РОССИЙСКАЯ АКАДЕМИЯ НАУК

ИНСТИТУТ ФИЛОСОФИИ

LOGICAL INVESTIGATIONS

Vol. 3

MOSCOW "NAUKA" 1995

ЛОГИЧЕСКИЕ ИССЛЕДОВАНИЯ

Выпуск 3

МОСКВА "НАУКА" 1995

ББК 87.4
Л 69

Рецензенты:

доктора философских наук
Л.Б. Баженов, В.А. Бочаров, И.П. Меркулов

Редколлегия:

Смирнов В.А. (отв. редактор),
Анисов А.М., Арутюнова Н.Д., Бежанишвили М.Н., Быстров П.И.,
Войшвилло Е.К., Герасимова И.А., Карпенко А.С.,
Успенский В.А., Финн В.К.

Логические исследования. Вып. 3. – М.: Наука, 1995. –
Л 69 359 с.
ISBN 5-02-013508-9

Третий выпуск "Логических исследований" включает в себя результаты исследований из различных областей современной логики: логической семантики, теории доказательств и компьютерной логики. Предлагаются новые подходы к логике квантовой механики и интуиционистской логике. Книга завершается тремя оригинальными работами: о логических основаниях простых чисел, музыки и метакосмоса.

Для логиков, философов и специалистов в области компьютерных наук.

Л $\frac{0301060000-176}{042(02)-95}$ 17–1994 II полугодие **ББК 87.4**

ISBN 5-02-013508-9

Е.Д.Смирнова

И.КАНТ И ГИЛЬБЕРТОВСКАЯ ТЕОРИЯ ДОКАЗАТЕЛЬСТВ
(роль идеальных образов у Д.Гильберта и И.Канта)*

Связь интуиционизма с философией И.Канта хорошо известна и исследована достаточно глубоко в работах по основаниям математики и в историко-философской литературе. Логицизм как направление в обосновании математики опирался на идеи Лейбница, противопоставляя в трактовке необходимого, математического знания линию Лейбница линии Канта. Однако интереснейший, с нашей точки зрения, вопрос об отношении гильбертовской программы обоснования математики к идеям Канта не раскрыт достаточным образом.

Я полагаю, что проблема идеальных образов, допускаемых типов абстракций и идеализаций является глобальной и ключевой, позволяющей анализировать теоретическое знание и мышление. В постановке И.Канта основной вопрос состоит не в том, как возможна сама способность мышления, а в том, что и насколько может быть познано разумом и рассудком независимо от всякого опыта. Именно такая постановка проблемы остается решающей и по сегодняшний день. Д.Гильберт также ставит во главу угла вопрос о том вкладе, который вносят в наше познание, с одной стороны, опыт, а с другой - мышление[1]. По существу речь идет о том, какие идеализации и идеальные объекты являются порождениями нашего разума и рассудка и каково их отношение к опытному знанию.

И Гильберт, и Кант рассматривают пути введения идеальных образов, исследуют, каковы сфера, условия и границы их применения. Соответственно встает вопрос о возможности применения традиционной логики и ее законов к высказываниям о такого рода объектах. В целом проблема состоит в правомерности введения понятий, выходящих за границу всякого возможного опыта, за границы объектов любого наглядного созерцания.

Для Канта все наше знание в конечном счете относится к возможным созерцаниям, так как только посредством них дается предмет. "В самом деле, без созерцания всякое наше знание ли-

---

* Работа выполнена при поддержке Международного Фонда "Культурная инициатива", грант N ZZ5000/245.

1 "Сегодня мы намерены... обсудить старую философскую проблему, а именно вызвавший множество споров вопрос о том, какой вклад в наше познание вносят, с одной стороны, мышление, а с другой - опыт. Этот старый вопрос вполне правомерен, потому что ответить на него, в сущности, означает установить, к какому роду относится все наше естественнонаучное познание вообще и в каком смысле все наше знание, которое мы накапливаем в наших естественнонаучных исследованиях, истинно" [2, с.117].

шено объектов и остается в таком случае совершенно пустым" [5, с. 162].

Для Гильберта проблема состоит в нахождении "гармонии между бытием и мышлением". Бесконечное, в смысле актуально бесконечного, нигде не реализуется, его нет в природе и поэтому оно недопустимо как основа нашего разумного мышления. «Что касается понятия "бесконечное", мы должны уяснить, что "бесконечное" не имеет *созерцательного значения* и без дальнейшего исследования вообще не имеет никакого смысла» (выделено мной. - *Е.С.*). И далее: "Мы видели: бесконечное нигде не реализуется, его нет в природе, недопустимо оно без соответствующих предосторожностей и как основание нашего мышления" [2, с. 120]. Однако в основе классической математики лежат такие понятия, как множество натуральных чисел, комплексные числа, трансфинитные числа, бесконечно удаленная точка, и т.д. - и, таким образом, мы используем понятия, образованные разумом, но выходящие за пределы всякого опыта. С одной стороны, сохранение классической математики предполагает такого рода понятия ("Никто не может изгнать нас из рая, который создал нам Кантор"), с другой - "реакция не заставила себя ждать". "Надо согласиться, - пишет Гильберт, - что состояние, в котором мы находимся сейчас в отношении парадоксов... невыносимо. Подумайте: в математике - этом образце достоверности и истинности - образование понятий и ход умозаключений... приводят к нелепостям. Где же иметь надежность и истинность, если даже само математическое мышление дает осечку?" [3, с.348, 349].

Кант также отмечает "склонность разума к расширению за узкие границы возможного опыта". Там, "где ни эмпирическое, ни чистое созерцание не держат разум в видимых рамках... он крайне нуждается в дисциплине, которая укрощала бы его склонность к расширению за узкие границы возможного опыта и удерживала бы его от крайностей и заблуждений, так что вся философия чистого разума имеет дело только с этой негативной пользой". Именно склонность к подобному расширению ведет соответственно к появлению в чистом разуме "целой системы иллюзий и фикций, связанных друг с другом и объединенных принципами". В силу этого "требуется совершенно особое, и при этом негативное, законодательство, создающее... из принципов разума и предметов его чистого применения как бы *систему предосторожностей и самопроверки*" (выделено мной. - *Е.С.*)[2] [5, с.598, 599]. Таким образом, стоит проблема статуса вводимых идей, идеальных объектов, проблема правомерности их использования в познании.

Что касается математики и ее метода, Кант отмечает, что сами "мастера математического искусства" вряд ли философствовали по поводу своей математики, так как это трудное дело. "Откуда же

---

2 Собственно, вопрос о подобном расширении и условиях выхода за границы возможного опыта составляет суть метода идеальных элементов (см. [8]).

получаются понятия, которыми они занимаются... - этот вопрос вовсе не беспокоит их, и вообще им кажется бесполезным исследовать происхождение чистых рассудочных понятий..." [там же, с.608]. Однако именно математика являет, с точки зрения Канта, блестящий пример чистого разума, "удачно расширяющегося самопроизвольно, без помощи опыта". Последнее отнюдь не означает, что чистый разум и в иной сфере может столь же удачно и основательно расшириться в своем трансцендентальном применении, как это ему удается в математике, и применить тот же метод достижения аподиктической достоверности, что и в математике. Вопрос стоит о надеждах и возможностях чистого разума "проникнуть за пределы опыта в заманчивые области интеллектуального" [там же, с.609].

Фреге и Дедекинд стремились к тому, чтобы такие основные понятия математики, как, например, понятие конечного числа, не опирались на наглядные представления, а определялись бы в чисто логических терминах, однако при этом существенно использовалось понятие бесконечного множества. "Фреге и Дедекинд, сделавшие очень много для обоснования математики, оба, независимо друг от друга, применили актуальную бесконечность для того, чтобы обосновать арифметику независимо от всякого наглядного представления и опыта, на чистой логике..." [3, с.346]. Отказ от обращения к опыту, к наглядному созерцанию (в любом смысле) при обосновании аподиктического математического знания чреват при этом подходе умножением сущностей, ничем не ограничиваемым введением идеальных объектов (соответственно и таких, как множество всех множеств или множество всех нормальных множеств и т.д.).

Нам хотелось бы подчеркнуть (ниже мы остановимся на этом подробнее), что Д.Гильберт в своей программе обоснования математического знания существенно опирается на идеи и подход И.Канта. "Уже Кант учил, - и это составляет существенную часть его учения, - что математика обладает *не зависящим от всякой логики устойчивым содержанием*, и поэтому она никогда не может быть обоснована только с помощью логики, вследствие чего, между прочим, стремления Дедекинда и Фреге должны были потерпеть крушение" (выделено мной. - *Е.С.*)" [там же, с.350-351]. И хотя Кант и Гильберт понимают логику по-разному, по нашему мнению, именно от Канта берет Гильберт идею обоснования математики независимо от логики.

На наш взгляд, существенно выделить два аспекта в этом вопросе. Во-первых, Кант показывает, что математические истины не могут быть получены на основе только анализа математических понятий чисто логическим путем - в таком случае все математические положения носили бы аналитический характер, не расширяли бы наше знание за пределы того, что уже дано в дефинициях. Если нам дано понятие треугольника, то сколько бы мы ни размышляли над этим понятием, мы не добудем ничего нового.

Мы можем лишь расчленить это понятие, выделить составляющие понятия, но при этом не откроем новых свойств, которые не входят в содержание этих понятий. Одно дело, согласно Канту, выявить, что мы мыслим в понятии треугольника (это дело дефиниции треугольника), другое - "выйти за пределы этого понятия к свойствам, которые не заключаются в нем, но все же принадлежат к нему" [5, с.603]. Таким образом обосновывал Кант невозможность получения математических истин дискурсивным путем (хотя, естественно, некоторые математические утверждения являются аналитическими).

Но существует иной аспект в проблеме соотношения логики и математики. Речь идет не о сведении математических истин к чисто логическим, а о более широкой проблеме соотношения логики и математики. Зависит ли, например, логика от универсума рассмотрения, от определенных онтологических предпосылок относительно объектов рассмотрения? Собственно, этот вопрос стоит в центре исследований Д.Гильбертом сферы логического. И несмотря на существенное расхождение в трактовке общей логики у Канта и Гильберта, в решении вопроса об условиях и границах применения общей логики Гильберт существеннейшим образом опирается на кантовское понимание природы математического знания. Он подчеркивает, что, согласно Канту, математика обладает не зависящим от всякой логики устойчивым содержанием. В противоположность логицизму, Гильберт не только полагает, что математика не может быть обоснована с помощью логики, но, наоборот, "кое-что уже дано в нашем представлении в качестве *предварительного условия для применения логических выводов и для выполнения логических операций: определенные внелогические конкретные объекты, которые имеются в созерцании до всякого мышления*" (выделено мной. - *Е.С.*). И далее: "...для того, чтобы логические выводы были надежны, эти объекты должны быть обозримы полностью во всех частях; их свойства, их отличие, их следование, расположение одного из них наряду с другим даются непосредственно наглядно, одновременно с самими объектами... Это - та *основная философская установка*, которую я считаю *обязательной как для математики, так и для всякого научного мышления*, понимания и общения и *без которой совершенно невозможна умственная деятельность*" (выделено мной. - *Е.С.*) [3, с.351].

Таким образом, необходимым условием применения содержательных логических выводов для Гильберта является наличие конкретных, четко различимых объектов наглядного созерцания. Но не получится ли в таком случае, что арифметические законы, числовые соотношения относятся просто к вещам, объектам наглядного созерцания и в этом плане содержательные математические утверждения приобретают характер утверждений об определенного рода эмпирических объектах? Тем более, что сам Гильберт пишет: "В частности, в математике *предметом нашего рассмотрения являются конкретные знаки сами по себе*, облик которых, согласно нашей установке, непосредственно ясен и может быть впоследствии узнаваем" (выделено мной. - *Е.С.*) [там же]. Не получается ли, таким образом, что математика есть просто наука о знаках и комбинациях знаков и даже не о том, что за ними стоит. Уже при переходе от содержательной теории чисел к алгебраическим исчислениям мы обращаемся, согласно Гильберту, к буквенным выражениям как самостоятельным объектам (мы отвлекаемся от их содержания). Вместо содержательных сообщений выступают тогда последовательности символов - формулы, а содержательные теоретико-числовые доказательства заменяются внешними действиями с формулами по определенным правилам. "Если мы этот взгляд обобщим, то математика сведется к совокупности формул, во-первых, таких, которым соответствуют содержательные сообщения конечных высказываний... и, во-вторых, других формул, которые сами по себе никакого значения не имеют и которые являются идеальными образами нашей теории"[3].

На деле подход Гильберта, его трактовка природы математического знания, математических объектов могут быть поняты, на наш взгляд, только сквозь призму кантовской концепции чистого созерцания и принципиального разграничения объектов чистого и эмпирического созерцаний.

Обычно суть гильбертовской программы видят в том, чтобы построить математику формальным образом - представить ее в виде исчисления - и затем доказать непротиворечивость полученной аксиоматической системы. Конечно, доказательство непротиворечивости построенной теории является необходимым и весьма желательным условием. Но можно ли это рассматривать как обоснование математики, как обоснование законности ее положений? Суть подхода Гильберта мы видим в обосновании вводимых идеализаций, "идеальных образов" теории, а не в доказательстве непротиворечивости самом по себе. Поэтому метод Гильберта - это "метод идеальных элементов", по собственному его признанию. Гильберт стремится сохранить всю классическую математику в полном объеме, включая канторовскую теорию множеств (весь "канторовский рай"), обычную, неурезанную классическую логику, и в то же время обеспечить непротиворечивость теории.

С точки зрения Гильберта, дело не в законах и правилах обычной классической логики, а в соблюдении условий, предпосылок ее применения. Закон исключенного третьего, полагает Гильберт, не повинен ни в малейшей степени в возникновении известных парадоксов теории множеств; парадоксы возникают потому, что поль-

---

3 И далее: "Так как идеальные высказывания, именно формулы, сами по себе не имеют значения, поскольку они не выражают конечных утверждений, то логические операции над ними не могут производиться содержательно..." Соответственно содержательные логические операции также репрезентируются формально - заменяются действиями с символами по соответствующим правилам. Формулы логического исчисления также сами по себе не имеют никакого содержательного значения и суть идеальные высказывания" [3, с.357].

зуются "недопустимыми и бессмысленными образованиями понятий". Последнее напоминает кантовские размышления относительно непрочной, зыбкой почвы трансцендентальных понятий и связанной с этим задачи определения точным образом границ чистого разума в его трансцендентальном применении.

Согласно Гильберту, содержательное логическое мышление нас "обманывало только тогда, когда мы принимали *произвольные абстрактные способы образования понятий*; мы в этом случае как раз недозволенно применяли содержательные выводы, т.е. мы, очевидно, не обратили внимания на предпосылки, необходимые для применения логического вывода" (выделено мной. - *Е.С.*) [там же, с. 351].

В силу сказанного Гильберт подразделяет все высказывания математики на реальные и идеальные. Только реальные предложения математики имеют самостоятельную содержательную интерпретацию. Такого рода высказывания, будучи содержательными сообщениями об *объектах наглядного созерцания,* могут оцениваться как истинные или ложные.

Стремление сохранить классическую математику во всем объеме означает, что мы не можем отказаться от обычных простых законов классической логики, но тогда мы должны к реальным высказываниям *присоединять идеальные высказывания, не являющиеся содержательными сообщениями*, так как им ничто не соответствует в действительности, и не только в том смысле, что в действительности нет объектов или совокупностей с указуемыми свойствами, но и в том смысле, что такого рода объекты и не могут в принципе существовать, не могут быть построены в рамках абстракции потенциальной осуществимости. Тем самым это - высказывания об "идеальных образах нашей теории" и, не являясь содержательными сообщениями об объектах теории, они не могут оцениваться как истинные или ложные соответственно. Само возникновение такого рода высказываний связано, как отмечалось, с введением понятий, выходящих за границы всякого опыта, за границы объектов любого возможного созерцания (таковы, например, понятия бесконечно удаленной точки и бесконечно удаленной прямой в проективной геометрии, комплексно-мнимых величин в алгебре и др.).

Что же представляют собой подлинные объекты математики, элементарной теории чисел, например? К какого рода объектам, иными словами, относятся содержательные сообщения теории? Чем являются эти "конкретные объекты наглядного созерцания"? Ответить на эти непростые вопросы можно, с нашей точки зрения, только в ключе кантовской идеи схематизма чистого созерцания. Дело в том, что конечные числа трактуются у Гильберта - в отличие от классического теоретико-множественного подхода - не как свойства (или классы) множеств, а как конкретные объекты, результаты содержательно-наглядных конструкций. Так, в теории чисел мы имеем знаки: |, ||, |||, ||||, ...

Каждый такой числовой знак можно распознать в отличие от любого иного знака благодаря тому, что в нем за | всегда следует | и ничто иное в него не входит. Дан метод конструирования такого рода объектов - некоторое точным образом описанное, содержательное правило построения. Эти числовые символы и являются объектом нашего рассмотрения (в элементарной теории чисел Гильберта). Но сами по себе эти символы не имеют никакого самостоятельного значения, они ничего не обозначают. Они - объекты содержательно-наглядных конструкций и только. Можно ввести знаки "2" и "3" как сокращенные записи числовых знаков || и ||| соответственно. Тогда "3 > 2" - пример реального предложения, содержательного сообщения, что числовой знак (объект) ||| следует за числовым знаком (объектом) ||. Что же, таким образом, представляют собой объекты элементарной теории чисел? Это, естественно, не свойства (или классы) классов, а объекты наглядного созерцания, конструируемые по *определенному правилу* (правилам), по *определенной схеме*. Отметим здесь два момента: объекты математики, во-первых, конструктивные объекты (в строгом смысле слова) и, во-вторых, объекты наглядного созерцания. Возвращаемся опять к вопросу: не трактуется ли в таком случае элементарная теория чисел как наука, изучающая определенного рода "вещи", знаки и их соотношения, т. е. как своего рода "эмпирическая" наука?

Однако суть дела в том, что гильбертовские объекты теории чисел - не просто материальные образования. Они являются *знаковой репрезентацией определенных конструирующих операций и их результатов* (например, последовательного повторения однородного действия во времени). В гильбертовском подходе, по крайней мере в теории чисел, реализуется, на наш взгляд, как раз центральная кантовская идея, что познание в математике не есть "познание разумом посредством понятий", но есть познание "посредством конструирования понятий". Но конструировать понятие, согласно Канту, - значит показать априори соответствующее ему созерцание. "Следовательно, - пишет Кант, - для конструирования понятия требуется *не эмпирическое созерцание*, которое, стало быть, как созерцание есть единичный объект, но тем не менее, будучи конструированием понятия (общего представления), должно выразить в представлении общезначимость для всех возможных созерцаний, подходящих под одно и то же понятие" [5, с. 600]. Точно так же гильбертовские числовые знаки |, || и т. д. как эмпирические созерцания представляют собой единичные объекты, но, связанные с процессом конструирования понятия конечного числа, они должны репрезентировать общее - "общезначимость" - для всех возможных вещей (созерцаний), подпадающих под конструируемое понятие. Конструируется мыслимая вещь (предмет в чистом созерцании, по Канту), соответствующая данному понятию, затем выбирается определенная репрезентация конструируемых величин, например на бумаге, и тогда уже она предстает в виде единичных фигур, знаков - объектов обычного эмпирического созерцания.

"Так, я конструирую, - пишет Кант, - треугольник, показывая предмет, соответствующий этому понятию, или при помощи одного лишь воображения в чистом созерцании, или *вслед за этим также на бумаге в эмпирическом созерцании*, но и в том и в другом случае совершенно a priori, не заимствуя для этого образцов ни из какого опыта" (выделено мной. - Е.С.) [там же].

Точно такую же функцию выполняют гильбертовские числовые знаки - |, | |, | | |, ... - поэтому они "сами по себе не имеют никакого значения" (не обозначают, например, некоторый идеальный объект - число); в этом плане они сами выступают как объекты нашего мышления, эмпирические и наглядные при этом. Но тогда понятно также, почему Гильберт, с одной стороны, характеризует их как "определенные внелогические, конкретные объекты, которые имеются в созерцании до всякого мышления в качестве непосредственных переживаний", с другой стороны, говорит, что свойства этих объектов, их различие, расположение и т. д. даются наглядно. Единичные, эмпирические вещи потому репрезентируют общее, "общезначимое", что они фактически кодируют "общие правила", "действия по конструированию понятия". У Гильберта: "В основу наших исследований мы сначала кладем мыслимую вещь | (единицу). Соединение этой вещи самой с собой по два, по три или по несколько раз, как-то: | |, | | |, | | | |, мы будем называть *комбинацией* вещи | с самой собой; точно так же любые комбинации этих комбинаций..."[4].

Предмет, соответствующий конструируемому понятию, априори дан в чистом созерцании, но его репрезентация "вслед за этим на бумаге" есть уже эмпирический объект, данный в наглядном созерцании. Именно в этом смысле числовые знаки выступают объектами рассмотрения в математике, *они - лишь способ репрезентации в единичном, конкретном, эмпирическом созерцании процессов, связанных с конструированием понятий* в математике. "Единичная нарисованная фигура эмпирична, но тем не менее служит для выражения понятия без ущерба для его всеобщности, - пишет Кант, - так как в этом эмпирическом созерцании я всегда имею в виду только действие по конструированию понятия..." [там же].

Именно таким путем удается избежать и того нежелательного обращения к эмпирии, к практическому подтверждению при обосновании математических истин, которое Фреге и Дедекинд пытались устранить обращением к логике и анализу дефиниций математических терминов.

---

4 См. также ниже: "...а положенная в основу мыслимая вещь | будет называться простой вещью" [3, с.325].

При кантовском подходе к обоснованию математического знания речь идет не о том, что мы начинаем с конкретных предметов исследования, обобщая их в понятии, подводя эти предметы под данное понятие на основании объективно присущих им общих признаков, наоборот, мы априори имеем схему, "механизм", посредством которого конструируем предмет понятия.

Мы выходим за рамки тех свойств, которые заложены в дефиниции, например треугольника, присоединяя в чистом созерцании - точно так же, как мы это делаем в эмпирическом созерцании, - только те свойства и соотношения, которые относятся "к схеме треугольника вообще, стало быть к его понятию". В то же время "схема" не есть образ, картина предмета понятия, она есть правило, общий метод репрезентации соответствующего понятию образа, общих условий конструирования. Тем самым достигается универсальность ("общезначимость") полученных математических истин, с одной стороны, и обеспечивается их аподиктическая достоверность при условии расширения математического знания - с другой.

В основе объяснения аподиктического и в то же время конструктивного характера действительного математического знания - и здесь одно как раз связано с другим - лежит именно кантовская идея схематизма нашего рассудка в отношении явлений. Понятию о треугольнике вообще не соответствовал бы никакой образ треугольника, согласно Канту. В основе наших чистых чувственных понятий рассудка "лежат не образы предметов, а схемы". "Схема же чистого рассудочного понятия есть нечто такое, что нельзя привести к какому-то образу" [там же, с.223]. Дело в том, что рассматриваемые понятия рассудка относятся не к предметам опыта и не к образам этих предметов (например образам треугольника, величины и т.д.), а к соответствующей схеме, т. е. общему способу, посредством которого строится соответствующий понятию образ. Схему ни в коем случае нельзя понимать буквально, как схему предмета понятия, повторяющую, рисующую его, пусть обобщенно, в отвлечении от каких-то сторон и связей (это была бы "картинная" трактовка чистого созерцания!). Таким образом, в основе математики, в основе ее действительных понятий лежат не образы предметов, а схемы, правила конструирования мыслимых, воображаемых объектов, соответствующих понятиям. Не из анализа понятия (треугольника, например) извлекаем мы соответствующие объекты математики, а из схемы, правил конструирования соответствующего образа (даже если бы в мире не существовало ни одного треугольника). Математическое знание не есть тем самым область эмпирически данного. Это скорее всего знание не о том, что дано, а о возможном, конструируемом согласно определенным "схемам", правилам. Другое дело - вопрос о рамках такого конструирования. Именно кантовский схематизм чистого созерцания позволяет преодолевать эмпиризм в трактовке математического знания, не прибегая ни к логике как основанию математического знания, ни к анализу понятий (или терминов)[5].

"Так, если я полагаю пять точек одну за другой, то это образ числа пять, если же я мыслю только число вообще, безразлично, будет ли это пять или сто, то такое мышление есть скорее представление о *методе* (каким представляют в одном образе множество, например тысячу) сообразно некоторому понятию, чем сам этот образ, который в последнем случае, когда я мыслю тысячу, вряд ли могу обозреть и сравнить с понятием. Это представление об общем способе, каким воображение доставляет понятию образ, я называю схемой этого понятия" [там же, с.222-223]. Хотелось бы здесь отметить особый характер кантовского априоризма в истолковании необходимого математического знания (синтетические суждения априори). Априорность понимается в особом смысле - как общие условия, алгоритм конструирования объектов в соответствии с правилами и сообразно понятию.

Далее, "схема", не будучи образом предмета понятия, опосредует в то же время связь между понятием и наглядным представлением (но не эмпирическим, данным наблюдением).

Интересно отметить, что, согласно Канту, математика конструирует величины не только "как это делается в геометрии, но и величину как таковую (quantitas), как это делается в алгебре", но при таком конструировании мы "совершенно отвлекаемся от свойств предмета, который должно мыслить согласно такому понятию величины". Именно в таком случае, с нашей точки зрения, особо зримо, что сам метод познания посредством конструирования понятий никак не опирается на какие-то свойства подпадающих под понятие объектов. И здесь, чтобы представить в созерцании "все операции, производящие и изменяющие величину", необходим *специальный символизм*. Надо выбрать определенные обозначения "для всех конструирований величин вообще (чисел)" - каковыми выступают операции сложения, вычитания, извлечения корня и т.д. - и все эти операции с величинами изобразить в созерцании - соответственно определенным общим правилам - действиями с соответствующими им знаками, и "таким образом, с помощью *символической конструкции*, так же, как геометрия с помощью остенсивной, или геометрической, конструкции (самих предметов)", алгебра достигает того, чего "дискурсивное познание посредством одних понятий никогда достигнуть не может" [там же, с. 603]. Именно эта идея И.Канта - идея использования специальных символических

---

5 Не из наблюдения за множествами, совокупностями предметов, например парами объектов, извлекаем мы истинность утверждения, что 2 + 2 = 4, сколь бы регулярно мы ни обнаруживали это в опыте.

По Б.Расселу, это и не априорное знание о мире. Но в чем же основа тогда такого рода истин? "Это на самом деле просто словесное знание. "3" означает "2 + 1", а "4" означает "3 + 1". Отсюда следует (хотя доказательство и длинное), что "4" означает то же, что "2 + 2". Таким образом, математическое знание перестало быть таинственным" [7, с.839].

конструкций для изображения "в созерцании мысленных конструирований" получила свое развитие в формализме Гильберта. В целом, именно идея схематизма нашего рассудка является ключом к пониманию Гильбертом подлинного математического знания, реальных предложений математики.

Однако, как отмечал Гильберт, даже элементарная математика "уже не остается на точке зрения наглядной теории чисел". Уже элементарная математика не ограничивается "содержательными сообщениями конечных высказываний" и, наряду с реальными, включает идеальные высказывания, предполагающие введение в рассмотрение "идеальных элементов", "идеальных образов" теории, т. е. объектов, которые не могут быть даны ни в эмпирическом, ни в чистом созерцании. В этом плане метод идеальных элементов Гильберта как бы предполагает выход математического знания за рамки познания посредством конструирования понятий. Это было бы действительно так, однако, с нашей точки зрения, все дело в том, каков статус, придаваемый Гильбертом этим "идеальным образам".

Использование абстракций, идеализаций всегда означает "отлет" от реальности (идеальная прямая, мнимые числа, бесконечно удаленные точки и т. д.), но все дело в том, что теория с идеальными элементами должна быть построена таким образом, чтобы всегда имелся "обратный путь" к реальным предложениям. Для Гильберта это означает, что допускаемые идеализации не привносят ничего нового в наше знание относительно подлинных объектов математики. Расширение сферы математического "посредством приобщения идеальных элементов дозволено только в том случае, когда при этом в старой более узкой области не возникает никаких противоречий, т. е. *если соотношения, которые выявляются для старых образов, при исключении идеальных образов всегда остаются справедливыми в этой старой области*" (выделено мной. - *Е.С.*) [3, с. 376].

Другими словами, идеальные элементы принимаются, если все то, что можно сделать с их помощью, можно сделать и без них.

Д.Гильберт в своей установке на элиминируемость идеальных образований не требует явной определимости всех терминов или переводимости всех идеальных предложений в реальные (или того, чтобы все дополнительные правила вывода были производными); его установка сводится к устранимости идеальных предложений, более широко - к устранимости некоторых способов образования понятий и способов умозаключений из контекста всей теории.

Нам представляется, что гильбертовский подход к устранимости идеальных элементов может быть эксплицирован посредством понятия консервативного расширения теорий; при этом можно выявить ряд важных положений, связанных с устранимостью [8].

Пусть S и P системы с обычным синтаксисом, и пусть LS-язык системы S является расширением языка LP системы P. Будем говорить, что *между* S *и* P *имеет место отношение устранимости* (в смысле Гильберта), если для любой формулы A языка LP, из того, что она доказуема в S, следует, что она доказуема в P. Если между S и P имеет место отношение устранимости, мы будем говорить, что S является консервативным расширением P.

Верна следующая т е о р е м а I. *Если между* S *и* P *имеет место отношение устранимости, и если* P *непротиворечива, то* S *непротиворечива*. Другими словами, каждое консервативное расширение непротиворечивой системы непротиворечиво.

Действительно, допустим, что S противоречива. Тогда для всякой формулы, в том числе для формулы $A \in$ LP, доказуема формула A и доказуема формула $\sim A$. Из условия теоремы и того, что $A \in$ LP (A не содержит идеальных терминов) и $\vdash_S A$, получаем $\vdash_P A$. Поскольку $A \in$ LP, то и $\sim A \in$ LP, отсюда из условия теоремы и того, что $\vdash_S \sim A$, получаем, что $\vdash_P \sim A$. Таким образом, система P противоречива. Но по условию система предложений P непротиворечива. Следовательно, наше допущение неверно, и имеет место, что система S непротиворечива.

Имеет место также следующая т е о р е м а II: *Если система* P *полна и является подсистемой* S (т. е. если $\vdash_P A$, то $\vdash_S A$) *и* S *непротиворечива, то между* S *и* P *имеет место отношение устранимости*. Иными словами, всякое непротиворечивое расширение полной системы консервативно.

Полноту и непротиворечивость мы понимаем в синтаксическом смысле. Мы будем говорить, что система P полна, если для любой формулы A доказуема она сама или ее отрицание. Теорема верна и при таком определении полноты. Естественно, большинство систем неполны в этом смысле. При обычном понятии синтаксической полноты - для любой замкнутой формулы доказуема она или ее отрицание - устранимость S относительно P проходит соответственно для замкнутых формул.

Допустим, что формула A языка LP доказуема в S. Согласно условию, S непротиворечива, следовательно, неверно, что $\vdash_S \sim A$. Поскольку P подсистема S, и $\sim A$ не доказуема в P, тогда, в силу полноты системы P, $\vdash_P A$. Таким образом, если формула языка LP доказуема в S, то она доказуема в P.

Сформулированная теорема верна, если под полнотой и непротиворечивостью системы иметь в виду семантическую полноту (система P полна, если истинная - относительно данной интерпретации I - формула языка LP доказуема в P) и семантическую непротиворечивость (система S непротиворечива, если всякая доказуемая формула S истинна в I). Формула со свободными переменными истинна, если и только если истинен каждый ее подстановочный случай. Действительно, если формула языка LP доказуема в S, то она истинна и, в силу семантической полноты системы P, доказуема в P.

Объединяя результаты вышеприведенных двух теорем, получаем теорему III. *Если система* P *полна и непротиворечива, то всякое ее расширение непротиворечиво тогда, когда оно консервативно.*

Но будет ли верным утверждение II, если отбросить условие полноты системы P?

Очевидно, не будет. Не всякое непротиворечивое расширение P консервативно: не всегда, если $P \subsetneq S$ и S непротиворечива, то между S и P имеет место отношение устранимости.

Действительно, пусть S_k классическая арифметика первого порядка, A - неразрешимое предложение системы S_k. Расширим S_k, присоединив в качестве аксиомы неразрешимое предложение A, и получим систему S'_k - $LS_k = LS'_k$, $S_k \subset S'_k$, система S'_k непротиворечива. Однако отношения устранимости между S'_k и S_k нет: $\vdash_{S'k} A$, но $\nvdash_{Sk} A$, где A - неразрешимое предложение.

Аналогично, пусть P множество доказуемых утверждений рекурсивной арифметики, S - множество истинных формул арифметики (не обязательно замкнутых). $P \subsetneq S$ (для всякой формулы A, если $A \in P$, то $A \in S$), система S непротиворечива, но S не является консервативным расширением P, так как в языке LP может быть сформулировано истинное предложение B (например, утверждение о непротиворечивости P), $B \in S$ и недоказуемо в P.

Таким образом, доказательство непротиворечивости системы может отождествляться с доказательством устранимости относительно P в том и только в том случае, если система P полна и непротиворечива.

Гильберт не только считал, что финитная система мышления полна и содержится в достаточно богатой системе, например арифметике первого порядка, но и полагал, что все рассуждения о непротиворечивости (и тем самым об элиминируемости) можно осуществить финитными средствами.

Таким образом, Гильберт четко выделяет обязательное условие, с которым связывается введение идеальных элементов, - *доказательство их устранимости из контекста всей теории.* Однако идейное, философское основание метода идеальных элементов, на наш взгляд, можно уяснить только обращаясь к И.Канту. "Бесконечное нигде не реализуется - пишет Гильберт, - его нет в природе, и оно недопустимо как основа нашего разумного мышления... Роль, которая остается бесконечному, это только роль идеи, - если, согласно Канту, под идеей подразумевать понятие, образованное разумом, которое выходит за пределы всякого опыта и посредством которого конкретное дополняется в смысле целостности..." [3, с. 364]. Именно такая трактовка статуса идеальных элементов определяет суть метода, предлагаемого Гильбертом.

Идеями Кант называет чистые понятия разума, "предмет которых не может быть дан ни в каком опыте" [4, с. 216]. Такими понятиями, являющимися "только идеями", выступают, например, понятия "мир в целом", "причина всех причин", "величина мира" и т. д. Если мы обратимся к сфере чистых идей, то здесь мы имеем дело не с природой или вообще с какими-то данными объектами, а только с понятиями, имеющими свой источник исключительно в "нашем разуме", - имеем дело только с мысленными сущностями. Высказывания о такого рода сущностях - как и гильбертовские "идеальные высказывания" - фактически не могут (без противоречия) оцениваться как истинные или ложные. "Если я теперь спрашиваю о величине мира в пространстве и во времени, то для всех моих понятий одинаково невозможно признать мир бесконечным или конечным. Ибо ни то, ни другое не может содержаться в опыте, так как опыт невозможен и относительно *бесконечного* пространства или бесконечного протекшего времени, и относительно *ограничения* мира пустым пространством или предшествующим пустым временем; это все только идеи" [там же, с. 236]. Здесь уже заложен источник антиномий чистого разума.

Напомним, что Г.Фреге в качестве исходных, базисных понятий ввел понятия функции и предмета. При этом предмет Фреге понимает очень широко - это любой объект рассмотрения, любой объект, о котором нечто может утверждаться. Таким образом, предметами выступают и мейнонговские объекты, вроде золотой горы, круглого квадрата, множества, множества всех множеств и т.д. Именно такая широкая трактовка предметной области у Г.Фреге приводит, как известно, к возникновению парадоксов. Для Канта и Гильберта быть мыслимым объектом (мыслимой сущностью) еще не означает быть включенным в качестве предмета, выступать в качестве объекта научного знания.

Кант во главу угла ставит разграничение познавательных способностей (различение "познаний совершенно разного рода"), соответственно идет разграничение понятий, относящихся к этим различным родам познания и ставится задача выявления источников этих понятий. Так, Кант разграничивает чистые понятия разума (идеи) и категории (чистые рассудочные понятия) как "познания совершенно разного рода, происхождения и употребления". Все чисто рассудочные познания отличаются той особенностью, что их понятия направлены на предметы возможного опыта, а "их основоположения опытом подтверждаются" [там же, с.217]. Какой бы абстрактный характер ни носили эти понятия, к каким бы идеализированным объектам ни относились, они направлены на возможный опыт. Что касается трансцендентных познаний, то их идеи никогда не встречаются в опыте и их положения никогда не могут быть ни подтверждены, ни опровергнуты опытом [там же].

Для разума как познавательной способности характерно стремление к полноте, целостности и завершенности картины познания, и это вполне правомерное стремление. Однако разум, "подражая рассудку", стремится представить эту полноту как особый *предмет*. Разум хочет видеть абсолютное, безусловное воплощенным в одном предмете. Так возникает целая система иллюзий и фикций. В познании мы имеем, например, бесконечную последовательность причин и следствий, мы можем двигаться вдоль этой бесконечной цепи, но разум склонен представить ее как особый объект, склонен - выходя за пределы всякого возможного опыта - представить бесконечность как нечто завершенное. Так порождаются такие "мысленные сущности" (только мысленные), как бесконечно удаленная точка, причина всех причин, мир в целом и т.д. Собственно аналогичные основания для порождения мысленных сущностей, "идеальных элементов", усматривает Д.Гильберт. "Ситуация оказывается сходной во всех случаях, когда имеется вера в возможность *непосредственного узрения* (актуальной) бесконечности как данной посредством опыта или восприятия... Более подробное исследование показывает затем, что бесконечность на самом деле вовсе не была нам дана, а была только интерполирована или экстраполирована посредством некоторого интеллектуального процесса" [цит. по: 6, с. 55].

Применение идеальных образов выводит рассудок за его собственные пределы. Нельзя безоговорочно переносить принципы и методы рассудка, оправданные применительно к объектам возможного опыта, на "запредельные объекты". И у Канта и у Гильберта обычная логика не является источником парадоксов, дело в используемых понятиях. Так, анализируя две первые антиномии, Кант показывает, что в основе их лежит пустое понятие и этим объясняется, почему в случае обеих антиномий тезис и антитезис *оба ложны*. "Ибо логический признак *невозможности данного понятия* состоит именно в том, что при его предположении два противоречивых положения будут одновременно ложны, и следовательно - так как между ними не мыслимо третье, - данным понятием не будет выражаться *совсем ничего*" [4, с. 235].

Однако ни Кант, ни Гильберт не отбрасывают такого рода идеальные образы. Почему? Введение такого рода понятий - необходимый момент познавательной деятельности. В чем же их роль? "Хотя мы и должны сказать о трансцендентальных понятиях разума, что *они суть только идеи*, тем не менее нам ни в коем случае нельзя считать их излишними и пустячными. В самом деле, хотя с помощью их и нельзя определить ни один объект, тем не менее они в сущности и незаметно служат рассудку каноном его широкого и общего применения; правда, с помощью идей он познает только те предметы, которые познал бы на основе своих понятий (т. е. они не выводят за пределы "старой области" - ср. с гильбертовской идеей элиминируемости. - *Е.С.*), но все же они направляют его лучше и еще дальше в этом его познании" [5, с. 360].

Кант рассматривает идеи разума как эвристические, регулятивные принципы. Их использование приводит нашу рассудочную деятельность к ясности, полноте и синтетическому единству. Основной вопрос действительно есть вопрос достижения единства, целостности и системности нашего знания. Это как раз то, что не дано в опыте и не принадлежит, в принципе, опыту. Тут как раз сказывается регулятивная функция идей, позволяющая охватывать опыт в его целостности, но сами полнота, целостность, а также системность не принадлежат самому опыту, не извлекаются из него. Именно этот аспект выделяет И.Кант. Рассматриваемое единство есть единство познания, а не единство познаваемого объекта, отсюда - регулятивная роль трансцендентальных идей, определяющих "систематическое единство" рассудочной деятельности. "...Хотя абсолютная целостность опыта и невозможна, однако только идея целостности познания может вообще *доставить нашему познанию род единства*, именно единство *системы*, без которого оно есть нечто бессвязное и негодное для высшей цели... Я разумею здесь не только практическую, но и высшую умозрительную цель разума" (выделено мной. - *Е.С.*) [4, с. 248]. Аналогично расценивает роль "идеальных образов" (идеальных элементов) Д.Гильберт; они выполняют функцию кантовских идей. Согласно Гильберту, "гениальный метод идеальных элементов", широко и плодотворно используемый в математике - да и не только в математике, - служит определенным теоретическим целям. Он выполняет задачу сохранения единства и целостности системы, единообразия ее законов и в то же время не привносит ничего в сферу ее подлинных объектов. "Так же, как было введено $i = \sqrt{-1}$ для того, чтобы удержать законы алгебры в простейшем виде, например, теорему о существовании и числе корней уравнения; так же, как произошло введение идеальных факторов, опять-таки для того, чтобы оставить в силе простейшие законы делимости для целых алгебраических чисел, когда мы, например, вводим общий идеальный делитель чисел 2 и $1+\sqrt{-5}$, хотя в действительности таковой не существует; точно так же и здесь к конечным высказываниям мы должны присоединить идеальные высказывания для того, чтобы удержать формально простые законы обычной аристотелевой логики" [3, с. 356]. Таким образом, Гильберт гениально использует метод идеальных элементов с целью сохранения законов классической логики в полном объеме.

Возвращаясь к вопросу, поставленному в начале параграфа - что в нашем познании дается в опыте и что определяется мышлением, независимо от опыта, - отметим, что определенный свет на эту сложную проблему проливает именно анализ роли "идеальных образов" теории - идей разума, по Канту, и идеальных элементов у Гильберта.

Трансцендентные понятия разума не являются, по Канту, врожденными идеями. В то же время они порождаются разумом в его стремлении, как отмечалось, достигнуть целостности, завершенности и системности познания и определяются этой целью. Они задают определенные принципы познавательной рассудочной деятельности. Будучи принципами систематизации знаний, они не извлекаются из содержания опыта и не направлены на объекты. Именно этот важнейший аспект использования идеальных объектов определяет возможность конструирования теоретических моделей мира, определяет принципиально иной подход к трактовке теоретического знания. Теоретическое познание, таким образом, не сводится к суммированию и обработке данных опыта. Это создает относительную независимость теоретических конструктов, возможность их "отрыва" от эмпирии.

В то же время такое мысленное конструирование не произвольно, но подчинено, как мы видим, строгим принципам и предполагает определенные "заградительные меры". Тем самым важнейший момент теоретической познавательной деятельности связан именно с активностью мыслящего субъекта, активностью мышления. И именно идеальные предложения играют особую роль в формировании теоретической картины мира. "Вейль замечает, - пишет Ст.Клини, - что в теоретической физике с опытом согласуются не отдельные утверждения, а вся теоретическая система в целом. В результате получается *не истинное описание того, что дано, а теоретическое, чисто символическое построение мира*. (Он также утверждает, что наш теоретический интерес не заключается исключительно и даже преимущественно в «действительных предложениях», например в том, что данная стрелка находится возле такого-то деления на шкале, а *скорее в идеальных предложениях*, например, в предложении, что электрон является универсальным электрическим квантом)" (выделено мной. - *Е.С.*) [6, с. 57].

В случае теоретического конструирования мира, естественно, решающую роль играют не действительные, "реальные" предложения, а идеальные предложения, служащие "строительными лесами" в таком конструировании. И все же "глубокий философский вопрос состоит в том, какая «истина» или объективность соответствуют этому теоретическому построению мира, далеко выходящему за пределы непосредственного опыта" [6, с. 58].

Встает еще один важнейший философский вопрос об источниках нашего знания. Мы не просто навязываем априорные схемы миру, но существует определенная сетка, идущая от концептуального аппарата и логики, определяющая принципы познавательной, систематизирующей деятельности. Здесь априоризм выступает в совершенно особом смысле. Речь идет не о признании существования еще и третьего источника знания, "помимо дедукции и опыта". Идея "схематизма" пронизывает не только познание посредством конструирования понятий, но ее аналог - и, конечно, в ином ключе - возникает при рассмотрении регулятивной роли чистых понятий разума. Априоризм в этом случае выступает как признание независимых от опыта условий теоретического конструирования.

Интересна оценка кантовского априоризма Д.Гильбертом, ставившим во главу угла идею гармонии бытия и мышления, не принимавшим никаких особых источников знания помимо опыта и дедукции. "Я допускаю, - пишет Гильберт, - что уже для каркаса теоретических структур требуются определенные априорные усмотрения и что нечто подобное лежит в основе осуществления нашего познания... и что даже при построении теории чисел нам приходится прибегать к определенным созерцательным представлениям a priori. Следовательно, всеобщая основополагающая мысль Кантовой теории познания тем самым сохраняет свое значение: а именно следует согласиться с существованием философской проблемы вышеуказанного созерцательного представления a priori и тем самым с необходимостью *исследовать условия возможности всякого понятийного познания* и одновременно всякого опыта. Я полагаю, что именно это, по существу, имеет место в моих исследованиях принципов математики. *A priori* тем самым есть не более и не менее как полагание или выражение определенных *неизбежных предусловий мышления и опыта*. Но границу между тем, чем мы обладаем a priori, с одной стороны, и тем, для чего необходим опыт, с другой стороны, мы должны провести иначе, чем Кант; Кант сильно переоценил роль и объем априорного" [2, с.122-123].

В рамках рассматриваемых вопросов коснемся определенных философских следствий, вытекающих из результатов Геделя. В связи с расширением финитной установки Гильберта встает вопрос о трактовке действительных (реальных) предложений математики, о соотношении действительных объектов и "мысленных образов". Результаты Геделя показали, что для доказательства непротиворечивости даже таких простых систем, как первопорядковая арифметика, необходимо выйти за рамки финитной системы мышления в смысле Гильберта. Это означает, что для доказательства непротиворечивости в метатеории нужны определенные абстрактные, т. е. не наглядные, понятия, относящиеся не к конкретным объектам наглядного созерцания, а к мысленным образам. Иными словами, мы выходим за рамки чисто синтаксических рассмотрений, относящихся к чисто формальным объектам. Означает ли в таком случае расширение финитной установки Гильберта выход за рамки познания "посредством конструирования понятий"?

К.Гедель, вслед за Бернайсом, различает в финитной установке два момента. Во-первых, конструктивный момент - наличие эффективного метода построения соответствующего понятию объекта. Во-вторых, "специфически финитистский элемент, требующий, сверх того, чтобы объекты, о которых делаются высказывания... были "наглядными"... Именно от второго требования приходится отказаться" [1, с. 301].

Таким образом, финитизм Гильберта - благодаря работам Г.Генцена и К.Геделя - претерпевает изменения в том направлении, что приходится отказываться, по существу, от номиналистической установки - от требования "наглядной очевидности". С нашей точки зрения, это отказ от требования представить "общее in concreto (в единичном созерцании)" посредством остенсивных или знаковых конструкций. Но сохраняется Кантова идея, связанная со "схемой", - наличие общего способа, посредством которого строится объект, сообразно некоторому понятию. Однако априорный, аподиктический характер математического знания ("аподиктическая достоверность") сохраняется, поскольку мы обращаемся к тем свойствам, которые относятся к схеме, определяются правилами конструирования объекта.

Ни для Канта, ни для логицизма не стояла задача обоснования самой логики. Однако работа по обоснованию математики показала, что в обосновании нуждается не только математика, но и сама логика. Мы уже видели, что принятие тех или иных законов логики коррелятивно принятию определенных допущений - онтологического и гносеологического порядка - относительно объектов рассмотрения.

ЛИТЕРАТУРА

1. *Гедель К.* Об одном еще не использованном расширении финитной точки зрения // Математическая теория логического вывода. М., 1967.
2. *Гильберт Д.* Естествознание и логика // Кантовский сборник. Вып. 15.
3. *Гильберт Д.* Основания геометрии. М.-Л., 1948.
4. *Кант И.* Пролегомены. М.-Л., 1934.
5. *Кант И.* Сочинения. В 6 т. М., 1964. Т. 3.
6. *Клини С.* Введение в метаматематику. М., 1957.
7. *Рассел Б.* История западной философии. М., 1959.
8. *Смирнова Е.Д.* Непротиворечивость и элиминируемость в теории доказательств. /Философия в современном мире. Философия и логика. М., 1974.

Е.А.Сидоренко

СЕМАНТИКА ВОЗМОЖНЫХ МИРОВ: ОТ ЛЕЙБНИЦЕВСКОЙ К ЮМОВСКОЙ*

Блестящая идея Лейбница о том, что логические и математические истины являются истинами во всех возможных мирах, нашла широкое и плодотворное применение в логической семантике. В настоящей статье мы хотим обсудить некоторые методологические и философские вопросы в связи с построением семантики, которая отказывается от этой лейбницевской предпосылки и исходит из того, что никаких беспредпосылочных универсальных истин не существует.

Техническая сторона дела изложена мною в другой статье настоящего сборника и поэтому опускается. Я ограничусь здесь рассмотрением эволюции логической семантики возможных миров в связи с ее адаптацией сначала к модальной, а затем к релевантной логике. При этом обсуждение не будет выходить за рамки пропозициональной логики (логики высказываний). Этого, во-первых, достаточно для наших целей и, во-вторых, позволит избежать (а к этому мы будем здесь стремиться) технических сложностей, уделяя основное внимание содержательным проблемам.

1. Возможные миры

В самом общем приближении понятие возможного мира можно описать следующим образом. Мы живем в некотором мире, который считаем реальным, действительным миром. Представим себе множество всех возможных предложений (высказываний). Наложим на это множество некоторые ограничения, имея при этом в виду, что эти ограничения, с одной стороны, не являются необходимыми и вводятся для удобства, а с другой - не изменяют степени общности дальнейших рассуждений.

Во-первых, ограничимся только теми предложениями, которые сами не состоят из других предложений и не являются отрицаниями предложений. Иными словами, наше множество включает только те предложения, которые принято называть атомарными. Во-вторых, мы исключаем из обсуждаемого множества все повторяющиеся предложения.

При соотнесении входящих в образованное множество предложений с действительным миром одни из них окажутся истинными, а другие ложными. В данном случае для нас не имеет значения,

---

* Работа выполнена при поддержке Российского Фонда фундаментальных исследований, грант 93-06-10708.

можем ли мы каким-либо образом решать вопрос об истинности или ложности того или иного предложения. Мы просто считаем, что одни высказывания соответствуют тому, что имеет место в реальности, а другие нет, независимо от того, знаем мы или не знаем (и даже, как бывает, принципиально не можем знать) какие именно соответствуют, а какие - нет. Множество предложений, образованное из всех истинных атомарных предложений и отрицаний всех ложных, представляет собой описание состояний реального (действительного) мира на какой-то данный момент.

Упоминание о данном моменте, очевидно, приходится делать не случайно. Уже в некоторый следующий момент мир изменится, и какие-то из истинных ранее предложений станут ложными и, наоборот, некоторые ложные непременно станут истинными. Этому новому миру будет соответствовать иное описание состояний, получаемое за счет изменения (присоединения или устранения) отрицания перед атомарными высказываниями. Аналогичным образом будет обстоять дело и в каждый последующий момент.

И мир, с которым мы имеем дело в настоящий момент, и миры, которые были в прошлом и которые будут в будущем, все они относятся к числу возможных миров. Но к таковым относятся не только они. Тот путь, который прошел наш мир в своем историческом изменении и развитии, сам есть лишь один из возможных. В каждый момент прошлого у нашего мира были альтернативные пути развития, есть они в настоящем и, конечно, сохранятся в будущем. Можно представить, что будь Клеопатра некрасивой, не родись Наполеон, не приди к власти Горбачев, мир несомненно был бы иным, нежели сейчас.

Часто говорят, что история не знает сослагательного наклонения. И это верно, когда под историей имеют в виду те реальные события, которые произошли в каком-то временном интервале. Но когда речь идет об истории как дисциплине, призванной отобразить эти события, тогда без сослагательного наклонения, а значит без предположения иных путей развития, иных возможных миров обойтись, по-видимому, просто нельзя. Ибо история во втором смысле с необходимостью предполагает многие такие вещи, которые имеют смысл лишь при допущении альтернативных путей развития. Возьмите, скажем, отбор фактов с точки зрения их важности. Он с очевидностью зависит от того, считает ли историк, что они достаточно серьезно повлияли на течение заслуживающих внимания событий[1]. Не обойтись историку без анализа причин

---

1 Сравнительно недавно было установлено, что И.В. Сталин родился в 1878 году, т. е. приблизительно на год раньше, чем это считалось официально признаным. Пожалуй, вся значимость этого факта была сведена к тому, что удалось посрамить некоторых астрологов, которые, исходя из ранее принятой даты рождения отца народов, к вящей славе своей науки составили весьма точный его гороскоп. Мне же, например, нравится кое-что объясняющая в нашей истории идея, что Сталин отмечал свои юбилеи дважды: и действительный, и офици-

событий и поведения тех, кто отнесен к историческим личностям, а значит без предположений об условиях (возможных мирах), при которых эти события могли бы не произойти, о том, к какому результату могло бы привести иное решение того или другого субъекта истории, и вообще, что было бы, если бы дело было не так, как было. Вряд ли возможна история также без тех или иных оценок деятельности личностей, партий, классов, масс, государств и т. д. Однако любая оценка предполагает сравнение того, что было, с тем, что могло бы быть при иных действиях оцениваемых субъектов, а значит (мысленное, теоретическое) допущение иного, чем это было в реальности, результата. Но такое допущение трудно представимо без попытки выразить этот гипотетический результат в виде некоторой нереализовавшейся возможности[2].

Уместно обратить внимание на то, что, допуская сослагательное наклонение и предполагая, что сложись в прошлом дела по-иному, реальный мир был бы теперь существенно отличен от имеющегося, те, кто делает подобное допущение, как правило, считают свое собственное существование и многие существенные характеристики собственного бытия инвариантными. Помните, у Р. Бредбери герой одного из рассказов ("И грянул гром"), путешествуя во времени и оказавшись в далеком прошлом, наступает на бабочку. Это вызывает цепь последствий, отличную от реальной. И герой, вернувшись в настоящее, обнаруживает, что мир существенно изменился. В частности, победу на президентских выборах одержал не прогрессивный, а реакционный кандидат. Показательно здесь то, что герой при этом остается самим собой, изменившимися оказываются только внешние обстоятельства, но опять-таки только в тех пунктах, которые представляются важными оставшемуся неизменным герою.

Совершенно аналогичным образом мы, рассуждая о том, что было бы, если бы не было Октябрьской революции или чего-нибудь еще в нашей истории, вполне понимаем сколь кардинально другим мог бы быть теперь мир, но едва ли даже задумываемся, что собы-

---

альный, представая в том и другом случае весьма разным. Почувствуйте разницу между 1928 и 1929, между 1938 и 1939, да и между 1948 и 1949 годами.

2 Здесь хочется обратить внимание на одно не всегда принимаемое в расчет обстоятельство. Понятно, что оценка прошлых событий, деяний, решений во многом зависит от того, к каким результатам они в конечном счете привели. Однако в качестве такого результата нередко рассматривают объективно сложившееся положение дел. И когда последнее считается неудовлетворительным, соответственным образом характеризуется и оцениваемое событие, решение. При этом может упускаться из виду, что связь оцениваемых деяний с последующим положением дел, как правило, опосредована множеством других действий, решений, случайностей. И очень может быть, что окажись они иными, совсем по-другому выглядело бы и то решение, оценку которого пытаются дать. Таким образом, оценка сама оказывается зависимой от того, какой из возможных миров оказался реализованным. Вспомним известное: победителей не судят.

тиям достаточно было измениться очень в немногом, чтобы мы лично при этом вообще не появились на свет.

Хорошим примером в этом отношении может служить упрек, который подросток делает своей маме, за то, что она в свое время вышла замуж не за того из двух претендентов. Сделай мама тогда правильный выбор, он был бы теперь сыном не спившегося неудачника, а генерала (академика, космонавта, миллионера). При этом ему невдомек, что при другом мамином выборе он вовсе бы не родился. С этой точки зрения все мы должны быть благодарны судьбе за то, что все было так, как оно и было.

По-видимому, экстремальным примером инвариантности высказывателя по отношению к воображаемому миру может служить стихотворение Ф.И.Тютчева "Последний катаклизм":

Когда пробьет последний час природы,
Состав частей разрушится земных:
Все зримое опять покроют воды,
И божий лик отобразится в них!

Вообразите описываемую стихотворением ситуацию, и вы убедитесь, что достаточно легко представляете себя наблюдателем там, где вам принципиально нет места. Великолепным образцом того же может служить ситуация, которую связывают с Дюма-отцом. На вопрос:"Было ли весело там, откуда он пришел?"- писатель ответил: "Да, очень. Но не будь там меня, я бы умер там со скуки". Задуматься бы: ни эта ли наша психологическая особенность, мыслить себя там, где нас быть не должно, позволяет нам в жизни творить вещи, последствия которых могут для нас же оказаться гибельными?

Противоположную крайнюю позицию, теперь уже принципиальной нашей неинвариантности в изменяющемся мире, отражает известная песня В.Высоцкого "Он не вернулся из боя":

Почему все не так? Вроде - все как всегда:
то же небо - опять голубое,
тот же лес, тот же воздух и та же вода...
Только он не вернулся из боя.

....

Нам и места в землянке хватало вполне,
нам и время текло - для обоих...
Все теперь - одному. Только кажется мне,
это я не вернулся из боя.

Радикалам всех мастей, призывающих к войне за принципы, было бы неплохо осознать, что, увы, это не *мы* выходим из боя, не *нас* вывозят из "заварушек" те известные локомотивы истории.

Представляется уместным обратить внимание еще на одно обстоятельство. Вообразим некоторое возможное в прошлом, но не состоявшееся событие, которое могло бы существенно повлиять на всю нашу историю. Казалось бы, что произойди оно на самом деле, оно должно было бы быть отнесено к числу событий несомненно важных. Однако возможны ситуации, когда такого рода события представляются значимыми потому и только потому, что не произошли. Тогда как в случае своей реализации, они вообще не представляли бы никакого интереса. С такой ситуацией сталкивается, например, Сандро из Чегема - известный герой Ф.Искандера. Дело сложилось так, что у него в свое время была возможность погубить молодого тогда еще Сталина. Много позже, рассуждая об этом, Сандро понимает, что, выдай он тогда будущего отца народов жандармам, могло бы вообще не быть никакого Сталина. И это, конечно, имело бы для всемирной истории огромное значение. Но, с другой стороны, сам этот поступок в таком случае в свете этой истории утратил бы всякую важность.

С чисто логической точки зрения не имеет значения, какого рода события (важные в каком бы то ни было отношении или не важные ни в каком) различают два возможных мира. Не начни я предыдущее предложение с абзаца, мир уже только в силу одного этого обстоятельства был бы иным. И этот мир так же, как и мир, в котором эта статья вообще не была бы написана, попадают в число равноправных возможных миров. К тому же логика имеет дело не с событиями, но исключительно с высказываниями о них. Поэтому для логики "возможный мир" - это множество предложений, описывающее все факты онтологически возможного мира.

Такое множество бесконечно и, более того, несчетно. Иными словами, входящих в него предложений больше, чем натуральных чисел. То, что это именно так, легко понять из возможности построить высказывание о каждом действительном числе, множество которых, как известно, несчетно.

Множество предложений, о котором мы говорили выше, отображающее наш действительный мир в некоторый данный момент времени, представляет собой лишь один из логически возможных миров. Множество это состоит из бесконечного числа атомарных предложений и их отрицаний. Другие возможные миры (число которых также будет бесконечным и несчетным) получаются из этого множества путем отбрасывания отрицания у одних предложений и приписывания его другим. Казалось бы, в число таких возможных миров следует включить все варианты, которые могут быть получены указанным способом. Если же, однако, считать, что всякое множество предложений должно отображать некоторый возможный онтологический мир, то такой подход оказывается неприемлемым. Дело в том, что замена некоторого атомарного предложения на его отрицание, или наоборот, влечет целый шлейф следствий. Едва ли мы можем допустить мир, в котором, скажем, Сократ не был бы мужем Ксантиппы, а Ксантиппа одновременно была бы его женой, кто-то находился бы сразу в Москве и в Париже, сын был бы старше матери, и т.п.

2. Семантика возможных миров

2.1. Семантика классической пропозициональной логики

Если остановиться на том, что возможные миры суть бесконечные множества всех атомарных предложений и их отрицаний и что множество таких миров также бесконечно, то нас ждут непреодолимые сложности при попытке оперировать такими мирами как объектами для семантического исследования. Сложности возникают хотя бы уже потому, что у нас в силу несчетной бесконечности этих объектов пропадает возможность их полного обзора. Обсудим поэтому, как можно выйти из такого положения.

Логика высказываний устанавливает и описывает отношения между формулами, отображающими логическую форму предложений обычного языка. Язык пропозициональной логики строится из бесконечного множества пропозициональных переменных, обозначаемых обычно с помощью букв p, q, r, s. Чтобы обеспечить возможность употребления сколь угодно большого числа таких переменных, указанные буквы используются с числовыми индексами, что при необходимости позволяет иметь алфавитно-упорядоченный список всех пропозициональных переменных. Другой составляющей такого языка являются пропозициональные логические связки. Обычно это конъюнкция "$\bullet$", дизъюнкция "$\vee$", отрицание "$\neg$" и импликация "$\supset$"[3]. В естественном языке аналогами этих связок являются соответственно союзы "и", "или", "не верно, что ..." и условный союз "если..., то...". В языке используются также разного рода вспомогательные символы. В качестве исходных берутся обычно скобки, а другие при необходимости вводятся по определению (соглашению).

Понятие *пропозициональной формулы* определяется рекурсивно: (1) Отдельная пропозициональная переменная есть пропозициональная формула. (2) Если A есть пропозициональная формула, то $\neg A$ есть пропозициональная формула. (3) Если A и B есть пропозициональные формулы, то $(A \bullet B)$, $(A \vee B)$ и $(A \supset B)$ есть пропозициональные формулы (внешние скобки формул для удобства могут опускаться). (4) Никакое иное выражение пропозициональной формулой не является.

Семантический смысл пропозициональных связок задается следующим образом. Пусть A и B - высказывания, которые могут быть либо истинными, либо ложными. Тогда:

(1) Конъюнкция $A \bullet B$ является истинной, когда истинны и A, и B. Во всех остальных случаях $A \bullet B$ является ложной.

(2) Дизъюнкция $A \vee B$ - истинна, когда истинно по крайней мере одно из высказываний A или B. В противном случае $A \vee B$ - ложна.

---

3 Обозначения логических связок могут быть иными. Так конъюнкция нередко обозначается с помощью знака "&", а импликация с помощью различного рода стрелок.

(3) Импликация $A \supset B$ является ложной, когда A - истинно, а B - ложно. В остальных случаях импликация является истинной[4].

(4) Отрицание высказывания - $\neg A$ является истинным, когда A - ложно. И, естественно, $\neg A$ - ложно, когда A - истинно.

Областью значений пропозициональных переменных являются конкретные высказывания. Так что любая формула превращается в некоторое высказывание, если на место всех переменных поставить некоторые предложения (конечно, одни и те же на место всех вхождений одной и той же переменной) и понимать логические связки как соответствующие союзы естественного языка. Для любого такого высказывания можно выяснить, является ли оно истинным или ложным в некотором возможном мире.

Пропозициональная формула может считаться семантически истинной, если при любых значениях ее переменных (т.е., при подстановке вместо последних некоторых конкретных высказываний) она является истинной во всех возможных мирах. Но, как уже говорилось, и число высказываний, по которым пробегают переменные, и число возможных миров являются бесконечными, а потому такой способ установления семантической истинности формул непосредственно невозможен.

Нас в данном случае может выручить то обстоятельство, что содержание высказываний, которые подставляются на место переменных, никак не влияет на конечный результат. К какому бы возможному миру мы ни обращались, важно только, каково в нем истинностное значение этих высказываний. От этого и только от этого зависит результирующее истинностное значение высказывания, получаемого в процессе любой такой подстановки. Это означает, что нам по сути дела достаточно рассмотреть те и только те подстановки и те возможные миры, которые позволят пересмотреть все возможные варианты подстановок истинных и ложных высказываний на место разных переменных. Технически это то же самое, что приписать переменным, как это делают истинностные таблицы, все возможные наборы истинностных значений из области {*истина*, *ложь*}.

Очевидно, что того же результата можно добиться, если в качестве возможных миров брать не множества всех конкретных высказываний, но все возможные множества переменных и их отрицаний. Поскольку пропозициональную переменную, а также ее отрицание принято называть литералами, такие множества называются множествами литералов. Вхождение переменной в такое множество

---

4 Импликацию описанного типа принято называть ***материальной импликацией***. Как и прочие типы импликаций, она выступает в качестве формального аналога условного союза "если..., то...", но в отличие от последнего не требует для признания истинности $A \supset B$ какой-либо реальной связи между A и B. Именно попытки ввести в язык пропозициональной логики импликации, более адекватные условному союзу обычного языка, являются одной из основных причин построения релевантных логик, о чем пойдет речь ниже.

без отрицания означает, что данная переменная в этом мире истинна, а с отрицанием - ложна.

Естественно, что и сами эти множества и их число остаются бесконечными. Но теперь для любой пропозициональной формулы, поскольку число ее переменных конечно, всегда есть возможность обозреть в силу его заведомой конечности и все то множество миров, которое исчерпывает возможности всех различных приписываний истинностных значений разным переменным. Таким образом, мы получаем возможность судить обо всех истинностных значениях, которые может принимать формула в любом из бесконечного числа миров.

В целях большей строгости и для удобства последующих обобщений мы в дальнейшем под возможным миром будем понимать любое алфавитно-упорядоченное множество неповторяющихся литералов $<a_1, a_2,...,a_n>$ $(n \geq 1)$. Отдельный возможный мир мы будем обозначать с помощью буквы w с некоторыми индексами. Все множество возможных миров обозначим как W.

Таким образом, W есть бесконечное алфавитно-упорядоченное множество $<w_1, w_2,...>$, где каждое w_i есть некоторый возможный мир. При этом мы будем говорить о *классическом* понимании возможных миров (или в карнаповской терминологии - о *классическом* описании состояний), если только для всякого возможного мира w_i из W выполняются два следующих требования:

(С1) Ни в каком мире w_i никакая пропозициональная переменная a не встречается одновременно со своим отрицанием (*Условие непротиворечивости*).

(С2) Во всяком мире w_i любая пропозициональная переменная a встречается либо сама, либо с отрицанием (*Условие полноты*).

Описываемый классическими пропозициональными исчислениями класс формул задается семантическим образом как класс формул, истинных во всех возможных мирах. Иными словами, доказуемыми в этих исчислениях, то есть, теоремами являются те и только те формулы, которые являются истинными (при указанном выше способе оценки формул с заданными пропозициональными связками) во всех возможных мирах. В этом смысле мы имеем семантику возможных миров для классической пропозициональной логики.

2.2. Семантика модальной логики

Мы уже заметили выше, что семантику этой логики можно получить и без использования понятия возможного мира, так как роль множества таких миров могут с успехом сыграть истинностные таблицы, с помощью которых различным переменным можно приписать все возможные наборы истинностных значений, так же, как это делается при использовании возможных миров. Однако такого рода замена возможных миров таблицами осуществима обычно только в случае, когда логические связки являются истинностно-функциональными, т.е., когда истинностное значение некоторого сложного высказывания однозначным образом определяется в зависимости от истинностных значений его составляющих. Если же язык обогащается связками, которые не являются истинностно-функциональными и значения сложных высказываний с которыми зависит не только от истинностных характеристик составляющих, но и от некоторых других оснований, то тогда использование возможных миров становится принципиальным.

Собственно семантика возможных миров получила развитие, признание и стала попросту необходимой, когда с ее помощью удалось построить адекватные семантики многочисленных к тому времени модальных логических исчислений, для которых до этого не было найдено подходящих содержательно и интуитивно оправданных семантик. Построение таких семантик в конце 50-х годов связано с именами С.Кангера, Я.Хинтикки, А.Прайора, С.Крипке[5]. Основной особенностью предложенных семантик является то, что на множестве всех возможных миров задается некоторое (как правило, бинарное) отношение. Отсюда и общее название таких семантик как реляционных. Указанное отношение называют по-разному. Мы будем именовать его здесь отношением достижимости. Утверждение о достижимости мира w_j из мира w_i будем записывать как w_iRw_j. И при верности такого утверждения будем говорить, что мир w_j возможен относительно мира w_i. Содержательно это означает, что в мире w_i мыслимы, допустимы в принципе такие изменения, при которых он превратился бы в мир w_j. А вот, скажем, мир, в котором Марья младше Ивана, не является достижимым из (возможным относительно) мира, в котором Марья мать Ивана. При том, что в этих мирах под Марьей и Иваном разумеются одни и те же люди.

Реляционная семантика открывает возможность давать истинностные оценки высказываниям с модальностями. Допустим, у нас есть высказывание A. Пусть в мире w_i оно истинно. Тогда, естественно, предложение MA (*Возможно, что* A) в этом мире также истинно. А каким будет это же предложение в мире w_i в случае, когда высказывание A в этом мире ложно? Однозначного ответа здесь нет. MA может быть как истинным, так и ложным. Оператор возможности M не является истинностно-функциональным. Все зависит от того, что представляет собой A. В реляционной семантике MA считается истинным в некотором мире w_i, если и только если среди достижимых из w_i миров найдется такой мир w_j, в котором A истинно.

Вполне понятно, что предложение NA (*Необходимо, что* A) в некотором мире w_i будет истинным, если и только если оно истинно в каждом мире w_j, достижимом из w_i, т.е. истинно в каждом мире w_j таком, что w_iRw_j.

---

5 Подробнее смотри об этом во вступительной статье В.А.Смирнова к книге переводов "Семантика модальных и интенсиональных логик", М.,1981. В число переводов входит статья С.Крипке "Семантическое рассмотрение модальной логики" с кратким, но строгим изложением семантики возможных миров для модальной логики.

Класс формул с операторами возможности M и необходимости N, которые окажутся общезначимыми (истинными во всех возможных мирах) в такой семантике, будет зависеть от свойств отношения R. В частности от того, является ли это отношение рефлексивным (Каждый мир достижим из него самого), симметричным (Если w_iRw_j, то w_jRw_i), транзитивным (Если w_iRw_j и w_jRw_k, то w_iRw_k). В зависимости от этого семантика даст описание логических принципов, формализуемых той или иной из ряда известных логических теорий модальностей.

2.3. Семантика следования

2.3.1. Семантика классического следования

В классической логике формула B является семантическим следствием из формулы A, если и только если во всяком возможном мире, в котором истинно A, обязательно является истинным также и B. При этом оказывается, что любая формула B, которая семантически истинна (истинна во всех возможных мирах), такая, например, как $p \vee \neg p$, должна быть признана следствием любой произвольно взятой формулы A. Очевидно также, что в случае, когда A представляет собой тождественно-ложную формулу, которой нельзя приписать значение "истинно" ни в каком из возможных миров, любая произвольно взятая формула B оказывается следствием из A. Такое положение полностью соответствует классическому пониманию логического следования и задающим классическую логику исчислениям. Оно (это положение) плохо согласуется с интуитивными представлениями о следовании, в связи с чем предпринято построение так называемых релевантных логик, которые не допускают произвольных следствий из логически невозможных высказываний и не считают логически общезначимые предложения следствиями из любых других.

Построение релевантных логик связано не только с некоторой интуитивной неприемлемостью (далеко не всеми разделяемой), но и с серьезными практическими соображениями.

Логическое следование, формализуемое классической логикой, принципиально блокирует саму возможность оперирования с совокупностью данных, которые оказались в каких-то пунктах, пусть даже несущественных, противоречивыми, ибо вынуждает считать следствиями этих данных (в силу их противоречивости) все, что угодно.

2.3.2. Семантика релевантного следования

2.3.2.1. Семантика релевантного следования для классических пропозициональных формул

Пусть A и B - классические пропозициональные формулы. В каком случае вторая является логическим следствием первой в релевантном смысле? Как мы видели, в семантике возможных миров попытка считать B следствием из A на том основании, что во всех мирах, где истинно A, таковым является B, приводит к признанию, что любое B есть следствие противоречивого A. Причина понятна: ни в каком мире такое A нельзя верифицировать (приписать значение "истинно"), в результате чего условие, требуемое для следования, автоматически выполняется для любого B. Понятно, что при тавтологичном (логически истинном) B такое условие (в силу невозможности ни в каком мире фальсифицировать B) автоматически выполняется для любого A.

Поскольку в релевантной логике стремятся избежать именно такого положения, то возникает естественная идея отказаться от условий непротиворечивости и полноты возможных миров (смотри выше: условия С1 и С2). При таком отказе никакая классическая формула уже не может ни верифицироваться, ни фальсифицироваться во всех мирах. Здесь, правда, возникает одно неудобство, связанное с импликацией. Казалось бы, формула вида $A \supset A$ должна быть истинной во всех мирах, и соответственно ее отрицание во всех мирах должно быть ложным. Но тогда $A \supset A$, как и раньше, придется считать следствием из любой формулы, и любую формулу следствием из отрицания $A \supset A$.

Выход находят в том, что материальную импликацию или вообще выбрасывают из языка, оставляя только конъюнкцию, дизъюнкцию и отрицание (язык КДО), или, что в общем то же самое, рассматривают материальную импликацию $A \supset B$ как сокращение для $\neg A \vee B$.

Но тем самым мы имеем дело не с решением проблемы, а с уходом от ее решения. Все,чего мы при этом добиваемся,- это строим теорию (релевантного) логического следования только для тех формул языка, которые при принимаемой семантике не могут быть ни семантически истинными, ни семантически ложными. При этом сами утверждения о логическом следовании либо вообще не относятся к объектному языку, для которого мы эту теорию строим, либо в языке принимаются только так называемые перво-порядковые утверждения о следовании, не допускающие итерации следования. Фактически это означает, что мы лишаемся возможности строить семантику для языка, допускающего итерацию импликаций. Иными словами, язык, для которого мы можем строить семантику следования указанного типа,не должен включать выражений вроде закона контрапозиции $A \to B \to . \neg B \to \neg A$, транзитивности импликации $A \to B \to .\ B \to C \to .\ A \to C$ и любых других, содержащих импликации импликаций.

2.3.2.2. Семантика следования для пропозициональных формул с релевантной импликацией

Попытаемся уяснить, с чем связана основная трудность построения семантики следования для языка, содержащего формулы с итерированными импликациями. Допустим, что формула вида $B \to C$ является теоремой некоторого исчисления, семантику которого мы стремимся построить. Строя семантику таким обычно принятым образом, чтобы в каждом мире, в котором истинно B, являлось бы истинным и C, мы встаем перед следующей проблемой. С одной стороны, нам требуется, чтобы $B \to C$ было истинно во всех возможных мирах, а с другой - мы не считаем правильным рассматривать эту формулу на таком основании следствием из любой произвольной формулы A. Грубо говоря, нам нужно осуществить явно невыполнимое в силу своей противоречивости требование, чтобы $B \to C$ было истинно во всех мирах, но чтобы при этом были бы такие миры, где A - истинно, а $B \to C$ - нет. Как выйти из этого, казалось бы, безвыходного положения? Для этого надо отказаться от некоторых традиционных предпосылок, с которыми обычно связаны все семантические построения.

В первую очередь надо освободиться от иллюзии, что в рамках семантики возможных миров мы можем получить некоторую новую информацию о связи событий или говорящих о них высказываний, т.е. такую информацию, которую уже не вложили заранее при описании и определении возможных миров. Я позволю себе здесь некоторую шутливую аналогию. Чтобы определить пол пойманного зайца, достаточно выпустить его и посмотреть: если побежал, то - заяц, а если побежала, то - зайчиха. Именно с подобной ситуацией мы имеем дело, обращаясь к возможным мирам. Два события мы связываем в силу того, что во всех возможных мирах одно не возможно без другого. Но на каком основании миры, для которых это обстоит иным образом, уже оказались для нас невозможными? Можно, конечно, сказать, что это связано с объективным положением дел. Но ведь и проблема "побежал - побежала" тоже имеет объективное разрешение. Только что это нам дает?

Тот факт, что для некоторых двух формул (предложений) A и B положение дел оказывается таковым, что в любом возможном мире, в котором верно A, верным является и B, представляет собой необходимое, но недостаточное условие для того, чтобы признать, что между A и B имеется некоторая связь. Утверждение о связи физической или логической всегда есть утверждение более высокого (теоретического) уровня, чем констатация любого фактического положения дел. Д.Юм когда-то вполне оправданно утверждал, что никакие ссылки на то, что событие B всегда появляется после события A, не дает права считать эти события причинно или как-то иначе связанными. И дело здесь не в том, чтобы отрицать саму объективную возможность такой связи, а в том, что утверждение о ней есть всегда в логическом смысле нечто большее, чем простая фиксация фактического состояния дел. Какие бы ни были у нас эмпирические основания для признания объективного существования такой связи: опыт, повторяемость, возможность воспроизведения и т.п., - такое признание непременно представляет собой выход за пределы эмпирических данных. В том по крайней мере смысле, что не может быть из них дедуцирована, так как несет информацию большую, чем любые такие данные.

Такую трактовку (ее оправданно назвать юмовской) связи между событиями уместно перенести на логические связи между высказываниями. Да, в каждом возможном мире, в котороpом истинно высказывание A, естественно является истинным это самое A. Достаточно ли этого для того, чтобы признать истинным "A влечет A" (или символически: $A \rightarrow A$)? Любой знающий русский язык человек с легкостью посчитает истинными высказывания A и B по отдельности, если ему известно, что является истинной конъюнкция этих высказываний A-и-B. Но кто на этом основании способен сделать утверждение, что из высказывания A-и-B логически следует A и логически следует B, и что здесь действуют соответствующие универсальные законы логики? Люди начинают рассуждать логически, как и добывать огонь трением, значительно раньше, чем обнаруживают те законы, в соответствии с которыми их действия приводят к требуемым результатам. Люди рассуждали логично задолго до того, как удалось выявить, зафиксировать и установить универсальность (или, напротив, неуниверсальность) тех принципов, на которые они, сами того не осознавая, при этом опирались.

При построении обсуждаемой здесь семантики возможных миров я пошел по пути принципиального различения двух типов утверждений о связях высказываний A и B. Утверждения первого типа являются фактуальными и говорят о том, что во всяком возможном мире, где истинно высказывание A, является истинным также высказывание B. Верность такого утверждения является необходимым условием истинности утверждений второго типа (теоретических) о следовании B из A, но не является достаточным. При этом никакое теоретическое утверждение о следовании не является и не может быть в предлагаемой семантике беспредпосылочно истинным. Ясно в силу сказанного, что таковыми не являются ни аксиомы, ни теоремы логических исчислений. Но что же описывают тогда эти исчисления, как не логические истины, и в каком тогда смысле можно говорить о семантике, если истинных формул не существует?

Во-первых, мы говорим о том, что не существует не просто истинных, а беспредпосылочно истинных формул. И, во-вторых, исчисления и соответствующая им семантика описывают такие и только такие формулы, что A принадлежит к их числу, если и только если A верифицируется в каждом возможном мире, в котором постулирована истинность утверждения $A \rightarrow A$. Иными словами, все, что мы называем логическими истинами, есть следствие из постулируемого $A \rightarrow A$ и языковых соглашений относительно условий истинности высказываний с соответствующими логическими связками.

Ясно, что проблема парадоксов, связанная с выводимостью логически истинных формул из произвольных и с выводимостью произвольных из логически невозможных, отпадает сама по себе. У нас нет никаких оснований признать верным при произвольном B, скажем, $B \to (A \to A)$.

Не вдаваясь в технические детали, укажем, что этот результат достигается за счет изменения понятия возможного мира. Последний надстраивается вторым ("теоретическим") этажом. Мир атомарных предложений ("фактуальный" мир) дополняется миром следствий. И сказать, что A влечет B или $(A \to B)$, можно только имея B на втором этаже каждого мира, где в фактуальном мире верифицируется A. Оказаться на втором этаже в качестве следствия некоторая формула может только в случае, когда хотя бы какое-то предположение о следовании было первоначально сделано. Если таковых нет, то никакая связь между высказываниями в этой семантике обоснована быть не может. Следствия, таким образом, всегда есть результат применения теории и особым образом выделены. При этом тот факт, что, например, признание верности $A \to AB$ во всяком мире в данной семантике влечет признание верности $A \to A$, вовсе не означает верности во всех мирах импликации этих формул: $(A \to AB) \to (A \to A)$, так как мы имеем здесь дело с уже новым теоретическим уровнем: отношением следования между теоретическими утверждениями. Таким образом, верность фактического предложения о соответствующей связи между A и B во всех возможных мирах никогда не влечет утверждения о верности $A \to B$. Вместе с тем семантика устроена таким образом, что верности этого фактического предложения достаточно для того, чтобы можно было считать $A \to B$ семантически истинным в том смысле, что $A \to B$ верно во всех мирах, где постулирована истинность $(A \to B) \to (A \to B)$, а значит для признания $A \to B$ теоремой исчислений, для которых эта семантика построена.

В результате в предлагаемой семантике удается, с одной стороны, сохранить в общем-то стандартное понимание логического следования, а, с другой - универсальным образом избежать парадоксов следования. Мне представляется также, что эта семантика достаточно хорошо оправдана в содержательном отношении. Будучи основана на четком различении фактических и теоретических утверждений, она дает однозначную экспликацию и критерий этого различения.

И наконец, мы в данном случае имеем дело с семантикой, которую, как я считаю, есть все основания называть юмовской, чтобы подчеркнуть ее отличие от семантик, исходящих из предположения о том, что утверждения логики суть истины во всех возможных мирах. Отказываясь от такой трактовки, мы вместе с тем возвращаемся к ней с несколько иным ее пониманием. Логический принцип A есть истина во всех мирах, где провозглашается истинность $A \to A$. Австралийский логик Роутли, построивший релевантную семантику с тернарным отношением достижимости, сказал, что логические истины - это истины во всех тех возможных мирах, где истинны законы логики. И в общем был прав.

Д. П. Скворцов

СРАВНЕНИЕ ДЕДУКТИВНОЙ СИЛЫ РЕАЛИЗУЕМЫХ ПРОПОЗИЦИОНАЛЬНЫХ ФОРМУЛ

Исследуется выводимость и невыводимость друг из друга для некоторых известных из литературы 1950 - 70-х годов рекурсивно реализуемых интуиционистски невыводимых пропозициональных формул.

Первый пример реализуемой пропозициональной формулы, недоказуемой в интуиционистском исчислении высказываний, построил Дж. Роуз в 1953 г. [1] . Позже, в 60-е и 70-е годы, различными авторами были обнаружены некоторые иные реализуемые интуиционистски недоказуемые формулы, в том числе несколько бесконечных серий. Однако достаточно исчерпывающий анализ взаимной выводимости этих формул, кажется, никем не приводился. Поэтому здесь, в качестве некоторой "исторической справки", представлена "диаграмма выводимостей" для некоторых известных из литературы реализуемых пропозициональных формул. При этом обнаруживается, что бесконечные серии по преимуществу "схлопываются", и выявляются 4 взаимно невыводимые формулы, следствиями которых являются остальные известные примеры .

1. Пропозициональные формулы строятся посредством $\&$, $\vee$, $\rightarrow$ из переменных и константы $\perp$; сокращения $\neg\Phi = (\Phi\rightarrow\perp)$ и $(\Phi\leftrightarrow\Psi) = (\Phi\rightarrow\Psi) \& (\Psi\rightarrow\Phi)$ общеприняты . Результат одновременной подстановки формул $\Phi_1,...,\Phi_n$ вместо различных переменных $p_1,...,p_n$ в формулу Ψ будем обозначать $\Psi\,[p_1,...,p_n/\Phi_1,...,\Phi_n]$. Будем писать $\Phi\vdash\Psi$, если формула Ψ выводима из Φ в интуиционистском исчислении высказываний **H** с правилами modus ponens и подстановки. Формулы Φ и Ψ *дедуктивно равны* ($\Phi \approx \Psi$), если $\Phi\vdash\Psi$ и $\Psi\vdash\Phi$. Формулы Φ и Ψ *эквивалентны* ($\Phi \equiv \Psi$), если $\mathbf{H}\vdash(\Phi\leftrightarrow\Psi)$.

Будем рассматривать следующие известные реализуемые (и недоказуемые в **H**) формулы .

(1) *Формула Дж. Роуза* [1] :

$$J = (\,((\neg\neg D\rightarrow D)\rightarrow \neg\neg D\vee\neg D)\rightarrow \neg\neg D\vee\neg D\,),\ \text{где}\ D=(\neg q_1\vee\neg q_2).$$

(2) *Формулы В. А. Янкова* [2] :

$$R=\neg(p\&q)\&\neg(\neg p\&\neg q)\&((\neg\neg p\rightarrow p)\rightarrow p\vee\neg p)\&((\neg\neg q\rightarrow q)\rightarrow q\vee\neg q)\rightarrow \rightarrow\neg p\vee\neg q\,,$$

$$I_n=[\mathop{\&}_{1\le i<j\le n}\neg(p_i\&p_j)\ \&\ \mathop{\&}_{1\le i<n}((\mathop{\&}_{\substack{1\le j<n\\ j\ne i}}\neg p_j)\rightarrow p_i\vee p_n)\,]\rightarrow p_n\vee\neg p_n\,,$$

$$K_n = \mathop{\&}_{1\le i<j\le n} [\neg(p_i \& p_j) \& ((\mathop{\&}_{\substack{1\le k\le n\\ k\ne i,\, k\ne j}} \neg p_k) \to p_i \vee p_j)] \to \bigvee_{1\le i\le n} p_i,$$

где $n\ge 3$ (при $n=2$ формулы $I_2 = \neg(p_1\&p_2)\&(p_1\vee p_2) \to (p_2 \vee \neg p_2)$ и $K_2 = \neg(p_1\&p_2)\&(p_1\vee p_2) \to (p_1\vee p_2)$ доказуемы в H).

(3) *Формулы Г. С. Цейтина* [3] :

$$C_{kn} = \neg(\mathop{\&}_{1\le i\le k} p_i) \& [(\bigvee_{1\le i\le k} \neg p_i) \to (\bigvee_{1\le j\le n} q_j)] \to \bigvee_{\substack{1\le i\le k\\ 1\le j\le n}} (\neg p_i \to q_j).$$

Наряду с ними рассмотрим также модифицированные варианты формул Цейтина (как будет показано, все они дедуктивно равны формулам из числа C_{kn}) :

$$C^* = \neg(p_1\&p_2) \& \mathop{\&}_{1\le i\le 2} (\neg p_i \to q_i \vee r) \to \bigvee_{1\le i\le 2} ((\neg p_i \to q_i)\vee(\neg p_i \to r)),$$

$$C^*_{kn} = \neg(\mathop{\&}_{1\le i\le k} p_i) \& \mathop{\&}_{1\le i\le k} (\neg p_i \to \bigvee_{1\le j\le n} q_{ij}) \to \bigvee_{\substack{1\le i\le k\\ 1\le j\le n}} (\neg p_i \to q_{ij}).$$

Здесь $k\ge 2$, $n\ge 2$; легко видеть, что $H \vdash C_{kn} \& C^*_{kn}$ при $(k=1)\vee(n=1)$.

Кроме того, из [3] вытекает реализуемость целого семейства формул, связанных с понятием конечного дизъюнктивного ранга (к числу их относятся формулы, приведенные М. М. Кипнисом в [4]) - но, как отмечено в [3] , все они выводимы из C_{22} , и поэтому обсуждать их здесь не будем.

(4) *Формулы В. Е. Плиско* [5] :

$$P = \neg(p_1\&p_2) \;\&\; \neg\neg(q_1\vee q_2) \;\&$$
$$\& \; [(p_1\to q_1)\vee(p_1\to q_2) \to (p_2\to q_1)\vee(p_2\to q_2)] \to$$
$$\to (p_2\to q_1) \vee (p_2\to q_2),$$

$$P_3 = \neg\neg(\bigvee_{1\le i\le 3} p_i) \& \mathop{\&}_{1\le i\le 2} (\neg\neg(p_i\vee p_3) \to p_i\vee p_3) \to (\neg\neg(p_1\vee p_2)\vee p_3),$$

$$P_0 = ((\neg p\vee\neg\neg p \to \neg q\vee\neg\neg q) \to \neg q\vee\neg\neg q) \to$$
$$\to ((\neg q\vee\neg\neg q \to \neg p\vee\neg\neg p) \to \neg p\vee\neg\neg p),$$

$$L = \mathop{\&}_{1\le i\le 3} [(\neg\neg p_i \leftrightarrow \mathop{\&}_{\substack{1\le j\le 3\\ j\ne i}} \neg p_j) \& ((\neg p_i \to \bigvee_{\substack{1\le j\le 3\\ j\ne i}} \neg p_j) \to \bigvee_{\substack{1\le j\le 3\\ j\ne i}} \neg p_j)] \to$$
$$\to \neg p_1\vee\neg p_2\vee\neg p_3.$$

Наряду с ними, рассмотрим также две нереализуемые пропозициональные формулы :

формула Скотта $S = (((\neg\neg p\to p) \to \neg\neg p\vee\neg p) \to \neg\neg p\vee\neg p)$

("каркас" формулы Роуза) ,

формула Крайзела - Патнэма $K = (\neg p\to q\vee r) \to (\neg p\to q)\vee(\neg p\to r)$.

Эти две формулы финитно общезначимы в смысле Ю. Т. Медведева [6] , а поскольку все рассматриваемые формулы, кроме формулы L (специально построенной Плиско в качестве примера реализуемой, но не финитно общезначимой формулы), выводимы из S или из K, то они также финитно общезначимы.

2. Для установления невыводимости будем использовать обычную семантику конечных шкал Крипке. *Шкала* F - это конечное частично упорядоченное множество с наименьшим элементом u_0. *Оценка* на шкале F - это отношение вынуждения $u \models p$ между точками u из F и переменными p, удовлетворяющее условию монотонности: $u \leq v$, $u \models p \Rightarrow v \models p$. Вынуждение распространяется на произвольные формулы (с сохранением монотонности) обычным образом: $u \models (\Phi \& \Psi) \Leftrightarrow (u \models \Phi) \& (u \models \Psi)$, $u \models (\Phi \vee \Psi) \Leftrightarrow (u \models \Phi) \vee (u \models \Psi)$,

$$u \models (\Phi \to \Psi) \Leftrightarrow [\forall v \geq u\ ((v \models \Phi) \Rightarrow (v \models \Psi))], \qquad u \not\models \bot .$$

Формула Φ *общезначима* на шкале F ($F \models \Phi$), если $u_0 \models \Phi$ для всякой оценки на F. Известно, что если $\Phi \vdash \Psi$ и $F \models \Phi$, то $F \models \Psi$.

Легко показать, что формулы S, R и K_3 дедуктивно равны характеристическим формулам (в смысле В. А. Янкова [7]) шкал F_1, F_2 и F_3 (см. рис. 1 на стр. 51) соответственно (точнее, отвечающих этим шкалам гейтинговых алгебр, или, в терминологии [7], конечных им-пликативных структур). Основное свойство характеристической формулы X(F) шкалы F: $\Phi \vdash X(F) \Leftrightarrow F \not\models \Phi$ для всякой формулы Φ (см. [7]).

Множество максимальных элементов шкалы F обозначим max(F). Для $u \in F$ положим $F^u = \{v \in F : u \leq v\}$ (в частности, $F^u = F$ для $u = u_0$); при этом $\max(F^u) = F^u \cap \max(F)$. Для $E \subseteq \max(F)$ положим $\mathrm{under}(E) = \{u \in F : \max(F^u) \subseteq E\}$ и для $G \subseteq F$: min(G) - множество минимальных элементов G (в частности, $\min(F) = \{u_0\}$). Ясно, что $\mathrm{under}(E) \cap \max(F) = E$ и $\mathrm{under}(E) = \bigcup \{ F^u : u \in \min(\mathrm{under}(E)) \}$ для $E \subseteq \max(F)$.

3. **Лемма 1.** (1) $H \vdash [\ \underset{1 \leq i \leq n}{\&} ((p_i \to q) \to q) \to (((\underset{1 \leq i \leq n}{\&} p_i) \to q) \to q)\ ]$ для всех $n \geq 2$. (2) $H \vdash [\ (p \to q) \to (((p \to r) \to r) \to ((q \to r) \to r))\ ]$.

Доказательство: (1) индукция по n (случай $n = 2$: из $((p_i \to q) \to q)$ и $(p_1 \& p_2 \to q)$ следует $p_1 \to (p_2 \to q)$, $p_1 \to q$, q); (2) очевидно.

Предложение 1. (1) Положим $D_n = (\underset{1 \leq i \leq n}{\vee} \neg q_i)$, $D'_n = (\underset{1 \leq i \leq n}{\vee} \neg\neg q_i)$.

Для всякого $n \geq 2$: $S[p/D_n] \approx S[p/D'_n] \approx J$

(отметим, что для $n = 1$: $H \vdash S[p/D_1] \& S[p/D'_1]$).

(2) $P_0 \approx J$.

Доказательство. (1) Очевидно, что $S[p/D_n] \approx S[p/D'_n]$ (подстановка $[q_i / \neg q_i]$) и $S[p/D_n] \vdash J = S[p/D_2]$ при $n \geq 2$ (подстановка $[q_1, q_2, \dots, q_n / q_1, q_2, \dots, q_2]$). Покажем, что $J \vdash S[p/D'_n]$ при $n \geq 2$.

Для $1 \leq i \leq n$ положим $D_{ni} = \neg q_i \,\&\, (\bigvee_{j \neq i} q_j)$ и $D'_{ni} = \neg\neg q_i \vee \neg\neg D_{ni}$.

Имеем $\neg\neg D'_{ni} \equiv \neg\neg D'_n$, $\neg D'_{ni} \equiv \neg D'_n$ и
$H \vdash ((\underset{1 \leq i \leq n}{\&} D'_{ni}) \to D'_n)$ (т. к. $H \vdash \neg(\underset{1 \leq i \leq n}{\&} \neg\neg D_{ni}))$,
а значит, $H \vdash [\underset{1 \leq i \leq n}{\&} (\neg\neg D'_n \to D'_{ni}) \to (\neg\neg D'_n \to D'_n)]$.
Также, т. к. $J \vdash [((\neg\neg D'_n \to D'_{ni}) \to \neg\neg D'_n \vee \neg D'_n) \to \neg\neg D'_n \vee \neg D'_n]$,
то $J \vdash [(\underset{1 \leq i \leq n}{\&} (\neg\neg D'_n \to D'_{ni}) \to \neg\neg D'_n \vee \neg D'_n) \to \neg\neg D'_n \vee \neg D'_n]$
(по лемме 1, п. 1) и $J \vdash S[p/D'_n]$ (по лемме 1, п. 2).

(2) $J \vdash P_0$, где $P_0 = (P'_0 \to (P''_0 \to \neg p \vee \neg\neg p))$.
Положим $\Phi_1 = \neg(q \vee p) \vee \neg(\neg q \vee p)$, $\Phi_2 = \neg(q \vee \neg p) \vee \neg(\neg q \vee \neg p)$.
Так как $\Phi_i \equiv (\neg q \vee \neg\neg q) \,\&\, p^i$ (где $p^1 = \neg p$, $p^2 = \neg\neg p$),
то $\neg\neg\Phi_i \equiv p^i$, $(\neg\neg\Phi_i \vee \neg\Phi_i) \equiv (\neg\neg p \vee \neg p)$ и
$S[p/\Phi_i] \equiv (((p^i \to \neg q \vee \neg\neg q) \to \neg p \vee \neg\neg p) \to \neg p \vee \neg\neg p)$ для $i = 1, 2$.
Так как $J \vdash S[p/\Phi_i]$, то остается показать, что
$H \vdash (S[p/\Phi_1] \,\&\, S[p/\Phi_2] \to P_0)$. Для этого достаточно убедиться, что $H \vdash (S[p/\Phi_2] \,\&\, P'_0 \,\&\, P''_0 \,\&\, (p^1 \to \neg q \vee \neg\neg q) \to \neg p \vee \neg\neg p)$.
И правда, из $(\neg p \to \neg q \vee \neg\neg q) \& ((\neg p \vee \neg\neg p \to \neg q \vee \neg\neg q) \to \neg q \vee \neg\neg q) \&$
$\&(\neg q \vee \neg\neg q \to \neg p \vee \neg\neg p)$ следует $((\neg\neg p \to \neg q \vee \neg\neg q) \to \neg p \vee \neg\neg p)$,
откуда в силу $S[p/\Phi_2]$ следует $\neg p \vee \neg\neg p$.

$P_0 \vdash J$, так как $H \vdash (P_0[p,q/D,q_2] \to J)$, где $D = (\neg q_1 \vee \neg q_2)$.
Для этого достаточно убедиться, что $H \vdash (\Phi_0 \to \Phi_1 \,\&\, \Phi_2)$,
где $\Phi_0 = ((\neg\neg D \to D) \to \neg\neg D \vee \neg D)$ (посылка J),
а $\Phi_1 = ((\neg D \vee \neg\neg D \to \neg q_2 \vee \neg\neg q_2) \to \neg q_2 \vee \neg\neg q_2)$,
$\Phi_2 = (\neg q_2 \vee \neg\neg q_2 \to \neg D \vee \neg\neg D)$ (посылки $P_0[p, q / D, q_2]$).
Так как $H \vdash (\neg q_2 \vee \neg\neg q_2 \to (\neg\neg D \to D))$, то $H \vdash (\Phi_0 \to \Phi_2)$, и
$H \vdash [(\neg\neg D \vee \neg D \to \neg q_2 \vee \neg\neg q_2) \to (\neg\neg D \vee \neg D \to (\neg\neg D \to D))] \vdash$
$\vdash [(\neg\neg D \vee \neg D \to \neg q_2 \vee \neg\neg q_2) \to (\neg\neg D \to D)]$, а значит, $H \vdash (\Phi_0 \to \Phi_1)$.

Предложение 2. (1) $I_n \approx I_3$, $K_n \approx K_3$ $(n \geq 3)$. (2) $I_3 \approx (K_3 \& J)$.

Доказательство. *)

(1) Положим (для $n \geq 3$): $I_n = (I^*_1 \to p_n \vee \neg p_n)$, $I_{n+1} = (I^*_0 \to p_n \vee \neg p_n)$,
$K_n = (K^*_1 \to (\bigvee_{i \in U_1} p_i))$, $K_{n+1} = (K^*_0 \to (\bigvee_{i \in U_0} p_i))$,
где $U_s = \{ i : s \leq i \leq n \}$,

---

* В статье В. А. Янкова [2] сформулированы (без доказательства) выводимости "в нетривиальную сторону": $I_3 \vdash I_n$ для $n \geq 3$ (теорема 1). Однако Янков не помнит, осознавал ли он тогда равносильность формул I_n (и K_n) между собой.

$$I^*_s = [\mathop{\&}_{\substack{i,j\in U_s\\ i<j}} \neg(p_i \& p_j) \ \& \mathop{\&}_{\substack{i\in U_s\\ i\neq n}} ((\mathop{\&}_{\substack{j\in U_s\\ j\neq i,\, j\neq n}} \neg p_j) \to p_i \vee p_n)],$$

$$K^*_s = \mathop{\&}_{\substack{i,j\in U_s\\ i<j}} [\neg(p_i \& p_j) \& ((\mathop{\&}_{\substack{k\in U_s\\ k\neq i,\, k\neq j}} \neg p_k) \to p_i \vee p_j)] \quad \text{для } s = 0, 1.$$

Здесь $I_{n+1} \vdash I_n$, $K_{n+1} \vdash K_n$, поскольку $H \vdash (I_{n+1}[p_0/\bot] \to I_n)$ и $H \vdash (K_{n+1}[p_0/\bot] \to K_n)$ (т. к. $H \vdash (I^*_1 \to I^*_0[p_0/\bot]) \& (K^*_1 \to K^*_0[p_0/\bot])$: $H \vdash [I^*_1 \to ((\mathop{\&}_{\substack{j\in U_1\\ j\neq n}} \neg p_j) \to \bot \vee p_n)]$ и $H \vdash [K^*_1 \to ((\mathop{\&}_{\substack{k\in U_1\\ k\neq j}} \neg p_k) \to \bot \vee p_j)]$ для $j \in U_1$).

Покажем, что $I_n \vdash I_{n+1}$. Отметим, что $I_n \vdash (I^*_0 \& \neg p_0 \to p_n \vee \neg p_n)$ (т. к. $H \vdash (I^*_0 \& \neg p_0 \to I^*_1)$), и ввиду очевидной симметрии, $I_n \vdash I_{nm}$, где $I_{nm} = (I^*_0 \& \neg p_m \to p_n \vee \neg p_n)$, для всех $m \in (U_0 \setminus \{n\})$. Так как $I_n \vdash (I^*_1[p_1 / \neg(\bigvee_{2\le k\le n} p_k)] \to p_n \vee \neg p_n)$, то достаточно убедиться, что $I_n \vdash (I^*_0 \to I^*_1[p_1 / \neg(\bigvee_{2\le k\le n} p_k)])$. Действительно, из I^*_0 немедленно следуют $\neg(p_i \& p_j)$ для $2 \le i < j \le n$, $\neg(\neg(\bigvee_{2\le k\le n} p_k) \& p_j)$ для $2 \le j \le n$, $(\neg\neg(\bigvee_{2\le k\le n} p_k) \& \mathop{\&}_{\substack{2\le j<n\\ j\neq i}} \neg p_j \to p_i \vee p_n)$ для $2 \le i \le n$ (т. к. $\neg\neg(\bigvee_{2\le k\le n} p_k)$ влечет $(\neg p_0 \& \neg p_1)$ ввиду $\mathop{\&}_{0\le i<j\le n} \neg(p_i \& p_j)$ в I^*_0). А $(\mathop{\&}_{2\le j<n} \neg p_j \to \neg(\bigvee_{2\le k\le n} p_k) \vee p_n)$ следует из $(I^*_0 \& I_{nm})$ для $m = 2$, так как $(I^*_0 \& I_{nm} \& \neg p_2)$ влечет $p_n \vee \neg p_n$, а $\neg p_n \& (\mathop{\&}_{2\le j<n} \neg p_j)$ влечет $\neg(\bigvee_{2\le k\le n} p_k)$ (здесь важно, что $n \ge 3$).

Рассуждение для $K_n \vdash K_{n+1}$ аналогично. Сначала устанавливаем, что $K_n \vdash K_{nm}$, где $K_{nm} = (K^*_0 \& \neg p_m \to \bigvee_{i\in(U_0\setminus\{m\})} p_i)$ для $m \in U_0$.

Теперь убеждаемся, что $K_n \vdash (K^*_0 \to K^*_1[p_1/p_0 \vee p_1])$: конъюнктивные члены $K^*_1[p_1 / p_0 \vee p_1]$ для $2 \le i < j \le n$ немедленно следуют из K^*_0 (т. к. $\neg(p_0 \vee p_1) \equiv \neg p_0 \& \neg p_1$), а для $1 = i < j \le n$:

$((\mathop{\&}\limits_{\substack{2\le k\le n\\ k\ne j}} \neg p_k) \to p_0 \vee p_1 \vee p_j)$ следует из $K^*_0 \& K_{nm}$ для $m \in (U_0 \setminus \{0, 1, j\})$, так как $(K^*_0 \& K_{nm} \& \neg p_m)$ влечет $(\bigvee\limits_{i \in (U_0 \setminus \{m\})} p_i)$, а случаи p_i для $i \ne 0, 1, j$ противоречат $(\mathop{\&}\limits_{\substack{2\le k\le n\\ k\ne j}} \neg p_k)$.

(2) $I_3 \vdash K_3$, где $I_3 = (I'_3 \to p_3 \vee \neg p_3)$, $K_3 = (K'_3 \to p_1 \vee p_2 \vee p_3)$. Так как $H \vdash (K'_3 \to I'_3)$, то, ввиду очевидной симметрии, $I_3 \vdash (K'_3 \to \mathop{\&}\limits_{1\le i\le 3} (p_i \vee \neg p_i))$, а случай $(\neg p_1 \& \neg p_2 \& \neg p_3)$ противоречит $(\neg p_1 \to p_2 \vee p_3)$ в K'_3.

$I_3 \vdash J$, так как $H \vdash (I^*_3 \to J)$, где $I^*_3 = I_3 [p_1, p_2, p_3 / D^*_1, D^*_2, D^*_3]$, $D^*_1 = \neg q_1$, $D^*_2 = \neg\neg(q_1 \& \neg q_2)$, $D^*_3 = \neg D$ для $D = (\neg q_1 \vee \neg q_2)$, то есть $D^*_3 \equiv \neg\neg(q_1 \& q_2)$. Действительно, так как $I^*_3 = (I''_3 \to \neg D \vee \neg\neg D)$, где $I''_3 = I'_3 [p_1, p_2, p_3 / D^*_1, D^*_2, D^*_3]$, то достаточно убедиться, что $H \vdash [((\neg\neg D \to D) \to \neg\neg D \vee \neg D) \to I''_3]$. Но $H \vdash \neg(D^*_i \& D^*_j)$ для $1 \le i < j \le 3$, а $(\neg D^*_1 \to D^*_2 \vee \neg D)$ следует из $((\neg\neg D \to D) \to \neg\neg D \vee \neg D)$, так как $\neg D^*_1 = \neg\neg q_1$ влечет $(D \leftrightarrow \neg q_2)$ и $(\neg\neg D \to D)$, а $\neg D^*_1 \& (\neg\neg D \vee \neg D)$ влечет $D^*_2 \vee \neg D$, так как $(\neg D^*_1 \& \neg\neg D) \equiv (\neg\neg q_1 \& \neg q_2) \equiv D^*_2$. Наконец, $(\neg D^*_2 \to D^*_1 \vee \neg D)$ следует из $((\neg\neg D \to D) \to \neg\neg D \vee \neg D)$, так как $\neg D^*_2$ влечет $(\neg\neg D \to \neg q_1)$ и $(\neg\neg D \to D)$, а $\neg D^*_2 \& (\neg\neg D \vee \neg D)$ влечет $D^*_1 \vee \neg D$, так как $(\neg D^*_2 \& \neg\neg D) \equiv \neg q_1 = D^*_1$.

$K_3 \& J \vdash I_3$, так как $H \vdash (K_3 \& J^* \to I_3)$, где $J^* = S[p/P^*]$, $P^* = \neg(p_1 \vee p_3) \vee \neg(p_2 \vee p_3)$, т. е. J^* есть подстановочный пример J. Действительно, $P^* \equiv (\neg p_1 \vee \neg p_2) \& \neg p_3$ и $\neg\neg P^* \equiv \neg(p_1 \& p_2) \& \neg p_3$, и значит, $H \vdash (I'_3 \to (\neg\neg P^* \leftrightarrow \neg p_3) \& (\neg P^* \leftrightarrow \neg\neg p_3))$ (т. к. I'_3 содержит $\neg(p_1 \& p_2)$). Теперь $H \vdash [K_3 \& I'_3 \& (\neg\neg P^* \to P^*) \to \bigvee\limits_{1\le i\le 3} p_i]$, так как $I'_3 \& (\neg\neg P^* \to P^*)$ влечет $(\neg p_3 \to \neg p_1 \vee \neg p_2)$ и K'_3. А так как $H \vdash (I'_3 \& p_3 \to \neg P^*)$ и $H \vdash (I'_3 \& (p_1 \vee p_2) \to \neg\neg P^*)$ (т. к. I'_3 содержит

$\mathop{\&}\limits_{1\le i<j\le 3} \neg(p_i \& p_j)$), то $H \vdash [K_3 \& I'_3 \to ((\neg\neg P^* \to P^*) \to \neg\neg P^* \vee \neg P^*)]$ и $H \vdash (K_3 \& I'_3 \& J^* \to \neg\neg P^* \vee \neg P^*)$, т. е. $H \vdash (K_3 \& I'_3 \& J^* \to \neg p_3 \vee \neg\neg p_3)$. Наконец, $H \vdash (I'_3 \& \neg\neg p_3 \to p_3)$, так как $I'_3 \& \neg\neg p_3$ влечет $\neg p_1 \& \neg p_2$ (ввиду $\neg(p_1 \& p_3) \& \neg(p_2 \& p_3)$ в I'_3), и $(\neg p_1 \to p_2 \vee p_3)$ (из I'_3) дает p_3 . Таким образом, $H \vdash (K_3 \& J^* \& I'_3 \to \neg p_3 \vee p_3)$, ч. т. д .

4. **Предложение 3.** (1) Для k, n ≥ 2 и m ≥ 3 : $C^*_{kn} \approx C_{km} \approx C^*$. (2) $C^* \vdash \ldots \vdash C_{(k+1)2} \vdash C_{k2} \vdash \ldots \vdash C_{22}$. (3) $(H + \{C_{k2}: k \ge 2\}) \nvdash C^*$.

Т. обр. , все формулы Цейтина заключены между C^* и C_{22} . Автору неизвестно , дедуктивно равны ли формулы C_{k2} при $k \ge 2$.

Доказательство. (1), (2) . Ясно , что $C_{kn} \vdash C_{k'n'}$, $C^*_{kn} \vdash C^*_{k'n'}$ при $k \ge k'$, $n \ge n'$, а также $C^*_{kn} \vdash C_{kn}$ и $C^*_{22} \vdash C^*$ (подстановка) .

$C^*_{k2} \vdash C^*_{kn}$ для $n \ge 2$, так как $C^*_{k2} \vdash C^*_{k,n(1),\ldots,n(k)}$, где $C^*_{k,n(1),\ldots,n(k)} =$

$$= [\neg(\mathop{\&}\limits_{1\le i\le k} p_i) \& \mathop{\&}\limits_{1\le i\le k} (\neg p_i \to \mathop{\vee}\limits_{1\le j\le n(i)} q_{ij}) \to \mathop{\vee}\limits_{\substack{1\le i\le k\\ 1\le j\le n(i)}} (\neg p_i \to q_{ij})]$$

для всех $n(1), \ldots, n(k) \ge 2$ (индукция по $m = n(1) + \ldots + n(k)$) : приняв посылку $C^*_{k,n(1),\ldots,n(k)}$, с помощью C^*_{k2} получаем

$$\mathop{\vee}\limits_{1\le i\le k} [(\neg p_i \to q_{in(i)}) \vee (\neg p_i \to \mathop{\vee}\limits_{1\le j<n(i)} q_{ij})] ,$$

после чего применяем $C^*_{k,n(1),\ldots,n(i-1),n(i)-1,n(i+1),\ldots,n(k)}$.

$C^*_{k2} \vdash C^*_{(k+1)2}$. Пусть $C^*_{(k+1)2} = (\neg(\mathop{\&}\limits_{0\le i\le k} p_i) \& C' \to \mathop{\vee}\limits_{0\le i\le k} C''_i)$,

где $C' = \mathop{\&}\limits_{0\le i\le k} (\neg p_i \to q_{i1} \vee q_{i2})$, $C''_i = (\neg p_i \to q_{i1}) \vee (\neg p_i \to q_{i2})$.

Ясно , что $C^*_{k2} \vdash (C' \to C'')$, где $C'' = (\neg(\mathop{\&}\limits_{1\le i\le k} p_i) \to \mathop{\vee}\limits_{1\le i\le k} C''_i)$.

Поскольку , ввиду доказанного , $C^*_{k2} \vdash C^*_{2(2k)}$, то

$$C^*_{k2} \vdash [\neg(p_0 \& \mathop{\&}\limits_{1\le i\le k} p_i) \& (\neg p_0 \to q_{01} \vee q_{02}) \& C'' \to C''_0 \vee \mathop{\vee}\limits_{\substack{1\le i\le k\\ 1\le j\le 2}} C''_{ij}],$$

где $C''_{ij} = [\neg(\mathop{\&}\limits_{1\le i\le k} p_i) \to (\neg p_i \to q_{ij})] \equiv (\neg p_i \to q_{ij})$, т. е. $C''_{i1} \vee C''_{i2} \equiv C''_i$.

Т. обр. $C^*_{k2} \vdash [\neg(\mathop{\&}\limits_{0\le i\le k} p_i) \& C' \to C''_0 \vee \mathop{\vee}\limits_{1\le i\le k} C''_i]$, ч. т. д .

$C^*\vdash C^*_{22}$. Примем посылку C^*_{22}: $\neg(p_1\&p_2)\&\ \underset{1\le i\le 2}{\&}\ (\neg p_i\to q_{i1}\vee q_{i2})$.

Отсюда следует $\underset{1\le i\le 2}{\&}\ (\neg p_i\to q_{i1}\vee Q_i)$ и $\underset{1\le i\le 2}{\&}\ (\neg p_i\to q_{i1}\vee Q)$, где $Q_i=\neg p_i\&q_{i2}$, $Q=Q_1\vee Q_2$. Отсюда, применяя C^*, получаем $\underset{1\le i\le 2}{\vee}\ [(\neg p_i\to q_{i1})\vee(\neg p_i\to Q)]$ и остается убедиться, что $(\neg p_i\to Q)$ влечет заключение C^*_{22}. Разберем случай $i=1$.

Из $(\neg p_1\to Q_1\vee Q_2)\ \&\ (\neg p_2\to q_{21}\vee Q_2)$, применяя C^*, получаем $(\neg p_1\to Q_1)\vee(\neg p_2\to q_{21})\vee\ \underset{1\le i\le 2}{\vee}\ (\neg p_i\to Q_2)$. Здесь $(\neg p_i\to Q_i)$ влечет $(\neg p_i\to q_{i2})$, а $(\neg p_1\to Q_2)$ влечет $(\neg p_1\to\neg p_2)$, что вместе с $\neg(p_1\&p_2)$ дает $\neg p_2$, после чего $(\neg p_2\to q_{21}\vee q_{22})$ влечет $q_{21}\vee q_{22}$ и $(\neg p_2\to q_{21})\vee(\neg p_2\to q_{22})$.

$C_{23}\vdash C^*$ аналогично - посылка C^*: $\neg(p_1\&p_2)\ \&\ \underset{1\le i\le 2}{\&}\ (\neg p_i\to q_i\vee r)$ влечет $\underset{1\le i\le 2}{\&}\ (\neg p_i\to Q_i\vee r)$ и $\underset{1\le i\le 2}{\&}\ (\neg p_i\to Q_1\vee Q_2\vee r)$ (где $Q_i=(\neg p_i\&q_i)$), и применяя C_{23}, получаем $\underset{1\le i\le 2}{\vee}\ [(\neg p_i\to Q_1)\vee(\neg p_i\to Q_2)\vee(\neg p_i\to r)]$, а $(\neg p_1\to Q_2)$ влечет $(\neg p_1\to\neg p_2)$, $\neg p_2$, $q_2\vee r$ и $(\neg p_2\to q_2)\vee(\neg p_2\to r)$, ч. т. д.

(3) Рассмотрим шкалу F_4 (см. рис. 2). Здесь $F_4\not\models C^*$ (при оценке $u_5\models p_1$, $u_6\models p_2$, $u_6\models q_1$, $u_2\models q_2$, $u_1\models r$). В то же время нетрудно убедиться, что $F_4\models C_{k2}$ для всех $k\ge 2$ (основное соображение, например, для $k=2$: если при некоторой оценке $u_0\models\neg(p_1\&p_2)$, $u_0\models(\neg p_i\to q_1\vee q_2)$, $u_0\not\models(\neg p_i\to q_j)$ для $i,j\in\{1,2\}$, то, скажем, $u_i\models\neg p_1$, $u_i\not\models q_i$ для $1\le i\le 2$ и $u_5\models p_2$, то $u_1\models q_2$, $u_2\models q_1$, т. е. $u_4\models(q_1\&q_2)$ и $u_0\models(\neg p_2\to q_j)$ для того j, что $u_6\models q_j$ - противоречие).

Замечание 1. Методом, который применил Д. Габбай в [8] для доказательства финитной аппроксимируемости логики $(H+K)$, можно установить, что логика $(H+C^*)$ финитно аппроксимируема: она характеризуется конечными шкалами F, обладающими следующим свойством:

(C^*): для всех $u\in F$ и $E_1,E_2\subseteq\max(F^u)$: если $(E_1\cup E_2)=\max(F^u)$, то $\mathrm{card}[\min(\mathrm{under}(E_i)\cap F^u)]=1$ для некоторого $i\le 2$.

Отсюда, как обычно, вытекает разрешимость, а также дизъюнктивное свойство логики $(H+C^*)$: если $C^*\vdash(\Phi_1\vee\Phi_2)$, то $C^*\vdash\Phi_i$ для некоторого $i\le 2$ (действительно, если (C^*)-шкалы $F_i\not\models\Phi_i$, где

$(F_1 \cap F_2) = \varnothing$, то $F \nvDash (\Phi_1 \vee \Phi_2)$ для следующей (C^*)-шкалы F: $F = (F_1 \cup F_2 \cup F^*)$, где $F^* = \{ u_E : \varnothing \neq E \subsetneq [\max(F_1) \cup \max(F_2)] \}$, $((u_E \leq u_{E'}) \Leftrightarrow (E' \subseteq E)$, $(u_E < u) \Leftrightarrow (\max((F_i)^u) \subseteq E)$ для $u_E, u_{E'} \in F^*$, $u \in F_i$, и F_i - конуса в F с сохранением порядка на них).

Замечание 2. В связи с вопросом о невыводимости $C_{(k+1)2}$ из C_{k2} при $k \geq 2$, может оказаться полезной следующая характеризация общезначимости C_{k2} в конечных шкалах:

$(F \nvDash C_{k2}) \Leftrightarrow$ [существуют такие $u \in F$ и $E_1, \ldots, E_k \subset \max(F^u)$, что $(E_1 \cup \ldots \cup E_k) = \max(F^u)$ и для $G_i = \min(\mathrm{under}(E_i) \cap F^u)$ найдутся такие $w_{ij} \in G_i$ $(1 \leq i \leq k,\ 0 \leq j \leq 1)$, чтобы:

$$(-C_k): \quad \neg \exists i, i', i'' \ \exists v \in G_i \ (v \leq w_{i'0},\ v \leq w_{i''1})].$$

Отметим также, что для $k=2$, $u \in F$, $E_i \subset \max(F^u)$, $(E_1 \cup E_2) = \max(F^u)$:

$$\neg(\exists w_{ij} \in G_i : (-C_2)) \Leftrightarrow$$
$$\Leftrightarrow [(\mathrm{card}\,[G_2 \setminus \cap(F^v : v \in G_1)] = 1) \vee (\mathrm{card}\,[G_1 \setminus \cap(F^v : v \in G_2)] = 1)].$$

Однако, если условия $(F \nvDash C_{k2})$ при разных $k \geq 2$ окажутся равносильными, это еще не гарантирует дедуктивного равенства формул C_{k2}, так как финитная аппроксимируемость логик $(H + C_{k2})$ неизвестна (метод из [8] не срабатывает).

5. **Предложение 4.** (1) $C_{22} \vdash P_3 \vdash I_3$. (2) $K \vdash P$. (3) $S \vdash R$.

Доказательство.

(1) $C_{22} \vdash P_3$. Пусть $P_3 = (P'_3 \to \neg\neg(p_1 \vee p_2) \vee p_3)$, где $P'_3 \equiv [\neg(\neg p_1 \& \neg p_2 \& \neg p_3) \ \& \ \underset{1 \leq i \leq 2}{\&} (\neg(\neg p_i \& \neg p_3) \to p_i \vee p_3)]$.

Таким образом, P'_3 влечет (при помощи C_{22}):

$$\underset{1 \leq i \leq 2}{\vee} [(\neg(\neg p_i \& \neg p_3) \to p_1 \vee p_2) \vee (\neg(\neg p_i \& \neg p_3) \to p_3)].$$

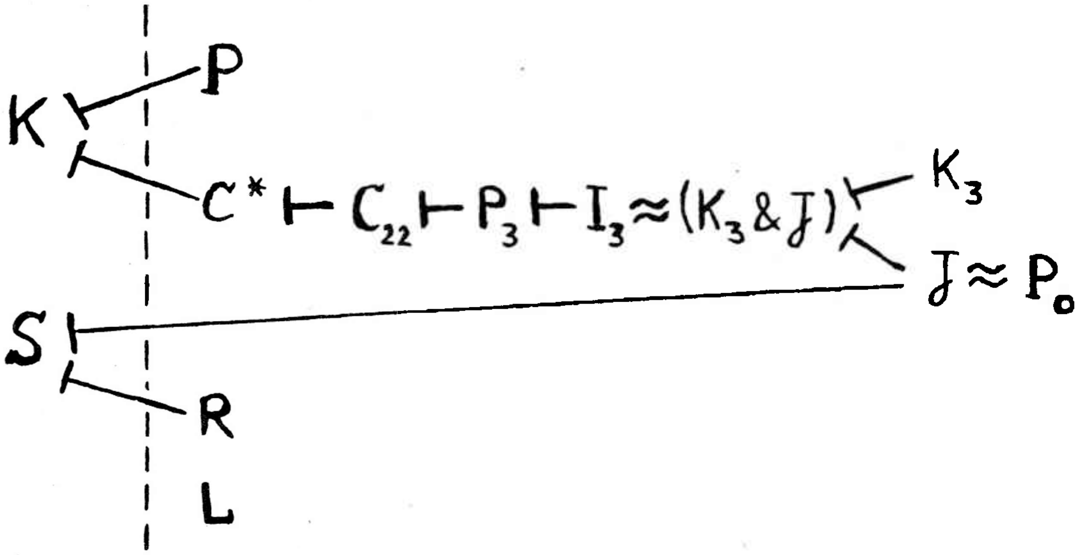
Теперь из $[(\neg(\neg p_i \& \neg p_3) \to p_1 \vee p_2) \ \& \ \neg(\neg p_1 \& \neg p_2 \& \neg p_3)]$ следует $\neg\neg(p_1 \vee p_2)$ (т. к. $\neg(p_1 \vee p_2)$ влечет $\neg\neg p_3$ и $p_1 \vee p_2$). Аналогично $(\neg(\neg p_1 \& \neg p_3) \to p_3) \ \& \ \neg(\neg p_1 \& \neg p_2 \& \neg p_3)$ влечет $\neg\neg(p_2 \vee p_3)$, после чего из $(\neg(\neg p_2 \& \neg p_3) \to p_2 \vee p_3)$ следует $(p_2 \vee p_3)$ и $\neg\neg(p_1 \vee p_2) \vee p_3$ (рассуждение для $i=2$ симметрично).

$P_3 \vdash I_3$, так как $H \vdash (P_3 \to I_3)$. Пусть $I_3 = (I'_3 \to p_3 \vee \neg p_3)$, покажем, что $H \vdash (I'_3 \to P'_3)$. Действительно, I'_3 влечет $(\neg p_1 \to p_2 \vee p_3)$ и $\neg(\neg p_1 \& \neg p_2 \& \neg p_3)$, а также $(\neg p_2 \to p_1 \vee p_3)$ и $(p_2 \to \neg p_1 \& \neg p_3)$, откуда следует $(\neg(\neg p_1 \& \neg p_3) \to p_1 \vee p_3)$ (и аналогично для $i=2$). Наконец, $I'_3 \ \& \ (\neg\neg(p_1 \vee p_2) \vee p_3)$ влечет $p_3 \vee \neg p_3$, так как $\neg\neg(p_1 \vee p_2)$ влечет $\neg p_3$ (ввиду $\neg(p_1 \& p_3) \ \& \ \neg(p_2 \& p_3)$ в I'_3).

(2) $K\vdash P$, так как
$K\vdash [\neg(p_1\&p_2)\ \&\ (\neg p_1\to (p_2\to q_1)\vee(p_2\to q_2)) \to (p_2\to q_1)\vee(p_2\to q_2)]$,
откуда следует P.

(3) $S\vdash R$, так как при помощи S посылка R влечет $\neg(p\&q)\ \&\ (\neg\neg p\vee\neg p)\ \&\ (\neg\neg q\vee\neg q)$, а $(\neg\neg p\&\neg\neg q)$ противоречит $\neg(p\&q)$.

Поскольку очевидно, что $K\vdash C^*$ и $S\vdash J$, то "диаграмма выводимостей" для рассматриваемых формул имеет следующий вид:



(единственная финитно не общезначимая формула L находится "особняком", пунктирная черта отделяет реализуемые формулы от нереализуемых формул K и S). Видно, что все приведенные в п. 1 реализуемые формулы, кроме R, P и L, выводимы из формулы Цейтина C^*.

Убедимся теперь в отсутствии иных выводимостей.

6. Для конечной шкалы F и точки $u\in F$ положим:

$$\delta(u)=\{E:\ [\varnothing\neq E\subset\max(F^u)]\ \&\ [(\mathrm{under}(E)\cup\mathrm{under}(\max(F^u)\setminus E))\cap F^u=(F^u\setminus\{u\})]\},$$

$$\delta_0(u)=\{(E_1,E_2,E_3):\ \mathop{\&}_{1\le i\le 3}[\varnothing\neq E_i\subset\max(F^u)]\ \&\ [(\bigcup_{1\le i\le 3}E_i)=\max(F^u)]\},$$

$$\delta_1(u)=\{(E_1,E_2,E_3)\in\delta_0(u):\ \mathop{\&}_{1\le i\le 2}((E_i\cap E_3)=\varnothing)\ \&\ [(\mathrm{under}(E_1\cup E_2)\cup\mathrm{under}(E_3))\cap F^u=(F^u\setminus\{u\})]\ \&$$
$$\&\ [\mathrm{under}(E_1)\cup\mathrm{under}(E_2)\neq\mathrm{under}(E_1\cup E_2)]\},$$

$$\delta_2(u)=\{(E_1,E_2,E_3)\in\delta_0(u):\ \mathop{\&}_{1\le i<j\le 3}((E_i\cap E_j)=\varnothing)\},$$

$$\delta_3(u)=\{(E_1,E_2,E_3)\in\ \delta_2(u):(\bigcup_{1\le i\le 3}\ \mathrm{under}(E_i))\cap F^u=(F^u\setminus\{u\})\ \},$$

$$\delta_4(u)=\{(E_1,E_2,E_3)\in\ \delta_2(u):(\bigcup_{1\le i\le 3}\ \mathrm{under}(F^u\setminus E_i))\cap F^u=(F^u\setminus\{u\})\ \},$$

$$\delta_5(u)=\{(E_1,E_2,E_3)\in\ \delta_0(u): (\mathrm{under}(E_1\cup E_2)\cup\mathrm{under}(E_3))\cap F^u=(F^u\setminus\{u\})\}.$$

Лемма 2. Пусть F - конечная шкала.

(1) $(F\not\models K)\Leftrightarrow\exists u\in F\ \exists E\subset\max(F^u)\ [\ \mathrm{card}\,[\min(\mathrm{under}(E)\cap F^u)]>1\ ]$,

(2) $(F\not\models C^*{}_{22})\Leftrightarrow\exists u\in F\ \exists E_1,\ E_2\subset\max(F^u)\ [\ ((E_1\cup E_2)=\max(F^u))\ \&$
$\&\ \underset{1\le i\le 2}{\&}\ (\mathrm{card}\,[\min(\mathrm{under}(E_i)\cap F^u)]>1)\ ]$,

(3) $(F\not\models S)\Leftrightarrow\exists u\in F\ \exists E\in\delta(u)\ \neg[(\mathrm{under}(E)\cap F^u\ )\subseteq\max(F)]$,

(4) $(F\not\models R)\Leftrightarrow\exists u\in F\ \exists E\in\delta(u)\ [\neg[(\mathrm{under}(E)\cap F^u\ )\subseteq\max(F)]\ \&$
$\&\neg[(\mathrm{under}(\max(F^u)\setminus E)\cap F^u)\subseteq\max(F)]\ ]$,

(5) $(F\not\models J)\Leftrightarrow\exists u\in F\ [\delta_1(u)\neq\varnothing\ ]$,

(6) $(F\not\models K_3)\Leftrightarrow\exists u\in F\ [\delta_3(u)\neq\varnothing\ ]$,

(7) $(F\not\models L)\Leftrightarrow\exists u\in F\ \exists(E_1,E_2,E_3)\in\delta_4(u)$
$[\ \underset{1\le i\le 3}{\&}\ \neg(\ (F^u\cap\mathrm{under}\ (\ \bigcup_{j\neq i}E_j)\ )\subseteq\bigcup_{j\neq i}\mathrm{under}\ (E_i\cup E_j)\ )\ ]$,

(8) $(F\not\models P_3)\Leftrightarrow\exists u\in F\ \exists(E_1,E_2,E_3)\in\delta_5(u)$
$[\ \underset{1\le i\le 2}{\&}\ ((F^u\cap\mathrm{under}(E_i\cup E_3))\subseteq\mathrm{under}(E_i)\cup\mathrm{under}(E_3))\ ]$.

Доказательство. (1), (2) - очевидно, так как $\{u\in F:u\models\neg p\}=\mathrm{under}(E)$ для $E=\{v\in\max(F):v\not\models p\}$ (сравн. [8]). Для (3) - (8) рассуждения аналогичны. Они основаны на том, что

$$u_0\not\models(\Phi\to\ \Psi)\ \Leftrightarrow\ \exists u\in F\ [\ (u\models\Phi)\ \&\ (u\not\models\Psi)\ \&\ \forall v>u\ (v\models\Psi)\ ]\quad(*)$$

(при некоторой оценке на F).

Теперь для S берем $E=\{v\in\max(F^u):v\models p\}$ (т. е. для $u'\geq u$: $(u'\models\neg\neg p)\Leftrightarrow[u'\in\mathrm{under}(E)]$, $(u'\models\neg p)\Leftrightarrow[u'\in\mathrm{under}(\max(F^u)\setminus E))]$, и для R аналогично (учтя, что $\{v\in\max(F^u):v\models q\}=(\max(F^u)\setminus E\ )$, так как $u\models\neg(p\&q)\ \&\neg(\neg p\&\neg q)$).

Для J берем $E_i=\{v\in\max(F^u):v\not\models q_i\}$ для $i=1,2$ и $E_3=\max(F^u)\setminus(E_1\cup E_2)=\{v\in\max(F^u):v\not\models D\}$ (т. обр. для $u'\geq u$: $(u'\models\neg q_i)\Leftrightarrow[u'\in\mathrm{under}(E_i)]$, $(u'\models D)\Leftrightarrow[u'\in(\mathrm{under}(E_1)\cup\mathrm{under}(E_2))]$, $(u'\models\neg D)\Leftrightarrow[u'\in\mathrm{under}(E_3)]$, $(u'\models\neg\neg D)\Leftrightarrow[u'\in\mathrm{under}(E_1\cup E_2)]$).

Для K_3, взяв $E_i=\{v\in\max(F^u):v\models p_i\}$ ($i=1,2,3$), получим $(E_1,E_2,E_3)\in\ \delta_3(u)$ (и обратно, имея $(E_1,E_2,E_3)\in\delta_3(u)$, следует взять оценку $(u'\models p_i)\Leftrightarrow[u'\in(\mathrm{under}(E_i)\cap F^u)]$, тогда $u\not\models(p_1\vee p_2\vee p_3)$, $u\models K'_3$ - посылку K_3).

Для L и P_3 рассуждение аналогично (причем условия $u \models \underset{1\le i\le 3}{\&} (\neg\neg p_i \Leftrightarrow \underset{j\ne i}{\&} \neg p_j)$ и $u \models \neg\neg(\underset{1\le i\le 3}{\vee} p_i)$ обеспечивают $(E_1,E_2,E_3) \in \delta_j(u)$ для $j=2$ или $j=0$ соответственно, где $E_i = \{ v \in \max(F^u) : v \models p_i \}$).

Лемма 3. Пусть F - конечная шкала. $(F \not\models P) \Leftrightarrow$

$$\Leftrightarrow \exists u, v_{ij}\ (i, j \in \{1, 2\})\ [\ \underset{i,j\in\{1,2\}}{\&} (u<v_{ij})\ \&$$

$$\& \neg\exists u'>u\ [(u'\le v_{21})\ \&\ (u'\le v_{22})]\ \& \qquad (-P)$$

$$\& \underset{j,j'\in\{1,2\}}{\&} ((F^{v_{1j}} \cap F^{v_{2j'}})=\varnothing)\ \&\ \underset{i\in\{1,2\}}{\&} \neg(v_{i1} = v_{i2} \in \max(F^u))$$

(отметим, что при выполнении (- P) элементы v_{21} и v_{22} заведомо несравнимы по $\le$).

Доказательство аналогично лемме 2.

($\Rightarrow$) Пусть $u_0 \not\models P$ при некоторой оценке на F. Фиксируем точку $u \in F$ в соответствии с (*). Так как $u \not\models (p_i \to q_j)$, то имеем $v_{ij} \in F^u$, $v_{ij} \models p_i$, $v_{ij} \not\models q_j$. Так как $\forall u'>u\ (u' \models [(p_2 \to q_1) \vee (p_2 \to q_2)])$, то $\forall u'>u\ \neg((u'\le v_{21})\ \&\ (u'\le v_{22}))$, а так как $u \models \neg(p_1 \& p_2)$, то $\bigcap\limits_i (\bigcup\limits_j F^{v_{ij}}) = \varnothing$ (и значит, все $v_{ij} \ne u$). Наконец, так как $u \models \neg\neg(q_1 \vee q_2)$, то $\forall v \in \max(F^u)\ (v \models (q_1 \vee q_2))$, и значит, если $v_{i1} \in \max(F^u)$, то $v_{i1} \ne v_{i2}$.

($\Leftarrow$) Полагаем (для $i, j \in \{1, 2\}$): $(v \models p_i) \Leftrightarrow (v_{i1} \le v) \vee (v_{i2} \le v)$, $(v \models q_j) \Leftrightarrow \neg(v \le v_{1j})\ \&\ \neg(v \le v_{2j})$. Тогда $v_{ij} \models p_i$, $v_{ij} \not\models q_j$ и $((v \models p_2, v \not\models q_j) \Leftrightarrow (v=v_{2j}))$. Поэтому $u \not\models \underset{j}{\vee} (p_i \to q_j)$ и $\forall v>u\ (v \models \underset{j}{\vee} (p_2 \to q_j))$, а значит, $u \models [\underset{j}{\vee} (p_1 \to q_j) \to \underset{j}{\vee} (p_2 \to q_j)]$.

Наконец, $u \models \neg(p_1 \& p_2)$, $u \models \neg\neg(q_1 \vee q_2)$, а значит, $u \not\models P$.

Предложение 5. (1) $K\&R\&L \not\vdash S$; (2) $K\&L \not\vdash R$; (3) $S\&L\&P \not\vdash K_3$; (4) $C_{22}\&S\&L\&P \not\vdash C^*$; (5) $R\&K_3\&L\&P \not\vdash J$; (6) $C^*\&S\&L\&P \not\vdash K$; (7) $C^*\&S\&L \not\vdash P$; (8) $S\&L\&P_3\&P \not\vdash C_{22}$; (9) $K\&S \not\vdash L$.

Доказательство. (1) Рассмотрим шкалу F_1 (рис. 1). $F_1 \not\models S$ (при оценке $u_2 \models p$), но $F_1 \models K, R, L$ по лемме 2.

(2) Шкала F_2 (рис. 1):

$F_2 \not\models R$ (оценка $u_2 \models p$, $u_4 \models q$), $F_2 \models K, L$ (лемма 2).

(3) Шкала F_3 (рис. 1):

$F_3 \not\models K_3$ (оценка $u_i \models p_i$: $i=1, 2, 3$), $F_3 \models S, L, P$ (лемма 2, 3).

(4) Шкала F_4 (рис. 2) :

$F_4 \not\models C^*$, $F_4 \models C_{22}$ (см. доказательство предложения 3, п. 3) ,

$F_4 \models S, L, P$ (лемма 2 , 3) .

(5) Шкала F_5 (рис. 4) :

$F_5 \not\models J$ (оценка $u_3 \models q_i$, $u_i \models q_i : i=1, 2$) ,

$F_5 \models R, K_3, L, P$ (лемма 2 , 3) .

(6) Шкала F_6 (рис. 4) :

$F_6 \not\models K$ (оценка $u_1 \models p$, $u_2 \models q$, $u_3 \models r$) ,

$F_6 \models C^*, S, L, P$ (лемма 2 , 3) .

(7) Шкала F_7 (рис. 4) :

$F_7 \not\models P$ (оценка $u_4 \models p_1$, $u_i \models p_2$, $u_i \models q_i$, $u_5 \models q_i : i=1, 2$) ,

$F_7 \models C^*, S, L$ (лемма 2) .

(8) Шкала F_8 (рис. 4) :

$F_8 \not\models C_{22}$ (оценка $u_i \models p_i$, $u_{2+i} \models q_i$, $u_{4+i} \models q_i : i=1, 2$) ,

$F_8 \models S, L, P_3, P$ (лемма 2 , 3) .

(9) Шкала F_9 (рис. 4) :

$F_9 \not\models L$ (оценка $u_i \models p_i : i=1, 2, 3$) , $F_9 \models K, S$ (лемма 2) .

Замечание. Здесь в п. 9 можно также воспользоваться тем , что формулы K и S финитно общезначимы , а L - нет (см. [5]) .

Предложение 6. (1) (a) $S\&L\&P \not\vdash P_3$; (b) $R\&K_3\&L\&P \not\vdash P_3$.
(2) $S\&I_3\&L \not\vdash P_3$.

Доказательство. (1) Немедленно из предложения 5, пп. 3, 5 , так как $P_3 \vdash I_3 \approx (K_3 \& J)$.

(2) Рассмотрим шкалу F_{10} (рис. 3) . $F_{10} \not\models P_3$ при оценке $v_i \models p_i$ $(i=1, 2, 3)$. $F_{10} \models K_3$, так как $\delta_3(u_0)=\varnothing$ (действительно , если , скажем , $w_0 \in E_1$, то $\forall i\,(v_i \in \text{under}(E_1))$, т . обр . $\forall i\,(w_i \in E_1)$). Аналогично , $F_{10} \models S$, так как $\delta(u_0)=\varnothing$. Т. обр. $F_{10} \models (K_3 \& J) \approx I_3$. Покажем , что $F_{10} \models L$. Допустим , что выполнено условие леммы 2, п. 7 для $u=u_0$, $(E_1,E_2,E_3) \in \delta_4(u_0)$. Пусть , скажем , $w_0 \in E_1$, то есть $(E_2 \cup E_3) \subseteq \{w_1, w_2, w_3\}$. Тогда получаем противоречие: $\text{under}(E_2 \cup E_3) = (E_2 \cup E_3) \subseteq \text{under}(E_1 \cup E_2) \cup \text{under}(E_1 \cup E_3)$.

7. В то же время формула P_3, оказывается, выводима из $(I_3 \& P)$.

Предложение 7. $(I_3 \& P) \vdash P_3$.

Доказательство. Пусть $P_3 = (P'_3 \to P''_3)$, где

$$P'_3 = \neg\neg\Big(\bigvee_{1 \le i \le 3} p_i\Big) \ \& \bigwedge_{1 \le i \le 2} \big(\neg\neg(p_i \vee p_3) \to p_i \vee p_3\big) ,$$

$$P''_3 = \neg\neg(p_1 \vee p_2) \vee p_3 .$$

Положим $P'''_3 = \neg((p_1 \vee p_2) \& p_3)$.

(a) $I_3 \vdash (P'_3 \to (P'''_3 \to P''_3))$,
так как $\mathbf{H} \vdash (I_3 [p_1/\Phi] \,\&\, P'_3 \,\&\, P'''_3 \to P''_3)$ для $\Phi=(p_1 \& \neg p_2)$,
поскольку $\mathbf{H} \vdash \neg(\Phi \,\&\, p_2)$, $\mathbf{H} \vdash (P'''_3 \to \neg(\Phi \& p_3) \,\&\, \neg(p_2 \& p_3))$,
$\mathbf{H} \vdash (P'_3 \to (\neg\Phi \to p_2 \vee p_3) \& (\neg p_2 \to \Phi \vee p_3))$ и $\mathbf{H} \vdash (P'_3 \& (p_3 \vee \neg p_3) \to P''_3)$.

(b) Покажем, что $\mathbf{P} \vdash (P'_3 \,\&\, (P'''_3 \to P''_3) \to P''_3)$.
Пусть $\Phi_1 = ((p_1 \vee p_2) \,\&\, p_3) \vee (\neg p_1 \& \neg p_3)$, $\Phi_2 = \neg p_2 \,\&\, (\neg p_1 \vee \neg p_3)$, $\Psi_1 = p_1 \vee (p_2 \& p_3)$, $\Psi_2 = \neg\Psi_1 \equiv \neg p_1 \& \neg(p_2 \& p_3)$. Так как
$\mathbf{H} \vdash \neg\neg(\Psi_1 \vee \Psi_2)$, $\mathbf{H} \vdash [P'_3 \to \neg(\Phi_1 \& \Phi_2)]$, $\mathbf{H} \vdash [(\Phi_1 \to \Psi_1) \leftrightarrow \neg\neg(p_1 \vee p_3)]$,
$\mathbf{H} \vdash [(\Phi_1 \to \Psi_2) \leftrightarrow P'''_3]$, $\mathbf{H} \vdash [P'_3 \to ((\Phi_2 \to \Psi_1) \leftrightarrow \neg\neg(p_1 \vee p_2))]$,
$\mathbf{H} \vdash [P'_3 \to ((\Phi_2 \to \Psi_2) \leftrightarrow (p_2 \vee p_3))]$,
то $\mathbf{H} \vdash (P'_3 \,\&\, P\,[p_1, p_2, q_1, q_2/\Phi_1, \Phi_2, \Psi_1, \Psi_2] \to$
$\to [(P'''_3 \vee \neg\neg(p_1 \vee p_3) \to \neg\neg(p_1 \vee p_2) \vee (p_2 \vee p_3)) \to$
$\to \neg\neg(p_1 \vee p_2) \vee (p_2 \vee p_3)])$,
и таким образом, $P \vdash [P'_3 \to ((P'''_3 \to P''_3) \to P''_3)]$, ч. т. д.

Рис.1

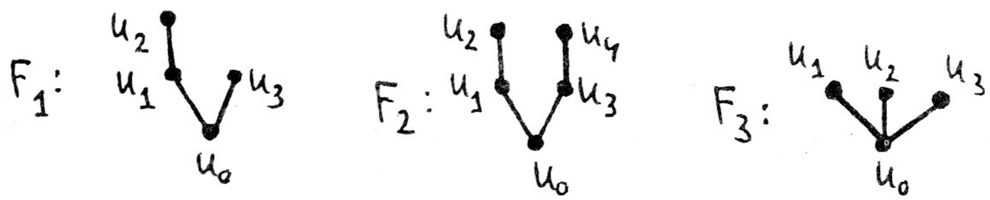


Рис.2

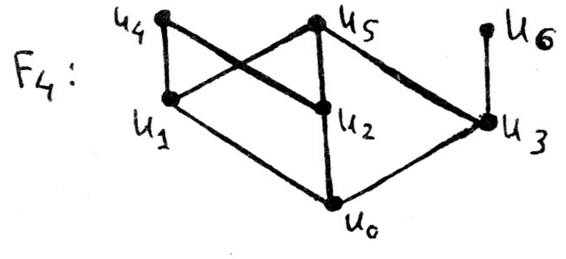


Рис.3

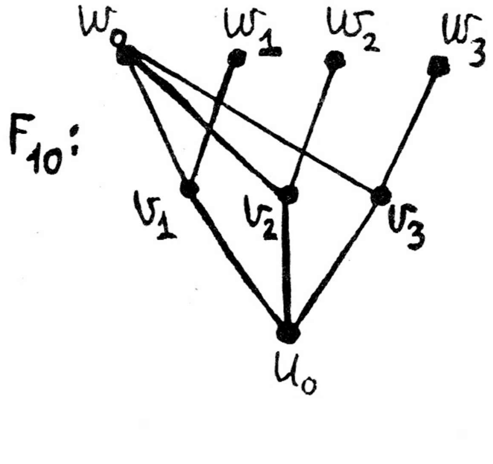
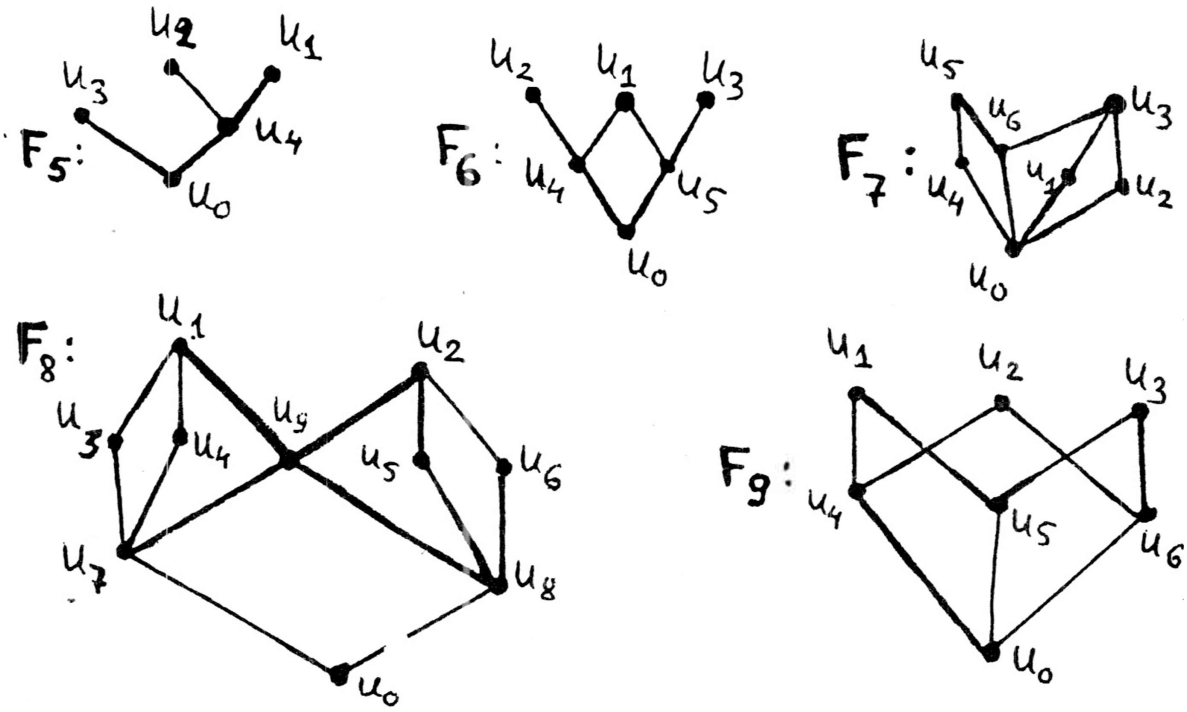


Рис. 4



ЛИТЕРАТУРА

1. *Rose G. F.* Propositional calculus and realisability// Transactions of the American Mathematical Society. 1953. V.75, N.1. P.1-19.
2. *Янков В. А.* О реализуемых формулах логики высказываний// Доклады АН СССР. 1963. Т.151. N.5. С.1035-1037.
3. *Цейтин Г. С.* О дизъюнктивном ранге формул конструктивной арифметики// Записки научных семинаров ЛОМИ АН СССР. 1968. Т.8. С.260-271.
4. *Кипнис М. М.* О реализациях предикатных формул// Записки научных семинаров ЛОМИ АН СССР. 1971. Т.20. С.40-48.
5. *Плиско В. Е.* Об одной формальной системе, связанной с реализуемостью// Теория алгоритмов и математическая логика. ВЦ АН СССР. М., 1974. С.148-158.
6. *Медведев Ю. Т.* Финитные задачи// Доклады АН СССР. 1962. Т.142. N 5. С.1015-1018.
7. *Янков В. А.* О связи между выводимостью в интуиционистском исчислении высказываний и конечными импликативными структурами// Доклады АН СССР. 1963. Т.151. N.6. С.1293-1294.
8. *Gabbay D. M.* The decidability of the Kreisel - Putnam system// Journal of Symbolic Logic. 1970. V.35. N.3. P.431-437.

Е.А. Сидоренко

РЕЛЯЦИОННАЯ СЕМАНТИКА РЕЛЕВАНТНЫХ ИСЧИСЛЕНИЙ

Предлагаемая здесь семантика S^{ea} отличается от обычной семантики крипкевского типа тем, что отношение достижимости устанавливается не на множестве отдельных миров, а на их упорядоченных парах. Каждую такую пару составляют мир атомарных предложений и мир формул. Именно эти пары и составляют то, что в S^{ea} называется "миром" или универсумом рассуждения. Отличительной особенностью семантики S^{ea} является то, что никакая формула не является в ней тождественно истинной или тождественно ложной в том смысле, что для всякой формулы имеются универсумы рассуждений, в которых она может быть верифицирована, и такие, в которых она фальсифицируется. При этом семантически истинной считается только такая формула A, которая верифицируется в каждом мире, в котором верифицируется соответствующая релевантная импликация $A \to A$.

Семантика системы E

Мы начнем с построения семантики для известной релевантной системы E Андерсона и Белнапа (аксиоматическое построение системы E приводится ниже). Сначала будет изложена техническая сторона дела, а потом будут даны некоторые содержательные объяснения.

Язык релевантной пропозициональной логики содержит бесконечное число пропозициональных переменных и следующие логические связки:"$\bullet$" - конъюнкцию,"$\vee$" - дизъюнкцию,"$\neg$" - отрицание и "$\to$" - (релевантную) импликацию.

Модельная структура представляет собой пару $<W,R>$, где W есть бесконечное множество универсумов рассуждений (миров) $w_1, w_2, \ldots$, каждый w_i из которых в свою очередь представляет собой упорядоченную пару $<w_i^a, w_i^e>$. Первый член этой пары, или атомарный мир, есть некоторый список литералов (пропозициональных переменных или их отрицаний). Требование полноты, согласно которому для каждой пропозициональной переменной в атомарный мир входит или сама переменная или ее отрицание, к атомарным мирам не предъявляется. В принципе такой мир может быть даже пустым. Вместе с тем вводится требование непротиворечивости атомарных миров: никакая пропозициональная переменная a не может входить ни в какой мир w_i^a одновременно со своим отрицанием.

В свете последних семантических веяний это столь естественное в недавнем прошлом требование может показаться достаточно неожиданным. Скажем сразу поэтому, что в предлагаемой семантике это требование в чисто техническом смысле не является существенным, так как по причинам, которые будут объяснены ниже, оно не исключает возможности верифицировать противоречивые формулы.

Введение этого требования связано поэтому лишь с некоторыми идеологическими и методологическими предпочтениями автора, который как логик никак не желает допускать существования (тем более в качестве исходных) "невозможных" возможных миров. Такое неприятие противоречия в атомарном, фактуальном мире никак не исключает возможности его появления в универсумах рассуждений, например, за счет каких-то допущений, которые могут быть намеренно или ненамеренно противоречивыми.

Второй член пары, w_i^e - мир следствий, есть множество формул принятого языка, в нашем случае языка исчисления E. К данному множеству предъявляется только следующее требование конъюнктивной замкнутости. Если A и B - элементы этого множества, то конъюнкция $A \bullet B$ также является его элементом. И, если $(C \to A)$ и $(C \to B)$ - элементы такого множества, то к числу его элементов принадлежит $(C \to A \bullet B)$. Формально:

$$\forall w_j((A \in w_j^e) \& (B \in w_j^e) \supset (A \bullet B \in w_j^e)).$$

$$\forall w_j(((C \to A) \in w_j^e) \& (C \to B) \in w_j^e) \supset (C \to A \bullet B) \in w_j^e)).$$

Наконец R является бинарным рефлексивным и транзитивным отношением достижимости на W. При этом выражения Rw_iw_j и $Rw_i^aw_j^a$ рассматриваются как идентичные.

Мы используем выражения $T(A)/w_i$ и $F(A)/w_i$ для утверждений о верифицируемости и соответственно о фальсифицируемости формулы A в мире w_i. Заметим, что эти утверждения будут рассматриваться как совершенно тождественные утверждениям $T(A)/w_i^a$ и $F(A)/w_i^a$ соответственно. Будут справедливыми также следующие соотношения:

$$T(A)/w_i = F(\neg A)/w_i \text{ и } T(\neg A)/w_i = F(A)/w_i.$$

Определение D1: *В мире w_i^a формулы верифицируются исключительно в соответствии со следующими условиями:*

(1) *Если A - пропозициональная переменная или ее отрицание и A входит в список w_i^a, то $T(A)/w_i$.*

(2) $T(A \bullet B)/w_i = T(A)/w_i$ *и* $T(B)/w_i$.

(3) $T(A \vee B)/w_i = T(A)/w_i$ *или* $T(B)/w_i$.

(4) $T(\neg(A \vee B))/w_i = T(\neg A)/w_i$ *и* $T(\neg B)/w_i$.

(5) $T(\neg(A \bullet B))/w_i = T(\neg A)/w_i$ *или* $T(\neg B)/w_i$.

(6) $T(\neg(A \to B))/w_i = \exists w_j Rw_iw_j \& T(A)/w_j \& F(B)/w_j$.

Мы прервем теперь определение D1, чтобы принять некоторые соглашения. Введем с чисто техническими целями внеязыковую бинарную связку "-->", которую мы называем квазиимпликацией. Заметим, что понятие правильно построенной формулы при этом не изменяется, так как знак квазиимпликации в формулу входить не может.

$$(A\dashrightarrow B)/w_i =_{df} \forall w_j(Rw_iw_j \supset (T(A)/w_j \supset T(B)/w_j \& (B \in w_j^e))\& \\ \&(T(@B)/w_j \supset (T(@A)/w_j \& (T@A \in w_j^e))\&(T(@A \vee B)/w_j).$$

Логические знаки, связывающие метавыражения и отсутствующие в нашем объектном языке, должны пониматься здесь как метасимволы с соответствующими значениями. Выражения вида $@A$ означает $\neg A$ или A', когда A имеет вид $\neg A'$. Иными словами, данное выражение говорит о добавлении к соответствующей формуле знака отрицания или снятии у нее одного из таких знаков.

На отношение достижимости R налагаются ограничения, в соответствии с которыми:

$$(A\dashrightarrow B)/w_i \,\&\, \forall C \forall w_j(Rw_iw_j \supset (F(C\to B)/w_j \supset \neg(C\to A)\in w_j^e) \supset \\ \supset ((C\to A) \dashrightarrow (C\to B))/w_i).$$

$$\forall C((C\to A)\dashrightarrow(C\to B))/w_i \supset \forall D((D\to C\to A)\dashrightarrow (D\to C\to B))/w_i.$$

Определение D1 (*продолжение*):

(7) $T(A\to B)/w_i = T(@B\to @A)/w_i = (A\dashrightarrow B)/w_i \& \forall C((C\to A)\dashrightarrow$
$\dashrightarrow(C\to B))/w_i$.

(8) $\forall w_i(T(A)/w_i \supset TB/w_i) \,\&\, (T(C)/w_i \supset T(D)w/_i) \supset.$
$\supset. \forall w_j T((A\to B)\bullet(C\to D)\to E)/w_j \supset T(E)/w_i.$

Определение условий верификации формул завершено, и можно сделать некоторые пояснения. Обратим прежде всего внимание на то обстоятельство, что можно вести речь о верифицируемости и фальсифицируемости формулы в некотором мире w_i или в его атомарной части, но не в мире следствий. В последний формулы могут только входить или не входить. Пропозициональная переменная или же ее отрицание могут верифицироваться в мире w_i^a также и при отсутствии их в соответствующем списке w_i^a литералов. Так, например, в случае верности в w_i^a импликации $p\to q$ и ее антецедента p в этом мире будет верифицироваться q независимо от того, входит ли q в список w_i^a или же нет.

Важно заметить здесь, что указанное обстоятельство открывает возможность верифицировать в атомарных мирах противоречивые формулы несмотря на предъявляемое к ним требование непротиворечивости относительно непосредственно входящих в них литералов. Это ясно из того, что импликация может обеспечить верифицируемость своего консеквента в мире, где верифицируется его отрицание, да и сам консеквент может изначально быть противоречивым.

Хотя формулы с классическими связками верифицируются в атомарных мирах стандартным образом, следует иметь в виду, что дизъюнкция $p \vee q$ может верифицироваться в таком мире, в котором нельзя верифицировать ни p, ни q. Так, в случае верности в мире w_i импликации $\neg p\to q$ указанная дизъюнкция является истинной во всех достижимых из w_i мирах, причем это означает, что во всех этих мирах истинно p или q, но не обязательно известно, какое именно из них. Можно сказать, таким образом, что дизъюнкция понимается здесь неконструктивно.

Главные разъяснения относятся, естественно, к той части определения D1, которая связана с верификацией релевантной импликации. На атомарные миры не делается никаких ограничений с точки зрения их полноты. В них не исключается также возможность верификации противоречивых формул. Это, очевидно, не позволяет верифицировать или фальсифицировать во всех возможных мирах ни одну из формул, содержащую только классические связки.

Такой подход, как известно, позволяет построить семантику так называемой первопорядковой релевантной логики, описывающей утверждения вида $A \to B$, где A и B - формулы классической логики[1]. Как мы увидим ниже, в нашем случае верность B во всех мирах, в которых верифицируется A, тоже будет означачать, что $A \to B$ имеет силу в релевантной логике, но это отнюдь не значит, что эта последняя формула верифицируется во всех мирах. То обстоятельство, что, скажем, во всех мирах, где верифицируется A, верифицируется само A, а также $A \vee B$, $\neg\neg A$ и т.п., рассматривается как свидетельство чисто фактического положения дел, не дающее еще основания для утверждений о верификации соответствующих импликаций: $A \to A, A \to A \vee B, A \to \neg\neg A$ и т.д.

Утверждение об импликативной связи (логической или онтологической) не может быть обосновано никаким фактическим положением дел до тех пор, пока такого рода связь между какими-то высказываниями (событиями) не будет постулирована[2]. Заметим, что и в тех случаях, когда речь идет об импликации между двумя импликациями же, истинность первой из которых детерминирует истинность второй, мы все равно не имеем ее (этой импликации импликаций) верифицируемости во всех мирах. Так, в силу D1 во всех мирах, где верно $A \to B$, будет верифицироваться $C \to A \to .C \to B$. Но сам принцип транзитивности $A \to B \to .C \to A \to .C \to B$, как и любой иной логический принцип, верифицировать во всех мирах не удастся. Собственно это обстоятельство и является сердцевиной и принципиальной особенностью предлагаемой семантики.

Именно для этого используется имеющийся в каждом универсуме рассуждений w_i мир следствий w_i^e, который мы будем называть также теоретическим миром или "вторым этажом". При этом импликация $A \to B$ верифицируется в мире w_i только при условии, что во всяком достижимом из w_i мире w_j, в котором на "первом этаже", т.е. в атомарном мире верифицируется A, на втором этаже имеется B. То, что B должно верифицироваться также и на первом этаже, очевидно. Требуется также, чтобы в указанных мирах в слу-

---

1 См. по этому поводу *Войшвилло Е.К.* Философско-методологические аспекты релевантной логики. М., 1988.

2 Именно в силу этого обстоятельства мы рассматриваем предлагаемую семантику как семантику юмовского, а не лейбницевского типа, в которой логические истины рассматриваются как истины во всех возможных мирах.

чае фальсификации B (верификации $\neg B$) на втором этаже было $\neg A$. За счет этого реализуется принцип контрапозиции импликации.

Уместно продемонстрировать в связи с этим, почему нельзя верифицировать во всех мирах $(A \to B)\cdot A \to B$, т.е. аналитическую запись принципа MP.

На втором этаже всех миров, в которых верифицируется антецедент данной формулы, в силу верности $A \to B$ всегда будет иметь место ее консеквент. Но условия истинности импликации предполагают, что на вторых этажах всех миров, где верифицируется отрицание консеквента $\neg B$, должно иметь место $\neg((A \to B)\cdot A)$. Но никаких оснований для утверждений об этом не имеется.

Очевидно, что необходимо учесть следующую ситуацию. Пусть в некотором мире верифицируются формулы: $(A \to B)$, $(A \to \neg B)$, $(A \to C)$, $(A \to \neg C)$ и A. Тогда в каждом достижимом мире, в котором будет истинно A, для B и C (которые могут быть между собой никак не связаны) будет иметь силу оговоренное выше условие: на первом этаже верифицируется B, на втором имеется C, и т.д. Иначе говоря, экстенсионального характера задания условий истинности импликации преодолеть пока не удается.

Для решения этой задачи и выдвигается требование, чтобы обсуждаемое условие имело силу при верификации $A \to B$ не только для A и B, но и для $(C \to A)$ и $(C \to B)$, где C - произвольная формула. В силу того, что число таких формул C является бесконечным, нет никакой возможности реализовать это требование чисто экстенсиональным путем. Дело в том, что $((C \to A) \dashrightarrow (C \to B))/w_i$ принципиально возможно обосновать только в случае постулирования $A \to B$ или получения его из других утверждений о следовании в соответствии с имеющимися семантическими требованиями.

Необходимо пояснить теперь, за счет чего происходит замыкание миров относительно своих семантических следствий. Что касается атомарных миров, то здесь все достаточно очевидно: такое замыкание имеет место в силу самих условий верификации. В мире следствий дело обстоит иначе, так как здесь речь о верификации вообще не может иметь места. Пусть в некотором мире является верным $A \to B$, и пусть C есть семантическое ослабление формулы B. Тогда в каждом достижимом мире, в котором истинно A, в мире следствий наряду с B должно быть также и C (а число таких C, очевидно, является бесконечным). Такое требование реализуется за счет принципа контрапозиции и семантической замкнутости атомарных миров.

Действительно, допустим в качестве C выступает формула $B \vee D$. Так как в избранном нами мире является верным $A \to B$, в этом мире верно также $\neg B \to \neg A$. И поскольку $\neg B$ является семантическим ослаблением $\neg(B \vee D)$, то в силу пункта (8) определения D1 верным будет также $\neg(B \vee D) \to \neg A$, а значит и $A \to B \vee D$. Это обеспечивает нахождение консеквента последней формулы в соответствующем мире следствий. И так дело обстоит для любых семантических ослаблений формулы B.

Мы можем теперь показать, что построенная нами семантика адекватна системе E, которая принимается здесь в следующей формулировке:

Аксиомы E:

A1. $(A\to A)\bullet(B\to B)\to C\to C$ A2. $A\to B\to B\to C\to A\to C$

A3. $A\to B\to C\to A\to C\to B$ A4. $(A\to A\to B)\to A\to B$

A5. $A\bullet B\to A$ A6. $A\bullet B\to B$

A7. $(A\to B)\bullet(A\to C)\to A\to B\bullet C$ A8. $A\to A\vee B$

A9. $B\to A\vee B$ A10. $(A\to C)\bullet(B\to C)\to A\vee B\to C$

A11. $A\bullet(B\vee C)\to A\bullet B\vee C$ A12. $A\to B\to .\neg B\to\neg A$

A13. $A\bullet\neg B\to\neg(A\to B)$ A14. $A\to\neg\neg A$

A15. $\neg\neg A\to A$

Правила вывода E:

R1. Из $A\to B$ и A следует B (Modus ponens, сокращенно: *MP*).

R2. Из A и B следует $A\bullet B$ (Правило адъюнкции).

Как уже отмечалось, никакая формула A не является в семантике S^{ea} ни тождественно истинной, ни тождественно ложной в том смысле, что всегда найдутся миры, в которых A не верифицируется, а значит и такие, в которых A не фальсифицируется. Это относится, очевидно, и ко всем аксиомам и теоремам системы E. В связи с этим, чтобы иметь возможность говорить о семантической истинности теорем E, вводится специальное понимание семантической истинности.

Определение D2. $\models B$), *если и только если во всяком мире w_i, в котором верифицируется $B\to B$, верифицируется B. Или формально:*

$$\models B \equiv_{\mathrm{df}} \forall w_i(T(B\to B)/w_i \supset T(B)/w_i.$$

Лемма 1. *Если* $\forall w_i(T(A\to A)/w_i \supset T(B)/w_i$, *то* $\models B$.

Справедливость леммы вытекает из следующих утверждений, верных для любого мира w_i:

$$(T(A\to A)/w_i \supset T(B)/w_i \qquad (1)$$

$$T(B\to B)/w_i \supset T((A\to A)\to B\to .(A\to A)\to B)/w_i \qquad (2)$$

$$T(B\to B)/w_i \supset T((A\to A)\to B)/w_i \qquad (3)$$

$$T((A\to A)\to B)/w_i \supset T(B)/w_i \qquad (4)$$

$$T(B\to B)/w_i \supset T(B)/w_i \qquad (5)$$

Утверждение (1) очевидно берется как посылка. Справедливость (2) очевидна. Утверждение (3) вытекает из (2) и (1) в соответствии с пунктом (8) определения D1. На основании этого же пункта является верным (4). Наконец (5) получается по транзитивности из (3) и (4). Лемма доказана.

Покажем, что все доказуемые в системе E формулы являются в S^{ea} семантически истинными в смысле D2.

Метатеорема MT1. *Если формула B есть теорема системы E, то* $\models B$ *в* S^{ea}.

Начнем доказательство с констатации следующего факта. Если формула имеет вид импликации $A \to B$, то для того, чтобы убедиться в ее семантической истинности, достаточно показать, что B верифицируется во всех мирах, в которых верифицируется A. Действительно, если дело обстоит указанным образом, то утверждение о семантической истинности $A \to B$ получается из $A \to B \to A \to B$ немедленно в силу пункта (8) определения D1.

Заметим вместе с тем, что недоказуемость того, что во всех мирах, в которых верифицируется A, верифицируется B, отнюдь не означает, что соответствующая импликация $A \to B$ не является семантически истинной. В качестве примера укажем на контрапозицию принципа MP: $\neg B \to \neg((A \to B) \bullet A)$. Нет оснований утверждать, что в каждом мире, где верифицируется антецедент данной формулы, верифицируется и ее консеквент. Но, как мы убедимся, доказав MT1, предположение о верности в некотором мире импликации $\neg B \to \neg((A \to B) \bullet A) \to . \neg B \to \neg((A \to B) \bullet A)$ влечет признание семантической истинности $\neg B \to \neg((A \to B) \bullet A)$.

Это одна из причин, по которой определение семантической истинности принимается в соответствии с D2. Другая причина связана с тем, что семантически истинные формулы не обязательно имеют вид импликации. Вместе с тем, учитывая, что все аксиомы системы E имеют именно такой вид, мы для доказательства их семантической истинности будем использовать указанный выше прием, тем более, что он оказывается пригодным для всех аксиом системы.

Семантическая истинность аксиомы A1 немедленно вытекает из пункта (8) определения. По причине, которая станет ясной ниже, мы обратимся прежде к аксиоме A3, а затем уже вернемся к A2. В аксиоме A3 верифицируемость ее консеквента является в соответствии с D1 условием верифицируемости ее консеквента, и значит аксиома семантически истинна. Семантическая истинность A2 за счет принципа контрапозиции может быть обоснована так же, как и A3.

Семантическая истинность аксиомы A4 вытекает из того, что условием верификации антецедента этой аксиомы, т.е. $A \to . A \to B$, является верификация ее же консеквента $A \to B$. Действительно, чтобы $A \to A \to B$ верифицировалось в некотором мире, необходимо, чтобы в каждом достижимом из него мире, в котором верифицируется A, верифицировалось бы $A \to B$. Если $A \to A \to B$ верифицируется за счет того, что достижимых миров, в которых верифицируется A, не существует, то $A \to B$ верифицируется по тем же основаниям. Таким образом, в каждом мире, в котором верифицируется $A \to A \to B$, с необходимостью верифицируется $A \to B$.

Что касается аксиом А5, А6, А8, А9, то их семантическая истинность очевидна. У аксиомы А7 это свойство вытекает из конъюнктивной замкнутости любого мира следствий. Аксиома А10 за счет принципа контрапозиции сводится к А7. Семантическая истинность всех остальных аксиом А11-А15 с очевидностью вытекает из условий верификации соответствующих формул.

Мы установили, таким образом, что все аксиомы системы E семантически истинны, и значит каждая аксиома A_i ($i \leq 15$) верифицируется во всех тех мирах, в которых верифицируется $A_i \to A_i$. Для завершения доказательства теоремы МТ1 нам достаточно показать, что в системе E правила вывода MP и правило адъюнкции сохраняют для теорем это свойство в силе. Это означает, что для MP надо убедиться, что в случае, когда во всяком мире, в котором верифицируется $A \to B \to A \to B$, верифицируется $A \to B$, и когда во всяком мире, в котором верифицируется $A \to A$, верифицируется A, тогда во всяком мире, в котором верифицируется $B \to B$, верифицируется B.

Покажем, что это действительно так. В мирах, в которых верифицируется $A \to B \to A \to B$, верифицируется в силу принципа транзитивности формула $(A \to A) \to A \to .(A \to A) \to B$. В силу семантической истинности формулы A и пункта (8) определения D1 в тех же мирах верифицируется $(A \to A) \to B$, а значит и формула B. А это в силу Леммы 1 означает, что B верифицируется во всех тех мирах, где верифицируется $B \to B$.

Для правила адъюнкции надо показать, что в случае верности утверждений $T(A \to A)/w_i \supset T(A)/w_i$ и $T(B \to B)/w_i \supset T(B)/w_i$ имеет силу также и $T(A \bullet B \to A \bullet B)/w_i \supset T(A \bullet B)/w_i$. Применение Леммы 1, как и в случае с МР, делает эту задачу несложной.

Теорема МТ1 доказана.

Прежде чем перейти к следующему важному шагу и показать, что любая семантически истинная формула является теоремой системы Е, продемонстрируем, как в рамках данной семантики удается осуществить семантическое различие между двумя весьма похожими утверждениями:

$$(A \to B) \bullet (B \bullet C \to D) \to (A \bullet C \to D) \qquad (1)$$

$$(A \to B) \bullet (B \bullet C \to D) \bullet (C \to C) \to (A \bullet C \to D) \qquad (2)$$

Второе из них в отличие от первого, как известно, является теоремой системы E, и при построении семантики обычно очень непросто сохранить общезначимость только за утверждением (2), но не за (1). Семантика S^{ea} решает эту проблему следующим образом. Верификация антецедента формулы (2) влечет верификацию $A \bullet C \to B \bullet C$, что при наличии в антецеденте $B \bullet C \to D$ в силу транзитивности обеспечивает верификацию консеквента формулы (2).

Для (1) такой подход оказывается невозможным. И хотя мы можем утверждать, что во всяком мире при верности антецедента формулы (1) верификация $A \bullet C$ влечет верификацию D (что, собственно, и дает резонные аргументы в пользу принятия (1)), для обоснования $A \bullet C \to D$ недостаточно. Мы в принципе не можем получить необходимое для верификации $A \bullet C \to D$ в некотором мире утверждение о том, что в каждом достижимом мире, где верифицируется $\neg D$, к миру следствий принадлежит $\neg(A \bullet C)$.

Метатеорема МТ2 *(Теорема полноты). Если B является семантически истинной формулой в семантике S^{ea}, то B есть теорема системы E. Формально: Если $\models B$ в S^{ea}, то $\vdash B$ в E.*

Стратегия доказательства состоит в том, чтобы показать, что утверждение

$$\forall w_i(T(A \to A)/w_i \supset T(B)/w_i) \qquad (1)$$

является верным только в случае, когда B есть теорема системы E. Так как в соответствии с Леммой 1 утверждение (1) равносильно утверждению о семантической истинности B, этого будет достаточно для доказательства МТ2.

Так как никакая формула не верифицируется во всех мирах без некоторой предпосылки, очевидно, что (1) может оказаться верным только в случае, когда B получается из $A \to A$ в силу некоторых допустимых семантических преобразований, которые определяются семантическими свойствами связок, заданными определением D1.

Первые пять пунктов определения D1, которые связаны с семантикой классических связок, являются стандартными, и их применение для семантических преобразований исходной формулы всегда будет обеспечивать переход от любой теоремы E к теореме же. Пункт (6) позволяет считать $\neg(A \to B)$ семантическим ослаблением $A \bullet \neg B$, чему в E соответствует теорема $A \bullet \neg B \to \neg(A \to B)$, и поэтому преобразования, осуществляемые с использованием этого пункта, также оставляет теорему системы E ее теоремой.

В соответствии с пунктом (7) определения D1 семантическим эквивалентом формулы $A \to B$ является $\neg B \to \neg A$, а их семантическими ослаблениями $\neg A \vee B$ и любые формулы вида $B \to C \to A \to C$, $C \to A \to .C \to B$. Во всех случаях связанные с этими свойствами трансформации любой теоремы E приводят к новой теореме этой системы.

Наконец пункт (8) из D1 позволяет преобразовать в D любую формулу вида $C \to D$, где C есть семантически истинная в силу D1 формула вида $E \to F$ или конъюнкция таких формул. Это равносильно переходу от $C \to C \to D$ к D, что в случае, когда $C \to C \to D$ теорема E, обеспечивает в E доказуемость формулы D.

Никаких иных семантических преобразований стоящей в антецеденте (1) формулы $A \to A$ кроме названных осуществить нельзя. И так как $A \to A$ есть теорема системы E, получающаяся в результате этих преобразований формула B всегда будет также теоремой этой системы.

Таким образом,теорема МТ2 о семантической полноте системы E доказана.

Из МТ1 и МТ2 немедленно следует:

Метатеорема МТ3. *Утверждение $\models B$ верно в семантике S^{ea}, если и только если $\vdash B$ в системе E.*

Семантика исчисления R

Формулировка исчисления R получается из формулировки E путем замены во всех аксиомах и правилах вывода E знака "$\rightarrow$" на знак "$\Rightarrow$" и добавлением одной дополнительной аксиомы

A16. $(A\Rightarrow B\Rightarrow C)\Rightarrow .B\Rightarrow A\Rightarrow C$.

Семантику S^{ea} для исчисления R мы получим из соответствующей семантики для E за счет изменений в определении D1, которые мы сделаем, принимая следующее:

Определение D3. ***Формулы языка исчисления R верифицируются в мире w_i исключительно в соответствии со следующими условиями:***

(1)-(8) ***определения D1, в которых одинарная стрелка "$\rightarrow$" заменяется двойной "$\Rightarrow$", и следующим дополнительным пунктом:***

(9) ***Во всяком универсуме рассуждений w_i, в котором верифицируется формула A, верифицируется формула A В B. Или формально:***

$\forall w_i(T(A)/w_i \supset T(A\Rightarrow B\Rightarrow B)/w_i)$.

Мы корректируем также соответствующим образом определение семантически истинной формулы:

Определение D4. $\models B \equiv_{\text{df}} \forall w_i(T(B\Rightarrow B)/w_i \supset T(B)/w_i)$.

Включенный в D3 пункт (9) нуждается в некоторых содержательных пояснениях. Прежде всего надо обратить внимание на то, что консеквент утверждения

$$T(A)/w_i \supset T(A\Rightarrow B\Rightarrow B)/w_i) \qquad (1)$$

говорит о том, что формула $A\Rightarrow B\Rightarrow B$ верифицируется во всяком достижимом из w_i мире. Это как бы предполагает, что во всяком таком мире должно верифицироваться A. Иначе совершенно непонятно, на каком основании $A\Rightarrow B$ влечет B[3]. Такое положение можно было бы оправдать, будь A семантически истинным. Но оно берется совершенно произвольно. Таким образом, всякое A оказывается как бы необходимым, тем более, что у утверждения (1) есть такой частный случай, как

$$T(A)/w_i \supset T(A\Rightarrow A\Rightarrow A)/w_i \qquad (2)$$

И это последнее утверждение выглядит таким образом, что верность любого A в некотором мире достаточна, чтобы во всех достижимых мирах его можно было рассматривать как следствие из очевидного логического закона. Подобное понимание утверждений (1) и (2) нередко влечет негативное отношение к исчислению R и его модальным расширениям.

---

3 В обычном языке утверждения вида $A\Rightarrow B\Rightarrow B$ довольно часто используют, чтобы указать на то, что имеет место A. Так, например, коль скоро говорится, что из утверждения "*Если адвокат выиграет процесс, то его гонорар будет удвоен*" следует, что "*Гонорар адвоката должен быть удвоен*", то это может пониматься только таким образом, что адвокат процесс выиграл.

Я предлагаю здесь принципиально иное толкование этих утверждений. Оно связано с определенным пониманием отношения достижимости. Данное отношение очень различно в семантиках для E и для R. Так, в семантике для E мы имели дело с неким, так сказать, абсолютным отношением достижимости, которое разбивало все множество универсумов рассуждений на соответствующие пары таким образом, что у всякого w_i имелось всегда одно свое точно очерченное и неизменное множество достижимых миров. И всякий мир из W всегда либо принадлежал, либо не принадлежал к этому множеству. В семантике для R отношение достижимости носит совсем иной характер. Оно релятивизировано относительно самих верифицируемых высказываний и является контекстуально обусловленным.

В E описывается необходимая импликация, и поэтому в ее семантике достижимые миры это те, которые сохраняют верность всех необходимых высказываний. Когда мы говорим о достижимых мирах при верификации обычной условной связки, которую описывает исчисление R, то в число таковых попадают только те из миров, в которых сохраняют свою верность и некоторые пусть и не являющиеся необходимыми, но явно или неявно предполагаемые верными высказывания. Некоторое условное высказывание в случае своей верности описывает допустимую ситуацию, возможное положение дел и тем самым ограничивает число возможных достижимых миров. Так, скажем, из предполагаемой истинности высказывания *"Если сумма цифр данного числа делится на 3, то данное число делится на 30"* с очевидностью следует, что речь идет о числе, которое оканчивается на 0. И это соответствующим образом детерминирует множество возможных миров, которые относятся к достижимым.

Мы имеем дело, таким образом, с двумя различными отношениями достижимости, одно из которых (в семантике для E) мы будем именовать отношением N-достижимости, а второе (в семантике для R) отношением C-достижимости. Это второе является подотношением первого. Вне какого-либо контекста множество достижимых миров в обоих случаях одно и то же. Контекст может сузить множество C-достижимых миров, и, возможно, терминологически более оправданным было бы говорить в этом случае не о достижимых, а, скорее, о допустимых мирах. Вместе с тем никакой контекст не влияет на множество N-достижимых миров, которое всегда остается тем же самым. Указанная разница между обсуждаемыми отношениями особенно видна, когда верифицируются итерированные импликативные высказывания вида $A \to . B \to C$ и $A \Rightarrow . B \Rightarrow C$. При верификации консеквента $B \to C$ первого из них в числе достижимых остаются все те же миры, что и при верификации всего высказывания. В то время как при верификации консеквента $B \Rightarrow C$ второго высказывания в число допустимых попадают лишь те миры, в которых верифицируется A.

Более полно различия между отношениями N- и R-достижимости будут раскрыты, когда ниже будет предложена семантика исчисления NR, в которой будут фигурировать одновременно оба этих отношения.

Вернемся теперь к утверждениям (1) и (2). Верность консеквентов этих утверждений действительно предполагает, что A верифицируется в каждом достижимом из w_i мире, но отнюдь не в силу каких-то свойств A, а только потому, что достижимыми (допустимыми) мирами оказываются только те, где A верно[4]. При этом (1) и (2) являются верными и в том возможном случае, когда соответственно $A \Rightarrow B$ и $A \Rightarrow A$ не верифицируются ни в одном из достижимых миров. Заметим также, что утверждение (2) не придает A никакого особого логического статуса. И утверждение (1), и утверждение (2) говорят о свойствах A нисколько не больше, чем $A \bullet (A \Rightarrow B) \Rightarrow B$ и $A \bullet (A \Rightarrow A) \Rightarrow A$.

Покажем, что все теоремы исчисления R являются семантически истинными в смысле определения D4.

Метатеорема МТ4. *Если формула B есть теорема системы R, то* $\models B$ *в семантике* S^{ea} *для языка исчисления R.*

Учитывая, что произведенные в семантике, построенной для E, изменения сохраняют возможность доказать семантическую истинность аксиом А1-А15 исчисления R, а также свойство правил вывода оставлять такую истинность в силе, для доказательства МТ4 остается установить семантическую истинность аксиомы А16. Чтобы убедиться в этом, достаточно показать, что во всяком мире, в котором верифицируется формула $A \Rightarrow .B \Rightarrow C$, всегда верифицируется также $B \Rightarrow .A \Rightarrow C$.

В соответствии с пунктом (9) определения D3 в каждом мире, в котором верифицируется формула B, верифицируется $B \Rightarrow C \Rightarrow C$, а значит и $A \Rightarrow .\, B \Rightarrow C \Rightarrow .\, A \Rightarrow C$. Мы имеем, таким образом:

$$T(B)/w_i \supset T((A \Rightarrow B \Rightarrow C) \Rightarrow .\, A \Rightarrow C)/w_i \qquad (1)$$

Частным случаем утверждения (1) является:

$$T(A \Rightarrow B \Rightarrow C)/w_i \supset T(\underline{(B \Rightarrow .(A \Rightarrow B \Rightarrow C) \Rightarrow .\, A \Rightarrow C)} \Rightarrow .\, B \Rightarrow A \Rightarrow C)/w_i \quad (2)$$

Из (1) и (2) (см.подчеркнутое выражение) в соответствии с пунктом (8) определения D4 получаем требуемое для доказательства МТ4 утверждение о семантической истинности аксиомы А16:

$$T(A \Rightarrow B \Rightarrow C)/w_i \supset T(B \Rightarrow A \Rightarrow C)/w_i \quad (3).$$

Метатеорема МТ5. *Если* $\models B$ *в семантике* S^{ea} *для языка исчисления R, то формула B доказуема в R (теорема полноты).*

То обстоятельство, что пункт (9) определения D4 включает в число семантически истинных формул заведомую теорему R в

---

4 Здесь можно провести некоторую аналогию. Если некто утверждает, что его идеи разделяют все прогрессивные люди, то он может считать себя правым уже просто потому, что людей, не разделяющих этих идей, он к прогрессивным не относит.

дополнение к тем формулам, аналоги которых доказуемы в E, делает справедливость МТ5 очевидной. Из МТ4 и МТ5 следует:

Метатеорема МТ6. *Формула B есть теорема системы R, если и только если $\models B$ в семантике S^{ea} для языка исчисления R.*

На этом мы заканчиваем рассмотрение семантики для исчисления R и переходим к известному его модальному расширению NR. При этом, чтобы не утруждать читателя ссылками на предыдущие определения и результаты, семантика для исчисления NR будет строиться хотя и не с такими, как ранее, подробностями, но в общем достаточно независимо от уже изложенного материала.

Семантика S^{ea} для исчисления NR

Исчисление NR получается из исчисления R добавлением четырех модальных аксиом и одного правила вывода. Для удобства приведем формулировку NR полностью.

Аксиомы NR:

A1. $(A\Rightarrow A)\bullet(B\Rightarrow B)\Rightarrow C\Rightarrow C$ A2. $A\Rightarrow B\Rightarrow B\Rightarrow C\Rightarrow A\Rightarrow C$

A3. $A\Rightarrow B\Rightarrow .C\Rightarrow A\Rightarrow .C\Rightarrow B$ A4. $(A\Rightarrow A\Rightarrow B)\Rightarrow A\Rightarrow B$

A5. $A\bullet B\Rightarrow A$ A6. $A\bullet B\Rightarrow B$

A7. $(A\Rightarrow B)\bullet(A\Rightarrow C)\Rightarrow A\Rightarrow B\bullet C$ A8. $A\Rightarrow A\vee B$

A9. $B\Rightarrow A\vee B$ A10. $(A\Rightarrow C)\bullet(B\Rightarrow C)\Rightarrow A\vee B\Rightarrow C$

A11. $A\bullet(B\vee C)\Rightarrow A\bullet B\vee C$ A12. $A\Rightarrow B\Rightarrow .\neg B\Rightarrow\neg A$

A13. $A\bullet\neg B\Rightarrow\neg(A\Rightarrow B)$ A14. $A\Rightarrow\neg\neg A$

A15. $\neg\neg A\Rightarrow A$ A16. $(A\Rightarrow .B\Rightarrow C)\Rightarrow B\Rightarrow A\Rightarrow C$.

A17. $NA\Rightarrow A$. A18. $NA\Rightarrow NNA$.

A19. $NA\ NB\Rightarrow N(AB)$. A20. $N(A\Rightarrow B)\Rightarrow .NA\Rightarrow NB$.

Правила вывода NR:

R1. Из $A\Rightarrow B$ и A следует B (Modus ponens, сокращенно: MP).

R2. Из A и B следует $A\bullet B$ (Правило адъюнкции).

R3. Из A следует NA (Правило Геделя).

Выражение $A\rightarrow B$ понимается в NR как сокращение для $N(A\Rightarrow B)$. Оператор возможности M определяется через оператор необходимости N обычным образом: $MA =_{df} \neg N\neg A$. Как $E(A)$ будем обозначать формулу, которая получается из A заменой всех вхождений знака "$\Rightarrow$" на "$\rightarrow$". Указанную формулу будем называть E-преобразованием формулы A.

Семантика S^{ea} для NR может быть сформулирована за счет определенного рода преобразования соответствующей семантики для R. Однако, чтобы не отсылать читателя к последней, тем более, что сама она получена из соответствующей семантики для E, мы построим эту новую семантику с самого начала.

Модельная структура представляет собой тройку $<W, R^c, R^n>$, где W есть бесконечное множество универсумов рассуждений (миров) $w_1, w_2, \ldots$, каждый w_i из которых в свою очередь представляет собой упорядоченную пару $<w_i^a, w_i^e>$. Первый член этой пары, или атомарный мир, есть некоторый список литералов (пропозициональных переменных или их отрицаний). Требование полноты к атомарным мирам не предъявляется. В принципе такой мир может быть даже пустым. Вводится требование непротиворечивости атомарных миров: никакая пропозициональная переменная a не может входить ни в какой мир w_i^a одновременно со своим отрицанием.

Второй член пары, w_i^e - мир следствий, есть множество формул принятого языка, в нашем случае языка исчисления *NR*. К данному множеству предъявляется только требование конъюнктивной замкнутости, согласно которому, если A и B - элементы этого множества, то конъюнкция $A \bullet B$ также является его элементом. И, если $(C \Rightarrow A)$ и $(C \Rightarrow B)$ - элементы такого множества, то к числу его элементов принадлежит $(C \Rightarrow A \bullet B)$. Формально:

$$\forall w_j((A \in w_j^e)\&(B \in w_j^e) \supset (A \bullet B \in w_j^e)).$$

$$\forall w_j((C \Rightarrow A) \in w_j^e)\&(C \Rightarrow B) \in w_j^e) \supset (C \Rightarrow A \bullet B) \in w_j^e).$$

Наконец R^c и R^n являются бинарными рефлексивными и транзитивными отношениями достижимости на W. При этом выражения Rw_iw_j и $Rw_i^a w_j^a$, где R есть R^c или R^n, рассматриваются как идентичные. R^c является *подотношением* R^n в том смысле, что $\forall w_j \forall w_i (R^c w_i w_j \supset R^n w_i w_j)$.

Мы используем выражения $T(A)/w_i$ и $F(A)/w_i$ для утверждений о верифицируемости и соответственно о фальсифицируемости формулы A в мире w_i. Причем данные утверждения рассматриваются как совершенно тождественные утверждениям $T(A)/w_i^a$ и $F(A)/w_i^a$ соответственно. Будут справедливыми также следующие соотношения:

$$T(A)/w_i = F(\neg A)/w_i \text{ и } T(\neg A)/w_i = F(A)/w_i.$$

Определение D5: *В мире w_i формулы верифицируются исключительно в соответствии со следующими условиями:*

(1) *Если A - пропозициональная переменная или ее отрицание, и A входит в список w_i^a, то $T(A)/w_i$.*

(2) $T(A \bullet B)/w_i = T(A)/w_i$ *и* $T(B)/w_i$.

(3) $T(A \vee B)/w_i = T(A)/w_i$ *или* $T(B)/w_i$.

(4) $T(\neg(A \vee B))/w_i = T(\neg A)/w_i$ *и* $T(\neg B)/w_i$.

(5) $T(\neg(A \bullet B))/w_i = T(\neg A)/w_i$ *или* $T(\neg B)/w_i$.

(6) $T(\neg(A \Rightarrow B))/w_i = \exists w_j R^c w_i w_j \& T(A)/w_j \& F(B)/w_j$.

Прежде чем продолжить D5, примем некоторые соглашения. Введем внеязыковую бинарную связку "-->", которую мы называем квазиимпликацией. Понятие правильно построенной формулы при этом не изменяется, так как знак квазиимпликации в формулу входить не может.

$(A\text{-->}B)/w_i =_{\mathrm{df}} \forall w_j(R^c w_i w_j \supset (T(A)/w_j \supset T(B)/w_j \& (B \in w_j^e))\&$
$\&(T(@B)/w_j \supset (T(@A)/w_j \& (T@A \in w_j^e))\&(T(@A \vee B)/w_j)$.

Логические знаки, отсутствующие в нашем объектном языке, понимаются здесь как метасимволы с соответствующими значениями. Выражение вида $@A$ означает $\neg A$ или A', когда A имеет вид $\neg A$. На отношение достижимости R^c налагаются ограничения, в соответствии с которыми:

$(A\text{-->}B)/w_i \& \forall C \forall w_j(R^c w_i w_j \supset (F(C \Rightarrow B)/w_j \supset \neg(C \Rightarrow A) \in w_j^e)) \supset$
$\supset ((C \Rightarrow A) \text{-->} (C \Rightarrow B))/w_i)$.

$\forall C((C \Rightarrow A)\text{-->}(C \Rightarrow B))/w_i \supset \forall D((D \Rightarrow C \Rightarrow A)\text{-->} (D \Rightarrow C \Rightarrow B))/w_i$.

Определение D5 (*продолжение*):

(7) $T(A \Rightarrow B)/w_i = T(@B \Rightarrow @A)/w_i = (A\text{-->}B)/w_i \& \forall C((C \Rightarrow A)\text{-->}$
$\text{-->}(C \Rightarrow B))/w_i$.

(8) $\forall w_i(T(A)/w_i \supset T(B)/w_i) \& (T(C)/w_i \supset T(D)w/_i) \supset$.
$\supset. \forall w_j T((A \to B) \bullet (C \to D) \Rightarrow E)/w_j \supset T(E)/w_i$.

(9) $\forall w_i(T(A)/w_i \supset T(A \Rightarrow B \Rightarrow B)/w_i)$.

(10) $T(NA)/w_i = \forall w_j(R^n w_i w_j \supset T(A)/w_j)$.

(11) $T(\neg NA)/w_i = \exists w_j(R^n w_i w_j \& T(\neg A)/w_i)$.

(12) $\forall w_i(T(NA)/w_i \supset T(N(N(A \Rightarrow B) \Rightarrow NB))/w_i)$.

Определение условий верификации формул языка исчисления NR завершено. По существу, определение D4, задающее аналогичные условия для исчисления R, если не считать некоторого усиления (за счет замены двойной стрелки на одинарную) пункта (8), дополнено тремя новыми пунктами: (10) - (12). Пункты (10) и (11) нового определения вводят условия верификации оператора необходимости стандартным для реляционных семантик образом. Пункт (12) представляет собой аналог пункта (9). Это становится более очевидным, если записать его с помощью одинарной стрелки:

(12) $\forall w_i(T(NA)/w_i \supset T(A \to B \to NB)/w_i)$.

Докажем теперь, как и в предыдущих случаях, две метатеоремы о семантической истинности доказуемых в исчислении NR формул и семантической полноте самого этого исчисления.

Как и ранее, поскольку никакая формула принципиально не может верифицироваться во всех мирах, принимается следующее определение семантической истинности формул NR:

Определение D6. $\models B \equiv_{\mathrm{df}} \forall w_i(T(B \Rightarrow B)/w_i \supset T(B)/w_i$.

Сделаем в связи с данным определением некоторые замечания. Во-первых, так как речь в нем идет обо всех мирах, не имеет значения, берется ли в определяющей части двойная или же одинарная стрелка. И, во-вторых, для установления семантической истинности импликативной формулы, будь то $A \Rightarrow B$ или $A \to B$ (напоминаем, что последнее по определению есть $N(A \Rightarrow B)$), как и в предыдущих случаях, достаточно показать, что во всяком мире, в котором верифицируется A, всегда верифицируется также и B[5].

Метатеорема МТ7. *Если формула B есть теорема системы NR*, то $\models B$ в семантике S^{ea} для языка исчисления NR.

Очевидно, что все теоремы исчисления R в соответствии с D5 остаются семантически истинными. Для доказательства МТ7 достаточно показать поэтому, что семантически истинными являются аксиомы А17-А20, а правило Геделя сохраняет это свойство за получаемыми по этому правилу формулами.

Тот факт, что аксиома А17 семантически истинна, очевиден: формула NA не может верифицироваться ни в каком мире, в котором не верифицируется A. Семантическая истинность А18 следует из того, что NNA может оказаться неверифицируемым в некотором мире w_i только при условии, что в одном из N-достижимых из него миров w_j не верифицируется NA, что возможно только при существовании N-достижимого мира, в котором не верифицируется A, а это при транзитивности отношения N-достижимости невозможно, так как противоречит предпосылке о верифицируемости NA в w_i. Семантическая истинность А19 непосредственно вытекает из условий верификации оператора N и конъюнкции. Наконец семантическая истинность последней из аксиом А20 видна из следующих утверждений.

$$T(N(A \Rightarrow B))/w_i \supset T(N((A \Rightarrow B) \Rightarrow NB) \Rightarrow NB)/w_i \qquad (1)$$

$$T(N(A \Rightarrow B))/w_i \supset \underline{T(NA \Rightarrow N((A \Rightarrow B) \Rightarrow NB)} \Rightarrow .NA \Rightarrow NB)/w_i \qquad (2)$$

$$T(N(A \Rightarrow B))/w_i \supset T(NA \Rightarrow NB)/w_i \qquad (3)$$

Утверждение (1) является верным в силу пункта (12) определения D5. (2) получается из (1) на основании свойства транзитивности релевантной импликации. Подчеркнутая часть утверждения (2) опять же в силу пункта (12) является семантически истинной, и поэтому (2) влечет утверждение (3). Таким образом, семантическая истинность А20 установлена.

Для доказательства МТ7 остается рассмотреть правило вывода R3. Надо показать, что при верности

$$\forall w_i(T(A \Rightarrow A)/w_i \supset T(A)/w_i)$$

с необходимостью верным будет также и

$$\forall w_i(T(NA \Rightarrow NA)/w_i \supset T(NA)/w_i).$$

Справедливость последнего следует из легко получаемого в силу семантической истинности A утверждения

$$T(A \to A \to A \to A \to A \to A)/w_i \supset T(A \to A \to A)/w_i$$

и семантической эквивалентности $A \to A \to A$ и NA. Доказательство МТ7 завершено.

Метатеорема МТ8. *Если $\models B$ в семантике S^{ea} для языка исчисления NR, то формула B доказуема в NR (теорема полноты).*

---

5 Объяснение этому факту см. в начале доказательства МТ1.

Доказательство. Всякая семантически истинная формула A может быть получена из $A \rightarrow A$ в результате семантических преобразований, обусловленных определением D5. Всякое такое преобразование оставляет любую теорему исчисления NR, к которой оно (это преобразование) применено, теоремой же этого исчисления[6]. И так как формула $A \rightarrow A$, с которой начинаются семантические преобразования, естественно, является теоремой NR, этого достаточно для доказательства MT8.   Из MT7 и MT8 вытекает

Метатеорема MT9. Формула B доказуема в NR, если и только если $\models B$ в семантике S^{ea} для языка исчисления NR.

Этим мы завершаем построение реляционной семантики S^{ea} для релевантных исчислений E, R и NR.

Взаимоотношения между системами E и NR

В свое время я достаточно подробно рассмотрел взаимоотношения между исчислениями E и NR на синтаксическом уровне[7]. Построенная семантика дает возможность рассмотреть эту проблему в семантическом плане.

Сейчас уже общеизвестно, что импликация, описываемая в системе E, не есть то же самое, что и необходимая релевантная импликация в системе NR, как это считали многие исследователи в начале 70-х годов. Однако факт такого несовпадения до сих пор обычно констатируется лишь как следствие того, что удалось найти формулу

$$(A \rightarrow B \rightarrow C) \bullet (B \rightarrow A \vee B) \rightarrow (B \rightarrow C) \quad (1),$$

которая имеет силу в NR, но не доказуема в E[8]. Нам бы хотелось здесь, во-первых, описать весь тот класс формул, которые могут быть доказаны в NR, но не в E, выявив при этом причины данного обстоятельства. И, во-вторых, показать, что система E может быть усилена таким образом, что между описываемым в ней отношением следования и необходимой релевантной импликацией будет иметься полное совпадение.

Пусть A есть конъюнкция вида $B^1 \bullet ... \bullet B^m$, где каждый B^i $(i \leq m)$ имеет вид $C_1{}^i \Rightarrow . ... \Rightarrow C_{n-1}{}^i \Rightarrow \neg C_n{}^i$ $(n \geq 2)$, где любое из $C_j{}^i$ $(j \leq n)$ есть формула классической логики. Пусть далее A^+ есть любая из формул, которые получаются путем любых перестановок любых формул $C_j{}^i$ и $C_k{}^i$ в любом B^i. Для большей строгости дальнейших рассуждений включим в класс формул, обозначаемых как A^+,

---

6 Анализ семантических преобразований, возможных в соответствии с конкретными пунктами определения D5, который дается при доказательстве предшествующих метатеорем, сохраняет свою силу и в данном случае.

7 См. *Сидоренко Е.А.* Логическое следование и условные высказывания. М., 1983 (гл.2, с.103-109, 138-147).

8 Данный факт был строго доказан Л.Л. Максимовой (см. *Maksimowa L. A.* Semantics for the calculus E of entailment.- Bulletin of the section of logic. 1973, v.2, N.1, Wroclaw).

также любую конъюнкцию $A^{+} \cdot B^{i+}$, где B^{i+} есть результат указанных перестановок в B^{i}, отличный от того, который входит в конъюнкцию A^{+}. Совершенно очевидно, что всякая формула A^{+} в исчислении NR эквивалентна исходной формуле A, которая сама относится к числу формул A^{+}, а формулы $A^{+} \Rightarrow A$ и $A^{+} \rightarrow A$ всегда семантически истинны.

Представим теперь, что семантически истинной, а значит доказуемой в NR, является формула $A \rightarrow B$, где A имеет описанный выше вид, а B есть либо формула классической логики, либо импликация $C \Rightarrow D$ двух таких классических формул. Для удобства ограничимся рассмотрением только второго случая. Тогда семантически истинной является также формула $E(A) \rightarrow E(B)$, где формула вида $E(A)$, называемая E-преобразованием формулы A, получается из A путем замены всех двойных стрелок на одинарные. Это следует из того, что $E(A)$ при указанном типе A семантически влечет A, и значит мы имеем $E(A) \rightarrow B$, откуда следует $N(E(A) \rightarrow B)$, а значит $NE(A) \rightarrow NB$, где $NE(A)$ семантически эквивалентно $E(A)$, а NB совпадает с $E(B)$.

Заметим, что формула $E(A) \rightarrow E(B)$ записана в языке системы E, но, будучи теоремой NR, она совсем не обязательно окажется теоремой E. Это же относится, вообще говоря, к любой формуле $E(A^{+}) \rightarrow E(B)$, причем несмотря на то, что в NR, как и в E, формулы $E(A)$ и $E(A^{+})$ в общем случае не являются эквивалентными. Имеется, таким образом, целый класс теорем NR вида $E(A) \rightarrow E(B)$, недоказуемых в E. Легко заметить, что приведенная выше формула (1), недоказуемость которой в свое время установила Максимова Л.Л., относится именно к этому классу.

Вместе с тем, если $E(A) \rightarrow E(B)$ есть теорема NR, недоказуемая в E, то всегда найдется семантически эквивалентная A формула A^{+} такая, что семантическую истинность $E(A^{+}) \rightarrow E(B)$ можно будет обосновать, не используя пункта (9) определения D5, а проще говоря, не используя принципа перестановочности импликации, так как необходимость в нем отпадает в силу того, что он может всегда быть применен при построении A^{+}. Такую формулу $E(A^{+}) \rightarrow E(B)$ можно доказать в NR без использования аксиомы A16. Но это означает, что она будет теоремой E. Указанное обстоятельство дает возможность усилить систему E таким образом, чтобы устранить отмеченные расхождения между E-следованием и необходимой релевантной импликацией. Прежде чем приступить к этой задаче, приведем некоторые содержательные соображения в пользу оправданности решения самой этой задачи.

Когда мы используем в выводе систему NR, то, принимая в качестве посылки формулу вида $E(A)$, мы всегда получаем право использовать наряду с другими те возможности, которые предоставляет переход к семантически более слабой формуле A. Когда та же посылка дается в рамках вывода в системе E, мы такого права оказываемся лишены. И, если правда, что не все, что положено Юпитеру, положено быку, то правда и обратное, если Юпитер не может стать быком. В пользу принятия в системе E отсутствующих в ней, но доказуемых в NR, принципов говорит также тот факт, что обогащение языка этой системы за счет релевантной импликации из R при установлении между двумя импликациями соответствующей семантической субординации привело бы к принятию тех же принципов.

Определение D7. *Выражение вида Perm(A) определяется в соответствии со следующими условиями. Пусть A есть конъюнкция вида* $B^1 \bullet \ldots \bullet B^m$, *где каждый* B^i $(i \leq m)$ *имеет вид* $C_1{}^i \to . \ldots \to .C_{n-1}{}^i \to \neg C_n{}^i$ $(n \geq 2)$, *где любое из* $C_j{}^i$ $(j \leq n)$ *есть формула классической логики. Тогда Perm(A) есть любая из формул, которые получаются путем любых перестановок любых формул* $C_j{}^i$ *и* $C_k{}^i$ *в любом* B^i. *Если формула A имеет вид, отличный от указанного, то Perm(A) совпадает с A.*

Будем обозначать как E_{NR} логическое исчисление, которое получается из системы E за счет добавления следующего правила вывода:

(δ) *Из* $A \to B$, *где B содержит не более одного вхождения знака "$\to$", имея при этом вид* $B_1 \to B_2$, *следует формула* $Perm(A) \to B$, *а также любой подстановочный частный случай этой формулы.*

В системе E_{NR} по причинам, которые мы объяснили выше, будет доказуема всякая формула языка E, которая доказуема в NR, и, естественно, наоборот, всякая теорема E_{NR} будет теоремой NR. В связи с этим является очевидной справедливость следующего утверждения:

Метатеорема МТ10. *Формула B языка E является теоремой* E_{NR}, *если и только если B является семантически истинной в семантике* S^{ea} *для NR.*

Обратим внимание на оригинальность и необычность семантики, предлагаемой здесь для E_{NR}. Может показаться, что мы просто воспользовались уже имеющейся семантикой, построенной для NR. Дело, однако, принципиально в другом. Характер описываемой в E_{NR} импликации таков, что мы не можем задать условий ее верификации в семантике S^{ea} без использования более слабой R-импликации с ее собственными условиями такой верификации. Иными словами, нам все равно пришлось бы построить именно принятую здесь семантику, если бы даже исчислений R и NR, как и описываемой в них импликации, не существовало бы вообще. А это значит, и в этом, собственно, и состоит принципиальная необычность данной семантики, что для ее построения оказывается необходимым расширение за счет новых логических констант языка, для которого семантика строится. В данном случае такое расширение осуществляется за счет введения R-импликации и оператора необходимости.

Фам Динь Нгъем

РОЛЬ МОДЕЛЬНЫХ СТРУКТУР В ОПРЕДЕЛЕНИИ ЛОГИЧЕСКОГО СЛЕДОВАНИЯ*

Проблема определения отношения логического следования интересна сама по себе, ведь она является одной, если не самой важной, из фундаментальных проблем логики как науки. Семантические исследования интенсиональных, и прежде всего релевантных, логических систем вносят важный вклад в решение этой проблемы. В этой работе мы пытаемся построить семантику следования, в которой каждая формула языка L характеризуется некоторой модельной структурой. Идея сопоставлять формуле модельную структуру развивалась нами еще в [6]. В этой статье она существенно уточняется. Рассматривается соответствующая построенной семантике синтаксическая система. Настоящая статья представляет собой первую часть нашей работы по построению выше названной семантики следования.

1. Возможные миры, невозможные возможные миры

При попытке определить, имеется ли отношение логического следования между высказываниями A и B (сокращенно: $A \models B$?), используя только понятия истинности, нам известно следующее положение:

a) "Если бывает случай, когда A истинно и B не истинно, то неверно , что $A \models B$ (сокращено $A \not\models B$).

Как тогда решить проблему? Нетрудно видеть, что положения *a)* достаточно для определения, имеет ли место $A \models B$, если следующее условие верно:

b) "Если $A \not\models B$, то всегда найдется случай, когда A истинно и B не истинно, т.е. случай, отвергающий $A \models B$".

Следовательно, при наличии утверждения *b)* мы можем определить: $A \models B \leftrightharpoons B$ истинно всегда, когда A истинно (1).

Рассматривая "возможный мир" как возможные положения дел, или случаи, или ситуации и обозначая "A истинно в a" и "A не истинно в a" соответственно через TA/a и не-TA/a, можем писать (1) в виде:

$A \models B \Leftrightarrow \forall a(TA/a \Rightarrow TB/a)$ (2),

где a - переменная, пробегающая по множеству всех возможных миров.

Нетрудно видеть, что *b)* имеет место тогда и только тогда, когда выполнены следующие два условия:

* Работа выполнена при поддержке Российского Фонда Фундаментальных исследований, грант 93-06-10708.

b1) Для всякого высказывания A существует возможный мир a, такой, что TA/a, и

b2) Для всякого высказывания A существует возможный мир a, такой, что не-TA/a.

Поскольку высказывание A может быть некоторым законом логики, то из *b2)* вытекает, что существуют возможные миры, в которых некоторые законы логики не имеют места. Аналогично, из *b1)* следует, что существуют возможные миры, в которых истинны отрицания некоторых логических законов. Такие миры назовем, вслед за Я. Хинтиккой, невозможными возможными мирами. Допущение таких невозможных возможных миров подвергается критике у многих авторов. Мы здесь не пытаемся обосновать этого допущения[1], а лишь показываем, что если использовать **только положение** *a)* для определения отношения логического следования, то множество возможных миров сможет служить адекватным математическим инструментом только тогда, когда оно содержит в себе и невозможные возможные миры.

Принимая соглашение $A \models B \Leftrightarrow \models (A \rightarrow B)$, перепишем (2) в виде:

Определение 1:

$A \rightarrow B \Leftrightarrow \forall a(TA/a \Rightarrow TB/a)$.

2. Истинностные значения высказываний в возможных мирах. Отношения между возможными мирами

Определение (1) показывает, что для определения $A \models B$? необходимо определить для любых высказываний A и B, истинны они на определенном мире a или нет. Другими словами, необходимо вычислить значения $\lambda(a,A)$ и $\lambda(a,B)$, где λ - функция из декартового произведения множества возможных миров **S** на множество высказываний **Ф** в множество истинностных значений $\{T$, *не-T*$\}$. Мы обращаем особое внимание на решение этого вопроса для высказываний вида $C \rightarrow E$.

Можно рассматривать $C \rightarrow E$ в мире a следующим образом: Поскольку для нас языковый знак "$\rightarrow$" выражает следование, то, аналогично $A \models B$, известно, что если высказывание C истинно в мире a, но высказывание E неистинно в этом мире (то есть $\lambda(a,C) = T$, $\lambda(a,E)$ = *не-T*), то неверно $C \rightarrow E$ в a. Если *не-TC/a*, то, строго говоря, у нас нет в самом мире a средств, позволяющих определить, истинно ли $C \rightarrow E$ (точнее "неверно ли $C \rightarrow E$") в a. Нам необходимо в этом случае рассматривать некоторые "вспомогательные миры". Рассуждаем так: в мире a C не истинно, но истинно ли E в мире a, если бы в нем C было истинно? Если нет, то можно уже заключить, что *не-T(C → E)/a*. Если же да, то на основании условий *b1)* и *b2)* и

[1] В [3] Е.К.Войшвилло предлагает оригинальное обоснование невозможных возможных миров, считая, что иначе логические законы не несут никакой информации.

поскольку в этом рассуждении мы, фактически, уже использовали (все) миры, отличающиеся от мира a только допущением, что в нем истинно C, и фактами, от этого зависящими, т. е. мы уже использовали все миры, которые могут так или иначе отвергать $T(C \to E)/a$, можно заключить, что $T(C \to E)/a$. Надо обращать внимание на то, что, определяя значения $C \to E$ в мире a, мы всегда опираемся на уже известные значения высказываний C и E в любом возможном мире. Требовать, чтобы вспомогательный мир b отличался от мира a не более, чем TC/b и зависящими от этого фактами, необходимо, так как допущение иных, кроме этих, отличий b от a делает бесполезным этот вспомогательный мир b для решения нашей проблемы. Разъясним это положение на примере. Рассмотрим высказывание "Если идет дождь, то я возьму с собой зонтик" в том случае, когда дождя нет. Для оценки истинностного значения этого высказывания мы и расмотрим высказывание "Если бы шел дождь, я бы взял с собой зонтик". Это высказывание отличается от предыдущего тем, что оно допускает оценку в случае, когда дождя нет. Рассмотрение этого вспомогательного высказывания в реальном мире (в котором дождя нет) равносильно рассмотрению исходного высказывания в возможном (воображаемом) мире, в котором идет дождь. Этот воображаемый, вспомогательный мир помогает нам установить истинностное значение нашего высказывания лишь в том случае, когда он отличается от нашего, реального мира только тем, что верно, что в нем дождь идет, и фактами, от этого зависящими, и не больше. Дело в том, что если бы он отличался от реального мира еще другими фактами, то из-за этого в нем может нарушаться и связь между "идет дождь" и "я возму с собой зонтик". Гарантия этой связи имеет место только тогда, когда законы, факты реального мира сохраняются и в этом вспомогательном мире. Конечно, существуют и другие возможные миры, отличающиеся от нашего реального мира другими факторами (фактами), даже возможные миры, не имеющие ничего общего с нашим реальным миром. Однако такие миры, поскольку они могут не сохранять те законы и факты, от которых зависит истинностное значение рассматриваемого нами высказывания, не предоставляют нам никаких средств для решения нашего вопроса.

Вспомогательные миры b, поэтому, определяются не только определенным миром a, но и определенным высказыванием $C \to E$, которое мы рассматриваем в данный момент.

Теперь уже можно принять следующее определение:

Определение 2:

$$T(A \to B)/a \quad \Leftrightarrow_{\mathrm{df}} \forall b(R^2{}_A ab \Rightarrow (TA/b \Rightarrow TB/b)),$$

где $R^2{}_A ab$ означает, что b является вспомогательным миром для решения проблемы $T(A \to B)/a$?

Замечание. Вспомогательный мир b для решения проблемы $T(A \to B)$ в мире a можем отождествлять с миром $A^+(a)$ (наименьшее искажение a по Н. Белнапу - см. [1], [2]), но с учетом того, что у нас дело идет о наименьшем искажении *возможного* *мира a*, тогда как у Н. Белнапа речь идет о наименьшем искажении *эпистемического состояния, в данном случае состоящем из одного возможного мира a*.

Особым случаем высказывания вида $C \to E$ является высказывание вида $A \to B$. Обратим внимание на то, что для решения задачи установить истинностное значение $A \to A$ в мире a не хватает уже вспомогательного мира типа b. Дело в том, что по определению:

$$T(A \to A)/a \Leftrightarrow \forall b(Rab \Rightarrow (TA/b \Rightarrow TA/b)),$$

формула $A \to B$ истинна во всяком мире, что нарушает условие $b2)$. Чтобы $b2)$ выполнялось в этом случае, необходимо ввести еще один вид вспомогательного мира c. Такой мир c, с одной стороны, должен выполнять функции вспомогательного мира b, с другой стороны, он обязан дать средства выхода из тавтологичности $TA/b \Rightarrow TA/b$. При этом мы не можем отказаться, конечно, от закона тождества в метаязыке. Итак, вместо определения 2 мы принимаем следующее

Определение 3:

$$T(A \to B)/a \Leftrightarrow \forall b \forall c(Rabc \Rightarrow (TA/b \Rightarrow TB/c)),$$

где $R_A abc$ означает, что b и c есть вспомогательные миры для решения проблемы $T(A \to B)/a?$, о которых речь шла выше. Вспомогательные миры типа b достаточно определены. Нам предстоит еще более детально определить свойства миров типа c. Мы будем заниматься этой проблемой во второй статье этой пары статей.

Обозначим через **N** множество всех троек R_A. Точнее: $\mathbf{N} = \{<a,b,c> \mid a,b,c \in S$ и $R_A abc\}$.

3. Модельные структуры

Определение 3 основывается на тернарном отношении между возможными мирами. Однако такое отношение определяется в зависимости от определенных высказываний A и B. Из-за этого на первый взгляд представляется, что такое определение бесполезно для построения семантики следования, так как невозможно для каждой формулы A языка L определить тернарное отношение R_A. Но к счастью, эти трудности можно обойти путем использования техники модельной структуры.

Идея состоит в том, что вместо семейства **SN** всех **N**, где **N** есть множество всех троек R_A, мы вправе использовать любое множество **M**, такое, что существует биективное отображение **SN** в **M**. Мы пользуемся техникой модельной структуры, поскольку многие ее понятия хорошо согласуются с нашим изложенным выше взглядом на отношение логического следования. Покажем, что можно определить модельную структуру таким образом, чтобы, пользуясь им, можно было определить множество **характерных модельных структур** формулы, которое обозначим через K, такое, что существует биективное отображение из **SN** в K.

Так, модельная структура есть четверка $<S,P,R, \lambda>$, где S есть непустое множество (возможных миров), $P \subseteq S$, $R \subseteq S\times S\times S$, λ - функция из $\Phi\times S$ в $\{T, не\text{-}T\}$. Формула F значима в модельной структуре δ, если и только если для всех $\alpha \in P$ имеет место $(F,\alpha)=T$. Формула общезначима, если она значима во всех модельных структурах.

Заметим, что модельные структуры обычно определяются независимо от конкретных формул. С другой стороны, рассматривая определение 3, видим, что для определения истинностных значений формулы $A \to B$ в мире a, нужно допустить $Rabc$ и TA/b и проверить, имеет место TB/c или нет. Эта процедура подсказывает нам способ нахождения характеризующей модельную структуру формулы $A \to B$.

Совокупность условий для модельной структуры дана таким образом, чтобы она представляла собой своего рода некоторую функцию от переменной, пробегающей по множеству всех пар формул языка L. Тогда при определении истинностных значений различных формул в определенном мире в определенной модельной структуре мы переходим от одной характерной модельной структуры к другой. Иллюстрируем это на примере:

Пусть дана модельная структура $\mathfrak{B} = <S,R,P, \lambda>$. Тройку $<\mathfrak{B},Rabc,TA/b>$ будем называть *$\mathfrak{B}$,a-характерной модельной структурой* формулы А. Так, например, пусть дана модельная структура $\mathfrak{B}$, нам нужно определить истинностное значение формулы $(A \to B) \to (C \to D)$ в мире a. Другими словами, надо решить проблему $T((A \to B) \to (C \to D))/a$?. Для этого сначала допустим $Rabc,(A \to B)/b$, то есть мы определяем тройку $<\mathfrak{B},Rabc,T(A \to B)/b>$, представляющую собой *$\mathfrak{B}$,a-характерную модельную структуру формулы* $(A \to B)$. В свою очередь надо решить проблему $T(C \to D)/c$? И мы определим *$\mathfrak{B}$,a-характерную модельную структуру формулы* C - тройку $<\mathfrak{B},Rcde,TC/d>$.

Для фиксированной модельной структуры $\mathfrak{B}$ семейство всех *$\mathfrak{B}$,a-характерных модельных структур* формулы A будем называть *$\mathfrak{B}$-характерной модельной структурой* формулы A. При этом для формулы A ее *$\mathfrak{B}$,a-характерная модельная структура* зависит от $\mathfrak{B}$ и a, поскольку $\mathfrak{B}$ и a здесь произвольные, только фиксированные. Смысл понятия *характерной модельной структуры* состоит в том, что формула может быть отвергнута только в ее характерной модельной структуре.

Видно, что если условия для модельной структуры определены исключительно на основании свойств тернарного отношения между возможными мирами, изложенными нами выше, в 2, то можно определить через множество модельных структур желаемое множество K.

Множество **P** введено ввиду необходимости определения значимости формул, в которые не входит знак $\to$. Для формулы вида $A \to B$ имеем тогда:

$$\models A \to B \Leftrightarrow a(a \in P \Rightarrow T(A \to B)/a) \quad (3)$$

Естественно, (3) и определение 1 должны быть эквивалентны друг другу. Отсюда получим:

p1. $\forall a(a \in P \,\&\, Rabb)$.

Чтобы закон тождества оставался в силе:

p2. $\exists a(a \in P \,\&\, Rabc) \Rightarrow b \geq c$

где $b \geq c \Leftrightarrow_{\mathrm{df}} \forall A(TA/b \Rightarrow TA/c)$

Из анализа в части 2 видно:

p3. $Raaa$

Любое множество возможных миров $G \subseteq S$, удовлетворяющее условию:

$\exists a(a \in P \,\&\, Rabc) \,\&\, b \in G \Rightarrow c \in G$,

назовем, вслед за Л.Л. Максимовой, наследственным множеством.

p4. $a_1 \geq a \,\&\, Rabc \Rightarrow Ra_1bb$

p5. $c_1 \geq c \,\&\, Rabc_1 \Rightarrow Rabc$

Легко видеть из приведенного анализа, что имеет место следующая главная теорема:

Теорема 1. *Существует биективное отображение из* SN *в* K.

4. Модельная структура с бинарным отношением

Из-за ограниченного объема данной статьи семантика следования с обсуждаемым выше тернарным отношением будет обсуждаться во второй работе этой пары работ по логическому следованию. Здесь мы ограничимся рассмотрением упрощенного варианта, а именно рассмотрением модельных структур с бинарным отношением, о котором идет речь в определении 2. То есть здесь не учитываются вспомогательные миры типа c. Заметим, что такое бинарное отношение R^2 может быть определено через тернарное отношение R соответствующей модельной структуры. Например следующим образом:

$R^2ab \Leftrightarrow Rabc \,\&\, b = c$.

Модельная структура в этом случае получается из модельной структуры, описанной выше, заменой тернарного отношения R бинарным отношением R^2.

Условия для модельной структуры определим следующим образом. Фиксируем произвольную модельную структуру. Возьмем произвольную формулу A, и фиксируем ее. Отношение R_A, как мы показали выше, зависит от данной модельной структуры и формулы A. Однако модельная структура и формула A здесь - произвольные, а потому все свойства R_A верны в любой модельной структуре для R_B, где B - любая формула языка L.

Нетрудно видеть, что отношение R_A, где $R_Aab \Leftrightarrow a \geq b$ может быть взято в качестве отношения между мирами, которое было проанализировано в части 2. Дело в том, что при таких отношениях формула вида $A \to B$ имеет одно и то же истинностное значение в мире a. В результате имеем:

Условия для модельной структуры:

4.1. $a \geq b \Leftrightarrow R^2ab$

4.2. $\exists a(a \in P \;\&\; R^2ab)$

4.3. $T(A \;\&\; B)/a \Leftrightarrow T(A)/a$ *и* $T(B)/a$

4.4. $T(A \vee B)/a \Leftrightarrow T(A)/a$ *или* $T(B)/a$

4.5. $T(A \to A)/a \Leftrightarrow \forall b(R^2ab \Rightarrow (TA/b \Rightarrow TB/b))$,

4.6. $\exists a(a \in P \;\&\; R^2ab \;\&\; R^2bc) \Rightarrow b \geq c$.

Понятие общезначимости формулы определяется так же, как в 3.

Позитивная Логика SR.

Схемы аксиом

A1. $((A \to (A \to B)) \to (A \to B)$

A2. $((A \to B) \to ((B \to C) \to (A \to C)))$

A3. $(A \to (B \to B))$

A4. $(A \to (B \to C)) \to ((A \to B) \to (A \to C))$

A5. $(A \to ((B \to C) \to D)) \to ((B \to C) \to (A \to D))$

A6. $(A \;\&\; B) \to A$

A7. $(A \;\&\; B) \to B$

A8. $((A \to B) \;\&\; (A \to C)) \to (A \to (B \;\&\; C))$

A9. $A \to (A \vee B)$

A10. $B \to (A \vee B)$

A11. $((A \to B) \;\&\; (A \to C)) \to ((A \vee B) \to C)$

A12. $(A \;\&\; (B \vee C)) \to ((A \;\&\; B) \vee C)$

Правило вывода

R1 $$\frac{A,\ A \to B}{B}$$

Позитивная логика SR содержит в себе позитивный фрагмент системы E, но не позитивный фрагмент системы R. Эта система интересна тем, что в ней из числа законов только закон тождества следует из всего, что угодно.

Теорема 2. *Формула A выводима в SR тогда и только тогда, когда она общезначима.*

Доказательство. Прежде всего докажем некоторые леммы. Пусть задана некоторая модельная структура. Определим в ней тернарное отношение R следующим образом:

4.7. $Rabc \Leftrightarrow_{df} R^2ab \;\&\; R^2bc$

Тогда имеем:

Лемма 4.1. 4.5. эквивалентно соотношению

4.8. $T(A \to B)/a \Leftrightarrow \forall b \forall c(Rabc \Rightarrow (TA/b \Rightarrow TB/c))$.

Доказательство: Требуется лишь показать эквивалентность правой стороны соотношений 4.5 и 4.8. Пусть $\forall b(R^2ab \Rightarrow (TA/b \Rightarrow TB/b))$, пусть также $Rade$ и TA/d тогда имеем R^2ad и R^2de. Отсюда, по 4.2.1, R^2ae. Из 4.2.1, 4.6 и R^2de получим $d \geq e$ и, следовательно, TA/e и отсюда и R^2ae, TB/e, что и требовалось показать. Обратно, пусть $\forall b \forall c(Rabc \Rightarrow (TA/b \Rightarrow TB/c))$. Допустим теперь R^2de и TA/e; покажем TB/e. Из R^2de, R^2ee по 4.7. $Rdee$. Отсюда и $\forall b \forall c(Rabc \Rightarrow (TA/b \Rightarrow TB/c))$ следует $(TA/e \Rightarrow TB/e)$, что и требовалось.

Лемма 4.2.

4.2.1. $R^2ab \Rightarrow (R^2bc \Rightarrow R^2ac)$

4.2.2. $R^2bc \Rightarrow (R^2ab \Rightarrow R^2ac)$

Доказательство. Прямо из 4.1.

Лемма 4.3. *Пусть Rabc определяется как в 4.7, тогда:*

4.3.1. $\exists a(a \in P \,\&\, Rabb)$

4.3.2. $a_1 \geq a \,\&\, Rabc \Rightarrow Ra_1bc$

4.3.3. $c_1 \geq c \,\&\, Rabc_1 \Rightarrow Rabc$

Доказательство. Прямо из леммы 4.2., 4.6. и 4.7.

Вернемся к доказательству теоремы 2. Отметим прежде всего, что если опущены некоторые положения в определениях RP-пространства, стримплы, плотного подмножества частично упорядоченного группоида, специального RP-пространства, импликативного группоида в [5], а именно, исключены соотношения: 1.3, 2.2, 2.4, 10.5, 6.1.2, и вместо 5.2 взять

$$(\forall x,y \in G)(\forall w \in S)[xy \geq w \Rightarrow (\exists u \in S)(x \geq u \text{ и } uy \geq w)$$

и исключить Г3-Г5, С3-С5, П3-П5, то теоремы 4, 5, 6 из [5] остаются справедливы (в доказательствах опущены соответствующие части).

Теперь если заменить отношение R^2 в модельной структуре отношением R из 4.7, будем иметь модельную структуру, представляющую себой модифицированный вариант (путем опущения некоторых положений в определениях, как выше) модельной структуры, описанной Максимовой Л.Л. в [5]. Более того, из леммы 4.1. следует, что формула А общезначима в ней тогда и только тогда, когда она общезначима в исходной модельной структуре. Доказательство теоремы получается прямо из этого и леммы 4.3, 4.1.

5. Заключение

Хотя в формальных семантиках релевантных и иных интенсиональных логических систем речь идет относительно определенной модельной структуры, на самом деле при определении истинностных значений формул, содержащих в себе знак импликации, мы переходим от одной характерной структуры к другой. Иными словами, в зависимости от решаемой задачи модельная структура конкретизируется, превращаясь в характерную модельную структуру определенной формулы. Этот процесс, на наш взгляд, адекватно моделирует естественный процесс рассуждения у человека. Анализ таких структур позволяет, с одной стороны, глубже понять отношение логического следования и, с другой стороны, иначе взглянуть на формальные семантики названных систем.

ЛИТЕРАТУРА

1. *Белнап Н.* Об одной полезной четырехзначной логике// Белнап Н., Стил Т. Логика вопросов и ответов. М.,1980.
2. *Белнап Н.* Как нужно рассуждать компьютеру // Там же.
3. *Войшвилло Е.К.* Философско-методологические аспекты релевантной логики. М.,1988.
4. *Максимова Л.Л.* Структуры с импликацией// Алгебра и Логика, Т. 11, №4. 1973.
5. *Роутлей Р., Мейер Р.* Семантика следования// Семантика модальных и интенсиональных логик, М. 1981.
6. *Фам Динь Нгьем* Релевантная семантика логического программирования// Логические методы в компьютерных науках. М. 1991.

П.И.Быстров

СЕКВЕНЦИАЛЬНОЕ ИСЧИСЛЕНИЕ ФОРМУЛ С ВРЕМЕННЫМИ ПАРАМЕТРАМИ

В стандартной семантике истинностные оценки формул классической логики абсолютны в том смысле, что они не зависят от времени, ситуации и каких-либо других обстоятельств. В частности импликация считается ложной, если и только если ее антецедент истинен, а консеквент ложен независимо от того, как и при каких условиях зафиксированы истинностные значения антецедента и консеквента. Семантическое утверждение: "Конъюнкция истинна, если и только если все ее члены одновременно истинны" - это всего лишь образное или неточное выражение условия истинности конъюнкции. Это условие не предполагает никакой "одновременности". Для истинности конъюнкции необходимо и достаточно, чтобы все ее члены принимали одинаковое значение "истинно", и в данном случае безразлично, происходит это одновременно или нет. Аналогично обстоит дело с дизъюнкцией и отрицанием. Семантический "возможный мир классической логики" - лучший из возможных миров, ибо он лишен времени, един и неделим.

Ситуация изменяется, если истинностное значение высказывания соотносится, например, с какой-то фиксированной системой, моментом времени, временным интервалом и т.д. - в истинностные оценки сложных формул вводится тот или иной дополнительный параметр. По поводу истинности сложных высказываний можно рассуждать, например, следующим образом. A&B истинно, если и только если A и B истинны *одновременно*, т.е. если A истинно в момент времени t1, а B истинно в момент времени t2, то t1 и t2 являются одним и тем же моментом времени. $A \supset B$ ложно, если и только если во временном интервале t1*t2, ограниченном различными моментами времени t1 и t2, A истинно в момент t1, а B ложно в момент t2. Аналогичным образом можно интерпретировать такое метаутверждение о логической выводимости, как секвенция: $\Gamma \rightarrow \Theta$ имеет место (верно), если и только если имеется такая ситуация, в которой при истинности всех членов списка Γ по крайней мере один из членов списка Θ обязательно является истинным. Тогда конкретное применение правила заключения секвенциального исчисления, например

$$\frac{A, \Gamma \rightarrow \Theta, B}{\Gamma \rightarrow \Theta, A \supset B}$$

можно рассматривать как формальный образ простой системы, состоящей из двух ситуаций s1 и s2, логически связанных между собой таким образом, что если $A, \Gamma \rightarrow \Theta, B$ верно в ситуации s1, то

$\Gamma \rightarrow \Theta, A \supset B$ обязательно верно в ситуации s2; а дерево корректного секвенциального вывода - как формальный образ сложной системы ситуаций, элементы которой упорядочены согласно определенным правилам.

В данной статье строится секвенциальное исчисление, формализующее подобные "неклассические" содержательные рассуждения по поводу логических союзов. Подробный философский анализ таких понятий, как "момент времени", "временной интервал", "ситуация", "упорядоченная система ситуаций" и т.п., при этом не проводится.

1. Временные параметры, t-формулы и "ситуации"

Пусть p,q,r,... - пропозициональные переменные, пробегающие несчетное множество атомарных, т.е. не содержащих логических знаков высказываний; t, t_1, ..., t_n - переменные, пробегающие несчетное множество моментов времени, а A, B, C, ... - правильно построенные формулы в обычном смысле. Связь между высказываниями (формулами) и моментами времени следующая. Сопоставим каждому элементарному высказыванию или его отрицанию один и только один произвольный момент времени, а каждой формуле, содержащей логические связки &, $\vee$, $\supset$, или отрицанию такой формулы - момент времени или временной интервал. Временные интервалы и моменты времени назовем *временными параметрами* формул и будем говорить что данная формула представляет, "описывает" один-единственный временной параметр. Символически такое описание будет представлено в виде t-формул. Принимаются следующие точные определения временного интервала и t-формулы.

Определение временного интервала:

1) Упорядоченная пара вида $<t^f_i;t^e_j>$ есть временной интервал;

2) Если t - момент времени, а I - временной интервал, то упорядоченные пары вида $<I^f_i;t^e>$ и $<t^f;I^e_j>$ суть временные интервалы;

3) Если I_i и I_j суть временные интервалы, то упорядоченные пары вида $<I^f_i;I^e_j>$ и $<I^f_j;I^e_i>$ суть временные интервалы;

4) Ничто иное, кроме указанного в пунктах 1-3, не является временным интервалом.

Относительно моментов времени и временных интервалов принимаются следующие соглашения. Временной интервал вида $<t^f;t^e>$ называется "пустым интервалом" и отождествляется с моментом времени t. Временной интервал вида $<I^f;I^e>$ отождествляется с временным интервалом I. В записях интервалов внешние угловые скобки будут опускаться в тех случаях, когда это не вызывает неоднозначности прочтения данной записи. Два момента времени будем называть *логически связанными*, если они являются членами пары, представляющей временной интервал; соответственно, временной интервал I (момент времени t) логически связан с моментом времени t (временным интервалом

I), если они являются членами пары вида $<t^f;I^e>$ или $<I^f;t^e>$, а временные интервалы I_i и I_j логически связаны между собой, если они входят в пару вида $<I^f{}_i;I^e{}_j>$ или $<I^f{}_j;I^e{}_i>$. Например: t_i логически связан с t_j, если имеется временной интервал $<t^f{}_i;t^e{}_j>$ или $<t^f{}_j;t^e{}_i>$.

Используя переменные u, v, w, ... (возможно, с нижними числовыми индексами) для временных параметров, дадим теперь определение t-формулы.

Определение t-формулы:

1) Если p - пропозициональная переменная, то p/t и $\neg p/t$ суть t-формулы;

2) Если A/u есть t-формула, то $\neg A/u$ есть t-формула;

3) Если A/u и B/u суть t-формулы, то $A\&B/u$ и $A\vee B/u$ суть t-формулы;

4) Если A/u и B/v суть t-формулы, то $A\supset B/u;v$ есть t-формулы;

5) Ничто иное, кроме перечисленного в пунктах 1-4, не является t-формулой.

Например, $A\supset(\neg B/u\supset A/v)$ не является t-формулой несмотря на то, что $\neg B/u$ и A/v являются правильно построенными t-формулами.

2. Секвенциальное исчисление t-формул TSC

Пусть Γ, Θ, Δ, ... (возможно, с нижними индексами) обозначают списки, (возможно, пустые) t-формул. Выражение вида $s[\Gamma \rightarrow \Theta]$ называется *Т-секвенцией*, описывающей *темпоральную ситуацию* s. Дерево Т-секвенций, построенное согласно перечисленным ниже правилам, назовем *TS-деревом.*

Логические правила построения TS-дерева:

$$\frac{s_n[A/u, \Gamma \rightarrow \Theta, B/v]}{s_{n+1}[\Gamma \rightarrow \Theta, A\supset B/u;v]} \quad (R1)$$

$$\frac{s_m[\Gamma \rightarrow \Theta, A/u] \quad s_n[B/v, \Delta \rightarrow Z]}{s_{m+n+1}[A\supset B/u;v, \Gamma,\Delta \rightarrow \Theta, Z]} \quad (R2)$$

$$\frac{s_n[A/u, B/u, \Gamma \rightarrow \Theta]}{s_{n+1}[A\&B/u, \Gamma \rightarrow \Theta]} \quad (R3)$$

$$\frac{s_m[\Gamma \rightarrow \Theta, A/u] \quad s_n[\Gamma \rightarrow \Theta, B/u]}{s_{m+n+1}[\Gamma \rightarrow \Theta, A\&B/u]} \quad (R4)$$

$$\frac{s_n[\Gamma \to \Theta, A/u, B/u]}{s_{n+1}[\Gamma \to \Theta, A \vee B/u]} \quad (R5)$$

$$\frac{s_m[A/u, \Gamma \to \Theta] \quad s_n[B/u, \Gamma \to \Theta]}{s_{n+m+1}[A \vee B/u, \Gamma \to \Theta]} \quad (R6)$$

$$\frac{s_n[A/u, \Gamma \to \Theta]}{s_{n+1}[\Gamma \to \Theta, \neg A/u]} \quad (R7)$$

$$\frac{s_n[\Gamma \to \Theta, A/u]}{s_{n+1}[\neg A/u, \Gamma \to \Theta]} \quad (R8)$$

Структурные правила построения TS-дерева:

$$\frac{s_n[\Gamma_1, A/u, B/v, \Gamma_2 \to \Theta]}{s_n[\Gamma_1, B/v, A/u, \Gamma_2 \to \Theta]} \quad (R9)$$

$$\frac{s_n[\Gamma \to \Theta_1, A/u, B/v\, \Theta_2]}{s_n[\Gamma \to \Theta_1, B/v, A/u, \Theta_2]} \quad (R10)$$

$$\frac{s_n[\Gamma \to \Theta, A/u, A/v]}{s_{n+1}[\Gamma \to \Theta, A/u]} \quad (R11)$$

$$\frac{s_n[\Gamma \to \Theta, A/u, A/v]}{s_{n+1}[\Gamma \to \Theta, A/v]} \quad (R12)$$

$$\frac{s_n[A/u, A/v, \Gamma \to \Theta]}{s_{n+1}[A/u, \Gamma \to \Theta]} \quad (R13)$$

$$\frac{s_n[A/u, A/v, \Gamma \to \Theta]}{s_{n+1}[A/v, \Gamma \to \Theta]} \quad (R14)$$

$$\frac{s_n[\Gamma \to \Theta]}{s_{n+1}[\Gamma \to \Theta, A/u]} \quad (R15),$$

где A/u отличается от всех членов списка Θ;

$$\frac{s_n[\Gamma \to \Theta]}{s_{n+1}[A/u, \Gamma \to \Theta]} \quad (R16),$$

где A/u отличается от всех членов списка Γ;

$$\frac{s_m[\Gamma \to \Theta, A/u] \quad s_n[A/v, \Delta \to Z]}{s_{m+n+1}[\Gamma, \Delta \to \Theta, Z]} \quad (cut)$$

Явно указанные t-формулы в посылках всех перечисленных схем логических правил будем, как обычно, называть боковыми формулами, а t-формулы, явно указанные в заключениях этих правил, - главными формулами. Временные параметры логически связаны, если они приписаны главной и боковой формуле (боковым формулам) одного и того же применения схемы правила построения TS-дерева.

Если $s[\Gamma \to \Theta]$ есть T-секвенция, то любой элемент Γ называется *антецедентным членом*, а любой элемент Θ - *сукцедентным членом* этой T-секвенции. При этом считается, что в T-секвенции не может быть двух одинаковых в смысле графического совпадения антецедентных (сукцедентных) членов. Например, при наличии в Γ (или Θ) более одного члена вида A/w выражение $\Gamma \to \Theta$ не является правильно построенной T-секвенцией. Очевидно, что в результате удаления всех временных параметров из всех членов некоторой T-секвенции получается обычная генценовская секвенция. В дальнейшем для краткости вместо "T-секвенция" будем писать просто "секвенция".

Контрарной парой секвенции S называется любая пара, состоящая из антецедентного и сукцедентного членов S, графически совпадающих между собой.

Стандартные понятия "основная секвенция", "дерево секвенций", "применение правила заключения", "главная формула (боковая формула) данного применения правила заключения" предполагаются известными и используются без существенных изменений. Например, следующая схема является схемой правила заключения

$$\frac{s_m[\Gamma \to \Theta, A/u] \quad s_n[\Gamma \to \Theta, B/u]}{s_{m+n+1}[\Gamma \to \Theta, A\&B/u]}$$

Пусть данная схема является частью некоторого дерева секвенций S, построенного с помощью различных правил заключения. В этом случае любой элемент S, представляющий собой вхождение в S некоторой секвенции S, назовем *D-секвенцией* (или *D-членом*), а любой член данной D-секвенции S назовем *DT-формулой* (или *DT-членом*). Ясно, что любой DT-член будет либо антецедентным, либо сукцедентным. Любой входящий в Γ (Θ) антецедентный (сукцедентный) DT-член C/v D-секвенции, являющейся заключением данного правила, называется *параметрическим потомком* соответствующих входящих в Γ (Θ) антецедентных (сукцедентных) DT-членов C/v D-секвенций, являющихся левой и правой посылками. Соответственно, любой входящий в Γ (Θ) антецедентный (сукцедентный) DT-член B/u D-секвенции, являющейся левой (правой) посылокой, называется *параметрическим предком* соответствующего входящего в Γ (Θ) антецедентного (сукцедентного) DS-члена B/u D-секвенции, являющейся заключением данного правила. Боковые DT-формулы A/u и B/w называются *логическими предками* главной DT-формулы A&B/u;w, а сама эта DT-формула называется *логическим потомком* DT-формул A/u и B/w. В любом дереве D-секвенций отношение "быть параметрическим (логическим) предком (потомком)" иррефлексивно и транзитивно.

При построении деревьев D-секвенций используются следующие средства.

Основная секвенция: s_0[A/w → A/w].

Правила (R1)-(R16) и (cut).

Для краткости изложения везде в дальнейшем будем использовать A_i, B_j, A_k, B_k,...(где i,j,k - целые положительные числа) для обозначения DT-формул, а S_i, S_j,... - для обозначения D-секвенций. Как обычно, деревом D-секвенций (кратко: *D-деревом*) будем называть такую конструкцию, построенную из основных секвенций (возможно, одной основной секвенции) с помощью правил заключения (R1)-(R16), которая заканчивается единственной D-секвенцией, называемой конечной секвенцией данного D-дерева.

Систему, заданную основной секвенцией и правилами (R1)-(R16) и (cut), обозначим TSC. Очевидно, что, удаляя из формулировки TSC все индексы, пару правил сокращения (либо (R11) и (R13), либо (R14) и (R12)), которые становятся излишними, а также ограничения на применения правил (R15) и (R16), мы получим в точности генценовский секвенциальный вариант классической пропозициональной логики. Применяя стандартный генценовский метод, нетрудно показать, что для TSC имеет место теорема об устранении сечения и это исчисление является разрешимым.

3. Исчисление TSR

Исчисление TSR можно получить из TSC с помощью ограничений на применения некоторых правил заключения. Для точной формулировки таких ограничений введем следующее важное определение.

Определение. Пусть имеется D-дерево с конечной секвенцией S. Путь в данном D-дереве от члена A_j секвенции S к члену C_j секвенции S есть наименьшая последовательность DT-формул B_1 ,..., B_k такая, что B_1 графически совпадает с A_j, B_k графически совпадает с C_j, и для любого B_i ($1 \leq i \leq k$) выполняется один из следующих пунктов:

(1) B_i есть параметрический предок B_{i+1}, либо B_i есть параметрический потомок B_{i+1};

(2) B_i и B_{i+1} являются членами одной и той же контрарной пары;

(3) B_i является главной, а B_{i+1} - боковой формулой одного и того же применения правила заключения, или же B_i является боковой, а B_{i+1} - главной формулой одного и того же применения правила заключения;

(4) B_i является левой (правой), а B_{i+1} - правой (левой) формулой одного и того же применения правила сечения.

Если для некоторого пути выполняется пункт (2) данного определения, то будем говорить, что этот *путь содержит контрарную пару* или *проходит через контрарную пару*.

Любой член B_i ($1 \leq i \leq k$) некоторого удовлетворяющего данному определению пути называется *отрицательной составляющей* этого пути, если B_i является антецедентным DT-членом, и *положительной составляющей* - если B_i является сукцедентным DT-членом.

В формулировке условий применения правил заключения в целях сокращения вместо фразы "в D-дереве, конечной секвенцией которого является посылка данного правила," будем писать просто: "в выводе посылки".

Условия применения правил заключения:

(R1) - применение правила корректно, если и только если в выводе посылки:

(1) есть путь от A/u к B/u;

(2) есть путь от каждого графически совпадающего с A/u антецедентного DT-члена A_i к B/u;

(3) есть путь от каждого графически совпадающего с B/u сукцедентного DT-члена B_j к любому графически совпадающему с A/u антецедентному DT-члену A_i;

(4) каждый из путей, упомянутых в предшествующих пунктах (1)-(3), содержит по крайней мере одну контрарную пару;

(5) в каждом из путей, упомянутых в пункте (2), ни одна отрицательная составляющая C_{i+1} не является параметрическим потомком составляющей C_i, а в каждом из путей, упомянутых в пункте (3), ни одна положительная составляющая C_{j+1} не является параметрическим потомком составляющей C_j.

(R2) - применение правила корректно, если и только если в выводе левой посылки имеются:

(1.1) путь от каждого антецедентного DT-члена, графически совпадающего с одним из антецедентных членов этой посылки, к A/u;

(1.2) путь от A/u к каждому антецедентному DT-члену, графически совпадающему с одним из антецедентных членов данной посылки;

в выводе правой посылки имеются:

(2.1) путь от каждого графически совпадающего с B/v антецедентного DT-члена B_i по крайней мере к одному сукцедентному члену этой посылки;

(2.2) путь от любого DT-члена, графически совпадающего с одним из сукцедентных членов этой посылки, к B/v;

(3.1) ни одна отрицательная составляющая C_{i+1} путей, упомянутых в пунктах (1.1) и (1.2), не является параметрическим потомком составляющей C_i, и любой из этих путей содержит контрарную пару;

(3.2) ни одна положительная составляющая C_{j+1} любого из путей, упомянутых в пунктах (2.1) и (2.2), не является параметрическим потомком сотавляющей C_j, и каждый из этих путей содержит контрарную пару.

(R7) - применение правила корректно, если и только если для посылки выполняются пункты (1.1), (1.2), в формулировке которых "A/u" заменено на "$\neg A/u$", и пункт (3.1) сформулированного ранее условия применения правила (R2).

(R8)- применение правила корректно, если и только если для посылки выполняются пункты (2.1), (2.2), в формулировке которых "B/v" заменено на "$\neg A/u$", а "B_i" - на "A_i", и пункт (3.2) сформулированного ранее условия применения правила (R2).

(Cut) - применение правила корректно, если и только если:

для левой посылки выполняются пункты (1.1), (1.2) условия применения правила (R2), в формулировках которых "A/v" заменено на "C/u";

для правой посылки выполняются пункты (2.1), (2.2) условия применения правила (R2), в формулировках которых "B/v" заменено на "C/v", а "B_i" - на "C_k";

для левой и правой посылок выполняются соответственно пункты (3.1) и (3.2) условия применения правила (R2).

Пример. (Здесь и в дальнейшем в целях сокращения записей TSR-выводов опускаются временные параметры, которые всегда могут быть корректным образом приписаны всем DT-формулам, начиная с основных секвенций данного TSR-вывода.)

$$
\dfrac{\dfrac{\dfrac{\dfrac{\dfrac{\dfrac{\dfrac{\dfrac{\dfrac{\dfrac{s_0[B\to B]}{s_1[B\to B,C]}}{s_1[B\to C,B]} \qquad \dfrac{s_0[C\to C]}{s_1[C\to C,B]}}{s_3[B\vee C\to C,B]}}{s_4[A\&(B\vee C)\to C,B]}}{s_5[A\&(B\vee C)\to C,C\vee B]}}{s_5[A\&(B\vee C)\to C\vee B,C]}}{s_6\,[A\&(B\vee C)\to C\vee B,C\vee B]}}{s_7[A\&(B\vee C)\to C\vee B]} \qquad \dfrac{s_0[A\to A]}{s_1[\neg A,A\to]}}{s_9[(A\&(B\vee C))\supset\neg A,A\to C\vee B]}}{s_9[A,(A\&(B\vee C))\supset\neg A\to C\vee B]}}{s_{10}[(A\&(B\vee C))\supset\neg A\to A\supset(C\vee B)]}
$$

Данное дерево секвенций является корректным TSR-выводом.

Пример:

$$
(R1)\,\dfrac{*\,(R1)\,\dfrac{\dfrac{(R8)\,\dfrac{\dfrac{\dfrac{\dfrac{s_0[A\to A]}{s_1[A\to A,B]}}{s_1[A\to B,A]} \qquad \dfrac{s_0[B\to B]}{s_1[B\to B,A]}}{s_3[A\vee B\to B,A]}}{s_4[\neg A,A\vee B\to B]}}{s_4[A\vee B,\neg A\to B]}}{s_5[\neg A\to(A\vee B)\supset B]}}{s_6[\to\neg A\supset((A\vee B)\supset B)]}
$$

Здесь последнее применение правила (R1) корректно, но данное дерево секвенций не является TSR-выводом секвенции $s_6[\to \neg A\supset((A\vee B)\supset B)]$, а его поддерево не является TSR-выводом секвенции $s_5[\neg A \to (A \vee B) \supset B]$. Отмеченное * применение правила (R1) не удовлетворяет необходимому условию, а именно - в дереве секвенций, конечной секвенцией которого является посылка данного применения правила, нет соответствующего условию пути от каждого вхождения формулы B в это дерево к формуле $A \vee B$. Более того, поддерево секвенций, заканчивающееся применением правила (R8), не является TSR-выводом секвенции $s_4[\neg A, A \vee B \to B]$.

Примечание. При определении путей в D-деревьях обе боковые формулы некоторого применения правила сокращения считаются параметрическими предками главной формулы данного применения правила. В формулировках условий применения правил (R1), (R2), (R7), (R8) и (Cut) любой из составляющих их пунктов выполняется тривиально, если последовательность T-формул (Γ, Θ,...), о членах которой в данном пункте идет речь, является пустой.

TSR-вывод секвенции S есть построенное с помощью правил (R1)-(R16) и (cut) D-дерево, вершинами которого являются основные секвенции, конечной секвенцией является S, и каждое применение правила удовлетворяет соответствующему условию (если таковое имеется). Секвенция S называется выводимой в TSR, если и только если предъявлен TSR-вывод, конечной секвенцией которого является S.

Утверждение (об устранимости сечения). *Если секвенция S выводима в TSR, то можно построить TSR-вывод этой секвенции, не содержащий применений сечения.*

Особенность доказательства состоит в том, что устраняетсяяется непосредственно правило сечения без предварительной замены его каким-либо другим правилом.

Определение ранга TSR-вывода. Рангом TSR-вывода по члену его конечной секвенции A называется общее число параметрических предков формулы A, содержащихся в данном выводе.

Определение понятия регулярности применения сокращений. Применение в TSR-выводе правила сокращения называется регулярным, если одна из боковых формул данного применения одновременно является главной формулой применения одного из логических правил вывода.

В доказательстве устранимости сечения используются следующие две леммы.

Лемма 1. *Любой не содержащий сечений TSR-вывод секвенции S, который заканчивается единственным нерегулярным применением сокращения, можно преобразовать в свободный от сечений TSR-вывод секвенции S, заканчивающийся единственным регулярным применением сокращения, причем ранг нового вывода по любому члену его конечной секвенции не будет превышать ранг исходного вывода по этому же члену.*

Лемма доказывается так же, как и соответствующая лемма о регулярности сокращений для секвенциального исчисления GR (см. [2]). При этом необходимо следить лишь за тем, чтобы преобразования исходного вывода не нарушали его корректности, т. е. в результирующем выводе не нарушались бы условия прменения соответствующих правил. Нетрудно убедиться, что преобразования оставляют все необходимые условия в силе.

Лемма 2. *Пусть в некотором не содержащем применений сечения TSR-выводе существует такой его корректный подвывод D с конечной секвенцией $s[\Gamma \rightarrow C/u, B/v]$, что:*

(1) конечная секвенция подвывода является посылкой такого применения логического правила, заключением которого является секвенция $s_k[\Gamma \rightarrow C/u, C/v]$;

(2) имеются пути от каждого вхождения любого члена A_k списка Γ в D к формуле C/v, причем каждый из этих путей проходит по крайней мере через одну контрарную пару и в каждом из них отрицательная составляющая A_{k+1} не является параметрическим потомком составляющей A_k.

Тогда в выводе D имеется такой его подвывод D_1 секвенции $s_n[\Gamma \rightarrow A/w]$ $(n<k)$, что D_1 сохраняет свойство (2) вывода D, и секвенцию $s_m[\Gamma \rightarrow C/v]$ можно получить из секвенции $s_n[\Gamma \rightarrow A/w]$ $(n<k)$ последовательным применением сукцедентных логических правил, (если A/w и C/u уже не являются одной и той же формулой).

Лемма доказывается возвратной индукцией по длине *ln* вывода D, где *ln* есть общее число применений правил вывода в D.

Действительно, при выполнении условий леммы, можно показать что в D всегда найдется такая секвенция *S*, которая либо уже графически совпадает с секвенцией $s_m[\Gamma \rightarrow C/v]$, либо последняя может быть получена из *S* последовательным применением сукцедентных логических правил. Тем самым требуемый подвывод будет выделен. Пункт (2) условия леммы означает, что формула C/v, не могла быть введена с помощью правила утончения. Следовательно, C/v либо является членом некоторого вхождения основной секвенции в D, либо происходит от члена некоторого вхождения основной секвенции в D. В первом случае A/w и C/v являются одной и той же формулой, а требуемым подвыводом будет подвывод с конечной секвенцией $s_m[\Gamma \rightarrow C/v]$. Во втором случае, на путях к формуле C/v, о которых говорится в пункте (2) условия леммы, фиксируется общая их составляющая A/w (являющаяся подформулой формулы C/v), затем та секвенция, сукцедентным членом которой является A/w, выделяется в качестве конечной секвенции некоторого вывода. Очевидно, что этот вывод и будет требуемым подвыводом D_1 вывода D, заканчивающимся секвенцией $s_n[\Gamma \rightarrow A/w]$ $(n<k)$.

Основной индукцией в доказательстве Утверждения об устранимости сечения является индукция по числу s_k применений правил вывода в исходном TSR-выводе. В том случае, когда рассматривается вывод, в котором последним применением правила заключения является единственное применение (cut), используется вспомогательная двойная индукция по стандартно определяемой степени сечения и рангу этого применения сечения (где рангом применения сечения считается сумма рангов выводов (см. Определение ранга TSR-вывода) левой и правой посылок по формуле данного применения сечения).

Ряд случаев доказательства не требует отдельных пояснений. Поэтому здесь приводятся лишь те случаи, которые связаны с применениями правил для импликации или требуют применения дополнительных лемм.

Случай 1. Пусть ранг сечения равен 2 и конец исходного вывода имеет вид:

$$\text{(cut)}\dfrac{\text{(R1)}\dfrac{s_n[A,\Gamma \to B]}{s_{n+1}[\Gamma \to A\supset B]} \quad \text{(R2)}\dfrac{s_m[\Delta \to A]\ s_k[B,\Delta_1 \to \Theta]}{s_{m+k+1}[A\supset B,\Delta,\Delta_1 \to \Theta]}}{s_{n+m+k+3}[\Gamma, \Delta, \Delta_1 \to \Theta]}$$

Тогда конец результирующего вывода будет следующим

$$\text{(cut)}\dfrac{\text{(cut)}\dfrac{s_m[\Delta \to A]\quad s_n[A,\Gamma \to B]}{s_{n+m+1}[\Gamma, \Delta \to B]} \qquad s_k[B, \Delta_1 \to \Theta]}{s_{n+m+k+2}[\Gamma, \Delta, \Delta_1 \to \Theta]}$$

Оба применения сечения имеют степень, меньшую степени сечения исходного вывода и устранимы по индуктивному предположению.

Случай 2. Степень сечения произвольна, при этом ранг сечения больше 2.

Случай 2.1. Левый ранг сечения равен единице, а правый ранг превышает единицу.

Пусть конец исходного вывода имеет вид:

$$\text{(cut)}\dfrac{s_n[\Gamma \to C] \qquad \text{(R)}\dfrac{s_m[C, \Delta_1 \to \Theta_1]}{s_{m+1}[C,\Delta \to \Theta]}}{s_{n+m+1}[\Gamma, \Delta \to \Theta]}$$

где (R) - применение однопосылочного правила вывода.

Пусть (R) есть применение правила (R1). Тогда конец исходного вывода будет следующим

$$\text{(cut)}\dfrac{s_n[\Gamma \to C] \qquad \text{(R1)}\dfrac{s_m[A, C, \Delta \to B]}{s_{m+1}[C, \Delta \to A\supset B]}}{s_{n+m+2}[\Gamma, \Delta \to A\supset B]}$$

Конец результирующего вывода:

$$\dfrac{(\mathrm{cut})\dfrac{s_n[\Gamma \to C] \quad s_m[C, A, \Delta \to B]}{s_{n+m+1}[A, \Gamma, \Delta \to B]}}{s_{n+m+2}[\Gamma, \Delta \to A \supset B]}\,(\mathrm{R1})$$

Ранг этого сечения на единицу меньше ранга сечения исходного вывода, следовательно, оно устранимо в силу индуктивного предположения. Применение сечения в результирующем выводе корректно.

Пусть правая посылка сечения является заключением правила (R1), т. е. конец исходного вывода имеет вид:

$$(\mathrm{cut})\dfrac{s_n[\Delta_1 \to C] \quad (\mathrm{R1})\dfrac{s_m[C, \Gamma \to A] \quad s_k[B, C, \Delta \to \Theta]}{s_{m+k+1}[C, A \supset B, \Gamma, \Delta \to \Theta]}}{s_{n+m+k+2}[\Delta_1, A \supset B, \Gamma, \Delta \to \Theta]}$$

Конец результирующего вывода будет следующим:

$$\dfrac{\dfrac{(\mathrm{R1})\dfrac{\dfrac{s_n[\Delta_1 \to C] \quad s_m[C, \Gamma \to A]}{s_{n+m+1}[\Delta_1, \Gamma \to A]} \quad \dfrac{s_n[\Delta_1 \to C] \quad s_k[C, B, \Delta \to \Theta]}{s_{n+k+1}[C, B, \Delta_1, \Delta \to \Theta]}}{s_{2n+m+k+3}[A \supset B, \Delta_1, \Delta_1, \Delta, \Gamma \to \Theta]}}{}}{s_l[\Delta_1, A \supset B, \Gamma, \Delta \to \Theta]},$$

где двойная черта означает необходимое число последовательных применений правил сокращения и перестановки. Оба применения сечения имеют ранг, меньший ранга применения сечения в исходном выводе и устранимы по индуктивному предположению. Все применения правил в результирующем выводе корректны.

Пусть правая посылка сечения является заключением применения правила сокращения слева, причем формула сечения графически совпадает с главной формулой сокращения. Тогда, согласно Лемме 1, это применение сокращения регулярно, и если в нем одна из боковых формул одновременно является главной формулой применения однопосылочного логического правила, то конец результирующего вывода будет иметь вид:

$$(\mathrm{cut})\dfrac{s_n[\Gamma \to C] \quad \dfrac{(\mathrm{R})\dfrac{s_m[C^*, C, \Delta \to \Theta]}{s_{m+1}[C, C, \Delta \to \Theta]}}{s_{m+2}[C, \Delta \to \Theta]}}{s_{n+m+3}[\Gamma, \Delta \to \Theta]},$$

где C^* есть боковая, а C - главная формула правила (R).

В этом случае конец результирующего вывода выглядит следующим образом:

$$\dfrac{\dfrac{s_n[\Gamma \to C] \quad s_m[C, C^*, \Delta \to \Theta]}{s_{n+m+1}[C^*, \Gamma, \Delta \to \Theta]}(\mathrm{cut})}{\dfrac{s_n[\Gamma \to C] \; s_{n+m+2}[C, \Gamma, \Delta \to \Theta]}{\dfrac{s_{2n+m+3}[\Gamma, \Gamma, \Delta \to \Theta]}{s_l[\Gamma, \Delta \to \Theta]}=}(\mathrm{cut})}(\mathrm{R})$$

Ранг нижнего применения сечения равен 2, а ранг верхнего - меньше ранга применения сечения в исходном выводе. Значит оба эти применения сечения корректны и устранимы по индуктивному предположению.

Случай 2.2. Левый ранг сечения равен единице, правый ранг больше единицы.

Пусть левая посылка сечения является заключением применения правила сокращения справа, а главная формула применения сокращения графически совпадает с формулой сечения. Согласно Лемме 1, данное применение сокращения регулярно. В том случае, когда одна из боковых формул данного применения сокращения является главной формулой применения однопосылочного логического правила, конец исходного вывода имеет вид:

$$\dfrac{\dfrac{\dfrac{s_n[\Gamma \to C, C^*]}{s_{n+1}[\Gamma \to C, C]}(\mathrm{R})}{s_{n+2}[\Gamma \to C]} \qquad s_m[C, \Delta \to \Theta]}{s_{n+m+3}[\Gamma, \Delta \to \Theta]}(\mathrm{cut})$$

Согласно Лемме 2, в выводе посылки правила (R) найдется секвенция $\Gamma \to A$, которая может быть преобразована в секвенцию $\Gamma \to C$. Значит нижняя часть результирующего вывода будет иметь следующий вид:

$$\dfrac{\dfrac{s_{n-k}[\Gamma \to A]}{\dfrac{}{s_n[\Gamma \to C]}} \quad s_m[C, \Delta \to \Theta]}{s_{n+m+1}[\Gamma, \Delta \to \Theta]}(\mathrm{cut}),$$

где двойная черта означает последовательное применение сукцедентных логических правил (см. Лемму 2). Ранг сечения здесь меньше ранга применения сечения в исходном выводе, и значит оно устранимо по индуктивному предположению. Корректность применения правил сохраняется.

Рассмотрение всех других возможных случаев и подслучаев доказательства предоставляется читателю.

4. Сравнение исчисления TSR с релевантной аксиоматической системой.

Формульные образы выводимых в TSR объектов, т. е. D-секвенций, отличаются от формульных образов обычных секвенций в классическом варианте. При определении формульного образа рассматриваются не секвенции как таковые, а пары (D;S), где D есть TSR-вывод, а S есть конечная секвенция этого вывода.

Пусть существует TSR-вывод секвенции S, которая имеет вид $s_n[A_1,..., A_n \rightarrow B_1,..., B_m]$, где $n\geq 0$ при $m>0$ или $m\geq 0$ при $n>0$.

Формульный образ i(,S) секвенции S есть формула, построенная согласно следующим пунктам:

1) $i(D, \rightarrow B_1, ..., B_m)$, $m\geq 1$, есть $B_1 \vee ... \vee B_m$;

2) $i(D, A_1, ..., A_n \rightarrow)$, $n\geq 1$, есть $\neg A_1 \vee ... \vee \neg A_n$;

3) $i(D, A_1, ..., A_n \rightarrow B)$, $n\geq 1$, $A_1 \supset (... \supset (A_n \supset B)...)$, если в D существуют пути от каждой DT-формулы A_j, сопадающей с формулой A_i $(1\leq i\leq n)$, к формуле B и от каждой DT-формулы B_k, совпадающей с формулой A_i $(1\leq i\leq n)$, к фомуле A_i, причем все эти пути обладают свойствами, указанными в пунктах (3) и (2) условия применения правила (R1) в **TSR**; в противном случае $i(D, A_1, ..., A_n \rightarrow B)$ есть $\neg A_1 \vee ... \vee \neg A_n \vee B$.

4) $i(D, A \rightarrow B_1, ... B_m)$, $m\geq 1$, есть $A \supset (B_1 \vee ... \vee B_m)$, если в D существуют пути от каждой DT-формулы A_i, совпадающей с формулой A, к одному из сукцедентных членов B_k $(1\leq k\leq m)$ и от каждой DT-формулы B_j, совпадающей с B_k $(1\leq k\leq m)$, к формуле A, причем любой из этих путей обладает свойствами, указанными в пунктах (3) и (2) условия применения правила (R1) в TSR; в противном случае $i(D, A \rightarrow B_1, ..., B_m)$ есть $\neg A \vee B_1 \vee ... \vee B_m$.

5) $i(D, A_1, ..., A_n \rightarrow B_1, ..., B_m)$, $m>1$, $n>1$, есть $A_1 \supset (... ...\supset (A_n \supset (B_1 \vee ... \vee B_m))...)$, если в D существуют пути от каждой DT-формулы A_j, совпадающей с антецедентным членом A_i $(1\leq i\leq n)$, к одному из сукцедентных членов B_k $(1\leq k\leq m)$ и от каждой DT-формулы B_l, совпадающей с формулой B_k $(1\leq k\leq m)$, к формуле A_i, причем все эти пути обладают свойствами, указанными в пунктах (3) и (2) условия применения правила (R1) в **TSR**.

Примечание. Из пунктов 3-5 определения формульного образа следует, что возможен еще один случай, когда формульный образ секвенции, доказуемой в **TSR**, является "классическим", а именно - $i(D, A_1, ..., A_n \rightarrow B_1, ..., B_m)$, $m>1$, $n>1$, есть $(A_1 \supset (...\supset (\neg B_1 \supset ... \supset (\neg B_{m-1} \supset B_m)...)$, только если в D существуют пути от каждого вхождения A_j любого антецедентного члена A_i $(1\leq i\leq n)$ в D к любому сукцедентному члену B_k $(1\leq k\leq m)$ и от каждого вхождения

B_l любого сукцедентного члена B_k в D к любому антецедентному члену A_i, причем все эти пути обладают соответствующими свойствами (см. пункты (3) и (2) условия применения правила (R1) в **TSR**).

Во всех случаях временные параметры, приписанные формулам, при необходимости можно опустить.

Используя данное определение формульного образа, можно доказать следующее

Утверждение 4.1. *Если существует TSR-вывод D секвенции S, то i(D,S) есть доказуемая формула пропозициональной релевантной системы R.*

Доказательство состоит в том, чтобы показать, что

1) формульный образ основной секвенции доказуем в **R**;

2) любое правило вывода **TSR**, кроме сечения, производно в **R** в том смысле, что если формульные образы посылок некоторого правила доказуемы в **R**, то и формульный образ заключения этого правила тоже доказуем в **R**;

3) сечение устранимо из TSR-выводов.

Первый пункт тривиален, поскольку $A \supset A$ является аксиомой системы **R**, третий пункт обоснован Утверждением об устранении сечения. Обоснование второго пункта представляет собой техническую процедуру построения выводов из соответствующих посылок в аксиоматической системе **R**.

Утверждение 4.2. *Если формула F выводима в R, то можно построить TSR-вывод секвенции* $s_n[\rightarrow F/u]$.

Для доказательства достаточно показать, что

- можно построить TSR-вывод секвенции $s_n[\rightarrow F/u]$, если F есть аксиома системы **R**;
- правила системы **R** производны в **TSR**.

Первое осуществимо без каких-либо трудностей. Что же касается производности двух правил системы **R**, то достаточно использовать правило

$$\frac{s_n[\rightarrow A/u] \quad s_m[[\rightarrow B/u]}{s_{n+m+1}[\rightarrow A\&B/u]}$$

или сечение в случае с *modus ponens*

$$\cfrac{s_n[\rightarrow A/w] \quad \cfrac{s_m[\rightarrow A\supset B/w] \quad \cfrac{s_0[A/u\rightarrow A/u] \quad s_0[B/v\rightarrow B/v]}{s_1[A\supset B/u;v,\ A/u \rightarrow B/v]}}{s_{m+n+2}[A/u \rightarrow B/v]}}{s_{m+n+3}[\rightarrow B/v]}$$

Из этих двух утверждений следует, что **STR** и **R**:дедуктивно эквивалентны: *формула F доказуема в R тогда и только тогда, когда секвенция $s_n[\to F/u]$ доказуема в TSR.*

5. Заключительные замечания

Метод, использованный для построения **TSR**, основан на понятии правила вывода как метапроцедуры преобразования (в частности, "наращивания", усложнения) некоторой конструкции, являющейся корректным выводом, путем добавления новых ее элементов. Таким путем можно получить секвенциальные формулировки различных логических систем с "темпоральными" формулами, в частности, "интуиционистского" варианта системы **TSR**, а также различных ее подсистем и расширений. Это достигается соответствующей модификацией условий, регулирующих приписывание временных параметров сложным импликативным и/или негативным (конъюнктивным, дизъюнктивным) формулам, а также корректность применения правил для введения соответствующих логических констант и, возможно, сечения.

Кроме того, для исчисления **TSR** можно построить достаточно естественную семантику "содержательного" характера, в которой используется, например, понятие "обобщенного возможного мира" или "последовательности возможных миров", связанных бинарным отношением достижимости. Тем самым в силу явно "релевантных" свойств систем типа **TSR** открывается возможность семантического анализа релевантных логик без использования сложных алгебраических моделей или других конструкций высокой степени абстрактности.

Подробное рассмотрение таких семантических конструкций выходит за рамки данной статьи.

ЛИТЕРАТУРА

1. *Быстров П.И.* Методы устранения сечения в неклассических логиках. // Исследования по неклассическим логикам. М., 1989. С. 219-235.
2. *Быстров П.И.* Релевантные системы с глобальными правилами вывода // Логические исследования. Выпуск 2. М., 1993. С.139-152.
3. *Генцен Г.* Исследования логических выводов. // Математическая теория логического вывода. М., 1967. С. 9-74.
4. *Prawitz D.* Natural deduction. Stockholm, 1965.

С.А.Павлов

КЛАССИФИКАЦИЯ ТРЕХ- И ЧЕТЫРЕХЗНАЧНЫХ ЛОГИК В РАМКАХ ЛОГИКИ ЛОЖНОСТИ FL4

В статье рассматривается классификация трехзначных и четырехзначных логик в рамках логики ложности FL4. Четырехзначная логика FL4 позволяет корректно оперировать, в дополнение к обычным двузначным высказываниям, с противоречивыми высказываниями и высказываниями, которые не являются ни истинными, ни ложными.

В рамках FL4 определяются логические связки, истинностные таблицы для которых можно поставить в определенное соответствие с таблицами для связок 4-значных логики Белнапа и логики истины фон Вригта, 3-значных логик Клини, Лукасевича, Бочвара, интуиционистской логики Гейтинга, паранепротиворечивых логик Приста, Асеньо-Тамбурино, Сугихары, Сетте, формализованной Аррудой логики Васильева, с операциями алгебры Да Косты.

Для различных импликаций, возможных в рамках FL4, проводится классификация соответствующих логик, аналогично классификации импликативных логик, предложенной А.С.Карпенко.

Введение

Целью данной работы является рассмотрение различных способов классификации пропозициональных логик, основанных на использовании отношений эквивалентности, порядка, алгебр логики, булевых конструкций. Это рассмотрение будет проводиться в языке и рамках логики ложности FL4 [9]. Побудительной причиной к этому рассмотрению послужили доклады и статья А.С.Карпенко (см. [6]), в которых он предложил классификацию пропозициональных логик. Эта классификация проводится с помощью булевых конструкций, которые могут быть представлены в виде семимерного куба, вершинами которого являются подмножества исходного множества аксиом $\{\mathbf{I,B,C,W,K_1,X,N}\}$.

I. $p \to p$

B. $(q \to r) \to ((p \to q) \to (p \to r))$

C. $(p \to (q \to r)) \to (q \to (p \to r))$

W. $(p \to (p \to q)) \to (p \to q)$

$\mathbf{K_1}$. $(p \to q) \to (r \to (p \to q))$

X. $(p \to ((q \to q) \to p)) \to (((p \to q) \to q) \to ((q \to p) \to p))$.

N. $0 \to p$

Правила вывода: подстановка и modus ponens.

Выбор первых пяти исходных аксиом был основан на однозначном соответствии между комбинаторами и импликативными формулами. Главный результат [6] состоит в том, что все множество аксиом является независимым и дает полную классическую пропозициональную логику. При помощи полученной конструкции можно классифицировать бесконечные классы пропозициональных логик, включая как конечнозначные, так и бесконечнозначные логики.

Среди такого разнообразия логик выделим более узкий класс трех- и четырехзначных логик. Исходя из стремления иметь логически содержательное истолкование истинностных значений, выберем четыре истинностные значения, введение которых может быть обосновано, пользуясь различными методами. Так, Белнап [2] рассмотрел четырехэлементные аппроксимационные и логические решетки. Войшвилло [4] рассматривал информативность логических формул. Смирнов ввел и исследовал комбинированное исчисление высказываний и событий [11]. Фон Вригт построил ряд логик с оператором истины [5,18], которые интерпретируются с помощью четырех значений истинности.

Содержательный смысл четырех истинностных значений будем выражать словами: истинно и неложно; ложно и неистинно; ложно и истинно; ни истинно, ни ложно (аналогично у Мускенса [15]). Для двух последних значений имеются определенные аналогии с пресыщенными оценками и истиннозначными провалами, а также с переопределенностью и недоопределенностью. Обозначать истинностные значения будем, следуя Белнапу, T, F, B, N соответственно.

Следующие содержательные положения являются исходными для логики ложности FL4 [8,9,10].

1. Понятие ложности будем рассматривать и употреблять только в высказываниях вида:

'Предложение 'S' ложно.' (символически $(-S)$), в которых имена предложений образованы с помощью кавычковой функции.

Высказывание $(-S)$ является высказыванием о ложности предложения S и является высказыванием в метаязыке относительно языка, в котором сформулировано предложение S. Множество высказываний языка, метаязыка, метаметаязыка рассматривается как одно целое, т. е. с высказываниями S, $(-S)$, $(-(-S))$ будем оперировать совместно в языке FL4.

2. Понятие ложности будем рассматривать как исходное, неопределяемое понятие, которое в формальной системе будет играть роль логического оператора.

4*

Высказывание об истинности предложения S будем рассматривать как сокращение для высказывания о ложности отрицания предложения S и записывать так

'Предложение 'S' истинно.' (символически ($\mid$S)).

3. Высказывание (–S) о ложности предложения S двузначно и подчиняется законам классической логики Cl, в то время как не всякое предложение S должно быть либо истинным, либо ложным. Последнее означает, что во множество предложений, подлежащих оценке на истинность или ложность, включаются предложения, которые могут оцениваться как истинные и ложные одновременно, а также предложения, которые являются ни истинными, ни ложными.

4. Истинность и ложность предложений с импликацией будем задавать традиционно. Пусть формула '$(S_1 \rightarrow S_2)$'
символизирует предложение "если S_1, то S_2".
Тогда предложение '$(S_1 \rightarrow S_2)$' истинно,
если и только если 'S_1' ложно или 'S_2' истинно,
и предложение '$(S_1 \rightarrow S_2)$' ложно,
если и только если 'S_1' истинно и 'S_2' ложно.

1. Язык исчисления FL4

Алфавит FL4

$s, s_1, s_2, \ldots$	сентенциальные переменные,
$-\ , \rightarrow$	логические константы,
(,)	технические символы.

Определения

D1.1.1 Всякая сентенциальная переменная есть п.п.ф.

D1.1.2. Если A , B есть п.п.ф., то $(-A)$, $(A \rightarrow B)$ есть п.п.ф.

Пусть A, B, ... есть метапеременные для п.п.ф. Принимаем стандартные соглашения относительно опускания скобок.
Введем следующие сокращения для формул.
Для тождественно ложной формулы f(A), играющей роль константы "ложь":

D1.2.1 $$f(A) =_{df} -(-A \rightarrow -A).$$

D1.2.2 Для отрицания: $\sim A =_{df} (A \rightarrow f(A))$.

Для высказывания об истинности предложения A
('$\mid$' содержательно означает 'истинно ') :

D1.2.3 $$\mid A =_{df} -\sim A .$$

Для высказывания о строгой истинности предложения A:
('$\ulcorner$' содержательно означает 'истинно и неложно', см. ниже T2.3).

D1.2.4 $\quad \ulcorner A =_{df} -(\mathsf{I}A \rightarrow -A)$.

Определим импликацию $\supset$, которую назовем D-импликацией

D1.2.5 $\quad (A \supset B) =_{df} (\ulcorner A \rightarrow \ulcorner B)$.

Выделим подкласс формул, для которых будут иметь место аксиомы и теоремы классической логики Cl, посредством определения в классе п.п.ф. подкласса T.F.-формул (T.F.-ф.)

D3.1. Если A есть п.п.ф., то $-A$ есть T.F.-формула (сокр. T.F.-ф).

D3.2. Если P_1, P_2 есть T.F.-ф., то $(P_1 \rightarrow P_2)$ есть T.F.-ф.

Пусть $P, P_1, P_2, \ldots$ есть метапеременные для T.F.-ф.

D1.4.1 $\quad (P_1 \wedge P_2) =_{df} -(P_1 \supset -P_2)$.

D1.4.2 $\quad (P_1 \vee P_2) =_{df} (-P_1 \supset P_2)$.

D1.4.3 $\quad (P_1 \equiv P_2) =_{df} (P_1 \supset P_2) \wedge (P_2 \supset P_1)$.

Схемы аксиом

A1.1 $\quad (P_1 \supset (P_2 \supset P_1))$.

A1.2 $\quad (P_1 \supset (P_2 \supset P_3)) \supset ((P_1 \supset P_2) \supset (P_1 \supset P_3))$.

A1.3 $\quad (-P_1 \supset -P_2) \supset (P_2 \supset P_1)$.

A1.4 $\quad \mathsf{I}P \equiv P$.

A2.1 $\quad \mathsf{I}(A \rightarrow B) \equiv -A \vee \mathsf{I}B$.

A2.2 $\quad -(A \rightarrow B) \equiv \mathsf{I}A \wedge -B$.

Правило вывода

$$\frac{A, (A \supset B)}{B}$$

2. Интерпретация

Значения истинности: T, F, N, B. Выделенное значение - T.

Содержательное истолкование:

T - истинность и неложность, B - истинность и ложность,
F - ложность и неистинность, N - ни истинность, ни ложность.

Таблицы истинности для исходных связок:

A	$-A$
T	F
F	T
B	T
N	F

$\rightarrow$	T	F	B	N
T	T	F	B	N
F	T	T	T	T
B	T	B	B	T
N	T	N	T	N

Характеристической матрицей для FL4 является матрица $\mathfrak{M}_{FL4}$.

$$\mathfrak{M}_{FL4} = <\{T,F,B,N\},-,\rightarrow,\{T\}>$$

Алгебру характеристической матрицы $\mathfrak{M}_{FL4}$ будем называть FA4-алгеброй или алгеброй ложности.

$$FA4 = <\{T,F,B,N\},-,\rightarrow>$$

Имеем следующую теорему о подалгебрах.

T2.1 *Для алгебры ложности* FA4 *существует только три подалгебры, а именно:*

$$FA3B = <\{T,F,B\},-,\rightarrow> ,$$

$$FA3N = <\{T,F,N\},-,\rightarrow> ,$$

$$FA2 = <\{T,F\},-,\rightarrow> .$$

Пусть $\mathfrak{B}$ есть булева решетка на множестве $B = \{1,0\}$ с отношением порядка $\leq$ и дополнением $\neg$, т. е.

$$\mathfrak{B} = <\{1,0\},\neg, \leq>$$

T2.2 *Алгебра* FA2 *изоморфна булевой решетке* $\mathfrak{B}$.

$<\{T,F\},-,\rightarrow>$ *изоморфна* $<\{1,0\},\neg,\leq>$.

FA4-алгебру можно представить, используя булеву решетку $\mathfrak{B}$, следующим образом.

Пусть $M = \{T,F,B,N\}$ есть декартово произведение множества B на B, т. е. $M = B \times B$. Тогда элемент m, принадлежащий множеству M , т. е. $(m \in M)$, рассматриваем как пару, состоящую из элементов m_1, m_2, принадлежащих множеству B, т. е. $(m_1 \in B)$, $(m_2 \in B)$. Принимаем следующие соотношения

2.1.1 $m = <m_1, m_2>$,

2.1.2 $T = <1,1>$, $F = <0,0>$, $B = <1,0>$, $N = <0,1>$,

2.1.3 $T = 1$, $F = 0$.

Операции задаем покомпонентно следующим образом:

2.2.1 $-m = <\neg m_2, \neg m_2>$

2.2.2 $(m \rightarrow w) = <(m_2 \leq w_1), (m_1 \leq w_2)>$

Таблицы истинности для определенных выше связок:

A	f(A)	~A	ⅠA	⌐A
T	F	F	T	T
F	F	T	F	F
B	F	B	T	F
N	F	N	F	F

⊃	T	F	B	N
T	T	F	F	F
F	T	T	T	T
B	T	T	T	T
N	T	T	T	T

Таблицы истинности для связок $\wedge$, $\vee$, $\equiv$ являются таблицами классической логики Cl (A1.1, A1.2, A1.3) со значениями истинности T и F.

T2.3 $\vdash \ \ulcorner A \equiv (\mathrm{I}A \wedge --A)$.

Определим ряд унарных операторов $J_i(A)$, в дополнение к $\ulcorner$, для которых соответствующие функции $j_i(m)$ принимают следующие значения.

$$j_i(m) = \begin{cases} T, \text{ если } m=i \\ F, \text{ если } m\neq i \end{cases}$$

D2.1 $\neg A =_{df} (-\mathrm{I}A \wedge -A)$.

('¬' содержательно означает 'ложно и неистинно ').

D2.2 $\llcorner A =_{df} (\mathrm{I}A \wedge -A)$.

('⌞' содержательно означает 'истинно и ложно').

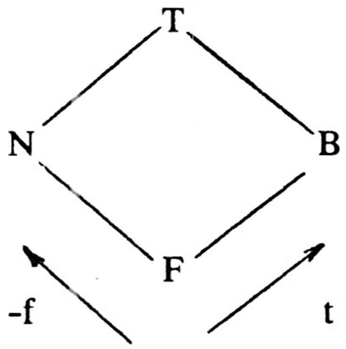
D2.3 $\lrcorner A =_{df} (-\mathrm{I}A \wedge --A)$.

('⌟' содержательно означает 'ни истинно, ни ложно').

Этим связкам соответствуют следующие истинностные таблицы:

A	$\neg A$	$\llcorner A$	$\lrcorner A$
T	F	F	F
F	T	F	F
B	F	T	F
N	F	F	T

Имеет смысл рассматривать следующую диаграмму, в которой изображенные оси символизируют два отношения порядка, порядок истинности $\leq_t$ и порядок неложности $\leq_{-f}$.



Определим импликации истинности $\rightarrow^t$ и неложности $\rightarrow^{-f}$, соответствующие отношениям порядка истинности $\leq_t$ и порядка неложности $\leq_{-f}$ следующим образом

D2.4 $\qquad (A \rightarrow^t B) =_{df} |A \rightarrow |B.$

D2.5 $\qquad (A \rightarrow^{-f} B) =_{df} --A \rightarrow --B.$

Этим связкам соответствуют следующие истинностные таблицы:

$\rightarrow^t$	T	F	B	N
T	T	F	T	F
F	T	T	T	T
B	T	F	T	F
N	T	T	T	T

$\rightarrow^{-f}$	T	F	B	N
T	T	F	F	T
F	T	T	T	T
B	T	T	T	T
N	T	F	F	T

3. Металогические свойства логики FL4

Понятия вывода и семантической общезначимости определяются и обозначаются стандартно ($\vdash$, $\models$), их отрицания ($\nvdash$, $\nvDash$). Вывод из гипотез обозначается следующим образом ($\Gamma \vdash A$). Символ следования в метаязыке по отношению к языку FL4 ($\Rightarrow$, $\Leftrightarrow$).

T3.1 $\vdash A \Rightarrow \models A$ (корректность).

T3.2 FL4 *непротиворечиво*. (Следствие T3.1.)

T3.3 $\Gamma, A \vdash B \Rightarrow \Gamma \vdash (A \supset B)$ (теорема дедукции).

Следующая теорема используется в доказательстве теоремы полноты методом Кальмара.

T3.4 $\vdash ((\ulcorner B \supset A) \supset ((\neg B \supset A) \supset ((\llcorner B \supset A) \supset ((\lrcorner B \supset A) \supset A))))$.

T3.5 $\models A \Rightarrow \vdash A$ (семантическая полнота).

T3.6 $\vdash A \Leftrightarrow \models A$ (адекватность).

4. Основные связки в FL4

Имеем следующие соотношения для импликаций $\rightarrow$ и $\supset$:

T4.1.1 $\vdash (A \rightarrow B) \supset (A \supset B)$,

T4.1.2 $\nvdash (A \supset B) \supset (A \rightarrow B)$,

для операторов истинности и ложности $\mid$ и $-$:

T4.2 $\vdash -A \equiv \mid \sim A$,

т. е. высказывание о ложности предложения A означает то же что и высказывание об истинности отрицания этого предложения A.

Определим конъюнкцию, дизъюнкцию и импликацию в обе стороны.

D4.1 $(A \& B) =_{df} \sim(A \rightarrow \sim B)$.

D4.2 $(A \mathrm{V} B) =_{df} (\sim A \rightarrow B)$.

Отметим, что мы будем различать символы дизъюнкций $\vee$ и V.

D4.3 $(A \leftrightarrow B) =_{df} (A \rightarrow B) \& (B \rightarrow A)$.

Этим связкам соответствуют следующие истинностные таблицы:

&	T	F	B	N
T	T	F	B	N
F	F	F	F	F
B	B	F	B	F
N	N	F	F	N

V	T	F	B	N
T	T	T	T	T
F	T	F	B	N
B	T	B	B	T
N	T	N	T	N

↔	T	F	B	N
T	T	F	B	N
F	F	T	B	N
B	B	B	B	T
N	N	N	T	N

5. Соотношения FL4 с четырехзначными логиками

Логика истины Вригта T''LM

Среди логик истины, вводимых фон Вригтом в [5, 18], наиболее близкой к FL4 является четырехзначная логика T''LM. Логика истины T''LM погружается в FL4 следующим образом.

Оператору истины T в T''LM соответствует оператор I в FL4.
Отрицанию ~ соответствует ~ (смотри D1.2.2).
Конъюнкции & соответствует & (смотри D4.1).

Тогда аксиомам T''LM соответствуют теоремы FL4, а правилам вывода в T''LM соответствуют производные правила вывода в FL4.

4-значная логика Белнапа
и логика тавтологических следований E_{fde}

В 4-значной логике Белнапа [2] имеются следующие значения истинности:

T - «говорит только Истину» N - «не говорит ни Истины, ни Лжи»
F - «говорит только Ложь» B - «говорит и Истину и Ложь»

Связки 4-значной логики Белнапа соотносятся со связками в FL4 следующим образом:

Отрицанию логики Белнапа соответствует связка ~ (см. D1.2.2)
Конъюнкции логики Белнапа соответствует связка & (см. D4.1)
Дизъюнкции логики Белнапа соответствует связка V (см. D4.2)

Белнап отмечает необходимость отличать знак «говорит только Истину» от знака «по меньшей мере говорит Истину». В FL4 это отличие в оценках предложений выражается употреблением двух различных операторов ⌐ и I соответственно.

Белнап говорит, что A *влечет* B, если этот вывод никогда не приводит нас от «Истины» к ее отсутствию (т.е. сохраняет истинность), а также никогда не приводит нас от отсутствия «Лжи» к «Лжи» (т.е. сохраняет не-ложность).

Определим соответствующую этим требованиям импликацию логики Белнапа $\mapsto$.

D5.1 $$(A \mapsto B) =_{df} ((A \rightarrow^{t} B) \wedge (A \rightarrow^{-f} B))$$

Этой связке соответствует следующая истинностная таблица:

$\mapsto$	T	F	B	N
T	T	F	F	F
F	T	T	T	T
B	T	F	T	F
N	T	F	F	T

Истинностная таблица для $\mapsto$ подобна таблице, предложенной Т.Смайли для логики тавтологических следований E_{fde}.

Пусть связками, соответствующими связкам логики тавтологических следований E_{fde}, будут $\sim$, &, V, $\mapsto$, определенные выше. Тогда имеем теорему.

T5.1. *Если* A *есть теорема* E_{fde}, *то* A *есть теорема* FL4.

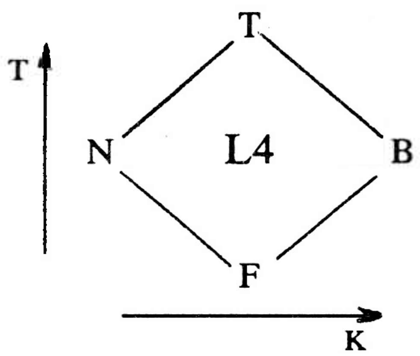
$$\vdash_{E_{fde}} A \Rightarrow \vdash A$$

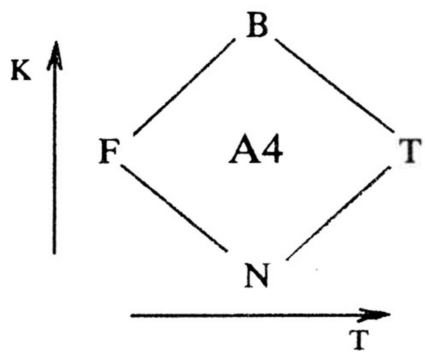
Характеристическая матрица для E_{fde} есть

$$\mathfrak{M}_{E_{fde}} = \langle \{T,F,B,N\}, \sim, \&, V, \mapsto, \{T\} \rangle,$$

истинностные таблицы для связок которой заданы выше.

Для анализа и обоснования логики Белнапа им привлекаются логические и аппроксимационные решетки A4 и L4 [2]. Также Фиттинг [14] использует бирешетки с двумя порядками: порядком знания $\leq_K$ и порядком истины $\leq_T$ (предпочтительнее говорить "только истинно" [2] или "истинно и неложно" [8,10,15] или "строго истинно" [5,8,18]). Приведем соответствующие диаграммы.





Определим в языке логики FL4 импликацию строгой истины $\rightarrow^T$ и тавтологию знания T^K, соответствующие осям T и K.

D5.2 $(A \rightarrow^T B) =_{df} (\ulcorner A \rightarrow \ulcorner B) \wedge (\neg\neg A \rightarrow \neg\neg B)$.

D5.3 $(A \; T^K B) =_{df} (\llcorner A \rightarrow \llcorner B) \wedge (\neg\lrcorner A \rightarrow \neg\lrcorner B)$.

Этим связкам соответствуют следующие истинностные таблицы:

$\rightarrow^T$	T	F	B	N
T	T	F	F	F
F	T	T	T	T
B	T	F	T	T
N	T	F	T	T

T^K	T	F	B	N
T	T	T	T	F
F	T	T	T	F
B	F	F	T	F
N	T	T	T	T

Имеем следующее соотношение между связками $\rightarrow^T$, $\rightarrow^t$ и $\rightarrow^{-f}$.

T5.3 $(A \rightarrow^T B) \equiv ((A \rightarrow^t B) \wedge (A \rightarrow^{-f} B)) \vee \ulcorner(A \rightarrow B)$

Не для всякой четырехзначной логики ее связки могут быть определены в языке FL4. Такой, в частности, является логика Лукасевича.

Четырехзначная логика Лукасевича

Для рассмотрения четырехзначной логики Лукасевича достаточно расширить язык FL4, введя в алфавит отрицание Лукасевича $\sim^Ł$, и задать аксиомы для этого отрицания. Полученную логику обозначим как FŁNL4.

A2.1 $-\sim^Ł A \equiv --A$

A2.2 $|\sim^Ł A \equiv -|A$

Определим импликацию Лукасевича $\rightarrow^{Ł4}$ в логике FŁNL4.

D5.2 $(A \rightarrow^{Ł4} B) =_{df} \sim^Ł (A \;\&\; \sim^Ł B)$

6. Классы эквивалентности и упорядочение формул

Для разбиения множества формул на классы введем ряд эквивалентностей.

Определим эквивалентность, которую назовем D-эквивалентностью.

D6.1. $(A \supset\subset B) =_{df} (A \supset B) \wedge (B \supset A)$.

Определим эквивалентность, которую назовем 4-эквивалентностью.

D6.2. $(A \equiv^4 B) =_{df} (A \mapsto B) \wedge (B \mapsto A)$.

Этим связкам соответствуют следующие истинностные таблицы:

$\equiv^4$	T	F	B	N
T	T	F	F	F
F	F	T	F	F
B	F	F	T	F
N	F	F	F	T

$\supset\subset$	T	F	B	N
T	T	F	F	F
F	F	T	T	T
B	F	T	T	T
N	F	T	T	T

T6.1.1 $(A \equiv^4 B) \equiv (\ulcorner A \wedge \ulcorner B) \vee (\neg A \wedge \neg B) \vee (\llcorner A \wedge \llcorner B) \vee (\lrcorner A \wedge \lrcorner B)$

T6.1.2 $(A \mapsto B) \equiv (A \equiv^4 (A \,\&\, B))$

Рассмотрим схемы формул, в которых имеются вхождения только одной метапеременной для п.п.ф., которые будем далее называть 1-формулами.

Имеет смысл классифицировать 1-формулы, разбив множество этих формул на классы эквивалентности. Для 4-эквивалентности и D-эквивалентности имеют место следующие метатеоремы о классах эквивалентности.

T6.2.1 *Для 1-формул имеется 36 классов 4-эквивалентности.*

T6.2.2 *Для 1-формул имеется 16 классов D-эквивалентности.*

Так как в 1-формулы входит только одна метапеременная, имеет смысл представлять их как формулы, построенные из унарного оператора и метапеременной.

Рассматривая таблицы истинности унарных операторов FL4 как продолжение таблиц истинности унарных операторов классической логики на область {B,N}, проведем классификацию унарных операторов FL4.

Унарные операторы, таблицы истинности которых являются всевозможными продолжениями таблицы истинности некоторого унарного оператора классической логики, включим в один класс. Таких классов имеем четыре, которые будем называть классами: 1) тавтологий, 2) противоречий, 3) отрицаний, 4) утверждений.

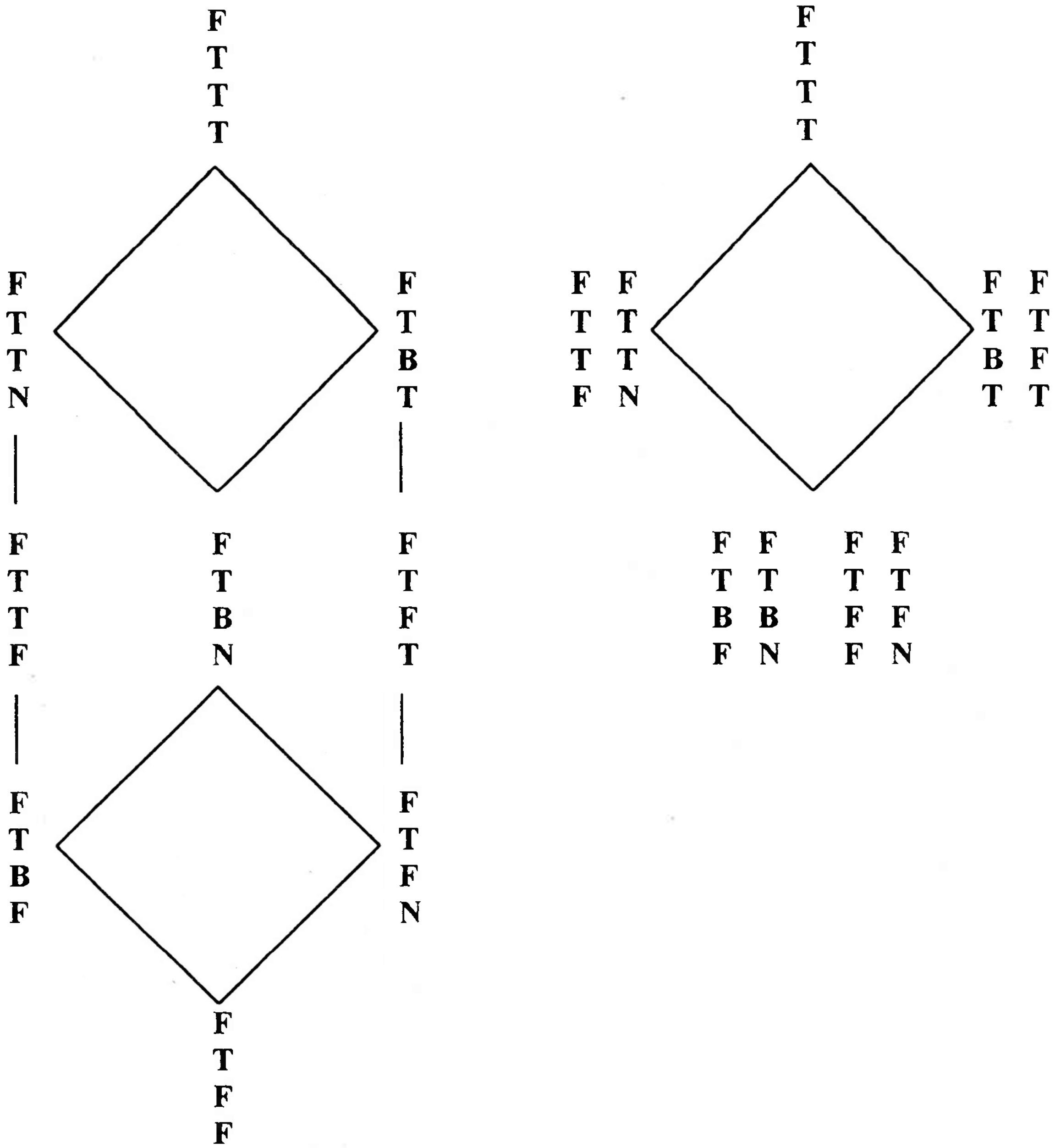
В каждом из последних четырех классов содержится по 9 операторов. Так, для класса отрицаний приведем их таблицы истинности. Аналогичные таблицы истинности для остальных классов (достаточно заменить значения в двух верхних строках).

~A	¬A	–A	(~A V –A)	(~A V –|A)
F	F	F	F	F
T	T	T	T	T
B	F	T	T	B
N	F	F	N	T

–|A	¬⌐A	(~A & –|A)	(~A & –A)
F	F	F	F
T	T	T	T
F	T	F	B
T	T	N	F

Соотношения между классами выражается следующей диаграммой.

Каждый из четырех вышеупомянутых классов имеет следующую структуру подклассов (представленную на диаграммах), упорядоченных отношениями порядка соответствующим импликациям $\supset$ (см. на диаграмме справа) и $\mapsto$ (слева).



Классификацию 1-формул завершим классификацией подсистем логики FL4.

T6.3 *Формулы только из трех классов* D-*эквивалентных* 1-*формул, не выводимых в* FL4, *могут быть непротиворечиво присоединены в качестве аксиом к* FL4.

Формулами, представляющими эти три класса, являются следующие: $(\ulcorner A \vee \neg A)$, $(\mid A \vee -A)$, $(--A \vee -\mid A)$.

В результате таких присоединений получаем следующие три логики:

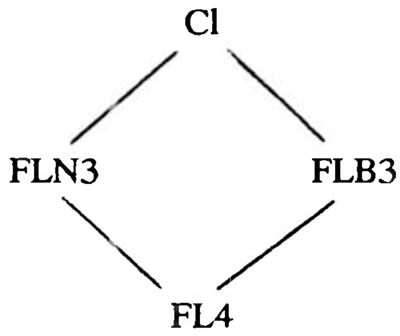
D6.3 Логикой FL3B, назовем логику, получаемую присоединением к FL4 в качестве аксиомы формулы $(\mid A \vee -A)$.

D6.4 Логикой FL3N, назовем логику, получаемую присоединением к FL4 в качестве аксиомы формулы $(--A \vee -\mid A)$.

D6.5 Логикой FL2, назовем логику, получаемую присоединением к FL4 в качестве аксиомы формулы $(\ulcorner A \vee \neg A)$.

T6.4 FL2 *является абсолютно полной логикой, эквивалентной* Cl.

Соотношение логик Cl (FL2), FL3B, FL3N представим в виде диаграммы.



Классификация импликаций

Будем классифицировать формулы с двумя переменными и соответствующие бинарные операторы аналогично 1-формулам.

Любой бинарный оператор $\Phi^k(A,B)$ будем определять следующим образом. Пусть $O^a_{ij}(A)$ - унарный оператор, где $i,j \in M$, $a>0$ и индексы приписываются унарным операторам произвольно.

Тогда множество определений операторов $\Phi^k(A,B)$ будет иметь следующий вид

$$\Phi^k(A,B) =_{df} \prod_{i,j \in M} ((J_i(A) \,\&\, J_j(B)) \to (O^a_{ij}(A) \& O^b_{ij}(B))).$$

Ограничимся рассмотрением импликативных формул, а всевозможным импликациям будут соответствовать таблицы истинности, являющиеся продолжением таблиц материальной импликации классической логики на область $\{B,N\}$.

Всего возможно 16777216 продолжений таблиц материальной импликации. Однако не для всякого продолжения таблицы определима соответствующая импликация в языке FL4.

T6.5.1 *Для импликативных формул имеется* 944784 *класса 4-эквивалентности.*

T6.5.2 *Для импликативных формул имеется* 4096 *класса D-эквивалентности.*

Такое количество импликаций, определяемых в языке логики FL4, позволяет считать FL4 мультиимпликативной логикой и использовать для классификации импликаций способ классификации импликативных логик, предложенный Карпенко [6].

Сформулируем требования для импликаций, выполнение которых позволит воспользоваться в рамках логики FL4 способом классификации Карпенко.

Пусть $(A \twoheadrightarrow^n B)$ некоторая импликативная формула.

1. Формула $(A \twoheadrightarrow^n B)$ должна быть определима в языке FL4, т. е. для нее имеем некоторую формулу $\Phi^k(A,B)$ такую, что
$$(A \twoheadrightarrow^n B) =_{df} \Phi^k(A,B)$$
2. $$(P_1 \twoheadrightarrow^n P_2) \equiv (P_1 \supset P_2)$$
3. $$(A \twoheadrightarrow^n B) \supset (A \supset B)$$

Тогда для такой импликации $\twoheadrightarrow^n$ можно построить импликативную логику с аксиомами $\mathcal{A}_i$ $(i \leq 7)$ из множества $\{I,B,C,W,K_1,X,N\}$ так, что формулы $\mathcal{A}_i$ являются теоремами FL4, и правилом вывода

$$\frac{A, (A \twoheadrightarrow^n B)}{B},$$

которое будет производным правилом в FL4.

Тем самым каждая удовлетворяющая вышеперечисленным требованиям импликация и соответствующая ей логика найдет свое место в классификации Карпенко.

T6.6 *Для импликативных формул, удовлетворяющих требованиям* 1., 2., 3., *имеется* 419904 *классов 4-эквивалентности.*

Число подклассов 4-эквивалентности импликативных формул или, иначе говоря, импликаций, в каждом из классов в классификации Карпенко приведем в следующей таблице. Расчеты проведены с помощью программы MaGIFL4 (Matrix Generator for Implication in FL4). Приведены также результаты расчетов в рамках логик FL3N и FL3B, причем для формул FL3B приняты два выделенных значения, так как она используется для анализа паранепротиворечивых логик.

	FL4	FL3B	FL3N
Ø	- 324278	- 3	-59
N	- 39289	- 5	-28
X	- 6438	- 3	- 9
XN	- 1753	- 7	- 4
K_1	- 355	- 1	
K_1 N	- 70		
K_1X	- 99		
K_1XN	- 70		- 1
W	- 160		
W N	- 159	- 2	- 1
W X	- 36		
W XN	- 54		
WK_1	- 6		
WK_1 N	- 4		
WK_1X	- 2		
WK_1XN	- 5	- 1	
CW XN	- 2		
CWK_1	- 4		
CWK_1XN	- 2		
B	- 151		- 1
B N	- 2		
B X	- 85	- 1	- 1
B XN	- 2		
B K_1	- 95		- 1
B K_1X	- 51	- 1	- 1
B W	- 4		
B W N	- 2		
B W XN	- 33	- 2	- 1
B WK_1	- 4		

	FL4	FL3B	FL3N
I	- 38523	- 9	-23
I N	- 4256	- 1	- 7
I X	- 1330	- 4	- 2
I XN	- 530	- 1	- 4
I K_1	- 426	- 1	
I K_1 N	- 50		
I K_1X	- 93		
I K_1XN	- 56		
I W	- 501		- 1
I W N	- 126	- 6	- 1
I W X	- 111		- 2
I W XN	- 44	- 7	
I WK_1	- 54		
I WK_1 N	- 12		
I WK_1X	- 2		
I WK_1XN	- 7		
I C	-	- 1	
I C K_1	- 30		
I C K_1 N	- 14		
I C K_1X	- 2		
I C K_1XN	- 9		
I CWK_1	- 32		
I CWK_1 N	- 16		
I CWK_1X	- 2		
I CWK_1XN	- 1		
IB	- 46		
IB X	- 48	- 2	- 1
IB XN	- 2		
IB K_1	- 123		- 1
IB K_1X	- 40	- 1	- 1
IB K_1XN	- 2		
IB W	- 4		
IB W N	- 2	- 1	
IB W XN	- 16	- 2	- 1
IB WK_1	- 30		- 1

B WK_1 N	- 4			IB WK_1 N	- 4		
				IB WK_1X	- 2		
B WK_1XN	- 4			IB WK_1XN	- 12	- 1	- 1
BC	- 2			IBC	- 15		- 1
				IBC K_1	- 12		
				IBC K_1 N	- 4		
BC K_1X	- 2			IBC K_1X	- 16		- 1
BC K_1XN	- 2			IBC K_1XN	- 5		- 1
BCW N	- 2						
				IBCW XN	-	- 1	
$BCWK_1$	- 2			$IBCWK_1$	- 20		- 1
$BCWK_1$ N	- 4			$IBCWK_1$ N	- 12		- 1
$BCWK_1X$	- 2			$IBCWK_1X$	- 10		- 1
$BCWK_1XN$	- 9	- 1	- 1	$IBCWK_1XN$	- 4	-16	- 2

Единицей булевой решетки (1-логикой) будет $IBCWK_1XN$-логика, а нулем (∅-логикой) будет логика с правилами вывода, в которой формулы, соответствующие I, B, C, W, K_1, X, N, не будут являться ни аксиомами, ни теоремами.

Найдем место рассмотренным ранее импликациям $\rightarrow$, $\supset$, $\mapsto$, $\rightarrow_T$ в классификации Карпенко.

T6.7 *Импликативная логика с импликацией* $\rightarrow$ *принадлежит классу* N-*логик.*

T6.8 *Импликативная логика с импликацией* $\supset$ *принадлежит классу* $IBWCK_1XN$-*логик.*

T6.9 *Импликативная логика с импликацией Белнапа* $\mapsto$ *принадлежит классу* $IBWK_1XN$-*логик.*

T6.10 *Импликативная логика с импликацией* $\rightarrow_T$ *принадлежит классу* $IBWK_1XN$-*логик.*

Ввиду большого количества импликаций продолжим более конкретный их анализ и классификацию для ряда известных трехзначных логик в рамках подсистем FL4 : логик FL3N и FL3B.

7. Определения связок и классификация трехзначных логик

В дополнение к основным связкам в логике FL4 построим определения нескольких логических связок, истинностные таблицы которых можно поставить в определенное соответствие с таблицами для связок ряда известных логик.

Для того чтобы сравнивать связки, определяемые в FL4, со связками трехзначных логик, будем отбрасывать одно из значений B или N. Этой процедуре синтаксически соответствует добавление аксиом, задающих логики FL3N или FL3B. Тем самым получаем возможность сравнивать между собой алгебры трехзначных логик с алгебрами FA3N, FA3B. Общая черта алгебр рассматриваемых ниже логик состоит в том, что они являются обеднением алгебр FA3N, FA3B.

FA3N

Логика Клини с сильными связками SK3

Клини в [7] строит трехзначную логику с помощью *регулярных* таблиц для связок ~, &, ∨, →, ≡, вводимых в *сильном смысле*. Клини использует три истинностных значения: t ("истина"), f ("ложь"), u ("не определено"), или в другом его толковании "известна истинность", "известна ложность", "неизвестно, истинно или ложно". Связкам в *сильном смысле* логики Клини соответствуют следующие связки FL3N.

Здесь и далее в таблицах соответствий справа расположены символы связок FL3N, а слева расположены символы логики, сопоставляемой FL3N.

Логика Клини		Логика FL3N
¯, &, ∨, →, ≡	соответствуют	~, &, V, →, ↔.

Нерегулярной таблице для ≅ соответствует таблица для ≡[4].

Приведем истинностную таблицу для импликации:

→	T	F	N
T	T	F	N
F	T	T	T
N	T	N	N

T7.1 *Логика* SK3 *принадлежит классу* N-*логик.*

Логика Бочвара B3

Бочвар в [3] строит трехзначную логику с помощью матриц ~, ⊢, −, ∩. Бочвар предлагает рассматривать три истинностных значения: R ("истина"), F ("ложь"), S ("бессмыслица"), а также классифицировать связки, различая внешние и внутренние:

внутреннее отрицание $\sim A$ ("не-А"),
внутренняя логическая сумма $A \cap B$ ("А и В"),
внешнее утверждение $\vdash A$ ("А верно"),
внешнее отрицание $-A$ ("А ложно").

$\sim, \vdash, -$ соответствуют $\sim, \mid, -$.

Определение для связки $\cap$ в FL4 следующее

D7.1 $(A \cap B) =_{df} (A \leftrightarrow B) \,\&\, (A \vee B)$.

Импликация $\supset^{B}$ определяется следующим образом

D7.2 $(A \supset^{B} B) =_{df} \sim(A \cap \sim B)$.

Приведем истинностную таблицу для импликации:

$\supset^{B}$	T	F	N
T	T	F	N
F	T	T	N
N	N	N	N

В логике Бочвара имеются несколько импликаций, которые в отдельности принадлежат различным классам, включая классы $\varnothing$-логик и 1-логик.

Логика Клини со слабыми связками WK3

Клини в [7] строит еще одну трехзначную логику с теми же значениями истинности, что и для SK3. Связки в ней предлагается рассматривать в *слабом* смысле. Таблицы для двухместных связок в логике WK3 аналогичны таблицам логики Бочвара.

$\bar{}, \&, \rightarrow$ соответствуют $\sim, \cap, \supset^{B}$, .

T7.2 *Логика* WK3 *принадлежит классу $\varnothing$-логик.*

Трехзначная логика Лукасевича Ł3

Трехзначную логику Лукасевич конструирует, вводя третье значение истинности, которое интерпретируется как «нейтральность».

$\sim, \&, \vee$ соответствуют $\sim, \&, \vee$.

Определим импликацию Лукасевича $\rightarrow^{Ł}$.

D7.3. $(A \rightarrow^{Ł} B) =_{df} (A \rightarrow B) \vee (A \mapsto B)$.

Этой связке соответствует следующая истинностная таблица, которая используется в доказательстве независимости аксиомы W.

$\to_Ł$	T	F	N
T	T	F	N
F	T	T	T
N	T	N	T

T7.3 *Логика* Ł3 *принадлежит классу* $IBCK_1XN$-*логик.*

Интуиционистская трехзначная логика Гейтинга H3

Трехзначную интуиционистскую логику Гейтинг конструирует, вводя третье значение истинности, которое интерпретируется как «неопределенность».

$\sim, \&, \vee$ соответствуют $\sim, \&, V$.

Импликация Гейтинга $\to^H$ определяется в FL4 следующим образом

D7.4 $(A \to^H B) =_{df} (--A \to B) \vee (A \mapsto B)$.

Этой связке соответствует следующая истинностная таблица:

$\to^H$	T	F	N
T	T	F	N
F	T	T	T
N	T	F	T

T7.4 *Логика* H3 *принадлежит классу* $IBCWK_1N$-*логик.*

Трехзначная логика Геделя G3

Таблица для импликации Геделя совпадает с таблицей импликации Гейтинга, поэтому имеем теорему, аналогичную T7.4.

T7.5 *Логика* G3 *принадлежит классу* $IBCWK_1N$-*логик.*

FA3B

Будем сравнивать операции алгебр паранепротиворечивых логик с операциями алгебры FA3B.

Логика парадоксов Приста Pr3

Прист в [16] строит трехзначную логику, вводя в качестве третьего истинностного значения «парадоксально», которое принимается в качестве второго выделенного значения.

$\sim, \wedge, \vee, \to$ соответствуют $\sim, \&, V, \to$

Импликации соответствует следующая истинностная таблица:

$\to$	T	F	B
T	T	F	B
F	T	T	T
B	T	B	B

T7.6 *Логика* Pr3 *принадлежит классу* $IBCWK_1XN$-*логик.*

Логика антиномий Асеньо и Тамбурино AT3

Асеньо и Тамбурино в [12] строят трехзначную логику, вводя в качестве третьего истинностного значения «антиномично», которое принимается в качестве второго выделенного значения.

$\sim, \wedge, \vee$ соответствуют $\sim, \&, \vee$.

Импликация Асеньо и Тамбурино $\to^{A}$ определяется в FL4 следующим образом

D7.5 $$(A \to^{A} B) =_{df} (\mid A \to B).$$

Этой связке соответствует следующая истинностная таблица:

$\to^{A}$	T	F	B
T	T	F	B
F	T	T	T
B	T	F	B

T7.7 *Логика* AT3 *принадлежит классу* $IBCWK_1XN$-*логик.*

Логика Сугихары Su3

В трехзначной логике Сугихары принимается два выделенных значения.

$\sim, \wedge, \vee$ соответствуют $\sim, \&, \vee$.

Определение импликации Сугихары $\to^{Su}$ в FL4 следующее.

D7.6 $$(A \to^{Su} B) =_{df} (\mid A \to B) \& (A \to --B).$$

Импликации $\to^{Su}$ соответствует следующая истинностная таблица:

$\to^{Su}$	T	F	B
T	T	F	F
F	T	T	T
B	T	F	B

T7.8 *Логика* Su3 *принадлежит классу* IBCWXN-*логик.*

Отметим, что истинностная таблица для $\to^{Su}$ совпадает с таблицей для импликации Собочиньского, используемой для доказательства независимости аксиомы K_1 [6].

Логика и алгебра да Коста

Для интерпретации паранепротиворечивых логик да Коста рассматривают трехэлементную алгебру Да Коста со следующими элементами (0,1,2) и операциями ($'$, $\leq$). Выделенные элементы 1, 2. Порядок для элементов следующий $0 \leq 2 \leq 1$.

$'$, $\wedge$, $\vee$, $\leq$ соответствуют $-$, &, V, $\mapsto$.

Для анализа своей логики Да Коста [13] также использует трехзначные матрицы, с которыми совпадают матрицы логики Сетте.

Логика Сетте Se3

В максимально паранепротиворечивой трехзначной логике Сетте [16] принимаются два выделенных значения.

Отрицанию $\sim$ в логике Сетте соответствует оператор $-$.

Определим импликацию логики Сетте $\to^{Se}$.

D7.7 $(A \to^{Se} B) =_{df} ({\mid}A \to {\mid}B)$.

Импликации $\to^{Se}$ соответствует следующая истинностная таблица:

$\to^{Se}$	T	F	B
T	T	F	T
F	T	T	T
B	T	F	T

T7.9 *Логика* Se3 *принадлежит классу* $IBCWK_1XN$-*логик.*

Для оператора истинности имеется следующее соотношение

T7.10 ${\mid}A \equiv ((A \to^{Se} -(A \to^{Se} A)) \to^{Se} -(A \to^{Se} A))$.

которое в логике Сетте может быть использовано для определения этого оператора.

Так как формула $|A$ принимает выделенное значение T для двух значений T и B, которые может принимать п.п.ф. A, то в логике Сетте для проверки формул на общезначимость можно перейти к одному выделенному значению. Для этого достаточно оцениваемую п.п.ф. A заменить на формулу с оператором истинности, т. е. на п.п.ф. $|A$.

Логика Арруды V1

Арруда в [1] строит трехзначную логику V1 для формализации идей Васильева.

Принимаются два выделенных значения 1, 2.

0, 1, 2 соответствуют F, T, B.

$\sim, \wedge, \vee, \supset$ соответствуют $\sim, \wedge^{Se}, \vee^{Se}, \rightarrow^{Se}$.

Определим отрицание Васильева $\neg^{V1}A$ в FL4 следующим образом.

D7.6 $\neg^{V1}A =_{df} -|A$.

T7.11 *Логика* V1 *принадлежит классу* $IBCWK_1XN$-*логик.*

T7.12 $|A \equiv \neg^{V1}\neg^{V1}A$

Из классификации импликативных фрагментов паранепротиворечивых логик видно, что в логиках Pr3, AT3, Se3, V1 импликации является классическими, т. е. для них выполняются условия теоремы Тарского-Бернайса, а паранепротиворечивость получается за счет введения разных видов отрицания.

ЛИТЕРАТУРА

1. *Арруда А.* Воображаемая логика Васильева // Васильев Н.А. Воображаемая логика. Избранные труды. М. 1989.
2. *Белнап Н.* Как нужно рассуждать компьютеру // Белнап Н., Стил Т. Логика вопросов и ответов. М., 1981.
3. *Бочвар Д.А.* Об одном трехзначном исчислении //Математический сборник. Т.4. N2. 1938.
4. *Войшвилло Е.К.* Семантика релевантных логик //Разум и культура. МГУ, 1983
5. *Вригт Г.Х.* Логика истины // Вригт Г.Х. Логико-философские исследования М., 1986.

6. *Карпенко А.С.* Импликативные логики: решетки и конструкции // Логические исследования. Вып. 2. М., 1993.
7. *Клини С.К.* Введение в метаматематику М.,1957.
8. *Павлов С.А.* Исчисление предикатов истинности и ложности. // Логический анализ естественных языков /2-ой Советско-Финский коллоквиум по логике. М.,1979.
9. *Павлов С.А.* Логика ложности FL4 /Труды научно-исследовательского семинара логического центра Института философии РАН. 1993. М., 1994
10. *Павлов С.А.* Логика с терминами 'истинно' и 'ложно' //Философские основания неклассических логик /Труды научно-исследовательского семинара по логике Института философии АН СССР. М., 1990.
11. *Смирнов В.А.* Утверждение и предикация. Логика высказываний и событий //Нестандартные семантики неклассических логик. М., 1986.
12. *Asenjo F.G., Tamburino J.* Logic of antinomies // Notre Dame J. Form. Log. 1975. Vol. 16, N1.
13. *Da Costa N.C.A.* Calculs propositionnels pour les systemes formels inconsistans. C.R.Acad.Sc. Paris. T.251. 1963.
14. *Fitting M.* Bilattices and the semantics of logic programming. Preprint, 1988.
15. *Muskens R.A.* Meaning and partiality. Amsterdam, 1989.
16. *Priest G.* The logic of paradox. // J.Philos. Logic, 1979. Vol.8, N2.
17. *Sette A.M.* On propositional calculus P3 // Math. Jap. 1973. Vol. 18
18. *von Wright G.H.* Truth-Logics // Logique et analyse. Nouvelle serie, 1987. Vol. 120.

П.Вайнгартнер

ЛОГИКА КВАНТОВОЙ МЕХАНИКИ, БАЗИРУЮЩАЯСЯ НА КЛАССИЧЕСКОЙ*

Введение

Андре Мерсьер внес серьезный вклад в квантовую механику (*QM*) [10], и хотя он не писал непосредственно о квантовой логике (*QL*), многие его работы посвящены проблемам, которые так или иначе связаны с вопросами, в каком-то смысле ответственными за развитие *QL*. Ему принадлежит книга "Logik und Erfahrung in der exakten Naturwissenshaft" [9], где он подчеркивает, что аксиоматизация эмпирической науки, например физики (некоторой ее части), никогда не может быть такой же исчерпывающей, как аксиоматическая система в математике. В частности потому, что какая-либо унификация уравнений в различных областях физики представляется едва ли возможной. Мерсьер весьма критичен и осторожен в отношении предположений о единой теории в физике [11]. Я полагаю, что он был бы также осторожен и сдержан в отношении любого предложения, обещающего особую логику для *QM*. Но из его работ мне известно, что эта его сдержанность не является безосновательной. У него имеется много хороших аргументов против генерализаций и основоположений, которые или неадекватны, или уводят куда-то в сторону, или имеют другие недостатки. Его критические исследования вытекают из громадного опыта и зрелой рефлексии, и потому я мог надеяться встретить интересные критические соображения, относящиеся к тому, что я предлагаю в этой моей работе, посвященной его юбилею.

Цель данной статьи предложить простые ограничения, которые, будучи наложенными на классическую логику (*CL*), позволяют блокировать те классически валидные выводы и преобразования, которые приводят к осложнениям, когда логика применяется к квантовым феноменам. Я не уверен, должен ли я говорить о некоторой новой *QL*, так как мое предложение должно оставлять *CL* в общем неизменной, но налагать на нее ограничения (род фильтра) в случае применения к определенным квантовым феноменам. Позже будет объяснено, что эти ограничения применимы не только в этой специфической области, но могут быть (и уже были) использованы для решения ряда проблем в областях научного объяснения, предсказания, утверждений о законах, диспозиционных предикатов, правдоподобия (аппроксимации к истине) и даже в таких очень отличных областях, как деонтическая логика и теория оценок. Эта более широкая применимость объясняет также, почему предложен-

---

* Перевод с английского Е.А.Сидоренко.

ные ограничения являются более сильными, чем они могли бы быть, если бы были предназначены только для того, чтобы избежать тех известных трудностей, которые связаны с применением *CL* в *QM*; то есть эти ограничения достаточны, но не необходимы. Это показывает также, что ограничения, налагаемые на *CL*, не берутся просто *ad hoc* (для решения лишь частной проблемы), но опираются на хорошо мотивированную идею с широкой областью применимости.

В первой части я кратко коснусь проблем, возникающих, когда *CL* применяется к квантовым феноменам. Во второй части я опишу и объясню предложенные ограничения (фильтры), давая определения и примеры применения.

1. Проблемы, возникающие в связи с применением *CL* к определенным квантовым феноменам

1.1. Проблема одновременной измеримости

Одна из наиболее важных проблем, возникающих, когда *CL* применяется к квантовым явлениям, связана со следующим имеющим силу в *CL* условием: Если утверждению p (описывающему определенное состояние дел) дается оценка и если (другому) утверждению q дается оценка, то и их конъюнкция $p \wedge q$ может получить оценку в соответствии с законами *CL*. Чтобы быть более аккуратными, мы должны сказать, во-первых, что означают оценки, и, во-вторых, какие законы используются. Что касается первого, то ответ таков: истинностные оценки (истина/ложь), оценки валидности (валидно/невалидно; контрвалидно) или оценки, подобные "выводимо из аксиом". В отношении второго возможный ответ: семантические законы, задаваемые истинностными таблицами, или: правила теоретического доказательства.

Вышеупомянутое условие нарушается, когда *CL* применяется к состояниям или соответствующим наблюдениям (выраженным утверждениями), которые не являются одновременно измеримыми. Знаменитый пример с измерением (или соответствующими наблюдениями, описывающими результат измерения) координаты и импульса: Если одно измерение может быть сделано точно (может получить приемлемое по строгости значение, т.е. быть в рамках сравнительно небольшой амплитуды статистического распределения), то другое получает неопределенно неточное значение (т.е. в рамках сравнительно широкой амплитуды статистического распределения). Поэтому одно из наиболее важных различий между *CL* и любой предлагаемой *QL* состоит в том, что обсуждаемое условие в общем случае не предполагается (не является в общем случае валидным) в *QL*, но валидно только, если соответствующие наблюдения (выраженные утверждениями) одновременно выполнимы.

1.11. Проблема в общем не ограничивается квантовой механикой (QM)

Чтобы подтвердить это заявление, приведем несколько простых примеров:

E1: Представьте математика, который доказал две (важные) теоремы T1 и T2. Было бы нелепо сказать, что он также доказал третью теорему, которая является конъюнкцией названных двух. Вместе с тем должно быть совершенно ясно подчеркнуто, что если мы ограничиваемся только значениями истинности и валидности, то определенно всякий раз, когда T1 и T2 истинны (валидны, выводимы из аксиом), то это же имеет место и для $T1 \wedge T2$. Но называя утверждение p "важной теоремой", мы оказываемся за пределами оценок "истинно", "валидно" или "выводимо из аксиом".

E2: Предположим, что h_1 есть действие по написанию (или по работе над) эссе по QL и h_2 есть действие по осуществлению лыжной прогулки. Является возможным, что персона a выполняет h_1 в момент t_1 (будем записывать это как $h_1 a_{t1}$), возможно также, что персона a выполняет h_2 в момент t_1 (обозначается: $h_2 a_{t1}$). Но,конечно же, невозможно, чтобы было: $h_1 a_{t1} \wedge h_2 a_{t1}$, т.е. конъюнкция утверждений, описывающих указанные действия, никогда не может быть истинной. Отсюда следует также, что мы не можем принять принцип: Если h_1 есть действие и h_2 есть действие, то действием будет также и соединение их обоих. Иногда такое возможно, но не было бы корректно в общем случае. Важно снова заметить, что несовместимость $h_1 a_{t1}$ и $h_2 a_{t1}$ не может быть выявлена из рассмотрения только истинносто-функциональных законов для "$\wedge$" или теоретико-множественных законов для пересечения или объединения (состояний действия), но только из внутреннего описания действий h_1 и h_2.

E3: Из поведения животных известно, что сексуальное возбуждение и страх не могут одновременно наблюдаться (и измеряться) среди самцов, тогда как сексуальное возбуждение и агрессивность могут. С другой стороны, сексуальное возбуждение и агрессивность не могут одновременно наблюдаться (и измеряться) среди самок, а сексуальное возбуждение и страх могут.

E4: Рассмотрим формулу социальной помощи (содействия) среди высших животных: $I \bullet r > L$. Она утверждает, что I, рейтинг увеличения (роста) для распространения генов (животного), умноженный на r, уровень родственности, должен быть больше, чем L, рейтинг потерь для распространения генов (того же самого животного). Эти величины могут быть выявлены только статистически. Например, время, которое индивидная особь тратит (в день, т.е. статистически среднюю величину в течение некоторого времени) на заботу о других или их защиту от опасностей, есть мера для L. С другой стороны, время, которое животное тратит на производство потомства, есть мера для I. Величина r есть вероятность, что те гены, которые имеет донор, являются теми же, что и у получателя. Например, если животное заботится о своем ребенке, то $r = 0{,}5$.

Теперь, если L получает относительно точное значение, то значение I будет очень неточным, хотя в общем не будет равным нулю. Потому, что помощь, оказываемая родичу, может долгое время оказывать влияние на позитивный результат в отношении I.

Опять же может быть особо подчеркнуто на основании этого примера, что возможно, что L наблюдается во время t_1 и имеет относительно точное значение в t_1 в отношении животного (или популяции) a_1. И также возможно, что I измеряется в t_1 и имеет точное значение в t_1 по отношению к a_1. Но из этого не следует, что оба L и I могут одновременно быть измерены в t_1 и получат оба точно определенные значения. Это означает по крайней мере, что "является измеримым (наблюдаемым), что ..." отлично от "является истинным (валидным), что ...", т. е. не удовлетворяет простым истинностно-функциональным законам *CL* (здесь: классической пропозициональной логики *CPL*).

1.2. Проблема дистрибутивности

Проблема дистрибутивности возникает, если *CL* применяется к квантовым явлениям, уже на уровне логики высказываний. Фактически *QL* и получила свое развитие главным образом в области логики высказываний.

1.21. Предварительные замечания, касающиеся логики в классической и квантовой физике

В следующем наброске я следую ясному и понятному описанию Редхеда [14, Ch. 7.3; 7.4]. В классической физике состояние физической системы представляется ее расположением в фазисном пространстве. Физические величины (наблюдения) являются функциями в фазисном пространстве. Задача состоит в том, чтобы описать состояние и найти законы, которые описывают, как данное состояние изменяется со временем. Глобальное состояние G универсума может быть сконструировано как декартово произведение фазисных пространств G_i отдельных физических систем. Элементарное высказывание p (q) может быть понято как говорящее,что репрезентативная точка универсума лежит внутри определенного подмножества P (Q) из G. Сложные высказывания могут понимться следующим образом: '$p \vee q$' говорит, что репрезентативная точка универсума лежит в объединении $P \cup Q$, '$p \wedge q$' - что она лежит в пересечении $P \cap Q$, и '$\neg p$' - что она лежит в дополнении $C(P)$ к P (в G). Логически истинное высказывание в таком случае утверждает, что репрезентативная точка лежит в G (т.е. в некотором состоянии без спецификации, в каком именно). Таким образом, когда классическая пропозициональная логика (*CPL*) со связками $\vee$, $\wedge$ и $\neg$ применяется в классической физике, мы можем понимать эти связки как соответствующие операции булевой алгебры.

В QL тогда булева структура замещается недистрибутивной решеткой. Глобальному состоянию G (с его подмножествами) соответствует гильбертово пространство H с его подмножествами A, B ... Элементарное высказывание a (b) может быть понято как говорящее, что вектор состояния физической системы лежит в подпространстве A (B) гильбертового пространства H. Сложные высказывания могут пониматься следующим образом: '$a \vee b$' означает, что вектор состояния (физической) системы лежит в подпространстве $A \oplus B$, где $\oplus$ обозначает *линейный промежуток* (*span*), который является наименьшей верхней границей двух подпространств (множество всех подпространств из H является частично упорядоченным относительно теоретико-множественного включения). Мы можем также сказать об этом следующим образом: если $S(a)$ является подпространством, соответствующим высказыванию a, и $S(b)$ высказыванию b, то $S(a \vee b)$ есть линейный промежуток подпространств $S(a)$ и $S(b)$. '$a \wedge b$' означает, что вектор состояния системы лежит в подпространстве $A \cap B$, которое является обычным пересечением A и B. Или опять-таки: если $S(a)$ является подпространством, соответствующим высказыванию a, и $S(b)$ - высказыванию b, то $S(a \wedge b)$ является пересечением подпространств $S(a)$ и $S(b)$. '$\neg a$' озрачает, что вектор состояния системы лежит в ортогональном подпространстве $A\perp$. Подпространство, состоящее из всех тех векторов, которые ортогональны всем векторам исходного подпространства, называются ортодополнением к этому подпространству. Другими словами, если $S(a)$ есть подпространство, соответствующее высказыванию a, то $S(\neg a)$ есть ортодополнение к подпространству $S(a)$. Если имеется такое определенное ортодополнение, то соответствующая решетка также является ортодополненной. Логически истинное высказывание утверждает в таком случае, что вектор состояния системы лежит где-то в H.

1.22. Разрушение дистрибутивности

В знаменитой работе Биркгофа и фон Неймана дается следующий контрпример в отношении принципа дистрибутивности [2]:

Представим частицу в ящике. Для грубой оценки будем вместо координаты рассматривать детерминированность, в левой части ящика (L) или его правой части ($R = L'$) находится частица, и вместо импульса - детерминированность, находится ли частица в четном (симметричном) состоянии (E) или нечетном состянии (E'). Это зависит от паритета определенного квантового числа n (четного или нечетного), пропорционального моменту, которое означает, что волновая функция или инвариантна, или изменяется. Тогда соответсвующий пример закона дистрибутивности выглядит так:

$$E \cap (L \cup R) = (E \cap L) \cup (E \cap R)$$

Так как ($L \cup R$) означает ($L \cup L'$) и получает в булевой алгебре значение 1, левая сторона приведенного равенства редуцируется к E. Переведенное на язык *CPL* выражение ($L \cup L'$) означает, что частица находится слева или не слева, и является тавтологией. Что касается правой части равенства, то четность (для момента) и левость или правость (для координаты) являются несоизмеримыми свойствами, такими, что подпространство волновых функций такой частицы исчезает, т.е. они получают значение 0. Таким образом, ($E \cap L$), а также ($E \cap R$) получают значение 0 и поэтому вся правая сторона равенства получает значение 0. В переводе на язык *CPL* это означает, что "частица s находится слева, и частица s находится справа" ,что противоречиво. Таким образом, левая часть приведенного закона дистрибутивности получает значение E,(т.е. определенное позитивное значение), а правая - значение 0, говорящее о провале равенства.

2. Предложение логики для решетки L_q квантовой механики

Существуют сомнения и споры относительно того, имеет ли решетка *QM* соответствующую логику.

Один тип возражений приведен Джачем и Пироном: "Так как решетка *QM* не имеет импликативной связки или оператора условности и вследствие этого не имеет схемы дедукции, то очень сомнительно, можем ли мы собственно называть логикой решетку общей квантовой механики" [7].

Другой тип возражений делается с позиций семантики: Логическая интерпретация решетки *QM* - в пропозиционально-логической части - не может иметь ни двузначной истинностно-табличной семантики, ни семантики обобщенных истинностных функций определенного вида. Глезоном [5] и Камбером [8] было показано, что такой истинностно-функциональной семантики не существует для решетки L_q квантовой механики. Как правильно указывает Миттельштедт [13], этот результат не исключает логической интерпретации L_q, так как другие решетки (подобные импликативной в интуиционистской логике) - и мы можем добавить: многие другие более слабые логики и обычные модальные - также не могут быть интерпретированы истинностно-функциональным образом.

Что касается вопроса об импликативной связке, то частично-упорядоченное отношение $\leq$ из L_q может быть интерпретировано в логике как валидная импликация:

$a \leq b$, если и только если $U \leq (a \rightarrow b)$, где U есть единица решетки L_q.

Из аксиом решетки L_q, которые сформулированы ниже, можно увидеть, что и некоторые другие важные для логики требования, например, определенные условия для отрицания, удовлетворяются соответствующими аксиомами в L_q.

В разделе 2.1 я представлю аксиоматическую систему для L_q, которая в деталях излагается у Миттельштедта [13], сопровождая ее некоторыми важными определениями (подобными, например, определению соизмеримости) и теоремами.

В разделе 2.2 я представлю определенные ограничения, которые, когда они наложены на *CPL*, по-видимому, устраняют те теоремы, которые ведут к затруднениям, когда *CPL* применяется к квантовым явлениям. Я, однако, не заявляю, что получающаяся в результате таких ограничений логика "в точности" соответствует L_q. Например, определенные законы *CPL*, такие, как дизъюнктивный силлогизм, не имеют соответствующего двойника в решетке для *QM* из-за невалидности закона дистрибутивности, но не видно, чтобы возникали проблемы, не устраняемые этими ограничениями.

2.1. Решетка L_q для *QM*

Аксиоматическое описание решетки L_q для *QM* берется из [13, Ch.2] (где некоторые вещи, которые, по-видимому, не существенны для настоящего обсуждения, опускаются и незначительные изменения и добавления делаются для большей прозрачности).За дальнейшими деталями читатель может обращаться к этой монографии.

2.11 Аксиомы.

Решетка L_q характеризуется следующими пунктами:

(1) Множество элементов (элементарных высказываний) $P = \{a,b,c,...\}$, понимаемых как утверждения о том, что вектор физической системы лежит в соответствующем подпространстве $A,B,C,...$

(2) Двухместное отношение $R \subseteq P \times P$ (обозначаемое как "$\leq$"), которое частично-упорядочивается аксиомами L_q1.1 и L_q1.2 так, что P есть частично-упорядоченное множество.

(3) Отношение эквивалентности (равенства), которое определяется аксиомой L_q1.3.

(4) Два двухместных отношения $\wedge$ и $\vee$ такие, что $a \wedge b$ есть меньшее, а $a \vee b$ - большее из a и b относительно R. Соответствующими аксиомами являются L_q2.1 - L_q3.3. Согласно пунктам (1)-(4) структура $<P,\leq,\wedge,\vee>$ является решеткой.

(5) Два дальнейших элемента *0* (пустой элемент) и *U* (универсальный элемент) характеризуются аксиомой L_q4.0.

(6) Ортодополнение $\neg a$ для a удовлетворяет аксиомам L_q4.1 - L_q4.4.

(7) Условие квазимодулярности (аксиома L_q5).

Алгебраическая структура $L_q = <P,\leq,\wedge,\vee,\neg,0,U>$, характеризуемая пунктами (1)-(7) и соответствующими аксиомами, представляет собой ортодополнительную квазимодулярную решетку.

L_q1.1 $a \leq a$
L_q1.2 $a \leq b, b \leq c \Rightarrow a \leq c$
L_q1.3 $a = b <=>\mathrm{Df}\ a \leq b$ и $b \leq a$
L_q2.1 $a \wedge b \leq a$
L_q2.2 $a \wedge b \leq b$
L_q2.3 $c \leq a, c \leq b \Rightarrow c \leq a \wedge b$
L_q3.1 $a \leq a \vee b$

$L_q3.2$ $b \le a \vee b$
$L_q3.3$ $a \le c, b \le c \Rightarrow a \vee b \le c$
$L_q4.0$ $0 \le a, \quad a \le U$
$L_q4.1$ $a \wedge \neg a \le 0$
$L_q4.2$ $U \le a \vee \neg a$
$L_q4.3$ $a = \neg\neg a$
$L_q4.4$ $a \le b \Rightarrow \neg b \le \neg a$
L_q5 $b \le a, c \le \neg a \Rightarrow a \wedge (b \vee c) \le b$

2.12. Условия и определения.

2.121. Квазимодулярность:

$$b \le a, c \le \neg a \Rightarrow a \wedge (b \vee c) = (a \wedge b) \vee (a \wedge c)$$

2.122. Модулярность:

$$b \le a \Rightarrow a \wedge (b \vee c) = (a \wedge b) \vee (a \wedge c)$$

2.123. Слабая модулярность:

$$b \le a \Rightarrow (a \wedge (b \vee \neg a) = b)$$

2.124. Дистрибутивность:

$$a \wedge (b \vee c) = (a \wedge b) \vee (a \wedge c)$$

Сравнивая три приведенных пункта, можно видеть, что модулярность и квазимодулярность являются ослаблениями дистрибутивности.

2.125. Соизмеримость:

$$a \sim b <=> \mathrm{Df}\; a = ((a \wedge b) \vee (a \wedge \neg b))$$

Имеется важное отношение между соизмеримостью и дистрибутивностью: L_q не является дистрибутивной (не имеет силы 2.124), но если элементы b и c оба соизмеримы с a, то дистрибутивность может быть доказана. Это значит, что в L_q ослабленный закон дистрибутивности (2.126) имеет силу:

2.126. $b \sim a, c \sim a \Rightarrow a \wedge (b \vee c) = (a \wedge b) \vee (a \wedge c)$

2.13 Теоремы[1].

2.131. В решетке L_q отношение соизмеримости ($\sim$) замкнуто относительно операций $\wedge, \vee, \neg$. Таким образом, имеют силу три следующие теоремы:

(1) $a \sim b, a \sim c \Rightarrow a \sim (b \wedge c)$
(2) $a \sim b, a \sim c \Rightarrow a \sim (b \vee c)$
(3) $a \sim b \Rightarrow a \sim \neg b$

2.132. В решетке L_q отношение соизмеримости **симметрично**:

$$a \sim b \Rightarrow b \sim a$$

---

[1] Приводятся только некоторые нужные для наших целей теоремы. Другие теоремы и дальнейшие детали (такие, как доказательства) см. [13].

Это, однако, не верно, если решетка не квазимодулярна, т.е. без L_q.

2.133. В L_q является верным, что если два элемента частично упорядоченны, то они соизмеримы:

$$a \leq b \Rightarrow a \sim b$$

2.134. В L_q $a \wedge b$ влечет соизмеримость элементов:

$$a \wedge b \leq a \sim b$$

2.135. Материальная импликация

Для логической интерпретации ортодополнительной квазимодулярной решетки введение материальной импликации является очень важным. Она должна быть введена таким образом, чтобы не предполагать и не влечь дистрибутивность. Миттельштедт показал [12], что более слабые условия (чем те обычные, которые повлекли бы булеву, т. е. дистрибутивную решетку) достаточны:

(1) $a \rightarrow b = \neg a \vee (a \wedge b)$

(2) $a \wedge (a \rightarrow b) \leq b$ Модус поненс

(3) $((a \wedge c) \leq b \Rightarrow ((\neg a \vee (a \wedge c) \leq (a \rightarrow b))$

Он назвал поэтому эту импликацию "*материальной квазиимпликацией*" [13, p.39]. Он потом показывает, что эта квазиимпликация однозначно детерминируется тремя вышеуказанными условиями.

(4) Ортодополнительная решетка без L_q5, но со свойством , что для любых двух элементов a, b существует элемент $a \rightarrow b$, удовлетворяющий указанным условиям (1)-(3), является квазимодулярной (т. е. влечет L_q5).

2.136. Соизмеримость и импликация

В решетке L_q имеют силу следующие теоремы:

(1) $a \sim b \Rightarrow (a \leq (b \rightarrow a))$

(2) $a \sim (a \rightarrow b)$

2.2. Предложение альтернативной логики для *QM*

2.21. Предварительные замечания

Могут ли быть основания для принятия новой (более слабой, чем классическая) логики? Я думаю, что могут, но я согласен с Суппесом, что "имеется, однако, много резонов для очень медленного продвижения к адаптации новой логики, особенно логики, которая очевидно слабее, чем классическая"[20].

Из-за таких резонов и нескольких других[2], которые в некотором смысле аналогичны, моя общая точка зрения состоит в том, чтобы сохранить классическую логику с ее понятием валидности (так как оно надежно и полно: высказывание валидно, если и только если оно доказуемо), но внести изменения как ограничения с некоторого

---

2 Один из самых общих резонов особенно подчеркивался Поппером при многих уместных поводах: Использование более слабых логик в науке в серьезном смысле ослабляет проверочную стратегию. Другие резоны были подчеркнуты в ряде работ по соответствующей теме. См. [22; 23; 21; 19].

рода фильтром (лимитирующим критерием).[3] Таким образом, касаясь квантовой логики, это ограничение отделяет валидные (выводимые) и реализуемые конъюнкции и дистрибутивности от валидных, но нереализуемых конъюнкций и дистрибутивностей. В отношении релевантной логики то же самое ограничение отделяет валидные и релевантные (уместные) формулы и выводы от валидных, но нерелевантных (излишних) формул и выводов. В эпистемической и деонтической логиках оно же отделяет валидные непарадоксальные утверждения от валидных, но парадоксальных. И так далее. Главное в этом подходе - сохранить классическую логику как основу, которая остается неизменной в отношении присущих ей понятий валидности, но ограничить ее аналогом фильтра для подходящих случаев применения в определенных областях эмпирических наук (естественных или гуманитарных).

Заметим, что программа Андерсона-Белнапа и их последователей состоит в том, чтобы действительно *изменить* логику, т.е. изменить понятие валидности. Точка зрения, которая защищается здесь, однако, основана на уверенности, что вопросы, такие, как оценка конъюнкций и дистрибутивностей на основании оценки их частей (квантовая логика), и такие, как излишние (нерелевантные) элементы в классе следствий (релевантная логика), или как инвариантность логических и математических результатов независимо от языкового каркаса и кодирования (см. Weingartner (1993)), выходят за пределы вопросов валидности (т.е. за пределы вопросов семантики в узком смысле) первопорядковой логики. И поэтому они не могут быть решены путем той или иной манипуляции (ослаблением) с валидностью. Оставить валидность неизменной и отличать ее от дополнительных свойств, подобных ограничениям на конъюнкции, излишние части (в следствиях) и тому подобное, что регулируется дополнительными ограничениями, будет, по-видимому, более подходящим.

2.22. Предлагаемые ограничения на *CL*

2.221. В соответствии с задачей я буду обсуждать здесь ограничение только на *CPL* (классическую пропозициональную логику), хотя его можно определить для всей *PL1* (логики предикатов первого порядка). Ограничение состоит из двух составляющих. Первая исключает те валидные (в *CPL*) формулы (теоремы), которые содержат излишнюю часть очень специфической формы: некоторая часть (которая будет специфицирована ниже) называется излишней, если она может быть замещена произвольной частью при сохранении валидности всей формулы (теоремы). Вторая

[3] Предложенные ограничения аналогичны фильтру, хотя это фильтр не в строгом смысле слова. Фильтр обычно определяется как удовлетворяющий следующим двум критериям: (1) Если a удовлетворяет фильтру и b удовлетворяет фильтру, то $a \wedge b$ также удовлетворяет фильтру. (2) Если a удовлетворяет фильтру и $a \rightarrow b$ удовлетворяет фильтру, то b также удовлетворяет фильтру (т.е. имеет место замыкание относительно модус поненс). Здесь хотя (2) удовлетворяется предложенным ограничением, для (1) это не имеет места.

составляющая разлагает сложную формулу на ее простейшие конъюнктивные элементы и исключает повторения.

Ограничение формулируется для следствий или для консеквентов импликативных формул. Эквивалентность интерпретируется как состоящая из двух импликаций. Это не приводит к ненужным потерям, так как все теоремы QL формулируются как кондиционалы или эквивалентности. Ограничение может, однако, быть распространено на произвольные формулы, как об этом будет сказано в разделе 2.25.

Следствие (консеквент), который удовлетворяет предложенному ограничению, будет называться R-следствием (или R-консеквентом), где "R" указывает на характеристику типа "релевантный","рестриктированный" (ограниченный), "редуцированный". Соответствующая выводимость - R-выводимость ($\vdash_R$) и соответствующая импликация - R-импликация ($\to_R$).

2.222. B есть R-следствие (R-консеквент) A, если и только если:

(1) $A \vdash B$ (соответственно, $\vdash (A \to B)$).

(2) Не имеется пропозициональной переменной (или предиката) в B, которую (который) можно было бы единообразно заменить в некоторых вхождениях (по крайней мере в одном) любой произвольной пропозициональной переменной (или предикатом с тем же самым числом мест) с сохранением валидности $A \vdash B$ (соответственно, $\vdash (A \to B)$).

(3) Каждое следствие B из A, которое удовлетворяет (2), замещается некоторой формулой B^* такой, что:

(i) $B^* \vdash B$ и $B^* \vdash B$ (соответственно, $\vdash (B \Leftrightarrow B^*)$).

(ii) B^* имеет форму конъюнкции, где столько конъюнктов, сколько возможно, так что при этом

(iii) $A \vdash B^*$ (соответственно, $\vdash (A \to B^*)$) удовлетворяет условию (2)[4].

(iv) B не содержит излишних повторов $A \wedge A \wedge ... \wedge A$ или $A \vee A \vee ... \vee A$ в качестве подформул.

2.223 Примеры.

(1) Примеры теорем CPL, которые являются R-импликациями (удовлетворяя ограничениям, данным в 2.222 (1)-(3)):

В пропозициональной логике: $(p \wedge p) \to p$, $(p \wedge (p \succ q) \succ q$, $(p \succ q) \wedge \neg q) \succ \neg p$, $(p \to q) \wedge (q \to r) \to (p \to r)$, $p \to p$, $p \to \neg\neg p$, $(p \wedge q) \to (q \wedge p)$, $(p \vee q) \to (q \vee p)$, $((p \wedge q) \wedge r) \to (p \wedge (q \wedge r))$, $((p \vee q) \vee r) \to (p \vee (q \vee r))$, $(p \wedge q) \Leftrightarrow \neg(\neg p \vee \neg q)$, $(p \vee q) \Leftrightarrow \neg(\neg p \wedge \neg q)$, $(p \vee q) \wedge \neg p \to q$, $(p \wedge q) \vee (p \wedge r) \to p \wedge (q \vee r)$, $(p \vee (q \wedge r) \to (p \vee q) \wedge (p \vee r)$, и т.д.

В логике предикатов: $\forall x Fx \to \exists x Fx$, $\forall x Fx \to Fa$, $Fa \to \exists x Fx$, $(a = b \wedge Fa) \to Fb$, $\forall x (Fx \wedge Gx) \to \forall x Fx, \forall x Gx$; $(Fa \wedge \forall x (Fx \to Gx) \to Ga$, $\forall x (Fx \to (Gx \wedge Hx) \to \forall x (Fx \to Gx)$, $\forall x (Fx \to Hx)$, и т.д.

Как можно видеть из приведенных примеров, относящихся к пропозициональной логике, все традиционно важные принципы дедукции, такие, как модус поненс, модус толленс, гипотетический

---

[4] То, что такое B всегда существует, было доказано в [19, p.59].

силлогизм, дизъюнктивный силлогизм, законы де Моргана, являются также и R-импликациями. Вместе с тем законы дистрибутивности являются валидными только в одну сторону. Тот факт, что достаточно сильные принципы (за исключением одной стороны дистрибутивности) все являются R-импликациями, очень важен: Хотя результирующая логика, получаемая из CPL при наложении R-фильтра, слабее CPL, она слабее лишь в отношении тех принципов, которые имеют ненужную избыточность, повторяемость и ослабленные части в следствиях (в консеквентах). Таким образом, важное возражение Поппера, касающееся трудностей в связи с тестированием, неприменимо к предложенной альтернативе для QL, так как те модусы, которые важны для тестирования, все являются R-импликациями. Это прежде всего: модус поненс, модус толленс, гипотетический силлогизм, дизъюнктивный силлогизм, законы двойного отрицания и контрапозиции.

(2) Примеры теорем CPL, котрые не являются R-импликациями (не удовлетворяют фильтру, данному в 2.222 (1)-(3)):

В пропозициональной логике:
$p \to (p \vee q)$, $(p \to q) \to (p \wedge r \to q)$, $(p \to q) \to (p \wedge r \to q \wedge r)$, $p \wedge q \to ((p \wedge r) \vee (q \wedge r)$, $\neg p \to (p \to q)$, $(p \wedge \neg p) \to q$, $(p \wedge \neg p) \to (p \wedge \neg p)$, $(p \wedge \neg p) \to (q \wedge \neg q)$, $p \to (q \vee \neg q)$, $p \to (p \to p)$, $(p \vee \neg p) \to (p \vee \neg p)$, $p \to p \vee (q \wedge \neg q)$, $p \to p \wedge (q \vee \neg q)$, $p \to (p \vee (p \wedge q))$, $p \to (p \wedge (p \vee q))$, $(p \wedge (q \vee r)) \to ((p \wedge q) \vee (p \wedge r))$, $p \to (p \wedge q) \vee (p \wedge \neg q)$, $((p \vee q) \wedge (p \vee r)) \to (p \vee (q \wedge r))$, $p \to (q \to p)$ и другие.

В логике предикатов:
$\forall x/\exists x Fx \to \forall x/\exists x(Fx \vee Gx)$, $\forall x/\exists x(Fx \to Gx) \to \forall x((Fx \wedge Hx) \to Gx)$, $\forall x/\exists x(Fx \to Gx) \to \forall x/\exists x(Fx \to (Gx \vee Hx))$, $Fa \to (Fa \vee Fb)$, $Fa \to (Fa \vee a = b)$, $\forall z/\exists z Gz \to \forall z/\exists z \exists x \forall y(Gz \wedge (Fx \vee \neg Fy))(-||-\forall z/\exists z Gz \wedge (\exists x Fx \vee \forall y \neg Fy))$, $p \to ((p \wedge \neg(a = b)) \vee (p \wedge (b = a))$ и др.

2.23. Применение R-ограничения.

Применение предложенного ограничения устраняет не являющиеся R-ограниченными ряд утверждений, валидных в CPL, а также некоторые из тех, которые валидны в обычной недистрибутивной решетке, используемой для QL. Причина последнего состоит в том, что R-критерий служит также целям устранения множества трудностей (парадоксов) в весьма различных областях, таких, как теории объяснения, предикации, подтверждения, правдоподобия и др. В этой работе я, однако, не буду входить в эти проблемы, но ограничусь применением R-критерия к обычной недистрибутивной решетке,используемой как QL.

2.231. Применение к аксиомам $L_q 1.1$-$L_q 5$.

Для такого применения отношение частичного порядка должно быть интерпретировано как импликация, как это сделано Миттельштедтом [13]:

$a \leq b <=> \text{Df } U \leq (a \to b)$

"$a \to b$" - истинно, если и только если имеет силу $a \leq b$, где $a \to b = \neg a \vee b$. Принятая интерпретация дает следующий результат применения R-ограничения к аксиомам: $L_q 1.1$-2.2 являются R-

импликациями, $L_q1.3$ представляет собой определение и поэтому двустороннюю импликацию. Если "=" интерпретируется как "$\Leftrightarrow$", то импликация слева направо есть R-импликация. $L_q2.3$ устраняется пунктом 2.222(3), аналогично обстоит дело с L_q3. Конверсии этих импликаций, однако, удовлетворяют R-импликации. $L_q3.1$ и $L_q3.2$ устраняются пунктом 2.222(2): b в них может быть замещено любым произвольным предложением при сохранении ими валидности. Фактически эти законы ("добавки") являются виновниками многих парадоксов в очень разных областях[5]. Эти законы не являются существенными и не требуются в научном дискурсе. Совершенно ясно, что установленные результаты, выражаемые высказываниями a,b, ... и так далее, не ослабляются, чтобы перейти к $a \vee c$ или $b \vee d$.

Так как a в L_q4 может быть замещено лыбым произвольным высказыванием, первая часть L_q4 тоже устраняется пунктом 2.222(2). По той же самой причине устраняется $L_q4.2$.

$L_q4.3$ и $L_q4.4$ являются R-импликациями.

L_q5 не является R-импликацией, так как оба вхождения b в заключении могут быть заменены любым произвольным высказыванием при сохранении валидности.

2.232. Применение к теоремам и кондиционалам.

Подобно L_q5, другие формулы квазимодулярности и модулярности (2.121 и 2.122) не являются R-импликациями. Однако слабая модулярность (2.123) может быть превращена в R-импликацию при замещении "=" на "$\Leftrightarrow$" (т.е. конъюнкцией двух импликаций):

$(b \rightarrow a) \rightarrow [(a \wedge (b \vee \neg a)) \Leftrightarrow b]$.

Все импликации, представляющие законы де Моргана, являются R-импликациями или легко могут быть превращены в них.

2.233. Соизмеримость.

Соизмеримость (a измеримо одновременно с b: $a \sim b$) определяется следующим образом [13, p.32f]:

(1) $a \sim b <=>\mathrm{Df}\ a \Leftrightarrow ((a \wedge b) \vee (a \wedge \neg b))$

Ясно, что правая часть определения (дефиниенс) не является R-импликацией в отношении $\rightarrow$ (слева направо), так как оба вхождения b могут быть замещены любым произвольным высказыванием. Однако конверсия импликации дефиниенса (справа налево) есть R-импликация. Это означает, что предложенное ограничение не допускает в общем случае соизмеримости двух высказываний (состояний дел); таким образом, соизмеримость должна формулироваться как дополнительная аксиома, где бы она ни принималась, но не может предполагаться как часть соответствующей логики.

---

5 Подробности на этот счет обсуждаются в [21; 19; 22; 23].

Если условие соизмеримости задается с помощью двух определений:

(2) $a \sim b <=>$Df $a \to (b \to a)$

и

(3) $a \sim b <=>$Df $b \to (a \to b)$,

то дефиниенсы обоих определений не являются R-импликациями (в первом дефиниенсе b, во втором a заменимы произвольными пропозициональными переменными с сохранением валидности).

Утверждение 2.126 не является R-импликацией (сравни с 2.234 ниже).

2.234 Дистрибутивность

Законы дистрибутивности имеют силу в *CPL* как эквивалентности:

(1) $(a \wedge (b \vee c)) \Leftrightarrow ((a \wedge b) \vee (a \wedge c))$

(2) $(a \vee (b \wedge c)) \Leftrightarrow ((a \vee b) \wedge (a \vee c))$

Импликативные части, которые порождают проблемы при применении к *QM*, в этих эквивалентностях[6] следующие:

(3) $(a \wedge (b \vee c)) \to ((a \wedge b) \vee (a \wedge c))$

(4) $((a \vee b) \wedge (a \vee c)) \to (a \vee (b \wedge c))$

Как легко увидеть, (3) и (4) не относятся к R-импликациям: они не удовлетворяют пункту 2.222 (3)(ii).В то же время конверсии импликаций (3) и (4), которые не порождают проблем при применении *CPL* в *QM*, этому пункту удовлетворяют. Так что R-ограничение устраняет как раз проблематичные случаи законов дистрибутивности.

2.235. Дальнейшие применения

Симметричность утверждения $a \sim b$ имеет силу в L_q только при условии, что выполняется L_q5. Так как L_q5 не является R-импликацией, понятно, что 2.132 также не есть R-импликация. Не будут R-импликациями также 2.133 и 2.134, что может быть легко доказано и понято из того, что было сказано про L_q5.

Из условий, вводящих материальную импликацию (2.135), условие (2), т.е. модус поненс, является R-импликацией, в то время как (1) и (3) (в последнем первое и второе вхождения a могут быть унифицированно заменены произвольной формулой при сохранении валидности) не являются. Подобным же образом не являются R-импликациями 2.136 (1) и (2). Это легко видеть в случае с (1), так как b в консеквенте можно заменить чем угодно, сохраняя валидность. (2) по определению эквивалентно $a \Leftrightarrow [(a \wedge (a \to b) \vee (a \wedge \neg(a \to b))]$ и, таким образом, $(a \to b)$ может быть единообразным способом заменено произвольной формулой с сохранением валидности.

2.24. Обобщенная применимость R-ограничения

Как уже упоминалось ранее, R-ограничение, предложенное в 2.222, имеет очень широкую применимость.

---

6 См. дискуссию в [3, p.154ff].

В работах Schurz'a, в моих, а также в наших общих [21, 19, 22, 16, 17] было показано, что предложенный R-критерий может быть использован для решения почти всех парадоксов в области теорий объяснения, подтверждения, утверждений о законах, диспозиционных предикатов, правдоподобия, деонтической логики, эпистемической логики и теории ценностей.

Успешная применимость R-ограничения в *QM* еще не продемонстрирована в деталях. Это задача для будущего. Однако на основании того, что уже сделано, его полезность в качестве альтернативы для "*QL*" будет, я надеюсь, доказана.

2.25 Обобщение R-ограничения.

В работе [22] я предложил некоторое обобщение R-ограничения с тем, чтобы применять его не только к следствиям (консеквентам валидных импликативных формул), но к произвольным формулам. Сделанные там предложения имели некоторые недостатки.[7] В работе [24] я описал два новых предложения по обобщению R-критерия с тем, чтобы он применялся к произвольным формулам. Оба эти предложения имеют свои недостатки и свои преимущества по отношению друг к другу. Присущие им свойства, однако, еще не известны в достаточной степени. С другой стороны, обсуждаемый R-критерий известен намного лучше: значительное число его важнейших свойств было установлено в [19].

ЛИТЕРАТУРА

1. *Beltrametti Enrico G.* Current Issues in Quantum Logic. N.Y.,1981.
2. *Birkhoff G., Neumann J.* The Logic of Quantum Mechanics // Annals of Mathematics. 1936. Vol.37, p. 823-843.
3. *Della Chiara M.L.* Some Metalogical Pathologies of Quantum Logic. Beltrametti, 1981.
4. *Finkelstein D.* Matter, Space and Logic. 1979 II, p.123 - 139.
5. *Gleason A.M.* Measures on the Closed Subspaces of Hilbert Space // Journal of Mathematics and Mechanics. Vol.6, 1957, pp. 885-894.
6. *Hooker C.A.* The Logico-Algebraic Approach to Quantum Mechanics. Vol.II, Dortrecht.1979.
7. *Jauch J.M., Piron C.* What is Quantum Logic? // Quanta. Univ. of Chicago Press, Chicago.1970. P.158 ff.
8. *Kamber F.* Zweiwertige Wahrsheinlichkeitsfunktionen auf orthokomplementaren Verbanden // Mathematische Annalen.158. 1965. P.158 ff.
9. *Mercier A.* Logik und Erfahrung in der exakten Naturwissenschaft. Bern. 1941.
10. *Mercier A.* Analitical and Canonical Formalism in Physics. Amsterdam. 1959.

---

[7] Они были подвергнуты критике (хотя и связанной с некоторыми недоразумениями) Schurz'ем в его [18]. Для прояснения этих недоразумений см. мою работу [24].

11. *Mercier A., Schaer J.* Die Idee einer einheitlichen Theorie. Beitrag zur Methodologie der modernen Physik. Berlin, 1964.
12. *Mittelstaedt P.* On the Interpretation of the Lattice of the Hilbert Space as a Propositional Calculus // Zeitschrift fur Naturforchung. 1972. Vol. 27a. P.1358 ff.
13. *Mittelstaedt P.* Quantum Logic. Dortrecht, 1978.
14. *Redhead M.* Incompleteness, Nonlocality and Realism. A Prolegomenon to the Philosophy of Quantum Mechanics. Oxford, 1987.
15. *Schurz G.* Relevant Deductive Inference: Criteria and Logics. 1991. PP.57-84.
16. *Schurz G.* Relevant Deduction. From Solving Paradoxes towards a General Theory // Erkenntnis. Vol.35 .1991. P.391-437.
17. *Schurz G.* How Far Can Hume's Is-Ought Thesis be Generalized? An Investigation in Alethic-Deontic Modal Predicate Logic // Journal of Philosophical Logic. Vol. 20. 1991. P.37-95.
18. *Schurz G.* Advances in Scientific Philosophy. Essays in Honor of Paul Weingartner on the Occasion of the 60th Anniversary of his Birthday. Rodopi. Amsterdam, 1991.
19. *Schurz G., Weingartner P.* Verisimiltude Defined by Relevant Consequence-Elements. A New Reconstruction of Popper's Original Idea // What is Closer-to-the-Truth? Rodopi; Amsterdam, 1987, p. 47-77.
20. *Suppes P.* Probabilistic Methaphysics. Oxford, 1984.
21. *Weingartner P.,Schurz. G.* Paradoxes Solved by Simple Relevance Criteria // Logique et Analyse. Vol.133. 1986. P.3-40.
22. *Weingartner P.* Remarks on the Consequence-Class of Theories // The Role of Experience in Science.Proceedings of the 1986 Conference of the Academie Internationale de Philosophie des Sciences (Bruxelles) Held at the University of Heidelberg. Berlin, 1988. P. 161-180.
23. *Weingartner P.* Antinomies and paradoxes and their Solution // Studies in Soviet Thought. Vol 39. 1990. P. 313-331.
24. *Weingartner P.* Can there be Reasons for Putting Limitations on Classical Logic? *Patrick Suppes.* Mathematical Philosopher. Synthese Library (в печати). 1993.

А. Смирнов, А. Новодворский

ЯЗЫК ОПИСАНИЯ ЛОГИЧЕСКИХ СИСТЕМ*

Настоящая статья содержит описание базовых понятий, лежащих в основе программной системы поддержки интерактивнго поиска доказательства "Дедукция". Мы стремились излагать понятия в том виде, в котором они фактически используются в программе, а не в соответствии с представлениями авторов, сложившимися к настоящему моменту. Целью статьи является формальное определение логической базы и возможностей программы. Это позволяет увидеть недостатки и определить направления ее дальнейшего развития. Вместе с тем мы рассчитываем, что статья окажется полезной для тех пользователей программы, которые сами формулируют логические системы в терминах программы "Дедукция".

СВЕДЕНИЯ О ПРОГРАММЕ "ДЕДУКЦИЯ"

Программа "Дедукция" поддерживает построение выводов в различных логических системах. Другой ее особенностью является возможность совмещения работы вручную с использованием различных средств автоматизации построения вывода.

В основу программной системы положено понятие субординатного вывода (состоящего из формул и вспомогательных выводов). Это позволяет работать с широким классом логических систем. Для смены логической системы достаточно выбрать файл с описанием требуемой логической системы. Описание содержит сигнатуру, правила вывода и аксиомы. Оно должно быть написано на специальном языке, позволяющем описывать как синтетические, так и аналитические правила вывода.

Программная система снабжена набором таких описаний для различных логических систем. Пользователь может также подготовить свои собственные описания других логических систем. Это можно сделать с помощью специального редактора.

Программа поддерживает использование временных термов и функций. Временные термы позволяют отложить подстановку до того момента, когда мы будем знать, какой терм следует подставить вместо переменной. Временные функции представляют эпсилон-термы (или сколемовские функции) и упрощают применение сильных правил.

---

* Работа выполнена при поддержке Российского Фонда фундаментальных исследований, грант 93-06-10708.

Для построения вывода вручную пользователь должен указывать, какое правило вывода и где следует применить. Вывод модифицируется только при правильном применении правил вывода. Поэтому могут быть получены только корректные выводы. Более того, вывод будет снабжен анализом, указывающим на происхождение каждой из формул. Средства автоматизации (не включающие пока пруверов) могут использоваться на различных шагах построения вывода. Они включают фильтрацию правил вывода (какие правила вывода могут быть использованы в данный момент), поиск унификации, минимизацию вывода и другие средства.

Программа "Дедукция" позволяет использовать различные способы визуализации вывода; можно использовать альтернативные имена (псевдонимы) для переменных, функций, предикатов и логических связок, что позволяет представлять формулы в текстовом виде. Поддерживаются также такие вспомогательные средства, как сохранение вывода на диске и загрузка с диска, создание контрольных точек для возврата назад, запись и воспроизведение протокола работы. Используя протокол, пользователь может воспроизвести работу от любой контрольной точки в пошаговом режиме или полностью, или даже попытаться повторить некоторое доказательство для другой логической системы.

Данная версия программы рассчитана на IBM PC (XT/AT). Эта версия не имеет прувера. В настоящее время совершенствуется версия языка описания логических систем и подключаются пруверы.

На базе настоящей версии программы сотрудниками Института логики, когнитологии и развития личности подготовлен курс логики для студентов. Этот курс использовался для преподавания логики в МГУ и в Зальцбургском университете. Программа демонстрировалась также в Институте символических вычислений (Линц) и в Стэнфорде.

АЛФАВИТ

Алфавит состоит из 512 символов (из которых первые 256 соответствуют стандартному набору знаков в альтернативной кодировке, а остальные отведены под спецсимволы). Из них:

0 1 2 3 4 5 6 7 8 9	цифры
( )	скобки
, ; / <пробел>	разделители
остальные знаки алфавита	буквы

ИМЕНА

Имя есть последовательность, первый элемент которой является буквой, а последующие (до 4-х) - цифрами.

Пример. Именами являются:

A A25 a3 Ж88 & &2 + =

ТИПЫ ИМЕН

Любому имени, обрабатываемому системой, приписывается тип и ряд других атрибутов. Приписывание типа осуществляется либо явно при определении сигнатуры, либо по умолчанию при вводе правил вывода, аксиом, формул. По умолчанию тип определяется по первой букве имени. (Система умолчаний задается при настройке системы.) Ниже приводим таблицу типов имен и соответствующих им атрибутов:

№	тип имени	приоритет	аргументов слева	аргументов справа
1	индивидная переменная	-	-	-
2	временная переменная	-	-	-
3	функция	1-9	0-20	0-20
4	временная функция	1-9	0	0-20
5	предикат	1-9	0-20	0-20
6	квантор	1-9	0	2
7	логическая связка	1-9	0-20	0-20
8	абстрактная формула	-	-	-
9	абстрактный терм	-	-	-
10	локальная подстановка	-	0	3
11	глобальная подстановка	-	0	0
12	знак выводимости ("дырка")	-	-	-
13	знак перехода	-	-	-
14	служебные знаки (скобки и разделители)	-	-	-

Далее мы будем придерживаться следующего списка умолчаний:

индивидная переменная	v x y z
временная переменная	t
функция	f g + -
временная функция	w
предикат	A B C D E =
квантор	∀ ∃
логическая связка	& ∨ ⊃ ¬
абстрактная формула	F
абстрактный терм	T

локальная подстановка	S
глобальная подстановка	G
знак выводимости ("дырка")	$\vdash$
знак перехода	$\Rightarrow$
служебные знаки	( ) , ; / <пробел>

Абстрактные индивидные переменные совпадают с индивидными переменными.

Абстрактные имена необходимы нам для описания правил построения вывода. Они аналогичны схематическим буквам, введенным Клини для описания схем аксиом.

ФОРМУЛЫ

На основе имен с типами 1, 3, 4, 5, 6, 7, 14, т. е. индивидных переменных, функций, временных функций, предикатов, кванторов, логических связок и служебных знаков стандартным образом определяются по индукции понятия правильно построенного терма и правильно построенной формулы. Соглашение о сокращении скобок действует в соответствии с присвоенными функторам приоритетами (чем больше число, тем выше приоритет). Следует только учитывать наличие более сильного "типового" приоритета, который делает все функции более сильными связками, чем предикаты, а те - более сильными, чем логические связки и кванторы. (Рекомендуется кванторам давать тот же приоритет, что и знаку отрицания, тогда формулы $\forall$ x $\neg$ A(x) и $\neg$ $\forall$ x A(x) не нуждаются в скобках.) При равных приоритетах действует ассоциация вправо.

Приоритеты и местность функторов определяются в сигнатуре системы. В противном случае приоритет остается нулевым (в рамках типа), тип определяется по первой букве имени, а местность определяется по контексту при первом же обнаружении имени (в правилах вывода, аксиомах, посылках, ...). При контекстном определении допускается только префиксная форма записи (т. е. без аргументов слева), а правые аргументы заключаются в скобки.

Несколько забегая вперед, отметим, что упомянутые выше временные функции являются по существу сокращенной записью ε-термов, которые не могут в данной версии присутствовать ни в посылках, ни в заключениях и появляются только в результате применения некоторых правил вывода. Поэтому мы опишем их более подробно при описании правил вывода.

РАСШИРЕННЫЕ ФОРМУЛЫ

Расширенные формулы являются расширением обычных формул за счет использования временных переменных и временных функций. Временные переменные и временные функции не могут входить в посылки и заключения и появляются при применении некоторых правил вывода. Их описание дается при описании правил вывода.

СХЕМЫ ФОРМУЛ

Схемы формул дополнительно (по сравнению с формулами) содержат временные переменные, 0-местные временные функции, абстрактные термы, абстрактные формулы, а также знаки локальной и глобальной подстановок. Более точно:

1. Индивидная переменная есть схема терма.
2. Временная индивидная переменная есть схема терма.
3. Если f есть n-местная функция, и $x_1,...x_n$ - схемы термов, то $f(x_1,...x_n)$ есть схема терма[1] .
4. Если w есть временная функция, то w - схема терма.
5. Абстрактный терм есть схема терма.
6. Ничто иное не есть схема терма.

1. Если P есть n-местный предикат, и $x_1...x_n$ - схемы термов, то $P(x_1,...x_n)$ есть схема формулы.
2. Если L есть n-местная логическая связка, и $P_1...P_n$ - схемы формул, то $L(P_1,...P_n)$ есть схема формулы.
3. Абстрактная формула есть схема формулы.
4. Глобальная подстановка есть схема формулы.
5. Если

   S - локальная подстановка,
   x и y - индивидные переменные,
   t - временная переменная,
   w - временная функция,
   T, T1, T2 - абстрактные термы,
   F, F1, F2 - абстрактные формулы,

то следующие выражения будут также являться схемами формул:

S x, w F
S x, t F
S x, T F
S T, x F
S T1, T2 F
S F1, F2 F

6. Ничто другое не есть схема формулы.

[1] В случае инфиксной или постфиксной записи аргументы могут быть расположены иначе.

ДЕРЕВО ПОИСКА ВЫВОДА

Дерево поиска вывода состоит из расширенных формул, знаков выводимости ("дырок") и вспомогательных деревьев поиска вывода. Иными словами:

1. Последовательность расширенных формул есть дерево поиска вывода.
2. Последовательность, один из двух последних элементов которой есть знак выводимости, а остальные - расширенные формулы, есть дерево поиска вывода.
3. Последовательность расширенных формул и деревьев поиска вывода есть дерево поиска вывода.
4. Последовательность, один из двух последних элементов которой есть знак выводимости, а остальные - расширенные формулы или деревья поиска вывода (причем дерево поиска вывода не может стоять после знака выводимости), есть дерево поиска вывода.
5. Ничто иное не есть дерево поиска вывода.

Следует отметить, что не все деревья поиска вывода, определенные таким образом, являются правильно построенными в традиционном смысле. Правильно построенное дерево определяется при помощи правил построения дерева (правил вывода), определяющих логическую систему. Поскольку мы допускаем работу с различными логическими системами, каждой из них будет соответствовать свое понятие правильно построенного дерева поиска вывода. Под начальным деревом поиска вывода мы понимаем последовательность формул (не расширенных ε-термами), где один из двух последних элементов есть знак выводимости. Формула, стоящая после знака выводимости, называется *заключением*, а остальные формулы - *посылками*. Дерево построения вывода, являющееся элементом другого дерева, называется его *подвыводом*. Правильно построенное дерево получается применением к начальному (или ранее построенному правильному) дереву одного из правил построения вывода выбранной логической системы.

Дерево поиска вывода *замкнуто*, если ни оно само, ни его подвыводы не содержат знака выводимости. Вывод считается *построенным*, если самое старшее дерево поиска замкнуто (нигде не осталось знаков выводимости).

НАСЛЕДОВАНИЕ ПОСЫЛОК

При применении правил вывода важно отличать те посылки, которые можно использовать в данном дереве поиска вывода(подвыводе). Это, во-первых, посылки самого этого дерева поиска, а во-вторых, посылки, унаследованные от старших выводов. В данной версии наследуются все посылки всех старших выводов. Посылки подвывода недоступны при работе в старшем по отношению к нему выводе.

ВИЗУАЛИЗАЦИЯ ДЕРЕВА ПОИСКА ВЫВОДА

При записи дерева поиска вывода мы используем либо полную, либо краткую форму записи в стиле натурального вывода.

При полной форме записи выводятся все элементы дерева; каждое дерево поиска вывода, за исключением самого внешнего, отделяется слева вертикальной чертой. Например:

```
1        A & B
3        | A
4        | |-
5        | B
6        A ⊃ B
```

строки 1-6 и 3-5 представляют деревья поиска вывода.

При краткой форме записи один из подвыводов рассматривается как текущий, рабочий. Выводятся только формулы, входящие в рабочий подвывод, и унаследованные посылки. Подвыводы же представлены одной из строк: "-->?" или "-->+" в зависимости от того, замкнуты ли они, т. е. содержат ли они внутри себя знаки выводимости. Приведенное выше дерево будет иметь в краткой форме записи следующий вид:

```
1        A & B
2        -->?
6        A ⊃ B
```

Однако при выборе в качестве текущего вывода подвывода 3-5 дерево в краткой форме записи будет представлено в виде:

```
1        A & B
3        A
4        |-
5        B
```

Т. е. при работе с подвыводом визуализируются только те строки, которые могут использоваться в этом подвыводе.

Для единообразия и удобства указания подвыводов мы будем включать строку, представляющую подвывод, и при полной форме записи:

1	A & B
2	-->?
3	| A
4	| |-
5	| B
6	$A \supset B$

ПРАВИЛА ПОСТРОЕНИЯ ВЫВОДА

Правила построения вывода позволяют модифицировать дерево поиска вывода. Они гарантируют построение правильных деревьев поиска из начального дерева или из других правильных деревьев. Собственно правильность должен обеспечить автор системы правил вывода в соответствии с выбранной им логической системой. Синтаксис и семантика правил вывода излагаются ниже.

Правила построения вывода распадаются на три класса: синтетические, аналитические и глобальные. Синтетические правила позволяют при наличии формул определенного вида добавить в текущем подвыводе новую формулу. Аналитические правила позволяют свести задачу, задаваемую текущим подвыводом, к подзадачам-подвыводам более низкого уровня. Глобальные правила позволяют произвести изменение всех формул вывода.

ГОМОЛОГИЧНОСТЬ ФОРМУЛЫ И СХЕМЫ ФОРМУЛЫ

Прежде чем перейти к подробному описанию правил построения вывода, необходимо уточнить, что имеется в виду под словами: "формула имеет вид". Речь при этом идет о том, что расширенная формула по структуре соответствует схеме формулы, т. е. формула гомологична схеме формулы.

Расширенная формула и схема формулы гомологичны, если расширенная формула может быть получена из схемы формулы при помощи следующих операций:

1. Замена всех вхождений абстрактного терма на терм.
2. Замена всех вхождений абстрактной формулы на формулу.
3. Замена всех вхождений абстрактной индивидной переменной на индивидную переменную.

Заметим, что схема формулы, содержащая временные переменные, временные функции или знаки локальной подстановки, не может быть гомологична никакой расширенной формуле.

СХЕМА ВЫВОДИМОСТИ И ЕЕ СООТВЕТСТВИЕ ДЕРЕВУ ПОСТРОЕНИЯ ВЫВОДА

Схемой вывода назовем последовательность, один из двух последних элементов которой может быть знаком выводимости, а остальные являются схемами формул.

Схема выводимости соответствует дереву построения вывода, если выполнены условия:

1. Каждой схеме формулы из схемы выводимости можно поставить в соответствие гомологичную ей формулу из дерева поиска вывода.

2. Схеме формулы, стоящей после знака выводимости, можно сопоставлять только заключение текущего дерева поиска вывода.

3. Схеме формулы, не стоящей после знака выводимости, можно сопоставлять либо посылки текущего дерева поиска вывода, либо унаследованные посылки (т. е. посылки, доступные в текущем дереве поиска вывода).

4. Подстановки, используемые для установления гомологичности формул и схем, должны быть согласованными. Т. е. одинаковым элементам разных схем должны при всех подстановках соответствовать одинаковые элементы.

В связи с последним пунктом можно говорить об одном наборе подстановок, устанавливающем гомологичность всех пар формул и схем и являющемся объединением наборов подстановок для каждой из пар. Таким образом, можно говорить о *системе подстановок, порождаемой соответствием схемы выводимости и дерева поиска вывода*. Обозначим сопоставляющую функцию через **Hom**. Тогда формула, соответствующая абстрактной формуле F, будет обозначаться **Hom(F)**, а переменной v будет соответствовать **Hom(v)**.

СТРУКТУРА ПРАВИЛ ПОСТРОЕНИЯ ВЫВОДА

Правила построения вывода по существу состоят из схемы выводимости, называемой также верхней частью правила, и порождающей схемы, называемой также нижней частью правила вывода. Эти две части разделены знаком перехода, например:

$$F1,\ F2 \Rightarrow F1\ \&\ F2\text{ , что соответствует обычному }\frac{F1,\ F2}{F1\ \&\ F2}.$$

Применение правила построения вывода состоит, во-первых, в нахождении соответствия схемы выводимости и дерева поиска вывода и, во-вторых, в изменении дерева поиска вывода в соответствии с порождающей частью. Структура порождающей части и порядок изменения вывода подробно описываются ниже. В случае невозможности установить соответствие схемы выводимости и дерева поиска вывода изменение вывода не производится.

Если в результате применения правила вывода одна из порождаемых формул совпадает с заключением, то этот вывод замыкается (удаляется знак выводимости).

ПОРОЖДЕНИЕ НОВЫХ ФОРМУЛ ПО СХЕМАМ ФОРМУЛ

Порождение формул по схемам основано на системе подстановок, которая возникает при установлении соответствия схемы выводимости и дерева поиска вывода, а затем при необходимости дополняется.

Абстрактные термы, абстрактные формулы и абстрактные индивидные переменные согласно системе подстановок заменяются соответственно на термы, формулы и индивидные переменные. Так, при применении правила

F1, F2 ⇒ F1 & F2

абстрактным формулам F1 и F2 будут поставлены в соответствие некоторые формулы вывода, например A(x) и A(y) & B. Тогда будет порождена формула A(x) & (A(y) & B).

Особым образом порождаются формулы по схемам, содержащим локальные подстановки.

Выражение **S v, T F** означает замену в формуле Hom(F) (т. е. в формуле, соответствующей F в системе подстановок) всех свободных вхождений переменной Hom(v) на терм, соответствующий T, т. е. Hom(T). При этом подстановка должна быть правильной.

Например, пусть

v соответствует x, т. е. Hom(v) = x;

T соответствует f(y1, y2), т. е. Hom(T) = f(x, y);

F соответствует A(x, z).

Тогда по схеме формулы S v, T F будет порождена формула A(f(y1, y2), z).

Выражение **S v, t F** означает, что в формуле, соответствующей F в системе подстановок (т. е. Hom(F)), должна быть произведена замена всех свободных вхождений переменной Hom(v) на временную переменную. При этом для подстановки генерируется каждый раз *новая* временная переменная (т. е. каждый раз ставится новый числовой индекс). В дальнейшем все вхождения временной переменной в формулы вывода можно заменить на любой терм. Таким образом, занесение в генерируемую формулу временных переменных, каждый раз новых, равносильно подстановке произвольного терма, но более удобно, поскольку не приходится выбирать терм сразу. Вновь генерируемая временная переменная соответствует временной переменной из схемы формулы, но не ее вхождению в схему. Поэтому все вхождения одной и той же временной переменной в схему будут замещены одной и той же новой временной переменной.

Выражение **S v, w F** означает, что в формуле, соответствующей F в системе подстановок (т. е. Hom(F)), должна быть произведена замена всех свободных вхождений переменной Hom(v) на временную функцию. При этом для подстановки генерируется каждый раз *новая* временная функция (т. е. каждый раз ставится новый числовой индекс). Аргументами этой временной функции становятся все свободные переменные формулы Hom(F). Временные функции по существу являются функциями Сколема, или же их можно рассматривать как сокращенную запись ε-терма.

По схеме **S F1, F2 F** порождается формула, полученная из Hom(F) заменой некоторых вхождений подформулы Hom(F1) на Hom(F2). Подстановка должна быть правильной, т. е. свободные переменные не должны попасть в область действия кванторов. При использовании этой схемы потребуется дополнительно определить вхождения подформулы, подлежащие замене. Эта схема широко применяется при работе со схемами формул.

По схеме **S T1, T2 F** порождается формула, полученная из Hom(F) заменой некоторых вхождений терма Hom(T1) на терм Hom(T2). Подстановка должна быть правильной. Кроме того, все вхождения терма, подлежащие замене, не должны содержать связанных вхождений переменных. При использовании этой схемы потребуется дополнительно определить вхождения подформулы, подлежащие замене. Используется, например, для замены равного равным.

По схеме **S T, v F** порождается формула, полученная из Hom(F) заменой некоторых вхождений терма Hom(T) на переменную Hom(v). Это необходимо, например, при навешивании квантора существования. Выбранные для замены вхождения терма не должны содержать связанных вхождений переменных. Сами же вхождения терма, выбранные для замены, не должны находиться в области действия квантора по x.

СИНТЕТИЧЕСКИЕ ПРАВИЛА

Правила этого типа позволяют только добавлять новые формулы к текущему выводу. Его отличительной чертой является отсутствие знака выводимости в схеме вывода. Порождающая часть синтетического правила состоит из списка схем формул. При установлении соответствия схемы вывода и текущего вывода, как отмечалось выше, порождается система подстановок. После этого происходит порождение новых формул по схемам формул, содержащимся в порождающей части правила. При этом может потребоваться расширение системы подстановок в случае, если не все элементы схем формул, нуждающиеся в замене, оказались занесенными в систему подстановок.

Порожденные формулы добавляются в текущий вывод непосредственно перед знаком выводимости. При выполнении правила

F1; F1 ⊃ F2 ⇒ F2

произойдет следующее изменение вывода:

```
1    A                1    A
2    A ⊃ B            2    A ⊃ B
3    |–               5    B
4    C                3    |–
                      4    C
```

при этом F1 соответствует A, а F2 соответствует B.

При включенном режиме обобщения порожденные формулы добавляются сразу после посылок (собственных или унаследованных), используемых верхней частью правила вывода. При этом они могут оказаться либо в текущем подвыводе, либо в одном из выводов, старших по отношению к текущему. В последнем случае добавленные формулы будут доступны также из других подвыводов старшего вывода.

Применение правила

F1; F1 ⊃ F2 ⇒ F2

вызовет следующее изменение вывода:

```
1    A                1    A
2    A ⊃ B            2    A ⊃ B
3    | D              7    B
4    | |–             3    | D
5    | E              4    | |–
6    C                5    | E
                      6    C
```

при этом F1 соответствует A, а F2 соответствует B.

Хотя вывод 3-5 и являлся текущим, формула 7, при включенном режиме обобщения, добавлена в старший вывод ниже формул, от которых она зависит.

При применении синтетического правила может быть добавлено сразу несколько формул, например при применении правила

F1 & F2 ⇒ F1; F2

Если список схем формул, представляющий порождающую часть, пуст, то применение правила приведет к удалению знака выводимости без добавления подвыводов, что замкнет текущий вывод. Таково правило

$F1;\ \neg\ F1 \mid\!-\ F2 \Rightarrow$

АНАЛИТИЧЕСКИЕ ПРАВИЛА

Правила данного типа позволяют сводить задачу к подзадачам. Синтаксически они отличаются наличием знака выводимости в схеме вывода.

Порождающая часть аналитического правила состоит из последовательности схем выводов, каждая из которых содержит знак выводимости. При установлении соответствия схемы вывода и текущего вывода, в том числе и для заключения, знак выводимости текущего вывода удаляется, а на его место вставляется последовательность подвыводов, формулы которых порождены по схемам формул, входящих в соответствующие схемы выводов. Например, применение правила

$F1 \vee F2 \mid\!-\ F3 \Rightarrow F1 \mid\!-\ F3\ /\ F2 \mid\!-\ F3$

вызовет следующее изменение вывода:

1	$A \vee B$	1	$A \vee B$
2	|-	2	-->?
3	C	4	| A
		5	| |-
		6	| C
		7	-->?
		8	| B
		9	| |-
		10	| C
		3	C

Формулы вновь созданного подвывода, стоящие перед знаком выводимости, называются *допущениями* данного подвывода.

ГЛОБАЛЬНЫЕ ПРАВИЛА

Глобальные правила в качестве порождающей части содержат только указание на некоторое преобразование всего вывода. В качестве таковых в настоящее время задействованы два вида глобальной подстановки. Они отличаются между собой только возможностью подставлять термы, содержащие свободные переменные.

Глобальная подстановка состоит в замене всех вхождений (во всех формулах) выбранного набора временных переменных на термы. Глобальная подстановка G1 не позволяет подставлять термы, содержащие свободные переменные; глобальная подстановка G допускает подстановку таких термов, но требует правильности подстановки. Ниже будет описан режим автоматической унификации, позволяющий находить систему подстановок, замыкающую подвыводы.

ОГРАНИЧЕНИЯ НА ПРИМЕНЕНИЕ ПРАВИЛ ВЫВОДА

Правила построения вывода могут содержать ограничения на применение. Первое из них связано с контролем свободного вхождения некоторой переменной в формулу, а второе - с контролем за варьированием переменных.

При описании правил вывода дополнительно задается список пар индивидных переменных и схем формул. В дальнейшем при установлении соответствия между схемами формул и формулами, а также при порождении формул не допускается свободное вхождение переменной в формулу, если они соответствуют переменной и схеме формулы, входящим в такую пару. Это соответствует обычному уточнению: "где v не входит в F свободно". Так, в правиле

$F1 \supset F2 \Rightarrow F1 \supset \forall\ x\ S\ x,\ y\ F2$

Hom(y) не входит в Hom(F1) свободно.

Дополнительно задаются также переменные, относительно которых правило является сильным. Это означает, что соответствующие им переменные в формулах вывода не должны входить свободно в допущения текущего подвывода. В противном случае правило не может быть применено. Это более сильный вариант ограничения, согласно которому формулы, к которым применяется сильное правило, не должны зависеть от допущений данного подвывода, содержащих свободные вхождения некоторой выделенной переменной.

ПРИМЕРЫ ЛОГИЧЕСКИХ СИСТЕМ

В качестве примеров использования предлагаемых средств для задания логических систем приводим ниже описания нескольких из них. Это система натурального вывода с ε-термом и равенством, классическое аксиоматическое исчисление предикатов, алгебра логики, аналитические таблицы (в форме натурального вывода).

НАТУРАЛЬНЫЙ ВЫВОД С РАВЕНСТВОМ

Правило вывода	*Название*	*Анализ*	*Ограничения*
|– F1 & F2 ⇒ |– F1 / |– F2	&_ai	&_i	
F1; F2 ⇒ F1 & F2	&_si	&_i	
F1 & F2 ⇒ F1	&_se_1	&_e_1	
F1 & F2 ⇒ F2	&_se_2	&_e_2	
|– F1 ∨ F2 ⇒ ¬ F1; ¬ F2 |– ⊥	∨_ai	∨_i_3	
F1 ∨ F2 |– F3 ⇒ F1 |– F3 / F2 |– F3	∨_ae	∨_e	
F1 ⇒ F1 ∨ F2	∨_si_1	∨_i_1	
F2 ⇒ F1 ∨ F2	∨_si_2	∨_i_2	
|– F1 ⊃ F2 ⇒ F1 |– F2	⊃_ai	⊃_i	
F1⊃F2 |– F3 ⇒ ¬ F3 |– F1 / F2 |– F3	⊃_ae	⊃_e_2	
F2 ⇒ F1 ⊃ F2	⊃_si	⊃_i_2	
F1 ⊃ F2; F1 ⇒ F2	⊃_se	⊃_e	
|– ¬ F ⇒ F |– ⊥	¬_ai	¬_i	
|– F ⇒ ¬ F |– ⊥	¬_ae_1	¬_e	
¬ F |- ⊥ ⇒ |– F	¬_ae_2	⊥_i	
¬ F; F ⇒ ⊥	⊥_si	⊥_i	
⊥ |– F ⇒	⊥_del	⊥_e	
|– ∀ v F ⇒ |– S v, w F	∀_ai	∀_i	сильное по v
∀ v F ⇒ S v, t F	∀_se	∀_e	
|– ∃ v F ⇒ ¬ ∃ v F |– S v, t F	∃_ai	∃_i_2	
F ⇒ ∃ v S T, v F	∃_si	∃_i	
∃ v F ⇒ S v, w F	∃_se	∃_e	сильное по v
⇒ G1	GlobSubst	none	
⇒ T = T	=_refl	=_refl	
T1 = T2; T2 = T3 ⇒ T1 = T3	=_trans	=_trans	
T1 = T2 ⇒ T2 = T1	=_symm	=_symm	
T1 = T2; F ⇒ S T1, T2 F	=_subst	=_subst	

КЛАССИЧЕСКОЕ АКСИОМАТИЧЕСКОЕ ИСЧИСЛЕНИЕ ПРЕДИКАТОВ

Правило вывода	*Название*	*Анализ*	*Ограничения*
$\Rightarrow$ F1; F1 $\supset$ F2 $\Rightarrow$ F2	ModPon	mp	
$\Rightarrow$ F1 & F2 $\supset$ F1	&1	&1	
$\Rightarrow$ F1 & F2 $\supset$ F2	&2	&2	
$\Rightarrow$ F1 $\supset$ (F2 $\supset$ (F1 & F2))	&3	&3	
$\Rightarrow$ F1 $\supset$ (F1 $\vee$ F2)	$\vee$1	$\vee$1	
$\Rightarrow$ F2 $\supset$ (F1 $\vee$ F2)	$\vee$2	$\vee$2	
$\Rightarrow$ (F1 $\supset$ F2) $\supset$ ((F3 $\supset$ F2) $\supset$ ((F1 $\vee$ F3) $\supset$ F2))	$\vee$3	$\vee$3	
$\Rightarrow$ F1 $\supset$ (F2 $\supset$ F1)	$\supset$1	$\supset$1	
$\Rightarrow$ (F1 $\supset$ (F2 $\supset$ F3)) $\supset$ ((F1 $\supset$ F2) $\supset$ (F1 $\supset$ F3))	$\supset$2	$\supset$2	
$\Rightarrow$ (F1 $\supset$ F2) $\supset$ ((F1 $\supset \neg$ F2) $\supset \neg$ F1)	$\neg$1	$\neg$1	
$\Rightarrow \neg \neg$ F $\supset$ F	$\neg$2	$\neg$2	
F $\Rightarrow$ $\forall$ v S v1, v F	gener	g	сильное по v1 v не входит в F своб.
$\Rightarrow$ $\forall$ v (F1 $\supset$ F2) $\supset$ (F1 $\supset$ $\forall$ v F2)	$\forall$1	$\forall$1	v не входит в F1 своб.
$\Rightarrow$ $\forall$ v F $\supset$ S v1, T F	$\forall$2	$\forall$2	
$\Rightarrow$ $\exists$ v (F1 $\supset$ F2) $\supset$ ($\exists$ v F1 $\supset$ F2)	$\exists$2	$\exists$2	v не входит в F2 своб.
$\Rightarrow$ F $\supset$ $\exists$ v S T, v F	$\exists$1	$\exists$1	
F $\Rightarrow$ S v1, v2 F	subst	subst	сильное по v1

АЛГЕБРА ЛОГИКИ

Правило вывода	*Название*	*Анализ*	*Ограничения*
F1 ~ F2; F3 ⇒ S F1, F2 F3	FormSubst	FormSubs	
F1 ~ F2 ⇒ F2 ~ F1	~_simm	~_simm	
F1 ~ F2; F2 ~ F3 ⇒ F1 ~ F3	~_tran	~_tran	
⇒ (F1 & F2) ~ (F2 & F1)	&_comm	&_comm	
⇒ (F1 ∨ F2) ~ (F2 ∨ F1)	∨_comm	∨_comm	
⇒ ((F1 & F2) & F3) ~ (F1 & (F2 & F3))	&_ass	&_ass	
⇒ (F1 ∨ (F2 ∨ F3)) ~ ((F1 ∨ F2) ∨ F3	∨_ass	∨_ass	
⇒ (F1 & (F1 ∨ F2)) ~ F1	∨_abso	∨_absorb	
⇒ F1 ∨ (F1 & F2) ~ F1	&_abso	&_absorb	
⇒ F1 ~ F1	~_refl	~_refl	
⇒ (F1 & (F2 ∨ F3)) ~ ((F1 & F2) ∨ (F1 & F3))	&_distr	&_distr	
⇒ (F1 & ¬ F1) ~ ⊥	contr	contr	
|- F1 ⇒ F1 |- T	|-_1	|-_1	
⇒ (F1 ∨ ¬ F1) ~ T	el	el	
F1 |- T ⇒ |- F1	|-_2	|-_2	

АНАЛИТИЧЕСКИЕ ТАБЛИЦЫ

Правило вывода	*Название*	*Анализ*	*Ограничения*
F1 & F2 ⇒ F1;F2	&__se	&_e	
¬ (F1 & F2) |– F3 ⇒ ¬ F1 |– F3 / ¬ F2 |– F3	¬&_ae	¬&_e	
⇒ G	GlobalSubs	GlobSubs	
F1 ∨ F2 |– F3 ⇒ F1 |– F3 / F2 |– F3	∨__ae	∨_e	
¬ (F1 ∨ F2) ⇒ ¬ F1 ;¬ F2	¬∨_se	¬∨_e	
F1 ⊃ F2 |- ⊥ ⇒ ¬ F1 |– ⊥ / F2 |– ⊥	⊃__ae	⊃_e	
¬ (F1 ⊃ F2) ⇒ F1; ¬ F2	¬⊃_se	¬⊃_e	
¬ ¬ F1 ⇒ F1	¬¬_se	¬¬_e	
∀ v F ⇒ S v, t F	∀__se	∀_e	
¬ ∀ v F ⇒ ¬ S v, w F	¬∀_se	¬∀_e	сильное по v
∃ v F ⇒ S v, w F	∃__se	∃_e	сильное по v
¬ ∃ v F ⇒ ¬ S v, t F	¬∃_se	¬∃_e	
¬ F |– ⊥ ⇒ |– F	⊥__se	⊥_e	
|– F ⇒ ¬ F |– ⊥	⊥__ai	⊥_i	

ПРИКЛАДНЫЕ ИСЧИСЛЕНИЯ

Прикладные исчисления формулируются на базе чистых логических систем. Для этого либо расширяется набор правил вывода, либо добавляются аксиомы прикладного исчисления. Ниже мы даём примеры прикладных систем, образованных добавлением аксиом к системе натурального вывода с равенством, приведенного в предыдущем разделе.

АБЕЛЕВА ГРУППА

1	$\forall x \forall y \forall z\ (x + y) + z = x + (y + z)$	axiom
2	$\forall x \forall y\ x + y = y + x$	axiom
3	$\forall x\ x + 0 = x$	axiom
4	$\forall x\ x + -(x) = 0$	axiom

Здесь сигнатура расширена 0-местной функцией (т. е. константой) 0, бинарной функцией + и унарной функцией -.

РОДСТВЕННЫЕ ОТНОШЕНИЯ

1	$\forall x \neg\ x\ A\ x$	axiom
2	$\forall x \exists y\ (y\ P\ x\ \&\ \forall z\ (y\ P\ z \supset z = y))$	axiom
3	$\forall x \exists y\ (y\ M\ x\ \&\ \forall z\ (y\ M\ z \supset z = y))$	axiom
4	$(x)W \equiv \neg\ (x)B$	axiom
5	$x\ P\ y \equiv x\ A\ y\ \&\ (x)B$	axiom
6	$x\ M\ y \equiv x\ A\ y\ \&\ \neg\ (x)B$	axiom

Сигнатура расширена одноместными предикатами B и W и двухместными предикатами A, P, M. Содержательно они соответствуют:

x A y	x - родитель y
x P y	x - отец y
x M y	x - мать y
(x)B	x - мужчина
(x)W	x - женщина

Такая формулировка родственных отношений предложена В. А. Смирновым [7].

Эта система демонстрирует использование префиксной и инфиксной форм записи предикатов.

АВТОМАТИЗАЦИЯ ПРОЦЕДУР

В настоящей версии системы заложено несколько алгоритмов автоматической работы с деревом поиска вывода. А именно: минимизация, генерализация, фильтрация и унификация. Эти алгоритмы активируются установкой соответствующих ритмов работы. В активированном состоянии они автоматически выполняются в соответствующих ситуациях.

Генерализация

При выполнении синтетического правила может сложиться ситуация, когда все формулы, являющиеся аргументами применяемого правила, находятся не в текущем подвыводе, а в вышестоящих, и доступны лишь в силу правила наследования посылок. Это означает, что данное синтетическое правило вывода могло быть применено еще до входа в данный подвывод, и тогда формулы, полученные в результате применения этого правила, были бы доступны во всех нижележащих выводах.

При включенном режиме генерализации, формулы, полученные в результате применения синтетического правила, добавляются сразу после последней из посылок, от которых они зависят.

Например, пусть надо вывести в системе натурального вывода:

```
|-
A & (B & C) ⊃ (A & B) & C
```

Применив ⊃_ai, имеем:

```
| A & (B & C)
| |-
| (A & B) & C
A & (B & C) ⊃ (A & B) & C
```

Применив &_ai дважды, имеем:

```
| A & (B & C)
| | |-
| | A
| |
| | |-
| | B
| A & B
| |-
| C
| (A & B) & C
A & (B & C) ⊃ (A & B) & C
```

Таким образом, задача свелась к трем подзадачам: выводу соответственно A, B и C.

Первый из этих трех подвыводов замкнется после применения &_se_1 к A & (B & C).

Для замыкания второго следует к A & (B & C) применить &_se_2, что даст B & C, к которой в свою очередь следует применить &_se_1.

Для замыкания же третьего подвывода следует повторно к A & B & C применить &_se_2, а к полученной B & C - &_se_2.

Однако при включенной генерализации повторного применения правила &_se_2 не потребуется, так как B & C будет уже доступна в третьем подвыводе:

При генерализации

```
1  | A & (B & C)
2  | B & C
3  | | | A              &_se_1, 1
4  | | | B              &_se_1, 2
5  | | A & B            &_ai_3, 4
6  | | C                &_se_2, 2
7  | (A & B) & C        &_ai, 3-5, 6
8  A & (B & C) ⊃ (A & B) & C
```

Без генерализации

```
1  | A & (B & C)
2  | | | A              &_se_1, 1
3  | | | B & C          &_se_2, 1
4  | | | B              &_se_1, 3
5  | | A & B            &_ai, 2, 3-4
6  | | B & C            &_se_2, 1
7  | | C                &_se_2, 6
8  | (A & B) & C        &_ai, 2-5, 6-7
9  A & (B & C) ⊃ (A & B) & C
```

Минимизация

При построении вывода могут появиться лишние элементы. Это, во-первых, формулы, от которых не зависит заключение, т. е. те, которые фактически не используются и могут быть удалены из вывода. Зависимость формул определим следующим образом: формула, полученная применением правила поиска вывода, зависит от формул, которые являлись аргументами этого правила, а также от формул, являющихся допущениями и заключениями тех подвыводов, которые являются аргументами правила. Тогда все формулы построенного вывода, не принадлежащие транзитивному замыканию отношения зависимости, могут быть удалены без разрушения вывода. Минимизация осуществляет такое удаление.

Второй случай появления лишних элементов вывода - это подвыводы без допущений. Подвывод без допущений является важным элементом дерева поиска вывода. Но необходимость в нем отпадает, как только такой подвывод замкнут или сведен к другим подвыводам. В этих случаях можно удалить подвывод, вставив принадлежащие ему формулы с анализом в вышестоящий вывод. Правильность вывода при этом не нарушается. Это также осуществляется при минимизации.

Фильтрация

Фильтрация правил вывода упрощает выбор правила, которое следует применить. Работа фильтра зависит от формулы, выбранной в выводе перед применением правил. Если выбранная формула - заключение, либо если выбрана "дырка", отбираются только аналитические и глобальные правила.

В любом случае для того чтобы правило прошло фильтр, необходимо, чтобы выбранная формула соответствовала первому аргументу правила (если в правиле есть аргументы), а для аналитического правила необходимо также соответствие заключения в правиле и в подвыводе.

Такая фильтрация правил значительно сокращает выбор правила. Это особенно заметно при работе с аналитическими таблицами.

Унификация

При выполнении глобальной подстановки может потребоваться указать систему подстановок вместо временных термов, такую, чтобы выполнение этой системы подстановки привело к замыканию всех подвыводов или хотя бы текущего подвывода. При включенном режиме унификации поиск такой системы подстановок осуществляется автоматически. Если найденная система позволяет замкнуть все ветви дерева поиска вывода, подстановка выполняется и вывод оказывается построенным.

Поиск подходящей системы подстановок осуществляется следующим образом. Последовательно просматриваются все незавершенные подвыводы и в каждом из них заключение сравнивается со всеми доступными формулами, стоящими выше знака выводимости. Если удается найти формулу, соответствующую заключению и не нарушающую согласованность системы подстановок, то происходит переход к следующему подвыводу, но уже с дополненной таблицей подстановок. В противном случае происходит возврат к предыдущему подвыводу (с удалением соответствующих строк из системы подстановок), и там ищется следующий вариант соответствия. Таким образом, список подстановок работает как стек по мере продвижения или возврата по подвыводам.

Для поддержки согласованности таблицы подстановок, при добавлении каждой новой подстановки в терм, соответствующий временной переменной, подставляются последовательно все предшествующие подстановки. Поэтому каждая из подстановок не содержит в терме временных переменных, содержащихся в предшествующих подстановках. Если терм, соответствующий временной переменной, содержит ее саму, то возможны два варианта: если терм совпадает с переменной, т. е. подстановка имеет вид t/t, то она может быть отброшена; в противном случае (t/f(t)) подстановка не приведет к соответствию формул и, значит, формулы друг другу не соответствуют.

Проверяется также, не нарушит ли добавление подстановки согласованности предшествующих подстановок. Например, при наличии подстановок

t1/f(t3)
t3/t2

нельзя добавлять подстановку t2/t1.

В случае, если добавляется подстановка вместо временной переменной, для которой уже есть подстановка, термы эти двух подстановок должны друг другу соответствовать, что может в свою очередь привести к добавлению новых подстановок.

ЗАКЛЮЧЕНИЕ

Мы видим многие недостатки описанного языка, которые затрудняли создание программной системы, а теперь сделали невозможным описание целого ряда логических систем. Мы предполагаем исправить их в следующей версии. Среди этих исправлений мы видим:

- использование нескольких формул после знака выводимости;

- установление меток на формулы (например, модализованные);

- дизъюнктивные подвыводы (достаточно замкнуть один из них);

- явное описание правила наследования посылок для различных типов подвыводов;

- расширение набора доступных средств автоматизации.

Мы предполагаем также добавить средства, позволяющие пользоваться пруверами из программы.

ЛИТЕРАТУРА

1. *R. Harper, F. Honsell, G. Plotkin.* A framework on defining logics//Proc. of the 2nd Annual Logic in Computer Sc. Conf. Ithaca, NY. June 1987.
2. *P. Suppes.* Uses of Artificial Intelligence in computer-based instruction. // Artificial Intelligence in Higher Education. Springer-Verlag, 1990.
3. В. Смирнов. Формальный вывод и логические исчисления. М., 1972.
4. *Смирнов А.В.* Система интерактивного доказательства теорем // Логические исследования. Выпуск 2 // М.,1993
5. *Smirnov A.,Novodvorsky A.* Logical systems description language // ILCSDP 93-02. Moscow, 1993
6. *С. Маслов.* Теория дедуктивных систем и ее применения. М., 1986.
7. Логика и компьютер. М., 1990.
8. *Sawamura, Minami,Ohashi.* Proof methods based on Sheet of Thought in EUODHILOS //Fujitsu lab. Research Report. 1992.

В.А. Смирнов

ПОИСК ДОКАЗАТЕЛЬСТВ В НАТУРАЛЬНОМ ИНТУИЦИОНИСТСКОМ ИСЧИСЛЕНИИ ПРЕДИКАТОВ С ε- СИМВОЛОМ И ПРЕДИКАТОМ СУЩЕСТВОВАНИЯ*

Существуют два типа систем натурального вывода: с прямым и непрямым правилом удаления квантора существования. Прямое правило удаления квантора существования формулируется с использованием языка с эпсилон-символом. Классическое исчисление предикатов с прямым правилом удаления квантора существования элегантно и является хорошей основой для организации систематической процедуры поиска доказательств. Мною была предложена процедура поиска доказательств для классического исчисления предикатов с прямым правилом удаления квантора существования [7]. А.В. Смирнов и А.Е. Новодворский [3] реализовали ее на компьютере. Хотелось бы построить интуиционистское исчисление предикатов с прямым правилом удаления квантора существования и на этой основе сформулировать алгоритм поиска доказательств. Однако на этом пути мы встречаемся с определенными трудностями. Если мы заменим классические пропозициональные правила интуиционистскими, то в результате получим логическую систему, более богатую, нежели интуиционистское исчисление предикатов. Действительно, допустим, что имеет место $\exists xA(x)$. По правилу удаления квантора существования получим $A(\varepsilon xA(x))$. По правилу введения импликации будем иметь $\exists xA(x)\supset A(\varepsilon xA(x))$. Из последней формулы по правилу введения квантора существования получаем $\exists y(\exists xA(x)\supset A(y))$. Запишем этот вывод формально

1	$\exists xA(x)$	допущение
2	$A(\varepsilon xA(x))$	$\exists$у; 1
3	$\exists xA(x)\supset A(\varepsilon xA(x))$	$\supset$в; 1-2
4	$\exists y(\exists xA(x)\supset A(y))$	$\exists$в; 3

Но как хорошо известно, последняя формула недоказуема интуиционистски. Аналогично в этой системе может быть доказан принцип конструктивного подбора Маркова

* Работа выполнена при поддержке Российского Фонда фундаментальных исследований, грант 93-06-10708.

1	$\forall x(A(x) \vee \neg A(x))$	посылка
2	$\neg\neg\exists xA(x)$	посылка
3	$\neg A(\varepsilon xA(x))$	допущение
4	$\exists xA(x)$	допущение
5	$A(\varepsilon xA(x))$	$\exists$у; 4
6	$\perp$	$\perp$в; 3,5
7	$\neg\exists xA(x)$	$\neg$в; 4-6
8	$\perp$	$\perp$в ;2,7
9	$\neg\neg A(\varepsilon xA(x))$	$\neg$в; 3-8
10	$A(\varepsilon xA(x)) \vee \neg A(\varepsilon xA(x))$	$\forall$у; 1
11	$A(\varepsilon xA(x))$	допущение
12	$\exists xA(x)$	$\exists$в; 11
13	$\neg A(\varepsilon xA(x))$	допущение
14	$\perp$	$\perp$в; 9,13
15	$\exists xA(x)$	$\perp$у; 14
16	$\exists xA(x)$	$\vee$у;11-12, 13-15

Где в этих доказательствах неинтуиционистские шаги? Ответ, видимо, неоднозначен. В книге [5] я предлагал наложить ограничения на непрямые правила вывода: потребовать, чтобы ε -термы не входили в устраняемые допущения и заключение. Однако это ограничение слишком стеснительно и неэлегантно. А.Г. Драгалин [1], а затем Д.Скотт ввели другое ограничение: в правилах введения квантора существования и удаления квантора общности мы должны потребовать, чтобы вводимый или исключаемый терм был не пуст. Это более изящное решение проблемы. В настоящей статье я предлагаю формулировку интуиционистского исчисления предикатов с ε-символом и предикатом существования в виде субординатного вывода. Затем обсуждается проблема систематического поиска выводов в этом исчислении.

Язык интуиционистского натурального исчисления с ε-символом $N\varepsilon I$ строится с помощью двух типов индивидных переменных: свободных - v,v1,v2,... и связанных - x,y,z,..., x1, x2,..., предикатных знаков, логических связок $\&,\vee,\supset,\neg$, знака абсурдности $\perp$, предиката существования E, кванторов $\forall$ и $\exists$, ε-символа, скобок и запятой. Одновременной индукцией определяем понятия квазитерма и квазиформулы. Термами и формулами являются квазитермы и квазиформулы, не содержащие свободных вхождений связанных переменных. Под подстановкой вместо свободной переменной v квазитерма t в квазиформулу или квазитерм имеется в виду замещение каждого вхождения свободной переменной v в квазитерм или квазиформулу квазитермом t. Подстановку будем обозначать Fv/t A и Fv/t t1. Подстановка правильна, если ни одна связанная переменная, имеющая свободные вхождения в t, не находится в области действия кванторов или ε-оператора по этой переменной. Ниже мы будем иметь дело только с правильными подстановками. Отметим, что каждая подстановка терма правильна. Каждую формулу, начинающуюся с квантора, мы можем представить в виде $\forall x Fv/xA$ и $\exists x Fv/xA$. Следуя Гильберту и Бернайсу, будем говорить, что терм t1 вложен в терм t2, если t2 имеет вид $Fv/t1\ t3$, где подстановка, естественно, правильна. Например, терм $\varepsilon xD(x)$ вложен в терм $\varepsilon yA(\varepsilon xD(x),\ y)$. Квазитерм $\varepsilon xB(x,y)$ подчинен квазитерму $\varepsilon yA(y,\varepsilon xB(x,y))$, т.е. первый квазитерм имеет свободные вхождения связанной переменной, по которой образован второй терм. В дальнейшем мы будем иметь дело с выводами, посылки и заключение которых не будут содержать ε-термов. Поэтому в NεI в выводы не будут входить формулы с подчиненными друг другу квазитермами.

Вывод имеет вид субординатного вывода, при этом каждый вспомогательный вывод будет иметь не более одного допущения. Определим, что мы будем понимать под субординатной последовательностью формул (с-последовательность), вхождением в нее формулы и ее последней формулой:

1. Пустая последовательность есть с-последовательность, она не имеет последней формулы и ни одна формула не входит в нее.

2. Если A формула, то A есть последовательность формул, A есть последняя формула и формула A входит в нее.

3. Если α есть с-последовательность и A формула, то

$$\begin{array}{l}\alpha\\ A\end{array}$$

есть с-последовательность, A её последняя формула и формула B входит в нее, если она входит в α или графически равна A.

4. Если α, β и γ суть с-последовательности формул и A формула, то

$$\begin{array}{l}\alpha\\ |\,\beta\\ A\end{array} \quad \text{и} \quad \begin{array}{l}\alpha\\ |\,\beta\\ |\,\gamma\\ A\end{array}$$

суть с-последовательности, A их последняя формула и формула B входит в них, если она входит в α или графически равна A.

Будем говорить, что формула C непосредственно выводима из формулы A (A и B), если

$$\frac{A}{C} \quad \left(\frac{A\ B}{C}\right)$$

есть одно из правил прямого вывода; формула C непосредственно выводима из пустого множества формул, если C есть аксиома, т.е. имеет место правило $\overline{C}$.

Теперь введем понятие натурального вывода для системы NεI.

1. A есть вывод из последовательности посылок A, A входит в A и A есть его последняя формула.

2. Если A есть аксиома, то A есть вывод из пустой последовательности посылок, A есть его последняя формула и входит в вывод.

3. Если α есть вывод из последовательности посылок Г и A посылка, то

$$\begin{array}{c}\alpha\\ A\end{array}$$

есть вывод из последовательности посылок ГA, A есть его последняя формула и формула B входит в вывод, если B входит в α или графически равно формуле A.

4. Если α есть вывод из последовательности посылок Г, формула C непосредственно выводима из формул, входящих в α (или является аксиомой), то

$$\begin{array}{c}\alpha\\ C\end{array}$$

есть вывод из последовательности посылок Г, C его последняя формула и B входит в вывод, если она входит в α или графически равна C. На применение правила введения квантора общности накладываем ограничение: если α есть вывод из последовательности посылок Г, формула A(w) входит в вывод α, но в формулы из Г не входит собственная переменная w, то

$$\begin{array}{l}\alpha\\ \forall x F w / x A(w)\end{array}$$

есть вывод из последовательности посылок Г.

5. Если α есть вывод из последовательности посылок Г и β есть вывод из посылок Δ,A и все формулы из Δ входят в α, B есть последняя формула β, то

$$\begin{array}{l}\alpha\\ |\beta\\ A \supset B\end{array}$$

есть вывод из посылок Г и $A \supset B$ есть его последняя формула.

5. Если α есть вывод из посылок Г, β есть вывод из посылок Δ_1,A и γ есть вывод из посылок Δ_2,B,формулы Δ_1 и Δ_2 входят в α, формула C есть последняя формула β и γ, то

$$\begin{array}{l}\alpha\\ A \vee B\\ |\beta\\ |\gamma\\ C\end{array}$$

есть вывод из посылок Г и C есть его последняя формула.

6. Если α есть вывод из последовательности посылок Г,А и $\perp$ есть его последняя формула, то

$$\begin{array}{c} \vert\alpha \\ \neg A \end{array}$$

есть вывод из посылок Г и $\neg$А есть его последняя формула.

Чтобы определение вывода NεC было полным, необходимо сформулировать прямые правила вывода. Прежде всего есть правило тождественного перехода: из А выводима А, обозначим его буквой I. Остальные правила вывода подразделяются на правила введения и удаления логических констант. В приводимой ниже таблице правил вывода мы для полноты записываем и непрямые правила (хотя они сформулированы в определении вывода).

Правила введения и удаления логических знаков для NεI

<table>
<tr>
<td>$\dfrac{A\supset B \quad A}{B}\ \supset e$</td>
<td>$\begin{array}{c} A\\ \cdot\\ \cdot\\ \cdot\\ B\end{array} \Rightarrow \begin{array}{c}\begin{array}{|l} A\\ \cdot\\ \cdot\\ \cdot\\ B\end{array}\\ A\supset B\end{array}\ \supset i$</td>
</tr>
<tr>
<td>$\dfrac{A\& B}{A} \quad \dfrac{A\& B}{B}\ \ \& e$</td>
<td>$\dfrac{A \quad B}{A\& B}\ \ \& i$</td>
</tr>
<tr>
<td>$\begin{array}{c} A\\ \vdots\\ C\\ и\\ B\\ \vdots\\ C\end{array} \Rightarrow \begin{array}{c} A\vee B\\ \begin{array}{|l} A\\ \vdots\\ C\end{array}\\ \begin{array}{|l} B\\ \vdots\\ C\end{array}\\ C\end{array}\ \vee e$</td>
<td>$\dfrac{A}{A\vee B} \quad \dfrac{B}{A\vee B}\ \ \vee e$</td>
</tr>
<tr>
<td></td>
<td>$\begin{array}{c} A\\ \vdots\\ \perp\end{array} \Rightarrow \begin{array}{c}\begin{array}{|l} A\\ \vdots\\ \perp\end{array}\\ \neg A\end{array}\ \neg i$</td>
</tr>
<tr>
<td>$\dfrac{\perp}{A}\ \perp e$</td>
<td>$\dfrac{\neg A \quad A}{\perp}\ \perp i$</td>
</tr>
</table>

$\dfrac{\forall x A(x) \quad E(t)}{A(t)}\ \forall e$	$\dfrac{A(w)}{\forall x A(x)}\ \forall i$
$\dfrac{\exists x A(x)}{A(\varepsilon x A(x)\ )}\ \exists e$	$\dfrac{E(t) \quad A(t)}{\exists x A(x)}\ \exists i$
$\dfrac{}{E(w)}$	$\dfrac{\exists x A(x)}{E(\varepsilon x A(x)\ )}\ Ei$

Кроме основных будем использовать в качестве официальных также два производных правила $\supset$e1 и $\supset$i2:

$$\begin{array}{c} \vdots \\ A \\ и \\ B \\ \vdots \\ C \end{array} \Rightarrow \begin{array}{l} A \supset B \\ \left|\begin{array}{l} \vdots \\ A \end{array}\right. \\ \left|\begin{array}{l} B \\ \vdots \\ C \end{array}\right. \\ C \end{array} \qquad \text{и} \qquad \frac{A}{B \supset A}$$

Теперь перейдем к процедуре поиска вывода. Поиск начинается с формулировки задачи: из посылок A1,...,An требуется вывести формулу B. Мы исходим из допущения, что ни посылки, ни заключение не содержат ε-символов и предиката существования. Не нарушая общности, можно также допустить, что они не содержат свободных переменных. Задача поиска вывода записывается в виде

$$\begin{array}{c} A1 \\ \vdots \\ An \\ \vdash \\ B \end{array}$$

Это, естественно, не вывод. Построение (поиск) вывода совершается с помощью двух типов шагов: синтетических и аналитических. Синтетический шаг состоит в применении некоторого прямого правила вывода. Аналитический шаг сводит задачу к подзадачам.

Сформулируем аналитические и синтетические правила поиска вывода для импликации. Задача вывода формулы A$\supset$B из некоторой последовательности посылок сводится к подзадаче построения вывода формулы B из той же последовательности посылок и дополнительного допущения A. Это аналитическое правило введения импликации. Мы его запишем в виде

$$
\begin{array}{c}
\vdash \\
A \supset B
\end{array}
\;\Rightarrow\;
\begin{array}{ll|l}
n+1 & & A \quad \text{допущение} \\
 & & \vdash \\
n+2 & & B \\
m & A \supset B & \supset_{в};\ n+1 - n+2
\end{array}
$$

где n - наибольший номер в первоначальной задаче. В анализе указаны официальные правила вывода (не правила поиска вывода).

Аналитическое правило удаления импликации состоит в сведении задачи вывода формулы С из формулы А⊃В, стоящей выше знака выводимости, к двум подзадачам: выводу формулы А из прежних посылок и выводу формулы С из прежних посылок и формулы В. Символически

$$
\begin{array}{l}
A \supset B \\
\vdash \\
C
\end{array}
\;\Rightarrow\;
\begin{array}{|l}
A \supset B \\
\vdash \\
A \\
B \\
\vdash \\
C \\
C
\end{array}
$$

Синтетическое правило удаления импликации разрешает написать выше знака выводимости формулу В, если формулы А и А⊃В входят в фигуру заключения выше знака выводимости:

$$
\begin{array}{l}
A \\
A \supset B \\
\vdash \\
C
\end{array}
\;\Rightarrow\;
\begin{array}{l}
A \\
A \supset B \\
B \\
\vdash \\
C
\end{array}
$$

Для симметрии можно сформулировать и синтетическое правило введения импликации: если в фигуру выше знака выводимости входит формула А, то непосредственно над знаком выводимости можно написать формулу В⊃А. Однако формулу В надо указать дополнительно. Символически

$$
\begin{array}{l}
A \\
\vdash \\
C
\end{array}
\;\Rightarrow\;
\begin{array}{c}
A \\
B \supset A \\
\vdash \\
C
\end{array}
$$

Если в фигуру поиска вывода выше знака выводимости входит формула А и А стоит ниже знака выводимости, то знак выводимости выбрасывается - это правило исключения знака выводимости

$$\begin{array}{ll} n & A \\ & \vdash \\ m & A \end{array} \Rightarrow \begin{array}{ll} n & A \\ & \dots \\ m & A \end{array} \quad \text{Реит.,n}$$

Если A стоит непосредственно над |-, то нижнее вхождение A и знак выводимости опускаются.

Если в фигуре поиска вывода нет вхождений знака |-, то фигура поиска будет выводом. При этом анализ дан в терминах официальных правил вывода. Ниже в таблице формулируются правила поиска вывода для связок, кванторов и предиката существования.

Syntetic	
Introduction	**Elimination**
$\begin{array}{c} A \\ \vdash \end{array} \Rightarrow \begin{array}{c} A \\ B\supset A \\ \vdash \end{array}$	$\begin{array}{c} A\supset B \\ A \\ \vdash \end{array} \Rightarrow \begin{array}{c} A\supset B \\ A \\ B \\ \vdash \end{array}$
$\begin{array}{c} A \\ B \\ \vdash \end{array} \Rightarrow \begin{array}{c} A \\ B \\ A\&B \\ \vdash \end{array}$	$\begin{array}{c} A\&B \\ \vdash \end{array} \Rightarrow \begin{array}{c} A\&B \\ A \\ \vdash \end{array} \quad \begin{array}{c} A\&B \\ \vdash \end{array} \Rightarrow \begin{array}{c} A\&B \\ B \\ \vdash \end{array}$
$\begin{array}{c} A \\ \vdash \end{array} \Rightarrow \begin{array}{c} A \\ A\vee B \\ \vdash \end{array} \quad \begin{array}{c} B \\ \vdash \end{array} \Rightarrow \begin{array}{c} B \\ A\vee B \\ \vdash \end{array}$	$\begin{array}{c} A\vee B \\ \neg A \\ \vdash \end{array} \Rightarrow \begin{array}{c} A\vee B \\ \neg A \\ B \\ \vdash \end{array}$
	$\begin{array}{c} A \\ \neg A \\ \vdash \end{array} \Rightarrow \begin{array}{c} A \\ \neg A \\ \bot \\ \vdash \end{array}$
$\begin{array}{c} A(w) \\ \vdash \end{array} \Rightarrow \begin{array}{c} A(w) \\ \forall x A(x) \\ \vdash \end{array}$ w не входит в допущ.	$\begin{array}{c} \forall x A(x) \\ E(t) \\ \vdash \end{array} \Rightarrow \begin{array}{c} \forall x A(t) \\ E(t) \\ A(t) \\ \vdash \end{array}$
$\begin{array}{c} A(t) \\ E(t) \\ \vdash \end{array} \Rightarrow \begin{array}{c} A(t) \\ E(t) \\ \exists x A(x) \\ \vdash \end{array}$	$\begin{array}{c} \exists x A(x) \\ \vdash \end{array} \Rightarrow \begin{array}{c} \exists x A(x) \\ A(\varepsilon x A(x)\ ) \\ \vdash \end{array}$
$\vdash \Rightarrow \begin{array}{c} E(w) \\ \vdash \end{array}$	$\begin{array}{c} \exists x A(x) \\ \vdash \end{array} \Rightarrow \begin{array}{c} \exists x A(x) \\ E(\varepsilon x A(x)\ ) \\ \vdash \end{array}$

Analitic	
Introduction	Elimination
$\begin{array}{l}\vdash\\ A\supset B\end{array} \Rightarrow \begin{array}{l}\mid A\\ \mid\vdash\\ \mid B\\ A\supset B\end{array}$	$\begin{array}{l}A\supset B\\ \vdash\\ C\end{array} \Rightarrow \begin{array}{l}A\supset B\\ \mid\vdash\\ \mid A\\ \mid B\\ \mid\vdash\\ \mid C\\ C\end{array}$
$\begin{array}{l}\vdash\\ A\& B\end{array} \Rightarrow \begin{array}{l}\mid\vdash\\ \mid A\\ \mid\vdash\\ \mid B\\ A\& B\end{array}$	$\begin{array}{l}A\& B\\ \vdash\\ C\end{array} \Rightarrow \begin{array}{l}A\& B\\ \mid A\\ \mid B\\ \mid\vdash\\ \mid C\\ C\end{array}$
$\begin{array}{l}\vdash\\ A\vee B\end{array} \Rightarrow \begin{array}{l}\mid\vdash\\ \mid A\\ A\vee B\end{array}$ *or* $\begin{array}{l}\mid\vdash\\ \mid B\\ A\vee B\end{array}$	$\begin{array}{l}A\vee B\\ \vdash\\ C\end{array} \Rightarrow \begin{array}{l}A\vee B\\ \mid A\\ \mid\vdash\\ \mid C\\ \mid B\\ \mid\vdash\\ \mid C\\ C\end{array}$
$\begin{array}{l}\vdash\\ \neg A\end{array} \Rightarrow \begin{array}{l}\mid A\\ \mid\vdash\\ \mid\bot\\ \neg A\end{array}$	$\begin{array}{l}\neg A\\ \vdash\\ \bot\end{array} \Rightarrow \begin{array}{l}\neg A\\ \mid\vdash\\ \mid A\\ \bot\end{array}$
$\begin{array}{l}\vdash\\ \forall xA(x)\end{array} \Rightarrow \begin{array}{l}\mid\vdash\\ \mid A(w)\\ \forall xA(x)\end{array}$	$\begin{array}{l}\forall xA(x)\\ \vdash\\ C\end{array} \Rightarrow \begin{array}{l}\forall xA(x)\\ \mid\vdash\\ \mid E(t)\\ \mid A(t)\\ \mid\vdash\\ \mid C\\ C\end{array}$
$\begin{array}{l}\vdash\\ \exists xA(x)\end{array} \Rightarrow \begin{array}{l}\mid E(t)\\ \mid\vdash\\ \mid A(t)\\ \exists xA(x)\end{array}$	-
$\begin{array}{l}\vdash\\ E(\varepsilon xA(x))\end{array} \Rightarrow \begin{array}{l}\mid\vdash\\ \mid \exists xA(x)\\ E(\varepsilon xA(x))\end{array}$	$\begin{array}{l}E(\varepsilon xA(x))\\ \vdash\\ C\end{array} \Rightarrow \begin{array}{l}E(\varepsilon xA(x))\\ \mid\exists xA(x)\\ \mid\vdash\\ \mid C\\ C\end{array}$

Специфически интуиционистскими являются аналитические правила удаления импликации, введение дизъюнкции, правило добавления заключения (вместо классического аналитического правила удаления отрицания), а также правила для кванторов и, естественно, правило для предиката существования. При формулировке кванторных правил используются временные переменные, ε-термы и свободные переменные. К сожалению, мы не можем обойтись без свободных переменных и сформулировать правило введения квантора общности в виде

если $A(\varepsilon x\rceil A(x))$, то $\forall x A(x)$.

Помимо перечисленных в таблице правил поиска вывода, имеются также два правила удаления знака $\vdash$:

$$\begin{array}{c} A \\ \vdash \\ A \end{array} \Rightarrow A \quad и \quad \begin{array}{c} \perp \\ \vdash \\ B \end{array} \Rightarrow \frac{\perp}{B},$$

правило введения произвольной формулы

$$\begin{array}{c} \vdash \\ B \end{array} \Rightarrow \begin{array}{c} \Vdash \\ \perp \\ B \end{array}$$

и, наконец, правило глобальной подстановки вместо временных переменных термов: во всем дереве поиска вывода разрешается заменить все вхождения временной переменной на терм.

Специфически интуиционистскими являются аналитические правила удаления импликации, введения дизъюнкции, правила добавления заключения (вместо классического аналитического правила удаления отрицания), а также правила для кванторов и, естественно, правило для предиката существования.

При введении временной переменной мы должны указывать список свободных переменных, входящих к данному моменту в фигуру поиска вывода. При глобальной подстановке вместо временной переменной t_i могут подставляться только термы, в которые, возможно, входят свободные переменные из списка, приписанного временной переменной t_i . Если в фигуру поиска вывода не входят свободные переменные к моменту введения временной переменной, то ей приписывается список свободных переменных v_1.

В отличие от классической логики интуиционистские правила не обратимы. Поэтому небезразличен порядок применения правил поиска вывода. Например, пусть требуется из $A \vee B$ вывести $B \vee A$. Если мы начнем решать задачу, применив сначала аналитическое правило введения дизъюнкции, то мы придем в тупик и не решим задачу.Однако задача последовательности применения правил поиска вывода решаема. По существу система аналитических правил есть иная формулировка логистического секвенциального исчисления. С.К.Клини [2] исследовал проблему перестановочности применений логических правил для интуиционистской логики. Опираясь на его результаты, мы можем разбить правила на следующие группы :

1. Правила удаления |- ;
2. Синтетические правила и аналитические правила введения конъюнкции, импликации, отрицания, квантора общности, аналитическое правило удаления дизъюнкции;
3. Аналитическое правило введения квантора существования;
4. Аналитические правила удаления импликации и отрицания;
5. Аналитическое правило введения дизъюнкции;
6. Правило введения произвольной формулы.

В каждом вспомогательном выводе отдается предпочтение правилам группы с меньшим номером. Если порядок применения правил нарушается, то поиск вывода может не дать искомого результата.

В отличие от классической логики, для поиска выводов в которой имеется одна фигура, в предложенной системе поиска для интуиционистской логики имеется правило "или"-ветвления. Это требует разработки новых програмных средств по сравнению с классической логикой.

ЛИТЕРАТУРА

1. *Драгалин А.Г.*. Интуиционистская логика и ε-символ Гильберта.// История и методология естественных наук. М.,МГУ,1979.
2. *Клини С.К.*. Перестановочность применений правил в генценовских исчислениях LK и LI.// Математическая теория логического вывода. М., Наука, 1967.
3. **Смирнов А.В., Новодворский А.Е.**. Язык описания логических систем.// Логические исследования вып.3, М.1995.
4. *Смирнов А.В.*. Система интерактивного доказательства теорем.// Логические исследования вып.2, М.,Наука, 1993.
5. *Смирнов В.А.*. Формальный вывод и логические исчисления.М., Наука, 1972.
6. *Smirnov V.A.*. Theory of Quantification and ε-calculi// Essays on mathematical and philosophical logic. Synthese Library vol.122, D. Reidel P.C.1979.
7. *Смирнов В.А.*. Поиск доказательств// Логика и компьютер.М., Наука, 1990.

В.Х.Хаханян

О ДОПУСТИМОСТИ ПРАВИЛА МАРКОВА В ИНТУИЦИОНИСТСКОЙ ТЕОРИИ МНОЖЕСТВ*

0. Хорошо известно, что правило Маркова является допустимым в таких предикативных теориях,как интуиционисткие арифметика и анализ [5]. Первые доказательства были достаточно сложными и использовали конструкции функционалов высоких типов или нормализацию выводов. В 1977 г. Х.Фридманом [3] (и, независимо, А.Драгалиным в 1979 г. [1]) был предложен простой метод доказательства допустимости правила Маркова для предикативных теорий высокого порядка и даже для непредикативной теории множеств, но в последнем случае отсутствовали аксиома объемности, а также параметры по множествам. В настоящей работе доказывается допустимость сильного правила Маркова с параметрами по множествам (но без параметров по натуральным числам) для двусортной теории множеств, включающей все аксиомы стандартной теории множеств. К теории добавлен принцип существования двойного пополнения множеств, что делает эту теорию равнонепротиворечивой с классическим вариантом ZF [4]. Рассматриваемая теория обладает также свойствами дизъюнктивности и полной экзистенциальности [6;2].

1. Дадим описание теории ZFI2+dc. В языке два сорта переменных (по натуральным числам и по множествам), бинарные предикаты равенства натуральных чисел, принадлежности натурального числа множеству и множества множеству, символы для всех примитивно-рекурсивных функций, логических связок и кванторов. Аксиомы теории включают интуиционистскую логику предикатов, арифметику и аксиомы теории множеств . существования двойного пополнения множеств. Формальная нотация большей части аксиом приводится ниже. Буквы m,n,k,... используются для обозначения переменных по натуральным числам, x,y,z,u,v,...-для переменных по множествам, t,r,p,q,...- для обозначения термов.

2. Рассматривается следующий вариант сильного правила Маркова с параметрами только по множествам:

$$(*)\qquad \frac{\forall n(\varphi(n,x)\vee\neg\varphi(n,x)),\ \ \neg\forall n\neg\varphi(n,x)}{\exists n\varphi(n,x)}$$

3. ТЕОРЕМА 1. В ZFI2+dc правило (*) является допустимым.

4. Расширим теорию ZFI2+dc до (ZFI2+dc)1, введя термы, получаемые по аксиоме выделения, т.е., если (ZFI2+dc)$\vdash$

* Работа выполнена при поддержке внебюджетного Фонда НИОКР МПС РФ.

$\exists x \forall y(y \in x \leftrightarrow \varphi(y))$, то вводим в язык константу $c(\varphi)$ и добавим аксиому $\forall y(y \in c(\varphi) \leftrightarrow \varphi(y))$ (см. [6]). Это расширение консервативное. Мы расширим язык последней теории, "расщепив" каждый его терм на множество других термов и построив универсум из новых термов. Предполагаем, что все исходные термы имеют ранги и строим универсум внешней индукцией по рангам термов. Пусть а - некоторое метапредложение.

5. Конструкция универсума Da

Пусть w - множество натуральных чисел.

$Do = \{c(\varphi,X) \mid (r(c(\varphi))=0) \wedge (X \subseteq w)\}$

$\alpha = \beta + 1$

$D\alpha = \{c(\varphi,X) \mid (r(c(\varphi))=\alpha) \wedge (X \subseteq (w \cup \{\cup\{D\gamma \mid \gamma<\alpha\}\})) \wedge (c(\phi,Y) \sim \alpha c(\eta, Z) \wedge c(\phi,Y) \in X \rightarrow c(\eta,Z) \in X) \wedge (\cup\{r(t)+1 \mid t \in X\} = \alpha)\}$. Далее вводим обозначения: если $t = c(\varphi,X)$, то $t- = c(\varphi)$ и $t+ = X$.

$(c(\phi,Y) \sim \alpha c(\eta,Z)) \rightleftharpoons (r(c(\phi)) = r(c(\eta)) \leq \alpha) \wedge \forall q(r(q)<\alpha \rightarrow (q \in Y \vee a \leftrightarrow q \in Z \vee a)) \wedge \forall n(n \in Y \vee a \leftrightarrow n \in Z \vee a)$.

Если α - предельный ординал, то $D\alpha = \cup\{D\gamma \mid \gamma<\alpha\}$. Универсум определяется обычно: $Da = \cup\{D\alpha \mid \alpha \in On\}$.

6. Константы языка теории (ZFI2+dc)2 есть элементы Da. К аксиомам добавим формулы: $\forall y(y \in c(\varphi,X) \leftrightarrow \varphi(y))$.

Лемма 1. (ZFI2+dc)2 является консервативным расширением (ZFI2+dc)1. Для доказательства заметим, что $1 \vdash \varphi- \Leftrightarrow 2 \vdash \varphi$, где формула $\varphi-$ получается из φ одновременной заменой вхождений всех термов $t \in Da$, входящих в φ, на t-.

7. Определим понятие выполнимости для замкнутых формул языка теории (ZFI2+dc)2 : $\models \varphi$

а) $\models t=r \rightleftharpoons (t=r \vee a)$ - истинно (t и r - арифметические термы);

б) $\models (t \in q) \rightleftharpoons (t \in q+ \vee a)$, где t - арифметический терм или t и q из Da;

в) $\models \perp \rightleftharpoons a$;

г) $\models (\varphi$ Ю $\phi) \rightleftharpoons (\models \varphi)$Ю$(\models \phi)$, где Ю - юнктор;

д) $\models \forall n \varphi(n) \rightleftharpoons \forall n \models \varphi(n)$;

е) $\models \forall x \varphi(x) \rightleftharpoons \forall t \in Da. \models \varphi(t)$;

ж) $\models \exists n \varphi(n) \rightleftharpoons \exists n \models \varphi(n)$;

з) $\models \forall x \varphi(x) \rightleftharpoons \exists t \in Da. \models \varphi(t)$.

8. ТЕОРЕМА 2 (ZFI2+dc) $\vdash \varphi$, то $\models \varphi$.

9. Проверка выполнимости аксиом логики предикатов: аксиома $\perp \rightarrow \varphi$: т.е. $a \Rightarrow \models \varphi$ доказывается индукцией по φ; остальные аксиомы проверяются непосредственно.

10. Проверка выполнимости аксиом арифметики.

Также осуществляется непосредственно с использованием внешней индукции по натуральным числам.

11. Проверка выполнимости теоретико-множественных аксиом.

а) объемность $\forall xyz(\forall n(n \in x \leftrightarrow n \in y) \wedge \forall u(u \in x \leftrightarrow u \in y) \wedge x \in z \rightarrow y \in z)$

Пусть t,q,p - фиксированные термы из Da. Предположим, что $\models t \in q$, $\forall n(\models n \in t \Leftrightarrow \models n \in q)$, $\forall r \in Da(\models r \in t \Leftrightarrow \models r \in q)$. Так как $\models t \in p \Leftrightarrow$

$t\in p+\vee a$, то разберем случаи: если a, то $q\in p+\vee a$ и $\models q\in p$; если $t\in p+$, то докажем, что $t\sim\alpha q$, где $\alpha=r(t)$. В силу второй посылки имеем $\forall n(n\in t+\vee a\Leftrightarrow n\in q+\vee a)$. Пусть $r(r)<\alpha$; в силу третьей посылки $r\in t+\vee a \Leftrightarrow r\in q+\vee a$ и даже $r\in t+ \Leftrightarrow r\in q+$, т.е. $r(t)=r(q)$. Теперь $q\in p+$, т.е.$\models q\in p$;

б) аксиома пары $\forall mnab\exists x(n\in x\wedge m\in x\wedge a\in x\wedge b\in x)$

Пусть $\beta=\max(r(t),r(q))$ и $c(\varphi)$ - константа, имеющая ранг $\beta+1$. Пусть $X=\{r\in Da\,|\,r\sim\beta t\vee r\sim\beta q\}\cup\{m,n\}$. Тогда $c(\varphi,X)=p\in Da$ и $r(p)=\beta+1$. Так как $t\in p+$, $q\in p+$, $m\in p+$, $n\in p+$, то аксиома пары выполнима;

в) выполнимость аксиом суммы и степени доказывается аналогичным образом (нотация этих аксиом может быть найдена в любом пособии по теории множеств).

г) аксиома бесконечности имеет вид: $\exists x\forall n(n\in x)$. Если $c(\varphi)$ - константа ранга 0, то $c(\varphi,X)$ - искомая константа из Da, где X содержит все натуральные числа.

д) схема выделения $\exists x(\forall y(y\in x\Leftrightarrow y\in a\wedge\varphi(y))\wedge\forall n(n\in x\Leftrightarrow n\in a\wedge\eta(n)))$, с обычным ограничением на φ и η, которые могут содержать параметры. Нужно доказать, что $\forall q\in Da\exists t\in Da$ такой, что $\forall r\in Da(\models r\in t \Leftrightarrow\models r\in q\wedge\models \varphi(r))\wedge\forall n(\models n\in t\Leftrightarrow\models n\in q\wedge\models\eta(n))$. Пусть $X=\{r\in Da\,|\models \varphi(r)\wedge\models r\in q\}\cup\{n\,|\models n\in q\wedge\models\eta(n)\}$. Пусть $\alpha=\cup\{r(r)+1\,|\,r\in X\}$ и пусть $r(c(\phi))=\alpha$. Тогда $c(\phi,X)$ - искомая константа.

Лемма 2. $t\sim\alpha q \Rightarrow(\models\varphi(t)\Leftrightarrow\models\varphi(q))$.

Эта лемма доказывается индукцией по построению формулы φ (см., напр., [2]). Из леммы следует, что $X\in Da$. Если теперь $\models n\in q\wedge\models\eta(n)$, то $(n\in q+\vee a)\wedge\models\eta(n)$, но тогда $n\in t+\vee a$, т.е. $\models n\in t$. В другую сторону и для множественной части схемы доказывается аналогично;

е) выполнимость аксиомы dc.

$\forall a\exists x(\forall y(y\in x\Leftrightarrow\neg\neg y\in a)\wedge(\forall n(n\in x\Leftrightarrow\neg\neg n\in a))$. Пусть $t\in Da$. В качестве требуемого терма также берем t. Рассмотрим выполнимость только множественной части. Пусть $\models \neg\neg(q\in t)$, т.е. $(q\in t+\vee a\Rightarrow a)\Rightarrow a$. Нужно доказать $q\in t+\vee a$. Предположим, что $\neg(q\in t+\vee a)$, т.е. $\neg(q\in t+)\wedge\neg a$. Тогда $\neg((q\in t+\vee a)\Rightarrow a)$ и $(q\in t+\vee a)$. Противоречие, и $\neg\neg(q\in t+\vee a)$, т.е. $(q\in t+\vee a)$;

ж) выполнимость аксиомы индукции.

$\forall x(\forall y(y\in x\rightarrow\varphi(y))\rightarrow\varphi(x))\rightarrow\forall x\varphi(x)$. Внешней трансфинитной индукцией по рангу терма докажем, что $\forall t\in Da.\models\varphi(t)$. В силу выполнимости посылки $\models\forall y(y\in q\rightarrow\varphi(y)) \Rightarrow \models \varphi(q)$.Пусть для всякого $p\in Da$ такого, что $r(p)<r(q)$ имеем $\models \varphi(p)$. Тогда $\models \forall y(y\in q\rightarrow\varphi(y))$ и $\models \varphi(q)$. Но тогда $\forall q\in Da.\models\varphi(q)$;

з) выполнимость схемы подстановки (collection).

$(\forall x(x\in t\rightarrow\exists y\varphi(x,y))\wedge\forall n(n\in t\rightarrow\exists y\phi(n,y))) \rightarrow \exists B(\forall x(x\in t\rightarrow\exists y(\varphi(x,y)\wedge y\in B))\wedge\forall n(n\in t\rightarrow\exists y(y\in B\wedge\phi(n,y))))$. Рассмотрим выполнимость только множественной части схемы. Пусть $q\in Da$; $\models q\in t \Rightarrow \exists r\in Da.\models \varphi(q,r)$. Имеем $\forall q(q\in t+ \Rightarrow \exists r.\models \varphi(q,r))$. Тогда $\exists B.\forall q\in t+.\exists r\in B.\models \varphi(q,r)$. Полагаем $\alpha=\sup\{r(r)+1\,|\,r\in B\}$ и пусть для некоторой константы $c(\eta)$, $r(c(\eta))=\alpha$. Тогда $c(\eta,B)$ - искомая константа (конечно, только для множественной части схемы). Действительно, пусть $q \in t + \vee a$. Если a, то $\models \exists y(y \in c(\eta, B) \wedge \varphi(q,y))$. Если $q \in t+$, то $\exists r \in Da(r \in B \wedge \models \varphi(q,r))$, что и доказывает выполнимость заключения схемы для множественной части. Теорема 2 из пункта 8 доказана.

12. Доказательство теоремы 1 из пункта 3.
Пусть $(ZFI2+dc) \vdash (\forall n(\varphi(n) \vee \neg\varphi(n))) \wedge \neg\forall n \neg\varphi(n))$ (для простоты считаем, что параметров по множествам нет). В качестве a берем метапредложение $(ZFI2+dc) \vdash \exists n\varphi(n)$. В силу второй посылки имеем $\models (\forall n(\varphi(n) \to \perp) \to \perp)$, т.е. $\models \forall n \neg\varphi(n) \Rightarrow$ a. Докажем $\models \forall n \neg\varphi(n)$: $\forall n((ZFI2+dc) \vdash \varphi(n)$ или $(ZFI2+dc) \vdash \neg\varphi(n))$. В первом случае имеем $(ZFI2+dc) \vdash \exists n\varphi(n)$, т.е. a и, следовательно, $\models \neg\varphi(n)$. Во втором случае также $\models \neg\varphi(n)$ в силу теоремы 2. Но тогда истинно a, т.е. $(ZFI2+dc) \vdash \exists n\varphi(n)$, ч.т.д. Отметим также (см.[1]), что в построенной модели выполняется любая формула языка.

ЛИТЕРАТУРА

1. *Драгалин А.* Новые виды реализуемости и правило Маркова // ДАН СССР. Т.251, 3, 1980, стр.534-537.
2. *Хаханян В.* Независимость аксиомы "collection" от принципа "DC" в интуиционистской теории множеств // Известия ВУЗов, Математика, 2, 1993, стр.81-83.
3. *Friedman H.* Classically and intuitionistically provably recursive functions // Lecture Notes in Mathematics, 669, 1977, pp.21-27.
4. *Powell W.* Extending Godel's negative interpretation to ZF // The Journal of Symbolic Logic V.40, 2, 1975, pp.221-229.
5. *Troelstra A.* Metamathematical investigations of intuitionistic arithmetic and analysis // Lecture Notes in Mathematics, 344, 1973 (chapter V).
6. *Myhill J.* Some properties of intuitionistic Zermelo-Fraenkel set theory // Ibid. 337, 1973, pp.206-231.

Закревский А.Д. (Минск)

ЭКСПЕРТНАЯ СИСТЕМА ЛОГИЧЕСКОГО РАСПОЗНАВАНИЯ КАК СРЕДСТВО ОБУЧЕНИЯ МЕТОДАМ ЛОГИЧЕСКОГО ВЫВОДА

В Институте технической кибернетики АН Беларуси разработана экспертная система логического распознавания - ЭКСИЛОР, ориентированная на приложения в разнообразных предметных областях [1]. Она снабжена интерфейсами эксперта и пользователя (распознавателя) и развитыми средствами отображения данных и знаний (в словесной, символической, графической и матричной формах), а также подсистемой объяснений своих действий. Это позволяет использовать систему для обучения реализуемым в ней методам логического вывода.

В системе принята простая модель мира: мир рассматривается как совокупность A некоторых объектов, которые характеризуются значениями признаков $x(i)$, образующих множество X. Каждому признаку $x(i)$ соответствует конечное множество $V(i)$ альтернативных значений $v(j)$, а прямое произведение этих множеств образует пространство многозначных признаков M. Элементы из совокупности A отождествляются с некоторыми элементами из M и могут рассматриваться как абстрактные модели объектов исследуемой предметной области.

Используемая при распознавании объектов информация делится на данные и знания. Данные - информация об отдельных объектах, полная, когда определены значения всех признаков, и частичная - в противном случае. Типична ситуация, в которой данные характеризуют некоторую представительную выборку S из A, причем мощности рассматриваемых множеств сильно различаются: $M >> A >> S$. Знания - информация о предметной области в целом, представляемая в системе ЭКСИЛОР набором импликативных закономерностей, запрещающих определенные комбинации значений некоторых признаков [2].

Для представления данных и знаний в каждой предметной области используется свой трафарет, соответствующий двухъярусному дереву типа "признаки - значения", например:

вес - легкий, средний, тяжелый;
рост - низкий, средний, высокий;
цвет - красный, синий, зеленый, черный.

По данному трафарету можно составить описание некоторого объекта в словесной форме, например, "вес - средний, рост - низкий, цвет - зеленый" либо представить его в более компактной форме, в виде секционированного булева вектора 010.100.0010, секции (домены) которого соответствуют признакам, а их компоненты - значениям. Если вектор представляет частичные данные об объекте, некоторые его домены содержат более чем по одной единице. В общем случае кванты данных представляются компонентами со значением 0, интерпретируемыми как высказывания типа "признак $x(i)$x(i) не обладает значением $v(j)$v(j)". Вектор в целом интерпретируется как конъюнкция таких утверждений.

Закономерности представляются аналогичными векторами, однако интерпретируются они иначе - как дизъюнкции высказываний типа "признак $x(i)$x(i) имеет значение $v(j)$v(j)", соответствующих компонентам со значением 1. Например, вектор 101.010.0110 при такой интерпретации означает, что любой объект рассматриваемой предметной области оказывается низким или высоким, или среднего веса, или синим, или зеленым. Совокупность известных закономерностей представляется секционированной (по столбцам) булевой матрицей D, называемой матрицей дизъюнктов. Закономерности могут вводиться в систему экспертом либо находиться системой самостоятельно, путем индуктивного вывода из данных. При этом отыскиваются дизъюнкты, не противоречащие данным, выдвигаются соответствующие гипотезы о закономерностях, оценивается их достоверность и отбираются достаточно достоверные.

Большинство задач, решаемых в рамках системы ЭКСИЛОР, сводится к дедуктивному выводу типа доказательства теорем. Не составляет исключения и основная задача распознавания, когда для некоторого объекта с заданными частичными данными требуется найти значение целевого признака, непосредственное измерение которого почему-либо не представляется возможным. Среди других задач аналогичной комбинаторной сложности можно упомянуть следующие:

а) доказать, что некоторый дизъюнкт d логически следует из системы дизъюнктов, представленной матрицей D, или опровергнуть это предположение,

б) найти все простые дизъюнкты, следующие из D,

в) устранить избыточность в матрице дизъюнктов D, удалив из нее дизъюнкты, следующие из остающихся,

г) найти минимальную матрицу дизъюнктов, эквивалентную исходной.

Эти и некоторые другие задачи комбинаторно сводятся к следующей:

д) выяснить возможность существования объекта, не противоречащего некоторой матрице дизъюнктов D' - задача выполнимости КНФ конечного предиката. Если такой объект не существует, матрица D' называется вырожденной.

Как правило, матрица D' оказывается минором матрицы D, получаемым в результате удаления из нее некоторых строк и столбцов. Например, дизъюнкт d логически следует из матрицы D, если и только если вырожден минор, получаемый из D путем удаления всех столбцов, соответствующих компонентам вектора-дизъюнкта d со значением 1. При распознавании некоторого объекта, характеризуемого вектором-конъюнктом k, задающим частичные данные об объекте, можно утверждать, что объект не может обладать значением $v(j)$ признака $x(i)$, если и только если вырожден минор, получаемый из D при удалении столбцов, соответствующих компонентам вектора k со значением 0 и всех столбцов домена признака $x(i)$, кроме соответствующего значению $v(j)$ [3].

Дедуктивный вывод может осуществляться как в матричной форме, так и в более привычной - в виде цепочки умозаключений, каждое с двумя посылками и одним следствием, представляющих собой обобщение правила резолюции Робинсона на конечные предикаты. Например, из пары дизъюнктов 101.010.0110 и 001.100.0011 по этому обобщенному правилу находятся дизъюнкты-следствия 101.000.0111 и 101.110.0010. По желанию пользователя система может оформлять вывод в словесной форме, а также давать детальную расшифровку каждого шага. Цепочка логического вывода подвергается процедуре минимизации.

Представляет интерес контроль действий эксперта, пополняющего базу знаний. При вводе нового дизъюнкта система может находить ответы на следующие вопросы, сообщая их эксперту:

а) не противоречит ли дизъюнкт имеющимся данным ?

б) не является ли он логическим следствием уже имеющихся дизъюнктов ?

в) какие еще следствия вытекают из этого дизъюнкта с учетом прежних? (эксперт вынужден либо согласиться с этими следствиями, либо отказаться от ввода дизъюнкта).

Система ЭКСИЛОР может быть использована для обучения методам разработки абстрактных моделей различных предметных областей и формализации задач обнаружения закономерностей и распознавания, а также методам индуктивного и дедуктивного вывода, решающим эти задачи.

ЛИТЕРАТУРА

1. *Закревский А.Д.* ЭКСИЛОР - экспертная система логического распознавания // Управляющие системы и машины, 1992, 5/6, с.118-125.
2. *Zakrevsky A.D.* Implicative regularities in formal cognition models// LMPS'87 Abstracts. - 1987. Vol.1, p.373-375.
3. *Закревский А.Д.* Матричный аппарат логического вывода в конечных предикатах // Философские основы неклассических логик: Тр. науч.-исслед. семинара по логике. М.: Ин-т философии АН СССР, 1990, с.70-80.

А.Е.Болотов, В.А.Бочаров, А.Е.Горчаков

АЛГОРИТМ ПОИСКА ВЫВОДА ДЛЯ НАТУРАЛЬНОГО КЛАССИЧЕСКОГО ИСЧИСЛЕНИЯ ВЫСКАЗЫВАНИЙ

В статье будет изложен в идейном плане алгоритм поиска вывода для натурального исчисления классической логики высказываний. Своеобразие этого алгоритма, реализованного на языке "Си" для IBM PC, состоит в том, что авторам удалось формализовать эвристики, которые, как нам кажется, применяются в естественном рассуждении. Это позволило найти эффективную процедуру для осуществления субординатных выводов. Система, которая была взята за основу, представляет собой следующее натуральное классическое исчисление высказываний.

Формулировка натурального варианта исчисления высказываний.

Среди исходных связок принимаются $\sim$, &, $\vee$, $\supset$.

Формула $A=B$ понимается как $(A\supset B)\&(B\supset A)$.

Правила вывода:

1. &и: из $A\&B$ выводимо как A, так и B
2. $\vee$и: из $A\vee B$ и $\sim A$ выводимо B
3. $\supset$и: из $A\supset B$ и A выводимо B
4. $\sim$и: из $\sim\sim A$ выводимо A
5. &в: из A и B выводимо $A\&B$
6. $\vee$в: как из A, так и из B выводимо $A\vee B$
7. $\supset$в: из B выводимо $A\supset B$
8. $\sim$в: из B, $\sim B$ выводимо $\sim A$

В правилах $\supset$в и $\sim$в формула A является последней из имеющихся в выводе посылок, при этом все формулы, начиная с данной формулы A до результата применения правила, в дальнейших шагах вывода принимать участие не могут. Будем называть эти формулы для краткости исключенными из вывода. Выводом некоторой формулы A называется конечная непустая последовательность формул, каждая из которых есть либо одна из посылок, либо получается из других формул вывода по одному из правил вывода. Доказательство есть вывод из пустого множества неисключенных посылок. Последняя формула доказательства называется теоремой.

Идея алгоритма состоит в том, что по некоторой заданной выводимости создаются две последовательности формул. Первая последовательность представляет собой собственно формулы вывода, вторая - формулы-цели. Изначально эти две последовательности формируются следующим образом:

Если необходимо осуществить вывод некоторой формулы W из множества посылок W1,...,Wk, то формулы W1,...,Wk составляют исходный список формул вывода, а формула W помещается в список целей. При этом формула W считается главной целью и если она достигается, то вывод считается законченным.

Если необходимо осуществить вывод W из пустого множества посылок, т. е. требуется осуществить доказательство W, то список вывода является пустым, а формула W помещается в список целей. Естественно, эта формула и является главной целью.

Алгоритм состоит в том, что по формулам вывода осуществляются процедуры: Процедура 1: формируется последовательность формул вывода;
Процедура 2: формируются новые цели, которые являются подцелями главной цели;
Процедура 3: осуществляется проверка достижимости последней цели в списке целей.

С другой стороны, по формулам-целям осуществляются процедуры:

Процедура 4: формируются подцели, помещаемые в последовательность целей;

Процедура 5: выбираются новые дополнительные посылки, помещаемые под очередным номером в вывод;

Процедура 6: сигнализируется необходимость автоматического применения в выводе соответствующих правил введения.

Процедура 1 состоит в нахождении одной или двух формул, к которым можно применить соответствующие правила исключения логических связок. Если такие формулы обнаруживаются, то вывод пополняется результатом применения данного правила. Никакие другие правила вывода к формулам вывода не применяются.

Процедура 2. Эта процедура выполняется в том случае, когда все возможные указанные в процедуре 1 правила вывода применены, последней целью в последовательности является "F" (противоречие), но при этом эта цель не достигнута (см.процедуру 3). Какие именно вводятся подцели, определяется видом содержащихся в выводе формул.

2.1. Если в выводе имеется импликативная формула вида $Wl \supset Wk$, то в качестве подцели берется Wl,

2.2. Если в выводе имеется дизъюнктивная формула вида $Wl \vee Wk$, то в качестве подцели берется $\sim Wl$,

2.3. Если в выводе встречается формула $\sim(Wl \vee Wk)$, то в качестве подцели берется $Wl \vee Wk$,

2.4. Если в выводе встречается формула $\sim(Wl \,\&\, Wk)$, то в качестве подцели берется $Wl \,\&\, Wk$,

2.5. Если в выводе встречается формула $\sim(Wl \supset Wk)$, то в качестве подцели берется $(Wl \supset Wk)$.

Никакие другие формулы не служат источником новых целей, поскольку к ним автоматически применяется процедура 1.

Процедура 3. Если последней целью является некоторая формула, то она считается достижимой просто по факту наличия в выводе графически равной ей формулы. Если же последней целью является F, то она считается достигнутой, если в выводе содержатся формулы вида A и ~A. Достигнутая цель из списка целей устраняется, а очередной целью становится предыдущая.

Процедуры 4 и 5 опишем вместе, так как они в некоторых случаях применяются одновременно. Данные процедуры начинают использоваться в том случае, когда уже применена процедура 1, целью является некоторая формула, и при этом она не достигнута. В этом случае в зависимости от вида очередной (последней) цели поступаем следующим образом:

4-5.1. Если целью является формула вида $Wi \supset Wj$, то Wj становится новой целью, а Wi берется в качестве посылки.

4-5.2. Если целью является формула вида Wl & Wk, то Wl и Wk становятся новыми целями. При этом сначала в обязательном порядке требуется достигнуть цель Wl, и только после ее достижения - цель Wk.

4-5.3. Если целью является формула вида $Wl \vee Wk$, то подцелями становятся Wl или Wk. Если ни одна из этих подцелей не достигается, то в качестве новой посылки берется формула $\sim(Wl \vee Wk)$, цели Wl и Wk убираются, а новой целью становится F.

4-5.4. Если целью является пропозициональная переменная p, то в качестве новой посылки берется ее отрицание - ~p, а целью становится F.

4-5.5. Если целью является формула вида ~A, где A - произвольная формула, то в качестве новой посылки берется формула A, а новой целью становится F.

Процедура 6. Каждый случай достижения некоторой цели сигнализирует о необходимости выполнить некоторые шаги вывода. В большинстве случаев необходимо в аввтоматическом режиме выполнить соответствующее правило введения логической связки. Более детально это описывается следующим образом:

6.1. Если непосредственной надцелью является формула вида Wl & Wk, а последними в списке целей непосредственными подцелями этой формулы являются формулы Wl и Wk, и если формула Wl достигнута, то это служит сигналом необходимости перейти к достижению цели Wk. В том же случае, когда достигнута и цель Wk, т. е. достигнуты обе подцели, то это служит сигналом к осуществлению в выводе правила "&в" и получению тем самым в последовательности вывода формулы Wl&Wk. Обращаем внимание, что это означает достижение и цели Wl & Wk.

6.2. Если непосредственной надцелью является формула вида $Wl \vee Wk$, а последними в списке целей являются формулы Wl, Wk, и если одна (любая) из этих целей достигнута, то это служит сигналом к осуществлению в выводе правила "$\vee$в", т. е. включению в последовательность вывода формулы $Wl \vee Wk$. Тем самым достигается и цель $Wl \vee Wk$.

6.3. Если непосредственной надцелью является формула вида $Wl \supset Wk$, а последней в списке целей непосредственной ее подцелью является формула Wk и она достигнута, то это служит сигналом к осуществлению в выводе правила "$\supset$в", т. е. включению в последовательность вывода формулы $Wl \supset Wk$. Тем самым достигается и цель $Wl \supset Wk$.

6.4. Если непосредственной надцелью является формула W, где W формула произвольного вида, а непосредственной последней ее подцелью является цель F, и цель F достигнута, то это служит сигналом применения в выводе правила "$\sim$в". Это либо сразу же приводит к получению в выводе формулы W, либо она получается после применения правила "$\sim$и". В любом из этих случаев цель W будет достигнута.

Ниже приводится доказательство закона Пирса, осуществленное компьютером в автоматическом режиме на основе описанного алгоритма. Данная теорема взята из множества примеров, на которых отлаживалась данная компьютерная программа.

Требуется доказать: $((p\supset q)\supset p)\supset p$

0:	$(p\supset q)\supset p$, посылка
1:	$\sim p$, посылка
2:	p, посылка
3:	$\sim q$, посылка
4:	$\sim\sim q$, $\sim$в из 1, 2
5:	q, $\sim$и, из 4
6:	$p\supset q$, $\supset$в 2 к 5
7:	p, $\supset$и, из 0, 6
8:	$\sim\sim p$, $\sim$в из 1, 7
9:	p, $\sim$и, из 8
10:	$((p\supset q)\supset p)\supset p$, $\supset$в 0 к 9

Объясним шаги вывода, строившегося по описанному выше алгоритму. Так как требуется доказать формулу $((p\supset q)\supset p)\supset p$, то исходный список вывода пуст, а главной целью является сама эта формула. По этой формуле, согласно процедурам 4 и 5, в качестве первой посылки в вывод помещается формула $(p\supset q)\supset p$, а целью становится формула p. Так как эта цель не достижима, то по процедурам 4 и 5 в вывод помещается посылка $\sim p$, а целью становится F. Цель F не достижима, а поэтому по процедуре 2 первая посылка служит источником новой цели, которой становится формула $p\supset q$. Вновь по процедурам 4 и 5 в качестве новой посылки берется формула p, а в качестве новой цели - формула q. Опять-таки, последняя цель не достижима, а поэтому по процедурам 4 и 5 берется новая посылка $\sim q$, а новой целью становится F. На этом шаге автоматического поиска вывода машина устанавливает, что цель F достигнута, так как в выводе имеется противоречие - формулы p и $\sim p$ (шаги вывода 1 и 2). Это служит сигналом для применения в выводе правила "введения отрицания". Именно таким образом в выводе появляется 4-й шаг - формула $\sim\sim q$. При этом все формулы, начиная с последней посылки (формулы 3) и вплоть до результата применения этого правила считаются из вывода устраненными (что помечено слева от номеров шагов вертикальной линией, длина которой равна числу строчек исключаемых формул). (Заметим, что хотя в выводе уже ранее содержалось противоречие, данное правило не применялось, так как на это не указывала никакая из целей.) Цель F, так как она достигнута, исключается и целью становится предыдущая цель - формула q. Формула q легко достигается, так как к 4 шагу можно применить правило "исключения отрицания". Достижение формулы q служит сигналом для автоматического применения правила "$\supset$в", что дает формулу 6 вывода.

Остальные шаги вывода очевидны и могут быть легко обоснованы читателем по аналогии с проведенными шагами.

Рассмотренный нами пример приведен с целью наглядной иллюстрации работы введенных в алгоритм процедур. Вместе с тем, далеко не всегда можно быстро обосновать ту или иную теорему. Примером может служить следующее доказательство так называемой теоремы Гаубера (текст взят "с экрана" компьютера):

$$((((p\supset q)\&(r\supset s))\&(p\vee r))\&\sim(q\&s))\supset((q\supset p)\&(s\supset r))$$

0: $(((p\supset q)\&(r\supset s))\&(p\vee r))\&\sim(q\&s)$, premise
1: $((p\supset q)\&(r\supset s))\&(p\vee r)$, &ex, from 0
2: $\sim(q\&s)$, &ex, from 0
3: $(p\supset q)\&(r\supset s)$, &ex, from 1
4: $p\vee r$, &ex, from 1
5: $p\supset q$, &ex, from 3
6: $r\supset s$, &ex, from 3
7: q, premise
8: $\sim p$, premise
9: r, $\vee$ex, from 4, 8
10: s, $\supset$ex, from 6, 9
11: $q\&s$, &in,10 to 7
12: $\sim\sim p$, $\sim$in, from 2, 11
13: p, $\sim$ex, from 12
14: $q\supset p$, $\supset$in, 7 to 13
15: s, premise
16: $\sim r$, premise
17: $\sim q$, premise
18: $\sim\sim p$, premise
19: p, $\sim$ex, from 18
20: q, $\supset$ex, from 5, 19
21: $\sim\sim\sim p$, $\sim$in, from 17, 20
22: $\sim p$, $\sim$ex, from 21
23: r, $\vee$ex, from 4, 22

24:	$\sim\sim q$,	$\sim$in, from 16, 23
25:	q,	$\sim$ex, from 24
26:	$q\&s$,	&in,15 to 25
27:	$\sim\sim r$,	$\sim$in, from 2, 26
28:	r,	$\sim$ex, from 27
29:	$s\supset r$,	$\supset$in, 15 to 28
30:	$(q\supset p)\&(s\supset r)$,	&in,14 to 29
31:	$((((p\supset q)\&(r\supset s))\&(p\vee r))\&\sim(q\&s))\supset((q\supset p)\&(s\supset r))$,	$\supset$in, 0 to 30

Машине потребовалось сделать 31 шаг вывода. Конечно, полученный машиной вывод не является единственным, но на его осуществление компьютер затратил доли секунды.

Несколько слов о программе, реализующей описанный алгоритм. Она, как уже упоминалось, написана на языке высокого уровня "Си" для компьютеров типа IBM PC AT. Программа занимает на диске 140 кбайт, время работы над доказательством тестированных теорем не превышает 4 сек. для персонального компьютера на базе процессора INTEL-386-DX с тактовой частотой 40 МГЦ. Программа имеет пользовательский интерфейс и может читать заранее заготовленные формулы из файла. Тестирование проводилось на множестве формул, выбранных из учебников по математической логике, в частности, из книги А.Черча "Введение в математическую логику". Это множество - около ста теорем классической логики - достаточно репрезентативно, что позволяет рассматривать предложенный алгоритм поиска вывода для натурального исчисления высказываний как эффективную процедуру осуществления субординатных выводов.

С.Л.Катречко

ИНТЕЛЛЕКТУАЛЬНЫЙ БЕКТРЕКИНГ

В статье ставится задача показать возможности интеллектуализации бектрекинга за счет анализа и использования полученной при "неудаче" информации. Для этого после краткой исторической справки по проблеме "отхода" и уточнения проблемы [§1] дается идейная сторона "интеллектуального бектрекинга" (intelligent backtracking) [§2] и далее строится исчисление поиска - исчисление "интеллектуального бектрекинга" [§3]. В заключении статьи обсуждаются возможности дальнейшего развития эффективного решения проблемы "отхода".

Понятие "backtracking" (отход, возврат) появилось в ИИ и стало использоваться с появлением языка логического программирования ПРОЛОГ. В язык ПРОЛОГ встроен механизм так называемого "наивного бектрекинга" (naive backtracking), который при получении сигнала неудачи в процессе построения вывода осуществляет "отход" к последней точке разветвления дерева вывода, отмену всех сделанных после этой точки подстановок и переход к следующей альтернативе в этой точке дерева поиска вывода. При исчерпании всех альтернатив данного уровня осуществляется "отход" на вышележащий уровень. В конце 70- начале 80-х годов появились попытки усовершенствования тактики "наивного бектрекинга" М.Бранохе [1] и П.Коксом [2]. В этих работах были предложены тактики "бектрекинга", которые позволяют, если это необходимо, осуществлять "отход" не к ближайшей точке ветвления дерева поиска вывода, а к той его точке разветвления, где, возможно, был сделан "неверный" выбор. Такая тактика получила название intelligent backtracking. Одновременно с этими разработками в нашей стране появились работы И.Ежковой [3]. В идейном отношении все три подхода близки: интеллектуализация "бектрекинга" основана на использовании информации, полученной при анализе причин неудач. В данной работе за основу взят подход И.Ежковой, в котором, на мой взгляд, сделана удачная попытка решить проблему повышения эффективности механизма "бектрекинга" путем расширения языка предикатов первого порядка за счет введения дополнительных отношений на термах.

Глава 1. Постановка проблемы: "поиск в ширину" и "поиск в глубину"

Прежде чем перейти к изложению сути intelligent backtracking, необходимо уточнить проблему и наметить возможные пути ее решения.

Пусть нам дана формула F и некоторое множество формул - мир S. Ставится задача найти такую подстановку в формулу F, которая превратила бы результат подстановки формулы F в формулу F*, выводимую из формул мира S.

Рассмотрим следующий пример (*пример 1*). Пусть нам дана некоторая формула G: G : P(x) & Q(y) & R(z,y) & S(x,a) и некоторый мир S_1:

P(a), P(b),
Q(a), Q(c), Q(d),
R(b,c), R(b,d),
S(b,b), S(b,a), S(b)

Для получения вывода формулы G* в мире S_1 необходимо, чтобы каждый конъюнктивный член формулы G* совпадал с некоторой элементарной формулой из S_1. Эту задачу можно решить, например, составив систему уравнений на термах формулы G и мира S_1 и найдя пересечение для значений одинаковых переменных формулы. Если это пересечение для каждой переменной формулы G не пусто, то система уравнений имеет решение(я) и найденные значения переменных превращают формулу G, в формулу(ы) G*, которая(ые) выводима(ы) в мире S_1.

Составим систему уравнений для *примера 1*:

1. x=a, b (для первого члена формулы)
2. y=b, c, d
3. (z=b & y=c), (z=b & y=d)
4. x=b

Найдем пересечение значений для каждой переменной формулы G. Из п.1 и п.4 видно, что решением для x является одноэлементное множество {b}, а из п.3 - решением для z - {b}. При анализе п.2 - п.3 видно, что решением для y является двухэлементное множество {c, d}. Таким образом, подстановки {x=b, y=c, z=b}, {x=b, y=d, z=b} превращают формулу G в формулы G*, выводимые в мире S_1.

Приведем еще один пример (*пример 2*), где мир S содержит импликативные формулы. Пусть нам дана формула H: H : P(x) & Q(x,y) & S(z) & R(z,x) & T(z,y) и некоторый мир S_2:

P(a), P(b), P(c),
Q(a,a), Q(b,b), Q(c,d),
P(z) → S(z),
R(c,b), R(a,b), R(b,c),
R(a,c), R(c,a), T(a,d).

Задача прежняя - найти такую подстановку в формулу H, которая превратила бы результат подстановки формулы H - H*, в формулу, выводимую из формул мира S_2. Это означает, что каждый конъюнктивный член формулы H* либо должен совпадать с некоторой элементарной формулой из S_2, либо может совпадать с консеквентом импликативной формулы, если в мире содержится антецедент этой импликативной формулы.

Составим систему уравнений для *примера 2*:

1. x=a, b, c
2. (x=a & y=a), (x=b & y=b), (x=c & y=d)
3. z= a, b, c
4. (x=b & z=c), (x=b & z=a), (x=c & z=b),
   (x=c & z=a), (x=a & z=c)
5. (y=d & z=a)

Из п.5 видно, что решением для y является одноэлементное множество {d}, а для z - {a}, из п.2 следует, что решение (пересечение) для x тоже одноэлементно {c}. Поэтому подстановка, удолетворяющая условиям выводимости единственна: {x=c, y=d, z=a}.

Приведенный выше поиск вывода посредством решения системы уравнений является типичным случаем "поиска в ширину", который хорошо приспособлен для поиска вывода в мирах, содержащих небольшое количество формул. При этом находятся все возможные подстановки, которые удолетворяют требованиям выводимости. Если же стоит задача найти хотя бы одно решение, а мир устроен таким образом, что найденная подстановка не единственна, или же мир слишком велик, то такой метод поиска всех возможных решений слишком расточителен.

Другим альтернативным подходом является метод "поиска в глубину", при котором ищется первое возможное решение. Так, в *примере 2* на первом шаге поиска выбирается первое возможное значение для переменной x (x=a), которое определяет на втором шаге поиска единственное значение для y (y=a). Как видно, время поиска сильно уменьшается из-за сокращения перебора всех возможных решений. Но при этом появляется возможность ошибки. Первое выбранное возможное значение для некоторой переменной (*в примере 2*, для x) может привести к невозможности нахождения значений для других переменных. Возникает проблема возврата назад для переозначивания этой(их) переменной(ых). При этом в стандартном backtracking происходит отход в ближайшую точку ветвления дерева поиска вывода и проверяется следующая возможность означивания. Придя к неудаче на пятом шаге, система backtracking будет пытаться переозначивать z, вернувшись к предыдущему, четвертому шагу. Проверив все возможности означивания z на четвертом шаге, система backtracking отойдет еще на один шаг выше по дереву поиска. Возможна и другая тактика backtracking при неудаче на пятом шаге, если сначала заняться переозначиванием переменной y. Тогда сразу можно отойти на 2 шаг дерева поиска. Но и при этой тактике backtracking приходится сделать несколько "лишних" отходов вверх, так как истинной причиной неудачи является неправильное означивание x на первом шаге. Попробуем улучшить backtracking, учитывая "опыт", накопленный при неудачах.

Глава 2. Неформальное введение в intelligent backtracking

Для пояснения сути "работы" intelligent backtracking (без учета совпадения предикатных букв и местности предикатов) предложим конструкцию двоичного дерева поиска подставок, построенное следующим образом. Вершинам дерева сопоставлены переменные выводимой формулы, правым ребрам - возможные в процессе поиска вывода подстановки (подстановка обозначена "/"), а левым ребрам - запреты на ту или иную подстановку (запреты обозначены "≠"). Это потенциально бесконечное дерево кодирует все возможные пути поиска вывода.

Тактика поиска актуализирует некоторый путь в двоичном дереве поиска подстановок (ребра, отмеченные жирными линиями):

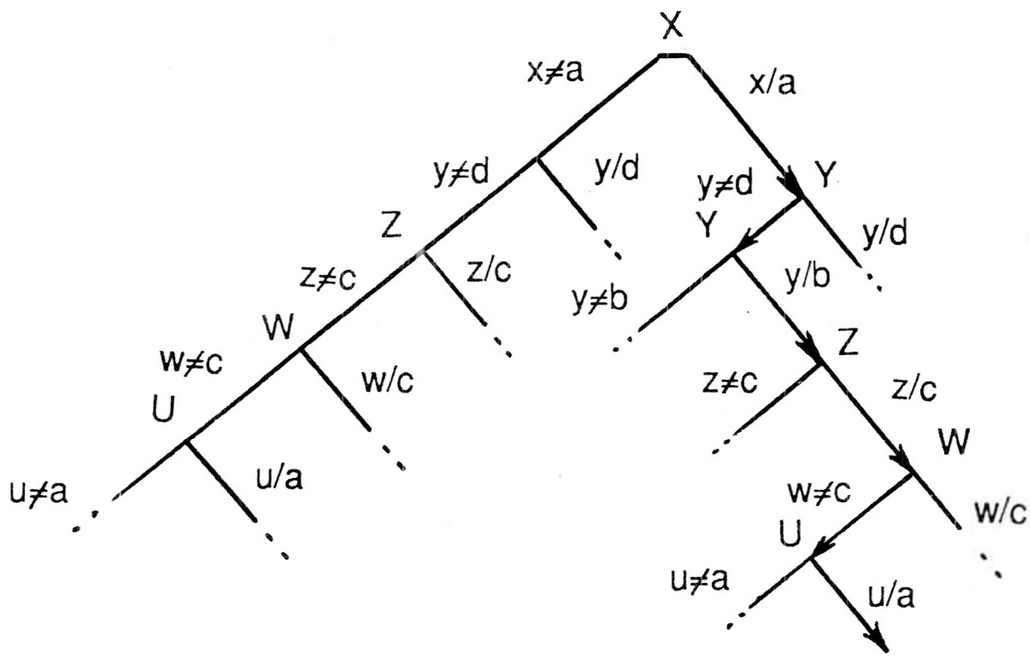


рис. 1

Предложенная конструкция дерева поиска подстановок позволяет организовывать как процесс поиска подстановок, так и тактику "интеллектуального отхода" при неудачах (приведенное дерево соответствует решению предложенного выше примера). В общем случае, поиск вывода на предложенной конструкции двоичного дерева выглядит так. В процессе означивания термов происходит движение вниз по дереву поиска. При невозможности дальнейшего означивания выдается сигнал неудачи и происходит "отход" назад. В тактике "наивного бектрекинга" причины неудачи не анализируются и отход происходит на предыдущий шаг, где выбирается следующая альтернатива. Однако, если сделать анализ возможных "причин неудачи", т.е. анализ ранее сделанных подстановок, из-за которых невозможна подстановка на этом шаге, то возможен отход к той точке дерева, которая является возможной "причиной" неудачного означивания, блокировка ранее выбранного решения и просмотр следующей альтернативы. Такая организация процесса "отхода" позволяет существенно повысить эффективность системы поиска, так как при выборе альтернатив из рассмотрения исключаются целые куски дерева подстановок, лежащие ниже той его вершины, которая является возможной "причиной" неудачи.

Представим в виде такого двоичного дерева процесс решения примера 1 методом "поиска в глубину". При этом неудачу в процессе поиска будем помечать **F** (*false*), после чего происходит "отход" вверх по дереву. Сделанная ранее "неудачная" подстановка, которая, вероятно, ответственна за невозможность дальнейшего означивания, запрещается (появляется соответствующее неравенство, например $y \neq b$ при первом "отходе"), т.е. на дереве в соответствующей точке выбирается левое ребро, и поиск подстановок продолжается. Успешное завершение поиска обозначим **Tr** (*true*).

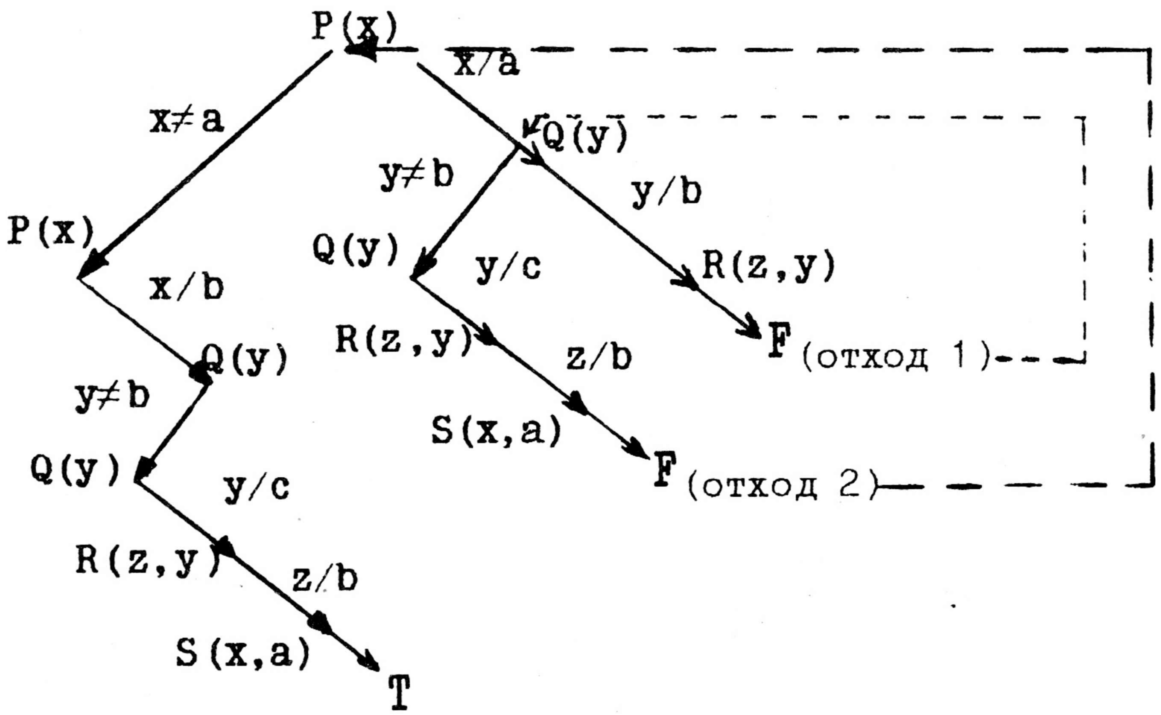


рис 2

В данном случае intelligent backtracking осуществлялся человеком. При неудаче производился анализ возможной причины неудачи и отход осуществлялся на тот узел дерева, в котором была сделана неверная подстановка. В нашем примере таких отходов было два. В первом случае intelligent backtracking не отличается от стандартного, так как отход производится на ближайшую точку ветвления. Но во втором случае анализ неудачи показывает, что необходимо вернуться в первый узел дерева поиска (означивание переменной x) и запретить подстановку x/a. При этом полезную информацию о запрете подстановки y/b, полученную при первом "бектрекинге", также можно сохранить и использовать для дальнейшего поиска вывода.

Сформулируем систему логического вывода и на ее основе систему поиска вывода, выразительные возможности которых позволяют явным образом фиксировать сделанные ранее подстановки и запреты на ту или иную возможную подстановку при неудачах.

Глава 3. Формальная система для intelligent backtracking

3.1. Описание системы L

Пусть нам дана система логического вывода **L** на основе языка исчисления предикатов первого порядка без кванторов и функциональных знаков. Систему L можно представить в виде пятерки: (B, H, S_1 , S_2 , R), где B обозначает алфавит исчисления, H задает правила построения п.п.ф. системы, R - правила вывода системы **L**, S_1, S_2 - совокупность п.п.ф., задающих текущее состояние мира. Дадим краткое описание основных особенностей системы **L**:

B представляет собой алфавит исчисления предикатов первого порядка без кванторов и функциональных знаков с логическими связками &, $\vee$, $\supset$. Существенной особенностью данной системы является расширение стандартного первопорядкового языка за счет введения символов "=" и "≠" для обозначения отношений равенства и неравенства на термах, а также ряда технических знаков для обозначения производных от этих отношений операций. Помимо этого в язык системы вводится знак "/" для обозначения операции подстановки. Таким образом, B представляет, по существу, алфавит для записи отношений равенства, неравенства, операции подстановки над формулами первопорядкового исчисления предикатов.

H представляет собой синтаксические правила построения выражений системы. Первоначально задается определение п.п.ф. в исчислении предикатов. Помимо элементарных допускается построение составных и условных формул. Составными формулами являются конъюнктивно-дизъюнктивные и дизъюнктивно-конъюнктивные формулы, которые определяются следующим индуктивным определением:

1. Элементарная формула является дизъюнктивно-конъюнктивной формулой.

2. Если $A_1, \dots, A_n$ - конъюнктивно- дизъюнктивные формулы или элементарные формулы, то $A_1 \vee \dots \vee A_n$ - дизъюнктивно-конъюнктивная формула (д.к.ф.).

3. Конъюнктивно-дизъюнктивной формулой является формула $A_1 \& \dots \& A_n$, где $A_1, \dots, A_n$ - д.к.ф.

Условной формулой называется формула $C \supset A$, где A - элементарная формула, а C - составная формула.

На основе п.п.ф. исчисления предикатов определим правильно построенные формулы системы L, которые могут быть представимы выражениями вида (Г **C** К)[О] где **C** - является п.п.ф. исчисления предикатов с указанными выше ограничениями (**C** называется ядром формулы), Г (К) - система неравенств (равенств) (Г, К- возможно пустые), а О - подстановка, применямая к цепочке (Г C К).

Понятие подстановки обычное. По определению (Г **C** К) [О] $=_{df}$ (ГО) (CO) (КО), где (ГО), (CO), (КО) - результаты подстановок соответственно в цепочки Г, C, К.

Для того чтобы выражение (Г **C** К)[О] было п.п.ф. системы L, необходимо выполнение следующих условий:

1. Г должно быть непротиворечиво, т.е. не должно содержать противоречивых неравенств типа $x \neq x$.

2. Г и К должны быть совместимы, т.е. если $x \neq a \in$ Г, то $x = a \#$ К и наоборот, если $x = a \in$ К, то $x \neq a \#$ Г.

3. О должна быть совместима с Г, т.е. результат конкретизации Г посредством О не должен содержать противоречивых неравенств типа $x \neq x$ (конкретизация Г посредством О непротиворечива).

4. О совместима с Г и К, т.е. при конкретизации Г и К посредством О ГО и КО должны быть совместимы.

Тройка Г К О называется *непротиворечивой*, если и только если Г, К, О удовлетворяют выше сформулированным ограничениям, т.е. если (Г **C** К) [О] является п.п.ф. L.

Тройка $Г_i К_i О_i$ *совместима* с непротиворечивой тройкой $Г_j К_j О_j$, если и только если тройка $(Г_i Г_j)(К_i К_j)(О_i О_j)$ непротиворечива, где цепочки $Г_i Г_j$ ($К_i К_j$, $О_i О_j$) - результат композиции неравенств $Г_i$ и $Г_j$ (равенств $К_i К_j$, подстановок $О_i О_j$).

(Композиции неравенств и равенств совпадают с их объединением, а композиция подстановок $О_i$ и $О_j$ возможна при условии, если $О_i$ совместима с ранее сделанными подстановками $О_1 \dots О_j$, т.е. в составе $О_1 \dots О_j О_i$ содержится не более одной подстановочной константы для каждой переменной.)

Дадим точное индуктивное определение правильно построенной формулы системы L:

1. Цепочка (Г **C** К) [О], где **C** - п.п.ф. исчисления предикатов с указанными ограничениями, а Г К О - непротиворечивая тройка, является п.п.ф. системы L.

2. Цепочка (Г **F** К) [О], где **F** - п.п.ф. исчисления L, а Г К О - непротиворечивая тройка, совместимая с тройкой $Г_f К_f О_f$, - также является п.п.ф. системы L.

3. Если $\mathbf{F}_1$ и $\mathbf{F}_2$ являются п.п.ф. исчисления L, то $\mathbf{F}_1 \& \mathbf{F}_2$, $\mathbf{F}_1 \supset \mathbf{F}_2$, $\mathbf{F}_1 \vee \mathbf{F}_2$ со сформулированными выше ограничениями на формулы исчисления предикатов являются п.п.ф. L.

Естественно предложить следующие преобразования п.п.ф. исчисления: $Г(C_1 * C_2)К =_{df} Г_1 C_1 К_1 * Г_2 C_2 К_2$, где * - обозначает любую логическую связку исчисления, а $Г_1$, $Г_2$ ($К_1$, $К_2$) - возможно отличающиеся от Г (К) системы неравенств (равенств) выбрасыванием тех неравенств (равенств) из Г (К), которые не содержат переменных $\mathbf{C}_1$, $\mathbf{C}_2$. Такое выбрасывание называется операцией очищения ограничений относительно переменных формулы **С** исчисления предикатов. В дальнейшем будем предполагать, что любое ограничение п.п.ф. является очищенным.

$Г_1 C_1 К_1 \ \& \ Г_2 C_2 К_2 =_{df} Г_1 Г_2 \ (C_1 \& C_2) \ К_1 К_2$, где цепочка $Г_1 Г_2 (К_1 К_2)$ обозначает результат композиции (объединения) $Г_1$ и $Г_2$ ($К_1$ и $К_2$), при этом необходимо потребовать совместимости $Г_1$ и $Г_2$; $К_1$ и $К_2$.

B, *H* задают язык исчисления над формулами ограниченного в указанном выше смысле исчисления предикатов первого порядка. В этом языке явно представлены сделанные в ходе поиска подстановки для данной формулы **С**, а также выявленные ограничения (система равенств и неравенств) на возможные подстановки термов в формулу **С**. Такое расширение языка предикатов за счет введения новых отношений равенства и неравенства на термах позволяет увеличить не только выразительные возможности языка, но и предложить новую более эффективную тактику backtracking, использующую информацию о возможных подстановках термов (или о запрете на ту или иную подстановку).

R содержит правила вывода системы. Отметим, что за основу взяты правила вывода исчисления предикатов, которые распространяются на случай с ограничениями:

R_1 - обобщенное правило подстановки:

$$\frac{\mathbf{F}}{(Г_i \ \mathbf{F} \ К_i)[О_i]}$$

Цепочка $(Г_i \ \mathbf{F} \ К_i)[О_i]$ называется *образом* формулы F, если $Г_i К_i О_i$ - тройка, непротиворечивая и совместимая с тройкой $Г_f К_f О_f$ ((Г **F** К)[О]- п.п.ф. исчисления L).

R_2 - обобщенное правило modus ponens:

$$\frac{Г_{ант} \ \mathbf{A} \ К_{ант}, \ Г \ (\mathbf{A} \supset \mathbf{C}) \ К}{Г_{кон} \ \mathbf{C} \ К_{кон}} \qquad \text{где } \mathbf{C} \text{ - элементарная п.п.ф.}$$

R_3 - правило введения &:

$$\frac{(\Gamma_1 C_1{}^{\vee} K_1)[O_1], \ldots, (\Gamma_n C_n{}^{\vee} K_n)[O_n]}{(\Gamma_n \ldots \Gamma_1 (C_1{}^{\vee} \,\&\ldots\&\, C_n{}^{\vee}) K_1 \ldots K_n)[O_1 \ldots O_n]}$$

Здесь $C_i{}^{\vee}$ - д.к.ф., а $\Gamma_n \ldots \Gamma_1$, $K_n \ldots K_1$, $O_1 \ldots O_n$ - результат композиции неравенств $\Gamma_1, \ldots, \Gamma_n$, равенств $K_1, \ldots, K_n$, подстановок $O_1 \ldots O_n$ такой, что тройка $\Gamma_j\ K_j\ O_j$ - непротиворечива и совместима с предыдущей тройкой $\Gamma_{j-1}\ K_{j-1}\ O_{j-1}$.

R_4 - правило введения $\vee$:

$$\frac{\Gamma\ C_1{}^{\&}\ K}{\Gamma\ (C_1{}^{\&} \vee \ldots \vee C_n{}^{\&})\ K}$$ где $C_i{}^{\&}$ - к.д.ф.

R_1 представляет обобщенное правило подстановки. Согласно правилу R_1 разрешается делать подстановки вместо переменных формулы F. Это, по существу, означает что переменные формул исчисления связаны квантором общности. R_1 позволяет не только применять к формулам некоторые подстановки, но и "навешивать" ограничения на переменные некоторой формулы F.

R_2 представляет обобщенное правило modus ponens. При переходе снизу вверх при поиске вывода от $\Gamma_{кон}$ C $K_{кон}$ к $\Gamma_{ант}$ A $K_{ант}$ в общем случае переменные C и A могут не совпадать, поэтому $\Gamma_{ант}$ $K_{ант}$ и $\Gamma_{кон}$ $K_{кон}$ могут не совпадать с Г К как результаты очищения относительно переменных C и A.

R_3 и R_4 позволяют образовывать составные формулы и задают смысл знаков &, $\vee$. Отметим, что для R_3 важен порядок конъюнктивных членов из-за требования совместимости троек.

S_1 и S_2 - задают текущее состояние мира, в котором ведется поиск вывода некоторой формулы F. При этом S_1 представляет собой набор элементарных полностью означенных п.п.ф. исчисления, которые определяют текущий мир, а S_2 - п.п.ф.исчисления L, где ядро является условной формулой исчисления предикатов, которые доопределяют текущий мир. Формулы из S_1 интерпретируются как конкретные факты данного мира, а формулы из S_2 - как законы мира, устанавливающие связь типа "если, то" между утверждениями (фактами) данного мира.

Если дан мир S (S_1 + S_2) и формула F, то можно определить понятие вывода:

Выводом в системе L формулы F из множества формул S называется последовательность формул, каждая из которых является или элементом S, или получена из предыдущих формул по правилам вывода, последним членом которой является F.

7*

3.2. Поиск вывода в системе L

В общем виде задача поиска вывода может быть сформулирована так: построить вывод некоторого образа формулы **F** в мире S, где **F** - составная формула.

Поиск ведется "снизу вверх" от формулы к аксиомам методом "поиска в глубину", т.е. по образу формулы **F** (F^*) определяются непосредственные предшественники F^* и так далее до тех пор, пока все предшественники образа формулы **F** не будут положительно сопоставимы с формулами из S.

Процедура положительного сопоставления формул определяется так: формулы F_1 и F_2 *положительно сопоставимы*, если существует формула F, которая является образом формул F_1 и F_2 (процедура положительного сопоставления аналогична процедуре унификации в методе резолюций Дж.Робинсона).

При этом конкретный вид образа **F** (т.е. вид F^*) не уточняется, так как предшественники формулы F^* в свою очередь тоже могут быть образами F^*, и, следовательно, образами формулы **F**, т.е. при построении дерева поиска вывода снизу вверх могут быть сделаны новые подстановки вместо переменных формулы F^* (транзитивность отношения "образности").

Определим правила поиска вывода системы L, которые фиксируют определенные тактики положительного сопоставления подформул **F** формулам из мира L:

R_1 поиска

$F_1 \in \mathbf{F}$, $F_2 \in S_1$, такие что F_1, F_2
положительно сопоставимы

максимальный образ F_1 и F_2

R_1 поиска определет самую элементарную тактику поиска вывода, которая включается во все остальные поисковые процедуры.

R_{1^*} поиска

$F_1 \in$ антецеденту S_2 , $F_2 \in S_1$, где
F_1, F_2 - положительно сопоставимы

максимальный образ F_1 F_2

R_{1^*} поиска связано со следующей поисковой процедурой (см. R_2 поиска) и позволяет искать образы не только подформул **F** и формул из S_1, но сопоставлять между собой антецеденты формул из S_1 и формулы из S_2.

$R_2^{\text{поиска}}$

$\Gamma_i F_1 K_i[O_i]$ ($F_1 \in \mathbf{F}$ положительно сопоставима
с консеквентом $C \in S_2$ с помощью $\Gamma_j K_j O$
($\Gamma_i K_i O_i$ совместима с $\Gamma_n K_n$, т.е. $\Gamma_j K_j O_j \equiv$
$\Gamma_i \Gamma_n K_i K_n O_i$)

$\Gamma_i(\Gamma_n(A \supset C)K_n)K_i)[O_i]$, $(\Gamma_j(\Gamma_{\text{ант}} A K_{\text{ант}})K_j)[O_j]$,
где C- элементарная п.п.ф.

Тем самым, $R_2^{\text{поиска}}$ определяет два шага поиска: сначала исходная подформула образа **F** положительно сопоставляется с некоторым консеквентом из формул S_2, а потом система поиска пытается положительно сопоставить формулам из мира S_1 антецедент этой формулы из S_2 (см. предыдущее правило $R_{1*}^{\text{поиска}}$).

$R_3^{\text{поиска}}$

$(\Gamma_1 C_1{}^{\vee} K_1)[O_1]$ & $(\Gamma_n C_n{}^{\vee} K_n)[O_n]$ & ...

$\Gamma_{\&1}$ $((\Gamma_1 C_1 K_1)[O_1])$ $[O_{\&1}]K_{\&1}$, $\Gamma_{\&2}$ $((\Gamma_{\&1}(\Gamma_2 \Gamma_1 C_2 K_1 K_2)$
$[O_1][O_2][O_{\&1}])K_{\&1})[O_{\&2}])K_{\&2})$, ...

$R_3^{\text{поиска}}$ является наиболее существенным правилом поиска вывода. Оно определяет n-шаговую процедуру, которая последовательно пытается положительно сопоставить конъюнктам образа формулы **F** формулы из мира **S**. При этом тройки последующих найденных формул "пухнут", так как при формировании последующих троек $\Gamma_{\&i+(n+1)} K_{\&i+(n+1)} O_{\&i+(n+1)}$ необходимо проверить их непротиворечивочсть и совместимость с тройками $\Gamma_1 K_1 O_1$ ... $\Gamma_{n+1} K_{n+1} O_{n+1}$ и ранее полученными тройками $\Gamma_{\&1} K_{\&1} O_{\&1}$ ... $\Gamma_{\&i+n} K_{\&i+n} O_{\&i+n}$. Именно с этим правилом связано понятие интеллектуального "отхода". При организации "отхода" процесс идет в обратном направлении: пересмотру подвергаются в первую очередь самые внешние значения Г и О.

$R_4^{\text{поиска}}$

$\Gamma\ (C_1{}^{\&} \vee .2. \vee C_n{}^{\&})\ K\ [O]$

$\Gamma\ C_1{}^{\&}\ K\ [O]$ или ... или $\Gamma\ C_n{}^{\&}\ K\ [O]$

Деревом поиска вывода называется фигура, полученная в результате применения к формуле F^* правил $R_{1\text{-}4}^{\text{поиска}}$.

Если каждой элементарной подформуле F* можно положительно сопоставить некоторую формулу из S, то дерево поиска вывода превращается в *вывод образа формулы* **F** *в мире* **S**.

По существу, процесс поиска вывода сводится к поиску и нахождению таких троек $Г_1К_1О_1$, ..., $Г_nК_nО_n$, каждая из которых непротиворечива и совместима с предыдущими непротиворечивыми тройками. Если процесс поиска вывода заканчивается получением тройки $(Г_1 ... Г_n) (К_1 ... К_n)(О_1 ... О_n)$, которая непротиворечива относительно ядра формулы F, то получен вывод образа формулы F.

Допустим, что на i шаге в процессе поиска невозможно положительно сопоставить некоторую элементарную подформулу F какой-либо формуле из S. К этому времени была сформулирована тройка $(Г_1...Г_i)(К_1...К_i)(О_1...О_i)$. Система поиска формирует сигнал неудачи (FALSE) и начинает анализ причин неудачи. Причины неудачного положительного сопоставления двух формул могут быть разделены на два больших класса.

К первому классу относится случай принципиальной несопоставимости формулы F_i^* с формулами из мира S. Это может быть из-за в результате того, что:

1. Не совпадают предикатные буквы ядра эл.подформулы F_i^* и ядер формул из мира S.

2. Не совпадают местности предикатов ядра эл.подформулы F_i^* и ядер формул из мира S.

3. Не совпадают константы F_i^* и ядер формул из мира S, стоящих на j-ых местах предикатов.

В этом случае вызывается процедура, соответствующая тактике стандартного (наивного) "бектрекинга", т.е. происходит "отход" в ближайший узел ветвления дерева поиска вывода.

Второй класс причин охватывает случаи, когда неудача порождена предыдущим неправильным либо означиванием переменных подформул F_1^* ... F_{i-1}^*, либо неправильным навешиванием ограничений (неравенств) на переменные этих формул (неправильный выбор пути на дереве подстановок). Формулы не могут быть сопоставлены в результате несовместимости тройки $Г_i\ К_i\ О_i$ с некоторой тройкой из $(Г_1... Г_{j-1})(К_1... К_{i-1})(О_1... О_{i-1})$. В этом случае формула F_i^*, возможно, будет положительно сопоставима с некоторой формулой из S, если изменить некоторую(ые) из предыдущих троек. Такой пересмотр реализуется процедурой, соответствующей интеллектуальному "отходу". Это происходит так:

Формируется *список рассогласования*, который представляет собой те члены из $Г_{i-1}\ О_{i-1}$, которые содержат в своем составе переменные из F_i^* (т.е. список рассогласования представляет пересечение $\{Var\}F_i^* \cap Г_{i-1}\ О_{i-1}$). Причиной неудачи могут быть только эти члены из $Г_{i-1}О_{i-1}$, и именно эти члены подвергаются пересмотру при интеллектуальном "бектрекинге". Отход происходит не на предыдущий i-2 шаг, как при обычном "бектрекинге", а на ближайший i-n шаг из числа индексов членов списка рассогласования. Формируется тройка бектрекинга, которая включает все i-n члены из $Г_{i-1}O_{i-1}$, содержащие в своем составе переменные формулы F_i^*. Первоначально пересмотру подвергаются те члены списка, которые принадлежат к O_{i-1}. При этом некоторый член O_{i-1} из списка бектрекинга заменяется на соответствующее неравенство: например, x/a "перекачивается" в неравенство $x \neq a$, запрещающее эту подстановку. Тем самым дальнейший поиск будет осуществляться уже по другому пути, где подстановка x/a запрещена. Если же формирование этого неравенства не привело к успеху, то при последующих "отходах" пересмотру подвергаются другие члены O_{i-n} из списка бектрекинга. Если же ближайший член из списка бектрекинга принадлежит к $Г_{i-n}$ (или все возможные пересмотры из O_{i-n} уже были сделаны и не привели к успеху), то неравенство из $Г_{i-n}$, например $y \neq b$, заменяется на соответствующее равенство ($y=b$), т.е. происходит "перекачка" из Г в К, которая также изменяет путь в двоичном дереве поиска. При последующих неудачах этот процесс "перекачки" из Г в К также может итерироваться до тех пор, пока процесс поиска не придет к успеху или все члены Г из списка бектрекинга не будут пересмотрены. Формируется следующий список бектрекинга из членов списка рассогласования с наибольшим индексом i-m ($m<n$) и процесс пересмотра продолжается.

Этот процесс "перекачки" из О в Г и из Г в К может происходить в рамках данной процедуры поиска и при последующих неудачах до тех пор, пока список рассогласования не пуст. После этого система выходит из этой процедуры поиска "наверх" - к предыдущей процедуре.

Очевидно, что такая тактика "бектрекинга" может быть **полна**, т.е. не приведет к потере решения. Например, в случае первого сигнала неудачи для получения непротиворечивой тройки $Г_iK_iO_i$ при втором классе причин необходимо изменить некоторую тройку $Г_{i-k}K_{i-k}O_{i-k}$ из списка рассогласования, т.е. обратиться не к предыдущему шагу дерева, а к той точке, где находится возможная причина неудачи. Иначе - причина неудачи не устранена (тройка $Г_iK_iO_i$ несовместима с тройкой $Г_{i-k}K_{i-k}O_{i-k}$) и вся часть двоичного дерева поиска, которая расположена ниже первой возможной причины неудачи, не может содержать решения.

Предложенная здесь общая стратегия поиска вывода может быть реализована различными тактиками "интеллектуального бектрекинга". В общем случае, существенна проблема полноты используемых тактик, которые могут потерять решение при неоднократном применении тактики "интеллектуального отхода". Для решения этой проблемы возможно использование предложенной ранее конструкции двоичного дерева поиска подстановок, которую можно рассматривать как семантическую базу исчисления "интеллектуального бектрекинга".

Продемонстрируем "работу" системы поиска вывода на приведенном выше примере (*пример 2*) с небольшими изменениями.

Отметим, что решение единственно и совпадает с прежним решением. По ходу построения поиска вывода будем делать небольшие комментарии отдельных шагов, которые не укладываются в описанную выше схему "бектрекинга". Это связано с тем, что предложенная процедура "бектрекинга" является некоторой общей схемой, для которой допустимы разные модификации.

F: $P(x)\ \&\ (y\neq a)Q(x,y)\ \&\ S(z)\ \&\ (z\neq x)R(z,x)\ \&\ T(z,y)$

S: $P(a), P(b), P(c),$

$Q(a,a), Q(b,b), Q(c,d),$

$(z\neq a)(P(z)\supset S(z)), (z\neq b)(P(z)\supset S(z)),$

$R(c,b), R(a,b), R(b,c), R(a,c), R(c,a),$

$T(a,d)$

Процедуру положительного сопоставления будем обозначать знаком $\otimes$; неудачу при положительном сопоставлении - буквой F; процедуру "бектрекинга" - словом back. При поиске использована стандартная тактика поиска "слева-направо - сверху-вниз".

0. $\Gamma_6 \equiv \{y\neq a, z\neq x\}, K_6 \equiv \{\varnothing\}, O_6 \equiv \{\varnothing\}$

$\Gamma_6\ K_6\ O_6$ - является базовой тройкой, не подвергающейся "бектрекингу".

1. $P(x)\otimes P(a)$: $[x/a]\ \Gamma_1 \equiv \{\varnothing\}, K_1 \equiv \{\varnothing\}, O_1 \equiv \{x/a\}$

2. $(y\neq a)Q(x,y)[x/a]\otimes Q(a,a), Q(b,8), Q(c,d)$:F

3. back: $\{x,y\} \cap [x/a] \Rightarrow \{x/a\}: O_1 \equiv \{x/a\} \Rightarrow \Gamma_0\ \text{BACK} \equiv \{x\neq a\}$

(ограничение Γ_0 BACK $\equiv \{x\neq a\}$ находится в тройке поиска вывода формулы перед O_1 и запрещает подстановку x/a)

4. $(x\neq a)P(x) \otimes P(b)$: $[x/b]\ \Gamma_1 \equiv \{x\neq a\}, K_1 \equiv \{\varnothing\}, O_1 \equiv \{x/b\}$

5. $(x\neq a)(y\neq a)Q(x,y)[x/b] \otimes Q(b,b)$:

$[y/b]\ \Gamma_2 \equiv \{x\neq a, y\neq a\}, K_2 \equiv \{\varnothing\}, O_2 \equiv \{x/b, y/b\}$

(справа была записана в явном виде текущая тройка $\Gamma_i K_i O_i$, хотя информация о ней содержится в формуле, поэтому в дальнейшем тройки явно будут записываться только когда процесс поиска вывода неочевиден)

6. $(z\neq x)S(z)[x/b,y/b] \otimes (z\neq a)(P(z) \supset S(z))$: $[z/z], (z\neq a)P(z)$

7. $(z\neq a)(z\neq x)P(z)[x/b,y/b] \otimes P(c)$: $[z/c]$

(отметим, что нельзя выбрать P(b) (соответственно подстановку z/b), так как подстановка $O_4 \equiv \{x/b, z/b\}$ не разрешена относительно $\Gamma_6 \equiv \{z\neq x\}$)

8. $(z\neq a)(x\neq a)(z\neq x)R(z,x)[x/b,y/b,z/c] \otimes R(c,b)$: T

9. $(z\neq a)(y\neq a)(z\neq x)T(z,y)[x/b,y/b,z/c] \otimes T(a,d)$: F

10. back: $\{z, y\} \cap \{x/b, y/b, z/c, z\neq a, x\neq a\} \Leftarrow \{y/b, z/c, z\neq a\}: O_4$
$\equiv \{z/c\} \Rightarrow \Gamma_3$ BACK $\equiv \{z\neq c\}$

(отметим, что этот back находится внутри предыдущего back, т.е. не отменяет неравенство $x\neq a$)

11. $(z\neq c)(z\neq a)(x\neq a)(z\neq x)P(z)[x/b,y/b] \otimes S$: F

12. back: back $O_4 \equiv \{\varnothing\}$, $\Gamma_3 \equiv \{z\neq a\} \Rightarrow K_2$ BACK $\equiv \{z=a\}$

(так как все возможности второго back не пересмотрены, то подвергается пересмотру второй возможный случай из второго back. Так как множество подстановок O_4 пусто, то пересмотру подвергается следующий уровень, т.е. Γ_3. Так как этот back обращается выше предыдущего back, то предыдущие значения back не запоминаются, в частности неравенство $z\neq c$ не имеет места)

13. $(z\neq x)S(z)(z=a)[x/b,y/b] \otimes (z\neq b)(P(z) \supset S(z))$: $[z/z],(z\neq b)P(z)$

14. $(z\neq b)(x\neq a)(z\neq x)P(z)(z=a)[x/b,y/b,] \otimes P(a)$: $[z/a]$

15. $(z\neq b)(x\neq a)(z\neq x)R(z,x)(z=a)[x/b,y/b,z/a] \otimes R(a,b)$: T

16. $(z\neq b)(y\neq a)(z\neq x)T(z,y)(z=a)[x/b,y/b,z/a] \otimes T(a,d)$: F

17. back: $\{y\} \cap \{x/b,y/b,z/a,z\neq b,x\neq a\} \Leftarrow \{y/b\}$:
$O_2 \equiv \{y/b\} \Rightarrow \Gamma_1$BACK $\equiv \{y\neq b\}$

(согласно тактике "бектрекинга", описанной выше, необходимо было подвергнуть пересмотру z/a, но на самом деле причина неудачи заключена не в этой подстановке для z. Из анализа неудачи видно, что z означена правильно, поэтому в множество неправильно означенных переменных на последнем шаге попадет только переменная y. Все значения back ниже Г не запоминаются)

18. $(y\neq b)(x\neq a)(y\neq a)Q(x,y)[x/b] \otimes S$: F

19. back: $\{x,y\} \cap [x/b, x\neq a] \Leftarrow \{x/a, x\neq a\}$:
$O_1 \equiv \{x/a\} \Rightarrow \Gamma_0$BACK $\equiv \{x\neq a, x\neq b\}$

($x\neq a$ остается от прежнего back, так как последний back не поднимается выше прежнего back)

20. $(x\neq b)(x\neq a)P(x) \otimes P(c)$: $[x/c]$

21. $(x\neq b)(x\neq a)(y\neq a)(y\neq b)Q(x,y)[x/a] \otimes Q(c,d)$: $[y/d]$

22. $(x\neq b)(x\neq a)(z\neq x)S(z)[x/c,y/b] \otimes (z\neq a)(P(z) \supset S(z))$:
$[z/z]$, $(z\neq a)P(z)$

(значения всех прежних back, находящиеся ниже последнего back, не запоминаются, поэтому выбирается первое возможное и неправильное решение)

23. $(z\neq a)(z\neq x)P(z)[x/c,y/b] \otimes P(b)$:$[z/b]$

24. $(z\neq a)(x\neq b)(x\neq a)(z\neq x)R(z,x)[x/c,y/d,z/b] \otimes R(b,c)$: T

25. $(z\neq a)(y\neq b)(y\neq a)(z\neq x)T(z,y)[x/c,y/d,z/b] \otimes T(a,d)$: F

26. back: $\{z, y\} \cap \{x/c, y/d, z/b, z\neq a, x\neq a, x\neq b, z\neq x\} \Leftarrow$
$\Leftarrow \{y/c, z/b, z\neq a\}: O_4 \equiv \{z/b\} \Rightarrow \Gamma_3$ BACK $\equiv \{z\neq b\}$

27. $(z\neq b)(z\neq a)(z\neq x)P(z)[x/c,y/b] \otimes S$: F

28. back: back $O_4 \equiv \{\varnothing\}$, $\Gamma_3 \equiv \{z\neq a\} \Rightarrow K_2$ BACK $\equiv \{z=a\}$

29. $(z\neq x)S(z)(z=a)[x/c,y/d] \otimes (z\neq b)(P(z) \supset S(z))$: $[z/z],(z\neq b)P(z)$

30. $(z\neq b)(z\neq x)P(z)(z=a)[x/b,y/b,] \otimes P(a)$: $[z/a]$

31. $(z\neq b)(x\neq b)(x\neq a)(z\neq x)R(z,x)(z=a)[x/c, y/d, z/a] \otimes R(a,c)$: T

32. $(z\neq b)(y\neq b)(y\neq a)(z\neq x)T(z,y)(z=a)$ $[x/c, y/d, z/a] \otimes T(a,d)$: T

===================================

РЕШЕНИЕ:

$\Gamma \equiv \{x\neq b, x\neq a, z\neq b, y\neq b, y\neq a, z\neq x\}$, $K \equiv \{z=a\}$, $O \equiv \{x/c, y/d, z/a\}$

Для решения данного примера была использована тактика "бектрекинга", которая не всегда вела себя "интеллектуально". Тем не менее поиск вывода стал более осмысленным и целенаправленным.

В заключение статьи хотелось бы отметить следующее:

1. Идея "интеллектуального бектрекинга", описанная выше, является достаточно актуальной для решения проблемы повышения эффективности систем логического программирования (например, использующих язык программирования ПРОЛОГ). Это подтверждает и сильная корреляция этой (теоретической) идеи с другими (практическими) попытками улучшения подобных систем логического программирования. Речь идет об использовании в ПРОЛОГе таких операторов, как операторы "cut", "savecp", "cutto" [4, с.43 - 50; 318 - 319] и "get backtracking", которые позволяют также "отсекать" часть дерева поиска вывода. При этом надо отметить, что эти попытки "отсечения" обладают, как правило, рядом побочных нежелательных эффектов, нарушающих логическую стройность программы. Формальное исчисление, предложенное здесь, решает проблему устранения побочных эффектов. Логическая стройность программы не ухудшается.

2. Предложенная идея "интеллектуального бектрекинга" нуждается в дальнейшей доработке. Так, рассмотренное в данной статье исчисление, реализующее эту идею, ограничено тем, что построено для специального класса исчисления предикатов. При этом, как видно из примера вывода в данном исчислении, процесс поиска не всегда является эффективным. Это связано с тем, что в данных исчислениях "интеллектуализация" осуществляется за счет использования "отрицательной" информации, полученной при неудачах. "Положительная" информация, например, о тех подстановках, которые необходимо сделать, при "отходах" не запоминается (в приведенных примерах 1 и 2 эта "положительная" информация была использована).

3. Для ответа на вопрос об эффективности предложенной системы "интеллектуального бектрекинга" необходимо решить вопрос об экспоненциальной сложности процедуры поиска ($P\neq NP$-проблема). В настоящее время появились первые работы, показы-

вающие, что системы, предложенные М.Бранохе [1] и П.Коксом [2], проблему экспоненциальной сложности алгоритма унификации в общем случае не решают [5]. Это приводит к необходимости дальнейшей "интеллектуализации" поиска вывода. Один из возможных подходов связан с идеей "глобальной обработки информации". В этом случае сокращение пространства поиска происходит за счет использования глобальной информации о структуре формулы и мира, в котором ищется вывод данной формулы. Представляется перспективным постановка проблемы "интеллектуализации" "отхода" в системах поиска вывода, основанных на обратном методе С.Маслова. Другая возможность повышения эффективности предложенного исчисления заключается в таком использовании идеи временных переменных, которая, например, намечена во II-ой версии ПРОЛОГа, предложенной А.Колмерое, А.Кануи, ван Канегемом [6]. Речь идет об использовании оператора "заморозки" вычислений (freeze operation) [4, с.43 - 50] (или механизма "замедленных вычислений" (lazy evalution) функционального программирования [7, с.212 - 240]), который позволяет отложить вычисления до тех пор, пока не будет получена необходимая информация. Структурная обработка информации, позволяет такую необходимую информацию извлекать. Так, в *примере 1*, применяя оператор "заморозки", мы должны отложить положительное сопоставление P(x) до тех пор, пока не будет положительно сопоставлен с миром S коньюнктивный член S(x,a). Как видно из решения данного примера, именно здесь (в преждевременном означивании переменной x) и была заключена причина неудачи при положительном сопоставлении S(x,a). Но, даже не приступая к выводу формулы F, на основе анализа структуры этой формулы можно предложить следующее эквивалентное преобразование: перестановка конъюнктивного члена S(x,a) сразу после P(x). В этом случае пространство поиска вывода (дерево поиска) сократится, вывод будет найден быстрее.

4. Отметим еще одну возможность модификации предложенной системы поиска, которая связана с расширением выразительных возможностей языка логики предикатов. Систему равенств, записанную перед формулой, можно понимать не только как запрещение того или иного неравенства, но и как систему возможных будущих подстановок (идея временных переменных). Это позволяет в указанном исчислении реализовать не только метод "поиска в глубину", но и метод "поиска в ширину". Для этого в систему равенств можно записывать решения системы уравнений определенного уровня (см. решение методом "поиска в ширину" *примера 1*). Таким образом, сформулированное исчисление поиска позволяет сочетать оба указанных метода.

ЛИТЕРАТУРА

1. *Bruynooghe M, Pereira L.M.* Deduction revision by intelligent backtracking //Implementaion of Prolog. Chichester: Ellis Horwood, 1984. P. 194-215
2. *Cox P.T.* Finding backtrack points for intelligent backtracking //Ibid., P. 216-233
3. *Ежкова И.В.* Обобщение схем логического вывода для планирования поведения и диагностики: Автореферат дис. ... канд. физ.-мат. наук. М., 1978. 16 с. (практический алгоритм см. в : Ежкова И.В. Автоматическое доказательство теорем и построение планов //Алгоритмы и программы. Инфор. бюллетень. 1978. N4 (24)
4. Логическое программирование /Под ред. В.Н. Агафонова/. М.: Мир, 1988
5. *Wolfram D.A.* Intractable unifiability problems and backtracking //Journal of automated reasosing. 1989. Vol.5. N.1. P. 37-47
6. *Colmerauer A., Kahoui H., van Caneghem M.* Last steps toward an ultimate Prolog //Proc.7th IJCAI-81 (Intern. Joint Conf. on Artif. Intellig.). Vancouver, 1981. V.II. P. 947-949
7. *Хендерсон П.* Функциональное программирование. Применение и реализация. М.: Мир, 1983.

В.А. Любецкий

ТЕОРЕМЫ ПЕРЕНОСА И АЛГЕБРА МОДАЛЬНЫХ ОПЕРАТОРОВ*

Теория множеств, не использующая закона исключенного третьего, сохраняя высокие выразительные возможности (для описания сцен, образов, отношений и т.п.) классической теории множеств, имеет многие черты эффективной теории. В работе строится широкий класс формул, для которых из их выводимости в классической теории множеств следует их же выводимость в интуиционистской теории множеств. Затем в работе приводятся теоремы переноса для классической логики в случае колец (включая упорядоченные кольца; как пример приводятся обобщения теорем Гильберта о нулях и Артина об упорядоченных полях на случай регулярных f–колец).

В качестве классической теории множеств ZF мы рассматриваем теорию множеств Цермело–Френкеля с ε–индукцией вместо аксиомы фундирования и с Collection–аксиомой вместо аксиомы подстановки. Это самая обычная система аксиом классической теории множеств. В качестве соответствующей интуиционистской теории множеств ZFI' рассматривается теория ZF без аксиомы $\varphi \vee \neg\varphi$ (обычно называемой законом исключенного третьего и обозначаемой LEM).

Символ $\leftrightharpoons$ означает "равно по определению" или "эквивалентно по определению". Предполагается некоторое знакомство читателя с работами [3,6,7].

Фи–формулой назовем такую формулу, для посылки любой импликации которой выполняется следующее: она не содержит квантор $\forall$, а квантор $\exists$ не входит в область действия связки $\Rightarrow$. Любая формула классически эквивалентна фи–формуле; например, формуле в предваренной форме. AE–формулой называется формула вида $\forall x_1 \ldots x_n \exists y_1 \ldots y_n\ \varphi_0$, где φ_0 – бескванторная формула.

Пусть фиксирован произвольный язык, включающий кроме символа равенства •=• какие–то функциональные f, ... и какие–то предикатные P, ... символы. Например, пусть f и P

---

*Работа выполнена при поддержке Российского фонда фундаментальных исследований, грант № 93–012–1027.

двухместные. Пусть K какая-то интерпретация этих символов в счетном конструктивном множестве; например, в множестве всех положительных целых чисел $\omega \leftrightharpoons \{0,1,2,\ldots\}$. "Интерпретация" означает, что $x=y$ понимается как тождество (т.е. как совпадение двух множеств x и y) и $f\colon \omega^2 \to \omega$, $P \subseteq \omega^2$. По существу $\bar{K} \leftrightharpoons \langle\omega, f,\ldots, P,\ldots\rangle$ есть произвольная счетная структура (из функций и отношений). Излагаемый ниже подход использует условие счетности носителя при проверке только соотношений $(*_1)$ и $(*_2)$, которые будут указаны ниже. Эти соотношения – условия на произвольный носитель K структуры $\bar{K}$ (и они выполняются, если $K = \omega$). Если предположить, что они выполняются для произвольного множества K, то для структуры вида $\bar{K} \leftrightharpoons \langle K, f,\ldots, P,\ldots\rangle$, $f\colon K^2 \to K$, $P \subseteq K^2$ указанная ниже Теорема 1 также верна. Вопрос, для каких множеств K, кроме ω, выполняются эти условия, будет рассмотрен в другой заметке автора.

Итак, пусть φ и ψ произвольные фиксированные соответственно фи-формула и АЕ-формула в нашем языке, а формула $(\varphi \Rightarrow \psi)_{\bar{K}}$ выражает некоторое свойство структуры $\bar{K}$ и представляет собой формулу языка теории множеств ZF. Точнее, здесь речь может идти об одной из следующих двух формул: либо $\forall f,P,\ldots\ (f\colon \omega^2 \to \omega \wedge P \subseteq \omega^2 \wedge \ldots \Rightarrow (\forall\bar{x}\ (\varphi \Rightarrow \psi))_{\omega,f,P,\ldots})$, либо $\forall f,P,\ldots\ (\kappa(f,P,\ldots) \Rightarrow (\forall\bar{x}\ (\varphi \Rightarrow \psi))_{\omega,f,P,\ldots})$, где $\bar{x}$ – все свободные переменные в φ и ψ, а κ – формула языка ZF, описываюшая структуру $\bar{K}$. Мы ограничимся здесь рассмотрением первого случая, второй случай рассматривается аналогично, см. Замечание 2. Первую из этих формул обозначим ζ. Обозначим ζ' формулу ζ, в посылке которой добавлено $\forall x,y \in \omega\ (P(x,y) \vee \neg P(x,y))$ для всех предикатных символов P, ..., входящих в ζ.

<u>Теорема 1</u>. Если $ZF \vdash \zeta$, то $ZFI' \vdash \zeta'$.

<u>Доказательство</u>. Предположим посылку. Последующее изложение есть явное метаматематическое описание вывода в ZFI' , о котором говорится в заключении Теоремы 1. Отсюда,

в частности, видно, что длина интуиционистского вывода – линейная функция от длины соответствующего классического вывода с некоторым малым коэффициентом, который легко явно указать.

Обозначим $\mathbb{Z}_2 \leftrightharpoons \{0,1\}$, где $<$ определяется как $0 < 1$. Тогда $u \leq v \leftrightharpoons u<v \vee u=v$. Эта структура является булевой алгеброй. (Конечно, не утверждается ее полнота.) Пусть $\mathcal{T}_2$ – множество всех идеалов в $\mathbb{Z}_2$; как обычно, идеалом "a" называется подмножество в $\mathbb{Z}_2$, обладающее свойствами: $0 \in a$, $\forall e_1, e_2 \in a\ (e_1 \vee e_2 \in a)$, $\forall e \in \mathbb{Z}_2\ \forall e_1 \in a\ (e \leq e_1 \Rightarrow e \in a)$. Порядок в $\mathcal{T}_2$ определяется естественно: $a \leq b \leftrightharpoons a \subseteq b$. Эта структура является полной гейтинговой алгеброй. Например, $(\bigvee_\alpha a_\alpha) \wedge b \leq \bigvee_\alpha (a_\alpha \wedge b)$. При этом $a \wedge b \leftrightharpoons a \cap b$, $\vee A \leftrightharpoons \{0\} \cup \bigcup A$. Последнее равенство следует из того, что $\{0\} \cup \bigcup A$ – идеал. Фиксируем вложение булевой алгебры $\mathbb{Z}_2$ в $\mathcal{T}_2$ как $0 \mapsto \{0\}$, $1 \mapsto \mathbb{Z}_2$.

Обозначим A_2 множество всех модальных операторов (иначе называемых J–операторами) на $\mathcal{T}_2$; как обычно, J–оператором называется отображение $J: \mathcal{T}_2 \to \mathcal{T}_2$, для которого $J(a) \geq a$, $J(a \wedge b) = J(a) \wedge J(b)$, $J(J(a)) = J(a)$, $\forall a,b \in \mathcal{T}_2$. Порядок в A_2 определяется как $J_1 \leq J_2 \leftrightharpoons \forall a \in \mathcal{T}_2\ (J_1(a) \subseteq J_2(a))$. Эта структура является полной гейтинговой алгеброй. При этом $(\bigwedge_\alpha J_\alpha)(a) \leftrightharpoons \bigcap_\alpha (J_\alpha(a))$ и $(\bigvee_\alpha J_\alpha)(a) \leftrightharpoons \bigcap \{b \mid a \subseteq b,\ J_\alpha(b)=b,\ \forall \alpha\}$. Фиксируем вложение $\mathcal{T}_2 \to A_2$ как $a \mapsto J_a$, где $J_a(b) \leftrightharpoons a \vee b$. Это cHa–вложение, т.е. $\{0\} \mapsto J_0 \leftrightharpoons id$, где $id(a) \equiv a$; $\mathbb{Z}_2 \mapsto J_1$, здесь по определению $J_1(a) \equiv \mathbb{Z}_2$, $J_{a \wedge b} = J_a \wedge J_b$ и $J_{\bigvee_\alpha a_\alpha} = \bigvee_\alpha J_{a_\alpha}$. Заметим, что $(\neg\neg_{A_2})\, J_a = J_a$, так как $(\neg_{A_2})\, J_a = J^a$, где $J_a(b) \leftrightharpoons a \to b$.

Действительно, $J_a \wedge J^a = id = J_0$, $J_a \vee J^a = J_1$.

Поэтому любое $J_a \in \mathcal{B}_2 \leftrightharpoons \{J \in A_2 \mid (\neg\neg_{A_2})J = J\}$, т.е. $\mathcal{T}_2$ сНа–вкладывается и в $\mathcal{B}_2$. При этом $\mathcal{B}_2$ – полная булева алгебра (как и всякая алгебра, так образованная по полной гейтинговой алгебре).

Определим "оценку":

$[\![k=t]\!]_{\bar{K}} \leftrightharpoons \{0\} \cup \{x \mid x=1,\ k=t\} \subseteq \mathbb{Z}_2$, $[\![\cdot = \cdot]\!]_{\bar{K}}: K^2 \to \mathcal{T}_2$.

Действительно, всякое ее значение является идеалом. Для любых термов s_1, s_2 определим $[\![s_1(\bar{k}) = s_2(\bar{k})]\!]_{\bar{K}}$ как $[\![k = t]\!]_{\bar{K}}$, где $s_1(\bar{k}) \leftrightharpoons k$, $s_2(\bar{k}) \leftrightharpoons t$ (s_1, s_2 вычисляются в K). Аналогично определим $[\![P(s_1,s_2)]\!]_{\bar{K}} \leftrightharpoons [\![P(s_1^0,s_2^0)]\!]_{\bar{K}}$ (где s_1^0, s_2^0 – значения термов s_1, s_2 в $\bar{K}$) $\leftrightharpoons \{0\} \cup \{x \mid x=1,\ P(s_1^0,s_2^0)\} \in \mathcal{T}_2$. Продолжим отображение $[\![\cdot = \cdot]\!]_{\bar{K}}$ с множества всех термов с параметрами из K на множество всех формул с параметрами из K (без свободных переменных) индукцией по связкам. В первом случае используются операции в $\mathcal{T}_2$, а во втором случае – в $\mathcal{B}_2$; получаются отображения, которые будут обозначаться соответственно $[\![\cdot]\!]_{\mathcal{T}_2}$ и $[\![\cdot]\!]_{\mathcal{B}_2}$.

Условие

$$\forall k,t \in K\ (k=t \lor k \neq t) \qquad (*_1)$$

выполняется для носителя $K \leftrightharpoons \omega$. Это приводит к существенному упрощению ситуации: $[\![s_1=s_2]\!]_{\bar{K}} = \{0\}$ или $[\![s_1=s_2]\!]_{\bar{K}} = \mathbb{Z}_2$. Аналогично: $[\![P(s_1,s_2)]\!]_{\bar{K}} = \{0\}$ или $[\![P(s_1,s_2)]\!]_{\bar{K}} = \mathbb{Z}_2$ (в силу дополнительной посылки $P \lor \neg P$ в формуле ζ'). Указанное свойство будем называть "нормальностью оценки". Соответственно $[\![s_1=s_2]\!]_{\mathcal{B}_2} = J_0$ или $[\![s_1=s_2]\!]_{\mathcal{B}_2} = J_1$, и $[\![P(s_1,s_2)]\!]_{\mathcal{B}_2} = J_0$ или $[\![P(s_1,s_2)]\!]_{\mathcal{B}_2} = J_1$. Здесь (и в следующих теоремах) можно предполагать непосредственно условие нормальности:

($[\![k=t]\!]_{\bar{K}}$, $[\![P(k,t)]\!]_{\bar{K}} \in \mathbb{Z}_2$), $\forall k,t \in K$ (или соответственно, $\in B(K)$).

Лемма 1. Для любой формулы φ выполняется: $\varphi_{\overline{K}} \Leftrightarrow ([\![\varphi]\!]_{\mathcal{T}_2} = \mathbb{Z}_2)$.

Доказательство. Индукцией по длине φ. Имеем: $(s_1=s_2)_{\overline{K}} \Leftrightarrow (k=t)_{\overline{K}} \Leftrightarrow ([\![k=t]\!]_{\overline{K}} = \mathbb{Z}_2) \Leftrightarrow ([\![s_1=s_2]\!]_{\overline{K}} = \mathbb{Z}_2)$. Аналогично: $P(s_1,s_2)_{\overline{K}} \Leftrightarrow P(k,t) \Leftrightarrow ([\![P(s_1,s_2)]\!]_{\overline{K}} = \mathbb{Z}_2)$. Если $[\![\varphi \vee \psi]\!]_{\mathcal{T}_2} = \mathbb{Z}_2$, то $1 \in ([\![\varphi]\!] \cup [\![\psi]\!])$, $1 \in [\![\varphi]\!]$ или $1 \in [\![\psi]\!]$. Если $(\varphi \Rightarrow \psi)_{\overline{K}}$ и $e \in [\![\varphi]\!]_{\mathcal{T}_2}$, то $e=0$ или $e=1$ и по индукции $e \in [\![\psi]\!]$. Если $\varphi_{\overline{K}}$ и $[\![\varphi]\!]_{\mathcal{T}_2} \leq [\![\psi]\!]_{\mathcal{T}_2}$, то $[\![\psi]\!]_{\mathcal{T}_2} = \mathbb{Z}_2$, $\psi_{\overline{K}}$. Если $[\![\exists x\varphi]\!]_{\mathcal{T}_2} = \mathbb{Z}_2$, то $1 \in (\{0\} \cup \bigcup\limits_k [\![\varphi(k)]\!]_{\mathcal{T}_2}$, $[\![\varphi(k)]\!]_{\mathcal{T}_2} = \mathbb{Z}_2$ для некоторого $k \in \overline{K}$.

□

Таким образом, использование оценки $[\![\cdot]\!]_{\mathcal{T}_2}$ в доказательстве Теоремы 1 является лишь вопросом изложения.

Обозначим $V^{\mathcal{B}_2}$ булевозначный универсум для полной булевой алгебры $\mathcal{B}_2$. Тогда класс V всех множеств вкладывается в $V^{\mathcal{B}_2}$ как обычно: $x^\vee \leftrightharpoons \{y^\vee \mid y \in x\}\_$, где X_ обозначает тождественно единичную функцию, определенную на X. Здесь $(\cdot)^\vee : V \to V^{\mathcal{B}_2}$. Индукцией по длине доказательства легко получить, что если $ZF \vdash \zeta$, то $[\![\zeta]\!]_{V^{\mathcal{B}_2}} = J_1$ и, в частности, $[\![f^\vee : (\omega^\vee)^2 \to \omega,\ P^\vee \subseteq (\omega^\vee)^2 \wedge \ldots \Rightarrow (\varphi \Rightarrow \psi)_{\omega^\vee, f^\vee, P^\vee})]\!] = J_1$,

$$[\![\varphi_{\omega^\vee}]\!]_{V^{\mathcal{B}_2}} \leq [\![\psi_{\omega^\vee}]\!]_{V^{\mathcal{B}_2}} \qquad (1)$$

В соответствии с посылкой нашей Теоремы 1 получаем соотношение (1), которое будет использоваться в дальнейшем; в нашем доказательстве это единственное использование посылки теоремы 1.

При получении (1) мы опирались также на то, что $[\![f^V: (\omega^V)^2 \to \omega^V]\!]_{\mathcal{B}_2^V} = J_1$. Это нетривиально в части однозначности: нужно получить

$$[\![k_1{}^V = t_1{}^V]\!]_{\mathcal{B}_2^V} \wedge [\![k_2{}^V = t_2{}^V]\!]_{\mathcal{B}_2^V} \leq [\![f(k_1,k_2)^V = f(t_1,t_2)^V]\!]_{\mathcal{B}_2^V}.$$

Это следует из Леммы 2, впрочем, для случая $k_1, t_1, k_2, t_2 \in \omega$ это ясно и непосредственно (из строгой разрешимости множества ω). Напомним, что множество X называется строго разрешимым, если наследство X^+ множества X (определяемое по ε–индукции как $X^+ \leftrightharpoons X \cup \bigcup \{Y^+ \mid Y \in X\}$) обладает свойством: $\forall u, v \in X^+ (u = v \vee \exists w \in u\, (w \notin v) \vee \exists w \in v\, (v \notin u))$.

Лемма 2. Для любой формулы φ выполняется:

$$[\![\varphi(k_1,\ldots,k_n)]\!]_{\mathcal{B}_2} = [\![\varphi(k_1{}^V,\ldots,k_n{}^V)_{\omega^V, f^V, P^V}]\!]_{\mathcal{B}_2^V}.$$

Доказательство. Индукцией по длине φ. Атомарный случай. Тривиально $[\![k=t]\!]_{\overline{K}} \leq [\![k^V = t^V]\!]_{\mathcal{T}_2^V} \leq [\![k^V = t^V]\!]_{\mathcal{B}_2^V}$ (или по–другому, используя нормальность, получаем сразу $[\![k=t]\!]_{\overline{K}} \leq [\![k^V = t^V]\!]_{\mathcal{B}_2^V}$). Предположим условие

$$[\![k^V = t^V]\!]_{\mathcal{B}_2^V} \leq [\![k=t]\!]_{\overline{K}}. \qquad (*_2)$$

Если $k, t \in \omega$, то оно тривиально выполняется, как и для всякого другого строго разрешимого множества. Итак, $[\![k=t]\!]_{\overline{K}} = [\![k^V = t^V]\!]_{\mathcal{B}_2^V}$. Случай термов. В случае одного функционального символа получаем: $[\![f(k^V, t^V) = r^V]\!]_{\mathcal{B}_2} = [\![\langle k^V, t^V, r^V\rangle \in f^V]\!]_{\mathcal{B}_2} = \bigvee_{u,v \in K} [\![k^V = u^V]\!]_{\mathcal{B}_2} \wedge [\![t^V = v^V]\!]_{\mathcal{B}_2} \wedge$

$[\![r^{\vee}=f(u,v)^{\vee}]\!]_{\mathcal{B}_2} = \bigvee_{u,\,v\in K} [\![k=u]\!]_{\overline{K}} \wedge [\![t=v]\!]_{\overline{K}} \wedge [\![r=f(u,v)]\!]_{\overline{K}}$

$= \bigvee_{u,\,v\in K} [\![k=u]\!] \wedge [\![t=v]\!] \wedge [\![r=f(k,t)]\!] = [\![r=f(k,t)]\!]_{\overline{K}}.$

Предпоследнее равенство следует из того, что $[\![k=u]\!]_{\overline{K}} \wedge [\![t=v]\!]_{\overline{K}} \wedge [\![r=f(k,t)]\!]_{\overline{K}} \leq [\![r=f(u,v)]\!]_{\overline{K}}$. В общем случае получаем: $[\![f(t_1,t_2)=s]\!]_{\mathcal{B}_2} = [\![(\exists x,y\ (f(x,y)=s \wedge t_1=x \wedge t_2=y))_K{}^{\vee}]\!]_{\mathcal{B}_2} = \bigvee_{x,\,y\in K} [\![f(x^{\vee},y^{\vee})=s]\!]_{\mathcal{B}_2} \wedge [\![t_1=x^{\vee}]\!]_{\mathcal{B}_2} \wedge [\![t_2=y^{\vee}]\!]_{\mathcal{B}_2}$

$= \bigvee_{x,\,y\in K} [\![f(x,y)=s]\!]_{\overline{K}} \wedge [\![t_1=x]\!]_{\overline{K}} \wedge [\![t_2=y]\!]_{\overline{K}} = \bigvee_{x,\,y\in K} [\![t_1=x]\!]_{\overline{K}} \wedge [\![t_2=y]\!]_{\overline{K}} \wedge [\![f(t_1,t_2)=s]\!]_{\overline{K}} = [\![f(t_1,t_2)=s]\!]_{\overline{K}}.$

Другой атомарный случай есть $[\![P^{\vee}(k^{\vee},t^{\vee})]\!]_{\mathcal{B}_2^{\vee}} \leftrightharpoons [\![<k^{\vee},t^{\vee}>\in P^{\vee}]\!]_{\mathcal{B}_2^{\vee}} = \bigvee_{<u,\,v>\in P} [\![k^{\vee}=u^{\vee}]\!]_{\mathcal{B}_2^{\vee}} \wedge [\![t^{\vee}=v^{\vee}]\!]_{\mathcal{B}_2^{\vee}} = \bigvee_{<u,\,v>\in P} [\![k=u]\!]_{\overline{K}} \wedge [\![t=v]\!]_{\overline{K}} = [\![P(k,t)]\!]_{\overline{K}}$. Последнее равенство проверяется непосредственно.

Аналогично $[\![P^{\vee}(s_1,s_2)]\!]_{\mathcal{B}_2^{\vee}} \leftrightharpoons [\![(\exists x,y\ (P^{\vee}(x,y) \wedge s_1=x \wedge s_2=y))_K{}^{\vee}]\!]_{\mathcal{B}_2^{\vee}} = \bigvee_{x,\,y\in K} [\![P^{\vee}(x^{\vee},y^{\vee})]\!]_{\mathcal{B}_2} \wedge [\![s_1=x^{\vee}]\!]_{\mathcal{B}_2} \wedge [\![s_2=y^{\vee}]\!]_{\mathcal{B}_2} = \bigvee_{x,\,y\in K} [\![P(x,y)]\!]_{\overline{K}} \wedge [\![s_1=x]\!]_{\overline{K}} \wedge [\![s_2=y]\!]_{\overline{K}} = [\![P(s_1,s_2)]\!]_{\overline{K}}.$
Последнее равенство проверяется также непосредственно.

Случаи связок очевидны. □

Замечание 1. Следующее утверждение не используется в этом доказательстве, но полезно для его понимания:

$[\![k^{\vee}=t^{\vee}]\!]_{\mathcal{T}_2} = [\![k=t]\!]_{\overline{K}}$, где сейчас k,t – произвольные множества. Действительно, допустим это равенство для всех $x \in k$, $y \in t$. В одну сторону индуктивное предположение не используется: $e \in [\![k=t]\!]_{\overline{K}} \Rightarrow e=0 \vee e=1$ и $0 \in [\![k^{\vee}=t^{\vee}]\!]$ или $k^{\vee}=t^{\vee}$. Если $e \in [\![k^{\vee}=t^{\vee}]\!]_{\mathcal{T}_2}$, то $e=0 \vee e=1$. В первом случае тривиально. Во втором случае $1=e \in [\![k^{\vee}=t^{\vee}]\!]_{\mathcal{T}_2} = \bigwedge_{x \in k} \bigvee_{y \in t} [\![x^{\vee}=y^{\vee}]\!]_{\mathcal{T}_2} \wedge \ldots$, т.е. для любого $x \in k$ существует $y \in t$ такое, что $1 \in [\![x^{\vee}=y^{\vee}]\!]_{\mathcal{T}_2}$, $1 \in [\![x=y]\!]_{\overline{K}}$, $x=y$, т.е. $x \in t$, $k \subseteq t$ и аналогично $t \subseteq k$. Итак, $k=t$ и $[\![k=t]\!]_{\overline{K}} = \mathbb{Z}_2$, $1 \in [\![k=t]\!]_{\overline{K}}$. □

Лемма 3. а) Для любой фи–формулы φ с параметрами $\bar{k}=\langle k_1,\ldots,k_n\rangle \in K$ выполняется: $[\![\varphi(\bar{k})]\!]_{\mathcal{T}_2} \leq [\![\varphi(\bar{k})]\!]_{\mathcal{B}_2}$.

б) Для любой АЕ–формулы ψ с параметрами $\bar{k}=\langle k_1,\ldots,k_n\rangle \in K$ выполняется: $(a \leq [\![\psi(\bar{k})]\!]_{\mathcal{B}_2}) \Rightarrow (a \leq [\![\psi(\bar{k})]\!]_{\mathcal{T}_2})$, $\forall a \in \mathcal{T}_2$.

Доказательство. а) Пусть сначала φ не содержит квантора $\forall$, а также в ней квантор $\exists$ не входит в область действия $\Rightarrow$. Индукцией по длине φ проверим, что: если φ не содержит $\exists$, то $[\![\varphi]\!]_{\mathcal{T}_2} = [\![\varphi]\!]_{\mathcal{B}_2} \in \mathbb{Z}_2$; а если φ содержит $\exists$, то $[\![\varphi]\!]_{\mathcal{T}_2} = [\![\varphi]\!]_{\mathcal{B}_2}$. Действительно, для атомарной формулы φ первое утверждение получается по свойству нормальности оценки. Для случаев $\wedge$ и $\vee$ тривиально. Для случая $\Rightarrow$ формула φ не содержит $\exists$ (по условию) и получаем первое утверждение. Случай $\exists$ тривиален.

Пусть теперь φ есть фи–формула. Если φ атомарная или φ получается с помощью связок $\wedge, \vee, \exists, \forall$, то утверждение Леммы 3а ясно. Если φ получается как $\varphi_1 \Rightarrow \varphi_2$, то для φ_1

получаем $[\![\varphi_1]\!]_{\mathcal{T}_2} = [\![\varphi_1]\!]_{\mathcal{B}_2}$ (согласно предыдушему абзацу). По индуктивному предположению $[\![\varphi_2]\!]_{\mathcal{T}_2} \leq [\![\varphi_2]\!]_{\mathcal{B}_2}$, поэтому $([\![\varphi_1]\!]_{\mathcal{T}_2} \to_{\mathcal{T}_2} [\![\varphi_2]\!]_{\mathcal{T}_2}) \leq [\![\varphi_1]\!]_{\mathcal{T}_2} \to_{\mathcal{B}_2} [\![\varphi_2]\!]_{\mathcal{T}_2} \leq [\![\varphi_1]\!]_{\mathcal{B}_2} \to_{\mathcal{B}_2} [\![\varphi_2]\!]_{\mathcal{B}_2}$.

б) Если $\psi(\bar{k})$ атомарная, т.е. вида $s_1=s_2$ или $P(s_1,s_2)$, то $[\![\psi(\bar{k})]\!]_{\mathcal{T}_2} = [\![\psi(\bar{k})]\!]_{\mathcal{B}_2}$ (по определению) и $[\![\psi(\bar{k})]\!] \in \mathbb{Z}_2$ (по свойству нормальности оценки). Заметим, что пропозициональные операции $\wedge, \vee, \to$ в $\mathcal{T}_2$ и в $\mathcal{B}_2$ над элементами из $\mathbb{Z}_2$ (т.е. над $\{0\}$ и $\mathbb{Z}_2$ идеалами или J_0 и J_1 операторами) дают один и тот же результат, принадлежащий снова $\mathbb{Z}_2$. Поэтому для бескванторной $\psi(\bar{k})$ мы получаем опять $[\![\psi(\bar{k})]\!]_{\mathcal{T}_2} = [\![\psi(\bar{k})]\!]_{\mathcal{B}_2} \in \mathbb{Z}_2$ (индукцией по длине φ). Здесь существенно условие $(*_1)$. Для случая $\exists y\psi$ получаем $[\![\exists y\psi(y,\bar{k})]\!]_{\mathcal{T}_2} = [\![\exists y\psi(y,\bar{k})]\!]_{\mathcal{B}_2} \in \mathcal{T}_2$ (в силу cHa–вложения $\mathcal{T}_2$ в $\mathcal{B}_2$). Наконец, для случая $\forall x\exists y\psi$ получаем проверяемое неравенство непосредственно. □

Итак, <u>завершим доказательство</u> Теоремы 1. Предположим $f\colon \omega^2 \to \omega$, $P \subseteq \omega^2$ и $\varphi_{\omega,f,P}(\bar{k})$. Предположим $(*_2)$. Тогда по Лемме 1 получаем $[\![\varphi]\!]_{\mathcal{T}_2} = \mathbb{Z}_2$ и по Лемме 3а $[\![\varphi]\!]_{\mathcal{B}_2} = J_1$. По Лемме 2 $[\![\varphi(\check{k}_1,\ldots,\check{k}_n)_{\check{K}}]\!]_{\check{\mathcal{B}}_2} = J_1$. В силу соотношения (1) имеем $[\![\psi(\check{k}_1,\ldots,\check{k}_n)_{\check{K}}]\!]_{\check{\mathcal{B}}_2} = J_1$, по Лемме 2 $[\![\psi(\bar{k})]\!]_{\mathcal{B}_2} = J_1$ и по Лемме 3б $[\![\psi(\bar{k})]\!]_{\mathcal{T}_2} = \mathbb{Z}_2$. По Лемме 1 $\psi_{\omega,f,P}(\bar{k})$. ■

Замечание 2. Во втором случае, упомянутом перед Теоремой 1, нужно предположить "абсолютность" формулы K, т.е. предположить

$$K(\omega, f, P, \ldots) \Rightarrow (\llbracket K(\omega^{\vee}, f^{\vee}, P^{\vee}, \ldots)\rrbracket_{V^{\mathcal{B}_2}} = 1) \qquad (*_3)$$

Тогда, предполагая $K(\omega, f, P, \ldots)$, получим $\llbracket K(\omega^{\vee}, f^{\vee}, P^{\vee}, \ldots)\rrbracket_{V^{\mathcal{B}_2}} = 1$ и отсюда получим (1), и далее, как в доказательстве Теоремы 1. Обычная структура $<\omega, +, -, \cdot, \leq, 0, 1>$ описывается, конечно, абсолютной формулой. Это случай теоремы Х. Фридмана. Абсолютными формулами описываются также любые рекурсивные операции и отношения на ω. Если K позитивная с ограниченным квантором $\forall$, то она абсолютна. Если K с тесными отрицаниями и релятивизована к множеству U, для которого наследство множества $\{x, y\}$ (для любых $x, y \in U$) строго разрешимо, то K абсолютна. Если алгебра $\mathcal{B}_2$ с отделимостью, то любая формула K с ограниченными кванторами абсолютна. Доказательство во всех этих случаях состоит в непосредственной индукции.

Аналогичное теореме 1 утверждение верно для многосортного языка (как в теореме 3, когда дополнительный сорт переменных пробегает алгебраически или вещественно замкнутое расширение исходного кольца). Вместо одной формулы φ можно писать теорию T, состоящую из набора фи-формул, понимая $T_{\bar{K}}$ как $\bar{K} \models T$ при подходящем описании T как множества кодов-натуральных чисел. Обычно T содержит счетное множество аксиом и T можно описать, например, как $\alpha \subseteq \omega$. Тогда, если $\forall n \in \alpha\ (\bar{K} \models n)$, то $\llbracket \forall n \in \alpha^{\vee} (\bar{K} \models n)\rrbracket = \bigwedge \{\llbracket (\varphi_n)_K \rrbracket \mid n \in \alpha\} = J_1$. □

Приведем Теорему 2, смысл которой в возможности элиминировать в выводе некоторые аксиомы подобно, например, элиминации сечения (как аксиомы) или элиминации LEM в Теореме 1. Утверждения о возможности такой элиминации иногда называют "теоремами переноса".

Формула φ называется слабо позитивной, если φ получается из атомарных формул индуктивно с помощью связок $\wedge,\vee,\exists,\forall$ и "особого случая" для импликации: если φ_1 h–формула и φ_2 слабо позитивная, то $(\exists\bar{x}\ \varphi_1) \wedge (\forall\bar{x}\ (\varphi_1 \Rightarrow \varphi_2))$ слабо позитивная. Слабо хорнова формула ψ определяется индуктивно как полученная из атомарных формул с помощью связок $\wedge,\exists,\forall$ и "особого случая" для импликации: если φ_1 слабо позитивная и φ_2 слабо хорнова, то $(\varphi_1 \Rightarrow \varphi_2)$ слабо хорнова. Напомним, что h–формула определяется как атомарная или полученная с помощью связок $\wedge$, $\exists,\forall$ и "особого случая" для импликации: $(\exists\bar{x}\ \varphi_1) \wedge (\forall\bar{x}\ (\varphi_1 \Rightarrow \varphi_2))$ (где φ_1, φ_2 есть h–формулы).

Пусть φ и ψ – такие формулы в языке колец.

Теорема 2. а) Если $ZFI' \vdash \forall +,-,\cdot,0,1$ $(+\colon \omega^2 \to \omega,\ -\colon \omega \to \omega,\ \cdot\colon \omega^2 \to \omega,\ 0,1\in\omega \Rightarrow [\Phi_3 \Rightarrow \forall\bar{x}\ (\varphi(\bar{x}) \Rightarrow \psi(\bar{x}))]_{\omega,+,-,\cdot,0,1})$, то $ZFI' \vdash \forall +,-,\cdot,0,1$ $(\ \ldots \Rightarrow [\text{"кольцо"} \Rightarrow \forall\bar{x}\ (\varphi(\bar{x}) \Rightarrow \psi(\bar{x}))]_{\omega,+,-,\cdot,0,1})$, где ... означает соответствующее выражение из посылки и Φ_3 говорит, что $\bar{K} \leftrightharpoons \langle\omega,+,-,\cdot,0,1\rangle$ есть неразложимое кольцо, то есть всякое его разложение в прямую сумму идеалов тривиально (вида $K \oplus \{0\}$).

б) Утверждение пункта а остается верным, если опустить предположение о счетности $\bar{K}$, т.е. носитель K кольца $\bar{K}$ произволен, но предположить, что множество $B(\bar{K})$ всех центральных идемпотентов кольца $\bar{K}$ разрешимо (т. е. $\forall e_1, e_2 \in B(K)\ (e_1=e_2 \vee e_1\neq e_2)$).

в) Если $ZF \vdash \forall +,-,\cdot,0,1\ [i \Rightarrow \forall\bar{x}\ (\varphi(\bar{x}) \Rightarrow \psi(\bar{x})]_{\omega,+,-,\cdot,0,1}$, то $ZFI' \vdash \forall +,-,\cdot,0,1\ [i' \Rightarrow \forall\bar{x}\ (\varphi(\bar{x}) \Rightarrow \psi(\bar{x}))]_{\omega,+,-,\cdot,0,1}$.

Здесь дополнительно φ есть фи–формула и ψ есть АЕ–формула, а <i', i> следующие (например) пары свойств (включающие свойство "быть кольцом"): <бирегулярное, квазипростое>, <строго регулярное, тело>.

В пунктах "а,б" перед импликацией можно добавить в посылке и в заключении свойство $\Phi_1 \leftrightharpoons$ "быть нормальным кольцом".

Итак, в пунктах "а,б" элиминируется свойство Φ_3, в пункте "в" элиминируется как закон исключенного третьего, так и свойство i до много более слабого свойства i'. Напомним, например, что строго$_2$ регулярные кольца определяются условием: $\forall x \in K\ \exists y \in K\ (x^2 \cdot y = x)$. Они образуют класс колец существенно более широкий, чем класс тел.

Доказательство подобно доказательству Теоремы 1. Мы отметим только различия в них. По $\bar{K}$ образуем булеву алгебру $B(\bar{K})$ (вместо $\mathbb{Z}_2$), и, далее, как выше, образуем $\mathcal{T}(K)$ и $\mathcal{B}(K)$. Определим оценку $[\![k=t]\!]_K \leftrightharpoons \{e \in B(\bar{K})\ |\ e \cdot k = e \cdot t\} \in \mathcal{T}(K)$. Продолжим ее до оценок $[\![\cdot]\!]_{\mathcal{T}(K)}$ и $[\![\cdot]\!]_{\mathcal{B}(K)}$. Теперь не выполняется, конечно, Лемма 1. Вместо нее докажем следующую лемму.

Лемма 4. а) Если φ слабо позитивная, то $\varphi_K \Rightarrow ([\![\varphi]\!]_{\mathcal{T}(K)} = B)$.

б) Если φ слабо хорнова, то $([\![\varphi]\!]_{\mathcal{T}(K)} = B) \Rightarrow \varphi_K$.

Доказательство. Оба пункта доказываются совместной индукцией по длине φ. Если φ атомарная, то $(s_1=s_2)_K \Leftrightarrow ([\![s_1=s_2]\!]_K = B)$. В случае а для связок $\wedge, \vee, \exists, \forall$ тривиально; для связки $\Rightarrow$ получаем: если $(\exists x \varphi_1 \wedge (\forall x\ (\varphi_1 \Rightarrow \varphi_2)))_K$, то $\exists k_0 \in K\ ([\![\varphi_1(k_0)]\!]_{\mathcal{T}} = B)$ и тогда $[\![\forall x\ (\varphi_1 \Rightarrow \varphi_2)]\!]_{\mathcal{T}} = \bigcap \{[\![\varphi_2(k)]\!]_{\mathcal{T}}\ |\ k \in K,\ [\![\varphi_1(k)]\!]_{\mathcal{T}} = B\}$, откуда получаем $=B$. Проверим первое равенство: достаточно показать $[\![\forall x\ (\varphi_1 \Rightarrow \varphi_2)]\!]_{\mathcal{T}} \geq$

"правой части", то есть $([\![\varphi_1(k)]\!] \to [\![\varphi_2(k)]\!]) \geq$ "правой части", $\forall k$. Это следует из $[\![\varphi_1(k)]\!] \wedge$ "правая часть" $\leq [\![\varphi_2(k)]\!]$, т.е. из $\langle e\rangle \wedge [\![\varphi_2(k_1)]\!] \leq [\![\varphi_2(k)]\!]$, $\forall e\in [\![\varphi_1(k)]\!]$, $\forall k \exists k_1$, где $[\![\varphi_1(k)]\!] = B$. Положим $k_1 \leftrightharpoons e\cdot k+(1-e)\cdot k_0$ и тогда последнее выполняется. Действительно, пусть e' — любой элемент из левой части. Тогда $e' \leq e$ и $e'\in [\![k=k_1]\!] \wedge [\![\varphi_2(k_1)]\!] \leq [\![\varphi_2(k)]\!]$ и $e\in [\![k=k_1]\!] \wedge [\![\varphi_1(k)]\!] \leq [\![\varphi_1(k_1)]\!]$, $(1-e)\in [\![k_1=k_0]\!] \wedge [\![\varphi_1(k_0)]\!] \leq [\![\varphi_1(k_1)]\!]$, $[\![\varphi_1(k_1)]\!]_{\mathcal{J}} = B$.

В случае б для связок $\wedge, \forall$ тривиально; для связки $\exists$ получаем: если $[\![\exists x \varphi]\!]_{\mathcal{J}} = B$, то $1 = e_1 \vee \ldots \vee e_n = e'_i \vee \ldots \vee e'_n$,где $\{e'_i\}$ попарно дизъюнктны, и $e'_i\in [\![\varphi(k_i)]\!]$, положим $k_0 \leftrightharpoons \sum_i e'_i \cdot k_i$. Тогда $e'_i \cdot k_0 = e'_i \cdot k_0$, $e'_i\in [\![k_0=k_i]\!]_{\mathcal{J}} \wedge [\![\varphi(k_i)]\!]_{\mathcal{J}} \leq [\![\varphi(k_0)]\!]_{\mathcal{J}}$, $B= [\![\varphi(k_0)]\!]_{\mathcal{J}}$, (по индуктивному предположению) $\varphi(k_0)_K$. Для связки $\Rightarrow$ получаем: если $[\![\varphi_1 \Rightarrow \varphi_2]\!]_{\mathcal{J}} = B$, и $(\varphi_1)_K$, то (по пункту а) $[\![\varphi_1]\!]_{\mathcal{J}} = B$, $[\![\varphi_2]\!]_{\mathcal{J}} = B$ и $(\varphi_2)_K$. □

В булевозначном универсуме $V^{\mathcal{B}(K)}$ выберем, как и выше в Лемме 2, нестандартное представление структуры $\bar{K}$. В данном случае это будет не $\langle K^\vee, f^\vee, P^\vee\rangle$, а $\langle K', +', -', \cdot', 0', 1'\rangle$, где $K' \leftrightharpoons \{P_k \mid k\in K\}\_$, $P_k(t^\vee) \leftrightharpoons [\![k=t]\!]_K$, t пробегает K и $+' \leftrightharpoons \{\langle P_k, P_t, P_{k+t}\rangle \mid k,t\in K\}\_$, и также для $-'$, $\cdot'$; наконец, $0' \leftrightharpoons P_0$, $1' \leftrightharpoons P_1$. Существенно, что $[\![+': (K')^2 \to K']\!]_{V^{\mathcal{B}}} = J_1$ (и также для всех других операций, включая $[\![0', 1' \in K']\!]_{V^{\mathcal{B}}} = J_1$). Это нетривиально в части однозначности: нужно получить $[\![P_{k_1} = P_{t_1}]\!]_{\mathcal{B}} \wedge [\![P_{k_2} = P_{t_2}]\!]_{\mathcal{B}}$ $\leq [\![P_{k_1+k_2} = P_{t_1+t_2}]\!]_{\mathcal{B}}$. В силу Леммы 2, которая верна также в этом случае (при том же условии $(*_2)$; см. Доказательство ниже) это значит, что нужно проверить $[\![k_1=t_1]\!]_{\mathcal{B}} \wedge [\![k_2=t_2]\!]_{\mathcal{B}}$ $\leq [\![k_1+k_2 = t_1+t_2]\!]_{\mathcal{B}}$, т.е. $[\![k_1=t_1]\!]_K \wedge [\![k_2=t_2]\!]_K \leq [\![k_1+k_2 = t_1+t_2]\!]_K$. Последнее верно для любой функции f (например, от двух аргументов), для которой $f(e\bullet k_1, e\bullet k_2) = e\cdot f(k_1,k_2)$, $\forall e\in B(K)$, $\forall k_1,k_2\in K$; в частности, для функций $+,-,\cdot$.

Точнее, условие $(*_2)$ имеет в этом случае вид:

$$[\![k^{\vee}=t^{\vee}]\!]_{{}^{V}\mathcal{B}(K)} \leq [\![k=t]\!]_K, \ \forall k,t\in K; \qquad (*_4)$$

Фактически Лемма 2 (для этого случая) следует из условия:

$$[\![P_k=P_t]\!]_{{}^{V}\mathcal{B}(K)} \leq [\![k=t]\!]_K, \text{ т.е. из}$$

$$\bigcap_{x\in K}([\![k=x]\!]_K \to \bigcup_{y\in K} [\![t=y]\!]_K \wedge [\![x^{\vee}=y^{\vee}]\!]_{\mathcal{B}}) \wedge \ldots \leq [\![k=t]\!]_K. \quad (*_5)$$

Очевидно, $(*_4) \Rightarrow (*_5)$.

Доказательство варианта Леммы 2 (для случая Теоремы 2).

Проверим, что

$$[\![\varphi(k_1,\ldots,k_n)]\!]_{\mathcal{B}(K)} = [\![(\varphi(P_{k_1},\ldots,P_{k_n}))_{K'}]\!]_{{}^{V}\mathcal{B}(K)} \text{ для всех } \bar{k}\in K. \qquad (2)$$

Атомарный случай:

$$[\![k=t]\!]_K = [\![P_k=P_t]\!]_{\mathcal{B}}, \ \forall k,t\in K \ (3)$$

сразу следует из $(*_3)$. Условие $(*_2)$ выполняется на любом строго разрешимом множестве.

Случай термов (один функциональный символ):

$$[\![f(P_k,P_t) = P_r]\!]_{\mathcal{B}} = [\![\langle P_k,P_t,P_r\rangle \in f']\!]_{\mathcal{B}} = \bigcup_{u,v\in K} [\![P_k=P_u]\!]_{\mathcal{B}} \wedge$$

$$[\![P_t=P_v]\!]_{\mathcal{B}} \wedge [\![P_r=P_{f(u,v)}]\!] = \bigcup_{u,v} [\![k=u]\!]_K \wedge [\![t=v]\!]_K \wedge$$

$[\![r=f(u,v)]\!]_K = \bigcup_{u,v} [\![k=u]\!]_K \wedge [\![t=v]\!]_K \wedge [\![r=f(k,t)]\!]_K =$ $[\![r=f(k,t)]\!]_K$. Предпоследнее равенство использует сотношение $[\![k=u]\!]_K \wedge [\![t=v]\!]_K \wedge [\![r=f(u,v)]\!]_K \leq [\![r=f(k,t)]\!]_K$, где f – любая функция со свойством $e \cdot f(u,v) = f(e \cdot u, e \cdot v)$. Много функциональных символов: $[\![f(t_1,t_2)=s]\!]_{\mathcal{B}} = [\![(\exists x,y\ (f(x,y)=s \wedge (t_1=x) \wedge (t_2=y))_{K'}]\!]_{\mathcal{B}} = \bigcup_{x,y\in K} [\![f(P_x,P_y)=s]\!]_{\mathcal{B}} \wedge [\![t_1=P_x]\!]_{\mathcal{B}} \wedge$ $[t_2=P_y]\!]_{\mathcal{B}} = \bigcup_{x,y} [\![f(x,y)=s]\!]_K \wedge [\![t_1=x]\!]_K \wedge [\![t_2=y]\!]_K = \bigcup_{x,y} [\![t_1=x]\!] \wedge [\![t_2=y]\!] \wedge [\![f(t_1,t_2)=s]\!]$. □

Лемма 3 переносится на этот случай без изменения (нормальность оценки следует из i'), откуда получаем доказательство Теоремы 2. ■

Позитивно AE–хорновой назовем формулу вида $\varphi \Rightarrow \psi$, где φ слабо позитивная фи–формула и ψ AE–слабо хорнова формула. Множество всех таких формул, истинных в некоторой структуре или классе структур, называется позитивно AE–хорновой теорией этой структуры или класса структур. Говоря об этой теории, мы подразумеваем, что утверждение о соответствующей общезначимости выводимо в ZFC.

Следствие. Позитивно AE–хорновы теории класса строго регулярных колец и класса тел совпадают (то же для всех пар <i', i> классов колец из Теоремы 2в). □

Замечание 3. В Теореме 2 формула φ может включать и любые формулы вида ζ', где ζ произвольна в пунктах а,б и ζ есть фи–формула в пункте в. В пунктах а,б ψ может быть произвольной и тогда в заключении следует писать ψ' вместо ψ. В пункте в и Следствии ψ может быть произвольной AE–формулой (и тогда в заключении следует опять писать ψ').

Вместо φ и ψ там можно писать и теории, состоящие из соответствующих формул.

В язык колец могут быть включены и любые предикатные символы P (как в лемме 2 к Теореме 1), если для них выполняется условие $P(x, y) \Rightarrow P(e \cdot x, e \cdot y)$, $\forall e \in B(K)$, $\forall x, y \in K$. Например, если $\forall e \in B(K)$ $(e \geq 0)$, то так будет для предиката $\leq$. □

В качестве иллюстрации к Замечанию 3 рассмотрим ниже указанную Теорему 3. Начнем с ряда более общих утверждений, которые используются в доказательстве этой теоремы.

Пусть A строго регулярное упорядоченное f–кольцо (в языке колец с дополнительным отношением $\leq$). Напомним, что последнее означает: порядок $\leq$ является решеточным и $(x \geq 0,\ a \wedge b = 0) \Rightarrow (a \wedge (b \bullet x) = a \wedge (x \bullet b) = 0)$. Мы будем систематически использовать следующие простые свойства f–колец: если $c \geq 0$, то $(a \vee b) \bullet c = a \bullet c \vee b \bullet c$ (и тоже для $\wedge$, и слева), $|a \bullet b| = |a| \bullet |b|$, $a^2 \geq 0$, $a \wedge b = 0 \Rightarrow a \bullet b = 0$.

Пусть B(A) – булева алгебра всех центральных идемпотентов кольца A и $B \subseteq \mathcal{T} \subseteq \mathcal{B}$ обычные расширения (как в Теореме 2). Как выше, определяются оценки $[\![\cdot]\!]_A$, $[\![\cdot]\!]_{\mathcal{T}}$, и $[\![\cdot]\!]_{\mathcal{B}}$, причем $[\![s_1 \leq s_2]\!]_A \leftrightharpoons [\![k \leq t]\!]_A$ (где k, t значения термов s_1 и s_2 в A) $\leftrightharpoons \{e \in B \mid e \cdot k \leq e \cdot t\}$. Заметим, что отношение порядка в B (рассматривавшееся в Теореме 2) совпадает с отношением порядка, индуцированным из A. Действительно, если $e_1 \leq e_2$, т.е. $e_1 \cdot e_2 = e_1$, то $(e_2 - e_1)^2 = (e_2 - e_1)$, отсюда $e_2 - e_1 \geq_A 0$. Если $e_1 \leq_A e_2$, то $(1-e_2) \cdot e_1 \leq 0$ и $(1-e_2) \cdot e_1 \geq 0$, $(1-e_2) \cdot e_1 = 0$. Более того, $e_1 \wedge_B e_2 = e_1 \wedge_A e_2$ и $e_1 \vee_B e_2 = e_1 \vee_A e_2$. Действительно, $e_1 \cdot e_2 \leq e_1$, $e_1 \cdot e_2 \leq e_2$ и, если $a \leq e_1$, $a \leq e_2$, то $(1-e_1) \cdot a \leq 0$, $a \leq e_1 \cdot a$, $e_1 \cdot a \leq e_1 \bullet e_2$, $a \leq e_1 \cdot e_2$. Теперь случай $\vee_B$. Здесь $(e_1 \vee_A e_2) \cdot (e_1 \vee_A e_2) = (e_1 \vee_A e_2)$, т.е. $(e_1 \vee_A e_2) \in B$ и $e_1, e_2 \leq (e_1 \vee_A e_2)$, поэтому (в B) $e_1 \vee_B e_2 \leq e_1 \vee_A e_2$ и (в A) e_1

$\vee_A\ e_2 \le e_1 \vee_B e_2$. Итак, отношение порядка и решеточные операции в A являются продолжениями соответствующих отношения и операций в B. Важно также, что

$$[\![0 \le k]\!]_A = [\![k^- = 0]\!]_A \tag{4}$$

Действительно, условие $ek \ge 0$ влечет $e(k \wedge 0) = ek \wedge 0 = 0$ и условие $e(k \wedge 0) = 0$ влечет $ek \wedge 0 = 0$, $ek \ge 0$. Отсюда нормальность оценки $[\![\cdot]\!]_A$ следует из ее нормальности для равенства, последнее следует из строгой регулярности. Итак, для любой бескванторной формулы φ имеем $[\![\varphi]\!]_{\mathcal{T},\mathcal{B}} \in B(A)$.

Обычным образом получаем $[\![\forall x \exists y\,(x=0 \vee x\cdot y = y\cdot x = 1)]\!]_{\mathcal{T}} = B$, а также $[\![\forall x,y\,(x \le y \vee y \le x)]\!]_{\mathcal{T}} = B$. Действительно, $[\![0 \le x]\!]_{\mathcal{T}} \vee_{\mathcal{T}} [\![x \le 0]\!]_{\mathcal{T}} = [\![x^- = 0]\!] \vee [\![x^+ = 0]\!]$, пусть $x^+ = x^+ \bullet y \bullet x^+$ и $e \leftrightharpoons y \bullet x^+ \in B$; тогда $x^+ \cdot (1-e) = 0$ (т.е. $1-e$ из второго слагаемого), а e из первого слагаемого, так как $(x^+) \wedge (-x^-) = 0$, $(x^+)\cdot(-x^-) = 0$, $x^+ \cdot x^- = 0$, $yx^+ \cdot x^- = 0$, $e \cdot x^- = 0$. Поэтому объединение содержит 1. Итак, в смысле $\mathcal{T}$– и $\mathcal{B}$–глобальных истинностей:

A есть (линейно) упорядоченное тело. (5)

Второе утверждение следует из того, что "линейное" и "тело" – фи–формулы, а Лемма 3а также выполняется (в форме $[\![\varphi]\!]_{\mathcal{T}(A)} \le [\![\varphi]\!]_{\mathcal{B}(A)}$). Мы докажем эту лемму в более общей форме, для двусортного языка ниже, как Лемму 3в.

Теперь определим некоторое расширение $\bar{A}$ кольца A. Для этого, как в Теореме 2, определим $A' \in V^{\mathcal{T}} \subseteq V^{\mathcal{B}}$ такое, что

$$[\![\varphi(k_1,\dots,k_n)]\!]_{\mathcal{B},A} = [\![\varphi(P_{k_1},\dots,P_{k_n})_{A'}]\!]_{V^{\mathcal{B}}}$$

(для всех формул φ, как в Лемме 2). Тогда $[\![A'$ – (линейное) упорядоченное тело$]\!]_{V^{\mathcal{B}}} = J_1$. Пусть $[\![A''$ – вещественно замкнутое упорядоченное тело, $A' \subseteq A'']\!]_{V^{\mathcal{B}}} = J_1$. Положим

$$\bar{A} \leftrightharpoons (A'')^{\wedge \mathcal{B}(A)} \leftrightharpoons \{g \in V^{\mathcal{B}(A)} \mid [\![g \in A'']\!]_{V^{\mathcal{B}}} =$$

$J_1\}$.

Выполняется

$$[\![(\bar{A})\_ = A'']\!]_{V^{\mathcal{B}}} = T.$$

Определим оценку $[\![\bullet]\!]_{\mathcal{B}(A),\bar{A}}$ обычным образом, полагая $[\![f=g]\!]_{\mathcal{B}(A),\bar{A}} \leftrightharpoons [\![f=g]\!]_{V^{\mathcal{B}}}$ для любых $f,g \in \bar{A}$, и аналогично для $\leq$. Операции в $\bar{A}$ индуцируются операциями в $(\bar{A})\_$ в смысле $([\![\bullet]\!]_{V^{\mathcal{B}}} = T)$. Имеются два сорта переменных x, y, z (пробегающих A) и α, β, γ (пробегающих $\bar{A}$); причем $[\![\forall x\phi(x)]\!]_{\mathcal{B}(A),\bar{A}} \leftrightharpoons \bigcap\{[\![\phi(P_x)]\!]_{\mathcal{B}(A),\bar{A}} \mid x\in A\}$ и т.д.

Лемма 5. а) Кольцо $\bar{A}$ – расширение кольца A относительно вложения $k \mapsto P_k$, включая операции $\wedge$ и $\vee$; $[\![(\bar{A})\_ = A'']\!]_{V^{\mathcal{B}}} = T$; оценки $[\![\varphi]\!]_{\mathcal{B}(A),\bar{A}}$ и $[\![\varphi_{A''}]\!]_{V^{\mathcal{B}}}$ совпадают, включая операции $\wedge$ и $\vee$; оценка $[\![\bullet]\!]_{\mathcal{B}(A),\bar{A}}$ совпадает с оценкой $[\![\bullet]\!]_{\mathcal{T}(A),A}$ для всех атомарных формул $s_1 = s_2$ и $s_1 \leq s_2$ (включая операции $\wedge$ и $\vee$).

б) Структура $\langle\bar{A},[\![\bullet]\!]_{\mathcal{B}(A),\bar{A}}\rangle$ есть $\mathcal{B}$–ортополное вещественно замкнутое строго регулярное f–кольцо.

в) Для всякого $\mathcal{B}$-ортополного вещественно замкнутого строго регулярного f–кольца A_1, которое расширяет кольцо A, существует $A'' \in V^{\mathcal{B}}$ такое, что $[\![A''$ – вещественно замкнутое тело, расширение $A']\!]_{V^{\mathcal{B}}} = T$ и $A_1 = (A'')^{\wedge\mathcal{B}(A)}$.

Доказательство.

а) Если $k+_A t = r$, то $[\![P_k,P_t,P_{k+t}\rangle \in +']\!]_{V^{\mathcal{B}}} = T$ и $[\![P_{k+t}$

$= P_r \rrbracket_V^{\mathcal{B}} = T$, отсюда $P_k +_{\bar{A}} P_t = P_r$. Если $k \leq_A t$, то $\llbracket \langle P_k, P_t\rangle \in \leq' \rrbracket_V^{\mathcal{B}} = T$ и $P_k \leq_{\bar{A}} P_t$. Если $k \wedge_A t = r$, то $r \leq k,t \;\; \wedge \;\; \forall u \; (u \leq k,t \Rightarrow u \leq r)$, $P_r \leq P_k, P_t$ и $\llbracket P_k \leq P_t \vee P_t \leq P_k \rrbracket_V^{\mathcal{B}} = T$, где $\llbracket P_k \leq P_t \rrbracket_V^{\mathcal{B}} \overset{(1)}{=} \llbracket k \leq t \rrbracket_A \leftrightharpoons J_a$ и $\llbracket P_t \leq P_k \rrbracket_V^{\mathcal{B}} = \llbracket t \leq k \rrbracket_A \leftrightharpoons J_b$, т.е. $J_a \vee_{\mathcal{B}} J_b = J_{a \vee_{\mathcal{J}} b} = J_1$, а $\vee_{\mathcal{J}}$ $b = B$, $\exists e_1 \in a$, $e_2 \in b$ $(e_1 \vee e_2 = 1)$, где $e_1 k \leq e_1 t$ и $e_2 t \leq e_2 k$. Тогда $(e_1 k) \wedge_A e_1 t = e_1 t = e_1 r$, $e_1 k = e_1 r$. Так как $\llbracket P_k = P_r \rrbracket_V^{\mathcal{B}} \overset{(2)}{=} \llbracket k = r \rrbracket_A$, то $J_{\langle e_1 \rangle} \leq \llbracket P_k = P_r \rrbracket_{\mathcal{B}} \wedge \llbracket P_k \leq P_t \rrbracket_{\mathcal{B}} \leq \llbracket P_k \wedge_{A''} P_t = P_r \rrbracket_{\mathcal{B}}$. Аналогично $J_{\langle e_2 \rangle} \leq \llbracket P_k \wedge_{A''} P_t = P_r \rrbracket_{\mathcal{B}}$, поэтому $\llbracket P_k \wedge_{A''} P_t = P_r \rrbracket_{\mathcal{B}} = T$, $P_k \wedge_{\bar{A}} P_t = P_r$.

Осталось проверить сами по себе важные равенства (1) и (2). Равенство (2) есть формула (3), которая проверялась выше. Равенство (1) сразу следует из равенства (2): $\llbracket P_k \leq P_t \rrbracket_{\mathcal{B}} \leftrightharpoons \llbracket \langle P_k, P_t \rangle \in \leq_{A''} \rrbracket_{\mathcal{B}} = \llbracket \langle P_k, P_t \rangle \in \leq_{A'} \rrbracket_{\mathcal{B}} = \mathbb{V}_{\mathcal{B}} \{ \llbracket P_k = P_u \rrbracket_{\mathcal{B}} \wedge \llbracket P_t = P_v \rrbracket_{\mathcal{B}} \mid u \leq v \} = \mathbb{V}_{\mathcal{J}} \{ \llbracket k = u \rrbracket_A \wedge \llbracket t = v \rrbracket_A \mid u \leq v \} = \llbracket k \leq t \rrbracket_A$.

Следующее утверждение пункта а очевидно и мы перейдем к очередному утверждению.

Проверим, что

$$\llbracket (s_1 + s_2)^{\circ} = s_1^{\circ} + s_2^{\circ} \rrbracket_V^{\mathcal{B}} = T, \;\; \llbracket s = s^{\circ} \rrbracket_V^{\mathcal{B}} = T, \;\; (\llbracket s_1 + s_2 = s_3 \rrbracket_V^{\mathcal{B}} = T) \Leftrightarrow s_1 + s_2 = s_3 \text{ в } \bar{A}. \qquad (6)$$

Здесь s и s°, ... – термы и соответственно их значения в $\bar{A}$.

Отсюда сразу получим $\llbracket s_1 = s_2 \rrbracket_{\bar{A}} \leftrightharpoons \llbracket s_1^{\circ} = s_2^{\circ} \rrbracket_{\bar{A}} \leftrightharpoons \llbracket s_1^{\circ}$

$=_{A''} s_2{}^{\circ}]\!]_V{}^{\mathcal{B}} = [\![s_1 = s_2]\!]_V{}^{\mathcal{B}}$ и $[\![s_1 \le s_2]\!]_{\bar{A}} \leftrightharpoons [\![s_1{}^{\circ} \le s_2{}^{\circ}]\!]_{\bar{A}} \leftrightharpoons [\![s_1{}^{\circ} \le_{A''} s_2{}^{\circ}]\!]_V{}^{\mathcal{B}} = [\![s_1 \le s_2]\!]_V{}^{\mathcal{B}}$; что дает (индукцией по числу связок) совпадение оценок для всех формул. Первое из соотношений в (6) есть в сущности определение, второе проверим по индукции: $[\![s_1+s_2 = (s_1+s_2)^{\circ}]\!]_{\mathcal{B}} = \mathbb{V}\{[\![s_1=x]\!] \wedge s_2 =y]\!] \wedge [\![\langle x, y, (s_1+s_2)^{\circ}\rangle \in +]\!]$ (где $[\![s_1 = s_1{}^{\circ}]\!] = [\![s_2 = s_2{}^{\circ}]\!] = \mathrm{T}$, отсюда) $\ge \mathbb{T}$.

Третье соотношение в (6) получаем сразу: если $[\![\exists x, y, z \in A'' (s_1 =x \wedge s_2 =y \wedge s_3 =z \wedge x+y=z)]\!] =\mathbb{T}$, то $\exists f, g, h \in \bar{A}$ $([\![s_1 =f \wedge s_2 =g \wedge s_3 =h \wedge f+g=h]\!] =\mathbb{T}$, $s_1{}^{\circ} =f$, $s_2{}^{\circ} =g$, $s_3{}^{\circ} =h)$. Аналогично наоборот.

Важно также, что операции $\wedge$ и $\vee$

имеют в $\bar{A}$ их обычный смысл: (7)

если $f \wedge_{\bar{A}} g =h$, т.е. $[\![f \wedge_{A''} g =h]\!]_{\mathcal{B}} =\mathbb{T}$, то $h \le_{\bar{A}} f, g$ и, если $u \le_{\bar{A}} f, g$, то $u \le_{\bar{A}} h$. Наоборот, если h есть наибольшая нижняя грань f, g в $\bar{A}$, то $[\![h \le f, g]\!]_{\mathcal{B}} \wedge [\![\forall u{\le}f, g\ (u{\le}h)]\!]_{\mathcal{B}} =\mathbb{T}$.

Наконец, проверим последнее соотношение в Лемме 4а. Для атомарных случаев: $[\![s_1 = s_2]\!]_A = [\![s_1 =_{A'} s_2]\!]_V{}^{\mathcal{B}}$ (это проверялось в доказательстве Леммы 2 для Теоремы 2 и продолжаем) $= [\![s_1 =_{A''} s_2]\!]_V{}^{\mathcal{B}} \leftrightharpoons [\![s_1 = s_2]\!]_{\bar{A}}$ и $[\![s_1 \le s_2]\!]_A \leftrightharpoons [\![s_1{}^{\circ} \le s_2{}^{\circ}]\!]_A = [\![P_{s_1}{}^{\circ} \le P_{s_2}{}^{\circ}]\!]_V{}^{\mathcal{B}}$ (по равенству (1) и продолжаем) $= [\![s_1{}^{\circ} \le s_2{}^{\circ}]\!]_V{}^{\mathcal{B}} = [\![s_1 \le s_2]\!]_{\bar{A}}$. Здесь использовалось соотношение

$$[\![P_{(s(k_1,\dots,k_n))}{}^{\circ} = (s(P_{k_1}, \dots, P_{k_n}))^{\circ}]\!]_V{}^{\mathcal{B}} =\mathbb{T},$$

которое проверяется индукцией по длине терма s (так как $[\![P_{(s_1+s_2)}{}^{\circ} = P_{s_1{}^{\circ}+s_2{}^{\circ}} = P_{s_1}{}^{\circ} + P_{s_2}{}^{\circ} = s_1+s_2]\!] = \mathbb{T}$.

Заметим, что в этом пункте использовалось только, что A'' – линейно упорядоченное расширение A'.

б) "$\mathcal{B}$–ортополное" означает (по определению), что для любого семейства $\{\langle b_\alpha, f_\alpha \rangle\}$ "согласованных" пар (т.е. $b_\alpha \wedge b_\beta \le [\![f_\alpha = f_\beta]\!]_{\bar{A}}$, $\forall\alpha,\beta$, где $b_\alpha \in \mathcal{B}$ и $f_\alpha \in \bar{A}$) существует $f_0 \in \bar{A}$, для которого $b_\alpha \le [\![f_0 = f_\alpha]\!]$, $\forall\alpha$. В нашем случае это свойство очевидно. Свойства вещественной замкнутости, строгой регулярности и f–свойство записываются хорновыми формулами, откуда получаем наше утверждение.

в) Доказательство этого пункта содержится в [6, стр. 119]. ■

Итак, в классе $\mathcal{K}_A \leftrightharpoons \{K \supseteq A \mid K$ строго регулярное f–кольцо$\}$ $\mathcal{B}$–ортополные вещественно замкнутые элементы соответствуют (в нестандартном смысле) вещественно замкнутым телам, расширяющим нестандартный образ A' кольца A.

Пусть расширенный язык (упорядоченных) колец имеет дополнительный сорт переменных $\alpha,\beta,\gamma\ldots$ (пробегающих упорядоченное строго регулярное f–кольцо $\bar{A}$, $\bar{A} \subseteq V^{\mathcal{B}(A)}$, которое сейчас может быть выбрано не обязательно так, как выше).

h–Формулу в расширенном языке мы определим как атомарную или полученную с помощью связок $\wedge$, $\forall x$, $\exists\alpha$, $\forall\alpha$ и как $(\exists\alpha\ \varphi_1) \wedge (\forall\alpha\ (\varphi_1 \Rightarrow \varphi_2))$ (где φ_1, φ_2 h–формулы). Слабо позитивную формулу в том же языке мы определяем как атомарную или полученную с помощью связок $\wedge$, $\vee$, $\exists x$, $\forall x$, $\exists\alpha$, $\forall\alpha$ и как $(\exists\alpha\ \varphi_1) \wedge (\forall\alpha\ (\varphi_1 \Rightarrow \varphi_2))$ (где φ_1 h–формула и φ_2 слабо позитивная). Входную формулу в том же языке мы определяем как слабо позитивную или вида $\varphi'(x, y, \ldots, z)$ (где φ фи–формула в исходном языке колец) или слабо позитивную фи–формулу в исходном языке колец, или полученную с помощью связок $\wedge, \vee, \exists x, \forall x, \exists\alpha, \forall\alpha$. (Понятие входной формулы можно было бы и расширить, допустив случай $(\exists\bar{x}\ \varphi_1) \wedge (\forall\bar{x}\ (\varphi_1 \Rightarrow \varphi_2))$ для фи–формулы в исходном языке колец). Нормальная формула определяется как формула вида $\varphi \Rightarrow \psi$, где φ входная формула, а ψ AE–формула в исходном языке колец. Напомним, что ϕ' – формула в исходном языке колец эквивалентная формуле $[\![\phi]\!]_{\mathcal{T}} = B$, см. [6, с. 115].

Лемма 4в. Для любой входной формулы φ выполняется: если $\varphi_{A,\bar{A}}$, то $[\![(\varphi^0)_{A',(\bar{A})_-}]\!]_{V^{\mathcal{B}}} = J_1$, где φ^0 получается из φ заменой каждой части вида u' на u (т.е. опусканием знака ').

Доказательство. Индукцией в соответствии с определением входной формулы. В случае φ' имеем: $[\![\varphi]\!]_{\mathcal{T}(A)} = B$ (по определению φ'), $[\![\varphi]\!]_{\mathcal{B}(A)} = J_1$ (по условию "быть фи–формулой") и $[\![\varphi_{A'}]\!]_{V^{\mathcal{B}(A)}} = J_1$ (по Лемме 2). Для случая слабо позитивной формулы индукцией по ее длине. В атомарном случае $s_1 = s_2$ и $s_1 \leq s_2$, где s_1, s_2 – термы над $\bar{A}$, индукцией по длине термов. Начальный шаг имеет место по определению $\bar{A}$. И далее как выше, в доказательстве Леммы 4а,б.

Для связок очевидно. □

С этого момента (для упрощения изложения) мы предполагаем коммутативность кольца A, т.е. A – коммутативное регулярное упорядоченное f–кольцо. Тогда $[\![A'$ – упорядоченное поле$]\!]_{V^{\mathcal{B}}} = J_1$. Существует вещественно замкнутое расширение кольца A', пусть $[\![A''$ – вещественно замкнутое поле, $A' \subseteq A'']\!]_{V^{\mathcal{B}}} = J_1$. Положим $\bar{A} \leftrightharpoons (A'')^{\wedge\mathcal{B}(A)}$.

Итак, пусть $\varphi \Rightarrow \psi$ нормальная формула. По Лемме 4в $[\![\varphi^0_{A',(\bar{A})_-}]\!]_{V^{\mathcal{B}}} = J_1$. Если ZFC$\vdash (\varphi^0 \Rightarrow \psi)_{A,\bar{A}}$ (для любых упорядоченного поля A и вещественно замкнутого расширения $\bar{A}$), то $[\![\psi_{A'}]\!]_{V^{\mathcal{B}}} = J_1$. Как выше, получаем ψ'_A (отсюда получаем и ψ_A, если ψ слабо хорнова). Расширение всегда берется в том же классе колец, к которому принадлежит исходное кольцо. подразумевается, что "общезначимость" включает выводимость соответствующего утверждения в ZFC.

Таким образом, доказана

Теорема 3. Пусть $\varphi \Rightarrow \psi$ нормальная формула. Если в классе упорядоченных полей A и их вещественно замкнутых расширений $\bar{A}$ общезначима формула $\varphi^0 \Rightarrow \psi$, то в классе коммутативных регулярных f–колец A и их $\mathcal{B}$–ортополных вещественно замкнутых расширений $\bar{A}$ общезначима формула $\varphi \Rightarrow \psi$. □

Расширение всегда берется в том же классе колец, что и исходное кольцо.

Позитивно AE–хорновой формулой назовем формулу вида $\varphi \Rightarrow \psi$, где φ слабо позитивная формула в расширенном языке колец или слабо позитивная фи–формула в исходном языке колец, и ψ AE–слабо хорнова формула в исходном языке колец. Множество всех таких формул, истинных в некоторой структуре или классе структур, называется позитивно AE–хорновой теорией этой структуры или класса структур.

Следствие. Позитивно AE–хорновы теории классов упорядоченных полей и их вещественно змкнутых расширений и коммутативных регулярных f–колец и их $\mathcal{B}$–ортополных вещественно замкнутых расширений совпадают. □

Замечание 4. В этом Следствии и Теореме 3 можно брать в качестве $\bar{A}$ одно только вещественное замыкание кольца A и соответственно одно только $\mathcal{B}$–ортополное вещественное замыкание кольца A (это по определению $(A'^{-})^{\widehat{\mathcal{B}(A)}}$). □

Пусть $\mathcal{K}$ – класс всех коммутативных регулярных f–колец. В качестве примера к Следствию можно указать на теорему Гильберта о нулях (включая границу для степени и степеней многочленов) и теорему Артина, сформулированные для класса $\mathcal{K}$. Приведем вторую из них (в какой то форме, по–видимому, известную).

Для всякого кольца A из $\mathcal{K}$ существует (и выше описывается) класс вещественно замкнутых расширений $\bar{A}$ (из

$\mathcal{K}$) так, что для любого многочлена f над A, если $f \geq 0$ над $\bar{A}$, то f представим как сумма квадратов рациональных над A функций f_i, т.е. $f = \sum_{i=1}^{m} c_i \cdot (f_i)^2$, где c_i из A и $c_i \geq 0$. Причем граница для числа m и степеней многочленов, входящих в f_i, та же, что и в случае полей.

Это утверждение представляет собой одну из возможных форм положительного ответа на 17–ю проблему Гильберта для класса $\mathcal{K}$ колец.

<u>Замечание 5</u>. Вместо пар "строго регулярное f–кольцо – упорядоченное тело" и "коммутативное регулярное f–кольцо – упорядоченное поле" можно взять все обычные пары кольцевых свойств (как в [3–5]) или в общем виде пару φ' – φ.

Приведем те шаги доказательства, которые относятся к переходу от одного члена этих пар к другому, в остальном доказательство не меняется.

1) A проективное f–кольцо, если и только если
$$([\![A' \text{ линейно упорядоченное}]\!]_V\mathcal{B} = \top;$$

2) A квазирегулярное f–кольцо, если и только если
$$([\![A' \text{ l–простое линейно упорядоченное}]\!]_V\mathcal{B} = \top;$$

3) A проективное f–кольцо без нильпотентных элементов, если и только если
$$([\![A' \text{ линейно упорядоченное без делителей нуля}]\!]_V\mathcal{B} = \top;$$

Те же соотношения верны для $[\![\cdot]\!]_V\mathcal{T}$ – и $[\![\cdot]\!]_{\mathcal{B}(A),\bar{A}}$ –оценок.

Действительно, 1). Напомним, что проективное кольцо A определяется условием:

$$\forall a_1, a_2 \in A\ \exists b_1, b_2 \in A\ (a_1 = b_1 + b_2 \wedge |b_1| \wedge |a_2| = 0 \wedge \forall b \in A\ (|b| \wedge |a_2| = 0 \Rightarrow |b_2| \wedge |b| = 0), \quad (8)$$

смысл которого в том, что $A = a_2^{\perp} + a_2^{\perp\perp}$, $\forall a_2 \in A$, где $a_2^{\perp} \leftrightharpoons \{b \in A \mid |b| \wedge |a_2| = 0\}$ – "поляра элемента" a_2 (т.е. "всякая поляра – прямое слагаемое"). Всякая поляра $M^{\perp}$ является l–идеалом (где $M \subseteq A$). Пусть выполняется левая часть. Мы хотим проверить, что $[\![0 \le x]\!]_A \vee [\![x \le 0]\!]_A = [\![x^- = 0]\!]_A \vee [\![x^+ = 0]\!]_A = \mathbb{T}$. По условию $A = (x^+)^{\perp} + (x^+)^{\perp\perp}$. Выберем e так, что $1 = e + y$, $e \in (x^+)^{\perp}$, $y \in (x^+)^{\perp\perp}$. Ясно, что $\forall u \in (x^+)^{\perp}$ $(eu = ue\ u)$ (так как $u = ue+uy = ue$) и $\forall v \in (x^+)^{\perp\perp}$ $(ev = ve = 0)$. Отсюда $\forall a \in A$ $(a = u+v,\ ae = ea)$, т.е. e — центральный элемент. Так как e — идемпотент ($1 = e+y = e^2+y^2$, $e-e^2 = y^2-y = 0$), то $e \in B(A)$ и $e \ge 0$. Итак, $x^+ \wedge (-x^-) = 0$, $x^+ \bullet (-x^-) = 0$, $x^+ \bullet x^- = 0$, $x^- \in (x^+)^{\perp}$, $e \bullet x^- = x^-$, $(1-e) \bullet x^- = 0$ и $1-e$ из первого слагаемого. Так как $x^+ \in (x^+)^{\perp\perp}$, то $e \bullet x^+ = 0$ и e из второго слагаемого.

Обратное утверждение для $\mathcal{T}$–оценки следует из того, что формула (8) вытекает из условия линейности и является хорновой. Для случая $\mathcal{B}$–оценки, предполагая $[\![A'\ \text{линейное}]\!]_V\mathcal{B} = \mathbb{T}$, получим $[\![P_x \le P_y \vee P_y \le P_x]\!]_V\mathcal{B} = \mathbb{T}$, с учетом равенства (1) имеем $[\![x \le y]\!]_A \vee_{\mathcal{B}} [\![y \le x]\!]_A = [\![x \le y]\!]_A \vee_{\mathcal{T}} [\![y \le x]\!]_A = \mathbb{T}$ и $[\![\forall x, y \in A'\ (x \le y \vee y \le x)]\!]_V\mathcal{T} = \mathbb{T}$, а для $[\![\bullet]\!]_{\mathcal{T}}$ – оценки уже доказано.

2) Квазирегулярное кольцо A определяется условием: $A = \langle a_2\rangle + a_2^{\perp}$, т.е. $\forall a_2 \in A$, т.е. $\forall a_1, a_2 \in A\ \exists b_1, b_2 \in A$ $(a_1 = b_1 + b_2 \wedge \exists n \in \mathbb{N}\ \exists d_1, \ldots, d_n, f_1, \ldots, f_n \in A\ (|b_1| \le d_1 \bullet |a_2| \bullet f_1 + \ldots + d_n \bullet |a_2| \bullet f_n \wedge |b_2| \wedge |a_2| = 0)$. (9)

l–Простое кольцо A определяется условием отсутствия собственных l–идеалов, т.е.
$\forall a \in A\ (a=0 \vee \forall b \in A\ \exists n \in \mathbb{N} \exists d_1, \ldots, d_n, f_1, \ldots, f_n \in A\ (|b| \le d_1 \bullet |a| \bullet f_1 + \ldots + d_n \bullet |a| \bullet f_n)$. (10)

Имеем $a^{\perp\perp} \supseteq \langle a\rangle$ и $a^{\perp\perp} = \langle a\rangle$ (если $z \in a^{\perp\perp} \wedge a^{\perp}$, то $|z| \wedge |z| = |z| = 0$), отсюда квазирегулярное кольцо A является проективным и по пункту 1 получаем $[\![\ A'\ \text{линейное}]\!] = \mathbb{T}$. Проверим, что $[\![A'\ l\text{–простое}]\!] = \mathbb{T}$, см. (10). Пусть e — центральный идемпотент, соответствующий l–идеалу $\langle a\rangle$, т.е.

$(1-e)\cdot e = 0$. Тогда $[\![a=0]\!]_A \ni (1-e)$ и мы покажем, что второе слагаемое (из (10)) включает e (откуда следует проверяемое утверждение). Рассмотрим произвольный сомножитель, соответствующий b и выберем b_1, b_2, для которых $b = b_1 + b_2$, $|b_1| \le d_1\cdot|a|\cdot f_1 + \ldots + d_n\cdot|a|\cdot f_n$ и $|b_2| \wedge |a| = 0$). Получим $[\![\,|b| \le d_1\cdot|a|\cdot f_1 + \ldots + d_n\cdot|a|\cdot f_n]\!]_A \ni e$, так как $[\![\,|b| \le |b_1| + |b_2|\,]\!]_A = \mathbb{T}$ и $[\![\,|b_1| + |b_2| \le d_1\cdot|a|\cdot f_1 + \ldots + d_n\cdot|a|\cdot f_n + |b_2|\,]\!] = \mathbb{T}$ и $e\cdot|b_2| = 0$ (в силу $|b_2| \in a^{\perp}$, $(1-e)\cdot|b_2| = |b_2|$).

Обратное утверждение для $\mathcal{T}$–оценки следует из того, что l–простота и линейность влекут квазирегулярность и проективность, которые записываются хорновыми формулами. При этом существенно используется компактность алгебры $\mathcal{T}$. Для случая $\mathcal{B}$–оценки от линейности в $V^{\mathcal{B}}$ переходим к линейности в $V^{\mathcal{T}}$, как в пункте 1. Условие l–простоты запишем как $\forall a_2{\in}A\ \forall a_1{\in}A\ \exists n{\in}\mathbb{N}\exists d_1, \ldots, d_n, f_1, \ldots, f_n \in A$ $(a=0 \vee (|a_1| \le d_1\cdot|a_2|\cdot f_1 + \ldots + d_n\cdot|a_2|\cdot f_n)$. Эта формула $\mathcal{B}$–глобально истинна, из чего следует ее $\mathcal{T}$–глобальная истинность (с учетом равенств (1) и (2)). Последнее по доказанному влечет квазирегулярность.

3) Пусть A – проективное f–кольцо без нильпотентных элементов. Проверим, что $[\![\forall x,y\ (x\cdot y = 0 \Rightarrow x=0 \vee y=0)]\!] = \mathbb{T}$. Если $e \in [\![x\cdot y = 0]\!]$, то $exy = 0$, $e|x|\cdot|y| = 0$. Далее $0 \le (e|x| \wedge |y|)^2 = e|x|^2 \wedge e|x|\cdot|y| \wedge e|y|\cdot|x| \wedge |y|^2 \le e|x|\cdot|y| = 0$, отсюда по условию $e|x| \wedge |y| = 0$, $ex \in y^{\perp}$. По другому условию $y^{\perp} + y^{\perp\perp} = A$. Пусть e' – центральный идемпотент, соответствующий слагаемому $y^{\perp}$. Тогда $(1-e')\cdot ex = 0$, $(1-e')\cdot e \in [\![x=0]\!]$. С другой стороны, $e' \in y^{\perp}$, $e' \wedge |y| = 0$, $e'\cdot|y| = 0$, $|e'y| = 0$, $e'y = 0$, $ee'\cdot y = 0$, $ee' \in [\![y=0]\!]$.

Поэтому $(1-e')\bullet e \vee e'e = e \in [\![x=0]\!] \vee_{\mathcal{J}} [\![y=0]\!]$.

Обратное утверждение получается как в пунктах 1,2. □

Многие утверждения, верные для колец из правых частей этих эквивалентностей (т.е. для линейно упорядоченных колец, l–простых, без делителей нуля, тел или полей и т.д.) или алгебр над такими кольцами, имеют указанный выше вид $\varphi \Rightarrow \psi$ (или сводятся к серии последовательных утверждений такого вида). Тогда они переносятся на кольца или алгебры над кольцами из левых частей этих эквивалентностей. Сводка таких результатов подготавливается автором к печати. ■

Замечание 6. Теоремы 2, 3 могут быть сформулированны для произвольных структур подобно Теореме 1. Пусть $\mathcal{F}$ – множество функций, определенных на множестве K. Элементы из K можно представить константами и в этом смысле говорить только о функциях. Базисом в $\mathcal{F}$ назовем такую часть $B \subseteq \mathcal{F}$, что $e \in B \leftrightharpoons e \circ e = e$, ... Пусть $\mathcal{F}_0 \leftrightharpoons \{f \in \mathcal{F} \mid f \circ e = e \circ f\}$ (слева e применяется ко всем аргументам функции f). Тогда, полагая $[\![k=t]\!]_K \leftrightharpoons \{e \in B \mid e \circ k = e \circ t\}$, можно развить теорию близкую к изложенной выше. Множество $\mathcal{F}_0$ может включать и отношения P такие, что $P(x) \Rightarrow P(ex)$. Автор полагает, что это позволяет определить семантику некоторого языка функционального программирования.

Классы входных и выходных формул могут быть расширены следующим образом. Пусть вид формулы φ обеспечивает: $\varphi_K \Rightarrow ([\![\varphi]\!] \in j_0)$, где j_0 – некоторый фильтр. Затем теоретико–множественным рассуждением получаем, что $[\![\psi]\!] \in j_1$, где j_1 – вообще говоря, другой фильтр, обладающий (для формул ψ из определенного класса) свойством: $([\![\psi]\!] \in j_1) \Rightarrow \psi_K$. Выше $j_0 \leftrightharpoons j_1 \leftrightharpoons \{\mathbb{T}\}$. □

Эти теоремы содержались по существу в работе [3], а для языка колец в явном виде с доказательством в [4, стр. 111] и без доказательства в [5].

ЛИТЕРАТУРА

1. *Friedman H.* Classically and intuitionistically provable recursive functions// Higher Set Theory, Lecture Notes in Mathematics. Vol. 669, Springer–Verlag, 1978, p. 21–27.
2. *Любецкий В.А.* Об одном подходе к моделированию интеллектуальных систем// Проблемы передачи информации. Т 29, в 3. 1993, с. 107–109.
3. *Лыубетскы Ж.А.* Heyting–valued analysis: P.S.Novikov's hypothesis// Amer. Math. Society, Contemporary Mathematics. Vol. 131, 1992 (Part 3), p. 565–582.
4. *Любецкий В.А.* Оценки и пучки: теоремы переноса. Дисс. на докт. наук. Ин–т проблем передачи информации РАН. Москва, 1991.
5. *Любецкий В.А.* Оценки и пучки: теоремы переноса. Автореф. дисс. Ин–т проблем передачи информации РАН. Москва, 1991.
6. *Любецкий В.А.* Оценки и пучки. О некоторых вопросах нестандартного анализа// Успехи мат. наук. Т 44, вып. 4 (268), 1989, с. 99 –153.
7. *Lyubetsky V.A.* On some applications of Heyting–valued analysis, II. Lecture Notes in Computer Science, Springer–Verlag, vol. 417, 1988, p. 122 – 145.

А.М.Анисов

АБСТРАКТНАЯ ВЫЧИСЛИМОСТЬ И ЯЗЫК ПРОГРАММИРОВАНИЯ АВТ*

В предыдущей статье[1] *была продемонстрирована возможность моделирования становления на реальных вычислительных машинах. Однако, как показано в данной работе, любым процессам, реализованным на таких машинах, присущ ряд принципиальных ограничений, существенно затрудняющих их применение в анализе философских проблем, связанных с протеканием явлений во времени. В данной работе предлагается метод, основанный на нестандартном обобщении идеи вычислимости, позволяющий осуществить адекватное, на наш взгляд, исследование феномена темпоральности. Эта цель достигается за счет отказа от требования эффективности вычислений.*

Эффективная вычислимость
Границы применимости

Как реальные, так и абстрактные вычислительные машины, созданные или придуманные к настоящему времени, плохо приспособлены для решения задачи моделирования процессуальной, динамической стороны окружающего нас мира. Чтобы убедиться в сказанном, попробуем осуществить сравнение возможностей моделирования процессов на реальных ЭВМ и идеальных вычислительных устройствах (типа машины Тьюринга или машины с неограниченными регистрами[2]), используемых для уточнения идеи эффективной вычислимости.

В качестве основы для сравнения возьмем три группы свойств, определяющих границы применимости компьютеров указанных типов при описании процессов.

I. Синтаксические ограничения;

II. Ограничения по памяти;

III. Ограничения на порядковые типы процессов.

Перейдем теперь к свойствам внутри каждой из перечисленных групп.

I.1. *Синтаксическая сложность.* Программирование как реальных, так и абстрактных компьютеров - это почти всегда на-

---

* Работа выполнена при поддержке фонда "Культурная инициатива".

[1] См. [2].

[2] Машины Тьюринга-Поста описываются во многих книгах (напр., см. [5]). Более близка к реальным ЭВМ так называемая МНР-машина (машина с неограниченными регистрами), обладающая теми же вычислительными возможностями, что и машины Тьюринга-Поста (см. [3]).

громождение синтаксических конструкций для выражения самых простых вещей. Например, в Паскале вы не должны писать X:=Y, если X имеет тип INTEGER (целого числа), а Y - тип REAL (действительного числа). Вместо этого приходится писать X:=TRUNC(Y), где "TRUNC" - функция преобразования типа REAL в тип INTEGER. Предметом особой гордости разработчиков системы "Турбо-Паскаль" служит наличие в этой системе не одного, как в стандартном Паскале, а нескольких целочисленных и вещественных типов, что тоже отнюдь не упрощает синтаксис. В других языках программирования дела обстоят не лучшим образом. Не лучше они и в случае программирования абстрактных вычислительных машин, программы для которых скорее напоминают программы на ассемблере, чем программы на языках высокого уровня. Возьмем в качестве примера программу для машины с неограниченными регистрами, складывающую два целых числа X и Y: I_1 J(3,2,5); I_2 S(1); I_3 S(3); I_4 J(1,1,1). Излишне говорить, что программы, описывающие менее тривиальные процессы, чем процесс сложения, будут содержать более длинные и труднообозримые цепочки команд.

I.2. *Непрозрачность синтаксиса.* Данный вид ограничений свойственен только языкам программирования высокого уровня. Как правило, инструкции этих языков включают в себя последовательность зачастую разноплановых логических действий. Так, сплошь и рядом применяемая операция присваивания, например, в виде X:=0, содержит в себе две логически разных операции - уничтожение старого значения X и размещение в соответствующих регистрах нового значения (нуля). После этого прежнее значение X теряется. В то же время операция копирования файлов (что-нибудь вроде COPY A B) в приличных операционных системах в случае, если файл B уже существует, сообщит об этом и попросит подтвердить решение о выполнении операции копирования. Тем самым команда "COPY" разделяет акты уничтожения файла B и создания нового файла с тем же именем.

II.1. *Количество регистров конечно.* Это ограничение неизбежно для реальных ЭВМ. В то же время идеальные компьютеры могут иметь бесконечное количество ячеек памяти. Однако при этом память таких машин, как машина Тьюринга и машина с неограниченными регистрами, является счетно бесконечной, что достаточно для уточнения понятия алгоритма. Таким образом, и реальным, и рассматриваемым абстрактным компьютерам присуще следующее ограничение:

II.2. *Количество регистров не более чем счетно.*

II.3. *Каждый регистр конечен.* Смысл II.3 в том, что в каждом регистре может содержаться объект из некоторого конечного множества объектов. Для реальных ЭВМ это всегда так. Однако абстрактные компьютеры свободны от данного ограничения: так, в ячейке машины с неограниченными регистрами может содержаться любое положительное целое число из бесконечного множества таких чисел N.

Рассматриваемое ограничение имеет интересное следствие. Если $n, m \in N$, n - количество регистров и m - количество объектов, которые могут быть размещены в каждом из регистров, то в процессе выполнения любого бесконечного цикла через самое большее $k=m^n$ шагов распределение объектов в памяти компьютера обязательно повторится. В дальнейшем ничего нового в памяти не появится. Все, что будет, уже было - бесконечный цикл на машине со свойством II.3 приводит к *вечному возвращению*[3], о котором с таким вдохновением писал Ф.Ницше. На машине с неограниченными регистрами, напротив, легко организовать бесконечный цикл без вечного возвращения (например, выполнять в цикле присваивание R0:=R0+1, где R0 - нулевой регистр; ввиду отсутствия ограничения типа II.3 результатом такого цикла будет появление в нулевом регистре все новых и новых натуральных чисел).

III.1. *Каждый процесс имеет начало.* Это верно как для реальных, так и для рассматривавшихся до сих пор абстрактных вычислительных машин. Между тем, a priori утверждать, что все процессы действительного мира имеют начало, нет оснований.

III.2. *Актуальная конечность числа шагов.* На каждом шаге вычислений количество уже проделанных шагов конечно. Даже бесконечный цикл в этом случае лишь потенциально бесконечен. Данное ограничение выполняется как для реальных, так и для упомянутых абстрактных компьютеров. Отметим, что III.2 влечет III.1.

Подведем итог. Реальным компьютерам свойственны все виды перечисленных выше ограничений, тогда как существующим эффективным абстрактным вычислительным машинам присущи все порядковые ограничения, одно ограничение синтаксического характера (I.1) и одно ограничение по памяти (II.2). Таким образом, абстрактные компьютеры менее ограничены в своих возможностях, чем реальные ЭВМ. Тем не менее, рассмотренный список свойств показывает, что и они мало пригодны для моделирования нетривиальных процессов, связанных с проблемами времени, движения и истории. Эти процессы требуют простых, но более мощных методов вычислений.

---

[3] Проблема вечного возвращения особенно остро стоит в случае компьютерного моделирования становления или течения времени - см. [1] и [2].

Причем требование эффективности вычислений не только не является обязательным, но и в целом ряде случаев неуместно[4].

Обобщения понятия вычислимости, достигнутые за счет отказа от обычной эффективности, представлены в литературе несколькими подходами, из которых упомянем два. Первый связан с рекурсией в высших типах, а второй - с теорией α-рекурсии, где α - некоторый подходящий ординал[5]. Как признают А.Кекрис и Я.Московакис, рекурсия в высших типах трудна для понимания (отметим, что авторы обращаются к математикам, а не, скажем, к философам) и сложна технически[6]. Данное обстоятельство исключает плодотворные приложения обобщенной теории рекурсии к анализу философских проблем, если мы признаем стремление к ясности и (относительной) простоте решений обязательным в области философии. Кроме того (и это главное), эти обобщения исходят из стремления получить аналог обычной теории рекурсии, в связи с чем упор делается на обобщение идеи *эффективности*.

Между тем, суть дела состоит в том, что не всякое обобщение идеи вычислимости удовлетворительно с концептуально-философской точки зрения. Мир, в котором мы существуем, является совокупностью разного рода процессов, большинство из которых трудно отнести к эффективно организованным. В подтверждение сказанного достаточно вспомнить о феномене, как правило, ускользающем от внимания логиков. Речь идет об *истории*, фундаментальной особенностью которой, часто некритически принимаемой за определение истории, оказывается отнесенность к прошлому. Но не в нашей власти написать историю будущего. Поэтому мы *вынуждены* писать историю прошлого, будучи уверенными, однако, что история недописана, что она продолжится в будущем. У нас нет даже намека на возможность эффективного предсказания исторических фактов будущего в той их целостности, которая образует историческое описание. Имея в арсенале знания законы, многое ли в действительности можно предвидеть? Не очевидно ли, что в действительности основная масса процессов, составляющих историю, находится за пределами требования эффективности описаний? История - это, несомненно, процесс. Но это *неэффективный* процесс. Значит, необходима *теория неэффективных процессов*.

Хотелось бы, кроме того, иметь такую теорию неэффективной вычислимости, в которой любой процесс *локально* вел бы себя как обычный вычислительный процесс: процессы должны состоять из шагов, каждый из которых (если он не первый и не

---

[4] Подробнее об этом см. в [1].

[5] См. [4], [6] и [7].

[6] [4, стр.166-167].

последний) выполняется при условии, что выполнен непосредственно предшествующий шаг, и что выполнение очередного шага вызывает осуществление непосредственно следующего шага. Между тем, в рамках рассматриваемых обобщений понятия вычислимости допустимы, например, процессы, содержащие $\omega+1$ число шагов. В качестве иллюстрации можно привести решение проблемы останова обычной машины на обобщенной машине, которое потребует как раз $\omega+1$ шагов[7]. Последний шаг при таком понимании налицо, однако нельзя указать тот конкретный шаг, осуществление которого детерминировало выполнение последнего шага.

Неэффективная вычислимость
Синтаксис и семантика языка АВТ

В предлагаемом подходе к вычислимости исходными будут понятия *события* и *процесса*. Условимся считать, что события не протекают во времени и фиксируются предложениями логики предикатов первого порядка, теории множеств и теории моделей, не содержащими ссылок на время. В отличие от событий процессы протекают во времени и способны влиять на события в том смысле, что актуальное множество событий (событий, существующих "теперь") изменяется в ходе реализации процесса. Постулируется существование множества *элементарных* процессов, каждый из которых выполняется за один шаг абстрактной вычислительной машины. Остальные процессы считаются составленными из элементарных. В рамках неэлементарного процесса π выполнение элементарного процесса α в данное время образует шаг вычислений, отличный от шага выполнения этого же элементарного процесса α в другое время. Различать время выполнения элементарных процессов в ходе реализации некоторого составного процесса удобно при помощи приписывания индексов элементарным процессам. Так, если зафиксировать составной процесс π и элементарный процесс α, входящий в π, то α_i, α_j - выполнение α во время i и во время j, где как время i, так и время j затрачивается на выполнение процесса π. В рамках π при $i \neq j$ процесс α считается выполненным дважды в разное время; если же $i=j$, речь идет об одном и том же выполнении элементарного процесса α. Для всех процессов должны выполняться следующие условия упорядочения (значениями квантифицируемых переменных являются индексированные элементарные процессы).

1. $\forall x \neg (x<x)$

---

7 [6, стр. 520].

2. $\forall x \forall y \forall z(x<y \;\&\; y<z \rightarrow x<z)$

3. $\forall x \forall y(x<y \vee y<x \vee x=y)$

4. $\forall x(\exists y(y<x) \rightarrow \exists z(z<x \;\&\; \forall u \neg(z<u \;\&\; u<x)))$

5. $\forall x(\exists y(x<y) \rightarrow \exists z(x<z \;\&\; \forall u \neg(x<u \;\&\; u<z)))$

Первые три аксиомы хорошо известны и составляют условия частичной упорядоченности (аксиомы 1 и 2) и линейности (аксиома 3). Аксиомы 4 и 5 показывают, какими свойствами должен обладать линейный порядок на произвольном множестве элементов, чтобы его можно было считать дискретным. С интуитивной точки зрения предложенный формальный подход к описанию явления дискретности является удачным. Ведь содержательный смысл аксиом 4 и 5 заключается в том, что если элемент линейно упорядоченного множества имеет предшественников (в смысле данного порядка), то он имеет и непосредственного предшественника или соседа такого, что между ним и его предшественником нет никаких других элементов. Таково содержание аксиомы 4. Соответствующим образом и для любого элемента, имеющего последователя, найдется элемент, являющийся непосредственным последователем или соседом данного (так что соседний элемент - это либо непосредственный предшественник, либо непосредственный последователь данного элемента). Существование непосредственного последователя среди последователей рассматриваемого элемента, если таковые последователи вообще найдутся, гарантируется аксиомой 5. Таким образом, с нашей точки зрения, *процесс* - это линейная дискретная последовательность индексированных элементарных процессов.

Введем в рассмотрение идеальные (в противоположность реальным) вычислительные устройства - абстрактные компьютеры. Каждый абстрактный компьютер @ представляет собой упорядоченную пару вида <Mm, Pr>, где Mm - память компьютера @, в которой размещаются результаты вычислений, и Pr - процессор, осуществляющий необходимые вычисления. Поскольку термин "вычисление" трактуется нами предельно широко, на размеры памяти Mm и возможности процессора Pr не накладывается никаких ограничений, связанных с требованиями финитности, конструктивности, алгоритмичности и т.п. Вместо этого будем считать, что абстрактные компьютеры способны совершать любые преобразования, допустимые в рамках теории множеств и теории моделей, и именно в этом смысле понимать термин "вычисление" применительно к абстрактным компьютерам. Важно, однако, чтобы последовательность таких преобразований была линейной дискретной последовательностью шагов, т.е. была процессом в нашем смысле.

В качестве памяти абстрактных компьютеров разрешается использовать любые непустые множества произвольной мощности. В частности, память Mm компьютера @ = <Mm, Pr> может иметь несчетную мощность.

По определению, Mm(S) - подмножество множества Mm, указывающее, как много регистров или ячеек памяти (элементов Mm) ушло на размещение объекта (множества) S:

(a) $\quad Mm(S) \subset Mm.$

Правило вычисления мощности множества Mm(S) должно учитывать мощностные характеристики размещаемых в памяти множеств. Естественно предположить, например, что множество $\{\varnothing\}$ займет меньшее место в памяти, чем множество $\{\varnothing,\{\varnothing\}\}$, т.е. должно быть $|Mm(\{\varnothing\})| < |Mm(\{\varnothing,\{\varnothing\}\})|$. Казалось бы, следует принять правило

$$|Mm(S)| < |Mm(S')| \Leftrightarrow |S| < |S'| ,$$

однако все не так просто. Следование приведенному правилу приводило бы к интуитивно неприемлемым выводам. Так, получилось бы, что

$$|Mm(\{\omega\})| < |Mm(\{\varnothing, \{\varnothing\}\})| ,$$

поскольку $|\{\omega\}| < |\{\varnothing, \{\varnothing\}\}|$. Но единственным элементом множества $\{\omega\}$ является бесконечное множество ω, тогда как оба элемента множества $\{\varnothing, \{\varnothing\}\}$ конечны и гораздо более просто устроены, чем множество ω.

Чтобы избежать подобных недоразумений, определим множество E(S), зависящее от множества S, следующим образом.

E(S) есть ***наименьшее*** (в смысле отношения включения $\subset$) множество, удовлетворяющее условиям (b) и (c):

(b) $\quad S \in E(S)$,

(c) $\quad \forall x \forall y(x \in y \ \& \ y \in E(S) \rightarrow x \in E(S)).$

Теперь положим

(d) $\quad Mm(S) \neq \varnothing \rightarrow |Mm(S)| = |E(S)|$.

Почему не ограничиться равенством $|Mm(S)| = |E(S)|$, зачем здесь условие $Mm \neq (S)$? Данное условие возникло из естественного допущения, согласно которому разместить какой-либо объект в памяти компьютера, не затратив при этом части ресурсов памяти, невозможно. Даже размещение в памяти простейшего теоретико-множественного объекта - пустого множества - приведет к ее трате. Действительно, согласно пункту (b) $\varnothing \in E(\varnothing)$, поэтому $E(\varnothing) \neq \varnothing$. Вообще для любого множества S $E(S) \neq \varnothing$. Однако множество Mm(S) есть множество регистров памяти Mm, потраченных на размещение множества S. А если в действительности объект S не был размещен в памяти Mm ? Тогда естественно считать, что для размещения S не была использована ни одна из ячеек памяти, т.е. что $Mm(S) = \varnothing$.

Короче говоря, объект S размещен в памяти Mm, если и только если $Mm(S) \neq \varnothing$. Если же $Mm(S) = \varnothing$, объект S в памяти Mm отсутствует. Теперь должно быть понятно, почему условие (d) приняло импликативный вид: сравнивать множество Mm(S) с множеством E(S) имеет смысл лишь в том случае, когда S находится в памяти Mm.

В свою очередь, консеквент импликации (d) гарантирует нам, что на размещение в памяти компьютера, например, двух одноэлементных множеств {∅} и {ω} уйдет различное количество ресурсов памяти: если $Mm(\{\varnothing\}) \neq \varnothing$ и $Mm(\{\omega\}) \neq \varnothing$, то в первом случае придется потратить две ячейки памяти, тогда как во втором бесконечное количество ячеек. Но так и должно быть, поскольку одноэлементное множество {ω} содержит в качестве элемента бесконечное множество.

Последнее условие, налагаемое на множества вида Mm(S), касается проблемы размещения в памяти двух и более объектов. Если необходимо поместить в память Mm множества S и S' (за один шаг или последовательно, множество за множеством), будем считать, что они займут непересекающиеся области памяти Mm, если только эти множества различны:

(e) $S \neq S' \rightarrow Mm(S) \cap Mm(S') = \varnothing$.

Если же $S = S'$, то, само собой разумеется, $Mm(S) = Mm(S')$. Как тогда быть, если необходимо разместить в памяти один и тот же объект в нескольких копиях? Выход прост: достаточно проиндексировать тем или иным способом требующееся количество экземпляров, а затем разместить их в памяти компьютера. Если, скажем, необходимо иметь две копии множества S, то можно разместить в памяти объекты $\langle S, 0\rangle$ и $\langle S, 1\rangle$. Поскольку $\langle S, 0\rangle \neq \langle S, 1\rangle$, эти упорядоченные пары займут непересекающиеся области памяти.

Размещением теоретико-множественных объектов в памяти, равно как и их удалением, управляет выполняемая процессором Pr программа, написанная на специальном языке ABT - абстрактном языке программирования. Мы не будем задумываться над тем, каким образом процессор Pr выполняет ABT-программу. Кроме того, будем считать, что ABT-программы размещаются вне области Mm и что в Mm хранятся только результаты вычислений. В оправдание последнего допущения можно указать на то обстоятельство, что физическое пространство заполняют вещи и события, тогда как физические законы традиционно не рассматриваются как объекты, способные занимать место в пространстве. ABT-программы будут играть скорее роль законов, чем роль вещей и событий (фактов). Правда, особых законов. Ведь не обязательно относиться к законам природы как к данностям. Можно рассматривать их и как своего рода предписания к действию, предписания, подлежащие неукоснительному выполнению самой природой. До сих пор природа успешно "вычисляла" будущее. Справится ли она с этим делом в дальнейшем - вот вопрос.

Компьютеры, способные выполнять ABT-программы, будем называть ABT-компьютерами. Сформулируем постулат, касающийся ABT-программ и ABT-компьютеров, который ввиду его принципиальной важности выделим особо.

Постулат существования:

Любой объект может появиться в памяти Mm или исчезнуть из нее только в результате выполнения процессором Pr соответствующего оператора языка программирования ABT

Программы на языке ABT являются конечной последовательностью инструкций

$$I_{i0}$$
$$I_{i1}$$
$$\cdot$$
$$\cdot$$
$$\cdot$$
$$I_{in}$$

(где i_0, i_1, ..., i_n - натуральные числа и $i_j < i_k$, если $j < k$), которые выполняются одна за другой сверху вниз, если только нет команды изменить порядок их выполнения.

Каждая инструкция порождает элементарный процесс и содержит либо единственный оператор языка ABT, либо представлена в виде составного оператора

IF *условие* THEN *оператор* ,

где IF ... THEN имеет обычный смысл (как, например, в языке BASIC). Подчеркнем, что и этот составной оператор выполняется за один шаг и, таким образом, порождает элементарный процесс.

В качестве *условий* можно брать любые теоретико-множественные и теоретико-модельные высказывательные формы. Кроме того, в этих высказывательных формах разрешается использовать обозначение Mm и конструкцию Mm(...). Например, условиями будут следующие выражения: $X \subset Y$, $\{\varnothing\} \in \omega$, $Mm(X) \neq \varnothing \ \& \ X \models T$, $\exists z(Mm(z)) \ \& \ \forall x(x \in z \to Mm(x) = \varnothing)$, $\{x|\ P(x)\} \in Y$, $Mm \backslash Mm(S) = \varnothing$, $Mm(x_1) \cup Mm(x_2) = Mm$, $|Mm(y)| < |Mm|$ и т.д.

В условиях очень важно четко различать переменные и константы. Переменные будут обозначаться последними тремя буквами латинского алфавита (x, y, z, X, Y, Z) с индексами или без них, а константы - любыми другими символами. Значения констант не зависят от хода выполнения ABT-программ. Единственное, что может ABT-программа - это размещать или не размещать значения констант в памяти Mm. Однако мы не требуем, чтобы проверка на истинность тех или иных утверждений, содержащих константы, зависела от наличия их значений в памяти Mm. Например, при выполнении команды

IF $\{\varnothing\} \in \omega$ **THEN** оператор

условие $\{\varnothing\} \in \omega$ будет оценено процессором Pr как истинное, независимо от того, находятся множества $\{\varnothing\}$ и ω в памяти Mm или не находятся.

Напротив, значения переменных не фиксированы, и в ходе выполнения ABT-программы могут изменяться. Поэтому оценка истинности, например, условия $x \in y$ требует, чтобы значения x и y находились в памяти компьютера (т.е. выполнялось требование $Mm(x) \neq \varnothing$ и $Mm(y) \neq \varnothing$).

Перейдем теперь к описанию других операторов языка ABT. Оператор GOTO. Хорошо известный оператор безусловного перехода. Используется в ABT-программах в виде конструкции

GOTO Ij,

где Ij - одна из инструкций соответствующей ABT-программы. Его действие ничем не отличается от поведения аналогичных операторов в обычных языках программирования.

Оператор завершения ABT-программ **END**. Если выполнен оператор END, процесс выполнения соответствующей ABT-программы заканчивается. При этом в памяти ABT-компьютера сохраняются все объекты, размещенные там в ходе выполнения программы.

Следующие два оператора специфичны, поэтому их характеристика будет более подробной.

Оператор выбора CHOOSE. Применяется в ABT-программах в следующей форме.

CHOOSE *список переменных* | *условие*

В этой записи *условие* означает то же самое, что и в случае оператора IF...THEN, за исключением того, что *условие* должно содержать все переменные из *списка переменных*, причем переменные не должны быть **связанными** (т.е. в условии не должно быть кванторов по этим переменным). На *список переменных* также накладываются ограничения: он не должен содержать повторных вхождений одной и той же переменной, и в него не могут входить переменные, значения которых уже размещены в памяти Mm. Поскольку вопрос о том, значения каких переменных размещены в памяти Mm, требует анализа хода выполнения соответствующей ABT-программы, последнее ограничение имеет не синтаксический, а семантический характер.

Более формально синтаксическую форму оператора CHOOSE можно представить в виде записи

CHOOSE $X_0, X_1, X_2, \ldots, X_n$ | *условие*$(X_0, X_1, X_2, \ldots, X_n)$,

где X_i - некоторая переменная, причем переменные X_i и X_j различны, если $i \neq j$. Все выражение может быть прочитано как

"Выбрать объекты (множества) $X_0,X_1,X_2,...,X_n$ такие, что выполняется предикат *условие*$(X_0,X_1,X_2,...,X_n)$".

Например, запись

CHOOSE $x,x,y \mid \exists x(x \in x)$

не будет синтаксически правильной по трем причинам: во-первых, в списке переменных переменная x встречается дважды; во-вторых, в условии $\exists x(x \in x)$ использованы не все переменные из списка переменных (не использована переменная y); в-третьих, в условии имеется квантор по переменной x, входящей в список переменных.

Напротив, запись

(*) **CHOOSE** $x,y,X \mid x \in X \ \&\ y \in X$

будет синтаксически правильной. Действительно, в условии $x \in X \ \&\ y \in X$ использованы в качестве свободных переменных все переменные из списка попарно различных переменных x,y,X. Однако в конечном счете правомерность применения записи (*) в конкретной ABT-программе будет зависеть от того, присвоены или нет значения переменным x,y,X до выполнения инструкции (*). С формальной точки зрения это означает, что успешность применения инструкции (*) зависит от истинности или ложности следующего *предусловия* p:

$$Mm(x)=\varnothing \ \&\ Mm(y)=\varnothing \ \&\ Mm(X)=\varnothing .$$

Сформулируем теперь условия выполнимости оператора CHOOSE в общем виде. Если процессор Pr ABT-компьютера @=<Mm, Pr> выполняет синтаксически правильную инструкцию I вида

CHOOSE $X_0,X_1,X_2,...,X_n$ | *условие*$(X_0,X_1,X_2,...,X_n)$

и *предусловие* P

$Mm(X_0)=\varnothing \ \&\ Mm(X_1)=\varnothing \ \&\ Mm(X_2)=\varnothing \ \&...\&\ Mm(X_n)=\varnothing$

ложно, выполнение завершается аварийно: произойдет **авост**.

Если P **истинно**, процессор Pr пытается найти (выбрать) такие объекты (множества) $S_0,S_1,S_2,...,S_n$, которые, будучи присвоены в качестве значений переменным $X_0,X_1,X_2,...,X_n$ соответственно, обеспечивают *истинность условия* инструкции I. Затем процессор Pr пытается *разместить в памяти* Mm объекты $S_0,S_1,S_2,...,S_n$.

Если объектов (множеств) $S_0,S_1,S_2,...,S_n$, удовлетворяющих *условию* инструкции I и способных поместиться в свободной области памяти Mm, **не существует**, выполнение I завершается **авостом**. В противном случае (т.е. если требуемые объекты **существуют**) выполнение I завершается успешно в состоянии, в котором **истинны** следующие *постусловия*:

(f) $Mm(Si) \neq \varnothing$ для всех i, $0 \le i \le n$;

(g) *условие*$(S_0,S_1,S_2,...,S_n)$.

Рассмотрим компьютер @ = <Mm, Pr> с памятью Mm, имеющей три регистра, и процессором Pr, выполняющим АВТ-программу, содержащую одну-единственную инструкцию.

$$I_1 \ \mathbf{CHOOSE}\ x,y,X \mid x \in X \ \&\ y \in X$$

В соответствии с постулатом существования, до выполнения I_1 в памяти Mm не могут находиться какие-либо объекты. Поэтому истинность утверждения $Mm(x)=\varnothing$ & $Mm(y)=\varnothing$ & $Mm(X)=\varnothing$ обеспечена. Существование множеств, удовлетворяющих высказывательной форме $x \in X$ & $y \in X$, очевидно. Остается убедиться, что среди них найдутся объекты, способные разместиться в памяти, содержащей всего три регистра. Такие объекты существуют. В самом деле, положим $x = y = \varnothing$ и $X = \{\varnothing\}$. Согласно пунктам (b) и (c), $E(\varnothing) = \{\varnothing\}$ и $E(\{\varnothing\}) = \{\varnothing, \{\varnothing\}\}$. Предположим, $Mm(\varnothing) \neq \varnothing$ и $Mm(\{\varnothing\}) \neq \varnothing$. Тогда в соответствии с пунктом (d) получаем $|Mm(\varnothing)| = 1$ и $|Mm(\{\varnothing\})| = 2$. Ввиду того, что $\varnothing \neq \{\varnothing\}$, по пункту (e) получаем $Mm(\varnothing) \cap Mm(\{\varnothing\}) = \varnothing$. Таким образом, на размещение множеств $\varnothing$ и $\{\varnothing\}$ потребуется $1 + 2 = 3$ регистра памяти Mm - как раз столько, сколько имеется. Итак, утверждение $\varnothing \in \{\varnothing\}$ & $\varnothing \in \{\varnothing\}$ истинно и свободной памяти для размещения множеств $\varnothing$ и $\{\varnothing\}$ оказалось достаточно. В результате выполнение рассматриваемой АВТ-программы завершится успешно.

Еще один пример конкретной АВТ-программы. Пусть T - какая-либо теория в языке первопорядкового исчисления предикатов. Рассмотрим синтаксически правильную программу

$$I_1 \ \mathbf{CHOOSE}\ X \mid (X \models T)$$
$$I_2 \ \mathbf{GOTO}\ I_1$$

Выполнение первой инструкции состоит в нахождении модели теории T. Но если теория T противоречива, она не имеет модели и выполнение I_1 в соответствии с семантикой оператора CHOOSE завершится аварийно. Однако и в том случае, если теория T имеет модель, это не гарантирует успешности выполнения инструкции I_1. Например, если память АВТ-компьютера, на котором выполняется данная программа, конечна и теория T не имеет конечных моделей, попытка выполнить I_1 приведет к авосту.

Но если память Mm бесконечна и теория T непротиворечива, в соответствии с теоремой полноты существует модель теории T, и, следовательно, такая модель будет найдена процессором Pr и размещена в памяти Mm, даже если мощность Mm счетно бесконечна, поскольку если T имеет модель, то для нее существует и не более чем счетная модель.

В отличие от предыдущего примера АВТ-программы, в которой выбор объектов был однозначным (другие множества просто не поместились бы в трехэлементной памяти), возможность выполнения инструкции I_1 поставила бы процессор Pr перед ситуацией действительного выбора. В частности, если память компьютера @ несчетна и T имеет бесконечную модель, процессор Pr мог бы выбирать между неизоморфными моделями теории T, так как наряду со счетными моделями теория T имела бы и несчетные модели. Но сказать, какой из возможных исходов будет иметь место *до* выполнения инструкции I_1, невозможно в принципе, так что в общем случае при использовании оператора CHOOSE мы имеем дело с ситуацией *недетерминированного выбора*. В некотором роде оператор выбора CHOOSE близок к аксиоме выбора: их объединяет неконструктивный (в смысле математического конструктивизма) характер получения результатов.

При условии успешного выполнения инструкции I_1 рассматриваемой ABT-программы процессор Pr приступит к выполнению инструкции I_2, в соответствии с которой произойдет возврат к инструкции I_1. Как только осуществится этот переход по GOTO, возникнет авост. Почему? В силу того обстоятельства, что $Mm(X) \neq \varnothing$ после первого выполнения инструкции I_1. Но оператор выбора CHOOSE в соответствии с определением не может применяться к переменной, в отношении значения которой выбор был уже сделан, а само это значение было размещено в памяти Mm. Таким образом, независимо от того, противоречива теория T или нет, все равно выполнение данной ABT-программы завершится аварийно.

Очевидно, наряду с оператором, выбирающим объекты и размещающим их в памяти ABT-компьютера, необходим также оператор, аннулирующий результаты предшествующих актов выбора и освобождающий память для размещения новых объектов.

Оператор уничтожения DELETE. Его синтаксис предельно прост:

DELETE ***список переменных*** ,

где *список переменных* не должен содержать **повторных** вхождений одной и той же переменной (ограничение не очень принципиальное, но упрощающее синтаксис и сохраняющее преемственность с аналогичным ограничением оператора CHOOSE). То же самое можно представить в другой форме.

DELETE $X_0, X_1, X_2, \ldots, X_n$

Теперь определим семантику рассматриваемого оператора.

Если процессор Pr ABT-компьютера @=<Mm, Pr> выполняет синтаксически правильную инструкцию I вида

DELETE $X_0, X_1, X_2, \ldots, X_n$,

и *предусловие* P

$Mm(X_0)\neq\varnothing$ & $Mm(X_1)\neq\varnothing$ & $Mm(X_2)\neq\varnothing$ &...& $Mm(X_n)\neq\varnothing$

ложно, выполнение завершается аварийно: произойдет **авост**.

Если P **истинно**, процессор Pr завершит выполнение инструкции I в состоянии, в котором будет **истинным** следующее постусловие:

(h) $Mm(Xi) = \varnothing$ для всех i, $0 \le i \le n$.

Канонические АВТ-программы

Воспользуемся оператором DELETE для превращения рассматриваемого примера АВТ-программы в безостановочную[8] программу в предположении, что теория T имеет модель и память Mm бесконечна.

Расположить инструкцию с оператором DELETE в данной программе, содержащей всего две инструкции, можно тремя следующими способами.

(π1)

I_1 **CHOOSE** X| X |= T
I_2 **GOTO** I_1
I_3 **DELETE** X

(π2)

I_1 **CHOOSE** X| X |= T
I_2 **DELETE** X
I_3 **GOTO** I_1

(π3)

I_1 **DELETE** X
I_2 **CHOOSE** X| X |= T
I_3 **GOTO** I_1

Очевидно, АВТ-программа $\pi 1$ успешно работать не будет по той же самой причине, что и исходная программа. Зато с АВТ-программой $\pi 2$ все в порядке: осуществив выбор модели теории T в соответствии с инструкцией I_1, процессор Pr перейдет к выполнению инструкции I_2. Так как на этот момент предусловие $Mm(X) \neq \varnothing$ истинно, процессор Pr завершит выполнение I_2 в состоянии $Mm(X) = \varnothing$ и, выполняя инструкцию I_3, перейдет по GOTO к I_1. Поскольку предусловие $Mm(X) = \varnothing$ истинно, инструкция I_1 будет вновь выполнена и т.д. - процесс выполнения программы $\pi 2$ никогда не завершится.

Осталось проанализировать третью альтернативу. Для того чтобы выполнить АВТ-программу $\pi 3$, процессор Pr должен *вначале* выполнить инструкцию I_1, что возможно лишь в том случае, если $Mm(X) \neq \varnothing$. Но в соответствии с постулатом существования объект X может появиться в памяти АВТ-компьютера

---

[8] Понятие безостановочной программы определяется в [2, стр.186].

только в результате действия оператора CHOOSE, который должен выполняться *после* команды DELETE, так как выполнение инструкции I_1 с оператором DELETE *предшествует* выполнению инструкции I_2 с оператором CHOOSE в программе $\pi 3$.

Казалось бы, из сказанного следует однозначный вывод: попытка выполнить ABT-программу $\pi 3$ тут же завершится авостом. Однако это так только при условии принятия допущения о том, что процесс выполнения ABT-программ *обязательно* должен иметь начало. Применительно к обычным компьютерам и языкам программирования правомерность и даже неизбежность принятия данного допущения не вызывает сомнений. Но в случае ABT-компьютеров и ABT-программ оно выглядит не столь несомненным.

Действительно, предположим, что процесс выполнения ABT-программы $\pi 3$ не имел начала, т.е. всякому очередному выполнению любой инструкции программы $\pi 3$ предшествовало бесконечное число выполнений этой инструкции. Такое предположение непротиворечиво и потому вполне допустимо. В самом деле, перед тем, как в очередной раз выполнить инструкцию I_1, процессор Pr выполнил инструкцию I_3, а перед этим - инструкцию I_2, после чего ABT-компьютер перешел в состояние с $Mm(X) \neq \varnothing$. Переход по GOTO к I_1 сохранил это состояние, так что истинность предусловия оператора DELETE была обеспечена. После успешного выполнения I_1 стало истинным утверждение $Mm(X) = \varnothing$, необходимое для выполнения I_2 и т.д.

Наглядно описанный процесс можно изобразить следующей схемой:

$$..., I_1, I_2, I_3, I_1, I_2, I_3, I_1 \; ... \; .$$

Таким образом понятый процесс выполнения программы $\pi 3$ не имеет ни начала, ни конца, в отличие от традиционных вычислительных процессов, которые непременно когда-либо начинаются.

Интересное, на наш взгляд, различие между ABT-программами $\pi 2$ и $\pi 3$ заключается в том, что $\pi 3$ можно выполнить только при условии отсутствия начала процесса выполнения, тогда как $\pi 2$ выполнима независимо от того, имел процесс ее выполнения начало или нет. Гипотетический процесс выполнения $\pi 2$, имеющий первый шаг, был описан выше. Что касается описания воображаемого выполнения $\pi 2$ в ходе не имеющего начала процесса, то оно практически полностью повторяет соответствующее описание выполнения $\pi 3$. Мы говорим о гипотетических или воображаемых процессах выполнения $\pi 2$ потому, что если допустить наличие не имеющих начала процессов наряду с "нормальными", то на вопрос о том, процесс какого типа осуществляется при выполнении $\pi 2$ на данном ABT-компьютере, нельзя ответить однозначно. С равным успехом это может быть как первая, так и вторая разновидность процессов.

Обсуждаемое различие важно для приложений в философии. Так, проблема начала времени не имеет устраивающего всех исследователей единственного решения. Если принимается тезис о том, что эта проблема неразрешима, то для моделирования течения времени больше подходит конструкция, аналогичная программе $\pi 2$; принятие тезиса об отсутствии начала течения времени заставит прибегнуть к программам типа $\pi 3$. Наконец, на языке АВТ-программ нетрудно выразить и идею начала времени. Для этого достаточно перед выполнением бесконечного цикла выполнить инструкцию, которая больше уже выполняться не будет. Например, применительно к программе $\pi 2$ достаточно добавить к списку ее инструкций команду GOTO I_1.

I_0 **GOTO** I_1
I_1 **CHOOSE** $X| X |= T$
I_2 **DELETE** X
I_3 **GOTO** I_1

Полученная АВТ-программа (обозначим ее через $\pi 4$) может быть выполнена только в ходе процесса, имеющего начало. Действительно, первой будет выполнена инструкция I_0, а дальше возникнет бесконечный цикл. Схематически

$$I_0, I_1, I_2, I_3, I_1, I_2, I_3, I_1 \ldots .$$

Идея о существовании не имеющих начала процессов требует ряда уточнений, к которым мы сейчас переходим.

Пусть LD - произвольное линейное дискретное множество, то есть множество, удовлетворяющее аксиомам линейного дискретного порядка, приведенным выше. Пусть, далее, $\alpha \in LD$. По определению,

$$LD(\alpha) =_{Df} \{x \in LD \mid (x < \alpha) \vee (x = \alpha)\} .$$

Назовем множество X **отрезком** множества LD, если существует $\alpha \in LD$ такое, что $X = LD(\alpha)$. Из определений немедленно вытекает, что всякий отрезок X линейного дискретного множества LD имеет последний элемент (в смысле отношения порядка, индуцированного на X из LD). Поэтому, в частности, само множество LD может не быть отрезком самого себя (так будет, если LD не имеет последнего элемента).

Для элементов и отрезков множества LD выполняется следующее соотношение:

$$(\forall \alpha, \beta \in LD)\ (\alpha < \beta \rightarrow |E(LD(\alpha))| \leq |E(LD(\beta))| .$$

В частности, из $\alpha < \beta$ и $|E(LD(\alpha))| = |E(LD)|$ следует, что $|E(LD(\alpha))| = |E(LD(\beta))| = |E(LD)|$.

Пусть далее X является отрезком множества LD и при этом существует $\beta \in LD$ такое, что $\beta \notin X$ и $\forall x(x < \beta \rightarrow x \in X)$. Тогда через X' обозначим множество $X \cup \{\beta\}$. Ясно, что X' также является отрезком множества LD. Аналогичное обозначение будем применять и для элементов линейных дискретных множеств: если $\alpha, \beta \in LD$ и $(\alpha < \beta \ \& \ \neg\exists x(\alpha < x \ \& \ x < \beta))$, то, по определению, выполняется равенство $\alpha' =_{Df} \beta$.

Линейное дискретное множество LD назовем **Е-равномерным**, если множество

$$LDE =_{Df} \{x \in LD \mid \ |E(LD(x))| = |E(LD)|\}$$

таково, что LDE либо пусто, либо одноэлементное, либо в LDE не существует первого элемента. Другими словами, должна выполняться формула

$$\forall x((x \notin LDE) \vee (\forall y \in LDE)(y = x) \vee (\exists y \in LDE)(y< x)) .$$

Мотивы введения понятия Е-равномерности станут ясны в дальнейшем.

Если LD не имеет первого элемента, выберем АВТ-программу **CC_LD**.

I_0 **DELETE X**
I_1 **CHOOSE X | (X отрезок LD) & X = Y'**
I_2 **IF X = LD THEN END**
I_3 **DELETE Y**
I_4 **CHOOSE Y | (Y отрезок LD) & Y = X'**
I_5 **IF Y = LD THEN END**
I_6 **GOTO** I_0

Если же LD имеет первый элемент α, то воспользуемся АВТ-программой **CC1LD**.

I_0 **CHOOSE X | X = LD(+)**
I_1 **IF X = LD THEN END**
I_2 **CHOOSE Y | (Y отрезок LD) & Y=X'**
I_3 **DELETE X**
I_4 **IF Y = LD THEN END**
I_5 **CHOOSE X | (X отрезок LD) & X = Y'**
I_6 **DELETE Y**
I_7 **IF X = LD THEN END**
I_8 **GOTO I2**

Программа CC_LD должна выполняться на АВТ-компьютере @ = <Mm, Pr>, удовлетворяющему одному из следующих условий, зависящих от характеристик множества LD:

(a) если LD Е-равномерно, то $|E(LD)| \leq |Mm|$;

(b) если LD не является Е-равномерным, то $|E(LD)| < |Mm|$.

В свою очередь, программа CC1LD также ограничивает выбор АВТ-компьютеров в зависимости от свойств множеств LD и E(LD):

(c) если E(LD) бесконечно и LD Е-равномерно, то $|E(LD)| \leq |Mm|$;

(d) если E(LD) бесконечно и LD не является Е-равномерным, то$|E(LD)| < |Mm|$;

(e) если E(LD) конечно и β - предпоследний элемент множества LD, то $(|E(LD(\beta))| + |E(LD)|) \leq |Mm|$.

Отличие условий, налагаемых на АВТ-компьютеры, выполняющие программы CC_LD и CC1LD, объясняется рядом причин.

Во-первых, не следует думать, что для размещения бесконечного множества S в памяти АВТ-компьютера всегда достаточно иметь память той же мощности, что и множество S. Казалось бы, ничто не препятствует размещению: если существует взаимно однозначное отображение f из E(S) на Mm, то процессор Pr может расположить множество S в памяти Mm в точном соответствии с функцией f и при этом будут соблюдены все выше перечисленные ограничения на подобного рода операции.

Если, к примеру, требуется разместить в счетно-бесконечной памяти Mm множество натуральных чисел ω, то так как множество $E(\omega)$ тоже счетно, никаких трудностей не возникает. Достаточно выполнить следующую АВТ-программу.

I_0 **CHOOSE** $X| \; X = \omega$

Чтобы выполнить данную программу, процессору Pr понадобится установить взаимно однозначное соответствие между регистрами всей памяти Mm или ее бесконечной части и множеством ω. В любом случае результат будет достигнут.

Однако представим себе процесс выполнения чуть более сложной АВТ-программы.

I_1 **CHOOSE** $X| \; X = \{x| \; x \in \omega$ & x четно$\}$

I_2 **CHOOSE** $Y| \; Y = \{y| \; y \in \omega$ & y нечетно$\}$

Если память Mm счетно бесконечна, то при выполнении инструкции I_1 вновь возникают две возможности: либо использовать бесконечную часть Mm, оставив нетронутой бесконечное множество регистров, либо использовать всю или почти всю (всю, за исключением, быть может, конечного числа элементов) память Mm. И в том, и в другом случае инструкция I_1 будет успешно выполнена. Но заведомо ясно, что использование всей или почти всей памяти АВТ-компьютера сделает невозможным успешное выполнение инструкции I_2.

Проще всего обойти возникшую трудность за счет применения АВТ-компьютера с несчетной памятью. С другой стороны, можно было бы попытаться наделить АВТ-процессоры даром предвидения того, как следует распределять память. Однако в результате пришлось бы отказаться от идеи *независимого выполнения инструкций* АВТ-программ, что отнюдь не входит в наши планы. Итак, мы остаемся на прежней позиции: все, что требуется от АВТ-процессора, - это выполнить очередную инструкцию (если это вообще возможно), игнорируя остальные, а затем перейти к выполнению следующей (если такой переход программно обусловлен).

Во-вторых, при использовании программы CC_LD множество LD и, следовательно, множество E(LD) обязательно будут бесконечными. Так как для любого бесконечного кардинала τ выполняется равенство $\tau \times 2 = \tau + \tau = \tau$, значения обеих переменных X и Y АВТ-программы CC_LD могут иметь такую же мощность, как и память Mm. Правда, при этом множество LD должно быть E-равномерным, поскольку в противном случае памяти может не хватить. Но АВТ-программа CC1LD допускает ситуацию, в которой множества LD и E(LD) конечны. Тогда объем памяти Mm должен превышать мощность множества E(LD) примерно в два раза. На самом деле память может быть несколько меньше, поскольку при выполнении программы CC1LD в этом случае будет либо $|Mm(X)| < |Mm(Y)|$, либо $|Mm(Y)| < |Mm(X)|$, что нашло отражение в условии (e).

В-третьих, здесь мы вновь сталкиваемся с особенностями не имеющих начала вычислительных процессов. Если предположить, что выполнение АВТ-программы CC_LD осуществляется успешно, то это означает, что процессор Pr уже распределил память между переменными X и Y таким образом, чтобы каждой из них досталось по бесконечной области памяти. В дальнейшем эти области могут только увеличиваться (если есть резервы памяти), но не уменьшаться. Допустим, $|E(LD(\alpha))| \leq |Mm|$ и $|Mm(X)| = |Mm(Y)| = |Mm|$ на каком-то этапе выполнения CC_LD. Тогда памяти хватит и на все последующие циклы программы CC_LD. Если $|Mm(X)| < |Mm|$ и $|Mm(Y)| < |Mm|$, тоже ничего страшного нет, так как остается возможность в случае необходимости увеличить область памяти как для X, так и для Y.

Но если, например, $|Mm(X)| < |Mm|$ и в то же самое время $|Mm(Y)| = |Mm|$, в следующем цикле для X может не оказаться резервов памяти - ведь процессор Pr мог всю ее потратить на размещение переменной Y. Чтобы этого не произошло, необходимо либо взять АВТ-компьютер с большей памятью, либо убедиться в том, что множество LD не содержит скачков мощности, достигающих размера самой памяти Mm. Отсутствие таких перепадов или скачков формально описывается понятием E-равномерности.

В отличие от программы CC_LD, программа CC1LD имеет начальный шаг выполнения. Поэтому, если множество E(LD) бесконечно, может случиться так, что уже на первом шаге будет израсходована вся память: при $|E(LD(\alpha))| = |Mm|$, где α - первый элемент множества LD, выполнение инструкции I_0 программы CC1LD способно лишить места $Y = LD(\alpha')$, сделав невозможным выполнение инструкции I_2.

Обратим внимание на то, что множество LD фактически играет роль параметра в только что приведенных программах.

Но поскольку, строго говоря, при описании синтаксиса языка АВТ понятие параметра не вводилось, обозначение LD в программах CC_LD и CC1LD в действительности должно быть константой. Пусть _LD - класс констант, являющихся именами всевозможных линейных дискретных множеств без первого элемента, а 1LD - класс констант, именующих всевозможные линейные дискретные множества с первым элементом. Рассмотрим АВТ-программы, которые совпадают с CC_LD (соответственно, с CC1LD) во всем, за исключением, может быть, лишь того, что вместо LD используется константа из класса _LD (соответственно, из 1LD). Назовем такие АВТ-программы **каноническими**. Будем говорить, что память АВТ-компьютера @ *достаточно велика* для канонической программы π, если Mm удовлетворяет условиям (а) - (е) для π, где LD - линейное дискретное множество, имя которого использовано в программе π.

Постулат достижимости:

Если память АВТ-компьютера @ достаточно велика для канонической программы π, то при выполнении π для любого элемента $\alpha \in$ LD компьютер @ достигнет состояния, в котором истинно утверждение

$$\mathbf{Mm(LD(\alpha)) \neq \varnothing}$$

Обратимся теперь к примерам действия только что сформулированного постулата. Если мы примем равенство $LD = \omega^* + \omega$, где множество ω^* имеет порядковый тип множества отрицательных целых чисел (или заменим в программе CC_LD константу LD на константу $\omega^* + \omega$, обозначающую множество, упорядоченное по типу множества целых чисел), то в силу постулата достижимости выполнение канонической программы CC_LD на АВТ-компьютере @ = <Mm, Pr> таком, что $|E(\omega^* + \omega)| < |Mm|$, будет успешным. При этом процесс выполнения CC_LD не будет иметь ни начала, ни конца. В случае, если множество $\omega^* + \omega$ E-равномерно, строгое неравенство в ограничении размеров памяти можно заменить на нестрогое.

Точно так же успешным (при аналогичном ограничении на размеры памяти) будет процесс выполнения CC_LD при $LD = \omega^* + \omega + \omega^*$, который вновь не будет иметь начала, но зато будет иметь конец и т.д. Более того, постулат достижимости гарантирует выполнимость канонических АВТ-программ для как угодно сложно устроенных линейных дискретных множеств (надо только следить за объемом памяти, а также за тем, чтобы не применять программы типа CC_LD к линейным дискретным множествам, обладающим первым элементом, и не применять программы типа CC1LD к линейным дискретным множествам без первого элемента).

Насколько сложными могут быть линейные дискретные множества? Не вдаваясь в детали, укажем лишь на существование линейных дискретных множеств несчетных мощностей (в том числе и мощности континуума). Хотя поставленный вопрос явно имеет теоретико-множественный характер, ответ на него мы получим при помощи теоремы Левенгейма - Сколема - Тарского. Согласно этой теореме, если первопорядковая теория TL имеет бесконечную модель, то она имеет бесконечные модели произвольной мощности.

Понятие линейного дискретного множества было задано при помощи средств, не выходящих за рамки первопорядковой логики предикатов. Поэтому если взять приведенные выше пять аксиом, описывающих свойство линейной дискретности, в качестве аксиом теории TL, то к TL будет применима теорема Левенгейма - Сколема - Тарского. Необходимо только убедиться, что TL имеет бесконечную модель. Сделать это несложно: достаточно проверить, что, например, множество целых чисел Z является линейным дискретным множеством. В силу этого Z может рассматриваться как модель первопорядковой теории TL. Поскольку Z бесконечна, TL по теореме Левенгейма - Сколема - Тарского обладает моделями произвольной бесконечной мощности, в том числе и мощности континуума.

Пусть теперь множество W является моделью теории TL и имеет мощность континуума. Так как любая модель теории TL является линейным дискретным множеством, W - линейное дискретное множество мощности континуума, что и требовалось.

Согласно постулату достижимости, множество W можно "пересчитать" при помощи либо канонической программы типа CC_LD, либо канонической программы типа CC1LD: для любого элемента $\alpha \in W$ в процессе выполнения одной из этих программ будет достигнуто состояние, в котором очередным элементом, присоединенным к строящемуся отрезку множества W, окажется элемент α. Так что эти программы являются своего рода счетчиками циклов, выполняющихся, если потребуется, трансфинитное число раз.

Однако не нужно думать, что наш произвол в отношении выбора перечисляемого множества ничем не ограничен. Рассмотрим, например, уже упоминавшийся порядковый тип ω + 1. Множество, упорядоченное по этому типу, не является линейным дискретным множеством и не может быть пересчитано никакой ABT-программой. Действительно, если допустить, что пересчет такого множества, имеющего последний элемент α, завершен, то, спрашивается, каков был предыдущий шаг ABT-программы, поэлементно "перебирающей" это множество в соответствии с порядком расположения его членов? Поскольку элемент α не имеет непосредственного предшественника, постольку не могло быть и шага АВТ-программы, предшествующего шагу размещения в памяти элемента α, а значит, и этого последнего шага. Сказанное не означает, что множество типа $\omega + 1$ вообще не может быть использовано в АВТ-вычислениях: невозможно только разместить его в памяти за $\omega + 1$ шагов, в то время как сделать это за дискретное число шагов (например, за один или два шага, десять или ω шагов и т.п.) не возбраняется.

Как показывает только что разобранный пример, хотя некоторые упорядоченные множества не могут быть "пересчитаны" никакой АВТ-программой, и, таким образом, некоторые задачи не решаются в рамках АВТ-вычислимости, могут возникать неясности в отношении того, как могут действовать произвольные АВТ-программы в том случае, если предположение о порядковом типе порождаемого в ходе выполнения программы процесса не ведет к противоречиям. Вернемся к рассмотренной ранее программе $\pi 3$. Как уже говорилось, эта программа не имеет начала. Но сколько шагов было сделано этой программой к настоящему моменту? Должны ли мы, например, считать, что число шагов должно быть счетным, и, кроме того, что оно должно быть упорядочено по типу ω^*? Или в случае с $\pi 3$ допустимы произвольные мощности и линейные дискретные порядки, не имеющие первого элемента? Мы дадим ответ на поставленные вопросы при помощи следующего неформального постулата.

Постулат реализуемости:

Если предположение о том, что АВТ-программа π реализует процесс ρ, непротиворечиво, то реализация процесса ρ в ходе выполнения π возможна

Таким образом, в силу постулата реализуемости программа $\pi 3$ (в случае непротиворечивости теории Т и наличия памяти, достаточной для размещения хотя бы одной модели теории Т) может в ходе выполнения произвести *любой* не имеющий первого и последнего шага процесс, какова бы ни была мощность множества элементарных шагов этого процесса. Программа $\pi 2$ допускает еще большую неопределенность, поскольку в ходе ее выполнения (при тех же допущениях, что и в случае программы $\pi 3$) может быть реализован любой процесс, реализуемый программой $\pi 3$ и, кроме того, процессы, имеющие первый шаг выполнения, но не имеющие последнего шага.

Можно заподозрить, что принятие постулата реализуемости делает излишним постулат достижимости для канонических программ, поскольку с интуитивной точки зрения может показаться, что первый постулат влечет второй. Однако это не так. В самом деле, без постулата достижимости каноническая программа типа CC1LD допускает реализацию, которая никогда не окажется в области трансфинитных порядковых типов. Предположим, что каноническая программа ведет пересчет линейного дискретного множества $\omega + \omega^*$. Предположение о том, что процесс пересчета *никогда* не выйдет за пределы ординала ω, непротиворечиво. Стало быть, по постулату реализуемости, порождение такого процесса в ходе выполнения пересчета возможно. Но сделанный вывод противоречит постулату достижимости, коль скоро речь идет о канонических программах. Аналогичные рассуждения верны и для канонических программ типа CC_LD.

Итак, процесс функционирования ABT-программ описывается как линейная дискретная последовательность шагов, каждый из которых связан с выполнением одной из инструкций языка ABT, порождающих элементарный процесс. Используя канонические ABT-программы типа CC_LD или CC1LD в качестве счетчиков циклов, включенных в виде подпрограмм в другие ABT-программы, в соответствии с постулатом достижимости мы получим программы, выполняющиеся необходимое число раз. Требуется только позаботиться о том, чтобы после каждого цикла упомянутых программ управление передавалось на основную программу. Но обеспечить такую передачу управления легко: достаточно перед последней инструкцией канонических программ вставить программу, которая должна выполняться не меньшее число раз, чем это предписывается линейным дискретным множеством LD, используемым канонической программой.

Например, если мы хотим, чтобы программа $\pi 3$ выполнялась несчетное количество раз, положим LD = W, где W - линейное дискретное множество несчетной мощности, и на ABT-компьютере с соответствующим объемом памяти выполним нижеследующую программу.

I_0 **DELETE X**
I_1 **CHOOSE X | (X отрезок LD) & X = Y'**
I_2 **IF X = LD THEN END**
I_3 **DELETE Y**
I_4 **CHOOSE Y | (Y отрезок LD) & Y = X'**
I_5 **IF Y = LD THEN END**
I_6 **DELETE X_1**
I_7 **CHOOSE X_1 | X_1 |= T**
I_8 **GOTO I_0**

На этом описание абстрактного языка программирования АВТ закончено.

ЛИТЕРАТУРА

1. *Анисов А.М.* Время и компьютер. Негеометрический образ времени. М. 1991.
2. *Анисов А.М.* Моделирование становления на ЭВМ //Логические исследования. Вып.2. М. 1993.
3. *Н.Катленд* Вычислимость. Введение в теорию рекурсивных функций. М. 1983.
4. *Кекрис А., Московакис Я.* Рекурсия в высших типах //Справочная книга по математической логике. Ч.III. Теория рекурсии. М. 1982.
5. *А.И.Мальцев.* Алгоритмы и рекурсивные функции. М. 1986.
6. *Роджерс Х.* Теория рекурсивных функций и эффективная вычислимость. М. 1972.
7. *Шор Р.* Теория α-рекурсии //Справочная книга по математической логике. Ч.III. Теория рекурсии. М. 1982.

А.Л.Блинов

СЕМАНТИЧЕСКИЕ ИГРЫ СО СЛУЧАЙНЫМИ ХОДАМИ

В этой статье ставится и обсуждается вопрос о том, можно ли каким-то регулярным образом применить случайные ходы в теоретико-игровой семантике (ТИС). Должна быть ясна по меньшей мере одна мотивация исследований такой возможности: если мы допускаем в наших семантических играх нетривиальные информационные множества, то получаем возможность построить полноценную (теоретико-игровую) семантику для частично упорядоченных кванторов и, более общо, для независимостной (independence-friendly) логики - как это сделали недавно Яакко Хинтикка и его коллеги. Не кажется излишне оптимистическим ожидать, что другого сорта ослабление ограничений, накладываемых на классические семантические игры, именно: допущение случайных ходов могло бы также открыть некоторые новые возможности для ТИС.

В этой статье мы намереваемся показать, что семантические игры со случайными ходами могут служить теоретико-игровым аналогом выдвинутого Бас К. ван Фраассеном метода супероценок - по меньшей мере, для некоторых частных случаев его применения.

1. ВЫИГРЫШНЫЕ СТРАТЕГИИ vs. ЧИСТЫЕ ОПТИМАЛЬНЫЕ СТРАТЕГИИ В ПРИСУТСТВИИ СЛУЧАЙНЫХ ХОДОВ

Семантические игры - это, в сущности, средство расширения оценки с атомарных предложений на все предложения языка. Таким средством их делает определение истинности (соответственно: ложности) сложного предложения в терминах существования выигрышной стратегии Верификатора (соответственно: Фальсификатора) в соответствующей семантической игре. Таким образом, понятие выигрышной стратегии есть центральное понятие в ТИС, и было бы полезно посмотреть, что происходит с этим понятием, когда в семантических играх появляются случайные ходы.

В стандартной семантической игре для первопорядкового языка, в произвольной паре чистых оптимальных стратегий в точности одна стратегия из пары есть выигрышная стратегия соответствующего игрока. А поскольку существование чистых оптимальных стратегий в стандартных семантических играх гарантировано - тем фактом, что в таких играх отсутствуют нетривиальные информационные множества, - то в ТИС обычно считается, что за двузначность классической логики, т.е. за то обстоятельство, что каждое предложение классически интерпретированного первопорядкового языка либо истинно либо ложно, ответственно, говоря в теоретико-игровых терминах, существование чистых оптимальных стратегий в соответствующих семантических играх (см., напр., [2, с.79].

И такая точка зрения совершенно оправдана - при условии, что мы не собираемся считаться с возможностью введения в наши семантические игры случайных ходов. Если же в них имеются случайные ходы, то ситуация меняется, именно: даже если имеется некая пара чистых оптимальных стратегий, может случиться так, что ни одна из этих стратегий не является выигрышной (для соответствующего игрока); а это значит, что даже при наличии чистых оптимальных стратегий в семантической игре соответствующее предложение, если таковое существует, может оказаться ни истинным, ни ложным (в данной модели).

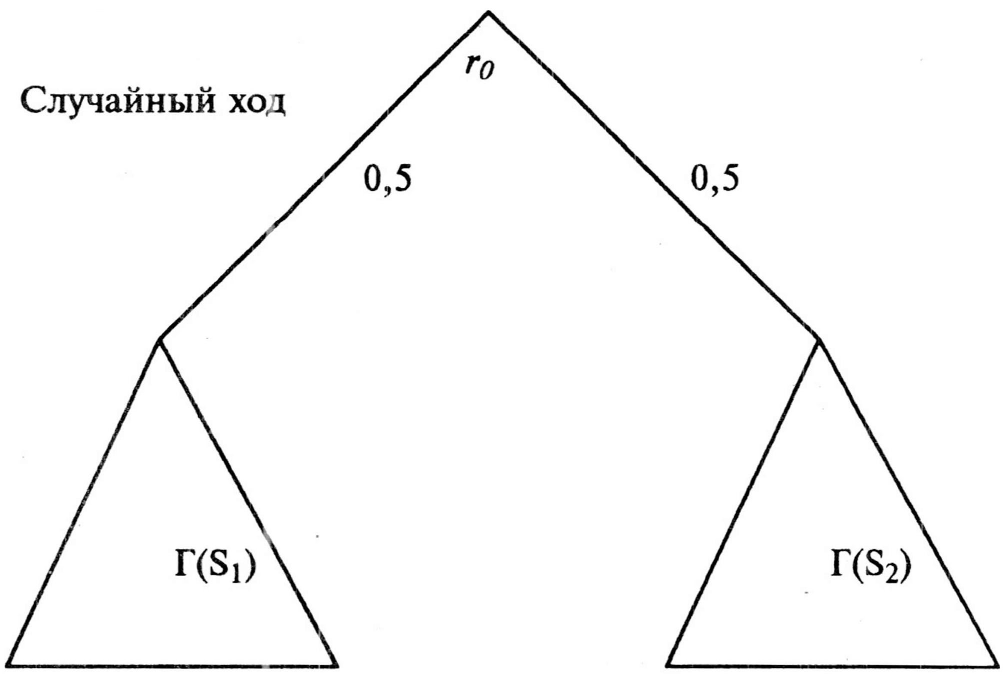


Рис.1

Чтобы увидеть, как это может быть, рассмотрим простой случай. Пусть у нас есть два предложения S_1 и S_2 некоего стандартного первопорядкового языка L. Предположим далее, что S_1 истинно, а S_2 ложно в некоторой данной модели языка L, что означает, в терминах ТИС, что в семантической игре $\Gamma(S_1)$ у Верификатора имеется выигрышная стратегия, а в $\Gamma(S_2)$ выигрышная стратегия имеется у Фальсификатора.

Построим теперь из $\Gamma(S_1)$ и $\Gamma(S_2)$ некую новую игру - так, как это показано на Рис.1.

Мы попросту связали корни двух наших игровых деревьев с неким одним новым корнем r_0. Теперь нам нужно решить, кто делает ход, ассоциированный с r_0. Если мы предоставим право хода Верификатору, то ясно, что мы получим семантическую игру $\Gamma(S_1\ \ S_2)$; и не менее ясно, что если предоставить право хода Фальсификатору, то получается семантическая игра $\Gamma(S_1$ & $S_2)$. Но стандартная теория игр в развернутой форме дает нам еще одну возможность: мы можем объявить любой ход в игровом дереве случайным ходом; тогда мы должны приписать такому ходу некоторое распределение вероятностей над соответствующими альтернативными выборами (см., напр., [1, с.69]). Это означает, что ни один из игроков не делает данный ход, но одна из соответствующих ходу альтернатив выбирается неким случайным механизмом, настроенным в соответствии с приписанным распределением вероятностей.

И вот для нашей игры на Рис.1 - назовем ее Γ^* - мы выбираем этот третий вариант: объявляем первый ход игры Γ^* случайным ходом и приписываем ее альтернативным выборам симметрическую вероятность. То есть этот первый ход равносилен, скажем, подбрасыванию симметрично уравновешенной монетки, и решка означает S_1, а орел - S_2.

Все прочие характеристики игры Γ^* очевидным образом детерминированы соответствующими характеристиками игр $\Gamma(S_1)$ и $\Gamma(S_2)$.

Пока что, впрочем, не совсем понятно, можно ли называть Γ^* *семантической* игрой, ибо не видно, какое синтаксически правильное предложение языка L можно было бы ассоциировать с Γ^*. Но во всех остальных отношениях Γ^* - игра как игра: для Γ^* детерминированы все параметры (игровое дерево, функция платежей и т.д.), предусмотренные общим определением игры двух лиц с нулевой суммой в развернутой форме.

Более того, остается вполне осмысленным вопрос о том, имеет ли один из двух игроков выигрышную стратегию в Γ^*. И нетрудно видеть, каков должен быть ответ.

В самом деле, предположим, выигрышная стратегия имеется у Верификатора. Это значит, что он всегда может делать свои ходы так (в зависимости от того, что уже произошло по ходу партии игры), что он выиграет партию, как бы ни ходил Фальсификатор. Но это как раз-таки не имеет места для Γ^*. В самом деле - пусть монетка упала орлом. В таком случае, раз по предположению S_2 ложно в данной модели, Фальсификатор в состоянии не дать Верификатору выиграть партию игры - для этого ему достаточно придерживаться имеющейся у него в $\Gamma(S_2)$ выигрышной стратегии.

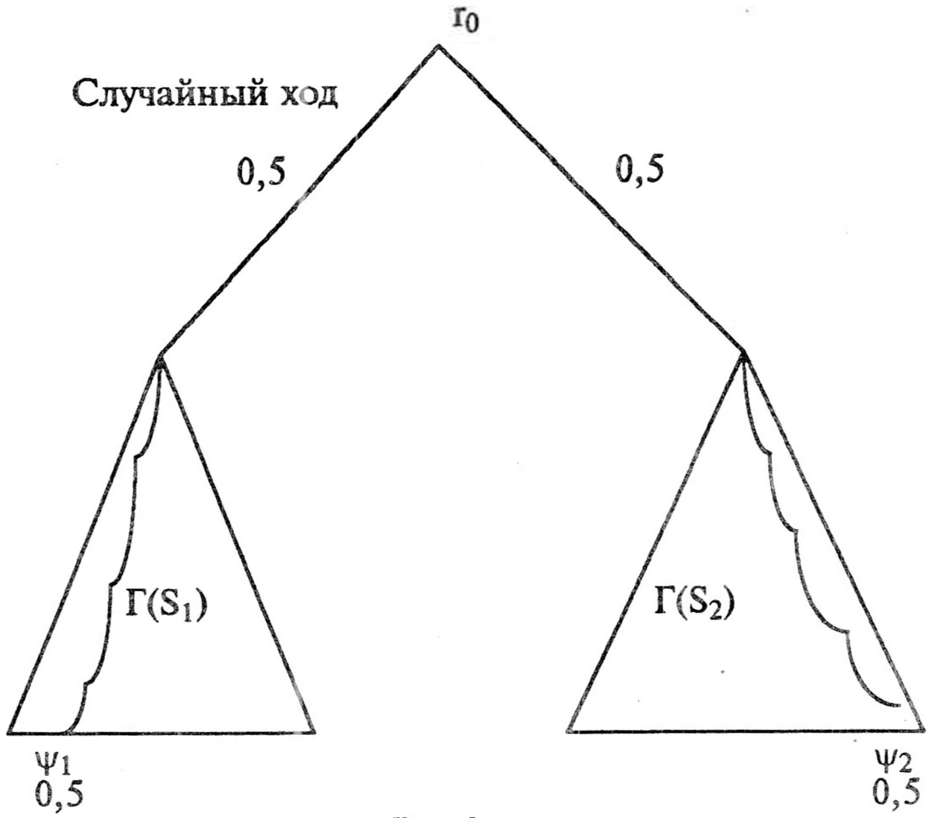


Рис.2

По аналогичным соображениям в Γ^* нет выигрышной стратегии и у Фальсификатора. Таким образом, выигрышной стратегии в игре Γ^* нет ни у одного из двух игроков.

С другой стороны, мы можем поинтересоваться, имеется ли в Γ^* какая-либо пара чистых оптимальных стратегий. И должно быть ясно, что на этот раз ответ будет положительным. В самом деле, утверждение о существовании в Γ^* чистых оптимальных стратегий следует из аналогичного утверждения насчет $\Gamma(S_1)$ и $\Gamma(S_2)$: если и в $\Gamma(S_1)$ и в $\Gamma(S_2)$ есть чистые оптимальные стратегии, - а именно это мы и допустили выше, принимая во внимание, что любая *выигрышная* стратегия есть чистая оптимальная, - то некая выигрышная стратегия Верификатора в $\Gamma(S_1)$ вместе с произвольной его стратегией в $\Gamma(S_2)$, индуцирует один элемент некоей пары чистых оптимальных стратегий игроков в Γ^*; а некая выигрышная стратегия Фальсификатора в $\Gamma(S_2)$ вместе с произвольной его стратегией в $\Gamma(S_1)$ индуцирует второй элемент пары чистых оптимальных стратегий.

Итак, из всего вышесказанного следует, что в Γ^* имеются чистые оптимальные стратегии, но нет выигрышных.

Чтобы понять эту особенность игры Γ^*, нужно обратить внимание на то, что в игре со случайными ходами выбор каждым из игроков своей стратегии детерминирует не исход игры (как в случае игры без случайных ходов), а всего лишь некое распределение вероятностей над классом всех возможных исходов. Иными словами, когда все игроки сделали свой выбор, однозначная детерминация исхода игры все еще зависит от того, как упадет монетка - орлом или решкой.

Для игры Γ^* это значит, что когда и Верификатор и Фальсификатор выбрали каждый свою стратегию в Γ^*, то в результате этого выбора оказался детерминированным не один-единственный исход игры, а два исхода: один - в пределах дерева игры $\Gamma(S_1)$, второй - в пределах дерева игры $\Gamma(S_2)$ (см. Рис.2).

Соответствующее распределение вероятностей припишет вес 0,5 исходу ψ_1, и опять же вес 0,5 исходу ψ_2, и нулевые веса всем остальным исходам игры Γ^*.

Можно объяснить отсутствие выигрышных стратегий в таких играх, как Γ^*, и в терминах цены игры. С этой точки зрения, решающее обстоятельство состоит в том, что в нормальной форме такой игры, как Γ^*, т.е. в соответствующей двумерной матрице, строки которой репрезентируют стратегии Верификатора, а столбцы - стратегии Фальсификатора, обязана быть ячейка, соответствующая некоей уравновешенной паре (чистых) стратегий, и следовательно, две стратегии этой пары будут (чистыми) оптимальными стратегиями Верификатора и Фальсификатора, соответственно. Но дело в том, что ячейки такой матрицы (в отличие от ячеек матрицы игры *без* случайных ходов) заполнены не значениями платежной функции, а всего лишь соответствующими взвешенными усреднениями значений платежной функции.

И вот, предположим, мы назначили численный платеж 1 каждому исходу игры Γ^*, помеченному истинным атомарным предложением языка L, и численный платеж 0 каждому исходу, помеченному ложным предложением. (Это, кстати, означает, что мы - без ущерба для корректности рассмотрений - перешли от игры с нулевой суммой к игре с некоей константной, но не нулевой суммой.) Когда такие назначения сделаны, у Верификатора (соответственно у Фальсификатора) имеется выигрышная стратегия в игре Γ^* ттт цена игры Γ^* равна 1 (соответственно нулю). Но предположим далее, что упомянутые выше исходы ψ_1 и ψ_2 (см. Рис.2) детерминированы некоторой парой чистых ***оптимальных*** стратегий. Тогда, поскольку у Верификатора имеется выигрышная стратегия в $\Gamma(S_1)$, ψ_1 ассоциировано с неким истинным атомарным предложением, и стало быть, этому исходу назначается платеж 1. По аналогичным соображениям, исходу ψ_2 платеж 0.

Что же касается цены игры, то она есть, так сказать, "цена" реализации Верификатором одной из его оптимальных стратегий, т.е. она численно равна соответствующему взвешенному среднему его платежей по всем исходам игры. В случае игры Γ^*, эта цена равна $0{,}5\cdot 1 + 0{,}5\cdot 0$, т.е. равна 0,5. Таким образом, цена игры Γ^* не равна ни единице, ни нулю, что значит, что ни у Верификатора, ни у Фальсификатора нет выигрышной стратегии в Γ^*.

Поэтому если отождествить цену 1 семантической игры с значением истинности 'истинно' рассматриваемого предложения, а цену 0 - с значением истинности 'ложно', как это предлагает сделать, например, Хинтикка [2, с.79], то если бы игре Γ^* соответствовало некое предложение языка L, скажем, S^*, то оказалось бы, что в рассматриваемой модели предложение S^* ни истинно, ни ложно.

Таким образом, мы можем сделать вывод, что если рассматривать наши стандартные семантические игры (для классической логики) на фоне достаточно широкого класса игр двух лиц с нулевой суммой (т.е. класса, включающего в себя игры со случайными ходами), то двузначность классической логики равносильна, с теоретико-игровой точки зрения, тому обстоятельству, что (i) в соответствующих семантических играх имеются чистые оптимальные стратегии (благодаря отсутствию нетривиальных информационных множеств) и (ii) рассматриваемые игры не содержат случайных ходов.

2. СУПЕРОЦЕНКИ Р.ТОМАСОНА ДЛЯ ОДНОГО ИЗ ЯЗЫКОВ ВРЕМЕННОЙ ЛОГИКИ

Какой бы интерес ни представляли сделанные выше наблюдения сами по себе, пока что никак не видна их связь с логической семантикой, поскольку, как мы уже говорили, в синтаксисе нашего стандартного первопорядкового языка L нет такого предложения, которое мы могли бы с основанием ассоциировать с игрой Γ^*.

Встает, поэтому, вопрос, можно ли игры с первым случайным ходом, подобные Γ^*, каким-либо образом использовать в ТИС. По счастью, ответ на этот вопрос положителен.

В самом деле, вернемся еще раз к нашей игре Γ^*. Мы видели, что в такой модели, где S_1 истинно, а S_2 ложно (или наоборот), выигрышной стратегии в Γ^* нет ни у Верификатора, ни у Фальсификатора.

Еще легче видеть, что в модели, где истинны и S_1 и S_2, выигрышная стратегия в Γ^* имеется у Верификатора, а в модели где оба предложения ложны, выигрышная стратегия в Γ^* имеется у Фальсификатора.

Все это наводит на мысль, что наши игры с первым случайным ходом могут послужить теоретико-игровым аналогом супероценок ван Фраассена, ибо супероценка для того или иного языка собирает в одну группу некоторые исходные оценки (для этого языка), чтобы иметь возможность различать между следующими тремя мыслимыми случаями: (i) когда, для некоторого данного предложения, все оценки в данной группе дают T (истинно); в этом случае и супероценка дает T; (ii) когда все они дают F (ложно); тогда и супероценка дает F (ложно); (iii) когда некоторые из них дают T, а некоторые - F; в этом случае рассматриваемое предложение имеет истинностный провал.

Единственное, но важное различие между Γ^* и такой игрой, которая могла бы быть аналогом супероценки, состоит в том, что во втором случае должно иметься такое предложение S, что это одно и то же предложение S коррелируется с каждой из подыгр, разыгрываемых после первого случайного хода (см. Рис.3), - в отличие от того, что имеет место в Γ^*, где с двумя семантическими играми, случайно выбираемыми на первом ходу, коррелируются различные предложения: с одной - S_1, с другой - S_2.

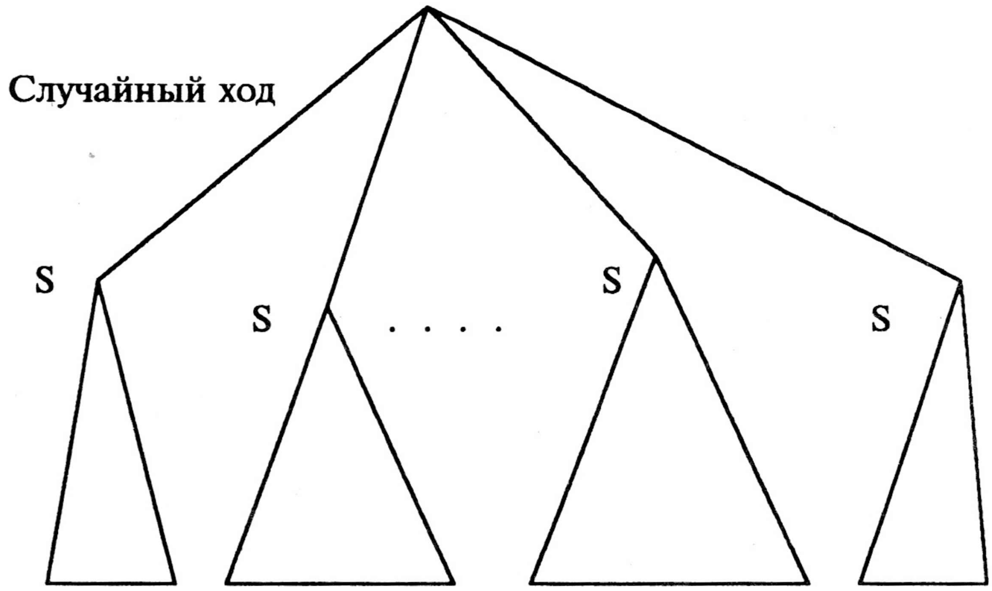


Рис.3

В супероценочной же игре, - вроде той, что изображена на Рис.3, - от одной подыгры, разыгрываемой после первого случайного хода, к другой варьируется не предложение, а соответствующая оценка.

Чтобы увидеть, как это происходит, рассмотрим один частный случай супероценок, построенный Ричмондом Томасоном (1970) для одного темпорального языка L_T. Нам здесь будет достаточно лишь коротко изложить Томасоновы определения.

Темпоральный язык L_T состоит из пропозициональных переменных *p, q, r* и т.д. и имеет четыре одноместных пропозициональных связки: ~, *P* (оператор прошедшего времени), *F* (оператор будущего времени) и L (оператор неизбежности) - и одну двуместную пропозициональную связку $\supset$.

Модельная структура M состоит из непустого множества H и некоторого отношения упорядочивания $<$ на H, удовлетворяющего двум следующим условиям:

(i) *однозначная детерминированность прошлого:* для всех α, β, $\gamma \in H$, если $\beta < \gamma$ и $\gamma < \alpha$, то $\beta < \gamma$ или $\gamma < \beta$, если $\beta \neq \gamma$.

(ii) *транзитивность:* Если $\alpha < \beta$ и $\beta < \gamma$, то $\alpha <. \gamma$

История для модельной структуры M - это произвольная максимальная цепь на M. Множество историй, содержащих $\alpha \in H$, будем обозначать H_a. *Атомарная оценка* V языка L_T на M есть функция, которая, для каждых $\alpha \in H$ и пропозициональной переменной p языка L_T, сопоставляет некоторое значение T или F переменной p в α : $V_a(p) = T$ или $V_a(p) = F$.

Томасон начинает с введения двузначных оценок для L_T, не допускающих истинностных провалов. Эти оценки релятивизированы к историям в M. Значения, которые эти оценки приписывают формуле A в относительно истории h, определяются следующими индуктивными условиями:

(2.1) $V_a^h(p) = V_a(p)$.

$V_a^h(A \supset B) = T$, если $V_a^h(A) = F$ или $V_a^h(B) = T$.

$V_a^h(A \supset B) = F$ в противном случае.

$V_a^h(\sim A) = T$, если $V_a^h(A) = F$.

$V_a^h(\sim A) = F$ в противном случае.

$V_a^h(FA) = T$, если $V_\beta^h(A) = T$ для некоторого $\beta \in h$ такого, что $a \subset \beta$.

$V_a^h(FA) = F$ в противном случае.

$V_a^h(PA) = T$, если $V_\beta^h(A) = T$ для некоторого $\beta \in h$ такого, что $\beta \subset a$.

$V_a^h(PA) = F$ в противном случае.

$V_a^h(LA) = T$, если $V_a^g(A) = T$ для всех $g \in H_a$.

$V_a^h(LA) = F$ в противном случае.

Томасон устраивает разбиение множества всех двузначных оценок на классы эквивалентности: V_a^h и V_b^g принадлежат одному и тому же классу эквивалентности ттт $a = b$. Супер-оценка V_a приписывает значение предложению A относительно некоторого класса эквивалентности, т.е. относительно некоторого момента a:

(2.2) $V_a(A) = T$ ттт $V_a^h(A) = T$ для всех $h \in H_a$.

$V_a(A) = F$ ттт $V_a^h(A) = F$ для всех $h \in H_a$.

$V_a(A)$ остается не определенным в остальных случаях.

Замечание 1: На самом деле мы определили V_a дважды: первый раз - когда определяли атомарные оценки, и второй - когда определяли супероценки. Но нетрудно видеть, что корректность определения не нарушена, поскольку V_a как супероценка, зависит от соответствующей V_a как атомарной оценки, таким образом, что обе приписывают пропозициональной переменной *p* одно и то же истинностное значение.

Замечание 2: Для Томасона основная мотивация при построении супероценок состояла в развитии такой формальной теории времени, которая поддерживала бы известную точку зрения насчет утверждений о случайных будущих событиях, именно: что такие утверждения не могут быть ни истинными, ни ложными (см. [4, с.265]).

Как именно Томасоновы супероценки поддерживают эту точку зрения, можно увидеть, приложив (2.2) к предложению вида FB:

(2.3) $V_a(FB) = T$ ттт для всех $h \in H_a$ имеется такой $b \in h$, что $a \subset b$ и $V_b{}^h(B) = T$.

$V_a(FB) = F$ ттт для всех $h \in H_a$ не существует такого $b \in h$, что $a \subset b$ и $V_b{}^h(B) = T$.

$V_a(FB)$ не определено в остальных случаях.

Замечание 3: Оценки V_a для L_T суть супероценки для L_T в смысле общего определения ван Фраассена (см.[6, с.94 и сл.]; подробное обсуждение логических свойств языка L_T см. в [4] и [5]).

3. СЕМАНТИЧЕСКИЕ ИГРЫ С ПЕРВЫМ СЛУЧАЙНЫМ ХОДОМ КАК ТИС-АНАЛОГ ТОМАСОНОВЫХ СУПЕРОЦЕНОК

Мы неформально изложим основную идею семантической игры с первым случайным ходом для языка L_T. Начнем с того же, с чего начал Томасон: определим такие семантические игры, которые были бы аналогом Томасоновых двузначных оценок $V_a{}^h$. Стало быть, эти семантические игры должны разыгрываться относительно некоторого момента a *и* истории *h* H_a . Например, игровое правило (G.*L*) для оператора неизбежности формулируется так:

(G.*L*) Если игра дошла до момента a *H*, истории *h* H_a и предложения вида *L*A, то Фальсификатору позволено выбрать произвольную историю *g* из H_a. Игра продолжается по отношению к a, *g* и предложению A.

Нетрудно видеть, что такие семантические игры дают тот же самый концепт истинности (и ложности) для предложений языка L_T, относительно некоторого момента и некоторой истории, что и концепт, получающийся из Томасоновых двузначных оценок V_a^h. Поэтому мы будем называть эти игры *двузначными* семантическими играми для L_T.

Теперь, когда определены двузначные игры, мы можем построить теоретико-игровой аналог следующего шага Томасона - супероценок V_a. Мы сделаем это с помощью *семантических игр с первым случайным ходом* для L_T. Следующая полуформальная инструкция и Рис.4 показывают, как именно построить семантическую игру с первым случайным ходом для предложения А относительно момента а:

(i) Постройте двузначную игру Г(LА) для предложения LА относительно а и произвольной истории h из H_a .

(ii) Сделайте в Г(LА) следующие изменения:

(a) подставьте А/а вместо LА/а,h в корне дерева игры Г(LА);

(b) сделайте первый ход игры Г(LА) случайным ходом (а не ходом Фальсификатора); и

(c) назначьте симметрическое распределение вероятностей на множестве альтернатив этого случайного хода[1] .

И вот, главное утверждение этой статьи состоит в том, что так определенные семантические игры с первым случайным ходом дают те же самые концепты истинности, ложности и истинностного провала для языка L_T, что и Томасоновы супероценки; т.е. если даны модельная структура $M = <H,<>$ и атомарная оценка V, приписывающая истинность или ложность любой пропозициональной переменной языка L_T, относительно момента а H, то для всех предложений А из L_T, для произвольного а H, в соответствующей семантической игре со случайным первым ходом Г(А) у Верификатора (соответственно у Фальсификатора) имеется выигрышная стратегия ттт Томасонова супероценка V_a дает для А истинностное значение Т (соответственно: F), и в Г(А) нет выигрышной стратегии ни у одного из двух игроков ттт V_a(А) остается неопределенным.

---

[1] Здесь и далее я выбрал для определенности *симметрическое* распределение вероятностей, хотя для целей моделирования супероценок сгодилось бы любое такое распределение, которое не приписывает никаким альтернативам нулевых весов.

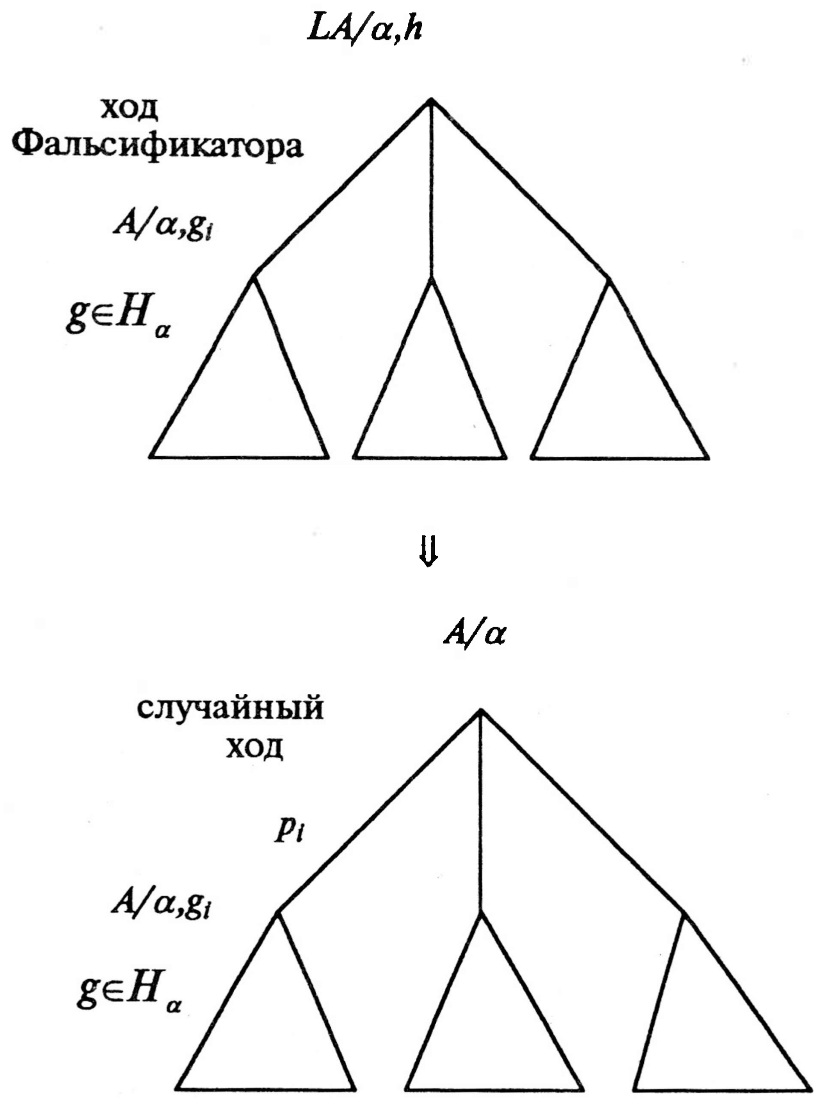


Рис.4

Чтобы увидеть, почему это так, достаточно приложить к Г(А) те соображения, которые приводились выше, в Разделе 1, для игры Г*. В самом деле, поскольку первый ход случаен, у Верификатора имеется выигрышная стратегия в Г(А) относительно а ттт у него имеется выигрышная стратегия в каждой из двузначных игр, разыгрываемых после совершения случайного хода, а это равносильно тому, что $V_a^h(A) = T$ для любой $h \in H_a$, что как раз и является условием того, что соответствующая супероценка V_a^h приписывает Т предложению А. Аналогичное соображение приложимо к случаю, когда выигрышная стратегия в Г(А) имеется у Фальсификатора. Наконец, поскольку Г(А) - игра со случайным ходом, может случиться так, что выигрышной стратегии в ней нет ни у Верификатора, ни у Фальсификатора (см. Раздел 1), что случается на самом деле, когда в некоторых двузначных играх, разыгрываемых после совершения случайного хода, выигрышная стратегия имеется у Верификатора, а в некоторых - у Фальсификатора. Но, следовательно, в каждом таком случае для некоторых историй $h \in H_a$. $V_a^h(A)= T$, а для некоторых - $V_a^h(A)= F$, что - по определению супероценки - значит, что V_a остается неопределенной.

Мы не приводим здесь полного формального доказательства эквивалентности Томасоновых супероценок и оценок, индуцируемых семантическими играми с первым случайным ходом для L_T, а ограничимся некоторыми замечаниями о строении этого доказательства.

Ясно, что обсуждаемая эквивалентность непосредственно следует из утверждений 1 и 2:

УТВЕРЖДЕНИЕ 1: Если даны модельная структура $M = <H,<>$, атомарная оценка V языка L_T на моментах из H, момент a H и история $h \in H_a$, то двузначные семантические игры, разыгрываемые относительно a и h, индуцируют оценку $V_{|bv|}$ языка L_T, совпадающую с Томасоновой двузначной оценкой V_a^h.

УТВЕРЖДЕНИЕ 2: Для произвольной $M = <H,<>$ и атомарной оценки V языка L_T на моментах из H, если, для некоторого a $\in H$ и истории $h \in H_a$, двузначные семантические игры, разыгрываемые относительно a и h, индуцируют оценку $V_{|bv|}$ языка L_T, совпадающую с Томасоновой двузначной оценкой V_a^h, то семантические игры с первым случайным ходом, разыгрываемые относительно a , индуцируют оценку языка L_T, совпадающую с Томасоновой супероценкой V_a.

Доказательство Утверждения 1 в идейном отношении вполне рутинно, но оно требует предварительного формального построения теории игровых деревьев, сопоставляемых предложениям из L_T.

Что же касается доказательства Утверждения 2, то оно, как и следовало ожидать, опирается на тот общий факт, что в игре (двух лиц с нулевой суммой) в развернутой форме с первым (и единственным в игре) случайным ходом и с совершенной информацией у игрока имеется выигрышная стратегия, т.е. стратегия, гарантирующая ему платеж, равный максимальному значению (если таковое имеется) из области значений платежной функции, ттт у него имеется выигрышная стратегия в каждой из подыгр, разыгрываемых после совершения случайного хода, - при условии, что распределение вероятностей на множестве альтернатив случайного хода не приписывает нулевой вероятности ни одной из альтернатив.

Стоит отметить, что доказательство Утверждения 2 не зависит от каких-либо особенностей языка L_T или особенностей модельных структур для L_T. Поэтому Утверждение 2 допускает обобщения. В самом деле, рассмотрим самое общее определение супероценки в van Fraassen [6, с.95]:

(3.1) Оценка *s* есть супероценка для языка L ттт имеется такое непустое множество *K* допустимых оценок для L, что, для всех предложений A языка L,

s(A) = T ттт *v*(A) = T для всех *vK*,

s(A) = F ттт *v*(A) = F для всех *vK*, и

s(A) остается неопределенным в остальных случаях.

В свете всего того, что сказано выше, очевидно, что *если* нам уже удалось построить такие семантические игры, которые функционируют эквивалентно исходным допустимым оценкам для L, *то* некоторые семантические игры с первым случайным ходом всегда смогут сослужить службу соответствующих супероценок. Есть, стало быть, основания утверждать, что в этом условном смысле можно рассматривать семантические игры с первым случайным ходом в качестве общего ТИС-аналога супероценок.

4. НЕКОТОРЫЕ ДОПОЛНИТЕЛЬНЫЕ ЗАМЕЧАНИЯ

Обсудим теперь некоторые возможные направления дальнейшего развития и приложения идеи семантических игр со случайными ходами.

Игровое правило для случайного хода. Построение семантической игры для предложения детерминируется всей совокупностью игровых правил для данного языка (и - в случае естественного языка - набором принципов очередности, предписывающих очередность применения игровых правил) (см., напр., [3, с.27 и сл.]). Свое игровое правило сопоставляется каждому логическому оператору формального или каждому логически интересному слову или обороту рассматриваемого естественного языка.

Случайный ход в обсуждавшихся семантических играх не обязан быть исключением из этой практики.

Суть дела такова: если для рассматриваемого языка предусматривается некоторая разновидность супероценок, то случайный ход в соответствующих семантических играх служит показателем начала (инициирования) дискурса. Совершение его аналогично тасованию колоды перед началом игры в карты.

Например, соответствующее игровое правило для формального языка L_T можно сформулировать так:

(G.*Init*) При инициации семантической игры для предложения A, которое оценивается самостоятельно (а не в качестве подформулы какого-то другого предложения) относительно момента a *H*, запусти случайный механизм, настроенный на симметрическое распределение вероятностей, для выбора одной из историй из H_a. Предположим, механизм выбрал *g* H_a. Тогда игра продолжается по отношению к a, *g* и предложению A.

Конечно, все остальные игровые правила должны быть сформулированы таким образом, чтобы процесс игры был релятивизирован к некоторому моменту и некоторой истории.

Аналогичным образом можно сформулировать и соответствующее игровое правило для естественного языка; однако важное различие состоит в том, что в этом случае случайный ход инициирует семантическую обработку целого семантически связного дискурса, а не просто некоторого предложения - составной части такого дискурса.

Рассмотрим, например, (4.1):

(4.1) Завтра придет Катя. Она уберется в комнатах, приготовит обед и заберет детей из школы.

Представляется интуитивно ясным, что в (4.1) рассказчик приглашает нас следовать одному из возможных развитий будущих событий, т.е. одному из возможных ограничений на истории, пробегающие через момент a произнесения дискурса (4.1). Но если мы запустим тасующий механизм вновь перед обработкой второго предложения из (4.1), мы потеряем след той истории, относительно которой оценивалось первое предложение; и если моменты времени не кросс-идентифицируются (или не всегда кросс-идентифицируются) сквозь истории, мы можем потерять и след того момента, когда пришла Катя в истории, выбранной для первого предложения. Тогда мы потеряем возможность принять в расчет подразумевавшуюся временную последовательность событий Катиного прихода, уборки ею комнат и т.д. (Но сразу не вполне понятно - что могло бы считаться регулярным (поверхностным) синтаксическим показателем начала дискурса?)

Что касается принципов очередности, то, по-видимому, из природы правила (G.*Init*) вытекает, что при обработке любого дискурса это правило всегда должно применяться в первую очередь. Было бы интересно поискать возможные исключения из этого принципа очередности.

Корреляция случайного хода с некоторой лексической единицей. Способ построения семантической игры с первым случайным ходом для предложения языка L_T (см. Раздел 3) наводит на мысль о тесной связи между случайным ходом и ходом, соответствующим оператору неизбежности L, - в обоих случаях совершение хода состоит в выборе некоторой истории из H_a. Одно из различий заключается в том, что в первом случае история выбирается Случаем, а во втором случае - Фальсификатором.

Другая важная дизаналогия заключается в том, что выбор Фальсификатором истории систематически коррелируется с некоторой лексической единицей из словаря языка L_T, именно: с оператором L, в то время как для процедуры случайного выбора истории оказывается предусмотренным иной уровень связи с языком - не уровень отдельных единиц словаря, а уровень целостного дискурса.

Интересно было бы попытаться построить язык, в интерпретации которого со случайными ходами коррелировались бы какие-либо логические операторы (некий модальный оператор, некий квантор и/или некий пропозициональный оператор). Тогда в партии семантической игры для предложения такого языка случайный ход мог бы, вообще говоря, оказаться не обязательно на начальной, но на любой стадии игры.

Комбинирование случайного хода с феноменом информационной независимости. Рассмотрим семантическую игру для предложения вида FA языка L_T. Когда на первом ходу игры случай перетасовал истории, Верификатор получает право хода, чтобы выбрать некоторый момент из этой случайно выбранной истории. Предположим теперь, что мы сделали этот второй ход информационно независимым от первого случайного хода, собрав все соответствующие узлы игрового дерева в одно информационное множество.

Такой информационный разрыв потребует кросс-идентификации моментов времени сквозь истории, поскольку Верификатору придется теперь выбирать некоторый момент будущего, *не зная, к какой именно истории принадлежит выбираемый им момент.*

Этим двум вариантам семантической игры для FA - информационно зависимому и информационно независимому - соответствуют следующие два прочтения нашего предложения:

(4.2) В будущем имеется некий неспецифицированный заранее, т.е. зависящий от того, как будут развиваться события, момент - такой, что в этот момент имеет место А.

(4.3) В будущем имеется момент а - такой, что (а) отдаленность момента а от настоящего момента не зависит от того, как будут развиваться события, и (b) в а имеет место А.

Таким образом, дистинкция между (4.2) и (4.3) - это разновидность хорошо известной дистинкции 'специфицированность - неспецифицированность', именно: та разновидность, которая относится к дискурсу о будущем.

В некоторой более богатой версии языка L_T могло бы иметьт место предложение вида $\exists x\ F(x)Qx$. В соответствующей семантической игре мы можем устроить одно информационное множество для всех узлов $\exists$-хода, что приведет к информационной независимости этого третьего хода от первых двух. Это дало бы следующую интерпретацию соответствующего предложения:

(4.4) В будущем имеется некий объект x - такой, что (а) идентичность объекта x не зависит от того, как будут развиваться события, и (b) в некоторый момент в будущем, - момент, который, возможно, зависит от того, как будут развиваться события, - объект x будет обладать свойством Q.

В естественном языке примером этой разновидности двусмысленности между специфичностью-в-будущем/ неспецифичностью-в-будущем может служить предложение (4.5):

(4.5) Ксения выйдет замуж за японца.

Из того прочтения предложения (4.5), которому присуща обсуждаемая нами специфичность-в-будущем, вытекает, что имеется специфический (конкретный) японец, за которого Ксения рано или поздно выйдет замуж.

Из второго же, лишенного специфичности в нашем смысле, прочтения вытекает, что Ксения выйдет-таки замуж за какого-то японца, но выбор ею конкретного жениха среди японцев, возможно, будет зависеть от того, как будут развиваться события.

Итак, комбинирование первого случайного шага с информационной независимостью дает нам некий систематический базис для реконструирования одного вида двусмысленности, характерной для дискурса о будущем.

Нефальсифицирующие опровержения. В соответствии с ТИС-определением ложности для классических семантических игр, предложение А ложно (в данной модели) ттт в семантической игре Г(А) (относительно данной модели) у Фальсификатора имеется выигрышная стратегия.

Таким образом, предъявление выигрышной стратегии Фальсификатора в игре Г(А) равносильно *фальсификации* предложения А - т.е. равносильно демонстрации того, что А ложно (в данной модели). Ясно, что если Г(А) - классическая семантическая игра, то предъявление выигрышной стратегии Фальсификатора в игре Г(А) равносильно еще и *опровержению* предложения А, т.е. равносильно демонстрации того, что А не истинно.

В семантических же играх с первым случайным ходом, как и следовало ожидать, каждая фальсификация является опровержением, но не каждое опровержение - фальсификацией.

Это свойство рассматриваемых семантических игр дает возможность объяснить, каким образом оказываются совместимы друг с другом два феномена: (1) отсутствие определенного значения истинности (истинностный провал) у утверждений о случайных будущих событиях - например, у соответствующего рода прогнозов и предсказаний; (2) возможность опровержения утверждений о случайном будущем (прогнозов, предсказаний и т.п.). Ясно, что для совместимости феноменов (1) и (2) требуется, чтобы опровержения, о которых идет речь в (2), не были бы одновременно фальсификациями, т.е. чтобы это были *нефальсифицирующие опровержения*.

Если Г(А) - игра с первым случайным ходом, то нефальсифицирующим опровержением предложения А (в данной модели) будет предъявление выигрышной стратегии Фальсификатора в любой из подыгр, следующих за первым случайным ходом. В самом деле: во-первых, из наличия у Фальсификатора выигрышной стратегии в одной из таких подыгр тривиальным образом вытекает отсутствие у Верификатора выигрышной стратегии во всей игре Г(А) - и поэтому обсуждаемое предъявление есть *опровержение* предложения А (в данной модели); но, во-вторых, выигрышная стратегия Фальсификатора в некоторой из подыгр, следующих за первым случайным ходом, *вообще не является стратегией* Фальсификатора во всей игре Г(А), и стало быть, она тем более не может быть его *выигрышной* стратегией в Г(А), - и поэтому предъявление выигрышной стратегии Фальсификатора в некоторой из подыгр, следующих за первым случайным ходом, не есть *фальсификация* предложения А (в данной модели). Таковое предъявление, стало быть, есть *нефальсифицирующее опровержение*, к получению чего мы и стремились.

Например, если в ответ на предсказание: "Через пять минут (после этого предсказания) Ваня Сидоров будет сидеть в кресле" Ваня Сидоров в соответствующий момент демонстративно встает с кресла, чтобы опровергнуть предсказание, то его вставание с кресла, будучи интерпретировано в терминах семантических игр с первым случайным ходом на Томасоновых модельных структурах с ветвящимся временем, равносильно предъявлению им выигрышной стратегии Фальсификатора в некоторой из подыгр, следующих за первым случайным ходом, а как мы только что выяснили, таковое предъявление есть опровержение, но не фальсификация предложения, о котором идет речь. Чтобы действительно фальсифицировать предсказание, его герою пришлось бы предъявить некоторую (выигрышную!) стратегию Фальсификатора во *всей игре* Г(А), т.е. некоторую *функцию* из подыгр, следующих за случайным ходом, в стратегии Фальсификатора в этих подыграх.

Предложения о вероятностях. Можно сказать, что цена семантической игры Г(*F*A) с первым случайным ходом для предложения вида *F*A языка L_T, разыгрываемой относительно момента a, есть численное выражение доли таких двузначных подыгр игры Г(*F*A), в которых у Верификатора имеется выигрышная стратегия. Это утверждение можно истолковать так, чтобы из него следовало, что цена игры Г(*F*A), разыгрываемой относительно a, есть вероятность, в моменте a, события, состоящего в том, что А истинно в некоторый момент будущего, - *такая трактовка правомерна при условии, что распределение вероятностей над H_a-историями, приписываемое случайному ходу, интерпретируется не как более или менее произвольная черта нашей процедуры вычисления истинностных значений, а как характеристика рассматриваемой модельной структуры.*

Иными словами, если добавить к нашим модельным структурам третий ингредиент, именно: функцию σ, приписывающую каждому $\alpha \in H$ некоторое распределение вероятностей над историями из H_a. , то мы получим возможность (a) использовать соответствующие значения функции для характеризации случайного хода в наших семантических играх с первым случайным ходом[2] ; и, следовательно, (b) использовать эти игры для трактовки семантики предложений о вероятностях будущих случайных событий, - семантики предложения 'Вероятность того, что Борис Ельцин победит на следующих президентских выборах в России, меньше, чем 2/5'.

---

[2] Мы опять-таки накладываем ограничение на функцию S: ее значениями могут быть только распределения, не приписывающие нулевого веса ни одной истории из соответствующих H_a.

Третий игрок. Заметим в заключение, что наши супероценочные игры могут и не иметь явно выраженного пробабилистского характера. На самом деле при построения ТИС-аналога супероценок мы могли бы использовать - для предварительного тасования историй - третьего игрока вместо случайного механизма.

Чтобы сумма нашей семантической игры оставалась нулевой, этому третьему игроку следует приписать тривиальную платежную функцию со всеми нулевыми платежами. То есть его можно рассматривать как игрока, который не заинтересован ни в истинности, ни в ложности рассматриваемого предложения. В таком случае с формальной точки зрения мы получаем игру трех лиц с нулевой суммой. Вполне очевидно, что эта замена случайного механизма незаинтересованным игроком никак не меняет условий наличия у Верификатора (или у Фальсификатора) выигрышной стратегии в игре. Но на этот раз нам нет нужды приписывать альтернативам первого хода какое-то распределение вероятностей. Таким образом, эта маленькая вариация показывает, что - как и следовало ожидать - в наших супероценочных семантических играх нет ничего существенно пробабилистского.

ЛИТЕРАТУРА

1. *Льюс Р.Д., Райфа Х.* Игры и решения//М., 1961.
2. *Hintikka J.* Logic, Language-Games and Information: Kantian hemes in the Philosophy of Logic. Oxford University Press, Oxford, 1973.
3. *Hintikka J., Sandu G.* On the Methodology of Linguistics: A Case Study. Basil Blackwell, Oxford, 1991.
4. *Thomason R.H.* Indeterminist Time and Truth-Value Gaps//Theoria. Vol.36, 1970, pp.264-281.
5. *Thomason R.H.* Combinations of Tense and Modality//Handbook of Philosophical Logic (D.Gabbay and F.Guenthner, eds.). Vol.2, 1984, D.Reidel, Dordrecht, pp.135-165.
6. *van Fraassen B.C.* Formal Semantics and Logic. Macmillan, New York, 1971.

В. Л. Васюков

РАЗВИВАЯ ТАРСКОГО: КОТОПОС ТЕОРИЙ[1]

Понятие теории может быть определено с помощью оператора присоединения следствий $Cn(\Gamma)=\{A:\Gamma\vdash A\}$, где Γ есть некоторое множество предложений, как $\Gamma=Cn(\Gamma)$. Альфред Тарский в [11] ввел понятие исчисления систем, представляющее собой алгебру Брауэра элементарных теорий. В статье данный результат расширен на случай теорий, сформулированных в разных языках. Показано, что категория подобных теорий является котопосом (топосом Брауэра), в то время как категория решеток одноязычных теорий представляет собой топос.

1. Введение

Согласно В. А. Смирнову [5, с. 7] синтаксис первопорядкового прикладного языка можно описать следующим образом.

Выражения первопорядкового прикладного языка строятся из нелогических (дескриптивных) и логических знаков. К нелогическим знакам относятся индивидные константы a_1, a_2, a_3, ... (множество индивидных констант обозначим как IND); функциональные константы $f^1{}_1$, $f^1{}_2$, ... ; $f^2{}_1$, $f^2{}_2$, ... (множество которых обозначим как FUNC); предикатные константы $p^1{}_1$, $p^1{}_2$, ... ; $p^2{}_1$, $p^2{}_2$, ... (множество которых обозначим как PRED). Верхний индекс функциональных и предикатных констант указывает их местность.

Объединение списков индивидных и функциональных констант IND$\cup$FUNC называется словарем нелогических (дескриптивных) терминов.

Логические знаки первопорядкового языка:
w, v, u, w_1, w_2, ... - счетное число свободных индивидных переменных (множество FVAR);
x, y, z, z_1, x_2, ... - счетное число связанных индивидных переменных (множество CVAR);
$\wedge$, $\vee$, $\supset$, $\neg$, ... - множество пропозициональных констант (PROP);
$\forall$, $\exists$, ... - множество кванторов (QUANT);
$=$, ... - множество знаков равенства (EQU);
вспомогательные знаки: *)*, *(*, *,*.

[1] Работа выполнена при поддержке Российского Фонда фундаментальных исследований, грант 93-06-10708.

Понятия терма и квазитерма определяются следующим образом (обозначая множество квазитермов как QTERM):

$$T ::= a_i \mid w \mid x \mid f(t_1,\ldots,t_n),$$

где $a_i \in$IND; $w \in$FVAR; $x \in$CVAR; $f \in$FUNC; $T, t_1,\ldots,t_n \in$QTERM.

Ничто другое не есть квазитерм.

Терм есть квазитерм, в который не входят связанные индивидные переменные.

Понятие квазиформулы можно определить следующим образом (обозначая множество квазиформул как QFORM):

$$F ::= p^k(t_1,\ldots,t_k) \mid t_1 = t_2 \mid \oplus A \mid A \otimes B \mid QxA,$$

где $t_1,\ldots,t_n \in$QTERM; $p^k \in$PRED; $= \in$EQU; $F, A, B \in$QFORM; $\oplus, \otimes \in$PROP (унарная и бинарная константы); $x \in$CVAR; $Q \in$QUANT.

Обычным образом определяем понятия "свободная переменная входит в квазиформулу" и "связанная переменная имеет свободное (связанное) вхождение в квазиформулу".

Формула есть квазиформула без вхождений свободных переменных.

Предложение есть формула без вхождений свободных переменных.

На этом описание синтаксиса первопорядкового языка можно закончить.

Для данного языка под теорией понимается множество предложений, замкнутое относительно выводимости, т. е. теория $(\Gamma) =_{def} \forall A(\Gamma \vdash A \Rightarrow A \in \Gamma)$. Такое понятие теории было впервые введено А.Тарским в 30-е годы.

Понятие теории можно ввести и иначе [5, с. 24], используя для этой цели операцию замыкания относительно следствий, определяемую следующим образом: $Cn(\Gamma) = \{A: \Gamma \in A\}$, где Γ есть множество предложений, а A - переменная, пробегающая по предложениям. Операция замыкания дает по любому множеству предложений класс всех его следствий.

Из определения операции замыкания Cn легко получить следующие свойства этой операции:

1) $\Gamma \subseteq Cn(\Gamma)$;
2) $Cn(Cn(\Gamma)) = Cn(\Gamma)$:
3) $\Gamma \subseteq \Delta \Rightarrow Cn(\Gamma) \subseteq Cn(\Delta)$;
4) для всякого предложения $A \subseteq Cn(\Gamma)$ существует такое конечное множество предложений $\Delta \subseteq \Gamma$, что $A \in Cn(\Delta)$.

Теперь нетрудно доказать, что Γ является теорией тогда и только тогда, когда $\Gamma = Cn(\Gamma)$.

Пересечение двух теорий $T1 \cap T2$ будет теорией, в то время как объединение двух теорий ею не будет. В этом случае прихо дится рассматривать операцию $T1 \nabla T2 = Cn(T1 \cup T2)$. Дополнение теории вводится с помощью операции $T^* = \bigcap_{A \in T} Cn(\neg A)$. В качестве наименьшей теории фигурирует $Cn(\varnothing)$ (т. е. соответствующее первопорядковое исчисление), а в качестве наибольшей $Cn(A \vee \neg A)$, совпадающая с классом всех предложений.

Как показал А.Тарский [11], класс теорий, сформулированных в одном и том же языке на базе классической логики, образует относительно $\cap, \nabla, {}^*, Cn(\varnothing), Cn(A \wedge \neg A)$ и теоретико-множественного включения $\subseteq$ брауэрову алгебру. Класс же конечно-аксиоматизированных теорий образует булеву алгебру [5, с. 34]. Действительно, каждую конечно-аксиоматизированную теорию можно описать с помощью одной-единственной аксиомы, являющейся конъюнкцией конечного множества формул. В этом случае дополнением теории $Cn(A)$ будет $Cn(\neg A)$, так как $\bigcap_{B \in Cn(A)} Cn(\neg B) = Cn(\neg A)$. Легко видеть также, что $Cn(A) \nabla Cn(B) = Cn(A \wedge B)$, и $Cn(A) \cap Cn(B) = Cn(A \vee B)$. Учитывая, что $Cn(A) \subseteq Cn(B)$ тогда и только тогда, когда $\vdash B \supset A$, легко доказать, что класс конечно-аксиоматизированных теорий образует булеву алгебру.

Но сравнивать можно не только теории, сформулированные в одном и том же языке. Можно сравнивать теории, сформулированные в языках с разными словарями. В этом случае говорят о дефинициальной эквивалентности, дефинициальной интерпретируемости, дефинициальной вложимости и т.д. В частности, говорят [5, с. 56], что теория $T1$ дефинициально эквивалентна теории $T2$ тогда и только тогда, когда существуют определения $DT2$ терминов теории $T2$ в терминах теории $T1$ и определения $DT1$ терминов теории $T1$ в терминах теории $T2$, таких, что $Cn(T1 \cup DT2)$ эквивалентна $Cn(T2 \cup DT1)$. Если $T1 \subseteq T2 \cup DT1$, то говорят, что $T1$ дефинициально интерпретируема в $T2$.

Согласно другому определению (см. [9, с. 449]), теория T является локально интерпретируемой в теории S (символически $T \leq S$) тогда и только тогда, когда каждая теорема T интерпретируема в S. Интерпретация может иметь параметры, переменные могут переводиться как k-ки переменных (в этом случае говорят о k-мерной интерпретации). Класс всех теорий T, таких, что $T \leq S$ и $S \leq T$, образует тип локальной интерпретируемости S, обозначаемый как $|S|$. Отсюда $T \in |S|$ тогда и только тогда, когда $T \leq S$ и $S \leq T$.

Как показал Я.Мыцельский [10], отношение $\leq$ детерминирует частичное упорядочение типов локальной интерпретируемости, которые образуют полную дистрибутивную решетку. Наибольший элемент ее есть тип противоречивых теорий, наименьший элемент представляет собой тип теорий, каждая теорема которых имеет одноточечную модель.

Наконец, можно сравнивать между собой теории, сформулированные в разных языках, т. е. с разными словарями нелогических терминов и построенными на базе различных логик. Например, М.Бандер [6] определяет отношение "слабее" между теориями, используя понятие дефинициальной эквивалентности и прямой эквивалентности (теории S и T прямо эквивалентны, если существует функция, отображающая примитивные понятия S в примитивные понятия T, а также термы и ппф теории S на термы и ппф теории T таким образом, что для любой $A^n{}_j$ - n-арной предикатной, функциональной или пропозициональной константы или квантора S и термов $t_1,...,t_n$ имеет место

$$f(A^n{}_i(t_1,...,t_n))=(A^n{}_i)(f(t_1),...,f(t_n))$$

и f должна отображать теоремы S на теоремы T). Теория S "слабее" некоторой теории T, если S эквивалентна собственной подтеории T (т.е. системе, чье множество теорем является собственным подмножеством множества теорем теории T).

Можно ли рассчитывать на получение результатов типа Тарского или Мыцельского в случае разноязыких теорий (т. е. образуют ли совокупности разноязыких теорий какую-либо структуру)? Главным препятствием здесь является то обстоятельство, что если в случае, рассмотренном Тарским, класс теорий упорядочен относительно $\subseteq$, а в случае, рассмотренном Мыцельским, мы получаем упорядоченность на классе типов локальной интерпретируемости, то в нашем случае ситуация сложнее: нетрудно привести примеры, когда существует несколько разных переводов одной теории в другую, и устранить эту "многозначность" не удастся и путем перехода к типам переводимости, поскольку очевидным образом для подобных типов тоже будут существовать несколько переводов. Следовательно, в общем случае класс разноязыких теорий решетки не образует.

Обойти эту трудность можно, как будет показано далее, прибегнув к теоретико-категорному подходу. В этом случае класс разноязыких теорий рассматривается как некоторая категория.

2. Система замыканий и категория Alg(L,LTH)

Чисто алгебраически операцию присоединения следствий можно описать следующим образом [7, с. 17]. Пусть S есть некоторое непустое множество. Отображение $Cn:2^S \to 2^S$ будет называться оператором присоединения следствий на S, если для всяких $X, Y \subseteq S$

(1) $X \subseteq Cn(X) = Cn(Cn(X))$;

(2) $X \subseteq Y \Rightarrow Cn(X) \subseteq Cn(Y)$.

Оператор присоединения следствий Cn называется финитным (или алгебраическим), если для каждого $X \subseteq S$

(3) $Cn(X) = \cup\{Cn(Y)$: $Y \subseteq X$, Y - конечно$\}$.

Говорят, что семейство $\mathcal{E}$ подмножеств непустого множества S представляет собой систему замыканий на S, если $\mathcal{E}$ замкнуто относительно пересечений, т.е. $\cap\mathcal{D} \in \mathcal{E}$, если $\mathcal{D} \subseteq \mathcal{E}$. Ясно, что $S \in \mathcal{E}$.

Теорема Мура. *a) Каждый оператор присоединения следствий Cn на S определяет систему замыканий на S:*

(4) $\mathcal{E}_{Cn} = \{X \subseteq S\colon Cn(X) = X\}$

b) Каждая система замыканий $\mathcal{E}$ на S определяет оператор присоединения следствий на S:

(5) $Cn_{\mathcal{E}}(X) = \cap\{Z \in \mathcal{E}\colon X \subseteq Z\}$ *для* $X \subseteq S$.

Поскольку (4) совпадает фактически с ранее приведенным определением теории, то теорема Мура устанавливает однозначное соответствие $Cn \to \mathcal{E}_{Cn}$ между оператором присоединения следствий и совокупностью теорий (S теперь является множеством предложений некоторого языка). Более того, $\mathcal{E}_{Cn_{\mathcal{E}}} = \mathcal{E}$ и $Cn_{\mathcal{E}_{Cn}} = Cn$.

Теорема Биркгофа-Тарского. *Каждая система замыканий $\mathcal{E}$ на S образует полную решетку по отношению включения, $\langle \mathcal{E}, \subseteq \rangle$, где объединение и пересечение определяются следующим образом:*

для $X_i \in \mathcal{E}$, $i \in I$

$$(6)\ \bigvee_{i\in I} X_i = Cn\Big(\bigcup_{i\in I} X_i\Big),\ \bigwedge_{i\in I} X_i = \bigcap_{i\in I} X_i,$$

в частности, $X \vee Y = Cn(X \cup Y)$, $X \wedge Y = X \cap Y$, *для* $X, Y \subseteq \mathcal{E}$.

Подобная решетка всегда имеет нулевой элемент $0 = Cn(\varnothing) = \cap\mathcal{E}$, и единичный элемент $1 = S = \cap\varnothing$.

Таким образом совокупность теорий, сформулированных в данном языке, будет представлять собой полную решетку относительно ранее упомянутых операций Тарского ∇ и $\cap$.

Исходя из приведенных результатов, можно рассмотреть класс **TH** решеток теорий, сформулированных в одном языке. Как известно [2, с. 298], если для произвольного класса $\mathcal{K}$ решеток обозначить через $\mathcal{H}(\mathcal{K})$, $\mathcal{S}(\mathcal{K})$ и $\mathcal{P}(\mathcal{K})$ соответственно класс всех гомоморфных образов, подрешеток и прямых произведений решеток из класса $\mathcal{K}$, то имеет место следующий результат.

Теорема Тарского. *Для произвольного класса* $\mathcal{K}$ *решеток класс* $\mathbf{HSP}(\mathcal{K})$ *является наименьшим многообразием, содержащим класс* $\mathcal{K}$.

Таким образом, класс $\mathbf{HSP}$(**ТН**) будет представлять собой наименьшее многообразие, содержащее класс **ТН** всех решеток разноязыких теорий. В то же время $\mathbf{HSP}$(**ТН**) можно рассматривать как категорию **LTH**, объектами которой являются все решетки теорий (и подтеорий), а в роли морфизмов выступают гомоморфизмы решеток теорий.

Нетрудно убедиться, что прямые произведения решеток теорий категорно представляют собой прямые произведения в категории **LTH** (напомним в связи с этим определение прямого произведения решеток [2, с. 43]: если $(L_i)_{i\in I}$ есть произвольное семейство решеток, то прямое произведение $\prod\limits_{i\in I} L_i$ представляет собой множество всех функций $f{:}I\to\cup(L_i)_{i\in I}$, таких, что $f(i)\in L_i$ для всех $i\in I$, $f\wedge g=h$ и $f\vee g=k$ означает, что $f(i)\wedge g(i)=h(i)$, $f(i)\vee g(i)=k(i)$ для всех $i\in I$).

Что касается копроизведений в **LTH**, то здесь в их роли выступают свободные копроизведения. Приведем их определение [2, с. 342].

Пусть $\mathcal{K}$ - некоторое многообразие решеток и пусть $L, L_i\in\mathcal{K}$ для $i\in I$. Решетка L называется $\mathcal{K}$-свободным произведением решеток $L_i (i\in I)$, если она удовлетворяет следующим условиям:

(i) каждая решетка L_i является подрешеткой в L и $L_i\cap L_j=\varnothing$ для всех $i,j\in I, i\neq j$;

(ii) решетка L порождается объединением $\cup\{L_i{:}\ i\in I\}$;

(iii) для любой решетки $A\in\mathcal{K}$ и любого семейства $\{\varphi_i{:}\ i\in I\}$ гомоморфизмов $\varphi_i : L_i\to A$ существует гомоморфизм $\varphi{:}L\to A$ ограничение которого на L_i совпадает с φ_i для любого $i\in I$.

Дизъюнктностью копроизведения $\bigcup\limits_{i\in I} A_i$ называется выполнение требований мономорфности канонических морфизмов $A_i\to\bigcup\limits_{i\in I} A_i$ и для каждого $i\neq j$, чтобы коамальгамой диаграммы

$$\begin{tikzcd} & A_i \arrow[d] \\ A_j \arrow[r] & \bigcup\limits_{i\in I} A_i \end{tikzcd}$$

был начальный объект 0. Но мономорфность в **LTH** следует из (i), а что касается коамальгамируемости, то она следует из того, что класс всех решеток обладает свойством слабой амальгамируемости [2, с. 326], когда слабая амальгамируемость понимается как "особый случай" свойства амальгамируемости, описываемый амальгамируемостью *V*-формации вида:

$$\begin{tikzcd}
& C & \\
B0 \arrow[ur, dotted, "\varphi_0\quad 1\text{-}1"] \arrow[dr, "1\text{-}1"'] & & B1 \arrow[ul, dotted, "1\text{-}1\quad \varphi_1"'] \arrow[dl, "1\text{-}1"] \\
& \varnothing &
\end{tikzcd}$$

В **LTH** же $\varnothing$ и является начальным элементом (пустая решетка).

Что касается универсальности копроизведений **LTH**, то достаточно взять в качестве копредела для любой V-формации прямое произведение решеток, чтобы убедиться в универсальности наших копроизведений. Далее, поскольку у нас начальный объект есть свободная решетка без образующих, т. е. пустое множество, то он унаследует свою точность от начального объекта категории множеств **Set**.

Воспользуемся теперь следующим определением.

Определение 2.1 [3, с. 290]. *Алгебраическая теория T есть категория, объектами которой являются натуральные числа $0,1,2,\ldots$ и которая для каждого n снабжена n-кой отображений*

$$proj_i: n \to 1,\ i=1,2,\ldots,n$$

позволяющей рассматривать n как n-кратное категорное произведение $1: n=1^n$.

Для каждой алгебраической теории отображение $n \to m$, имеющееся в ней, может быть описано m-кой отображений $n \to 1$, так как m есть m-кратное произведение 1, поэтому отображения $n \to 1$ называются n-арными операциями теории. Нетрудно теперь определить алгебраическую теорию L решеток, полагая $hom(n,m)=m$-ки решеточных полиномов от $X_1,\ldots,X_n$ с подстановкой полиномов в качестве композиции, а $proj_i$ будет как раз X_i, рассматриваемый в свою очередь как полином от переменных $X_1,\ldots,X_n$, $1 \le i \le n$.

Теперь естественным образом можно рассматривать категорию **L**-моделей в **LTH** как полную подкатегорию **Alg(L,LTH)** функторной категории **[L,LTH]**, объектами которой являются функторы, сохраняющие конечные произведения. С теоретико-категорной точки зрения **Alg(L,LTH)** и есть интересующее нас многообразие $\mathcal{LSP}(\mathcal{K})$, описывающее класс решеток теорий, а категория **L** описывает тождества, задающие данное эквациональное многообразие.

П. Джонстон [8] доказал следующую теорему:

Пусть T будет невырожденной алгебраической теорией. Категория **T-Alg** T-моделей будет топосом тогда и только тогда, когда выполняются следующие два условия:

(i) T не имеет псевдо-констант;

(ii) каждая операция из T является достаточно унарной.

Было бы заманчиво применить результат Джонстона к **Alg(L,LTH)**, т. е. утверждать, что **Alg(L,LTH)** является топосом. Однако его T-модели носят сугубо теоретико-множественный характер, в том смысле, что категория T-моделей есть полная подкатегория **Alg(T,Set)** функторной категории **[T,Set]**. Поэтому, к сожалению, прямое использование данной теоремы представляется невозможным и получение аналогичного результата для **Alg(L,LTH)** остается открытым вопросом.

3. Категория элементарных теорий

Итак, согласно результату предыдущего параграфа, мы можем говорить о разноязыких теориях в рамках категории **Alg(L,LTH)**. Однако недостаток подобного описания в том, что при этом на самом деле речь идет не о самих теориях, а лишь о решетках одноязыковых теорий. Чтобы преодолеть этот недостаток, нам следует рассмотреть категорию, объектами которой являются сами разноязыкие теории. Описать морфизмы в подобной категории можно с помощью следующего понятия перевода.

Пусть $T1$ и $T2$ - элементарные теории, сформулированные соответственно в языках $L1$ и $L2$ с соответствующими логиками. Пусть φ - рекурсивная функция, сопоставляющая формуле языка $L1$ формулу языка $L2$. Согласно [5, с. 107], функцию φ будем называть переводом теории $T1$ в теорию $T2$, если и только если выполнено условие $A \in T1 \rightarrow \varphi(A) \in T2$. В случае, когда $T1=Cn_1(\varnothing)$ и $T2=Cn_2(\varnothing)$, то говорят о переводе φ логики (логического исчисления) $Cn_1(\varnothing)$ в логику (логическое исчисление) $Cn_2(\varnothing)$.

Нетрудно убедиться, что переводы можно рассматривать в качестве морфизмов некоторой категории **Th**, объекты которой есть элементарные теории, сформулированные в различных языках и основанные на различных логических исчислениях. Действительно, поскольку перевод представляет собой функцию, то композиция переводов определяется просто композицией функций, а тождественный морфизм (т. е. тривиальный перевод теории в себя же) будет представлять собой тождественную функцию.

Сравнивая между собой категории **Alg(L,LTH)** и **Th**, легко предположить, что в отличие от **Alg(L,LTH)**, имеющей ярко выраженный алгебраический характер, все понятия которой формулируются на алгебраическом языке, категория **Th** по своей структуре и природе основных понятий будет близка к категории множеств **Set**. Вдобавок **Th** не будет представлять собой категорию предпорядка ввиду того, что легко можно привести примеры, когда существует несколько переводов одной теории в другую, т.е. класс разноязыких теорий по отношению к переводам решетку не образует.

В качестве инициального объекта категории **Th** очевидным образом может служить категория, сформулированная в языке с пустым словарем (т.е. IND=FUNC=PRED=$\varnothing$) и с пустым множеством логических связок (т. е. PROP=QUANT=EQ=$\varnothing$). Фактически подобная теория соответствует начальному объекту $\varnothing$ категории **Set**.

Копроизведения в категории **Th** можно получить, рассматривая объединение двух теорий *T1* и *T2* как теорию, сформулированную в языке, представляющим собой объединение двух языков, когда словарь языка L_{T1+T2} представляет собой множество (IND1$\cup$IND2)$\cup$(FUNC1$\cup$FUNC2)$\cup$(PRED1$\cup$ $\cup$PRED2), а множество логических связок есть (PROP1$\cup$ $\cup$PROP2)$\cup$QUANT1$\cup$QUANT2)$\cup$(EQ1$\cup$EQ2). Подобная теория *T1+T2* в языке L_{T1+T2} должна определяться соответствующей операцией присоединения следствий Cn_{1+2} в L_{T1+T2} как $Cn_{1+2}(T1\cup T2)$, поскольку, как мы знаем, объединение теорий еще не является теорией, а *T1* и *T2* в этом случае уже рассматриваются как теории в языке L_{T1+T2}. Что касается Cn_{1+2}, то подобная операция присоединения следствий не будет представлять собой просто "механическое" объединение операций Cn_1 и Cn_2, но должна учитывать объединение словарей и множества логических связок, что приводит к тому, что в $Cn_{1+2}(T)=\{A:\Gamma\vdash A\}$ среди предложений из Γ будут предложения, сформулированные как в языке L_{T1}, так и в языке L_{T2}, т.е. в *T1+T2* будут встречаться "смешанные" предложения.

В диаграмме, определяющей копроизведения *T1+T2* в **Th**,

$$\begin{tikzcd}
T1 \arrow[r, "i_{T1}"] \arrow[dr, "\varphi"'] & Cn_{1+2}(T1 \cup T2) \arrow[d, "{[\varphi,\psi]}"] & T2 \arrow[l, "i_{T2}"'] \arrow[dl, "\psi"] \\
& T3 &
\end{tikzcd}$$

где $T3$ - некоторая произвольная теория, инъекциями служат переводы $i_{Tk}: Tk \to Cn_k(Tk) \subseteq Cn_{1+2}(T1 \cup T2)$ $(k=1,2)$, но при этом $Cn_1(T1) \cap Cn_2(T2) = \varnothing$, ибо иначе нам не удастся выполнить требование единственности стрелки $[\varphi, \psi]$. Эта стрелка представляет собой перевод - объединение переводов φ и ψ - в том смысле, что $[\varphi, \psi]$ должен быть сконструирован так, чтобы совпадать с $\varphi(T1)$ и $\psi(T2)$ на $[\varphi, \psi](Cn_{1+2}(T1 \cup T2))$.

Чтобы определить произведение в категории **Th**, можно было бы попробовать, следуя Тарскому в случае теорий в одном языке, рассмотреть пересечение двух теорий $T1$ и $T2$ как теорию, сформулированную в языке, представляющем собой пересечение двух языков, когда словарь языка $L_{T1 \cup T2}$ представляет собой множество $(IND1 \cap IND2) \cup (FUNC1 \cap FUNC2) \cup$ $\cup (PRED1 \cap PRED2)$, а множество логических связок есть множество $(PROP1 \cap PROP2) \cup (QUANT1 \cap QUANT2) \cup (EQ1 \cap EQ2)$. Однако в общем случае и словари и множества логических связок у таких теорий будут пусты. Конечно, можно попытаться обойти эту трудность, постулировав, что $T1 \cap T2 = 0$, где 0 - пустая теория (наш инициальный объект). Но тогда возникают дополнительные трудности. В случае непустоты всех этих пересечений (или хотя бы не всех) теория $T1 \cap T2$ должна была бы определять диаграмму

$$\begin{tikzcd}
& T3 \arrow[dl, "\varphi"'] \arrow[d, "<\varphi,\psi>"] \arrow[dr, "\psi"] & \\
T1 & T1 \cap T2 \arrow[l, "p1"'] \arrow[r, "p2"] & T2
\end{tikzcd}$$

Но ее невыполнимость обусловлена тем, что восстановить φ или ψ явно не удастся.

Подобный результат можно было бы сразу предвидеть в силу подобия **Th** и **Set**. По этой же причине сформулируем произведение $T1\times T2$ двух теорий $T1$ и $T2$ как теорию, сформулированную в языке L_{T1+T2} со словарем (IND1×IND2)∪∪(FUNC1×FUNC2)∪(PRED1×PRED2) и множеством логических связок (PROP1×PROP2)∪(QUANT1×QUANT2)∪∪(EQ1×EQ2). Операцию присоединения следствий для теории $T1\times T2$ определяем как $Cn_{1+2}(\Gamma)=\{A:\Gamma\vdash_{1,2}A\}$, где отношение выводимости $\vdash_{1,2}$ определяется следующим образом: $\vdash_{1,2}A$ тогда и только тогда, когда $\Gamma=(\alpha_i\times\beta_i)_{i\in I}$ и $A=(\alpha',\beta')$ и имеет место $(\alpha_i)_{i\in I}\vdash_{1,2}\alpha'$, $(\beta_i)_{i\in I}\vdash_{1,2}\beta'$. Нетрудно убедиться, что подобный синтаксический аналог метода умножения истинностных матриц Яськовского действительно определяет $Cn_{1\times 2}$ как операцию присоединения следствий. Теперь на диаграмме

$$\begin{tikzcd}
 & T3 \arrow[dl, "\varphi"'] \arrow[d, "<\varphi,\psi>"] \arrow[dr, "\psi"] & \\
T1 & T1\times T2 \arrow[l, "p_1"'] \arrow[r, "p_2"] & T2
\end{tikzcd}$$

проекции $p_i:T1\times T2\to T_i$ $(i=1,2)$ представляют собой переводы, задаваемые равенствами

$$p_1(<A,B>)=A; \qquad p_2(<A,B>)=B;$$

где $A\in T1$, $B\in T2$. Перевод же $<\varphi,\psi>$ очевидным образом детерминирован как φ, так и ψ, и единственен.

Эксплуатируя дальше близость **Th** и **Set**, мы должны теперь взять в качестве терминального объекта Th одноэлементное множество=теорию с одноэлементным словарем и пустым множеством логических символов. Очевидно, что в качестве одноэлементного множества должно выступать множество IND (и FUNC=PRED=∅), и ясно, что этот выбор делается лишь с точностью до изоморфизма.

Лемма 3.1. *Категория **Th** является конечно биполной.*

Набросок доказательства. Чтобы получить конечную полноту, следует взять в качестве обратных образов, как и в **Set**, подтеорию в произведении двух теорий, поскольку, согласно [1, с. 82], если категория имеет терминальный объект и в ней для любой пары стрелок с общим концом существует обратный образ, то она конечно полна.

Для получения конечной кополноты выбираем в качестве амальгамы двух теорий теорию, получающуюся, как и в **Set**, как коуравнитель пары композиций

$$T1 \xrightarrow{\varphi} T2 \xhookrightarrow{in_{T2}} T2+T3 \quad \text{и} \quad T1 \xrightarrow{\psi} T3 \xhookrightarrow{in_{T3}} T2+T3$$

и используем двойственную теорему из [1, с. 82]. ■

Здесь и в дальнейшем ■ означает конец доказательства.

4. Коэкспоненцирование и биэкспоненцирование

Каждая аналогия имеет свои пределы: если мы теперь попробуем, основываясь на сходстве категорий **Set** и **Th**, сконструировать экспоненциал, то здесь нас ждет явная неудача. Неясно, что можно понимать под теорией всех переводов из одной теории в другую, в отличие от множества всех переводов. Таким образом, **Th** экспоненцирования не допускает. Однако существует еще одна возможность.

Как известно [1, с. 83], категория $\mathcal{E}$ допускает экспоненцирование, если в ней существует произведение любых двух объектов и если для любых двух объектов $a,b\in\mathcal{E}$ существует $\mathcal{E}$-объект b^a, называемый экспоненциалом, и $\mathcal{E}$-стрелка $ev{:}b^a\times a\to b$, называемая стрелкой значения, такие, что для любых $\mathcal{E}$-объекта c и $\mathcal{E}$-стрелки $g{:}c\times a\to b$ существует единственная $\mathcal{E}$-стрелка $g^\wedge{:}c\to b^a$, для которой диаграмма

$$\begin{tikzcd}
b^a\times a \arrow[dr, "ev"] & \\
 & b \\
c\times a \arrow[uu, "g^\wedge\times 1_a"] \arrow[ur, "g"'] &
\end{tikzcd}$$

коммутативна, т. е. $ev\circ(g^\wedge\times 1_a)=g$.

Рассмотрим теперь дуальную к данной диаграмму

$$\begin{tikzcd}
{}^a b+a \arrow[dd, "g^\sim+1_a"'] & \\
 & b \arrow[ul, "ev^o"'] \arrow[dl, "g"] \\
c+a &
\end{tikzcd}$$

и будем говорить, что категория $\mathcal{E}$ допускает коэкспоненцирование, если в ней существует сумма двух объектов и если для любых двух объектов $a,b\in\mathcal{E}$ существует $\mathcal{E}$-объект ${}^a b$, называемый коэкспоненциалом, и $\mathcal{E}$-стрелка $ev^o{:}b\to {}^a b+a$, называемая стрелкой кзначения, такие, что для любых $\mathcal{E}$-объекта c и $\mathcal{E}$-

стрелки $g{:}b{\to}c{+}a$ существует единственная $\mathcal{E}$-стрелка, $g{:}^{a}b{\to}c$ для которой наша диаграмма коммутирует, т.е. $(g^{\sim}+1_a)^{\circ}ev^{o}=g$.

В качестве примера категории, допускающей экспоненцирование, можно рассмотреть категорно алгебру Гейтинга, где экспоненциалом является импликация Гейтинга $a{\Rightarrow}b$, представляющая собой псевдодополнение к a относительно b (см. [1, с. 199]). В качестве же примера категории, допускающей коэкспоненцирование, можно рассмотреть категорно алгебру Брауэра, двойственную алгебре Гейтинга, где коэкспоненциалом является импликация Брауэра $a{\Leftarrow}b$, представляющая собой псевдоразность элементов b и a (см. [4, с. 72]). В алгебре Брауэра коммутативность диаграммы коэкспоненцирования следует из того, что $\Leftarrow$ представляет собой корезидуал относительно решеточной дизъюнкции, т.е. имеет место условие $y\leq x\vee a$ тогда и только тогда, когда $y{\Leftarrow}a\leq x$.

Наконец, в качестве примера категории, допускающей одновременно экпоненцирование и коэкспоненцирование, можно категорно рассмотреть так называемую H-B алгебру (алгебру Гейтинга-Брауэра), представляющую собой алгебру Гейтинга, к которой добавлена импликация Брауэра.

Поскольку конечно полные категории, допускающие экспоненцирование, называются декартово замкнутыми категориями, то дуально будем называть конечно кополные категории, допускающие коэкспоненцирование, декартово козамкнутыми категориями.

Напомним, что согласно результату Тарского [11] класс теорий, сформулированных в одном языке на базе классической логики, образует относительно $\cap, \nabla, {}^{*}, Cn(\varnothing), Cn(A\vee\neg A)$ и теоретико-множественного включения алгебру Брауэра. Тогда, как нетрудно убедиться, категорно исчисление систем Тарского будет в силу вышесказанного представлять собой декартово козамкнутую категорию.

Предложение 4.1. ***Set*** *является декартово "квази"-бизамкнутой.*

Доказательство. Рассмотрим в качестве коэкспоненциала ^{a}b нашей диаграммы такой наименьший подобъект объекта b (отождествляя стрелку вложения с ее областью определения), при котором мы получаем $^{a}b+a\cong b$. Тем самым мы определяем и стрелку кооценивания $ev^{o}{:}b{\to}{}^{a}b+a$. Теперь нетрудно видеть, что стрелка $g^{\sim}{:}\ {}^{a}b{\to}c$ будет единственным образом замыкать диаграмму, ибо она фиксирует тот "остаток", который не g отображается в a. Отсюда любой $x{\in}b$, если он не попадает в $g(x){\in}a$, будет "пропускаться" через ^{a}b. В случае же, если b вложима в a, т.е. существует built монострелка $f{:}b{\rightarrowtail}a$, то мы выбираем b в качестве ^{a}b и ev^{o} в качестве инъекции $i_b{:}b{\to}b{+}a$.

Проблема сейчас заключается в том, что только лишь стрелка $\bar{g}: {}^{a}b+a \to c$ делает нашу диаграмму коэкспоненцирования коммутативной, а не стрелка $g^{\sim}: {}^{a}b \to c$. Таким образом, мы фактически получили "квази"-коэкспоненцирование с единственным образом определенной стрелкой $\bar{g}$ для любой стрелки g. И наша "квази"-бизамкнутость существует благодаря "квази"-козамкнутости, так как **Set** декартово замкнута (вводя термин бизамкнутость по аналогии с биполнотой). ■

Вернемся теперь к категории **Th**. Рассмотрим следующую диаграмму:

$$\begin{tikzcd}
{}^{T2}T1+T2 \arrow[d, "g^{\sim}+1_{T2}"'] & T1 \arrow[l, "ev^{o}"'] \arrow[dl, "g"] \\
T3+T2 &
\end{tikzcd}$$

Здесь коэкспоненциал ${}^{T2}T1$ можно определить как псевдоразность элементов $T2$ и $T1$ в решетке теорий в языке L_{T1+T2} или иначе как $\cup$-дополнение элемента $T2$ в решетке $\mathcal{E}_{T1\cup T2}$, т.е. как наименьшая теория $T0$ со свойством $Cn(T2\cup T0)=Cn(T2\cup T1)$ (см. [4, с. 72]). Если такой теории не существует, то тогда ${}^{T2}T1=T1$. Стрелка ev^{o} будет детерминирована вложением ${}^{T2}T1$, а стрелка $g^{\sim}:{}^{T2}T1 \to T3$ единственным образом замыкает диаграмму.

Отсюда мы получаем, что категория **Th** является декартово козамкнутой категорией. Но в отличие от **Set** здесь нет бизамкнутости, поскольку в **Th**, как мы уже показывали, нет экспоненцирования.

5. Котопос элементарных теорий

Займемся теперь вопросом классификации подобъектов **Th**. Вновь, следуя аналогии с **Set**, мы определяем как подобъект некоторой теории $T0$ инъективный перевод $f:T1 \to T0$ некоторой теории $T1$ в $T0$. В силу того, что любая элементарная теория T может рассматриваться как подрешетка всех теорий $X \subseteq T$ решетки теорий $\langle \mathcal{E}, \subseteq \rangle$ в данном языке, определим на множестве подобъектов отношение включения как $f \subseteq g$ тогда и только тогда, когда коммутативна диаграмма

$$\begin{tikzcd}
T1 \arrow[r, "g"] & T0 \\
T2 \arrow[u, "h"] \arrow[ur, tail, "f"'] &
\end{tikzcd}$$

Обычным образом определяя изоморфные подобъекты $f \cong g$ и классы эквивалентности $[f]=\{g: f \cong g\}$, мы получаем решетку $Sub(T, \subseteq)$ всех подобъектов теории T, выбирая $f \cap g$ как стрелку из пересечения $T1 \cap T2$ в пересечение результатов переводов $f(T1) \cap f(T2)$ в решетке подтеорий T, а $f \cup g$ из диаграммы ее эпи-моно-разложений

$$\begin{tikzcd}
T1+T2 \arrow[r, "{[f,g]}"] \arrow[dr, "{[f,g]^*}"'] & T \\
& Cn(T1+T2) \arrow[u, "f \cup g"']
\end{tikzcd}$$

когда $f \cup g$ есть перевод (даже не дизъюнктивных теорий) в объединение результатов переводов в решетке подтеорий T.

Наконец, в качестве классификатора подобъектов нам нужна двухэлементная теория как эквивалент двухэлементного множества в категории **Set**. Выбирая с точностью до изоморфизма в качестве представителя этих теорий (например, теорию с двумя функциональными нульарными константами $0, 1$ и пустыми множествами IND,PRED,PROP,QUANT,EQ) некоторую теорию Ω, мы рассматриваем классифицирование подобъектов в виде

$$\begin{tikzcd}
T1 \arrow[r, tail, "f"] \arrow[d, "!"'] & T2 \arrow[d, "\chi_f"] \\
1 \arrow[r, "true"'] & \Omega
\end{tikzcd}$$

где χ_f будет стирающим переводом, ставящим в соответствие каждому результату перевода f константу 1 теории Ω, и декартовость квадрата очевидна.

Таким образом, если суммировать все проделанные построения, то мы получаем следующую теорему.

Теорема 5.1. *Категория* **Th** *является котопосом.*
Доказательство. Все наши построения (с заменой экспоненцирования на коэкспоненцирование) отвечают определению элементарного топоса из [1, с. 97].■

Сам термин "котопос" вызван к жизни кодекартовой замкнутостью **Th**, хотя **Th** скорее следовало бы назвать топосом Брауэра, учитывая, что речь идет о дуальности только лишь при построении диаграммы экспоненцирования. Существенно, что в некотором смысле подобный результат можно рассматривать как категорное обобщение результата Тарского: там исчисление систем было получено как алгебра Брауэра одноязычных теорий, а здесь мы получили топос Брауэра разноязычных теорий.

И, наконец, учитывая предложение 4.1, легко убедиться в справедливости следующего предложения:

Предложение 5.2. ***Set*** *является квазибитопосом.*
Доказательство. Следует из декартовой бизамкнутости **Set**. Сам термин вытекает из определений котопоса и декартовой "квази"-бизамкнутости". ■

ЛИТЕРАТУРА

1. *Р.Гольдблатт*. Топосы. Категорный анализ логики. М., 1983.
2. *Г.Гретцер*. Общая теория решеток. М., 1982.
3. *А.Кок, Г.Э.Рейес*. Доктрины в категорной логике// Справочная книга по математической логике. Часть 1. Теория моделей. М., 1982. - с.289-319.
4. *Е.Расева, Р.Сикорский*. Математика метаматематики. М., 1972.
5. *В.А.Смирнов*. Логические методы анализа научного знания. М., 1987.
6. *M.W.Bunder*. Order of strength relations between formal systems with applications to mathematics // J. Non-Classic Log., v.5, N 1, 1988. pp.5-20.
7. *W.Dzik*. On the content of lattices of logics. Part 1 //Rep.Math.Log., N 13, 1981, pp.17-28.
8. *P.T.Johnstone*. When is a variety a topos? // Algebra Universalis, 21 (1985), pp.198-212.
9. *J.Krajicek*. Some theorems on the lattice of local interpretability types// Zeitschr. Math. Log. Grundl. Math., Bd.31, N 5, 1985, S.449-460.
10. *J.Mycielski*. A lattice of interpretability types of theories // J. Symb. Log., 42(1977), pp.297-305.
11. *A.Tarski*. Foundations of the calculus of systems // Logic, semantics, metamathematics. Oxford, 1956.

А.С.Карпенко

ШТРИХ ШЕФФЕРА ДЛЯ ПРОСТЫХ ЧИСЕЛ

В данной работе построена такая функция $x \to^{s'} y$, которая является штрихом Шеффера для многозначной логики Лукасевича $\mathbf{L}_{n+1}$ тогда и только тогда, когда $n\geq3$ есть простое число. При доказательстве этого утверждения появляется формула, в которую функция $x \to^{s'} y$ входит 1 024 612 088 раз. В связи с этим обсуждаются некоторые особенности распределения простых чисел в натуральном ряду. В последнем разделе определяется закон порождения простых чисел. В Приложении дается представление простых чисел в виде корневых деревьев.

1. Предисловие

Хотя многозначная логика Лукасевича $\mathbf{L}_{n+1}$ ($n\geq2$, $n\in N$) [25] появилась в результате философских размышлений о свободе воли и необходимости (см.[5]), на самом деле оказалось, что она имеет чисто теоретико-числовую природу, а именно: множество функций матричной логики $\mathbf{L}_{n+1}$ является функционально предполным тогда и только тогда (т.т.т.), когда n есть простое число [1]. Таким образом, дается новое определение понятия простого числа.

Характеризация простых чисел определенными классами функций была продолжена автором в [3], где были сформулированы две теоремы, первая из которых утверждает наличие такой матричной логики $\mathbf{K}_{n+1}$, которая имеет класс тавтологий т.т.т., когда n есть простое число. Вторая теорема утверждает, что для случая, когда n есть простое число, $\mathbf{K}_{n+1}$ по своим функциональным свойствам есть не что иное, как многозначная логика Лукасевича $\mathbf{L}_{n+1}$. Подробное доказательство обеих теорем дано в [4] и [22]. В итоге мы имеем, что n является простым числом т.т.т., когда $\mathbf{K}_{n+1} = \mathbf{L}_{n+1}$. В этих работах также ставится вопрос о нахождении штриха Шеффера для логики $\mathbf{K}_{n+1}$.

Настоящая работа, краткое резюме которой опубликовано в [6] и [23], в основном посвящена именно этому вопросу. Построен такой штрих Шеффера $x \to^{s'} y$ для $\mathbf{K}_{n+1}$, который имеет место т.т.т., когда $n\geq3$ есть простое число. В этом смысле функция $x \to^{s'} y$ есть штрих Шеффера для простых чисел. Поскольку $\mathbf{K}_{n+1} = \mathbf{L}_{n+1}$ т.т.т., когда n есть простое число, то для этого случая функция $x \to^{s'} y$ есть штрих Шеффера для $\mathbf{L}_{n+1}$. При непосредственном доказательстве последнего появляется формула, в которую штрих Шеффера $x \to^{s'} y$ входит 1 024 612 088 раз. Однако при некоторых ограничениях при определении исходной функции $x \to^{K} y$ результат значительно упрощается. Именно с этого упрощенного варианта и начинается исследование штриха Шеффера для $\mathbf{K}_{n+1}$. Поскольку доказанная эквивалентность между различными множествами функций имеет место только для случая, когда $n \geq 3$ есть простое число, то отсюда делается вывод, что формулы, доказывающие эти эквивалентности, как бы косвенным образом отражают закон распределения простых чисел в натуральном ряду. При этом, чем проще определение простого числа, тем более сложен их закон распределения. В последнем разделе статьи задается закон порождения простых чисел. Это достигается за счет итерации исходной формулы, которая определяет импликацию Лукасевича для первых пяти нечетных простых чисел.

Статья заканчивается **Приложением**, где дается разбиение множества натуральных чисел на классы эквивалентности, притом такое, что в каждом классе имеется одно и только одно простое число. Оказалось, что эти классы имеют определенную структуру, а именно каждое простое число представимо в виде корневого дерева. Дана идея алгоритма построения таких деревьев, реализованного на компьютере В.И.Шалаком. Поскольку каждому корневому дереву соответствует *p*-абелева группа [18], то отсюда мы приходим к идее новой математики, где вместо чисел используются определенные алгебраические структуры.

2. Логическая n+1-значная матрица Лукасевича

Лукасевич в [24] (см. в особенности [25]) вводит понятие логической n+1-значной матрицы $\mathfrak{M}^L{}_{n+1}$, которая является обобщением построенной им в 1920 г. трехзначной матричной логики.

Под n+1-значной матрицей Лукасевича $\mathfrak{M}^L{}_{n+1}$ будем понимать матрицу следующего вида:

$\mathfrak{M}^L{}_{n+1} = \langle M_{n+1}, \sim, \rightarrow, \{n\} \rangle$ $(n \geq 2, n \in N)$, где

$M_{n+1} = \{0, 1, 2, \ldots, n\}$,

$\{n\}$ - множество выделенных значений.

Функции $\sim x$ (отрицание) и $x \rightarrow y$ (импликация) определяются на множестве M_{n+1} следующим образом:

$\sim x = n-x$,

$x \rightarrow y = \min(n, n-x+y)$.

Функции $x \vee y$ (дизъюнкция) и $x \wedge y$ (конъюнкция) определяются через исходные:

$x \vee y = (x \rightarrow y) \rightarrow y = \max(x, y)$,

$x \wedge y = \sim(\sim x \vee \sim y) = \min(x, y)$.

Следующие два свойства исходных матричных функций особенно важны:

$x = \sim\sim x$,

$x \rightarrow y = \sim y \rightarrow \sim x$.

Множество всех суперпозиций функций $\sim x$ и $x \rightarrow y$ обозначим посредством L_{n+1}.

3. Функциональная полнота, предполнота и штрих Шеффера

Функциональные свойства $n+1$-значной логики определяются ее логической матрицей, которая есть не что иное, как некоторая универсальная алгебра. Понадобятся следующие определения.

Произвольная функция $f(x_1, ..., x_m)$ от любого конечного числа переменных, в которой областью определения каждой переменной и областью значения самой функции является множество $M_{n+1} = \{0,1,...,n\}$, называется $n+1$-значной функцией или функцией $n+1$-значной логики. Множество всех $n+1$-значных функций обозначим посредством $\mathbf{P}_{n+1}$; $\mathbf{P}_{n+1}$ есть множество всех функций, соответствующее $n+1$-значным логикам Поста [29]. Таким образом, $n+1$-значная логика Поста является функционально полной системой функций, а именно система функций $\mathfrak{B} = \{f_1, f_2, ..., f_k, ...\}$ из $\mathbf{P}_{n+1}$ называется *функционально полной*, если любая функция из $\mathbf{P}_{n+1}$ выразима посредством суперпозиций (Яблонский [12]) функций из системы $\mathfrak{B}$. Система функций $\mathfrak{B}$ называется *функционально предполной* в $\mathbf{P}_{n+1}$, если добавление к $\mathfrak{B}$ какой-либо функции f из $\mathbf{P}_{n+1}$, но не содержащейся в $\mathfrak{B}$, делает систему $\mathfrak{B}$ функционально полной. Наконец, пусть $\mathfrak{B}\subseteq\mathbf{P}_{n+1}$. Тогда функция f из $\mathbf{P}_{n+1}$ называется *штрихом Шеффера* (или единственным генератором) для $\mathfrak{B}$, если любая функция из $\mathfrak{B}$ выразима посредством конечного числа суперпозиций функции f.

Со свойством функциональной полноты связаны понятия замыкания и замкнутого множества функций, введенные А.В.Кузнецовым (см. С.А.Яновская [13,§13]). Пусть $\mathfrak{B}\subseteq\mathbf{P}_{n+1}$. Тогда множество всех функций, которые могут быть получены из функций системы $\mathfrak{B}$ с помощью операции суперпозиции, называется *замыканием* $\mathfrak{B}$ и обозначается $[\mathfrak{B}]$. Класс (множество) функций $\mathfrak{B}$ называется *функционально замкнутым*, если $[\mathfrak{B}] = \mathfrak{B}$, т.е. замкнутость класса функций обозначает собой сохранение при суперпозиции "наследственных" свойств этих функций.

В терминах замыкания можно дать другие, более строгие определения понятий полноты, предполноты и штриха Шеффера, эквивалентные исходным: $\mathfrak{B}$ - полная система функций, если $[\mathfrak{B}] = \mathbf{P}_{n+1}$; замкнутое множество функций $\mathfrak{B}$ называется предполным в $\mathbf{P}_{n+1}$, если $[\mathfrak{B}\cup\{f\}] = \mathbf{P}_{n+1}$, где $f\in\mathbf{P}_{n+1}$ и $f\notin\mathfrak{B}$. Пусть $\mathfrak{B} = \{f_1, f_2, ..., f_k, ...\}$ и $\mathfrak{B}\subseteq\mathbf{P}_{n+1}$. Тогда функция $f\in\mathbf{P}_{n+1}$ есть штрих Шеффера для $\mathfrak{B}$, если $[f] = \mathfrak{B}$. И.Розенберг приводит библиографию по функциям Шеффера включительно по 1975 г. (см. [33]).

Теория двухместных штрихов Шеффера для функционально полных $n+1$-значных логик и конструктивные правила их построения даны В.Пинкава [28]. Поскольку понятие простого числа тесно связано с понятием функциональной предполноты, то нас будет интересовать двухместный штрих Шеффера для функционально предполных $n+1$-значных логик.

Свойство функциональной предполноты играет важную роль при изучении вопросов полноты классов функций. Это видно из следующей теоремы: система $\mathfrak{B}$ функций n+1-значной логики полна т.т.т., когда она не содержится целиком ни в одном предполном классе. Именно в этом контексте изучались предполные классы функций для любого $n \geq 2$ Яблонским [12]. Им дано также описание всех 18 предполных классов функций в P_3. Особый интерес представляет для нас следующий класс функций. Пусть T_{n+1} обозначает множество всех функций из P_{n+1}, которые сохраняют 0 и n, т. е. $f(x_1, \ldots, x_m) \in T_{n+1}$ т.т.т., когда $f(x_1, \ldots, x_m) \in \{0,n\}$, где $x_i \in \{0,n\}$, $1 \leq i \leq m$. Из теоремы Яблонского о функционально предполных классах функций в n+1-значной логике следует, что данный класс функций T_{n+1} является предполным.

В [4] в явном виде определен класс функций T_{n+1}, а именно $[\sim x, x \to^T y] = T_{n+1}$, где

$$x \to^T y = \begin{cases} n-2, \text{ если } x=y \text{ и } x,y \in \{1, \ldots, n-2\} \\ x \to y, \text{ в остальных случаях.} \end{cases}$$

Более того, здесь же (с.180) для класса T_{n+1} определен штрих Шеффера.

4. Функциональные свойства класса функций L_{n+1}

В [8] В.К. Финн показал, что трехзначная логика Лукасевича является функционально предполной и при этом $L_3 = T_3$. Отсюда возникает вопрос о функциональных свойствах самого класса функций L_{n+1}. Ответ дан Финном в тезисах [9], а затем опубликовано подробное доказательство в совместной статье с Д.А.Бочваром [1].

Пусть $I_{ij}(x)$ есть функции, определяемые следующим образом:

$$I_{ij}(x) = \begin{cases} j, \text{ если } x=i \\ 0, \text{ если } x \neq i \quad (0<i,j<n). \end{cases}$$

Обозначим посредством I_{n+1} множество всех $I_{ij}(x)$-функций, определимых в T_{n+1}.

Лемма 1. *Множество функций L_{n+1} является функционально предполным в P_{n+1} т.т.т., когда все функци $I_{ij}(x)$, $1 \leq i,j \leq n-1$, принадлежат L_{n+1}. Причем, если L_{n+1} - предполное в P_{n+1} множество функций, то* $L_{n+1} = T_{n+1}$ [1, с.248-253].

Таким образом, ответственным за предполноту L_{n+1} в P_{n+1} является наличие в L_{n+1} множества функций I_{n+1}. Возникает вопрос: для каких n имеет место $I_{n+1} \subset L_{n+1}$, т. е. для каких n $L_{n+1} = T_{n+1}$?

Лемма 2. $I_{n+1} \subset L_{n+1}$ *т.т.т., когда n есть простое число* [1 ,с.255-276].

Из леммы 1 и леммы 2 получаем теорему 1, которая дает критерий функциональной предполноты множества функций L_{n+1}:

Теорема 1. $L_{n+1} = T_{n+1}$ *т.т.т., когда n есть простое число*[1].

В итоге мы имеем новое определение понятия простого числа: произвольное натуральное число $n \geq 2$, является простым т.т.т., когда множество всех функций L_{n+1}, соответствующее $n+1$-значным матричным логикам Лукасевича, является предполным множеством в P_{n+1}, а именно $L_{n+1} = T_{n+1}$.

5. Штрих Шеффера для L_{n+1}

М.Шеффер в 1913 г. находит такую двухместную функцию для классической пропозициональной логики, которая является единственным генератором для P_2. Обобщением результата Шеффера на любой $n+1$-значный случай является работа Д.Вебба [36], где штрих Шеффера задается следующим образом: $x|y = \max(x,y)+1 (\mathrm{mod}\ n)$. В другой работе Вебб [37] значительно упрощает доказательство того, что любая $n+1$-значная функция может быть определена единственной двухместной связкой. Для этого он явным образом определяет исходные функции $n+1$-значной логики Поста: отрицание и дизъюнкцию. Пост в свою очередь показал, что посредством его функций определима любая функция $n+1$-значной логики. Таким образом, в некотором смысле функция Вебба является также штрихом Шеффера для L_{n+1}, поскольку посредством его определимы исходные функции L_{n+1}. Другой штрих Шеффера для L_{n+1} был найден Дж.Мак-Кинси [27]:

$$Exy = CxC\{CNy\}yNCyN\{Cy\}Ny,$$

где C и N - импликация и отрицание в аннотации Лукасевича, а скобки указывают на n-1 вхождение заключенного в них выражения. Для единообразия обозначим функцию Exy как $x \rightarrow^{E} y$. Используя $J_i(x)$-функции[2], можно упростить определение $x \rightarrow^{E} y$:

$$x \rightarrow^{E} y = x \rightarrow (y \rightarrow J_1(y)) \rightarrow J_0(y)).$$

Для сравнения с импликацией Лукасевича $x \rightarrow y$ определим $x \rightarrow^{E} y$ следующим образом:

---

[1] См. также [10, с.10-15]. Краткое резюме на английском языке имеется в [16]. Заметим, что более чем через 10 лет подобный результат был переоткрыт Х.Хендри [19], а еще позже А.Урквартом [35, с.89].

[2] В [34] Б.Россер и А.Тюркетт показали, что для любого $n \geq 2$ и любого $i \in M_{n+1}$, $J_i(x) \in L_{n+1}$, где

$$J_i(x) = \begin{cases} n, \text{ если } x = i \\ 0, \text{ если } x \neq i \quad (0 \leq i,j \leq n). \end{cases}$$

$$x \rightarrow^{E} y = \begin{cases} x \rightarrow^{E} 0 = n \text{ и } x \rightarrow^{E} n = n\text{-}1 \text{ для всех } x \\ x \rightarrow y, \text{ в остальных случаях.} \end{cases}$$

Следуя Мак-Кинси, определим посредством $x \rightarrow^{E} y$ функции $\sim x$ и $x \rightarrow y$:

$$n = (x \rightarrow^{E} x) \rightarrow^{E} ((x \rightarrow^{E} x) \rightarrow^{E} (x \rightarrow^{E} x)),$$
$$\sim x = x \rightarrow^{E} n,$$
$$x \rightarrow y = x \rightarrow^{E} (n \rightarrow^{E} y).$$

В примечании на с. 849 Мак-Кинси показывает, что функция Вебба не может быть определена в терминах $\sim x$ и $x \rightarrow y$ за исключением случая, когда $n+1=2$. Таким образом, здесь впервые дано доказательство того, что множество функций L_{n+1} не является функционально полным ни для какого $n \geq 2$. На это же обращает внимание в рецензии Х.Карри [15]. Более того, Карри указывает на важное различие между результатами Вебба и Мак-Кинси, которое заключается в том, что функция Шеффера у Мак-Кинси сама определяется через исходные, а у Вебба нет. На это различие обращает внимание в своей рецензии также У.Куайн [30], назвав функцию Вебба "чуждой" (foreign) к L_{n+1}, хотя посредством функции Вебба исходные функции L_{n+1} определяются.

Учитывая замечание Куайна, Х.Хендри и Дж.Массей [20] предлагают назвать функцию f "настоящей" (indigenous) функцией Шеффера для $\mathfrak{B} \subseteq P_{n+1}$, если f есть штрих Шеффера для $\mathfrak{B}$ и в добавление к этому f определима посредством $\mathfrak{B}$. Нас будет интересовать именно такой штрих Шеффера.

Исследования штриха Шеффера для L_{n+1} работой Мак-Кинси не закончились. А.Роуз [31] обратил внимание, что функция $x \rightarrow^{E} y$ не является коммутативной, и предложил новое определение штриха Шеффера для L_{n+1}, которое значительно проще:

$$x \rightarrow^{D} y = x \rightarrow \sim y.$$

Однако новый штрих Шеффера не имеет места для случая, когда $n=3i$, поскольку i тогда является неподвижной точкой. Интересно, что точно такой же штрих Шеффера для L_{n+1} был построен Хендри и Массеем [20]. Наконец, в другой работе [32] (через шестнадцать лет) Роуз доопределяет функцию $x \rightarrow^{D} y$ таким образом, что она является штрихом Шеффера для любого множества L_{n+1}. Но теперь гораздо удобнее использовать функцию Мак-Кинси $x \rightarrow^{E} y$ в качестве штриха Шеффера для L_{n+1}.

Множество всех суперпозиций функции $x \rightarrow^{E} y$ обозначим посредством E_{n+1}. Таким образом, $E_{n+1} = L_{n+1}$. Наша основная задача теперь сводится к следующему: построить такую двухместную функцию f, которая есть штрих Шеффера для L_{n+1} т.т.т., когда n есть простое число.

6. Логическая матрица для простых чисел

Из теоремы 1 следует, что простые числа определяются посредством предполных множеств функций. Это наводит на мысль о построении такой логической матрицы, в которой определима константа n т.т.т., когда n есть простое число. В терминах логики это значит, что класс тавтологий в $n+1$-значной логике имеет место т.т.т., когда n есть простое число.

Определим матрицу $\mathfrak{M}^{K}{}_{n+1}$ следующим образом:

$$\mathfrak{M}^{K}{}_{n+1} = \langle M_{n+1}, \sim, \rightarrow^{K}, \{n\} \rangle \ (n \geq 3, n \in N).$$

Таким образом, матрица $\mathfrak{M}^{K}{}_{n+1}$ отличается от матрицы $\mathfrak{M}^{L}{}_{n+1}$ только определением функции $x \rightarrow^{K} y$:

$$x \rightarrow^{K} y = \begin{cases} \text{(i)} \ \ x, \text{ если } 0<x<y<n, (x,y) \neq 1 \text{ и } (x+y) \leq n \\ \text{(ii)} \ \ y, \text{ если } 0<x<y<n, (x,y) \neq 1 \text{ и } (x+y) > n \\ \text{(iii)} \ y, \text{ если } 0<x=y<n \\ \text{(iv)} \ \ x \rightarrow y \ \text{ в остальных случаях,} \end{cases}$$

где $(x,y) \neq 1$ обозначает, что x и y не являются взаимнопростыми числами, т. е. x и y имеют общий делитель, отличный от 1.

Множество всех суперпозиций функций $\sim x$ и $x \rightarrow^{K} y$ обозначим посредством $\mathbf{K}_{n+1}$.

В дальнейшем нам понадобятся следующие два свойства отношения делимости (сокращенно: с.о.д.):

I (с.о.д.). Если числа x и y делятся на z, то их сумма $x+y$ делится на z.

II (с.о.д.). Если числа x и y делятся на z, причем $x \geq y$, то и их разность $x-y$ делится на z.

Лемма 3. *Пусть n есть простое число. Тогда, если $x < \sim x$, то $x \rightarrow^{K} y = n$.*

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Сначала покажем, что $(x, n-x) = 1$. Допустим обратное, т. е. $(x, n-x) \neq 1$. Тогда $d|x$ и $d|n-x$, где d есть делитель x и n-x, отличный от 1. Тогда из I(с.о.д.) следует, что $d|(x+n-x)$, т. е. $d|n$. Но это противоречит условию, что n есть простое число. Таким образом, $(x, n-x) = 1$. Отсюда в силу пункта (iv) определения $x \rightarrow^{K} y$, $x \rightarrow^{K} \sim x = n$.

Лемма 4. *Для любого $n \geq 3$, n есть простое число т.т.т., когда $n \in \mathbf{K}_{n+1}$.*

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО.

1. *Достаточность*. Если n есть простое число, то $n \in \mathbf{K}_{n+1}$. Пусть n есть простое число. Тогда существует такая формула U:

$$\sim((x \rightarrow^{K} y) \rightarrow^{K} \sim(x \rightarrow^{K} y)) \rightarrow^{K} (\sim(x \rightarrow^{K} y) \rightarrow^{K} (x \rightarrow^{K} y)),$$

что $U = n$. Рассмотрим подформулы $U_1 = (x \rightarrow^{K} y) \rightarrow^{K} \sim(x \rightarrow^{K} y)$ и $U_2 =$

$\sim(x \to^K y) \to^K (x \to^K y)$. В силу леммы 3, если $x \to^K y < n/2$, то $U_1 = n$, и тогда $\sim U_1 = 0$. Отсюда в силу пункта (iv) определения $x \to^K y$, $\sim U_1 \to^K U_2 = n$, т. е. $U = n$. Если же $x \to^K y > n/2$, то $U_2 = n$. Отсюда, $\sim U_1 \to^K U_2 = n$, т. е. $U = n$.

2. *Необходимость*. Если $n \in K_{n+1}$, то n есть простое число. Докажем контрпозицию этого утверждения. Пусть n не есть простое число. Тогда n имеет делители (по крайней мере один), отличные от 1 и n. Пусть d есть один из таких фиксированных делителей. Посредством D обозначим множество элементов вида $m \cdot d$, где $m \in \{1, 2, ..., (n/d)-1\}$. Таким образом, D есть класс положительных чисел, сравнимых по модулю d, такой, что $m \cdot d \equiv 0 (\mathrm{mod}\ d)$. Покажем, что множество D замкнуто относительно $\sim x$ и $x \to^K y$.

Пусть $x \in D$, т. е. $x = m \cdot d$. Тогда $\sim x = n-(m \cdot d)$. Из II(с.о.д.) следует, что $d \mid n-(m \cdot d)$. Отсюда $\sim x \in D$.

Пусть $x, y \in D$ и $x = m_i \cdot d$, $y = m_j \cdot d$. Тогда $x \to^K y = m_i \cdot d \to^K m_j \cdot d$. Имеем два случая.

1) $m_i \cdot d \leq m_j \cdot d$. Из определения $x \to^K y$ следует, что $m_i \cdot d \to^K m_j \cdot d = m_i \cdot d$ или $m_i \cdot d \to^K m_j \cdot d = m_j \cdot d$. Отсюда, $x \to^K y \in D$.

2) $m_i \cdot d > m_j \cdot d$. Из определения $x \to^K y$ следует, что $m_i \cdot d \to^K m_j \cdot d = n - m_i \cdot d + m_j \cdot d$. Из II(с.о.д.) и I(с.о.д.) следует, что $d \mid (n - m_i \cdot d + m_j \cdot d)$. Отсюда, $x \to^K y \in D$.

Следовательно, если n не есть простое число, то не существует суперпозиции f(x) функций $\sim x$ и $x \to^K y$ такой, что $f(x) = n$.

Таким образом, лемма 4 дает новое определение простого числа. Введя обычным образом пропозициональный язык и функцию оценки на нем, получаем, что матричная логика K_{n+1} имеет класс тавтологий т.т.т., когда n есть простое число, т. е. каждое простое число определяется соответствующим классом тавтологий. В связи с этим возникает нетривиальный вопрос о функциональных свойствах K_{n+1}.

7. Функциональные свойства K_{n+1}

Лемма 5. *Для любого $n \geq 3$ такого, что n есть простое число*, $K_{n+1} = L_{n+1}$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО.

I. $L_{n+1} \subseteq K_{n+1}$.

(A) $x \to^1 y = \sim y \to^K \sim x$

(B) $x \to^S y = x \to^1 ((y \to^1 y) \to^1 \sim y)$

(C) $x \to^2 y = \sim y \to^S \sim x$

(D) $x \to^3 y = \sim((y \to^K x) \to^K \sim(y \to^K x)) \to^K (x \to^K y)$

(E) $x \vee^1 y = (x \to^3 y) \to^3 y$

(F) $x \to^4 y = ((x \to^K y) \to^2 (\sim y \to^K \sim x)) \vee^1 ((\sim y \to^K \sim x) \to^2 (x \to^K y)) = x \to y = \min(n, n-x+y)$.

Рассмотрим каждую из этих формул, выделяя при этом только те свойства, которые будут использоваться для определения $x \to y$.

(A) $x \to_1 y = \sim y \to_K \sim x$.

1. Пусть $y = \sim x$ и $x < \sim x$. Тогда $x \to_1 y = x \to_1 \sim x = \sim\sim x \to_K \sim x = x \to_K \sim x$. В силу леммы 3, $x \to_K \sim x = n$. Следовательно, $x \to_1 y = n$.

2. $0 < x = y < n$. Тогда $x \to_1 y = x \to_1 x = \sim x \to_K \sim x = \sim x$(iii).

3. $y = 0$. Тогда $x \to_1 0 = n \to_K \sim x = \sim x$ (iv).

4. $y = n$. Тогда $x \to_1 n = 0 \to_K \sim x = n$ (iv).

(B) $x \to_S y = x \to_1 ((y \to_1 y) \to_1 \sim y)$.

Обозначим $(y \to_1 y) \to_1 \sim y$ посредством Y.

(a) $y = 0$. Тогда $Y = (n \to_K n) \to_1 n = 0 \to_K 0 = n$.

Отсюда $x \to_S y = x \to_1 n = 0 \to_K \sim x = n$.

(b) $y = n$. Тогда $Y = (0 \to_K 0) \to_1 0 = n \to_K 0 = 0$.

Отсюда $x \to_S y = x \to_1 0 = n \to_K \sim x = \sim x$

(c) $0 < y < n$. Тогда $Y = (\sim y \to_K \sim y) \to_1 \sim y = \sim y \to_1 \sim y = y$ (A.2). Отсюда $x \to_S y = x \to_1 y = \sim y \to_K \sim x$. Заметим, если $x = n$, то $n \to_1 y = \sim y \to_K 0 = y$.

1. $x = y$.

1.1. $x = 0$. Тогда $x \to_S y = 0 \to_1 Y = \sim Y \to_K n = n$.

1.2. $x = n$. Тогда $x \to_S y = 0$ (b).

1.3. $0 < x < n$. Тогда $x \to_S y = x \to_1 x$ (c). Следовательно, $x \to_S y = \sim x \to_K \sim x = \sim x$.

2. $y = \sim x$, $\sim x < n$ и $x < \sim x$. Тогда $Y = \sim x$ (c).

Отсюда $x \to_S y = x \to_1 \sim x = n$ (A.2).

(C) $x \to_2 y = \sim y \to_S \sim x$.

1. $y = n$. Тогда $x \to_2 y = x \to_2 n = 0 \to_S \sim x = n$ (B.1.1).

2. $y = \sim x$ и $x < \sim x$. Тогда $x \to_2 y = x \to_2 \sim x = \sim\sim x \to_S \sim x = x \to_S \sim x = n$ (B.2).

3. $x = y$.

3.1. $x = 0$. Тогда $x \to_2 x = n \to_S n = 0$ (B.b).

3.2. $x = n$. Тогда $x \to_2 x = 0 \to_S 0 = n$ (B.a).

3.3. $0 < x < n$. Тогда $x \to_2 x = \sim x \to_S \sim x = \sim\sim x$ (B.1.3).

Отсюда $x \to_2 x = x$.

Таким образом, операция $x \to_2 y$ является идемпотентной, т. е. $x \to_2 x = x$ для всех x.

(D) $x \to_3 y = \sim((y \to_K x) \to_K \sim(y \to_K x)) \to_K (x \to_K y)$.

1. Пусть $x < y$ и $y = n$. Тогда $x \to_K y = n$(iv). Отсюда $x \to_3 y = x \to y$.

2. Пусть $x = y$. Имеем два случая.

2.1. $x < n/2$. Имеем два подслучая.

2.1.1. $x = 0$. Тогда в силу определения $x \to_K y$ (iv), $x \to_K y = n$. Отсюда, $x \to_3 y = x \to y$.

2.1.2. $x \neq 0$. Тогда $x \rightarrow^{3} y = \sim(x \rightarrow^{K} \sim x) \rightarrow^{K} \sim x$. В силу леммы 3, $x \rightarrow^{K} \sim x = n$. Отсюда $\sim(x \rightarrow^{K} \sim x) = 0$ и, следовательно, $x \rightarrow^{3} y = 0 \rightarrow^{K} x = n = x \rightarrow y$.

2.2. $x > n/2$.

2.2.1. $x=n$. Тогда $x \rightarrow^{K} y = n$. Отсюда $x \rightarrow^{3} y = n = x \rightarrow y$.

2.2.2. $x \neq n$. Тогда $x \rightarrow^{3} y = \sim(x \rightarrow^{K} \sim x) \rightarrow^{K} x = (n - (n - x + n - x)) \rightarrow^{K} x = (2x - n) \rightarrow^{K} x$. Покажем, что $((2x - n), x) = 1$. Допустим обратное, т. е. $d|(2x - n)$ и $d|x$, где $d \neq 1$. Заметим, что $(2x - n) < x$ для любого $x > n/2$. Тогда из II(с.о.д.) следует, что $d|(x - (2x - n))$, т. е. $d|(n - x)$. Поскольку $d|x$, то из I(с.о.д.) следует, что $d|(n - x + x)$, т. е. $d|n$, а это противоречит условию теоремы о том, что n есть простое число. Следовательно допущение неверно и в силу определения $x \rightarrow^{K} y$(iv), $\sim(x \rightarrow^{K} \sim x) \rightarrow^{K} x = n$. Отсюда $x \rightarrow^{3} y = x \rightarrow y$.

Таким образом, если $x=y$, то $x \rightarrow^{3} y = x \rightarrow y = n$ для всех x,y.

3. $x>y$ и $x=n$. Тогда $y \rightarrow^{K} x=n$ и $x \rightarrow^{K} y = y$.

Отсюда $x \rightarrow^{3} y = \sim(n \rightarrow^{K} 0) \rightarrow^{K} y = y = x \rightarrow y$.

(E) $x \vee^{1} y = (x \rightarrow^{3} y) \rightarrow^{3} y$.

Поскольку $x \vee^{1} y$ определяется аналогичным образом, как и дизъюнкция Лукасевича $x \vee y$, то для случаев, когда $x \rightarrow^{3} y = x \rightarrow y$, $x \vee^{1} y = x \vee y = \max(x,y)$:

1. $x<y$ и $y=n$. Тогда $x \vee^{1} y = n = x \vee y$.
2. $x=y$. Тогда $x \vee^{1} y = y = x \vee y$.
3. $x>y$ и $x=n$. Тогда $x \vee^{1} y = n = x \vee y$.

(F) $x \rightarrow^{4} y = ((x \rightarrow^{K} y) \rightarrow^{2} (\sim y \rightarrow^{K} \sim x)) \vee^{1} ((\sim y \rightarrow^{K} \sim x) \rightarrow^{2} (x \rightarrow^{K} y)) = x \rightarrow y = \min(n,n-x+y)$.

Пусть $F_1 = (x \rightarrow^{K} y) \rightarrow^{2} (\sim y \rightarrow^{K} \sim x)$ и $F_2 = (\sim y \rightarrow^{K} \sim x) \rightarrow^{2} (x \rightarrow^{K} y)$.

1. $x<y$.

1.1. $x=0$ и/или $y=n$. Тогда $x \rightarrow^{K} y = n$ (iv). Отсюда $F_2 = n$ (C.1) и $F_1 \vee^{1} n = n$ (E.1). Следовательно, $x \rightarrow^{4} y = n = x \rightarrow y$.

1.2. $(x,y) = 1$ и/или $(\sim y,\sim x) = 1$. Тогда $x \rightarrow^{K} y = n$ и/или $\sim y \rightarrow^{K} \sim x = n$ (iv). Отсюда $F_1 = n$ и/или $F_2 = n$ (C.1). Тогда $F_1 \vee^{1} F_2 = n$ (E.1 и/или E.3). Следовательно, $x \rightarrow^{4} y = n = x \rightarrow y$.

1.3. $(x,y) \neq 1$ $(\sim y,\sim x) \neq 1$ (например, если $n=11$, $x=2$ и $y=8$, то $\sim y=3$ и $\sim x=9$). Имеем два подслучая.

1.3.1. $(x+y) < n$. Тогда в силу определения $x \rightarrow^{K} y$ (i), $x \rightarrow^{K} y = x$. Очевидно, если $(x+y) < n$, то $(n-y + n-x) > n$. Отсюда $\sim y \rightarrow^{K} \sim x = \sim x$ (ii). Поскольку $x < \sim x$, то $F_1 = x \rightarrow^{2} \sim x = n$ (C.2). Тогда $n \vee^{1} F_2 = n$ (E.3). Следовательно , $x \rightarrow^{4} y = n = x \rightarrow y$.

1.3.2. $(x+y) > n$. Тогда $x \rightarrow^{K} y = x$ (ii). Очевидно, если $(x+y) > n$, то $(n-y + n-x) < n$. Отсюда $\sim y \rightarrow^{K} \sim x = \sim y$ (i). Поскольку $y < \sim y$, то $F_2 = \sim y \rightarrow^{2} y = n$ (C.2). Тогда $F_1 \vee^{1} n = n$ (E.1). Следовательно, $x \rightarrow^{4} y = n = x \rightarrow y$.

2. $x=y$.

2.1. $x < n/2$.

2.1.1. $x=0$. Тогда $x \rightarrow^{K} y = n$ (iv). Отсюда $F_2 = n$ (C.1) и $F_1 \vee^{1} n = n$ (E.1). Следовательно, $x \rightarrow^{4} y = n = x \rightarrow y$.

2.1.2. $x \neq 0$. Тогда $x \to^K y = x$ и $\sim y \to^K \sim x = \sim x$ (iii). Отсюда $F_1 = x \to^2 \sim x = n$ (C.2). Тогда $n \vee^1 F_2 = n$ (E.3). Следовательно , $x \to^4 y = n = x \to y$.

2.2. $x > n/2$.

2.2.1. $x = n$. Далее в точности как в (F.2.1.1).

2.2.2. $x \neq n$. Тогда $x \to^K y = x$ и $\sim y \to^K \sim x = \sim x$ (iii). Отсюда $F_2 = \sim x \to^2 x = n$ (C.2). Тогда $F_1 \vee^1 n = n$ (E.1). Следовательно, $x \to^4 y = n = x \to y$.

3. $x > y$. Тогда $x \to^K y = x \to y$ и $\sim y \to^K \sim x = \sim y \to \sim x$ (iv). Поскольку $x \to y = \sim y \to \sim x$, то $F_1 = x \to y$ и $F_2 = x \to y$ (C.3). Тогда $F_1 \vee^1 F_2 = x \to y$ (E.2). Следовательно, $x \to^4 y = x \to y$.

Таким образом, для любых x и y, $x \to^4 y = x \to y$, если $n \geq 3$ есть простое число. Отсюда $\mathbf{L}_{n+1} \subseteq \mathbf{K}_{n+1}$.

II. $\mathbf{K}_{n+1} \subseteq \mathbf{L}_{n+1}$.

Из определения $x \to^K y$ следует, что множество функций $\mathbf{K}_{n+1}$ не является функционально полным ни для какого $n \geq 2$. По крайней мере функции $x \to^K y$ и $\sim x$ сохраняют множество значений $\{0,n\}$. Но выше мы показали (I), что $\mathbf{K}_{n+1}$ включает в себя $\mathbf{L}_{n+1}$. Поскольку множество $\mathbf{L}_{n+1}$ функционально предполно для случая, когда n есть простое число (теорема 1), то для этого случая $\mathbf{K}_{n+1} \subseteq \mathbf{L}_{n+1}$.

Таким образом, $\mathbf{K}_{n+1} = \mathbf{L}_{n+1}$.

Из леммы 4, леммы 5 и свойств $\mathbf{L}_{n+1}$ следует

Теорема 2. *Для любого $n \geq 3$ n есть простое число т.т.т., когда* $\mathbf{K}_{n+1} = \mathbf{L}_{n+1}$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО.

I. Если $n \geq 3$, есть простое число, то $\mathbf{K}_{n+1} = \mathbf{L}_{n+1}$ (лемма 5).

II. Если $\mathbf{K}_{n+1} = \mathbf{L}_{n+1}$, то $n \geq 3$ есть простое число. Докажем контрпозицию этого утверждения. Пусть $n \geq 3$ не есть простое число. Тогда из леммы 4 (необходимость) следует, что $n \in \mathbf{K}_{n+1}$. Но свойства матрицы Лукасевича $\mathfrak{M}^L_{n+1}$ такие, что $n \in \mathbf{L}_{n+1}$ для любого $n \geq 2$. Следовательно, если $n \geq 3$ не есть простое число, то $\mathbf{K}_{n+1} \neq \mathbf{L}_{n+1}$.

Таким образом, теорема 2 доказана.

8. Штрих Шеффера для $\mathbf{K}_{n+1}$

Пусть $\mathbf{S}_{n+1}$ обозначает множество всех суперпозиций функции $x \to^S y$ (см. формулу (B)), т. е. $[x \to^S y] = \mathbf{S}_{n+1}$.

Лемма 6. *Для любого $n \geq 3$ такого, что n есть простое число,* $\mathbf{S}_{n+1} = \mathbf{K}_{n+1}$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО.

I. $\mathbf{S}_{n+1} \subseteq \mathbf{K}_{n+1}$.

Формулы (A) и (B).

II. $K_{n+1} \subseteq S_{n+1}$.

$$(G) \quad \sim x = x \to^{S} x$$

$$(H) \quad n = \sim(x \to^{S} \sim x) \to^{S} \sim(\sim x \to^{S} x)$$

$$(I) \quad x \to^{1} y = x \to^{S} (n \to^{S} y)$$

$$(J) \quad x \to^{K} y = \sim y \to^{1} \sim x.$$

Рассмотрим каждую из этих формул.

(G) $\sim x = x \to^{S} x$.

1. Пусть $x=0$. Тогда $0 \to^{S} 0 = n$ (B.a). Следовательно, $x \to^{S} x = \sim x$.

2. $0 < x < n$. Тогда $x \to^{S} x = \sim x$ (см. (B.1.3)).

3. $x=n$. Тогда $n \to^{S} n = 0$ (B.b). Следовательно, $x \to^{S} x = \sim x$.

Таким образом, для любого x, $\sim x = x \to^{S} x$.

(H) $n = \sim(x \to^{S} \sim x) \to^{S} \sim(\sim x \to^{S} x)$.

Пусть $H_1 = (x \to^{S} \sim x)$ и $H_2 = (\sim x \to^{S} x)$.

1. $x < n/2$.

1.1 $x=0$. Тогда $H_1 = n$ (B.1.1) и $\sim H_1 = 0$. Отсюда $0 \to^{S} H_2 = n$ (B.1.1). Следовательно, $H = n$.

1.2. $x \neq 0$. Тогда $H_1 = n$ (B.2) и $\sim H_1 = 0$. Отсюда $0 \to^{S} \sim H_2 = n$ (B.1.1). Следовательно, $H = n$.

2. $x > n/2$.

2.1. $x=n$. Тогда $H_1 = x \to^{S} 0 = n$ (B.a) и $\sim H_1 = 0$. Отсюда $0 \to^{S} \sim H_2 = n$ (B.1.1). Следовательно, $H = n$.

2.2. $x \neq n$. Тогда $H_2 = n$ (B.2) и $\sim H_2 = 0$. Отсюда $\sim H_1 \to^{S} 0 = n$ (B.a). Следовательно, $H = n$.

Таким образом, $H = n$ для любого x, когда $n \geq 3$.

(I) $x \to^{1} y = x \to^{S} (n \to^{S} y)$.

1. $y=0$. Тогда $n \to^{S} 0 = n$ (B.a) и $x \to^{S} n = \sim x$ (B.b). Следовательно, $x \to^{S} (n \to^{S} y) = \sim x$ и $x \to^{1} y = \sim x$ (A.3).

2. $y=n$. Тогда $n \to^{S} n = 0$ (B.b) и $x \to^{S} 0 = n$ (B.a). Следовательно, $x \to^{S} (n \to^{S} y) = n$ и $x \to^{1} y = n$ (A.4).

3. $0<y<n$. Тогда $n \to^{S} y = y$ (B.c). Отсюда $x \to^{S} (n \to^{S} y) = x \to^{S} y$. Но для этого случая $x \to^{S} y = x \to^{1} y$ (B.c). Следовательно, $x \to^{1} y = x \to^{S} (n \to^{S} y)$.

(J) $x \to^{K} y = \sim y \to^{1} \sim x$.

Из определения $x \to^{1} y$ (A) имеем: $\sim y \to^{1} \sim x = \sim\sim x \to^{K} \sim\sim y$. Следовательно, $\sim y \to^{1} \sim x = x \to^{K} y$.

Теорема 3. *Для любого $n \geq 3$ n есть простое число т.т.т., когда* $S_{n+1} = L_{n+1}$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО.

I. Если $n \geq 3$ есть простое число, то $S_{n+1} = L_{n+1}$. Данное утверждение следует из леммы 6 и леммы 5.

II. Если $S_{n+1} = L_{n+1}$, то $n \geq 3$ есть простое число. Докажем контрпозицию этого утверждения. Пусть $n \geq 3$ не есть простое число.

Поскольку функция $x \rightarrow^S y$ определена только посредством функций $\sim x$ и $x \rightarrow^K y$, а для этих функций показано, что $n \in K_{n+1}$ (лемма 3), то $n \in S_{n+1}$. Но $n \in L_{n+1}$ для любого $n \geq 2$. Следовательно, если n не есть простое число, то $S_{n+1} \neq L_{n+1}$.

Таким образом, теорема 3 доказана.

Из теоремы 3 и теоремы 2 следует

Теорема 4. *Для любого* $n \geq 3$ *n есть простое число т.т.т., когда* $S_{n+1} = K_{n+1}$.

Таким образом, функция $x \rightarrow^S y$ есть штрих Шеффера для K_{n+1} (и соответственно для L_{n+1}) т.т.т., когда $n \geq 3$ есть простое число. В этом смысле функция $x \rightarrow^S y$ есть штрих Шеффера для всех нечетных простых чисел. Возникает вопрос о штрихе Шеффера для всех простых чисел, т. е. и для случая, когда $n=2$. Самый простой способ - именно для этого случая переопределить пункт (iii) в определении функции $x \rightarrow^K y$ следующим образом:

$$\text{если } x=y, \text{ то } x \rightarrow^K y = n.$$

Из теоремы 3 и результата Мак-Кинси следует

Теорема 5. *Для любого* $n \geq 3$ *n есть простое число т.т.т., когда* $S_{n+1} = E_{n+1}$.

Заметим, что непосредственным доказательством того, что $E_{n+1} \subseteq S_{n+1}$ в Теореме 5 является следующая последовательность формул: (G), (H), (I), (J), (C), (D), (E), (F) и

$$\text{(K)} \quad x \rightarrow^E y = x \rightarrow (n \rightarrow^S y).$$

Покажем, что последнее имеет место.

1. $y=0$. Тогда $n \rightarrow^S 0 = n$ (B.a) и $x \rightarrow n = n$. Следовательно, $x \rightarrow^E y = n$.

2. $y=n$. Тогда $n \rightarrow^S n = 0$ (B.b) и $x \rightarrow 0 = \sim x$. Следовательно, $x \rightarrow^E y = \sim x$.

3. $0<y<n$. Тогда $n \rightarrow^S y = y$. (B.c). Следовательно, $x \rightarrow^E y = x \rightarrow y$.

Таким образом, значения функции $x \rightarrow^E y$ в точности совпадают с определением $x \rightarrow^E y$ в разделе 5 данной статьи.

9. Логическая матрица $\mathfrak{M}^{K'}{}_{n+1}$

Данное нами выше определение $x \rightarrow^K y$ содержит довольно-таки сильное ограничение для случая, когда $x<y$. Так, в определении $x \rightarrow^K y$ можно отказаться от пункта (i) и от условия $(x+y) < n$ пункта (ii). Такую функцию обозначим посредством $x \rightarrow^{K'} y$:

$$x \rightarrow^{K'} y = \begin{cases} \text{(i)} \quad y, \text{ если } 0<x<y<n \text{ и } (x,y) \neq 1 \\ \text{(ii)} \quad y, \text{ если } 0<x=y<n \\ \text{(iii)} \quad x \rightarrow y \text{ в остальных случаях.} \end{cases}$$

Тогда логическая матрица $\mathfrak{M}^{K'}{}_{n+1}$ выглядит следующим образом:

$$\mathfrak{M}^{K'}{}_{n+1} = \langle M_{n+1}, \sim x, x \to^{K'} y, \{n\} \rangle.$$

Множество всех суперпозиций функций $\sim x$ и $x \to^{K'} y$ обозначим посредством K'_{n+1}.

Лемма 4′. *Для любого $n \geq 3$ n есть простое число т.т.т., когда $n \in K'_{n+1}$.*

Доказательство аналогично доказательству леммы 4.

Лемма 5′. *Для дюбого $n \geq 3$ такого, что n есть простое число,* $K'_{n+1} = L_{n+1}$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО.

I. $L_{n+1} \subseteq K'_{n+1}$.

(L) $x \to^1 y = \sim((y \to^{K'} x) \to^{K'} \sim(y \to^{K'} x)) \to^{K'} (x \to^{K'} y)$

(M) $x \vee^1 y = (x \to^1 y) \to^1 y$

(N) $x \to^2 y = ((x \to^{K'} y) \to^{K'} (\sim y \to^{K'} \sim x)) \vee^1$
$((\sim y \to^{K'} \sim x) \to^{K'} (x \to^{K'} y))$.

(O) $x \vee^{K'} y = (x \to^{K'} y) \to^{K'} y$

(P) $x \vee^2 y = (x \vee^{K'} y) \vee^1 (y \vee^{K'} x) = x \vee y = \max(x,y)$

(Q) $x \to^3 y = (x \to^{K'} y) \vee^2 (\sim y \to^{K'} \sim x)$

(R) $x \vee^3 y = (x \to^3 y) \to^3 y$

(S) $x \to^4 y = ((x \vee^3 y) \to^2 (x \vee^2 y)) \to^1 (x \to^3 y)$

(T) $x \to^5 y = (x \to^4 y) \vee^1 (\sim y \to^4 \sim x) =$
$x \to y = \min(n, n-x+y)$.

Подробное доказательство см. в [4; 22].

II. $K'_{n+1} \subseteq L_{n+1}$ (доказательство аналогично лемме 5).

Теорема 2′. *Для любого $n \geq 3$ n есть простое число т.т.т., когда* $K'_{n+1} = L_{n+1}$.

Доказательство аналогично теореме 2.

Пусть S'_{n+1} обозначает множество всех суперпозиций функции $x \to^{S'} y$, где $x \to^{S'} y$ определяется следующим образом:

(A′) $x \to^{1'} y = \sim y \to^{K'} \sim x$

(B′) $x \to^{S'} y = x \to^{1'} ((y \to^{1'} y) \to^{1'} \sim y)$.

Лемма 6′. *Для любого $n \geq 3$ такого, что n есть простое число,* $S'_{n+1} = K'_{n+1}$.

Поскольку при доказательстве леммы 6 нигде не использовались указанные выше ограничения при определении функции $x \to^{K'} y$, то доказательство леммы 6′ аналогично лемме 6:

$$(G')\quad \sim x = x \rightarrow^{S'} x$$
$$(H')\quad n = \sim(x \rightarrow^{S'} \sim x) \rightarrow^{S'} \sim(\sim x \rightarrow^{S'} x)$$
$$(I')\quad x \rightarrow^{1'} y = x \rightarrow^{S'} (n \rightarrow^{S'} y)$$
$$(J')\quad x \rightarrow^{K'} y = \sim y \rightarrow^{1'} \sim x.$$

Теорема 3′. *Для любого $n \geq 3$ n есть простое число т.т.т., когда* $S'_{n+1} = L_{n+1}$.

Доказательство аналогично теореме 3.

Из теоремы 3′ и теоремы 2′ следует

Теорема 4′. *Для любого $n \geq 3$ n есть простое число т.т.т., когда* $S'_{n+1} = K'_{n+1}$.

Таким образом, функция $x \rightarrow^{S'} y$ есть штрих Шеффера для K'_{n+1} (и соответственно для L_{n+1}) т.т.т., когда $n \geq 3$ есть простое число.

Из теоремы 3′ и результата Мак-Кинси следует

Теорема 5′. *Для любого $n \geq 3$ n есть простое число т.т.т., когда* $S'_{n+1} = E_{n+1}$.

Непосредственным доказательством того, что $E_{n+1} \subseteq S'_{n+1}$ в Теореме 5′ является следующая последовательность формул: (G′), (H′), (I′), (J′), (L), (M), (N), (O), (P), (Q), (R), (S), (T) и

$$(K')\quad x \rightarrow^{E} y = x \rightarrow (n \rightarrow^{S'} y).$$

Из теоремы 2 и теоремы 2′ следует

Теорема 6. *Для любого $n \geq 3$ n есть простое число т.т.т., когда* $K_{n+1} = K'_{n+1}$.

Теорема 6 говорит о том, что для случая, когда $n \geq 3$ есть простое число, указанные выше ограничения при определении функции $x \rightarrow^{K} y$ излишни.

Из теоремы 3 и теоремы 3′ следует

Теорема 7. *Для любого $n \geq 3$ n есть простое число т.т.т., когда* $S_{n+1} = S'_{n+1}$.

ПРОБЛЕМА. Построить такой класс функций $K^*_{n+1} = \{\sim x, x \rightarrow^{K^*} y\}$, для которого имело бы место следующее утверждение: *n есть степень простого числа т.т.т., когда* $K^*_{n+1} = L_{n+1}$.

10. Закон распределения простых чисел

Асимптотическое распределение простых чисел, доказываемое аналитическими методами, изложено в монографии К.Прахара [7] (см. также статью Д.Цагера [11]). Здесь мы подойдем к этому вопросу с совершенно другой стороны.

Обратим внимание, что каждая из сформулированных выше теорем задает определение простого числа посредством эквивалентности двух множеств функций. В связи с этим особый интерес представляют равенства

$$(K) \quad x \to^{E} y = x \to (n \to^{S} y) \text{ и}$$

$$(K') \quad x \to^{E} y = x \to (n \to^{S'} y).$$

Правая часть этих равенств представляет собой суперпозицию функций $x \to^{S} y$ и $x \to^{S'} y$ соответственно. Число вхождений данных функций в соответствующие суперпозиции существенно зависит от исходных задаваемых свойств простого числа: лемма 3 и лемма 3′ соответственно. Можно подсчитать, что формула $x \to (n \to^{S} y)$ содержит 3251 вхождение функции $x \to^{S} y$, тогда как формула $x \to (n \to^{S'} y)$ содержит 1 024 612 088 вхождений функции $x \to^{S'} y$[3].

Особо подчеркнем, что доказанные эквивалентности $S_{n+1} = E_{n+1}$ и $S'_{n+1} = E_{n+1}$ (как и другие в сформулированных выше теоремах) имеют место не для любого $n \in N$, т. е. не для всего натурального ряда чисел, а только для *последовательности простых чисел* в натуральном ряду. Таким образом, можно сказать, что указанные суперпозиции, выраженные формулами (K) и (K′), как бы косвенным образом отображают закон распределения простых чисел в натуральном ряду. Но теперь можно утверждать, что этот "закон" самым существенным образом зависит от определения простого числа. Упрощение определения простого числа, которое получается благодаря отбрасыванию пункта (i) и условия $(x+y) > n$ в пункте (ii) при определении функции $x \to^{S'} y$, привело к чрезвычайно сложной суперпозиции этой функции в формуле (K′). Наиболее простое (классическое) определение простого числа: произвольное натуральное число n называется простым, если оно делится только на 1 и само себя, приводит к невероятно сложному закону распределения простых чисел, про который Эйлер сказал: "...у нас есть основания считать, что эта тайна, в которую человеческий разум никогда не проникнет" (цитируется по: [14, p.37]).

11. Закон порождения простых чисел

Оказывается, что кроме формул (F) и (T), дающих определение импликации Лукасевича $x \to y$ для всех нечетных простых чисел, можно определить также формулу (F′), последовательное примене-

---

[3] При этом, стараясь по возможности найти суперпозицию наименьшей длины, зачастую использовалось следующее определение $\sim x$: $\sim x = x \to^{S} n$ $(\sim x = x \to^{S'} n)$, поскольку $x \to^{S} n = x \to^{S} x$ $(x \to^{S'} n = x \to^{S'} x)$.

ние которой (итерация) задает классы простых чисел, для которых (F′) определяет $x \to y$.

Рассмотрим последовательность формул (A) - (F) из раздела 7, но такую, в которой функция $x \to_K y$ заменена на $x \to_{K'} y$. Обозначим новую последовательность формул посредством (A′) - (F′). Нетрудно проверить, что тогда формула (F′):

$$(F') \quad x \to_{4'} y = ((x \to_{K'} y) \to_{2'} (\sim y \to_{K'} \sim x)) \vee_{1'} ((\sim y \to_{K'} \sim x) \to_{2'} (x \to_{K'} y))^4$$

определяет импликацию Лукасевича $x \to y$ только для первых пяти нечетных чисел: 3, 5, 7, 11, 13. Однако, если $n=17$, $x=2$ и $y=12$, то $x \to_{4'} y = 15$, в то время как $x \to y = n = 17$.

Покажем, что мы будем понимать под итерацией формулы (F′). Пусть $A_0 = (x \to_{K'} y) \to_{2'} (\sim y \to_{K'} \sim x)$ и $B_0 = (\sim y \to_{K'} \sim x) \to_{2'} (x \to_{K'} y)$. Тогда

$$C_0 = A_0 \vee_{1'} B_0$$
$$C_1 = (A_0 \to_{2'} B_0) \vee_{1'} (B_0 \to_{2'} A_0)$$
$$C_2 = ((A_0 \to_{2'} B_0) \to_{2'} (B_0 \to_{2'} A_0)) \vee_{1'} ((B_0 \to_{2'} A_0) \to_{2'} (A_0 \to_{2'} B_0)),$$

и так далее.

Таким образом, смысл итерации состоит в том, что берется исходная формула C_0, в ней осуществляется операция замены дизъюнкции $\vee_{1'}$ на импликацию $\to_{2'}$ ($[\to_{2'}/\vee_{1'}]$), затем над полученной формулой производится операция обращения (REV), т. е. импликация записывается в обратную сторону, и, наконец, обе формулы соединяются дизъюнктивно. В общем случае это выглядит так:

$$C_i = ([\to_{2'}/\vee_{1'}]C_{i-1}) \vee_{1'} (\mathrm{REV}([\to_{2'}/\vee_{1'}]C_{i-1})).$$

Обозначим посредством P_i класс тех новых простых чисел, при которых $C_i = x \to y$. Тогда

$$P_0 = \{3, 5, 7, 11, 13\},$$
$$P_1 = P_0 \cup \{17, 19\}.$$

С помощью компьютерной программы, написанной В.И.Шалаком, можно высчитать другие P_i:

$$P_2 = P_1 \cup \{23, 29, 31, 41, 43, 53, 59, 61\},$$
$$P_3 = P_2 \cup \{37, 47, 109\}.$$

Класс P_4 содержит уже 50 новых простых чисел.

По существу формула C_i является *законом порождения простых чисел.*

---

[4] Обратим внимание на разницу между этой формулой и формулой (N) в лемме 5′. Пусть $x=n$ и $y=0$. Тогда $x \to_2 y = n$, в то время как $x \to_{4'} y = 0$.

Обратим внимание на неравномерность заполнения классов P_i. Так, простое число 223 попадает только в класс P_8, тогда как уже класс P_5 заканчивается простым числом 757.

ПРИЛОЖЕНИЕ:
представление простых чисел в виде корневых деревьев

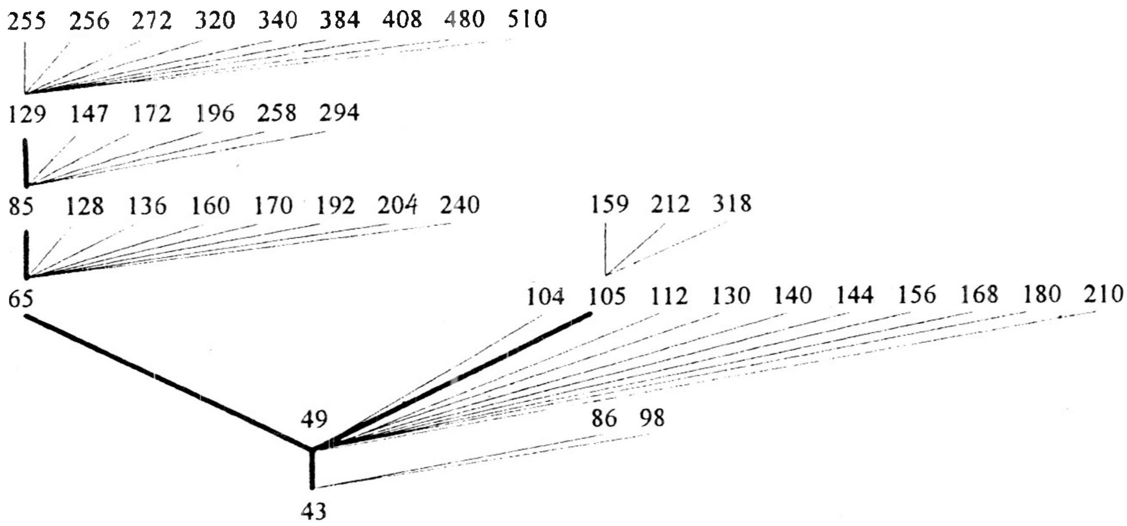
В [4, с.192] был поставлен вопрос, как от непредполной логики Лукасевича L_{n+1} перейти к предполной, т. е. к L_{p+1}, где p - простое число. В итоге проблема сводится к переработке произвольного натурального числа n в простое число p и установлению соответствующего алгоритма. Оказалось, что в основе алгорима лежит вычисление функции Эйлера $\varphi(n)$, которая определяется для всех целых положительных n и представляет собой число чисел, не превосходящих n и взаимно простых с n [2]. Тогда формула для переработки произвольного натурального числа n в простое p выглядит следующим образом:

$$\forall n \exists k(\varphi_k{}^*(n)) \text{ есть простое число,}$$

где $\varphi^*(n) = \varphi(n)+1$, и k указывает на число применений функции $\varphi^*(n)$. Очевидно, что за конечное число шагов мы придем к равенству $\varphi^*(n) = p$. Поскольку $\varphi(p) = p-1$ и, следовательно, $\varphi^*(p) = p$, то на этом вычисление заканчивается. В результате мы получаем разбиение натурального ряда чисел на классы эквивалентности такие, что каждый класс содержит одно и только одно простое число, т. е.

$$n_1 \cong n_2 \text{ т.т.т., когда } \exists k \exists l(\varphi_k{}^*(n_1) = \varphi_l{}^*(n_2)).$$

В связи с данным разбиением натурального ряда чисел встает обратная задача, а именно построение по произвольному простому числу p его класса эквивалентности X_p. Используя метод, предложенный Х.Гуптой [17] для вычисления значений обратной функции Эйлера $\varphi^{-1}(m) = \{m: \varphi(n) = m\}$, можно описать алгоритм для построения классов X_p. Его идея состоит в следующем (подробно в [4,§12]). Вычисляется множество значений обратной функции Эйлера для числа p-1. В полученном множестве выбираются только нечетные числа, у каждого из которых вычитается 1 и опять применяется функция $\varphi^{-1}(m)$, и т. е. В результате получаем для каждого p его класс эквивалентности X_p, который можно упорядочить в виде не имеющего циклов связного графа с выделенной вершиной, которая обозначена соответствующим числом p, т. е. получаем, что каждое простое число представимо в виде корневого дерева. В качестве примера приведем граф для простого числа 43:



Следующий нетривиальный вопрос остается открытым: какова мощность классов X_p? Гипотеза автора [21] состоит в следующем:

$$\forall p(\,|\{n{:}\exists k(\varphi_k{}^*(n) = p)\}|\,) < \aleph_0,$$

т. е. для каждого простого числа p его класс эквивалентности (или корневое дерево) конечен. Используя значения для обратной функции Эйлера $\varphi^{-1}(m)$, где $m \leq 2500$ [26], были построены корневые деревья для первых 50 простых чисел [4, с.200].

В.И.Шалак написал соответствующую компьютерную программу, которая состоит из трех подпрограмм:

(1) ERATOS - порождение простых чисел методом решета Эратосфена;

(2) INVEULER - вычисление значений обратной функции Эйлера $\varphi^{-1}(m)$;

(3) P_TREES - построение корневых деревьев.

Наиболее трудоемкой операцией является (2), поскольку для вычисления $\varphi^{-1}(m)$ в общем случае нужно иметь $\varphi^{-1}(x)$ для всех $x<m$, а также знать разложение натуральных чисел на простые множители.

С помощью этой программы были вычислены значения $\varphi^{-1}(m)$ для $m \leq 200\ 000$, что позволило построить корневые деревья для первых 729 простых чисел, а также для простых чисел, чей порядковый номер 731 - 1050. Построение класса эквивалентности для простого числа 5443 , чей порядковый номер 730, требует уже вычисления $\varphi^{-1}(m)$ для $m \leq 285062$.

Неравномерность мощностей классов эквивалентностей для каждого p поразительна. Для основной части простых чисел класс эквивалентности состоит из двух элементов: $\{p,2p\}$. Но встречаются такие "монстры", как число 3313, которое содержит более тысячи элементов. Статистическое распределение корневых деревьев, представляющих простые числа, и их свойства - вопрос для специального исследования.

В заключение обратим внимание на работу А.Хэлса [18], где по каждому корневому дереву строится p-абелева группа, т. е. коммутативная группа, порядки всех элементов которых являются степенями фиксированного простого числа.

Пусть p - произвольное простое число. Вершины дерева, кроме корневой, выступают в качестве образующих элементов $x_1, ..., x_n$, и для каждого направленного ребра $i \rightarrow j$ (сверху вниз) принимается соотношение $px_i = x_j$ (или, если $j=t$, где t - корень дерева, $px_i = 0$. P -абелева группа G_p имеет p^n элементов. Поскольку p в G_p является произвольным простым числом, то данное представление имеет сугубо теоретический интерес. Но так как в нашем случае каждое простое число представимо в виде только "своего" корневого дерева (класса эквивалентности), то теперь для каждого такого дерева строится конкретная p-абелева группа. Таким образом, каждое простое число обладает определенной G_p-структурой.

Более подробно о графах для простых чисел и проблемах, возникающих в связи с подобным представлением, см. в [4, §13].

ЛИТЕРАТУРА

1. *Бочвар Д.А., Финн В.К.* О многозначных логиках, допускающих формализацию анализа антиномий.1 // Исследования по математической лингвистике, математической логике и информационным языкам. М., 1972. С.238-295.
2. *Виноградов И.М.* Основы теории чисел. М., 1981.
3. *Карпенко А.С.* Характеристичесая матрица для простых чисел // Шестая Всесоюзная конференция по математической логике: Тезисы докладов. Тбилиси, 1982. С.76.
4. *Карпенко А.С.* Конечнозначные логики Лукасевича: Алгебро-логические свойства простых чисел // Синтаксические и семантические исследования неэкстенсиональных логик. М., 1989. С.170-205.
5. *Карпенко А.С.* Ян Лукасевич - детерминизм и логика // Логические исследования. Вып.2. М.,1993. С.206-223.
6. *Карпенко А.С.* Штрих Шеффера для простых чисел // Труды научно-исследовательского семинара логического центра Института философии РАН, 1993. М., 1994. С.102-106.
7. *Прахар К.* Распределение простых чисел. М., 1967.

8. *Финн В.К.* О предполноте класса функций, соответствующего трехзначной логике Я.Лукасевича // НТИ. Сер.2. 1969. № 10.
9. *Финн В.К.* О классах функций, соответствующих М-значным логикам L_M Я.Лукасевича //Тезисы докладов по алгебре, математической логике и вычислительной математике. Иваново, 1970. С.42-43.
10. *Финн В.К.* Логические проблемы информационного поиска. М., 1976.
11. *Цагер Д.* Первые 50 миллионов простых чисел // Успехи математических наук. 1984. Т.39. № 3.
12. *Яблонский С.В.* Функциональные построения в k-значной логике // Труды математического Института им. В.А.Стеклова. 1958. Т. 51. С.5-142.
13. *Яновская С.А.* Математическая логика и основания математики // Математика в СССР за сорок лет. М., 1959.
14. *Ayoub R.* Introduction to the analytic theory of numbers. Providence, 1963.
15. *Curry H.* Review of McKinsey [23] // Zentralblatt fur Mathematik und ihre Grenzgebiete. 1937. Bd.16, 2.
16. *Finn V.K.* Some remarks on non-Postian logics // V Intern. congress for logic, methodologic and philosophy of science: Contrib. pap. Sect. 1. Ontario, Canada, 1975.
17. *Gupta H.* Euler's totient function and its inverse // Indian J. pure and Appl. Math. 1981. Vol.12. P.22-30.
18. *Hales A.W.* Combinatorial represantations of Abelian groups // Proc. of Symposia in Pure Mathematics. 1971. Vol.19. P.105-108.
19. *Hendry H.E.* Minimally incomplete sets of Lukasiewiczian truth functions // Notre Dame Journal of Formal Logic. 1983. Vol.23. N 1. P.146-150.
20. *Hendry H.E., Massey G.J.* On the concepts of Sheffer functions // The logical way of doing things. New Haven and London, 1969. P.179-293.
21. *Karpenko A.S.* A hypothesis on the finitness of graphs for Lukasiewicz's precomplete logics (graps for prime numbers) // Bull. sect. log. 1986. Vol.15. P.102-108.
22. *Karpenko A.S.* Characterization of prime numbers in Lukasiewicz's logical matrix // Studia Logica. 1989. Vol.48. N 4. P.465-478.
23. *Karpenko A.S.* Sheffer's stroke for prime numbers // Bull. Sect. Log. 1994. Vol.23. P.126-129.
24. *Lukasiewicz J.* A numerical interpretation of theory of propositions // *Lukasiewicz J.* Selected works. Warszawa, 1970. P.129-130.
25. *Lukasiewicz J., Tarski A.* Investigations into the sentential calculus // Ibid. P.131-152.
26. Mathematical tables. VIII. Cambridge, 1940. Tab.II. P.64-71.
27. *McKinsey J.C.C.* On the generation of the functions Cpq and Np of Lukasiewicz and Tarski by means of a single binary operation // Bull. of the Amer. Math. Soc. 1936. Vol.42. PP.849-851.

28. *Pinkawa V.* On Sheffer functions in k-valued logical calculi // Finite algebra and multiple-valued logic. Amsterdam etc,. 1981. P.537-545.
29. *Post E.* Introduction to a general theory of elementary propositions // American Journal of Mathematics. 1921. Vol.21. P.163-185. (Repr.: From Frege to Godel. Cambridge, 1967).
30. *Quine W.V.* Review of McKinsey [23] // The Journal of Symbolic Logic. 1937. Vol.2. P.59.
31. *Rose A.* Some generalised Sheffer functions // Proc. Cambridge Philosophical Soc. 1952. Vol.48. P.369-373.
32. *Rose A.* Binary generators for the m-valued and $\aleph_0$ valued Lukasiewicz propositional calculi // Composito Mathematica. 1968. Vol.20. P.153169. (Repr.: Logic and foundation of Mathematics. Groniugen, 1968).
33. *Rosenberg I.* On generating large classes of Sheffer functions // Aequationes Mathematicae. Basel, 1978. Vol.17. P.164-181.
34. *Rosser J.B., Turquette A.R.* Many-valued logics. Amsterdam, 1952.
35. *Urquhart A.* Many-valued logic // Handbook of philosophical logic. Vol.3: Alternatives in classical logic. Dordrecht, 1986. P.71-116.
36. *Webb D.L.* The generation of any n-valued logic by one binary operation // Proc. of the National Academy of Science. 1935. Vol.21. P.252-254.
37. *Webb D.L.* Definition of Post's Generalized Negative and Maximum in terms of one binary operation // American Journal of Mathematics. 1936. Vol.42. P.193-194.

И.А.Герасимова

СЕМАНТИЧЕСКИЙ АНАЛИЗ МУЗЫКАЛЬНОЙ НОТАЦИИ

В центре внимания предлагаемого исследования - язык музыкального нотного письма, называемый нотацией. В данной работе он рассматривается как семиотическая система, состоящая из синтаксиса, или системы правил, порождающих одни знаковые выражения из других, и семантики, или системы правил, определяющих значения знаковых конструкций. Следует подчеркнуть, что семантические представления музыкального языка многоаспектны. В статье различаются три уровня семантики нотации, соответствующие трем уровням музыки - физическому, интеллектуальному и эмоциональному. Центральным для данной работы является вопрос о семантическом смысле музыкального события. Исходя из физических основ музыки, музыкальный язык конструируется как формальная грамматическая система в стиле грамматик Монтегю. Разрабатывается двууровневый язык интенсиональной логики, включающий в свой состав события и высказывания о событиях (язык $IL^{\oplus}$). Строится многомерная семантика интенсионального языка и определяется операция перевода категорий музыкальной нотации в выражения интенсиональной логики соответствующего типа. В результате единичное музыкальное событие (аналог индивида в логической терминологии) определяется через множество своих свойств. В интенсиональном варианте ему соответствует тип выражения, характеризующий свойства индивидов.

1.Семантические подходы к исследованию музыкального языка

1.1 Музыка и математика в исторической ретроспективе

История взаимоотношений между математикой и музыкой начинается с глубокой древности и характеризуется большим разнообразием - от тесного содружества до "разведения мостов". Математически-космические обоснования феномена музыки, по-видимому, процветали во всех древних культурах, включая философские системы Индии, Китая, Египта, Междуречья, Древней Греции. Для мудрецов прежних времен прообразом земной музыки была музыка небесная, гармония которой выражалась числовыми соотношениями. "Музыка есть манифестация числа во времени", считали пифагорейцы. Современные научные исследования показывают, что математические обоснования музыки в Древнем мире не были игрой интеллектуального воображения, а выражали законы природы, прежде всего связанные с акустической природой музыки, и отражали музыкальную практику своего времени [1].

В позднеантичной культуре и в средние века традиции учения Пифагора о гармонии были поддержаны благоря трудам Августина и Боэция. В Новое время произошел переворот в отношениях между музыкой и математикой. Рене Декарт в противовес Иоганну Кеплеру, поддержавшему идею об изначальной гармонии как идею, которую можно реализовать в геометрическом представлении, призвал к анализу музыки в субъективно-психологическом ключе.

На фоне феноменологических исследований музыки выделяется попытка Леонарда Эйлера вновь соединить музыку и математику в его предложении попытаться объяснить эстетические феномены музыки математическими средствами. В конце XIX - начале XX в. появляется знаменитая работа Г.Гельмгольца "Теория восприятия звуков", посвященная физико-физиологическим основам музыки. Также представляют интерес труды крупнейшего музыковеда Хуго Римана, который заявлял, что "слушание музыки есть не только пассивное восприятие воздействий звуков слуховым органом, но и высокоразвитая работа логических функций человеческого ума" [2, с.26].

В XX в., особенно с 60-х годов, резко усилился интерес к музыкальной аксиоматике, которую можно представить в виде математических моделей. Математические теории свободно-атональной и додекафонической музыки разрабатываются преимущественно исследователями, группирующимися вокруг англо-американских журналов "Journal of Music Theory" и "Perspectives of New Music". Широко известна работа композитора Яниса Ксенакиса "Формальная музыка". В Германии действует ряд центров, занимающихся разработками математической теории музыки (Р.Вилле, Дармштадт; Г.Маццола, Дюбендорф; Г.Гетце, Гейдельберг). В апреле 1984 г. состоялся 15-й Зальцбургский пасхальный музыкальный симпозиум под руководством Герберта фон Караяна на тему "Музыка и математика", в рамках которого состоялась дискуссия об актуальности темы для композиции, устройства инструментов, исполнительства и музыкальных исследований [2, с.9].

В 1985 г. в университете Хельсинки был проведен международный симпозиум "Философия музыки" в работе которого, в частности, приняли участие видные логики В.Рантала, П.Гарденфорс, Д.Пирс. Материалы симпозиума были изданы в журнале "Acta Philosophica Fennica" [9].

Интерес логиков к теории музыки обусловлен как развитием компьютерной техники (инструменты, применение компьютеров в музыковедении), так и проблемами аналитической эстетики. В логическом мире всплеск логико-семантических исследований в области музыки последовал после работы Нельсона Гудмена "Языки искусства. Подход к теории символов", впервые вышедшей в 1976 г. [11].

Обсуждению вопросов философии музыки целиком посвящен один из выпусков журнала "The Journal of Aesthetics and Art Criticism" за 1994 год [15]. В данном выпуске аналитические исследования рассматриваются как одно из важнейших направлений в американской эстетике (см. также [5, 12, 14].

В аналитической эстетике ставятся и обсуждаются следующие вопросы:
- проблема эссенциализма, поставленная еще Аристотелем: роднит ли различные искусства некая общая сущность. Предпринимаются попытки уточнить понятие сущности в понятии структуры и выявить терминологический инструментарий, необходимый для анализа общих характеристик различных видов искусства [4];
- является ли музыка репрезентативным искусством, представляет ли она объект или указывает на качества объекта?
- является ли музыка языком? Если да, то в каком смысле можно говорить о "смысле" в музыке? Можно ли определить данное понятие в каких-либо хорошо сформулированных с точки зрения точной теории терминах? Какого рода представления создают основания для семантической интерпретации пассажей музыки?
- передает ли музыка какого-либо рода "сообщение"? Если да, то в чем заключается информационный смысл звука?
- какова онтология музыкального языка? Что обозначают нотные знаки?

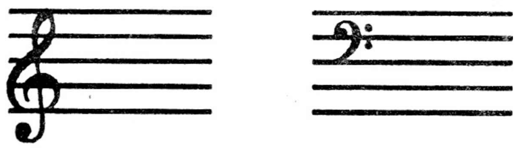
В предлагаемой вниманию читателя работе исследуется семантический смысл музыкального события, а также будут затронуты и вышеперечисленные проблемы. В своем анализе мы будем опираться на методы нормативных грамматик. По-видимому, впервые вопрос о том, является ли музыка языком, был поставлен самим Холмским на одном из семинаров по формальным грамматикам в 1959 году [7]. С тех пор разработка нормативных грамматик считается одним из перспективных направлений в исследованиях по компьютерной музыке. [7, 8, 14]. Имеется обширная монография финского логика Кари Куркела, целиком посвященная выяснению семантического статуса музыкального события [13]. В развиваемом нами подходе имеются принципиальные отличия от концепции Куркела, но об этом речь пойдет ниже.

1.2. Три уровня музыки и семантика

1.2.1. Основные элементы нотного письма

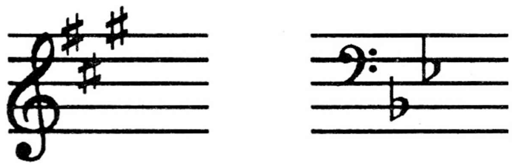
Письменный музыкальный язык, или нотация, включает в себя следующие элементы:
- пятилинейный нотный стан (или нотоносец);
- ключи, определяющие высотное значение линий нотного стана. Имеются различные системы ключей: ключи системы До, ключи

системы Фа, ключи системы Соль. В данной работе будут использованы скрипичный ключ системы Соль и басовый ключ системы Фа:



- нотные знаки: овальные головки (незаполненные и заполненные) со штилем (или палочкой);
- различные элементы нотных знаков, выражающие относительную длительность звуков, исходя из математического принципа деления на два каждой нотной (временной) доли:

- знаки альтерации при ключе, фиксирующие высоту данной ступени на протяжении всего музыкального произведения:



- знаки альтерации при нотах (случайные), изменяющие высоту только в данной октаве и для данной октавы:

- обозначения метра, т. е. количества временных долей в такте и их долгота:

- объединение нескольких нотных станов в общую нотную систему, отвечающую возможностям инструмента, ансамблевых, хоровых и оркестровых составов:

- дополнительные знаки, указывающие на изменения длительности, паузы.

1.2.2. Семантический статус музыкального события. Постановка проблемы

Отдельная нота обозначает отдельный звук, соответственно система нот указывает на комплекс звуков. Под звуковым событием будем понимать как отдельный звук, так и комплекс звуков, звучащих последовательно как мелодия, либо звучащих одновременно как аккорд. Будем считать, что отдельные звуки представляют собой элементарные звуковые события. Паузы или остановки в звучании также являются звуковыми событиями и имеют определенные характеристики, например, обладают длительностью. Следующая запись указывает на элементарное звуковое событие:

1-1

Является ли 1-1 единичным или общим событием? Запись 1-1 указывает на тон ля первой октавы (440Гц), имеющий длительность четверть. Даже этой скудной информации достаточно, чтобы отличить одно элементарное событие от другого: при другом положении ноты на нотном стане речь пойдет уже об ином звуковом событии. Исходя из этих соображений, можно ли предположить, что запись 1-1 указывает на единичное событие?

Возникает следующий закономерный вопрос: каким способом может быть представлено событие 1-1? Можно ли сказать, что при реальном воспроизведении звука ля в каждой конкретной ситуации мы имеем дело с тем же самым событием? Если самым аккуратным способом составить полное предписание для исполнителя, то воспроизведение даже единственной ноты будет отличаться от исполнителя к исполнителю, зависеть от времени исполнения, ситуации. Об этом красноречиво свидетельствует самый простой факт уникальности тембра человеческого голоса. У любого певчего одна и та же мелодия звучит по-своему. Не только в аспекте исполнения, но и в аспекте прослушивания звучит не одно и то же в каждой конкретной ситуации вследствие разности эмоционально-психологических переживаний у одного и того же человека даже во время исполнения одного и того же произведения тем же самым исполнителем, но в разных пространственно-временных рамках.

С логико-семантической точки зрения данный ход рассуждений приводит к выводу о том, что знаковая запись 1-1 указывает на одно звуковое событие, которое становится индивидуализированным в конкретной ситуации, другими словами, имеется одно звуковое событие, но не определено точно (или определено не полно), какое именно событие. Точнее говоря, запись 1-1 указывает на форму события, но не на само событие.

С подобной ситуацией мы сталкиваемся при употреблении неопределенных артиклей, например, в английском языке. Сочетание "a dog", являясь индивидным термом, указывает на одну собаку, но не сказано, на какую именно.

Интерпретация звуковых событий как индивидных термов в музыке, по-видимому, прямо противоположна интерпретации индивидных термов в естественном языке, особенно в ситуациях, ориентированных на научно-аналитический стиль мышления. Например, составное имя "Москва" указывает на один объект (референт) - город, являющийся столицей России. Представления о Москве у каждого человека могут быть разными, но в речи аналитического стиля обычно отвлекаются от индивидуализированных субъективных смыслов, используя объективированные или общезначимые компоненты значения. Использование "развернутого" или полного смысла не необходимо при решении специальных задач, на которых сконцентрировано внимание, но всегда тот или иной смысл может быть уточнен в ходе коммуникации. Если в научно-ориентированной речи акцент делается на общее (или выделенное, уточненное) в значении выражений, то в языках искусства складывается иная ситуация, а именно ценится индивидуальность, неповторимость, вносящие свежесть в восприятие и придающие остроту игре эмоциональных переживаний. Мастер всегда оставляет место творческой свободе и для реализатора его идей и для воспринимающего.

До сих пор речь шла о письменном языке музыки, но нужно иметь в виду, что в музыкальной практике использовались ранее и сейчас используются устные формы передачи звукового содержания. В культуре многих народов, особенно восточных, сохранились синтетические языки искусств (звук-цвет-жест-поза-...-понятие), в которых, например, отдельно взятый звук играл роль символа, выражающего определенное содержание, и музыка предназначалась в качестве средства "познания" невербального уровня. Кроме того, на современную практику, теорию музыки и музыкальное сознание сильное давление оказывает использование компьютеров в процессе композиции и исполнительства, что приводит к возникновению новых источников фиксации звуковой информации, отказу от нотации, повышению интереса к импровизации. Из вышесказанного следует, что вопрос о семантическом статусе музыкального события не может быть решен однозначно, каждый раз перед формальным уточнением необходимо выяснить исходные теоретические предпосылки анализа.

1.2.3. Семантические подходы к представлению звуковой информации

Музыку можно кратко определить как *"искусство организации звука в осмысленные образцы с помощью высоты, гармонии и ритма"*. Семантические аспекты смыслообразования в музыке можно было бы выделить, уточнив уровни звуковой организации музыкального материала. В данном вопросе мы последуем искусствоведческому анализу Кушнер [2], предложившей рассматривать два уровня музыки - физический и интеллектуальный. Нам представляется, что данный подход имеет основания, но требует дальнейшего развития. Мы предлагаем ввести в анализ третий уровень музыки - эмоциональный.

На физическом уровне музыка понимается как звуковая акустическая система, в которой используются четыре характеристики звука как материал для данного вида искусства: высота тона, амплитуда, тембр и длительность.

Высота звука определяется частотой вибрации звуковой волны: чем выше частота, тем выше нота. Отношения типа "выше-ниже" с математической точки зрения являются отношениями типа порядка. Графически высота нот задается начертанием их на двумерной плоскости листа, выше или ниже относительно друг друга.

a1	c1	g1
ля	до	соль
1 октавы	2 октавы	3 октавы

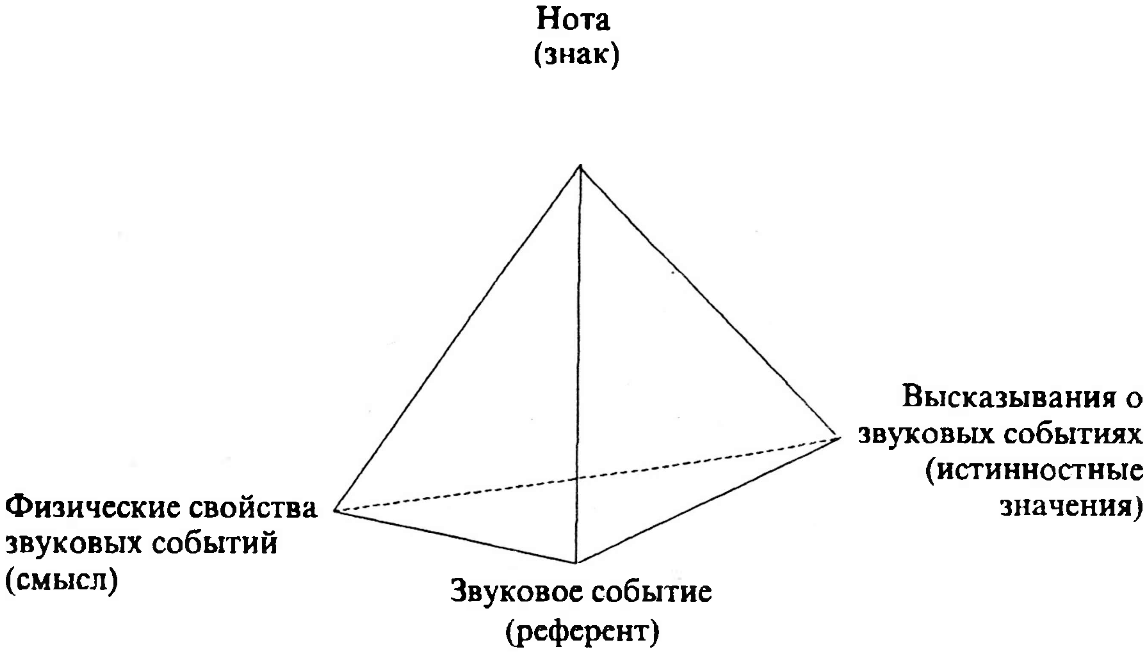
Амплитуда, широта вибраций звуковой волны, определяет мощность звучания. "Громче-тише" также можно рассматривать как математическое отношение типа порядка.

Длительность является фактором затухания тона, продолжительность вибрации влияет на долготу звука. Если n - число моментов времени, то длительность целой ноты, графически, 𝅝 , есть n; длительность половинки, графически, 𝅗𝅥 , составляет n:2; длительность четверти, ♩ , есть n:4, длительность восьмой, ♪ , равна n:8 и т.д. Высказывания о длительности суть высказывания о матемаматических соотношениях типа "больше-меньше".

Тембр представляет собой комбинацию основной и доминантной частот. Именно структура обертонов придает особую "окраску" звучанию.

Семантические представления, соответствующие физическому уровню музыки, можно изобразить в следующей схеме:

1-2



Согласно схеме 1-2, нота обозначает звуковое событие, которое характеризуется через свои свойства (смысл задает референт). Принадлежит или не принадлежит свойство данному событию, данный факт фиксируется в высказываниях, получающих истинно-значную оценку.

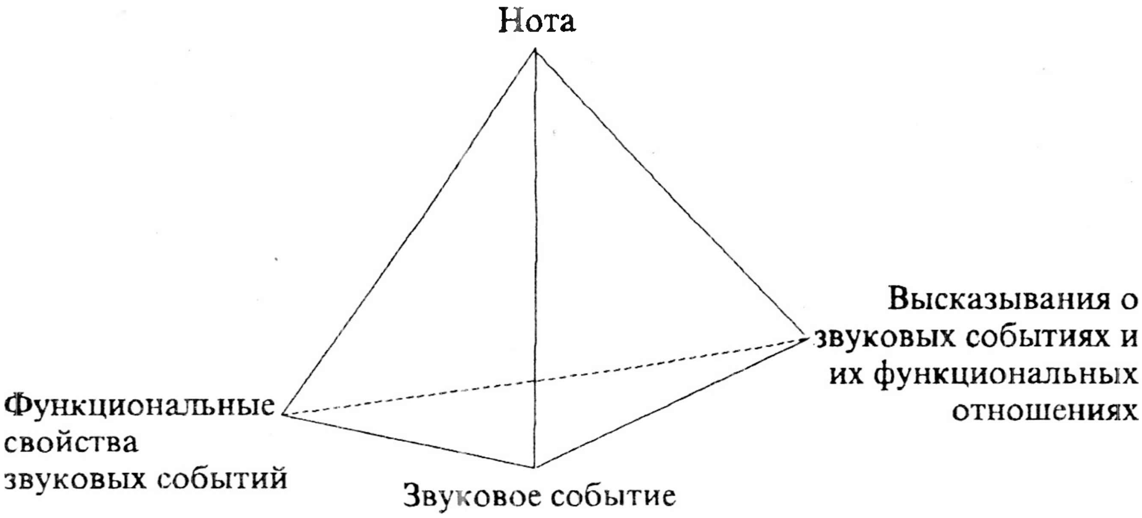
На интеллектуальном уровне музыки создаются "образцы" при использовании "материала" физического уровня музыки (физических свойств звука). Из следующих элементов создаются темы:

- мелодия: образцы высоты, соотношения тонов;
- ритм: образцы, возникающие из манипулирования долготой и мощностью;
- оркестровка: манипулирование тембровыми контрастами.

Теория гармонии оперирует структурными соотношениями тонов (тональность, лады, аккорды и т.д.).

Семантика музыкального языка, соответствующая интеллектуальному уровню, отражена на следующей схеме:

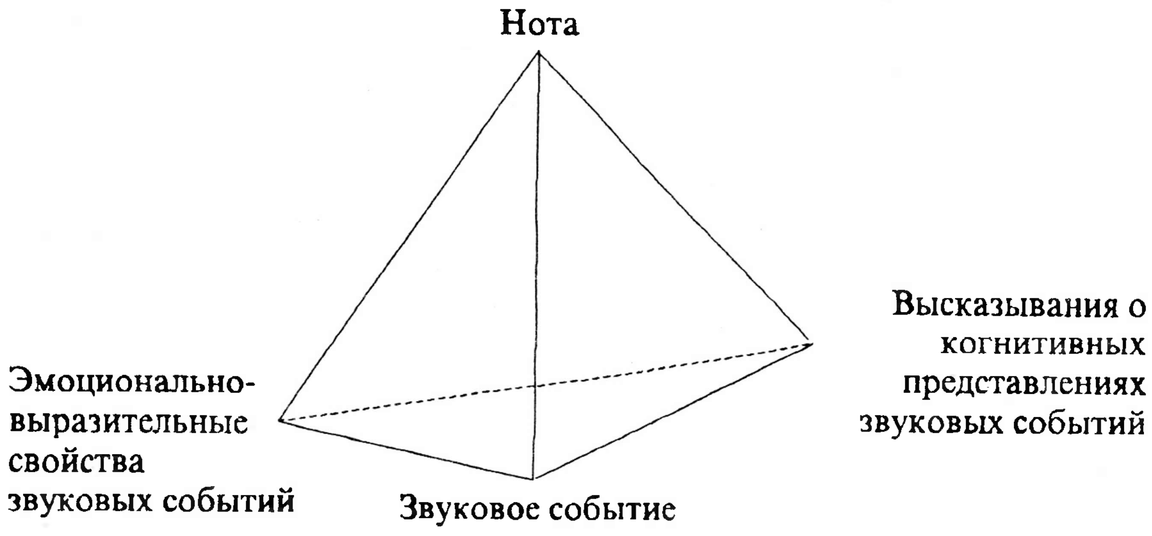
1-3



На эмоциональном уровне музыки рассматриваются психофизические значения музыкальных образцов. Как уже было сказано, в древних культурах отдельно взятому тону могла соответствовать определенная эмоция, а система звуковых сочетаний могла выражать определенное содержание на эмоционально-смысловом уровне. В античности мы находим учение об этосе ладов - каждому ладу сопоставлялась определенная гамма чувств, которую можно было инициировать, играя мелодию в данном ладу. В современной европейской системе нет жестко закрепленного соответствия между музыкальными образцами и эмоциями, однако, полагается, что мажор как лад отражает оптимизм, приподнятость, а минор - пессимизм, грусть. Следует отметить, что, если с точки зрения математического соотношения тонов, каждая тональность определенного лада по своей структуре не отличается от другой, то для музыкального сознания исполнение произведения, скажем в До мажоре или До диез мажоре, принципиально отличается по "окраске" или создаваемому настроению.

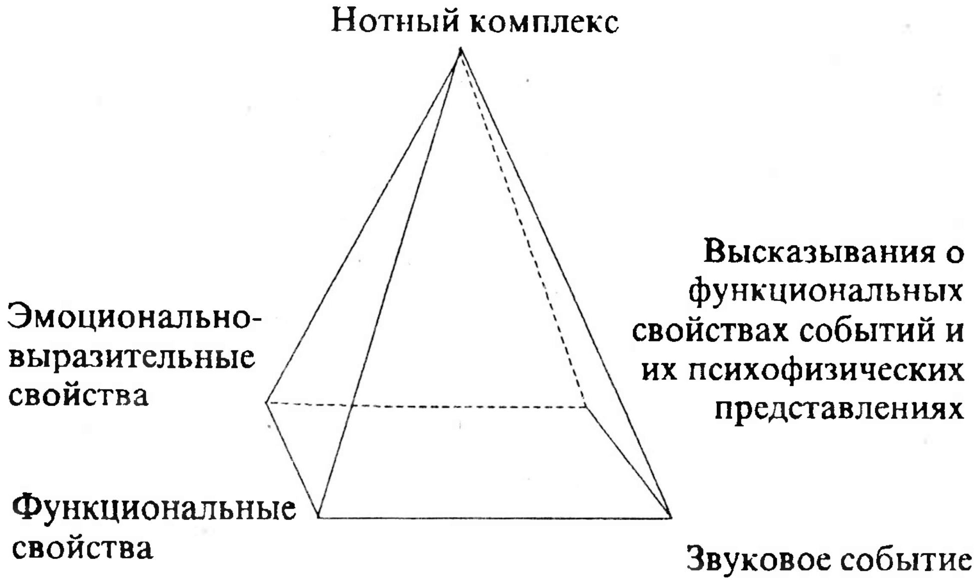
Оценивание музыкальных образцов по эмоционально-выразительным критериям зависит от культурных традиций, исторического времени, норм и установок восприятия, составляющих фон музыкальных представлений общества, индивидуальных особенностей личности. Ввиду вышеупомянутых особенностей психофизического восприятия следующую схему следует рассматривать как отражающую лишь один из выделенных аспектов семантического представления музыкального языка на эмоциональном уровне. При конкретном анализе она с неизбежностью приобретет более детальный вид:

1-4



Следующая схема обобщает три предыдущих в единое многоуровневое семантическое представление:

1-5



Схемы 1-2, 1-3, 1-4 помогают выявить скрытые механизмы, обусловливающие ту или иную онтологию, или структуру мира, отраженную в музыкальном языке. Если рассматривать музыку на физическом или интеллектуальном уровне, то можно считать, что структура музыкального языка воспроизводит акустические особенности физического пространства-времени (элементы внешней, материальной реальности). С точки зрения интеллектуального уровня музыки и интеллектуально-эмоционального уровня, музыкальный язык воспроизводит (реализует) структуры психофизического пространства-времени (элементы внутренней, духовной реальности), выражая свободное определение человеческой ментальности.

2. Грамматика музыкальной нотации

2.1. Категории музыкальной нотации

2.1.1. Стратегия Монтегю в PTQ

Перейдем к построению теоретико-категориальной грамматики письменного музыкального языка. Мы воспользуемся идеями Монтегю, сформулированными им в знаменитой работе "The proper treatment of quantification in ordinary English", в дальнейшем мы будем писать просто PTQ [10]. В этой работе Монтегю строит нормативную грамматику фрагмента английского языка, используя идею Айдукевича о построении теории категорий для естественных языков. Затем Монтегю описывает формальный язык, названный им интенсиональной логикой. Причем точным образом задает синтаксис и строит формальную семантику возможных миров. Следующим шагом является операция перевода выражений точным образом сформулированного естественного языка в язык интенсиональной логики. В результате рассматриваемый фрагмент английского языка получает семантическую интерпретацию. Мы воспользуемся стратегией Монтегю в PTQ, но применительно к языку музыкальной нотации. В связи с этим будут рассмотрены иные категории выражений и будет построен модифицированный язык интенсиональной логики. Формальный анализ нотации основан на представлениях, соответствующих *физическому уровню музыки*.

2.1.2. Категории языка NL

Пусть e, t будут два различных фиксированных объекта. CAT - множество категорий языка музыкальной нотации, есть наименьшее множество X такое, что

(1) e и t в X;

(2) если когда-либо A и B и X, то A/B в X.

В PTQ e используется как категория выражений для *сущностей* (entity) или *выражений для индивидов*. В качестве индивидов мы рассматриваем *звуковые события*. t - категория для *истинностно-значных выражений*, другими словами для *повествовательных предложений о звуковых событиях*. В случае языка музыкальной нотации, кратко NL (notational language), категория t указывает на *формулы, описывающие нотные комплексы*.

Если A и B - категории, то A/B - категория, причем A - производная категория:

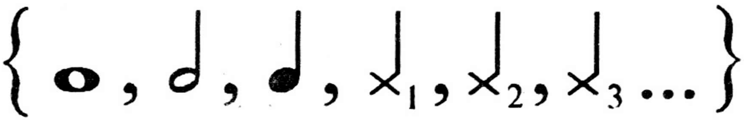
$$B \rightarrow A$$

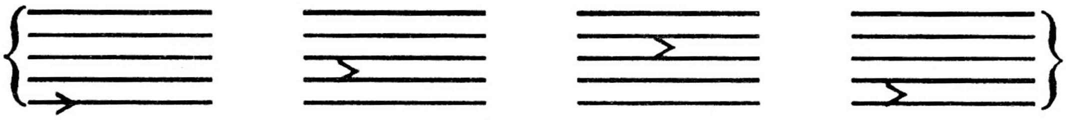
Будут рассмотрены следующие категории языка музыкальной нотации:

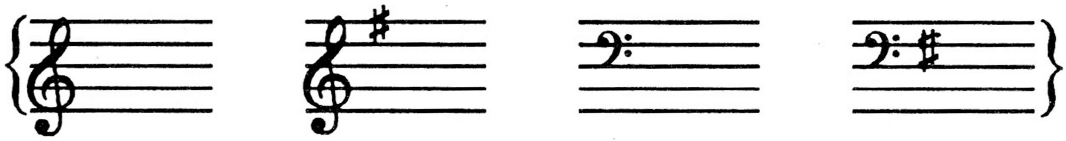
N - категория нотных знаков;
D - категория для знаков, обозначающих длительность нот;
S - категория квалификаторов громкости звучания нот:
QT - категория квалификаторов настройки линий нотного стана или ключей.
Напомним, что категории - не множества, а указатели (индексы) множеств.

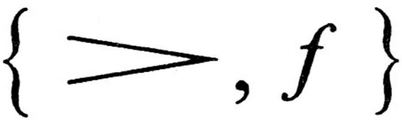
2.1.3. Множество основных выражений (знаковых композиций) категории A

Пусть A есть категория, тогда B_A есть *множество основных выражений (знаковых композиций) категории A*.
$B_e = \varnothing$, $B_t = \varnothing$;

$B_D =$ 

$B_N =$ 

$B_{QT} =$ 

$B_S =$ 

Под основным выражением в настоящем фрагменте понимается элемент из объединения

$$\bigcup_{A \in CAT} B_A.$$

2.1.4. Множество выражений категории A

Кроме множества основных выражений категории A, Монтегю в PTQ рассматривает множество произвольных выражений данной категории. Следуя предложенной им стратегии, введем множества знаковых (нотных) композиций для произвольной категории A.
P_A есть индекс множества знаковых композиций категории A;
P_D есть индекс множества композиций, обозначающих длительность;
P_{QT} есть индекс множества композиций, обозначающих квалификаторы настройки.

2.2. Синтаксические правила NL

2.2.1. Определения S0-S7

S0: $B_A \subseteq P_A$ для любой категории A.

S1: Если $\alpha, \beta \in P_N$, то $F_1(\alpha, \beta)$, $F_2(\alpha, \beta) \in P_N$.

$$F_1(\alpha, \beta) = \xrightarrow{\alpha\beta},$$

где $\xrightarrow{\alpha\beta}$ есть результат комбинации α и β такой, что β следует сразу за α (по горизонтали).

$$F_2(\alpha, \beta) = \alpha | \beta,$$

где $\alpha|\beta$ есть результат комбинации α и β такой, что все знаки в β занимают место по одной вертикали со знаками $>$ в α.

S2: Если $\alpha \in P_{QT}$ и $\beta \in P_N$, то $F_3(\alpha, \beta) \in P_N{}^*$.

$$P_N \subseteq P_N{}^* \text{ и } F_3(\alpha, \beta) = \overset{\alpha\beta}{\Longrightarrow},$$

где $\overset{\alpha\beta}{\Longrightarrow}$ означает, что β следует сразу за α.

S3: Если $\alpha \in P_N{}^*$ и $\beta \in P_D$, то $F_4(\alpha, \beta) \in P_t$.

$F_4(\alpha, \beta) = \alpha > \beta$,

где $\alpha > \beta$ есть результат замены всех вхождений $>$ в α на головку β.

S4: Если $\alpha \in P_S$, $\beta \in P_D$, то $F_5(\alpha, \beta) \in P_Q$.

$$F_5(\alpha, \beta) = \beta/\alpha,$$

где β/α означает, что α занимает место сразу ниже β.

S5: Если $\beta \in P_Q$ и $\beta \notin P_S$, $\alpha \in P_N{}^*$, то $F_6(\alpha, \beta)\ \alpha\in P_t$.

$$F_6(\alpha, \beta) = \alpha > \beta,$$

где $\alpha > b$ есть результат замены всех вхождений $>$ в α на головку β.

S6: Если $\alpha \in P_N{}^*$, $\phi \in P_t$, $\beta \in P_S$, и α и β входят в ϕ,

$$F_7(\phi) = \alpha \lrcorner \phi,$$

где $\alpha \lrcorner \phi$ есть результат замены переменных, входящих в ϕ, на знак $>$.

S7: Если $\alpha, \beta \in P_t$, то $F_8(\alpha, \beta)$, $F_9(\alpha, \beta) \in P_t$.

$$F_8(\alpha, \beta) = \alpha || \beta,$$

где $\alpha||\beta$ означает, что β' следует сразу за α, α и β начинаются с γ, и β' есть β без вхождения γ-элемента;

$||\beta$ следует сразу за α, где α начинается с $\gamma\in P_Q$, β начинается с $\delta \in P_Q$ и $\gamma \neq \delta$.

$$F_9(\alpha, \beta) = \alpha \{| \beta,$$

где $\alpha\{|\beta$ означает, что β занимает место сразу под α.

2.2.2. Примечания к синтаксическим правилам

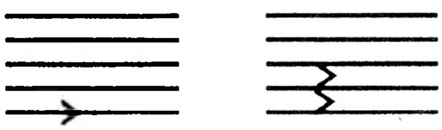
Синтаксические правила дают определение множества P_A для любой категории A. Множество P_A знаковых композиций (или сочленений) определяет понятие *правильно построенного нотного сочленения*. Согласно правилу **S0**, любая знаковая композиция из базового множества категории A является в то же время правильно построенной знаковой композицией множества P_A.

Синтаксическое правило **S1** позволяет конструировать составные комплексы нот. Категория нот N, таким образом, понимается в расширенном смысле. Она обозначает не только отдельно стоящие знаки (не только "один знак"), но и комплексы знаков в их вертикальном и горизонтальном сочленениях. К такой расширенной интерпретации мы прибегаем на основании следующих рассуждений.

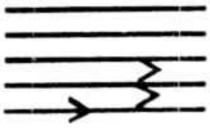
С естественнонаучной точки зрения известно, что простых звуков в природе нет. Отдельно стоящий знак - "одна нота" указывает на одно звуковое событие только с точки зрения психофизиологии человеческого восприятия. Человеческое ухо в звучащем комплексе различает, как правило, лишь основной тон, не дифференцируя дополнительные составляющие звукового комплекса - обертоны.

В музыкальном восприятии обертоны придают окраску основному звучанию - специфический тембр звука. Отсюда отдельно стоящая нота звучит как отдельный звук для слушателя, но с точки зрения физической акустики "один звук" представляет собой сложное звуковое образование. От *тембрового* восприятия звука в музыкальной психологии отличают *гармоническое* восприятие звукового комплекса. Одновременное аккордовое звучание нескольких нот, передаваемое вертикальным сочленением знаков в нотации, воспринимается и как нечто единое, имеющее специфическую эмоциональную выразительность, и в то же время "опытное ухо" улавливает и различает входящие в аккорд звуки. Гармоническое восприятие, если так можно сказать, суть восприятие единого в множественности, а тембровое восприятие - восприятие множественности как единого, как органичной целостности. Отсюда можно допустить, что и отдельная нота, и нотные сочленения могут указывать на отдельное звуковое событие. Можно сказать, что категория N в языке нотации NL указывает на *индивидуальное звуковое событие*, которое не является элементарным, ни с точки зрения физики, ни с точки зрения психофизики.

Функция F_1 определяет горизонтальное сочленение звуковых событий.
Например, пусть α и β есть соответственно:

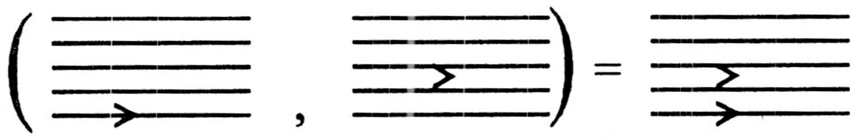


Применение F_1 к α и β строит нотный комплекс $\xrightarrow{\alpha\beta}$, который также принадлежит категории P_N:

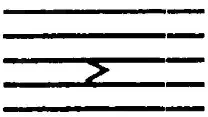


При помощи функции F_2 можно конструировать гармонические сочетания звуков или аккорды.

F_2

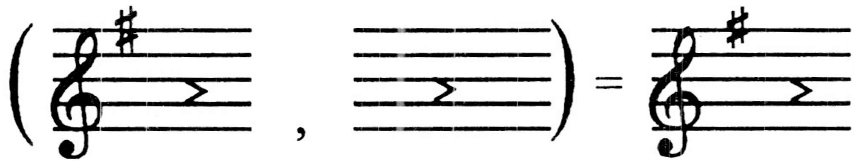


Синтаксическое правило **S2** позволяет уточнять высоту звуков в нотных комплексах. Допустим, у нас имеется знак категории P_N, скажем



Данное обозначение указывает на ноту определенной высоты, но не сказано, какой именно высоты. Выбрав ключ, т.е. знак категории P_{QT}, получаем нотный комплекс (категория P_N*) с точным указанием высоты:

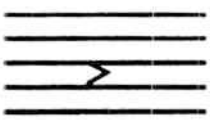
F_3



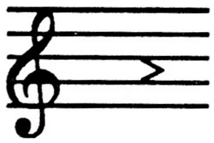
Запись

указывает на ноту высоты 440 Гц при равномерно темперированном строе, другими словами, на ноту ля первой октавы.

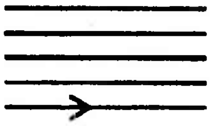
Категория N^* есть расширение категории N. Если знак



интерпретируется как "нота с высотой, но без указания какой именно высоты", то

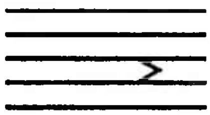


интерпретируется как "нота высоты ля первой октавы".



можно сравнить с употреблением неопределенного артикля "a" в английском языке. "A cat" есть терм и указывает на единственную кошку, но не сказано на какую именно.

можно понимать как аналог употребления определенного артикля "the". "The cat" указывает на единственную, именно "эту" кошку. Отсюда, и знаковое сочленение



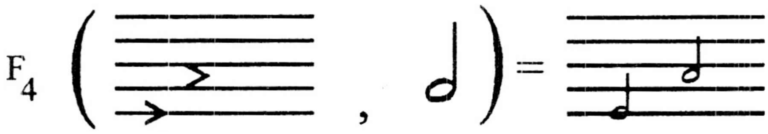
и знаковое сочленение

можно рассматривать как *нотные комплексы* (знаки категории P_N*), которые являются аналогами индивидных термов в естественном языке, но по-разному указывают на объект ("a cat", "the cat").

Поскольку функция F_3 образует знаковые комплексы категории N^* из категории N, следующие сочетания не являются правильно построенными:

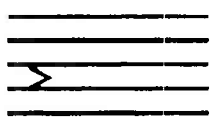
Правило **S3** позволяет образовывать комплексы категории t, т.е. элементарные высказывания о звуковых событиях.

Последнее можно прочесть как "нота фа диез имеет длительность четверть".

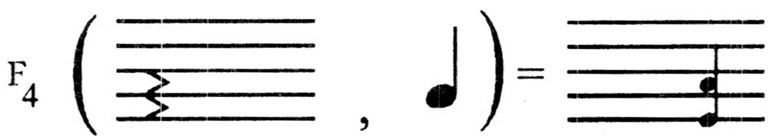


Читается как "ноты

и



имеют длительность половинку".

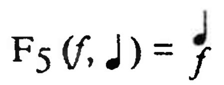


Читается как "нотный комплекс (аккорд)

имеет длительность четверть".

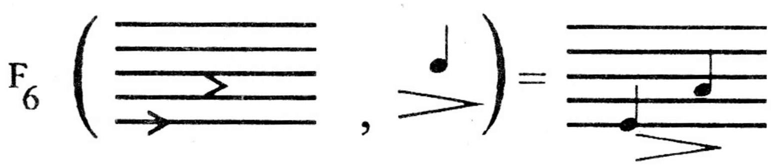
Категория квалификаторов разбивается на две подкатегории: категорию длительности и категорию характеристик звучания. Формально, $P_S \subseteq P_Q$, $P_D \subseteq P_Q$.
P_Q также принадлежат и конъюнкции свойств звуковых событий, формально, $P_S \cap P_D \subseteq P_Q$.

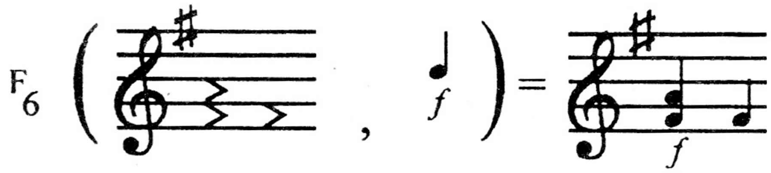
Синтаксическое правило **S4** позволяет получать сложные свойства звуковых событий.



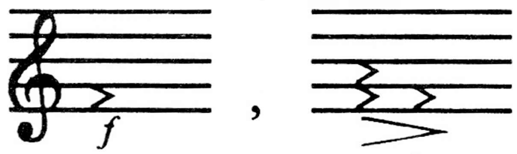
читается как "звучать громко и иметь длительность четверть" или "звучать громко в течение четверти".

Правило **S5** образует описание нотных комплексов из квалификаторов и нот:



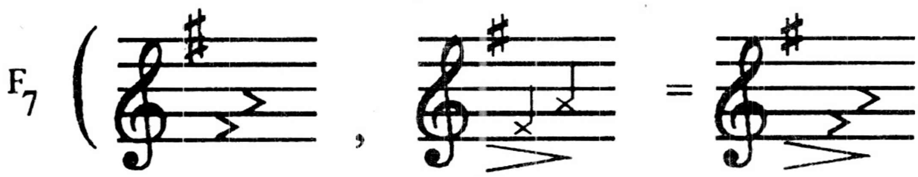


Согласно **S5**, нельзя конструировать описания нотных комплексов из категории S и N^*. Следующие нотные сочленения не являются правильно построенными описаниями (формулами)



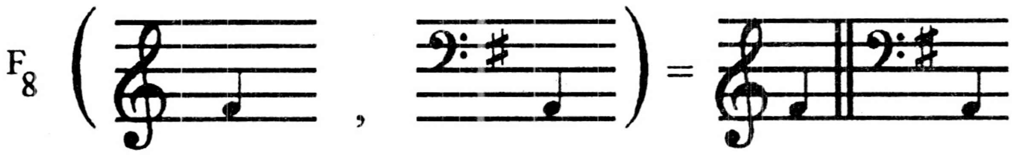
Синтаксическое правило **S6** позволяет из описаний нотных комплексов образовывать нотные комплексы. Функция F_7 представляет операцию, обратную F_4 и F_5, которые образуют описания нотных комплексов из нотных комплексов.

Результат применения F_7 читается "нота фа первой октавы такая, что она звучит громко".
Другой пример.

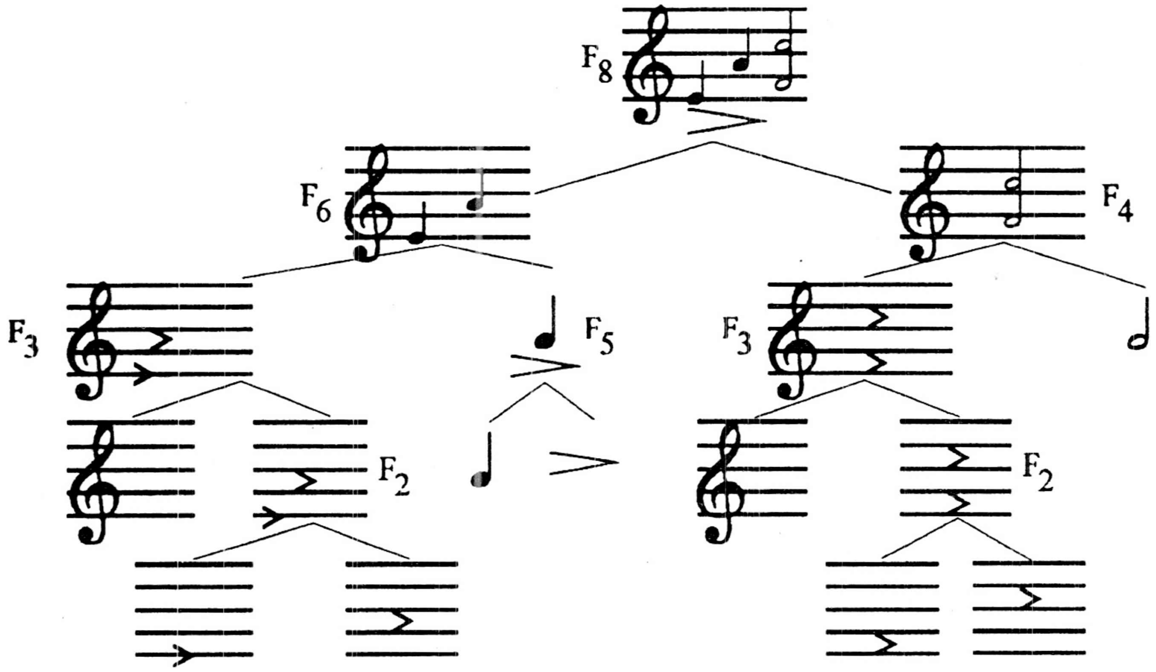


Читается: "ноты фа диез и ля первой октавы такие, что они имеют уменьшающуюся интенсивность".

Правило **S7** соединяет описания нотных комплексов в сложные объединения. Функция F_8 соединяет два описания на одном нотном стане.



Аналитическое дерево



3. Интенсиональная логика

3.1. Синтаксические построения

3.1.1. Интенсиональное множество типов

Пусть e,t и s - фиксированные объекты, отличные друг от друга. TYPE, или множество *типов*, есть наименьшее множество Y, такое что
(1) $e,t \in Y$;
(2) если когда-либо $a, b \in Y$, $<a,b> \in Y$;
(3) если когда-либо $a \in Y$, $<s,a> \in Y$.

Нам понадобится счетное множество переменных и бесконечное множество констант каждого типа. В частности, если n - некоторое натуральное число и $a \in TYPE$, то под $v_{n,a}$ будем понимать n-ую переменную типа a и под CON_a - множество констант типа a.

3.1.2. Множество осмысленных выражений типа a

Определим множество *осмысленных выражений типа* a, то есть ME_a, следующим образом:
(1) каждая переменная и константа типа a принадлежит ME_a;
(2) если $\alpha, \beta \in ME_e$, то $(\alpha \otimes \beta), (\alpha \oplus \beta) \in ME_e$;
(3) если $\alpha \in ME_{<a,b>}$ и $\beta \in ME_a$, то $\alpha(\beta) \in ME_b$;
(4) если $\alpha \in ME_a$ и u есть переменная типа b, то $\lambda u\, \alpha \in ME_{<b,a>}$;
(5) если $\varphi, \psi \in ME_t$, и u - переменная, то $[\varphi \& \psi], \exists u \varphi \in ME_t$;
(6) если $\alpha \in ME_a$, то $[^{in}\alpha] \in ME_{<s,a>}$;
(7) если $\alpha \in ME_{<s,a>}$, то $[^{ex}\alpha] \in ME_a$;
(8) ни что иное, кроме указанного в пунктах (1)-(7), не принадлежит ME_a.

Язык интенсиональной логики $IL^{\oplus}$ отличается от рассматриваемого в PTQ интенсионального языка IL. Во-первых, для того, чтобы представить в логическом языке фрагмент языка музыкальной нотации, нам не потребуются все многообразие средств IL PTQ. Мы взяли лишь те конструкции, которые непосредственно необходимы для перевода фрагмента музыкальной нотации.

Во-вторых, в отличие от IL в PTQ, вводятся специальные операции над осмысленными выражениями типа e, то есть операции над событиями. Операции $\otimes$ и $\oplus$ представляют собой аналоги конъюнктивного сочленения индивидных термов, $\alpha \otimes \beta$ можно прочесть как α и β в вертикальном сочленении (или: α находится на одной вертикальной линии с β), а $\alpha \oplus \beta$ читается как α и β в горизонтальном сочленении (или: β следует за α по горизонтали).

3.1.3. Понятия интенсионала и экстенсионала

Пусть S есть предикатная константа типа <e,t>, m - индивидная константа типа <e>. Тогда, согласно пункту (3), применение функции S к аргументу m дает значение функции, т.е. $S(m)$. $S(m)$ характеризует тип <t>, другими словами $S(m)$ есть предложение.

Допустим, что m есть собственное имя "Мэри", а S обозначает глагол "поет". Тогда $S(m)$ можно перевести как "Поет (Мэри)". "Поет" здесь рассматривается как некоторое свойство индивида Мэри. Очевидно, что любой индивид можно описать через его свойства. Кроме данного свойства "поет", Мэри, возможно, обладает и другими свойствами - "танцует", "имеет длинные волосы", "имеет голубые глаза" и т.д. В языке интенсиональной логики понятию "множество объектов" соответствует выражение, которое имеет тип <<e,t>,t>. Искомое выражение является функцией, в области определения которой находятся предикаты, а значения принадлежат множеству истинностных значений, другими словами, типу <<e,t>,t> соответствует предикат второго порядка. Пусть M обозначает искомый предикат, тогда запись $M(S)$ означает, что "поет" есть одно из (экстенсиональных) свойств множества (экстенсиональных) свойств, характеризующих Мэри.

Наличие s в кортежах типов указывает на интенсиональность типа выражения. При теоретико-множественной трактовке интенсионал любого выражения понимают как функцию, которая в каждом возможном мире выдает в качестве значения экстенсионал данного выражения.

Например, пусть имеются три возможных мира w_0, w_1, w_2. Выражение типа <s,e> интерпретируется как *индивидный концепт* или функция, значением которой в каждом возможном мире будет индивид. К примеру, в w_0 имеем индивид d_0, в w_1 - индивид d_1 в w_2 - индивид d_2.

Предикату типа <e,t> в возможном мире будет соответствовать множество индивидов, выполняющих данный предикат. Например, в w_0 имеется некоторое множество индивидов, относительно которых верно, что они "поют". В w_1 и w_2 имеются иные множества индивидов, которые обладают данным свойством.

Предикат типа <s,<e,t>> есть функция из множества возможных миров в множество истинностных значений. Тип <s,<e,t>> указывает на *интенсиональное свойство индивидов*. В интенсиональном смысле "поет" можно рассматривать как предикат, характеризующий множества индивидов, которые поют в w_0, индивидов, поющих в w_1 и индивидов, поющих в w_2.

Тип <<s,e>,t> характеризует экстенсиональные свойства индивидных концептов, а <s,<<s,e>,t>>, соответственно, является интенсиональным вариантом типа <<s,e>,t>, другими словами, <s,<e,t>> является интенсиональным вариантом экстенсионального типа <e,t>. Если <s,e> указывает на индивидный концепт, то тип <s,<<s,e>,t>> относится к *интенсиональным свойствам индивидных концептов*, а не индивидов.

Выражение экстенсионального типа <<e,t>,t> при теоретико-множественном прочтении представляет *множество свойств экстенсионального типа* <e,t> в каждом возможном мире. Интенсиональный аналог для выражений указанного типа будет тип <s,<<e,t>,t>>. Экстенсионал выражения типа <s,<<e,t>,t>> в данном возможном мире w есть функция, отображающая множества свойств в истинностные значения.

Пусть m есть индивидная константа типа <e>. Следуя PTQ, через m^* обозначим выражение типа <s,<<e,t>,t>>, являющееся *свойством свойств индивида*. Таким образом, m^* понимается как свойство свойств индивида m. Например, если Мэри поет в данном возможном мире, то экстенсионал m^* для данного возможного мира отображает свойство "быть поющим" в 1, т.е. имеет место $m^*(S)$. Кроме того, экстенсионал m^* для данного мира отображает "быть танцующей", "иметь длинные волосы" и все остальные свойства Мэри в 1.

В нашем примере в любом из миров w_0, w_1, w_2 экстенсионал m^* понимается как множество свойств индивида, которые имеют место в соответствующих мирах. Индивид в данном возможном мире описывается через множество своих свойств. В каждом мире имеется свое специфическое описание индивида через его свойства.

3.1.4. Оператор абстракции свойств

Пункт (4) в определении множества осмысленных выражений типа а - ME_a вводит осмысленные выражения с помощью оператора абстракции свойств, или λ-оператора. λ-оператор выделяет сами функции в качестве самостоятельных выражений. Например, если x - есть переменная типа <e>, S - предикатная константа типа <e,t>, то приложение функции S к аргументу x, выдает значения функции $S(x)$ согласно пункту (3) определения ME_a, но сама отдельно стоящая функция S не является правильно построенным выражением. Другими словами, не попадает в множество правильно построенных выражений языка IL. С помощью оператора абстракции свойств можно от значений функции перейти к рассмотрению самих функций в качестве самостоятельных выражений. Выражение $\lambda x[S(x)]$ можно прочесть как "x такой, что x есть S" (или множество x таких, что x поет").

Если $S(x)$ имеет тип <t>, x - тип <e>, то $\lambda x[S(x)]$ имеет тип <e,t>. $\lambda x[S(x)]$ обозначает функцию, которая имеет любые значения x в качестве своего аргумента, но не определяет точно, какое именно значение приложимо к данной функции. $\lambda x[S(x)]$ указывает на множество возможных значений функции, состоящее из объектов, которые могут быть семантическими значениями переменной x.

С помощью пункта (3) определения ME_a можно образовать следующий сложных предикат:

$$\lambda x[S(x)](m).$$

$\lambda x[S(x)]$ берется в качестве α типа <e,t>, а m - в качестве β типа <e>. В итоге получится выражение типа <t>, т.е. предложение $\lambda x[S(x)](m)$ можно прочесть как "быть x таким, что x поет" есть одно из экстенсиональных свойств Мэри".

Выражение $\lambda x[S(x)](m)$ аналогично $S(x)$. Очевидно, что

$$\lambda x[S(x)](m) \to S(m).$$

Данное преобразование можно обобщить в виде правила лямбда-конверсии, впервые сформулированного Черчем [6].

Определение 3-1.

$\lambda x[...x...](\alpha) \rightarrow ...\alpha...$

Все вхождения переменной x, связанной λ-оператором, можно заменить на константу α того же типа, что и x. Обобщая, можно констатировать:

Определение 3-2.

Если δ типа a и переменная u-типа b, то $\lambda u[\delta]$ есть выражение типа $\langle b, a\rangle$.

Рассмотрим примеры, в которых фигурируют сложные свойства. Если V есть переменная типа $\langle e,t\rangle$ и m есть имя типа $\langle e,t\rangle$,то выражение

$\lambda V[V(m)]$

будет иметь тип $\langle\langle e,t\rangle,t\rangle$. Причем $V(m)$ имеет тип $\langle t\rangle$. $\lambda V[V(m)]$ с семантической точки зрения представляет множество экстенсиональных свойств в данном возможном мире.

В пункте (5) определения ME_a мы избрали лишь те средства IL, которые нам понадобятся при переводе нотных комплексов.

Пункты (6) и (7) вводят в синтаксис выражения с явным указанием на их экстенсиональность и интенсиональность. Выражение $[^{in}\alpha]$ рассматривается как обозначающее (или имеющее в качестве своего экстенсионала) интенсионал выражения α. Выражение $[^{ex}\alpha]$ осмысленно только в случае, если α является интенсиональным выражением. Именно в этом случае $[^{ex}\alpha]$ указывает на соответствующий экстенсионал. Допустим, что α имеет тип $\langle s,\langle e,t\rangle\rangle$, тогда $^{in}\alpha$ имеет тип $\langle s,\langle s,\langle e,t\rangle\rangle\rangle$, а $^{ex}\alpha$ имеет тип $\langle e,t\rangle$.

3.2. Семантика IL⊕

3.2.1. Множество возможных значений. Перейдем к построению семантики языка IL⊕. Пусть W есть непустое множество возможных миров, A - есть множество индивидов. Следующее определение вводит *множество возможных значений выражений типа а.* Обозначим его через D_a. Любое множество D_a задается относительно множеств A и W.

3-3

$$D_{e,A,W} = 2^A;$$
$$D_{t,A,W} = \{0,1\};$$
$$D_{\langle a,b\rangle,A,W} = D_{b,A,W}^{\;D_{a,A,W}}$$
$$D_{\langle s,a\rangle,A,W} = D_{b,A,W}^{\;W}$$

В отличие от PTQ выражения для индивидов интерпретируются не на элементах множества A, а на подмножествах. Данное обстоятельство диктуется трактовкой звуковых событий, согласно которой любая последовательность элементарных звуковых событий есть звуковое событие.

Согласно 3-3, если D_a и D_b - множества возможных денотатов, то и $D_{<a,b>}$ также является множеством возможных денотатов, состоящим из функций, отображающих множество D_a в множество D_b. Например, множество $D_{<e,t>}$ состоит из функций, отображающих индивиды (элементы множества 2^A или подмножества A) в множество истинностных значений T (или {0,1}).

Множество $D_{<s,t>}$ есть множество функций из множества миров W в множество возможных значений выражений типа a, т.е. D_a. Например, $D_{<s,t>}$ есть множество функций из W в множество T. Соответственно, множество $D_{<<e,t>,t>}$ есть множество функций, отображающих характеристические функции из множества $D_{<e,t>}$ в T.

3.2.2. Интерпретация

Под *интерпретацией* будем понимать следующую упорядоченную пятерку $<A, R_{\otimes}, R_{\oplus}, W, F>$, такую, что

3-4

(1) A,W есть непустые множества индивидов и возможных миров, соответственно,

(2) $R_{\otimes}$ и $R_{\oplus}$ есть бинарные отношения, заданные на A. $R_{\otimes}$ есть отношение порядка, а $R_{\oplus}$ - отношение равенства;

(3) F есть функция, имеющая в качестве области определения множество всех констант, и такая, что

(a) если $\alpha \in CON_e$, то $F(\alpha) \in A^W$.

Расширим функцию F до функции, приписывающей значения индивидным термам.

(b) Если α, β есть индивидные термы (выражения типа <e>), то

$F(\alpha), F(\beta) \in (2^A)^W$;

$F(\alpha\otimes\beta) = <F(\alpha), F(\beta)>$ и для любых членов s_{i1}, s_{i2} последовательности $<F(a),F(b)>$ верно, что $s_{i1}\ R_{\otimes}\ s_{i2}$;

$F(\alpha\oplus\beta) = <F(\alpha), F(\beta)>$ и для любых членов s_{i1}, s_{i2} последовательности $<F(\alpha),F(\beta)>$ верно, что $s_{i1}\ R_{\oplus}\ s_{i2}$;

(c) если $\alpha \in CON_e$ и $\alpha \notin CON_e$, то

$F(\alpha) \in D_{b,A,W}{}^W$.

Согласно 3-4, индивидным константам приписываются элементы множества A, т.е. элементарные звуковые события. Индивидным термам, т.е. выражениям типа <e>, приписываются последовательности звуковых событий, другими словами, элементы множества 2^A. Пусть c, d являются подмножествами A. $cR_{\otimes}d$ можно прочесть как "звуковое событие c следует за звуковым событием d по времени вступления; $cR_{\oplus}d$ читается как "звуковое событие c совпадает по времени вступления со звуковым событием d" или "звуковое событие c звучит одновременно со звуковым событием d".

Функция F приписывает звуковому событию $(\alpha\otimes\beta)$ последовательность звуковых событий, следующих друг за другом по времени звучания. Функция F приписывает звуковому событию $(\alpha\oplus\beta)$ созвучие звуковых событий, т.е. некоторое множество звуковых событий, звучащих одновременно. Для любых других констант, не принадлежащих типу <e>, функция F определяется обычным образом.

3.2.3. Взаимоопределение экстенсионала и интенсионала.

Предположим, что $\mathfrak{R}$ есть интерпретация, имеющая форму $\langle A,R_{\otimes},R_{\oplus},W,F\rangle$. Допустим, что g есть $\mathfrak{R}$-приписывание значений переменным, т.е. функция, имеющая в качестве области определения множество всех переменных, и такая, что

3-5 $$g(u) \in D_a,$$

где *u* есть переменная типа a. Заметим, что, следуя Монтегю в PTQ, интерпретация переменных дается экстенсиональным способом.

Если α - осмысленное выражение, то под $|\alpha|^{g,W}$ будем понимать интенсионал α относительно g и W. Под $|\alpha|^{g,w}$ будем понимать экстенсионал α относительно $\mathfrak{R}$, g и W.

Следующие утверждения взаимноопределяют экстенсионал и интенсионал:

3-6 (i) $|\alpha|^{g,W} = |{}^{in}\alpha|^{g,w}$;

(ii) $|\alpha|^{g,w'} = |{}^{in}\alpha|^{g,w'}(w')$.

Выражение "$|\alpha|^{g,W}$ есть интенсионал α" означает то же, что и "экстенсионал ${}^{in}\alpha$ относительно g и любого w" ; (ii) означает, что экстенсионал α в возможном мире w′ есть значение $|{}^{in}\alpha|^{g,w}$, когда функция экстенсионала применяется к w′.

Определение 3-7.

(a) Если α имеет тип <s,a>, то ${}^{ex}\alpha$ имеет типа <a>.
(b) Если α имеет тип <s,a>, то $|{}^{ex}\alpha|^{g,w'} = |\alpha|^{g,w}(w')$.

3.2.4. Понятие истины

Определим понятие истинной формулы относительно $\mathfrak{R}$, g и W.

(1) Если α - константа или индивидный терм, то

$|\alpha|^{g,w} = [F(\alpha)](w)$;

(2) если α - переменная, то $|\alpha|^{g,w} = g(\alpha)$;

(3) если $\alpha \in ME_a$ и *u* - переменная типа b, то $\lambda u[\alpha]_{g,w}$ есть та самая функция h с областью D_b такая, что для любого объекта *x* в данной области $h(x) = [\alpha]_{g',w}$, где g′ есть приписывание значений, аналогичное g, кроме возможного случая, когда

$g'(u)$ есть объект x;

(4) если $\alpha \in ME_{<a,b>}$ и $\beta \in ME_a$, тогда

$[\alpha(\beta)]_{g,w}$ есть $[\alpha]_{g,w}([\beta]_{g,w})$,

т. е. результат приложения функции $[\alpha]_{g,w}$ к аргументу $[\beta]_{g,w}$;

(5) если φ и ψ есть ME_t, то $|\varphi\&\psi|^{g,w} = 1$ е.т.е.

$|\varphi|^{g,w} = |\psi|^{g,w} = 1$;

(6) если $\varphi \in ME_t$ и u - переменная типа α, тогда

$|\exists u[\varphi]|^{g,w} = 1$ е.т.е. существует $x \in D_a$ такой, что $|\varphi|^{g',w} = 1$,

где g' - функция такая же, как и в пункте (3);

(7) если $\alpha \in ME_a$, то $|^{in}\alpha|^{g,w}$ есть та функция h с областью W, что для всех w′ в W

h(w′) есть $|\alpha|^{g,w'}$;

(8) если $\alpha \in ME_{<s,a>}$, тогда $|^{ex}\alpha|^{g,w}(w)$.

Если φ есть формула, т.е. член множества ME_t, то φ *истинна относительно* $\mathfrak{R}$, w е.т.е. $j^{\mathfrak{R},w,g} = 1$ для каждого $\mathfrak{R}$-приписывания g.

3.2.5. Интенсиональное сочленение формул

Монтегю в PTQ различает два типа сочленения формул. Экстенсиональный тип сочленения $\alpha(\beta)$ и интенсиональный тип сочленения $\alpha\{\beta\}$. Если $\alpha \in ME_{<a,t>}$, а $\beta \in ME_a$, то формула $\alpha(\beta)$ рассматривается как утверждение о том, что объект, обозначаемый β, есть *член множества, обозначаемого* α (или характеристической функцией данного множества). Если $\alpha \in ME_{<s,<a,t>>}$, $\alpha, \beta \in ME_a$, то

$\alpha\{\beta\}$ есть выражение $[^{ex}\alpha](\beta)$,

что означает, что β обладает (интенсиональным) свойством, обозначаемым α.

В качестве примера комбинации экстенсиональных и интенсиональных сочленений, рассмотрим выражения с λ-оператором.

Пусть выражение $\lambda V[V(m)]$ имеет тип <<e,t>,t>. Выражение $\lambda x[S(x)]$ имеет тип <e,t>. Следующее выражение можно образовать, согласно пункту 3 определения ME_a:

3-8 $\lambda V[V(m)]\ (\lambda x[S(x)])$.

3-8 имеет тип <t>. Согласно определению λ-конверсии справедливо следующее преобразование:

$\lambda V[V(m)]\ (\lambda x[S(x)]) = \lambda x[S(x)]\ (m)$.

В интенсиональном варианте имеет место $^{in}\lambda x[S(x)]$. Данное выражение имеет тип <s,<e,t>> и прочтение "свойство быть x таким, что x поет".

Если P-предикатная переменная типа <s,<e,t>>, то семантическим значением выражения

$\lambda P[P\{m\}]$

относительно g,w будет функция, отображающая свойства, которыми Мэри обладает в мире w в 1. Данная функция имеет тип <<s,<e,t>>,t>.

Предикатное сочленение из $\lambda P[P\{m\}]$ и $^{in}\lambda x[S(x)]$ можно получить следующим образом:

$\lambda P[P\{m\}]\ (^{in}\lambda x\ [S(x)])$.

Последнее утверждает, что свойство быть x таким, что x поет, есть одно из свойств Мэри. Данное утверждение истинно, е.т.е. Мэри действительно обладает указанным свойством в w. Вышеуказанное утверждение можно преобразовать в

$^{in}\lambda x[S(x)]\{m\}$ (λ-конверсия)

читается как "Мэри имеет свойство быть x таким, что x танцует".

Некоторые исследователи, в частности Куркела [13, p.91], вводят в рассмотрение определения *конверсии скобок и exin-элиминации*:

Определение 3-9.

$^{in}\beta\{\alpha\} \rightarrow {}^{exin}\beta(\alpha)$ конверсия скобок

$^{exin}\beta(\alpha) \rightarrow \beta(\alpha)$ exin-элиминация

Согласно введенным определениям можно провести дальнейшие упрощения в рассматриваемом примере:

$^{exin}\lambda x\ [S(x)]\ (m)$ конверсия скобок

$\rightarrow \lambda x[S(x)](m)$ exin-элиминация

$\rightarrow S(m)$ λ-конверсия.

4. Перевод языка музыкальной нотации NL в $IL_{\oplus}$

4.1. Специальные средства IL

Мы будем использовать следующие средства языка $IL_{\oplus}$:

(1) константы типа <e>, представляющие индивиды:

$G, A, c, e, e^1, f^1, fis^1, a^1, c^2$;

(2) переменные типа <e> по индивидам: x_n есть $v_{n,e}$ для каждого натурального числа n

x_1 есть x,

x_2 есть y,

x_3 есть z,

x_4 есть x' и т.д.

(3) индивидные термы типа <e>: q_1 есть $t_{n,e}$ для каждого натурального числа n

q_1 есть q,

q_2 есть r,

q_3 есть q',

q_4 есть r' и т.д.

(4) константы типа <e,t>:

T, W, H, C, D, F, T, Tr, B, B^{fis};

(5) переменные типа <e,t>: S_n есть $v_{n,<e,t>}$ для каждого натурального числа *n*;

(6) термы типа <s,<e,t>>: *V, V', V''* и т.д.

(7) переменные типа <s,<e,t>> по свойствам индивидов: P_n есть $v_{n,<s,<e,t>>}$ для каждого натурального числа *n*

P_1 есть *P*,

P_2 есть *Q*,

P_3 есть *R*,

P_4 есть *P'*.

G, A обозначают ноты соль и ля большой октавы, *c, e* обозначают ноты до и ми малой октавы, e^1, f^1, fis^1, a^1 обозначают ми, фа, фа диез и ля первой октавы, соответственно, c^2 есть до второй октавы.

Предикаты, указанные в пункте (3) можно перевести следующим образом:

T - "быть тоном" или "быть звуковым событием определенной высоты" (tone);

W - "иметь целую длительность" (whole);

H - " иметь половину целой длительности" (half);

C - "иметь четверть целой длительности" (crotchet);

D - "иметь уменьшающуюся интенсивность" (diminuendo);

F - "иметь громкую мощность звучания" (forte);

Tr - "звучать при скрипичной настройке" или "звучать при настройке в скрипичном ключе" (tremble clef);

B - "звучать при басовой настройке" или "звучать при настройке в басовом ключе" (bass clef);

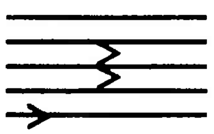
Tr^{fis} - "звучать при настройке в скрипичном ключе с фа диезом";

B^{fis} - "звучать при настройке в басовом ключе с фа диезом".

4.2. Перевод

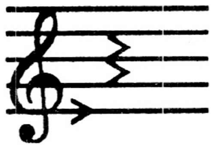
4.2.1. Абсолютная и относительная высота звука

Запись типа



без указания ключа-квалификатора настройки означает тот факт, что во внимание принимается относительная высота нот, т.е. высота нот, соотнесенная с некоторой фиксированной высотой, именуемой камертоном. Данный принцип позволяет, например, использовать настройку "по чистым интервалам", настройки различных эпох и культурных традиций и т.д.

Запись



конкретизирует настройку, указывая на тональность До мажор или ля минор темперированного строя. Для уточнения настройки введем функцию P_l, которая по заданной высоте фиксированной ноты выдает требуемую высоту другой ноты:

4-1 $\qquad P_l: A \rightarrow N.$

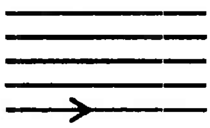
P_l определена на множестве A или множестве звуковых событий; N есть множество натуральных чисел. Как обычно, высота измеряется в герцах. Применительно к высоте рассматриваются *абсолютная* и *относительная* высота звука. Абсолютная высота измеряется числом колебаний в амплитуде. В музыке огромное выразительное значение имеет относительная высота звука, сравниваемая с другими высотами.

В принципе, с помощью функции P_l можно задать как абсолютную высоту, так и относительную. Например, рассмотрим ситуацию, в которой нота *c* (до) малой октавы является фиксированной нотой. Пусть ее высота равна l. Тогда, если следовать теории "чистых интервалов", $P_l(c^2) = 2l$.

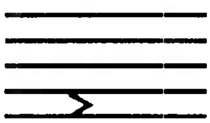
4.2.2. Правила перевода.

T0.

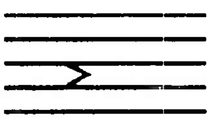
(a) переводится в



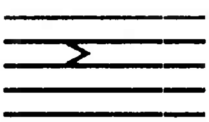
$${}^{in}\lambda P\, \exists x\, [N(x)\ \&\ P\{x\}]$$



$${}^{in}\lambda P\, \exists y\, [N(y)\ \&\ P\{y\}]$$



$${}^{in}\lambda P\, \exists z\, [N(z)\ \&\ P\{z\}]$$



$${}^{in}\lambda P\, \exists x'\, [N(x')\ \&\ P\{x'\}]$$

b)

 переводится в ${}^{in}\lambda x\ [W(x)]$

 переводится в ${}^{in}\lambda y\ [H(y)]$

 переводится в ${}^{in}\lambda z\ [C(z)]$

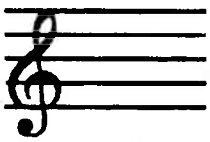
 переводится в ${}^{in}\lambda x'\ [Sn(x')]$

c)

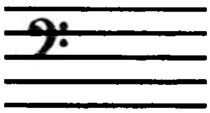
 переводится в ${}^{in}\lambda x\ [D(x)]$

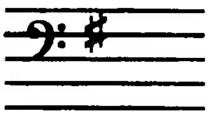
f переводится в ${}^{in}\lambda y\ [F(y)]$

d)

 переводится в ${}^{in}\lambda x\ [Tr(x)]$

 переводится в ${}^{in}\lambda y\ [Tr^{fis}(y)]$

 переводится в ${}^{in}\lambda z\ [B(z)]$

 переводится в ${}^{in}\lambda x'\ [B^{fis}(x')]$

Пусть f есть функция перевода категорий языка нотации NL в интенсиональный язык $IL^{\oplus}$. Нетрудно заметить, что выражения основных категорий переводятся в выражения следующих типов $IL^{\oplus}$:

f(N) = <s,<<s,<e,t>>,t>>

f(D) = <s,<e,t>>

f(S) = <s,<e,t>>

f(QT)= <s,<e,t>>

f(t) = t

Для производных категорий имеем:

$f(Q) = <s,<e,t>>$

$f(N^*) = <s,<<s,<e,t>>,t>>$

T1.

Если $\alpha, \beta \in P_N$ и α и β соотносятся с r, q, соответственно, то

$F_1(\alpha, \beta)$ переводится в ${}^{in}\lambda P \exists r \exists q\ [N(r \otimes q)\ \&\ P\{r \otimes q\}]$;

$F_2(\alpha, \beta)$ переводится в ${}^{in}\lambda P \exists r \exists q\ [N(r \oplus q)\ \&\ P\{r \oplus q\}]$.

T2.

Если $\alpha \in P_{QT}$ и $\beta \in P_N$, β соотносится с индивидным термом q, α соотносится с предикатной константой A, то

$F_3(\alpha, \beta)$ переводится в ${}^{in}\lambda P \exists q\ [N(q)\ \&\ A(q)\ \&\ P\{q\}]$.

T3.

Если $\alpha \in P_{N*}$, $\beta \in P_D$, то

если α не имеет вид $\underrightarrow{\gamma\delta}$ и α', β' есть перевод α и β, соответственно, то

$F_4(\alpha, \beta)$ переводится в ${}^{ex}\alpha'(\beta')$;

если α имеет вид $\underrightarrow{\gamma\delta}$, γ', δ' есть перевод γ,δ и γ,δ соотносятся с индивидными термами q и r, соответственно, то $F_4(\underrightarrow{\gamma\delta}, \beta)$ переводится в

${}^{ex}\gamma'(\beta')\ \&\ {}^{ex}\delta'(\beta')\ \&\ {}^{in}\lambda P\ [P\ \{r \otimes q\}]$.

T4.

Если $\alpha \in P_S$, $\beta \in P_D$, α, β соотносятся с предикатными термами A, A$'$, соответственно, то

$F_5(\alpha, \beta)$ переводится в ${}^{in}\lambda x\ [V(x)\ \&\ V'(x)]$.

T5.

Если $\beta \in P_Q$ и $\beta \notin P_S$, $\alpha \in P_{N*}$ и α', β' есть перевод α и β, соответственно, то

$F_6(\alpha, \beta)$ переводится в ${}^{ex}\alpha'(\beta')$.

T6.

Если $\alpha \in P_{N*}$, $\varphi \in P_t$, α входит в φ, $\beta \in P_S$ и β входит в φ, то, если, q есть индивидный терм, соотнесенный с α, V есть предикатный терм, соотнесенный с β, то

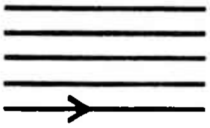
$F_7(\varphi)$ переводится в ${}^{in}\lambda P\ [V(q)\ \&\ P\{q\}]$.

T7. Если $\alpha, \beta \in P_t$ α', β' есть перевод α и β, соответственно, то

$F_8(\alpha, \beta)$ переводится в $(\alpha'\ \&\ \beta')$.

4.3. Примечания к переводу

4.3.1. Примечания к T0



переводится в ${}^{in}\lambda P\ \exists x\ [N(x)\ \&\ P\{x\}]$. Последнее есть выражение категории <s,<<s,<e,t>>,t>, т.е. свойство свойств звуковых событий, имеющих высоту $P(x)$. Экстенсионал данного выражения в каждом мире есть множество свойств звукового события, имеющего высоту $P(x)$:

$$\lambda P\ \exists x\ [N(x)\ \&\ P\{x\}].$$

Последнее можно прочесть как "в данном мире найдется по крайней мере одно звуковое событие, имеющее высоту $P(x)$ и имеющее свойство быть таким, что P". Является характеристической функцией, отображающей свойства звукового события, имеющего высоту $P(x)$ в 1.

♩ ${}^{in}\lambda z\ [C(z)]$

есть выражение категории <s,<e,t>>. Можно перевести как "свойство звукового события быть z таким, что z имеет четвертную длительность".

n ${}^{in}\lambda x'\ [Sn(x')]$

"свойство звукового события быть z таким, что z имеет длительность Sn".

${}^{in}\lambda x\ [D(x)]$

"свойство звукового события быть z таким что z имеет уменьшающуюся длительность".

${}^{in}\lambda y\ [Tr^{fis}(y)]$

"свойство звукового события y быть y таким, что y звучит при настройке в скрипичном ключе с фа диезом".

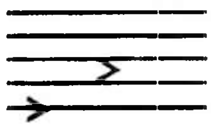
4.3.2. Примечания к T1-T7

Согласно правилу **T1**, нотные комплексы, т.е. горизонтальные ($\xrightarrow{\alpha\beta}$) и вертикальные ($\alpha \mid \beta$) сочленения нот, переводятся в свойства свойств сложных звуковых событий. Следуя общей стратегии понимания звуковых событий, выражение ($\xrightarrow{\alpha\beta}$) языка нотации переводится в выражение интенсионального языка, которое является свойством свойств звукового события $r \otimes q$, т.е. звукового события такого, что в нем звуковое событие q следует за звуковым событием r.

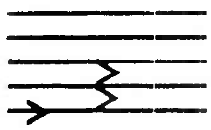
($\alpha | \beta$) переводится в выражение, являющееся свойством свойств звукового события, такое что звуковое событие r звучит одновременно со звуковым событием q.

Выражения ${}^{in}\lambda P \exists r \exists q[N(r \otimes q) \& P\{r \otimes q\}]$ и ${}^{in}\lambda P \exists r \exists q[N(r \oplus q) \& P\{r \oplus q\}]$ имеют тип <s,<<s,<e,t>>,t>>.

Примеры переводов:



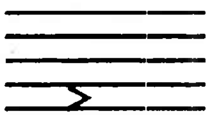
${}^{in}\lambda P \exists x \exists y\ [N(x \otimes y)\ \&\ P\{x \otimes y\}]$



${}^{in}\lambda P \exists x \exists y \exists z[N(x \otimes (y \oplus z) \& P\{x \otimes (y \oplus z)\}]$

Правило **T2** переводит нотные комплексы с определенной высотой, т.е. в фиксированном ключе, в свойства свойств звуковых событий с фиксированной высотой.
Пусть α есть

а β есть



Значение функции F3(α, β) графически выглядит как

Согласно **T2**, переводом F3(α, β) будет следующее выражение IL⊕:

$${}^{in}\lambda P\exists y[N(y)\ \&\ Tr^{fis}(y)\ \&\ P\{y\}]$$

Последнее можно прочесть как "найдется звуковое событие y такое, что y имеет определенную высоту и звучит при скрипичной настройке и свойство быть P есть одно из свойств y". Настройка или указание ключа конкретизирует высоту тона. При условии конкретизации настройки звуковое событие приобретает определенность. Например,

указывает на единичное звуковое событие, а именно на ноту фа диез первой октавы. Отсюда вполне правомерен иной вариант перевода:

$${}^{in}\lambda P[N(fis^1)\ \&\ Tr^{fis}(fis^1)\ \&\ P\{fis^1\}].$$

Последнее также можно сократить до ${}^{in}\lambda P[P\{fis^1\}]$, что можно прочесть как "свойство быть P таким, что P есть свойство звукового события fis первой октавы". Для обозначения свойства свойств индивидов Монтегю в PTQ вводит специальный знак *. Например, если m - индивидная константа типа <e>, то m^* есть выражение ${}^{in}\lambda P[P\{m\}]$ типа <s,<s,<e,t>>,>. Следуя этой стратегии, выражение

$${}^{in}\lambda P[N(fis^1)\ \&\ Tr^{fis}(fis^1)\ \&\ P\{fis^1\}]$$

можно обозначить через fis^{1*}.

Правило **T2** для нот, т.е. выражений базовой категории B_N можно переформулировать следующим образом:

T2⁰.

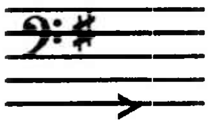
Если α принадлежит B_{QT} и β принадлежит B_N, то α переводится в предикатную константу A, β переводится в индивидную константу r, а F3(α,β) переводится в

$${}^{in}\lambda P[N(r)\ \&\ A(r)\ \&\ P\{r\}]$$

Можно рассматривать следующие сокращения для выражений категории B_N:

переводится в ${}^{in}\lambda P[N(f^1)\ \&\ Tr(f^1)\ \&\ P\{f^1\}]$ - сокращенно f^{1*} - свойство свойств звукового события фа первой октавы.

$^{in}\lambda P[N(a^1)\&Tr(a^1)\&P\{a^1\}]$ - сокращенно a^{1*} - свойство свойств звукового события ля первой октавы.



$^{in}\lambda P[N(G)\ \&\ B^{fis}(G)\ \&\ P\{G\}]$ - сокращенно G^* - свойство свойств звукового события соль большой октавы.
Другие примеры переводов для правил **T2**.

$^{in}\lambda P[N(fis^1\oplus a^1)\&Tr^{fis}(fis^1\oplus a^1)\&P\{fis^1\oplus a^1\}]$
сокращенно $(fis^{1*}\oplus a^1)^*$

$^{in}\lambda P[N(e^1\otimes f^1)\ \&\ Tr(e^1\otimes f^1)\ \&\ P\{e^1\otimes f^1\}]$ сокращенно - $(e^1\otimes f^1)^*$.

Правило перевода **T3** образует высказывания о звуковых событиях в форме предикатов.
Пусть α есть

β есть

Перевод α' есть выражение интенсиональной логики

$$^{in}\lambda P[N(f^1)\ \&\ Tr(f^1)\ \&\ P\{f^1\}]$$

Перевод β' есть выражение $^{in}\lambda z\ [C(z)]$. Сочленяя α' с β', получаем

$$^{exin}\lambda P[N(f^1)\ \&\ Tr(f^1)\ \&\ P\{f^1\}](^{in}\lambda z\ [C(z)]).$$

Следуя принятому ранее сокращению, можно предложить следующие варианты перевода:

$$^{exin}\lambda P[P\{f^1\}] \text{ и } ^{ex}f1^{*}(^{in}\lambda z\ C(z)).$$

Последнее читается: "свойство быть z таким, что z имеет длительность четверть и является одним из свойств звукового события фа первой октавы в данном возможном мире".

Допустимы следующие преобразования:

$^{exin}\lambda P[P\{f^1\}](^{in}\lambda z\ C(z))$
$\rightarrow \lambda P[P\{f^1\}](^{in}\lambda z\ C(z))$ exin-удаление
$\rightarrow {}^{in}\lambda z\ C(z)\{f^1\}$ λ-конверсия
$\rightarrow {}^{exin}\lambda z\ [C(z)](f^1)$ конверсия скобок
$\rightarrow \lambda z\ [C(z)](f^1)$ exin- удаление
$\rightarrow C(f^1)$ λ-конверсия.

$C(f^1)$ читается "звуковое событие фа первой октавы имеет длительность четверть".

Примеры других переводов.

переводится в $^{exin}\lambda P[P\{f^1\oplus a^1\}](^{in}\lambda y\ H(y))$. Преобразовав последнее в $H(f^1\oplus a^1)$, можно прочесть как "звуковое событие фа и ля первой октавы, звучащие одновременно, имеет длительность половинку".

переводится в $^{exin}\lambda Q[Q\{f^1\}](^{in}\lambda y\ H(y))\ \&$
$^{exin}\lambda R[R\{a^1\}](^{in}\lambda y\ H(y))\ \&\ ^{in}\lambda P[P\{f^1\otimes a^1\}]$.

Используя правила удаления конъюнкции, λ-конверсии, exin-удаления и конвенции скобок, можно преобразовать данное выражение в

$$H(f^1)\ \&\ H(a^1)\ \&\ ^{in}\lambda P[P\{f^1\otimes a^1\}].$$

Последнее читается как: "звуковое событие фа первой октавы имеет длительность половинку и звуковое событие ля первой октавы имеет длительность половинку".

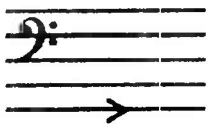
Правило **T4** конъюнктивно соединяет экстенсиональные свойства звуковых событий, образуя интенсиональное свойство.

Примеры переводов.

переводится в $^{in}\lambda x\ [Sn(x\ \&\ D(x)]$. Читается: свойство быть x таким, что x имеет длительность Sn и имеет уменьшающуюся громкость".

Правило перевода **T5** образует высказывания о свойствах звуковых событий.

Если $^{in}\lambda P[P\{G\}]$ есть перевод



$^{in}\lambda xC[(x)]$ есть перевод

,

то

переводится в $^{exin}\lambda P[P\{G\}](^{in}\lambda xC[(x)])$.

Проделав соответствующие преобразования, получаем: $C(G)$.

Читается: "соль большой октавы имеет длительность четверть". Изменим β в выше рассматриваемом примере, положив, что β есть

β переводится в β′: $^{in}\lambda xC[(x)\ \&\ D(x)]$, согласно T4. Благодаря T5 получаем: $^{exin}\lambda P[P\{G\}](^{in}\lambda xC[(x)\ \&\ D(x)])$. Преобразовав, имеем $C(G)\ \&\ D(G)$.

Читается: "звуковое событие соль большой октавы имеет длительность четверть и уменьшает свою громкость"

Правило **T6** позволяет от высказываний о звуковых событиях перейти к звуковым событиям.

$^{in}\lambda P[V(q)\ \&\ P\{q\}]$ можно прочесть как "свойство быть свойством P таким, что звуковое событие q имеет V и обладает свойством P".

Пример.

Пусть α есть

β есть f , а φ есть

Тогда F_7(φ) есть

Согласно T6, имеем перевод

$$^{in}\lambda P[F(f^1 \oplus a^1) \; \& \; P\{f^1 \oplus a^1\}].$$

Читается: "свойство быть свойством P является одним из свойств звукового события такого, что фа и ля первой октавы звучат одновременно и имеют громкую мощность звучания".

ЛИТЕРАТУРА

1. *Герцман* Античное музыкальное мышление. М., 1986.
2. Музыка и математика. Зальцбургские беседы о музыке 1984г. под председательством Герберта фон Караяна. М., 1994.
3. *Зарипов Р.Х.* Кибернетика и музыка. М., 1971.
4. Kushner T. Poems and novels as similar auditory structures // Annales D'Esthétique vol. 23-24. 1984-1985.
5. *Brown M.* Evaluating Musical Analyses and Theories: Fine Perspectives // Journal of Music Theory. 1990. Vol.34.PP.247-279.
6. *Church A.* A formulation of a simple theory of types // JSL. 1940. Vol.5.
7. Current directions in computer music research. Cambridge-London, 1991.
8. *Davis D.S.* Computer applications in music: a bibliography. Madison, 1988.
9. Essays on the philosophy of music // Acta Philosophica Fennica. 1988. Vol.43.
10. Formal Philosophy. Selected papers of Richard Montague. New Haven, 1974.
11. *Goodman N.* Languages of Art. An Approach to a Theory of Symbols. Indiapolis, 1976.
12. *Isenberg A.* Analytical Philosophy and the Study of Art // The J. of Aesthetics and Art Criticism. 1987. Vol.47.
13. *Kurkela K.* Note and Tone. A semantic analysis of conventional music notation. Helsinki, 1986.
14. *Lerdahl F., Jackendoff R.* A generative theory of tonal music. Cambridge, 1983.
15. The Philosophy of Music // The J. of Aesthetics and Art Criticism. 1994. Vol.52. N1.
16. *Xenakis I.* Formalized music. Bloomington, 1971.

В. Л. Васюков

В ЗАЩИТУ МЕТАКОСМОСА

Корифей современной занимательной математики Мартин Гарднер не случайно назвал свой двенадцатый сборник, составленный по материалам отдела "Математические игры", который он ведет в журнале Scientific American, "Путешествие во времени" (точнее "Путешествие во времени и другие математические наблюдения" - Time Travel and Other Mathematical Bewilderment). Ибо чем еще может быть путешествие во времени (несмотря даже на результаты Торна и Новикова, обосновывающие возможность создания машины времени - все равно результаты эти теоретические, следовательно умозрительные) как не увлекательной игрой, парадом парадоксов, карнавалом вечных проблем?

Гарднер вовлекает в свою игру писателей-фантастов, физиков, математиков, философов, и трудно удержаться от мысли, что этот список можно легко пополнить - многие научные проблемы, как маски на карнавале, скрывают за собой все тот же вечный лик времени. Столь многое уже написано о времени и его парадоксах, что некоторые серьезные рассуждения на эту тему современная научная аудитория попросту игнорирует (многие представители точных наук бывают потрясены, узнав о существовании логик времени и корпуса трудов, созданных в XX в. логиками-профессионалами - к тому же ни Гёдель, ни Рейхенбах не названы прямо в тексте логиками, а из контекста несведущий читатель может составить себе представление, что Гёдель был сугубо физиком, как, впрочем, и Рейхенбах).

Но дело не только в профессиональной ориентации. И не в том, что многие проблемы, столь занимательно рассмотренные в книге, могут столь же занимательно быть разрешены или подправлены без привлечения при этом скучных логических (или математических) выкладок. Дело скорее в том, что стиль изложения Гарднера можно было бы назвать метапарадоксальным, поскольку он излагает парадоксы времени с позиции некоего внешнего наблюдателя, стоящего над "схваткой", и в лучшем случае призывающего нас восхититься тем парадоксом, что все эти парадоксы закономерны - они закономерно возникают на пути любого описания свойств времени.

Только так ли уж неразрешимы все эти проблемы? Или, по крайней мере, таким ли образом? Логик здесь мог бы кое в чем усомниться. Возьмем, например, проблему метакосмоса с ветвящимися путями времени, к которой "...даже почтенные физики относятся вполне серьезно" [1, с. 18]. Согласно Хью Эверетту III (физику) [2] Вселенная в каждый микромомент времени ветвится на бесчисленные параллельные микромиры, каждый из которых предполагает некую допустимую комбинацию микрособытий, которая могла бы реализоваться вследствие присущей микроуровню изменчивости. Что плохо при этом, так это постоянное деление мира на чудовищно большое количество логически возможных миров. Б. Де Витт (физик): "Я хорошо помню тот шок, который я испытал при первом знакомстве с концепцией множественных миров" [1, с. 23]. М. Гарднер (математик): "...бесконечно много наблюдаемых миров ложится на плечи физиков тяжким грузом метафизического багажа" [1, с. 23].

И вновь Б. Де Витт: "...каждый квантовый переход, происходящий в каждой звезде, в каждой галактике, в каждом далеком уголке нашей Вселенной, приводит к ветвлению нашего локального мира на Земле на мириады копий" [1, с. 22-23]. Каждый квантовый переход, будучи процессом индетерминистским, подразумевает некоторое нарушение причинности. Ergo, можно понять так, что именно отступление от детерминизма в квантовых процессах приводит к ветвлению мира. Наверное, то же самое можно было бы заключить и на макроуровне, тем более что, по распространенному взгляду, детерминизм подразумевает бесконечное порождение следствий, вызванных одной причиной (каждое следствие вновь является причиной и так до бесконечности).

Итак, логически возможные миры возникают как следствие нарушения логического детерминизма, как попытка Вселенной сохранить свое лицо перед фактом нарушения причинности. Вселенная избегает парадоксов, не останавливаясь при этом ни перед чем, размножая миры.

Возможен ли обратный процесс? Можно ли логически представить соображения в пользу склеивания, слияния миров, не прибегая к физическим теориям, оставаясь на уровне метафизическом? Ибо в этом случае мы избежали бы упреков в неправильной интерпретации квантовой механики, в неправильном понимании возможных миров и т.п. Время при этом выступило бы в роли целителя тех же ран, что само и нанесло (по крайней мере нашему воображению).

Здесь вновь логики в состоянии сказать свое слово. Аргумент будет направлен против дурной бесконечности причин и следствий. Я. Лукасевич (логик): "Представим себе время в виде прямой линии и некоторый отрезок времени упорядочим на интервале (0,1) числовой прямой. Положим, что настоящему моменту отвечает точка 0, некоторое будущее событие происходит в момент 1, а причины этого события происходят в моменты, помеченные действительными числами, большими 1/2...

Во множестве действительных чисел, а точно так же во множестве рациональных чисел, упорядоченных по величине, нет двух чисел, непосредственно следующих одно за другим или соседствующих друг с другом: между каждыми двумя моментами найдется третий, а следовательно найдется их бесконечно много. В рассматриваемой нами цели каждое событие имеет, согласно принципу причинности, свою причину в каком-то предшествующем событии и цепь долгих причин бесконечна, но имеет своей нижней границей момент 1/2, который позднее настоящего момента 0 и еще не наступил. Этой границы данная цепь причин не может пересечь, а следовательно, не может достигнуть настоящего момента" [3, с. 199].

Помимо того вывода, который делает Я. Лукасевич, а именно, что могут существовать причинные цепи, которые еще не начались, а целиком лежат в будущем, мы можем сделать еще один: достаточно обратить аргументацию, чтобы получить причинные цепи, которые начались и окончились в прошлом. Действительно, достаточно положить, что настоящему моменту отвечает точка 1, некоторое событие-причина происходит в момент 0, а события-следствия происходят в моменты, помеченные действительными числами, меньшими 1/2. Тогда, невзирая на то, что причинно-следственные цепи у нас будут бесконечны, тем не менее все они закончатся к настоящему моменту.

Но если так, то нетрудно представить себе ситуацию, когда последствия квантового перехода столь незначительны в новосозданном мире, что к некоторому моменту никакой внимательный наблюдатель не будет в состоянии различить старый и новый мир, как бы он не искал последствия такого перехода: причинно-следственная цепь уже себя исчерпала. Чем же будут различаться теперь два мира? Ответ: практически ничем. Но как же это понимать?

Здесь мы вступаем на зыбкую почву проблемы тождества. Если два объекта невозможно различить по их свойствам, может быть, на самом деле это один и тот же объект? Следуя Лейбницу, мы так и должны были бы умозаключить. Естественное уточнение в нашем случае гласило бы: да, это один и тот же объект (мир), но тождественность означает, что произошло слияние (склеивание) двух перед этим возникших миров.

Сомнительно, чтобы подобный процесс носил глобальный характер, но нам этого и не требуется. Достаточно и локальной тенденции: уже это позволило бы более уверенно смотреть на мириады возникающих миров. Структура Метакосмоса не только ветвится, но и склеивается. Ее скорее можно сравнить не с деревом, но с течением реки, в котором возникают все новые и новые рукава, чтобы затем исчезнуть, вернувшись в основное русло.

Однако злоключения на этом не кончаются. Увы, теперь мы вынуждены отражать удар с другой стороны (контраргумент принадлежит А. С. Карпенко (логику)). Дело в том, что схема Я. Лукасевича срабатывает только при одном неявном допущении: время непрерывно (континуально). Но физики не знают никакого доказательства данного утверждения. Более того, несмотря на отсутствие экспериментальных свидетельств дискретности времени, теории подобного рода (квантование времени) всерьез рассматриваются физиками и имеют уже довольно древнюю историю.

Что же будет в нашем случае, если время дискретно, т. е. всегда существуют моменты времени, следующие один за другим, или соседствующие друг с другом, как бусины в бесконечном ожерелье? В этом случае динамическая структура Метакосмоса опять становится древовидной, множественные миры еще более множатся, шок бесконечного количества наблюдаемых миров кажется неизбежным и т. д. и т. п.

К счастью, современная логика способна отразить этот удар, продолжая игру и подвергая сомнению эту живописную и устрашающую перспективу. Ответная атака будет направлена против принципа Лейбница.

В дело идет еще одна очередная новинка для многих представителей точных наук: квантовая логика. И хотя она ведет отсчет своего существования еще с 1936 г. (года выхода в свет статьи И. фон Неймана и Г. Биркгофа [4]), тем не менее все еще способна удивлять некоторыми своими новыми результатами. Один из них гласит: в квантовом мире нарушается принцип Лейбница, т. е., к примеру, два квантовых объекта могут совпадать, несмотря на некоторое различие их свойств (см. [5; 6]). Впрочемб как и два объекта могут не совпадать, несмотря на полное тождество их свойств. Естественно, обе возможности кажутся на первый взгляд малопривлекательными - второй случай представляется еще более увеличивающим множественность миров.

Стоит заметить, что не только квантовые объекты могут не совпадать, несмотря на полное тождество их свойств. На память приходит ситуация в одном из рассказов Марка Твена, когда один из близнецов рассказывает душещипательную историю о том, как его брат-близнец утонул в детстве, а затем ошарашивает слушателя сообщением о том, что на самом-то деле утонул рассказчик, а не его брат.

Вторую ситуацию можно проиллюстрировать макроскопически более замысловатым образом. Допустим, сотрудник российской разведки, некто И. Иванов, был подготовлен для выполнения задания, заключающегося в том, что он должен будет занять место резидента американской разведки в Англии, некоего Дж. Смита, проживающего там под именем Р. Брауна, и которого, в свою очередь, должны будут переправить в Россию. Естественно, Иванов обладает полным внешним сходством со Смитом, знает его биографию до мельчайших деталей и т.д. Иванов выезжает в Англию, встречается со Смитом, а далее происходит нечто непонятное: и американская, и российская разведки перестают получать донесения от своих агентов. То ли Иванов устраняет Смита и занимает его место (тогда перестают получать донесения американцы), либо Смит устраняет Иванова и занимает его (т.е. свое прежнее) место (тогда перестают получать донесения русские). То ли Иванов признается во всем Смиту, уезжает в США, то ли Смит добровольно обменивается с Ивановым и уезжает - неизвестно. Во всяком случае проверки обеих сторон подтверждают, что Р. Браун по-прежнему проживает в Англии. Кто он на самом деле, никому не известно.

Взглянем, однако, с другой стороны на нарушение принципа Лейбница в квантовом мире. Более тщательный анализ подсказывает его интерпретацию в стиле принципа неопределенности Гейзенберга: существует неопределенность в идентификации миров в Метакосмосе, препятствующая точному наблюдению размножения или слияния возможных миров. Возникает лазейка для восстановления прежней аргументации даже в случае дискретного времени, ибо теперь мы не в силах всегда диагностировать, каковы из следствий нарушения причинности достаточно значительны, чтобы привести к наблюдению ветвления в некоторый момент времени. Но точно так же мы теперь порою не в силах наблюдать два возможных мира как раздельно существующие, т.е. с некоторого момента времени мы будем наблюдать, в сущности, слияние миров в Метакосмосе.

Возможное возражение о малости или произвольности подобной неопределенности, приводящей к утверждению о слиянии миров, здесь можно не принимать во внимание. Важна сама по себе принципиальная возможность вообще существования подобного процесса, тенденции в развитии Метакосмоса, тем более что задачей является утверждение о независимости ее от непрерывности или дискретности времени. И если все же нам не удается до конца снять в этом случае с плечей физиков "метафизический" багаж бесконечно многих наблюдаемых миров, то все равно игра стоит свеч - по крайней мере удалось этот багаж хоть как-то уменьшить.

Последние замечания. Метапарадоксальность изложения сама по себе ни хороша, ни плоха. Но она кажется не всегда оправданной, если парадоксы становятся самоцелью. Отмена Метакосмоса ввиду его парадоксальности, по-видимому, не единственный путь устранения парадоксов, и хотелось бы думать, что концепция Метакосмоса, столь привлекательная своей живописностью, все же имеет некоторое право на существование.

ЛИТЕРАТУРА

1. *М. Гарднер*. Путешествие во времени. М., 1990.
2. *H. Everett*. Review of Modern Physics, July 1957, p.454- 462.
3. *Я. Лукасевич*. О детерминизме// Логические исследования, вып.2, М., 1993.
4. *G. Birkhoff, J. von Neumann*. The Logic of Quantum Mechanics// Annals of Math., 1936, vol.37.
5. *M. L. Dalla Chiara*. Quantum Logic// Handbook of Philosophical Logic, vol.III, D.Gabbay and F.Guenthner (eds.), Reidel, Dordrecht, 1986
6. *M. L. Dalla Chiara, G. Toraldo di Francia*. Identity Questions from Quantum Theory// Abstracts of the 9th International Congress of Logic, Methodology and Philosophy of Science, Uppsala, August 7-14, 1991, Section 1-5 and 10, Uppsala, Sweden, 1991.

СОДЕРЖАНИЕ

CONTENT

Научное издание

Логические исследования. Вып. 3

Утверждено к печати Институтом философии РАН

Редактор
Е.А. Жукова

Художник
Б.М. Рябышев

Художественный редактор
В.Ю. Яковлев

ИБ № 1238
ЛР № 020297 от 27.11.91

Подписано к печати 01.11.95. Формат 60×90 1/16
Гарнитура Таймс. Печать офсетная
Усл. печ.л. 23,0. Усл.кр.-отт. 23,3. Уч.-изд. л. 22,5
Тираж 740 экз. Тип. зак. 3525

Издательство "Наука"
117864 ГСП-7, Москва В-485, Профсоюзная ул., 90

Санкт-Петербургская типография № 1 РАН
199034, Санкт-Петербург В-34, 9-я линия, 12

Логические исследования. Вып. 1

М.: Наука, 1993

СОДЕРЖАНИЕ

Логические исследования. Вып. 2

М.: Наука, 1993

СОДЕРЖАНИЕ

Коллективные труды,
подготовленные сектором логики
Института философии РАН
и выпущенные издательством "Наука"

1. Логические исследования. М., 1959
2. Применения логики в науке и технике. М., 1960
3. Философские проблемы современной формальной логики. М., 1962
4. Проблемы логики. М., 1963
5. Проблемы логики научного познания. М., 1964
6. Формальная логика и методология науки. М., 1964
7. Логическая структура научного познания. М., 1965
8. Логическая семантика и модальная логика. М., 1967
9. Исследования логических систем. М., 1970
10. Неклассическая логика. М., 1970
11. Логика и эмпирическое познание. М., 1972
12. Философия в современном мире. Философия и логика. М., 1974
13. Методы логического анализа. М., 1977
14. Логический вывод. М., 1979
15. Модальные и интенсиональные логики и их применение к проблемам методологии науки. М., 1984
16. Индуктивная логика и формирование научного знания. М., 1987
17. Логика научного познания. М., 1987
18. Исследования по неклассическим логикам. М., 1989
19. Синтаксические и семантические исследования неэкстенсиональных логик. М., 1989
20. Логические исследования. Вып. 1. М., 1993
21. Логические исследования. Вып. 2. М., 1993

Труды научно-исследовательского семинара по логике Института философии РАН. Издательство ИФРАН. (Руководитель семинара – профессор В.А. Смирнов)

1. Модальные и релевантные логики. М., 1982. – 107 с.
2. Логические исследования. М., 1983. – 123 с.
3. Многозначные, релевантные и паранепротиворечивые логики. М., 1984. – 133 с.
4. Неклассические логики. М., 1985. – 127 с.
5. Нестандартные семантики неклассических логик. М., 1986. – 135 с.
6. Неклассические логики и пропозициональные установки. М., 1987. – 130 с.
7. Неклассические логики и их приложения. М., 1989. – 153 с.
8. Философские основания неклассических логик. М., 1990. – 152 с.
9. Логические методы в компьютерных науках. М., 1991. – 197 с.
10. Труды научно-исследовательского семинара логического центра Института философии РАН. 1993. М., 1994. – 109 с.

ДЛЯ ЗАМЕТОК

ДЛЯ ЗАМЕТОК

ДЛЯ ЗАМЕТОК