Institute of Philosophy
Russian Academy of Sciences

LOGICAL INVESTIGATIONS

Volume 24. Number 1

Moscow
2018

Федеральное государственное бюджетное учреждение науки
Институт философии Российской академии наук

ЛОГИЧЕСКИЕ ИССЛЕДОВАНИЯ

Том 24. Номер 1

Москва
2018

ISSN 2074-1472 (Print)
ISSN 2413-2713 (Online)

Logical Investigations

Scientific-Theoretical Journal

2018. Volume 24. Number 1

Publisher: Institute of Philosophy, Russian Academy of Sciences

Frequency: 2 times per year

First issue: 1993; the journal is a redesigned continuation of the annual *Logical Investigations* that has been published since 1993 till 2015

The journal is registered with the Federal Service for Supervision of Communications, Information Technology, and Mass Media (Roskomnadzor). The Mass Media Registration Certificate No. FS77-61228 on April 3, 2015

Abstracting and indexing: *Zentralblatt MATH*, *Mathematical Reviews*, *Ulrich's Periodicals Directory*, *EBSCOhost (Philosopher's Index with Full Text)*

The journal is included in the list of peer-reviewed scientific editions acknowledged by the Higher Attestation Commission of the Ministry of Education and Science of the Russian Federation

Subscription index in the United Catalogue *The Russian Press* is 42046

All materials published in *Logical Investigations* undergo peer review process

Editorial address: 12/1 Goncharnaya St., Moscow 109240, Russian Federation
Tel.: +7 (495) 697-96-65; **e-mail:** `logicalinvestigations@gmail.com`
Website: `http://eng.iph.ras.ru/log_inv.htm`

ISSN 2074-1472 (Print)
ISSN 2413-2713 (Online)

Логические исследования

Научно-теоретический журнал

2018. Том 24. Номер 1

Учредитель и издатель: Федеральное государственное бюджетное учреждение науки Институт философии Российской академии наук

Периодичность: 2 раза в год

Выходит с 1993 г.; журнал является прямым продолжением ежегодника «Логические исследования», издававшегося с 1993 по 2015 г.

Журнал зарегистрирован Федеральной службой по надзору в сфере связи, информационных технологий и массовых коммуникаций (Роскомнадзор). Свидетельство о регистрации СМИ: ПИ № ФС77-61228 от 03 апреля 2015 г.

Журнал реферируется и индексируется: *Mathematical Reviews*, *Zentralblatt MATH*, *Ulrich's Periodicals Directory*, *РИНЦ*, *EBSCOhost (Philosopher's Index with Full Text)*

Журнал включен в Перечень российских рецензируемых научных журналов, рекомендованных ВАК, в которых должны быть опубликованы основные научные результаты диссертаций на соискание ученых степеней доктора и кандидата наук (группа научных специальностей «09.00.00. – философские науки»)

Подписной индекс в Объединенном каталоге «Пресса России» — 42046

Публикуемые материалы прошли процедуру рецензирования и экспертного отбора

Адрес редакции: Российская Федерация, 109240, г. Москва, ул. Гончарная, д. 12, стр. 1, оф. 308

Тел.: +7 (495) 697-96-65; **e-mail:** `logicalinvestigations@gmail.com`

Сайт: `http://iph.ras.ru`

TABLE OF CONTENTS

Traditional Logic

Igor A. Gorbunov
Logic, Unity in Three Persons 9

Vladimir I. Shalack
Analysis vs Deduction 26

Non-classical Logic

Alexander A. Belikov
Vojshvillo-style Semantics for Some Extensions of FDE: Part I 46

Nikolai N. Prelovskiy
Logical Matrices and Goldbach Problem 62

Natalya E. Tomova
On Properties of a Class of Four-valued Paranormal Logics 75

History of Logic

Valeriy V. Vorobyev
Stephanus Alexandrian Is a "Successor" of Ammonius 90

Anastasia O. Kopylova
Tensed Propositions In W. Ockham's Logic 99

Discussions

Yuriy V. Ivlev
The Subject and Prospects of Development of Logic 115

Nikolai N. Nepejvoda
Formalization as the Immanent Part of Logical Solving 129

Information for authors 147

Logical Investigations
2018, Vol. 24, No. 1

В НОМЕРЕ

Традиционная логика

И.А. Горбунов
Логика, единство в трёх лицах 9

В.И. Шалак
Анализ vs дедукция 26

Неклассическая логика

А.А. Беликов
Семантики Войшвилло для некоторых расширений логики **FDE**: часть I 46

Н.Н. Преловский
Логические матрицы и проблема Гольдбаха 62

Н.Е. Томова
О свойствах одного класса четырехзначных паранормальных логик . 75

История логики

В.В. Воробьев
Стефан Александрийский как «наследник» Аммония 90

А.О. Копылова
Овремененные пропозиции в логике У. Оккама 99

Дискуссии

Ю.В. Ивлев
Предмет и перспективы развития логики 115

Nikolai N. Nepejvoda
Formalization as the Immanent Part of Logical Solving 129

Информация для авторов 146

Логические исследования
2018. Т. 24. № 1. С. 9–25
УДК 16

Logical Investigations
2018, Vol. 24, No. 1, pp. 9–25
DOI: 10.21146/2074-1472-2018-24-1-9-25

Традиционная логика
Traditional Logic

И.А. Горбунов

Логика, единство в трёх лицах [*]

Горбунов Игорь Анатольевич
Тверской государственный университет.
Российская Федерация, 170100, г. Тверь, ул. Желябова, 33.
E-mail: i_gorbunov@mail.ru

Эта работа в своей большей части имеет обзорный характер. В ней рассмотрены некоторые основополагающие результаты, полученные в рамках так называемой алгебраической логики. В частности, обсуждаются факты о взаимосвязях, существующих между такими основными синтаксическими объектами логики, как логическое следование, операция добавления следствий и решётка теорий логики.

Основное внимание в работе уделяется обоснованию того факта, что для того, чтобы определить логику синтаксически, необходимо и достаточно задать один из этих объектов. Для этого детально показано, как задание одного из этих объектов полностью определяет и два других объекта, а значит, и логику. А именно, показано что отношение логического следования определяет и операцию добавления следствий, и решётку теорий логики. В свою очередь, задание оператора добавления следствий определяет и логическое следование, и решётку теорий логики. Особенно подробно рассматриваются условия, которые являются необходимыми и достаточными для того, чтобы семейство множеств формул порождало операцию замыкания, которую можно трактовать как операцию добавления следствий. Для этого в работе вводится понятие *семейства множеств формул, образующего решётку теорий*. Доказывается, что такое семейство определяет логику. Намечаются возможные подходы к способам задания таких семейств.

В заключение обращается внимание на то, что наиболее популярные синтаксические определения логик (такие, как исчисления секвенций, исчисления фрегевского типа, замыкание множеств относительно правил вывода) одинаково успешно можно понимать как определения и логического следования, и операции добавления следствий, и компактных элементов решётки теорий логики (а значит, в силу её алгебраичности, и самой решётки теорий).

Ключевые слова: логическое следование, операция добавления следствий, решётка теорий, компактность в решётках, задание логики

[*] Работа выполнена при поддержке РФФИ, проекты №16–07–01272-а, №17-03-00818-ОГН-а и №18-011-00869-а.

1. Введение

Эта работа не претендует на какую-то новизну излагаемых в ней фактов. Многие из этих фактов либо фольклорны, либо изложены в тех или иных источниках с той или иной степенью подробности (например, [12] и [1]). Видимо, именно их разбросанность и не даёт возможности охватить их как единое целое, затемняя те взаимосвязи, которые существуют между его частями. Здесь мы дадим достаточно чёткое и полное их описание.

Мы опишем математические модели тех понятий, которые непосредственно связаны с понятием логики. Покажем, в некотором смысле, эквивалентность этих понятий, а также покажем ту взаимосвязь, которая возникает между моделью и теми способами задания логики, которые возможны в этой модели.

Мы не будем давать определения логики. Для построения её пропозициональной модели достаточно согласия со следующими фактами.

Где бы ни наличествовала логика, в случае её наличия это приводит к тому, что она начинает наличествовать в языке (в естественном ли, в искусственном...). Наличие её в языке проявляется в том, что в нём возникают некоторые минимальные конструкции, которым мы можем приписывать истинностные оценки. Эти минимальные конструкции принято называть элементарными пропозициями, высказываниями или утверждениями. Кроме того, в языке присутствуют конструкции, позволяющие составлять новые утверждения из некоторого числа других утверждений. Такие конструкции принято называть логическими связками. Истинностные оценки утверждений, составленных с помощью логических связок, зависят от истинностных оценок входящих в них пропозиций. Таким образом, получается, что для задания логического следования нам достаточно такой модели языка, алфавит которой будет содержать переменные для пропозиций и символы логических связок. Логики, язык которых содержит переменные для других объектов, а также кванторные символы, мы здесь рассматривать не будем. (Хотя и для них многое сказанное ниже остаётся в силе.)

Зададим теперь ту модель языка, в которой мы и будем определять логическое следование. *Пропозициональным алфавитом* будем называть тройку $\langle V, \Sigma, \Upsilon \rangle$, где V — счётное множество символов, называемых *пропозициональными переменными*, Σ — не более чем счётное множество конечноместных функциональных символов, называемых *пропозициональными связками* алфавита, а $\Upsilon = \{(,),\ ,\}$ — множество вспомогательных символов. Всякий терм, построенный из символов алфавита $\langle V, \Sigma, \Upsilon \rangle$, будем называть *формулой*. *Языком* $\mathcal{L}$ будем называть множество всех формул алфавита $\langle V, \Sigma, \Upsilon \rangle$. Заметим, что различные языки будут отличаться только множеством связок, и значит, для задания пропозиционального языка достаточно задать множество Σ.

Сразу договоримся о следующих обозначениях. Пусть X — некоторое множество. Посредством $\mathcal{P}(X)$ будем обозначать множество его подмножеств, а посредством $\mathcal{P}_{fin}(X)$ — множество всех его конечных подмножеств. Буквой $\mathbf{E}$ обозначим множество всех подстановок некоторого фиксированного пропозиционального языка. Для любой подстановки $\varepsilon \in \mathbf{E}$ и любого множества $\Gamma \in \mathcal{P}(\mathcal{L})$ положим, что

$$\varepsilon(\Gamma) = \{\psi : \psi = \varepsilon(\varphi), \varphi \in \Gamma\},$$

определив таким образом *операцию подстановки* на множестве $\mathcal{P}(\mathcal{L})$.

2. Логическое следование, операция добавления следствий, решётка теорий

Всё, изложенное в этом разделе, в кратком виде содержится в [1]; здесь мы изложим эти факты в развёрнутом виде, снабдив необходимыми доказательствами.

Пусть язык $\mathcal{L}$ у нас фиксирован. Определим отношение *логического следования*, которое будем обозначать посредством $\vdash$, как некоторое подмножество декартового произведения $\mathcal{P}_{fin}(\mathcal{L}) \times \mathcal{L}$, которое обладает следующими свойствами: для любых $\Gamma, \Delta \in \mathcal{P}_{fin}(\mathcal{L})$ и $\varphi \in \mathcal{L}$ верно, что

(A1) $\varphi \in \Gamma \Rightarrow \Gamma \vdash \varphi$ (рефлексивность);

(A2) $\Gamma \subseteq \Delta$ и $\Gamma \vdash \varphi \Rightarrow \Delta \vdash \varphi$ (монотонность);

(A3) $\Gamma \vdash \varphi$ и $(\forall \psi \in \Gamma)$ $(\Delta \vdash \psi) \Rightarrow \Delta \vdash \varphi$ (транзитивность);

(A4) $\Gamma \vdash \varphi \Rightarrow (\forall \varepsilon \in \mathbf{E})$ $(\varepsilon(\Gamma) \vdash \varepsilon(\varphi))$ (структурность).

Если отношение логического следования некоторым образом задано, то этим мы и определили некоторую **логику** L, которую мы, таким образом, понимаем как пару $\langle \Sigma, \vdash \rangle$.

Расширим отношение $\vdash$ до отношения $\vdash^{\omega} \subseteq \mathcal{P}(\mathcal{L}) \times \mathcal{L}$ следующим образом:

$$\Gamma \vdash^{\omega} \varphi \Leftrightarrow (\exists \Delta \in \mathcal{P}_{fin}(\Gamma))(\Delta \vdash \varphi).$$

Используя это определение, можно показать, что отношение $\vdash^{\omega}$ также обладает свойствами A1–A4.

Теперь для уже определённой логики L введём *операцию добавления следствий* C на множестве $\mathcal{P}(\mathcal{L})$. Для этого положим, что

$$C(\Gamma) = \{\varphi : \Gamma \vdash^{\omega} \varphi\}.$$

Теорема 1. *Операция добавления следствий C любой пропозициональной логики L обладает следующими свойствами:*

(B1) $\Gamma \subseteq C(\Gamma)$ *(экстенсивность);*

(B2) $\Gamma \subseteq \Delta \Rightarrow C(\Gamma) \subseteq C(\Delta)$ *(монотонность);*

(B3) $C(C(\Gamma)) = C(\Gamma)$ *(идемпотентность);*

(B4) $(\forall \varepsilon \in \mathbf{E})\ (\varepsilon(C(\Gamma)) \subseteq C(\varepsilon(\Gamma)))$ *(структурность);*

(B5) $\varphi \in C(\Gamma) \Rightarrow (\exists \Delta \in \mathcal{P}_{fin}(\Gamma))(\varphi \in C(\Delta))$ *(финитарность).*

Доказательство. Пункты B1 и B2 непосредственно следуют из пунктов A1 и A2 соответственно. Финитарность C (пункт B5) следует из определения отношения $\vdash^\omega$.

(B3) Пусть $\varphi \in C(C(\Gamma))$. Следовательно, $C(\Gamma) \vdash^\omega \varphi$. Тогда, в силу транзитивности $\vdash^\omega$, получим, что $\Gamma \vdash^\omega \varphi$. Последнее, в силу определения, означает, что $\varphi \in C(\Gamma)$. Обратное включение следует из монотонности.

(B4) Пусть $\varphi \in \varepsilon(C(\Gamma))$, то есть, существует такая формула ψ, что $\varphi = \varepsilon(\psi)$ и $\psi \in C(\Gamma)$. Последнее, в силу определения, означает, что $\Gamma \vdash^\omega \psi$. Так как отношение $\vdash^\omega$ структурно, то $\varepsilon(\Gamma) \vdash^\omega \varepsilon(\psi)$, а значит, $\varphi \in C(\varepsilon(\Gamma))$. $\square$

Множество $C(\varnothing)$ называем *множеством тавтологий* логики L. В силу структурности, оно замкнуто относительно любой подстановки.

Множество формул Γ будем называть *замкнутым множеством* или *теорией логики* L, если $C(\Gamma) = \Gamma$. Таким образом, для любого множества формул Δ множество $C(\Delta)$ является теорией, при этом элементы множества Δ мы будем называть *аксиомами* теории $C(\Delta)$. Обозначим множество всех теорий логики L посредством Th.

Теорема 2. *Множество всех теорий некоторой логики L образует полную ограниченную решётку $\langle Th, \vee, \wedge \rangle$, относительно операций*

$$C(\Gamma) \vee C(\Delta) = C(\Gamma \cup \Delta),\ C(\Gamma) \wedge C(\Delta) = C(\Gamma) \cap C(\Delta)$$

и в общем случае

$$\bigvee\{C(\Gamma_i) : i \in I\} = C(\bigcup\{\Gamma_i : i \in I\}), \bigwedge\{C(\Gamma_i) : i \in I\} = \bigcap\{C(\Gamma_i) : i \in I\}.$$

На этой решётке решёточный порядок совпадает с отношением включения $\subseteq$. Наибольшим элементом $\langle Th, \vee, \wedge \rangle$ является $\mathcal{L}$, а наименьшим $C(\varnothing)$.

Доказательство приведено в [2, с. 10, Теорема 4.1]. Заметим, что оно использует только свойства B1–B3.

Поскольку в решётке теорий операция $\wedge$ совпадает с операцией $\cap$, то далее эту решётку будем обозначать $\langle Th, \vee, \cap \rangle$.

Одноместная операция, заданная на некотором семействе некоторых множеств, удовлетворяющая свойствам B1–B3, называется *оператором замыкания.* (Таким образом, оператор добавления следствий является операцией замыкания на множестве $\mathcal{P}(\mathcal{L})$.)

Будем говорить, что семейство множеств $\mathcal{X}$ образует *систему замыканий* (closure system), если для любого его подсемейства $\mathcal{Y} \subseteq \mathcal{X}$ верно, что $\bigcap \mathcal{Y} \in \mathcal{X}$. Из Теоремы 2 следует, что верна

Теорема 3. *Множество Th всех теорий некоторой логики L образует систему замыканий.*

Оператор замыкания называется *алгебраическим*, если выполняется равенство $C(X) = \bigcup \{C(Y) : Y \in \mathcal{P}_{fin}(X)\}$.

Лемма 1. *Оператор добавления следствий является алгебраическим.*

Доказательство.

Пусть Γ — это бесконечное множество формул. Допустим, что $\varphi \in C(\Gamma)$ и $\varphi \notin C(\Delta)$ для любого $\Delta \in \mathcal{P}_{fin}(\Gamma)$. Тогда оператор C не является финитарным.

В силу монотонности оператора C, для любого $\Delta \in \mathcal{P}_{fin}(\Gamma)$ верно, что $C(\Delta) \subseteq C(\Gamma)$, и значит, $\bigcup \{C(\Delta) : \Delta \in \mathcal{P}_{fin}(\Gamma)\} \subseteq C(\Gamma)$. $\square$

Элемент a полной решётки называется *компактным*, если для всякого множества X элементов этой решётки верно, что $a \leq \bigvee X \Rightarrow (\exists Y \in \mathcal{P}_{fin}(X))(a \leq \bigvee Y)$. Решётка называется *алгебраической*, если она является полной и для любого её элемента a существует такое множество компактных элементов Z, что $a = \bigvee Z$. Известно (из [2, с. 11, Теорема 5.1]), что *решётка всех замкнутых множеств алгебраического оператора замыкания является алгебраической.*

Теорема 4. *Решётка $\langle Th, \vee, \cap \rangle$ всех теорий некоторой логики L является алгебраической. Множество всех её компактных элементов совпадает с множеством конечно аксиоматизируемых теорий.*

Теорема непосредственно следует из Леммы 1 и Теоремы 5.1 из [2].

Для каждой подстановки $\varepsilon \in \mathbf{E}$ будем называть *обращением подстановки* одноместную операцию, заданную на множестве $\mathcal{P}(\mathcal{L})$, которая каждому множеству Γ ставит в соответствие его прообраз при отображении ε. Обозначать эту операцию будем ε^{-1}. Таким образом,

$$\varepsilon^{-1}(\Gamma) = \{\varphi : \varphi \in \mathcal{L}, (\exists \psi \in \Gamma)(\psi = \varepsilon(\varphi))\}.$$

Теорема 5. *Если оператор замыкания C является структурным, то решётка всех его теорий $\langle Th, \vee, \cap \rangle$ замкнута относительно обращения подстановки, то есть для любой теории $T \in Th$ верно, что $\varepsilon^{-1}(T) = \{\varphi : \varepsilon(\varphi) \in T\} \in Th$.*

Доказательство этого утверждения приведено в [3, с. 14, Лемма 3.4]. Там же сообщается, что этот результат получен Р. Сушко (R. Suszko).

Следующее утверждение непосредственно следует из предыдущих.

Теорема 6. *Множество всех теорий Th любой пропозициональной логики L обладает следующими свойствами:*

(C1) *Th образует полную ограниченную решётку $\langle Th, \vee, \cap \rangle$, решёточный порядок на которой совпадает с отношением включения; наибольшим элементом этой решётки является $\mathcal{L}$, а наименьшим $C(\varnothing)$;*

(C2) *Th образует систему замыканий;*

(C3) *множество Th замкнуто относительно обращения подстановки;*

(C4) *решётка $\langle Th, \vee, \cap \rangle$ является алгебраической и множество всех её компактных элементов совпадает с множеством конечно аксиоматизируемых теорий.*

Таким образом, задание отношения логического следования некоторой пропозициональной логики определяет и операцию добавления следствий этой логики, и решётку её теорий.

3. Операция добавления следствий и логическое следование

Пусть некоторым образом на множестве $\mathcal{P}_{fin}(\mathcal{L})$ определена структурная операция замыкания C^f, то есть C^f обладает свойствами B1–B4. Посредством операции C^f определим на множестве $\mathcal{P}_{fin}(\mathcal{L}) \times \mathcal{L}$ отношение $\vdash$ следующим образом: для любого конечного множества формул Γ положим, что

$$\Gamma \vdash \varphi \Leftrightarrow \varphi \in C^f(\Gamma).$$

Теорема 7. *Отношение $\vdash$ обладает свойствами* A1–A4.

Доказательство.

Свойства A1, A2 и A4 следуют из свойств B1, B2 и B4 соответственно.

(A3) Пусть $\Gamma, \Delta \in \mathcal{P}_{fin}(\mathcal{L})$, $\Gamma \vdash \varphi$ и $(\forall \psi \in \Gamma)$ $(\Delta \vdash \psi)$. Таким образом, имеем, что $\varphi \in C^f(\Gamma)$ и $\Gamma \subseteq C^f(\Delta)$. В силу монотонности получаем, что $C^f(\Gamma) \subseteq C^f(C^f(\Delta))$. Отсюда, в силу инволютивности, следует, что $C^f(\Gamma) \subseteq C^f(\Delta)$. Так как $\varphi \in C^f(\Gamma)$, то $\varphi \in C^f(\Delta)$, и значит, $\Delta \vdash \varphi$. □

Таким образом, задав операцию C^f, мы задали и некоторую логику L с отношением следования $\vdash$. Естественным образом мы можем распространить отношение $\vdash$ до отношения $\vdash^\omega$, ввести оператор добавления следствий C и определить решётку теорий $\langle Th, \vee, \cap \rangle$.

Но мы имеем и другую возможность, которой и воспользуемся. Мы можем распространить операцию C^f на множество $\mathcal{P}(\mathcal{L})$ и получить некоторую операцию C', если определим последнюю следующим образом:

$$\varphi \in C'(\Gamma) \Leftrightarrow (\exists \Delta \in \mathcal{P}_{fin}(\Gamma))(\varphi \in C^f(\Delta)).$$

Лемма 2. $C' = C$.

Доказательство.

Для того чтобы доказать равенство $C' = C$, необходимо показать, что для любого множества формул Γ выполняется равенство $C'(\Gamma) = C(\Gamma)$. Это обосновывается следующей цепочкой эквивалентностей:

$$\varphi \in C(\Gamma) \Leftrightarrow \Gamma \vdash^\omega \varphi \Leftrightarrow (\exists \Delta \in \mathcal{P}_{fin}(\Gamma))(\Delta \vdash \varphi) \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow (\exists \Delta \in \mathcal{P}_{fin}(\Gamma))(\varphi \in C^f(\Delta)) \Leftrightarrow \varphi \in C'(\Gamma).$$

□

Из этой леммы и определения C' непосредственно следует

Теорема 8. *Операция C, определённая следующим образом:*

$$\varphi \in C(\Gamma) \Leftrightarrow (\exists \Delta \in \mathcal{P}_{fin}(\Gamma))(\varphi \in C^f(\Delta)),$$

является операцией добавления следствий логики L.

Теперь определим отношение $\vdash^\omega$ следующим образом:

$$\Gamma \vdash^\omega \varphi \Leftrightarrow \varphi \in C(\Gamma).$$

Таким образом, если мы определили операцию присоединения следствий C^f (или C), то этим мы определили и некоторую **логику** L, которую мы теперь понимаем как пару $\langle \Sigma, C^f \rangle$ (или $\langle \Sigma, C \rangle$, что в данном случае эквивалентно).

4. Решётки множеств и операция замыкания

Пусть определено некоторое семейство множеств формул $\mathcal{T}$, которое содержит множество $\mathcal{L}$ и некоторое наименьшее по включению множество L. Пусть на $\mathcal{T}$ определены операции $\vee$ и $\wedge$ таким образом, что $\langle \mathcal{T}, \vee, \wedge \rangle$ образует полную решётку, в которой отношение решёточного порядка совпадает с отношением включения. По решётке $\langle \mathcal{T}, \vee, \wedge \rangle$ определим на множестве $\mathcal{P}(\mathcal{L})$ операцию C следующим образом:

$$C(\Gamma) = \bigwedge \{\Phi : \Phi \in \mathcal{T}, \Gamma \subseteq \Phi\}.$$

(Далее в этом пункте под $\mathcal{T}$ мы будем понимать семейство множеств, обладающее указанными свойствами.)

Непосредственно из определения C следует

Лемма 3. *Если* $\Gamma \in \mathcal{T}$, *то* $C(\Gamma) = \Gamma$.

Из определения C и полноты решётки следует

Лемма 4. *Для любого* $\Gamma \in \mathcal{P}(\mathcal{L})$ *верно, что* $C(\Gamma) \in \mathcal{T}$.

Из свойств операций $\vee$ и $\wedge$ относительно решёточного порядка и того факта, что он совпадает с отношением включения, следует

Лемма 5. *Для любого* $\mathcal{X} \subseteq \mathcal{T}$ *верно, что* $\bigwedge \mathcal{X} \subseteq \bigcap \mathcal{X}$ *и* $\bigcup \mathcal{X} \subseteq \bigvee \mathcal{X}$.

Также практически из определения следует

Теорема 9. *Операция* C *обладает свойствами* B2 *и* B3.

Доказательство.

(B2) Пусть $\Gamma, \Delta \in \mathcal{P}(\mathcal{L})$ и $\Gamma \subseteq \Delta$. Тогда имеем включение $\{\Phi : \Delta \subseteq \Phi\} \subseteq \{\Psi : \Gamma \subseteq \Psi\}$. Из последнего получим, что

$$\bigwedge \{\Psi : \Gamma \subseteq \Psi\} \subseteq \bigwedge \{\Phi : \Delta \subseteq \Phi\},$$

а это и означает, что $C(\Gamma) \subseteq C(\Delta)$.

Свойство B3 следует из лемм 3 и 4. □

Заметим, что в общем случае свойство B1 для операции C не выполняется. Для его выполнения необходимо потребовать, чтобы решётка $\langle \mathcal{T}, \vee, \wedge \rangle$ удовлетворяла условию

(C) *для любого множества формул* Γ *верно, что* $\Gamma \subseteq \bigwedge \{\Phi : \Phi \in \mathcal{T}, \Gamma \subseteq \Phi\}$.

Если решётка $\langle \mathcal{T}, \vee, \wedge \rangle$ удовлетворяет условию (C), то операция C обладает свойствами B1–B3. Тогда из доказательства Теоремы 4.1 в [2], с учётом Леммы 3, извлекается доказательство следующего факта.

Теорема 10. *Если решётка* $\langle \mathcal{T}, \vee, \wedge \rangle$ *удовлетворяет условию* (C), *то она является полной решёткой замкнутых множеств оператора замыкания* C. *При этом операции* $\vee$ *и* $\wedge$ *определяются на ней следующим образом: для любых* $\Gamma, \Delta \in \mathcal{T}$,

$$\Gamma \vee \Delta = C(\Gamma \cup \Delta),\ \Gamma \wedge \Delta = \Gamma \cap \Delta$$

и в общем случае

$$\bigvee\{\Gamma_i : i \in I\} = C(\bigcup\{\Gamma_i : i \in I\}), \bigwedge\{\Gamma_i : i \in I\} = \bigcap\{\Gamma_i : i \in I\},$$

где $C(\Gamma) = \bigcap\{\Phi : \Phi \in \mathcal{T}, \Gamma \subseteq \Phi\}$.

Заметим, что из теоремы следует, что для любого $\mathcal{X} \subseteq \mathcal{T}$

$$\bigvee \mathcal{X} = \bigcap\{\Phi : \Phi \in \mathcal{T},\ \ \bigcup \mathcal{X} \subseteq \Phi\}.$$

Как известно ([6], с. 57, Теорема 1.1), верно следующее утверждение.

Теорема 11. *Каждая система замыканий* $\mathcal{X} \subseteq \mathcal{P}(\mathcal{L})$ *определяет оператор замыкания* C *на множестве* $\mathcal{L}$ *согласно следующему правилу:*

$$C(\Gamma) = \bigcap\{\Phi : \Phi \in \mathcal{T}, \Gamma \subseteq \Phi\}.$$

Обратно, каждый оператор замыкания C *на* $\mathcal{L}$ *определяет систему замыканий* $\mathcal{X} = \{C(\Gamma) : \Gamma \subseteq \mathcal{L}\}$. *Определённое таким образом соответствие между системами замыканий и операторами замыканий взаимно однозначно.*

Из теорем 10 и 11 следует

Теорема 12. *Для любого семейства множеств формул* $\mathcal{X} \subseteq \mathcal{P}(\mathcal{L})$ *следующие утверждения эквивалентны.*

(D1) *Если* $\mathcal{X}$ *содержит множество* $\mathcal{L}$ *то, на* $\mathcal{X}$ *можно определить операции* $\vee$ *и* $\wedge$ *таким образом, что* $\langle \mathcal{X}, \vee, \wedge \rangle$ *образует полную решётку по включению, которая обладает свойством* (C).

(D2) *Семейство* $\mathcal{X}$ *образует систему замыканий.*

(Стоит иметь в виду, что $\bigcap \varnothing = \mathcal{L}$, где $\bigcap \varnothing$ — пересечение пустого семейства множеств.)

Будем говорить, что *решётка семейства множеств* $\langle \mathcal{X}, \vee, \wedge \rangle$ *определяет оператор (операцию) замыкания*, если семейство $\mathcal{X}$ образует систему замыканий. В дальнейшем такую решётку мы будем обозначать $\langle \mathcal{X}, \vee, \cap \rangle$.

Оператор замыкания, определённый этой решёткой, будем называть *естественным оператором замыкания решётки.*

Рассмотрим теперь операцию обращения подстановки.

Теорема 13. *Пусть $\mathcal{T}$ замкнуто относительно обращения подстановки и решётка $\langle \mathcal{T}, \vee, \cap \rangle$ определяет операцию замыкания C. Тогда C обладает свойством* B4.

Доказательство.

Включение $\varepsilon(\Gamma) \subseteq C(\varepsilon(\Gamma))$ выполняется в силу B1. Так как обращение подстановки монотонно (относительно включения), то это влечёт включение $\varepsilon^{-1}(\varepsilon(\Gamma)) \subseteq \varepsilon^{-1}(C(\varepsilon(\Gamma)))$. Поскольку для обращения подстановки верно, что $\Gamma \subseteq \varepsilon^{-1}(\varepsilon(\Gamma))$, то $\Gamma \subseteq \varepsilon^{-1}(C(\varepsilon(\Gamma)))$. Таким образом, имеем, что $C(\Gamma) \subseteq C(\varepsilon^{-1}(C(\varepsilon(\Gamma))))$.

Множество $\mathcal{T}$ замкнуто относительно обращения подстановки, и значит, $\varepsilon^{-1}(C(\varepsilon(\Gamma))) \in \mathcal{T}$. Тогда $C(\varepsilon^{-1}(C(\varepsilon(\Gamma)))) = \varepsilon^{-1}(C(\varepsilon(\Gamma)))$. Следовательно, $C(\Gamma) \subseteq \varepsilon^{-1}(C(\varepsilon(\Gamma)))$. Так как операция подстановки монотонна относительно включения и верно равенство $\varepsilon(\varepsilon^{-1}(\Gamma)) = \Gamma$, то $\varepsilon(C(\Gamma)) \subseteq (C(\varepsilon(\Gamma)))$.
□

Из теоремы следует, что *если семейство множеств $\mathcal{T}$ замкнуто относительно обращения подстановки и решётка $\langle \mathcal{T}, \vee, \wedge \rangle$ обладает свойством* (C)*, то наименьшее множество решётки (множество L) замкнуто относительно всех подстановок*, поскольку $L = C(\varnothing)$.

5. Компактность и финитарность

Выше мы показали, что, определив некоторое семейство множеств формул, обладающее нужными свойствами, мы определяем и структурный оператор замыкания. Однако этих свойств недостаточно, чтобы мы могли понимать этот оператор замыкания как операцию добавления следствий. Операция добавления следствий обладает свойством финитарности, то есть определённый семейством множеств оператор замыкания должен быть алгебраическим.

Оказывается, что требования алгебраичности решётки множеств недостаточно для того, чтобы её естественный оператор замыкания был алгебраическим. Пример алгебраической решётки семейства множеств, естественный оператор замыкания которой алгебраическим не является, приведён в [4]. Ниже мы укажем некоторые критерии, необходимые для алгебраичности естественного оператора замыкания, определённого решёткой множеств.

Пусть $\mathcal{T} \subseteq \mathcal{P}(\mathcal{L})$ — некоторое семейство подмножеств, образующее решётку по включению $\langle \mathcal{T}, \vee, \cap \rangle$ с естественным оператором замыкания C.

Будем говорить, что некоторый элемент $\Gamma \in \mathcal{T}$ *конечнопорождён* (конечно аксиаматизируем), если существует такое конечное множество $A \subseteq \mathcal{L}$, что $\Gamma = C(A)$.

Лемма 6. *Пусть $\mathcal{T} \subseteq \mathcal{P}(\mathcal{L})$ — некоторое семейство подмножеств, образующее решётку по включению $\langle \mathcal{T}, \vee, \cap \rangle$ с естественным оператором замыкания C, и Γ — компактный элемент решётки. Тогда Γ конечнопорождён.*

Доказательство. Рассмотрим множество $\mathcal{X} = \{B : B \in \mathcal{P}_{fin}(\Gamma)\}$ и множество $\mathcal{B} = \{C(B) : B \in \mathcal{P}_{fin}(\Gamma)\}$. Так как $\Gamma = \bigcup \mathcal{X}$ и $\bigcup \mathcal{X} \subseteq \bigcup \mathcal{B} \subseteq C(\bigcup \mathcal{B})$, то, в силу Теоремы 10, $\Gamma \subseteq \bigvee \mathcal{B}$. Поскольку элемент Γ является компактным, то существует такое конечное подсемейство $\{C(B_1), \ldots, C(B_n)\} \subseteq \mathcal{B}$, что $\Gamma \subseteq \bigvee \{C(B_1), \ldots, C(B_n)\} = C(\bigcup \{C(B_1), \ldots, C(B_n)\})$. Поскольку $C(\bigcup \{C(B_1), \ldots, C(B_n)\}) = C(\bigcup \{B_1, \ldots, B_n\})$, то получим, что $\Gamma \subseteq C(\bigcup \{B_1, \ldots, B_n\})$.

Для любого $1 \leq i \leq n$ верно, что $B_i \subseteq \Gamma$, и значит, $\bigcup \{B_1, \ldots, B_n\} \subseteq \Gamma$. Получаем, что $C(\bigcup \{B_1, \ldots, B_n\}) \subseteq C(\Gamma) = \Gamma$. Таким образом, имеем, что $\Gamma = C(\bigcup \{B_1, \ldots, B_n\})$, где $\bigcup \{B_1, \ldots, B_n\}$ — конечное множество. □

Семейство множеств $\mathcal{X}$ будем называть *направленным*, если для любых $A \in \mathcal{X}$ и $B \in \mathcal{X}$, существует такое $C \in \mathcal{X}$, что $A \cup B \subseteq C$. Будем говорить, что семейство множеств $\mathcal{X}$ *замкнуто по объединению направленных подсемейств*, если для любого непустого направленного подсемейства $\mathcal{M}$ верно, что $\bigcup \mathcal{M} \in \mathcal{X}$.

Теорема 14. *Пусть семейство множеств $\mathcal{T} \subseteq \mathcal{P}(\mathcal{L})$ образует решётку $\langle \mathcal{T}, \vee, \cap \rangle$. Тогда следующие утверждения эквивалентны.*

(E1) *Естественный оператор замыкания решётки $\langle \mathcal{T}, \vee, \cap \rangle$ является алгебраическим.*

(E2) *Решётка $\langle \mathcal{T}, \vee, \cap \rangle$ замкнута относительно объединения её направленных подсемейств.*

(E3) *Все конечнопорождённые естественным оператором замыкания решётки $\langle \mathcal{T}, \vee, \cap \rangle$ множества являются компактными элементами этой решётки.*

Доказательство. Следует из Теоремы 1.2 ([6, с. 59–60]), Леммы 3.1 ([1, с. 27–28]) и Леммы 6 настоящей работы. □

6. Решётка множеств формул как решётка теорий

Будем говорить, что семейство множеств формул $\mathcal{T}$ *образует решётку теорий*, если оно обладает следующими свойствами:

(F1) *$\mathcal{T}$ образует полную ограниченную решётку $\langle \mathcal{T}, \vee, \cap \rangle$, решёточный порядок на которой совпадает с отношением включения; наибольшим элементом этой решётки является $\mathcal{L}$*;

(F2) *семейство $\mathcal{T}$ замкнуто относительно объединения её направленных подсемейств*;

(F3) *семейство $\mathcal{T}$ замкнуто относительно обращения подстановки*;

(F4) *семейство $\mathcal{T}$ образует систему замыканий.*

Теорема 15. *Если семейство множеств формул $\mathcal{T}$ образует решётку теорий, то оно определяет некоторую логику L.*

Доказательство. В силу теорем 12 и 10, это семейство определяет естественный оператор замыкания C, и он удовлетворяет свойствам B1–B3. В силу Теоремы 13, этот оператор обладает свойством B4. В силу Теоремы 14, этот оператор замыкания является алгебраическим и, следовательно (что несложно доказать), обладает свойством B5. Таким образом, оператор C обладает всеми свойствами операции добавления следствий, а значит (см. пункт 3), определяет некоторую логику L. □

Теперь мы можем понимать **логику** L как пару $\langle \Sigma, \mathcal{T} \rangle$, где $\mathcal{T}$ — семейство множеств формул, образующее решётку теорий.

Заметим, что семейство $\mathcal{T}$ определяет также и отношение логического следования. Это отношение можно задать, например, так же, как и в пункте 3, рассмотрев операцию C для всех конечных подмножеств. Таким образом, логику, заданную семейством множеств формул $\mathcal{T}$, мы можем переопределить и как пару $\langle \Sigma, C \rangle$, и как пару $\langle \Sigma, \vdash \rangle$.

7. Отношение включения в решётке теорий и подрешётка компактных элементов

Обратим теперь внимание на то, что устройство решётки теорий всякой пропозициональной логики зависит от устройства подрешётки, состоящей из всех её компактных элементов и множества $\mathcal{L}$.

Пусть семейство множеств формул $\mathcal{T}$ образует решётку теорий $\langle \mathcal{T}, \vee, \cap \rangle$. Обозначим посредством $\mathcal{K}$ семейство подмножеств, состоящее из всех компактных элементов этой решётки и множества $\mathcal{L}$, посредством

$\langle\mathcal{K},\vee,\cap\rangle$ обозначим образованную элементами этого семейства подрешётку. Заметим, что решётка $\langle\mathcal{K},\vee,\cap\rangle$ не является полной.

Свойства решётки теорий полностью определяются свойствами отношения включения, существующими между теориями. Покажем, что отношение включения решётки $\langle\mathcal{T},\vee,\cap\rangle$ полностью определяется отношением включения, определённым для её компактных элементов.

Для конечно аксиоматизируемых теорий это очевидно. Пусть Γ и Δ — некоторые множества формул. Так как C — алгебраический оператор замыкания, то выполняются равенства $C(\Delta) = \bigcup\{C(\Sigma) : \Sigma \in \mathcal{P}_{fin}(\Delta)\}$ и $C(\Gamma) = \bigcup\{C(\Xi) : \Xi \in \mathcal{P}_{fin}(\Gamma)\}$. Введём следующие обозначения: $\mathcal{D} = \{C(\Sigma) : \Sigma \in \mathcal{P}_{fin}(\Delta)\}$ и $\mathcal{G} = \{C(\Xi) : \Xi \in \mathcal{P}_{fin}(\Gamma)\}$. Заметим, что $\mathcal{D}\cup\mathcal{G} \subseteq \mathcal{K}$.

Теорема 16.

$C(\Delta) \subseteq C(\Gamma) \Leftrightarrow (\forall\Sigma \in \mathcal{P}_{fin}(\Delta))(\exists\Xi \in \mathcal{P}_{fin}(\Gamma))(C(\Sigma) \subseteq C(\Xi))$.

Доказательство. Пусть $C(\Delta) \subseteq C(\Gamma)$, $C(\Sigma) \in \mathcal{D}$ и $\Sigma = \{\varphi_1,\ldots,\varphi_n\}$. Для любого $1 \leq i \leq n$ существует $\Xi_i \in \mathcal{P}_{fin}(\Gamma)$ такое, что $\varphi_i \in C(\Xi_i)$. Таким образом, $C(\Sigma) \subseteq C(\Xi_1 \cup \ldots \cup \Xi_n)$, где $\Xi_1 \cup \ldots \cup \Xi_n \in \mathcal{P}_{fin}(\Gamma)$.

Пусть теперь верно, что $(\forall\Sigma \in \mathcal{P}_{fin}(\Delta))(\exists\Xi \in \mathcal{P}_{fin}(\Gamma))(C(\Sigma) \subseteq C(\Xi))$. Тогда выполнено включение $\bigcup\mathcal{D} \subseteq \bigcup\mathcal{G}$. Отсюда следует, что $C(\Delta) = \bigcup\mathcal{D} \subseteq \bigcup\mathcal{G} = C(\Gamma)$. □

Из этой теоремы следует

Теорема 17.

$C(\Delta) = C(\Gamma) \Leftrightarrow (\forall\Sigma \in \mathcal{P}_{fin}(\Delta))(\exists\Xi \in \mathcal{P}_{fin}(\Gamma))(C(\Sigma) \subseteq C(\Xi))$ *и* $(\forall\Xi \in \mathcal{P}_{fin}(\Gamma))(\exists\Sigma \in \mathcal{P}_{fin}(\Delta))(C(\Xi) \subseteq C(\Sigma))$.

Перейдём к следующей теореме.

Теорема 18.

$C(\Delta) \subset C(\Gamma) \Leftrightarrow (\forall\Sigma \in \mathcal{P}_{fin}(\Delta))(\exists\Xi \in \mathcal{P}_{fin}(\Gamma))(C(\Sigma) \subseteq C(\Xi))$ *и* $(\exists\Xi \in \mathcal{P}_{fin}(\Gamma))(\forall\Sigma \in \mathcal{P}_{fin}(\Delta))(C(\Xi) \nsubseteq C(\Sigma))$.

Доказательство. Пусть верно включение $C(\Delta) \subset C(\Gamma)$. Так как $C(\Delta) \subset C(\Gamma)$ эквивалентно тому, что $C(\Delta) \subseteq C(\Gamma)$ и $C(\Delta) \neq C(\Gamma)$, то условие о том, что $(\forall\Sigma \in \mathcal{P}_{fin}(\Delta))(\exists\Xi \in \mathcal{P}_{fin}(\Gamma))(C(\Sigma) \subset C(\Xi))$ доказывается так же, как и в доказательстве Теоремы 16.

Так как $C(\Delta) \neq C(\Gamma)$, то существует такая формула φ, что $\varphi \in C(\Gamma)$ и $\varphi \notin C(\Delta)$. Первое означает, что существует такое множество $\Xi \in \mathcal{P}_{fin}(\Gamma)$, что $C(\varphi) \subseteq C(\Xi)$. Из того, что $\varphi \notin C(\Delta)$, следует, что для любого множества $\Sigma \in \mathcal{P}_{fin}(\Delta)$ верно, что $C(\varphi) \nsubseteq C(\Sigma)$. Таким образом, для любого $\Sigma \in \mathcal{P}_{fin}(\Delta)$ верно, что $C(\Xi) \nsubseteq C(\Sigma)$.

Пусть теперь выполняются условия правой части утверждения теоремы. Из первого условия следует включение $C(\Delta) \subseteq C(\Gamma)$, а из второго — неравенство $C(\Delta) \neq C(\Gamma)$. □

Теорема 19.

$$C(\Delta) \not\subset C(\Gamma) \Leftrightarrow (\exists \Sigma \in \mathcal{P}_{fin}(\Delta))(\forall \Xi \in \mathcal{P}_{fin}(\Gamma))(C(\Sigma) \nsubseteq C(\Xi)).$$

Доказательство. Пусть $C(\Delta) \not\subset C(\Gamma)$. Тогда существует такая формула φ, что $\varphi \in C(\Delta)$ и $\varphi \notin C(\Gamma)$. Из первого следует, что существует такое множество $\Sigma \in \mathcal{P}_{fin}(\Delta)$, что $C(\varphi) \subseteq C(\Sigma)$. Тогда из того, что $\varphi \notin C(\Gamma)$, следует, что для любого $\Xi \in \mathcal{P}_{fin}(\Gamma)$ имеет место следующий факт: $C(\Sigma) \nsubseteq C(\Xi)$.

Пусть теперь верно, что $(\exists \Sigma \in \mathcal{P}_{fin}(\Delta))(\forall \Xi \in \mathcal{P}_{fin}(\Gamma))(C(\Sigma) \nsubseteq C(\Xi))$. Тогда $C(\Sigma) \nsubseteq C(\Gamma)$, и значит, $C(\Delta) \nsubseteq C(\Gamma)$. □

Из приведённых фактов следует, что для задания решётки теорий достаточно задать подрешётку её компактных элементов.

8. Заключение

Таким образом, в определённой нами (во введении) модели пропозиционального языка под логикой мы можем понимать одну из пар: $\langle \Sigma, \vdash \rangle$, $\langle \Sigma, C \rangle$, $\langle \Sigma, \mathcal{T} \rangle$. Однако этого как раз и не стоит делать.

Отношение логического следования, операция добавления следствий и решётка теорий являются *основными синтаксическими структурами* пропозициональной логики. Наличие **логики** требует их **одновременного** присутствия.

При этом их положение в ряду синтаксических объектов, связанных с логикой, уникально. Как мы видели выше, задание хотя бы одного из этих трёх объектов однозначно определяет логику, а значит, и два оставшихся. То есть задание логики посредством, например, решётки теорий означает, что мы также определили и логическое следование, и операцию добавления следствий. Таким образом, с точки зрения определения логики эти объекты эквивалентны. То есть между классом всех отношений логического следования, классом всех структурных и финитарных операций замыкания и классом всех семейств множеств, образующих решётку теорий, существуют взаимнооднозначные соответствия, подчиняющиеся закону композиции. Таким образом, для того, чтобы определить логику синтаксически, необходимо и достаточно задать один из этих объектов.

Заметим, что в связи с этим привычный эвфемизм «определим логику как пару $\langle \Sigma, \vdash \rangle$» надо понимать следующим образом: «определим логику посредством пары $\langle \Sigma, \vdash \rangle$». Последнее не мешает нам, говоря об определённой таким образом логике, говорить и о связанных с ней парах $\langle \Sigma, C \rangle$ и $\langle \Sigma, \mathcal{T} \rangle$. Определить логику синтаксически, миновав эту троицу, невозможно. (Мы вообще не касаемся здесь семантических аспектов логики.)

Рассмотрим несколько подробнее взаимосвязь популярных способов задания логики с этими синтаксическими её аспектами.

Зачастую при фиксированном языке логику определяют как множество формул L, замкнутое относительно всех подстановок и некоторого фиксированного множества R правил вывода. В этом случае логику определяют через операцию добавления следствий C, заданную неявным образом. Здесь $L = C(\varnothing)$, а $C(X)$ определяется как наименьшее множество, содержащее $L \cup X$ и замкнутое относительно всех правил из множества R.

Не менее популярно задание логики посредством исчисления секвенций. Секвенцией будем называть последовательность, имеющую один из двух видов: $\Gamma \vdash \varphi$ или $\Gamma \vdash \varnothing$. Здесь Γ — конечное множество формул (возможно, пустое), а φ — формула. Секвенциональной схемой аксиом вида $\Gamma \vdash \theta$ (где $\theta \in \{\varphi, \varnothing\}$) будем называть множество $\{\varepsilon\Gamma \vdash \varepsilon\theta : \varepsilon \in \mathbf{E}\}$. Исчисление секвенций состоит из списка секвенциональных схем аксиом, списка правил вывода и определения вывода в этом исчислении. Если понимать последовательность вида $\Gamma \vdash \varnothing$ как множество $\{\Gamma \vdash \varphi : \varphi \in \mathcal{L}\}$, то несложно заметить, что исчисление секвенций — это исчисление, задающее отношение логического следования.

Рассмотрим теперь задание логики исчислением, которое обычно называют исчислением гильбертовского типа. Это исчисление задаётся двумя списками — списком схем аксиом Ax и списком правил вывода R. Снабжённое определением вывода, оно определяет множество всех формул, выводимых в этом исчислении, которое является множеством тавтологий $L = C(\varnothing)$.

Снабжённое понятием вывода из множества формул, это исчисление определяет счётное число исчислений. Каждое такое исчисление образовано тройкой $\langle \Gamma, Ax, R \rangle$, где $\Gamma \in \mathcal{P}_{fin}(\mathcal{L})$. Множество всех таких троек $\langle \Gamma, Ax, R \rangle$ определяет *отношение выводимости* $\Vdash \subseteq \mathcal{P}_{fin}(\mathcal{L}) \times \mathcal{L}$, которое мы отождествляем с отношением логического следования: $\Gamma \Vdash \varphi \Leftrightarrow \Gamma \vdash \varphi$.

В то же время каждое такое исчисление $\langle \Gamma, Ax, R \rangle$ определяет результат операции замыкания $C^f(\Gamma)$.

Также можно считать, что множество всех таких исчислений $\langle \Gamma, Ax, R \rangle$ задаёт все компатные элементы решётки теорий. Как говорилось выше, задание компактных элементов и отношений между ними полностью определяет решётку теорий. Таким образом, можно считать, что исчисление гильбертовского типа задаёт семейство множеств формул, образующих решётку теорий.

Этот далеко не полный разбор синтаксических способов задания логики показывает, что, определяя логику, мы определяем, по сути дела, сразу три объекта, и лишь необходимость линейного изложения вынуждает нас сосредотачивать своё внимание на одном из них.

Литература

[1] *Биркгоф Г.* Теория решёток. М.: Наука, 1984. 568 с.

[2] *Горбунов И.А.* Решётки множеств и алгебраический оператор замыкания // Вестник ТвГУ. Сер.: Прикладная математика. 2017. № 4. С. 35–42.

[3] *Карпенко А.С.* Логика на рубеже тысячелетий // Логические исследования. Вып. 7. М.: Наука, 2000. С. 7–60.

[4] *Кон П.* Универсальная алгебра. М.: Мир, 1969. 351 с.

[5] *Смирнов Д.М.* Многообразия алгебр. Новосибирск: Наука, 1992. 205 с.

[6] *Blok W., Pigozzi D.* Algebraizable Logic // Memoirs of the American Mathematical Society. Vol. 77. № 396. Providence, Rhode Island: American Mathematical Society, 1989. 78 p.

[7] *Wojcicki R.* Lectures on Propositional Calculi. URL: http://sl.fr.pl/wojcicki/Wojcicki-Lectures.pdf дата обращения: 11.01.2018).

Igor A. Gorbunov

Logic, Unity in Three Persons *

Gorbunov Igor Anatolievich
Tver State University
Zhelyabova 33, Tver, 170100, Russian Federation.
E-mail: i_gorbunov@mail.ru

This paper is mainly a review of some well-known facts concerning interconnections between such basic syntactic notions of logic as relation of logical consequence, consequence operator, and the lattice of theories under a logic. In doing so, we seek to provide evidence for the fact that, to define the logic syntactically, it is necessary and sufficient to define one of these three notions: namely, if one of them is defined, it unambiguously determines the other two. We consider in detail conditions that are both necessary and sufficient to prove the following statement: a closure operator generated by a class of sets of formulas can be interpreted as a consequence operator. To that end, we introduce the notion of a system of sets of formulas forming a lattice of theories. We prove that such a system defines a logic and consider some possible approaches to constructing such systems.

The paper draws attention to the fact that the most popular syntactic definitions of logics (such as sequent calculi, Frege-type calculi, closures of sets with respect to inference rules) can be equally well understood as defining relations of logical consequence, consequence operators and compact elements of the lattice of theories under a logic.

Keywords: relation of logical consequence, consequence operator, lattice of theories, methods of specifying logic, compactness in lattices

References

[1] Birkhoff, G. *Teoriya reshetok* [Lattice theory]. Moscow: Nauka, 1984. 568 pp.

[2] Gorbunov, I. A. "Reshetki mnozhestv i algebraicheskii operator zamykaniya" [Lattices of a sets and algebraic closure operator], *Vestnik TvGU. Seriya: Prikladnaya Matematika* [Herald of Tver State University. Series: Applied Mathematics], 2017, No. 4, pp. 35–42. (In Russian)

[3] Karpenko, A. S. "Logika na rubezhe tysyacheletii" [Logic at the border-line of millennium], *Logicheskie issledovaniya* [Logical Investigations]. Vol. 7. Moscow: Nauka, 2000б pp. 7–60. (In Russian)

[4] Cohn, P. M. *Universal algebra.* New York: Harper and Row, 1965. 351 pp.

[5] Smirnov, D. M. *Mnogoobraziya algebr* [The variety of algebras]. Novosibirsk: Nayka, 1992. 205 pp. (In Russian)

[6] Blok, W., Pigozzi, D. Algebraizable Logic, in: *Memoirs of the American Mathematical Society.* Vol. 77. № 396. Providence, Rhode Island, American Mathematical Society, 1989. 78 pp.

[7] Wojcicki, R. *Lectures on Propositional Calculi* [http://sl.fr.pl/wojcicki/Wojcicki-Lectures.pdf, accessed on 11.01.2018].

* The paper is supported by Russian Foundation for Basic Research, projects №16–07–01272-a, №17-03-00818-a and №18-011-00869-a.

Логические исследования
2018. Т. 24. № 1. С. 26–45
УДК 168.3

Logical Investigations
2018, Vol. 24, No. 1, pp. 26–45
DOI: 10.21146/2074-1472-2018-24-1-26-45

В.И. Шалак

Анализ vs дедукция

Шалак Владимир Иванович
Институт философии РАН.
Российская Федерация, 109240, г. Москва, ул. Гончарная, д.12, стр.1.
E-mail: shalack@gmail.com

В настоящей работе рассматриваются четыре вида задач, которые естественным образом возникают в связи с определением логического вывода: 1) проверка доказательства: $\Gamma\langle A_1,..,A_n\rangle A$; 2) поиск интересных следствий: $\Gamma\langle ...\rangle ?$; 3) поиск доказательства: $\Gamma\langle .?.\rangle A$; 4) поиск гипотез: $?\langle ...\rangle A$. В современной логике основное внимание уделяется задаче поиска доказательств. Ограничительные теоремы Гёделя имеют прямое к ней отношение. В то же время в реальной практике задача поиска гипотез, из которых следует целевое предложение, встречается гораздо чаще, чем задача поиска доказательства. Подробному ее исследованию и посвящена основная часть настоящей работы. Дано предложение A, и требуется найти множество гипотез (посылок) Γ, из которых оно логически выводимо. Выбор подходящих гипотез Γ происходит на основе логического анализа предложения A. Мы можем выделить шесть различных оснований для выбора этих гипотез: 1) принятие явных определений для предикатных и функциональных символов; 2) принятие неявных аксиоматических определений для предикатных и функциональных символов; 3) принятие ранее доказанных теорем; 4) принятие эмпирически истинных предложений; 5) принятие предложений, описывающих результат некоторого действия; 6) принятие правдоподобных гипотез, которые могут иметь отношение к решаемой задаче. В работе построено исчисление, которое формализует задачу аналитического поиска гипотез для данного целевого предложения.

Ключевые слова: решение задач, логический вывод, поиск доказательства, поиск гипотез, логическая редукция, аналитические таблицы, теория определений

Настоящая статья посвящена развитию идей аналитического подхода к решению задач, высказанных автором в [4, 7, 8]. Желание продолжить исследование в данном направлении укрепилось после ознакомления с работами К. Целлуччи [9, 10, 13, 14, 15, 11], взгляды которого на роль логики в процессе познания оказались очень близкими.

1. Логический вывод

«Первую Аналитику» Аристотель открывает словами о том, что его исследование посвящено доказательству и это дело доказывающей науки.

В настоящее время точка зрения, что центральным понятием логики является рассуждение, получила широкое распространение.

> *Логику можно определить как науку о хороших способах рассуждений. Под "хорошими" способами рассуждения при этом можно понимать такие, при которых из верных исходных положений получаются верные результаты* [3, с. 6].

Понятие рассуждения получает строгое уточнение в понятии логического вывода.

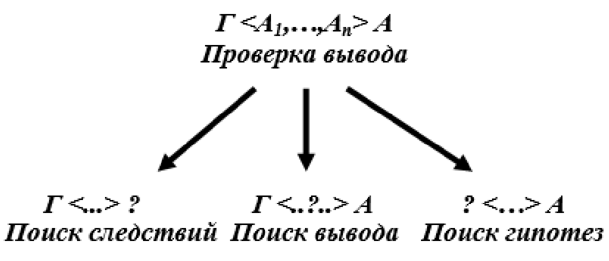
> *Выводом формулы A из множества посылок Γ называется непустая конечная последовательность формул $A_1, \dots, A_n (= A)$, каждая из которых является либо одной из посылок, либо получена из предшествующих формул последовательности по одному из правил вывода, и последней формулой последовательности является A.*

При таком определении логический вывод имеет вид трехэлементной структуры $\Gamma\langle A_1, \dots, A_n\rangle A$:

1. Множество посылок (гипотез) Γ.
2. Последовательность формул $\langle A_1, \dots, A_n\rangle$.
3. Конечная формула этой последовательности A_n $(= A)$.

С нашей точки зрения, данное определение является наиболее естественным, хотя в логике существует много других методов установления отношения выводимости $\Gamma \vdash A$, понятие вывода которых структурно отличается от приведенного. Среди них можно назвать метод секвенций, методы аналитических и семантических таблиц, метод резолюций, индексный метод и др. Результат применения каждого из них допускает эффективное преобразование к стандартному виду вывода.

В связи с данным определением естественным образом возникают четыре вида задач.



1.1. Проверка корректности вывода: $\Gamma\langle A_1, \ldots, A_n\rangle A$

В этой задаче можно выделить две подзадачи. Первая подзадача — обоснование правил вывода, т. е. сохранения полезных свойств (истинности) формул от посылок правил к их заключениям, которая обычно решается семантическими средствами. Вторая — проверка корректности применения правил вывода в процессе его построения.

Если судить по определению доказательства, задача проверки корректности применения правил вывода тривиальна, но это только в теории. В реальной практике при построении математических доказательств структура рассуждений далека от логического идеала, что значительно усложняет проверку уже доказанных теорем и может служить причиной накопления незамеченных ошибок. Например, на проверку знаменитого доказательства Перельмана ушло три года. Лишь несколько человек взяли на себя ответственность за то, чтобы полностью разобраться в доказательстве и подтвердить его правильность. Остальное математическое сообщество поверило им на слово.

Известный математик Владимир Воеводский инициировал специальную исследовательскую программу *Унивалентных оснований математики* [1, 2], одной из задач которой является создание логико-математического языка для проведения сложных конструктивных доказательств, которые могли бы быть относительно легко верифицированы как людьми, так и с помощью компьютеров. В качестве языка для представления доказательств им была построена *гомотопическая теория типов*.

1.2. Поиск интересных следствий: $\Gamma\langle ... \rangle ?$

Второй тип задач — поиск интересных (полезных) следствий из данного множества предложений Γ. Мы знаем аксиомы многих математических и естественнонаучных теорий, но не догадываемся, какие новые интересные следствия они в себе скрывают. Создать методы получения таких следствий, генератор знаний, — мечта исследователей в области искусственного интеллекта. Проблема, однако, заключается в том, что множество следствий бесконечно, и потому необходимо создание специальных фильтров, отсекающих интересные следствия от неинтересных. Задача трудная, но имеющая большое теоретическое и прикладное значение.

В.А. Смирнов иллюстрировал эту задачу на примере из области органической химии [6]. Имеется теоретической описание предметной области и относящиеся к ней эмпирические данные. На основании количественного анализа вещества формируется большое, но конечное множество структурных формул. Затем производится их проверка на совместимость с теоретическими положениями и эмпирическими данными. Многие формулы отбрасываются, и остается одна или несколько формул, удовлетворяющих исходным данным.

1.3. Поиск вывода: $\Gamma\langle...?...\rangle A$

Данный вид задач в логике наиболее популярен. Именно он лежит в основе аксиоматического метода построения научных теорий. Есть множество аксиом Γ, и мы интересуемся существованием вывода из них конкретных формул.

Тот факт, что логика в значительной степени ориентирована на задачи поиска вывода, имеет историческое объяснение. Идея аксиоматического метода была высказана еще Аристотелем, полагавшим, что существует небольшое число начал, из которых путем рассуждений можно вывести все истинные суждения о явлениях окружающего мира. На рубеже XIX–XX вв. аксиоматический метод и задача поиска доказательств получили новый импульс развития. Кризис в математике потребовал сохранения максимального объема уже полученных математических результатов и подведения под них строгих оснований. Аксиоматические системы как раз и были призваны в сжатой форме сохранить центральное содержание существующих математических теорий, а строгое понятие логического вывода должно было дать корректный механизм извлечения опосредованного знания из этих аксиом. С тех пор задача поиска вывода оказалась в центре внимания логики, а гипотетико-дедуктивный метод построения научных теорий проник и закрепился в методологии науки.

Работы в этой области позволили получить много важных металогических результатов о свойствах логических систем. Однако, вопреки возлагаемым надеждам, методы поиска доказательств так и не позволили дедуцировать ни одной новой интересной теоремы. Более того, из теорем Гёделя следует, что не только практически, но и теоретически аксиоматический подход к построению научных теорий не отвечает поставленным целям. Это относится как к принципиальной неполноте достаточно богатых теорий, так и к невозможности установить их непротиворечивость. Идея Аристотеля о возможности объяснения многообразия явлений окружающего мира из небольшого числа начал оказалась принципиально неосуществимой.

1.4. Поиск гипотез: $?\langle\ldots\rangle A$

Четвертый вид задач — поиск правдоподобных гипотез, из которых следует предложение A. В современной логике решение таких задач почти не изучается, хотя они имеют более непосредственное отношение к исследовательской практике, чем задачи поиска доказательств.

В качестве одного из немногих исключений можно назвать силлогистику. В ней мы можем обнаружить энтимемы с пропущенной посылкой. Для проверки их правильности требуется найти пропущенную посылку и восстановить полный силлогизм. В результате наше знание расширяется, мы узнаем, какие дополнительные допущения мог или должен был принять человек, употребивший анализируемую энтимему.

На практике дело не сводится к одним энтимемам. Вспомним историю доказательства знаменитой теоремы Ферма. Ее решение заключалось вовсе не в дедукции из аксиом, как это можно было бы представить. Сперва в 1986 г. Кен Рибет показал, что теорема Ферма сводима к правдоподобной гипотезе Ютака Таниямы о свойствах эллиптических кривых над рациональными числами, и лишь затем в 1995 г. Эндрю Уайлс доказал саму эту гипотезу. В результате даже непонятно, кому именно принадлежит заслуга доказательства теоремы Ферма, хотя официально она приписывается Эндрю Уайлсу.

Еще один пример — знаменитые *машины Тюринга*. Они не явились результатом гениального откровения и не привиделись во сне. Алан Тюринг скрупулезно проанализировал работу абстрактного вычислителя, сформулировав правдоподобные гипотезы о его способностях и доступных ресурсах, и затем связал их простыми функциональными соотношениями. Результатом явилась аксиоматика машин Тюринга — абстрактных механических устройств, пригодных для моделирования любых эффективных вычислений. Это было достигнуто не дедукцией из несуществующих аксиом, а анализом и последующей детализацией того, что понималось под абстрактным вычислителем.

С поиском гипотез связаны задачи планирования действий. Пусть, например, требуется построить *Новый шелковый путь* (НШП) из Китая в Европу. Нет никаких аксиом, из которых можно вывести утверждение о его существовании. Необходим подробный анализ того, что понимается под НШП, разбиение уточненной задачи на подзадачи, дальнейшее разбиение этих подзадач на подподзадачи и т. д., пока не дойдем до некоторых элементарных действий, которые могут быть поручены конкретным исполнителям.

Если в задаче поиска доказательства логика выступает как *канон*, которому должно удовлетворять найденное решение, то в задаче поиска гипотез роль логики — быть *органоном* получения новых знаний. Если постараться, мы могли бы получить в свои руки не только свод требований по оформлению конечных результатов, чему служит дедуктивистский подход, но и логические методы их получения.

Привлекательным свойством данного вида задач является то, что поскольку множество гипотез Γ изначально не фиксировано, то на них не распространяются ограничения первой теоремы Гёделя о неполноте. Для каждого нового целевого утверждения A мы ищем гипотезы Γ, из которых оно могло бы следовать.

2. Попытка содержательной реконструкции

Поскольку решение задачи поиска гипотез $?\langle \ldots \rangle A$ существенным образом опирается на анализ целевого предложения A, вполне естественным было бы воспользоваться методами построения аналитических таблиц. Проблема, однако, заключается в том, что в существующем виде эти методы рассчитаны лишь на те случаи, когда анализируемые предложения являются теоремами логики, т. е. множество гипотез пусто, нас же интересует задача нахождения этого множества, когда оно не пусто, но неизвестно. Поэтому метод аналитических таблиц должен быть модифицирован. Правила редукции формул, которые используются при построении таблиц [16, 17], могут быть сохранены, так как в зависимости от логической структуры задачи они позволяют сводить ее к более простым подзадачам.

Напомним, что аналитические таблицы имеют вид дерева формул. Таблица называется замкнутой, если и только если каждая ветвь дерева содержит некоторую формулу C и ее отрицание $\neg C$. Согласно теореме о полноте, формула классической логики A доказуема, если и только если существует замкнутая аналитическая таблица для ее отрицания $\neg A$.

Если на каком-то шаге построения все возможные логические правила редукции исчерпаны, а таблица все еще не замкнута, для дальнейшего продвижения следует принять некоторую дополнительную формулу B, которая может иметь отношение к решаемой задаче и в будущем войти в искомое множество Γ. Выбор B не может быть произвольным и чем-то должен быть мотивирован. Как нам представляется, в порядке убывания приоритета, мотивом для принятия формулы B может быть отнесение ее к одному из следующих шести видов.

2.1 Формула B может быть *явным определением* одного из предикатных или функциональных символов, имеющих вхождение в полученные на данном шаге редукции предложения. Наибольший приоритет, который должен быть присвоен явным определениям, объясняется тем, что реальные задачи, как правило, формулируются в самом общем виде, и для их решения необходимо уточнить смысл используемых терминов. Если требуется решить некоторую задачу, мы можем разбить ее на несколько подзадач, приняв соответствующее определение.

При этом ни одно уточнение посредством определений не обязательно должно быть окончательным. В дальнейшем может оказаться необходимым продолжить уточнение терминов, которые фигурируют в дефиниенсе.

Т. е. процесс редукции посредством определений в общем случае является многоступенчатым.

Например, если поставлена задача доказать гипотезу Гольдбаха, необходимо ответить на вопрос: что это такое? На естественном языке она формулируется следующим образом: *«Каждое чётное число, большее двух, можно представить в виде суммы двух простых чисел»*. Строгое определение будет иметь вид:

$$GB \equiv \forall x(x\rangle 2 \ \&\ Even(x) \supset \exists y \exists z(Prime(y) \& Prime(z) \& x = y + z))$$

Новые нелогические символы, которые появились в дефиниенсе, также должны быть определены:

$\forall x(Even(x) \equiv \exists y(y\rangle 0 \ \&\ x = y + y))$
$\forall x(Prime(x) \equiv x\rangle 1 \ \&\ \forall y \forall z(x = y \times z \supset y = 1 \lor z = 1))$

и т. д.

2.2 Формула B может быть *неявным аксиоматическим определением* одного из предикатных или функциональных символов, имеющих вхождение в полученные на данном шаге редукции предложения. Аксиоматические определения представляют удобный способ задания рекурсивных и индуктивных функций и предикатов. Как и в случае явных определений, данный процесс может быть многоступенчатым. Например, это может быть связано с введением терминов, задаваемых нефундаментальными и фундаментальными индуктивными определениями.

В примере с гипотезой Гольдбаха нам понадобится добавить неявные аксиоматические определения для символов: 0, $+$, $\times$.

2.3 B может быть *ранее доказанной теоремой.* Если взять арифметику или геометрию, то в них на настоящий момент доказано очень много теорем, и мы не можем перебирать их все, чтобы испытать в качестве посылок. Лишь путем анализа целевого предложения можно выбрать те ранее доказанные теоремы, которые действительно могут помочь решению задачи.

В примере с гипотезой Гольдбаха, определив все символы, которые входят в ее формулировку, мы практически нисколько не продвинулись в ее решении. Здесь и могут оказаться полезными ранее доказанные теоремы, например о распределениях простых чисел.

2.4 B может быть *эмпирически истинным высказыванием*, имеющим отношение к данной задаче: «Волга впадает в Каспийское море» или «Золото имеет желтый цвет». При решении задач планирования действий это может быть фактическая информация, хранящаяся в базах данных.

2.5 B может быть *описанием результата некоторого действия*, имеющего отношение к данной задаче. Например, в случае решения геометрических задач это может быть описанием результата вспомогательного геометрического построения. В случае естественных наук это может потребовать проведения того или иного эксперимента и фиксации в B его результата. Описание результата некоторого действия может понадобиться и в случае решения задач планирования действий.

2.6 B может быть любой *правдоподобной гипотезой*, которая способна помочь решению задачи. Данный пункт имеет наименьший приоритет, что вовсе не тождественно его значимости. Принятие правдоподобных гипотез напрямую связано с расширением нашего знания и потому должно применяться с большой осторожностью. Например, в камере Вильсона обнаружен след, траекторию которого невозможно объяснить никакими известными элементарными частицами. Это дает основание для принятия гипотезы о существовании новой частицы. Конкретные формулировки гипотез могут обосновываться индуктивными соображениями, умозаключениями по аналогии и др.

В математике правдоподобная гипотеза может иметь вид обобщения исходного утверждения, которое также требует последующего обоснования.

3. Формализация метода

Формализация будет произведена в виде аналитических таблиц в стиле Фиттинга [16, 17], которые лучше всего приспособлены для представления процесса редукции формул. Основная цель — определить общий вид структуры аналитических рассуждений и необходимых условий, которым она должна удовлетворять.

Исходные символы языка

1. $x, y, z, \ldots$ — счетное множество индивидных переменных;
2. $a, b, c, \ldots$ — счетное множество индивидных констант;
3. $f^n, g^n, h^n, \ldots$ — счетное множество n-местных функциональных символов для каждого $n < 0$;
4. $P^n, Q^n, R^n, \ldots$ — счетное множество n-местных предикатных символов для каждого $n \geq 0$;
5. $=$ — двухместный предикат равенства;
6. $\neg, \&, \vee, \supset$ — логические связки;
7. $\forall, \exists$ — кванторы.

Термы

1. Всякая индивидная переменная есть терм;
2. Всякая индивидная константа есть терм;
3. Если $t_1, \ldots, t_n$ — термы, а f^n — n-местный функциональный символ, то $f^n(t_1, \ldots, t_n)$ — терм;
4. Ничто другое термом не является.

Формулы

1. Если $t_1, \ldots, t_n$ — термы, а P^n — n-местный предикатный символ, то $P^n(t_1, \ldots, t_n)$ — формула.
2. Если t_1 и t_2 — термы, то $t_1 = t_2$ — формула.
3. Если A и B – формулы, то $\neg A$, $(A \& B)$, $(A \vee B)$, $(A \supset B)$ — формулы.
4. Если A — формула, а x — индивидная переменная, то $\forall x A$, $\exists x A$ — формулы.
5. Ничто другое формулой не является.

Соглашения об обозначениях

1. Мы будем опускать указание на местность функциональных и предикатных символов, если она ясна из контекста.
2. $A \equiv B$ будет служить сокращением для формулы $((A \supset B)\&(B \supset A))$.
3. Если S — множество формул, возможно, пустое, а A — формула, то в качестве сокращения для $S \cup A$ будем использовать запись $\{S, A\}$ или S, A.
4. $A[P^n]$ служит обозначением формулы A, в которую имеет вхождения n-местный предикатный символ P^n.
5. $A[f^n]$ служит обозначением формулы A, в которую имеет вхождения n-местный функциональный символ f^n.
6. $A[t]$ служит обозначением для формулы A с выделенным вхождением терма t.

7. $A[u/t]$ служит обозначением для результата подстановки в формулу A терма u вместо выделенного вхождения терма t.

8. $A(t/x)$ служит обозначением для результата подстановки в формулу A терма t вместо всех свободных вхождений переменной x.

9. $FV(A)$ — множество свободных индивидных переменных формулы A.

10. $FV(t)$ — множество индивидных переменных терма t.

11. Замкнутой формулой или термом будем называть формулу или терм, не имеющие свободных вхождений переменных.

Локальные правила редукции

$$(\neg\neg)\ \frac{S, \neg\neg A}{S, A}$$

$$(\&)\ \frac{S, (A\&B)}{S, A, B} \qquad (\neg\&)\ \frac{S, \neg(A\&B)}{S, \neg A \mid S, \neg B}$$

$$(\vee)\ \frac{S, (A \vee B)}{S, A \mid S, B} \qquad (\neg\vee)\ \frac{S, \neg(A \vee B)}{S, \neg A, \neg B}$$

$$(\supset)\ \frac{S, (A \supset B)}{S, \neg A \mid S, B} \qquad (\neg \supset)\ \frac{S, \neg(A \supset B)}{S, A, \neg B}$$

$$(\forall)\ \frac{S, \forall x A}{S, \forall x A, A(t/x)} \qquad (\neg\forall)\ \frac{S, \neg\forall x A}{S, \neg A(a/x)} \quad a \text{ – новая константа}$$

$$(\exists)\ \frac{S, \exists x A}{S, A(a/x)} \quad a \text{ – новая константа} \qquad (\neg\exists)\ \frac{S, \neg\exists x A}{S, \neg\exists x A, \neg A(t/x)}$$

$$(=)\ \frac{S}{S, t = t} \qquad (= /)\ \frac{S, A[t], t = u}{S, A[t], A[u/t], t = u}$$

Ограничения на применение локальных правил редукции

1. В правилах $(\forall)$ и $(\neg\exists)$ терм t является произвольным замкнутым термом языка.

2. В правилах $(=)$ и $(= /)$ термы t и u — замкнутые.

Глобальные правила редукции

$$(P)\ \frac{A[P^n]}{B[P^n]} \qquad (f)\ \frac{A[f^n]}{B[f^n]}$$

$$(DP)\ \frac{A[P^n]}{\forall x_1..\forall x_n(P^n(x_1,\ldots,x_n) \equiv B)} \quad FV(B) \subseteq \{x_1,..,x_n\}$$

$$(Df)\ \frac{A[f^n]}{\forall x_1..\forall x_n(f^n(x_1,\ldots,x_n) = u)} \quad FV(u) \subseteq \{x_1,..,x_n\}$$

Ограничения на применение глобальных правил редукции

1. В правилах $(P), (f), (DP)$ и (Df) формула под чертой не должна содержать индивидных констант, введенных ранее локальными правилами редукции $(\exists)$ или $(\neg\forall)$.

2. В правиле (DP) формула B не содержит вхождений предикатного символа P^n, а в правиле (Df) терм u не содержит вхождений функционального символа f^n.

Очевидно, что правила (DP) и (Df) являются частными случаями правил (P) и (f). Тем не менее имеет смысл дать им отдельные формулировки, поскольку они несут специальную смысловую нагрузку принятия определений для предикатных и функциональных символов.

В правилах (P) и (f) требование, чтобы один и тот же дескриптивный символ имел вхождения в формулу над чертой и под чертой, служит тому, чтобы новая добавляемая формула имела отношение к решаемой задаче.

Понятие доказательства

Пусть U — некоторое множество замкнутых формул.

Результатом применения к множеству U правила $R \in \{(\neg\neg), (\&), (\neg\vee), (\neg \supset), (\forall), (\neg\forall), (\exists), (\neg\exists), (=), (= /)\}$ будем называть замену его на множество формул U_1, если U совпадает с множеством формул над чертой данного правила, а U_1 совпадает с множеством формул под чертой.

Результатом применения к множеству U правила $R \in \{(\neg\&), (\vee), (\supset)\}$ будем называть его замену парой множеств U_1 и U_2, если U совпадает с множеством формул над чертой данного правила, а U_1 и U_2 совпадают с двумя множествами формул под чертой.

Конфигурацией будем называть семейство множеств формул $\{U_1, U_2, \ldots, U_n\}$.

Результатом применения к конфигурации $\{U_1, \ldots, U_n\}$ *локального правила редукции* R будем называть замену данной конфигурации на новую, отличающуюся от исходной лишь тем, что вместо одного из множеств U_i она содержит результат применения к нему правила R.

Если хотя бы одно из множеств формул конфигурации $\{U_1, \ldots, U_n\}$ содержит формулу над чертой глобального правила редукции $R \in \{(P), (f), (DP), (Df)\}$, то *результатом применения к конфигурации* $\{U_1, \ldots, U_n\}$ *данного правила* R будет новая конфигурация $\{U'_1, \ldots, U'_n\}$, в которой каждое множество U'_i получено из U_i путем добавления к нему формулы под чертой правила R. Т. е. глобальные правила редукции изменяют все множества формул данной конфигурации.

Таблицей будем называть конечную последовательность конфигураций $\langle C_1, .., C_n\rangle$, в которой каждая конфигурация, кроме первой, получена из предшествующей конфигурации в результате применения локального или дефинициального правила редукции.

Множество формул U замкнуто, если оно содержат некоторую формулу A и ее отрицание $\neg A$.

Конфигурация $\{U_1, \ldots, U_n\}$ *замкнута*, если замкнуто каждое множество U_i.

Таблица $\langle C_1, .., C_n\rangle$ *замкнута*, если замкнута одна из ее конфигураций C_i.

Доказательством для замкнутой формулы A будем называть замкнутую таблицу $\langle C_1, .., C_n\rangle$ с начальной конфигурацией $C_1 = \{\{\neg A\}\}$. Очевидно, что если формула A имеет вид импликации $(B_1 \supset \ldots (B_n \supset D))$, то для ее доказательства в качестве начальной конфигурации достаточно взять $C_1 = \{\{B_1, \ldots, B_n, \neg D\}\}$.

Будем говорить, что *формула A доказана относительно множества гипотез Hyp*, если существует замкнутая таблица $\langle C_1, .., C_n\rangle$ с начальной конфигурацией $C_1 = \{\{\neg A\}\}$, и Hyp состоит из всех формул, добавленных при построении данной таблицы применением правил $(P), (f), (DP)$ и (Df).

Будем говорить, что *для множества формул S существует замкнутая таблица относительно множества гипотез Hyp*, если существует замкнутая таблица $\langle C_1, .., C_n \rangle$ с начальной конфигурацией $C_1 = \{S\}$, и Hyp состоит из всех формул, добавленных при построении данной таблицы применением правил $(P), (f), (DP)$ и (Df).

4. Свойства построенного исчисления

Первая теорема говорит о том, что посредством глобальных правил редукции формируется множество гипотез, достаточных для построения из них логического вывода целевого предложения, т.е. решения четвертого типа задач.

Теорема 1. *(Об элиминации глобальных правил редукции) Если существует замкнутая таблица для множества формул S относительно множества гипотез $Hyp = \{B_1, \dots, B_m\}$, где $m \geq 0$, то существует замкнутая таблица для множества формул $S \cup Hyp$ без применения глобальных правил редукции.*

Доказательство.

Доказываем индукцией по числу применений глобальных правил редукции $m \geq 0$.

Базис индукции для $m = 0$ имеет место тривиальным образом.

Индукционный шаг для $m > 0$ в предположении, что для $m-1$ утверждение теоремы имеет место.

Пусть $\langle C_1, \dots, C_i, C_{i+1}, \dots, C_n \rangle$ — замкнутая таблица для множества формул S с m применениями глобальных правил редукции, в котором конфигурация C_{i+1} получена из конфигурации C_i в результате первого применения одного из этих правил. Это означает, что если $C_i = \{U_{i,1}, \dots, U_{i,k}\}$, то конфигурация $C_{i+1} = \{U_{i,1} \cup \{B\}, \dots, U_{i,k} \cup \{B\}\}$ для некоторой формулы B, добавленной применением данного глобального правила.

Преобразуем таблицу следующим образом. Заменим каждую конфигурацию $C_j = \{U_{j,1}, \dots, U_{j,r}\}$, где $j \leq i$, на $C'_j = \{U_{j,1} \cup \{B\}, \dots, U_{j,r} \cup \{B\}\}$. В результате получим:

1. Начальная конфигурация $C_1 = \{S\}$ преобразуется в $C'_1 = \{S \cup \{B\}\}$.

2. Каждая конфигурация C'_j, где $1 < j \leq i$, получена из конфигурации C'_{j-1} по тому же правилу локальной редукции, которое было применено при переходе от C_{j-1} к C_j. Это так, поскольку добавление еще одной формулы к посылкам локальных правил редукции не мешает их применению. Сложности могут возникнуть лишь с применением

правил ($\exists$) и ($\neg\forall$), но они преодолеваются в силу ограничения, что формула B не содержит индивидных констант, введенных ранее этими правилами.

3. Конфигурация C'_i совпадает с конфигурацией C'_{i+1}.

В силу пункта 3 конфигурация C'_{i+1} может быть исключена, и доказательство с $m-1$ применением глобальных правил будет иметь вид $\langle C'_1, \ldots, C'_i, C_{i+2} \ldots, C_n \rangle$.

$\square$

Вторая теорема позволяет элиминировать все явные определения, которые были приняты в ходе построения доказательства.

Теорема 2. *(Об элиминации явных определений) Если доказуема формула* $(D_1 \& \ldots \& D_k \supset A)$*, где* D_i *имеет вид определения* $\forall x_1 .. \forall x_n (P_i(x_1, \ldots, x_n) \equiv B_i)$ *или* $\forall x_1 .. \forall x_n (f_i(x_1, \ldots, x_n) = u_i)$*, то доказуема формула* A^**, полученная из формулы* A *путем раскрытия всех принятых определений.*

Доказательство.

Возьмем формулу $(D_1 \& .. \& D_k \supset A)$ и, опираясь на теорему *352n из [12, с. 183–184], в зависимости от вида D_i последовательно произведем в нее подстановки для всех i от 1 до k.

$$S^{Pi(x1,..,xr)}_{Bi}(D'_1 \& .. \& D'_k \supset A')$$

или

$$S^{fi(x1,..,xr)}_{ui}(D'_1 \& .. \& D'_k \supset A')$$

После выполнения всех подстановок мы получим формулу $(D^*_1 \& .. \& D^*_k \supset A^*)$, где каждая из формул $D*_i$ будет иметь вид $\forall x_1 .. \forall x_r (B^*_i \equiv B^*_i)$ или $\forall x_1 .. \forall x_r (u^*_i = u^*_i)$, и тем самым $D^*_1 \& .. \& D^*_k$ будет теоремой логики предикатов.

Из $\vdash (D^*_1 \& .. \& D^*_k \supset A^*)$ и $\vdash D^*_1 \& .. \& D^*_k$ по *modus ponens* получаем $\vdash A^*$.

$\square$

5. Заключение

В статье [7] была предложена формализация аналитического подхода к решению задач, основанная на поиске модели для целевого предложения. Поскольку проблема выполнимости формул логики предикатов первого порядка не является частично разрешимой, было принято решение ограничиться лишь конечными моделями. Такое ограничение вполне допустимо для многих практических задач. Одновременно с ограничением конечными предметными областями был выбран язык, не содержащий предиката равенства и функциональных символов. Это было связано с вопросами удобства применения правил аналитической редукции. Редукция целевого предложения имела вид дерева, и задача считалась завершенной, если хотя бы одна из ветвей удовлетворяла условиям замыкания, которые позволяли построить выполняющую модель целевого предложения.

В настоящей работе мы рассматриваем любые задачи, которые допускают формулировку в языке логики предикатов первого порядка, не налагая никаких дополнительных ограничений ни на модели, ни на язык. Решение задачи извлекается из доказательства того, что аналитическая таблица для отрицания целевого предложения замыкается при условии принятия ряда дополнительных гипотез. Это близко к построению обычных аналитических таблиц, но основное отличие заключается в применении глобальных правил редукции. Как и в случае обычных аналитических таблиц, таблица считается замкнутой, если замкнуты все ее ветви (замкнута одна из конфигураций). Тогда каждая модель для множества формул, добавленных в результате применения глобальных правил, будет моделью целевого предложения. Таким образом, мы получаем адекватную формализацию для решения четвертого типа задач, связанных с понятием вывода.

В отношении современной логики, делающей упор на дедукцию, можно высказать замечание, что она исправно играет роль *канона* — в каком виде следует представлять накопленные нами знания и каким требованиям должны удовлетворять строгие рассуждения, но лишена инструментальных функций *органона* — не является логикой открытия. Попытки наделить ее этими функциями предпринимались на пути развития методов правдоподобных рассуждений, но впечатляющих результатов достигнуто не было. Это девальвирует ценность логики как инструмента в руках исследователей, и потому не стоит удивляться, что общий курс логики для студентов мехмата МГУ занимает всего один семестр, а на других ведущих естественнонаучных факультетах логику вообще не изучают.

Аналитический подход не является альтернативой аксиоматико-дедуктивному. Каждый из них решает свои задачи. Аксиоматико-дедуктивный подход нацелен на задачи представления знаний, когда они уже получены и остается лишь представить их в удобном для дальнейшего использования виде. Аналитический подход нацелен на получение новых знаний в процессе решения тех или иных задач. Методы дедукции играют в нем вспомогательную роль, когда на завершающем этапе требуется показать, что найденное решение задачи действительно является таковым. До этого момента методы редукции и принятия новых допущений направляют исследователя в поиске гипотез для последующей дедукции целевого предложения. Поскольку множество гипотез Γ изначально не фиксировано, на аналитический подход не распространяются ограничения первой теоремы Гёделя о неполноте. Для любого истинного, но недоказуемого из имеющегося набора аксиом предложения, мы можем попытаться найти дополнительные постулаты, которые требуются для его доказательства. В этом смысле при аналитическом подходе логика рассматривается как открытая система.

Современная логика не успевает за тем, что на простом содержательном уровне преподается уже в школах [5], когда учат двум методам решения задач — *синтетическому* и *аналитическому*. Синтетический метод выглядит следующим образом:

> *Как ученики обычно решают сложную задачу? Они берут любое данное из условия задачи и к нему присоединяют какое-либо из остальных данных. Если эти данные образуют простую задачу, то ее решают; если простой задачи не получилось, образуют другую пару данных и в результате решения первой простой задачи получают первое вспомогательное данное. Используя вспомогательное данное и какое-либо из остальных данных основной задачи, решают вторую простую задачу и получают второе вспомогательное данное и т. д. до тех пор, пока не получат такой простой задачи, результат которой является искомым основной задачи. Это и есть синтетический метод решения задач* [5, с. 180].

> *Достоинством синтетического метода является компактность, достигаемая при изложении готовых решений, полученных в процессе синтетического или аналитического поиска. Несмотря на низкую поисковую и дидактическую эффективность синтетического метода, он пользуется популярностью у школьников и даже учителей, поскольку весьма прост и не требует большого мыслительного напряжения* [5, с. 184].

В приведенной цитате легко распознать задачу поиска вывода от посылок к заключению. Аналитический метод описывается иначе:

> *При аналитическом методе решения отправляются не от условия задачи, как это делают при синтетическом методе, а от ее требования, вопроса. Это характерно для всех разновидностей аналитического метода, применяемых при решении задач. <...> Решение задач аналитическим методом начинается с постановки вопроса, связанного с требованием решаемой задачи: "Что нужно знать, чтобы ответить на вопрос данной задачи (выполнить ее требование)?"* [5, с. 185].

Далее автор учебного пособия рассматривает конкретные примеры, которые в нашей терминологии соответствуют поиску гипотез, достаточных для решения задачи.

В заключение хотелось бы сказать, что пришло время наряду с теорией поиска доказательств дополнить стандартные курсы преподавания логики еще одной темой — теорией аналитического решения задач. Настоящую работу можно рассматривать как один из шагов построения такой теории.

Литература

[1] Интервью Владимира Воеводского (часть 1). URL: https://sspr.livejournal.com/620950.html (дата обращения: 24.02.2018).

[2] Интервью Владимира Воеводского (часть 2). URL: http://baaltii1.livejournal.com/200269.html (дата обращения: 24.02.2018).

[3] *Марков А.А.* Элементы математической логики. М.: Изд-во Моск. ун-та, 1984. 80 с.

[4] *Метельский Н.В.* Дидактика математики: Общая методика и ее проблемы: Учеб. пособие для вузов. Минск: Изд-во БГУ, 1982. 256 с.

[5] *Смирнов В.А.* Творчество, открытие и логические методы поиска доказательства // Логико-философские труды В.А. Смирнова. М.: Эдиториал УРСС, 2001. С. 438–447.

[6] *Чёрч А.* Введение в математическую логику. М.: ИЛ, 1960. 486 с.

[7] *Шалак В.И.* Дедуктивно-аналитический подход к планированию целей // Логико-философские штудии. 2016. Т. 13. № 2. С. 134–135. URL: http://ojs.philosophy.spbu.ru/index.php/lphs/article/view/418/423 (дата обращения: 24.02.2018).

[8] *Шалак В.И.* Аналитический подход к решению задач // Логические исследования. 2017. № 23(1). С. 121–139. URL: https://iphras.ru/uplfile/logic/log23_1/121 (дата обращения: 24.02.2018).

[9] *Шалак В.И.* Виды дедуктивных задач и их решение // 10-е Смирновские чтения по логике: Материалы международной научной конференции. М., 2017. С. 121–123.

[10] *Cellucci C.* Why Proof? What is a Proof? // Deduction, Computation, Experiment. Exploring the Effectiveness of Proof. Berlin: Springer-Verlag, 2008. P. 1-27. URL: https://www.academia.edu/184307/Why_Proof_What_is_a_Proof (дата обращения: 24.02.2018).

[11] *Cellucci C.* Rethinking Logic. Logic in Relation to Mathematics, Evolution, and Method. Berlin: Springer, 2013. 390 p.

[12] *Cellucci C.* Does logic slowly pass away, or has it a future? URL: https://www.academia.edu/4433563/Does_Logic_Slowly_Pass_Away_or_Has_It_a_Future (дата обращения: 24.02.2018).

[13] *Cellucci C.* Is Mathematics Problem Solving or Theorem Proving? URL: https://www.academia.edu/16448950/Is_Mathematics_Problem_Solving_or_Theorem_Proving (дата обращения: 24.02.2018).

[14] *Cellucci C.* Philosophy of Mathematics: Making a Fresh Start // Studies in History and Philosophy of Science. 2013. Vol. 44. P. 32–42. URL: https://www.academia.edu/3153062/Philosophy_of_Mathematics_Making_a_Fresh_Start (дата обращения: 24.02.2018).

[15] *Cellucci C.* Why Should the Logic of Discovery Be Revived? A Reappraisal. URL: https://www.academia.edu/7077297/Why_Should_the_Logic_of_Discovery_Be_Revived_A_Reappraisal (дата обращения: 24.02.2018).

[16] *Fitting M.C.* First-Order Logic and Automated Theorem Proving. Berlin: Springer-Verlag, 1990. 242 p. (дата обращения: 24.02.2018).

[17] *Fitting M.* Intuitionistic Logic, Model Theory and Forcing. Amsterdam: North-Holland Publishing Company, 1969. 192 p.

Vladimir I. Shalack

Analysis vs Deduction

Shalack Vladimir Ivanovich
Institute of Philosophy, Russian Academy of Sciences
12/1 Goncharnaya St., Moscow, 109240, Russian Federation.
E-mail: shalack@gmail.com

In the paper, we consider four types of problems that naturally arise in connection with the definition of a logical inference: 1) verifying the proof of: $\Gamma\langle A_1, ..., A_n\rangle A$; 2) search for interesting consequences: $\Gamma\langle ...\rangle ?$; 3) search for the proof: $\Gamma\langle .?.\rangle A$; 4) search for hypotheses: $?\langle ...\rangle A$. Modern logic focuses on the problem of finding the proof of statements. Gödel's restrictive theorems have a direct relation to it. At the same time in real practice, the task of search for hypotheses is much more common. The main part of this work is devoted to the investigation of this problem. A target proposition A is given, and it is required to find the set of premises Γ from which it is logically deducible. The choice of suitable premises Γ occurs on the basis of the logical analysis of proposition A. We distinguish six different grounds for the selection of these premises: 1) acceptance of explicit definitions for predicate and functional symbols; 2) acceptance of axiomatic definitions for predicate and functional symbols; 3) acceptance of previously proved theorems; 4) acceptance of empirically true statements; 5) acceptance of statements describing the result of some action; 6) acceptance of plausible hypotheses that may be relevant to the problem being solved. In this paper we construct a calculus that formalizes the problem of an analytic search for the justification of a thesis. Two metatheoremes are proved, from which it follows that the constructed calculus really allows us to solve this type of problems.

Keywords: Problem solving, logical reduction, logical inference, search for proof, search for hypotheses, analytical tables, theory of definitions

References

[1] *Interv'yu Vladimira Voevodskogo (chast' 1)* [Interview with Vladimir Voevodsky (part 1)] [https://sspr.livejournal.com/620950.html, accessed on 24.02.2018]. (In Russian)

[2] *Interv'yu Vladimira Voevodskogo (chast' 2)* [Interview with Vladimir Voevodsky (part 2)] [http://baaltii1.livejournal.com/200269.html, accessed on 24.02.2018]. (In Russian)

[3] Markov, A.A. *Elementy matematicheskoi logiki* [Elements of mathematical logic]. M.: Izd-vo Mosk. Un-ta, 1984. 80 pp. (In Russian)

[4] Metel'skij, N.V. *Didaktika matematiki: Obshchaya metodika i ee problemy: Ucheb. poosobie dlya vuzov* [Didactics of mathematics: General methodology and its problems: Proc. manual for universities]. Minsk: Izd-vo BGU, 1982. 256 pp. (In Russian)

[5] Smirnov, V.A. "Tvorchestvo, otkrytie i logicheskie metody poiska dokazatel'stva" [Creativity, discovery and logical methods of finding evidence], in: *Logiko-filosofskie trudy V.A. Smirnova* [Logical and philosophical works of VA. Smirnova]. M.: Editorial URSS, 2001, pp. 438–447. (In Russian)

[6] Church, A. *Vvedenie v matematicheskuyu logiku* [Introduction to mathematical logic]. M.: IL, 1960. 486 pp. (In Russian)

[7] Shalack, V.I. "Deduktivno-analiticheskii podkhod k planirovaniyu tselei" [Deductive-analytical approach to planning goals], *Logiko-filosofskie shtudii* [Logical and philosophical studies], 2016, Vol. 13, No. 2, pp. 134–135. [http://ojs.philosophy.spbu.ru/index.php/lphs/article/view/418/423, accessed on 24.02.2018]. (In Russian)

[8] *Shalack V.I.* "Analiticheskii podkhod k resheniyu zadach" [Analytical approach to solving problems], *Logicheskie issledovaniya* [Logical Investigations], 2017, No. 23(1), pp. 121–139. [https://iphras.ru/uplfile/logic/log23_1/121, accessed on 24.02.2018]. (In Russian)

[9] Shalack, V.I. "Vidy deduktivnykh zadach i ikh reshenie" [Types of deductive problems and their solution], in: *Desyatye Smirnovskie chteniya po logike.* Materialy mezhdunarodnoi nauchnoi konferentsii [Tenth Smirnov's readings on logic. Proceedings of the International Scientific Conference], M., 2017, pp. 121–123. (In Russian)

[10] Cellucci, C. "Why Proof? What is a Proof?", in: *Deduction, Computation, Experiment. Exploring the Effectiveness of Proof.* Berlin: Springer-Verlag, 2008, pp. 1–27. [https://www.academia.edu/184307/Why_Proof_What_is_a_Proof, accessed on 24.02.2018].

[11] Cellucci, C. *Rethinking Logic. Logic in Relation to Mathematics, Evolution, and Method.* Berlin: Springer, 2013. 390 pp.

[12] Cellucci, C. *Does logic slowly pass away, or has it a future?* [https://www.academia.edu/4433563/Does_Logic_Slowly_Pass_Away_or_Has_It_a_Future, accessed on 24.02.2018].

[13] Cellucci, C. *Is Mathematics Problem Solving or Theorem Proving?* [https://www.academia.edu/16448950/Is_Mathematics_Problem_Solving_or_Theorem_Proving, accessed on 24.02.2018].

[14] Cellucci, C. "Philosophy of Mathematics: Making a Fresh Start", *Studies in History and Philosophy of Science*, 2013, Vol. 44, pp. 32–42. [https://www.academia.edu/3153062/Philosophy_of_Mathematics_Making_a_Fresh_Start, accessed on 24.02.2018].

[15] Cellucci, C. *Why Should the Logic of Discovery Be Revived? A Reappraisal.* [https://www.academia.edu/7077297/Why_Should_the_Logic_of_Discovery_Be_Revived_A_Reappraisal, accessed on 24.02.2018].

[16] Fitting, M. *First-Order Logic and Automated Theorem Proving.* Berlin: Springer-Verlag, 1990. 242 pp.

[17] Fitting, M. *Intuitionistic Logic, Model Theory and Forcing.* Amsterdam: North-Holland Publishing Company, 1969. 192 pp.

Логические исследования
2018. Т. 24. № 1. С. 46–61
УДК 16+510.64

Logical Investigations
2018, Vol. 24, No. 1, pp. 46–61
DOI: 10.21146/2074-1472-2018-24-1-46-61

Неклассическая логика

Non-classical Logic

А.А. Беликов

Семантики Войшвилло для некоторых расширений логики FDE: часть I

Посвящается
Елене Дмитриевне Смирновой и
Александру Степановичу Карпенко

Беликов Александр Александрович
Кафедра логики, философский факультет, МГУ имени М. В. Ломоносова
Российская Федерация, 119991, г. Москва, Ломоносовский проспект, д. 27, корп. 4.
E-mail: `belikov@philos.msu.ru`

В настоящей статье исследуются семантики полуобобщенных описаний состояний, которые являются разновидностью информационной семантики Е.К. Войшвилло, предложенной им для первоуровневой релевантной логики (**FDE**) в начале восьмидесятых годов. Ключевой особенностью войшвилловского подхода является рассмотрение описаний состояний, на которые не налагаются классические условия о непротиворечивости и полноте, что позволяет определить релевантное отношение следования. Под релевантным отношением следования понимается такое, для которого не проходят классические парадоксы: $A \wedge {\sim}A \models B$ и $B \models A \vee {\sim}A$. Нами рассматриваются известные расширения логики **FDE**, сформулированные в терминах систем бинарных следований: трехзначная логика Клини, логика Приста и классическая логика. Первые две из них могут быть семантически определены при помощи полуобобщенных описаний состояний: для логики Клини вводится понятие $\top$-обобщенных описаний состояний (непротиворечивых, но неполных), для логики Приста используется понятие $\bot$-обобщенных описаний состояний (противоречивых, но полных). Отношение следования, порождающее логику Клини, определяется через сохранность истинности и не-ложности от посылки к заключению. В свою очередь, логика Приста определяется отношением следования через сохранность ложности и не-истинности от заключения к посылке. В статье предлагаются доказательства адекватности данных семантик указанным системам. В случае с классической логикой мы формулируем лишь набросок доказательства полноты и непротиворечивости относительно семантики с классическими описаниями состояний (непротиворечивыми и полными). Настоящая статья является первой частью исследования, посвященного семантикам Е.К. Войшвилло для расширений логики **FDE**.

Keywords: логика Клини, логика Приста, классическая логика, первоуровневая релевантная логика, описания состояний, информационная семантика

1. Введение

Семантика обобщенных описаний состояний была предложена Е. К. Войшвилло в связи с проблемой экспликации понятия релевантного следования. Главной методологической предпосылкой в решении данной проблемы можно считать стремление Евгения Казимировича эксплицировать следование как связь между высказываниями по включению *семантической информации*, которая понималась им как подлинное *логическое содержание* высказываний. Таким образом, данный подход в прямом смысле раскрывает термин «релевантного следования», в отличие от альтернативных подходов, например WGS-критерия, которые, по мнению Е.К. Войшвилло: «идут по линии тех или иных ограничений классического отношения $A \models B$...» [2].

Семантическая информация высказывания A содержится в определениях логических констант, входящих в это высказывание. Однако, как замечает Е. К. Войшвилло, в условия истинности для формул классической логики включаются дополнительные предпосылки онтологического характера, а именно о непротиворечивости и непустоте тех возможных миров, к которым относятся данные высказывания. В силу этих предпосылок мы не можем ухватить чистое логическое содержание высказываний, поскольку оно ограничено этими предпосылками, что влечет появление высказываний, не несущих никакой информации о возможном положении дел. Этими высказываниями и являются формулы, образующие парадоксы классического следования: $A \wedge {\sim}A$ и $A \vee {\sim}A$. Исходя из этой идеи, Войшвилло предлагает определять следование через включение семантической информации заключения в семантическую информацию посылки. Если множество ситуаций, в которых истинно высказывание A, обозначить как $\mathcal{M}_A$ и множество всех возможных ситуаций обозначить как $\mathcal{M}$, то семантической информацией высказывания A является пара $\langle \mathcal{M}_A, \mathcal{M} \rangle$. Другими словами, семантической информацией высказывания A является множество ситуаций, при которых оно истинно, относительно множества всех возможных ситуаций. В качестве этих «возможных ситуаций» Е.К. Войшвилло рассматривает описания состояний. Допустив тот факт, что $\mathcal{M}$ может быть бесконечным, становясь при этом универсальным для всех высказываний языка, мы можем записывать семантическую информацию произвольного высказывания A через $\mathcal{M}_A$. Тогда отношение следования трактуется как «семантическая информация B составляет часть семантической информации A», символически:

$$A \models B \Leftrightarrow \mathcal{M}_A \subseteq \mathcal{M}_B$$

Нетрудно убедиться в том, что при такой трактовке информации высказывания вида $A \wedge {\sim}A$ и $A \vee {\sim}A$ действительно либо не содержат информации вообще (в первом случае), либо содержат сразу всю возможную информацию (второй случай). Именно эти парадоксальные случаи и являются следствиями тех онтологических предпосылок, на которых мы сконцентрируемся в дальнейшем. И именно от них необходимо отказаться при построении семантики Войшвилло для преодоления парадоксов классического следования.

Е.Д. Смирнова в работе [5] предлагает обобщающий подход к построению семантик для интенсиональных логик. Там же рассматривается возможность расширения области применени семантики Е. К. Войшвилло на некоторый класс логик, а именно: логика Хао Вана (обозначим её **HW**), логика, двойственная логике Хао Вана (обозначим её **DHW**), и первоуровневый фрагмент логики Лукасевича. Заметим, что эта же идея высказывалась и самим Евгением Казимировичем в работе [2].

Целью же настоящей работы является строгая реализация этой идеи. Я сформулирую семантики Войшвилло, основанные на понятии *полуобобщенных описаний состояний*, и докажу их адекватность системам для первоуровневых фрагментов сильной трехзначной логики Клини $\mathbf{K}_3$ и логики Приста $\mathbf{P}_3$, которые дедуктивно эквивалентны системам для логики Хао Вана и логики, двойственной логике Хао Вана, соответственно. Ввиду тривиальности результата о том, что семантика с классическими описаниями состояний адекватна первоуровневому фрагменту классической логики **TV**, я сформулирую лишь набросок этого доказательства.

2. Семантика полуобобщенных описаний состояний для логик Клини, Приста и классической логики

Все исследуемые в данной работе логики основаны на пропозициональном языке $\mathcal{L}$, который мы определяем по форме Бакуса-Наура. Пусть $Prop$ обозначает множество всех пропозициональных переменных языка $\mathcal{L}$.

$$A := Prop \mid {\sim}A \mid (A \wedge A) \mid (A \vee A).$$

Пусть $Form$ обозначает множество всех формул языка $\mathcal{L}$. Под функцией оценки будем понимать отображение $v\colon Prop \to \{t, f\}$. Множество $Literals = Prop \cup \{{\sim}p\colon p \in Prop\}$ есть множество *литералов*. Под описанием состояний будем понимать такое (возможно бесконечное) множество $\{\tilde{p}_1, \tilde{p}_2, \ldots, \tilde{p}_n\} \subseteq Literals$, где каждый $\tilde{p}_i$ является *литералом*. Множество всех описаний состояний обозначим через $States$.

Классическим описанием состояний будем называть такое описание состояний α, которое удовлетворяет следующим условиям:

I. $\forall p_i \in Prop\ \ (p_i \in \alpha$ или ${\sim}p_i \in \alpha)$;
II. $\forall p_i \in Prop\ \ \dot{\neg}(p_i \in \alpha$ и ${\sim}p_i \in \alpha)$.

Обобщенным описанием состояний будем называть такое описание состояний α, которое не удовлетворяет условиям (I) и (II), то есть может быть пустым и противоречивым.

Полуобобщенными описаниями состояний будем называть $\top$-*обобщенные описания состояний* и $\perp$-*обобщенные описания состояний.* В первых соблюдается условие (II), но не соблюдается условие (I); в последних же соблюдается условие (I), но не соблюдается условие (II).

Идея использования обобщенных описаний состояний для определения отношения следования между формулами первого уровня[1] впервые появляется в работе [1]. В дальнейшем она развивается в известной монографии [2]. Фактически предлагаемое отношение следования аксиоматизируется не менее известной системой **FDE**, возникшей в работах А. Андерсена и Н. Белнапа сначала под именем системы «тавтологических следствий» [9], [7], [6]. Адекватная алгебраическая семантика впервые предложена М. Данном в [11], где в качестве моделей используется четырехзначная решетка Де Моргана. Впоследствии этот результат был усилен в работе Х.М. Фонта [14], где доказано, что класс всех решеток Де Моргана является алгебраическим напарником логики Данна-Белнапа. К концу семидесятых годов идеи М. Данна получили развитие в его собственной работе [12] и работах Н. Белнапа [8], [10], где предлагается знаменитая четырехзначная семантика для системы «тавтологических следствий». Эту семантику принято относить к семантикам, построенным по так называемому *американскому плану.* Альтернативный подход развивался в работах Р. Раутли и Р. Мейера (см. [16], [17]), где предложена теоретико-множественная семантика для **FDE**. Подход Р. Раутли и Р. Мейера принято классифицировать, как семантики, построенные по *австралийскому плану.* В данном контексте семантику Е.К. Войшвилло можно рассматривать как разновидность теоретико-множественной семантики по американскому плану (см. [3]).

Воспроизведем семантику обобщенных описаний состояний для **FDE**. Запись $t \in v_\alpha(A)$ и $f \in v_\alpha(A)$ обозначает «формула A истинна в описании состояний α» и «формула A ложна в описании состояний α» соответственно.

Определение 1. (*Условия истинности для логики FDE.*) Определим функцию $v\colon States \times Prop \to \{\emptyset, \{t\}, \{f\}, \{t, f\}\}$. Будем использовать запись v_α для сокращения $v(\alpha, p_i)$, где $\alpha \in States$, $p_i \in Prop$.

$$t \in v_\alpha(p_i) \Leftrightarrow p_i \in \alpha;$$

[1] Формулы вида $A \to B$, где ни A, ни B не содержат $\to$. В рассматриваемой нами логике выражения $A \to B$ эквивалентны метаутверждениям о выводимости $A \vdash B$, где соответственно A и B содержат только связки $\wedge$, $\vee$, $\sim$. Далее по ходу статьи будет использована именно эта нотация. См., например: [3].

$$f \in v_\alpha(p_i) \Leftrightarrow {\sim}p_i \in \alpha.$$

Данная функция может быть распространена на множество всех формул нашего языка следующим образом:

$$t \in v_\alpha(A \wedge B) \Leftrightarrow t \in v_\alpha(A) \text{ и } t \in v_\alpha(B);$$
$$t \in v_\alpha(A \vee B) \Leftrightarrow t \in v_\alpha(A) \text{ или } t \in v_\alpha(B);$$
$$t \in v_\alpha({\sim}A) \Leftrightarrow f \in v_\alpha(A);$$
$$f \in v_\alpha(A \wedge B) \Leftrightarrow f \in v_\alpha(A) \text{ или } f \in v_\alpha(B);$$
$$f \in v_\alpha(A \vee B) \Leftrightarrow f \in v_\alpha(A) \text{ и } f \in v_\alpha(B);$$
$$f \in v_\alpha({\sim}A) \Leftrightarrow t \in v_\alpha(A).$$

Определение 2. $\forall A, B \in Form$
$A \models_{\mathbf{FDE}} B \Leftrightarrow \forall \alpha \in States\,(t \in v_\alpha(A) \Rightarrow t \in v_\alpha(B))$.

Условия истинности из определения 1 предполагают использование обобщенных описаний состояний.

Доказательство адекватности данной семантики системе **FDE** см. [2].

В работе [13] М. Данн описывает множество синтаксических расширений системы **FDE**, среди которых первоуровневые фрагменты сильной логики Клини $\mathbf{K}_3$, логики Приста $\mathbf{P}_3$, логики **RM** и классической логики **TV**[2]. Расширения эти определяются через присоединение к списку аксиомных схем **FDE** тех или иных комбинаций хорошо известных всем постулатов (более подробно см. [13]):

$$A \wedge {\sim}A \vdash B \quad (absurdity)$$
$$B \vdash A \vee {\sim}A \quad (triviality)$$
$$A \wedge {\sim}A \vdash B \vee {\sim}B \quad (safety)$$

В настоящей работе для $\mathbf{K}_3$, $\mathbf{P}_3$ и **TV** формулируются адекватные семантики, использующие полуобобщенные описания состояний (для $\mathbf{K}_3$ и $\mathbf{P}_3$) и классические описания состояний (для **TV**).

Условия истинности для логик $\mathbf{K}_3$, $\mathbf{P}_3$ и **TV** идентичны тем, что представлены в определении 1. Единственная модификация заключается в наложении некоторых ограничений на множество описаний состояний в зависимости от того, с какой логикой мы работаем. Если в определении 1 используются $\top$-обобщенные описания состояний, то перед нами условия

[2]Семантики для этих и других многозначных логик исследуются в замечательной работе А. С. Карпенко [4].

истинности для $\mathbf{K}_3$. Если же используются $\perp$-обобщенные описания состояний, то перед нами условия истинности для $\mathbf{P}_3$. Ну а если мы ограничимся классическими описаниями состояний, то получим условия истинности для **TV**.

Для удобства вприятия последующих доказательств введем соответствующую нотацию. Пусть запись $|A|_\alpha = t$ является сокращением для ($t \in v_\alpha(A)$ и $f \notin v_\alpha(A)$), а запись $|A|_\alpha = f$ – для ($t \notin v_\alpha(A)$ и $f \in v_\alpha(A)$). Принятые обозначения позволяют сформулировать условия истинности для наших логик в виде следующей леммы.

Лемма 1. *Пусть v_α есть функция оценки, определенная выше. Тогда для всякой оценки v_α, для всякой формулы $A \in Form$ верно:*

$|{\sim}A|_\alpha = t \Leftrightarrow |A|_\alpha = f;$
$|{\sim}A|_\alpha = f \Leftrightarrow |A|_\alpha = t;$
$|A \wedge B|_\alpha = t \Leftrightarrow |A|_\alpha = t$ *и* $|B|_\alpha = t;$
$|A \wedge B|_\alpha = f \Leftrightarrow |A|_\alpha = f$ *или* $|B|_\alpha = f;$
$|A \vee B|_\alpha = t \Leftrightarrow |A|_\alpha = t$ *или* $|B|_\alpha = t;$
$|A \vee B|_\alpha = f \Leftrightarrow |A|_\alpha = f$ *и* $|B|_\alpha = f.$

Определим отношения следования.

Определение 3. $\forall A, B \in Form$
$A \models_{\mathbf{K_3}} B \Leftrightarrow \forall \alpha \in States\ (|A|_\alpha = t \Rightarrow |B|_\alpha = t).$

Определение 4. $\forall A, B \in Form$
$A \models_{\mathbf{P_3}} B \Leftrightarrow \forall \alpha \in States\ (|B|_\alpha = f \Rightarrow |A|_\alpha = f).$

Семантики, основанные на определениях 1, 3 и 4, будем называть *семантиками Войшвилло в слабом смысле.*

3. Аксиоматизация

В данной главе предлагается аксиоматизация рассматриваемых логик в виде систем бинарных следований. Этот способ формализации широко используется в логиках с обобщенными истинностными значениями (см. [18]), где он сформировался как универсальный метод на основе ранних работ по релевантной логике первого уровня [7], [6]. Однако в последних подобные исчисления фигурируют под именем «исчислений гильбертовского типа» или «формализмов гильбертовского типа». Стоит отметить, что в таком случае термин «исчисление гильбертовского типа» должен быть дополнен некоторой оговоркой. Как и в стандартном понимании этого термина, мы будем иметь дело с системами, состоящими из аксиом и правил вывода. Единственное отличие заключается в том, что мы будем работать с *аксиомами* не как с синтаксическими аналогами *тавтологий*, т. е. формул, которые принимают выделенное значение при любой интерпретации, а как с синтаксическими аналогами *валидных утверждений о следовании*, т. е. таких пар формул, где при приписывании выделенного значения одной из них (посылке), это же выделенное значение сохраняется у второй (заключения). Соответственно, правила вывода рассматриваются как кортежи *выводимостей*, т. е. отношений вида $A \vdash B$, со своими посылками и заключением; в этом случае корректность правила определяется естественным образом — если посылки являются теоремами исчисления, то и заключение является таковым.

Множество формул β называется *теорией в логике* L, если оно удовлетворяет условиям (1) и (2):

1. $A \in \beta$ и $B \in \beta \;\Rightarrow\; A \wedge B \in \beta$ (замыкание относительно конъюнкции);

2. Если $A \in \beta$ и $A \vdash_L B$, то $B \in \beta$ (замыкание относительно отношения выводимости).

Теория β называется *простой*, если она удовлетворяет условию:

3. $A \vee B \in \beta \;\Rightarrow\; A \in \beta$ или $B \in \beta$ (простота).

Теория β называется *непротиворечивой*, если она удовлетворяет условию:

4. $A \in \beta \;\Leftrightarrow\; {\sim}A \notin \beta$ (непротиворечивость).

Логической системой $\mathbf{K}_3$ назовем пару $(\mathcal{L}, \vdash_{\mathbf{K}_3})$, где $\mathcal{L}$ — используемый нами язык, а $\vdash_{\mathbf{K}_3}$ — рефлексивное отношение, которое удовлетворяет следующим постулатам и правилам:

$$a1.\ A \wedge B \vdash_{\mathbf{K}_3} A; \quad a2.\ A \wedge B \vdash_{\mathbf{K}_3} B; \quad a3.\ A \vdash_{\mathbf{K}_3} A \vee B;$$

$$a4.\ B \vdash_{\mathbf{K}_3} A \vee B; \quad a5.\ A \vdash_{\mathbf{K}_3} {\sim\sim}A; \quad a6.\ {\sim\sim}A \vdash_{\mathbf{K}_3} A;$$

$$a7.\ A \wedge (B \vee C) \vdash_{\mathbf{K}_3} (A \wedge B) \vee (A \wedge C); \quad a8.\ {\sim}(A \wedge B) \vdash_{\mathbf{K}_3} {\sim}A \vee {\sim}B;$$

$$a9.\ {\sim}A \vee {\sim}B \vdash_{\mathbf{K}_3} {\sim}(A \wedge B); \quad a10.\ {\sim}(A \vee B) \vdash_{\mathbf{K}_3} {\sim}A \wedge {\sim}B;$$

$$a11.\ {\sim}A \wedge {\sim}B \vdash_{\mathbf{K}_3} {\sim}(A \vee B); \quad a12.\ A \wedge {\sim}A \vdash_{\mathbf{K}_3} B;$$

$$r1.\ A \vdash_{\mathbf{K}_3} B;\ B \vdash_{\mathbf{K}_3} C \,/\, A \vdash_{\mathbf{K}_3} C;$$

$$r2.\ A \vdash_{\mathbf{K}_3} B;\ A \vdash_{\mathbf{K}_3} C \,/\, A \vdash_{\mathbf{K}_3} B \wedge C;$$

$$r3.\ A \vdash_{\mathbf{K}_3} C;\ B \vdash_{\mathbf{K}_3} C;\ /\ A \vee B \vdash_{\mathbf{K}_3} C.$$

Нетрудно доказать следующее утверждение.

Утверждение 1. $\forall A, B \in Form$
$(A \vdash_{\mathbf{K}_3} B) \Leftrightarrow (A \vdash_{\mathbf{HW}} B)$.

Доказательство. Возьмем формулировку **HW** из [5]. Утверждение теоремы можно разбить на два утверждения:

$$\text{(a). } (A \vdash_{\mathbf{HW}} B) \Rightarrow (A \vdash_{\mathbf{K}_3} B);$$
$$\text{(b). } (A \vdash_{\mathbf{K}_3} B) \Rightarrow (A \vdash_{\mathbf{HW}} B).$$

Чтобы доказать утверждение (a), достачно предъявить доказательства в системе $\mathbf{K}_3$ двух теорем, а именно: $A \wedge B \vdash_{\mathbf{K}_3} B \wedge A$ и $A \vee B \vdash_{\mathbf{K}_3} B \vee A$. Первая получается последовательным применением $a2$, $a1$ и правила $r2$, вторая получается с использованием $a4$, $a3$ и $r3$. Для доказательства (b) требуется придъявить доказательства в системе **HW** других двух теорем: $B \vdash_{\mathbf{HW}} A \vee B$ и $A \wedge B \vdash_{\mathbf{HW}} B$. Первая получается последовательным применением $A1$, $A2$ и $R3$, вторая получается с использованием $A4$, $A3$ и $R3$. □

Определение 5. Для всякой $p_i \in Prop$ и для всякой простой теории β в логике L определим каноническую оценку $|.|^c_\beta$:

1. $|p_i|^c_\beta = t \Leftrightarrow p_i \in \beta$ и $\sim p_i \notin \beta$;
2. $|p_i|^c_\beta = f \Leftrightarrow p_i \notin \beta$ и $\sim p_i \in \beta$.

Лемма 2. *Пусть $|.|^c_\beta$ – каноническая оценка для логики* $\mathbf{K}_3$. *Тогда для всяких $A \in Form$ верно, что:*

1. $|A|^c_\beta = t \Leftrightarrow A \in \beta$ *и* $\sim A \notin \beta$;

2. $|A|^c_\beta = f \Leftrightarrow A \notin \beta$ *и* $\sim A \in \beta$.

Доказательство ведем индукцией по числу логических связок в формулу. Базисный случай, когда формула A является пропозициональной переменной, справедлив в силу Определения 5. Индуктивное допущение: пусть утверждение леммы справедливо для формул с числом связок меньше s, где s – число связок в рассматриваемой формуле.

(1). $\Rightarrow$. Пусть $|\sim A|^c_\beta = t$. Тогда по определению 1 получаем $|A|^c_\beta = f$. Отсюда по индуктивному допущению получаем $\sim A \in \beta$ и $A \notin \beta$. Используя $a6$. $\sim\sim A \vdash_{\mathbf{K}_3} A$ и определение простой теории, получаем $\sim\sim A \notin \beta$.

(1). $\Leftarrow$. Пусть $\sim A \in \beta$ и $\sim\sim A \notin \beta$. Из того, что $\sim\sim A \notin \beta$, с использованием $a5$. $A \vdash_{\mathbf{K}_3} \sim\sim A$ и определения простой теории, получаем $A \notin \beta$.

По индуктивному допущению получаем $|A|^c_\beta = f$. Отсюда по определению 1 получаем $|{\sim}A|^c_\beta = t$.

(2). $\Rightarrow$. Пусть $|{\sim}A|^c_\beta = f$. Тогда по определению 1 получаем $|A|^c_\beta = t$. Отсюда по индуктивному допущению получаем $A \in \beta$ и ${\sim}A \notin \beta$. Используя $a5$. $A \vdash_{\mathbf{K}_3} {\sim}{\sim}A$ и определение простой теории, получаем ${\sim}{\sim}A \in \beta$.

(2). $\Leftarrow$. Пусть ${\sim}{\sim}A \in \beta$ и ${\sim}A \notin \beta$. Используя $a6$. ${\sim}{\sim}A \vdash_{\mathbf{K}_3} A$ и определение простой теории, получаем $A \in \beta$. Тогда по индуктивному допущению получаем $|A|^c_\beta = t$. Отсюда по определению 1 получаем $|{\sim}A|^c_\beta = f$.

(3). $\Rightarrow$. Пусть $|A \wedge B|^c_\beta = t$. Тогда по определению 1 получаем $|A|^c_\beta = t$ и $|B|^c_\beta = t$. Отсюда по индуктивному допущению получаем $A \in \beta$ и ${\sim}A \notin \beta$, а также $B \in \beta$ и ${\sim}B \notin \beta$. Из этого по определению простой теории получаем, что $A \wedge B \in \beta$. Из того, что ${\sim}A \notin \beta$ и ${\sim}B \notin \beta$, получаем ${\sim}A \vee {\sim}B \notin \beta$. Используя $a8$. ${\sim}(A \wedge B) \vdash_{\mathbf{K}_3} {\sim}A \vee {\sim}B$ и определение простой теории, получаем ${\sim}(A \wedge B) \notin \beta$.

(3). $\Leftarrow$. Пусть $A \wedge B \in \beta$ и ${\sim}(A \wedge B) \notin \beta$. Из того, что $A \wedge B \in \beta$, по определению простой теории, получаем $A \in \beta$ и $B \in \beta$. Из того, что ${\sim}(A \wedge B) \notin \beta$, с использованием $a9$. ${\sim}A \vee {\sim}B \vdash_{\mathbf{K}_3} {\sim}(A \wedge B)$ и определения простой теории, получаем ${\sim}A \vee {\sim}B \notin \beta$. Значит, ${\sim}A \notin \beta$ и ${\sim}B \notin \beta$. Таким образом, по индуктивному допущению получаем $|A|^c_\beta = t$ и $|B|^c_\beta = t$, откуда по определению 1 следует $|A \wedge B|^c_\beta = t$.

(4). $\Rightarrow$. Пусть $|A \wedge B|^c_\beta = f$. Тогда по определению 1 получаем $|A|^c_\beta = f$ или $|B|^c_\beta = f$. Разбор случаев.

Пусть $|A|^c_\beta = f$. Тогда по индуктивному допущению получаем ${\sim}A \in \beta$ и $A \notin \beta$. Используя $a3$. ${\sim}A \vdash_{\mathbf{K}_3} {\sim}A \vee {\sim}B$, $a9$. ${\sim}A \vee {\sim}B \vdash_{\mathbf{K}_3} {\sim}(A \wedge B)$, правило $r1$ и определение простой теории, получаем ${\sim}(A \wedge B) \in \beta$. А из того, что $A \notin \beta$, с использованием $a1$. $A \wedge B \vdash_{\mathbf{K}_3} A$ и определения простой теории, получаем $A \wedge B \notin \beta$.

Пусть $|B|^c_\beta = f$. Аналогично предыдущему случаю, мы получаем желаемые ${\sim}(A \wedge B) \in \beta$ и $A \wedge B \notin \beta$.

(4). $\Leftarrow$. Пусть ${\sim}(A \wedge B) \in \beta$ и $A \wedge B \notin \beta$. Используя $a8$. ${\sim}(A \wedge B) \vdash_{\mathbf{K}_3} {\sim}A \vee {\sim}B$ и определение простой теории, получаем ${\sim}A \vee {\sim}B \in \beta$, а следовательно, ${\sim}A \in \beta$ или ${\sim}B \in \beta$. Также по определению простой теории имеем $A \notin \beta$ или $B \notin \beta$. Разбор случаев.

Пусть ${\sim}A \in \beta$ и $A \notin \beta$. Тогда по индуктивному допущению получаем $|A|^c_\beta = f$. Отсюда по определению 1 получаем $|A \wedge B|^c_\beta = f$.

Пусть ${\sim}A \in \beta$ и $B \notin \beta$. Используя $a2$. $A \wedge B \vdash_{\mathbf{K}_3} B$ и определение простой теории, получаем $A \wedge B \notin \beta$, а значит $A \notin \beta$ и $B \notin \beta$. Из того, что $A \notin \beta$ и ${\sim}A \in \beta$ по индуктивному допущению получаем $|A|^c_\beta = f$. Отсюда по определению 1 получаем $|A \wedge B|^c_\beta = f$.

Пусть ${\sim}B \in \beta$ и $A \notin \beta$. Используя $a1$. $A \wedge B \vdash_{\mathbf{K}_3} A$ и определение простой теории, получаем $A \wedge B \notin \beta$, а значит $A \notin \beta$ и $B \notin \beta$. Из того, что

$B \notin \beta$ и $\sim B \in \beta$ по индуктивному допущению получаем $|B|^c_\beta = f$. Отсюда по определению 1 получаем $|A \wedge B|^c_\beta = f$.

Пусть $\sim B \in \beta$ и $B \notin \beta$. Аналогично первому случаю в этом пункте получаем желаемое $|A \wedge B|^c_\beta = f$.

Доказательство случая, когда формула A имеет вид $A \vee B$, проводится двойственным образом по отношению к случаям, когда $A = A \wedge B$. □

Лемма 3. *Если $A \nvdash_{\mathbf{K}_3} B$, то существует такая простая теория α, что $A \in \alpha$ и $\sim A \notin \alpha$, и $B \notin \alpha$.*

Доказательство.

Наша задача – описать процедуру конструирования максимальной теории. Будем использовать технику М. Данна из [13].

Перечислим все формулы рассматриваемого языка $A_0, A_1, A_2, \ldots$. Строим последовательность теорий, начиная с $\tau_0 = \{C \,|\, A \vdash_{\mathbf{K}_3} C\}$. Последующие теории строятся так:

1. если $\tau_n + A_{n+1} \vdash_{\mathbf{K}_3} B$, тогда $\tau_{n+1} = \tau_n$;
2. если $\tau_n + A_{n+1} \nvdash_{\mathbf{K}_3} B$, тогда $\tau_{n+1} = \tau_n \cup \{A_{n+1}\}$.

Результирующая максимальная теория τ получается через объединение всех τ_n-х. Факт того, что τ замкнута относительно $\vdash_{\mathbf{K}_3}$, следует из условий её построения, поскольку каждая τ_n-я замкнута относительно $\vdash_{\mathbf{K}_3}$.

Факт о том, что $B \notin \tau$ также следует из условий построения τ, поскольку в противном случае мы бы получили, что $A \vdash_{\mathbf{K}_3} B$, а это противоречит условию Леммы.

Допустим, что τ является противоречивой теорией. Тогда существует такая формула C, что $C \in \tau$ и $\sim C \in \tau$. Отсюда, в силу того, что τ замкнута относительно $\vdash_{\mathbf{K}_3}$, используя $a12$, получаем $C \wedge \sim C \vdash_{\mathbf{K}_3} B$. В силу того, что τ замкнута относительно $\vdash_{\mathbf{K}_3}$, получаем, что $B \in \tau$. Противоречие, поскольку ранее мы установили, что $B \notin \tau$.

Остается показать, что τ обладает свойством простоты. Предположим, что $D \vee E \in \tau$, но $D \notin \tau$ и $E \notin \tau$. Принимая во внимание условия построения τ_n-х, мы можем заключить, что $\tau + D \vdash_{\mathbf{K}_3} B$ и $\tau + E \vdash_{\mathbf{K}_3} B$. Следовательно, существует такая формула $C_1 \in \tau$, что $C_1 \wedge D \vdash_{\mathbf{K}_3} B$ и $C_1 \wedge E \vdash_{\mathbf{K}_3} B$. Применяя правило $r3$, получаем, что $(C_1 \wedge D) \vee (C_1 \wedge E) \vdash_{\mathbf{K}_3} B$, далее, с использованием $a7$ и правила $r1$, мы получим $C_1 \wedge (D \vee E) \vdash_{\mathbf{K}_3} B$. Отсюда, в силу того, что τ является теорией замкнутой относительно $\vdash_{\mathbf{K}_3}$, мы получаем $B \in \tau$, что противоречит исходному допущению. □

Теорема 1. *(Полнота $\mathbf{K}_3$). $\forall A, B \in Form$
$(A \vDash_{\mathbf{K}_3} B) \Rightarrow (A \vdash_{\mathbf{K}_3} B)$.*

Доказательство. Будем рассуждать по контрапозиции. Допустим, $A \nvdash_{\mathbf{K}_3} B$. Тогда по Лемме 3 получаем, что существует простая теория α, что $A \in \alpha$ и $\sim A \notin \alpha$, и $B \notin \alpha$. По Лемме 2 получаем, что $|A|_\alpha = t$ и $|B|_\alpha \neq t$. Отсюда, используя Определение 3, получаем, что $A \nvDash_{\mathbf{K}_3} B$. □

Теорема 2. *(Семантическая непротиворечивость* $\mathbf{K}_3$*).* $\forall A, B \in Form$ $(A \vdash_{\mathbf{K}_3} B) \Rightarrow (A \vDash_{\mathbf{K}_3} B)$.

Доказательство семантической непротиворечивости сводится к рутинной проверке того факта, что все аксиомы $\mathbf{K}_3$ являются валидными утверждениями о следовании, и правила вывода сохраняют это отношение.

Рассмотрим случай с аксиомой $a12.\ A \wedge \sim A \vdash_{\mathbf{K}_3} B$.

1. $A \wedge \sim A \not\models_{\mathbf{K}_3} B$ (допущение);
2. $|A \wedge \sim A|_\alpha = t$ и $|B|_\alpha \neq t$ (1, для некоторого α);
3. $|A|_\alpha = t$ и $|\sim A|_\alpha = t$ (2, Определение 1);
4. $|A|_\alpha = t$ и $|A|_\alpha = f$ (3, Определение 1);
5. $A \in \alpha$ и $\sim A \notin \alpha$ (4, Определение 1);
6. $A \notin \alpha$ и $\sim A \in \alpha$ (4, Определение 1).

Шаги 5 и 6 противоречат друг другу, значит, исходное допущение ошибочно, и $A \wedge \sim A \models_{\mathbf{K3}} B$.

Рассмотрим случай с правилом $r1.\ A \vdash_{\mathbf{K}_3} B;\ B \vdash_{\mathbf{K}_3} C \,/\, A \vdash_{\mathbf{K}_3} C$.

Допустим, что $A \models_{\mathbf{K}_3} B$; $B \models_{\mathbf{K}_3} C$ и $A \not\models_{\mathbf{K}_3} C$. Из того, что $A \not\models_{\mathbf{K}_3} C$, по определению 3, получаем, что $|A|_\alpha = t$ и $|C|_\alpha \neq t$. Используя $|A|_\alpha = t$, определение 3, $A \models_{\mathbf{K}_3} B$ и $B \models_{\mathbf{K}_3} C$, легко получить $|C|_\alpha = t$, что приводит нас к противоречию. □

Следствием теорем 1 и 2 является:

Теорема 3. *(Адекватность* $\mathbf{K}_3$*).* $\forall A, B \in Form$ $(A \vDash_{\mathbf{K}_3} B) \Leftrightarrow (A \vdash_{\mathbf{K}_3} B)$.

Логической системой $\mathbf{P}_3$ назовем пару $(\mathcal{L}, \vdash_{\mathbf{P}_3})$, где $\mathcal{L}$ - используемый нами язык, а $\vdash_{\mathbf{P}_3}$ - рефлексивное отношение, которое удовлетворяет следующим постулатам и правилам:

$$a1.\ A \wedge B \vdash_{\mathbf{P}_3} A; \quad a2.\ A \wedge B \vdash_{\mathbf{P}_3} B; \quad a3.\ A \vdash_{\mathbf{P}_3} A \vee B;$$

$$a4.\ B \vdash_{\mathbf{P}_3} A \vee B; \quad a5.\ A \vdash_{\mathbf{P}_3} \sim\sim A; \quad a6.\ \sim\sim A \vdash_{\mathbf{P}_3} A;$$

$$a7.\ A \wedge (B \vee C) \vdash_{\mathbf{P}_3} (A \wedge B) \vee (A \wedge C); \quad a8.\ \sim (A \wedge B) \vdash_{\mathbf{P}_3} \sim A \vee \sim B;$$

$$a9.\ \sim A \vee \sim B \vdash_{\mathbf{P}_3} \sim (A \wedge B); \quad a10.\ \sim (A \vee B) \vdash_{\mathbf{P}_3} \sim A \wedge \sim B;$$

$$a11.\ {\sim}A \wedge {\sim}B \vdash_{\mathbf{P}_3} {\sim}(A \vee B); \quad a12.\ B \vdash_{\mathbf{P}_3} A \vee {\sim}A;$$

$$r1.\ A \vdash_{\mathbf{P}_3} B;\ B \vdash_{\mathbf{P}_3} C \,/\, A \vdash_{\mathbf{P}_3} C;$$

$$r2.\ A \vdash_{\mathbf{P}_3} B;\ A \vdash_{\mathbf{P}_3} C \,/\, A \vdash_{\mathbf{P}_3} B \wedge C;$$

$$r3.\ A \vdash_{\mathbf{P}_3} C;\ B \vdash_{\mathbf{P}_3} C; \,/\, A \vee B \vdash_{\mathbf{P}_3} C.$$

Утверждение 2. $\forall A, B \in Form$
$(A \vdash_{\mathbf{P}_3} B) \Leftrightarrow (A \vdash_{\mathbf{DHW}} B)$.

Доказательство. Аналогично утверждению 1. □

Лемма 4. *Пусть* $|.|^c_\beta$ *– каноническая оценка для логики* $\mathbf{P}_3$. *Тогда для всяких* $A \in Form$ *верно, что:*

1. $|A|^c_\beta = t \Leftrightarrow A \in \beta$ *и* ${\sim}A \notin \beta$;
2. $|A|^c_\beta = f \Leftrightarrow A \notin \beta$ *и* ${\sim}A \in \beta$.

Доказательство.

Данная лемма доказывается аналогично Лемме 2.

□

Лемма 5. *Если* $A \nvdash_{\mathbf{P}_3} B$, *то существует простая теория* α, *что* $B \notin \alpha$ *и* ${\sim}B \in \alpha$, *и* $A \in \alpha$.

Доказательство. Данная лемма доказывается аналогично Лемме 3. □

Теорема 4. *(Полнота* $\mathbf{P}_3$*).* $\forall A, B \in Form$
$(A \vDash_{\mathbf{P}_3} B) \Rightarrow (A \vdash_{\mathbf{P}_3} B)$.

Доказательство. Будем рассуждать по контрапозиции. Допустим $A \nvdash_{\mathbf{P}_3} B$. Тогда по Лемме 5 получаем, что существует простая теория α, что $B \notin \alpha$ и ${\sim}B \in \alpha$, и $A \in \alpha$. По Лемме 4 получаем, что $|B|_\alpha = f$ и $|A|_\alpha \neq f$. Отсюда, используя Определение 4, получаем, что $A \nvDash_{\mathbf{P}_3} B$. □

Теорема 5. *(Семантическая непротиворечивость* $\mathbf{P}_3$*).* $\forall A, B \in Form$
$(A \vdash_{\mathbf{P}_3} B) \Rightarrow (A \vDash_{\mathbf{P}_3} B)$.

Доказательство. Аналогично теореме 2. □

Из теорем 4 и 5 следует:

Теорема 6. *(Адекватность* $\mathbf{P}_3$*).* $\forall A, B \in Form$
$(A \vDash_{\mathbf{P}_3} B) \Leftrightarrow (A \vdash_{\mathbf{P}_3} B)$.

Аналогичный результат можно получить для системы классической логики. Её можно определить через добавление, например, к системе $\mathbf{K}_3$ аксиомы $B \vdash A \vee {\sim}A$. Для доказательства адекватности достаточно принять онтологические постулаты (I) и (II) для описаний состояний, задать следование по типу одного из определений 3 и 4, на базе таких же условий истинности, как в определении 1. Каноническая оценка определяется так же, как для $\mathbf{K}_3$ и $\mathbf{P}_3$. Аналог леммы Линденбаума выглядит следующим образом.

Лемма 6. *Допустим, что* $A \nvdash_{\mathbf{TV}} B$*. Тогда существует такая простая теория* θ*, что* $A \in \theta$ *и* ${\sim}A \notin \theta$*, и* $B \notin \theta$ *или* ${\sim}B \in \theta$*.*

Нетрудно доказать следующие теоремы.

Теорема 7. *(Полнота* $\mathbf{TV}$*).* $\forall A, B \in Form$
$(A \vDash_{\mathbf{TV}} B) \Rightarrow (A \vdash_{\mathbf{TV}} B)$.

Теорема 8. *(Семантическая непротиворечивость* $\mathbf{TV}$*).* $\forall A, B \in Form$
$(A \vdash_{\mathbf{TV}} B) \Rightarrow (A \vDash_{\mathbf{TV}} B)$.

Теорема 9. *(Адекватность* $\mathbf{TV}$*).* $\forall A, B \in Form$
$(A \vDash_{\mathbf{TV}} B) \Leftrightarrow (A \vdash_{\mathbf{TV}} B)$.

4. Заключение

Итак, выше сформулированы адекватные семантики полуобобщенных описаний состояний для логик $\mathbf{K}_3$ и $\mathbf{P}_3$ и, как следствие, для логик **HW** и **DHW**. Примечательно, что если задать следование с помощью определения 3, используя обобщенные описания состояний, то мы получим семантику для логики **ETL**. Семантически эта логика получается из **FDE**, если в качестве выделенного значения рассматривается только значение **T** («told Truth», см. [8]). Впервые эта логика возникает в работе [15]. Если же мы зададим следование с помощью определения 4, используя обобщенные описания состояний, то мы получим семантику для логики **NFL**. В работе [19] эта логика рассматривается как логика **FDE** с тремя выделенными значениями: **T** («told Truth»), **B** («told Truth and False»), **N** («neither Truth, nor False»). Доказательство адекватности семантик обобщенных описаний состояний для логик **ETL** и **NFL** будет представлено в продолжении настоящей статьи.

Литература

[1] *Войшвилло Е. К.* Логическое следование и семантика обобщенных описаний состояний // Модальные и интенсиональные логики и их применение к проблемам методологии науки. М.: Наука, 1984. С. 183–192.

[2] *Войшвилло Е. К.* Философско-методоловгические аспекты релевантной логики. М.: Изд-во МГУ, 1988. 140 с.

[3] *Зайцев Д. В.* Обобщенная релевантная логика и модели рассуждений. М.: Креативная экономика, 2010. 312 с.

[4] *Карпенко А. С.* Развитие многозначной логики. М.: ЛКИ, 2010. 448 с.

[5] *Смирнова Е. Д.* Логика и философия. М.: РОССПЭН, 1996. 304 с.

[6] *Anderson A. R.*, *Belnap N. D. Jr.* Entailment: The Logic of Relevance and Necessity, Vol. 1. Princeton: Princeton University Press, 1975. 543 p.

[7] *Anderson A. R.*, *Belnap N. D. Jr.* Tautological entailments // Philosophical Studies. 1962. Vol. 13. P. 9–24.

[8] *Belnap N. D. Jr.* How a computer should think // Contemporary Aspects of Philosophy / Ed. by G. Ryle. Oriel Press, 1977. P. 30–55.

[9] *Belnap N. D. Jr.* Tautological entailments (abstract) // Journal of Symbolic Logic. 1959. Vol. 24. P. 316.

[10] *Belnap N. D. Jr.* A useful four-valued logic // Modern Uses of Multiple-Valued Logic / Ed. by J. M. Dunn and G. Epstein. Modern Uses of Multiple-Valued Logic. Boston: D. Reidel Publishing Company, 1977. P. 8–37.

[11] *Dunn J. M.* The Algebra of Intensional Logics. Ph. D. Dissertation. University of Pittsburgh. 1966. 177 p.

[12] *Dunn J. M.* Intuitive Semantics for first-degree entailments and coupled trees // Philosophical Studies. 1976. Vol. 26. P. 149–168.

[13] *Dunn J. M.* Partiality and Its Dual // Studia Logica. 2000. Vol. 66(1). P. 5–40.

[14] *Font J. M.* Belnap's four-valued logic and De Morgan lattices // Logic Journal of IGPL. 1997. Vol. 5. Issue 3. P. 1–29.

[15] *Pietz A.*, *Rivieccio U.* Nothing but the Truth // Journal of Philosophical Logic. 2013. Vol. 42(1). P. 125–135.

[16] *Routley R.*, *Meyer R. K.* The Semantics of Entailment I // Truth, Syntax and Semantics / Ed. by H. Leblanc. Amsterdam. 1973. P. 194–243.

[17] *Routley R.*, *Routley V.* Semantics of first-degree entailment // Nous. 1972. Vol. 6. P. 335–359.

[18] *Shramko Y.*, *Wansing H.* Truth and falsehood: An inquiry into generalized logical values. Springer Science & Buiseness Media. Vol. 36. 2011. 246 p.

[19] *Shramko Y.*, *Zaitsev D.*, *Belikov A.* First-degree entailment and its relatives // Studia Logica. 2017. Vol. 105. № 6. P. 1291–1347.

Alexander A. Belikov

Vojshvillo-Style Semantics for Some Extensions of FDE: Part I

Belikov Alexander Alexandrovich
Lomonosov Moscow State University.
27/4 Lomonosovskij prospekt, Moscow, 119991, Russian Federation.
E-mail: `belikov@philos.msu.ru`

In this paper I examine the semantics of semi-generalized state descriptions - a kind of the informational semantics for logic of first-degree entailments (**FDE**) proposed by E. K. Vojshvillo in the early eighties. A key feature of the approach is to consider state descriptions, which do not satisfy the classic ontological conditions of consistency and completeness that allows to determine a relevant entailment. By relevant entailment we understand such a relation, that is free from the classical paradoxes: $A \wedge \sim A \models B$ and $B \models A \vee \sim A$. I consider well-known extensions of **FDE**, which are formulated in terms of binary consequence systems: three-valued Kleene logic, three-valued Priest logic and classical logic. The first two of these can be semantically defined using semi-generalized state descriptions: for Kleene logic I use $\top$-generalized state descriptions (consistent but incomplete), for Priest logic I use $\perp$-generalized state descriptions (inconsistent but complete). The entailment relation for Kleene logic defined in terms of truth-and-non-falsity preservation from the premise to the conclusion. In turn Priest logic determined by entailment relation defined through the preservation of falsity-and-non-truth from the conclusion to the premise. The paper includes proofs of the corresponding completeness and soundness theorems. In the case of classical logic, we provide only a sketch of completeness and soundness with respect to the semantics of classical state descriptions (consistent and complete). This article is the first part of studies on E. K. Vojshvillo semantics for different extensions of textbf FDE.

Keywords: Klenee logic, Priest logic, first-degree entailments, classical logic, generalized state descriptions

References

[1] Vojshvillo, E. "Logicheskoe sledovanie i semantika obobshhennyh opisanij sostojanij" [Logical consequence and semantics of generalized state descriptions], in: *Modal'nye i intensional'nye logiki i ih primenenie k problemam metodologii nauki* [Modal and Intensional Logic and Their Application to the Problems of the Methodology of Science], Moscow: Nauka, 1984, pp. 183–192. (In Russian)

[2] Vojshvillo, E. *Filosofsko-metodologicheskie aspekty relevantnoj logiki* [Philosophical-methodological aspects of relevance logic]. Moscow: MSU publishing, 1988. 140 pp. (In Russian)

[3] Zaitsev, D. *Obobshhennaja relevantnaja logika i modeli rassuzhdenij* [Generalized relevance logic and models of reasoning]. Moscow: Kreativnaja jekonomika, 2010. 312 pp. (In Russian)

[4] Karpenko, A. *Razvitie mnogoznachnoj logiki* [The Development of Many-Valued Logic]. Moscow: LKI, 2010. 448 pp. (In Russian)

[5] Smirnova, E. *Logika i filosofija* [Logic and Philosophy]. Moscow: ROSSPEN, 1996. 304 pp. (In Russian)

[6] Anderson, A. R., Belnap, N. D. Jr. *Entailment: The Logic of Relevance and Necessity*, Vol. 1. Princeton. Princeton University Press, 1975. 543 pp.

[7] Anderson, A. R., Belnap, N. D. Jr. "Tautological entailments", *Philosophical Studies*, 1962, Vol. 13, pp. 9–24.

[8] Belnap, N. D. Jr. "How a computer should think", in: *Contemporary Aspects of Philosophy*, ed. by G. Ryle. Oriel Press, 1977, pp. 30–55.

[9] Belnap, N. D. Jr. "Tautological entailments (abstract)", *Journal of Symbolic Logic*, 1959, Vol. 24, pp. 316.

[10] Belnap, N. D. Jr. "A useful four-valued logic", in: *Modern Uses of Multiple-Valued Logic. D. Reidel Publishing Company*, ed. by J. M. Dunn and G. Epstein. Dordrecht and Boston, 1977, pp. 8–37.

[11] Dunn, J. M. *The Algebra of Intensional Logics. Ph. D. Dissertation.* University of Pittsburgh, 1966. 177 pp.

[12] Dunn, J. M. "Intuitive Semantics for first-degree entailments and coupled trees", *Philosophical Studies*, 1976, Vol. 29, pp. 149–168.

[13] Dunn, J. M. "Partiality and Its Dual", *Studia Logica*, 2000, Vol. 66(1), pp. 5–40.

[14] Font, J. M. "Belnap's four-valued logic and De Morgan lattices", *Logic Journal of IGPL*, 1977, Vol. 5, Issue 3, pp. 1–29.

[15] Pietz, A., Rivieccio, U. "Nothing but the Truth", *Journal of Philosophical Logic*, 2013, Vol. 42(1), pp. 125–135.

[16] Routley, R., Meyer, R. K. "The Semantics of Entailment I", in: *Truth, Syntax and Semantics*, ed. by H. Leblanc. Amsterdam, 1973. pp. 194–243.

[17] Routley, R., Routley, V. "Semantics of first-degree entailment", *Nous*, 1972, Vol. 6, pp. 335–359.

[18] Shramko, Y., Wansing, H. *Truth and falsehood: An inquiry into generalized logical values.* Springer Science & Buiseness Media. Vol. 36. 2011. 246 pp.

[19] Shramko, Y., Zaitsev, D., Belikov, A. "First-degree entailment and its relatives", *Studia Logica*, 2017, Vol. 105, No. 6, pp. 1291–1347 [https://doi.org/10.1007/s11225-017-9747-7 accessed on 21.04.2018].

Логические исследования
2018. Т. 24. № 1. С. 62–74
УДК 16+510.644

Logical Investigations
2018, Vol. 24, No. 1, pp. 62–74
DOI: 10.21146/2074-1472-2018-24-1-62-74

Н.Н. Преловский

Логические матрицы и проблема Гольдбаха

Преловский Николай Николаевич
Институт философии РАН.
Российская Федерация, 109240, г. Москва, ул. Гончарная, д. 12, стр. 1.
E-mail: mingkemingfeichangming@gmail.com

В статье рассматриваются эквивалентные формулировки бинарной проблемы Гольдбаха в терминах множеств тавтологий последовательностей логических матриц и отдельных логических матриц. При этом существенную роль играют понятия тавтологий логических матриц, а также произведений и сумм логических матриц из последовательности K_{n+1} (матриц Карпенко). Таким образом, в статье дается вариант ответа на поставленный А.С. Карпенко вопрос о возможности наличия связи между подобными K_{n+1} последовательностями матриц и отдельными логическими матрицами и известной как бинарное утверждение Гольдбаха открытой проблемой: всякое четное натуральное число $n \geq 4$ может быть представлено в виде суммы двух простых чисел (G_2). Доказано утверждение о том, что всякая конечнозначная матрица в построенной последовательности M имеет тавтологии, если и только если G_2 является истинным. С использованием свойств операции произведения матриц доказано, что бесконечнозначная матрица $M\otimes$ имеет тавтологии, если и только если G_2 истинно. Показано, что G_2 эквивалентна верности утверждения о равенстве множества тавтологий матрицы $M\otimes$, образующего заданную этой матрицей логическую теорию, и логической теории, определенной в терминах множеств тавтологий конечнозначных логик Лукасевича $Ł_n$. Данные результаты распространены на последовательности матриц и произведения матриц из таких последовательностей, входящие в довольно широкую совокупность классов матриц. За счет этого установлено, что построения с использованием последовательности K_{n+1} могут рассматриваться в качестве частного случая построений в данных классах. Проблема Гольдбаха таким образом приобретает логические аспекты, так как вопрос о ее истинности или ложности теперь сводится к вопросу о непустоте определенной логической теории.

Ключевые слова: многозначная логика, логические матрицы, тавтологии, проблема Гольдбаха

1. Введение

В данной статье приводится ряд эквивалентных формулировок проблемы Гольдбаха в терминах множеств тавтологий последовательностей логических матриц и отдельных логических матриц.

Христиан Гольдбах поставил названную его именем проблему в письме к Леонарду Эйлеру в 1742 году (см., например, [13]). В настоящее время она известна в двух вариантах – бинарном и тернарном. Под бинарным утверждением Гольдбаха понимается следующая гипотеза: всякое четное натуральное число $n \geq 4$ может быть представлено в виде суммы двух простых чисел. В дальнейшем это утверждение будет обозначаться G_2. Тернарный вариант проблемы Гольдбаха (сокращенно – G_3) представляет собой утверждение: всякое нечетное натуральное число $m \geq 7$ может быть представлено в виде суммы трех простых чисел.

Поскольку всякое нечетное натуральное число $m \geq 7$ может быть представлено в виде $2k + 3$, очевидно, что истинность G_2 влечет истинность G_3. При этом импликация в обратную сторону может оказаться ложной. В данной статье будет рассматриваться только бинарный вариант утверждения, но все приводимые результаты могут быть легко обобщены и на тернарную версию.

Полное доказательство тернарной проблемы Гольдбаха было представлено Харальдом Хельфготтом в 2013 году ([8] и [9]). В книге [5, с. 39] о текущем положении дел с продолжающимися свыше 250 лет усилиями по доказательству бинарной гипотезы Гольдбаха говорится: «В последнее время в работе над ней достигнут колоссальный прогресс, но полностью она пока не решена».

Вопрос о возможной связи между логическими матрицами и проблемой Гольдбаха был поставлен А.С. Карпенко в [1] и [10].

Различные многозначные логики и соответствующие им логические матрицы подробно исследуются в монографиях [2] и [4].

2. Логические матрицы, тавтологии и функциональная эквивалентность

В дальнейших построениях нам потребуется ряд определений и результатов. В частности, ключевую роль для рассматриваемых вопросов играют понятия логической матрицы, пропозициональной тавтологии и функциональной эквивалентности.

Определение 1. Логической матрицей называется упорядоченная тройка

$$\mathfrak{M} = \langle A, F, D \rangle ,$$

где:

- A есть множество, называемое носителем матрицы;
- $F = \{f_1^{k_1}, f_2^{k_2}, \ldots, f_m^{k_m}\}$ есть множество всюду определенных функций

  $$f_i^{k_i} : A^{k_i} \to A$$

  для всех $1 \leq i \leq m$;

- $D \subset A$ есть непустое множество выделенных значений (или элементов) матрицы.

Определение 2.

- Пропозициональной тавтологией (или просто тавтологией) в матрице $\mathfrak{M}$ называется такая формула φ стандартного пропозиционального языка[1], что выраженная данной формулой функция принимает значения из D на любых наборах значений входящих в нее переменных из A.

- Множество всех тавтологий матрицы $\mathfrak{M}$ будем в дальнейшем обозначать $E(\mathfrak{M})$.

Определение 3. Матрицы $\mathfrak{M}_1$ и $\mathfrak{M}_2$ с общим множеством-носителем A называются функционально эквивалентными (нотация: $\mathfrak{M}_1 \equiv \mathfrak{M}_2$), если выполняются два условия:

- для всякой функции $f_i^{k_i}$ $(1 \leq i \leq m_1)$ из $\mathfrak{M}_1$ существует такая формула $\varphi(x_1, \ldots, x_{k_i})$ языка матрицы $\mathfrak{M}_2$, что соответствующая ей функция равна $f_i^{k_i}$;

- для всякой функции $g_i^{q_i}$ $(1 \leq i \leq m_2)$ из $\mathfrak{M}_2$ существует такая формула $\psi(x_1, \ldots, x_{q_i})$ языка матрицы $\mathfrak{M}_1$, что соответствующая ей функция равна $g_i^{q_i}$.

Полезно отметить, что функционально эквивалентные матрицы являются различными вариантами задания одного и того же множества функций, поскольку, согласно определению, множества выразимых в них функций совпадают. Функциональная эквивалентность двух матриц, множества выделенных элементов которых совпадают, означает также возможность отождествления множеств тавтологий данных матриц относительно определенной особым образом функции перевода выражений языка одной матрицы в язык другой и наоборот. Более подробную информацию об этом можно почерпнуть в работах [18], [15], [16] и [7].

И в частности, если $\mathfrak{M}_1 \equiv \mathfrak{M}_2$, $D_1 = D_2$, то:

$$E(\mathfrak{M}_1) \neq \varnothing \Leftrightarrow E(\mathfrak{M}_2) \neq \varnothing.$$

[1] Стандартным называется язык, все правильно построенные выражения которого конечны и сконструированы из счетнобесконечного набора различных пропозициональных переменных с помощью знаков функций из F.

3. Последовательности логических матриц и теоремы Карпенко

В качестве конкретных примеров логических матриц можно привести конечнозначные логики Лукасевича. При этом для каждого натурального n определяется отдельная матрица $Ł_{n+1}$, называемая $n+1$-значной логикой Лукасевича. Исторически логики Лукасевича были впервые рассмотрены Яном Лукасевичем, начиная как минимум с 1918 года (см. [11] и [12]).

Определение 4. Конечнозначной логикой Лукасевича называется логическая матрица

$$Ł_{n+1} = \langle V_{n+1}, \sim, \rightarrow, \{n\} \rangle ,$$

где:

- $V_{n+1} = \{0, 1, \ldots, n\}$;
- $\sim x = n - x$;
- $$x \rightarrow y = \begin{cases} n, & \text{если } x \leq y; \\ n - x + y, & \text{если } x > y. \end{cases}$$

А.С. Карпенко в [3] была построена последовательность обладающих поистине удивительными свойствами матриц K_{n+1} ($n \geq 3$). Приведем их определение.

Определение 5. Матрицей Карпенко будем называть логическую матрицу

$$K_{n+1} = \left\langle V_{n+1}, \sim, \rightarrow^K, \{n\} \right\rangle ,$$

где:

- $V_{n+1} = \{0, 1, \ldots, n\}$;
- $\sim x = n - x$;
- $$x \rightarrow^K y = \begin{cases} y, & \text{если } 0 < x < y < n \text{ и } (x, y) \neq 1; \\ y, & \text{если } 0 < x = y < n; \\ x \rightarrow y, & \text{если иначе.} \end{cases}$$

В этом определении запись $(x, y) \neq 1$ означает, что числа x и y не являются взаимно простыми, то есть имеют отличные от единицы общие делители; а $x \rightarrow y$ есть значение соответствующей функции $Ł_{n+1}$.

Имеется ряд результатов о связи между конечнозначными логиками Лукасевича и простыми числами (множество всех простых чисел будет обозначаться Π). Так, В.К. Финном в [6] доказано, что логика $Ł_{n+1}$ предполна, если и только если $n \in \Pi$.

Матрицы K_{n+1} с простыми числами и логиками Лукасевича связываются посредством двух доказанных А.С. Карпенко теорем (см. [1]), которые здесь приводятся без доказательства.

Теорема 1. *Для всякого натурального числа $n \geq 3$ верно утверждение*

$$n \in \Pi \Leftrightarrow E(K_{n+1}) \neq \varnothing.$$

Теорема 2. *Для всякого натурального числа $n \geq 3$ верно, что $n \in \Pi$, если и только если матрицы K_{n+1} и $Ł_{n+1}$ функционально эквивалентны.*

Отметим, что теорема 1 выводится из теоремы 2 и того факта, что $E(Ł_{n+1}) \neq \varnothing$ при всех $n \geq 2$, а одноэлементное множество $\{n\}$ является множеством выделенных значений как в K_{n+1}, так и в $Ł_{n+1}$.

4. Произведения и суммы логических матриц

Ключевую роль в дальнейших построениях играют определяющиеся следующим образом операции произведения и суммы логических матриц.

Определение 6. Произведением логических матриц

$$\mathfrak{M}_1 = \left\langle A_1, f_1^{k_1}, \ldots, f_m^{k_m}, D_1 \right\rangle$$

и

$$\mathfrak{M}_2 = \left\langle A_2, g_1^{k_1}, \ldots, g_m^{k_m}, D_2 \right\rangle$$

называется матрица

$$\mathfrak{M}_1 \otimes \mathfrak{M}_2 = \left\langle A_1 \times A_2, h_1^{k_1}, \ldots, h_m^{k_m}, D_1 \times D_2 \right\rangle,$$

где для всех i $(1 \leq i \leq m)$ верно:

$$h_i^{k_i}(<a_1^1, a_2^1>, <a_1^2, a_2^2>, \ldots, <a_1^{k_i}, a_2^{k_i}>) = <f_i^{k_i}(a_1^1, \ldots, a_1^{k_i}), g_i^{k_i}(a_2^1, \ldots, a_2^{k_i})>.$$

Определение 7. Суммой логических матриц $\mathfrak{M}_1$ и $\mathfrak{M}_2$ называется матрица

$$\mathfrak{M}_1 \oplus \mathfrak{M}_2 = \left\langle A_1 \times A_2, h_1^{k_1}, \ldots, h_m^{k_m}, D' \right\rangle,$$

где $h_i^{k_i}$ для всех i $(1 \leq i \leq m)$ определяются так же, как и в произведении, а

$$D' = \{<a_1, a_2> : a_1 \in D_1 \vee a_2 \in D_2\}.$$

Замечание 1.

- Из определения операции произведения матриц следует, что для любого семейства $\{\mathfrak{M}_i : i \in \alpha\}$ (α – конечный или бесконечный ординал) логических матриц выполняется
$$E(\otimes_{i=1}^{\alpha}\mathfrak{M}_i) \neq \varnothing,$$
если и только если для всякого $i \in \alpha$ верно, что $E(\mathfrak{M}_i) \neq \varnothing$.

- Аналогично, из определения операции суммы матриц следует, что для любого семейства $\{\mathfrak{M}_i : i \in \alpha\}$ (α – конечный или бесконечный ординал) логических матриц, выполняется
$$E(\oplus_{i=1}^{\alpha}\mathfrak{M}_i) \neq \varnothing,$$
если и только если существует такое $i \in \alpha$, что $E(\mathfrak{M}_i) \neq \varnothing$.

5. Утверждения о последовательностях логических матриц, их суммах и произведениях

Применение операций суммы и произведения к конечным и бесконечным множествам (или последовательностям) логических матриц позволяет сформулировать основные результаты данной статьи. При этом характеристики множеств тавтологий результирующих матриц определяются свойствами этих операций, приведенными в замечании 1, а также утверждениями теорем 1 и 2.

В дальнейшем до конца раздела будем считать, что K_3 есть Ł$_3$.

С учетом этой оговорки рассмотрим последовательность матриц
$$M = \mathfrak{M}_2, \mathfrak{M}_3, \mathfrak{M}_4, \ldots,$$
где $\mathfrak{M}_2$ есть Ł$_3$, и при $3 \leq j < \omega$:
$$\mathfrak{M}_j = \oplus_{i=2}^{j}(K_{i+1} \otimes K_{2j-i+1}).$$

Замечание 2. Каждая матрица $\mathfrak{M}_j$ ($3 \leq j < \omega$) последовательности M в контексте проблемы Гольдбаха представляет четное число $2j$. Например:
$$\mathfrak{M}_3 = (K_3 \otimes K_5) \oplus (K_4 \otimes K_4)$$
и
$$\mathfrak{M}_4 = (K_3 \otimes K_7) \oplus (K_4 \otimes K_6) \oplus (K_5 \otimes K_5) \text{ и т. д.}$$

Здесь каждое слагаемое соответствует одному из представлений числа $2j$ в виде суммы двух меньших чисел i и $2j-i$, а вся сумма дает полный перебор таких возможных пар, сопоставленных парам матриц K_{i+1} и K_{2j-i+1} соответственно.

Это позволяет доказать следующую теорему.

Теорема 3. *Множества $E(\mathfrak{M}_j)$ последовательности M непусты при всех j $(2 \leq j < \omega)$, если и только если утверждение G_2 истинно.*

Доказательство.

(⇒)

Допустим, что для всякого j $(2 \leq j < \omega)$ множество $E(\mathfrak{M}_j)$ непусто.

Поскольку $E(\mathfrak{M}_j) \neq \varnothing$, то, по определению суммы логических матриц, существует такое i $(2 \leq i \leq j)$, что слагаемое вида $K_{i+1} \otimes K_{2j-i+1}$ имеет тавтологии. Отсюда, по определению произведения логических матриц, следует, что как $E(K_{i+1})$, так и $E(K_{2j-i+1})$ непусты. Это, по теореме 1, означает, что как i, так и $2j-i$ являются простыми числами. Очевидно, что $2j = i + 2j - i$, то есть утверждение гипотезы Гольдбаха верно для числа $2j$.

Поскольку матрицы в последовательности M представляют все четные натуральные числа вида $2j$ при $j \geq 2$, то утверждение G_2 истинно.

Доказательство (⇒) завершено.

(⇐)

Допустим, что утверждение G_2 истинно и существует такое j $(2 \leq j < \omega)$, что $E(\mathfrak{M}_j) = \varnothing$.

Поскольку множество $E(\mathfrak{M}_j)$ пусто, то, по определению суммы логических матриц, для любого i $(2 \leq i \leq j)$ слагаемые вида $K_{i+1} \otimes K_{2j-i+1}$ не имеют тавтологий. Это, в силу определения произведения матриц, означает, что либо $E(K_{i+1}) = \varnothing$, либо $E(K_{2j-i+1}) = \varnothing$. Но тогда, по теореме 1, по крайней мере одно из чисел i и $j-i$ не является простым. То есть число $2j$ является контрпримером для G_2, что противоречит допущению.

Доказательство (⇐) завершено. □

Рассмотрим теперь матрицу

$$M\otimes = \mathfrak{M}_2 \otimes \mathfrak{M}_3 \otimes \ldots = \otimes_{j=2}^{\omega} \mathfrak{M}_j.$$

Для этой матрицы выполняется следующее утверждение.

Теорема 4. *Множество $E(M\otimes)$ непусто, если и только если утверждение G_2 истинно.*

Доказательство. Доказательство следует из предыдущей теоремы и определения произведения логических матриц. □

Замечание 3. Множество $E(M\otimes)$ в терминах множеств тавтологий матриц Карпенко может быть выражено следующим образом:

$$E(\text{Ł}_3) \cap \bigcap_{j=3}^{\omega}(\bigcup_{i=2}^{j}(E(K_{i+1}) \cap E(K_{2j-i+1}))).$$

С учетом этого факта утверждение Гольдбаха верно, если и только если выполняется равенство:

$$E(M\otimes) = E(\text{Ł}_3) \cap \bigcap_{j=3}^{\omega}(\bigcup_{r=1}^{k_j}(E(\text{Ł}_{i_r+1}) \cap E(\text{Ł}_{2j-i_r+1}))),$$

где

$$k_j = |\{<i, 2j-i> : 2 \leq i \leq j \wedge i \in \Pi \wedge 2j-i \in \Pi\}|,$$

а в бесконечное пересечение включаются только случаи с $k_j \neq 0$.

6. Утверждения о классах логических матриц

Теоремы 3 и 4 носят довольно конкретный характер и могут быть обобщены до утверждений о достаточно широкой совокупности классов логических матриц, удовлетворяющих весьма «компактному» набору условий.

С этой целью рассмотрим класс $\mathcal{A}$ логических матриц, удовлетворяющий двум условиям:

- $\mathcal{A}$ замкнут относительно конечных и бесконечных сумм и произведений его элементов;
- В $\mathcal{A}$ имеются, по крайней мере, две матрицы $\mathfrak{N}_1$ и $\mathfrak{N}_2$ такие, что $E(\mathfrak{N}_1) = \varnothing$ и $E(\mathfrak{N}_2) \neq \varnothing$.

Пусть $[\mathfrak{N}_1]$ есть класс всех матриц из $\mathcal{A}$, множества тавтологий которых пусты. Класс матриц с непустыми множествами тавтологий соответственно будем обозначать $[\mathfrak{N}_2]$.

Пусть теперь

$$M = \mathfrak{M}_2, \mathfrak{M}_3, \mathfrak{M}_4, \ldots$$

есть последовательность матриц $\mathfrak{M}_j \in \mathcal{A}$ таких, что для всякого натурального числа $j \geq 2$ верно:

- $\mathfrak{M}_j \in [\mathfrak{N}_2]$, если $k_j \neq 0$;
- $\mathfrak{M}_j \in [\mathfrak{N}_1]$ в противном случае.

По аналогии с предыдущим разделом $M\otimes$ есть $\otimes_{j=2}^{\omega}\mathfrak{M}_j$. В этом случае верны следующие утверждения.

Теорема 5. *Множества тавтологий матриц $\mathfrak{M}_j \in \mathcal{A}$, образующих последовательность M, непусты для всякого $2 \leq j < \omega$, если и только если утверждение G_2 истинно.*

Доказательство. Истинность теоремы является непосредственным следствием определений класса $\mathcal{A}$, числа k_j и последовательности M. □

Теорема 6. *Множество тавтологий логической матрицы $M\otimes$ непусто, если и только если утверждение G_2 истинно.*

Доказательство. Истинность теоремы является непосредственным следствием определений класса $\mathcal{A}$, числа k_j, последовательности M и свойств произведения логических матриц. □

Рассмотрим последовательность

$$K = \mathfrak{K}_3, \mathfrak{K}_4, \mathfrak{K}_5, \ldots$$

логических матриц из $\mathcal{A}$ такую, что выполняются два условия:

- $\mathfrak{K}_{r+1} \in [\mathfrak{N}_2]$, если $r \in \Pi$;
- $\mathfrak{K}_{r+1} \in [\mathfrak{N}_1]$, если иначе.

Отметим, что последовательность матриц K_{n+1} (матриц Карпенко) является частным случаем только что определенных последовательностей.

Если теперь $M = \mathfrak{M}_2, \mathfrak{M}_3, \mathfrak{M}_4, \ldots$ и

$$\mathfrak{M}_j = \oplus_{i=2}^{j}(\mathfrak{K}_{i+1} \otimes \mathfrak{K}_{2j-i+1}),$$

где $j \geq 2$, то:

$$E(M\otimes) = \bigcap_{j=2}^{\omega}(\bigcup_{i=2}^{j}(E(\mathfrak{K}_{i+1}) \cap E(\mathfrak{K}_{2j-i+1}))).$$

Таким образом, гипотеза Гольдбаха имеет эквивалентную формулировку в виде утверждения о непустоте множества тавтологий в матрице из достаточно широко определенного класса $\mathcal{A}$ логических матриц.

Сама гипотеза Гольдбаха получает «логическое измерение», поскольку вопрос о ее истинности теперь становится вопросом о существовании логической теории с определенным набором свойств. Причем это утверждение может быть отнесено не только к G_2, но и к G_3. За счет модификации определений матриц последовательности M может быть построена логическая теория, характеризующая G_3. И в силу истинности G_3 соответствующая такой последовательности матрица $M\otimes$ имеет непустое множество тавтологий.

Отметим, что класс $\mathcal{A}$ является собственным, и это означает, что его «размеры» просто чудовищны. Так, например, мощность $\mathcal{A}$ не может быть охарактеризована никаким кардиналом κ.

Предположим, что $|\mathcal{A}| = \kappa$. В этом случае, в духе замечания 1, рассмотрим произведение всех элементов $\mathfrak{M}_i \in \mathcal{A}$, где $i < \alpha$, а α есть изоморфный κ ординал.

Тогда, по наложенным на $\mathcal{A}$ условиям, $\otimes_{i=1}^{\alpha}\mathfrak{M}_i \in \mathcal{A}$. Но это противоречит допущению о существовании взаимнооднозначного соответствия между $\mathcal{A}$ и κ, поскольку данная матрица не совпадает ни с одной из сопоставленных κ матриц из $\mathcal{A}$.

Это указывает на довольно нетривиальный комбинаторный характер подобных G_2 арифметических утверждений.

Литература

[1] *Карпенко А.С.* Логики Лукасевича и простые числа. М.: Наука, 2007. 256 с.

[2] *Карпенко А.С.* Развитие многозначной логики. М.: URSS. 2010. 444 с.

[3] *Карпенко А.С.* Характеристическая матрица для простых чисел // 6-я Всесоюзная конференция по математической логике: Тез. докл. Тбилиси, 1982. С. 76.

[4] *Карпенко А.С., Томова Н.Е.* Трехзначная логика Бочвара и литеральные паралогики. М.: ИФ РАН, 2016. 110 с.

[5] *Стюарт И.* Величайшие математические задачи. М.: АНФ, 2016. 460 с.

[6] *Финн В.К.* Логические проблемы информационного поиска. М.: Наука, 1976. 152 с.

[7] *Feitosa H.A., D'Ottaviano I.M.L.* Conservative Translations // Annals of Pure and Applied Logic. 2001. Vol. 108(1). P. 205–227.

[8] *Helfgott H.A.* The Ternary Goldbach Conjecture // La Gaceta de la Real Sociedad Matematica Espanola. 2013. Vol. 16(4). P. 709–726.

[9] *Helfgott H.A.* The Ternary Goldbach Conjecture is True // arXiv. 2013. preprint arXiv:1312.7748 (дата обращения: 24.04.2018).

[10] *Karpenko A.S.* Łukasiewicz Logics and Prime Numbers. Luniver Press, 2006. 168 с.

[11] *Łukasiewicz J.* Selected Works. North-Holland & PWN, Amsterdam & Warszawa, 1970.

[12] *Łukasiewicz J.* O logice trojwartosciowey // Ruch Filozoficzny. 1920. Vol. 5. S. 170–171.

[13] *Wang Y.* Goldbach Conjecture. Singapore: World Scientific Publ, 1984. 329 p.

[14] *Wojcicki R.* Theory of Logical Calculi: Basic Theory of Consequence Operations. Dordrecht: Kluwer, 1988. 474 p.

[15] *Wojtylak P.* Mutual Interpretability of Sentential Logic I // Reports on Mathematical Logic. 1981. Vol. 11. P. 69–89.

[16] *Wojtylak P.* Mutual Interpretability of Sentential Logic II // Reports on Mathematical Logic. 1981. Vol. 12. P. 51–66.

Nikolai N. Prelovskiy

Logical Matrices and Goldbach Problem

Prelovskiy Nikolai Nikolaevich
Institute of Philosophy of Russian Academy of Sciences.
12/1 Goncharnaya Str., Moscow, 109240, Russian Federation.
E-mail: mingkemingfeichangming@gmail.com

The paper considers equivalent formulations of Goldbach conjecture in terms of sets of tautologies in sequences of logical matrices and single logical matrices. The significant part in this consideration belongs to concepts of tautology in a logical matrix, sums and products of logical matrices from sequence K_{n+1} of Karpenko matrices. Thus the paper proposes an answer to A.S. Karpenko's question about possible relations between sequences of logical matrices similar to K_{n+1} and an open problem, known as binary Goldbach conjecture: every even natural number $n \geq 4$ may be represented as a sum of two prime numbers. The proposition that all finite-valued matrices in the sequence M have tautologies iff the binary version of Goldbach conjecture (G_2) is true is proven. Using the properties of matrix product operation, it is proven that the infinite-valued matrix $M\otimes$ has tautologies iff G_2 is true. The paper also mentions that the set of tautologies of $M\otimes$ (id est the logical theory defined by $M\otimes$) is equal to the certain theory defined in terms of finite-valued Łukasiewicz logics Ł$_n$ iff G_2 is true. These results were restated in terms of sequences of matrices and their products from a large class of logical matrices. Thus it was found out that G_2 has certain logical aspects, as it is equivalent to existence of defined non-empty logical theories.

Keywords: many-valued logics, logical matrices, tautologies, Goldbach conjecture

References

[1] Karpenko, A.S. *Logiki Lukasevicha i prostye chisla* [Lukasevich's logic and prime numbers]. M.: Nauka, 2007. 256 pp. (In Russian)

[2] Karpenko, A.S. *Razvitie mnogoznachnoi logiki* [The development of many-valued logic]. M.: URSS, 2010. 444 pp. (In Russian)

[3] Karpenko, A.S. "Kharakteristicheskaya matritsa dlya prostykh chisel" [Characteristic matrix for primes],in: *Shestaya Vsesoyuznaya konferentsiya po matematicheskoi logike: Tezisy dokladov* [Sixth All-Union Conference on Mathematical Logic: Abstracts], Tbilisi, 1982, pp. 76. (In Russian)

[4] Karpenko, A.S., Tomova, N.E. *Trekhznachnaya logika Bochvara i literal'nye paralogiki* [Three-valued logic of Bochvar and literal paralogics]. M.: IF RAN, 2016. 110 pp. (In Russian)

[5] Styuart, I. *Velichaishie matematicheskie zadachi* [Greatest mathematical problems]. Moscow: ANF, 2016, 460 pp. (In Russian)

[6] Finn, V.K. *Logicheskie problemy informatsionnogo poiska* [Logical problems of information retrieval]. M.: Nauka, 1976. 152 pp. (In Russian)

[7] Feitosa, H.A., "D'Ottaviano, I.M.L. Conservative Translations", *Annals of Pure and Applied Logic*, 2001, Vol. 108(1), pp. 205–227.

[8] Helfgott, H.A. "The Ternary Goldbach Conjecture", *La Gaceta de la Real Sociedad Matematica Espanola*, 2013, Vol. 16(4), pp. 709–726.

[9] Helfgott, H.A. The Ternary Goldbach Conjecture is True, in: *arXiv preprint*, 2013 [arXiv:1312.7748, accessed on 24.04.2018].

[10] Karpenko, A.S. *Łukasiewicz Logics and Prime Numbers*. Luniver Press, 2006. 168 pp.

[11] Łukasiewicz, J. *Selected Works*. North-Holland & PWN, Amsterdam & Warszawa, 1970.

[12] Łukasiewicz, J. "O logice trojwartosciowey", *Ruch Filozoficzny*, 1920, Vol. 5, pp. 170–171.

[13] Wang, Y. *Goldbach Conjecture*. Singapore: World Scientific Publ, 1984. 329 pp.

[14] Wojcicki, R. *Theory of Logical Calculi: Basic Theory of Consequence Operations*. Dordrecht: Kluwer, 1988. 474 pp.

[15] Wojtylak, P. "Mutual Interpretability of Sentential Logic I", *Reports on Mathematical Logic*, 1981, Vol. 11, pp. 69–89.

[16] Wojtylak, P. "Mutual Interpretability of Sentential Logic II", *Reports on Mathematical Logic*, 1981, Vol. 12, pp. 51–66.

Логические исследования
2018. Т. 24. № 1. С. 75–89
УДК 164.07+510.635

Logical Investigations
2018, Vol. 24, No. 1, pp. 75–89
DOI: 10.21146/2074-1472-2018-24-1-75-89

Н.Е. Томова

О свойствах одного класса четырехзначных паранормальных логик

Томова Наталья Евгеньевна
Институт философии РАН.
Российская Федерация, 109240, г. Москва, ул. Гончарная, д. 12, стр. 1.
E-mail: natalya-tomova@yandex.ru

Статья посвящена результатам, полученным в ходе исследования одного класса четырехзначных литеральных паранормальных логик, т. е. логик, которые одновременно являются паранепротиворечивыми и параполными на уровне пропозициональных переменных и их отрицаний. Паранепротиворечивые логики допускают возможность работы с противоречивой информацией, параполные логики позволяют строить рассуждения в условиях неполной информации. С обоими типами неопределенности, как с противоречивой, так и с неполной информацией, позволяют работать паранормальные системы. В [5] рассмотрен класс четырехзначных литеральных паралогик, полученных методом комбинирования изоморфов классической логики, выделенных в четырехзначной логике Бочвара $\mathbf{B}_4$. В результате вместе с самими изоморфами логические матрицы, определяющие эти логики, образуют десятиэлементную верхнюю полурешетку относительно функционального вложения. В предложенной статье мы исследуем класс матриц, составляющий супремум упомянутой полурешетки. Как оказалось, матрицы этого класса обладают интересными функциональными свойствами, а именно соответствуют классу всех внешних четырехзначных функций. В статье также проводится алгоритм построения совершенной дизъюнктивной J-нормальной формы четырехзначной внешней функции. В литературе имеются известные матрицы, которые функционально эквивалентны матрицам рассматриваемого класса. Например, одна из них это матрица, определяющая логику $\mathbf{V}$ [17], представляющая собой формализацию интуиций воображаемой логики Н.А. Васильева. Нами рассмотрен вопрос о соотношении всех этих систем как по классам тавтологий, так и по классам правильных заключений, порождаемых рассматриваемыми матрицами. В результате доказано, что по классу тавтологий все системы эквивалентны, однако отличаются по свойствам отношения логического следования.

Ключевые слова: четырехзначные паранормальные логики, функциональные свойства, внешние функции, тавтологии, отношение следования

1. Введение

Проблема необходимости корректной работы в условиях противоречивой и неполной информации послужила стимулом к разработке систем паралогик. Среди паралогик выделяют паранепротиворечивые, параполные и паранормальные системы. Далее будут приведены соответствующие определения, здесь укажем, что паранепротиворечивые логики допускают возможность оперирования с противоречивой информацией, параполные логики позволяют строить рассуждения в условиях неполной информации. С обоими типами неопределенности, как с противоречивой, так и с неполной информацией, позволяют работать паранормальные системы. Данная статья посвящена исследованию свойств одного класса четырехзначных паранормальных логик. Предложено проанализировать данный класс в различных аспектах: с точки зрения функциональных свойств, классов тавтологий и отношения следования.

2. Определения

Существует несколько подходов к представлению и анализу логических систем. В нашей статье удобно представление логических систем посредством логических матриц. Введем базовые определения.

Определение 1. Пусть $Var = \{p, q, r \dots\}$ — счетное множество пропозициональных переменных и $Con = \{F_1, \dots F_n\}$ — конечное множество пропозициональных связок, где каждой связке F_i сопоставлено натуральное число $a(F_i)$, которое обозначает число ее аргументов. Хотя бы для одного $i \in \{1, \dots n\}$ имеет место $a(F_i) \neq 0$. Множество For определяется индуктивно:

(1) $Var \subseteq For$,

(2) Для каждого такого $F_i \in Con$, что $a(F_i) = k$, $F_i(A_1, \dots, A_k) \in For$, если $A_1, \dots, A_k \in For$,

(3) Ничто иное не принадлежит For.

Алгебру формул $\mathcal{L} = \langle For, F_1, \dots, F_m \rangle$ будем называть *пропозициональным языком.*

Пусть $\mathcal{A} = \langle V, f_1, \dots, f_m \rangle$ алгебра того же типа, что пропозициональный язык $\mathcal{L}$, где V — множество истинностных значений и f_i — функция на V той же местности, что и F_i.

Определение 2. Упорядоченная пара $\mathfrak{M} = \langle \mathcal{A}, D \rangle$, где $\mathcal{A}$ — алгебра того же типа, что пропозициональный язык $\mathcal{L}$ и $D \subseteq V$ — непустое собственное подмножество V, называется *логической матрицей* для $\mathcal{L}$. Элементы D будем называть *выделенными значениями* $\mathfrak{M}$.

Определение 3. *Оценкой* v формулы A в матрице $\mathfrak{M}$ для языка $\mathcal{L}$ называется такое отображение $\mathcal{L}$ в $\mathcal{A} = \langle V, f_1, \dots, f_m \rangle$, что

1. если p — пропозициональная переменная, тогда $v(p) \in V$;

2. если $A_1, A_2, \ldots, A_n$ — формулы и F^n — n-местная связка языка $\mathcal{L}$, тогда $v(F^n(A_1, A_2, \ldots, A_n)) = f^n(v(A_1), v(A_2), \cdots, v(A_n))$, где f^n — функция на V, соответствующая F^n.

Определение 4. Некоторая формула A есть *тавтология* в $\mathfrak{M}$ (сокращенно — $\models_{\mathfrak{M}} A$), е.т.е. для каждой оценки v в $\mathfrak{M}$ верно, что $v(A) \in D$.

Определение 5. Теорией, порождаемой $\mathfrak{M}$, называем множество всех тавтологий в $\mathfrak{M}$ и обозначаем как $E(\mathfrak{M})$.

Определение 6. Формула B логически следует из множества формул $\Gamma = \{A_1, A_2, \ldots, A_n\}$ в $\mathfrak{M}$ (сокращенно — $\Gamma \models_{\mathfrak{M}} B$), е.т.е. не существует такой оценки v в $\mathfrak{M}$, что $v(A_i) \in D$ для каждой $A_i \in \Gamma$, и $v(B) \notin D$.

Определение 7. Отношением следования, порождаемым $\mathfrak{M}$, называем множество $Cn(\mathfrak{M})$ упорядоченных пар $\langle \Gamma, B \rangle$ таких, что для всякой оценки v в $\mathfrak{M}$, если $v(\Gamma) \subseteq D$, то $v(B) \in D$.

Далее представим некоторые определения, касающиеся паралогик. Существуют различные формальные и содержательные критерии, характеризующие паранепротиворечивость, параполноту и паранормальность.

При этом необходимо учитывать, что к рассмотрению матричных логик могут применены различные подходы [4, с. 30–32].

Так, если мы рассматриваем логику как теорию, т. е. как класс тавтологий, то удобен «импликативно-негативный» критерий паранепротиворечивости С. Яськовского [12]: в системе *паранепротиворечивой* логики не верифицируется *закон Дунса Скота* $A \supset (\neg A \supset B)$. В системе *параполной* логики не верифицируется *закон Клавия* $(\neg A \supset A) \supset A)$ [10].

Другие авторы, например [7], [17, p. 210], определения паранепротиворечивости и параполноты задают следующим образом. Теория $\mathbf{T}$ логики $\mathbf{L}$ называется тривиальной, если все формулы $\mathbf{L}$ являются теоремами $\mathbf{T}$, в противном случае теория нетривиальна. Противоречивой теорией логики $\mathbf{L}$ называем такую теорию $\mathbf{T}$ логики $\mathbf{L}$, что для некоторой формулы A верно следующее: A и $\neg A$ являются теоремами $\mathbf{T}$. *Паранепротиворечивой* теорией логики $\mathbf{L}$ называем такую противоречивую теорию $\mathbf{T}$ логики $\mathbf{L}$, что $\mathbf{T}$ не есть тривиальная теория. Полной теорией логики $\mathbf{L}$ называем такую теорию $\mathbf{T}$ логики $\mathbf{L}$, что что для всякой формулы A верно: A или $\neg A$ является теоремой $\mathbf{T}$. *Параполной* теорией логики $\mathbf{L}$ называем такую теорию $\mathbf{T}$ логики $\mathbf{L}$, что $\mathbf{T}$ не является полной теорией логики $\mathbf{L}$ и всякая полная теория логики $\mathbf{L}$, включающая $\mathbf{T}$, есть тривиальная теория.

Если под логикой пониманием класс умозаключений, то логика *паранепротиворечива*, если и только если ее отношение логического следования не является эксплозивным (принцип эсплозивности: $A, \neg A \models B$, см. [16]).

Логика *параполна*, если и только если имеется множество формул Γ и формулы A и B такие, что $\Gamma, A \models B$ и $\Gamma, \neg A \models B$, но $\Gamma \not\models B$ (см. [9, p. 1092]).

Необходимо отметить, что в общем случае при различных подходах к матричным логикам рассматриваемые критерии не эквивалентны[1].

Логика называется *паранормальной*, если она одновременно является и паранепротиворечивой, и параполной.

Наше исследование касается особого класса паранормальных логик — это *литеральные* паранормальные логики, т. е. логики, которые одновременно обладают свойствами паранепротиворечивости и параполноты на уровне пропозициональных переменных и их отрицаний, или, другими словами, на уровне литералов (см. [13, p. 479]).

3. Класс четырехзначных паранормальных логик

В книге [5, с. 56–79] рассмотрен класс четырехзначных литеральных паралогик, полученных методом комбинирования изоморфов классической логики, выделенных в четырехзначной логике Бочвара $\mathbf{B}_4$ [2, с. 289]. В результате построена десятиэлементная верхняя полурешетка[2] относительно функционального вложения матриц, задающих эти литеральные паралогики и сами изоморфы.

Подробное описание полурешетки см. в [5, с. 75–76].

В настоящем исследовании мы рассмотрим свойства класса, составляющего супремум полурешетки на рис. 1. Как оказалось, этот класс обладает интересными функциональными свойствами, кроме того, в литературе имеются матрицы, которые по своим функциональным свойствам эквивалентны матрицам рассматриваемого класса. Однако возникает вопрос о сравнении всех этих матриц как по классам тавтологий, так и по классам правильных заключений, порождаемых ими. Этим вопросам и посвящено предложенное исследование.

Итак, приведем логические матрицы, соответствующие паранормальным логиками, составляющим супремум полурешетки паралогик [5, с. 69–70].

$$\mathfrak{M}_{15} = \langle \{0, {}^1\!/\!{}_3, {}^2\!/\!{}_3, 1\}, \neg_4, \to_3, \{1, {}^2\!/\!{}_3\} \rangle,$$

$$\mathfrak{M}_{16} = \langle \{0, {}^1\!/\!{}_3, {}^2\!/\!{}_3, 1\}, \neg_3, \to_4, \{1, {}^1\!/\!{}_3\} \rangle.$$

Матричные операции $\neg_3$, $\neg_4$, $\to_3$ и $\to_4$ определены следующим образом:

[1] Ниже мы увидим это на примере матрицы $\mathfrak{M}_{\mathbf{V}}$.

[2] Далее на рис. 1 в качестве элементов полурешетки указаны множества базовых операций соответствующих логических матриц. Оставлено обозначение только для супремума полурешетки и изоморфов, посредством комбинирования операций которых получены элементы, составляющие супремум.

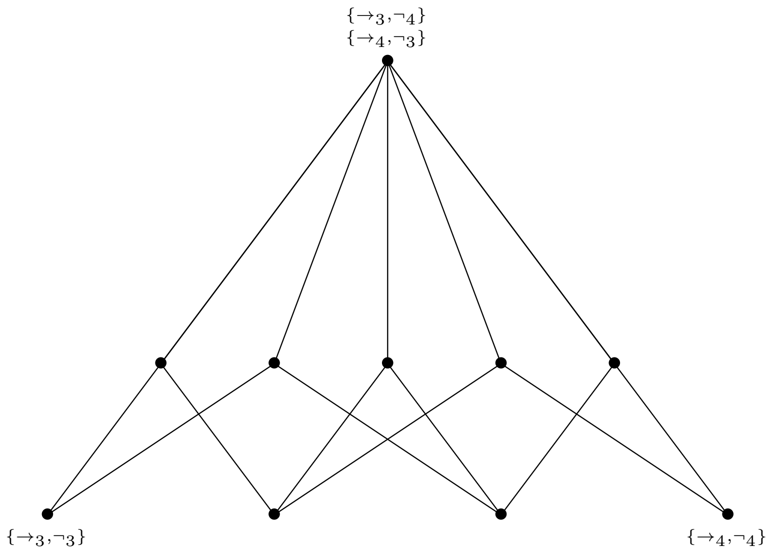


Рис. 1. Полурешетка четырехзначных паралогик

x	$\neg_3 x$	$\neg_4 x$
1	0	0
$^2\!/_3$	0	1
$^1\!/_3$	1	0
0	1	1

$\to_3$	1	$^2\!/_3$	$^1\!/_3$	0
1	1	1	0	0
$^2\!/_3$	1	1	0	0
$^1\!/_3$	1	1	1	1
0	1	1	1	1

$\to_4$	1	$^2\!/_3$	$^1\!/_3$	0
1	1	0	1	0
$^2\!/_3$	1	1	1	1
$^1\!/_3$	1	0	1	0
0	1	1	1	1

Матрицы

$\mathfrak{M}_3 = \langle\{0, {}^1\!/_3, {}^2\!/_3, 1\}, \neg_3, \to_3, \{1, {}^2\!/_3\}\rangle$ и

$\mathfrak{M}_4 = \langle\{0, {}^1\!/_3, {}^2\!/_3, 1\}, \neg_4, \to_4, \{1, {}^1\!/_3\}\rangle$

соответствуют четырехзначным изоморфам классической логики, комбинация их матричных операций приводит к паранормальным системам.

3.1. Функциональные свойства

Рассмотрим функциональные свойства логических систем, определяемых матрицами $\mathfrak{M}_{15}$ и $\mathfrak{M}_{16}$. В связи с этим приведем некоторые определения.

Пусть F — множество функций.

Определение 8. Замыканием $[F]$ будем называть множество функций, которое содержит все суперпозиции функций, принадлежащих F, и только их.

Определение 9. Операцией суперпозиции называют операцию порождения одних функций через другие с помощью формул.

Определение 10. Пусть $\mathfrak{M} = \langle V, F, D\rangle$ и $\mathfrak{M}' = \langle V', F', D'\rangle$ матрицы, F и F' классы их базовых операций.

$\mathfrak{M}'$ является *функциональным расширением* $\mathfrak{M}$, если $[F] \subseteq [F']$.

$\mathfrak{M}$ и $\mathfrak{M}'$ *функционально эквивалентны*, если $[F] = [F']$.

В [5, с. 78] указано, что $\mathfrak{M}_{15}$ и $\mathfrak{M}_{16}$ *функционально эквивалентны* в указанном выше смысле. Приведем явное доказательство данного факта. Это следует из следующих тождеств:

(1) $\neg_4 x = x \to_4 \neg_3(x \to_4 x)$,

$x \to_3 y = \neg_3 y \to_4 \neg_3 x$;

(2) $\neg_3 x = x \to_3 \neg_4(x \to_3 x)$,

$x \to_4 y = \neg_4 y \to_3 \neg_4 x$.

Таким образом, $[\{\neg_4, \to_3\}] = [\{\neg_3, \to_4\}]$.

В [1] при построении трехзначной логики Д.А. Бочвар ввел понятие внешней функции.

Определение 11. Функция $f \in F$ называется *внешней*, если $f(x_1, \ldots, x_n) = 0$ или $f(x_1, \ldots, x_n) = 1$ для любого набора истинностных значений $x_1, \ldots, x_n$.

Пусть $\mathfrak{B}^4_{ex}$ множество всех внешних четырехзначных функций.

По аналогии с трехзначными внешними функциями [8, с. 399] имеет место следующая теорема:

Теорема 1. *Всякая внешняя функция $F(x_1, \ldots, x_n)$ из $\mathfrak{B}^4_{ex}$, тождественно не равная 0, представима единственным образом в виде совершенной дизъюнктивной J-нормальной формы (J-с.д.н.ф.).*

Алгоритм построения J-с.д.н.ф. четырехзначной внешней функции аналогичен указанному В.К. Финном для трехзначного случая в [8, с. 399].

Рассмотрим множество всех внешних четырехзначных функций $\mathfrak{B}^4_{ex}$. Перенумеруем множество всех n-членных наборов истинностных значений $(\alpha_1^{(j)}, \ldots, \alpha_n^{(j)})$, $j = 1, 2, \ldots, 4^n$. Каждому j-му набору поставим в соответствие функцию

$$K_j(x_1, \ldots, x_n) \leftrightharpoons J_{\alpha_1^{(j)}} x_1 \wedge J_{\alpha_2^{(j)}} x_2 \wedge \cdots \wedge J_{\alpha_n^{(j)}} x_n.$$

Пусть $(\alpha_1^{(i_1)}, \ldots, \alpha_n^{(i_1)}), \ldots, (\alpha_1^{(i_s)}, \ldots, \alpha_n^{(i_s)})$ суть все наборы такие, что $f(\alpha_1^{(j)}, \ldots, \alpha_n^{(j)}) = 1$, $j = i_1, \ldots, i_s$. Тогда очевидно, что $f(x_1, \ldots, x_n) = K_{i_1}(x_1, \ldots, x_n) \vee \cdots \vee K_{i_s}(x_1, \ldots, x_n)$. Функция $f(x_1, \ldots, x_n) = K_{i_1}(x_1, \ldots, x_n) \vee \cdots \vee K_{i_s}(x_1, \ldots, x_n)$ называется J-с.д.н.ф. четырехзначной внешней функции.

Приведем пример построения J-с.д.н.ф. для некоторой произвольно выбранной внешней четырехзначной функции.

Пример. Пусть дана некоторая функция $*$ из $\mathfrak{B}^4_{ex}$, которая определяется следующей таблицей:

$*$	1	$2/3$	$1/3$	0
1	1	0	0	0
$2/3$	1	0	0	0
$1/3$	1	0	0	0
0	0	0	0	0

Тогда, используя приведенный выше алгоритм построения J-с.д.н.ф., имеем:

$$x * y := (((J_1(x) \wedge J_1(y)) \vee (J_{2/3}(x) \wedge J_1(y))) \vee (J_{1/3}(x) \wedge J_1(y))).$$

Далее, справедлива следующая теорема:

Теорема 2. $[\{\neg_4, \to_3\}] = [\mathfrak{B}^4_{ex}]$.

Доказательство теоремы следует из:

(1) того факта, что всякая внешняя функция, тождественно не равная 0, представима единственным образом в виде J-с.д.н.ф. (теорема 1);

(2) алгоритма построения J-с.д.н.ф. любой внешней функции. То есть для построения J-с.д.н.ф. некоторой внешней функции посредством функций из некоторого множества достаточно, чтобы это множество функций содержало все J-операторы и функции, соответствующие C-расширяющим конъюнкции и дизъюнкции[3];

[3] Ограничение области определения функций, соответствующих таким конъюнкции и дизъюнкции, подмножеством $\{0, 1\}$ множества V_4 есть классические $min(x, y)$ и $max(x, y)$.

(3) следующих тождеств, принимая во внимание, что $[\{\neg_4, \to_3\}] = [\{\neg_3, \to_4\}]$:

$J_0(x) = \neg_4(\neg_4 x \to_3 x)$,

$J_1(x) = \neg_3(x \to_4 \neg_3 x)$,

$J_{2/3}(x) = \neg_3(\neg_4 x \to_3 \neg_3 x)$,

$J_{1/3}(x) = \neg_3(\neg_3 x \to_3 \neg_4 x)$,

$x \vee y = \neg_4 x \to_3 y$,

$x \wedge y = \neg_4(x \to_3 \neg_4 y)$.

□

Таким образом, приведено доказательство того, что логические матрицы $\mathfrak{M}_{15}$ и $\mathfrak{M}_{16}$ с функциональной точки зрения соответствуют классу всех внешних четырехзначных функций.

Полученный результат можем распространить и на другие логические системы, логические матрицы которых функционально эквивалентны $\mathfrak{M}_{15}$ ($\mathfrak{M}_{16}$). Как оказалось, таких логик в литературе представлено несколько.

Это логика **V** [17], представляющая собой формализацию некоторых интуиций Н.А. Васильева, которые были им положены в основание его воображаемой логики. В [17, p. 208] приведена логическая матрица, соответствующая **V**:

$$\mathfrak{M}_{\mathbf{V}} = \langle \{0, 1/3, 2/3, 1\}, \neg_4, \to_3, \vee_{\mathbf{V}}, \wedge_{\mathbf{V}}, \{1\} \rangle,$$[4]

где таблицы для $\neg_4$ и $\to_3$ приведены на стр. 78, а $\vee_{\mathbf{V}}$ и $\wedge_{\mathbf{V}}$ определяются так:

$\vee_{\mathbf{V}}$	1	2/3	1/3	0
1	1	1	1	1
2/3	1	1	1	1
1/3	1	1	0	0
0	1	1	0	0

$\wedge_{\mathbf{V}}$	1	2/3	1/3	0
1	1	1	0	0
2/3	1	1	0	0
1/3	0	0	0	0
0	0	0	0	0

Очевидно, что $\mathfrak{M}_{15}$ и $\mathfrak{M}_{\mathbf{V}}$ функционально эквивалентны. Кроме того, в $\mathfrak{M}_{\mathbf{V}}$ в качестве исходных матричных операций достаточно использовать $\neg_4$ и $\to_3$, а $\vee_{\mathbf{V}}$ и $\wedge_{\mathbf{V}}$ могут введены по определению[5]:

[4] Здесь для удобства используем нашу нотацию: истинностное значение $\overline{1}$ из [17] в нашем обозначении — 2/3 и истинностное значение $\overline{0}$ — 1/3.

[5] Учитывая ранее приведенное определение: $\neg_4 x := x \to_4 \neg_3(x \to_4 x)$.

$x \vee_{\mathbf{V}} y := \neg_3 x \to_3 y,$

$x \wedge_{\mathbf{V}} y := \neg_3(x \to_3 \neg_3 y).$

Исчисление **V** [17, p. 207] содержит весь позитивный фрагмент классической логики $\mathbf{C}_2$ плюс следующую аксиому для отрицания $(\sim A \to B) \to ((\sim A \to \sim B) \to A)$ с ограничением на A и B: A и B — молекулярные формулы, т. е. не являются атомарными (пропозициональными переменными). Доказывается, что если убрать это ограничение, то получим аксиоматизацию классической логики.

В [15] появляется точно такая же матрица для логики $\mathbf{I}_0$, построено секвенциальное исчисление генценовского типа. В работе [6] дано определение операций, погружающих классическую пропозициональную логику в $\mathbf{I}_0$.

В статье [11] построены иерархии паранепротиворечивых, параполных и паранормальных логик. Авторы характеризуют эти иерархии посредством обобщения т. н. семантики объединения (*society semantic*). В связи с нашей темой интересен четырехзначный случай иерархии паранормальных логик $\mathbf{I}^n\mathbf{P}^k$ — логика $\mathbf{I}^2\mathbf{P}^2$, имеющая следующую матрицу:

$\mathfrak{M}_{\mathbf{I}^2\mathbf{P}^2} = \langle \{0, 1/3, 2/3, 1\}, \neg_4, \to_3, \{1, 2/3\} \rangle.$

Обратим внимание, что это в точности матрица $\mathfrak{M}_{15}$.

Интересно, что в работах в связи с логиками **V** и $\mathbf{I}_0$ авторы так или иначе устанавливают связь этих систем с классической пропозициональной логикой. При нашем подходе явно демонстрируется связь этих систем с классической логикой на функциональном уровне: так, матрицы $\mathfrak{M}_{15}$ и $\mathfrak{M}_{16}$ получены как результат комбинирования изоморфов классической логики, и выше показано, что все эти матрицы $\mathfrak{M}_{15}$, $\mathfrak{M}_{16}$, $\mathfrak{M}_{\mathbf{V}}$, $\mathfrak{M}_{\mathbf{I}_0}$ и $\mathfrak{M}_{\mathbf{I}^2\mathbf{P}^2}$ функционально эквивалентны и задают класс всех внешних четырехзначных функций.

Возникает вопрос: если будем понимать под логикой теорию, т. е. класс тавтологий в соответствующей матрице, как в этом случае будут соотноситься рассматриваемые нами системы? Таким образом, достаточно выяснить, один ли класс тавтологий задают матрицы $\mathfrak{M}_{15}$, $\mathfrak{M}_{16}$ и $\mathfrak{M}_{\mathbf{V}}$.

Этому вопросу будет посвящен следующий раздел.

3.2. Классы тавтологий

Учитывая тот факт, что матрицы $\mathfrak{M}_{15}$ и $\mathfrak{M}_{\mathbf{V}}$ отличаются только классом выделенных значений (в $\mathfrak{M}_{15}$ $D = \{1, 2/3\}$ и в $\mathfrak{M}_{\mathbf{V}}$ $D = \{1\}$) и то, что операции в матрицах $\mathfrak{M}_{15}$, $\mathfrak{M}_{16}$ и $\mathfrak{M}_{\mathbf{V}}$ определяются внешними функциями, понятно, что во всех этих матрицах тавтологией будет формула, при любой оценке принимающая значение 1. Поэтому очевидно, что матрицы $\mathfrak{M}_{15}$ и $\mathfrak{M}_{\mathbf{V}}$ задают один и тот же класс тавтологий, и достаточно рассмотреть вопрос о соотношении классов тавтологий в матрицах $\mathfrak{M}_{15}$ и $\mathfrak{M}_{16}$.

Теорема 3. $E(\mathfrak{M}_{15}) = E(\mathfrak{M}_{16})$.

Доказательство теоремы следует из факта изоморфизма матриц $\mathfrak{M}_{15}$ и $\mathfrak{M}_{16}$ (см. [18, Ch.3]). Покажем изоморфизм матриц относительно отображения ϕ.

Определим отображение ϕ следующим образом:

$\phi(0) = 0$, $\phi(1) = 1$, $\phi({}^1/_3) = {}^2/_3$ и $\phi({}^2/_3) = {}^1/_3$.

Далее несложно проверить, что

$\phi(x \to_3 y) = \phi(x) \to_4 \phi(y)$,

$\phi(\neg_4 x) = \neg_3(\phi(x))$,

$x \in \{1, {}^2/_3\}$ т.т.т. $\phi(x) \in \{1, {}^1/_3\}$.

Таким образом, отображение ϕ сохраняет матричные операции и класс выделенных значений D. Поэтому ϕ — матричный гомоморфизм. В то же время отображение ϕ — биективно, а любой биективный гомоморфизм есть изоморфизм. □

Таким образом, любая логическая матрица, функционально эквивалентная классу всех внешних четырехзначных функций, задает один класс тавтологий, независимо от выбора класса выделенных значений[6]. Этот класс определяет паранормальную логику.

3.3. Сравнение отношений следования

Рассмотрим вопрос о соотношении логических матриц $\mathfrak{M}_{15}$, $\mathfrak{M}_{16}$, $\mathfrak{M}_{\mathbf{V}}$, $\mathfrak{M}_{\mathbf{I}_0}$ и $\mathfrak{M}_{\mathbf{I}^2\mathbf{P}^2}$ по классам правильных заключений, порождаемых ими.

Итак, из того, что матрицы $\mathfrak{M}_{15}$ и $\mathfrak{M}_{\mathbf{I}^2\mathbf{P}^2}$ совпадают, и из факта изоморфизма матриц $\mathfrak{M}_{15}$ и $\mathfrak{M}_{16}$ (см. доказательство теоремы 3 и [18, Ch.3]) имеем:

$$Cn(\mathfrak{M}_{15}) = Cn(\mathfrak{M}_{16}) = Cn(\mathfrak{M}_{\mathbf{I}^2\mathbf{P}^2}).$$

Также, поскольку матрицы $\mathfrak{M}_{\mathbf{V}}$ и $\mathfrak{M}_{\mathbf{I}_0}$ совпадают, то

$$Cn(\mathfrak{M}_{\mathbf{V}}) = Cn(\mathfrak{M}_{\mathbf{I}_0}).$$

[6]При этом, если рассматриваемые матрицы построены для разных пропозициональных языков, очевидно, что в силу функциональной эквивалентности матриц имеется взаимнооднозначное соответствие между классами их тавтологий.

Далее, рассмотрим $Cn(\mathfrak{M}_{15})$ и $Cn(\mathfrak{M}_{\mathbf{V}})$. Оказалось, что по классам следований эти две матрицы имеют различные дедуктивные свойства.

$Cn(\mathfrak{M}_{15})$	$Cn(\mathfrak{M}_{\mathbf{V}})$
$p, p \to_3 q \models q$	$p, p \to_3 q \not\models q$
$p, \neg_4 p \not\models q$	$p, \neg_4 p \models q$
$q \not\models p, \neg_4 p$	$q \not\models p, \neg_4 p$

Как ранее было указано на стр. 77, могут быть использованы различные критерии для паранепротиворечивости и параполноты. Так, если мы рассматриваем логику с точки зрения отношения следования, парасвойства определяются в терминах эксплозивности и имплозивности. Обратим внимание, что в матрице $\mathfrak{M}_{\mathbf{V}}$ отношение следования является эксплозивным, в то время как в $\mathfrak{M}_{15}$ оно таковым не является. Таким образом, возникает вопрос о соотношении различных критериев для парасвойств. Так, например, для паранепротиворечивости дедуктивный критерий более сильный и предполагает выполнение «импликативно-негативного» критерия, в то время как обратное не обязательно (как это видно в случае с матрицей $\mathfrak{M}_{\mathbf{V}}$). В работе [17] логика **V** рассматривается как теория, поэтому свойства отношения логического следования не принимаются во внимание.

Обратим внимание и на другие некоторые свойства матрицы $\mathfrak{M}_{\mathbf{V}}$. Так, видим, что правило *modus ponens* в общем виде не сохраняет выделенное значение[7], т. е. матрица $\mathfrak{M}_{\mathbf{V}}$ не является нормальной в смысле Лукасевича–Тарского [14, p. 134]. В данном случае оказывается достаточным, чтобы правило *modus ponens* сохраняло тавтологию.

Однако заметим, что различие в классах правильных заключений, порождаемых матрицами $\mathfrak{M}_{15}$ и $\mathfrak{M}_{\mathbf{V}}$, имеет место только на пропозициональном (литеральном) уровне, поскольку здесь оказывается существенным выбор класса выделенных значений. И, наоборот, поскольку в обеих матрицах одни и те же операции и они определяются внешними функциями, то уже в случае молекулярных формул все различия уходят. Так, на молекулярном уровне отношение логического следования в обеих матрицах будет эксплозивным, т. е. $A, \neg A \models B$ (форумула A — не пропозициональная переменная), поскольку невозможна ситуация, когда $v(A) \in D$ и $v(\neg A) \in D$.

С дедуктивной точки зрения отрицание $\neg_4$ обладает разными свойствами в $\mathfrak{M}_{15}$ и $\mathfrak{M}_{\mathbf{V}}$. Здесь существенным является выбор класса выделенных значений. Так, в $\mathfrak{M}_{15}$ отрицание $\neg_4$ является паранепротиворечивым на пропозициональном уровне, поскольку не формирует противоречия, т. е.

[7] Подробно о различении формулировок правила *modus ponens* относительно сохранения выделенного значения и сохранения тавтологии см. в [3, с. 101].

имеется такое значение, когда $v(p) \in D$ и $v(\neg p) \in D$, в то время как в $\mathfrak{M}_{\mathbf{V}}$ оно таковым не является, как следствие этого, в $\mathfrak{M}_{\mathbf{V}}$ отношение следования эксплозивно. Однако, в силу того, что матрица $\mathfrak{M}_{\mathbf{V}}$ не является нормальной в смысле Лукасевича–Тарского, по *modus ponens* из противоречия не может быть выведено все что угодно.

4. Заключение

Нами был рассмотрен класс четырехзначных паранормальных логик, функционально эквивалентных между собой и представляющих класс всех внешних четырехзначных функций. Некоторые логики из данного класса были получены разными авторами и имеют свою мотивацию. При этом так или иначе ими затрагивался вопрос об отношении этих систем к классической логике. В нашем исследовании [5, § 3.1] мы получили две паранормальные логические матрицы как результат комбинирования изоморфов классической логики, выделенных в четырехзначной логике Бочвара $\mathbf{B}_4$. Таким образом, видна связь этих систем с классической логикой на функциональном уровне.

Далее, в результате изучения свойств данного класса четырехзначных литеральных паранормальных логик установлено, что по классу тавтологий все системы эквивалентны. Таким образом, различные логические матрицы задают одну и ту же паранормальную теорию. Исследование свойств отношения логического следования в рассматриваемых паранормальных матрицах показало дедуктивные различия между ними. Здесь выявлено две группы матриц: $Cn(\mathfrak{M}_{15}) = Cn(\mathfrak{M}_{16}) = Cn(\mathfrak{M}_{\mathbf{I}^2\mathbf{P}^2})$ и $Cn(\mathfrak{M}_{\mathbf{V}}) = Cn(\mathfrak{M}_{\mathbf{I}_0})$. Установлено, что во второй группе матриц отношение следования эксплозивно, однако в силу того, что правило *modus ponens* не сохраняет выделенное значение, из противоречия не может быть выведено все что угодно.

Литература

[1] *Бочвар Д.А.* Об одном трехзначном исчислении и его применении к анализу парадоксов классического расширенного функционального исчисления // Математический сборник. 1938. Вып. 4. № 2. С. 287–308.

[2] *Бочвар Д.А., Финн В.К.* О многозначных логиках, допускающих формализацию анализа антиномий. 1 // Исследования по математической лингвистике, математической логике и информационным языкам М.: Наука, 1972. С. 238–295.

[3] *Девяткин Л.Ю., Преловский Н.Н., Томова Н.Е.* В границах трехзначности. М.: ИФ РАН, 2015. 136 с.

[4] *Девяткин Л.Ю.* Неклассические модификации многозначных матриц классической логики. Ч. I // Логические исследования. 2016. Т. 22. № 2. С. 27–58.

[5] *Карпенко А.С., Томова Н.Е.* Трехзначная логика Бочвара и литеральные паралогики. М.: ИФ РАН, 2016. 110 с.

[6] *Попов В.М.* Об одной паранормальной логике // Смирновские чтения: Материалы 4-й Международ. конф. М.: ИФ РАН, 2003. С. 46–49.

[7] *Попов В.М.* Секвенциальная аксиоматизация паранормальной логики PContPComp // Логические исследования. Т. 17. М., 2011. С. 240–245.

[8] *Финн В.К.* Аксиоматизация некоторых трехзначных исчислений высказываний и их алгебр // Философия и логика / Под ред. П.В. Таванца и В.А. Смирнова. М.: Наука, 1974. С. 398–438.

[9] *Arieli O., Avron A.* Four-valued paradefinite logics // Studia Logica. 2017. Vol. 105. No. 6. P. 1087–1122.

[10] *Ciuciura J.* A weakly-intuitionistic logic I1 // Logical Investigations. 2015. Vol. 21. No. 2. P. 53–60.

[11] *Fernández V.L., Coniglio M.E.* Combining valuations with society semantics // Journal of Applied Non-Classical Logics. 2003. Vol. 13(1). P. 21–46.

[12] *Jaśkowski S.* A propositional calculus for inconsistent deductive systems // Studia Logica. 1969. Vol. 24. P. 143–157.

[13] *Lewin R.A., Mikenberg I.F.* Literal-paraconsistent and literal-paracomplete matrices // Math. Log. Quart. 2006. Vol. 52. No. 5. P. 478–493.

[14] *Łukasiewicz J., Tarski A.* (1930). Investigations into the sentential calculus // *Łukasiewicz J.*, Selected Works, North-Holland & PWN, Amsterdam & Warszawa, 1970. P. 131–152.

[15] *Popov V.M.* On the logics related to A. Arruda's system V1 // Logic and Logical Philosophy. 1999. Vol. 7. P. 87–90.

[16] *Priest G., Tanaka K., Weber Z.* Paraconsistent logic // Stanford Encyclohdia of Philosophy. 2013. URL: http://plato.stanford.edu/entries/logic-paraconsistent (дата обращения: 23.03.2018).

[17] *Puga L.Z., Da Costa N.C.A.* On the imaginary logic of N. A. Vasiliev // Z. Math. Logik Grundl. Math. 1988. Vol. 34. P. 205–211.

[18] *Wójcicki R.* Theory of Logical Calculi: Basic Theory of Consequence Operations. Dordrecht: Kluwer, 1988. 474 p.

Natalya E. Tomova

On Properties of a Class of Four-valued Paranormal Logics

Tomova Natalya Evgen'evna
Institute of Philosophy of Russian Academy of Sciences.
12/1 Goncharnaya Str., Moscow, 109240, Russian Federation.
E-mail: natalya-tomova@yandex.ru

The paper is devoted to the results obtained during the investigation of a class of four-valued literal paranormal logics, i.e. logic, which are simultaneously paraconsistent and parapcomplete at the level of literals; that is, formulas that are propositional letters or their iterated negations. Paraconsistent logic allows the possibility of operating with conflicting information, parapcomplete logic allows us to build reasoning in conditions of incomplete information. With both types of uncertainty, with both inconsistent and incomplete information, paranormal systems work. In [5] the class of four-valued literal paralogics obtained by combining isomorphs of classical logic, which are contained in four-valued logic of Bochvar $\mathbf{B}_4$, is considered. As a result, together with the isomorphs themselves, logical matrices that correspond to these logics form a ten-element upper semilattice with respect to the functional embedding of one matrice into another. In this paper we investigate the class of matrices that make up the supremum of the said semilattice. The matrices of this class have interesting functional properties, namely, they correspond to the class of all external four-valued functions. The paper also provides an algorithm for constructing a perfect disjunctive J-normal form of a four-valued external function. As it turned out, there are well-known logics in the literature that are functionally equivalent to the logics of the class in question. For example, one of them is the logic $\mathbf{V}$ [17], which is a formalization of intuitions of N.A. Vasilyev's imaginary logic of. Thus, we have considered the question of the correlation of all these systems both in the class of tautologies and in the class of valid consequence relations. As a result, it is proved that all systems are equivalent in the tautological class, but they differ in the properties of the consequence relation.

Keywords: four-valued paranormal logics, functional properties, external functions, tautologies, consequence relation

References

[1] Bochvar, D.A. "Ob odnom trekhznachnom ischislenii i ego primenenii k analizu paradoksov klassicheskogo rasshirennogo funktsional'nogo ischisleniya" [On a Three-Valued Logical Calculus and its Application to the Analysis of Contradictions], *Matematicheskii sbornik*, 1938, Vol. 4, No. 2, pp. 287–308. (In Russian)

[2] Bochvar, A.D., Finn, V.K. "O mnogoznachnyh logikah dopuskauzchih formalizaciu analiza antinomii. 1" [On many-valued logics admitting formalization of the analysis of antinomies. 1], in: *Issledovaniya po matematicheskoj lingvistike matematicheskoj logike i infomacionnym yazykam* [Studies in mathematical linguistics, mathematical logic and information languages]. Moscow: Nauka, 1972, pp. 238–295. (In Russian)

[3] Devyatkin, l.U., Prelovskiy, N.N., Tomova, N.E. *V granitsakh trekhznachnosti* [Within the limits of three-valuedness]. Moscow: IF RAN, 2015. 136 pp. (In Russian)

[4] Devyatkin, l.U. "Neklassicheskie modifikatsii mnogoznachnykh matrits klassicheskoi logiki. Ch. I" [Non-classical Modifications of Many-valued Matrices of the Classical Propositional Logic. Part I.], *Logical Investigations*, 2016, Vol. 22, No. 2, pp. 27–58. (In Russian)

[5] Karpenko, A.S., Tomova, N.E. *Trekhznachnaya Logika Bochvara i Literal'nye Paralogiki* [Bochvar's three-valued logic and literal paralogics]. Moscow: IF RAN, 2016. 110 pp. (In Russian)

[6] *Popov V.M.* "Ob odnoi paranormalnoi logike" [On one paranormal logic], in: Smirnov's Readings: Proceedings of the 4th International Conference. Moscow: IF RAN, 2003, pp. 46–49. (In Russian)

[7] *Popov V.M.* "Sekvencialnaja aksiomatizacija paranormalnoj logiki PContPComp" [Sequential axiomatization of paranormal logic PContPComp], *Logical Investigations*, 2011, Vol. 17, pp. 240–245. (In Russian)

[8] Finn, V.K. "Aksiomatozatziya nekotoryh trehznachnyh ischislenii vyskazyvanii i ih algebr" [An axiomatization of some three-valued logics and their algebras], in: *Filosofskaya logika* [Philosophical Logic], ed. by P.V. Tavanez and V.A. Smirnov. Moscow: Nauka, 1974, pp. 398–438. (In Russian)

[9] Arieli, O., Avron, A. "Four-valued paradefinite logics", *Studia Logica*, 2017, Vol. 105. No. 6, pp. 1087–1122.

[10] Ciuciura, J. "A weakly-intuitionistic logic I1", *Logical Investigations*, 2015, Vol. 21, No. 2, pp. 53–60.

[11] Fernández, V.L., Coniglio, M.E. "Combining valuations with society semantics", *Journal of Applied Non-Classical Logics*, 2003, Vol. 13(1), pp. 21–46.

[12] Jaśkowski, S. "A propositional calculus for inconsistent deductive systems", *Studia Logica*, 1969, Vol. 24, pp. 143–157.

[13] Lewin, R.A., Mikenberg, I.F. "Literal-paraconsistent and literal-paracomplete matrices", *Mathematical Logic Quarterly*, 2006, Vol. 52, No. 5, pp. 478–493.

[14] Łukasiewicz, J., Tarski, A. (1930). "Investigations into the sentential calculus", in: *Selected Works*, ed. by J. Łukasiewicz, North-Holland & PWN, Amsterdam & Warszawa, 1970, pp. 131–152.

[15] Popov, V.M. "On the logics related to A. Arruda's system V1", *Logic and Logical Philosophy*, 1999, Vol. 7, pp. 87–90.

[16] Priest, G., Tanaka, K., Weber, Z. "Paraconsistent logic", in: *Stanford Encyclohdia of Philosophy*. 2013 [http://plato.stanford.edu/entries/logic-paraconsistent, accessed on 23.03.2018].

[17] Puga, L.Z., Da Costa, N.C.A. "On the imaginary logic of N. A. Vasiliev", *Z. Math. Logik Grundl. Math.*, 1988, Vol. 34, pp. 205–211.

[18] Wójcicki, R. *Theory of Logical Calculi: Basic Theory of Consequence Operations*. Dordrecht: Kluwer, 1988. 474 pp.

Логические исследования
2018. Т. 24. № 1. С. 90–98
УДК 16

Logical Investigations
2018, Vol. 24, No. 1, pp. 90–98
DOI: 10.21146/2074-1472-2018-24-1-90-98

История логики
History of Logic

В.В. Воробьев

Стефан Александрийский как «наследник» Аммония *

Воробьев Валерий Владимирович
Русская христианская гуманитарная академия.
Российская Федерация, 191011, Санкт-Петербург, набережная реки Фонтанки, 15.
E-mail: voiborov@mail.ru

В работе рассмотрен комментарий философа поздней неоплатонической школы Стефана Александрийского (вторая половина 6 в. – начало 7 в. н. э.) на 9 главу «Об истолковании» Аристотеля. Стефан Александрийский предположительно был учеником Иоанна Филопона, одного из учеников Аммония Гермия (435/445–517-526 гг.), и особого внимания историков философии до сих пор не привлекал, хотя до нас дошли его сочинения по философии. Комментарий Стефана невелик по объему и по содержанию весьма близок к такому же комментарию Аммония.

Сделан и проанализирован перевод соответствующего фрагмента текста Стефана. Отмечено, что он принимает так называемую традиционную, или стандартную, интерпретацию проблемы «завтрашнего морского сражения». Её смысл, в самом общем виде, состоит в том, что существуют различия при определении истинности высказываний, имеющих временные характеристики. Высказывания о событиях прошлого и настоящего мы считаем истинными или ложными, а высказывания о случайных событиях будущего имеют иной истинностный статус. Стефан (вслед за Аммонием) для характеристики таких высказываний вводит термин «определенно (horismenos) истинно».

Переведен также текст, содержащий известный «парадокс жнеца». Этот парадокс упоминается многими античными авторами, но до нас он дошел только в изложении Аммония, Стефана и еще одного анонимного автора. В издании Диогена Лаэртского имеется примечание, в котором содержится перевод «жнеца». Однако этот перевод, к сожалению, сокращенный, вследствие чего очень искаженный. Парадокс «Жнец» в последнее время привлекает внимание современных авторов и требует дальнейшего исследования.

Ключевые слова: «Об истолковании» Аристотеля, Аммоний, Стефан, парадокс жнеца

Современные исследователи [10 и др.] достаточно уверенно утверждают, что в период византийской истории Александрии, к началу VI в. н. э.

* Исследование осуществляется при содействии РФФИ, проект № 18-011-00669.

там уже сформировалась настоящая «комментаторская» школа неоплатоников, основателем и главой которой был Аммоний, «чьи лекции по Платону и Аристотелю повторяли ещё два поколения преподавателей» [9, p. 273]. Школа по составу участников к этому времени стала уже в основном христианской (хотя преподавание ещё велось в ней вполне в «языческом» стиле), и к ней в той или иной степени были причастны (или прямо участвовали) такие известные в качестве комментаторов Аристотеля философы, как Иоанн Филопон, Олимпиодор, Симпликий, Дамаский и ряд других. Аммоний же «дал модель для метода интерпретации Аристотеля и Платона», а «его комментарий на "Об истолковании" был особенно важен и послужил источником для Стефана и других комментаторов» [15, Ammonius, part 4].

Стефан Александрийский (вторая половина 6 в. – начало 7 в. н. э.) был учеником учеников Аммония Гермия (435/445 – 517-526 гг.). Особого внимания историков философии он до сих пор не привлекал несмотря на то, что сохранились его сочинения по философии (комментарии к Аристотелю и Порфирию), опубликованные в известном берлинском издании (Commentaria in Aristotelem Graeca). Высокий уровень научных знаний Стефана, по мнению ряда исследователей, был подтвержден, когда византийский император Ираклий (годы правления 610–641) пригласил его для преподавания в столице. См. [1, с. 757]; [10, p. 437–438]. Однако этот факт, а также принадлежность ему сочинений по медицине, астрономии, алхимии, автором которых он, возможно, был, в некоторых последних исследованиях подвергаются сомнению. См. [13, p. 541, 552]. Тем не менее то, в чем нет сомнений, — это составление им комментария на «Об истолковании» Аристотеля. «К сожалению, не сохранилось ни одного комментария, написанного в промежутке времени между комментариями Стефана и Фотия (вторая половина IX в.)» [1, с. 757]. На основании этого (и некоторых других данных) делается предположение, что Стефан был учеником И. Филопона, который тоже написал не дошедший до нас соответствующий комментарий (о чем упоминают арабские авторы, а также М. Пселл), см. [13, p. 546] «или издал прослушанные им комментарии Аммония к сочинениям Аристотеля» [1, с. 696].

Надо сказать, что комментарий Стефана невелик по объему и, например, интересующей нас прежде всего 9 главе отведено всего 6 страниц текста, при этом содержание (как уже сказано) сильно зависит от соответствующего комментария Аммония. Это, естественно, не удивительно, учитывая ту роль, которую сыграл Аммоний в развитии и дальнейшей разработке методов комментирования в позднем неоплатонизме, с идеями которого, прежде всего с основополагающей идеей объединить, так сказать, «синтезировать», учения Платона и Аристотеля, были связаны практически все вышеупомянутые мыслители.

Отметим также, что и Аммоний, и (соответственно) Стефан придерживаются (как можно видеть из текстов) так называемой традиционной, или стандартной, интерпретации проблематики 9 главы, иногда обозначаемой как «завтрашнее морское сражение». В самом общем виде, проблема, поставленная Аристотелем, состоит в том, что для предотвращения фаталистических выводов необходимо признать существование различий при определении истинности высказываний, имеющих временные характеристики. Высказывания о событиях прошлого и настоящего мы считаем истинными или ложными, высказывания о случайных событиях будущего имеют другой статус. Аммоний (и Стефан) в этой связи ввели термин «определенно (horismenos) истинно».

В начале комментария Стефан излагает обычные отношения между высказываниями, как они устанавливаются по логическому квадрату. Затем проводится сходное с имеющимся в комментарии Аммония отделение истинности единичных высказываний, которые относятся к настоящему и прошлому, от истинности случайных высказываний, относящихся к будущему: «те из единичных [высказываний], которые [говорят] о настоящем и прошлом, опять одинаково определенно (horismenos) всегда разделяют [принимают] истину и ложь, в отношении же будущего времени сомнительно, чтобы они одинаково определенно (horismenos) разделяли [принимали] истину и ложь. Если же это [допустить, то это] приведет к нелепости, возможность разрушится и всё станет происходить по необходимости. Вот таково положение, которое здесь выдвинул Аристотель, оно и богословское, так как сам предмет исследования: всё ли происходит по необходимости или что-то — по необходимости, а что-то — нет. Но [оно] также и фюсиологическое [природное], ибо мы исследуем вещи и природу возникающих и погибающих, имеют ли они такую природу, что возникают по необходимости, или такую, что иногда возникают, а иногда — нет. [Оно] и логическое, ибо это и есть предмет исследования, поскольку речь идет о высказываниях [посылках], а их исследование есть задача логическая. Предмет исследования не является чуждым и этике, ведь если всему сущему происходить необходимо, то не будет нужды заботиться о добродетели или предотвращать зло.

И то, как Аристотель сомневается и как разрешает [сомнения], мы узнаем по аристотелевским словам, приводя извне [возражения], противоположные для опровержения двух эпихейрем [рассуждений], из которых одно логическое [словесное], пожалуй, очевидное, а другое связанное с трудностями» [16, p. 34, 18–36]. И Стефан далее излагает «логическое рассуждение», в качестве которого он принимает аргумент «Жнец». Можно, на наш взгляд, использовать здесь и термин «аргумент», и термин «парадокс», почти дословно повторяя соответствующий текст из комментария

Аммония. Современные исследователи рассматривают рассуждения (о парадоксе «Жнец») Стефана и Аммония как текст, заимствованный ими из некоторого значительно более раннего источника, который до нас не дошел, и имеются только его упоминания. В частности, история «приобретения» этого «раннего источника» основоположником Стои Зеноном (то есть еще в IV–III в. до н. э.) достаточно курьезна — «А когда один диалектик показал ему семь диалектических приемов для софизма "Жнец", он спросил, сколько тот за них хочет, и, услышав: "Сто драхм", заплатил двести; такова была в нем страсть к знаниям» (См. [2, VII, 25]). «Логическое же [рассуждение] проводится посредством [описания] таких наших действий. "Если ты будешь жать", говорится в нем, "то неверно, что ты, может быть, будешь жать и может быть, не будешь жать, [и] но ты в любом случае будешь жать". И в свою очередь утверждение [такое]: Если ты не будешь жать, неверно, что ты, может быть, будешь жать и, может быть, не будешь жать, но ты в любом случае не будешь жать. Ведь [выражение] "то, что в любом случае" вводит необходимость, а введя необходимость, мы исключим возможность. На это, конечно, легко возразить, что сам предмет исследования [считается признанным]. Действительно, положение "если ты будешь жать" еще не установлено, ведь оно само и есть предмет исследования. А всякое положение устанавливается утвердительным суждением. Кто же не видит, что если "я буду жать", то "всегда буду жать"? Но откуда ясно, что "я буду жать"? Это еще не установлено утвердительным суждением. В этих [словах] одна [первая] эпихейрема» [16, p. 35, 1–10]. Отметим, что текст самого «Жнеца» у Стефана практически совпадает с таковым у Аммония, однако объяснения, почему результатом данного рассуждения является «исключение возможности», различаются. Затем Стефан переходит к изложению второго рассуждения, и здесь он как добросовестный последователь Аммония сразу после «Жнеца» приводит (как и Аммоний в своем комментарии) аргументацию, которая должна уточнить статус высказываний о будущих случайных событиях, но уже в специфическом и важном для определенных аспектов христианской идеологии смысле. «Другая же [эпихейрема] выдвигается так. Божество, говорит он, имеет или не имеет знание о будущем. Конечно, высказать, (что [бог] не имеет [знания] — это нечестивейше и невозможно. Если же мы скажем, что [бог] имеет [знания], но неопределенные, то это будет не очень далеко от нечестия: ибо чем отличается наше знание? Когда действия те же самые, ясно, что и сущности те же самые» [16, p. 35, 10–15]. Здесь мы оставим тему божественного предвидения и предзнания (широко обсуждавшуюся впоследствии средневековыми мыслителями), поскольку это требует отдельного рассмотрения.

В отношении к аргументу (парадоксу) «Жнец» следует отметить, что парадоксы (Аристотель использовал термин «aporia», мы используем термины «аргумент» или «парадокс», считая их взаимозаменимыми, см. [16, p. 33, 34]) были очень распространенными в античной философии (как, впрочем, часто и в дальнейшем ходе её развития) способами постановки проблем и обоснования принимаемых решений. Вспомнить хотя бы, сколько трудных вопросов возникло таким образом в истории мировой философии. См., например, [7], где подробно описаны двадцать четыре известных парадокса, начиная с Анаксимандра, включая «парадокс лжеца» и вплоть до парадоксов Рассела и Куайна. Аргумент «жнец» привлекал до сих пор меньшее внимание, чем другие темы, связанные с трактовкой алетических модальностей, овремененных высказываний и проблемой статуса случайных высказываний о будущем. Возможно, это связано с тем, что соответствующий текст («Жнец») и даже упоминание о нем отсутствуют у Аристотеля.

В примечаниях к русскому переводу Диогена Лаэртского имеется и перевод «Жнеца» (со ссылкой на Аммония). К сожалению, перевод этот сокращенный и очень искаженный. Для того чтобы это увидеть, процитируем софизм (как названо это рассуждение): «Если ты жнешь, то жнешь, а не “может быть, жнешь, может быть, нет”; если не жнешь, то не жнешь, а не “может быть, не жнешь, может быть жнешь”; стало быть, никакого “может быть” вообще не существует, и всё совершается только с необходимостью» [2, с. 485–486]. В таком виде «Жнец» становится вполне непонятным. И утверждение об отсутствии в нашей современной литературе сведений об этом парадоксе тем самым объясняется.

Относительно недавно появилась статья [12], в которой аргумент («парадокс») «Жнец» рассматривается в связи с даже более известной темой («Главный аргумент» Диодора). Автор при этом ссылается на работы G. Seel (см. [5]) «Аргумент *жнец* обычно появляется в дискуссиях о детерминизме и истинности предсказаний о будущих случайных событиях и часто сопровождается двумя другими аргументами — *Ленивым аргументом [Lazy Argument]* и *Главным аргументом [Master Argument]*» [12, p. 361]. Связь этих известных текстов объясняется тем, что они используются для доказательства детерминистских утверждений в философии стоиков (а ещё раньше — мегариков, детерминизм которых был ещё более строгим).

Марко пишет, что упоминания «Жнеца» встречаются в античных текстах (Диоген Лаэртский, Плутарх, Лукиан и др.), но развернутое изложение есть только у Аммония, Стефана и ещё в одном анонимном трактате. При этом содержание посылок во всех текстах практически совпадает, терминология одинакова, и эти посылки, видимо, взяты из одного общего источника (возможно, из соответствующего утерянного комментария Порфирия) [12, p. 363–365].

Затем В. Марко подробно рассматривает структуру рассуждения, обращая особое внимание на то, как могли бы раскрывать его содержание представители античных философских школ, которые использовали аргумент «Жнец» в обосновании своих модальных понятий, а это прежде всего мегарики и стоики. Важнейшее значение имеет трактовка таких компонентов аргумента, как «takha» («может быть») и «pantos» («в любом случае»), которые, по мнению автора, «могут быть интерпретированы несколькими разными способами» [12, p. 385].

В этой статье с использованием элементов современной логической техники строится несколько вариантов «Жнеца». Вывод автора состоит в том, что «современная интерпретация на основе подхода в работе Г. Зееля приводит к логически верному заключению» [ibid.]. В другой реконструкции наиболее близким к «Жнецу» умозаключением является «простая конструктивная дилемма», но её использование требует дополнительной «обработки и подгонки» посылок. Первая посылка будет в этом случае выглядеть так: «p не имплицирует (возможно p и возможно $-p$), но имплицирует (в любом случае p)» [ibid.].

И, видимо, как результат всего этого длительного обсуждения возможных интерпретаций «Жнеца» автор пишет: «Кажется, что тот торговец-диалектик продал аргумент Зенону с неполным руководством по интерпретации и удержал некоторые из ключей к нему у себя» [ibid.].

Парадокс «Жнец» в последнее время привлекает внимание современных авторов, и текстуальное исследование этой темы и связанной с нею более широкой проблематики византийской философии и логики, безусловно, является перспективным направлением дальнейшей работы.

Литература

[1] Греческая философия. Т. 2. / Под ред. М. Канто-Спербер. М.: Греко-лат. каб. Ю.А. Шичалина, 2008. 490 с.

[2] *Диоген Лаэртский.* О жизни, учениях и изречениях знаменитых философов. М., 1986.

[3] Ammonius in Aristotelis De Interpretatione Commentarius. Commentaria in Aristotelem Graeca IV, 5 / Ed. by A. Busse. Berlin, 1897.

[4] Ammonius On Aristotle's On Interpretation 9 with Boethius On Aristotle's On Interpretation 9 / Trans. by D. Blank, N. Kretzmann. London. Ithaca, 1998.

[5] Ammonius and the Seabattle. Texts, Commentary and Essays / Ed. by G. Seel. W. de Gruyter. Berlin. N. Y., 2001. 312 p.

[6] Aristotle Transformed. The Ancient Commentators and Their Influence / Ed. by R. Sorabji. N. Y., 1990.

[7] A Brief History of the Paradox: Philosophy and the Labyrinths of the Mind. Oxford, 2003.

[8] Byzantine Philosophy and its Ancient Sources / Ed. by K. Ierodiakonou. Oxford, 2002.

[9] The Cambridge history of later Greek and early Medieval philiosophy. Cambridge, 1967.

[10] Encyclopedia of philosophy / Ed. by P. Edwards. Vol. 1. N. Y., 1967.

[11] *Griffin M.* Ammonius and the Alexandrian School. Ch. 20 // Brill's Companion to the Reception of Aristotle in Antiquity / Ed. by A. Falcon. Brill, 2016. P. 1–19.

[12] *Marko Vladimir.* Some Sketchy Notes on the Reaper Argument // Organon F: Medzinárodný Časopis Pre Analytickú Filozofiu. 2012. Vol. 19(3). P. 361–387.

[13] *Roueche M.* A philosophical portrait of Stephanos the Philosopher // *Aristotle.* Re-interpreted. New Findings on Seven Hundred Years of the Ancient Commentators. Bloomsbury Publishing, 2016. P. 542–563.

[14] *Sorabji R.* The Philosophy of the Commentators, 200–600 AD // Logic and metaphysics. Cornell University Press, 2005.

[15] The Stanford Encyclopedia of Philosophy / Ed. by Edward N. Zalta. URL: http://plato.stanford.edu/ (дата обращения: 08.04.2018).

[16] Stephani in librum Aristotelis De Interpretatione commentarium // Commentaria in Aristotelem Graeca, vol. XVIII, pars III, Berolini, MDCCCLXXXV.

Valeriy V. Vorobyev

Stephanus Alexandrian Is a “Successor” of Ammonius *

Vorobyev Valeriy Vladimirovich
Russian Christian Humanitarian Academy,
15, Fontanka River Front,
Saint Petersburg, 191011, Russian Federation.
E-mail: `voiborov@mail.ru`

In this paper the author analyzed the commentary on Aristotle’s Chapter 9 of “De Interpretatione” by Stephanus Alexandrian (the second half of VI – first half of VII c.) — the philosopher of late neoplatonic school. Stephanus Alexandrian was supposed to be the pupil of Johannes Philoponos who was one of Ammonius Hermiae‘s (435/445 – 517-526 ã.ã.) pupils and has not attracted special attention of philosophy historians till now though his philosophical works have survived. Stefanus‘ s commentary is not large and its content is quiet similar to Ammonius‘s commentary.

The corresponding fragment of Stephanus’s text was translated and analyzed. The author marks that Stephanus accepts the so called “traditional” or “standard” interpretation of the problem of “the sea battle tomorrow”. Generally speaking, its meaning consists in that there are differences in defining the truth of tensed propositions. We consider that propositions about past and present events are true or false but propositions about contingent future events have different truth values. Stefanus (followihg Ammonius) introduces the expression “definitely (horismenos) true” to characterize such propositions.

The Stephanus’s text containing the well known “reaper paradox” has been translated as well. This paradox was mentioned by many ancient authors, but it has survived only in the works of Ammonius, Stephanus and one more anonymous author. In Diogenes Laertius‘s edition there is the note which contains the reaper paradox translation. However this translation is very clipped that‘s why it is very misrepresented.

Lately the reaper paradox attracts attention of contemporary authors and requires further investigations.

Keywords: Aristotle’s “De Interpretatione”, Ammonius, Stephanus, Reaper Argument

References

[1] Canto-Sperber, M. (ed.) *Grecheskaya philosophiya* [Lives and Opinions of Eminent Philosophers], 2 Vols. Moscow, 2008, 490 pp. (In Russian)

[2] Laertskyi, Diogen. *O zhizni, ucheniah i izrecheniah znamenitih philosophov* [Greek philosophy]. Moscow, 1986. (In Russian)

* The paper is supported by Russian Foundation for Basic Research, project № 18-011-00669.

[3] "Ammonius in Aristotelis De Interpretatione Commentarius", in: *Commentaria in Aristotelem Graeca IV, 5*, ed. by A. Busse. Berlin, 1897.

[4] *Ammonius On Aristotle's On Interpretation 9 with Boethius On Aristotle's On Interpretation 9*, trans. by D. Blank, N. Kretzmann; London. Ithaca, 1998.

[5] Seel, G., Gruyter, de W. (ed.) *Ammonius and the Seabattle. Texts, Commentary and Essays*. Berlin, New York, 2001, 312 pp.

[6] Sorabji, R. (ed.) *Aristotle Transformed. The Ancient Commentators and Their Influence*. New York, 1990.

[7] *A Brief History of the Paradox: Philosophy and the Labyrinths of the Mind*. Oxford, 2003.

[8] Ierodiakonou, K. (ed.) *Byzantine Philosophy and its Ancient Sources*. Oxford, 2002.

[9] *The Cambridge history of later Greek and early Medieval philiosophy*. Cambridge, 1967.

[10] Edwards, P. (ed.) *Encyclopedia of philosophy*, Vol. 1. New York, 1967.

[11] Griffin, M. "Ammonius and the Alexandrian School. Ch. 20", in: A. Falcon (ed.), *Brill's Companion to the Reception of Aristotle in Antiquity*. Brill, 2016, p. 1–19.

[12] Marko, Vladimir. "Some Sketchy Notes on the Reaper Argument", *Organon F: Medzinárodný Časopis Pre Analytickú Filozofiu*, 2012, Vol. 19(3), pp. 361–387.

[13] Roueche, M. "A philosophical portrait of Stephanos the Philosopher", in: *Aristotle. Re-Interpreted. New Findings on Seven Hundred Years of the Ancient Commentators*, ed. by R. Sorabji. Bloomsbury Publishing, 2016. pp. 542–563.

[14] Sorabji, R. *The Philosophy of the Commentators, 200–600 AD: Logic and metaphysics*. Cornell University Press, 2005.

[15] Zalta, Edward N. (ed.) *The Stanford Encyclopedia of Philosophy* [http://plato.stanford.edu/, accessed on 08.04.2018].

[16] "Stephani in librum Aristotelis De Interpretatione commentarium", in: *Commentaria in Aristotelem Graeca*, Vol. XVIII, pars III, Berolini, MDCCCLXXXV.

Логические исследования
2018. Т. 24. № 1. С. 99–114
УДК 16

Logical Investigations
2018, Vol. 24, No. 1, pp. 99–114
DOI: 10.21146/2074-1472-2018-24-1-99-114

А.О. Копылова

Овремененные пропозиции в логике У. Оккама

Копылова Анастасия Олеговна
Национальный Исследовательский университет Высшая школа экономики.
Российская Федерация, 101000, г. Москва, ул. Мясницкая, д. 20.
E-mail: a.o.kopylova@gmail.com

Данная статья представляет собой реконструкцию подхода средневекового схоласта, представителя логики новых Уильяма Оккама к анализу овремененных предложений. Основным источником статьи является глава 7 второй книги и глава 72 первой книги трактата *Summa Logicae*. В этих главах Уильям Оккам отказывается от традиционного схоластического инструмента для анализа овремененных пропозиций — амлиацио, взамен предлагая собственный способ. Цель данной статьи состоит в выяснении того, по каким причинам Оккам не использует данный инструмент анализа условий истинности предложений о будущем и прошлом. В начале статьи предлагается текстологическая реконструкция структуры седьмой главы и ее основных аргументов, после чего эксплицируется роль субъектного термина и правила предикации в овремененных позициях. Далее строится основная схема анализа условий истинности овременненных пропозиций, согласно У. Оккаму. В статье показано, что основанием отказа от амплиацио были онтологические интересы схоласта, которые, в частности, выразились в его полемике с реалистом У. Бурлеем. Вместо традиционной дизъюнкции Уильям Оккам предлагает выделение двух смыслов пропозиции. Это приводит его систему к некоторым семантическим противоречиям: референция к сущностям, не существующим в настоящем времени, не редуцируется до традиционной референции в настоящем. Для решения этой проблемы Уильям Оккам вводит простые категорические пропозиции с демонстративами. Их онтологическая простота имеет два теоретических обоснования: первое — номинализм схоласта, в котором признается существование только индивидуальных вещей и субстанций, второе — его концепцию ментального языка.

Ключевые слова: амплиация, суппозиция условия истинности, средневековая логика

Классическим подходом к исследованию условий истинности овременных пропозиций[1] в терминистской логике XIII–XIV веков было использование инструмента ampliatio — подхода, являющегося разновидностью классического инструмента анализа предложений — suppositio, зародившегося в XII веке. Суппозиция служит для номиналиста У. Оккама одним

[1] В данной статье термины «пропозиция» и «предложение» будут использоваться синонимично, в силу специфического статуса схоластического propositio, которое одновременно имеет как грамматическую форму смысл, так и статус логического высказывания.

из главных предметов интереса в его семантических трактатах и подходом, который он активно использует, в то время как об ampliatio в его трактатах не упоминается.

Цель данной статьи состоит в том, чтобы выяснить, по каким причинам Оккам не использует данный инструмент анализа условий истинности предложений о будущем и прошлом, а гипотезой статьи является предположение, что основанием были его онтологические интересы, которые, в частности, выразились в его полемике с реалистом У. Бурлеем.

Основным источником, на который опирается данная статья, является 7 глава второй книги трактата схоласта У. Оккама *Summa Logicae* — она занимает лишь несколько страниц, но, как замечает известный исследователь средневековой логики К. Нормор, является темной и неясной и вызывает затруднения при интерпретации. Помимо 7 главы второй книги, рассматриваемый нами подход Оккам также описывает в полемической 72 главе первой книги трактата *Summa Logicae* (она посвящена возражениям оппонентов Оккама по вопросу о том, как определять суппозицию и какие правила суппонирования следует установить).

Таким образом, структура данной статьи обусловлена двумя основными задачами — реконструировать подход Оккама к анализу овремененных предложений и предложить прочтение седьмой главы, для того чтобы прояснить взгляды схоласта.

1. Структура главы 7

Глава семь может быть кратко схематизирована следующим образом[2]:

1. ***Общее правило R1 суппонирования субъектного термина в овремененных пропозициях (Строки 1—14)***

<table>
<tr><td>Пример 1
“Белая вещь была Сократом”
Пример 2
“Сущее творящее было вечно Богом”
Пример 3
“Мальчик будет стариком”</td><td>Оккам утверждает, что
данные примеры сходны и
иллюстрируют одно правило</td></tr>
</table>

2. Различие между пропозициями о настоящем и пропозициями о прошлом или будущем

   (Строки 31—49)

[2] Схема главы выполняет функцию прояснения основной структуры и каркаса главы, поэтому часть строк здесь пропущена.

Общее правило R2 предикации в пропозициях о прошлом и будущем

Различие между функцией субъекта и предиката в предложениях о прошлом или будущем

(Строки 49—63)

3. Заключительный пример[3]

“Сущее, которое творит всегда, есть Бог”

Как ясно из предложенной здесь схемы, анализ Оккама включает несколько правил и примеров, а не представляет собой систематически разработанную концепцию. Можно предположить, что Оккам в большей степени пытается разрешить проблемы, которые могут быть вызваны данным типом предложений, и ответить на возможные возражения, чем создать полноценную теорию[4].

Иными словами, данная глава носит полемический характер, хотя и не столь явный, как глава 72 *SL1* — последняя прямо называется «ответы на возражения», среди которых первый контраргумент схоласта как раз и касается пропозиций о будущем и прошлом и правил предикации в пропозициях данного вида[5].

Оккам описывает условия истинности пропозиций о прошлом и будущем после того, как он завершил свой анализ различных случаев универсальных, единичных, частных и неопределенных пропозиций во второй книге трактата Summa Logicae, посвященной условиям истинности разнообразных пропозиций и их конверсии [19].

Пропозиции о будущем и прошлом (*de praeterito et de future*) отличаются от пропозиций настоящего времени наличием видоизмененной связки, т. е. глагола, употребленного не в настоящем, но в прошедшем или будущем времени. Таким образом, стандартная связка есть («est») модифицирована за счет времени, например было или будет (*fuit* или *erit*).

2. Субъектный термин в овремененых пропозициях

В начале 7 главы Оккам заявляет, что пропозиции с тремя типами субъектного термина следует различать (est ***distinguenda***) в зависимости от того, как субъектный термин может суппонировать:

---

[3] Строки обозначены по критическому изданию Оккама [19]. Название правил и схема — мои.

[4] Это предположение потверждается тем, что Окаам явно использует примеры, отсылающие к подходу У. Бурлея,— например, «Мальчик будет стариком».

[5] В рамках данной работы будет также рассмотрена глава 72 *SL1*, однако только в границах, необходимых для прояснения исследуемого нами подхода.

1. для субстанции, существующей в настоящем времени.
2. для субстанции, существовавшей в прошлом или той, которая будет существовать в будущем.

В случае предложений о прошлом субъектный термин может суппонировать либо ***pro eo quod est*** либо ***pro eo quod fuit*** (для того, что есть, или для того, что было).

В случае предложений о будущем аналогично: субъектный термин может суппонировать либо ***pro eo quod est*** либо ***pro eo quod erit*** (для того, что есть, или для того, что будет).

Через использование выражения «следует различать» (передано через форму est ***distinguenda***) передается возможность двойственного суппонирования субъектного термина в предложениях данного типа. Это создает ситуацию двусмысленности, эквивокации — это предложение можно понимать в двух смыслах.

Пропозициями, в которых возникает двусмысленность, являются те, в которых субъектные термины являются общими терминами (***terminus communis***), например человек, демонстративными (указательными) местоимениями с общим термином (***pronomen demonstrativum cum termino communi***), например «этот человек», или дискретным термином — термин, который именует единичную вещь (***terminus discretus***).

Таким образом, особенностью высказываний о прошлом и настоящем является то, что пропозиции с вышеупомянутыми типами субъектных терминов всегда включают в себя двусмысленность в их суппонировании.

Однако дело обстоит иным образом в отношении суппонирования предикатного термина. В начале главы Оккам не предлагает еще конкретного примера для иллюстрации правила суппонирования субъекта, он прояснит его позднее в рамках описания своего общего подхода.

Тем не менее имеет смысл остановиться на данном моменте подробнее.

Рассмотрим пример:

Некоторая белая вещь была белой вчера.

Исходя из наличия в предложениях о прошлом эквивокации, существуют два варианта анализа данного предложения:

1. Вещь, **которая была белой**, была белой вчера.
2. Вещь, **которая есть белая**, была белой вчера.

Если вещь более не является белой, а, является, например, красной, то предложение (2) будет ложным (потому что не существует никакой белой вещи более), в то время как предложение 1 будет истинным. Эквивокация оказывается здесь возможна в силу того, что общий термин в семантике Оккама дискретно сигнифицирует некоторую область объектов, так что он может отсылать как к прошлой, так и настоящей вещи.

Та же самая схема анализа применима в случае, если субъектный термин является указательным местоимением с общим термином либо дискретным термином, представляющим сложную (составную) вещь. Если резюмировать это максимально простым образом и отходя от аутентичного оккамовского словаря, то в случае, когда перечисленные выше типы терминов являются субъектными терминами, они могут отсылать либо к вещи в настоящем времени, либо в прошедшем или будущем (в зависимости от типа предложения) в силу своей природы: мы просто не знаем, что имеется в виду, к примеру, под термином «этот человек»: «это есть человек» или «это был человек».

Понятно, таким образом, что в случае, если субъектный термин является собственным именем или указательным местоимением[6], двусмысленности такого рода не возникает, потому что грамматически «это» или «Сократ» отсылают к конкретной единичной вещи.

Можно возразить, что указательное местоимение с общим термином тоже указывает на единичную вещь. И действительно, на что указывает термин «этот человек»? Ясно, что на какого-то конкретного человека. Однако термин «этот человек» отличается грамматически, его можно понимать как «это есть человек» или «это был человек», что создает двусмысленность[7].

В подтверждение этой интерпретации можно привести фрагмент из главы 72 SL: «тем не менее, следует понимать, что это существенное различение не касается предиката, но только субъекта. Так, не имеет смысла проводить различение в случае следующих двух пропозиций: "Сократ был бел" или "Сократ может быть бел"» [19, p. 217].

Содержание данной цитаты в первую очередь затрагивает не функции и характеристики субъекта, но касается преимущественно предиката, т. е., иными словами, Оккам здесь говорит, что эквивокация имеет место для субъектного термина, но никогда не касается предиката.

Общее правило R1 суппонирования субъектного термина в овремененных пропозициях

Рассмотрим общее правило 1, сформулированное Оккамом.

В любом случае если предложение является утвердительным, то требуется, чтобы предикат в **его собственной форме** был истинно преди-

[6] Например, любимые схоластические 'Sortes' или 'hoc' — «Сократ» или «это».

[7] М. МакКорд Адамс считает, что в пропозициях о будущем и прошлом всегда имеется двусмысленность, т. к. во всех случаях субъектный термин суппонирует для вещи в настоящем, либо для вещи в прошлом и будущем. См. [9].

цирован — посредством глагола соответствующего времени — тому, что субъект суппонирует. Таким образом, необходимо, чтобы пропозиция, в которой предикат предицирован местоимению, отсылающему именно к тому, что субъект суппонирует, было истинно в некоторый момент времени t или будет истинно в некоторый момент времени t [19, p. 217].

Общее правило 1 может быть разделено на две части.

Во-первых, необходимо, чтобы предикат был предицирован тому, что субъект суппонирует. Это можно выразить иным образом: необходимо, чтобы субъект и предикат суппонировали одну и ту же вещь. Как упоминалось выше, это является базовым правилом установления условий истинности всех видов утвердительных предложений в логике У. Оккама.

Оккам также описывает те требования, которые являются отличительными именно для пропозиций о будущем и прошлом.

Предикат в предложениях данного вида должен быть предицирован '*vere per tale verbum*' — в его собственной форме. Что это означает?

Согласно Оккаму, предикат именует свою форму (appelatio). Таким образом, в случае предиката речь не идет об эквивокации в суппонировании предикатного термина (предикат всегда зависим от копулы), то есть форма является точной (не вызывает сомнений) в силу использования глагола соответствующего времени. Вторая часть **правила 1** описывает требование для пропозиций, которое является центральным для данного исследования. Это требование может быть схематическим образом выражено в следующем виде:

Требуется, чтобы

«Это» есть ***"предикат"*** было (будет) истинно в момент t [19, p. 217].

$\downarrow$ *отсылает*

К тому, что субъект
суппонирует

Оккам предлагает сформировать пропозицию с указательным местоимением (например, «это» или «то», 'hoc' в латинском оригинале) как субъектным термином и предикатом из исходного предложения. Например, если исходное предложение «Бледный конь был Буцефалом», то правило требует, чтобы было образовано предложение «Это есть Буцефал», где Буцефал — предикат как исходного предложения, так и сформированного дополнительно.

В этом случае требуется выполнение следующих условий:

1. Данное сформированное предложение было или (будет) истинно в момент t.

2. Субъектный термин этого предложения отсылает к той же вещи, которую субъект суппонирует. «Это есть Буцефал» было истинно в момент t, если субъектный термин «это» отсылает к той же вещи, что и субъектный термин исходного предложения суппонирует (в нашем случае «бледный конь»).

Рассмотрим **пример 1**
«Белая вещь была Сократом» (Album fuit Sortes[8])
Пусть это предложение будет истинным, пишет Оккам.

Для истинности данной пропозиции не требуется, чтобы пропозиция ‘Album est Sortes’ («Белая вещь есть Сократ») была истинна в некоторый момент t. Требуется, чтобы пропозиция «*Это* есть *Сократ*» была истинна в некоторый момент t, а указательное местоимение «это» отсылало к некоторой вещи, которую субъект исходного предложения суппонирует. Допустим, говорит Оккам, что Сократ сейчас впервые бел. Будет ли истинно рассматриваемое нами предложение? «Да»,— Оккам дает положительный ответ на данный вопрос, это предложение будет истинным. Это могло бы показаться странным, т. к. данное предложение является предложением прошедшего времени в силу наличия копулы ‘fuit’ («была»), однако, вспоминая правило эквивокации суппонирования субъекта, являющегося общим термином, мы понимаем, что здесь нет никаких противоречий и ничто не мешает ему быть истинным — субъект суппонирует для вещи, существующей в настоящем времени.

Таким образом, существовал Сократ до момента t, который имел какой-то цвет (например, черный), но не был белым. Поэтому пропозиция «Это есть Сократ» была истинной. По правилу 1, «это» должно отсылать к тому, к чему суппонирует субъект исходного предложения. А так как субъект исходного предложения «белая вещь» суппонирует Сократа, то предложение является истинным.

Оккам приводит еще два примера, которые он считает подобными первому и иллюстрирующими **правило 1**:

- «Сущее творящее было вечно Богом»

- «Мальчик будет стариком»

[8] Как мы помним из правил выше, это высказывание может быть описано двояким образом, потому что субъект «белая вещь» является общим термином. Во-первых, субъектный термин суппонирует вещь, которая «является некоторой», во-вторых, субъект суппонирует для некоторой вещи, которая «была некоторой».

Пример два оказывается в значительной степени зависим от теологического контекста и, на мой взгляд, этим выбивается из ряда других, поэтому рассмотрим пример 3.

Рассмотрим **пример 3**

«Мальчик будет стариком» (Puer erit senex)

Это предложение, согласно Оккаму, является истинным и может быть проанализировано согласно предложенной выше схеме. Пропозиция «Это есть старик» будет истинна, в то время как «это» отсылает к тому, кто есть сейчас мальчик. Требования выполнены, следовательно, предложение истинно.

Примеры 1 и 3, по мнению схоласта, являются схожими. Мы можем переформулировать пример 3 следующим образом: для некоторого данного x: x — сейчас мальчик и x — будет стариком. Именно эту схему, по сути, хочет предложить Оккам, описывая условия истинности данных предложений[9]. Даже не обращая внимания на то, что пример 1 иллюстрирует схему анализа условий истинности пропозиции о прошлом, в то время как пример 3 — о будущем (согласно Оккаму, анализ строится одинаковым образом[10]), мы понимаем, что вряд ли возможно говорить о том, что они схожи. Почему же они схожи, по мнению схоласта?

Причина здесь достаточно проста: Оккам выступает против «наивного взгляда»[11], согласно которому условия истинности овременных пропозиций можно описать через требование того, чтобы некоторое предложение настоящего времени (например, «Белая вещь есть Сократ») было (или будет) истинно в момент t. Таким образом, предложение «мальчик есть старик» не будет истинно в момент t, потому что некто не может быть одновременно мальчиком и стариком. А предложение «Белая вещь есть Сократ» не было истинно в некоторый момент t ранее, потому что Сократ стал бел только сейчас впервые, а до этого отличался каким-то другим цветом.

[9] Об этом позднее ниже.

[10] Одной из причин того, что Оккам строит анализ условий истинности пропозиций о прошлом и будущем одинаковым образом, как мне представляется, является то, что в естественном языке конструкции аналогичны. Остальные причины — теологические и физические и связаны с понимание понятия ‘potentia’.

[11] Данная формулировка принадлежит П. Орстрему [21].

3. Предикация в предложениях о прошлом и будущем

После того как мы проанализировали первое основное правило, касающееся установления условий истинности в пропозициях о будущем и прошлом следует перейти к рассмотрению второго[12]. Оно направлено на объяснение того, что необходимо для предикации в пропозициях о будущем и прошлом, и чем она отличается от предикации в предложениях о настоящем.

Правило 2

Как замечает Оккам, в предложении о прошлом недостаточно того, чтобы предикат был истинно предицирован тому, что субъект суппонирует, но необходимо, чтобы он был предицирован особенным образом, который предполагается этим предложением. Что имеется в виду? По мнению схоласта, пропозиции о прошлом и будущем отличаются от пропозиций о настоящем тем, что в последних предикат относится к вещам таким же образом, как и субъект, в то время как для пропозиций о прошлом и будущем это не так: «предикат не просто относится к тем вещам, к которым *он истинно предицирован*, потому что он находится под воздействием (влиянием) видоизмененной копулы» [19, 270]. За пояснением того, что имеется в виду и почему Оккаму так важно объяснить возможность предикации в исследуемых нами пропозициях, необходимо обратиться к главе 72 *SL1*.

Предварительно следует объяснить, почему в данном фрагменте Оккам говорит о предикации. В 63 главе SL1 «О суппозиции» основное условие возможности суппозиции термина следующее: «термин должен быть истинно предицирован вещи» [19, p. 186]. Определение предикации в теории Оккама остается неясным: в SL оно в принципе отсутствует. По мнению Гордона Леффа, «в отличие от Порфирия, который не разделял предикацию и сигнификацию и тем самым неоплатонизировал систему аристотелевских категорий, Оккам сделал предикацию зависимой от сигнификации» [8, p. 149]. Однако проблема в учении Оккама заключается в том, что суппозиция в свою очередь ставится в зависимость от предикации, таким образом, как замечает М. Маккорд Адамс, здесь имеет место логический круг [9, p. 402].

Так или иначе, основным условием истинности любого предложения, согласно Оккаму, является то, что «предикат должен быть истинно предицирован тому, что субъект суппонирует» [19, p. 216].

Но как же быть с пропозициями о будущем и прошлом? В главе 72 *SL2* Оккам отвечает на вопрос-возражение, которое кратко можно представить следующим образом: как в пропозициях такого типа возможна суппозиция терминов, если для предложения «Сократ был человеком» предикат

[12] Следует еще раз уточнить, что предложенная схема деления на правила, как и их наименования, отсутствует в тексте и предложена мной.

«человек» должен быть истинно предицирован Сократу, а Сократа не существует?

Ответ Оккама можно свести к двум основным тезисам:

1. Термин может суппонировать вещь, которая была или будет его сигнификатом, только посредством использования глагола прошедшего или будущего времени, «предикат должен быть в его собственной форме».

2. Термин может суппонировать персонально не только для вещей, которые являются его сигнификатом, но и для вещей, которые были, будут или могут быть его сигнификатом [19, p. 216] (это возможность постулируется Оккамом через введение в его систему определения сигнификации «в широком смысле» [1]).

Второй тезис, таким образом, представляет собой логический круг: в модальных и овремененных предложениях термины суппонируют персонально, персональная суппозиция определяется через указание на то, что термины «взяты сигнификативно», для этого вводится (ранее) широкое определение сигнификации, делающее возможным сигнификацию будущих, прошлых и возможных субстанций [1, p. 14]. Термин не может быть истинно предицирован вещи, существующей в прошлом или будущем, без наличия соответствующего глагола, например посредством глагола настоящего времени.

Таким образом, пропозиция «Сократ есть человек» не является истинным предложением в ситуации, когда Сократа не существует. Посредством же копулы соответствующего времени и наличия определенной «собственной формы предиката» предикация видоизменяется: она более не является предикацией настоящего времени. Иными словами, предложение, в котором предикат (в его собственной форме) предицирован тому, что субъект суппонирует, должно было быть однажды истинно. Аналогично — для пропозиций о будущем [19, p. 216].

В общем, подход Оккама можно охарактеризовать следующим образом: схоласт использует схему анализа условий истинности, которую он уже предложил для пропозиций настоящего времени, в анализе пропозиций о будущем и прошлом. Однако возникают два вопроса:

1. Можно ли сказать, что истинность предложений о прошлом эквивалентна прошлой истинности соответствующего предложения (пропозиции) настоящего времени (то же самое для будущего)[13]?

[13] Этой точки зрения придерживается Фредоссо, см. [5].

2. Исчерпывается ли предложенная схема редукцией к схеме условий истинности предложений о настоящем? В чем особенность подхода Оккама по сравнению с ampliatio?

В рамках поставленных вопросов также возникнет и вопрос об онтологических обязательствах, которые на себя налагает Оккам. Для того чтобы представить ответы последовательно, а также еще раз резюмировать специфику подхода Оккама, рассмотрим подробнее понятие «ampliatio».

Амплиацией называлось расширение суппонирования термина в овремененных и модальных пропозициях за пределы тех объектов, которые существуют в настоящем для данного высказывания времени, т. е. для возможных, будущих и прошлых объектов[14]. Именно через обращение к ampliatio устанавливалось истинностное значение пропозиции, таким образом, она понималась как базовый инструмент анализа условий истинности. Данный термин мы можем найти практически у всех авторов терминистской логики в века высокой схоластики (XII–XV века): Петра Испанского, Альберта Саксонского, Буридана, Бурлея и др. — у тех, кто придерживался как позиции реализма, так и позиции номинализма, однако у Оккама он не встречается. Это не означает, что Оккам его не использует — некоторые исследователи говорят об использовании Оккамом инструмента ampliatio, хотя он его прямо не называет [20].

Как замечает Э. Муди, «амплиация субъектного термина не затрагивает суппозицию субъектным термином вещей, существующих в настоящем времени, расширение происходит путем логического добавления, т. е. иначе его можно выразить через дизъюнкцию» [14]. Рассмотрим правила ampliatio, предложенные У. Бурлеем, поскольку Бурлей является одним из самых серьезных оппонентов Оккама, с которым схоласт все время явно или неявно полемизирует.

В трактате De Puritate Artis Logicae Бурлея мы находим следующие правила ampliatio:

1. Общий термин, соотносящиейся в предложении с неампилирующим глаголом о настоящем, обозначает только вещи настоящего времени.

2. Общий термин, стоящий в предложении с глаголом прошедшего времени, может обозначать одинаково как вещи настоящего времени, так и прошедшего.

3. Общий термин, стоящий в предложении с глаголом будущего времени, может обозначать одинаково как вещи настоящего времени, так и будушего [4].

[14] Я использую здесь термин «объект», но следует оговорить, что он имеется в смысле средневековой res.

В чем специфика подхода Оккама? Можем ли мы сказать, что он отличается от классического? С одной стороны, Оккам традиционно признает, что субъектный термин (перечисленных выше видов) в рассматриваемых предложениях может суппонировать либо существующую в настоящем вещь, либо вещь, существующую в прошлом (или будущем) [19, 269]. С другой стороны, Оккам говорит о том, что в случае суппонирования субъектного термина здесь имеется эквивокация, т. е. двусмысленность, и возникают два возможных прочтения — смысла.

Кажется плодотворным использование формализации, предложенной С. Ридом и Г. Пристом на языке пропозициональной временной логики [21, p. 277–278], потому что оно выразительно показывает, чем подход Оккама отличается от стандрантной дизъюнкции. Однако формализация здесь не передает некоторые важные моменты, связанные с тем, что Оккам использует именно предложения настоящего времени (то есть предикацию настоящего времени) с демонстративным местоимением для анализа в рамках любого прочтения.

Согласно С. Риду и Г. Присту, традиционный подход к пониманию ampliatio можно выразить следующим образом:

$$\exists x\ (Ax\ \&\ PBx) \vee \exists x\ (PAx\ \&\ PBx).$$

Исследователи показывают, что традиционный подход к ampliatio представляет собой дизъюнкцию: и действительно, видно, что в тексте Бурлея суппонирование термина не приводит к выделению двух смыслов предложения.

Подход Оккама, согласно их мнению, можно представить таким образом:

$$\exists x\ (PAx\ \&\ PBx),$$

$$\exists x\ (Ax\ \&\ PBx).$$

Особенностью системы Оккама оказывается наличие двух прочтений: овремененные пропозиции с перечисленными выше субъектными терминами следует различать (est distinguenda) в соответствии с двумя смыслами, при этом предложение, взятое в одном смысле, может оказаться ложным, в то время как предложение, взятое в другом смысле,— истинным. Эти смыслы Оккам никак не именует, однако, что интересно, похожим образом он осуществляет анализ условий истинности модальных пропозиций. Он также замечает, что их следует различать (est distinguenda) в соответствии с двумя смыслами — sensu diviso и sensu composito. Сопоставить эти смыслы, выделяемые в модальных и овремененных пропозициях, затруднительно, т. к. во вторых имеется модальный термин, что выделяет их в принципиально другой тип предложений.

Однако в обоих типах пропозиций Оккам использует похожий инструментарий: предлагает сформировать простые единичные пропозиции *de inesse* настоящего времени. На мой взгляд, этот ход, как и разграничение двух смыслов, необходимы Оккаму, чтобы точно определить и объяснить предикацию в модальных и овремененных пропозициях. Согласно Оккаму, «термин должен быть истинно предицирован вещи» [19, p. 215]. Однако как он может быть истинно предицирован вещи, если он не существует? Для того чтобы объяснить этот момент, Оккам предлагает два тезиса: тезис о широком понятии сигнификации и тезис о предикации в предложениях, обладающих будущей или прошлой истинностью.

Можно предположить, что последнее утверждение, а также общее правило анализа условий истинности 1 дали Фредоссо основание утверждать, что анализ условий истинности пропозиций о будущем и прошлом осуществляется на уровне пропозиций — через прошедшую и будущую истинность пропозиций о прошлом [5].

И действительно, Оккам предлагает сформировать предложение «Это есть (предикат)», которое было/будет истинно в момент t. Согласно Фредоссо, этот ход позволяет утверждать, что Оккам не допускает в свою систему существования прошлых, будущих и возможных объектов, т. к. он не описывает суппозицию терминов к данным объектам, а работает на пропозициональном уровне [5]. Однако такая интерпретация может показаться некорректной: во-первых, в семантике Оккама ясно описана возможность суппозиции и сигнификации к объектам данного типа, во-вторых, подход Оккаму принадлежит к числу терминистских, а не диктистских, т. е. анализ условий истинности осуществляется через работу с терминами, а не на уровне пропозиций или диктумов.

Таким образом, для Оккама характерны две особенности, которые, на наш взгляд, вызваны его номиналистической онтологией:

1. Введение простых предложений с указательным местоимением в качестве субъектного термина.

2. Сведение предикации к предикации в предложении настоящего времени.

Как замечает Гордон Лефф, Оккам признает существование только индивидуальных вещей и субстанций, а также концептов, которые одновременно являются «актами понимания» [8]. Формирование концепта или акта понимания возможно, когда человеком схватывается некая индивидуальная вещь, именно это является знаком или ментальным термином[15]. Оккам постулирует существование ментального языка, который существует «по

[15] Подробнее об этом [15].

природе». Исследование оснований концепции ментального языка, к сожалению, оказывается за пределами рамок данной статьи, но необходимость сведения к демонстративным местоимениям вытекает из номиналистического интереса в признания существования только единичных вещей и субстанций.

Введение предложений с указательным местоимением в качестве субъектных терминов позволяет объяснить и упростить схему предикации, за счет чего происходит верификация данного типа предложений и знание о прошлой или будущей истинности данных предложений.

Литература/References

[1] Boehner, Ph. *Collected Articles on Ockham.* St Bonaventure: Franciscan Institute, 1958. 482 pp.

[2] Buridan, J. *Summulae de Dialectica*, trans. by G. Klima, New Haven: Yale University Press, 2001. 384 pp.

[3] Burleigh, W. *De Puritate Artis Logicae Tractatus Longior*, ed. by P. Boehner. St Bonaventure: Franciscan Institute, 1955. 264 pp.

[4] Burleigh, W. *On the Purity of the Art of Logic.* New Haven: Yale University Press, 2000. 260 pp.

[5] Freddoso, A. "Introduction", *Ockham's theory of propositions. W. Part II of the Summa Logicae.* St. Augustine Press, 1998. 220 pp.

[6] Kneale, M., Kneale, W. *The Development of Logic.* Clarendon Press, 1962. 770 pp.

[7] Kretzmann, N., Stump, E. *Logic and the Philosophy of Language.* The Cambridge Translations of Medieval Philosophical Texts: Volume 1, Logic and the Philosophy of Language, 1988. 450 pp.

[8] Leff, G. *William of Ockham: The Metamorphosis of Scholastic Discourse.* Manchester University Press, 1975. 666 pp.

[9] McCord Adams, M. *William Ockham.* University of Notre Dame Press, 1987. 1402 pp.

[10] McCord Adams, M."Ockham's Nominalism and Unreal Entities", *Philosophical Review*, 1977, Vol. 86, No. 2, pp. 144–176.

[11] McCord Adams, M. "Ockham's Theory of Natural Signification", *The Monist*, 1978, Vol. 61, No. 3, pp. 444–459.

[12] McCord Adams, M. "What Does Ockham Mean by 'Supposition'?", *Notre Dame Journal of Formal Logic*, Vol. 17, No. 3, pp. 375—391.

[13] Moody, E. *The Logic of William of Ockham.* New York: Sheed and Ward, 1935. 322 pp.

[14] Moody, E. *Truth and consequence in Medieval logic.* Amsterdam, 1953.

[15] Normore, Ñ."Some aspects of Ockham‘s logic", *The Cambridge Companion to Ockham.* Cambridge University Press, 1999, pp. 31–53.

[16] Normore, C. *The Logic of Time and Modality in the Later Middle Ages: The Contribution of William of Ockham*, Ph.D. dissertation: University of Toronto, 1975.

[17] Ockham, W. *Part I of the Summa Logiae. Ockham's Theory of Terms*, trans. by M. Loux. Notre Dame: University of Notre Dame Press, 1974.

[18] Ockham, W. *Part II of the Summa Logicae.tr. Fredosso. Ockham's Theory of Propositions.* St. Augustine Press, 1998.

[19] Ockham, W. *Opera Philosophica*, 7 Vols., ed. by Gedeon Gál et al. The Franciscan Institute, 1974—88. Vol. 1.

[20] Øhrstrøm, P. *Temporal logic: From Ancient Ideas to Artificial Intelligence.* Springer Science & Business Media, 2007. 416 pp.

[21] Priest, G., Read, S. "Ockham's Rejection of Ampliation", *Mind, New Series*, Vol. 90, No. 358, pp. 274–279.

Anastasia O. Kopylova

Tensed Propositions In W. Ockham's Logic

Kopylova Anastasia Olegovna
National Research University Higher School of Economics
20 Myasnitskaya St., Moscow, 101000, Russian Federation.
E-mail: a.o.kopylova@gmail.com

This article presents the reconstruction of W. Ockham's approach to the analysis of truth conditions of tensed propositions in order to clarify Ockham's view and to present it in a systematic way. The article focuses on the chapter seven of the second book and chapter seventy two of the first book of the treatise *Summa Logicae*. One of the points that makes the analysis of Ockham's theory of tensed and modal propositions significant is the fact that he rejected the standard scholastic tool of the analysis of modal and tensed propositions — ampliation (ampliatio). Therefore, Ockham had to create his own theory that was based on his general ideas of supposition and predication that were primarily described by him in terms of the present tense. The main aim of this article is to examine why Ockham doesn't use traditional tool for analysis of the truth-conditions in propositions about Future and Past. In the beginning of the article there is a textual reconstruction of the chapter seven, then there is an examination of the role of subject term and predication rules in this kind of propositions. Subsequently there is a general chart of the analysis of truth conditions in tensed propositions in Ockham's view. In the article author claims that the ground of the rejection were Ockham's ontological interests which were presented in his debate with W. Burley. Instead of traditional disjunction Ockham suggests detachment of the two senses of proposition. This idea leads to semantic controversy. Reference to the objects in past and future cannot be reduced to the reference to objects in present. Nominalism and mental language theory leads him to these semantic decisions.

Keywords: ampliatio, suppositio, truth, medieval logic

Логические исследования
2018. Т. 24. № 1. С. 115–128
УДК 16

Logical Investigations
2018, Vol. 24, No. 1, pp. 115–128
DOI: 10.21146/2074-1472-2018-24-1-115-128

Дискуссии
Discussions

Ю.В. Ивлев

Предмет и перспективы развития логики

Ивлев Юрий Васильевич
МГУ имени М.В. Ломоносова.
Российская Федерация, 119991, Москва, ГСП-1,
Ломоносовский проспект, д. 27, корп. 4.
E-mail: ivlev.logic@yandex.ru

В статье обсуждается вопрос о предмете логики и о некоторых перспективах ее развития. Утверждается, что логика является наукой о мышлении. То есть мышление — это объект науки логики. Предмет логики — это особые структуры мыслей и процессов мышления, называемые, не совсем удачно, по мнению автора, формами мыслей и процессов мышления. Эти структуры выявляются путем частичного отвлечения от смысловых и предметных значений нелогических терминов, входящих в языковые выражения, которыми представлены мысли и процессы мышления. Современная логика отличается от традиционной использованием методов, сходных с математическими, — методов символической логики. Однако все значимые для научного и обыденного познания достижения традиционной логики сохраняются. Логика, изложенная в некоторых учебниках, изданных в сороковых годах прошлого столетия в СССР, называется суррогатной. Выделяются эмпирический и теоретический уровни исследований в логике, а также логика и «как-бы-логика» («as-if-logic»), логика классическая и неклассическая. Обсуждаются перспективы развития «как-бы-логики» и собственно логики. Отмечается полезность исследований в области «как-бы-логики» — могут будут созданы «как-бы-логические» системы, некоторые из которых найдут интерпретацию в качестве собственно логических систем, могут быть разработаны новые методы доказательства метатеорем, которые будут применяться для доказательств относительно собственно логических. В качестве перспектив развития собственно логики указываются два направления — исследования эмпирические и теоретические. Названы возможные приложения квазиматричной логики в области логики, а также в других областях познания.

Ключевые слова: объект науки логики, предмет логики, традиционная логика, современная логика, суррогатная логика, «как-бы-логика»

Логика — наука о мышлении. Против этого утверждения выдвигается следующий аргумент: мы не знаем, как рождаются мысли. Действительно, в некоторых случаях нам неизвестен источник наших знаний и процесс их получения неконтролируем. В таких случаях говорят об «озарении», или интуиции. Интуиция — процесс получения знаний помимо органов чувств и осознаваемых рассуждений.

Логика является наукой об осознаваемых процессах и элементах мышления (умозаключения и аргументации, суждения, понятия и т. д.), то есть наукой о мышлении. Что именно в мышлении изучает логика, то есть если объектом науки логики является мышление, то что является ее предметом? Например, не являются предметом изучения логики умозаключения следующего типа: «Идет дождь. Следовательно, крыши домов мокрые», поскольку вывод сделан на основе мысленного эксперимента «если дождь идет, то куда же капли денутся; у нас не Сахара, они не могут испариться на лету» (см. [6]).

Логика — наука об особых структурах мыслей, называемых, не совсем удачно, формами мыслей.

Форма мысли (процесса мышления) — это ее (его) структура, выявляемая в результате частичного отвлечения от смыслов и значений нелогических терминов, входящих в словосочетание, выражающее эту мысль (этот процесс мышления). Таким образом, вопрос о предмете логики сводится к вопросу о различении терминов логических и нелогических и о понимании «частичности» отвлечения от смыслов и значений нелогических терминов. Некоторое общее основание для выделения логических терминов есть. Таким основанием является то, что логические термины выражают наиболее общие связи и характеристики явлений объективной и субъективной действительности: количественные характеристики («все», «некоторые», «большинство», ...), отношения между ситуациями («если..., то...», «и», «или», ...), отношения между мыслями («следовательно», «совместимо по истинности», ...) и т. д. В конечном же счете вопрос о различении логических и нелогических терминов решается имеющейся практикой, то есть фактически соглашением. (Указанные выражения еще не логические термины. В естественном языке они употребляются в разных смыслах. Выражение естественного языка становится логическим термином, если ему придается точный смысл.) Примеры логических терминов: (1) одновременная конъюнкция — две ситуации существуют одновременно, обозначение $-\&^{=}$; (2) последовательная конъюнкция — две, три и т. д. ситуация возникают последовательно, обозначение $-\&^{\to 2}$, $\&^{\to 3}$ и т. д.

«Частичность отвлечения» от смыслов и значений нелогических терминов заключается в следующем: остается информация о типе терминов, от смыслов и значений которых произошло отвлечение, а также информация о том, где находился один и тот же термин, а где разные.

Знание типов нелогических терминов предполагает знание видов объектов, которые этими терминами обозначаются (или выражаются). Основными из объектов являются предметы, свойства предметов, отношения между предметами, функциональные зависимости между предметами. Другая часть знания, выражаемого логической формой мысли, — это информация, которая представлена логическими терминами.

Логика исследует виды логических форм, отношения между мыслями по логическим формам, в том числе отношения, называемые логическими законами.

Определение логики: логика — наука об особых структурах (формах) мыслей и процессов мышления и об отношениях между мыслями и процессами мышления по этим структурам.

Логика традиционная и современная. Традиционная логика основана Аристотелем. Учение последнего, во многом дополненное, развитое и отчасти искаженное, существовало до начала XX в. В начале XX в. произошла своеобразная научная революция, связанная ***с широким применением*** для исследования отношений между мыслями и процессами мышления по указанным выше структурам (формам) методов символической (математической) логики. При этом в современной логике сохраняются все достижения и вся значимая для науки и обыденного познания проблематика традиционной логики.

Логика традиционная и суррогатная. В России иногда традиционную логику несправедливо подвергают критике. При этом под традиционной логикой имеют в виду логику, изложенную в некоторых учебниках, изданных в СССР в конце сороковых и в пятидесятых годах прошлого столетия, а также и позже. В этот период появились учебники, в которых не учитывались не только достижения современной логики, но и традиционной. Авторы этих учебников, в силу объективных причин, не знали ни символической, ни традиционной логики, поэтому излагали проблемы логики упрощенно и искаженно. Такую логику естественно назвать суррогатной. По-видимому, единственным учебником по собственно традиционной логике, изданным в СССР в этот период, является учебник В.Ф. Асмуса. См.:[1].

Эмпирический и теоретический уровни исследования в логике. Эмпирический и теоретический уровни исследования выделяют во многих науках. На первом уровне производится сбор фактов (накопление информации об исследуемых объектах) и осуществляется первичная их систематизация в форме таблиц, схем, графиков и т. д. (см. [2]).

Что понимается под теорией? **Теория** — это система понятий и утверждений об определенной области действительности, обладающая рядом свойств. Приведу здесь лишь одно из этих свойств: теория является ***особой моделью*** объективной или субъективной реальности. Как и любая модель, теория (1) в каком-то отношении сходна с моделируемой реальностью, (2) является её упрощением (а в силу этого иногда и ее некоторым искажением) и (3) служит целям облегчения познания этой реальности.

Моделями служат системы так называемых теоретических объектов. Эти объекты противопоставляются эмпирическим объектам (в том числе объектам наблюдения), поскольку вводятся в науку посредством определенной мыслительной деятельности.

Примерами теоретических объектов в логике являются неопределенная конъюнкция (&) (при её образовании отвлекаются от временных параметров событий), материальная импликация и др. Материальная импликация ($\supset$) имеет некоторое сходство как с различными видами условной связи ($\rightarrow$), так и с отношением логического следования ($\Rightarrow$). Материальная импликация является *упрощением* (а поэтому и *некоторым искажением*) как условной связи, так и отношения логического следования. Упрощение очевидно, поскольку ни условная связь, ни отношение логического следования (понимаемое как отношение по информативности) не определимы таблично.

Примеры искажения. Результат отрицания импликативного суждения — $(A\&\neg B)$ сильнее результата отрицания условного суждения — $\Diamond(A\&\neg B)$. ($\Diamond$ — знак возможности, $\neg$ — знак отрицания). Из ложных посылок не следует любое высказывание. (Конечно, известные парадоксы материальной импликации обусловлены не только отождествлением отношения логического следования с материальной импликацией.) Введение такого теоретического объекта, как материальная импликация, облегчает исследование отношений между суждениями, понятиями и т. д. по логическим формам, то есть служит *целям упрощения познания.*

В традиционной логике, как правило, проводилось эмпирическое исследование логических форм. (Исключением является, по-видимому, аристотелевская силлогистика.)

Логика и «как-бы-логика» (“as-if-logic”). В современных исследованиях, которые относят к области логики, естественно выделить две большие части: собственно логику и «как-бы-логику». Собственно логика (далее — логика) имеет своим предметом указанные выше структуры мыслей и процессов мышления и отношения между мыслями и процессами мышления по этим структурам. Такие отношения между мыслями определенных видов, например между суждениями определенных видов, нормами определенных видов и т. д., представляются на эмпирическом или теоретическом уровне в виде логических систем, построенных семантически, аксиоматически и т. д.

«Как-бы-логика» — это некоторые конструкции, которые в каком-то отношении сходны с логикой, то есть с эмпирическими или теоретическими описаниями указанных выше структур (может быть сходны даже только в отношении некоторых значков), но не имеют никакого отношения, по крайней мере во время их создания, к логическим формам мыслей. Чаще всего такие конструкции строятся путем «модернизации» логических систем. Например, для уточнения понятия логического следования К.И. Льюисом были построены аксиоматическим методом логические системы. Модернизация (преобразование) логических систем путем добавления (убавления) аксиом или правил вывода, а также другими способами позволила образовать большое количество новых конструкций, которые тоже иногда называют логическими системами. Сложилось даже понимание логики как науки о преобразованиях логических систем и «как-бы-логических» систем и об отношениях между «как-бы-логическими» системами. При таком понимании логики эта наука, конечно, не исследует структуры (формы) мыслей. В этом случае **логика** *является наукой о преобразованиях «как-бы-логических» систем и об отношениях между такими системами.* В конечном счете при таком подходе логику можно определить как *учение о сличении и преобразовании частично упорядоченных множеств формул, содержащих по крайней мере некоторые из значков* &, $\neg$, $\wedge$, $\vee$, $\supset$, $\equiv$, $\forall$, $\exists$, $\Box$, $\Diamond$, $\vdash$ ... Тот, кто работает в области таких систем, относится к исследователям, считающим, что задача науки — не изучение природы, общественной жизни или процессов познания, а сличение и видоизменение текстов.

В течение более чем 20 лет руководства кафедрой логики философского факультета Московского университета имени М.В. Ломоносова я стимулировал исследования как в области собственно логики, так и в области «как-бы-логики». Исследования в последней области могут оказаться полезными по ряду причин: (1) построенные системы могут быть переинтерпретированы в качестве собственно логических, т. е. могут найтись, например, суждения, отношения между которыми по структурам описываются полученными системами; (2) результатами исследований могут быть новые методы доказательства теорем или метатеорем; (3) расширяется круг лиц, которые считаются работающими в области логики.

Логика классическая и неклассическая. Классической называют логику высказываний (а также ее расширение — логику предикатов) — логику Фреге-Рассела, которая является наиболее простой ***моделью*** отношений по формам между ассерторическими высказываниями. Эта логика основана на следующих принципах.

1. *Принцип двухзначности.* Высказывания принимают значения из области, состоящей из двух элементов.

2. *Принцип истинности-ложности.* Эта область — $\{и,\ л\}$.

3. *Принцип непротиворечия.* Высказывание не может принимать более одного значения из этой области значений.

4. *Принцип исключенного третьего.* Высказывание обязательно принимает какое-то из двух значений.

5. *Принцип тождества.* В сложном высказывании, системе высказываний, рассуждении одно и то же высказывание принимает одно и то же значение.

6. *Принцип функциональности.* Логические термины представляются в качестве функций.

7. *Принцип материальной импликации.* Моделью условной связи и отношения следования является материальная импликация.

Неклассические логики образуются, ***во-первых***, за счет привлечения к рассмотрению высказываний новых типов взамен ассерторических, ***во-вторых***, за счет привлечения к рассмотрению высказываний других типов наряду с ассерторическими, а также, ***в-третьих***, за счет изменения типов моделей логических терминов. Таким образом, существуют ***три основных способа создания неклассических логик.*** Возможны, конечно, их комбинации.

Перспективы развития логики. Прежде всего будет развиваться «как-бы-логика». В результате исследований в области «как-бы-логики», во-первых, будут созданы «как-бы-логические» системы, некоторые из которых найдут интерпретацию в качестве собственно логических систем, во-вторых, могут быть разработаны новые методы доказательства метатеорем, которые будут применяться для доказательств относительно собственно логических систем, в-третьих, не будет уменьшаться, а, может быть, даже будет расти число логиков, имеющих ученые степени докторов наук по логике, что не позволит сократить число диссертационных советов по специальности «логика».

В области собственно логики существует много направлений исследований. Изложу лишь некоторые из них, в основном относящиеся к квазифункциональной логике.

Направления эмпирических исследований. Продолжение исследований отношений по формам между суждениями, содержащими следующие логические термины: $\&^{=}$, $\&^{\rightarrow n}$ ($\&^{\rightarrow 2}$, $\&^{\rightarrow 3}$ и т. д.), $\&^{\Diamond}$ (союз возможно-конъюнктивного суждения — суждения, в котором выражается правомерность реализации любой из двух возможностей, например: число 6 делится на 2 и на 3); (c)$\rightarrow$, (p)$\rightarrow$, (i)$\rightarrow$, $\hookleftarrow$ (соответственно разновидности условной связи: причинно-следственная связь, наличие одного свойства обусловливает наличие другого свойства, ограничительная условная связь, например если собака откусит у курицы одну ногу, то курица может стоять на одной ноге) и т. д.

Интерпретация этих и других логических терминов посредством квазифункций. (Если функцией называется соответствие, в силу которого определенный объект из некоторого множества соотносится с определенным объектом из того же или другого множества, то квазифункция — это соответствие, в силу которого некоторый объект из определенного подмножества некоторого множества соотносится с некоторым объектом из определенного подмножества того же или другого множества. Частным случаем квазифункции является функция.) Например, представление посредством квазифункций различных видов модальных терминов (алетических, деонтических, эпистемических и т. д.). (См. [6–16].)

Направления теоретических исследований. Построение квазифункцинальной логики предикатов, в которой вместо предметных функторов выступают предметные квазифункторы. Разработка квазиматричной алебры по типу квазиматричной алгебры деяний (действий или бездействий). См. [3]. Применение принципа квазифункциональности в других отраслях математики.

Другие возможные приложения квазиматричной логики. *Квазидетерминизм в биологии.* Квазидетерминизм в биологии используется, например, при характеристике случайности. Основными видами случайности являются: классическая случайность — явление, которое неоднозначно детерминировано сущностью предмета, системы; функциональная случайность — признак является случайным, если условиями существования его носителя неоднозначно детерминировано или не детерминировано выполнение определенных функций носителем признака; случайность по обстоятельствам — явление, существование или возникновение которого неоднозначно детерминировано внешними обстоятельствами (см. [3]).

Особым видом случайности является изменение генофонда в небольших изолированных популяциях, называемое «дрейфом генов». Эту случайность можно пояснить «нарушением принципов отбора» из генеральной совокупности в «выборку», как бы производимого самой природой (см. [3]). Это в том числе следующие принципы: следует отбирать для исследования предметы из всех подклассов генеральной совокупности; следует соблюдать принцип пропорциональности (из больших подклассов генеральной совокупности отбирать больше предметов); брать оптимальное количество предметов для исследования. В случае «дрейфа генов» природа «нарушает» принципы отбора, однако можно квазифункционально предвидеть результаты дрейфа генов.

Нервные сети. Нейрон можно представить в качестве объекта, имеющего один вход и один выход. Это, конечно, частная теоретическая модель нейрона, которая легко обобщается на случай нескольких входов и нескольких выходов. При обсуждении проблемы применимости принципа квазифункциональности к описанию работы нервных сетей можно ограничиться двухзначной логикой (сигнал является положительным или отрицательным). Здесь рассмотрим применимость трехзначной логики. На вход нейрона поступает какой-то сигнал из подмножества, например из $\{n, c\}$, возможного множества $\{n, c, i\}$ сигналов. На выход нейрона поступает из нейрона какой-то один, и только один, сигнал из подмножества, например из $\{n, i\}$. Пусть имеются два нейрона, на выход которых поступает один и тот же сигнал c. Тогда на вход системы нейронов, состоящей из двух новых нейронов, поступит либо сигнал c, либо сигнал i, если предположить, что эти два последних нейрона описаны формулой, соответствующей конъюнкции.

Таким образом, поведение нейронов может быть не определено или определено лишь частично, а поведение нейронной сети может быть определено полностью, может быть определено частично, а может быть совсем неопределенно. Возможно, что в таком поведении нейронов заключается объяснение интуиции: мозг работает как машина, которая хотя и является сложной, но всё же конечной, её работа не осознается, и результаты получаются на выходе иногда правильные, а иногда нет, т. е. вариативные.

Генетика (наследственность). В [3] есть понятия однозначной и неоднозначной детерминации признаков организма. Например, одна и та же генная аномалия иногда приводит к заболеванию, а иногда нет. Возможно, что такие процессы тоже могут быть описаны квазиматричной логикой, если только неоднозначности не вызваны недостатком информации о влиянии каких-то побочных факторов, условий.

Абстрактные и реальные квазиавтоматы. Автомат имеет вход и выход. На вход поступает сигнал, автомат его перерабатывает и выдает сигнал на выходе. Между сигналом на входе и сигналом на выходе есть функциональная зависимость. В квазиавтомате зависимость квазифункциональная. На вход поступает какой-то сигнал из подмножества множества возможных входных сигналов. На выходе возникает какой-то сигнал из подмножества множества возможных сигналов. Можно представить частный случай такой ситуации. На вход поступает определенный сигнал. На выходе возникает какой-то сигнал из подмножества множества возможных сигналов. Пусть имеется множество таких квазиавтоматов. Выходными сигналами являются перемещения самих квазиавтоматов. В данный момент времени нельзя установить место нахождения каждого из автоматов, но можно рассчитать, где будет находиться система квазиавтоматов в конечном счете. Каждый из квазиавтоматов можно представить в виде формулы модальной логика высказываний, а систему квазиавтоматов в виде системы формул или в виде более сложной формулы. Сигналы на входе — наборы значений переменных формул, а сигнал на выходе — какое-то из значений более сложной формулы.

Пример. Пусть система квазиавтоматов представлена формулой $((p \vee q)\&\Diamond q)$ трехзначной квазифункциональной логики S_r. При значении c каждой из переменных, входящих в формулу, формула принимает значение c. Пусть этому значению соответствует движение системы квазиавтоматов в определенном направлении. Система квазиавтоматов получает сигнал — значение c переменных p, q. Тогда формула принимает какое-то значение из области $\{n,\ c\}$. Этой ситуации соответствует продолжение движения квазиавтомата в том же направлении, что и было, либо в другом направлении, соответствующем значению n. (Значения n, c, i соответственно означают «необходимо», «случайно», «невозможно»; $\vee$ — знак нестрогой дизъюнкции; & — знак конъюнкции, $\Diamond$ — знак онтологической возможности.)

Социальное прогнозирование. Для предсказания будущего в социальной сфере используют (1) линейную экстраполяцию, (2) модель экспоненциального роста, (3) асимптотическую модель, (4) синусоидальную модель и др.

Применение принципа квазифункциональности позволяет рассматривать возможные варианты развития таким образом, что результаты развития отдельных составляющих социальной системы только частично (квазифункционально) предсказуемы, а результат развития системы в целом предсказуем полностью (а возможно, конечно, что только частично).

$$
\begin{array}{c}
\mathbf{P_{1.r}}, \mathbf{P_{2.r}}, \ldots \mathbf{P_{k.r}}[\sum \mathbf{s.r}(^{**} \ldots ^{*})] \\
\Uparrow \quad \Uparrow \qquad \Uparrow \quad \Uparrow \\
\ldots \\
\Uparrow \qquad \Uparrow \qquad \Uparrow \qquad \Uparrow \qquad \Uparrow \qquad \Uparrow \qquad \Uparrow \qquad \Uparrow \\
\mathbf{Q_{1.1}}, \mathbf{Q_{2.1}}, \ldots \mathbf{Q_{k.1}}[\sum_{\mathbf{2.1}}(^{**} \ldots ^{*})] \quad \ldots \quad \mathbf{Q_{1.2}}, \mathbf{Q_{2.2}}, \ldots \mathbf{Q_{k.2}}[\sum_{\mathbf{2.2}}(^{**} \ldots ^{*})] \\
\Uparrow \qquad \Uparrow \qquad \Uparrow \\
\mathbf{P_1}, \mathbf{P_2}, \ldots \mathbf{P_k}[\sum_{\mathbf{1}}(^{**} \ldots ^{*})]
\end{array}
$$

Стрелками показаны возможные альтернативы развития системы объектов $\sum_{\mathbf{1}}(^{**}\ldots{}^{*})$, а верхняя формула соответствует случаю, когда варианты развития системы этих объектов приводят к определенному состоянию системы. (Здесь $\mathbf{P_1}, \mathbf{P_2}, \ldots \mathbf{P_k}$ — начальные признаки системы объектов, а $\mathbf{Q_{1.1}}, \mathbf{Q_{2.1}}, \ldots \mathbf{Q_{k.1}}$ и т. д. — (возможно) новые признаки измененной системы.)

Аргументация. О высказывании (концепции) может не быть никакого убеждения. Тогда значение высказывания 0. Более сильными значениями являются убt и убf (убежден в истинности и убежден в ложности). Более сильными, чем убt, являются значения убt$_n$ убt$_c$ убt$_C$ убt$_N$, которые читаются соответственно «убежден, что истинно и онтологически необходимо», «убежден, что истинно и онтологически случайно», «убежден, что логически случайно», «убежден, что логически необходимо». Очевидно образование более сильных значений для убf. Отношения между высказываниями (концепциями) выражаются посредством квазифункций.

Управленческое решение. На теоретическом уровне познания модель процесса разработки управленческого решения представляется в качестве сложной квазифункции. Эта модель описана в ряде публикаций автора данной статьи. См., например, [5][1].

Квазифункциональная модель специалиста. Для облегчения конкурсного отбора специалистов можно использовать следующую модель. Пусть набираются руководители какого-либо уровня для системы предприятий. Дается объявление, в котором указаны исходные требования для претендентов. Например, соответствующее образование и опыт руководящей работы не менее двух лет в данной отрасли. То есть из множества возможных претендентов отбирается подмножество, обозначим его так: M_1. Это подмножество является областью определения квазифункции. Образуем квазифункцию. Представим качества руководителя в виде круга, нижняя часть которого соответствует отрицательным качествам, а верхняя положительным. Среди отрицательных качеств выделяются неприемлемые (недопустимые) и допустимые. Отрицательные допустимые качества могут «компенсироваться» положительными качествами. Среди положительных — необходимые и не необходимые.

Выделим в круге сектора 1, 2 и -1, -2. Пусть сектору 1 соответствует такое положительное качество, как способность принимать решения в сложных условиях (максимальная оценка — 10 баллов); сектору 2 — управленческие знания (максимальная оценка — 18 баллов) и т. д. Сектором -1

[1]В интернете можно набрать выражение «Управленческое решение», появится текст «Ивлев Ю.В. Управленческое решение», а также тот же текст без указания автора и тот же текст с указанием другого автора. Во всех случаях автором данного теста является автор данной статьи.

обозначено такое отрицательное качество, как грубость (предельная оценка — -8 баллов); сектором -2 — несдержанность (предельная оценка — -6 баллов) и т. д.

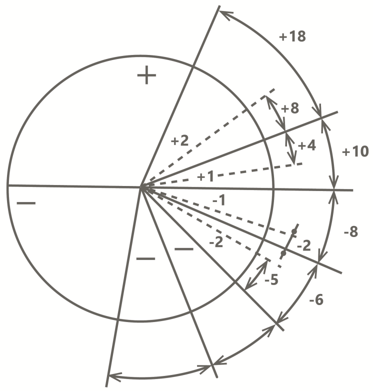


Рис. 1. Квазифункциональная модель специалиста

Предположим, что оцениваются качества конкретного руководителя. Пусть способность принимать решения в сложных условиях оценивается в +4 балла, управленческие знания — в +8 баллов, а грубость и несдержанность — соответственно в -2 и -5 баллов. (Способность принимать решения в сложных условиях выявляется, например, путем постановки руководителя в заведомо сложные условия, а управленческие знания проверяются путем проведения экзамена. Проблема оценки каждого качества является очень сложной и требует специальных исследований.) По указанным четырем качествам дается общая оценка:

$$(+4) + (+8) + (-2) + (-5) = +5.$$

Исследовав таким образом все положительные и отрицательные качества, можно дать общую оценку качеств руководителя. Если есть неприемлемые качества, то оценка равна 0. Допустимой может, например, считаться оценка от +50 до +120 баллов (последняя оценка, то есть сумма баллов, считается максимальной). Если руководитель набрал менее +50 баллов, то дальнейшая работа с ним не ведется. В результате такого исследования выделяется подмножество исходного подмножества (M_1) претендентов, обозначим это последнее подмножество так: $M_{1,1}$. Например, из исходного подмножества претендентов, удовлетворяющих требованиям «иметь соответствующее образование и опыт руководящей работы не менее двух лет в данной отрасли», выделяется множество претендентов, получавших не менее 100 баллов. Это множество $M_{1,1}$. Пусть таких претендентов

20 человек. Среди них нужно отобрать 8 человек. Теперь проводится индивидуальная работа с каждым из отобранных претендентов. Таким образом, модель представляет собой квазифункцию.

Модель была разработана автором статьи для оценки руководителей органов внутренних дел в 70-х годах прошлого столетия. Сначала была опубликована средствами оперативной печати, а затем включена в книгу «Логика в управлении» [5, с. 27–29].

Литература

[1] *Асмус В.Ф.* Логика. М.: Госполитиздат, 1947. 388 с.

[2] *Войшвилло Е.К., Дегтярев М.Г.* Логика как часть теории познания и научной методологии. Кн. II. М., 1994. 332 с.

[3] *Ивлев В.Ю.* Категории необходимости, случайности и возможности: их смысл и методологическая роль в научном познании // Философия и общество. 1977. № 3. С. 108–125.

[4] *Ивлев Ю.В.* Содержательная семантика модальной логики. М.: Изд-во Моск. ун-та, 1985. 170 с.

[5] *Ивлев Ю.В.* Логика в управлении. М.: Академия МВД, 1979. 170 с.

[6] *Ивлев Ю.В.* Логика. М.: Проспект, 2016. 296 с.

[7] *Ивлев Ю.В.* Модальная логика. М.: Изд-во Моск. ун-та, 1991. 224 с.

[8] *Ивлев Ю.В.* Квазифункциональная логика // Научно-техническая информация. Серия 2: Инфрмационные процессы и системы. 1992. № 6. С. 12–20.

[9] *Ивлев Ю.В.* Методологическая функция квазиматричной (квазифункциоанльной) логики // Методология в науке и образовании. Материалы Всероссийской конференции университетов и академических институтов РАН. М.: Изд-во МГТУ им. Н.Э. Баумана, 2017. С. 61–64.

[10] *Ивлев Ю.В.* Табличное построение пропозициональной модальной логики // Вестн. Моск. ун-та. Сер. «Философия». 1973. № 6. С. 51–61.

[11] *Карпенко А.С.* Многозначные логики. М.: Наука, 1997. 223 с. (Серия «Логика и компьютер». Вып. 4.)

[12] *Ivlev Y.V.* Generalization of Kalmar's method for quasi-matrix logic // Logical Invistegations. 2013. Vol. 19. P. 281–307.

[13] *Ivlev Y. V.* Theory of Logical Modalities // Multi. Val. Logic. 2000. Vol. 5. P. 91–102.

[14] *Ivlev Y. V.* Outlines of the transition from the principles of traditional logic to the principles of non-classical logic // Zwischen traditioneller und modernen logik. Nichnklassische Ansatze. Mentis, 2001. P. 297–310.

[15] *Ivlev Y. V.* Quasi-matrix logic // Journal of Multi. Val. Logic and Soft Computing. 2005. Vol. 11. № 3–4. P. 239–252.

[16] *Rescher N.* Many-valued logic. N. Y.: McGraw-Hill, 1969. 359 p.

Yuriy V. Ivlev

The Subject and Prospects of Development of Logic

Ivlev Yuriy Vasiljevich
Lomonosov Moscow State University.
27-4 Lomonosovsky prospect, GSP-1,
Moscow, 119991, Russian Federation.
E-mail: `ivlev.logic@yandex.ru`

The article discusses a subject of logic and some prospects for its development. It is argued that logic is the science of thinking. That is, thinking is an object of the science of logic. The subject of logic is a special structure of thoughts and thinking processes which is called (quite unsuccessfully, according to the author of the article) forms of thoughts and processes of thinking. These structures are discovered by partial abstraction from both semantic and substantive meanings of non-logical terms which are included in the language expressions that represent thoughts and processes of thinking. The modern logic differs from the traditional logic in using methods which are similar to mathematical methods — methods of symbolic logic. However, it preserves all achievements of traditional logic which are important for both scientific and everyday knowledge. The logic that is described in some textbooks published in the forties of the last century in the USSR is called surrogate. There are said to be empirical and theoretical levels of research in logic, as well as logic and "as-if-logic", classical and non-classical logics. The prospects for the development of "as-if-logic" and the logic itself are under discussion. The usefulness of research in the field of "as-if-logic" is highlighted — there can be created a range of "as-if-logical" systems with some of them being interpreted as actual logical systems itself afterwards. There can be developed new methods for proving meta-theorems, which will be applied in proving some results concerning actual logical systems. Two directions are indicated to be prospects for the development of logic — empirical and theoretical researches. Possible applications of quasi-matrix logic in the field of logic as well as in the other areas of cognition are identified.

Keywords: the object of the science of logic, the subject of logic, traditional logic, modern logic, "as-if-logic"

References

[1] Asmus, V.F. *Logika* [Logic]. M., 1947. 388 pp. (In Russian)

[2] Voyshvillo, E. K., Degtyarev, M. G. *Logika kak chast' teorii poznaniya i nauchnoj metodologii* [Logic as a part of the theory of cognition and scientific methodology], Book II. M., 1994. 332 pp. (In Russian)

[3] Ivlev, V.Yu. "Kategorii neobkhodimosti, sluchainosti i vozmozhnosti: ikh smysl i metodologicheskaya rol' v nauchnom poznanii" [Categories of necessity, chance and opportunity: their meaning and methodological role in scientific knowledge], *Filosofiya i obshchestvo* [Philosophy and society], 1977, No. 3, pp. 108–125. (In Russian)

[4] Ivlev, Yu.V. *Soderzhatel'naya semantika modal'noj logiki* [Contentive semantic of modal logic]. M., 1985. 170 pp. (In Russian).

[5] Ivlev, Yu.V. *Logika v upravlenii* [The logic in the management]. M.: The Academy of Ministry of Interior, 1979. 170 pp. (In Russian)

[6] Ivlev, Yu.V. *Logic* [Logic]. M., Prospekt, 2016. 296 pp. (In Russian)

[7] Ivlev, Yu.V. *Modal'naya logika* [Modal logic]. M., 1991. 224 pp. (In Russian)

[8] Ivlev, Yu.V. "Kvazifunkcional'naya logika" [Quasi-functional logic], *Nauchno-tekhnicheskaya informaciya. Seriya 2: Infrmacionnye processy i sistemy.* [Scientific & technical information. Series 2: Inform. processes & systems] 1992, No. 6, pp. 12–20. (In Russian)

[9] Ivlev, Yu.V. "Metodologicheskaya funkciya kvazimatrichnoj (kvazifunkcioanl'noj) logiki" [Methodological function of quasi-matrix (quasi-functional) logic], in: *Metodologiya v nauke i obrazovanii* [Methodology in science and education]. Materials of the all-Russian conference of universities and academic institutions (Moscow 30–31 March 2017), M.: Izdat-vo MGTU im. H. Uh. Bauman, 2017, pp. 61–64. (In Russian)

[10] Ivlev, Yu.V. "Tablichnoe postroenie propozicional'noj modal'noj logiki" [Truth-tables for modal logic], *Vestnik Mosk. Un-ta. Ser. «Filosofiya»* [Herald of M.S.U., ser. «Philosophy»], 1973, No. 6, pp 51–61. (In Russian)

[11] Karpenko, A.S. *Mnogoznachnye logiki.* [Many-valued logic. Series «Logic and Computer»], Vol. 4. M: Nauka, 1997, 223 pp. *Seriya «Logika i komp'yuter».* (In Russian)

[12] Ivlev, Yu.V. "Generalization of Kalmar s method for quasi-matrix logic", *Logical Invistegations*, 2013, Vol. 19, pp. 281–307.

[13] Ivlev, Yu.V. "Theory of Logical Modalities", *Multi. Val. Logic*, 2000, Vol. 5, pp. 91–102.

[14] Ivlev, Yu.V. "Outlines of the transition from the principles of traditional logic to the principles of non-classical logic", in: *Zwischen traditioneller und modernen logik. Nichnklassische Ansatze*, Mentis, 2001, pp. 297–310.

[15] Ivlev, Yu.V. "Quasi-matrix logic", *Journal of Multi. Val. Logic and Soft Computing*, 2005, Vol. 11, No. 3–4, pp. 239–252.

[16] Rescher, N. *Many-valued logic.* New York: McGraw-Hill, 1969. 356 pp.

Логические исследования
2018. Т. 24. № 1. С. 129–145
УДК 16

Logical Investigations
2018, Vol. 24, No. 1, pp. 129–145
DOI: 10.21146/2074-1472-2018-24-1-129-145

Nikolai N. Nepejvoda

Formalization as the Immanent Part of Logical Solving

Nepejvoda Nikolai Nikolaevich
Ailamazyan Program System Institute of RAS
Pereslavl-Zalessky, Yaroslavl Region, 152020, Russian Federation.
E-mail: nnn@nnn.botik.ru

The work is devoted to the logical analysis of the problem solving by logical means.

It starts from general characteristic of the applied logic as a tool:

1. to bound logic with its applications in theory and practice;
2. to import methods and methodologies from other domains into logic;
3. to export methods and methodologies from logic into other domains.

The precise solving of a precisely stated logical problem occupies only one third of the whole process of solving real problems by logical means. The formalizing precedes it and the deformalizing follows it.

The main topic when considering formalization is a choice of a logic. The classical logic is usually the best one for a draft formalization. The given problem and peculiarities of the draft formalization could sometimes advise us to use some other logic.

If axioms of the classical formalization have some restricted form this is often the advice to use temporal, modal or multi-valued logic. More precisely, if all binary predicates occur only in premises of implications then it is possible sometimes to replace a predicate classical formalization by a propositional modal or temporal in the appropriate logic. If all predicates are unary and some of them occur only in premises then the classical logic maybe can replaced by a more adequate multi-valued. This idea is inspired by using Rosser–Turkette operator J_i in the book [22]. If we are interested not in a bare proof but in construction it gives us it is often to transfer to an appropriate constructive logic. Its choice is directed by our main resource (time, real values, money or any other imaginable resource) and by other restrictions. Logics of different by their nature resources are mutually inconsistent (e.g. nilpotent logics of time and linear logics of money).

Also it is shown by example how Arnold's principle works in logic: too "precise" formalization often becomes less adequate than more "rough".

Keywords: applied logics, formalization, choice of logic

1. Introduction

There is a long and hard way to reach relatively full and systematic description of problem solving by logic. But miles begins with one step.

This work is the first in series of two devoted to holistic analysis of problem solving by formal logical methods. We don't separate purely logical parts from informal ones. Aspects are stressed which are usually relatively weakly investigated: the choice of a logic during formalization; the correspondence between draft and working formalisms.

This paper is mainly methodological. Its results are the first steps to systematization and comprehension knowledge on problem solving process from the point of view of current situation in formal logic: a lot of heterogenous formalisms.

2. Applied logic

The applied logic [49] is a branch of the logic. It positions itself and the whole Logic Science as a bridge between mathematics, computer science, humanities and practice. Its main goals are the following:

1. to state ties and mutual understanding between logics and other domains of science and practice;
2. to comprehend methodological and logical aspects of other domains and adaptation them into logics;
3. to borrow and to adopt useful methods of other domains into logics;
4. to grasp existing and possible practical and applied potentials of theoretical logics;
5. to criticize practitioners from the high level logical point of view and logicians form the high level practical point of view.

Let us unfold each point.

1. Establishing ties. Languages and reasoning manners of modern logic and of majority other scientific and practical domains are very different in their paradigms. It is a fine theoretical and important practical task to connect together dissimilar paradigms. Usually it demands to reformulate some key notions in a more abstract manner.

Example 1. Let us now consider the problem of infinitesimals and infinite large values in the calculus. These notions are declared ill by mathematicians at the middle of XIX age. Though physicists and practitioners continued to use them fruitfully.

These phenomena had been re-substantiated by A. Robison (1961, [55] revised edition). He used high level paradigm of model theory discarding all concrete data types. Robinson's discovery leads to fundamental methodological consequences (this appears often when the level of notions is upgraded). His student Luxemburg [34, 35] proved that the statement "Logically impossible that infinite can be a part of finite" is false, which leads to the alternative set theory [66]. Russian translation of this book contains a fine methodological preface made by Belyakin [6].

Example 2. It is very hard to rise the level of notions correctly. This can be shown on example of ill formed set theory **ZF**. It have arised as a reaction of pure mathematicians on "restriction of their freedom of speech" by the type theory of B. Russel [67]. Principia provides a correct method to avoid paradoxes in the set theory: to write down types of all data and not to mix them arbitrarily. Computing forces many mathematicians to do this but initially they attempted to preserve usual inaccuracy when upgrading level of notions. High levels are very severe for consistency and justifying. And they avenged. A contradiction in **ZF** with the strongly inaccessible cardinal had been found by two completely different ways (Belyakin, Kiselev [7, 24, 25]). Hence it is impossible to speak about truth of set-theoretic statements in the natural model of **ZF** (which requires that cardinal). **ZF** is almost inconsistent and the bad guy is here not the axiom of choice but the axiom schema of replacement allowing one to mix arbitrary objects[1].

2. Methodologies transfer. Methodology diverges from a method like a common idea from its concrete realization. The first successful transfer of useful methodology and paradigm into logic was Mill's invention of an inductive logic [38]. This is a very hard task as showed e.g. the transparent logic [63]. It is unsuccessful because it directly imported constructions of λ-calculus. Mathematics gives the methodology to the mathematical logic. As shown before, ML often forgets its second parent becoming simply a branch of pure mathematics.

3. Transferring methods. Logic started when methods of geometry were transferred to reasoning analysis. Aristoteles used letter notations for propositional variables. Definition of inference as "a discourse in which, certain

[1] A reaction of the mathematical society on Belyakin and Kiselev results was predictable. First these results were blocked by reviewers (often with resolutions like: "Errors are not found but this result is disgusting", "It cannot be that the whole branch of science 50 years studied nonsence". After this fails full silence and disregarding. New works using large cardinals are published now. This situation is a consequence of the global corruption of science induced by the cult of success and forgetting the notion of honour.

things being laid down, something different from the posita happens from necessity through the things laid down". (Topics, book 1, ch. 1 [3])[2].

Algebra was incomparable as a source of methods for a long time. Britain school of XIX age built strong foundations for logic [40, 11, 12]. Using algebraic methods together with set-theoretical is the source of original methodology of mathematical logic. Now computer science is a new source of ideas and methods.

4. Seeing possibilities. Here are lots of good examples. We mention the two most important ones from heroic for logic 30ths: undecidability (Gödel [19]); applying boolean algebra to synthesis of electronic schemata (Shestakov [59, 60]).

5. Criticism. Why criticism but not justification? If we pose a goal to justify the given decision a scientist plays the role of a priest praying but not penetrating the essence[3].

An excellent and striking example of tough criticism is given in Example 2. **ZF** which is almost standard in modern mathematic become very dubious. This example needs some extra methodological analysis.

There is a phenomenon of *conceptual contradictions* revealed in the theory of nonformalizable notions [41]. Theory is consistent by itself. But its slight and natural modifications make it inconsistent because some statements or notions interfere. An example are here axioms of powerset and of substitution in **ZF**). Logic can reveal conceptual contradictions. This is important for high types where "common sense" and "intuition" are misleading too often. Generally when the level of notions becomes higher then we have less "freedom" and more bad consequences of hidden conceptual contradictions. On the level of reflexes even direct contradiction can be often easily bypassed.

3. Logical process

Fig. 1 illustrates the whole process solving a problem logically. Two of the three transformations (vertical arrows) are poorly represented in logical works. Numerous remarks on formalization process usually relate to most obvious parts of it. State of arts with deformalization is "almost ignoring".

4. Formalization

There are four components of this process.

[2]It is not related with the form of syllogism; English translation is ill here because inserted "syllogism" instead of e.g. "demonstration".

[3]As noted Sei-Shonagon here a gracious sight and a pleasing voice pronouncing complex and nice mantras are needed [57].

$$\begin{tikzcd}
\text{Problem} \arrow[d, "\text{Formalizing}"] & \text{Treatment} \\
\text{Task} \arrow[r, "\text{Proof search}"] & \text{Solution} \arrow[u, "\text{Deformalizing}"']
\end{tikzcd}$$

Рис. 1. Solving process

1. Choice of a logic (classical, multivalued, constructive (which?), modal or temporal, other)[4].
2. Replacing notions by terms.
3. Omitting natural properties hindering our formalization.
4. Granting acceptable time and resource spending to find a solution.

4.1. Choice of a logic

This aspect is poorly enlightened in the existing logical works. Moreover it looks too hard to try transferring here methods of other branches of science. Usually a logic is chosen by the following arguments.

1. Tradition.
2. Problem and condition on used tools and resources.
3. Peculiarities of the draft formalization.

Let us give preliminary directions how to choose a logic. The main aspect is here a clear insight of our problem as a goal in given conditions, restrictions and limits. Roughly speaking there are the three types of goals.

1. To construct.
2. To describe.
3. To state new properties of earlier described entities.

---

[4] This is not a classification. Standard list of Congress on Universal Logic [1] also doesn't: modal logics; substructural logics; linear logics; relevant logics; fuzzy logics; non-monotonic logics; paraconsistent logics; intensional logics; temporal logics; many-valued logics; high order logics; free logics.

It is dissatisfactory for us and does not meet logical demands (mixed notions of different levels; intersecting notions).

If there is a description which is to be investigated then its logic would be changed only by very strong reasons. Thus here a tradition is a crucial argument. But in mathematics and computer science is well known that sometimes to change a representation for a formally isomorphic one is a big step to invention.

Goals and principles of description and construction are very different. Thus first coordinate to classify a logic is its place on the scale descriptive $\to$ constructive. A purely descriptive logic can express complex properties but it cannot give a realizable construction. A purely constructive one allows us to extract an effective construction realizable by our resource limits. A general case is a mixed one. For example the classical logic sometimes can give a construction and sometimes is purely descriptive.

Constructions and descriptions can take into account resources explicitly or implicitly. This characteristic also is not binary.

A logic can be first-order (e.g. classical esp. propositional). Another logic can demand in its natural semantics higher order essences (e.g. intuitionistic realizability for the propositional logic). This is another opposition. It is not exclusive also. E.g. the intuitionistic logic has formally first-order semantics of Kripke models.

And the last characteristic is whether exists a notion of a logical value and whether the set of values is fixed. There are no logical value for a formula in realizability and in possible worlds semantics. Maybe this characteristic is binary.

Let us consider from this point of view various logics to give some directions how to choose one.

Classical

The classical logic has the best formalization, transformations of sentences and proof search techniques. Those techniques are widely known. By these reasons the classical logic is usually chosen by tradition. The first draft of formalization is reasonably almost always made by the classical logic. But it is necessary to remember a law of programming: the first draft is made to be discarded completely later. This method is worth to be borrowed by logicians. There is one more strong reason why to use the classical logic first. It had been shown in theory of nonformalizable notions [41, 42] that in a system of such notions the best logic to formalize a given single state of their interrelations is classical one. And last but not least a form of a classical theory can advise a non-classical logic now describing a lot of states of (nonformalizable) notions or simply more effective in the particular case.

Limitations of the classical logic are the necessary consequences of its accomplishments.

The classical logic has maximally strong epistemological assumptions.

1. World is stable;

2. all notions are well defined and coarsed down to binary;

3. we know all (*in principle)*: $A \vee \neg A$.

Characteristics of the classical logic are: descriptivity in common case; constructivity in many particular cases; full ignoring of resource limits and demands on admissible tools; first order and possibility of natural extension to higher orders; minimality of logical values set; undecidability of predicate logic; NP-completeness of propositional one.

Modal and temporal

This class of logics now is an important practical tool (first of all in verification of program models [13, 54, 65]). Say a typical formula in verification of a program model is [13]

$$\mathbf{AG}(Req \to \mathbf{AF} Ack). \tag{1}$$

AG means "in each point of each computation starting in this state", **AF** is "in a some point of each computation starting in this state". This formula can be read

There is a moment of acknowledgement for each demand.

This formula cannot be expressed in the classical first order logic and in standard modal logics. It showed that sometimes we can replace predicates and sometimes second order formulas by a propositional form in an adequate logic. And those propositional statements have a decision algorithm of acceptable complexity. A process of accurate design and choice of an applicable logic is described in [13]. Let us try to understand why here was a success.

When verification problems are formulated by the classical logic, binary and second order predicates are used in limited way: only in premises. Conclusions contain only unary predicates describing demanded properties of program states. Thus there is a hypothesis. *Modal or temporal logic can be successfully applied if classical formulas have some limited form.*

The main characteristics of logics of these classes. Descriptivity (attempts to crossbreed modality and time with constructive logics lead to monsters); successful implicity when expressing conditions on models; good accommodation to conditions on multiworld structures and execution paths; full refusal from universality; full refusal from fixed set of logical values; possibility to express high order conditions in a propositional form.

Constructive

Constructive logics are needed when we find not only a bare proof but its realization by the given tools under the given limits of resources. So using them is forced by a problem and its context. Usually classical formalisms whether do not grant any construction or its extraction is too complex and the extracted construct is too clumsy and costly.

The most known constructive logic is intuitionistic one [26, 39, 53]. It is used in the system of demonstrative programming and proof checking **AGDA** [2]. Experiments (see e.g. [37]) showed an extremely high complexity of programming and demands for computational resources for relatively simple tasks. Thus the "universal" method again fails in praxis. A source of complexities is that the intuitionistic logic has the weakest demands on tools and resources. A computation is to be finite in time and memory but no limits are stated [50, 45, 46, 47]. And one more obstacle: complexity of the intuitionistic propositional logic is higher than of the classical one [62].

So it is necessary to choose a constructive logic for the given class of problems and restrictions.

An excellent example is the infon logic (**PIL**-logic) of Gurevich [20, 9]. Formally this is a linear time decidable fragment of the intuitionistic logic. But it has a valuable system of realizations for problems of information search and security. Here a reduced form of the deduction rule is sufficient:

$$\frac{B}{A \Rightarrow B}\,. \tag{2}$$

Intuitionistic and infon logics demand higher order functions for their realizability semantics.

Another example is the interfaces logic of Kochurov [27, 30, 28, 29], as a first order constructive logic. It is restricted by constructing nets of objects or actions. There are the following rules for implication in it:

$$\frac{A \Rightarrow B,\ B \Rightarrow C}{A \Rightarrow (B \Rightarrow C)}\quad \frac{A \Rightarrow (B \Rightarrow C)}{A \Rightarrow B,\ B \Rightarrow C}\quad \frac{A \Rightarrow B,\ B \Rightarrow C}{(A \Rightarrow B) \Rightarrow C}\quad \frac{(A \Rightarrow B) \Rightarrow C}{A \Rightarrow B,\ B \Rightarrow C}$$
$$\frac{A \Rightarrow B,\ A \Rightarrow C}{A \Rightarrow (B \& C)}\quad \frac{A \Rightarrow (B \& C)}{A \Rightarrow B,\ A \Rightarrow C}\quad \frac{A \Rightarrow C,\ B \Rightarrow C}{(A \& B) \Rightarrow C}\quad \frac{(A \& B) \Rightarrow C}{A \Rightarrow C,\ B \Rightarrow C}$$

A theory defines the net of all objects and actions existing in a system. A realization is a subnet from members of premiss to members of conclusion.

There is one more important aspect of constructive logics: *The Main Resource* [48, 51].

Essence of the time is its non-invertibility and foundness. We cannot spend nothing because we are spending time. Every process spending time gives necessarily a fatal error (death) in a finite time. Thus every sequence of actions is finite. Because the fatal error can be described algebraically as zero an algebraic characteristic of action space is to be nilpotent: each composition of actions in finite number of steps gives 0. So the logic of noninvertible actions is called *nilpotent* [52, 44].

Due to non-invertibility of time each loop which is logically correct will end in the finite number of steps. This is expressed by the rule

$$\frac{A \vee B \Rightarrow B \vee C}{A \Rightarrow C}\ . \tag{3}$$

Here A is the condition to start a loop (precondition), B is the condition which holds at the beginning of each step of the loop (invariant), C is the postcondition. Disjunction $\vee$ can be interpreted classically if elementary properties are decidable. Implication is treated constructively as existence of a program. Nilpotent logic is linear time decidable. Rule (3) forces that law of identity $A \Rightarrow A$ is inacceptable and even false here. Moreover there is a rule of excluded stagnation

$$\frac{A \Rightarrow A}{\neg A}\ . \tag{4}$$

Development of nilpotent logic leads to the notion of a proof as a graph with possible branches and loops. A proof by the natural deduction for nilpotent logic allows "vicious circles". The restriction is here that each loop must contain an application of modus ponens

$$\frac{A \qquad A \Rightarrow B}{B}\ . \tag{5}$$

It is interpreted as application of an action in a state where A holds transferring into a state where B holds. Loop containing proofs in a provability logic [58] together with similar proofs in nilpotent logics lead to a methodological assumption.

> *The abstract property that there are nilpotent steps in a proof (each sequence is finite) then we can use proofs with loops if in each loop there is a nilpotent step.*

Nilpotent logic is first-order and the main resource is implicit. Implicit representation of time in the nilpotent logic (and analogous peculiarities of practical time logic) allows us to state a claim. In logic implicit representation is often better than explicit. Another argument for this claim that many logics where resources were introduced explicitly become practically useless.

Girard's linear logic has money as the main resource [14, 17, 18]. Unfortunately even its propositional part is undecidable because it includes all possible connectives but not necessarily needed [33]. Linear and nilpotent logics are mutually inconsistent. $A \Rightarrow A$ is accepted in linear ones because it is possible not to spend money[5].

[5] Make yourself conclusions about "Time is money".

Intermediate case

Some classical theories are really constructive. It suffices that a theory is full and decidable. A stronger form of constructiveness arises if there is an quantifier elimination algorithm. Then each existing object can be named by internal means of the theory and its characteristic property can be computed algorithmically using existence theorem. But usually such theories have very high level of computational complexity. Good examples are here the elementary geometry and the elementary algebraic theory of real numbers [36, 61].

Thus there is a problem: like Gurevich, to construct simply decidable constructive logics for these theories.

One more case. Category logics are a kind of constructive from our point of view. They give categorical constructs for categorical problems (for example to construct values of dotted arrows, limits and colimits, adjoints).

R. Burstall [8] noted that the category theory is in essence constructive one. Moreover, it gives practical higher order constructs for computer science[6]. Development of category logics reaffirms Burstall's concepts (see Lambek, Bell, Vasyukov [32, 5, 64])

From classical to non-classical

Now it is possible to give some advices how to use non-classical logics during problem solving. The advices, of course, now are a bit eclectic.

If the goal of our work is to find a program or a composition of actions, it may be very fruitful to transfer to constructive logic (if it is well chosen).

If binary predicates are used only in premises and in a limited way it is possible that we can find an appropriate modal or temporal logic.

If all predicates are unary and some of them occur only in premises then the classical logic maybe can replaced by a more adequate multi-valued. This idea is inspired by using Rosser-Turkette operator J_i in the book [22].

Example 3. Let us consider a partial case how to transfer from classical logic to propositional modal one. Let we can classify variables into two types: worlds and props such that the following holds.
There is a single binary predicate and in each its occurrence the first argument is a world and the second is a prop: $\mathrm{SAT}(w, p)$.
There are several unary predicates and unary functors from props to props. There are no other predicates and functors using or giving props.
Some axioms can be transformed to:

$$\forall p(P(p) \supset \forall w(\mathrm{SAT}(w, p) \equiv \mathfrak{A}(w, p))).$$

Here p is a prop, w is a world, $\mathfrak{A}$ is arbitrary.

[6]Unfortunaley these methods are still not used excluding some experimental systems thrown away immediately after generating some scientific publications and Ph.D. theses.

Then semantics of the strong implication can be expressed by a formula

$$\forall p \left(I(p) \supset \forall w \left(\begin{array}{l} \mathrm{SAT}(w,p) \equiv \forall v\,(R(w,v)\& \\ \qquad \mathrm{SAT}(v,\mathrm{Pre}(p)) \supset \mathrm{SAT}(v,\mathrm{Con}(p))) \end{array} \right)\right) \tag{6}$$

Here $I(p)$ can be understood as "p is an implication", $\mathrm{Pre}(p)$, $\mathrm{Con}(p)$ then disassemble it for premiss and conclusion. If there is a such axiom or theorem in our theory it is reasonable to try to transform some other axioms such that they will describe modal connectives and then change a logic.

4.2. Notions change

This aspect of formalization is relatively well and adequately described (see say a classical book [31]). Of course there arise new fine points. For example an important new branch is formalizing of nonformalizable notions [21, 10, 41, 42, 43, 15]. Nonformalizability is the logical characteristic of living. But during each formalization living notions are replaced by their monuments[7].

4.3. Elimination of disturbing

This aspect of formalization is described excellently in works on applied mathematics and physics. See the classical treatise of lord Kelvin [23]. This action is somewhat Jesuitic called "abstraction" or "distraction". But abstraction assumes lifting of notion level, transfer from concrete real notions to ideal notions or from low-level ideal notions to high level essences. But for example "abstraction from influence of other planets excluding Jupiter" is lowering of model level. Here can be only distraction. In the most expressive form this was formulated by Chebyshov in his famous lecture "Mathematical foundations of clothes cutting": "We accept for simplicity that a human body is a sphere".

Distracting is reflected in logical works a bit less narrowly. But here it reveals its pure forms not vestured by euphemisms like "small" or "insignificant". Let consider a simple logical example.

"*Prof claims that students using Ipad become more stupid*".

$$\Pi\text{п} \Leftrightarrow \forall x\,(\text{Ст}(x)\&\text{CA}(x) \Rightarrow \text{T}(x)). \tag{7}$$

This translation is almost precise but it is not handy for hand construction (say) of a semantic tableaux. Consider now more complex proposition.

"*Prof claims that students using Ipad become more stupid but student Sherbinin argues*".

To test this sentence by hand for non-contradiction we can translate its part less precisely but more handy to our particular task:

[7]Remember historical anecdote. When Heavyside counted to be dead he went at night from his hideout to the new monument devoted to him and said: "I do not look like me".

$$
\begin{aligned}
(8)\quad & (\text{Пп} \Rightarrow \forall x\,(\text{Ст}(x)\ \&\ \text{CA}(x) \Rightarrow \text{T}(x)))\ \& \\
& \qquad\qquad (\text{Пш} \Rightarrow \exists\, x\,(\text{Ст}(x)\ \&\ \text{CA}(x)\ \&\ \neg\text{T}(x))) \\
& \qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad \Rightarrow \neg\text{Пп} \vee \neg\text{Пш}.
\end{aligned}
$$

If we will test the disjunction of parts it is better to omit another part of equivalency:

$$
\begin{aligned}
(9)\quad & (\forall x\,(\text{Ст}(x)\&\text{CA}(x) \Rightarrow \text{T}(x)) \Rightarrow \text{Пп})\& \\
& \qquad\qquad (\exists x\,(\text{Ст}(x)\&\text{CA}(x)\&\neg\text{T}(x)) \Rightarrow \text{Пш}) \\
& \qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad \Rightarrow \text{Пп} \vee \text{Пш}.
\end{aligned}
$$

Note that in each case we weakened the premiss thus if we find a solution it remains valid for full translation.

V. Arnold formulated in his excellent lecture [4] the main principle of good formalization: *say as few as possible.*

When working with a ready formalism it is necessary to keep in mind another warning of Arnold from [4]: if we get a result by a "precise method" it is to be rechecked by another method[8], because omitted features will often avenge recklessly and surprisingly. Say, optimal decision (by some precise criterion) almost always turns out to be bad or even fatal in reality[9].

Example 4. Our institute develops a neuron net to give advices to medics. Its first variant was learned by more than hundred thousands real examples and has almost 100 evaluation criteria. After more than 1000 steps of training it gives an excellent for neuron nets result: 98% of correct answers. After analysis it was stated that 98% of doctors' decisions were given mechanically using so-called standards of treatment. Thus the net simply restored these standards (and the admissible number of non-standard decisions prescribed by them is precisely 2%).

4.4. Effectiveness

Effectiveness control can be performed before and during formalization. In many cases efficiency is to be the decisive criterion of formalization choice and especially changing. This is an important rule in computer science and would be the same in logics [56, 16].

5. Conclusion

This work represents the first part of the plenary lecture on 10th Smirnov Readings. The second one will be published in the next issue of this journal

[8] Possibly by imprecise and informal.

[9] Inoptimality and nonformalizability are characteristics of living; optimization almost always leads to death when situation changes radically.

and is devoted to deformalization. Of course when rewritten into English text lost some fine aspects of Russian original and became more dry.

Extended Russian version of these two papers will be published in "Program Systems and Applications" as a single paper.

References

[1] "6th World Congress and School on Universal Logic", [https://www.uni-log.org/vichy2018 accessed on 08.08.2017].

[2] "The AGDA Wiki", [http://wiki.portal.chalmers.se/agda/pmwiki.php accessed on 08.08.2017].

[3] Aristotle. *The Complete Works of Aristotle: The Revised Oxford Translation.* Princeton, N.J: Princeton University Press, 1984.

[4] Arnold, V.I. *"Zhestkie" i "myagkie» matematicheskie modeli"* ["Hard" and "soft" mathematical models]. Moscow: MCNIMO, 2004. 32 pp. (In Russian)

[5] Bell, J. L. "The Development of Categorical Logic". In: *Handbook of Philosophical Logic,* Vol. 12. Springer: 2005.

[6] Belyakin, N.V. "Ot redaktora perevoda" [Editor's Notes]. in: Vopenka P. *Al'ternativnaya teoriya mnozhestv: novyj vzglyad na beskonechnost* [Alternative set theory: new pointo of view on infinity]. Novosibirsk: Izdatelstvo Insutituta Mastematiki, 2004. pp. 11–29. (in Russian)

[7] Belyakin, N.V. "O nesushchestvovanii bol'shih kardinalov" [On non-existence of large cardinals], *Chislo [Number]*, Moscow: MAKS Press, 2009. pp. 169–192. (In Russian)

[8] Burstall, R.M. "Electronic category theory". In: Dembiński P. (eds) *Mathematical Foundations of Computer Science 1980. MFCS 1980.* Lecture Notes in Computer Science, Vol. 88. Berlin, Heidelberg: Springer, 1980.

[9] Cotrini, C., Gurevich, Yu. "Basic primal infon logic", *Journal of Logic and Computation*, 2016, Vol. 26, Issue 1, pp. 117–141.

[10] Belyakin, N.V., Zhevlakova, E.K. "Operaciya diagonalizacii v voprosno-otvetnyh sistemah" [Diagonalization in QA systems], *Vychislitelnye sistemy* [Computing systems], 1976, No. 67, pp. 113–126.

[11] Boole, G. *The Mathematical Analysis of Logic, Being an Essay towards a Calculus of Deductive Reasoning.* London, England: Macmillan, Barclay & Macmillan, 1847.

[12] Boole, G. *The Laws of Thought, facsimile of 1854 edition, with an introduction by John Corcoran.* Buffalo: Prometheus Books, 2003.

[13] Clarke, E. M., Grumberg, O., Peled, D. *Model checking.* MIT Press, 2010, pp. 330.

[14] Di Cosmo R., Miller, D. "Linear Logic", *The Stanford Encyclopedia of Philosophy (Winter 2016 Edition),* ed. by Edward N. Zalta, [https://plato.stanford.edu/archives/win2016/entries/logic-linear/ accessed on 08.08.2017].

[15] Finn, V.K. *Iskusstvewnnyj intellekt: metodologiya,primeneniya, filosofiya* [Artificial intelligence: methodology, applications, philosophy]. Moscow: KRASAND, 2011, 448 pp. (In Russian)

[16] Fortnow, L.; Homer, S. "A Short History of Computational Complexity", *Bulletin of the EATCS*, 2003, Vol. 80, pp. 95–133.

[17] Girard, J.-Y. "Linear logic", *Theoretical Computer Science*, 1987, Vol. 50, pp. 1–102.

[18] Girard, J.-Y. "Light Linear Logic", *Information and Computation*, 1998, Vol. 143, No. 2, pp. 175–204.

[19] Gödel, K. " Über formal unentscheidbare Sätze der Principia Mathematica und verwandter Systeme, I", *Monatshefte für Mathematik und Physik*, 1931, Vol. 38, pp. 173–198.

[20] Gurevich, Yu., Neeman, I. "Infon logic: the propositional case", *ACM Transactions on Computation Logic*, January 2011, Vol. 12, Issue 2, No. 9, pp. 1–28.

[21] *Collected Papers of Stig Kanger with Essays on his Life and Work*, 2 vol., eds. by Ghita Holmström-Hintikka, Sten Lindström & Rysiek Sliwinski. Dordrecht (NL): Kluwer Academic Publishers, 2001.

[22] Karpenko, A.S. *Razvitie mnogoznachnoj logiki* [The development of multi-valued logic]. Moscow: LKI Publishers, 2014. 448 pp. (In Russian)

[23] Lord Kelvin, Tait, P.G. *Treatise of natural philosophy part I, II.* Cambridge: University Press, 1912.

[24] Kiselev, A.A. *Nedostizhimost' i subnedostizhimost: monografiya v dvuch chastyah. Ch. 1* [Inaccessibility and subinaccessibility. In two parts. Part 1]. Minsk: BGU Edition, 2011. 113 pp. (In Russian)

[25] Kiselev, A.A. *Nedostizhimost' i subnedostizhimost: monografiya v dvuch chastyah. Ch. 1* [Inaccessibility and subinaccessibility. In two parts. Part 2]. Minsk: BGU Edition, 2011, 154 pp. (In Russian)

[26] Kleene, S.C. *Introduction to Metamathematics.* N. Y.: 1952.

[27] Kochurov, E.V. "Konstruktivnyj sintez pol'zovatel'skih interfejsov Web-prilozhenij" [Constructive synthesis of user interfaces of Web-applications], *Programmnye sistemy: teoriya i prilozheniya* [Program Systems: Theory and Applications], 2013, Vol. 4, No. 18, pp. 3–25. (In Russian)

[28] Kochurov, E.V. "Ob odnoj konstruktivnoj logike postroenij na grafah" [On one constructive logic of graph constructions], *Devyatye smirnovskie chteniya po logike*, Moscow: Sovremennye tetradi, 2015, pp. 22–24. (In Russian)

[29] Kochurov, E.V. "Primenenie logiki postroenij na grafah k ispolneniyu modelelj biznes-processov" [Application of the graph constructions logic to business-process modelling], *Programmnye sistemy: teoriya i prilozheniya* [Program Systems: Theory and Applications], 2015, Vol. 6, No. 4, pp. 359–366. (In Russian)

[30] Kochurov, E.V., Nepejvoda N.N., Grigotrevskij I.N. "Zamechaniya o logikah postroenij na grafah i ih primenenii" [Notes on logics of graph constructions and their applications], *Sbornik nauchnyh dokladov Vtoroj mezhdunarodnoj nauchno-*

prakticheskoj konferencii 'Tehnicheskie nauki: teoriya, metodologiya i praktika' [Collection of scientific presentations. Second international scientific-practical conference 'Technical science: theory,methodology and practice'], Moscow: ANO 'Scientific Survey', 2014. (In Russian)

[31] Kohen, M.R., Nagel, E. *An Introduction to logic and scientific method.* Harcourt: Brace and Co. 2nd ed. 1993.

[32] Lambek, J., Scott, P.J. *Introduction to Higher Order Categorical Logic.* Cambridge: University Press, 1986.

[33] Lincoln, P., Mitchell, J., Scedrov A., Shankar, N. "Decision problems for propositional linear logic", *Annals of Pure and Applied Logic*, 1992, no 56, pp. 239–311.

[34] Luxemburg, W.A.J. *Nonstandard Analysis, Lectures on A. Robinson's theory of infinitesimal and infinitely large numbers.* Caltech Bookstore, 1962.

[35] Luxemburg, W.A.J. "What is Nonstandard Analysis?", *American Mathematical Monthly*, 1973, Vol. 80, pp. 38–67.

[36] Macintyre, A.J., Wilkie, A.J. "On the decidability of the real exponential field". In: Odifreddi P.G. *Kreisel 70th Birthday Volume*, CLSI, 1995.

[37] Meshveliani, S.D. "Programmirovanie vychislitel'noj algebry na osnove konstruktivnoj matematiki. Oblasti s razlozheniem na prostye mnozhiteli" [Programming of computer algebra by constructive mathematics. Domains with factorization], *Programmnye sistemy: teoriya i prilozheniya* [Program Systems: Theory and Applications], 2017, Vol. 8, no 1, pp. 3–46. (In Russian)

[38] Mill, J.S *A System of Logic, Ratiocinative and Inductive.* New York: Harper & Brothers, 1874.

[39] Mints, G. *A Short Introduction to Intuitionistic Logic.* Kluwer, 2000.

[40] De Morgan, A. *Logic: On the Syllogism and Other Logical Writings*, ed. by P. Heath, Routledge, 1966.

[41] Nepejvoda, N.N. "O formalizacii neformalizuemyh ponyatiy: avtoproduktivnye sistemy teoriy" [Formalizing informalizable notions: autoproductive systems of theories], *Semiotika i iniformatika* [Semiotics and informatics], 1985, Vol. 25, pp. 46–93. (In Russian)

[42] Nepejvoda, N.N. "O formalizacii neformalizuemogo" [Formalizinfg informalizablr], *Logicheskiye issledovasniya* [Logical Investigations], 2001, Vol. 8, pp. 129–143. (In Russian)

[43] Nepejvoda, N.N. "Neformalizuemost kak logicheskaya harakteristika zhizni" [Informalizability as logical characteristic of life], *Online journal 'Logical Studies'*, 1999, No. 3. (In Russian)

[44] Nepejvoda, N.N. "A constructive logic of program schemata on a decidable universe", *Bulletin of the Section of Logic*, 1988, Vol. 17, No. 3/4, pp. 138–145.

[45] Nepejvoda, N.N. "Konstruktivnaya matematika: obzor dostizheniy, nedostatkov i urokov. Chast' I" [Constructive mathematics: survey of susccesses, shortcomings

and lessons. Part I], *Logiceskie issledovaniya* [Logical Investigations], 2001, Vol. 17, pp. 191–239. (In Russian)

[46] Nepejvoda, N.N. “Konstruktivnaya matematika: obzor dostizheniy, nedostatkov i urokov. Chast’ II” [Constructive mathematics: survey of susccesses, shortcomings and lessons. Part II], *Logiceskie issledovaniya* [Logical Investigations], 2012, Vol. 18, pp. 157–181. (In Russian)

[47] Nepejvoda, N.N. “Konstruktivnaya matematika: obzor dostizheniy, nedostatkov i urokov. Chast’ III” [Constructive mathematics: survey of susccesses, shortcomings and lessons. Part III], *Logiceskie issledovaniya* [Logical Investigations], 2014, Vol. 20, pp. 112–150. (In Russian)

[48] Nepejvoda, N.N. “O konstruktivnyh logikah” [On constructive logics], *Sintaksicheskie i semanticheskie issledovaniya neekstensionalnyh logik* [Syntactic and semantic investigations of non-extensional logics], Moscow: Nauka, 1989, pp. 81–92. (In Russian)

[49] Nepejvoda, N.N. *Prikladnaya logika* [Applied logics]. Novosibirsk: NGUPress, 2000, 521 pp. (In Russian)

[50] Nepejvoda, N.N. *Uroki konstruktivizma* [Lessons of constructivism]. Heidelberg, 2011, 108 pp. (In Russian)

[51] Nepejvoda, N.N. “Vyzovy logiki i matematiki XX v. i ‘otvet’ na nih civilizacii” [Challenges of logics and mathematics of XX century and ‘responce’ on them of the civilization], *Voprosy Filosofii* [Problems of Philosophy], 2005, No. 8, pp. 118–128. (In Russian)

[52] Nepejvoda, N.N. “Vyvody v forme grafov” [Proofs as graphs], *Semiotika i informatika* [Semiotics and informatics]. Vol. 26. Moscow: VINITI, 1985. (In Russian)

[53] Van Oosten, J. “Realizability: a historical essay”, *Mathematical Structures in Comp. Sci.*, Vol. 12, No. 3, Cambridge University Press, 2002.

[54] Peled, D., Pelliccione, P., Spoletini, P. “Model Checking”, *Wiley Encyclopedia of Computer Science and Engineering*, 2009.

[55] Robinson, A. *Non-standard analysis*, ed. by Revised. Princeton University Press, 1996.

[56] Sanjeev, A., Boaz, B. *Computational Complexity: A Modern Approach.* Cambridge, 2009.

[57] Sei Shonagon. *The Pillow Book.* London, England: Penguin Books, 2006.

[58] Shamkanov, D.S. “Circular proofs for the Gödel-Löb provability logic”, *Mathematical Notes*, September 2014, Vol. 96, Issue 3–4, pp. 575–585.

[59] Shestakov, V.I. *Nekotorye matematicheskiye metody konstruirivaniyac i uproshcheniya dvuhpolusnyh elektricheskih shem klassa A* [Some mathematical methods constructing and simplification of two-polar electricalk schemes of class A], Dr.Sc. Thesis, 1938. (In Russian)

[60] Shestakov, V.I. “ Algebra dvuhpolusnyh shem postroennyh isklyuchitel’no iz dvuhpolusnikov (algebra A-shem)” [Algebra of bipolar schemes builded only by

bipolar elements (algebra of A-schemes)], *Avtomatika i telemehanika* [Automatics and telemechanics], 1941, No. 2, pp. 15–24. (In Russian)

[61] Solovay, R. M., Arthan, R. D., Harrison, J. "Some new results on decidability for elementary algebra and geometry", *Annals of Pure and Applied Logic*, December 2012, Vol. 163, Issue 12, pp. 1765–1802.

[62] Statman, R. "Intuitionistic Propositional Logic is Polynomial-Space Complete", *Theoretical Computer Science*, 1979, Vol. 9, No. 1, pp. 67–72.

[63] Tichý, P. *The Foundations of Frege's Logic*. Berlin and New York: De Gruyter, 1988. 333 pp.

[64] Vasyukov, V.L. *Categorical Logic*. Moscow: ANO Institute of Logic, 2005. 194 pp.

[65] Vizel, Y., Weissenbacher, G., Malik, S. "Boolean Satisfiability Solvers and Their Applications in Model Checking", *Proceedings of the IEEE*, 2015, Vol. 103, No. 11, pp. 2021–2035.

[66] Vopénka, P. *Mathematics in the Alternative Set Theory*. Leipzig, 1979.

[67] Whitehead, A.N., Russell, B. *Principia Mathematica*, 3 vols. Cambridge: Cambridge University Press, 1925–1927. (In Russian)

Информация для авторов

• Журнал «*Логические исследования*» принимает к публикации рукописи, содержащие изложение оригинальных результатов из различных областей современной логики, ранее не публиковавшиеся и не представленные к публикации в других изданиях. (Рубрики журнала см. `http://iph.ras.ru/login.htm`)

• Решение о публикации текста принимается главным редактором с учетом мнения редколлегии и оценки рецензентов. Решение о публикации принимается в течение двух месяцев с момента предоставления рукописи.

• Плата за опубликование рукописей не взимается.

• Рукопись должна быть представлена в электронном виде и оформлена в формате LaTeX 2$_\varepsilon$ (по согласованию с редколлегией — в MS Word с обязательным предоставлением pdf-файла). При подготовке рукописи в LaTeX 2$_\varepsilon$ необходимо использовать стиль li.sty. Стилевой файл размещен в правилах предоставления рукописей: `http://iph.ras.ru/login_rec.htm`

• Объем рукописи не должен превышать 20 стр. (60 тыс. знаков), включая ссылки, примечания, список литературы, аннотацию.

• Помимо основного текста, рукопись должна включать в себя следующие обязательные элементы на **русском** и **английском языках**:

1) сведения об авторе(ах):
   - фамилия, имя и отчество автора;
   - место работы;
   - полный адрес места работы (включая страну, индекс, город);
   - адрес электронной почты автора.
2) название статьи;
3) аннотация (от 200 до 250 слов);
4) ключевые слова (5-7 слов/словосочетаний);
5) список литературы.

• Цитируемая литература помещается в конце статьи общим списком в алфавитном порядке и оформляется строго в соответствии с правилами. Рукописи на русском языке обязательно должны содержать *два варианта представления списка литературы*:

1) список, озаглавленный «Литература» и выполненный в соответствии с требованиями ГОСТа.

2) список, озаглавленный «References» и выполненный в соответствии с требованиями международных библиографических баз данных.

(Правила оформления литературы — `http://iph.ras.ru/login_rec.htm`)

Статьи следует направлять по адресу
logicalinvestigations@gmail.com

Information for authors

• *Logical Investigations* accepts for submission papers containing original results in all areas of logic. The papers should not have been published or simultaneously submitted to another publication. (Sections of the journal: `http://eng.iph.ras.ru/log_inv.htm`)
• The Editor in Chief makes the decision which of the submitted articles should be published, with due account for opinions of the Editorial Board and the reviewers. The decision is made within two months since the date of submission of the manuscript.
• Authors are not charged for the publication.
• Papers should be submitted electronically in the $\LaTeX\,2_\varepsilon$ format (special permission of the editorial board is needed for submissions to be made in the MS Word format). While typesetting a paper, the style file li.sty and the master file li.tex should be used; both files, along with a sample paper file, can be accessed at `http://eng.iph.ras.ru/page49940199.htm`
• Papers should not exceed 20 pages in the above mentioned format (including the notes, the bibliography, the abstract).
• Footnotes should appear at the bottom of the page and should be numbered sequentially throughout the paper.
• In addition to the principal text, the manuscript should include the following mandatory elements:

1) Information about the author(s):
   - first and last names of the author;
   - affiliation;
   - full address of the place of work (including the postal code, country and city);
   - author's e-mail address.
2) abstract (200 to 250 words);
3) keywords (5-7 words/word combinations);
4) the list of works cited.

• The bibliographical references should be placed at the end of the paper as the general list ordered alphabetically, and formatted in strict accordance with the guidelines of the international bibliographical databases (Scopus and others). Please see the guidelines here: `http://eng.iph.ras.ru/page49940199.htm`

Submissions should be e-mailed to the following address:
logicalinvestigations@gmail.com

Научно-теоретический журнал

Логические исследования / Logical Investigations
2018. Том 24. Номер 1

Учредитель и издатель: Федеральное государственное бюджетное учреждение науки Институт философии Российской академии наук

Свидетельство о регистрации СМИ: *ПИ № ФС77-61228 от 03.04.2015 г.*

Подписано в печать с оригинал-макета 30.05.18.
Формат 70x100 1/16. Печать офсетная. Гарнитура Computer Modern.
Усл. печ. л. 10,1. Уч.-изд. л. 9,3. Тираж 1 000 экз. Заказ № 16.

Оригинал-макет изготовлен в Институте философии РАН

Компьютерная верстка: *Н.Е. Томова*

Отпечатано в ЦОП Института философии РАН
109240, г. Москва, ул. Гончарная, д. 12, стр. 1

Свободная цена

Информацию о журнале «Логические исследования» см. на сайте:
`http://iph.ras.ru/login.htm`