения, по крайней мере еще одно, *третье* логическое значение.

Что собой представляет это третье логическое значение? У меня нет для него соответствующего названия, но после этих объяснений нетрудно понять, о чем идет речь. Итак, я утверждаю, что существуют высказывания, которые не являются ни истинными, ни ложными, а лишь только *безразличными*. Таковы все высказывания о будущих событиях, которые в настоящее время еще не пре-

допределены. Эти высказывания в данный момент еще не истинны, так как не имеют никакого действительного эквивалента. Используя не совсем точную философскую терминологию, можно было бы сказать, что этим высказываниям онтологически не соответствуют ни бытие, ни небытие, но лишь *возможность*. Безразличные высказывания, которым онтологически соответствует возможность, имеют третье логическое значение.

Вводя это третье значение в логику, мы изменяем ее до основания. Трехзначная система логики, первые наброски которой мне удалось создать в 1920 г., отличается от обычной, до сих пор известной двузначной логики в не меньшей степени, нежели системы неевклидовой геометрии отличаются от евклидовой геометрии. Несмотря на это, она представляет собой такую же внутренне последовательную и непротиворечивую систему, как и двузначная логика. Как бы ни выглядела эта новая логика в мелочах, ни в коем случае в ней не выполняется тезис детерминизма. Ибо в условном высказывании, выражающем этот тезис: "если A есть b в момент t , то в каждый момент, предшествующий t , истинно, что A есть b в момент t ", можно переменным " A ", " b " и " t " придать такие значения, что антецедент этого условного высказывания перейдет в истинное высказывание, а консеквент в безразличное высказывание, то есть в высказывание, имеющее третье логическое значение. Произойдет это всегда, когда причина события, что A есть b в будущий момент t , еще не существует. Так что нельзя принять, чтобы истинным было условное высказывание, антецедент которого истинен, а консеквент безразличен. Ибо из истины может быть выведена только истина. Логический аргумент, говорящий в пользу детерминизма, окончательно проваливается.

12. Я подхожу к концу доказательств. Аргументы, извечно приводимые в защиту детерминизма, по моему мнению, не выстояли под огнем критики. Несомненно, из этого еще не следует, по меньшей мере, что детерминизм является ошибочной точкой зрения; ошибочность аргументов еще не служит доказательством ошибочности тезиса. Только одно я хотел бы сказать, основываясь на приведенной критике, что детерминизм не является лучше обоснованной точкой зрения, нежели индетерминизм.

В таком случае нам ничто не препятствует, не подвергаясь упрекам в легкомыслии, высказаться в пользу индетерминизма. Нам ничто не мешает принять, что не все будущее заранее предопределено. Если существуют причинные цепи, начинающиеся лишь в будущем, то только некоторые события, наиболее близкие к настоящему, какие-то *завтрашние* происшествия являются причинно определенными настоящим моментом. Чем дальше в будущее, тем меньше событий даже всевидящий разум сумел бы предвидеть с позиции настоящего момента: предопределены какие-то каждый раз более общие *рамки* событий, а в рамках этих все больше места

отводится *возможности*. Всемирная драма не является фильмом, снятым извечно; чем дальше от мест, как раз демонстрируемых, тем больше пробелов и пустых пятен появляется в фильме. И хорошо, что именно так. Ибо ничто нам не препятствует верить, что мы не только лишь пассивные зрители драмы, но и ее исполнители. Среди возможностей, ожидающих нас, мы можем выбрать лучшие возможности и избежать худших. Мы можем как-то сами изменять будущее мира согласно нашим намерениям. Как это возможно, я не знаю; верю только, что это возможно.

Но и к прошлому мы должны относиться точно так же, как и к будущему. Если из будущего только лишь то сегодня действительно, что причинно предопределено в настоящий момент, а начинающиеся в будущем причинные цепи принадлежат сегодня сфере возможного, то и из прошлого реально сегодня лишь то, что еще сегодня действует в своих следствиях. События, которые в своих следствиях полностью исчерпались так, что даже всевидящий разум не мог бы их вывести из событий, происходящих сегодня, принадлежат сфере возможного. Нельзя о них утверждать, что они *были*, но лишь, что они были *возможны*. И хорошо, что именно так. В жизни каждого из нас случаются тяжелые минуты страданий и еще более тяжелые минуты вины. Мы хотели бы стереть эти минуты не только из нашей памяти, но и в действительности. Ничто не препятствует нам верить, что когда исчерпают себя все следствия этих роковых минут, даже если бы это произошло лишь *после* нашей смерти, тогда и они сами будут вычеркнуты из материального мира и перейдут в сферу возможного. Время утешает печали и несет нам прощение.

А.С.Карпенко

ЯН ЛУКАСЕВИЧ - ДЕТЕРМИНИЗМ И ЛОГИКА*

*Философию необходимо перестроить,
начиная с оснований, вдохнуть в нее
научный метод и подкрепить ее новой
логикой.*

Ян Лукасевич

Впервые на русском языке публикуется одна из самых примечательных работ по детерминизму, принадлежащая выдающемуся логик и философу, основателю польской школы математической логики Яну Лукасевичу.

Ян Лукасевич родился 21 декабря 1878 г. во Львове. С 1915 по 1939 г. он был профессором Варшавского университета, ректором которого был в 1922/1923 и 1931/1932 гг. После Второй мировой войны он был профессором математической логики Королевской Ирландской Академии. Умер 13 февраля 1956 г. в Дублине.

Наибольшую известность и мировую славу ему принесло создание в 1920 г. трехзначной логики [45] и последующие ее обобщения. Подчеркнем, что связь между темой детерминизма и появлением трехзначной логики самая непосредственная: как раз предлагаемая статья Лукасевича является философским обоснованием создания трехзначной логики и в особенности обосновывается введение в логику третьего истинностного значения, отличного от классических "истина" и "ложь". Именно философская проблематика, касающаяся свободы воли и детерминизма (фатализма), глубоко занимавшая Лукасевича всю его жизнь, привела его к созданию совершенно новых логических систем.

Уже ранние работы Лукасевича посвящены анализу проблем причинности и логическим основаниям теории вероятности. Однако только в статье "О детерминизме" Лукасевичу удалось строго сформулировать и дать свое решение глубоких философских проблем, которые возрождаются все снова и снова.

Статья "О детерминизме" является переработкой ректорской речи, произнесенной Лукасевичем в Варшавском университете на торжественном открытии 1922/1923 учебного года и впервые опубликованной в 1961 г. на польском языке [51]. В 1967 г. издана на английском языке в переводе З.Йордана и под редакцией С.Мак-Колла [52], а в следующем году издана в переводе Р.Роуза [53]. Пер-

* Работа выполнена при поддержке Российского Фонда фундаментальных исследований, грант 93-06-10708.

вый перевод включен в собрание избранных работ Лукасевича [54]. Также имеются переводы на многие языки мира.

В этой работе Лукасевич рассматривает весьма широкий круг вопросов, которые объединяются вокруг проблемы детерминизма. Мы выделим три основные:

- (I) Различение логических принципов (законов);
- (II) Детерминистический аргумент и его опровержение;
- (III) Новая логика.

I. Вызывает удивление тот факт, что не только философы, но и в большей части логики не проводят различия между принципом исключенного третьего и принципом двузначности (логической бивалентности). Однако впервые в современной литературе такое различие было проведено Лукасевичем (на это специально указывает Мак-Колл [57]) в рассматриваемой нами работе. Принцип исключенного третьего гласит: "два противоречащих высказывания не являются одновременно ложными, а следовательно одно из них, либо первое, либо второе, должно быть истинным". Пусть p - пропозициональная переменная; $\sim p$ - высказывание, противоречащее p , и читается как "не- p "; $T(p)$ и $F(p)$ обозначают соответственно "истинно, что p " и "ложно, что p "; $\vee$ обозначает дизъюнкцию и читается как "или..., или..., но не одновременно". Тогда принцип (закон) исключенного третьего, сформулированный Лукасевичем, можно записать так:

$$(1) T(p) \vee T(\sim p).$$

Принцип двузначности формулируется Лукасевичем следующим образом: *"каждое высказывание либо истинно, либо ложно"*, то есть может принимать одно и только одно из двух логических значений: истинность или ложность". Тогда имеем:

$$(2) T(p) \vee F(p).$$

Формулировка (1) называется семантическим законом исключенного третьего. Обычная формулировка закона исключенного третьего имеет следующий вид:

$$(1') p \vee \sim p.$$

Однако формулировка (1') совпадает с (1), если имеет место схема А.Тарского, которая утверждает, что фраза "истинно, что...", предва-ряющая высказывание " p ", является излишней в классической логике, т.е.

$$(3) T(p) \equiv p,$$

где " $\equiv$ " читается "эквивалентно".

Легко видеть, что если (1') является теоремой некоторой логической системы и имеет место (3) для этой системы, а также берется обычное определение ложности: "ложность есть истинность отрицания (противоречивого) высказывания" [4,с.541], т.е.

$$(4) F(p) \equiv T(\sim p),$$

то (2) имеет место в этой системе. В этом смысле закон исключенного третьего и принцип бивалентности эквивалентны. Но это имеет место только в классической двузначной логике. Однако имеются другие теории истинности, неклассические, например, времененные теории истинности [58], теория супероценок Б. ван Фраассена [30] и т.д. В таких теориях может не иметь места (3) или (4). С другой стороны, например, в ветвящейся модельной структуре в каждой точке времени (в каждом возможном мире) высказывание либо истинно, либо ложно, но закон исключенного третьего не обязательно должен иметь место [71]. И наоборот, легко сконструировать такую *трехзначную* логику, в которой (1') имеет место.

Таким образом, в неклассических логиках различие между (1) и (2) является фундаментальным и этому различию современная логика обязана именно Лукасевичу. Такое различие понадобилось Лукасевичу для того, чтобы опровергнуть детерминистический аргумент, к рассмотрению которого мы и приступим.

II. Лукасевич пишет, что "известны два очень сильных убедительных аргумента, свидетельствующих в пользу детерминизма. Один из них, идущий от Аристотеля, основывается на логическом принципе исключенного третьего, второй, известный еще стоикам, на физическом принципе причинности". Поскольку опровержение детерминистического аргумента Лукасевич видит на пути создания новой логики, то нас будет интересовать аргумент, основанный на законах логики; тем более, что в данной статье убедительно показано, что аргумент, основанный на принципе причинности ошибочен.² Детерминистический аргумент, основанный на логических принципах, получил название "логического детерминизма". Это понятие впервые было введено М.Шликом в 1931 г. [см.68] и получил широкое распространение в особенности после одновременной публикации на польском и английском языках статьи З.Йордана "Логический детерминизм" [39], где под последним понимается спекулятивная доктрина, которая "пытается продемонстрировать, что некоторые характеристики формальных структур определяют отношения, которые имеют место среди вещей и событий и едва различают дедукцию от причинности, каузальную цепь от дедуктивной цепи" (р.30). Рассмотрим детерминистический аргумент Лукасевича.

Пусть p есть высказывание "Ян будет завтра в полдень дома". Тогда $(T(p))_t$ обозначает высказывание "В момент t истинно, что p ". Теперь запишем первую посылку детерминистического аргумента:

$$(a) (T(p))_t \vee (T(\sim p))_t \quad (\text{закон исключенного третьего}).$$

² Следует особо отметить, что доказательство Лукасевичем того, что принцип причинности не может служить основанием в пользу детерминизма, является одним из блестящих достижений современной науки (см. раздел 7).

Следующую посылку Лукасевич принимает в силу ее интуитивной очевидности:

$$(b) (T(\sim p))_t \rightarrow \sim p,$$

где логическая связка " $\rightarrow$ " обозначает "если..., то...".

Из (b) по закону контрпозиции $(p \rightarrow q) \equiv (\sim q \rightarrow \sim p)$ и закону снятия двойного отрицания $p \equiv \sim \sim p$ получает

$$(c) p \rightarrow \sim(T(\sim p))_t.$$

Далее, имея в виду, что в классической логике $p \vee q \equiv \sim p \rightarrow q$ и опять же контрпозицию и снятие двойного отрицания, из (a) получаем

$$(d) \sim(T(\sim p))_t \rightarrow (T(p))_t.$$

Тогда по правилу условного силлогизма из (c) и (d) получаем искомое заключение

$$(e) p \rightarrow (T(p))_t.$$

Поскольку момент времени t произволен, то было истинно и в каждый момент раньше t , что Ян будет завтра в полдень дома. Отсюда следует, что из закона исключенного третьего доказан тезис детерминизма, который гласит, что "если A является b в момент t , то истинно в любой момент, предшествующий t , что A есть b в момент t ".

Тщательно анализируя этот аргумент в разделах (9) и (10) и подкрепив его принципом причинности, Лукасевич приходит к выводу, что он имеет доказательную силу, и единственным способом его опровержения является отказ от классической логики, тем более, заметим, что новая логика им уже создана в 1920 г. [45].

Напомним, эта логика имеет три истинностных значения, а именно "истинность", обозначаемая как 1, "ложность" - 0, и "возможность" - $1/2$. Для импликации " $\rightarrow$ " и отрицания " $\sim$ " сохраняются классические значения, когда аргументы оцениваются только как истинные или/и ложные. Когда же встречается третье значение, то результат следующий:

$$(1 \rightarrow 1/2) = (1/2 \rightarrow 0) = 1/2,$$

$$(0 \rightarrow 1/2) = (1/2 \rightarrow 1/2) = (1/2 \rightarrow 1) = 1,$$

$$\sim 1/2 = 1/2.$$

Связки дизъюнкция $\vee$ и конъюнкция $\wedge$ определяются посредством исходных:

$$p \vee q = (p \rightarrow q) \rightarrow q,$$

$$p \wedge q = \sim(\sim p \vee \sim q).$$

Почему именно такие свойства импликации - Лукасевич ни в одной из своих работ объяснения не дает. В рассматриваемой же нами статье "О детерминизме" дается лишь философское обоснование для введения третьего истинностного значения в логику. Такое зна-

чение принимают высказывания о будущих случайных событиях. Это как раз тот самый случай, по Лукасевичу, когда причинная цепь события А еще не началась и целиком лежит в будущем. Поскольку тезис детерминизма выражен в форме условного высказывания, а переменным "А", "b" и "t" можно придать такие значения, что антецедент станет истинным высказыванием, а консеквент примет третье логическое значение, то в силу того, что в трехзначной логике $1 \rightarrow 1/2 = 1/2$, аргумент логического детерминизма не срабатывает. При этом Лукасевич утверждает, что им отбрасывается не закон исключенного третьего, а принцип бивалентности, и в этом он в точности следует Аристотелю, который впервые построил фаталистический аргумент в своей знаменитой 9-ой главе трактата "Об истолковании" [1].

Следует отметить, что с самого начала возникновения дискуссии о логическом детерминизме, сама постановка проблемы Шликом начисто отвергалась, поскольку из законов логики никакие утверждения о самом мире не следуют. По разным основаниям отвергался этот аргумент и в других работах (укажем только статьи Г.Патцига [64] и М.Урчса [73]). Что касается самого Лукасевича, то он никогда к этому аргументу не возвращался, но исходные идеи, идущие от Аристотеля, в покое его не оставляли.

Суть аристотелевского аргумента можно выразить так. Предположим, сейчас истинно, что завтра будет морское сражение. Из этого следует, что не может быть, чтобы завтра не было морского сражения, иначе не было бы истинно, что морское сражение завтра будет. Следовательно, завтрашнее морское сражение является необходимым событием. Подобно этому, если сейчас ложно, что завтра будет морское сражение, то необходимо, что морское сражение завтра не произойдет. Но сейчас истинно или ложно, что завтра будет морское сражение (принцип двузначности). Следовательно, или необходимо, что оно будет, или необходимо, что оно не будет. Обобщив этот аргумент, получаем, что все в мире происходит по необходимости, и нет ни случайных событий, ни свободы выбора.

Логическая структура данного аргумента выглядит следующим образом. Пусть "р" есть высказывание о будущем случайном событии, а "N(p)" обозначает "необходимо, что р". Тогда имеем:

(1) $T(p) \rightarrow N(p)$ - посылка,

(2) $F(p) \rightarrow N(\sim p)$ - по аналогии с (1),

(3) $T(p) \vee F(p)$ - посылка (принцип двузначности),

(4) $N(p) \vee N(\sim p)$ - из (1), (2) и (3) по правилу классической логики, которое называется "сложная конструктивная дилемма": из $A \rightarrow C$, $B \rightarrow D$ и $A \vee B$ следует $C \vee D$.

Отбрасывая принцип двузначности, мы тем самым разрушаем аристотелевский аргумент. Но в том-то и дело, что одно из главных возражений против подобных аргументов заключается в том, что

для их опровержения совсем не обязательно отказываться от классической логики. К этому заключению в дальнейшем приходит и сам Лукасевич.

Обратим внимание на посылку (1), которую Лукасевич назвал "принципом необходимости", восходящим к Аристотелю [12, §44]. Здесь мы сделаем одно важное замечание, и на это указывает целый ряд исследователей и комментаторов трактата "Об истолковании" (см. в особенности [18]), что связь между $T(p)$ и $N(p)$ не является *причинной*, то есть истинность высказывания о будущем не является причиной будущих событий. Поэтому аргумент логического детерминизма Лукасевича существенно отличается от аргумента Аристотеля, который получил название доктрины "логического фатализма", под которой понимается тезис, утверждающий, что одних законов логики достаточно для доказательства, что ни один человек не имеет свободы воли и все в мире происходит по необходимости. Тема эта, начиная со времен Аристотеля, обсуждается по сей день, и подробное ее рассмотрение, а также различные реконструкции и модификации фаталистического аргумента Аристотеля можно найти в книге [11].

Остается только единственный способ опровергнуть данный аргумент логического фатализма, не затрагивающий основ логики, — это показать необоснованность посылки (1), то есть принципа необходимости. По этому вопросу существует обширная литература. Например, как справедливо замечает Г. Райл [67], в фаталистическом аргументе не проводится четкого различия между высказываниями и фактами, в силу чего оказывается, что истинность высказывания влечет существование факта, когда на самом деле из истинных высказываний по правилам логики могут опять же следовать только истинные высказывания. Другое возражение сделано Лукасевичем, где принцип причинности вообще не упоминается [12, с. 216]. По схеме Тарского $p \equiv T(p)$, посылка (1) преобразуется в выражение $p \rightarrow N(p)$. Но, замечает здесь Лукасевич, эта формула не может быть принята ни в одной системе, так как следствием ее является разрушение пропозициональной модальной логики.

Построению подходящей модальной логики, средствами которой можно было бы реконструировать фаталистический аргумент Аристотеля и показать его несостоятельность, Лукасевич уделял много внимания. Так уже его статья 1930 г. [49] посвящена философскому обоснованию трехзначной модальной логики, модальные операторы которой построены на основе трехзначной логики.

Однако вскоре выяснилось, что философские аспекты логического детерминизма (фатализма) и формально-логический аппарат, предложенный Лукасевичем для решения проблемы, оказались несовместимы. Основное возражение состоит в том, что в трехзначной логике Лукасевича не имеет места закон исключенного третьего $p \vee \sim p$. Но Лукасевич всегда утверждал неизбежность этого закона, и это же мы находим в его статье "О детерминизме", причем

со ссылкой на Аристотеля³. Более того, в его логике отбрасывается также и закон непротиворечия $\sim(p \wedge \sim p)$.

Не ответив ни одному из своих критиков, Лукасевич в 1953 г. строит L-модальную четырехзначную логику [49], в которой имеют место все законы классической логики. Мотивировка такого шага достаточно прозрачна: "Я стою на той точке зрения, что в любой модальной логике должно быть сохранено классическое исчисление предложений. До сих пор это исчисление продемонстрировало свою надежность и полезность, и оно не должно быть отвергнуто без достаточно веских оснований" [12,с.233]. На основе истинностных функций четырехзначной логики строятся различные модальные операторы и вновь предпринимается попытка реконструкции фаталистического аргумента Аристотеля с целью его опровержения. Однако сразу отметим, что формальный аппарат его L-модальной логики оказался еще более неподходящим для решения поставленных философских проблем [11,§7]. Тем не менее с этой логикой и ее обобщением на бесконечнозначный случай Лукасевич связывал большие надежды, считая построение трехзначной логики и ее обобщения ошибкой. Как показало время, надежды его совершенно не оправдались, а ошибка оказалась гениальной.

Самое поразительное, однако, заключается в том, что Лукасевич в данной работе дает опровержение сформулированного им тезиса детерминизма, не прибегая ни к какой новой логике. Это его решение проблемы на много опережает современные исследования в этой области. Обратим внимание на то, что в 9-ой главе аристотелевского трактата "Об истолковании" содержится два фаталистических аргумента, и второй (18b9-16) значительно усиливает первый, который рассмотрен нами выше. Смысл второго аргумента состоит в том, что если нечто сейчас произошло, то в предшествующий момент времени было правильно утверждать, что это событие произойдет. Рассуждая подобным образом, приходим к выводу, что в *любой* предшествующий момент времени было истинным высказывание о данном событии. Но если всегда было истинным, что нечто произойдет, то оно не может не произойти. Если бы истина, лежащая в прошлом, могла бы перестать быть истиной, то это означало бы, что прошлое *изменяемо*. Но, например, высказывание "Сократ выпил яд цикуты" не только истинно, но и необходимо истинно, поскольку уже никогда не может стать ложным: вся наша интуиция говорит о том, что прошлое неизменяемо. Таким образом, первоначальный принцип необходимости заменяется еще более сильным принципом неизменяемости прошлого. А это значит, что свойства прошлого (неизменяемость, необходимость происшедшего) переносятся на само будущее. Как указывает Д.Вайдекер [76], подобный аргумент считается наиболее сильным философ-

³ Положение попытается спасти Е.Слупецкий [13], сконструировав четырехзначную логику, которая различает два вида закона исключенного третьего, один из которых в этой логике отбрасывается.

ским аргументом в защиту фатализма. Интересно, что современный анализ различных фаталистических и детерминистических аргументов привел к совершенно неожиданному выводу: человек свободен, если он имеет власть над прошлым (см., например, [28], [31] и [19]). Отсюда следует, что свобода человека предполагает *изменчивость прошлого*.

Теперь, если мы сравним второй фаталистический аргумент Аристотеля и тезис детерминизма Лукасевича, то увидим, что по своей сути они в точности совпадают. Но самое главное, Лукасевич в последнем абзаце своей статьи весьма эмоциональным образом обосновывает, что событие, которое было, может перестать быть таковым для нас. Здесь важно само нарушение принципа о неизменяемости прошлого (истина, лежащая в прошлом, не может перестать быть истиной) в какой бы форме это не выглядело. Если же прошлое не является неизменным, то не является таковым и будущее. Этим разрушается тезис детерминизма без обращения к каким-либо формально-логическим системам, и хотя Лукасевич не придал этому специального значения, приоритет в подобном решении проблемы детерминизма (фатализма) несомненно принадлежит ему. К этому остается добавить, что вопрос об изменяемости прошлого, широко обсуждаемый в научно-фантастической литературе, давно перешел в сферу серьезных философских исследований, а с конца 80-х годов привлек внимание физиков-теоретиков (см. литературу к первой главе в книге М.Гарднера [5,с.327]).

III. Удивительна судьба многозначных логик Лукасевича. Начнем с того, что само появление этой новой логики вначале Лукасевич оценивал очень высоко. Еще до окончательной формулировки трехзначной логики ее построение Лукасевич связывает с "борьбой за освобождение человеческого духа" [44,р.86], а в статье "О детерминизме" пишет: "Трехзначная система логики... отличается от обычной до сих пор известной двузначной логики, в не меньшей степени, нежели системы неевклидовой геометрии отличаются от евклидовой геометрии".

К 1922 г. относится открытие Лукасевичем n -значных логик L_n для $n > 3$ ($n \in \mathbb{N}$) [47], а в 1929 г. [48] впервые была построена бесконечнозначная логика L_ω . Уже в двадцатые годы в Львовско-Варшавской школе (Лукасевич, Тарский, Линденбаум, Собочинский, Вайсберг и др.) были проведены первые исследования многозначных логик Лукасевичем и результаты помещены в совместном сообщении Лукасевича и Тарского в 1930 г. [55]. Заметим, что в силу этой публикации многозначные логики, открытые Лукасевичем, зачастую назывались логиками Лукасевича-Тарского. Дело дошло до того, что понадобилось письмо Л.Борковского редакторам журнала "Studia Logica" (1983, vol.42, N1), где дается ссылка на Тарского, который говорит о приоритете Лукасевича в этой области.

Свойства n -значных логик Лукасевича оказались столь необычными и с такими далеко идущими последствиями, что мы вкратце их рассмотрим. Эти логики строятся матричным методом со следующими определениями.

Логическая матрица вида

$$\mathfrak{M}_{n+1} = \langle M_{n+1}, \sim, \rightarrow, \{1\} \rangle$$

называется $n+1$ -значной матрицей Лукасевича, где

$$M_{n+1} = \{0, 1/n, \dots, n-1/n, 1\}$$

есть множество истинностных значений;

$\sim$ и $\rightarrow$ есть соответственно операции отрицания и импликации, определенные на множестве M_{n+1} и принимающие значения в этом множестве;

$\{1\}$ есть множество выделенных значений.

Матричные исходные операции определяются так:

$$\sim x = 1 - x,$$

$$x \rightarrow y = \min(1, 1 - x + y),$$

$$x \vee y = (x \rightarrow y) \rightarrow y = \max(x, y),$$

$$x \wedge y = \sim(\sim x \vee \sim y) = \min(x, y).$$

Формула пропозиционального языка является тавтологией в $\mathfrak{M}_{n+1}$, если при любом приписывании значений она принимает выделенное значение 1. Для любого $n \in \mathbb{N}$ множество тавтологий в $\mathfrak{M}_{n+1}$ аксиоматизируемо. Историю вопроса об аксиоматизируемости конечнозначных логик Лукасевича L_{n+1} можно найти в [70, p.179-180]. Отметим только, что уже до 1930 г. М.Вайсберг имел доказательство аксиоматизируемости L_{n+1} для случая, когда n есть простое число.

$n+1$ -значные логики Лукасевича являются обобщением классической логики C_2 , так как матрица $\mathfrak{M}_2$ является характеристической для C_2 .

Почти через полвека после появления конечнозначных логик Лукасевича В.К.Финн (см. совместную статью с Д.А.Бочваром [2]) обнаружил поразительную связь этих логик с понятием простого числа (!) Основной результат состоит в следующем: множество функций, соответствующих матричным логикам Лукасевича L_{n+1} , является предполным тогда и только тогда, когда n есть простое число, где под функциональной предполнотой понимается такое свойство множества функций, что добавление к этому множеству некоторой функции, в нем не содержащейся, превращает исходное множество в функционально полную систему⁴. Таким образом, че-

⁴ Этот результат был переоткрыт Хендри [35] и Урквартом [74].

рез функциональные свойства L_{n+1} дается определение простого числа. Отсюда следует, что конечнозначные логики Лукасевича имеют чисто теоретико-числовой или комбинаторный характер. Тогда, спрашивается, причем здесь "вопрос свободы и необходимости"? . Как это ни покажется странным, но глубинная связь существует.

Дальнейшее развитие результата В.К.Финна привело к построению такой $n+1$ -значной логики K_{n+1} , которая имеет класс тавтологий тогда и только тогда, когда n есть простое число [8], [42]. Этим дается еще одно определение простого числа. Но самое главное заключается в том, что по своим функциональным свойствам логика K_{n+1} является предполной тогда и только тогда, когда n есть простое число, то есть для этого случая $K_{n+1} = L_{n+1}$. Доказательство эквивалентности оказалось весьма сложным, о чем говорит тот факт, что в определение импликации Лукасевича $\rightarrow$ посредством операций из K_{n+1} только импликация из K_{n+1} входит 21345281 раз. Более того, само доказательство, видимо, в неявной форме содержит "закон распределения простых чисел", поскольку доказательство эквивалентности ведется *только* для случая, когда n есть простое число (!) В связи с этим обратим внимание на одно замечание Д.Цагера, что при взгляде на простые числа "... возникает такое чувство, что перед тобой одна из необъятных тайн мироздания" [16,с.46]. Мы бы сказали, что тайна распределения простых чисел содержит как бы *код Вселенной* в весьма зашифрованном виде. Может в этой тайне и лежит ответ на вопрос о свободе и необходимости.

Чтобы закончить с простыми числами и их связью с конечнозначными логиками Лукасевича, рассмотрим следующую проблему: каков метод переработки любой логики L_{n+1} в предполную? В силу указанного результата В.К.Финна это равносильно переработке любого натурального числа в простое. В основе такого метода лежат свойства функции Эйлера $\varphi(n)$. Например, числа 8, 10 и 12 перерабатываются в простое число 5. Легко показать, что все множество натуральных чисел разбивается на классы эквивалентности, причем такие, что в каждом классе находится одно и только одно простое число. Тогда возникает следующая проблема: существует ли алгоритм, который по любому простому числу позволяет построить его класс эквивалентности. Да, такой алгоритм существует (в основе лежат свойства обратной функции Эйлера $\varphi^{-1}(m)$) [33], и более того: каждое простое число представимо в виде некоторого корневого дерева [8], [41]. Серьезная проблема состоит в том, чтобы доказать, что каждое данное корневое дерево конечно, то есть все классы эквивалентности имеют конечную мощность. Строгая формулировка этой проблемы содержится в [42,р.476-477]. Далее, как известно, по каждому корневному дереву можно построить рабелеву группу [34]. Таким образом, мы приходим к идее построения *новой математики*, в которой исходными элементами являются не простые числа, а определенного рода структуры, а

именно p -абелевы группы. Конечно, Лукасевич даже не мог предполагать, что его конечнозначные логики могут иметь такие последствия для математики.

Особый интерес как исторический, так и по своим результатам, представляет алгебраизация многозначных логик Лукасевича. Первые работы в этой области принадлежат Г.Моисилу, который задался целью построить алгебраический аппарат для $n+1$ -значных логик Лукасевича, играющий ту же роль, что и булевы алгебры для классической логики. В 1941 г. [60] были построены алгебры, соответствующие L_3 - и L_4 -логикам, а в следующем году [61] было сделано обобщение на $n+1$ -значный случай ($n \in \mathbb{N}$). Алгебры получили название " $n+1$ -значных алгебр Лукасевича" и это название распространено среди специалистов, но по прошествии многих лет А.Роуз обнаружил, что на самом деле для случая $n \geq 5$, то есть уже начиная с L_5 , алгебры Лукасевича соответствуют не логикам Лукасевича, а их фрагментам (см. предисловие в [26]). Независимо от Роуза это обнаружил также В.К.Финн [15, с.431]. Поэтому правильно называть эти алгебры "алгебрами Моисила"⁵. Впервые же алгебры, соответствующие логикам L_{n+1} , появились только в 1973 г. (см. Григолия [6]) и то, исходя из уже построенной MV -алгебры для L_ω (об этом далее). В свою очередь Чиноли в 1980 г. ввел понятие "собственно алгебр Лукасевича" (см. [27]), которые получаются за счет расширения сигнатуры алгебр Моисила новой двухместной операцией. Представляла бы интерес специальная характеристика таких $n+1$ -значных алгебр Лукасевича, которые соответствуют логикам L_{n+1} для случая, когда n простое число. И на этом пути попытаться подойти к решению проблемы о представлении простых чисел конечными корневыми деревьями.

Не меньший интерес представляет собой алгебраизация бесконечнозначной логики Лукасевича L_ω . Обобщение $n+1$ -значной логики Лукасевича на счетно-значный и континуальный случаи не составляет труда, поскольку символ n не входит в определение операций из $\mathfrak{M}_{n+1}$. Тогда в качестве истинностных значений соответственно берется множество рациональных и действительных чисел x таких, что $0 \leq x \leq 1$, то есть в замкнутом отрезке $[0,1]$, и сохраняются равенства для $\sim x$ и $x \rightarrow y$. По гипотезе Лукасевича (1930 г.) эти логики аксиоматизируются следующим образом [55, p.144]:

1. $p \rightarrow (q \rightarrow p)$
2. $(p \rightarrow q) \rightarrow ((q \rightarrow r) \rightarrow (p \rightarrow r))$
3. $((p \rightarrow q) \rightarrow q) \rightarrow ((q \rightarrow p) \rightarrow p)$
4. $(\sim p \rightarrow \sim q) \rightarrow (q \rightarrow p)$
5. $((p \rightarrow q) \rightarrow (q \rightarrow p)) \rightarrow (q \rightarrow p)$.

⁵ Изучение алгебр Моисила вылилось в отдельное направление, итоги которого недавно подведены в фундаментальном труде [20].

Правила вывода: подстановка и *modus ponens*.

Данная гипотеза Лукасевича была подтверждена М.Вайсбергом в 1931 г. [75, p.105], однако доказательство никогда не было опубликовано. В 1958 г. К.А.Мерedit [59] и Ч.Ч.Чэн [23] независимо друг от друга доказали, что аксиома (5) выводима из остальных, и только в этом году Роузом и Россером [66] была доказана полнота L_ω относительно аксиом (1) – (4). Наконец, Чэн вводит понятие MV-алгебры [24] и затем [25] дает чисто алгебраическое доказательство полноты L_ω .

MV-алгебра строится Чэном как обобщение булевой алгебры, и первая превращается во вторую посредством добавления аксиомы идемпотентности $x + x = x$. Имеются значительные упрощения MV-алгебры Чэна, состоящей из 22 аксиом, до девяти аксиом П.Мангани [56] и даже до четырех Х.Бафом [21]. Неожиданно оказалось, что введенные К.Исеки и С.Танака [38] ограниченные коммутативные ВСК-алгебры эквивалентны MV-алгебрам (специально этому вопросу посвящена статья Д.Мандичи [62]). К этому добавим, что аксиоматизация MV-алгебр, предложенная Бафом, на самом деле является аксиоматизацией ограниченных коммутативных ВСК-алгебр, в точности совпадающей с формулировкой последних в [62, p.889] за исключением того, что у Бафа аксиома $x * x = 0$ является излишней.

Недостаток указанных алгебраических аксиоматизаций состоит в том, что исходные операции в них по своим свойствам значительно отличаются от операции импликации у Лукасевича. Этот недостаток был исправлен в 1980 г. А.Дж.Родригезом (см. совместную работу [26]), который ввел понятие алгебры Вайсберга (W-алгебры) в сигнатуре $W = (A, \rightarrow, \neg, 1)$ типа $(2, 1, 0)$ со следующими аксиомами:

1. $1 \rightarrow x = x$
2. $(x \rightarrow y) \rightarrow ((y \rightarrow z) \rightarrow (x \rightarrow z)) = 1$
3. $(x \rightarrow y) \rightarrow y = (y \rightarrow x) \rightarrow x$
4. $(\neg x \rightarrow \neg y) \rightarrow (y \rightarrow x) = 1.$

Родригезом также доказана эквивалентность W-алгебр и MV-алгебр. Более того, оказалось, что W-алгебры являются дуалами ограниченных коммутативных ВСК-алгебр и как таковые уже изучались Т.Трачыком [72].

Стоит заметить, что порождение алгебраических структур, соответствующих логике L_ω исходит из совершенно разных оснований. Так, Мандични [63] доказал эквивалентность определенного класса решеточно-упорядоченных абелевых групп с MV-алгебрами. Взаимоотношения между всеми указанными видами алгебр плюс AFC*-алгебры рассмотрены К.С.Хоо [36].

Известно то огромное значение, которое занимают в современной математике теория булевых алгебр (издана трехтомная энциклопедия) и теория алгебр Гейтинга (см. книгу Л.Л.Эсакиа [17]).

Пришло время для выделения в самостоятельную область MV-алгебр, которые имеют собственную проблематику, играющую не менее важную роль, а может даже и большую. Важен также тот факт, что для различных классов MV-алгебр теорема представления может основываться как на свойствах булевых алгебр, так и на свойствах алгебр Гейтинга.

Теперь по прошествии стольких лет после создания многозначных логик Лукасевича можно констатировать, что они получили исключительно широкое развитие и поток работ по ним продолжается. Г.Малиновским написан очерк развития многозначных логик Лукасевича и составлена библиография к ним (включительно по 1974 г.) [70, p.177-187, 189-199].

В заключение этой статьи мы коснемся проблемы интерпретации истинностных значений, тем более, что сам Лукасевич уделял этому большое внимание, и не случайно, поскольку теория истинностных значений интуитивно связывалась им с пониманием самой сути логики.

Мы уже говорили, что третье истинностное значение Лукасевич интерпретирует как "возможность", которое приписывается высказываниям о будущих случайных событиях, и поэтому можно говорить, что логика "обнаруживает онтологическую структуру реальности" [39, p.10]. Йордан считает, что такая точка зрения на логику была особенно распространена в античности, а в наше время была принята Расселом (в начале его деятельности), Брауэром и Лесневским. Сам Лукасевич (и вслед за ним А.Н.Прайор [65, p.250]) считает классическую логику детерминистской и поэтому трехзначная логика призвана "разрушить первоначальную концепцию науки, основанную на необходимости" [44, p.86]. Однако в отличие от других, у Лукасевича особую роль в онтологическом статусе логики играют именно истинностные значения. В $n+1$ -значных логиках "0 интерпретируется как ложь, 1 как истина, а другие числа в интервале от 0 до 1 как степени вероятности, соответствующие различным возможностям" [47, p.130]. Подобная интерпретация распространяется и на бесконечнозначный случай L_ω . С последним Лукасевич связывал особые надежды, поскольку поставил перед собой цель представить логический фундамент для теории вероятностей, которая была разработана им ранее в [43], являющейся одной из лучших работ по этой теме того времени. Однако здесь возникли серьезные трудности, поскольку не понятно, как можно проинтерпретировать свойства импликации в терминах вероятностей (заметим, что через "хорошие" связи $\{\sim, \vee, \wedge\}$ импликация Лукасевича не определена). Это также повлияло на решение Лукасевича отказаться от своего главного достижения - создания многозначной логики⁶.

⁶ Однако попытки связать многозначную логику Лукасевича с теорией вероятностей предпринимались неоднократно. Серию работ посвятил этому З.Завирски (см. [70, p.185]). Особый интерес представляет работа Р.Гилса [32].

Интересно, что после более чем полувекового развития многозначных логик Лукасевича, Дана Скотт поставил вопрос о смысле истинностных значений в этих логиках [69, р.66]. Наконец, в 1979 г. М.Бэрд [22] предложил естественную интерпретацию L_{n+1} -логик в терминах Т(истина) и F(ложь). Здесь множеством истинностных значений является множество Т-F-последовательностей (булевых векторов) длины n , но таких, что все вхождения Т стоят вначале. Независимо от этой работы в этом же году была предложена интерпретация, где в качестве самого истинностного значения выступает определенное множество Т-F-последовательностей (см.[40], [9]). Такая семантика была названа "фактор-семантикой" и впоследствии распространена на L_ω , для которой была найдена нестандартная дискретная модель [7]. Полнота L_ω относительно фактор-семантики была доказана В.Л.Васюковым [3], [77].

Заметим, что для L_ω мы имеем истинностные значения двух видов: в одном число вхождений Т конечно, а F бесконечно; в другом наоборот. Тогда каждое истинностное значение представляет собой счетное множество тех или иных Т-F-последовательностей. Теперь каждое такое множество упорядочим лексикографически. Как известно, отношение лексикографического порядка является отношением линейного порядка, а множество, упорядоченное таким образом, называется цепью. В свою очередь, цепь с первым и последним элементом (в качестве последнего элемента может выступать порядковое число ω) есть линейно-упорядоченная алгебра Гейтинга LH [37]. Двойственным образом для второго вида множеств мы получаем линейно-упорядоченные алгебры Брауэра LB . Таким образом, в качестве истинностных значений выступают LH -и LB -алгебры. Отсюда возникает проблема определения логических операций на подобных структурах [9].

По существу логика становится *теорией истинностных значений*. Это подтверждается как развитием булевозначных и гейтингозначных моделей (а в скором времени, видимо, появятся и MV -значные модели), так и категорным анализом логики. Более того, можно дать определение множества истинностных значений в категорных терминах. Предположим, J есть класс истинностных значений. Тогда категория J определяется посредством $ObJ = J$ и морфизмами J являются все операции $f: a \rightarrow b$, где $a, b \in ObJ$. Особый интерес представляет тот случай, когда категория J является топосом. Об истинностных значениях см. также [10] и [14].

Задолго до появления этих мощных направлений в современной логике с весьма сложным техническим аппаратом Лукасевич в 1921 г. провидчески дал следующее определение логики: "Логика есть наука об объектах специального вида, а именно наука о логических значениях" [46, р.90].

Итак, каковы же главные итоги изучения многозначных логик Лукасевича? Несколько неожиданным образом мы пришли к тому, что как исходные элементы математики - простые числа, так и исходные элементы логики - истинностные значения, не являются

неделимыми "точками", а представляют собой определенного рода *алгебраические структуры*. По аналогии с этим можно с уверенностью утверждать, что в природе нет "точек". Они возникают всего лишь как "идеальные элементы" при весьма высокой степени абстрагирования. Но тогда естественно предположить, что и моменты времени являются структурированными объектами. Вопрос в том, являются ли они всегда себестождественными себе и как связаны друг с другом. В разгадке времени лежит решение проблемы детерминизма (фатализма), а задача логика - выявить суть проблемы и предложить способы ее решения. В этом основная заслуга Яна Лукасевича.

ЛИТЕРАТУРА

1. *Аристотель*. Сочинения. Т.2. М., 1978. С.99-102.
2. *Бочвар Д.А., Финн В.К.* О многозначных логиках, допускающих формализацию анализа антиномий.1 // Исследования по математической лингвистике, математической логике и информационным языкам. М., 1972. С.238-295.
3. *Васюков В.Л.* Полнота L_{ω} относительно фактор-семантики // Неклассические логики и их применения. (Тр. науч.-исслед. семинара по логике Ин-та философии АН СССР).
4. *Вригт Г.Х., фон.* Детерминизм и высказывания о будущих событиях // Вригт Г.Х., фон. Логико-философские исследования. Избранные труды. М., 1986. С.539-554.
5. *Гарднер М.* Путешествие во времени. М., 1990.
6. *Григолия Р.Ш.* Свободные алгебры неклассических логик. Тбилиси, 1987.
7. *Карпенко А.С.* Фактор-семантика для бесконечнозначной логики Лукасевича // Неклассические логики (Тр. науч.-исслед. семинара по логике Ин-та философии АН СССР). М., 1986. С.20-26.
8. *Карпенко А.С.* Конечнозначные логики Лукасевича: алгебро-логические свойства простых чисел // Синтаксические и семантические исследования неэкстенциональных логик. М., 1989. С.170-205.
9. *Карпенко А.С.* От фактор-семантики к логическому исчислению алгебр // Там же. С.93-100.
10. *Карпенко А.С.* Истинностные значения. Что это такое? // Исследования по неклассическим логикам. М., 1989. С.38-53.
11. *Карпенко А.С.* Фатализм и случайность будущего: Логический анализ. М., 1990.
12. *Лукасевич Я.* Аристотелевская силлогистика с точки зрения современной формальной логики. М., 1959.
13. *Слупецкий Е.* Несколько замечаний о многозначных логиках Яна Лукасевича // Философия и логика. М., 1974. С.177-187.

14. *Соболев С.К.* Истинностное значение // Математическая энциклопедия. Т.2. М., 1979. С.681.
15. *Финн В.К.* Аксиоматизация некоторых трехзначных исчислений высказываний и их алгебр // Философия и логика., М., 1974. С.398-438.
16. *Цагер Д.* Первые 50 миллионов простых чисел // Успехи математических наук. 1984. Т.39. N 3.
17. *Эсакиа Л.Л.* Алгебры Гейтинга I. Теория двойственности. Тбилиси, 1985.
18. *Ackrill J.L.* Aristotle's "Categories" and "De Interpretatione". Translated with notes. Oxford, 1963.
19. *Bernstein M.* Fatalism, tense and changing the past // Philosophical Studies. 1989. Vol. 56. P.175-186.
20. *Boicescu V., Filipoi A., Georgescu G., Rudeanu S.* Lukasiewicz-Moisil algebras. Amsterdam, 1991.
21. *Buff H.W.* Decidable and undecidable MV-algebras // Algebra Universalis. 1985. Vol. 21. P.234-249.
22. *Byrd M.* A formal interpretation of Lukasiewicz's logic // Notre Dame Journal of Formal Logic. 1979. Vol.20. P.306-308.
23. *Chang C.C.* Proof of an axiom of Lukasiewicz // Transactions of Amer. Math. Soc. 1958. Vol. 87. P.55-56.
24. *Chang C.C.* Algebraic analysis of many-valued logics // Ibid. Vol. 88. P.467-490.
25. *Chang C.C.* A new proof of the completeness of the Lukasiewicz axioms // Ibid. 1959. Vol. 93. P.74-80.
26. *Cignoli R.* Moisil algebras // Notas de Mathematica. N 27. Universidad Nacional del Sur. Bahia Blanca. 1970.
27. *Cignoli R.* Proper n-valued Lukasiewicz algebras as S-algebras of Lukasiewicz n-valued propositional calculi // Studia Logica. 1982. Vol.41. P.3-16.
28. *Foley R.* Computabilism and control over the past // Analysis. 1979. Vol. 39. P.70-74..
29. *Font J.V., Rodriguez A.J., Torrens A.* Wajsberg algebras // Stochastica. 1984. Vol. 8. P.5-31.
30. *Fraassen B., van.* Singular terms, truth-value gaps, and free logic // The Journal of Philosophy. 1966. Vol.63. P.481-495.
31. *Freddoso A.J.* Accidental necessity and power over the past. Pacific Philosophical Quarterly. 1982. Vol.63. P.69-73.
32. *Gils R.* A non-classical logic for physics // [70]. P.13-51.
33. *Gupta H.* Euler's totient function and its inverse // Indian J. Pure and Appl. Math., 1981. Vol.12. P.22-30.
34. *Hales A.W.* Combinatorial representations of Abelian groups // Prog. Symp. Pure Math. 1971. Vol.19.
35. *Hendry H.E.* Minimally incomplete sets of Lukasiewiczian truth function // Notre Dame Journal of Formal Logic. 1983. Vol.24. P.146-150.
36. *Hoo C.S.* MW- and BCK-algebras and some applications // Algebraic structures and number theory. N.Y., 1990. P.148-164.

37. *Horn A.* Logic with truth-values in linearly-ordered Heyting algebra // The Journal of Symbolic Logic. 1959. Vol.34. P.395-408.
38. *Iseki K., Tanaka S.* An introduction to the theory of BCK-algebras // Mathematic Japonica. 1978. Vol.23. P.1-26.
39. *Jordan Z.* Logical determinism // Notre Dame Journal of Formal Logic. 1963. Vol. 4. P.1-38. (Также: O logicznym determinisme // Studia Logica. 1963. T. 14).
40. *Karpenko A.S.* Factor semantics for n-valued logics // Studia Logica. 1983. Vol.42. N 2-3. P.179-185.
41. *Karpenko A.S.* A hypothesis on the finiteness of graphs for Lukasiewicz's precomplete logics (graphs for prime number) // Bulletin of the Section of Logic. 1986. Vol.15. P.102-108.
42. *Karpenko A.S.* Characterization of prime numbers in Lukasiewicz's logical matrix // Studia Logica. 1989. Vol.48. P.465-478.
43. *Lukasiewicz J.* Logical foundation of probability theory // [54]. P.16-63.
44. *Lukasiewicz J.* Farewell lecture by professor Jan Lukasiewicz, delivered in the Warsaw University Lecture Hall on March 7, 1918 // [54]. P.84-86.
45. *Lukasiewicz J.* On three-valued logic // [54]. P.87-88.
46. *Lukasiewicz J.* Two-valued logic // [54]. P.89-109.
47. *Lukasiewicz J.* A numerical interpretation of theory propositions // [54]. P.129-130.
48. *Lukasiewicz J.* Elements of mathematical logic. N.Y., 1963.
49. *Lukasiewicz J.* Philosophical remarks on many-valued systems of propositional logic // [54]. P.153-178.
50. *Lukasiewicz J.* A system of modal logic // [54]. P.352-390.
51. *Lukasiewicz J.* O determinisme // Lukasiewicz J. Z zagadnien logiki i filozofii. Pisma wybrane. Warszawa, 1961. S.114-126.
52. *Lukasiewicz J.* On determinism // Polish logic 1920-1939. Oxford, 1967. P.19-39. Переиздано [54]. P.110-128.
53. *Lukasiewicz J.* On determinism // The Polish Review. 1968. Vol.13. P.46-61.
54. *Lukasiewicz J.* Selected works. Warszawa, 1970.
55. *Lukasiewicz J., Tarski A.* Investigations into the sentential calculus // [54]. P.131-152.
56. *Mangani P.* On certain algebras related to many-valued logics (Italian) // Boll.U.M.I. (4). 1973. Vol. 8. P.68-78.
57. *McCall S.* Excluded middle, bivalence and fatalism // Inquiry (Oslo), 1966. Vol.9. P.384-386.
58. *McCall S.* Temporal flux // American Philosophical Quarterly. 1966. Vol.3. N 4. P.270-281.
59. *Mereditt C.A.* The dependence of an axiom of Lukasiewicz // Transactions of Amer. Math. Soc. 1958. Vol. 87. P.54.
60. *Moisil G.* Recherches sur les logiques non chrysippiennes // Essais sur les logiques non chrysippiennes. Bucarest, 1972. P.195-232.
61. *Moisil G.* Notes sur les logiques non chrysippiennes // Ibid. P. 233-243.

62. *Mundici D.* MV-algebras are categorically equivalent to bounded commutative BCK-algebras // *Mathematic Japonica*. 1986. Vol. 31. P.889-894.
63. *Mundici D.* Mapping abelian l-groups with strong unit one-one into MV-algebras // *Journal of algebras*. 1986. Vol. 98. P.75-82.
64. *Patzig G.* Aristotle, Lukasiewicz and origins of many-valued logic // *Logic, methodology and philosophy of science*. N.Y., 1973. P.921-929.
65. *Prior A.N.* Formal logic. 2nd ed. Oxford, 1962.
66. *Rose A., Rosser J.B.* Fragments of many valued statement calculi // *Transactions of Amer. Math. Soc.* 1958. Vol. 87. P.1-53.
67. *Ryle G.* It was to be // *Ryle G. Dilemmas*. Cambridge. 1954. P.15-35.
68. *Schlick M.* Causality in contemporary physics (II) // *The British Journal for the Philosophy of Science*. 1961. Vol. 12. P.281-298.
69. *Scott D.* Does many-valued logic have any use? // *Philosophy of logic*. Oxford, 1976. P.64-74.
70. Selected papers on Lukasiewicz sentential calculi. Wroclaw, 1977.
71. *Thomason R.H.* Indeterminist time and truth-value gaps // *Theoria*. 1970. Vol. 36. P.264-284.
72. *Trachyk T.* On the variety bounded commutative BCK-algebras // *Mathematic Japonica*. 1979. Vol. 24. P.238-292.
73. *Urchs M.* On determinism - still unproved in classical logic // *Bulletin of the Section of Logic*. 1992. Vol. 21. P.168-170.
74. *Urquhart A.* Many-valued logic // *Handbook of philosophical logic*. Vol.3. Dordrecht, 1986.
75. *Wajsberg M.* Contribution to meta-calculus of propositions I // *Wajsberg M. Logical works*. 1977. P.89-106.
76. *Widerker D.* Fatalism // *Logique et Analyse*. 1987. Vol. 30. P.229-234.
77. *Vasyukov V.L.* The completeness of the factor semantics for Lukasiewicz's infinite-valued logics // *Studia Logica*. 1993. Vol. 52. P.143-167.

ИМПЛИКАТИВНЫЕ ЛОГИКИ: РЕШЕТКИ И КОНСТРУКЦИИ

В последнее время стали появляться работы, устанавливающие взаимоотношение (иерархию) некоторых логических систем (Дошен [1988], [1989], Оно [1990], Вонсинг [1990]). При этом рассматриваются системы сразу с полным (full) набором логических связей. При установлении иерархии систем возникает вопрос о выборе исходной (базисной, минимальной) логической системы. Так, в последних двух упомянутых работах в качестве такой системы берется полное исчисление синтаксических категорий Ламбека [1958] в секвенциальной форме, которое затем последовательно расширяется за счет добавления структурных правил. Исходя из всего этого, в перспективе можно ставить вопрос о классификации логик.

Однако стоит отметить, что впервые и в весьма широком аспекте проблема *классификации* логических систем была рассмотрена в книге Смирнова [1972], где в основе классификации лежат различные модификации понятий логического вывода (см. также его статью [1979]). Уже здесь обращалось внимание на роль структурных правил при переходе одних систем к другим. Также был рассмотрен целый ряд импликативных систем слабее импликативного фрагмента интуиционистской логики.

Цель данной статьи - рассмотреть различные аспекты взаимоотношения импликативных логик, не оставив при этом без внимания вопросы о возникновении и развитии исследований самих импликативных логик. Выбор импликативных логик в качестве исходных для классификации вполне естественен, поскольку обычно логические системы основаны на связке импликации, и уже только после этого возникает проблема расширения их за счет добавления других логических связей. К тому же подавляющее большинство логик различается только своими импликативными фрагментами.

Логические исчисления будут задаваться в гильбертовской форме. Это вызвано тем, что если расширение какой-либо исходной импликативной логики до интуиционистского импликативного фрагмента происходит за счет хорошо известных структурных правил (перестановка, сокращение, ослабление, добавление), то переход к более богатым импликативным системам вызывает сложности, поскольку порой совершенно неясно, какое правило могло бы соответствовать определенной формуле.

Особое внимание будет уделено переходу от интуиционистской импликации к классической. Решение именно этой проблемы позволит построить конструкцию самой классической логики.

Первой работой автора в области импликативных логик являются тезисы [1991].

1. Формулы, аксиомы, правила вывода, доказательства

Язык определяемой ниже импликативной логики состоит из:

p, q, r – счетного множества пропозициональных переменных с индексами или без них; бинарной связки $\rightarrow$, которую будем называть импликацией; левых и правых скобок.

Понятие правильно построенной формулы определяется обычным образом. Сами формулы будем обозначать большими латинскими буквами с индексами или без них, а все множество правильно построенных формул обозначим посредством L .

Теперь возникает проблема выбора из множества L исходных формул, которые называются *аксиомами*. По крайней мере аксиомы должны выражать простейшие и в то же время фундаментальные свойства связки $\rightarrow$. Таковыми являются аксиомы I, B, C, W, K:

I. $p \rightarrow p$ (тождественность).

B. $(q \rightarrow r) \rightarrow ((p \rightarrow q) \rightarrow (p \rightarrow r))$ (слабая транзитивность).

C. $(p \rightarrow (q \rightarrow r)) \rightarrow (q \rightarrow (p \rightarrow r))$ (перестановка).

W. $(p \rightarrow (p \rightarrow q)) \rightarrow (p \rightarrow q)$ (сокращение).

K. $p \rightarrow (q \rightarrow p)$ (ослабление).

Правилами вывода являются следующие два:

R1. *Правило подстановки* для пропозициональных переменных. Например, формула $K_1: (p \rightarrow q) \rightarrow (r \rightarrow (p \rightarrow q))$ есть результат одновременной подстановки в формулу K, где вместо p подставляем $p \rightarrow q$, а вместо q подставляем r . Это записывается следующим образом: $K \text{ } p/p \rightarrow q, q/r * K_1$.

R2. *Правило modus ponens*:

$A \rightarrow B, A$

-----, т.е. из $A \rightarrow B$ и A следует B .

B

Формула $A \rightarrow B$ называется *большой посылкой*, а формула A *меньшей посылкой*. Это правило иногда будем обозначать посредством MP.

Доказуемость формулы A будем обозначать посредством $\vdash A$. Сами доказательства будем записывать способом, предложенным Лукасевичем [1929], однако, в принятых нами обозначениях. Каждый доказанный тезис будет иметь свой номер и предшествующую

строку доказательства, которая состоит из двух частей, разделенных звездочкой *. Слева стоит формула, в которую произведена подстановка и которая является большей посылкой. Справа – указывается меньшая посылка, которая также может быть получена за счет подстановки. Результат применения МР указывается посредством тире. Например, докажем

Утверждение 1. $I, C, K1 \vdash K$. (Смирнов [1972, с.61]).

1. I , 2. C , 3. K_1 .

$3 \ q/p, r/q * 1 - 4,$

4. $q \rightarrow (p \rightarrow p)$.

$2 \ p/q, q/p, r/p * 4 - 5,$

5. $p \rightarrow (q \rightarrow p)$.

2. Комбинаторы

Обозначения I, B, C, W, K и S (о последнем см. ниже) есть не что иное, как названия базисных (исходных) *комбинаторов*, впервые введенных Шейнфинкелем [1924] (см. Шабунин [1979]). Комбинаторы являются простейшими операциями, которые переставляют местами, берут в скобки, сокращают и/или воспроизводят термины, к которым они применены, т.е.

$I \ x = x$

$B \ xyz = x(yz)$

$C \ xyz = xzy$

$W \ xy = xyy$

$K \ xy = x$

$S \ xyz = xz(yz)$

для произвольных терминов x, y, z . Из исходных комбинаторов получают другие комбинаторы, например $B'xyz = x(zy)$ ($=CB$). $K'xy = y$ ($=CK$), $I'xy = yx$ ($=CI$). Следующие исходные множества комбинаторов $\{B, C, W, K\}$, $\{B', W, K\}$ и $\{S, K\}$ являются эквивалентными и для последнего (а значит и для остальных) доказана комбинаторная полнота, т.е. все другие возможные комбинаторы можно построить из исходных (см. Карри, Фейс [1958, р.189]; см. также Ангелер [1987, с.96-97]). Оказалось, что между комбинаторами и импликативными формулами существует однозначное соответствие (см. Карри, Фейс [1958, ch.9E]). Главным результатом этого соответствия является следующий важный факт: полное множество исходных комбинаторов определяет собой импликативный фрагмент интуиционистской пропозициональной логики (там же, р.315). В силу указанного соответствия (оно еще называется изоморфизмом Карри-Ховарда) можно классифицировать комбинаторы посредством импликативных логик, и наоборот (Габбай, Киероз [1991]).

3. Позитивная импликативная логика $H_{\rightarrow}$.

Следуя Комори [1978], импликативная логика IL в общем случае определяется следующим образом:

Определение. Множество L всех правильно построенных формул есть *импликативная логика* IL , если это множество замкнуто относительно правил $R1$ и $R2$.

Импликативная логика IL является *позитивной импликативной логикой* $H_{\rightarrow}$, если IL состоит из аксиом I, B, C, W, K и правил $R1, R2$. В дальнейшем часто импликативные логики будем обозначать посредством названий аксиом, которые они содержат. Например, $H_{\rightarrow}$ есть $IBCWK$.

Построенная Гильбертом [1922] логическая система в качестве импликативных формул содержит именно эти четыре аксиомы (также Гильберт [1948, с.367]). Однако, позже Гильберт в качестве импликативных аксиом берет формулы B', W и K (см. Гильберт, Бернайс [1968/1979, с.96])¹. Этим изменением Гильберт обязан Лукасевичу, который в 1929г. показал, что аксиомы B и C в $BCWK$ могут быть заменены на B' , т.е. $BCWK \equiv B'WK$.

В указанной работе Гильберт и Бернайс обсуждают понятие "позитивной импликативной логики", относительно которой утверждается (без доказательства), что множество всех позитивно тождественных импликативных формул совпадает с множеством следствий из аксиом B', W, K . Более того, утверждается (без доказательства), что аксиомы B', W и K могут быть заменены аксиомами S и K , т.е. утверждается, что $B'WK \equiv SK$.

Появление формул S и K в качестве импликативных аксиом не случайно. Уже первая пропозициональная логика, сформулированная Фреге [1879], в качестве импликативных аксиом содержит формулы S, K и C . Лукасевич заметил, что аксиома C излишняя, т.е. $S, K \vdash C$.

Наконец, Вайсберг [1938] впервые доказал сепарационную теорему (или теорему об отделимости) для интуиционистской пропозициональной логики.² Для гильбертовского исчисления L сепарационная теорема имеет место, если для любой доказуемой формулы в L существует ее доказательство, которое использует только аксиомы для импликации и аксиомы для других логических связей, действительно входящих в эту формулу. Отделимость для импликации $\rightarrow$ Вайсберг доказывает относительно аксиом S и K и также показывает, что $S, K \vdash I, B, C, B', W$. (У Смирнова [1972, с.60–61] имеется доказательство $B', C, W \vdash S$.) Из доказательства Вайсберга

¹ Двойная датировка указывает на то, что ссылка дается на более позднее издание.

² Хорн [1962] дал алгебраическое доказательство этой теоремы. Метод, примененный им, лег в основу доказательств аналогичных теорем для других пропозициональных логик.

следует, что позитивная импликативная логика Гильберта является импликативным фрагментом интуиционистской пропозициональной логики. Этот фрагмент обычно обозначается посредством $H_{\rightarrow}$.

Отметим также, что с середины 60-х годов в Японии появляется целая серия работ по исследованию пропозициональных логик, в том числе импликативных, хотя большинство результатов было значительно ранее получено польскими логиками. Здесь сошлемся на работу Танака [1966a], где специально доказывается, что $BCWK \equiv B'WK \equiv SK$.

Обратим внимание, что ни в одну из этих трех формулировок $H_{\rightarrow}$ в качестве исходной аксиомы не входит аксиома I. Легко показать, что формула I является здесь доказуемой.

Утверждение 2. $C, K \vdash I$.

1. C, 2. K.

1 $r/p * 2 - 3$,

3. $q \rightarrow (p \rightarrow p)$.

3 $q/2 * 2 - 4$,

4. $p \rightarrow p$.

Утверждение 3. $W, K \vdash I$.

1. W, 2. K.

1 $q/p * 2 q/p - 3$,

3. $p \rightarrow p$.

Очевидно, если мы хотим, чтобы аксиома I входила независимым образом в формулировку $H_{\rightarrow}$, мы должны ослабить аксиому K. Подходящим ослаблением является рассмотренная выше формула K_1 , которая есть подстановочный случай формулы K.

Теорема 1. I, B, C, W, K_1 является независимой аксиоматизацией $H_{\rightarrow}$.

Доказательство состоит из двух частей: (i) доказательство независимости аксиом I, B, C, W, K_1 ; (ii) доказательство того, что $IBCWK_1$ есть $H_{\rightarrow}$.

(i) Для доказательства используем логические матрицы, где выделенные значения обозначены звездочкой.

Матрица 1 (Собочинский [1952])

$\rightarrow$	0	1	2		
0	2	2	2		
1	0	0	2		
*2	0	0	2	верифицирует B, C, W, K_1	фальсифицирует $I(p=1)$

Матрица 2 (Андерсон и Белнап [1975,p.85])

$\rightarrow$	0	1	2		
0	2	2	2		
1	2	2	2	верифицирует	фальсифицирует
*2	0	2	2	I, C, W, K_1	$B(p=2, q=1, r=0)$

Матрица 3 (Собочиньский [1952])

$\rightarrow$	0	1	2		
0	2	2	2		
1	0	2	2	верифицирует	фальсифицирует
*2	0	0	2	I, B, W, K_1	$C(p=2, q=1, r=1)$

Матрица 4 (Лукасевич [1920])

$\rightarrow$	0	1	2		
0	2	2	2		
1	1	2	2	верифицирует	фальсифицирует
*2	0	1	2	I, B, C, K_1	$W(p=1, q=0)$

Матрица 5. (Собочиньский [1952])

$\rightarrow$	0	1	2		
0	2	2	2		
*1	0	1	2	верифицирует	фальсифицирует
*2	0	0	2	I, B, C, W	$K_1(p=0, q=0, r=1)$

Интересно заметить, что хотя логика $H_{\rightarrow}$ является бесконечнозначной (см. Томас [1962]), тем не менее независимость ее аксиом доказывается средствами трехзначной логики.

(ii) Надо показать, что $IBCWK_1 \equiv BCWK$. Это следует из Утверждений 1 и 2 и из того, что K_1 есть подстановочный случай аксиомы K . Таким образом, $IBCWK_1$ есть $H_{\rightarrow}$. Отсюда следует, что $IBSK_1 \equiv BSK$.

4. Минимальная импликативная логика IB .

Вопрос о минимальной логике был поставлен Черчем [1951б]. В первом приближении такая минимальная логика имеет сходные правила вывода с MP и теорему дедукции. В качестве примера Черч ссылается на позитивную импликативную логику Гильберта-Бернайса, т.е. на $H_{\rightarrow}$. В дальнейшем, указывает Черч, это исчисление может быть ослаблено с соответствующей заменой теоремы дедукции на ослабленную форму.

Идя по этому пути, Карри [1954] обобщает теорему дедукции для логик IB , IBS и $IBCW$. Таким образом, импликативную логику IB будем считать *минимальной*. Обратим внимание также на работу Бундера [1982], где рассмотрен целый ряд импликативных логик, которые слабее $H_{\rightarrow}$ с соответствующими формулировками теоремы дедукции.

Уркварт в работе [1972, р.168] формулирует "минимальную импликативную логику в смысле Черча", которая отличается от принятой нами тем, что к IB добавляется правило $R3$:

$$A$$

$$(A \rightarrow B) \rightarrow B$$

Характерной чертой этой логики, замечает Уркварт, является отсутствие структурных правил при ее секвенциальной формулировке³. Интересно, что в этом же году импликативная логика с аксиомами I и B была рассмотрена также Смирновым [1972, с.72-74], при этом доказана теорема дедукции, которая имеет место при наличии следующей теоремы: "если существует доказательство формулы D , то существует доказательство формулы $(A \rightarrow (D \rightarrow B)) \rightarrow (A \rightarrow B)$ ".

Дошен [1988, р.376] доказал, что правило $R3$ при наличии I и B может быть заменено на правило $R3'$:

$$D, A \rightarrow (D \rightarrow B)$$

$$A \rightarrow B$$

(правило Аккермана).

Наконец, отметим, что при наличии аксиомы C , правило $R3$ ($R3'$) является излишним.

5. Булева решетка и булева конструкция подлогик $H_{\rightarrow}$

Рассмотрим семейство всех подмножеств, образованного из множества $\{I, B, C, W, K_1\}$. Поскольку $\{I, B, C, W, K_1\}$ является независимой аксиоматизацией $H_{\rightarrow}$ (Теорема 1), мы имеем $32 (= 2^5)$ им-

³ Данная логика под названием $M_{\rightarrow}$ рассмотрена также Андерсоном, Белнапом и Данном [1992, р.149].

пликативные логики, которые являются подлогиками $H_{\rightarrow}$. Как хорошо известно, семейство всех подмножеств конечного множества образует конечную булеву решетку, упорядоченную отношением включения. В нашем случае нулем 0 решетки является импликативная логика IL (см. Определение IL), а единицей 1 является логика $H_{\rightarrow}$. Таким образом, взаимоотношения между 32 подлогиками $IBCWK_1$ можно представить в виде 32-элементной булевой решетки, упорядоченной отношением включения *подмножеств аксиом*.

Для простоты в качестве 0 решетки возьмем логику IB . В результате имеем следующую 8-элементную булеву решетку:

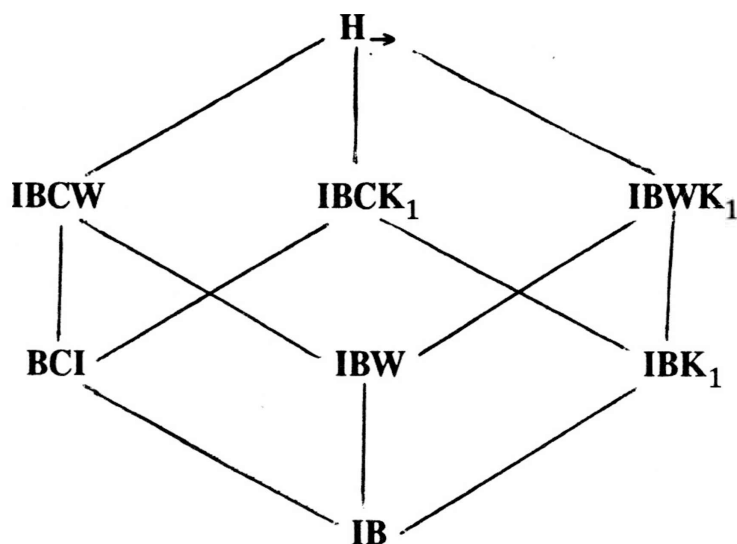


Рис.1

Сразу обратим внимание, что на данной диаграмме изображена именно булева решетка подмножеств аксиом относительно включения, но в общем случае не решетка импликативных логик относительно выводимости из аксиом. Например, логика BCI не является пересечением множеств теорем, выводимых в $IBCW$ и $IBCK_1$, поскольку $I, K_1 \vdash W^*$:

1. I , 2. K_1 .

2 $q/p, r/p \rightarrow (p \rightarrow p) * 1 - 3$,

3. $(p \rightarrow (p \rightarrow p)) \rightarrow (p \rightarrow p) (=W^*)$.

Но W^* является подстановочным случаем аксиомы W из $IBCW$. Однако $BCI \not\vdash W^*$. Последнее следует из свойств матрицы 6:

$\rightarrow$	0 1		
0	1 0	верифицирует I, B, C	фальсифицирует $W^* (p=1)$
*1	0 1		

Заметим, что, по-видимому, первая попытка (и не совсем удачная) решеточно упорядочить импликативные логики принадлежит Мору [1964,р.160].

Такие решетки, которые являются решетками относительно включения подмножеств аксиом, но не относительно выводимости из аксиом, назовем *конструкциями*. Конструкция логики называется *булевой конструкцией*, если все ее элементы аксиоматизированы независимым образом. В Карпенко [1992a] приведены конструкции импликативных логики, которые не являются даже модулярными. В дальнейшем будем рассматривать только булевы конструкции, поэтому слово "булева" будем опускать.

Ввиду проведенного нами различия между решетками и конструкциями, более естественно было бы изображать конструкции в виде куба с ориентированными ребрами, где ребро $\rightarrow$ представляет отношение включения. Тогда $H_{\rightarrow}$ -конструкция выглядит так:

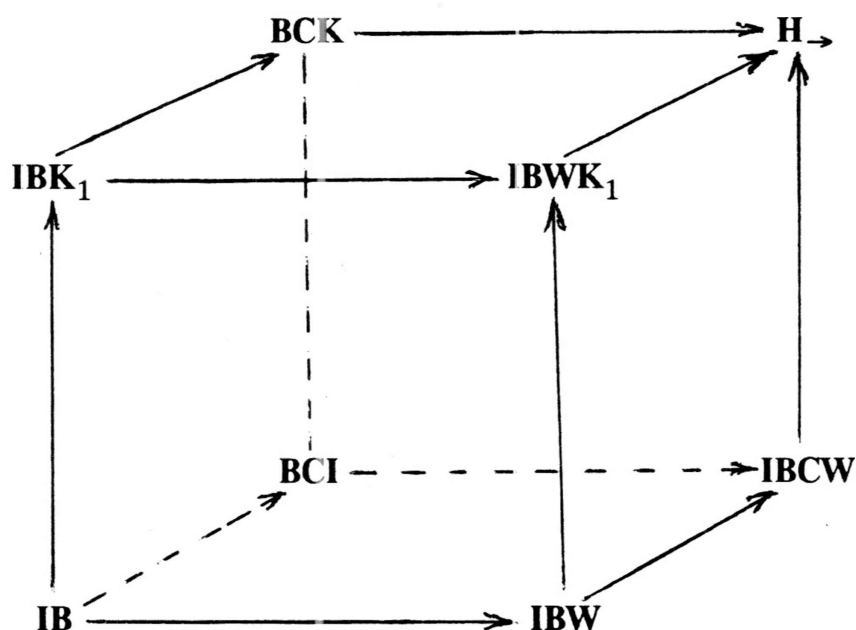


Рис.2

6. Элементы $H_{\rightarrow}$ -конструкции

Дадим некоторые пояснения к импликативным логикам известным в литературе.

Прайор [1962,р.316] указывает, что системы ИВС (под названием ВСИ) и ВСК были введены К.А.Мередилом в 1956г. Мередилом независимо от других логики также обратил внимание на соответствие между импликативными формулами и комбинаторами. Отсюда название ВСИ (как у Карри [1954]) и ВСК.

Результат Мередита относительно BCI состоит в следующем:

$$BCI \equiv IB'I' \equiv IB'I',$$

где I' , напомним, есть $p \rightarrow ((p \rightarrow q) \rightarrow q)$. Доказательство эквивалентности этих трех систем (см. Мередит, Прайор [1963, p.178]) имеет место в силу следующих Утверждений: (4) $I, C \vdash I'$, (5) $B, C \vdash B'$, (6) $B', C \vdash B$, (7) $B', I' \vdash C$ и (8) $B, I' \vdash C$, которые в по следующем будут нами использованы.

Утверждение 4. $I, C \vdash I'$.

1. I , 2. C .

$$2 p/p \rightarrow q, q/p, r/q * 1 p/p \rightarrow q - 3,$$

$$3. p \rightarrow ((p \rightarrow q) \rightarrow q).$$

Утверждение 5. $B, C \vdash B'$.

1. B , 2. C .

$$2 p/q \rightarrow r, q/p \rightarrow q, r/p \rightarrow r * 1 - 3,$$

$$3. (p \rightarrow q) \rightarrow ((q \rightarrow r) \rightarrow (p \rightarrow r)).$$

Утверждение 6. $B', C \vdash B$.

1. B' , 2. C .

$$2 p/p \rightarrow q, q/q \rightarrow r, r/p \rightarrow r * 1 - 3,$$

$$3. (q \rightarrow r) \rightarrow ((p \rightarrow q) \rightarrow (p \rightarrow r)).$$

Утверждение 7. $B', I' \vdash C$.

1. B' , 2. I' .

$$1 p/q, q/(q \rightarrow r) \rightarrow r, r/p \rightarrow r * 2 p/q, q/r - 3,$$

$$3. ((q \rightarrow r) \rightarrow r) \rightarrow (p \rightarrow r) \rightarrow (q \rightarrow (p \rightarrow r)).$$

$$1 p/p \rightarrow (q \rightarrow r), q/((q \rightarrow r) \rightarrow r) \rightarrow (p \rightarrow r), r/q \rightarrow (p \rightarrow r) *$$

$$1 q/q \rightarrow r - 3 - 4,$$

$$4. (p \rightarrow (q \rightarrow r)) \rightarrow (q \rightarrow (p \rightarrow r)).$$

Утверждение 8. $B, I' \vdash C$.

1. B , 2. I' .

$$1 q/(q \rightarrow r) \rightarrow r, r/(p \rightarrow (q \rightarrow r)) \rightarrow (p \rightarrow r), p/q *$$

$$1 q/q \rightarrow r - 2 p/q, q/r - 3,$$

$$3. q \rightarrow ((p \rightarrow (q \rightarrow r)) \rightarrow (p \rightarrow r)).$$

- $$3 \quad q/3, p/p \rightarrow (q \rightarrow r), r/q \rightarrow (p \rightarrow r) *$$
- $$3' \quad 3 \quad q/p \rightarrow (q \rightarrow r), p/q, r/p \rightarrow r - 4,$$
- $$4. (p \rightarrow (q \rightarrow r)) \rightarrow (q \rightarrow (p \rightarrow r)).$$

Из Утверждений 5, 6, 7 и 8 следует, что два вида транзитивности: **B** (prefixing) и **B'** (suffixing) взаимозаменяемы (логически эквивалентны) при наличии **C** или **I'**. Доказательство этих Утверждений можно найти также в книге Андерсона и Белнапа [1975, р.78-80], где отмечается, что, к их удивлению, имеет место $B, I' \vdash C$, а следовательно, в силу Утверждения 5: $B, I' \vdash B'$. При этом они ссылаются на доказательство Собочиньского [1952]. Однако, заметим, что доказательство важных Утверждений 7 и 8 было уже проведено Вайсбергом [1937], а Утверждения 7 еще ранее Лукасевичем [1929].

Источником удивления послужила статья Чидгея [1973], где указывается на принципиальное различие между **B** и **B'**. Это различие уже следует из свойств комбинаторов **B** и **B'**. В первом случае мы имеем просто ассоциативность терминов, во втором случае, кроме этого, еще и коммутативность. Поэтому можно говорить, что формула **B'** "сильнее", чем **B**. Это хорошо видно из того, что, как уже отмечалось, $B'WK$ есть $HL_{\rightarrow}$, то есть $B', W, K \vdash C$, в то время как $B, W, K \not\vdash C$.

Чтобы закончить с системой **BCI**, обратим внимание на то, что в последнее время получила развитие так называемая *линейная логика*, введенная Жираром [1987] и нашедшая применение в компьютерных науках. Ее взаимоотношения с другими логиками, и в особенности с релевантными, исследованы Авроном [1988]. В этой работе $HL_{\rightarrow}$ обозначает импликативный фрагмент данной линейной логики, который в точности совпадает с аксиомами **I, B** и **C** (здесь также указывается на комбинаторное происхождение этих аксиом). Аврон следующим образом определяет $HL_{\rightarrow}$: "Минимальная система, соответствующая линейному доказательству", которое, в свою очередь, определяется так: "Линейное доказательство есть классическое доказательство, в котором каждое вхождение формулы, отличной от последней, используется в точности один раз в качестве посылок **MP**".

Яськовский [1963] доказал разрешимость **BCI**- и **BCK**-логик, а Оно [1990, р.101-102] исследовал связь **BCI**- и **BCK**-логик с λ -исчислением, которое, как известно, является частью комбинаторной логики. Заметим также, что с появлением **BCI**- и **BCK**-логик были сформулированы и получили исключительное развитие **BCI**- и **BCK**-алгебры (см. обзор Хоо [1988]).

Обратим также внимание на то, что система **BCK** служит импликативным базисом при построении классической и интуиционистской логик без сокращения, т.е. без аксиомы **W**. Уже Хао Ван [1963, р.228] отметил, что классическая логика предикатов без со-

кращения разрешима. Независимо от него этот результат получил Гришин [1974]. Специально логическим системам без сокращения посвящена работа Оно и Комори [1985]. Здесь же сформулирована полная (full) пропозициональная ВСК в гильбертовском виде и доказана сепарационная теорема (р.176). О логиках без сокращения см. также книгу Смирнова [1972].

Наконец, перейдем к логике $IBCW$, которая хорошо изучена и и есть не что иное, как импликативный фрагмент релевантной логики R (см. Андерсон и Белнап [1975]) и поэтому обозначается посредством $R_{\rightarrow}$. Именно эта формулировка была предложена Черчем [1951] и названа им "слабым позитивным импликативным исчислением". Черч получил ее из гильбертовской логики $H_{\rightarrow}$ ($=BCWK$) посредством замены аксиомы K на аксиому I , и доказал теорему дедукции в ослабленной форме.

Годом ранее формулировка $R_{\rightarrow}$ в виде $IB'WI'$ была предложена Мо Шо Квеем [1950]. В силу Утверждений 4,5,7 и 6 обе формулировки эквивалентны. К этому добавим, что Мендес [1987] предложил 108 различных независимых аксиоматизаций логики $R_{\rightarrow}$. Крипке [1959] доказал разрешимость $R_{\rightarrow}$ а также $E_{\rightarrow}$ (о последней смотри ниже).

7. Классическая импликативная логика $TV_{\rightarrow}$

Гильберт и Бернайс [1968/1979, с.101] в примечании отмечают, что систему исходных формул, достаточную для вывода *всех* тождественно истинных импликативных формул, впервые указал М.Шейнфинкель. В 1926 г. (см. Прайор [1962, р.302]) Тарский доказал, что импликативный фрагмент классической пропозициональной логики, который, следуя Андерсону и Белнапу [1975, р.4] будем обозначать посредством $TV_{\rightarrow}$ (от слова "truth-value"), можно аксиоматизировать формулами B', K и T , где T есть $((p \rightarrow q) \rightarrow r) \rightarrow ((p \rightarrow r) \rightarrow r)$. Но это доказательство никогда не было опубликовано. В 1928 г. Бернайс заменил аксиому T на более простую: $((p \rightarrow q) \rightarrow p) \rightarrow p$, которая называется "законом Пирса" и которую будем обозначать посредством P . Впоследствии теорема, утверждающая, что формулы B', K, P аксиоматизируют $TV_{\rightarrow}$, получила название "теоремы Тарского-Бернайса". Лукасевич и Тарский [1930] сформулировали эту теорему под номером 29, но без доказательства.

С исторической точки зрения представляет интерес работа Пирса [1885], где сформулировано пропозициональное исчисление с импликативными аксиомами I, B, C, P . Прайор [1962, р.318] доказал, что $I, B', C, P \vdash K$. Более того, им же показано (см. Прайор [1958]), что $B', C, P \vdash I$. Таким образом, $IB'CP \equiv B'CP \equiv B'KP$.

В связи с этим стоит особо отметить две работы Вайсберга [1937], [1939], где весьма тщательно исследуется система $B'KP$. Вайсберг указал ряд интересных формул, которые эквивалентно

могут заменить аксиому **K**. Обратим внимание на теорему 1 [1937]: $\mathbf{B', I', P} \vdash \mathbf{K^4}$. В силу Утверждения 4, которое было уже доказано Вайсбергом [1939, теорема 25], следует, что $\mathbf{I, B', C, P} \vdash \mathbf{K}$, что намного опережает вышеупомянутый результат Прайора. Доказательство Вайсберга существенно отличается от доказательств Прайора и Танаки и окажется весьма полезным в дальнейших наших исследованиях, поэтому используем его при доказательстве следующего Утверждения:

УТВЕРЖДЕНИЕ 9. $\mathbf{I, B, C, P} \vdash \mathbf{K}$.

1. **I**, 2. **B**, 3. **C**, 4. **P**.

5. $\mathbf{I, C} \vdash \mathbf{I'}$ (Утверждение 4).

6. $\mathbf{B, C} \vdash \mathbf{B'}$ (Утверждение 5).

6 $p/p \rightarrow q, q/(q \rightarrow r) \rightarrow (p \rightarrow r), r/s * 6 - 7,$

7. $((q \rightarrow r) \rightarrow (p \rightarrow r)) \rightarrow s \rightarrow ((p \rightarrow q) \rightarrow s).$

7 $q/q \rightarrow r, r/s \rightarrow r, s/(s \rightarrow q) \rightarrow (p \rightarrow (s \rightarrow r)) *$

7 $p/s, s/p \rightarrow (s \rightarrow r) - 8,$

8. $(p \rightarrow (q \rightarrow r)) \rightarrow ((s \rightarrow q) \rightarrow (p \rightarrow (s \rightarrow r))).$

7 $s/((p \rightarrow r) \rightarrow s) \rightarrow ((q \rightarrow r) \rightarrow s) *$

6 $p/q \rightarrow r, q/p \rightarrow r, r/s - 9,$

9. $(p \rightarrow q) \rightarrow (((p \rightarrow r) \rightarrow s) \rightarrow ((q \rightarrow r) \rightarrow s)).$

9 $p/p \rightarrow q, r/p, s/p * 10,$

10. $((p \rightarrow q) \rightarrow q) \rightarrow (\mathbf{P} \rightarrow ((q \rightarrow p) \rightarrow p)).$

3 $p/(p \rightarrow q) \rightarrow q, q/\mathbf{P}, r/(q \rightarrow p) \rightarrow p * 10 - \mathbf{P} - 11,$

11. $((p \rightarrow q) \rightarrow q) \rightarrow ((q \rightarrow p) \rightarrow p) (= \mathbf{D}).$

6 $q/(p \rightarrow q) \rightarrow q, r/(q \rightarrow p) \rightarrow p * 5 - 11 - 12,$

12. $p \rightarrow ((q \rightarrow p) \rightarrow p).$

8 $q/(q \rightarrow p) \rightarrow p, r/p, s/q *$

12 $q/q \rightarrow p - 5 p/q, q/p - 13,$

13. $p \rightarrow (q \rightarrow p) (= \mathbf{K}).$

Лукасевич в 1948 г. на 6-ом съезде польских математиков изящно обобщил результаты Вайсберга, доказав, что $\mathbf{B', K}$ и любая аксиома вида $p \rightarrow (\alpha \rightarrow \beta)$ аксиоматизирует $\mathbf{TV}_{\rightarrow}$ (см. Лукасевич [1950]). При этом подстановка вместо α и β должна быть такая, чтобы вся формула являлась классически общезначимой. Напри-

⁴ Через 30 лет эта теорема была передоказана Танака [1967] в специально для этого написанной статье.

мер, α/p и β/p . Тогда получаем формулу $p \rightarrow (p \rightarrow p)$. Это как раз и есть последний случай, рассмотренный Вайсбергом, т.е. из B', P и $p \rightarrow (p \rightarrow p)$ доказуема формула K .

Особо отметим, что в работе Вайсберга [1937] дается общий метод доказательства полноты для $TV_{\rightarrow}$. Это доказательство рассмотрено Прайором [1955, ch.3]. Интересно, что Черч [1956] в качестве упражнения под номером 18.3 формулирует теорему полноты для $B'KP$ и дает указания для ее доказательства методом Кальмара.

Наконец, Кангером [1955] была доказана сепарационная теорема для классической пропозициональной логики. В качестве отдельного импликативного фрагмента им выделены формулы S, K и P , т.е. $TV_{\rightarrow}$ получается за счет добавления закона Пирса к $H_{\rightarrow}$. Карри отмечает [1963/1969, с.356], что Бернайс, видимо, первым осознал, что присоединение формулы P к $H_{\rightarrow}$ дает $TV_{\rightarrow}$.

Такой способ построения $TV_{\rightarrow}$ из $H_{\rightarrow}$ стал общепринятым. Однако данный способ, и это весьма существенно, является совершенно неприемлемым, если мы хотим расширить $H_{\rightarrow}$ -конструкцию до $TV_{\rightarrow}$ -конструкции.

8. Проблема расширения $H_{\rightarrow}$ до $TV_{\rightarrow}$

Важные результаты получены при исследовании суперинтуиционистских импликативных логик (SIL). Это такие логики, которые являются расширениями $H_{\rightarrow}$ и содержатся в $TV_{\rightarrow}$. Три результата заслуживают особого упоминания. Мак-Кэй [1968] доказал разрешимость каждой конечно аксиоматизируемой SIL . Раутенберг [1979] показал, что семейство всех SIL образует дистрибутивную решетку относительно включения. Ясно, что здесь нулем является $H_{\rightarrow}$ и единицей $TV_{\rightarrow}$. И, наконец, Кирк [1981] обеспечил расширенной (extended) крипковской семантикой каждую SIL ⁵.

Нас же в первую очередь интересует проблема аксиоматизации самой $TV_{\rightarrow}$ в весьма определенном смысле: *существует ли независимая аксиоматизация $TV_{\rightarrow}$ формулами I, B, C, W, K_1 и X ?* (эта проблема поставлена автором в [1992б], [1992в]). Таким образом, формула X должна быть достаточно слабой, чтобы все элементы множества $\{I, B, C, W, K_1, X\}$ были независимыми, но достаточно сильной, чтобы $H_{\rightarrow} + X = TV_{\rightarrow}$.

Очевидно, что закон Пирса P не может быть представителем формулы X , поскольку, как уже говорилось, добавление P к BCI дает логику $TV_{\rightarrow}$. Следовательно, $BCI + P \equiv R_{\rightarrow} + P \equiv BCK + P \equiv TV_{\rightarrow}$. Недавно на то, что $R_{\rightarrow} + P$ дает $TV_{\rightarrow}$, обратил внимание Мейер [1990]. Заметим также, что Попов [1993] для доказательства

⁵ Для $R_{\rightarrow}$ и некоторых ее подлогик Урквартом [1972] была разработана семантика на полурешетках с 0. Его более обстоятельную работу см. в Андерсон, Белнап и Данн [1992], где представлена семантика для $R_{\rightarrow}$, $E_{\rightarrow}$, $T_{\rightarrow}$, BCI , $M_{\rightarrow}$, $H_{\rightarrow}$, $RMO_{\rightarrow}$, $S4_{\rightarrow}$ и IBB' . Крипковская семантика для некоторых импликативных логик, включая $H_{\rightarrow}$, представлена Дошеном [1989].

$BCI+P \equiv R_{\rightarrow}+P \equiv TV_{\rightarrow}$ использовал секвенциальные формулировки BCI и $R_{\rightarrow}$.

Таким образом, проблема состоит в том, чтобы найти формулу слабее P и рассмотреть ее в качестве кандидата на место X .

9. Импликативные фрагменты бесконечнозначной логики Лукасевича и линейной логики Дамметта

Рассмотрим формулу D :

$$((p \rightarrow q) \rightarrow q) \rightarrow ((q \rightarrow p) \rightarrow p),$$

которая (впервые) появляется в работе Лукасевича [1929/1963, р.48], где доказывается, что $B',C,P \vdash D$ (см. также Утверждение 9, пункты 7,9,10 и 11). Эта формула является одной из аксиом бесконечнозначной логики Лукасевича L_{ω} [1930/1970, р.144].

Формула D слабее закона Пирса, поскольку не только $BCID$, но и $BCKD$ не определяют собой $TV_{\rightarrow}$. Последнее следует из свойств матрицы 4, которая кроме I,B,C,K верифицирует также и D , но фальсифицирует W . Отметим также, что логика $BCKD$ получила название коммутативной ВСК-логики (см. Дырда [1985]).

Из Утверждения 9 следует, что $I,B,C,D \vdash K$ (см. пункты 5,6,7,8,12 и 13), т.е. $IBCD \equiv BCKD$. Докажем

УТВЕРЖДЕНИЕ 10. $B,K,D \vdash C$.

1. B , 2. K , 3. D .

$$1 \ q/(q \rightarrow p) \rightarrow p, \ r/(p \rightarrow q) \rightarrow q *$$

$$3 \ p/q, \ q/p - 2 \ q/q \rightarrow p - 4,$$

$$4. \ p \rightarrow ((p \rightarrow q) \rightarrow q) (=I').$$

Далее, в силу Утверждения 8, получаем $B,I' \vdash C$. Аналогично, но с использованием Утверждения 7, доказываем $B',K,D \vdash C$. Таким образом, имея в виду также Утверждение 2,

$$BCID \equiv BCKD \equiv B'KD \equiv BKD.$$

Логика BKD примечательна тем, что вместе с законом линейности L :

$$((p \rightarrow q) \rightarrow (q \rightarrow p)) \rightarrow (q \rightarrow p)$$

образует импликативный фрагмент L_{ω} (см. Мейер [1966]). Однако впервые этот результат был получен Роузом [1956], где вместо формулы L значится формула

$$((p \rightarrow q) \rightarrow r) \rightarrow (((q \rightarrow p) \rightarrow r) \rightarrow r),$$

которую обозначим посредством L' .

В заключение обратим внимание на одно весьма важное свойство связки импликации в логике **B'KD**. Оказывается, посредством ее определяется новая логическая связка, которая называется дизъюнкцией $\vee$:

$$p \vee q = (p \rightarrow q) \rightarrow q.$$

Именно таким образом вводится дизъюнкция в L_ω (см. Лукасевич [1929]). Алгебраическое доказательство этого факта, т.е., что коммутативная **BCK**-алгебра образует верхнюю полурешетку, дано Торренсом [1988]. Здесь рассмотрены также импликативные алгебры, соответствующие логикам $H_\rightarrow$ и $TV_\rightarrow$.

Введение дизъюнкции в логике **BCKD** позволяет переписать формулу **L** в виде

$$(p \rightarrow q) \vee (q \rightarrow p).$$

Добавление последней к интуиционистской пропозициональной логике **H** дает линейную логику **LC** (см. Дамметт [1959]). Естественно возникает вопрос об импликативном фрагменте логики **LC**. Ответ на этот вопрос был дан Булом [1962]: $LC_\rightarrow$ аксиоматизируется посредством **S**, **K** и **L'**. Здесь обратим внимание на следующий факт: хотя формула **L'** расширяет логику $H_\rightarrow$ до $LC_\rightarrow$ и $LC_\rightarrow \neq TV_\rightarrow$, но **L'** тем не менее является слишком сильной, поскольку множество формул $\{I, B, C, W, K_1, L'\}$ уже не является независимым:

УТВЕРЖДЕНИЕ 11. $B, W, L' \vdash I$.

1. **B**, 2. **W**, 3. **L'**.

$$2 \ p/p \rightarrow p, q/p \rightarrow p * 1 \ q/p, r/p - 4,$$

4. $(p \rightarrow p) \rightarrow (p \rightarrow p)$.

$$q/p, r/p \rightarrow p * 4 - 4 - 5,$$

5. $p \rightarrow p (=I)$.

Это говорит о том, что нахождение подходящей формулы **X** является весьма нетривиальным делом.

Однако вернемся к формуле **D**. Из предыдущего рассмотрения следует, что эта формула не может быть представителем формулы **X**, поскольку $BCID \equiv BCKD$. Более того, имеем следующее

УТВЕРЖДЕНИЕ 12. $W, D \vdash P$.

1. **W**, 2. **D**.

$$2 \ q/p \rightarrow q * 1 - 3,$$

3. $((p \rightarrow q) \rightarrow p) \rightarrow p (=P)$.

Отсюда следует, что $R_\rightarrow + D = TV_\rightarrow$ (поскольку $R_\rightarrow + P = TV_\rightarrow$).

Таким образом, формула **D** в качестве кандидата на место **X** не пригодна.

**10.Решение проблемы:
формула $(p \rightarrow ((q \rightarrow q) \rightarrow p)) \rightarrow D$**

Поскольку формула **D** является слишком сильной, то ее каким-то образом нужно ослабить. Это можно сделать разными способами: посредством подстановки в **D** и/или добавлением некоторой формулы в качестве антецедента к **D**. Мы нашли решение проблемы, используя последний способ.

Однако предварительно переформулируем аксиоматизацию $H_{\rightarrow}$, а именно вместо аксиомы K_1 возьмем аксиому K'_1 :

$$r \rightarrow ((p \rightarrow q) \rightarrow (p \rightarrow q)),$$

которая получается из K_1 посредством перестановки. Заметим, что Теорема 1 в точности (с теми же самыми матрицами сохраняет силу для логики $IBCWK'_1$, т.е. для $H_{\rightarrow}$.

ТЕОРЕМА 2. I, B, C, W, K'_1, X есть независимая аксиоматизация $TV_{\rightarrow}$, где X есть

$$(p \rightarrow ((q \rightarrow q) \rightarrow p)) \rightarrow (((p \rightarrow q) \rightarrow q) \rightarrow ((q \rightarrow p) \rightarrow p)).$$

Доказательство как и в Теореме 1 распадается на две части.

(i) Независимость аксиом I, W и K'_1 доказывают соответственно матрицы 1, 4 и 5.

Матрица 7. (Андерсон и Белнап [1975, p.85])

$\rightarrow$	0	1	2	3	
0	3	3	3	3	
1	0	2	0	3	
*2	0	0	3	3	верифицирует
*3	0	0	0	3	I, B, W, K'_1, X фальсифицирует $C (p=2, q=1, r=1)$

Матрица 8. (трехзначный случай логики Геделя [1932])

$\rightarrow$	0	1	2	
0	2	2	2	
1	0	2	2	верифицирует
*2	0	1	2	I, B, C, W, K'_1 фальсифицирует $X (p=2, q=1, r=0)$

Трудности возникают с доказательством независимости аксиомы **B**. Здесь мы воспользуемся следующим результатом Яськовского [1948] (см. рецензию этой работы Черчем [1948]). В любой системе пропозиционального исчисления, имеющего подстановку и МР как единственные правила вывода, а в качестве теорем только двузначные тавтологии, где B' является теоремой, аксиомы дол-

жны включать или одну аксиому, имеющую по крайней мере 11 букв, или две аксиомы, каждая из которых имеет 9 букв. Здесь "буквой" является или переменная, или стрелка, или истинностно-функциональная связка; и не исключаются константы t и f как унарные связки.

Мы видим, что в нашей аксиоматизации $TV_{\rightarrow}$ имеются две аксиомы, содержащие по 11 букв: B и C . Однако, в силу Утверждений 4 и 8, следует, что $IBC \equiv IB I'$. Поэтому, заменив в нашей аксиоматизации C на I' , получим только одну аксиому, содержащую 11 букв, т.е. B , которая в силу результата Яськовского является независимой. Но опять же в силу указанной эквивалентности мы можем вернуться к исходной аксиоматизации.

(ii) УТВЕРЖДЕНИЕ 13. $I, C, K'_1, W, X \vdash P$

1. I , 2. C , 3. K'_1 , 4. W , 5. X .

2 $p/r, q/p \rightarrow q, r/p \rightarrow q$ - 3 - 6,

6. $(p \rightarrow q) \rightarrow (r \rightarrow (p \rightarrow q))$ ($=K_1$).

7. $p \rightarrow (q \rightarrow p)$ (Утверждение 1).

5 $q/p \rightarrow q$ * 7 $q/(p \rightarrow q) \rightarrow (p \rightarrow q)$ - 4 - 8,

8. $((p \rightarrow q) \rightarrow p) \rightarrow p$ ($=P$).

Итак, мы имеем B' (утверждение 5), K (пункт 7 в Утверждении 13) и P . Таким образом, Теорема 2 доказана.

В результате мы получили $TV_{\rightarrow}$ -конструкцию в виде 6-мерного куба. Рассмотрим, например, следующую проекцию в 3-мерный куб.

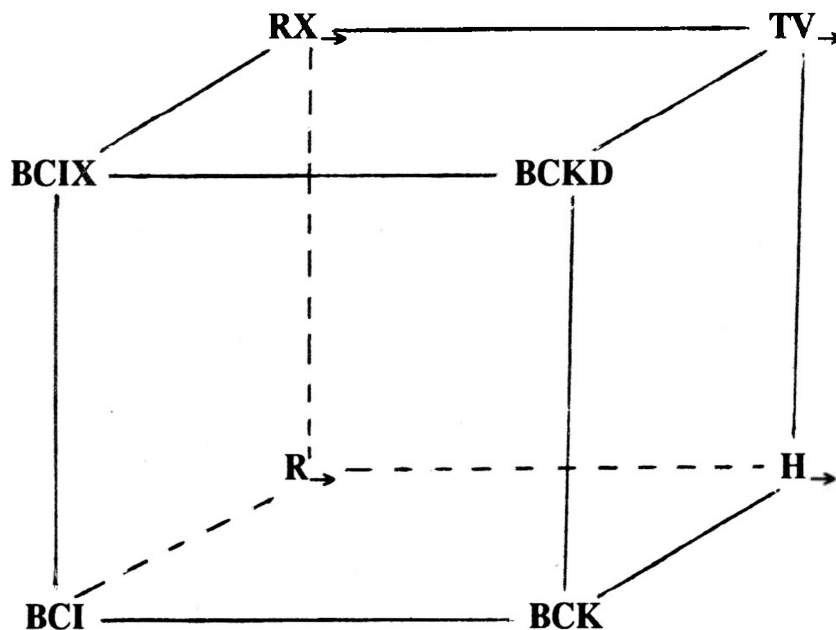


Рис.3

Кроме логик $BCIX$ и $RX_{\rightarrow}$ остальные нами уже рассмотрены и хорошо известны в литературе. Особый интерес, по-видимому, представляет логика $RX_{\rightarrow}$. Как видно из рис.3, логика $RX_{\rightarrow}$ лежит между $R_{\rightarrow}$ и $TV_{\rightarrow}$, т.е. X является неинтуиционистской формулой, иначе логика $RX_{\rightarrow}$ была бы $TV_{\rightarrow}$, а это невозможно. В литературе известна подобная логика, которая называется $RM_{\rightarrow}$ и есть импликативный фрагмент логики RM . Последняя получается за счет добавления к полной (full) R аксиомы M : $p \rightarrow (p \rightarrow p)$. Тогда $R_{\rightarrow} + M$ обозначается посредством $RM_{\rightarrow}$ (см. Андерсон и Белнап [1975, р.98]). Мейер и Паркс [1972] предложили следующую независимую аксиоматизацию $RM_{\rightarrow}$: I', B', W и U , где U есть

$$((((p \rightarrow q) \rightarrow q) \rightarrow p) \rightarrow r) \rightarrow (((((q \rightarrow p) \rightarrow p) \rightarrow q) \rightarrow r) \rightarrow r).$$

Было бы интересно сравнить логики $RX_{\rightarrow}$ и $RM_{\rightarrow}$.

В заключение этого раздела отметим, что данная формула X не является *единственной*. Первоначально (в ноябре 1992 г.) нами была найдена формула, состоящая из 22 переменных, которая является подстановочным случаем формулы $K \rightarrow D$: $p/r \rightarrow q$, $q/(p \rightarrow q) \rightarrow r$. Обозначим эту формулу X_1 , а рассмотренную выше - X_2 . Очевидно (хотя это требует доказательства), мы имеем разные $TV_{\rightarrow}$ -конструкции. По крайней мере, $BCIX_1 \neq BCIX_2$. Тогда возникает вопрос о классе формул X_i , что делает изучение $TV_{\rightarrow}$ -конструкций более интересным и продуктивным.

11. Строгая импликация: импликативные фрагменты некоторых модальных логик

Интерес к импликативным фрагментам модальных логик Льюиса вызван тем, что системы Льюиса были введены для изучения строгой импликации, но в обычных формулировках строгая импликация так тесно переплетена с другими связками, что ее не легко от них отделить.

Впервые проблема аксиоматизации импликативных фрагментов модальных льюисовских систем была поставлена Д.Мередилом в 1956 г. Этой проблемой совместно занялись Леммон, Д.Мереди, К.Мереди, Прайор и Томас. Как отмечают К.Мереди и Прайор [1964, р.203], вначале не было известно, имеют ли различные льюисовские системы различные импликативные фрагменты, и когда стало ясно, что это так, тогда усилия были сконцентрированы на $S5$. Вскоре [1957] получил широкое распространение обширный машинописный текст указанных пяти логиков.

Первое предположение было сделано Леммоном, а именно $S5_{\rightarrow}$ аксиоматизируется посредством I, B', K_1, P_1 , где P_1 есть

$$(((p \rightarrow q) \rightarrow r) \rightarrow (p \rightarrow q)) \rightarrow (p \rightarrow q).$$

Это предположение было доказано К.Мередилом в 1956 г. Специально вопросу аксиоматизации импликативных фрагментов лью-

исовских модальных логик посвящена работа Хэкинга [1963] (см. также Г. Минц [1974, §12]).

Возникает естественный вопрос, что собой представляет $S5_{\rightarrow}$ -конструкция? Или, по-другому, где в $TV_{\rightarrow}$ -конструкции находится, например, логика $S5_{\rightarrow}$? Ответ на этот и другие вопросы дает

Теорема 3. I, B, C_1, W, K'_1, X есть независимая аксиоматизация импликативного фрагмента модальной логики $S5$, где C_1 есть подстановочный случай аксиомы C , а именно

$$(p \rightarrow ((q \rightarrow r) \rightarrow s)) \rightarrow ((q \rightarrow r) \rightarrow (p \rightarrow s)).$$

(i) Независимость аксиом I, B, C_1, W, K'_1 и X доказывают те же самые матрицы, что и в Теореме 2 (!).

(ii) Надо показать, что I, B, C_1, W, K'_1, X есть $S5_{\rightarrow}$. Сначала покажем, что I, B, C_1, W, K'_1 есть $S4_{\rightarrow}$, т.е. импликативный фрагмент модальной логики $S4$. Мендес [1988] предложил 72 независимых аксиоматизаций $S4_{\rightarrow}$, среди которых имеется I, B, C_1, W, K_1 . Легко видеть, что $I, B, C_1, W, K'_1 \equiv I, B, C_1, W, K_1$, поскольку $C_1, K'_1 \vdash K_1$ и $I, K_1 \vdash K'_1$. Далее, Ульрич [1990] предложил характеристическую матрицу для $S5_{\rightarrow}$, из которой следует, что X есть теорема $S5_{\rightarrow}$. Так как $S5_{\rightarrow}$ есть $S4_{\rightarrow} + P_1$, то осталось только показать, что в нашей формулировке $S5_{\rightarrow}$ доказуема формула P_1 :

УТВЕРЖДЕНИЕ 14. $C_1, K'_1, W, X \vdash P_1$.

1. C_1 , 2. K'_1 , 3. W , 4. X .

$$1 \ p/p, q/p, r/q, s/p \rightarrow q \text{ * } 2 - 5,$$

$$5. (p \rightarrow q) \rightarrow (r \rightarrow (p \rightarrow q)) (=K_1).$$

$$4 \ p/p \rightarrow q, q/(p \rightarrow q) \rightarrow r \text{ * } 5 \ r/((p \rightarrow q) \rightarrow r) \rightarrow ((p \rightarrow q) \rightarrow r) -$$

$$3 \ p/p \rightarrow q, q/(p \rightarrow q) \rightarrow r - 6,$$

$$6. (((p \rightarrow q) \rightarrow r) \rightarrow (p \rightarrow q)) \rightarrow (p \rightarrow q) (=P_1).$$

Таким образом, Теорема 3 доказана.

Обратим внимание на логику I, B, C_1, W , которую обозначим посредством $E_{\rightarrow}$. Первая формулировка $E_{\rightarrow}$ (чистая теория следования) принадлежит Аккерману [1956] под названием "strenghe Implikation". Эта формулировка была упрощена Белнапом [1959] и состоит из аксиом B', W и $((p \rightarrow p) \rightarrow q) \rightarrow q$. $E_{\rightarrow}$ является импликативным фрагментом логики следования E (см. Андерсон и Белнап [1975]). Мендес [1987] предложил 90 независимых аксиоматизаций логики $E_{\rightarrow}$, среди которых имеются обе указанные.

В итоге $TV_{\rightarrow}$ -конструкция превращается в $S5_{\rightarrow}$ -конструкцию:

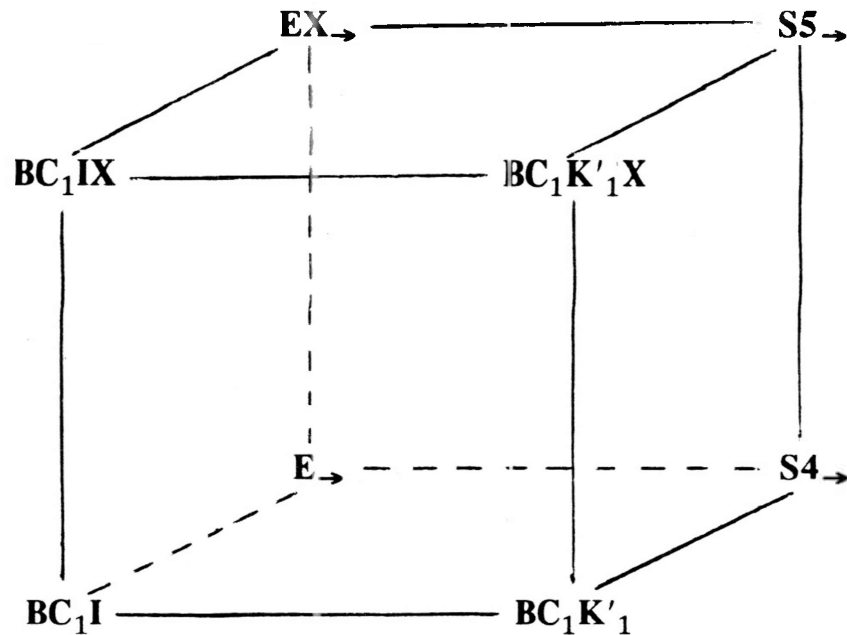


Рис.4

Мы бы сказали что $S5_{\rightarrow}$ -конструкция вкладывается в $TV_{\rightarrow}$ -конструкцию. Обратим внимание на один результат Андерсона и Белнапа [1962, р.46], которые установили, что логики $R_{\rightarrow}$, $H_{\rightarrow}$ и $TV_{\rightarrow}$ получаются из $E_{\rightarrow}$, $S4_{\rightarrow}$ и $S5_{\rightarrow}$ соответственно за счет добавления к последним формулы I^* : $p \rightarrow ((p \rightarrow p) \rightarrow p)$. Отсюда возникает интересный вопрос: является ли аксиоматизация $I, B, C_1, W, K'_1, X, I^*$ независимой для $TV_{\rightarrow}$? Тогда могли бы говорить о расширении $S5_{\rightarrow}$ -конструкции до $TV_{\rightarrow}$ -конструкции за счет формулы I^* . К сожалению, матрица 7 фальсифицирует формулу I^* , когда $p=1$. Поэтому вопрос остается открытым.

Далее. В $S5_{\rightarrow}$ -конструкцию вложима $(S3_{\rightarrow} + P_1)$ -конструкция. Логика $S3_{\rightarrow} + P_1$ впервые появилась у Мора [1964]. Заметим только, что логика $S3_{\rightarrow}$ получается из $S4_{\rightarrow}$ посредством замены аксиомы K'_1 на K'_2 :

$$(p \rightarrow q) \rightarrow ((r \rightarrow s) \rightarrow (p \rightarrow q)).$$

В [1988] Мендес предложил 72 независимых аксиоматизации $S3_{\rightarrow}$. Что касается импликативных фрагментов модальных логик слабее $S3$, то уже из результата Парри [1934] следует, что в $S2_{\rightarrow}$ не имеют места формулы B' и B . Относительно модальной системы T (по-другому M) аналогичный результат можно найти у Леммона и др. [1957]. Более того, аксиоматизация $S2_{\rightarrow}$ и импликативного фрагмента T требует бесконечного числа правил вывода подобных MP .

В связи с формулой K'_2 обратим внимание на следующий факт. Если аксиому K'_1 заменим на K'_2 в $TV_{\rightarrow}$ -конструкции, то результат остается исходным, т.е. имеет место

Теорема 4. I, B, C, W, K'_2, X есть независимая аксиоматизация $TV_{\rightarrow}$.

Доказательство то же самое, что и для Теоремы 1, плюс

Утверждение 15. $I, B, C, K'_2 \vdash K$.

1. I , 2. B , 3. C , 4. K'_2 .

$3 p/r \rightarrow s, q/p \rightarrow p, r/p \rightarrow p * 4 q/p - 1 - 5,$

5. $(r \rightarrow s) \rightarrow (p \rightarrow p)$.

$3 p/p \rightarrow (q \rightarrow r), r/p \rightarrow r * 3 - 6,$

6. $q \rightarrow ((p \rightarrow (q \rightarrow r)) \rightarrow (p \rightarrow r))$.

$2 q/(p \rightarrow (q \rightarrow r)) \rightarrow (p \rightarrow r), r/p \rightarrow p, p/q *$

$5 r/p \rightarrow (q \rightarrow r), s/p \rightarrow r - 6 - 7,$

7. $q \rightarrow (p \rightarrow p)$.

$3 p/q, q/p, r/p * 7 - 8,$

8. $p \rightarrow (q \rightarrow p) (=K)$.

Отсюда следует, что логика $H_{\rightarrow}$ аксиоматизируется также посредством I, B, C, W, K'_2 .

12. Итоги и перспективы

Исследование конструкций импликативных логик представляет большой интерес по многим причинам. Сама n -мерная конструкция, состоящая по возможности из наиболее простых элементов (аксиом), уже является характеристикой определенной логики. Так, было показано (Теорема 1), что импликативный фрагмент классической логики характеризуется шестью независимыми аксиомами, что и позволяет построить $TV_{\rightarrow}$ -конструкцию в виде шестимерного куба. Главным результатом всей работы является расширение $H_{\rightarrow}$ -конструкции до $TV_{\rightarrow}$ -конструкции за счет формулы X .

Первое, что очевидно, конструкции определяют различные взаимоотношения логик посредством включения в аксиоматику тех или иных аксиом. Естественно (для человека) рассматривать трехмерные конструкции, т.е. проекции n -мерного куба в трехмерный куб. На рис.3 показана, по-видимому, наиболее интересная такая проекция для логики $TV_{\rightarrow}$.

Другой важный вопрос - это тот, что в $TV_{\rightarrow}$ -конструкцию можно вкладывать другие конструкции за счет ослабления исходных аксиом посредством подстановки, как показано на рис.4. Возникает вопрос, сколько таких вложений существует? Разумно предположить, что их число бесконечно. Это значит, что между двумя соседними элементами конструкции содержится как минимум счетное число логик. Так, например, из работы Дырда [1985] следует, что между $BCKD$ и $TV_{\rightarrow}$ существует счетное множество им-

пликативных логик. В нашем случае это говорит о том, что этот класс логик можно получить за счет подстановок в аксиому W .

Наконец вопрос, который давно ждет ответа: что собой представляет конструкция классической (пропозициональной) логики TV ? Ответ исключительно прост:

++++++

Теорема 5. I, B, C, W, K', X, N является независимой аксиоматизацией TV , где N есть $0 \rightarrow p$ и 0 является константой, интерпретируемой как ложь.

Доказательство независимости тривиально, а остальное следует из результата Вайсберга [1937, ch.5], где показано, что добавление формулы $0 \rightarrow p$ к произвольной $TV \rightarrow$ дает полную TV .

Таким образом, конструкцией классической пропозициональной логики является 7-мерный куб (см. Kargenko [1993]). Изучению этой конструкции будет посвящена отдельная работа.

В заключение вернемся к самому началу данной работы, то есть к вопросу о классификации логик. Основная проблема состоит в выборе основания классификации. Таким основанием, как уже отмечалось, могут быть модификации правил вывода. Однако здесь возникают большие трудности в связи с различием самих систем друг от друга для установления их взаимоотношений. В нашем случае мы имеем только два стандартных правила: подстановку и *modus ponens*. Теперь можно указать три основания классификации:

- (1) различные подмножества исходного множества аксиом;
- (2) различные подстановки в аксиомы исходного множества;
- (3) различные варианты формулы X .

Комбинирование указанных подходов выявляет бесконечные классы различных (пропозициональных) логик. Образно говоря, каждая точка внутри n -мерного куба (конструкции), представляющего некоторую логику, является в свою очередь также некоторой логической системой.

ДОПОЛНЕНИЕ 1:

Аксиоматизация импликативных логик одной аксиомой

Лукасевич в [1948] доказал теорему, из которой следует, что $TV \rightarrow$ аксиоматизируется следующей единственной аксиомой:

$$((p \rightarrow q) \rightarrow r) \rightarrow ((r \rightarrow p) \rightarrow (s \rightarrow p)).$$

Из нее посредством правила подстановки и МР выводятся формулы B', K и P . При этом Лукасевич показал, что эта аксиома является наиболее короткой из всех возможных аксиоматизаций $TV \rightarrow$ одной аксиомой.

Проблема аксиоматизации пропозициональных исчислений одной аксиомой была поднята и решена Тарским в 1925 г. Им была доказана следующая теорема: пропозициональные исчисления, со-

держащие формулы K и $p \rightarrow (q \rightarrow ((p \rightarrow (q \rightarrow r)) \rightarrow r))$, аксиоматизируемы одной аксиомой (см. Лукасевич и Тарский [1930, теорема 8]). Танака [1966б, теорема 7] нашел другой критерий аксиоматизируемости, а именно наличие логики ВСК. Таким образом, необходимым условием разработанных общих методов для аксиоматизации одной аксиомой является наличие аксиомы K .

Поэтому представляет интерес результат К.Мередита, который аксиоматизировал BCI одной аксиомой (см. Мередит и Прайор [1963, p.179]):

$$(p \rightarrow (q \rightarrow r)) \rightarrow (((s \rightarrow s) \rightarrow (t \rightarrow q)) \rightarrow (t \rightarrow (p \rightarrow r)))^6.$$

Оказывается, существует аксиоматизация одной аксиомой и для BC_1I . Вайсберг [1937/1977, p.179] доказал, что $B', ((p \rightarrow p) \rightarrow q) \rightarrow q (=A) \vdash C_1, B$. Заметим, что $A \vdash I$ (Андерсон и Белнап [1975, p.77]). В обратную сторону, т.е. доказательство из B, C_1, I формул B' и A тривиально: $B, C \vdash B'$ и $I, C_1 \vdash A$. Наконец, Мередит и Прайор [1963, p.183] нашли несколько аксиоматизаций одной аксиомой для $B'A (=BC_1I)$, например,

$$(p \rightarrow q) \rightarrow (((((s \rightarrow s) \rightarrow t) \rightarrow t) \rightarrow (q \rightarrow r)) \rightarrow (p \rightarrow r)).$$

Не всякая импликативная логика может быть аксиоматизирована подобным образом. Андерсон и Белнап [1975, p.89-90] показали, что логику $T_{\rightarrow} (=IBV'W)$ нельзя аксиоматизировать одной аксиомой.

ДОПОЛНЕНИЕ 2:

Утверждение 16. I, B, C, P_1 есть $TV_{\rightarrow}$.

Дадим полное доказательство этого нетривиального факта.

1. $p \rightarrow p (=I)$.
2. $(q \rightarrow r) \rightarrow ((p \rightarrow q) \rightarrow (p \rightarrow r)) (=B)$.
3. $(p \rightarrow (q \rightarrow r)) \rightarrow (q \rightarrow (p \rightarrow r)) (=C)$.
4. $((p \rightarrow q) \rightarrow r) \rightarrow (p \rightarrow q) (=P_1)$.
 $3 \ p/q \rightarrow r, q/p \rightarrow q, r/p \rightarrow r * 2 - 5,$
5. $(p \rightarrow q) \rightarrow ((q \rightarrow r) \rightarrow (p \rightarrow r)) (B')$.
 $5 \ p/p \rightarrow q, q/(q \rightarrow r) \rightarrow (p \rightarrow r), r/s * 5 - 6,$
6. $((q \rightarrow r) \rightarrow (p \rightarrow r)) \rightarrow s \rightarrow ((p \rightarrow q) \rightarrow s)$.
 $6 \ q/p \rightarrow q, r/q, s/p \rightarrow q * 4 \ r/q - 7,$
7. $(p \rightarrow (p \rightarrow q)) \rightarrow (p \rightarrow q) (=W)$.
 $3 \ p/p \rightarrow q, q/p, r/q * 1 \ p/p \rightarrow q - 8,$

⁶ Здесь же представлены аксиоматизации одной аксиомой логик $H_{\rightarrow}$ и ВСК.

8. $p \rightarrow ((p \rightarrow q) \rightarrow q) (=I')$.
 $6 q/q \rightarrow r, r/s \rightarrow r, s/(s \rightarrow q) \rightarrow (p \rightarrow (s \rightarrow r)) *$
 $6 p/s, s/p \rightarrow (s \rightarrow r) - 9,$
9. $(p \rightarrow (q \rightarrow r)) \rightarrow ((s \rightarrow q) \rightarrow (p \rightarrow (s \rightarrow r)))$.
 $6 s/((p \rightarrow r) \rightarrow s) \rightarrow ((q \rightarrow r) \rightarrow s) *$
 $5 p/q \rightarrow r, q/p \rightarrow r, r/s - 10,$
10. $(p \rightarrow q) \rightarrow (((p \rightarrow r) \rightarrow s) \rightarrow ((q \rightarrow r) \rightarrow s))$.
 $10 p/(p \rightarrow q) \rightarrow r, q/r, r/p \rightarrow q, s/p \rightarrow q * 11,$
11. $((p \rightarrow q) \rightarrow r) \rightarrow (P_1 \rightarrow ((r \rightarrow (p \rightarrow q)) \rightarrow (p \rightarrow q)))$.
 $3 p/((p \rightarrow q) \rightarrow r) \rightarrow r, q/P_1, r/(r \rightarrow (p \rightarrow q)) \rightarrow (p \rightarrow q) * 11 - P_1 - 12,$
12. $((p \rightarrow q) \rightarrow r) \rightarrow ((r \rightarrow (p \rightarrow q)) \rightarrow (p \rightarrow q))$.
 $5 p/p \rightarrow q, q/((p \rightarrow q) \rightarrow r) \rightarrow r, r/(r \rightarrow (p \rightarrow q)) \rightarrow (p \rightarrow q) *$
 $8 p/p \rightarrow q, q/r, - 12 - 13,$
13. $(p \rightarrow q) \rightarrow ((r \rightarrow (p \rightarrow q)) \rightarrow (p \rightarrow q))$.
 $9 p/p \rightarrow q, q/(r \rightarrow (p \rightarrow q)) \rightarrow (p \rightarrow q), r/(p \rightarrow q), s/r *$
 $13 r/r \rightarrow (p \rightarrow q) - 8 p/r, q/p \rightarrow q - 14,$
14. $(p \rightarrow q) \rightarrow (r \rightarrow (p \rightarrow q)) (=K_1)$.
 $14 q/p, r/q * 1 - 15,$
15. $q \rightarrow (p \rightarrow p)$.
 $3 p/q, q/p, r/p * 4 - 16,$
16. $p \rightarrow (q \rightarrow p) (=K)$.
 $10 q/r \rightarrow p, r/p \rightarrow q, s/p \rightarrow q * 16 q/r - 7 - 17,$
17. $((r \rightarrow p) \rightarrow (p \rightarrow q)) \rightarrow (p \rightarrow q)$.
 $12 p/r, q/p, r/p \rightarrow q * 17 - 18,$
18. $((p \rightarrow q) \rightarrow (r \rightarrow p)) \rightarrow (r \rightarrow p)^7$.
 $2 q/(p \rightarrow q) \rightarrow (r \rightarrow p), r/r \rightarrow p, p/s * 18 - 19,$
19. $(s \rightarrow ((p \rightarrow q) \rightarrow (r \rightarrow p))) \rightarrow (s \rightarrow (r \rightarrow p))$.
 $2 q/s \rightarrow ((p \rightarrow q) \rightarrow (r \rightarrow p)), r/s \rightarrow (r \rightarrow p), p/t * 19 - 20,$
20. $(t \rightarrow (s \rightarrow ((p \rightarrow q) \rightarrow (r \rightarrow p)))) \rightarrow (t \rightarrow (s \rightarrow (r \rightarrow p)))$.
 $20 t/p \rightarrow (r \rightarrow p), s/(p \rightarrow q) \rightarrow p *$
 $2 q/p, r/r \rightarrow p, p/p \rightarrow q - 16 q/r - 21,$
21. $((p \rightarrow q) \rightarrow p) \rightarrow (r \rightarrow p)$.

⁷ Обратим внимание на следующий результат К.Мередита [1966]:
 $((p \rightarrow q) \rightarrow (r \rightarrow p)) \rightarrow (r \rightarrow p)$ и **B** дают **TV**_→.

$3\ p/(p \rightarrow q) \rightarrow p, q/r, r/p * 21 - 22,$

22. $r \rightarrow ((p \rightarrow q) \rightarrow p) \rightarrow p).$

$22\ r/p \rightarrow p * 1 - 23,$

23. $((p \rightarrow q) \rightarrow p) \rightarrow p (=P).$

В силу теоремы Тарского-Бернайса (см. раздел 7) аксиомы В', К, Р дают $TV_{\rightarrow}$. Таким образом, I, В, С, Р₁ есть $TV_{\rightarrow}$.

Обратим внимание, что этот результат говорит также о том, что I, В, С, W, К₁, X₁ есть $TV_{\rightarrow}$.

ЛИТЕРАТУРА

Сокращения:

JSL - The Journal of Symbolic Logic

ZML - Zeitschrift für mathematische Logik und Grundlagen
der Mathematik

NDJFL - Notre Dame Journal of Formal Logic

BSL - Bulletin of the Section of Logic

Аврон (Avron A.)

[1988] The semantics and proof theory of linear logic //
Theoretical Computer Science. Vol.57. P.161-184.

Аккерман (Ackerman W.)

[1956] Begründung einer strengen Implication // JSL. Vol.21. P.113-
128.

Андерсон, Белнап (Anderson A.R., Belnap N.D., Jr.)

[1962] The pure calculus of entailment // JSL. Vol.27. N.1.P.19-52.

[1975] Entailment: The logic of relevance and necessity. Vol.1.
Princeton.

Андерсон, Белнап, Данн (Anderson A.R., Belnap N.D., Jr., Dunn J.M.)

[1992] Entailment: The logic of relevance and necessity. Vol.2.
Princeton.

Белнап (Belnap N.D., Jr.)

[1959] The formalization of entailment // Technical report no 8.
New Haven.

Бул (Bull R.A.)

[1962] The implicational fragment of Dummett's LC // JSL. Vol.27.
N.2. P.189-194.

Бундер (Bunder M.W.)

[1982] Deduction theorems for weak implicational logic // Studia
Logica. Vol.41. N.2-3. P.95-108.

Вайсберг (Wajsberg M.)

[1937] Metalogische Beitrage // Wiadomosci Matematyczne. Vol.43. P.131-168. (Английский перевод: Contribution to metalogic // Wajsberg M. Logical works. Wroclaw, 1977. P.172-200).

[1938] Untersuchungen uber den Aussagenkalkul von A. Heyting // Wiadomosci Matematyczne. Vol.46. P.45-101 (Русский перевод: Исследования по исчислению высказываний А. Гейтинга // Методологические исследования. Тбилиси, 1985. с.78-128).

[1939] Metalogische Beitrage II // Wiadomosci Matematyczne. Vol.47. P.119-139. (Английский перевод: Contribution to metalogic II // Wajsberg M. Logical works. Wroclaw, 1977. P.201-214).

Вонсинг (Wansing H.)

[1990] Formulas-as-types for a hierarchy of sublogics of intuitionistic propositional logic. Bericht Nr.9. (Preprint).

Габбай, Купероз (Gabbay D.H., de Queiros R.J.G.B.)

[1991] Extending the Curry-Howard-Tait interpretation to linear, relevant and other resource logics // JSL. Vol.56. N.3. P.1139-1140 (Abstract).

Гедель (Godel K.)

[1932] Zum intuitionistischen Aussagenkalkul // Anzeiger der Akademie der Wissenschaften Wien, mathematisch, naturwissenschaftliche Klasse. Bd.69. S.65-66.

Гильберт (Hilbert D.)

[1922] Neubegrundung der Mathematik // Abb. Math. Sem. Univ. Hamburg. Bd1. S.157-177.

[1948] Основания математики // Гильберт Д. Основания геометрии. М. С.365-388.

Гильберт, Бернайс (Hilbert D., Bernays P.)

[1968] Grundlagen der Mathematik. 1. Berlin. (Русский перевод: Основания математики. Логические исчисления и формализация арифметики. М., 1979).

Гришин В.Н.

[1974] Об одной нестандартной логике и ее применении к теории множеств // Исследования по формализованным языкам и неклассическим логикам. М. С.135-171.

Даммет (Dummett M.)

[1959] A propositional calculus with denumerable matrix // JSL. Vol. 24. P.97-106.

Дошен (Dosen K.)

[1988] Sequent-systems and groupoid models. I// *Studia Logica*. Vol.47 N.4. P.353-385.

[1989] Sequent-systems and groupoid models.II// *Ibid*. Vol. 48. N 1. P.41-65.

Дырда (Dyrda K.)

[1985] On classification of commutative BCK-logics// *BSL*. Vol.14. N.1. P.30-33.

Жирар (Girard J.Y.)

[1987] Linear logic// *Theoretical computer science*. Vol.50. P.1-102.

Кангер (Kanger S.)

[1955] A note on partial postulates sets for propositional logic// *Theoria*. Vol.21. Part 2-3. P.99-104.

Карпенко (Karpenko A.S.)

[1991] Classification of implicational logic// 9th International Congress of Logic, Methodology and Philosophy of Science (August 7-14, 1991 Uppsala, Sweden) Abstracts. Vol.1: Logic. P.131.

[1992a] Проблема о расширении $H \rightarrow$ // Одиннадцатая межреспубликанская конференция по математической логике. Казань. С.69.

[1992b] The problem of extending $H \rightarrow$ to $TV \rightarrow$ // *IGPL Newsletter*. Vol.1. N.2. P.5-7.

[1992в] Lattices of implicational logic// *BSL*. Vol.21. N.3. P.82-91.

[1993] Classical propositional logic as the 7-dimensional cube// XIX World Congress of Philosophy (Moscow, 22-28 August, 1993). Book of abstracts. Vol. 1. Section 4.

Карри (Curry H.B.)

[1954] Generalisation of the deduction theorem// *Proceedings of International Congress of Mathematicians*. Vol.2. Amsterdam. P.399-400.

[1963] *Foundations of mathematical logic*. New York (Русский перевод: Основания математической логики. М., 1969).

Карри, Фейс (Curry H.B., Feys R.)

[1958] *Combinatory Logic*. Vol.1. Amsterdam.

Кирк (Kirk R.E.)

[1981] A complete semantics for implicational logics// *ZML*. Bd 27. H.4.S.381-383

Комори (Komori Y.)

[1978] Super-Lukasiewicz implicational logic// *Nagoya Mathematical Journal*. Vol.72. P.127-133.

Крипке (Kripke S.A.)

[1959] The problem of entailment// JSL. Vol.24. P.234. (Abstract).

Ламбек (Lambek J.)

[1958] The mathematics of sentence structure// American Mathematical Monthly. Vol.65. P.154-170. (Русский перевод: Математическое исследование структуры предложений// Математическая лингвистика. М.,1964. С.47-68.

Леммон, Мередит К., Мередит Д., Прайор, Томас (Lemmon E.J., Meredith C.A., Meredith D., Prior A.H., Thomas I.)

[1957] Calculi of pure strict implication. Mimeographed// Philosophical logic. Dordrecht, 1969. P.215-250.

Лукасевич (Lukasiewicz J.)

[1920] O logice trojwartosciowej// Ruch Filozoficzny. T.5. S.170-171 (Английский перевод: On three-valued logic// Lukasiewicz J. Selected works. Warsaw, 1970. P.87-88.

[1929] Elementy logiki matematycznej. Warszawa. (Английский перевод: Elements of mathematical logic. N.Y.,1963).

[1948] The shortest axiom of the implicational calculus of propositions// Proceedings of the Royal Irish Academy. Sect. A. Vol.52. P.25-33. (Переиздано: Lukasiewicz J. Selected works. Warsaw, 1970. P.306-305).

[1950] W sprawie aksjomatyki implikacyjnego rachunku zdan// Annals de la Societe Polonaise de Mathematique. Vol.22. p.67-92 (Английский перевод: On the system of axioms of the implicational propositional calculus// Lukasiewicz J. Selected works. Warsaw, 1970. P.306-310).

Лукасевич, Тарский (Lukasiewicz J., Tarski A.)

[1930] Untersuchungen uber den Aussagenkalkul// Comptes rendus de la Societe des Sciences et des Lettres de Varsovie. Ce.iii. Vol.23. P.1-21 (Английский перевод: Investigations into the sentential calculus// Lukasiewicz J. Selected works. Warsaw, 1970. P.131-152).

Мак-Кэй (McKay C.G.)

[1968] The decidability of certain intermediate propositional logics// JSL. Vol.33. N.2. P.258-264.

Мейер (Meyer R.K.)

[1968] Pure denumerable Lukasiewicz implication// JSL. Vol.31. P.575-580.

[1990] Peirced clean through// BSL. Vol.19. N.3. P.100-101.

Мейер, Паркс (Meyer R.K., Parks Z.)

[1972] Independent axioms for the implicational fragment of Sobocinski's three-valued logic// ZML. Bd.18. S.291-295.

Мендес (Mendez J.M.)

[1987] Axiomatizing $E_{\rightarrow}$ and $R_{\rightarrow}$ with Anderson and Belnap's "Strong and natural list of valid entailments" // BSL. Vol.16. N.1. P.2-10.

[1988] Exhaustively axiomatizing $S3_{\rightarrow}$ and $S4_{\rightarrow}$ with a select list of representative theses // BSL. Vol.17. N.1. P.15-22.

Мередит К.А. (Meredith C.A.)

[1966] Postulates for implicational calculi // JSL. Vol.31. N.1. P.7-9.

Мередит, Прайор (Meredith C.A., Prior A.N.)

[1963] Axiomatics of the propositional calculus // NDJFL. Vol.4. P.171-187.

[1964] Investigations into implicational $S5$ // ZML. Bd.10. H.3. S.203-220.

Миц Г.Е.

[1974] Системы Льюиса и система T (1965-1973) // Фейс Р. Модальная логика. М., 1974. С.422-509.

Мо Шо-Квей (Moh Shaw-Kwei)

[1950] The deduction theorem and two new logical systems // Methodos. Vol.2. P.57-75.

Мор (More T., Jr.)

[1964] A lattice of implicational calculi // JSL. Vol.29. N.3. P.159-160 (Abstract).

Оно (Ono H.)

[1980] Structural rules and a logical and a logical hierarchy // Mathematical logic. N.Y. P.95-104.

Оно, Комори (Ono H., Komori Y.)

[1985] Logics without the contraction rule // JSL. Vol.50. P.169-201.

Парри (Parry W.T.)

[1934] Postulates for 'strict implication' // Mind. P.78-80.

Пирс (Peirce Ch.S.)

[1885] On the algebra of logic. A contribution to the philosophy of notation // American Journal of Mathematics. Vol.III. P.209-249.

Попов В.М.

[1993] Два замечания и один вопрос относительно аксиоматизации импликативных логик // Логические исследования. Вып.2. М. С.154-159.

Прайор (Prior A.N.)

[1955] Formal logic. Oxford.

[1958] Peirce's axioms for propositional calculus // JSL. Vol.23. N.2. P.135-136.

[1962] Formal logic. Oxford.

Раутенберг (Rautenberg W.)

[1979] Klassische und nichtklassische Aussagen-logik. Braunschweig.

Роз (Rose A.)

[1956] Formalization du calcul propositionnel implicatif a $\aleph_0$ - valeurs de Lukasiewicz // Comptes rendus hebdomadaires des seances de l'Academie des Sciences Vol.243. P.1183-1185.

Смирнов В.А.

[1972] Формальный вывод и логические исчисления. М.

[1979] Формальный вывод, теоремы дедукции и теории импликации // Логический вывод. М. С.54-68.

Собочинский (Sobocinski B.)

[1952] Axiomatization of a partial system of three-valued calculus of proposition // The journal of computing systems. Vol.1. P.23-55

Танака (Tanaka S.)

[1966a] On axiom systems of propositional calculi. XVI // Proceedings of the Japan Academy. Vol.42. N.3. P.221-224.

[1966b] On variants of axiom systems of propositional calculus. II // Ibid. Vol.43. N.3. P.192-193.

[1967] On axiom systems of propositional calculi // Ibid. Vol.43. N 3. P.192-193.

Томас (Thomas I.)

[1962] On the infinity of positive logic // NDJFL. Vol.3. P.108-109.

Торренс (Torrens A.)

[1988] On the role of the polynomial $(x \rightarrow y) \rightarrow y$ in some implicative algebras // ZML. Bd.34. H.2. S.117-122.

Ульрич (Ulrich D)

[1990] An integer-valued matrix characteristic for implicational $S5$ // BSL. Vol.19. N 3. P.87-91.

Уркварт (Urquhart A.)

[1972] Semantics for relevant logics // JSL. Vol.37. P.159-169.

Фреге (Frege G.)

[1879] Begriffsschrift, eine der arithmetischen nachgebildete des reinen Denkens. Hall (Русский перевод: Шрифт понятий, скопированный с арифметического формульный язык чистого мышления // Методы логических исследований. Тбилиси, 1987. с.83-141).

Хао Ван (Wang H.)

[1963] A survey of mathematical logic // Studies in logic and the foundations of mathematics. Amsterdam.

Хоо (Hoo C.S.)

- [1988] A survey of BCK and BCI-algebras// SEA Bulletin of Mathematics. Vol.12. N.1. P.1-9.

Хорн (Horn A.)

- [1962] The separation theorem of intuitionist propositional calculus// JSL. Vol.27. N.4. P.391-399.

Хэкинз (Hacking I.)

- [1963] What is strict implication?// JSL. Vol.28. N.1. P.51-71.

Черч (Church A.)

- [1948] Review of Jaskowski [1948]// JSL. Vol.13. N 3. P.164-165.

- [1951a] The weak theory of implication// Kontrolliertes Denken, Untersuchungen zum Logikkalkul und der Logik der Einzelwissenschaften. (A. Menne et.al., editors). Munich. P.22-37. (Abstract: The weak positive implicational propositional calculus// JSL. Vol.16. N.3. P.238).

- [1951b] Minimal logic// JSL. Vol.16.N.3.P.239. (Abstract).

- [1956] Introduction to mathematical logic. Vol.1. Princeton.(Русский перевод: Введение в математическую логику. М., 1960).

Чидгей (Chidgey J.R.)

- [1973] A note on transitivity// NDJFL. Vol.14. N.2. P.273-275.

Шабунин Л.В.

- [1979] Комбинаторная логика// Математическая энциклопедия. Т.2. М. С.970.

Шейнфинкель (Schönfinkel M.)

- [1924] Über die Bausteine der Mathematischen Logik// Mathematische Annalen. Bd.92. P.305-316 (Английский перевод : From Frege to Gödel: a source - book in mathematical logic (J.van Heijenoort, ed.). Cambridge, 1967. P.355-366).

Энгелер Э.

- [1987] Метаматематика элементарной математики. М.

Яськовский (Jaskowski S.)

- [1948] Trois contributions au calcul des propositions bivalentes// Studia societatis scientiarum torunensis. Section A. Vol.1 N 1. P.1-15.

- [1963] Über Tautologien, in welchen keine variable mehr als zweimal vorkommt// ZML. Bd.9. P.219-228.

ДОПОЛНИТЕЛЬНАЯ ЛИТЕРАТУРА ПО ИМПЛИКАТИВНЫМ ЛОГИКАМ

Аврон (Avron A.)

- [1986] On an implication connective of RM// NDJFL. Vol. 27.
P.201-209.

Батенс (Batens D.)

- [1987] Relevant implication and the weak deduction theorem//
Studia Logica. Vol. 46. P.239-245.

Боричич (Boricic B.R.)

- [1988] O nekim tyrdenjima teorije dokaza// Matematika (Zagreb).
Vol.17. N.3. P.40-47.

Бул (Bull R.A.)

- [1964] Some results for implicational calculi// JSL. Vol.29. N 1.
P.33-39.

Бундер (Bunder M.W.)

- [1980] Modus ponens free (implicational) logic// Proceedings of the
third Brazillian conference on mathematical logic. Sao Paulo.
P.23-34.

- [1982] Deduction theorem for weak implicational logics//
Studia logica. Vol.41. P.95-108.

- [1983] BCK and related algebras and their corresponding logics.//
The Journal of Non-Classical Logic. Vol. 2. P.15-24.

Бундер, Мейер (Bunder M.W., Meyer R.K.)

- [1985] A result for combinators, BCK logics and BCK algebras //
Logique et Analyse. N 109.

Бэрд, Хенри (Byrd M., Henry D.)

- [1978] Sugihara's criterion and some structure parallels between $E_{\rightarrow}$
and $S3_{\rightarrow}$ // ZML. Bd.24. S.187-191.

Верхозина М.И.

- [1986] Предтабличные импликационные логики//
Алгебраические системы. Алгоритмические вопросы и
ЭВМ. Иркутск. С.19-30.

Войтылак (Wojtylak P.)

- [1990] A syntactical characterization of structural completeness for
implicational logics// BSL. Vol.19. N.1. P.2-9.

Карпенко А.С. Две решетки импликативных логик// Вестник
Санкт-Петербургского Университета. Серия 6.
Выпуск 4. С.28-29.

Лопез-Эскобар (Lopez-Escobar E.G.K.)

- [1982] Implicational logics in natural deduction systems// JSL.
Vol.47. P.184-186.

Мак-Роби, Мейер (McRobbie M.A., Meyer R.K.)

- [1990] Computing the middle term: exploration for pure implicational calculi // JSL. Vol. 55. P.414-415 (Abstract).

Мейер (Meyer R.K.)

- [1983] A note on $R \rightarrow$ matrices// NDJFL. Vol.24. P.450-472.

Мендес (Mendez J.M.)

- [1988] Deduction theorem for $T^\circ \rightarrow$, $E^\circ \rightarrow$, $R^\circ \rightarrow$, $S4^\circ \rightarrow$ and $I^\circ \rightarrow$ // Reports on mathematical logic. N.22. P.9-13.

Мередиث Д. (Meredith D.)

- [1979] Axiomatics for implication// NDJFL. Vol.20. N.1. P.89-91.

Мор (More T.T., Jr.)

- [1962] Relations between implicational calculus. Doctoral dissertation. Massachusetts Institute of Technology.

Морган (Morgan C.G.)

- [1976] Methods for automated theorem proving in nonclassical logics// IEEE Transaction on computers. Vol.C-25. P.852-862.

Пахи (Pahi B.)

- [1966] Studies in implicational calculi. Doctoral dissertation. Yale University.
[1971a] Full models and restricted extensions of propositional calculi// ZML. Bd.17. H.1. S.5-10.
[1971b] Restricted extensions of implicational calculi// ZML. Bd.17. H.1. S.11-16.
[1972a] A theorem on the interrelationship of axiom systems for implicational calculi// ZML. Bd.18. H.2. S.165-167.
[1972b] A method for proving the nonexistence of finite characteristic models for implicational calculi// ZML. Bd.18. H.2. S.169-172.
[1975] Jankov-theorems for some implicational calculi// ZML. Bd.21. H.3. S.193-198.

Попов В.М.

- [1984] Импликативные релевантные логики и существенные формулы// Многозначные, релевантные и паранепротиворечивые логики. (Тр. науч.-исслед. семинара по логике Ин-та философии АН СССР). М. С.27-28.

Прайор (Prior A.N.)

- [1961] Axiom-pairs for material and strict implication// ZML. Bd.7. H.1. S.61-65.
[1964] Two additions to positive implication// JSL. Vol.29. N.1. P.31-32.

Пруцнал (Prucnal T.)

[1972] On the structural completeness of some pure implicational calculi// *Studia Logica*. Vol.30. P.31-32.

[1985] Structural completeness of a purely implicational intermediate logics// *Foundations of logic and linguistic* (Salzburg 1983). P.31-41.

[1990] A note on some property of purely implicational propositional calculi// *BSL*. Vol.19. N.2. P.49-50.

Раутенберг (Rautenberg W.)

[1985] A note on implicational intermediate consequence// *BSL*. Vol.14. P.103-108.

Расева (Rasiowa H.)

[1955] O pewnym fragmencie implikacyjnego rachunku zdan// *Studia Logica*. vol.3. P.208-222.

Тамура (Tamura S.)

[1971] The implicational fragment of R -mingle// *Proc. Japan Acad.* Vol.47. P.71-73.

Томас (Thomas I.)

[1962] Finite limitations on Dummett's LC // *NDJFL*. Vol.3. N 3. P.170-174.

[1971] A proof of a theorem of Lukasiewicz// *NDJFL*. Vol.12. N.4. P.507-508.

[1975] Nice implicational axioms// *NDJFL*. Vol.16. N.4. P.507-508.

Ульрич (Ulrich D.)

[1985] A descending chain of incomplete extensions of implicational $S5$ // *ZML*. Bd.31. S.201-208.

[1989] The nonexistence of finite characteristic matrices for subsystems of R_I // *Directions of relevant logic*. Dordrecht.

Уркварт (Urquhart A.)

[1974] Implicational formulas in intuitionistic logic// *JSL*. Vol.39. N.4. P.661-664.

Хиндли, Мередит (Hindley J.R., Meredith D.)

[1990] Principal type-schemes and condensed detachment// *JSL*. Vol.55. N.1. P.90-105.

Хосои (Hosoi T.)

[1974] On the implicational fragment of logics// *Journal of Tsuda College*. P.1-5.

Шумм (Schumm G.F.)

[1975] A Henkin-style completeness proof for the pure implicational calculus// *NDJFL*. Vol.16. N.3. P.402-404.

МНОГОМЕРНЫЕ ЛОГИКИ*

Казанский логик Н.А.Васильев (1880-1940) в трех статьях 1910-1913 гг. выдвинул программу построения неаристотелевых логик, логик, не подчиняющихся законам противоречия и исключенного третьего. Напомню, что статья Брауэра о недостоверности закона исключенного третьего была опубликована в 1908 году, а статья Я.Лукасевича общепhilософского характера, приведшая впоследствии к построению многозначных логик, в 1910.

Основная идея Н.А.Васильева состояла в подразделении логических законов на два уровня: внешний и внутренний или абстрактный и эмпирический. Первый уровень зависит от наших гносеологических установок. Согласно Н.А.Васильеву, он не варьируется - это логика истины и лжи. Верен закон самонепротиворечия: одно и то же суждение не может быть и истинным и ложным. На этом уровне верен так же закон исключенного третьего: каждое суждение или истинно или ложно. Второй, эмпирический уровень, зависит от онтологических допущений о познаваемом мире. В одномерном мире опыт дает только позитивные атомные утверждения. Отрицательные утверждения не атомны, они являются результатом вывода. Когда я утверждаю, что этот стол не зеленый, то это утверждение есть результат вывода из результата опыта, дающего мне знание, что этот стол коричневый, и общего знания, что предмет не может быть одновременно зеленым и коричневым.

Но мы можем мыслить ситуацию, когда познающий субъект обладает способностью фиксировать не только наличие свойства, но и его отсутствие. В этом случае и позитивное и негативное утверждения будут прямым отчетом об опыте. В этом случае допущение, что объект не может одновременно обладать некоторым свойством и не обладать им, есть онтологическое допущение о мире. Н.А.Васильев называет это допущение законом противоречия. Он исследует случай, когда закон противоречия не значим. В воображаемой логике изучается ситуация, когда объект (1) обладает некоторым свойством, (2) не обладает этим свойством, (3) одновременно обладает и не обладает этим свойством. Это основа для построения Н.А.Васильевым воображаемой логики без законов противоречия и исключенного третьего, но с законом исключенного четвертого.

Ранее я предложил топологическую интерпретацию воображаемой логики Н.А.Васильева [11]. Позитивное атомное предложение "а есть Р" интерпретируется как а есть член внутренности Р. Отрицательное атомное предложение "а не есть Р" интерпретируется как а есть член внутренности дополнения Р. И, наконец, атомное

*Работа выполнена при поддержке Российского Фонда фундаментальных исследований, грант 93-06-10708.

индифферентное утверждение "а есть и не есть Р" интерпретируется как а есть член границы Р, то есть а есть элемент пересечения замыкания Р и замыкания дополнения Р.

Н.А.Васильев обобщает свою воображаемую логику. Он предлагает рассматривать логики n измерений, где $n \geq 1$. Логика одного измерения есть логика с одним типом атомных предложений – именно с позитивными предложениями. Логика двух измерений оперирует с двумя типами атомных предложений: позитивными и негативными. Воображаемая логика есть логика трех измерений, в ее основе лежат три типа атомных предложений: позитивные, негативные и индифферентные. Н.А.Васильев полагает, что могут быть построены в общем случае n -мерные логики с n типами атомных предложений.

Н.А.Васильев строил свои новые логические системы в форме силлогистики. Я предложил аксиоматику n -мерных логик Васильева в форме ссиллогистики в [10] и [13]. Однако ассерторическая силлогистика оккамовского типа может быть расширена до системы дефинициально эквивалентной булевой алгебре классов (см. В.А.Бочаров [4], В.А.Смирнов [9]). Поэтому было бы интересно построить логику n измерений в виде алгебры классов и затем сравнить ее с n -мерными логиками в форме силлогистики.

Пусть Р есть одноместный предикатный знак, U есть непустая индивидуальная область и $\{1, 2, \dots, n\}$ – набор натуральных чисел (линейно упорядоченных естественным образом). Пусть F будет частичная функция из U в $\{1, \dots, n\}$. Каждому одноместному предикатному знаку мы сопоставляем некоторую функцию F из U в $\{1\}$. В случае $n=1$, множество объектов, на которых функция из U в $\{1\}$ определена, будет объемом предиката Р. В случае $n=2$, мы имеем дело с характеристической функцией из U в $\{1, 2\}$ (или, если хотите, в $\{1, 0\}$). Множество объектов, на которых эта функция принимает значение 1, будет объемом Р, а множество объектов, на которых эта функция принимает значение 2, будет антиобъемом Р. В общем случае не исключается ни то, что пересечение объема и антиобъема не пусто, ни то, что объединение объема и антиобъема равно универсуму. Последнее достигается тем, что функция F является всюду определенной. Рассмотрение интерпретаций, наделяющих предикатный знак объемом и антиобъемом, прочно вошло в логику (см. С.Крипке [6], Е.Д.Смирнова [15]). При условии, что функция, приписывающая объем и антиобъем, всюду определена и что пересечение объема и антиобъема пусто, мы приходим к двумерной классической логике. При отказе от одного или двух сформулированных условий мы имеем другой тип логики. Этот круг вопросов тщательно исследован Е.Д.Смирновой в монографии "Логическая семантика и философские основания логики".

Мы рассмотрим случай, когда одноместному предикатному знаку сопоставляется всюду определенная функция из U в $\{1, \dots, n\}$, при этом эта функция однозначна. С объемной точки зрения одноместному предикатному знаку сопоставляется конечная последова-

тельность классов $\langle S_1, \dots, S_n \rangle$, попарное пересечение которых пусто, и объединение $S_1 \cup \dots \cup S_n$ равно универсуму. Заметим, что некоторые из классов могут быть пустыми. Поэтому $\langle S_1, \dots, S_n \rangle$ не является делением (разбиением), а скорее расслоением.

Мы ограничимся случаем, когда предикатный знак является одноместным, в случае, когда предикатный знак P является k -местным, классы $S_1, \dots, S_n$ являются соответственно классами k -ок, k -членных последовательностей.

Опишем наш подход более формально. Пусть U индивидная область, X - семейство всех его подклассов, $\cup, \cap$ - обычные операции пересечения и объединения, $\emptyset$ - есть пустой класс и $1 = U$. Тогда $\langle X, \cup, \cap, 1, \emptyset \rangle$ есть ограниченная дистрибутивная решетка.

Каждой одноместной предикатной константе сопоставляется n -членная последовательность $\langle S_1, \dots, S_n \rangle$ попарно непересекающихся классов из X такая, что их объединение $S_1 \cup \dots \cup S_n$ эквивалентно 1 (то есть универсуму U). Ниже мы будем рассматривать последовательности с произвольным, но фиксированным n .

Теперь введем отношение включения на последовательностях классов:

$$\langle S_1, \dots, S_n \rangle \subseteq \langle P_1, \dots, P_n \rangle \Leftrightarrow S_i \subseteq P_1 \cup \dots \cup P_i \text{ и } P_i \subseteq S_1 \cup \dots \cup S_n$$

Если $n=2$, то мы имеем:

$$\langle S_1, S_2 \rangle \subseteq \langle P_1, P_2 \rangle \Leftrightarrow S_1 \subseteq P_1 \text{ и } P_2 \subseteq S_2$$

Если $n=3$, то мы имеем:

$$\langle S_1, S_1, S_3 \rangle \subseteq \langle P_1, P_2, P_3 \rangle \Leftrightarrow S_1 \subseteq P_1, S_2 \subseteq P_1 \cup P_2, P_2 \subseteq S_2 \cup S_3, P_3 \subseteq S_3$$

Последовательности равны, если и только если равны соответствующие члены

$$\langle S_1, \dots, S_n \rangle = \langle P_1, \dots, P_n \rangle \Leftrightarrow S_i = P_i$$

Теорема 1. *Отношение включения на последовательностях есть отношение частичного порядка.*

Доказательство.

Отношение включения на последовательностях рефлексивно. Действительно,

$$\langle S_1, \dots, S_n \rangle \subseteq \langle S_1, \dots, S_n \rangle, \text{ так как } S_i \subseteq S_1 \cup \dots \cup S_i \text{ и } S_i \subseteq S_1 \cup \dots \cup S_n.$$

Отношение включения на последовательностях транзитивно.

Пусть

$$\langle S_1, \dots, S_n \rangle \subseteq \langle M_1, \dots, M_n \rangle \text{ и } \langle M_1, \dots, M_n \rangle \subseteq \langle P_1, \dots, P_n \rangle.$$

Тогда по определению включения имеем:

$$S_i \subseteq M_1 \cup \dots \cup M_i$$

$$M_i \subseteq S_1 \cup \dots \cup S_n$$

$$M_i \subseteq P_1 \cup \dots \cup P_i$$

$$P_i \subseteq M_i \cup \dots \cup M_n$$

Из третьего условия мы получаем:

$$M_1 \subseteq P_1$$

и отсюда $M_1 \subseteq P_1 \cup \dots \cup P_i$

$$M_2 \subseteq P_1 \cup P_2$$

и отсюда $M_2 \subseteq P_1 \cup \dots \cup P_i$

$$M_i \subseteq P_1 \cup \dots \cup P_i$$

и отсюда $M_i \subseteq P_1 \cup \dots \cup P_i$

Из последних соотношений мы получаем

$$M_1 \cup \dots \cup M_i \subseteq P_1 \cup \dots \cup P_i$$

Из последнего включения и первого условия получаем:

$$S_i \subseteq P_1 \cup \dots \cup P_i$$

Аналогично, из второго условия получаем

$$M_i \cup \dots \cup M_n \subseteq S_i \cup \dots \cup S_n$$

Из этого соотношения и условия четвертого получаем

$$P_i \subseteq S_i \cup \dots \cup S_n$$

И, наконец, из $S_i \subseteq P_1 \cup \dots \cup P_i$ и $P_i \subseteq S_i \cup \dots \cup S_n$ получаем по определению $\subseteq$ на последовательностях

$$\langle S_1, \dots, S_n \rangle \subseteq \langle P_1, \dots, P_n \rangle$$

Остается доказать, что отношение включения на последовательностях асимметрично.

Пусть

$$\langle S_1, \dots, S_n \rangle \subseteq \langle P_1, \dots, P_n \rangle$$

и

$$\langle P_1, \dots, P_n \rangle \subseteq \langle S_1, \dots, S_n \rangle$$

Из условий по определению имеем:

$$S_i \subseteq P_1 \cup \dots \cup P_i$$

$$P_i \subseteq S_i \cup \dots \cup S_n$$

$$P_i \subseteq S_1 \cup \dots \cup S_i$$

$$S_i \subseteq P_i \cup \dots \cup P_n$$

Из первого и четвертого соотношений имеем

$$S_i \subseteq (P_1 \cup \dots \cup P_i) \cap (P_i \cup \dots \cup P_n)$$

Отсюда

$$S_i \subseteq (P_1 \cap P_i) \cup \dots \cup (P_i \cap P_i) \cup \dots \cup (P_1 \cap P_n) \cup \dots \cup (P_i \cap P_n).$$

Но, согласно нашему общему условию, мы рассматриваем только такие последовательности, для которых $P_i \cap P_j = \emptyset$, если $i \neq j$. На этом основании $S_i \subseteq P_i$.

Аналогично, из второго и третьего соотношений получаем

$$P_i \subseteq (S_1 \cup \dots \cup S_i) \cap (S_i \cup \dots \cup S_n)$$

и отсюда

$$P_i \subseteq S_i$$

По свойству отношения включения на классах из $S_i \subseteq P_i$ и $P_i \subseteq S_i$ получаем $S_i = P_i$. И по определению равенства последовательностей классов

$$\langle S_1, \dots, S_n \rangle = \langle P_1, \dots, P_n \rangle$$

Теорема доказана.

Среди последовательностей естественно выделяются нулевая и универсальная

$$0 = \langle \emptyset, \dots, \emptyset, 1 \rangle$$

$$1 = \langle 1, \emptyset, \dots, \emptyset \rangle$$

Легко видеть, что

$$\langle \emptyset, \dots, \emptyset, 1 \rangle \subseteq \langle S_1, \dots, S_n \rangle$$

Действительно

$$\emptyset \subseteq S_1$$

$$\vdots$$

$$\emptyset \subseteq S_1 \cup \dots \cup S_{n-1}$$

$$1 \subseteq S_1 \cup \dots \cup S_n$$

и

$$S_1 \subseteq \emptyset \cup \dots \cup 1$$

Так же легко показать, что

$$\langle S_1, \dots, S_n \rangle \subseteq \langle 1, \emptyset, \dots, \emptyset \rangle$$

Действительно,

$$S_i \subseteq 1 \cup \emptyset \cup \dots \cup \emptyset$$

$$1 \subseteq S_1 \cup \dots \cup S_n$$

и

$$\emptyset \subseteq S_i \cup \dots \cup S_n$$

Теперь введем операцию пересечения на последовательностях классов

$$\langle S_1, \dots, S_n \rangle \cap \langle P_1, \dots, P_n \rangle = \langle X_1, \dots, X_n \rangle,$$

где

$$X_i = (S_1 \cup \dots \cup S_i) \cap P_i \cup S_i \cap (P_1 \cup \dots \cup P_i).$$

Заметим, что первый член пересечения двух последовательностей есть пересечение первых членов последовательностей

$$X_1 = S_1 \cap P_1 \cup S_1 \cap P_1 = S_1 \cap P_1$$

А последний член пересечения последовательностей есть объединение последних членов последовательностей

$$X_n = (S_1 \cup \dots \cup S_n) \cap P_n \cup S_n \cap (P_1 \cup \dots \cup P_n) = S_n \cap P_n$$

Если $n=2$, тогда мы имеем

$$\langle S_1, S_2 \rangle \cap \langle P_1, P_2 \rangle = \langle S_1 \cap P_1, S_2 \cup P_2 \rangle$$

Если $n=3$, то имеем

$$\langle S_1, S_2, S_3 \rangle \cap \langle P_1, P_2, P_3 \rangle = \langle S_1 \cap P_1, S_1 \cap P_2 \cup S_2 \cap P_1, S_3 \cup P_3 \rangle$$

Операция пересечения может быть введена матрицей

	P_1	P_2	P_3	$\dots$	P_n
S_1					
S_2					
S_3					
$\vdots$					
S_n					

Пересечение i -ой строки и j -ого столбца есть класс $S_i \cap P_j$. Член вновь образованной последовательности есть объединение некоторых пересечений. В случае операции $\cap$ имеем наглядную картину

	P_1	P_2	P_3	$\dots$	P_n	
S_1						
S_2						
S_3						
$\vdots$						
S_n						

К первому классу пересечения

$\langle S_1, \dots, S_n \rangle$ и $\langle P_1, \dots, P_n \rangle$ относится класс $S_1 \cap P_1$,

ко второму $S_2 \cap (P_1 \cup P_2) \cup P_2 \cap (S_1 \cup S_2)$,

к третьему - $S_3 \cap (P_1 \cup P_2 \cup P_3) \cup P_3 \cap (S_1 \cup S_2 \cup S_3)$,

к четвертому - $S_4 \cap (P_1 \cup P_2 \cup P_3 \cup P_4) \cup P_4 \cap (S_1 \cup S_2 \cup S_3 \cup S_4)$ и т.д.

Мы могли бы на пересечении строки и столбца писать номер члена образуемой последовательности, в состав объединения которых входит отмеченное произведение. Если в таблице нет номера некоторого члена новой последовательности, то этот член эквивалентен пустому классу. В случае пересечения последовательностей мы имеем:

	P_1	P_2	P_3	P_4	$\dots$	P_n
S_1	1	2	3	4	$\dots n$	
S_2	2	2	3	4	$\dots n$	
S_3	3	3	3	4	$\dots n$	
S_4	4	4	4	4	$\dots n$	
$\vdots$						
S_n	n	n	n	n	$\dots n$	

Нетрудно ввести так же операцию объединения последовательностей классов:

$$\langle S_1, \dots, S_n \rangle \cup \langle P_1, \dots, P_n \rangle = \langle Y_1, \dots, Y_n \rangle, \text{ где}$$

$$Y_i = S_i \cap (P_i \cup \dots \cup P_n) \cup P_i \cap (P_i \cap (S_i \cup \dots \cup S_n)).$$

Легко видеть, что

$$Y_1 = S_1 \cup P_1 \text{ и } Y_n = S_n \cap P_n$$

Для случая $n=3$ имеем

$$\langle S_1, S_2, S_3 \rangle \cup \langle P_1, P_2, P_3 \rangle = \langle S_1 \cup P_1, S_2 \cap P_2 \cup S_2 \cap P_3 \cup S_3 \cap P_2, S_3 \cap P_3 \rangle$$

Соответственно будем иметь матрицу

	P_1	P_2	P_3	P_4	...	P_n
S_1	1	1	1	1	...	1
S_2	1	2	2	2	...	2
S_3	1	2	3	3	...	3
S_4	1	2	3	4	...	4
$\vdots$						
S_n	1	2	3	4	...	n

Пусть W - множество всех последовательностей подклассов индивидуальной области, удовлетворяющих сформулированным выше требованиям; $,, , 0, 1$ введены выше.

Теорема. $\langle W, , , 0, 1 \rangle$ есть ограниченная дистрибутивная решетка.

Доказательство.

Как было показано выше, отношение включения $\subseteq$ является частичным порядком. Покажем, что выполняется условие

$$\langle S_1, \dots, S_n \rangle \subseteq \langle M_1, \dots, M_n \rangle \& \langle S_1, \dots, S_n \rangle \subseteq \langle P_1, \dots, P_n \rangle \Leftrightarrow \langle S_1, \dots, S_n \rangle \subseteq \langle M_1, \dots, M_n \rangle \cap \langle P_1, \dots, P_n \rangle \quad (I)$$

Левая часть соотношения (I) эквивалентна конъюнкции следующих четырех включений

- (1) $S_i \subseteq M_1 \cup \dots \cup M_i$
- (2) $M_i \subseteq S_i \cup \dots \cup S_n$
- (3) $S_i \subseteq P_1 \cup \dots \cup P_i$
- (4) $P_i \subseteq S_i \cup \dots \cup S_n$

Пусть

$$X_i = (M_1 \cup \dots \cup M_i) \cap (P_1 \cup \dots \cup P_i)$$

Тогда правая часть соотношения (I) эквивалентна конъюнкции следующих двух включений

- (5) $S_i \subseteq X_1 \cup \dots \cup X_i$
- (6) $X_i \subseteq S_i \cup \dots \cup S_n$

Покажем, что из (1)- (4) следует (5) и (6).

Из (1) и (3) получаем

$$(7) \quad S_i \subseteq (M_1 \cup \dots \cup M_i) \cap (P_1 \cup \dots \cup P_i)$$

Правая часть после применения закона дистрибутивности будет иметь вид

$$\begin{aligned} & M_1 \cap P_1 \cup M_2 \cap P_1 \cup \dots \cup M_i \cap P_1 \\ & M_1 \cap P_2 \cup M_2 \cap P_2 \cup \dots \cup M_i \cap P_2 \\ & \vdots \\ & M_1 \cap P_i \cup M_2 \cap P_i \cup \dots \cup M_i \cap P_i \end{aligned}$$

Проведем перестановку членов, поместив в отдельную группу левые члены k -ой строки до пересечения с k -тым столбцом включительно и члены верхней части k -того столбца до пересечения с k -ой строкой включительно. Каждая такая группа будет эквивалентна

$$\begin{aligned} X_1 &= M_1 \cap P_1 \cup M_1 \cap P_1 \\ X_2 &= (M_1 \cup M_2) \cap P_2 \cup M_2 \cap (P_1 \cup P_2) \\ & \vdots \\ X_i &= (M_1 \cup \dots \cup M_i) \cap P_i \cup M_i \cap (P_1 \cup \dots \cup P_i) \end{aligned}$$

И правая часть (7) эквивалентна $X_1 \cup \dots \cup X_i$.

Отсюда

$$S_i \subseteq X_1 \cup \dots \cup X_i$$

и тем самым имеет место (5).

Теперь из (2) и (4) выводим (6). Из (2) и (4) выводимо

$$(8) \quad M_i \cup P_i \subseteq S_i \cup \dots \cup S_n$$

Но из $(M_1 \cup \dots \cup M_i) \cap P_i$ выводимо $M_i \cup P_i$ и из $M_i \cap (P_1 \cup \dots \cup P_i)$ выводимо $M_i \cup P_i$, отсюда

$$(9) \quad X_i \subseteq M_i \cup P_i$$

Из (8) и (9) получаем

$$X_i \subseteq S_i \cup \dots \cup S_n$$

Что и требовалось, т.о. (6). Теперь из (5) и (6) выведем (1)-(4).

Для всякого $k \leq i$:

$$\begin{aligned} (M_1 \cup \dots \cup M_k) \cap P_k &\subseteq M_1 \cup \dots \cup M_i \\ M_k \cap (P_1 \cup \dots \cup P_k) &\subseteq M_1 \cup \dots \cup M_i \end{aligned}$$

Из последних двух соотношений выводим

$$(M_1 \cup \dots \cup M_k) \cap P_k \cup M_k \cap (P_1 \cup \dots \cup P_k) \subseteq M_1 \cup \dots \cup M_i$$

то есть для всякого $k \leq i$

$$X_k \subseteq M_1 \cup \dots \cup M_i$$

И отсюда

$$(10) \quad X_1 \cup \dots \cup X_i \subseteq M_1 \cup \dots \cup M_i$$

Из (5) и (10) получаем

$$(1) \quad S_i \subseteq M_1 \cup \dots \cup M_i$$

Аналогично, из (5) выводим (3).

Для всякого k , такого что $i \leq k \leq n$

$$S_k \cup \dots \cup S_n \subseteq S_i \cup \dots \cup S_n$$

Отсюда

$$X_k \subseteq S_i \cup \dots \cup S_n$$

и

$$(11) \quad X_i \cup \dots \cup X_n \subseteq S_i \cup \dots \cup S_n$$

$$M_i \subseteq M_i \cap (P_1 \cup \dots \cup P_i) \cup M_i \cap (P_i \cup \dots \cup P_n)$$

$$M_i \cap (P_1 \cup \dots \cup P_i) \subseteq X_i \subseteq X_i \cup \dots \cup X_n$$

$$M_i \cap (P_i \cup \dots \cup P_n) \subseteq X_i \cup \dots \cup X_n$$

Следовательно,

$$(12) \quad M_i \subseteq X_i \cup \dots \cup X_n$$

Из (11) и (12) получаем искомый результат

$$(2) \quad M_i \subseteq S_i \cup \dots \cup S_n$$

Аналогично, из (4)-(1) и $P_i \subseteq X_i \cup \dots \cup X_n$

получаем искомый результат

$$(4) \quad P_i \subseteq S_i \cup \dots \cup S_n$$

Таким образом, введенная операция является решеточной операцией пересечения.

Теперь обратимся к операции объединения. Докажем, что значимо следующее соотношение

$$\begin{aligned} \langle S_1, \dots, S_n \rangle \subseteq \langle M_1, \dots, M_n \rangle \& \langle P_1, \dots, P_n \rangle \subseteq \langle M_1, \dots, M_n \rangle \Leftrightarrow \\ \Leftrightarrow \langle S_1, \dots, S_n \rangle \cup \langle P_1, \dots, P_n \rangle \subseteq \langle M_1, \dots, M_n \rangle \quad (II) \end{aligned}$$

Левая часть утверждения (II) эквивалентна конъюнкции четырех включений

$$(13) \quad S_i \subseteq M_1 \cup \dots \cup M_i$$

$$(14) \quad M_i \subseteq S_i \cup \dots \cup S_n$$

$$(15) \quad P_i \subseteq M_1 \cup \dots \cup M_i$$

$$(16) \quad M_i \subseteq P_1 \cup \dots \cup P_n$$

Пусть $Y_i = S_i \cap (P_i \cup \dots \cup P_n) \cup P_i \cap (S_i \cup \dots \cup S_n)$

Тогда правая часть (II) эквивалентна конъюнкции двух включений

$$(17) \quad Y_i \cap M_1 \cup \dots \cup M_i$$

$$(18) \quad M_i \subseteq Y_i \cup \dots \cup Y_n$$

$S_i \cap (P_i \cup \dots \cup P_n)$ включается в $S_i \cup P_i$,

аналогично $P_i \cap (S_i \cup \dots \cup S_n)$ включается в $S_i \cup P_i$.

Отсюда

$$(19) \quad Y_i \subseteq S_i \cup P_i$$

Но из (13) и (15) получаем

$$(20) \quad S_i \cup P_i \subseteq M_1 \cup \dots \cup M_i$$

Из (19) и (20) получаем искомый результат

$$(17) \quad Y_i \subseteq M_1 \cup \dots \cup M_i$$

Из (14) и (16) получаем

$$(21) \quad M_i \subseteq (S_i \cup \dots \cup S_n) \cap (P_i \cup \dots \cup P_n)$$

Применяя закон дистрибутивности, получаем

$$S_i \cap P_i \cup \dots \cup S_n \cap P_i$$

$$S_i \cap P_{i+1} \cup \dots \cup S_n \cap P_{i+1}$$

$$\vdots$$

$$S_i \cap P_n \cup \dots \cup S_n \cap P_n$$

Объединение первого столбца и первой строки дает Y_i , объединение второго столбца, начиная со второй строки, и второй строки, начиная со второго столбца, дает Y_{i+1} , и так далее. Объединение всех членов дает нам $Y_i \cup \dots \cup Y_n$. Таким образом

$$(18) \quad M_i \subseteq M_1 \cup \dots \cup M_i$$

Теперь выведем из (17) включения (13) и (15).

Для всякого $k \leq i$ из (17) следует

$$Y_k \subseteq M_1 \cup \dots \cup M_i$$

Отсюда

$$(22) \quad Y_1 \cup \dots \cup Y_k \subseteq M_1 \cup \dots \cup M_i$$

Но в разложении $Y_1 \cup \dots \cup Y_i$ есть член $S_i \cap (P_i \cup \dots \cup P_n)$ и все члены вида $P_1 \cap S_i, \dots, P_i \cap S_i$, то есть $S_i \cap (P_1 \cup \dots \cup P_i)$. Поэтому

$$(23) \quad S_i \leq Y_i \cup \dots \cup Y_n$$

Из (23) и (22) получаем искомый результат

$$S_i \leq Y_1 \cup \dots \cup M_i \text{ т.е. (14)}$$

Аналогично, выводим из (17) соотношение (15). Теперь из (18) выведем (14) и (16). Для всякого k такого, что $i \leq k \leq n$

$$S_k \cap (P_k \cup \dots \cup P_n) \subseteq S_i \cup \dots \cup S_n$$

и

$$P_k \cap (S_k \cup \dots \cup S_n) \subseteq S_i \cup \dots \cup S_n$$

Отсюда для всякого k ($i \leq k \leq n$)

$$Y_k \subseteq S_i \cup \dots \cup S_n$$

и

$$(24) \quad Y_i \cup \dots \cup Y_n \subseteq S_i \cup \dots \cup S_n$$

Из (24) и (18) получаем

$$(14) \quad M_i \subseteq S_i \cup \dots \cup S_n.$$

(16) выводится из (18) аналогичным образом.

Следовательно, $\cup$ является решеточной операцией объединения. Выше было показано, что 0 является наименьшим и 1 наибольшим элементами. Следовательно, решетка является ограниченной. Доказательство того, что решетка является дистрибутивной мы дадим в дальнейшем другим методом.

Теперь введем три импликации и три отрицания

$$\langle S_1, \dots, S_n \rangle \rightarrow \langle P_1, \dots, P_n \rangle = \langle Z_1, \dots, Z_n \rangle,$$

н

$$\text{где } Z_1 = \bigcup_{i=1}^n (S_i \cap (P_1 \cup \dots \cup P_i))$$

и для $i > 1$:

$$Z_i = \bigcup_{k=1}^{n-1} (S_k \cap P_{(k+i)-1}), \text{ где } (k+i)-1 \leq n$$

В матричной форме имеем:

	P_1	P_2	P_3	P_4	...	P_n
S_1	1	2	3	4	..	n
S_2	1	1	2	3	...	n-1
S_3	1	1	1	2	...	n-2
S_4	1	1	1	1	...	n-3
$\vdots$						
S_n	1	1	1	1	...	1

Первый член есть объединение пересечений, стоящих в левой части от главной диагонали. Второй член есть объединение пересечений, стоящих в следующей правой диагонали, справа от главной, и т.д.;
→ есть не что иное как импликация Лукасевича.

Введем инволюцию

$$\sim \langle S_1, \dots, S_n \rangle = \langle X_1, \dots, X_n \rangle,$$

где $X_1 = S_{(n+1)-1}$

Операция $\sim$ выполняет законы де Моргана и снятия двойного отрицания.

$$\sim \sim S = S$$

$$\sim (S \cup P) = \sim S \cap \sim P$$

$$\sim (S \cap P) = \sim S \cup \sim P$$

В этом нетрудно убедиться. Легко видеть также, что

$$\sim \langle S_1, \dots, S_n \rangle = \langle S_1, \dots, S_n \rangle \rightarrow \langle \emptyset, \dots, \emptyset, 1 \rangle$$

Мы можем ввести на последовательностях классов импликацию Геделя.

$$\langle S_1, \dots, S_n \rangle \Rightarrow \langle P_1, \dots, P_n \rangle = \langle N_1, \dots, N_n \rangle,$$

n

$$\text{где } N_1 = Z_1 = \bigcup_{i=1}^n (S_i \cap (P_1 \cup \dots \cup P_i))$$

i=1

и для $i > 1$:

$$N_1 = \left(\bigcup_{k=1}^{i-1} S_k \right) \cap P_i$$

В матричной форме мы имеем

	P_1	P_2	P_3	P_4	...	P_n
S_1	1	2	3	4	...	n
S_2	1	1	3	4	...	n
S_3	1	1	1	4	...	n
S_4	1	1	1	1	...	n
$\vdots$						
S_n	1	1	1	1	...	1

Первый член таков же, что и для импликации Лукасевича; i -ый член (для $i > 1$) - это объединение пересечений, стоящих в i -ом столбце сверху до главной диагонали.

Можно доказать, что введенная импликация является относительным псевдодополнением, то есть

$$\langle M_1, \dots, M_n \rangle \cap \langle S_1, \dots, S_n \rangle \subseteq \langle P_1, \dots, P_n \rangle$$

тогда и только тогда, когда

$$\langle M_1, \dots, M_n \rangle \subseteq \langle S_1, \dots, S_n \rangle \Rightarrow \langle P_1, \dots, P_n \rangle$$

Может быть введено отрицание, являющееся псевдодополнением

$$\neg \langle S_1, \dots, S_n \rangle = \langle Y_1, \dots, Y_n \rangle, \text{ где}$$

$$Y_1 = S_n$$

$$Y_n = S_1 \cup \dots \cup S_{n-1}$$

$$Y_i = \emptyset, \text{ если } i \neq 1 \text{ и } i \neq n$$

Нетрудно видеть, что

$$\neg \langle S_1, \dots, S_n \rangle = \langle S_1, \dots, S_n \rangle \Rightarrow \langle \emptyset, \dots, \emptyset, 1 \rangle$$

Введем еще одну импликацию - назовем ее квазипостовской.

$$\langle S_1, \dots, S_n \rangle \mapsto \langle P_1, \dots, P_n \rangle = \langle T_1, \dots, T_n \rangle, \text{ где}$$

$$\text{где } T_1 = \bigcup_{i=1}^n (S_i \cap (P_1 \cup \dots \cup P_i))$$

И для $i > 1$:

$$\text{где } T_i = S_{i-1} \cap \left(\bigcup_{k=i}^n P_k \right)$$

В табличной форме имеем:

	P_1	P_2	P_3	P_4	...	P_n
S_1	1	2	2	2	...	2
S_2	1	1	3	3	...	3
S_3	1	1	1	4	...	4
S_4	1	1	1	1	...	5
$\vdots$						
S_n	1	1	1	1	...	1

Квазипостовской импликации соответствует циркулярное отрицание

$$\begin{aligned} -\langle S_1, \dots, S_n \rangle &= \langle T_1, \dots, T_n \rangle, \text{ где} \\ T_i &= S_{i+1}, \text{ если } i \neq n \\ T_n &= S_1, \text{ если } i = n \end{aligned}$$

Можно показать, что

$$-\langle S_1, \dots, S_n \rangle = \langle S_1, \dots, S_n \rangle \rightarrow \langle \emptyset, \dots, \emptyset, 1 \rangle$$

Мы можем ввести операторы D_i

$$\begin{aligned} D_i \langle S_1, \dots, S_n \rangle &= \langle M_1, \dots, M_n \rangle, \text{ где} \\ M_1 &= S_1 \cup \dots \cup S_i \\ M_n &= S_{i+1} \cup \dots \cup S_n \\ M_j &= \emptyset, \text{ если } j \neq 1 \text{ и } j \neq n \end{aligned}$$

Мы не определяем операцию для D_n , следуя традиции, хотя могли бы определить D_n

$$D_n \langle S_1, \dots, S_n \rangle = \langle 1, \emptyset, \dots, \emptyset \rangle$$

Помимо нулевого элемента

$$e_1 = \langle 1, \emptyset, \dots, \emptyset \rangle$$

и единичного

$$e_n = \langle \emptyset, \dots, \emptyset, 1 \rangle$$

Мы можем ввести e_i ($k \leq i \leq n$)

$$e_i = \langle M_1, \dots, M_i, \dots, M_n \rangle,$$

где $M_i = 1$ и если $i \neq j$, то $M_j = \emptyset$.

Теорема. $\langle W, \subseteq, \cap, \cup, 0, 1, \Rightarrow, \neg \rangle$ есть псевдобулева алгебра.

Во-первых, мы покажем, что редукт $\langle W, \subseteq, \cap, \cup, \Rightarrow \rangle$ есть решетка с относительным псевдодополнением, то есть выполняется следующее условие

$$\langle S_1, \dots, S_n \rangle \cap \langle P_1, \dots, P_n \rangle \subseteq \langle M_1, \dots, M_n \rangle$$

тогда и только тогда, когда

$$\langle P_1, \dots, P_n \rangle \subseteq \langle S_1, \dots, S_n \rangle \Rightarrow \langle M_1, \dots, M_n \rangle$$

Выше было показано, что $\langle W, \subseteq, \cup, \cap \rangle$ является решеткой. Покажем теперь, что $\Rightarrow$ является относительным псевдодополнением, то есть выполняется сформулированное выше условие. Пусть

$$\langle S_1, \dots, S_n \rangle \cap \langle P_1, \dots, P_n \rangle \subseteq \langle M_1, \dots, M_n \rangle$$

По определению пересечения для последовательностей мы имеем

$$\langle S_1 \cap P_1, \dots, (S_1 \cup \dots \cup S_n) \cap P_i \cup S_i \cap (P_1 \cup \dots \cup P_i), \dots, S_n \cup P_n \rangle \subseteq \langle M_1, \dots, M_n \rangle$$

и, вспомнив определение отношения включения, имеем для каждого i

$$(1) (S_1 \cup \dots \cup S_i) \cap P_i \cup S_i \cap (P_1 \cup \dots \cup P_i) \subseteq M_1 \cup \dots \cup M_i$$

$$(2) M_i \subseteq ((S_1 \cup \dots \cup S_i) \cap P_i \cap S_i \cap (P_1 \cup \dots \cup P_i)) \cup \dots \cup (S_n \cup P_n)$$

В свою очередь

$$\langle S_1, \dots, P_n \rangle \subseteq \langle S_1, \dots, S_n \rangle \Rightarrow \langle M_1, \dots, M_n \rangle$$

имеет место, когда

$$\langle P_1, \dots, P_n \rangle \subseteq \langle \bigcup_{j=1}^n (S_j \cap (M_1 \cup \dots \cup M_j)), \dots, \bigcup_{k=1}^{i-1} (S_k \cap M_i) \cup \dots \bigcup_{k=1}^{n-1} (S_k \cap M_n) \rangle$$

и для каждого i

$$(A) P_i \subseteq \bigcup_{j=1}^n (S_j \cap (M_1 \cup \dots \cup M_j)) \cup \bigcup_{k=1}^{i-1} (S_k \cap M_i)$$

$$(B) \bigcup_{k=1}^{i-1} (S_k \cap M_i) \subseteq P_i \cup \dots \cup P_n$$

Из (1) получается, что

$$(S_1 \cup \dots \cup S_i) \cap P_i \subseteq M_1 \cup \dots \cup M_i,$$

и для каждого j , такого что $1 \leq j \leq i$

$$S_j \cap P_i \subseteq S_j \cap (M_1 \cup \dots \cup M_i)$$

Но $S_j \cap (M_1 \cup \dots \cup M_i)$ для $1 \leq j \leq i$ включается в правую часть A (обозначим ее буквой X). С другой стороны

$$S_{i+1} \subseteq X$$

Отсюда

$$(S_{i+1} \cup \dots \cup S_n) \cap P_i \subseteq X$$

и поскольку, как мы показали

$$(S_1 \cup \dots \cup S_i) \cap P_i \subseteq X, \text{ то } P_i \subseteq X$$

Таким образом, из (1) получаем (A).

Пусть имеет место (2)

$$M_i \subseteq (S_1 \cup \dots \cup S_i) \cap P_i \cup S_i \cap (P_1 \cup \dots \cup P_i) \cup \dots \cup (S_n \cup P_n)$$

Пусть $1 \leq k \leq i-1$, тогда

$$S_k \cap M_i \subseteq S_k \cap ((S_1 \cup \dots \cup S_i) \cap P_i \cup S_i \cap (P_1 \cup \dots \cup P_i) \cup \dots \cup (S_n \cup P_n))$$

$$S_k \cap M_i \subseteq S_k \cap P_i \cup S_k \cap P_n$$

$$S_k \cap M_i \subseteq P_i \cup P_n$$

$$S_i \cap M_i \subseteq P_i \subseteq P_i \cup P_n$$

Отсюда

$$(S_1 \cup \dots \cup S_i) \cap M_i \subseteq P_i \cup \dots \cup P_n,$$

таким образом из (2) получаем (B).

Аналогично можно показать, что из (A) и (B) следует (1) и (2).

Таким образом, введенная операция является относительным псевдодополнением.

Выше было показано, что 0 и 1 являются соответственно нулем и единицей псевдобулевой алгебры. Нетрудно показать, что $\neg$ является псевдодополнением. Таким образом, теорема доказана.

Теорема $\langle W, \cap, \cup, 1, \Rightarrow, \neg, D_1, \dots, D_{k-1}, e_1, \dots, e_n \rangle$ есть постовская алгебра.

Прежде всего покажем, что

$$D_i \langle (S_1, \dots, S_n) \cup (P_1, \dots, P_n) \rangle = D_i \langle S_1, \dots, S_n \rangle \cup \langle D_i(P_1, \dots, P_n) \rangle$$

По определению $\cup$ и D_i имеем

$$\begin{aligned}
(A) \quad D_i(<S_1, \dots, S_n> \cup <P_1, \dots, P_n> = \\
= D_i(<S_1 \cup P_1, \dots, S_i \cap (P_i \cup \dots \cup P_n) \cup P_i \cap (S_i \cup \dots \cup S_n), \dots, S_n \cap P_n> = \\
= <(S_1 \cup P_1) \cup \dots \cup S_i \cup (P_i \cup \dots \cup P_n) \cup P_i \cap (S_i \cup \dots \cup S_n) \emptyset, \dots, \emptyset, \\
S_{i+1} \cap (P_{i+1} \cup \dots \cup P_n) \cup P_{i+1} \cap (S_{i+1} \cup \dots \cup S_n) \cup \dots \cup (S_n \cap P_n)
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
(B) \quad D_i(<S_1, \dots, S_n> \cup D_i(<P_1, \dots, P_n> = \\
<S_1 \cup \dots \cup S_i, \emptyset, \dots, \emptyset, S_{i+1} \cup \dots \cup S_n> \cup <P_1 \cup \dots \cup P_i, \emptyset, \dots, \emptyset, P_{i+1} \cup \dots \cup P_n> = \\
= <S_1 \cup \dots \cup S_i \cup P_1 \cup \dots \cup P_i, \emptyset, \dots, \emptyset, (S_{i+1} \cup \dots \cup S_n) \cap (P_{i+1} \cup \dots \cup P_n)>
\end{aligned}$$

Но правая часть равенства (А) равна правой части равенства (В).

Действительно,

$$\begin{aligned}
S_1 \cup P_1 \cup \dots \cup S_i \cap (P_i \cup \dots \cup P_n) = S_1 \cup \dots \cup S_i \cup P_1 \quad \text{и} \\
S_1 \cup P_1 \cup \dots \cup P_i \cap (S_i \cup \dots \cup S_n) = P_i \cup \dots \cup P_1 \cup S_1 \quad \text{и отсюда} \\
S_1 \cup P_1 \cup \dots \cup S_i \cap (P_i \cup \dots \cup P_n) \cup P_i \cap (S_i \cup \dots \cup S_n) = S_1 \cup \dots \cup S_i \cup P_1 \cup \dots \cup P_i
\end{aligned}$$

Аналогично

$$\begin{aligned}
(S_{i+1} \cup \dots \cup S_n) \cap (P_{i+1} \cup \dots \cup P_n) = \\
= S_{i+1} \cap (P_{i+1} \cup \dots \cup P_n) \cup P_{i+1} \cap (S_{i+1} \cup \dots \cup S_n) \cup \dots \cup S_n \cap P_n
\end{aligned}$$

Доказательство соотношения

$$D_i(<S_1, \dots, S_n> \cap <P_1, \dots, P_n>) = D_i<S_1, \dots, S_n> \cap D_i<P_1, \dots, P_n>$$

аналогично предыдущему.

Нетрудно также показать, что

$$\begin{aligned}
D_i(<S_1, \dots, S_n> \Rightarrow <P_1, \dots, P_n>) = \\
= D_1<S_1, \dots, S_n> \Rightarrow D_1(P_1, \dots, P_n) \cap \dots \cap D_i<S_1, \dots, S_n> \Rightarrow D_i<P_1, \dots, P_n>
\end{aligned}$$

Простой проверкой убеждаемся, что

$$\begin{aligned}
D_i \neg <S_1, \dots, S_n> &= \neg D_{n-1} <S_1, \dots, S_n> \\
D_i(D_j <S_1, \dots, S_n>) &= D_j <S_1, \dots, S_n> \\
D_{n-1} <S_1, \dots, S_n> \cup \neg D_{n-1} <S_1, \dots, S_n> &= <1, \emptyset, \dots, \emptyset> \\
e_i &= <\emptyset, \dots, 1, \dots, \emptyset>
\end{aligned}$$

$$D_i(e_j) = 1, \text{ если } j \leq i$$

$$D_i(e_j) = 0, \text{ если } j > i$$

Заметим, что

$$D_i<S_1, \dots, S_n> \cap e_i = <\emptyset, \dots, S_1 \cup \dots \cup S_i, \emptyset, \dots, S_{i+1} \cup \dots \cup S_n>$$

Отсюда

$$<S_1, \dots, S_n> = D_1<S_1, \dots, S_n> \cap e_1 \cup \dots \cup D_{n-1} <S_1, \dots, S_n> \cap e_{n-1}$$

Таким образом, теорема доказана.

Мы подчеркивали, что многомерная логика не является многозначной логикой. Однако имеется тесная связь этих типов логик. Предикат мы отождествляем с последовательностью классов, тогда атомарное утверждение естественно рассматривать как утверждение о принадлежности элемента выделенному классу. В n -мерной логике мы будем иметь n типов атомарных предложений.

$a \in_i \langle S_1, \dots, S_n \rangle$ тогда и только тогда, когда $a \in S_i$. Однако мы можем иметь дело с одним отношением принадлежности и функцией оценки

$$|a \in \langle S_1, \dots, S_n \rangle| = i \Leftrightarrow a \in S_i$$

Функция оценки может быть расширена. Пусть S, P суть последовательности. Тогда

$$|a \in S \cap P| = \max(|a \in S|, |a \in P|)$$

$$|a \in S \cup P| = \min(|a \in S|, |a \in P|)$$

$$|a \in S \rightarrow P| = \max(1, |a \in P| - |a \in S| + 1)$$

$$|a \in S \Rightarrow P| = \begin{cases} 1, \text{если } |a \in S| \geq |a \in P| \\ |a \in P|, \text{если } |a \in S| < |a \in P| \end{cases}$$

$$a \in |S \rightarrow P| = \begin{cases} 1, \text{если } |a \in S| \geq |a \in P| \\ \min(|a \in S| + 1, |a \in P|), \text{если } |a \in S| < |a \in P| \end{cases}$$

$$|a \in \sim P| = n + 1 - |a \in P|$$

$$|a \in \neg P| = \begin{cases} 1, \text{если } |a \in P| = n \\ n, \text{если } |a \in P| \neq n \end{cases}$$

$$|a \in -P| = \begin{cases} 1, \text{если } |a \in P| = n \\ |a \in P| + 1, \text{если } |a \in P| < n \end{cases}$$

$$|a \in D_i P| = \begin{cases} 1, \text{если } |a \in P| \leq i \\ n, \text{если } |a \in P| > i \end{cases}$$

$$|a \in e_i| = i$$

Сравнение построенных многомерных алгебр классов с многомерными силлогистиками Н.А.Васильева будет осуществлено в следующей статье.

Отметим, что мы рассматривали только конечные линейные последовательности классов. Этот подход может быть обобщен, если

перейти к обобщенным последовательностям, где порядок частичный.

Литература

1. *Васильев Н.А.* Воображаемая (неаристотелева) логика. - //Журнал министерства народного просвещения, Н.С., 1912, август, с.207-246 (перепечатано в [3]).
2. *Васильев Н.А.* Логика и металогики. - //Логос, 1912-1913, номера 1-2, с. 53-81 (перепечатано в [3]).
3. *Васильев Н.А.* Воображаемая логика. Избранные труды. /Отв. редактор В.А.Смирнов. М., Наука, 1989.
4. *Бочаров В.А.* Булева алгебра в терминах силлогистики. - // Логические исследования (Труды научно-исследовательского семинара по логике. ИФАН. М., 1983).
5. *Ивановский Вл.* Отчет о докладе Н.А.Васильева "Неэвклидова геометрия и неаристотелева логика" в физико-математическом обществе. - //Камско-Волжская Речь. Казань 1911, 16,19,22,25 января (перепечатано в [3]).
6. *Kripke S.* Outline of a theory of truth// The Journal of Philosophy. 1975. Vol. 72. P.690-715.
7. *Мальцев А.И.* Интерактивные алгебры и многообразия Поста. //Избранные труды, т.II, с.316-330.
8. *Rasiowa H.* An algebraic approach to non-classical logics. Warszawa-Amsterdam, 1974.
9. *Смирнов В.А.* Логические методы анализа научного знания. М., Наука, 1987.
10. *Смирнов В.А.* Аксиоматизация логических систем Н.А. Васильева.- //Современная логика и методология науки. М., МГУ. 1987., с. 143-151.
11. *Smirnov V.A.* Modality de re and Vasiliev's imaginary logics// Logique et Analyse. 1986. Vol. 114.
12. *Smirnov V.A.* Internal and external logic// Bulletin of the Section of Logic. 1988. Vol. 17. N 3/4. p170-181.
13. Логические идеи Васильева Н.А. и современная логика. // [3].
14. *Smirnov V.A.* The logical ideas of N.A.Vasiliev and modern logic// Logic, Methodology and Philosophy of Science VIII, Studies in Logic and the Foundation of Mathematics. Vol. 126. Amsterdam, 1989. p625-640.
15. *Смирнова Е.Д.* Логическая семантика и философские основания логики. М., МГУ, 1986.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО ПОГРУЖЕНИЯ АРИСТОТЕЛЕВСКОЙ СИЛЛОГИСТИКИ В ПРОПОЗИЦИОНАЛЬНУЮ ЛОГИКУ¹

Аристотелевская силлогистика погружается в классическую пропозициональную логику. Другими словами, существует перевод T аристотелевской силлогистики в пропозициональную логику такой, что для любой формулы α аристотелевской силлогистики:

α - доказуема $\Leftrightarrow T(\alpha)$ - доказуемо в пропозициональной логике, т.е. тавтология.

В данной статье мы приводим набросок доказательства указанной теоремы.

В дальнейшем мы трактуем аристотелевскую силлогистику как формальную систему T , сформулированную табличным методом. Эта система T эквивалентна ее версии гильбертовского типа, как она сформулирована Лукасевичем.

Определение 1. Правильно-построенные формулы системы T определяются обычным образом с использованием такого алфавита:

1. Бесконечный список именных переменных $p_1, p_2, p_3, \dots$
2. Логические символы: $\sim$ (отрицание) и $\vee$ (дизъюнкция),
3. Два функтора: A (общеутвердительный) и I (частноутвердительный),
4. Некоторые технические символы.

Другие логические символы и функторы вводятся по определению.

Мы используем латинские буквы: a (с каким-либо индексом), b, c, d, e, u, v как метасимволы для именных переменных и греческие: α, β, η, π как метасимволы для формул. Мы также употребляем понятия позитивной и негативной частей формулы в соответствии с определением, предложенным Шютте. Знакомство с этими понятиями будет предполагаться.

Определение 2. Система T имеет следующие аксиомы и правила редукции:

Аксиомные схемы:

1. $F[\pi +, \pi -]$, где π является атомарной формулой,
2. $F[Aaa +]$,
3. $F[Iab +, Iab -]$,
4. $F[Iaa +]$.

Правила редукции:

¹ Пер. с англ. Е.А.Сидоренко

- $$\begin{array}{l}
1. \vee - \frac{G[\alpha \vee \beta -]}{G[\alpha \vee \beta -] \vee \sim \alpha \quad G[\alpha \vee \beta -] \vee \sim \beta} \\
2. R_1 \frac{G[Aab -, Abc -]}{G[Aab -, Abc -] \vee \sim Aac} \\
3. R_2 \frac{G[Iab -, Abc -]}{G[Iab -, Abc -] \vee \sim Iac} \\
4. R_3 \frac{G[Iba -, Abc -]}{G[Iba -, Abc -] \vee \sim Iac -} \\
5. R_4 \frac{G[Aab -]}{G[Aab -] \vee \sim Iab}
\end{array}$$

Если формула α доказуема в данной системе, то мы записываем это как $\vdash \alpha$ (в Т).

Мы можем ввести все хорошо известные структурные правила как производные в этой системе.

Определение 3. Таблица называется нормальной, если каждое правило редукции применено так, как оно может применяться при ограничении: редукционное правило R применяется к формуле α , если только R и α удовлетворяют следующим условиям:

1. α содержит все главные формулы правила R как негативные части.

2. α не является аксиомой.

3. α не содержит подформулы в качестве негативной части, которая имеет ту же самую форму, что и одна из боковых формул R. Если R не есть правило $\vee -$, то α удовлетворяет дополнительному условию:

4. α есть формула, к которой $\vee -$ не может быть применено в смысле 1, 2 и 3.

Для любой формулы мы можем в конечное число шагов получить нормальную таблицу этой формулы.

Определение 4. Если некоторая ветвь нормальной таблицы заканчивается формулой, отличной от аксиомы, то мы называем ее хинтикковской формулой.

В дальнейшем обсуждении эта формула играет важную роль.

Пример 1. Пусть a, b, c - различные именные переменные. Тогда,

$$\begin{array}{l}
\vee - \frac{\sim(Aab \vee Aac) \vee Aac \vee \sim Abd}{\sim(Aab \vee Aac) \vee Aac \vee \quad | \quad \sim(Aab \vee Aac) \vee Aac \vee} \\
R_1 \frac{\sim Abd \vee \sim Aab \quad \sim Abd \vee \sim Aac}{\sim(Aab \vee Aac) \vee Aac \vee \sim Abd} \quad \text{аксиома} \\
R_4 \frac{\vee \sim Aab \vee \sim Aad}{\sim(Aab \vee Aac) \vee Aac \vee \sim Abd} \\
R_4 \frac{\vee \sim Aab \vee \sim Aad \vee \sim Ibd}{\sim(Aab \vee Aac) \vee Aac \vee \sim Abd} \\
R_4 \frac{\vee \sim Aab \vee \sim Aad \vee \sim Ibd \vee \sim Iab}{\sim(Aab \vee Aac) \vee Aac \vee \sim Abd} \\
R_3 \frac{\vee \sim Aab \vee \sim Aad \vee \sim Ibd \vee \sim Iab \vee \sim Iad}{\sim(Aab \vee Aac) \vee Aac \vee \sim Abd} \\
R_3 \frac{\vee \sim Aab \vee \sim Aad \vee \sim Ibd \vee \sim Iab \vee \sim Iad \vee \sim Idd}{\sim(Aab \vee Aac) \vee Aac \vee \sim Abd} \\
R_3 \frac{\vee \sim Aab \vee \sim Aad \vee \sim Ibd \vee \sim Iab \vee \sim Iad \vee \sim Idd \vee \sim Ibb}{\sim(Aab \vee Aac) \vee Aac \vee \sim Abd \vee \sim Aab \vee \sim Aad \vee \sim Ibd \vee \sim Iab \vee \sim Iad \vee \sim Idd \vee \sim Ibb \vee \sim Ibd} \quad \text{(Хинтиковская формула).}
\end{array}$$

Система **T** погружается в одномерное исчисление предикатов без функциональных символов, обозначаемое как **PD**. Список предикативных символов этого исчисления: $P_1, P_2, P_3, \dots$

Определим понятие перевода, или карты погружения, T_1 системы **T** в **PD**.

Определение 5. Предположим, что $P_1, P_2, P_3, \dots$ корреспондируют именным переменным $p_1, p_2, p_3, \dots$ соответственно. Мы обозначаем, например, как Pa предикатный символ, корреспондирующий именной переменной a . Далее, пусть $a_1, a_2, \dots, a_n$ в том порядке, в каком они входят в список именных переменных, суть все те именные переменные, которые встречаются в формуле α . Тогда мы определяем:

$$E(\alpha) = \exists x P a_1(x) \wedge \dots \wedge \exists x P a_n(x).$$

Мы определяем также $T'(\alpha)$ следующим рекурсивным образом:

$$1. T'(Aab) = \forall x (Pa(x) \supset Pb(x)),$$

2. $T'(Iab) = \exists x(Pa(x) \wedge Pb(x))$,
3. $T'(\sim \alpha) = \sim T'(\alpha)$,
4. $T'(\alpha \vee \beta) = T'(\alpha) \vee T'(\beta)$.

Теперь определяем перевод T_1 в терминах E и T' :

$$T_1(\alpha) = E(\alpha) \supset T'(\alpha)$$

Если дана хинтикковская формула, мы строим по ней финитную модель PD . Для этого требуются еще некоторые определения.

Определение 6. Мы принимаем определение порядка именных переменных, которое зависит от хинтикковской формулы η и удовлетворяет хорошо известным аксиомам порядка. Для именных переменных a и b мы обозначаем как $a \leq \eta b$, если выполняется одно из следующих условий:

1. a и b являются одной и той же именной переменной,
2. η включает атомарную формулу Aab в качестве своей негативной части.

Мы пишем $a = \eta b$ в случае, когда $a \leq \eta b$ и $b \leq \eta a$.

Определение 7. Пусть $p_1 \leq p_2 \leq \dots$ есть последовательность всех простых чисел, η - хинтикковская формула и $a_1, a_2, \dots, a_n$ - все те именные переменные, которые встречаются в η и взятые в том порядке, в котором они входят в список именных переменных. Мы определяем карту $pr\eta$, зависящую от η , следующим образом:

Для любой переменной a :

$$pr\eta(a) = \begin{cases} p_i & \text{если } a \text{ есть } a_i, \\ 1 & \text{если } a \text{ не встречается в } \eta. \end{cases}$$

Определение 8. Для хинтикковской формулы η моделью $M\eta = \langle D, \wedge \rangle$ в PD , определенной ниже, называется конечная модель, определенная на основе η , где D есть область $M\eta$ и $\wedge$ есть приписывание одномерного предикатного символа подмножествам из D :

$$D = \{pr\eta(u) \cdot pr\eta(v) \mid u \text{ и } v - \text{именные переменные}\}$$

(Заметим, что это конечное множество.)

Для именной переменной a :

$$\wedge Pa = \{pr\eta(u) \mid u \leq \eta a\} \cup \{pr\eta(u) \cdot pr\eta(v) \mid u \leq \eta a \text{ и } \eta$$

содержит Iuv или Ivu как негативную часть}

Эта модель $M\eta$ обладает следующим важным свойством.

Теорема 1. Если некоторая ветвь нормальной таблицы α заканчивается хинтикковской формулой, то

$$M\eta \not\models T_1(\alpha).$$

То есть, $M\eta$ фальсифицирует $T_1(\alpha)$.

Пример 2. В нормальной таблице, показанной в примере 1, α - это самая верхняя формула, а η - встречающаяся здесь хинтикковская формула. Мы предполагаем, что именные переменные a, b, c, d встречаются в списке именных переменных именно в указанном порядке. Тогда $pr\eta(a) = 2$, $pr\eta(b) = 3$, $pr\eta(c) = 5$, $pr\eta(d) = 7$ и $pr\eta(e) = 1$, e есть именная переменная, отличная от a, b, c, d . Поэтому $M\eta = \langle D, \wedge \rangle$ имеет:

$D = \{1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 10, 14, 15, 21, 25, 35, 49\},$

$\hat{P}a = \{2, 6, 14\},$

$\hat{P}b = \{2, 3, 6, 14, 9, 21\},$

$\hat{P}c = \{5\},$

$\hat{P}d = \{2, 3, 7, 6, 14, 9, 21, 49\},$

$\hat{P}e = \{1\}.$

И $M \not\models T_1(\alpha).$

В соответствии с теоремой 1 получается следующая теорема полноты, или теорема погружаемости:

Теорема 2.

$\vdash \alpha (в T) \Leftrightarrow \models T_1(\alpha), \text{ т.е., } \vdash T_1(\alpha) \text{ в } PD.$

Результаты Левенгейма, Сколема и Бехмана уместно востребовать здесь для решения проблемы разрешимости для PD.

Мы используем букву g (с индексом) как метасимвол для формул из PD и список пропозициональных переменных $X_1, X_2, X_3, \dots$ пропозициональной логики, обозначаемой как PP. Запись $f(j)$ обозначает единообразную подстановку натурального числа j вместо свободной переменной x , встречающейся в формуле f из PD.

Определение 9. Мы рекурсивно определяем карту T_2 декартова произведения $PD \times PD$ в PP следующим образом: пусть f, g, g_1, g_2 - формулы PD, где f имеет n различных предикатных символов, и $m = 2^n$.

1. $T_2(f, P_i(j)) = X_k$, где $k = 1/2(i+j-1)(i+j-2) + j$,

2. $T_2(f, \sim g) = \sim T_2(f, g),$

3. $T_2(f, g_1 * g_2) = T_2(f, g_2)$, где $*$ - один из бинарных логических символов,

4. $T_2(f, \forall g) = T_2(f, g(1)) \wedge T_2(f, g(2)) \wedge \dots \wedge T_2(f, g(m)),$

5. $T_2(f, \exists g) = T_2(f, g(1)) \vee T_2(f, g(2)) \vee \dots \vee T_2(f, g(m)).$

Тогда получается следующая теорема:

Теорема 3.

$\vdash f (в PD) \Leftrightarrow \vdash T_2(f, f) (в PP), \text{ т.е., } T_2(f, f) \text{ есть тавтология.}$

Теперь можно приступить к погружению T в PP.

Определение 10. Диагональная карта Δ есть карта PD в $PD \times PD$, соответствующая отношению f к (f, f) .

Определение 11. Карта $T = T_2 \circ \Delta \circ T_1$ есть композиция T_1, Δ и T_2 . Это есть перевод T в PP такой, что для формулы α :

$T(\alpha) = T_2(T_1(\alpha), T_1(\alpha)).$

В соответствии с теоремами 2 и 3 T погружает T в PP, на этом основании имеем следующую теорему:

Теорема 4.

$(в T) T() (в PP), \text{ т.е., } T() \text{ есть тавтология.}$

Пример 3.

$T(Ap_1p_2 \supset Ip_1p_2) =$
 $= ((X_1 \vee X_3 \vee X_6 \vee X_{10}) \wedge (X_2 \vee X_5 \vee X_9 \vee X_{14})) \supset$
 $((X_1 \supset X_2) \wedge (X_3 \supset X_5) \wedge (X_6 \supset X_9) \wedge (X_{10} \supset X_{14})) \supset$
 $((X_1 \wedge X_2) \vee (X_3 \wedge X_5) \vee (X_6 \wedge X_9) \vee (X_{10} \wedge X_{14})).$

Данная формула является тавтологией, и поэтому $Ap_1p_2 \supset Ip_1p_2$ является доказуемой в T.

ЛИТЕРАТУРА

1. *Hilbert D. und Ackermann W.*, Grundzuge der theoretischen Logik. Springer, Berlin, 1928.
2. *Kanai, N.*, The Characterization of the Aristotelian Syllogistic by the Countable Models (abstract) // Proceeding of VIII International Congress of Logic, Methodology and Philosophy of Science. Vol.1. Moscow, 1987. P.260-262.
3. *Kanai N.* Gentzen-Type Formulation of Syllogistic and its Completeness with respect to the Models of First-Order Predicate Logic (in Japanese), Thesis; Tokyo University of Science, 1988.
4. *Lukasiewicz J.* Aristotle's Syllogistic from the Standpoint of Modern Formal Logic, second ed. Oxford University Press, Oxford, 1957.
5. *Maehara S.* Mathematical Logic (in Japanese). Baihukan, Tokyo, 1973.
6. *Novikov P.* Elements of Mathematical Logic. London, 1964.
7. *Schutte K.* Beweistheorie. Springer, Heidelberg-Berlin, 1957.
8. *Smullian R.M.* First-Order Logic. Springer-Verlag, Berlin-Heidelberg-New York, 1968.

КАТЕГОРНАЯ СЕМАНТИКА ДЛЯ ПАРАНЕПРОТИВОРЕЧИВЫХ ЛОГИК*

В статье предложены две конструкции категорной семантики для паранепротиворечивой логики да Косты [6]. Первая из них представляет собой модификацию понятия N -категории [9], а вторая основывается на конструкции топоса функторов из малой категории в категорию множеств Set . Рассмотрены вопросы непротиворечивости и полноты системы C_1 да Косты в данной семантике.

1. Введение

1.1. В настоящее время существует много систем паранепротиворечивой логики (см. в этой связи [3]), поэтому сразу уточним, что в данной работе речь идет лишь о пропозициональных исчислениях C_n ($1 \leq n \leq \omega$), введенных Н.да Костой [6] в 1963 г. Первая алгебраизация C_n была дана да Костой [7] и изучена им самим, А.М.Сетте и М.Фиделем. При этом долгое время оставался открытым вопрос о возможности построения алгебры Линденбаума для C_n . После того как К.Мортенсен установил, что не существует отношения эквивалентности для C_n , позволяющего определить нетривиальную фактор-алгебру, стало ясным, что алгебраической версии данных исчислений в обычном смысле получить не удастся.

1.2. В 1984 г. У.А.Карниелли и Л.П.де Алькантара [5] сформулировали понятие алгебры да Косты, отражающей большинство логических свойств C_n . Было показано, что алгебра да Косты изоморфна паранепротиворечивой алгебре множеств, что может рассматриваться как аналог теоремы Стоуна о представлении для булевой алгебры. Однако эта аналогия возможна лишь в неклассическом смысле: некоторые операции в паранепротиворечивой алгебре множеств сформулированы не в терминах обычных теоретико-множественных операций.

Поскольку рассматриваемые в данной работе категорные конструкции основаны на алгебре да Косты, то в этой связи приведем полные определения, которые будут использованы в дальнейшем изложении.

1.3. **Определение.** Алгебра да Косты представляет собой структуру

$$\mathcal{A} = \langle S, 0, 1, \leq, \wedge, \vee, \supset, ' \rangle,$$

такую, что для каждого a, b, c в S выполняются следующие условия:

(1) $\leq$ есть предпорядок;

* Работа выполнена при поддержке Российского Фонда фундаментальных исследований, грант 93-06-10708.

- (2) $a \wedge b \leq a, a \wedge b \leq b$;
- (3) если $c \leq a$ и $c \leq b$, то $c \leq a \wedge b$;
- (4) $a \wedge a = a, a \vee a = a$;
- (5) $a \wedge (b \vee c) = (a \wedge b) \vee (a \wedge c)$;
- (6) $a \leq a \vee b, b \leq a \vee b$;
- (7) если $a \leq c$ и $b \leq c$, то $a \vee b \leq c$;
- (8) $a \wedge (a \supset b) \leq b$;
- (9) если $a \wedge c \leq b$, то $c \leq (a \supset b)$;
- (10) $0 \leq a, a \leq 1$;
- (11) $x^0 \leq (x')^0$, где $x^0 = (x \wedge x')'$;
- (12) $x \vee x' \equiv 1$, где $a \equiv b$ тогда и только тогда, когда $a \geq b$ и $b \leq a$;
- (13) $x'' \leq x$, где x'' есть сокращение для $(x')'$;
- (14) $a^0 \leq (b \supset a) \supset ((b \supset a') \supset b')$;
- (15) $x^0 \wedge (x^0)' \equiv 0$.

Если существует $x \in S$, такой, что $x \wedge x' \neq 0$, то говорят, что алгебра $\mathcal{A}$ является собственной алгеброй да Косты.

1.4.Предложение. Любая алгебра да Косты обладает следующими свойствами:

- (C1) $y \leq x$ тогда и только тогда, когда $x \wedge y \equiv y$;
- (C2) $x \wedge 0 \equiv 0, x \vee 1 \equiv 1$;
- (C3) $x \vee 0 \equiv x, x \wedge 1 \equiv x$;
- (C4) $x \vee y \equiv y \vee x, x \wedge y \equiv y \wedge x$;
- (C5) если $x = y$, то $x \equiv y$;
- (C6) если $a \equiv b$ и $x \equiv y$, то $x \wedge a \equiv y \wedge b$;
- (C7) если $a \equiv b$ и $x \equiv y$, то $x \vee a \equiv y \vee b$;
- (C8) $y \leq x$ тогда и только тогда, когда $y \vee x \equiv x$;
- (C9) если $x \vee y \equiv 0$, то $x \equiv 0$ и $y \equiv 0$;
- (C10) если $x \leq y^0$ и $x \leq (y^0)'$, то $x \equiv 0$;
- (C11) $p \vee (p' \wedge p^0) \equiv 1, p' \vee (p \wedge p^0) \equiv 1$;
- (C12) $x \wedge y \equiv 0$ тогда и только тогда, когда $x \leq y' \wedge y^0$;
- (C13) $x \wedge (y \wedge y^0) \equiv 0$ тогда и только тогда, когда $x \leq y'$;
- (C14) $x \wedge x' \wedge x^0 \equiv 0$;
- (C15) если $x \wedge (x')^0 \equiv 0$, то $x \equiv x''$;
- (C16) если $x' \wedge (x')^0 \equiv 0$, то $x \equiv x''$;
- (C17) если $x \wedge y \equiv 0$, то $x \leq y'$;

(C18) если $y \equiv y^0$, то $x \wedge y \equiv 0$ тогда и только тогда, когда $x \leq y'$;

(C19) $x \wedge y' \wedge y^0 \equiv 0$ тогда и только тогда, когда $x \leq y$.

Доказательство очевидно. ■

Здесь и в дальнейшем знак ■ означает конец доказательства.

1.5. Первый вариант предлагаемой категорной семантики основывается на переформулировке алгебры да Косты в виде категории порядка, снабженной функтором, призванным отобразить свойства отрицания, и обладающей резидуалом, моделирующим свойства импликации. Подобная процедура была проделана А.Рискосом и М.Л.Лайтой [9] для булевой алгебры, результатом чего явились так называемые N-категории.

1.6. **Определение.** N-категория $\mathcal{C}$ представляет собой категорию предпорядка, снабженную контравариантным функтором $\mathbb{N}: \mathcal{C} \rightarrow \mathcal{C}$, таким, что:

(i) $\mathcal{C}$ имеет конечный объект 1;

(ii) $\mathcal{C}$ имеет конечные копроизведения $[-, -]$;

(iii) Функтор $\mathbb{N}^2$ натурально эквивалентен тождеству в $\mathcal{C}$, т.е. $\mathbb{N}^2 a \cong a$ для любого объекта из $\mathcal{C}$;

(iv) $a \rightarrow b$ есть стрелка в $\mathcal{C}$ тогда и только тогда, когда $[\mathbb{N}a, b] \cong 1$ для любых двух объектов a, b в $\mathcal{C}$.

1.7. **Замечание.** Любая N-категория $\mathcal{C}$ имеет следующие свойства:

1.7.1. $\mathcal{C}$ имеет начальный объект $0 = \mathbb{N}1$.

1.7.2. $\mathcal{C}$ имеет конечные произведения, $\langle a, b \rangle = \mathbb{N}[\mathbb{N}a, \mathbb{N}b]$ (закон де Моргана).

1.7.3. $\mathcal{C}$ дистрибутивна, т.е. $\langle [a, b], [a, c] \rangle \cong [a, \langle b, c \rangle]$.

1.7.4. $\mathcal{C}$ имеет резидуалы (c есть резидуал a относительно b , если следующее свойство имеет место: для любого x в $\mathcal{C}$, $x \rightarrow c$ есть стрелка в $\mathcal{C}$ тогда и только тогда, когда $\langle a, x \rangle \rightarrow b$ есть стрелка в $\mathcal{C}$). Легко убедиться, что в $\mathcal{C}$ роль резидуала играет $[\mathbb{N}a, b]$.

1.8. Предлагаемая в данной работе модификация N-категории до CN-категории, отражающей свойства алгебры да Косты, позволяет получить и второй вариант категорной семантики для S_n , основываясь на конструкции категории функторов из некоторой малой категории в категорию множеств *Set*. Подобная категория, как известно, будет всегда топосом. Это свойство было использовано Р.Гольдблаттом [1] для получения категорной семантики интуиционистской логики, причем в роли малой категории фигурировала алгебра Гейтинга.

Построение подобной семантики для других неклассических логик было затруднено тем обстоятельством, что только алгебра Гейтинга может естественным образом быть представлена в виде категории предпорядка.

Предложенная в данной работе конструкция CN-категории позволяет обойти указанную трудность, поэтому в качестве второго

варианта категорной семантики для C_I используется категория Set^A функторов из CN-категории в категорию множеств. Данная категория также будет представлять собой топос и полнота исчисления C_I доказывается как раз относительно этого топоса.

2. CN-категории

2.1. Определение. CN-категория есть некоторая категория предпорядка, снабженная контравариантным функтором $\mathbb{N}: \mathcal{C} \rightarrow \mathcal{C}$, такая, что:

- (i) $\mathcal{C}$ имеет конечные произведения $\langle -, - \rangle$ и копроизведения $[-, -]$, относительно которых она дистрибутивна, т.е. $\langle a, [b, c] \rangle \cong \cong \langle \langle a, b \rangle, \langle a, c \rangle \rangle$ для любых a, b, c из $\mathcal{C}$;
- (ii) $\mathcal{C}$ имеет терминальный объект 1 и инициальный объект 0, причем $1 \cong [a, \mathbb{N}a]$ и $0 \cong \langle a^0, \mathbb{N}a^0 \rangle$, где $a^0 = \mathbb{N}\langle a, \mathbb{N}a \rangle$;
- (iii) для каждого объекта a из $\mathcal{C}$ существуют стрелки $\mathbb{N}^2 a \rightarrow a$ и $a^0 \rightarrow (\mathbb{N}a)^0$;
- (iv) $\mathcal{C}$ допускает экспоненцирование [2, с. 84];
- (v) $a \rightarrow b$ есть стрелка в $\mathcal{C}$ тогда и только тогда, когда $a \Rightarrow b \cong 1$ для любых a, b из $\mathcal{C}$, где $a \Rightarrow b$ - экспоненциал;
- (vi) для любых a, b из $\mathcal{C}$ существует стрелка $a^0 \rightarrow (b \Rightarrow a) \Rightarrow ((b \Rightarrow \mathbb{N}a) \Rightarrow \mathbb{N}b)$.

2.2. Нетрудно убедиться, что любая CN-категория $\mathcal{C}$ имеет следующие свойства:

- 2.2.1. Экспоненциал $a \Rightarrow b$ в $\mathcal{C}$ есть резидуал.
- 2.2.2. $\mathcal{C}$ декартово замкнута.
- 2.2.3. $y \rightarrow x$ есть стрелка в $\mathcal{C}$ тогда и только тогда, когда $\langle x, y \rangle \cong y$ и $[x, y] \cong x$.
- 2.2.4. $\langle \langle \mathbb{N}a, a^0 \rangle, a \rangle \cong 0$ и $[\langle \mathbb{N}a, a^0 \rangle, a] \cong 1$.
- 2.2.5. Любая CN-категория имеет не менее трех элементов.

3. Интерпретация аксиом паранепротиворечивой логики в CN-категориях

3.1. Рассмотрим следующий список аксиом и правил вывода [6, с.3790]:

- A1. $\alpha \supset (\beta \supset \alpha)$
- A2. $(\alpha \supset \beta) \supset ((\alpha \supset (\beta \supset \gamma)) \supset (\alpha \supset \gamma))$
- A3. $\alpha \wedge \beta \supset \alpha$
- A4. $\alpha \wedge \beta \supset \beta$
- A5. $\alpha \supset (\beta \supset \alpha \wedge \beta)$
- A6. $\alpha \supset \alpha \vee \beta$
- A7. $\beta \supset \alpha \vee \beta$
- A8. $(\alpha \supset \gamma) \supset ((\beta \supset \gamma) \supset (\alpha \vee \beta \supset \gamma))$
- A9. $\alpha \vee \neg \alpha$
- A10. $\neg \neg \alpha \supset \alpha$
- A11. $\beta^0 \supset ((\alpha \supset \beta) \supset ((\alpha \supset \neg \beta) \supset \neg \alpha))$
- A12. $\alpha^0 \wedge \beta^0 \supset (\alpha \wedge \beta)^0$

$$A13. \alpha^0 \wedge \beta^0 \supset (\alpha \vee \beta)^0$$

$$A14. \alpha^0 \wedge \beta^0 \supset (\alpha \supset \beta)^0$$

$$A15. \alpha^0 \supset (\neg \alpha)^0$$

$$R1. \alpha, \alpha \supset \beta$$

β

Здесь α^0 является сокращением для $\neg(\alpha \wedge \neg \alpha)$. Данная аксиоматика описывает, как известно, систему C_1 паранепротиворечивой логики да Косты.

3.2. Словарь перевода высказываний из C_1 в CN-категории выглядит следующим образом:

α	β	$\alpha \vee \beta$	$\alpha \wedge \beta$	$\neg \alpha$	$\alpha \supset \beta$
a	b	$[a, b]$	$\langle a, b \rangle$	$\mathbb{N}a$	$a \Rightarrow b$

Процесс интерпретации аксиом и правил вывода очевиден. Например, интерпретация A5 выглядит следующим образом:

$$a \Rightarrow (b \Rightarrow \langle a, b \rangle).$$

Но утверждение о том, что это аксиома, означает, что

$$a \Rightarrow (b \Rightarrow \langle a, b \rangle) \cong 1,$$

что, в свою очередь по 2.1(v) дает нам стрелку

$$a \rightarrow b \Rightarrow \langle a, b \rangle.$$

Применяя подобные преобразования к приведенному выше списку аксиом, получаем следующие выражения:

$$A1. a \rightarrow b \Rightarrow a$$

$$A2. a \Rightarrow b \rightarrow (a \Rightarrow (b \Rightarrow c)) \Rightarrow (a \Rightarrow c)$$

$$A3. \langle a, b \rangle \rightarrow a$$

$$A4. \langle a, b \rangle \rightarrow b$$

$$A5. a \rightarrow b \Rightarrow \langle a, b \rangle$$

$$A6. a \rightarrow [a, b]$$

$$A7. b \rightarrow [a, b]$$

$$A8. a \Rightarrow c \rightarrow (b \Rightarrow c) \Rightarrow ([a, b] \Rightarrow c)$$

$$A9. [a, \mathbb{N}a]$$

$$A10. \mathbb{N}^2 a \rightarrow a$$

$$A11. b^0 \rightarrow (a \Rightarrow b) \Rightarrow ((a \Rightarrow \mathbb{N}b) \Rightarrow \mathbb{N}a)$$

$$A12. \langle a^0, b^0 \rangle \rightarrow \langle a, b \rangle^0$$

$$A13. \langle a^0, b^0 \rangle \rightarrow [a, b]^0$$

$$A14. \langle a^0, b^0 \rangle \rightarrow (a \Rightarrow b)^0$$

$$A15. a^0 \rightarrow (\mathbb{N}a)^0$$

R1. если $a \cong 1$ и $a \rightarrow b$, то $b \cong 1$.

Нетрудно видеть, что все эти выражения описывают категорные свойства CN-категорий, в частности, A1 есть следствие экспоненцирования.

Исчисления C_n получаем при замене аксиом A12-A15 на следующие аксиомы:

$$A11'. \beta^{(n)} \supset ((\alpha \supset \beta) \supset ((\alpha \supset \neg\beta) \supset \neg\alpha))$$

$$A12'. \alpha^{(n)} \wedge \beta^{(n)} \supset (\alpha \wedge \beta)^{(n)}$$

$$A13'. \alpha^{(n)} \wedge \beta^{(n)} \supset (\alpha \vee \beta)^{(n)}$$

$$A14'. \alpha^{(n)} \wedge \beta^{(n)} \supset (\alpha \supset \beta)^{(n)}$$

$$A15'. \alpha^{(n)} \supset (\neg\alpha)^{(n)}$$

где $\alpha^{(n)}$ ($0 \leq n \leq \omega$) означает $\alpha^1 \wedge \alpha^2 \wedge \dots \wedge \alpha^n$ и α^n означает, в свою очередь, $\alpha^{00\dots 0}$, где символ 0 повторен n раз.

Легко прийти к заключению, что аксиомы A11'-A15' переводятся в CN-категории аналогично случаю C_1 , где их точно так же можно связать с категорными свойствами CN-категорий.

4. Алгебраические свойства CN-категорий

4.1.Определение. Пусть $\mathcal{C}_\Pi$ и $\mathcal{C}_{\Pi'}$ будут две CN-категории (с функторами Π и Π' соответственно). CN-функтор $\mathfrak{J}: \mathcal{C}_\Pi \rightarrow \mathcal{C}_{\Pi'}$ есть функтор, обладающий следующими свойствами (для $a, b, 1, 0$ в $\mathcal{C}_\Pi$ и $1', 0'$ в $\mathcal{C}_{\Pi'}$):

- (i) $\mathfrak{J}0 \cong 0'$;
- (ii) $\mathfrak{J}1 \cong 1'$;
- (iii) $\mathfrak{J}[a, b] = [\mathfrak{J}a, \mathfrak{J}b]$;
- (iv) $\mathfrak{J}\langle a, b \rangle = \langle \mathfrak{J}a, \mathfrak{J}b \rangle$;
- (v) $\mathfrak{J}a \Rightarrow b = \mathfrak{J}a \Rightarrow \mathfrak{J}b$;
- (vi) $\mathfrak{J}\Pi = \Pi'\mathfrak{J}$.

Следующие результаты получаем с помощью CN-категорной модификации понятия паранепротиворечивой алгебры множеств и фильтров в алгебре да Косты [5, с.81-82].

4.2.Предложение. Каждая CN-категория имеет полное расширение (полнота означает существование бесконечных произведений и копроизведений).

Набросок доказательства. Пусть $\mathcal{A}$ будет CN-категорией. Существование категории, являющейся полным расширением CN-категории $\mathcal{A}$, гарантируется теоремой о том, что любая алгебра да Косты изоморфна собственной непротиворечивой алгебре множеств [5, с.84]. Приведем формулировку требуемого расширения, переводя на категорный язык алгебраические конструкции из доказательства данной теоремы.

Пусть $\mathcal{F}_p$ будет фильтром, т.е. замкнутым относительно произведений множеством

$$\mathcal{C}_p = \{x: p \rightarrow x \text{ есть стрелка в } \mathcal{C}\}.$$

$\mathcal{C}_p$ будет собственным фильтром, если $\{0\} \notin \mathcal{C}_p$, где $\{0\}$ означает, что не только 0, но и все изморфные ему объекты принимаются во внимание. $\mathcal{C}_p$ будет $\mathcal{A}$ -полным, или просто полным фильтром, если для каждого a из $\mathcal{A}$ либо $a \in \mathcal{C}_p$, либо $\langle \Pi a, a^0 \rangle \in \mathcal{C}_p$, но не оба одновременно.

Сопоставляем теперь каждому элементу $a \in \mathcal{A}$ множество $\mathcal{U}_a = \{\mathcal{C}_p: a \in \mathcal{C}_p\}$, где $\mathcal{C}_p$ - соответствующий полный фильтр. Стрелку между $\mathcal{U}_a$ и $\mathcal{U}_b$ определяем следующим образом: $\mathcal{U}_a \rightarrow \mathcal{U}_b$ тогда и только тогда, когда $a \rightarrow b$ есть стрелка в $\mathcal{A}$. Множество всех $\mathcal{U}_a$ и подобных стрелок, как нетрудно убедиться, представляет собой категорию предпорядка $\mathcal{B}$. В качестве произведений и копроизведений в $\mathcal{B}$ фигурируют теоретико-множественные пересечения и объединения соответственно.

Экспоненциалом $\mathcal{U}_a \Rightarrow \mathcal{U}_b$ в $\mathcal{B}$ будет выражение $(\mathcal{U}_a)^c \cup \mathcal{U}_b$, где $(\mathcal{U}_a)^c$ есть теоретико-множественное дополнение $\mathcal{U}_a$. Далее, $\mathcal{U}_0 = \emptyset$, $\mathcal{U}_1 = \{\mathcal{C}_p: p \in \mathcal{A}\}$. Окончательно требуемую CN-катеорию получаем как $\mathcal{B}$ вместе с отображением

$$\mathbb{M}: \mathcal{U}_a \mapsto \mathbb{M}\mathcal{U}_a = (\mathcal{U}_a)^c \cup (\mathcal{U}_0)^c,$$

которое является контравариантным функтором.

Итак, требуемое полное расширение будет состоять из пар $(\mathcal{U}_a, a)$, где $a \in \mathcal{A}$, а $\mathcal{U}_a = \{\mathcal{C}_p: \mathcal{C}_p \text{ есть собственный полный фильтр на } \mathcal{A} \text{ и } a \in \mathcal{C}_p\}$. ■

4.3.Предложение. Пусть $\mathcal{A}, \mathcal{B}, \mathcal{C}$ будут CN-категориями, где $\mathcal{B}$ есть расширение $\mathcal{A}$ и $\mathcal{C}$ есть полная категория. Любой функтор $\mathcal{J}: \mathcal{A} \rightarrow \mathcal{C}$ может быть расширен до CN-функтора $\mathcal{H}: \mathcal{B} \rightarrow \mathcal{C}$.

Набросок доказательства. Определим семейство пар $(\mathcal{B}', \mathcal{H}')$, где $\mathcal{B}'$ есть подкатегория $\mathcal{B}$ и $\mathcal{H}'$ есть CN-функтор, расширяющий $\mathcal{J}$. По лемме Цорна существует максимальный элемент $(\mathcal{B}', \mathcal{H}')$. Если $\mathcal{B}' \neq \mathcal{B}$, то берем $b \in \mathcal{B} \setminus \mathcal{B}'$ и конструируем $\mathcal{B}'' = \{\mathcal{U}_{\langle [b, q], \langle \Pi b, b^0 \rangle_p \rangle} : q, p \in \mathcal{B}\}$, которая является CN-категорией, противореча максимальнойности $\mathcal{B}'$. ■

5. Пропозициональное CN-исчисление

В дальнейшем $\mathcal{C}$ всегда будет обозначать CN-катеорию.

5.1. Пусть p есть объект $\mathcal{C}$ и обозначим через $\mathcal{C}_p$ категорию

$$\mathcal{C}_p = \{x: p \rightarrow x \text{ есть стрелка в } \mathcal{C}\},$$

чья стрелки, произведения и копроизведения те же, что и в $\mathcal{C}$. Если мы определим $\Pi_p: \mathcal{C}_p \rightarrow \mathcal{C}_p$ посредством (используя свойство 2.2.3) $\Pi_p x = [\mathcal{C}x, p]$, то легко видеть, что Π_p будет представлять собой контравариантный функтор, так что пара $\mathcal{C}_p, \Pi_p$ превращается в CN-катеорию с p в качестве инициального, а 1 - в качестве терминального объектов. Ясно, что при таком определении

$\langle \Pi_p a, a^{\circ}_p \rangle$ будет играть роль N-функтора в N-категории, а $\mathcal{G}_p$ будет представлять собой очевидное CN-категорное обобщение понятия полного фильтра в алгебре да Косты.

5.2. Пусть $\mathcal{G}$ будет непустым семейством элементов $\mathcal{C}$. Для $n \geq 2$ определяем

$$\langle \mathcal{G}_n \rangle = \{ \langle p_1, \dots, p_n \rangle : p_i \in \mathcal{G}, i=1,2,\dots,n \}$$

и определяем

$$\langle \mathcal{G} \rangle = \cup \{ \langle \mathcal{G}_n \rangle : n \geq 2 \}, \quad (\mathcal{G}) = \cup \{ \mathcal{G}_p : p \in \langle \mathcal{G} \rangle \}.$$

Доказательства следующих свойств очевидны:

5.2.1. $\mathcal{G} \subseteq (\mathcal{G})$

5.2.2. Если $\mathcal{G} = \{p\}$, то $(\mathcal{G}) = \mathcal{G}$.

5.2.3. $(\mathcal{G}) = \mathcal{G}$ тогда и только тогда, когда $0 \in (\mathcal{G})$ тогда и только тогда, когда существуют объекты $p_1, \dots, p_n \in \mathcal{G}$, такие, что $\langle p_1, \dots, p_n \rangle \cong 0$.

5.2.4. Если $p, q \in (\mathcal{G})$, то $\langle p, q \rangle \in (\mathcal{G})$.

5.2.5. Если $p \in (\mathcal{G})$, то $\mathcal{G}_p \subseteq (\mathcal{G})$.

Таким образом ясно, что данные $(\mathcal{G})$ являются не чем иным, как совокупностью CN-категорных трансляцией фильтров в алгебре да Косты.

5.3. **Определение.** $(\mathcal{G})$ является максимальным, если не существует $\mathcal{G}' \subseteq \mathcal{C}$, такого, что $(\mathcal{G}) \subset (\mathcal{G}') \subset \mathcal{C}$.

5.4. Свойства $(\mathcal{G})$ подсказывают, что это семейство можно трактовать как множество доказуемых высказываний теории. Элементы $\mathcal{G}$ при этом понимаются как аксиомы, и они являются генераторами доказуемых высказываний, т.е. из аксиом (и их конъюнкций) "следуют" доказуемые высказывания.

5.5.1. CN-категорной интерпретацией системы $\mathcal{C}_n$ является пара $(\mathcal{C}, (\mathcal{G}))$, описывающая все множество высказываний вместе с множеством доказуемых высказываний.

5.5.2. Логика $(\mathcal{C}, (\mathcal{G}))$ (синтаксически) непротиворечива, если не имеет места ситуация, когда высказывание и его отрицание одновременно доказуемы, что эквивалентно тому, что $(\mathcal{G}) \neq \mathcal{C}$. В N-категориях $\langle a, \Pi a \rangle \cong 0$, что означает тривиализацию логики в случае противоречивости, поскольку тогда выводимо любое высказывание. В CN-категориях $\langle a, \Pi a \rangle \not\cong 0$, и имеет место лишь более слабое условие из 2.1.(ii), т.е. $\langle a^{\circ}, \Pi a^{\circ} \rangle \cong 0$, вследствие чего логики $(\mathcal{C}, (\mathcal{G}))$ противоречивы, но не тривиальны.

5.5.3. Логика $(\mathcal{C}, (\mathcal{G}))$ (синтаксически) полна, если для любого высказывания p либо $p \in (\mathcal{G})$, либо $\langle \Pi p, p^{\circ} \rangle \in (\mathcal{G})$, но не оба одновременно (в отличие от либо $p \in (\mathcal{G})$, либо $\Pi p \in (\mathcal{G})$ в N-категориях). В силу 2.2.4 это означает, что невыполнение этого условия превращает $(\mathcal{G})$ в $\{0 \rightarrow 1\}$, следовательно $(\mathcal{G})$ по 5.3 будет максимальным.

5.5.4. Случай теорий с конечным числом аксиом (которые могут быть редуцированы к одной путем их конъюнкции) дает нам $\mathcal{G} = \{p_1, \dots, p_n\}$ и $(\mathcal{G}) = \mathcal{G}_p$ с $p = \langle p_1, \dots, p_n \rangle$. В этом случае мы имеем: $(\mathcal{C}, (\mathcal{G}))$ полна тогда и только тогда, когда p минимально согласно предпорядочению, задаваемому в $\mathcal{C}$ на стрелках.

6. CN-семантика

6.1. Рассмотрим пару $(\mathcal{C}, (\mathcal{G}))$, представляющую собой алгебраическую трансляцию паранепротиворечивой логики. Пусть $\mathcal{B}$ будет нетривиальной CN-категорией. Аналогично случаю N-категорий введем, следуя [8], понятие оценки, учитывая, что по 2.2.5 любая CN-категория имеет не менее 3-х элементов.

6.1.1. Определение. $\mathcal{B}$ -оценка представляет собой CN-функтор $\nu: \mathcal{C} \rightarrow \mathcal{B}$, такой, что:

- 1°. Если $\nu p \neq 1$, то $\nu \neg p \cong 1$;
- 2°. если $\nu \neg p \cong 1$, то $\nu p \cong 1$;
- 3°. если $\nu p^0 \cong \nu(q \Rightarrow p) \cong \nu(q \Rightarrow \neg p) \cong 1$, то $\nu q \neq 1$;
- 4°. $\nu(p \Rightarrow q) \cong 1$ тогда и только тогда, когда $\nu p \neq 1$ или $\nu q \cong 1$;
- 5°. $\nu \langle p, q \rangle \cong 1$ тогда и только тогда, когда $\nu p \cong \nu q \cong 1$;
- 6°. $\nu[p, q] \cong 1$ тогда и только тогда, когда $\nu p \cong 1$ или $\nu q \cong 1$;
- 7°. если $\nu p^0 \cong \nu q^0 \cong 1$, то $\nu(p \Rightarrow q)^0 \cong \nu \langle p, q \rangle^0 \cong \nu[p, q]^0 \cong 1$.

Оценка ν называется сингулярной, если существует такое $p \in \mathcal{C}$, что $\nu p \cong \nu \neg p \cong 1$, в противном случае оценка называется нормальной. Объект $p \in \mathcal{C}$ называется истинным при ν , если $\nu p \cong 1$.

Если бы мы, как в случае N-категории, называли бы $(\mathcal{C}, (\mathcal{G}))$ семантически непротиворечивой при ν , если $p \in \mathcal{C}$ влечет $\nu p \cong 1$, то в случае сингулярной оценки $(\mathcal{C}, (\mathcal{G}))$ будет противоречивой. Но при этом $(\mathcal{C}, (\mathcal{G}))$ будет нетривиальной, поскольку тогда $\langle \nu p, \nu \neg p \rangle \cong \langle 1, 1 \rangle \cong 1$. В общем случае $(\mathcal{C}, (\mathcal{G}))$ противоречива, но нетривиальна, поскольку по 2.2.5 любая CN-категория имеет не менее 3-х элементов.

6.1.2. Определение. Модель $(\mathcal{C}, (\mathcal{G}))$ представляет собой $\mathcal{B}$ -оценку ν , такую, что $\nu p \cong 1$ для всех $p \in \mathcal{G}$.

Согласно вышесказанному, наличие модели у $(\mathcal{C}, (\mathcal{G}))$ не означает ее непротиворечивости, а лишь свидетельствует о ее нетривиальности.

6.1.3. Определение. $(\mathcal{C}, (\mathcal{G}))$ (семантически) полна, если выполняется следующее условие: p доказуемо (т.е. $p \in (\mathcal{G})$) тогда и только тогда, когда p истинно во всех моделях $(\mathcal{C}, (\mathcal{G}))$.

6.1.4. Теорема. $(\mathcal{C}, (\mathcal{G}))$ (семантически) полна.

Доказательство проводится так же, как и в случае N-категории [9, с.515], но теперь вместо $\neg p$ фигурирует $\langle \neg p, p^0 \rangle$. ■

7. Топосы для паранепротиворечивой логики

7.1. Существует еще одна интересная возможность использования CN-категорий для построения категорной семантики паранепротиворечивой логики. Она основана на конструкции категории $Set^{\mathcal{A}}$ -функторов из CN-категории $\mathcal{A}$ в категорию множеств Set . Дело в том, что, как известно [1, с.219], для произвольной малой катего-

рии $\mathcal{C}$ категория $Set^{\mathcal{C}}$ всегда представляет собой топос. Подобная категорная конструкция, как уже упоминалось, была использована в качестве модели интуиционистской логики, причем в качестве $\mathcal{C}$ использовалась алгебра Гейтинга, точнее, ее категорное представление. Поскольку у нас теперь имеется категорное представление алгебры да Косты в виде CN-категорий, то мы можем попытаться получить топос $Set^{\mathcal{A}}$ в качестве модели паранепротиворечивой логики. Но прежде докажем следующую теорему.

7.2.Теорема. *Множество главных фильтров алгебры да Косты $\equiv$ -изоморфно алгебре да Косты.*

Доказательство. Пусть $\mathcal{A} = \langle A, 0, 1, \leq, \wedge, \vee, \supset, ' \rangle$ будет некоторой алгеброй да Косты. Фильтр F на $\mathcal{A}$ представляет собой непустое подмножество A , такое, что:

- (1) если $a, b \in F$, то $a \wedge b \in F$;
- (2) если $a \in F$ и $a \leq b$, то $b \in F$.

Говорят, что F есть собственный фильтр, если $0 \notin F$. Фильтр F будет $\mathcal{A}$ -полным (или полным относительно $\mathcal{A}$), если $a' \wedge a^0 \in F$ или $a \in F$, но не оба одновременно.

Рассмотрим множество $\mathcal{A}^+$ всех главных фильтров, т.е. множество вида

$$[p) = \{q: p \leq q\} \text{ , где } p, q \in A.$$

Относительно теоретико-множественного включения $\subseteq$, пересечения, объединения и дополнения $\mathcal{A}^+$ будет представлять собой алгебру Макнейла [2,с.94], т.е. полную булеву алгебру. Если определить на $\mathcal{A}^+$ упорядочение $\leq$ как $[p) \leq [q)$ тогда и только тогда, когда $q \leq p$, то очевидным образом мы получаем предпорядок на $\mathcal{A}^+$. Определим теперь операцию $'$ как

$$[p)' = \neg[p) \cup \neg[p^0) \text{ , где } \neg - \text{ булево дополнение на } \mathcal{A}^+,$$

т.е. $\neg[x) = \{y: [y) \cap [x) = \emptyset\}$. Поскольку, очевидным образом, $[p) \cap [q) = [p \wedge q)$ и $[p) \cup [q) = [p \vee q)$ ($\cup$ является дистрибутивной решеткой, что следует из аксиом 1.3. (1)-(7),(10), поэтому $\mathcal{A}$ вложима в решетку своих главных фильтров [4, с.82]), то, учитывая закон де Моргана, получаем $\neg[p) \cup \neg[p^0) = \neg([p) \cap [p^0)) = \neg[p \wedge p^0)$. В булевой алгебре $\mathcal{A}^+$ $\neg[p \wedge p^0)$ представляет собой элемент $[y)$, такой, что $[p \wedge p^0) \cap [y) = \emptyset$. С другой стороны, согласно [5,с.82], множество всех фильтров на $\mathcal{A}$ будет представлять собой логику да Косты $\langle \mathcal{A}, \neg \rangle$, в которой $\neg$ представляет собой систему замыканий всех фильтров на $\mathcal{A}$. Для логики да Косты имеет место тот результат [5,с.87], что она представляет собой паранепротиворечивую абстрактную логику. Для нас существенно то, что в этом случае фактически все фильтры являются $\cup$ -полными, т.е. либо $a \in F$, либо $a' \wedge a^0 \in F$, но не оба одновременно, поскольку в этом случае $[a) \cup [a' \wedge a^0) = A$. Тогда очевидным образом $[a) \cap [a' \wedge a^0) = \emptyset = [a \wedge a' \wedge a^0) = [a') \cap [a \wedge a^0)$. Следова-

тельно, в роли $[y]$ будет в A^+ выступать $[p']$, и мы окончательно получаем $[p]' = [p']$. Определим теперь $[p] \supset [q] = \neg[p] \cup [q]$.

7.3 Лемма. $[p \supset q] = \neg[p] \cup [q]$.

Доказательство. В $\mathcal{A}$ мы имеем $a \wedge (a \supset b) \leq b$, откуда получаем $[b] \subseteq [a] \cap [a \supset b]$. Далее, в булевой алгебре A^+ получаем $\neg[a] \cup [b] \subseteq \neg[a] \cup ([a] \cap [a \supset b]) = A \cap (\neg[a] \cap [a \supset b]) = \neg[a] \cap [a \supset b]$. Но в $\mathcal{A}$ $a \wedge a' \wedge a^0 \equiv 0$, следовательно, $a \wedge a' \wedge a^0 \leq b$, откуда $a' \wedge a^0 \leq a \supset b$ (по 1.3.(9)), и, далее, $[a \supset b] \subseteq [a' \wedge a^0]$. Но $a' \wedge a^0$, согласно [5, с.81], играет роль классического отрицания, откуда $[a \supset b] \subseteq \neg[a]$ и, следовательно, $\neg[a] \cap [a \supset b] = [a \supset b]$. Отсюда получаем $\neg[a] \cup [b] \subseteq [a \supset b]$.

Далее, в $\mathcal{A}$ $a \wedge b \leq b$ влечет $b \leq (a \supset b)$, откуда в A^+ получаем $[a \supset b] \subseteq [b]$. Но поскольку $[a \supset b] \subseteq \neg[a]$, то в булевой алгебре A^+ получаем $[a \supset b] \subseteq \neg[a] \cup [b]$. Следовательно, $[p \supset q] = \neg[p] \cup [q]$. ■

7.4. Из доказанной леммы 7.3 следует $[p] \supset [q] = [p \supset q]$. Отсюда мы получаем сохранение всех операций алгебры да Косты на A^+ и тогда мы можем говорить об отображении $\varphi: \mathcal{A} \rightarrow \mathcal{A}^+ : x \mapsto [x]$, которое очевидным образом будет $\equiv$ -изоморфизмом. ■

7.5. Рассмотрим теперь вопрос релятивизации $\mathcal{A}^+$. Поскольку A^+ является полной булевой алгеброй, то для любого $[p] \in A^+$ мы стандартным образом можем получить булеву алгебру $[p]^+$ всех главных фильтров в $[p]$ [4, с.96]. При этом $\emptyset$ является по-прежнему нулевым элементом, а единицей теперь будет $[p]$. Так как предпорядочение $\leq$ теперь можно просто получить сужением отношения предпорядка в A^+ на $[p]$, а операции $'$ и $\supset$ могут быть релятивизированы через булевы операции в $[p]^+$, то нетрудно превратить $[p]^+$ в алгебру да Косты.

Таким образом, обозначая $[p] \wedge [q]$ через $[q]_p$, мы получаем для $S, T \in A^+$ и сужая операции из $\mathcal{A}^+$ на $[p]^+$:

$$(1) (S_p) \cap_p (T_p) = (S \cap T)_p$$

$$(2) (S_p) \cup_p (T_p) = (S \cup T)_p$$

$$(3) (S_p)'_p = \neg_p(S_p) \cup_p \neg_p(S^0_p) = (S')$$

$$(4) (S_p) \supset_p (T_p) = \neg_p(S_p) \cup_p (T_p) = (\neg S \cup T)_p = (S \supset T)_p$$

7.6. Перейдем теперь непосредственно к построению топоса $Set^{\mathcal{A}}$. Рассмотрим функтор $\Omega: \mathcal{A} \rightarrow Set$, где $\mathcal{A}$ - CN-категория, который будет представлять собой классифицирующий объект в топосе $Set^{\mathcal{A}}$. Как и в случае интуиционистской логики [1, с.230], для произвольного функтора $F: \mathcal{A} \rightarrow Set$ обозначим через F_p значение $F(p)$ функтора F на объекте p из $\mathcal{A}$. Для любых q и p , таких, что $p \leq q$, функтор F определяет функцию из F_p в F_q , которую обозначим F_{pq} . Функтор F будем рассматривать как семейство $\{F_p : p \in \mathcal{A}\}$ множеств, заиндексированных элементами множества $\mathcal{A}$ из алгебры $\mathcal{A}$ и снабженных

отображением перехода $F_{pq}: F_p \rightarrow F_q$ при $p \leq q$ (в частности, F_{pp} будет тождественной функцией на F_p).

При подобном подходе мы полагаем $\Omega_p = [p]^+$ и для p и q , таких, что $p \leq q$, функция $\Omega_{pq}: \Omega_p \rightarrow \Omega_q$ сопоставляет каждому $S \in [p]^+$ множество $S \cap [q] \in [q]^+$, т.е. $\Omega_{pq}(S) = S_q$.

7.7. Конечным объектом категории $Set^{\mathcal{A}}$ служит постоянный функтор $1: \mathcal{A} \rightarrow Set$, определяемый условиями $1_p = \{0\}$ для $p \in \mathcal{A}$ и $1_{pq} = id_{\{0\}}$ при $p \leq q$. Классификатор подобъектов $true: 1 \rightarrow \Omega$ представляет собой естественное преобразование, p -я компонента которого $true_p: \{0\} \rightarrow \Omega_p$ определяется равенством $true_p(0) = [p]$. Таким образом, функция $true$ выбирает наибольший элемент из каждой алгебры да Косты вида $[p]^+$.

7.8. Пусть теперь $\tau: F \rightarrow G$ - произвольный подобъект $Set^{\mathcal{A}}$ -объекта G . Каждая компонента τ_p инъективна и ее можно считать функцией включения $F_p \hookrightarrow G_p$. p -я компонента $(\chi\tau)_p: G_p \rightarrow [p]^+$ характеристической стрелки $\chi\tau: G \rightarrow \Omega$ определяется равенством

$$(\chi\tau)_p(x) = \{q: p \leq q \text{ и } G_{pq}(x) \in F_q\}$$

для каждого $x \in G_p$.

Анализ доказательства Ω -аксиомы в топосе Set^P для интуиционистской логики [1, с.231-232] показывает, что в нем эксплуатируются чисто решеточные свойства наследственных множеств (главных фильтров) в алгебре Гейтинга P , а поскольку в нашем случае главные фильтры представляют собой те же самые наследственные множества, то нетрудно проверить выполнение Ω -аксиомы в категории (топосе) $Set^{\mathcal{A}}$.

8. Интерпретация паранепротиворечивой логики в топосе $Set^{\mathcal{A}}$

8.1. Сконструируем вначале истинностные стрелки в топосе $Set^{\mathcal{A}}$. Начнем со стрелки $false$.

Начальный объект $0: \mathcal{A} \rightarrow Set$ категории $Set^{\mathcal{A}}$ - это постоянный функтор, такой, что $0_p = \emptyset$ и $0_{pq} = id_{\emptyset}$ для $p \leq q$. Компонентами естественного преобразования $0 \rightarrow 1$ являются включения $\emptyset \hookrightarrow \{0\}$ (одна и та же компонента для любого p). По определению стрелка $false$ является характеристической стрелкой подобъекта $!: 0 \rightarrow 1$. Для ее компоненты $false_p: \{0\} \rightarrow \mathcal{A}_p$ имеем $false_p(0) = \{q: p \leq q \text{ и } 1_{pq}(0) = 0_q\} = \{q: p \leq q \text{ и } 0 \in \emptyset\} = \emptyset$, и, следовательно, естественное преобразование выбирает нулевой элемент из каждой алгебры да Косты.

Что касается конъюнкции и дизъюнкции, то их определения остаются те же, что и в случае Set^P [1, с.235], т.е. фактически нам нужно для $\cap: \Omega \times \Omega \rightarrow \Omega$ и $\cup: \Omega \times \Omega \rightarrow \Omega$ определения их p -х компонент в виде:

$$\cap_p (<S, T>) = S \cap T;$$

$$\cup_p (<S, T>) = S \cup T.$$

8.2. Для определения стрелок отрицания и импликации используем то обстоятельство, что в алгебре $[p]^+$ они конструируются из булевых операций. Но в этом случае булево отрицание выглядит у нас как $\neg: \Omega \rightarrow \Omega$, чья p -я компонента $\neg_p: \Omega_p \rightarrow \Omega_p$ при отождествлении $false_p$ с включением $\{\emptyset\} \subseteq \Omega_p$ (и поскольку $\neg: \Omega \rightarrow \Omega$ является характеристической стрелкой подобъекта $false$) выглядит следующим образом:

$$\begin{aligned} \neg_p(S) &= \{q: p \leq q \text{ и } \Omega_{pq}(S) \in \{\emptyset\}\} = \{q: p \leq q \text{ и } \\ S \cap [q] &= \emptyset\} = [p] \cap \neg S = (\neg S)_p. \end{aligned}$$

Отсюда отрицание $\neg: \Omega \rightarrow \Omega$ получаем, выводя, что p -я компонента $\neg_p: \Omega_p \rightarrow \Omega_p$ отрицания удовлетворяет равенству 7.5.(1)

$$\neg_p(S) = (\neg S)_p \cup_p (\neg S^0)_p = \cup_p (<\neg_p(S), \neg_p(S^0)>) = (S')_p$$

Импликацию $\supset: \Omega \times \Omega \rightarrow \Omega$ получаем, определяя p -ю компоненту с помощью 7.5.(4) как

$$\supset_p(<S, T>) = \cup_p (<\neg_p(S), T>) = (S \supset T)$$

8.3. Назовем $Set^{\mathcal{A}}$ -оценкой функцию $V: \Phi_0 \rightarrow Set^{\mathcal{A}}(1, \Omega)$, ставящую в соответствие каждой пропозициональной букве π_i некоторое истинностное значение $V(\pi_i): 1 \rightarrow \Omega$. Эта функция очевидным образом продолжается на множество Φ всех формул:

$$(a) V(\neg \alpha) = \neg \circ V(\alpha)$$

$$(б) V(\alpha \wedge \beta) = \cap \circ \langle V(\alpha), V(\beta) \rangle$$

$$(в) V(\alpha \vee \beta) = \cup \circ \langle V(\alpha), V(\beta) \rangle$$

$$(г) V(\alpha \supset \beta) = \supset \circ \langle V(\alpha), V(\beta) \rangle$$

Будем говорить, что формула α $Set^{\mathcal{A}}$ -общезначима (записывая как $Set^{\mathcal{A}} \models \alpha$), если $V(\alpha) = true: 1 \rightarrow \Omega$ для всех $Set^{\mathcal{A}}$ -оценок V .

8.4. Определим, следуя [8], оценку $V': \Phi_0 \rightarrow \{0, 1\}$, продолжая ее на Φ следующим образом:

$$1^\circ. V'(\alpha) = 0 \Rightarrow V'(\neg \alpha) = 1$$

$$2^\circ. V'(\neg \neg \alpha) = 1 \Rightarrow V'(\alpha) = 1$$

$$3^\circ. V'(\beta^0) = V'(\alpha \supset \beta) = V'(\alpha \supset \neg \beta) = 1 \Rightarrow V'(\alpha) = 0$$

$$4^\circ. V'(\alpha \supset \beta) = 1 \Leftrightarrow V'(\alpha) = 0 \text{ или } V'(\beta) = 1$$

$$5^\circ. V'(\alpha \wedge \beta) = 1 \Leftrightarrow V'(\alpha) = V'(\beta) = 1$$

$$6^\circ. V'(\alpha \vee \beta) = 1 \Leftrightarrow V'(\alpha) = 1 \text{ или } V'(\beta) = 1$$

$$7^\circ. V'(\alpha^0) = V'(\beta^0) = 1 \Rightarrow V'((\alpha \supset \beta)^0) = V'((\alpha \wedge \beta)^0) = V'((\alpha \vee \beta)^0) = 1$$

Связь между V и V' получаем, положив:

$$\vdash true, \text{ если } V'(\pi_i) = 1$$

$$(*) \quad V(\pi_i) = \begin{cases} 1 \\ \perp \text{false, если } V(\pi_i) = 0 \end{cases}$$

8.5 Лемма. $V(\alpha) = \text{true}$ тогда и только тогда, когда $V(\alpha) = 1$.

Доказательство. Для $\alpha = \pi_i$ лемма истинна по определению. Далее прибегаем к индукции по правилам образования формул, т.е. учитывая 8.4.1° - 7°. Пусть $\alpha = \neg\beta$ и $V(\beta) = \text{false}$, тогда

$$V(\neg\beta)_p = (\neg \circ V(\beta))_p = \neg_p \circ V(\beta)_p$$

Следовательно $V(\alpha)_p(0) = \neg_p(V(\beta)_p(0)) = \neg_p(\text{false}_p(0)) =$ (по индуктивному предположению) $= \neg_p(\emptyset) = [\neg] = \text{true}_p(0)$. Отсюда $V(\alpha) = \text{true}$ и $V(\alpha) = 1$. Точно так же проделываем и для остальных связок. ■

8.6 Теорема. Для любого топоса $\text{Set}\mathcal{A}$ если $\text{Set}\mathcal{A} \models \alpha$, то

$$\vdash \dashv \alpha$$

$$C_1$$

(т.е. α доказуема в C_1).

Доказательство. Поскольку в лемме 8.7 выбор оценки V произволен, а для V в [8] доказана полнота, то это приводит к требуемому результату. ■

ЛИТЕРАТУРА

1. Гольдблатт Р. Топосы. Категорный анализ логики. М., 1983.
2. Драгалин А.Г. Математический интуиционизм. Введение в теорию доказательств. М., 1979.
3. Ишмуратов А.Т., Карпенко А.С., Попов В.М. О паранепротиворечивой логике // Семантические и синтаксические исследования неэкстенциональных логик. М., 1989. С.261-284.
4. Расева Е., Сикорский Р. Математика метаматематики. М. 1972.
5. Carnielli W.A., Alcantara L.F. Paraconsistent algebras // Stud.Logica. 1984. XLIII. No 1/2. P.79-87.
6. da Costa N.C.A. Calculus propositionnels pour les systemes formels inconsistants // C.R.Acad.Sci.Paris. T.257, N25. 1963. P.3790-3792.
7. da Costa N.C.A. Operations non-monotones dans de treillis // C.R.Acad.Sci.Paris. T.263. 1966. P.429-432.
8. da Costa N.C.A., Alves E.H. Une semantique pour le calcul C_1 // C.R.Acad.Sci.Paris. T.283. 1976. P.729-731.
9. Riscos A., Laita M.L. N-categories in logic // Zeitschr.Math. Log.Grundl.Math. Bd.33. 1987. P.507-516.

СОДЕРЖАНИЕ

От редколлегии	5
<i>Ишимото А., Сагал П.Т.</i> Интерпретация онтологии Лесневского: пропозициональный фрагмент онтологии Лесневского и родственные системы	6
<i>Смирнов В.А.</i> Дефинициальная эквивалентность элементарной онтологии и обобщенной силлогистики оккамовского типа	17
<i>Павлов С.А.</i> Погружение элементарной онтологии Лесневского в семантически замкнутую теорию обозначения	32
<i>Ишимото А.</i> Логическая грамматика: логико-онтологический обзор	44
<i>Герасимова И.А.</i> Дилемма экстенциональности- интенциональности и контексты с пропозициональными установками	53
<i>Шалак В.И.</i> Динамическая интерпретация высказываний ...	68
<i>Матерна П.</i> Понятие понятия	82
<i>Смирнов А.В.</i> Система интерактивного доказательства теорем.....	90
<i>Супнес П., Алешина Н.А.</i> Определимость качественной независимости событий через расширенные индикаторные функции	105
<i>Алешина Н.А.</i> Вероятностная логика в искусственном интеллекте	113
<i>Сидоренко Е.А.</i> Теорема дедукции для классических и неклассических исчислений	128
<i>Быстров П.И.</i> Релевантные системы с глобальными правилами вывода	139
<i>Попов В.М.</i> Два замечания и один вопрос относительно аксиоматизации импликативных логик	153

<i>Стеблецова В.Н.</i> Логика ветвящегося времени как инструмент спецификации и верификации параллельных программ	159
<i>Анисов А.М.</i> Моделирование становления на ЭВМ	170
<i>Лукасевич Я.</i> О детерминизме	190
<i>Карпенко А.С.</i> Ян Лукасевич - детерминизм и логика	206
<i>Карпенко А.С.</i> Импликативные логики: решетки и конструкции	224
<i>Смирнов В.А.</i> Многомерные логики	259
<i>Канаи Н.</i> Доказательство погружения аристотелевской силлогистики в пропозициональную логику	279
<i>Васюков В.Л.</i> Категорная семантика для паранепротиворечивых логик	285

CONTENTS

Editors note	5
<i>Ishimoto A., Sagal P.T.</i> Interpreting Lesniewski's Ontology - a Propositional Fragment of Lesniewski's Ontology and Related Systems	6
<i>Smirnov V.A.</i> The Definitional Equivalence of Lesniewski's Elementary Ontology and Generalized Okkam-type Syllogistics	17
<i>Pavlov S.A.</i> Embedding of Lesniewski's Elementary Ontology into Semantically Closed Theory of Denotation	32
<i>Ishimoto A.</i> Logical Grammar - Logical and Ontological Observations	44
<i>Gerasimova I.A.</i> Extension-Intention Dilemma and Propositional Attitudes	53
<i>Shalak V.I.</i> Dynamic Interpretation of Propositions	68
<i>Materna P.</i> Concept of Concept	82
<i>Smirnov A.V.</i> System of Interactive Theorem Proving	90
<i>Suppes P., Alioshina N.A.</i> The Definability of the Qualitative Independence of Events in Terms of Extended Indicator Functions	105
<i>Alioshina N.A.</i> Probability Logic in Artificial Intelligence	113
<i>Sidorenko E.A.</i> Deduction Theorem for Classical and Non-Classical Calculi	128
<i>Bystrov P.I.</i> Relevant Systems with Global Rules of Inference	139
<i>Popov V.M.</i> Two Remarks and the Question concerned to Implicational Relevant Logics	153
<i>Stebletsova V.N.</i> The Logic of Branching Time as a Tool for Specification and Verification of Parallel Programs	159

<i>Anisov A.M.</i> Computer Programing of Becoming	170
<i>Lukasiewicz J.</i> On Determinism	190
<i>Karpenko A.S.</i> Jan Lukasiewicz - Determinism and Logic	206
<i>Karpenko A.S.</i> Implicational Logics: Lattices and Constructions	224
<i>Smirnov V.A.</i> Multidimensional Logics	259
<i>Kanai N.</i> Proof of the Embedding of Aristotle's Syllogistics into Propositional Logic	279
<i>Vasiukov V.L.</i> Categorical Semantics for Paraconsistent Logics	285

Научное издание

Логические исследования

Вып. 2

Утверждено к печати Институтом философии РАН

Издательская фирма "Наука" — философия, право, социология и психология"

Руководитель фирмы М.М. Беляев

Редактор издательства Е.А. Жукова

Художественный редактор Н.Н. Михайлова

ИБ № 49894

ЛР № 020297 от 27.11.91

Подписано к печати 04.11.93. Формат 60 × 90/16. Печать офсетная. Усл. печ. л. 19.

Усл. кр. отт. 19,3. Уч-изд. л. 21,4. Тираж 860 экз. Тип. зак. 3457.

Ордена Трудового Красного Знамени издательство «Наука»
117864 ГСП-7, Москва, В-485, Профсоюзная ул., 90

Первая типография издательства "Наука"
199034, Санкт-Петербург, В-34, 9 линия, 12

**Коллективные труды, подготовленные сектором логики
Института философии РАН
и выпущенные издательством "Наука"**

1. Логические исследования. М., 1959.
2. Применение логики в науке и технике. М., 1960.
3. Философские проблемы современной формальной логики.
М., 1962.
4. Проблемы логики. М., 1963.
5. Проблемы логики научного познания. М., 1964.
6. Формальная логика и методология науки.
М., 1964.
7. Логическая структура научного познания. М., 1965.
8. Логическая семантика и модальная логика. М., 1967.
9. Исследования логических систем. М., 1970.
10. Неклассическая логика. М., 1970.
11. Логика и эмпирическое познание. М., 1972.
12. Философия в современном мире. Философия и логика.
М., 1974.
13. Методы логического анализа. М., 1977.
14. Логический вывод. М., 1979.
15. Модальные и интенциональные логики и их применение
к проблемам методологии науки. М., 1984.
16. Логика научного познания. М., 1987.
17. Синтаксические и семантические исследования
неэкстенциональных логик. М., 1989.
18. Исследования по неклассическим логикам. М., 1989.
19. Логические исследования. Вып.1. М., 1993.

**Труды научно-исследовательского семинара по логике
Института философии РАН. Издательство ИФРАН.**

(Руководитель семинара - профессор В.А.Смирнов)

1. Модальные и релевантные логики. М., 1982. - 107 с.
2. Логические исследования. М., 1983. - 123 с.
3. Многозначные, релевантные и паранепротиворечивые логики. М., 1984. - 133 с.
4. Неклассические логики. М., 1985. - 127 с.
5. Нестандартные семантики неклассических логик. М., 1986. - 135 с.
6. Неклассические логики и пропозициональные установки. М., 1987. - 130 с.
7. Неклассические логики и их приложения. М., 1989. - 153 с.
8. Философские основания неклассических логик. М., 1990. - 152 с.
9. Логические методы в компьютерных науках. М., 1991. - 197 с.