Institute of Philosophy
Russian Academy of Sciences

LOGICAL INVESTIGATIONS

Volume 25. Number 2

Moscow
2019

Федеральное государственное бюджетное учреждение науки
Институт философии Российской академии наук

ЛОГИЧЕСКИЕ ИССЛЕДОВАНИЯ

Том 25. Номер 2

Москва
2019

ISSN 2074-1472 (Print)
ISSN 2413-2713 (Online)

Logical Investigations

Scientific-Theoretical Journal

2019. Volume 25. Number 2

Publisher: Institute of Philosophy, Russian Academy of Sciences

Frequency: 2 times per year

First issue: 1993; the journal is a redesigned continuation of the annual *Logical Investigations* that has been published since 1993 till 2015

The journal is registered with the Federal Service for Supervision of Communications, Information Technology, and Mass Media (Roskomnadzor). The Mass Media Registration Certificate No. FS77-61228 on April 3, 2015

Abstracting and indexing: *Zentralblatt MATH*, *Mathematical Reviews*, *Ulrich's Periodicals Directory*, *EBSCOhost (Philosopher's Index with Full Text)*

The journal is included in the list of peer-reviewed scientific editions acknowledged by the Higher Attestation Commission of the Ministry of Education and Science of the Russian Federation

Subscription index in the United Catalogue *The Russian Press* is 42046

All materials published in *Logical Investigations* undergo peer review process

Editorial address: 12/1 Goncharnaya St., Moscow 109240, Russian Federation
Tel.: +7 (495) 697-96-65; **e-mail:** logicalinvestigations@gmail.com
Website: https://logicalinvestigations.ru

ISSN 2074-1472 (Print)
ISSN 2413-2713 (Online)

Логические исследования

Научно-теоретический журнал

2019. Том 25. Номер 2

Учредитель и издатель: Федеральное государственное бюджетное учреждение науки Институт философии Российской академии наук

Периодичность: 2 раза в год

Выходит с 1993 г.; журнал является прямым продолжением ежегодника «Логические исследования», издававшегося с 1993 по 2015 г.

Журнал зарегистрирован Федеральной службой по надзору в сфере связи, информационных технологий и массовых коммуникаций (Роскомнадзор). Свидетельство о регистрации СМИ: ПИ № ФС77-61228 от 03 апреля 2015 г.

Журнал реферируется и индексируется: *Mathematical Reviews*, *Zentralblatt MATH*, *Ulrich's Periodicals Directory*, *РИНЦ*, *EBSCOhost (Philosopher's Index with Full Text)*

Журнал включен в Перечень российских рецензируемых научных журналов, рекомендованных ВАК, в которых должны быть опубликованы основные научные результаты диссертаций на соискание ученых степеней доктора и кандидата наук (группа научных специальностей «09.00.00. – философские науки»)

Подписной индекс в Объединенном каталоге «Пресса России» — 42046

Публикуемые материалы прошли процедуру рецензирования и экспертного отбора

Адрес редакции: Российская Федерация, 109240, г. Москва, ул. Гончарная, д. 12, стр. 1, оф. 426
Тел.: +7 (495) 697-96-65; **e-mail:** `logicalinvestigations@gmail.com`

Сайт: `https://logicalinvestigations.ru`

TABLE OF CONTENTS

В НОМЕРЕ

Логические исследования
2019. Т. 25. № 2. С. 9–25
УДК 510.624

Logical Investigations
2019, Vol. 25, No. 2, pp. 9–25
DOI: 10.21146/2074-1472-2019-25-2-9-25

Символическая логика
Symbolic Logic

И.А. Горбунов

Характеристические теории и обращение подстановки*

Игорь Анатольевич Горбунов
Тверской государственный университет.
Российская Федерация, 170100, г. Тверь, ул. Желябова, д. 33.
E-mail: i_gorbunov@mail.ru

Аннотация: Матрицей Линденбаума некоторой логики называют логическую матрицу, заданную на алгебре всех формул этой логики и имеющую в качестве выделенного множества некоторую ее теорию. Множество всех таких матриц называют расслоением Линденбаума. Расслоение Линденбаума некоторой логики образует характеристическое для этой логики множество логических матриц. Однако известно достаточно много логик, например классическая, которые характеризуются одной матрицей.

В работе получен ряд критериев того, что логика имеет характеристическую матрицу. Показано, что вопрос наличия такой матрицы связан с операцией обращения подстановки для определенного вида подстановок. Здесь под операцией обращения подстановки подразумеваем взятие прообраза некоторого множества формул для некоторой подстановки.

Получен следующий критерий наличия характеристической матрицы для данной логики: для некоторой логики существует не более чем счетная характеристическая матрица тогда и только тогда, когда существует такая теория, для которой матрица Линденбаума является характеристической. На основании этого факта введено понятие характеристической теории.

Как следует из Леммы Сушко, для любой логики результат обращения подстановки некоторой теории является теорией. В данной работе показано, что теория T является характеристической тогда и только тогда, когда любая непротиворечивая теория является пересечением прообразов теории T, взятых по всем подстановкам, которые вкладывают эту теорию в T. Таким образом, получается, что логика имеет характеристическую матрицу тогда и только тогда, когда существует такая теория T, что любая непротиворечивая теория является пересечением прообразов теории T, взятых по всем вкладывающим подстановкам.

В качестве иллюстрации рассматривается вопрос о характеристических теориях классической логики. Доказано, что любая полная теория классической логики является характеристической. Замечено, что в классической логике любая полная теория является

* Работа выполнена при поддержке РФФИ, проекты №17–03–00818–ОГН и №18–011–00869–а.

результатом обращения некоторой подстановки, примененной к некоторой характеристической теории. Приведен пример такой подстановки для случая, когда характеристическая теория является полной.

Доказано, что минимальная матрица Линденбаума классической логики является характеристической, то есть множество всех тавтологий является характеристической теорией классической логики.

Ключевые слова: матрицы Линденбаума, характеристические матрицы, строгий гомоморфизм, обращение подстановки, полные теории, классическая логика

Для цитирования: *Горбунов И.А.* Характеристические теории и обращение подстановки // Логические исследования / Logical Investigations. 2019. Т. 25. № 2. С. 9–25. DOI: 10.21146/2074-1472-2019-25-2-9-25

1. Логика. Основные определения

Пусть тройка $\langle \Pi, \Sigma, \{(,),,\}\rangle$ — некоторый пропозициональный алфавит. Здесь $\Pi = \{x_i : i \geq 1\}$ — счетное множество пропозициональных переменных, Σ — некоторое множество конечноместных функциональных символов, которые мы будем называть *логическими связками*, а $\{(,),,\}$ — множество вспомогательных символов. Для обозначения пропозициональных переменных в качестве метаобозначений будем использовать и другие строчные буквы латинского алфавита, возможно, с индексами.

Всякий терм, построенный из символов алфавита $\langle \Pi, \Sigma, \{(,),,\}\rangle$, будем называть *формулой*. Множество всех формул будем обозначать посредством Φ. Посредством $\mathcal{P}_{fin}(\Phi)$ будем обозначать множество всех конечных подмножеств множества Φ.

Подстановкой будем называть гомоморфное продолжение отображения $\varepsilon : \Pi \to \Phi$ на множество всех формул. Поскольку это продолжение единственно, то обозначать его будем тоже ε. Для любого множества формул Γ посредством $\varepsilon\Gamma$ будем обозначать результат применения подстановки ε ко всем формулам этого множества. Посредством $\mathbf{E}$ обозначим множество всех подстановок.

Следующая лемма относится к фольклору.

Лемма 1. $\forall \varepsilon \in \mathbf{E}\ \forall\ \Gamma, \Delta \in 2^{\Phi}\ (\Gamma \subseteq \Delta \Leftrightarrow \varepsilon\Gamma \subseteq \varepsilon\Delta)$.

Доказательство. Монотонность общеизвестна. Пусть $\varepsilon\Gamma \nsubseteq \varepsilon\Delta$. Значит, существует такая формула φ, что $\varphi \in \varepsilon\Gamma$ и $\varphi \notin \varepsilon\Delta$. Таким образом, имеем, что $\exists \psi \in \Gamma\ (\varepsilon\psi = \varphi)$ и $\forall \chi \in \Delta\ (\varepsilon\chi \neq \varphi)$. Следовательно, $\psi \notin \Delta$, и значит, $\Gamma \nsubseteq \Delta$. ■

На множестве 2^Φ следующим образом определим одноместную операцию Sb, которую будем называть *замыканием по подстановке*:

$$Sb(\Gamma) = \bigcup\{\varepsilon\Gamma : \varepsilon \in \mathbf{E}\}.$$

Множество формул Γ будем называть *замкнутым по подстановке*, если $Sb(\Gamma) = \Gamma$.

Пару $\langle\Gamma, \varphi\rangle$, где $\Gamma \in \mathcal{P}_{fin}(\Phi)$, а φ — формула, будем обозначать $\Gamma \Vdash \varphi$ и называть *секвенцией*.

Множество секвенций $\mathbf{L}$ будем называть *логикой*, если оно удовлетворяет следующим условиям: для любых $\Gamma, \Delta \in \mathcal{P}_{fin}(\Phi)$ и $\varphi \in \Phi$ верно, что

(A1) $\varphi \in \Gamma \Rightarrow (\Gamma \Vdash \varphi) \in \mathbf{L}$ (*рефлексивность*);

(A2) $(\Gamma \Vdash \varphi) \in \mathbf{L}$ и $\forall\psi \in \Gamma\ ((\Delta \Vdash \psi) \in \mathbf{L}) \Rightarrow (\Delta \Vdash \varphi) \in \mathbf{L}$ (*транзитивность*);

(A3) $(\Gamma \Vdash \varphi) \in \mathbf{L} \Rightarrow \forall\varepsilon \in \mathbf{E}\ ((\varepsilon(\Gamma) \Vdash \varepsilon(\varphi)) \in \mathbf{L})$ (*структурность*).

Определим *отношение логического следования*, которое будем обозначать $\vdash$, следующим образом: для любого множества $\Delta, \varphi \subseteq \Phi$

$$\Delta \vdash \varphi \Leftrightarrow \exists\Gamma \in \mathcal{P}_{fin}(\Phi)\ (\Gamma \subseteq \Delta \text{ и } (\Gamma \Vdash \varphi) \in \mathbf{L}).$$

Несложно показать, что отношение $\vdash$ обладает свойствами рефлексивности, транзитивности и структурности.

Теорией логики $\mathbf{L}$ будем называть множество формул, замкнутое по отношению логического следования. Посредством $Th(\mathbf{L})$ будем обозначать множество всех теорий логики $\mathbf{L}$. Всякому $\Gamma \subseteq \Phi$ сопоставим множество $C(\Gamma) = \{\varphi : \Gamma \vdash \varphi\}$. Определенную таким образом операцию C будем называть *оператором замыкания* логики $\mathbf{L}$.

Теорема 1. $C(\Gamma) \in Th(\mathbf{L})$.

Доказательство. Пусть $C(\Gamma) \neq \varnothing$, $\Delta \vdash \varphi$ и $\Delta \subseteq C(\Gamma)$. Следовательно, существует $(\Theta \Vdash \varphi) \in \mathbf{L}$ такая, что $\Theta \subseteq \Delta$. Так как $\forall\psi \in \Theta\ (\Gamma \vdash \psi)$, то $\Gamma \vdash \varphi$. ■

Множеством тавтологий логики $\mathbf{L}$ будем называть множество формул $L = \{\varphi :\ (\Vdash \varphi) \in \mathbf{L}\}$.

Лемма 2. *Для любой логики* $\mathbf{L}$ *верно, что если* $(\Gamma \Vdash \varphi) \in \mathbf{L}$ *и* $\Gamma \subseteq L$*, то* $(\Vdash \varphi) \in \mathbf{L}$.

Доказательство. Пусть $L \neq \varnothing$, $(\Gamma \Vdash \varphi) \in \mathbf{L}$ и $\Gamma \subseteq L$. Так как $\forall \psi \in \Gamma$ $((\Vdash \psi) \in \mathbf{L})$, то $(\Vdash \varphi) \in \mathbf{L}$. ∎

Теорема 2. *Для любой логики множество тавтологий замкнуто по подстановке и логическому следованию.*

Доказательство. Пусть $L \neq \varnothing$, $\Delta \subseteq L$ и $\Delta \vdash \varphi$, следовательно, существует $(\Gamma \Vdash \varphi) \in \mathbf{L}$ такая, что $\Gamma \subseteq \Delta$. Тогда, по Лемме 2, $(\Vdash \varphi) \in \mathbf{L}$.

Тот факт, что $Sb(L) = L$, следует из условия структурности. ∎

Таким образом, $L = C(\varnothing)$.

Далее считаем логику $\mathbf{L}$ фиксированной.

2. Расслоение Линденбаума

Пару $\mathcal{M} = \langle \mathcal{A}, D \rangle$, где $\mathcal{A}$ — алгебра на некотором непустом множестве A и $D \subseteq A$, будем называть *подходящей матрицей для логики* $\mathbf{L}$, если всякой связке этой логики в алгебре $\mathcal{A}$ поставлена в соответствие операция той же местности. Множество D будем называть *выделенным множеством.* Далее говорим только о матрицах, подходящих для логики $\mathbf{L}$.

Оценкой ν на матрице $\mathcal{M} = \langle \mathcal{A}, D \rangle$ будем называть отображение $\nu : \Pi \to A$. Множество всех оценок на некоторой фиксированной матрице $\mathcal{M}$ обозначим посредством $\Theta_{\mathcal{M}}$.

Значение формулы φ при оценке ν, которое будем обозначать $\nu(\varphi)$, определим по индукции:

если $\varphi = p \in \Pi$, то $\nu(\varphi) = \nu(p)$;

если $\varphi = f^n(\psi_1, \ldots, \psi_n)$ (где $f^n \in \Sigma$), то $\nu(\varphi) = f^n(\nu(\psi_1), \ldots, \nu(\psi_n))$.

Будем говорить, что *формула φ истинна при оценке ν на матрице* $\mathcal{M} = \langle \mathcal{A}, D \rangle$ (и обозначать этот факт посредством записи $\mathcal{M} \models^{\nu} \varphi$), если $\nu(\varphi) \in D$.

Будем говорить, что *формула φ истинна на матрице $\mathcal{M} = \langle \mathcal{A}, D \rangle$* (и обозначать это как $\mathcal{M} \models \varphi$), если $\forall \nu \in \Theta_{\mathcal{M}}$ $(\nu(\varphi) \in D)$.

Будем говорить, что матрица $\mathcal{M} = \langle \mathcal{A}, D \rangle$ является *моделью* логики $\mathbf{L}$ (*согласована* с логикой $\mathbf{L}$, *является матрицей логики* $\mathbf{L}$), если выполняется условие:

$$\Gamma \vdash \varphi \Rightarrow \forall \nu \in \Theta_{\mathcal{M}} \ (\nu(\Gamma) \subseteq D \Rightarrow \nu(\varphi) \in D).$$

Обозначим посредством Φ^* алгебру термов (формул), которую будем называть *алгеброй Линденбаума. Расслоением Линденбаума* логики $\mathbf{L}$ назовем следующее семейство матриц:

$$\mathbf{M_L} = \{\langle \Phi^*, T \rangle : T \in Th(\mathbf{L}), T \neq \Phi\}.$$

Каждую матрицу $\mathcal{M}_T = \langle \Phi^*, T \rangle$ этого семейства будем называть *матрицей Линденбаума* логики $\mathbf{L}$. Матрицу $\mathcal{M}_L = \langle \Phi^*, L \rangle$ будем называть *минимальной матрицей Линденбаума* логики $\mathbf{L}$. Заметим, что всякая оценка на алгебре Линденбаума является подстановкой, поэтому множество оценок на этой алгебре будем обозначать $\mathbf{E}$.

Как известно, *любая матрица Линденбаума логики* $\mathbf{L}$ *является моделью этой логики* [Wójcicki, 1988, p. 196, Theorem 3.1.5].

Пусть $\mathbf{M}$ — некоторое множество матриц.

Будем говорить, что *множество матриц* $\mathbf{M}$ *согласовано* с логикой $\mathbf{L}$, если каждая матрица из этого множества согласована с данной логикой.

Будем говорить, что *множество матриц* $\mathbf{M}$ *является полным для логики* $\mathbf{L}$, если выполняется условие:

$$\Gamma \nvdash \varphi \Rightarrow \exists \mathcal{M} \in \mathbf{M}\ \exists \nu \in \Theta_{\mathcal{M}}\ (\nu(\Gamma) \subseteq D \text{ и } \nu(\varphi) \notin D).$$

Будем говорить, что *множество матриц* $\mathbf{M}$ *является полным для логики* $\mathbf{L}$, если выполняется условие: если $\Gamma \nvdash \varphi$, то существует такая матрица $\mathcal{M} \in \mathbf{M}$, что $\exists \nu \in \Theta_{\mathcal{M}}\ (\nu(\Gamma) \subseteq D$ и $\nu(\varphi) \notin D)$.

Будем говорить, что *множество матриц характеризует логику* $\mathbf{L}$, если это множество является согласованным и полным для $\mathbf{L}$.

Расслоение Линденбаума логики $\mathbf{L}$ *характеризует эту логику* [Wójcicki, 1984, p. 79, 32.4].

Рассмотрим также некоторые другие свойства расслоения Линденбаума.

Будем говорить, что матрица $\mathcal{M} = \langle \mathcal{A}, D \rangle$ *полна* относительно логики $\mathbf{L}$, если выполняется условие:

$$\forall \nu \in \Theta_{\mathcal{M}}\ (\nu(\Gamma) \subseteq D \Rightarrow \nu(\varphi) \in D) \Rightarrow \Gamma \vdash \varphi.$$

Теорема 3. *Пусть матрица $\mathcal{M} = \langle \mathcal{A}, D \rangle$ полна относительно логики $\mathbf{L}$. Тогда для каждой матрицы $\mathcal{M}_T = \langle \Phi^*, T \rangle$ из расслоения Линденбаума верно, что существует гомоморфизм h из Φ^* в $\mathcal{A}$ такой, что $h(T) \subseteq D$.*

Доказательство. Пусть для некоторой теории T и формулы φ верно, что $T \nvdash \varphi$. Поскольку матрица $\mathcal{M} = \langle \mathcal{A}, D \rangle$ полна относительно логики $\mathbf{L}$, то существует такая оценка $\nu : \Pi \to \mathcal{A}$, что $\nu(T) \subseteq D$ и $\nu(\varphi) \notin D$. Оценка ν и будет являться указанным гомоморфизмом h. ∎

Будем говорить, что матрица $\mathcal{M} = \langle \mathcal{A}, D \rangle$ *характеризует* логику **L** (или, что матрица $\mathcal{M}$ является *характеристической матрицей* логики **L**), если выполняется условие:

$$\forall \nu \in \Theta_{\mathcal{M}} \ (\nu(\Gamma) \subseteq D \Rightarrow \nu(\varphi) \in D) \Leftrightarrow \Gamma \vdash \varphi.$$

Строгим гомоморфизмом матрицы $\mathcal{M} = \langle \mathcal{A}, D \rangle$ на матрицу $\mathcal{N} = \langle \mathcal{B}, G \rangle$ будем называть сюръективный гомоморфизм $h : \mathcal{A} \to \mathcal{B}$, при котором $h^{-1}(G) = D$ [Wójcicki, 1984, p. 99, 41.1].

Известно, что для всякой логики класс всех матриц этой логики замкнут относительно строгого гомоморфизма и взятия прообраза строгого гомоморфизма [Wójcicki, 1984, p. 100, Theorem 41.4].

Теорема 4. *Пусть матрица $\mathcal{M} = \langle \mathcal{A}, D \rangle$ — некоторая, не более чем счетная, подходящая матрица для логики* **L***. Если для каждой матрицы $\mathcal{M}_T = \langle \Phi^*, T \rangle$ из расслоения Линденбаума существует строгий гомоморфизм $h : \mathcal{M}_T \to \mathcal{M}$, то матрица $\mathcal{M}$ является характеристической матрицей логики* **L**.

Доказательство. Поскольку класс всех матриц этой логики замкнут относительно строгого гомоморфизма, то матрица $\mathcal{M}$ является моделью логики **L**.

Пусть для некоторого множества формул Γ и формулы φ верно, что $\Gamma \nvdash \varphi$. Поскольку существует строгий гомоморфизм $h : \mathcal{M}_{C(\Gamma)} \to \mathcal{M}$, при котором $C(\Gamma) = h^{-1}(D)$, то при оценке ν, совпадающей с гомоморфизмом h на множестве переменных, мы получим, что $\nu(\Gamma) \subseteq D$ и $\nu(\varphi) \notin D$. ■

3. Строгий гомоморфизм и полнота

Рассмотрим, как связан строгий гомоморфизм с таким свойством матриц, как полнота[1].

Лемма 3. *Пусть матрица $\mathcal{M} = \langle \mathcal{A}, D \rangle$ полна относительно логики* **L** *и существует строгий гомоморфизм h матрицы $\mathcal{M}$ на матрицу $\mathcal{N} = \langle \mathcal{B}, G \rangle$. Тогда матрица $\mathcal{N}$ полна относительно этой логики.*

Доказательство. Пусть $\Delta \nvdash \varphi$ и для некоторой оценки $\nu \in \Theta_{\mathcal{M}}$ имеем, что $\nu(\Delta) \subseteq D$ и $\nu(\varphi) \notin D$.

Несложно показать индукцией по построению формул, что для любой оценки $\mu \in \Theta_{\mathcal{N}}$, такой, что $\forall p \in \Pi \ (\mu(p) = h(\nu(p)))$, и для любой формулы φ будет верно, что $\mu(\varphi) = h(\nu(\varphi))$.

[1]Заметим, что приведенные ниже леммы являются следствием Леммы 3.1.8 из [Wójcicki, 1988, p. 197].

Так как $\nu(\varphi) \notin D$, то в силу строгости гомоморфизма h получаем, что $h(\nu(\varphi)) \notin G$ и, следовательно, $\mu(\varphi) \notin G$.

При этом поскольку гомоморфизм является строгим и $h(\nu(\Delta)) \subseteq G$, то $\mu(\Delta) \subseteq G$. ■

Лемма 4. *Пусть матрица $\mathcal{N} = \langle \mathcal{B}, G \rangle$ полна относительно логики* **L** *и существует строгий гомоморфизм h матрицы $\mathcal{M} = \langle \mathcal{A}, D \rangle$ на матрицу $\mathcal{N}$. Тогда матрица $\mathcal{M}$ полна относительно этой логики.*

Доказательство. Пусть $\Delta \nvdash \varphi$ и для некоторой оценки $\nu \in \Theta_{\mathcal{N}}$ имеем, что $\nu(\Delta) \subseteq G$ и $\nu(\varphi) \notin G$.

Несложно показать индукцией по построению формул, что для любой оценки $\mu \in \Theta_{\mathcal{M}}$ такой, что $\forall p \in \Pi\ (\mu(p) \in h^{-1}(\nu(p)))$, и для любой формулы φ будет верно, что $\mu(\varphi) \in h^{-1}(\nu(\varphi))$.

Так как $\nu(\varphi) \notin G$, то $h^{-1}(\nu(\varphi)) \cap h^{-1}(G) = \varnothing$. В силу строгости гомоморфизма h получаем, что $h^{-1}(\nu(\varphi)) \cap D = \varnothing$ и, следовательно, $\mu(\varphi) \notin D$.

Но поскольку $h^{-1}(\nu(\Delta)) \subseteq h^{-1}(G)$ и гомоморфизм является строгим, то $h^{-1}(\nu(\Delta)) \subseteq D$. Таким образом, $\mu(\Delta) \subseteq D$. ■

4. Характеристическая матрица Линденбаума

Конгруэнцией алгебры $\mathcal{A}$ называют отношение эквивалентности, которое сохраняет операции алгебры [Мальцев, 1970, п. 2.4, с. 62]. Пусть $\mathcal{M} = \langle \mathcal{A}, D \rangle$ — некоторая матрица; конгруэнцию алгебры этой матрицы будем называть *конгруэнцией* матрицы. Пусть R — конгруэнция на матрице $\mathcal{M} = \langle \mathcal{A}, D \rangle$; посредством $\mathcal{M}/R = \langle \mathcal{A}/R, D/R \rangle$ будем обозначать *фактор-матрицу* матрицы $\mathcal{M}$ по конгруэнции R. Здесь $\mathcal{A}/R$ — фактор-алгебра [Там же], а D/R — множество всех классов эквивалентности по R, содержащих элементы множества D.

Конгруэнцию будем называть *совместимой* с множеством $D \subseteq \mathcal{A}$, если множество D является объединением классов эквивалентности по этой конгруэнции. *Конгруэнцией Лейбница* матрицы $\mathcal{M} = \langle \mathcal{A}, D \rangle$ будем называть наибольшую конгруэнцию алгебры $\mathcal{A}$, совместимую с множеством D. Конгруэнцию Лейбница матрицы $\mathcal{M}$ будем обозначать посредством $\Omega\mathcal{M}$.

Для любой матрицы $\mathcal{M} = \langle \mathcal{A}, D \rangle$ множество $F \subseteq \mathcal{A}$ будем называть *дедуктивным фильтром* матрицы $\mathcal{M}$, если $D \subseteq F$, и для любой оценки $\nu \in \Theta_{\mathcal{M}}$ верно, что если $\Delta \vdash \varphi$ и $\nu(\Delta) \subseteq F$, то $\nu(\varphi) \in F$ [Font et al., 2003, p. 21]. Множество всех фильтров матрицы $\mathcal{M}$ будем обозначать посредством $Fi_{\mathcal{M}}$.

Конгруэнцией Сушко матрицы $\mathcal{M} = \langle \mathcal{A}, D\rangle$ будем называть конгруэнцию, которую определим следующим образом [Czelakowski, 2003, p. 193]:

$$\Sigma\mathcal{M} = \bigcap\{\Omega\mathcal{N} : \mathcal{N} = \langle \mathcal{A}, F\rangle, F \in Fi_{\mathcal{M}}\}.$$

Наиболее известным отношением на матрицах является *отношение Фреге*:

$$\Lambda\mathcal{M} = \{(a, b) \in \mathcal{A}^2 : \forall F \in Fi_{\mathcal{M}}\ (D \subseteq F \Rightarrow (a \in F \Leftrightarrow b \in F))\}.$$

Конгруэнция Сушко является наибольшей конгруэнцией, содержащейся в отношении Фреге, [Font et al., 2003, p. 28].

(На матрице Линденбаума $\mathcal{M}_T = \langle \Phi^*, T\rangle$ отношение Фреге обозначают ΛT.

$$\Lambda T = \{(\varphi, \psi) : T, \varphi \vdash \psi \text{ и } T, \psi \vdash \varphi\}.$$

Оно удовлетворяет следующему условию: $(\varphi, \psi) \in \Lambda T$ и $\varphi \in T \Rightarrow \psi \in T$ [Font et al., 2003, p. 26].

Конгруэнция Сушко на матрице Линденбаума $\mathcal{M}_T = \langle \Phi^*, T\rangle$ определяется следующим образом:

$$\Sigma T = \{(\varphi, \psi) : \forall \chi \in \Phi\ \forall p \in \Pi\ (T, \chi(\varphi/p) \vdash \chi(\psi/p) \text{ и } T, \chi(\psi/p) \vdash \chi(\varphi/p))\},$$

здесь $\chi(\varphi/p)$ — результат подстановки формулы φ в формулу χ вместо переменной p [Font et al., 2003, p. 27].

Аналогично можно определить конгруэнцию Лейбница:

$$\Omega T = \{(\varphi, \psi) : \forall \chi \in \Phi\ \forall p \in \Pi\ (\chi(\varphi/p) \in T \Leftrightarrow \chi(\psi/p) \in T)\}.$$

Отметим, что для любой теории T выполняется, что $\Sigma T \subseteq \Lambda T$.)

Матрицу $\mathcal{M} = \langle \mathcal{A}, D\rangle$ будем называть *редуцированной* (*редуцированной по конгруэнции Сушко*), если $\mathcal{M} = \mathcal{M}/\Sigma\mathcal{M}$.

Лемма 5. *Пусть матрица $\mathcal{M} = \langle \mathcal{A}, D\rangle$ — не более чем счетная редуцированная матрица логики* $\mathbf{L}$. *Тогда существует такая теория T, что существует строгий гомоморфизм f матрицы Линденбаума $\mathcal{M}_T$ на матрицу $\mathcal{M}$.*

Доказательство. Как известно [Czelakowski, 2003, p. 211, Prop. 5.1], для каждой счетной редуцированной матрицы $\mathcal{M}$, которая является моделью логики $\mathbf{L}$, существует такая теория T, что существует строгий гомоморфизм $g : \mathcal{M}_T/\Sigma T \to \mathcal{M}$. Поскольку в доказательстве этого утверждения факт счетности использовался только для обоснования возможности сюръективного гомоморфизма $h : \Phi^* \to \mathcal{A}$, то утверждение останется истинным и в случае конечности матрицы $\mathcal{M}$. Также известно [Czelakowski, 2003, p. 201, Prop. 2.2], что канонический гомоморфизм $h : \mathcal{M}_T \to \mathcal{M}_T/\Sigma T$, который каждой формуле φ сопоставляет класс всех эквивалентных ей по ΣT формул, является строгим. Несложно показать, что композиция строгих гомоморфизмов h и g является строгим гомоморфизмом, $hg : \mathcal{M}_T \to \mathcal{M}$. Таким образом, $f = hg$. ■

Лемма 6. *Пусть матрица $\mathcal{M} = \langle \mathcal{A}, D \rangle$ — не более чем счетная редуцированная характеристическая матрица логики* $\mathbf{L}$. *Тогда существует такая теория T, что матрица Линденбаума $\mathcal{M}_T$ полна.*

Доказательство. В силу Леммы 5 существует строгий гомоморфизм $f : \mathcal{M}_T \to \mathcal{M}$. Так как матрица $\mathcal{M}$ полна, то в силу Леммы 4 матрица $\mathcal{M}_T$ тоже является полной. ■

Теорема 5. *Пусть матрица $\mathcal{M} = \langle \mathcal{A}, D \rangle$ — не более чем счетная характеристическая матрица логики* $\mathbf{L}$. *Тогда существует такая теория T, что матрица Линденбаума $\mathcal{M}_T$ полна.*

Доказательство. Поскольку конгруэнция $\Omega\mathcal{M}$ [Czelakowski, 2003, p. 191, Theorem 0.6] существует для любой матрицы логики $\mathbf{L}$, то существует и конгруэнция $\Sigma\mathcal{M}$. Как говорилось выше, сюръективный гомоморфизм $h : \mathcal{M} \to \mathcal{M}/\Sigma M$ является строгим, и значит, в силу Леммы 3 матрица $\mathcal{M}/\Sigma M$ является характеристической редуцированной матрицы логики $\mathbf{L}$. Тогда в силу Леммы 6 матрица $\mathcal{M}_T$ полна. ■

Из Теоремы 5 следует

Теорема 6. *Для логики* $\mathbf{L}$ *существует не более чем счетная характеристическая матрица тогда и только тогда, когда существует такая теория T, что матрица Линденбаума $\mathcal{M}_T$ полна.*

Если $\mathcal{M}_T = \langle \Phi^*, T \rangle$ — характеристическая матрица Линденбаума для логики $\mathbf{L}$, то теорию T будем называть *характеристической теорией* логики $\mathbf{L}$.

5. Обращение подстановки и полнота матрицы Линденбаума

Обращением подстановки ε будем называть операцию взятия прообраза множества формул для отображения ε. Обозначать эту операцию будем посредством ε^{-1}. Таким образом, для любого множества формул Γ имеем:

$$\varepsilon^{-1}(\Gamma) = \{\varphi : \varepsilon\varphi \in \Gamma\}.$$

Несложно показать, что обращение подстановки монотонно, то есть верно, что $\forall\varepsilon \in \mathbf{E}$ $(\Gamma \subseteq \Delta \Rightarrow \varepsilon^{-1}(\Gamma) \subseteq \varepsilon^{-1}(\Delta))$. Кроме того, верно, что $\varepsilon\varepsilon^{-1}(\Gamma) \subseteq \Gamma$ и $\Gamma \subseteq \varepsilon^{-1}(\varepsilon\Gamma)$.

Пусть Υ — теория логики $\mathbf{L}$. Всякой теории T сопоставим множество $\mathbf{E}^T = \{\varepsilon : \varepsilon T \subseteq \Upsilon\}$. Если Υ — характеристическая теория и матрица $\mathcal{M}_\Upsilon$ является характеристической для логики $\mathbf{L}$, то несложно показать, что для любой непротиворечивой теории T множество $\mathbf{E}^T \neq \varnothing$.

В силу Леммы Сушко [Wójcicki, 1988, p. 35, Lemma 1.4.1] для любой логики $\mathbf{L}$ верно, что $\forall T \in Th(\mathbf{L})\ \forall\varepsilon \in \mathbf{E}$ $(\varepsilon^{-1}(T) \in Th(\mathbf{L}))$.

Лемма 7. *Если Υ — характеристическая теория логики $\mathbf{L}$, то для любой теории T верно, что $T = \bigcap\{\varepsilon^{-1}(\Upsilon) : \varepsilon \in \mathbf{E}^T\}$.*

Доказательство. Для любой $\varepsilon \in \mathbf{E}^T$ выполняется включение $\varepsilon T \subseteq \Upsilon$, следовательно, $T \subseteq \varepsilon^{-1}(\varepsilon T) \subseteq \varepsilon^{-1}(\Upsilon)$. Таким образом, получаем включение $T \subseteq \bigcap\{\varepsilon^{-1}(\Upsilon) : \varepsilon \in \mathbf{E}^T\}$.

Пусть $\varphi \notin T$. В силу полноты матрицы $\mathcal{M}_\Upsilon$ существует такая подстановка $\sigma \in \mathbf{E}^T$, что $\sigma\varphi \notin \Upsilon$. Следовательно, $\varphi \notin \sigma^{-1}(\Upsilon)$, и значит, $\varphi \notin \bigcap\{\varepsilon^{-1}(\Upsilon) : \varepsilon \in \mathbf{E}^T\}$. ■

Лемма 8. *Пусть Υ — такая теория логики $\mathbf{L}$, что для любой теории T верно, что $T = \bigcap\{\varepsilon^{-1}(\Upsilon) : \varepsilon \in \mathbf{E}^T\}$. Тогда Υ — характеристическая теория этой логики.*

Доказательство. Пусть для некоторого множества формул Γ и формулы φ верно, что $\forall\varepsilon \in \mathbf{E}^{C(\Gamma)}$ $(\varepsilon\varphi \in \Upsilon)$. В этом случае мы имеем, что $\varphi \in \bigcap\{\varepsilon^{-1}(\Upsilon) : \varepsilon \in \mathbf{E}^{C(\Gamma)}\} = C(\Gamma)$. Таким образом, $\Gamma \vdash \varphi$. ■

Из Леммы 7 и Леммы 8 непосредственно следует

Теорема 7. *Теория Υ является характеристической теорией логики $\mathbf{L}$ (а матрица Линденбаума $\mathcal{M}_\Upsilon = \langle\Phi^*, \Upsilon\rangle$ является характеристической матрицей логики $\mathbf{L}$) тогда и только тогда, когда для любой теории T верно, что $T = \bigcap\{\varepsilon^{-1}(\Upsilon) : \varepsilon \in \mathbf{E}^T\}$.*

Теорию будем называть *полной*, если она непротиворечива и максимальна в решетке теорий.

Теорема 8. *Пусть теория Υ является характеристической теорией логики $\mathbf{L}$ и теория T является полной теорией этой логики. Тогда существует такая подстановка $\varepsilon \in \mathbf{E}^T$, что $T = \varepsilon^{-1}(\Upsilon)$.*

Доказательство. В силу Леммы 7 $T = \bigcap\{\varepsilon^{-1}(\Upsilon) : \varepsilon \in \mathbf{E}^T\}$. Таким образом, для любой подстановки $\varepsilon \in \mathbf{E}^T$ имеем, что $T \subseteq \varepsilon^{-1}(\Upsilon)$. Поскольку T — максимальная, то либо $T = \varepsilon^{-1}(\Upsilon)$, либо $\varepsilon^{-1}(\Upsilon) = \Phi$. Так как T — непротиворечивая теория, то существует такая подстановка $\varepsilon \in \mathbf{E}^T$, что $T = \varepsilon^{-1}(\Upsilon)$. ■

6. Классическая логика

Классическая логика — одна из наиболее известных и хорошо изученных логик. В качестве иллюстрации вышеизложенных фактов рассмотрим некоторые следствия из них для этой логики.

Классическую логику будем считать определенной в произвольном языке с полной системой связок. При этом будем использовать символы булевых связок стандартного языка для обозначения формул, выражающих эти функции в данном языке. (Так, например, в языке с одной связкой (штрихом Шеффера) отрицание переменной будет иметь вид $\neg p = p|p$.) Полной теорией классической логики, как обычно, будем называть теорию, которая для любой формулы содержит либо эту формулу, либо ее отрицание. Заметим, что всякая полная теория классической логики является максимальной.

Воспользовавшись аналогом Леммы 1.12 [Мендельсон, 1984, с. 43] для данного языка, несложно показать, что любая полная теория классической логики аксиоматизируется некоторым множеством литералов всех переменных. (*Литералом* переменной мы, как обычно, называем переменную и отрицание переменной.)

Рассмотрим матрицу $\mathcal{M}_{\mathcal{B}} = \langle \mathcal{B}, \{1\} \rangle$, определенную на двухэлементной булевой алгебре $\mathcal{B}$. Для любой теории T рассмотрим множество оценок $\Theta^T_{\mathcal{B}} = \{\nu : \nu(\varphi) = 1 \Leftrightarrow \varphi \in T\}$. Несложно показать, что для любой полной теории T имеем, что $|\Theta^T_{\mathcal{B}}| = 1$.

Как известно, матрица $\mathcal{M}_{\mathcal{B}}$ полна для классической логики. Поскольку для матриц Линденбаума классической логики конгруэнция Сушко совпадает с отношением Фреге, то в силу Леммы 5 существует такая теория T, что существует строгий гомоморфизм f матрицы Линденбаума $\mathcal{M}_T$ на матрицу $\mathcal{M}_{\mathcal{B}}$. Мы можем утверждать об этой теории следующее:

Лемма 9. *Для теории T существует строгий гомоморфизм f матрицы Линденбаума $\mathcal{M}_T$ на матрицу $\mathcal{M}_{\mathcal{B}}$ тогда и только тогда, когда T — полная теория.*

Доказательство. Пусть теория T полна. Рассмотрим отображение $\nu : \Pi \to \mathcal{M}_{\mathcal{B}}$ такое, что $\forall p \in \Pi\ (\nu(p) = 1 \Leftrightarrow p \in T)$. Несложно заметить, что отображение ν является оценкой. Гомоморфное продолжение оценки ν

на множество всех формул обозначим f. Таким образом, для любой формулы φ имеем, что $f(\varphi) = \nu(\varphi)$.

Докажем, что для любой формулы φ верно, что $f(\varphi) = 1 \Leftrightarrow \varphi \in T$. Пусть A — множество литералов, аксиоматизирующих теорию T. Если формула $\varphi \in T$, то существует такое конечное $\Gamma \subseteq A$, что $\Gamma \vdash \varphi$. Так как $\nu(\Gamma) = 1$, то $\nu(\varphi) = 1$.

Пусть $\nu(\varphi) = 1$. Если $\varphi \notin T$, то существует такая оценка μ, что $\mu(A) = 1$ и $\mu(\varphi) = 0$. Так как $\mu(A) = 1$, то $\mu = \nu$.

Таким образом, f — строгий гомоморфизм матрицы $\mathcal{M}_T$ на матрицу $\mathcal{M}_{\mathcal{B}}$ (и $\Theta^T_{\mathcal{B}} = \{\nu\}$).

Пусть теперь для теории T существует строгий гомоморфизм f матрицы $\mathcal{M}_T$ на матрицу $\mathcal{M}_{\mathcal{B}}$. Покажем, что теория T полна. Допустим, что для некоторой формулы φ верно, что $\varphi \notin T$. Тогда $f(\varphi) = 0$. Так как $f(\neg\varphi) = \neg(f(\varphi)) = 1$, то $\neg\varphi \in T$. ■

Из Лемм 5 и 9 следует

Теорема 9. *Всякая полная теория классической логики является характеристической теорией.*

Рассмотрим теперь особенности действия обращения подстановки на теории классической логики.

В силу Теорем 7 и 9 для любой теории T классической логики и любой ее полной теории Υ верно, что $T = \bigcap\{\varepsilon^{-1}(\Upsilon) : \varepsilon \in \mathbf{E}^T\}$.

Лемма 10. *Если T — непротиворечивая теория классической логики, то для любой подстановки ε теория $\varepsilon^{-1}(T)$ непротиворечива.*

Доказательство. Допустим, что теория $\varepsilon^{-1}(T)$ противоречива. Тогда для некоторой формулы φ верно, что формула $\varphi \wedge \neg\varphi \in \varepsilon^{-1}(T)$. В этом случае $\varepsilon(\varphi \wedge \neg\varphi) \in T$, но $\varepsilon(\varphi \wedge \neg\varphi) = \varepsilon\varphi \wedge \neg\varepsilon\varphi$. ■

Из доказательства Теоремы 8, с учетом Леммы 9 следует, что для классической логики верно более сильное утверждение, чем Теорема 8.

Теорема 10. *Пусть теория Υ является характеристической теорией классической логики и T — некоторая полная теория. Тогда для любой подстановки $\varepsilon \in \mathbf{E}^T$ верно, что $T = \varepsilon^{-1}(\Upsilon)$.*

Из Теорем 8, 9 и 10 следует, что если T_1 и T_2 — полные теории, то для любой подстановки ε, такой, что $\varepsilon(T_1) \subseteq T_2$, верно, что $T_1 = \varepsilon^{-1}(T_2)$.

Рассмотрим пример такой подстановки. Пусть T_1 и T_2 — некоторые полные теории и σ — подстановка, которую определим следующим образом: для любой $p \in \Pi$

$$\sigma(p) = \begin{cases} p, & \text{если } (p \in T_1 \Leftrightarrow p \in T_2) \\ \neg p, & \text{если иначе.} \end{cases} \tag{1}$$

Утверждение 1. $\sigma(T_1) \subseteq T_2$.

Доказательство. Обозначим посредством A_1 множество литералов, аксиоматизирующих теорию T_1. Покажем, что $\sigma A_1 \subseteq T_2$.

Очевидно, что литералы всех переменных, для которых выполняется первое условие из (1), принадлежат теории T_2.

Пусть $p \in T_1$ и $p \notin T_2$; тогда $\sigma p = \neg p \in T_2$, так как T_2 — полная теория.

Пусть $p \notin T_1$ и $p \in T_2$; тогда $\neg p \in T_1$ и $\sigma(\neg p) = \neg\neg p$. Так как $p \vdash \neg\neg p$, то $\sigma(\neg p) \in T_2$.

Пусть формула $\varphi \in T_1$. Тогда существует такое конечное подмножество $\Gamma \subseteq A_1$, что $\Gamma \vdash \varphi$. В силу структурности следования имеем, что $\sigma\Gamma \vdash \sigma\varphi$. Таким образом, $\sigma\varphi \in T_2$. ■

Заметим, что в силу симметричности определения подстановки σ имеем также, что $\sigma(T_2) \subseteq T_1$. Отсюда следует, что для любых полных теорий T_1 и T_2 верны равенства: $T_1 = \sigma^{-1}(T_2)$ и $T_2 = \sigma^{-1}(T_1)$.

Рассмотрим вопрос о существовании характеристических теорий классической логики, которые не являются полными теориями. Посредством Cl обозначим множество всех тавтологий классической логики.

Теорема 11. *Минимальная матрица Линденбаума $\mathcal{M}_{Cl} = \langle \Phi^*, Cl \rangle$ является характеристической матрицей классической логики.*

Доказательство. Пусть для некоторого множества формул Γ и формулы φ верно, что $\Gamma \nvdash \varphi$. Тогда существует такая оценка ν, что $\nu(\Gamma) = 1$ и $\nu(\varphi) = 0$. Определим подстановку ε следующим образом:

$$\varepsilon(p) = \begin{cases} p \vee \neg p, & \text{если } \nu(p) = 1 \\ p \wedge \neg p, & \text{если } \nu(p) = 0. \end{cases}$$

В этом случае $\varepsilon\Gamma \subseteq Cl$ и $\varepsilon\varphi \notin Cl$. ■

Следствие 1. Всякая полная теория T классической логики является прообразом множества всех тавтологий при следующей подстановке:

$$\varepsilon(p) = \begin{cases} p \vee \neg p, & \text{если } p \in T \\ p \wedge \neg p, & \text{если } p \notin T. \end{cases}$$

7. Заключение

Таким образом, вследствие существования характеристических матриц Линденбаума вопросы полноты зависят от наличия у теорий логики некоторых свойств, связанных с операцией обращения подстановки (а следовательно, и самой подстановки). Эту связь выражает следующая теорема, которая является непосредственным следствием Теорем 4 и 5.

Теорема 12. *Для логики* $\mathbf{L}$ *существует не более чем счетная характеристическая матрица тогда и только тогда, когда существует теория* Υ *такая, что для любой теории* T *верно, что* $T = \bigcap\{\varepsilon^{-1}(\Upsilon) : \varepsilon \in \mathbf{E}^T\}$.

Возникает предположение, что исследования свойств теорий, связанных с операцией обращения подстановки, позволит по-новому взглянуть на роль основных конгруэнций, таких как конгруэнции Лейбница и Сушко, в построении классов полных моделей.

Например, для классической логики известно, что отношение Фреге ΛCl является конгруэнцией [Расёва и др., 1972, с. 283, § 10]. Также известно, что матрица $\langle \Phi^*/\Lambda Cl, Cl/\Lambda Cl \rangle$ (называемая *матрицей Линденбаума–Тарского*) полна [Расёва и др., 1972, с. 299, Теорема 2.2]. Заметим, что в силу изложенных в нашей работе фактов это непосредственно следует из полноты матрицы $\langle \Phi^*, Cl \rangle$.

В связи с изложенными в работе фактами возникает ряд открытых вопросов.

1. Практически для всех популярных пропозициональных логик полные теории играют значительную роль в вопросах доказательства полноты тех или иных моделей для этих логик. Верно ли, что полные теории оказываются характеристическими для всех пропозициональных логик?

2. Существуют ли логики, в которых существует такая характеристическая теория Υ, что для любой теории T существует такая подстановка $\varepsilon \in \mathbf{E}^T$, что $T = \varepsilon^{-1}(\Upsilon)$?

3. Для каких классов логик верно, что для любой их характеристической теории Υ, любой полной теории T и любой подстановки $\varepsilon \in \mathbf{E}^T$ верно, что $T = \varepsilon^{-1}(\Upsilon)$?

4. Для каких логик существуют такие характеристические матрицы, что они являются образами строгих гомоморфизмов всех матриц из расслоения Линденбаума?

5. Верно ли, что для любой логики, имеющей матрицу с единственным выделенным элементом, множество всех тавтологий этой логики является ее характеристической теорией?

Литература

Мальцев, 1970 – *Мальцев А.И.* Алгебраические системы. М.: Наука, 1970. 392 с.

Мендельсон, 1984 – *Мендельсон Э.* Введение в математическую логику. М.: Наука, 1984. 320 с.

Расёва и др., 1972 – *Расёва Е., Сикорский Р.* Математика метаматематики. М.: Наука, 1972. 592 с.

Czelakowski, 2003 – *Czelakowski J.* The Suszko Operator. Part I // Studia Logica. 2003. Vol. 74. P. 181–231.

Font et al., 2003 – *Font J.M., Jansana R., and Pigozzi D.* A Survey of Abstract Algebraic Logic // Studia Logica. 2003. Vol. 74. P. 13–97.

Wójcicki, 1984 – *Wójcicki R.* Lectures on Propositional Calculi. Wroclaw: Ossolineum, 1984. 179 p.

Wójcicki, 1988 – *Wójcicki R.* Theory of Logical Calculi: Basic Theory of Consequence Operations. Dordrecht: Kluwer, 1988. 474 p.

Igor A. Gorbunov

Characteristic theories and inversion of substitution

Igor A. Gorbunov
Tver State University,
33 Zhelyabova St., Tver, 170100, Russian Federation.
E-mail: i_gorbunov@mail.ru

Abstract:

A Lindenbaum matrix of some logic is a logical matrix defined on the algebra of all formulas of this logic. The set of designated elements of this matrix is some theory of this logic. The set of all such matrices is called the Lindenbaum bundle. The Lindenbaum bundle of some logic is a characteristic set of logical matrices for this logic. However, there are logics, such as classical logic, that are characterized by a single matrix. In this paper we obtain a number of criteria that logic has a characteristic matrix.

It is shown that the question of the presence of characteristic matrix is associated with the operation of inversion of substitution for a certain type of substitutions. Here under the operation of inversion of substitution we mean taking preimages of some set of formulas for some substitution.

The following criterion for the presence of a characteristic matrix for a logic is obtained: for a given logic there is no more than a countable characteristic matrix if, and only if, there is a theory for which the Lindenbaum matrix is a characteristic logical matrix of this logics. In obtaining this criterion, some properties of strict homomorphisms were used. The concept of characteristic theory is introduced, that is, such a theory for which Lindenbaum matrix are characteristic matrices.

As follows from the Lemma of Suszko's, for any structural logic, the set of all theories of this logic is closed under counterimages of substitutions. In this paper, we show that the theory T is a characteristic theory if, and only if, any consistent theory is the intersection of all counterimages of T obtained by substitutions mapping this theory into T. Thus, it turns out that a logic has a characteristic matrix if, and only if, there is such a theory T such that any consistent theory is the intersection of all counterimages of T that are obtained by substitutions mapping this theory into T.

As an illustration of the facts obtained in this paper, the characteristics theories of classical logic are considered. It is proved that any complete theory of classical logic is a characteristic theory. It is noticed that, any complete theory is a counterimage of some characteristic theory under some substitution.

Keywords: Lindenbaum matrices, characteristic matrices, inversion of substitution, complete theory, classical logic

For citation: Gorbunov I.A. "Kharakteristicheskie teorii i obrashchenie podstanovki" [Characteristic theories and inversion of substitution], *Logicheskie Issledovaniya / Logical Investigations*, 2019, Vol. 25, No. 2, pp. 9–25. DOI: 10.21146/2074-1472-2019-25-2-9-25 (In Russian)

Acknowledgements. The paper is supported by Russian Foundation for Basic Research, projects №17–03–00818–OGN and №18–011–00869–a.

References

Czelakowski, 2003 – Czelakowski, J. "The Suszko Operator. Part I", *Studia Logica*, 2003, Vol. 74, pp. 181–231.

Font et al., 2003 – Font, J.M., Jansana, R., and Pigozzi, D. "A Survey of Abstract Algebraic Logic", *Studia Logica*, 2003, Vol. 74, pp. 13–97.

Mal'tsev, 1970 – Mal'tsev, A.I. *Algebraicheskie sistemy* [Algebraic system], Moscow: Nauka, 1970. 392 pp. (In Russian)

Mendelson, 1964 – Mendelson, D. *Introduction to Mathematicl Logic*, Princeton, New Jersey, Toronto, New York, London: D. van Nostrand Company, YNC., 1964. 320 pp.

Rasiowa, 1963 – Rasiowa, H., Sikorski, R. *The Mathematics of Metamathemanics*, Warszawa: Panstwowe Wydawnistwo Naukowe, 1963. 529 pp.

Wójcicki, 1984 – Wójcicki, R. *Lectures on Propositional Calculi*, Wroclaw: Ossolineum, 1984. 179 pp.

Wójcicki, 1988 – Wójcicki, R. *Theory of Logical Calculi: Basic Theory of Consequence Operations*. Dordrecht: Kluwer, 1988. 474 pp.

Логические исследования
2019. Т. 25. № 2. С. 26–45
УДК 510.644

Logical Investigations
2019, Vol. 25, No. 2, pp. 26–45
DOI: 10.21146/2074-1472-2019-25-2-26-45

Неклассическая логика
Non-classical Logic

Л.Ю. Девяткин

О подлинно паранепротиворечивых и подлинно параполных многозначных логиках

Леонид Юрьевич Девяткин
Институт философии РАН.
Российская Федерация, 109240, г. Москва, ул. Гончарная, д. 12, стр. 1.
E-mail: deviatkin@iph.ras.ru

Аннотация: Статья посвящена анализу нескольких классов паранепротиворечивых и параполных логик на примере трехзначных и четырехзначных логик, сохраняющих классические истинностные значения. Результаты, представленные в статье, можно разделить на три группы. Первая группа результатов касается паранепротиворечивых логик. Показано, что все трехзначные подлинно паранепротиворечивые логики являются логиками формальной противоречивости, а все трехзначные логики формальной противоречивости, расширяющие позитивный фрагмент классической логики, являются языковыми вариантами подлинно паранепротиворечивых логик. Приводятся примеры четырехзначных подлинно паранепротиворечивых логик, которые не являются логиками формальной противоречивости. Найден ряд необходимых условий, которым должны соответствовать четырехзначные матрицы подлинно паранепротиворечивых логик, чтобы задаваемые этими матрицами логики не являлись логиками формальной противоречивости. Вторая группа результатов касается параполных логик. Показано, что все трехзначные подлинно параполные логики являются логиками формальной неопределенности, а все трехзначные логики формальной неопределенности, расширяющие дуально-позитивный фрагмент классической логики, являются языковыми вариантами подлинно параполных логик. Приводятся примеры четырехзначных подлинно параполных логик, которые не являются логиками формальной неопределенности. Найден ряд необходимых условий, которым должны соответствовать четырехзначные матрицы подлинно параполных логик, чтобы задаваемые этими матрицами логики не являлись логиками формальной неопределенности. Третья группа результатов касается паранормальных логик. Приводится ряд необходимых условий, которым должны соответствовать четырехзначные матрицы подлинно паранормальных логик, чтобы они не являлись ни логиками формальной противоречивости, ни логиками формальной неопределенности. Для паранормальных расширений «полезной четырехзначной логики» Белнапа даются также необходимые и достаточные условия, для того чтобы они были максимальными подлинно паранормальными логиками и в то же время не являлись ни логиками формальной противоречивости, ни логиками формальной неопределенности.

Ключевые слова: паранепротиворечивость, параполнота, многозначные логики, логические матрицы, закон непротиворечия, формальная противоречивость, формальная неопределенность, функциональные свойства

Для цитирования: *Девяткин Л.Ю.* О подлинно паранепротиворечивых и подлинно параполных многозначных логиках // Логические исследования / Logical Investigations. 2019. Т. 25. № 2. С. 26–45. DOI: 10.21146/2074-1472-2019-25-2-26-45

Введение

Базовый критерий, которому должна соответствовать паранепротиворечивая логика,— это отсутствие в ней принципа *ex contradictione (sequitur) quodlibet* (ECQ): $\alpha, \neg\alpha \vdash \beta$. Однако, как отмечают многие авторы, такое определение паранепротиворечивости слишком абстрактно (см., например, [Urbas, 1990], [Béziau, 2000]).

В этой связи актуальна проблема выделения полезных классов паранепротиворечивых логик, обладающих более четко определенными свойствами. Такие классы возникают, когда на рассматриваемые системы накладывают дополнительные условия. В качестве примеров можно привести строго паранепротиворечивые логики [Urbas, 1990], логики формальной противоречивости [Carnielli et al., 2002], идеальные паранепротиворечивые логики [Arieli et al., 2011b], подлинно паранепротиворечивые логики [Béziau, Franceschetto, 2015]. Однако это, в свою очередь, приводит к вопросу о соотношении между различными классами паранепротиворечивых логик.

В данной статье мы рассматриваем соотношение между логиками формальной противоречивости и подлинно паранепротиворечивыми логиками. Логика **L** называется *подлинно паранепротиворечивой*, если в ней отвергается не только ECQ, но и закон непротиворечия (NC): $\neg(\alpha \wedge \neg\alpha)$ [Béziau, Franceschetto, 2015], [Béziau, 2016]. Логика **L** называется *логикой формальной противоречивости* (сокращенно — **LFI**), если она отвечает двум условиям: (1) $p, \neg p \nvdash q$, то есть в **L** отвергается ECQ; (2) существует такое множество формул $\bigcirc(p)$, зависящих в точности от единственной пропозициональной переменной p, что (i) $\bigcirc(\alpha), \alpha \nvdash \beta$; (ii) $\bigcirc(\alpha), \neg\alpha \nvdash \beta$; (iii) $\bigcirc(\alpha), \alpha, \neg\alpha \vdash \beta$ для любых формул α и β [Carnielli et al., 2007], [Carnielli, Coniglio, 2016].

Работы [Marcos, 2005] и [Brunner, Carnielli, 2005] посвящены анализу феномена дуальности между паранепротиворечивыми и параполными логиками. В рамках выбранного авторами подхода параполные логики оказываются, в определенном смысле, изоморфны паранепротиворечивым. Это позволяет легко переносить концепции и результаты с паранепротиворечивых логик на параполные. Однако переносятся также и проблемы, в том числе проблема поиска классов полезных параполных логик и соотношения между такими классами. В статье [Marcos, 2005] дано определение логик формальной неопределенности, дуальных логикам формальной противоречивости. В настоящей работе, опираясь на понятие дуальности, мы определяем подлинно параполные логики и устанавливаем соотношение между такими логиками и логиками формальной неопределенности.

Отдельным направлением в рамках исследований, посвященных паранепротиворечивым логикам, является изучение логик, которые являются паранепротиворечивыми и параполными одновременно. Знаменитым примером такой логики является «полезная четырехзначная логика» **FDE** [Belnap, 1977]. В заключительной части работы мы сравниваем класс логик, являющихся одновременно логиками формальной противоречивости и формальной неопределенности, с классом логик, являющихся одновременно подлинно паранепротиворечивыми и подлинно параполными. В частности, мы даем описание новых расширений **FDE**, обладающих рядом интересных свойств.

1. Базовые определения

Пропозициональный язык $\mathcal{L} = \langle L, F \rangle$ рассматриваем как алгебру, свободно порожденную бесконечным множеством пропозициональных переменных $Var(L)$.

Логическое следование $\vdash$ над $\mathcal{L}$ определяем как множество пар $\langle X, Y \rangle$, где $X, Y \subseteq L$, замкнутое относительно следующих свойств:

- Если $X \cap Y \neq \emptyset$, то $X \vdash Y$ (рефлексивность)
- Если $X \vdash Y$ и $X \subseteq X'$, $Y \subseteq Y'$, то $X' \vdash Y'$ (монотонность)
- Если для всех $Z \subseteq S$ имеет место $X \cup Z \vdash Y \cup (S \setminus Z)$, то $X \vdash Y$ (сечение)

Если $\vdash$ также замкнуто относительно всех эндоморфизмов $\mathcal{L}$, называем такое следование *структурным.* Когда $\vdash$ — структурное логическое следование, называем пару $\langle \mathcal{L}, \vdash \rangle$ *пропозициональной логикой.*

Называем *логической матрицей* структуру $\mathcal{M} = \langle \mathcal{A}, D \rangle$, где $\mathcal{A} = \langle A, F \rangle$ — алгебра, и $D \subseteq A$. Если $\mathcal{L}$ and $\mathcal{A}$ подобны, называем $\mathcal{M}$ *матрицей для* $\mathcal{L}$. В этом случае гомоморфизм h из $\mathcal{L}$ в $\mathcal{A}$ называем *оценкой* $\mathcal{L}$ в $\mathcal{M}$. *Матричное следование* определяем следующим образом:

$$Cn(\mathcal{M}) = \{\langle X, Y \rangle | \forall h (h(X) \subseteq D \Rightarrow h(Y) \cap D \neq \emptyset)\}.$$

Упорядоченную пару $\mathbf{L} = \langle \mathcal{L}, Cn(\mathcal{M}) \rangle$ называем *многозначной пропозициональной логикой.*

Пусть f — операция на A, и $A' \subseteq A$. Если $f(a_1, \ldots, a_n) \in A'$ для всех таких наборов $(a_1, \ldots, a_n)$, что $a_i \in A'$ при каждом $1 \leq i \leq n$, говорим, что f *сохраняет множество* A'. Говорим, что матрица $\mathcal{M}$ сохраняет множество A', если каждая операция этой матрицы сохраняет множество A'.

Примем следующую нотационную конвенцию: пропозициональная связка языка $\mathcal{L}$ и соответствующая ей операция матрицы $\mathcal{M}$ для языка $\mathcal{L}$ будут обозначаться одним и тем же символом.

2. Паранепротиворечивые логики

Этот раздел посвящен соотношению между понятиями подлинной паранепротиворечивости и формальной противоречивости в трехзначных и четырехзначных логиках. Следуя [Arieli et al., 2011a], принимаем следующие минимальные условия, при которых функция многозначной матрицы может трактоваться как паранепротиворечивое отрицание: $a \in D$, $\neg a \notin D$, $b \notin D$, $\neg b \in D$, $c \in D$, $\neg c \in D$ для некоторых $a, b, c \in A$. Не теряя общности, в трехзначном случае будем считать, что $a = 1$, $b = 0$, $c = 2$. Далее, определение подлинно паранепротиворечивой логики требует выполнения условия: $h(\neg(p \wedge \neg p)) \notin D$ для некоторой оценки h. Следуя [Béziau, Franceschetto, 2015] и [Béziau, 2016], полагаем также, что конъюнкция в подлинно паранепротиворечивой логике ведет себя классическим образом, то есть $\alpha \wedge \beta \vdash \alpha$; $\alpha \wedge \beta \vdash \beta$; $\alpha, \beta \vdash \alpha \wedge \beta$, или — эквивалентно в случае многозначных логик — $h(\alpha \wedge \beta) \in D \Leftrightarrow h(\alpha) \in D \ \& \ h(\beta) \in D$. В этом случае можно доказать следующую теорему.

Теорема 1. *Каждая трехзначная подлинно паранепротиворечивая логика является логикой формальной противоречивости.*

Доказательство. В силу требований, предъявляемых к отрицанию и конъюнкции, $\neg(0 \wedge \neg 0) \in D$ и $\neg(1 \wedge \neg 1) \in D$, поэтому единственная возможность выполнить также $h(\neg(p \wedge \neg p)) \notin D$ состоит в выборе таких $\neg$ и $\wedge$, что $h(\neg(p \wedge \neg p)) = 0$ при $h(p) = 2$. Ясно, что в таком случае $\neg(p \wedge \neg p)$ отвечает определению $\bigcirc(p)$. ■

Определение **LFI** таково, что ему может отвечать и логика, язык которой содержит только унарные связки. На практике **LFI** обычно определяются как языковые расширения позитивного фрагмента классической многозначной логики [Carnielli, Coniglio, 2016]. То есть язык **LFI** содержит $\wedge$, $\vee$, $\rightarrow$, свойства которых идентичны классическому случаю. Для многозначных логик это означает, что матричные операции, соответствующие данным связкам, отвечают следующим условиям:

- $x \wedge y \in D \Leftrightarrow x \in D$ и $y \in D$;
- $x \vee y \notin D \Leftrightarrow x \notin D$ и $y \notin D$;
- $x \to y \notin D \Leftrightarrow x \in D$ и $y \notin D$.

Кроме того, обычно предполагается, что операции сохраняют классические истинностные значения: $h(\Phi(p_1, \ldots, p_n)) \in \{0, 1\}$, когда $h(p_i) \in \{0, 1\}$ для всех $i \in \{1, \ldots, n\}$. Заметим, что такой подход к построению многозначных паранепротиворечивых логик не ограничен логиками формальной противоречивости [Arieli, Avron, 2015].

Следуя этим конвенциям, получаем следующие варианты табличных определений для $\wedge$, $\vee$, $\to$ и оператора $\circ$, выступающего в роли $\bigcirc$ в трехзначной логике:

$\wedge$	0	1	2
0	0	0	0
1	0	1	1|2
2	0	1|2	1|2

$\vee$	0	1	2
0	0	1	1|2
1	1	1	1|2
2	1|2	1|2	1|2

$\to$	0	1	2
0	1	1	1|2
1	0	1	1|2
2	0	1|2	1|2

x	$\circ x$
0	1
1	1
2	0

Здесь и далее таблицы являются не определениями связок, а схемами таких определений. Нотация $a|b$ обозначает, что необходимо выбрать либо a, либо b при построении табличного определения связки.

Теорема 2. *Каждая трехзначная логика формальной противоречивости* **L**, *являющаяся расширением* $\mathbf{CPC}^+$, *является языковым расширением подлинно паранепротиворечивой логики.*

Доказательство. Достаточно показать, что в матрице $\mathcal{M}$ логики **L** определима такая конъюнкция $\dot\wedge$, что $\nvdash \neg(p \dot\wedge \neg p)$. Это всегда можно сделать следующим образом:

$$x \dot\wedge y =: ((x \to (\circ x \wedge x \wedge \neg x)) \to (\circ x \wedge x \wedge \neg x)) \wedge ((y \to (\circ y \wedge y \wedge \neg y)) \to (\circ y \wedge y \wedge \neg y)).$$

■

Если мы примем $\dot\wedge$ в качестве базовой конъюнкции, то получим языковой вариант исходной **LFI**, являющийся подлинно паранепротиворечивой логикой. Таким образом, в трехзначном случае для расширений $\mathbf{CPC}^+$ понятия формальной противоречивости и подлинной паранепротиворечивости, в определенном смысле, совпадают.

Четырехзначный случай существенно отличается от трехзначного. Главное отличие состоит в том, что увеличение числа значений истинности позволяет конструировать подлинно паранепротиворечивые логики, не являющиеся логиками формальной противоречивости.

Теорема 3. *Пусть матрица* $\mathcal{M} = \langle\{0, 1, 2, 3\}, \wedge, \neg, \{1, 3\}\rangle$, *сохраняющая* $\{0, 1\}$, *задает паранепротиворечивую логику* $\mathbf{L}$. *Если* $2 \wedge 2 = 2$, $3 \wedge 3 = 3$, $\neg 2 = 2$ *и* $\neg 3 = 3$, *то* $\mathbf{L}$ *— подлинно противоречивая логика, которая не является* **LFI**.

Доказательство. Логика $\mathbf{L}$ является подлинно паранепротиворечивой логикой, так как $\neg(2 \wedge \neg 2) = 2$. Логика $\mathbf{L}$ не является логикой формальной противоречивости, так как $h(\circledast p) = 3$ при $h(p) = 3$ для любой унарной связки $\circledast$, и поэтому условие $\bigcirc(p), p, \neg p \vdash q$ не может быть выполнено никаким $\bigcirc(p)$. ■

Результаты, приведенные ниже, устанавливают более общие свойства четырехзначных логик с двумя выделенными значениями, которые подлинно паранепротиворечивы, но не являются логиками формальной противоречивости. В каждом случае рассматриваем матрицу $\mathcal{M} = \langle\{0, 1, 2, 3\}, F, \{1, 3\}\rangle$, где $\{\wedge, \neg\} \subseteq F$, и все операции в F сохраняют множество $\{0, 1\}$. Кроме того, полагаем, как и в трехзначном случае, что $x \wedge y \in D \Leftrightarrow x \in D \ \&\ y \in D$.

Теорема 4. *Пусть матрица* $\mathcal{M}$ *задает подлинно паранепротиворечивую логику* $\mathbf{L}$. *Если операции* $\{\wedge, \neg\}$ *не сохраняют множество* $\{3\}$, *то* $\mathbf{L}$ *является логикой формальной противоречивости.*

Доказательство. Случай 1. Пусть $3 \wedge 3 = 1$. Пусть $\diamond x =: x \wedge x$. Тогда $\circ x =: \neg(\diamond x \wedge \diamond \neg x)$ удовлетворяет определению $\bigcirc$. Случай 2. Пусть $\neg(3) = 1$. Пусть $\diamond x =: \neg\neg x$. Снова $\circ x =: \neg(\diamond x \wedge \diamond \neg x)$ удовлетворяет определению $\bigcirc$. ■

Теорема 5. *Пусть матрица* $\mathcal{M}$ *задает подлинно паранепротиворечивую логику* $\mathbf{L}$, *не являющуюся* **LFI**. *Тогда* $\neg 2 = 0$ *и* $2 \wedge 0 = 0 \wedge 2 = 2$, *либо* $\neg 2 = 2$ *и* $2 \wedge 2 = 2$.

Доказательство. В силу Теоремы 4 $\{\wedge, \neg\}$ сохраняет $\{3\}$. Согласно допущению, в $\mathbf{L}$ имеет место $\nvdash \neg(p \wedge \neg p)$. В силу определения $\{\wedge, \neg\}$ $\neg(x \wedge \neg x) = 1$ для всех $x \in \{1, 0\}$. Так как $\{\wedge, \neg\}$ сохраняет $\{3\}$, $\neg(3 \wedge \neg 3) = 3$. Следовательно, $\neg(x \wedge \neg x) \notin D$, только если $\neg(2 \wedge \neg 2) \notin D$. По определению $\wedge$, $2 \wedge x \notin D$ для всех x. Так как $\neg 0 = 1$, получаем, что $2 \wedge \neg 2 = 2$. Следовательно, $\neg 2 = 0$ и $2 \wedge 0 = 0 \wedge 2 = 2$, либо $\neg 2 = 2$ и $2 \wedge 2 = 2$. ■

В силу Теорем 4 и 5, если матрица $\mathcal{M}$ задает подлинно паранепротиворечивую логику $\mathbf{L}$, не являющуюся **LFI**, то $\wedge$ отвечает схеме $\wedge_1$ и $\neg$ есть $\neg_1$, либо $\wedge$ отвечает схеме $\wedge_2$ и $\neg$ есть $\neg_2$:

$\wedge_1$	0	1	2	3
0	0	0	2	0|2
1	0	1	0|2	1|3
2	2	0|2	0|2	0|2
3	0|2	1|3	0|2	3

x	$\neg_1 x$
0	1
1	0
2	0
3	3

$\wedge_2$	0	1	2	3
0	0	0	0|2	0|2
1	0	1	0|2	1|3
2	0|2	0|2	2	0|2
3	0|2	1|3	0|2	3

x	$\neg_2 x$
0	1
1	0
2	2
3	3

В исследованиях паранепротиворечивых логик важную роль играет понятие максимальности [Arieli et al., 2011a]. Различают максимальность относительно классической логики и максимальность в абсолютном смысле. Логика *максимально паранепротиворечива относительно классической логики*, если добавление к ней любого правила классической логики в том же языке дает классическую логику. Логика *максимально паранепротиворечива в абсолютном смысле*, если ни одно ее собственное дедуктивное расширение в том же языке не является паранепротиворечивым. В рамках данной работы будем называть максимально паранепротиворечивой логику, которая максимально паранепротиворечива в абсолютном смысле.

Теорема 6. *Пусть матрица $\mathcal{M}$ задает паранепротиворечивую логику* $\mathbf{L}$*, не являющуюся* $\mathbf{LFI}$*. Логика* $\mathbf{L}$ *максимально паранепротиворечива, только если $\mathcal{M}$ не сохраняет множество $\{0, 1, 3\}$.*

Доказательство. Если $\mathcal{M}$ сохраняет множество $\{0, 1, 3\}$, то $\mathcal{M}' = \langle \{0, 1, 3\}, F', \{1, 3\} \rangle$ — подматрица $\mathcal{M}$, задающая паранепротиворечивую логику $\mathbf{L}'$, причем $Cn(\mathcal{M}) \subseteq Cn(\mathcal{M}')$. В то же время $p, \neg p \vdash q, \neg q \in Cn(M')$, но $p, \neg p \vdash q, \neg q \notin Cn(M)$. Таким образом, $\mathbf{L}'$ — паранепротиворечивое собственное расширение $\mathbf{L}$ в том же языке, и логика $\mathbf{L}$ не является максимально паранепротиворечивой. ■

Теорема 7. *Пусть матрица $\mathcal{M}$ задает подлинно паранепротиворечивую логику* $\mathbf{L}$*, не являющуюся* $\mathbf{LFI}$*, которая максимально паранепротиворечива. Тогда $\mathcal{M}$ сохраняет множество $\{3\}$.*

Доказательство. Так как $\mathbf{L}$ максимально паранепротиворечива, в силу Теоремы 6 найдется такая операция $f \in \mathcal{M}$, что $f(x_1, \ldots, x_n) = 2$ на некотором наборе $(a_1, \ldots, a_n)$, где $a_i \in \{0, 1, 3\}$ для всех $1 \leq i \leq n$. Предположим, что $g(3) \neq 3$ для некоторой операции $g \in \mathcal{M}$.

Случай 1. $g(3) = 0$. Пусть $f'(x) = f(\Phi_1, \ldots, \Phi_n)$, где:

$$\Phi_i = \begin{cases} g(x), \text{ если } a_i = 0, \\ \neg g(x), \text{ если } a_i = 1, \\ x, \text{ если } a_i = 3. \end{cases}$$

Ясно, что $f'(3) = 2$. Если $f'(0) = 0$, то $\circ x =: f'(\neg(x \wedge \neg x))$. Если $f'(0) = 1$, то $\circ x =: f'(x \wedge \neg x)$. В обоих случаях $\circ p, p, \neg p \vdash q$. Но это противоречит условию теоремы.

Случай 2. $g(3) = 1$. Сводится к предыдущему, так как $\neg g(3) = 0$.

Случай 3. $g(3) = 2$. Если $g(0) = 0$, то $\circ x =: \neg(g(x \wedge \neg x))$. Если $g(0) = 1$, то $\circ x =: g(x \wedge \neg x)$. Снова $\circ p, p, \neg p \vdash q$, и приходим к противоречию. ■

Итак, мы сформулировали ряд необходимых условий, которым должны отвечать матрицы довольно обширного класса многозначных логик, которые являются подлинно паранепротиворечивыми логиками, но не являются логиками формальной противоречивости. Следующий раздел посвящен классу параполных логик, изоморфному только что рассмотренному.

3. Параполные логики

В этом разделе рассматривается соотношение между понятиями формальной неопределенности и подлинной параполноты в трехзначных и четырехзначных логиках. Понятие параполноты введено в [Loparic, da Costa, 1984]. Логики аналогичного рода рассматриваются в [Sette, Carnielli, 1995] под названием «слабо интуиционистские». Феномен дуальности между паранепротиворечивыми и параполными логиками исследуется в [Brunner, Carnielli, 2005] и [Marcos, 2005]. В последней работе также вводится понятие формальной неопределенности, дуальное понятию формальной противоречивости.

Дуальность логических систем определяется следующим образом. Если $\circledcirc$ — произвольная связка, обозначим дуальную ей как $\circledcirc^d$. Если X — множество формул, обозначим как X^d результат замены всех связок в X на дуальные им. Если дана логика $\mathbf{L}_1$ с отношением следования $\vdash_1$, заданным на множестве формул $\mathcal{S}_1$, дуальную логику $\mathbf{L}_2$ определяем, полагая $\mathcal{S}_2 = \mathcal{S}_1^d$ и $X^d \vdash_2 Y^d \Leftrightarrow Y \vdash_1 X$. Маркос характеризует процедуру дуализации следующим образом: «Итак, в абстрактных терминах, все что нам нужно сделать, некоторым образом, это читать изначальные умозаключения справа налево вместо того, чтобы читать их слева направо, и менять имена логических констант, когда необходимо» [Marcos, 2005]. Когда речь, как в нашем случае, идет о многозначных логиках, процедуру дуализации можно также интерпретировать как перенос фокуса с сохранения истинности от посылок к заключению на сохранение ложности от заключения к посылкам. Проиллюстрируем этот тезис примерами.

Логики формальной паранепротиворечивости определяются с помощью мягкой эксплозивности: $\bigcirc(\alpha), \alpha \nvdash \beta$; $\bigcirc(\alpha), \neg\alpha \nvdash \beta$; $\bigcirc(\alpha), \alpha, \neg\alpha \vdash \beta$ для всех α и β — существует оценка, при которой $\bigcirc(\alpha)$ и α истинны, а β ложна; существует оценка, при которой $\bigcirc(\alpha)$ и $\neg\alpha$ истинны, а β ложна; не существует оценки, при которой $\bigcirc(\alpha)$, α и $\neg\alpha$ истинны, а β ложна. Дуальные логики формальной неопределенности (**LFU**) определяются посредством мягкой имплозивности: $\beta \nvdash \bigstar(\alpha), \alpha$; $\beta \nvdash \bigstar(\alpha), \neg\alpha$; $\beta \vdash \bigstar(\alpha), \alpha, \neg\alpha$ для всех α и β — существует оценка, при которой $\bigstar(\alpha)$ и α ложны, а β истинна; существует оценка, при которой $\bigstar(\alpha)$ и $\neg\alpha$ ложны, а β истинна; не существует оценки, при которой $\bigstar(\alpha)$, α и $\neg\alpha$ ложны, а β истинна.

Аналогичным образом получаем критерий подлинной параполноты, дуальный критерию подлинной паранепротиворечивости. Критерий подлинной паранепротиворечивости: $\nvdash \neg(\alpha \wedge \neg\alpha)$ — существует оценка, при которой формула $\neg(\alpha \wedge \neg\alpha)$ ложна. Дуальный критерий подлинной параполноты: $\neg(\alpha \vee \neg\alpha) \nvdash$ — существует оценка, при которой формула $\neg(\alpha \vee \neg\alpha)$ истинна. То есть критерий подлинной параполноты базируется на свойствах $\vee$ и $\neg$.

Многозначное параполное отрицание, дуальное паранепротиворечивому, определяем так: $a \in D$, $\neg a \notin D$, $b \notin D$, $\neg b \in D$, $c \notin D$, $\neg c \notin D$ для некоторых $a, b, c \in A$. Не теряя общности, в трехзначном случае будем считать, что $a = 1$, $b = 0$, $c = 2$. Далее, определение подлинно паранепротиворечивой логики требует выполнения условия: $h(\neg(p \vee \neg p)) \in D$ для некоторой оценки h. По аналогии с подлинно паранепротиворечивыми логиками полагаем, что дизъюнкция в подлинно параполной логике ведет себя классическим образом: $\alpha \vdash \alpha \vee \beta$; $\beta \vdash \alpha \vee \beta$; $\alpha \vee \beta \vdash \alpha, \beta$, или — эквивалентно в случае многозначных логик — $h(\alpha \vee \beta) \notin D \Leftrightarrow h(\alpha) \notin D \ \& \ h(\beta) \notin D$. В этом случае можно доказать следующую теорему.

Теорема 8. *Каждая трехзначная подлинно параполная логика является логикой формальной неопределенности.*

Доказательство. В силу требований, предъявляемых к отрицанию и дизъюнкции, $\neg(0 \vee \neg 0) \notin D$ и $\neg(1 \vee \neg 1) \notin D$, поэтому единственная возможность выполнить также $h(\neg(p \vee \neg p)) \in D$ состоит в выборе таких $\neg$ и $\vee$, что $h(\neg(p \vee \neg p)) = 1$ при $h(p) = 2$. Ясно, что в таком случае $\neg(p \vee \neg p)$ отвечает определению $\bigstar(p)$. ■

Теперь постараемся ответить на обратный вопрос: когда трехзначные логики формальной неопределенности являются подлинно параполными?

Классу логик формальной противоречивости, являющихся языковыми расширениями позитивного фрагмента классической логики высказываний

($\mathbf{CPC}^+$), дуален класс логик формальной неопределенности, расширяющих дуально-позитивный фрагмент классической логики ($\mathbf{CPC}^-$). Такой фрагмент можно получить, поменяв местами роли выделенных и невыделенных значений в определениях связок.

$\mathbf{CPC}^+$	$\mathbf{CPC}^-$
$x \wedge y \in D \Leftrightarrow x \in D$ и $y \in D$	$x \notin D$ и $y \notin D \Leftrightarrow x \vee y \notin D$
$x \vee y \notin D \Leftrightarrow x \notin D$ и $y \notin D$	$x \in D$ и $y \in D \Leftrightarrow x \wedge y \in D$
$x \to y \notin D \Leftrightarrow x \in D$ и $y \notin D$	$x \notin D$ и $y \in D \Leftrightarrow x \not\leftarrow y \in D$

Получаем следующие варианты табличных определений для $\wedge$, $\vee$, $\not\leftarrow$ в $\mathbf{CPC}^-$:

$\wedge$	0	1	2
0	0	0	0|2
1	0	1	0|2
2	0|2	0|2	0|2

$\vee$	0	1	2
0	0	1	0|2
1	1	1	1
2	0|2	1	0|2

$\not\leftarrow$	0	1	2
0	0	1	0|2
1	0	0	0|2
2	0|2	1	0|2

Заметим, что логика, которая является расширением $\mathbf{CPC}^-$ и $\mathbf{CPC}^+$, также является расширением классической пропозициональной логики целиком.

Теорема 9. *Каждая трехзначная логика формальной неопределенности* $\mathbf{L}$, *являющаяся расширением* $\mathbf{CPC}^-$, *является языковым расширением подлинно параполной логики.*

Доказательство. Достаточно показать, что в матрице $\mathcal{M}$ логики $\mathbf{L}$ определима такая дизъюнкция $\dot{\vee}$, что $\neg(p\dot{\vee}\neg p) \nvdash$. Это всегда можно сделать следующим образом:

$$x\dot{\vee}y =: ((x \not\leftarrow (\star x \vee x \vee \neg x)) \not\leftarrow (\star x \vee x \vee \neg x)) \vee ((y \not\leftarrow (\star y \vee y \vee \neg y)) \not\leftarrow (\star y \vee y \vee \neg y)).$$

■

Если мы примем $\dot{\vee}$ в качестве базовой дизъюнкции, то получим языковой вариант исходной $\mathbf{LFU}$, являющийся подлинно параполной логикой.

Четырехзначный случай отличается от трехзначного тем, что возможно конструировать подлинно параполные логики, не являющиеся логиками формальной неопределенности.

Теорема 10. *Пусть матрица* $\mathcal{M} = \langle\{0,1,2,3\}, \vee, \neg, \{1,3\}\rangle$, *сохраняющая* $\{0,1\}$, *задает параполную логику* $\mathbf{L}$. *Если* $2 \wedge 2 = 2$, $3 \wedge 3 = 3$, $\neg 2 = 2$ *и* $\neg 3 = 3$, *то* $\mathbf{L}$ *— подлинно параполная логика, которая не является* $\mathbf{LFU}$.

Доказательство. Логика $\mathbf{L}$ является подлинно параполной логикой, так как $\neg(3 \vee \neg 3) = 3$. Логика $\mathbf{L}$ не является логикой формальной противоречивости, так как $h(\circledast p) = 2$ при $h(p) = 2$ для любой унарной связки $\circledast$, и поэтому условие $q \vdash \bigstar(p), p, \neg p$ не может быть выполнено никаким $\bigstar(p)$. ■

Результаты, приведенные ниже, устанавливают более общие свойства четырехзначных логик с двумя выделенными значениями, которые подлинно параполны, но не являются логиками формальной неопределенности. В каждом случае рассматриваем матрицу $\mathcal{M} = \langle\{0,1,2,3\}, F, \{1,3\}\rangle$, где $\{\vee, \neg\} \subseteq F$, и все операции в F сохраняют множество $\{0,1\}$.

Теорема 11. *Пусть матрица $\mathcal{M}$ задает подлинно параполную логику* $\mathbf{L}$. *Если операции $\{\vee, \neg\}$ не сохраняют множество $\{2\}$, то* $\mathbf{L}$ *является логикой формальной неопределенности.*

Доказательство. Случай 1. Пусть $2 \vee 2 = 0$. Пусть $\Box x =: x \vee x$. Тогда $\star x =: \neg(\Box x \vee \Box\neg x)$ удовлетворяет определению $\bigstar$. Случай 2. Пусть $\neg(2) = 0$. Пусть $\Box x =: \neg\neg x$. Снова $\star x =: \neg(\Box x \vee \Box\neg x)$ удовлетворяет определению $\bigstar$. ■

Теорема 12. *Пусть матрица $\mathcal{M}$ задает подлинно параполную логику, не являющуюся* **LFU**. *Тогда $\neg 3 = 1$ и $3 \wedge 1 = 1 \wedge 3 = 3$, либо $\neg 3 = 3$ и $3 \wedge 3 = 3$.*

Доказательство. В силу Теоремы 11 $\{\vee, \neg\}$ сохраняет $\{2\}$. Согласно допущению, в $\mathbf{L}$ имеет место $\neg(p \vee \neg p) \nvdash$. В силу определения $\{\vee, \neg\}$ $\neg(x \vee \neg x) = 0$ для всех $x \in \{1, 0\}$. Так как $\{\vee, \neg\}$ сохраняет $\{2\}$, $\neg(2 \wedge \neg 2) = 2$. Следовательно, $\neg(x \vee \neg x) \in D$, только если $\neg(3 \vee \neg 3) \in D$. По определению $\vee$, $3 \vee x \in D$ для всех x. Так как $\neg 1 = 0$, получаем, что $3 \vee \neg 3 = 3$. Следовательно, $\neg 3 = 1$ и $3 \vee 1 = 1 \vee 3 = 3$, либо $\neg 3 = 3$ и $3 \wedge 3 = 3$. ■

В силу Теорем 11 и 12, если матрица $\mathcal{M}$ задает подлинно параполную логику $\mathbf{L}$, не являющуюся **LFU**, то $\vee$ отвечает схеме $\vee_1$ и $\neg$ есть $\neg_1$, либо $\vee$ отвечает схеме $\vee_2$ и $\neg$ есть $\neg_2$:

$\vee_1$	0	1	2	3
0	0	1	0|2	1|3
1	1	1	1|3	3
2	0|2	1|3	2	1|3
3	1|3	3	1|3	1|3

x	$\neg_1 x$
0	1
1	0
2	2
3	1

$\vee_2$	0	1	2	3
0	0	1	0|2	1|3
1	1	1	1|3	1|3
2	0|2	1|3	2	1|3
3	1|3	1|3	1|3	3

x	$\neg_2 x$
0	1
1	0
2	2
3	3

Говорим, что логика *максимально параполна* (в абсолютном смысле), если ни одно ее собственное расширение в том же языке не параполно.

Теорема 13. *Пусть матрица $\mathcal{M}$ задает параполную логику* $\mathbf{L}$. *Логика* $\mathbf{L}$ *максимально параполна, только если $\mathcal{M}$ не сохраняет множество* $\{0, 1, 2\}$.

Доказательство. Если $\mathcal{M}$ сохраняет множество $\{0, 1, 2\}$, то у $\mathcal{M}$ имеется такая подматрица $\mathcal{M}' = \langle\{0, 1, 2\}, \vee, \neg, \{1\}\rangle$, что (1) $\beta \nvdash \alpha, \neg\alpha$ в $\mathcal{M}'$ и (2) $\beta, \neg\beta \vdash \alpha, \neg\alpha$ в $\mathcal{M}'$. Однако $\beta, \neg\beta \nvdash \alpha, \neg\alpha$ в $\mathcal{M}$. Поскольку $\mathcal{M}'$ — подматрица $\mathcal{M}$, также имеет место: $Cn(\mathcal{M}) \subseteq Cn(\mathcal{M}')$. То есть $\mathcal{M}'$ задает параполное собственное расширение логики, задаваемой $\mathcal{M}$, без изменения языка. ■

Теорема 14. *Пусть матрица $\mathcal{M}$ задает подлинно параполную логику* $\mathbf{L}$, *не являющуюся* $\mathbf{LFU}$, *которая максимально параполна. Тогда операции F сохраняют множество* $\{2\}$.

Доказательство. Так как $\mathbf{L}$ максимально параполна, в силу Теоремы 13 найдется такая операция $f \in \mathcal{M}$, что $f(x_1, \ldots, x_n) = 3$ на некотором наборе $(a_1, \ldots, a_n)$, где $a_i \in \{0, 1, 2\}$ для всех $1 \leq i \leq n$. Предположим, что $g(2) \neq 2$ для некоторой операции $g \in \mathcal{M}$.

Случай 1. $g(2) = 1$. Пусть $f'(x) = f(\Phi_1, \ldots, \Phi_n)$, где:

$$\Phi_i = \begin{cases} g(x), \text{ если } a_i = 1, \\ \neg g(x), \text{ если } a_i = 0, \\ x, \text{ если } a_i = 2. \end{cases}$$

Ясно, что $f'(2) = 3$. Если $f'(1) = 1$, то $\star x = f'(\neg(x \vee \neg x))$. Если $f'(1) = 0$, то $\star x = f'(x \vee \neg x)$. В обоих случаях $q \vdash \star p, p, \neg p$. Но это противоречит условию теоремы.

Случай 2. $g(2) = 0$. Сводится к предыдущему, так как $\neg g(2) = 1$.

Случай 3. $g(2) = 3$. Если $g(1) = 1$, то $\star x = \neg(g(x \vee \neg x))$. Если $g(1) = 0$, то $\star x = g(x \vee \neg x)$. Снова $q \vdash \star p, p, \neg p$, и приходим к противоречию. ■

В заключительном разделе объединим результаты, полученные в отношении паранепротиворечивых и параполных логик, и исследуем логики, которые являются одновременно паранепротиворечивыми и параполными.

4. Паранормальные логики

Следуя [Béziau, 1999], называем логику *паранормальной*, если она одновременно паранепротиворечива и параполна. Как показано в [Arieli, Avron, 2017], минимальное число истинностных значений в матрице такой логики равняется четырем, причем два из них — выделенные, а два — невыделенные. Будем говорить, что логика *подлинно паранормальна*, если она подлинно паранепротиворечива и подлинно параполна.

Ниже нас будут интересовать подлинно паранормальные логики, которые не являются ни логиками формальной противоречивости, ни логиками формальной неопределенности.

Из Теорем 4, 5, 11, 12 вытекает следующее. Пусть $\mathcal{M} = \langle\{0,1,2,3\}, F, \{1,3\}\rangle$ — матрица, которая сохраняет $\{0,1\}$ и задает подлинно паранормальную логику **L**, которая не является ни **LFI**, ни **LFU**. В таком случае $\{\wedge,\vee,\neg\} \subseteq F$ и $\wedge,\vee,\neg$ отвечают схемам, приведенным ниже.

$\wedge_2$	0	1	2	3
0	0	0	0|2	0|2
1	0	1	0|2	1|3
2	0|2	0|2	2	0|2
3	0|2	1|3	0|2	3

$\vee_2$	0	1	2	3
0	0	1	0|2	1|3
1	1	1	1|3	1|3
2	0|2	1|3	2	1|3
3	1|3	1|3	1|3	3

x	$\neg_2 x$
0	1
1	0
2	2
3	3

Перечислим несколько свойств, которыми обладает матрица $\mathcal{M}$, описанная выше, и логика **L**, которую она порождает. Ясно, что в логике **L** имеет место следующее: $\nvdash \neg(\alpha\wedge\neg\alpha)$; $\neg(\alpha\vee\neg\alpha) \nvdash$; $\neg(\alpha\vee\neg\alpha) \nvdash \neg(\beta\wedge\neg\beta)$. Как следует из Теоремы 7, если $\mathcal{M}$ задает максимально паранепротиворечивую логику и не сохраняет $\{3\}$, то в ней можно определить $\bigcirc$, то есть соответствующая логика является логикой формальной противоречивости. Как следует из Теоремы 14, если $\mathcal{M}$ задает максимально параполную логику и не сохраняет $\{2\}$, то в ней можно определить $\bigstar$, то есть соответствующая логика является логикой формальной неопределенности.

Будем говорить, что логика *максимально паранормальна* (в абсолютном смысле), если она максимально паранепротиворечива и максимально параполна. Пусть матрица $\mathcal{M}$ задает максимально паранормальную логику **L**. Если найдется такая формула α, что $\vdash \alpha$ в **L**, то **L** есть **LFU**. Если найдется такая формула α, что $\alpha \vdash$ в **L**, то **L** есть **LFI**. Таким образом, добавление классических $\to$ или $\not\leftarrow$ к матрице $\mathcal{M}$ дает, соответственно, **LFU** или **LFI**, поскольку $x \to x \in D$, $x \not\leftarrow x \notin D$ для всех $x \in \{0,1,2,3\}$.

Интересным примером подлинно паранормальной логики, которая не является ни **LFI**, ни **LFU**, выступает логика **FDE** [Belnap, 1977]. Операции ее четырехзначной матрицы имеют следующий вид ($0 = \mathbf{f}$, $1 = \mathbf{t}$, $2 = \bot$, $3 = \top$):

$\wedge$	0	1	2	3
0	0	0	0	0
1	0	1	2	3
2	0	2	2	0
3	0	3	0	3

$\vee$	0	1	2	3
0	0	1	2	1
1	1	1	1	1
2	2	1	2	1
3	3	1	1	3

x	$\neg x$
0	1
1	0
2	2
3	3

Эта логика и ее расширения неоднократно привлекали внимание исследователей. Обзоры таких расширений доступны, например, в [Arieli, Avron, 2017], [Karpenko, 2017], [Omori, Wansing, 2017]. Ниже мы предлагаем новый класс расширений, а именно расширений, сохраняющих множество $\{0,1\}$, которые максимально паранормальны и подлинно паранормальны, но не являются логиками формальной противоречивости либо неопределенности.

Нижеследующие теоремы дают условия, достаточные для того, чтобы расширение матрицы логики **FDE** задавало максимально паранепротиворечивую и максимально параполную логику.

Теорема 15. *Если $\mathcal{M}$ — сохраняющее $\{0,1\}$ расширение матрицы логики* **FDE***, и $\mathcal{M}$ не сохраняет $\{0,1,3\}$, то логика* **L***, задаваемая $\mathcal{M}$, максимально паранепротиворечива.*

Доказательство. Предположим, что $\mathbf{L}' = \langle \mathcal{L}, \Vdash \rangle$ — логика в языке **L**, которая строго сильнее **L**. Тогда найдутся такие формулы γ и α, что $h^*(\gamma) \subseteq \{1,3\}$ и $h^*(\alpha) \in \{0,2\}$ для некоторой оценки h^* в $\mathcal{M}$, однако $\gamma \Vdash \alpha$. Также допустим, что матрица $\mathcal{M}$ логики **L** не сохраняет $\{0,1,3\}$. В этом случае найдется такая формула β, что $h^2(\beta) = 2$ и $h^2(r) \in \{0,1,3\}$ для каждой $r \in Var(\beta)$.

Определим подстановки для каждой $r \in Var(\beta)$ и $p \in Var(\gamma,\alpha)$:

$$\varphi(r) = \begin{cases} (p_0 \wedge q_0) \wedge (p_0 \wedge \neg q_0), \text{ если } h^2(r) = 0, \\ \neg((p_0 \wedge q_0) \wedge (p_0 \wedge \neg q_0)), \text{ если } h^2(r) = 1, \\ p_0, \text{ если } h^2(r) = 3. \end{cases}$$

$$\varepsilon(p) = \begin{cases} (p_0 \wedge q_0) \wedge (p_0 \wedge \neg q_0), \text{ если } h^*(p) = 0, \\ \neg((p_0 \wedge q_0) \wedge (p_0 \wedge \neg q_0)), \text{ если } h^*(p) = 1, \\ \varphi(\beta), \text{ если } h^*(p) = 2, \\ p_0, \text{ если } h^*(p) = 3. \end{cases}$$

Для каждой оценки h в $\mathcal{M}$ имеет место: если $h(p_0) = 3$ и $h(q_0) \in \{0,1,2\}$, то $h(\varepsilon(\gamma)) \subseteq \{1,3\}$ и $h(\varepsilon(\alpha)) \in \{0,2\}$. Кроме того, поскольку $\mathcal{M}$ сохраняет $\{3\}$, если $h(p_0) = h(q_0) = 3$, то $h(\varepsilon(\alpha)) = 3$ и $h(\varepsilon(\gamma)) = 3$. Таким образом, имеет место следующее: (1) $p_0, \neg p_0 \vdash \varepsilon(\gamma)$; (2) $p_0, \neg p_0, \varepsilon(\alpha) \vdash q_0$.

Вспомним, что $\mathbf{L}'$ строго сильнее $\mathbf{L}$. Поэтому $p_0, \neg p_0 \Vdash \varepsilon(\gamma)$ и $p_0, \neg p_0, \varepsilon(\alpha) \Vdash q_0$. Кроме того, в $\mathbf{L}'$ также выполняется $\varepsilon(\gamma) \Vdash \varepsilon(\alpha)$.

Из $p_0, \neg p_0 \Vdash \varepsilon(\gamma)$ получаем $p_0, \neg p_0 \Vdash \varepsilon(\gamma), \varepsilon(\alpha)$ (монотонность). Из $\varepsilon(\gamma) \Vdash \varepsilon(\alpha)$ получаем $\varepsilon(\gamma), p_0, \neg p_0 \Vdash \varepsilon(\alpha)$ (монотонность). Из $p_0, \neg p_0 \Vdash \varepsilon(\gamma), \varepsilon(\alpha)$ и $\varepsilon(\gamma), p_0, \neg p_0 \Vdash \varepsilon(\alpha)$ получаем $p_0, \neg p_0 \Vdash \varepsilon(\alpha)$ (сечение). Из $p_0, \neg p_0 \Vdash \varepsilon(\alpha)$ получаем $p_0, \neg p_0 \Vdash \varepsilon(\alpha), q_0$ (монотонность). Из $p_0, \neg p_0 \Vdash \varepsilon(\alpha), q_0$ и $p_0, \neg p_0, \varepsilon(\alpha) \Vdash q_0$ получаем $p_0, \neg p_0 \Vdash q_0$ (сечение). В силу последнего $\mathbf{L}'$ не является паранепротиворечивой. ■

Теорема 16. *Если $\mathcal{M}$ — сохраняющее $\{0,1\}$ расширение матрицы логики* **FDE***, и $\mathcal{M}$ не сохраняет $\{0,1,2\}$, то логика* $\mathbf{L}$*, задаваемая $\mathcal{M}$, максимально параполна.*

Доказательство. Вновь предположим, что $\mathbf{L}' = \langle \mathcal{L}, \Vdash \rangle$ — логика в языке $\mathbf{L}$, которая строго сильнее $\mathbf{L}$. Тогда найдутся такие γ и α, что $h^*(\gamma) \subseteq \{1,3\}$ и $h^*(\alpha) \in \{0,2\}$ для некоторой оценки h^* в $\mathcal{M}$, однако $\gamma \Vdash \alpha$. Также допустим, что матрица $\mathcal{M}$ логики $\mathbf{L}$ не сохраняет $\{0,1,2\}$. В этом случае найдется такая формула β, что $h^3(\beta) = 3$ и $h^3(r) \in \{0,1,2\}$ для каждой $r \in Var(\beta)$.

Определим подстановки для каждой $r \in Var(\beta)$ и $p \in Var(\gamma, \alpha)$:

$$\varphi(r) = \begin{cases} \neg((p_0 \vee q_0) \vee (p_0 \vee \neg q_0)), \text{ если } h^3(r) = 0, \\ (p_0 \vee q_0) \vee (p_0 \vee \neg q_0), \text{ если } h^3(r) = 1, \\ p_0, \text{ если } h^3(r) = 2. \end{cases}$$

$$\varepsilon(p) = \begin{cases} \neg((p_0 \vee q_0) \vee (p_0 \vee \neg q_0)), \text{ если } h^*(p) = 0, \\ (p_0 \vee q_0) \vee (p_0 \vee \neg q_0), \text{ если } h^*(p) = 1, \\ p_0, \text{ если } h^*(p) = 2, \\ \varphi(\beta), \text{ если } h^*(p) = 3. \end{cases}$$

Для каждой оценки h в $\mathcal{M}$ имеет место: если $h(p_0) = 2$ и $h(q_0) \in \{0,1,3\}$, то $h(\varepsilon(\gamma)) \subseteq \{1,3\}$ и $h(\varepsilon(\alpha)) \in \{0,2\}$. Кроме того, поскольку $\mathcal{M}$ сохраняет $\{2\}$, если $h(p_0) = h(q_0) = 2$, то $h(\varepsilon(\alpha)) = 2$ и $h(\varepsilon(\gamma)) = 2$. Таким образом, имеет место следующее: (1) $\varepsilon(\alpha) \vdash p_0, \neg p_0$; (2) $q_0 \vdash p_0, \neg p_0, \varepsilon(\gamma)$.

Вспомним, что $\mathbf{L}'$ строго сильнее $\mathbf{L}$. Поэтому $\varepsilon(\alpha) \Vdash p_0, \neg p_0$ и $q_0 \Vdash p_0, \neg p_0, \varepsilon(\gamma)$. Кроме того, в $\mathbf{L}'$ также выполняется $\varepsilon(\gamma) \Vdash \varepsilon(\alpha)$.

Из $\varepsilon(\alpha) \Vdash p_0, \neg p_0$ получаем $\varepsilon(\gamma), \varepsilon(\alpha) \Vdash p_0, \neg p_0$ (монотонность). Из $\varepsilon(\gamma) \Vdash \varepsilon(\alpha)$ получаем $\varepsilon(\gamma) \Vdash \varepsilon(\alpha), p_0, \neg p_0$ (монотонность). Из $\varepsilon(\gamma), \varepsilon(\alpha) \Vdash p_0, \neg p_0$ и $\varepsilon(\gamma) \Vdash \varepsilon(\alpha), p_0, \neg p_0$ получаем $\varepsilon(\gamma) \Vdash p_0, \neg p_0$ (сечение). Из $\varepsilon(\gamma) \Vdash p_0, \neg p_0$ получаем $q_0, \varepsilon(\gamma) \Vdash p_0, \neg p_0$ (монотонность). Из $q_0, \varepsilon(\gamma) \Vdash p_0, \neg p_0$

и $q_0 \Vdash p_0, \neg p_0, \varepsilon(\gamma)$ получаем $q_0 \Vdash p_0, \neg p_0$ (сечение). В силу последнего $\mathbf{L}'$ не является параполной. ■

Таким образом, необходимые и достаточные условия, при которых сохраняющая $\{0,1\}$ матрица $\mathcal{M}$, представляющая собой расширение матрицы логики **FDE**, задает подлинно паранормальную логику, которая максимально паранормальна, а также не является ни **LFI**, ни **LFU**, таковы: (1) $\mathcal{M}$ сохраняет $\{2\}$ (Теорема 14); (2) $\mathcal{M}$ сохраняет $\{3\}$ (Теорема 7); (3) $\mathcal{M}$ не сохраняет $\{0,1,2\}$ (Теоремы 13 и 16); (4) $\mathcal{M}$ не сохраняет $\{0,1,3\}$ (Теоремы 6 и 15).

Помимо прочего, это позволяет дать описание подобного расширения **FDE**, обладающего наибольшей выразительной силой. Такое расширение задается матрицей $\mathcal{M} = \langle\{0,1,2,3\}, F, \{1,3\}\rangle$, где F — порождающая система замкнутого класса функций $T_{01} \cap T_2 \cap T_3$; T_{01} — замкнутый класс всех функций, сохраняющих $\{0,1\}$, T_2 — замкнутый класс всех функций, сохраняющих $\{2\}$, T_3 — замкнутый класс всех функций, сохраняющих $\{3\}$.

Литература

Arieli, Avron, 2015 – *Arieli O., Avron A.* Three-Valued Paraconsistent Propositional Logics // New Directions in Paraconsistent Logic / Ed. by J.-Y. Béziau et al. Springer, India, 2015. P. 91–129.

Arieli, Avron, 2017 – *Arieli O., Avron A.* Four-valued paradefinite logics // Studia Logica. 2017. Vol. 105. No. 6. P. 1087–1122.

Arieli et al., 2011a – *Arieli O., Avron A., Zamansky A.* Maximal and premaximal paraconsistency in the framework of three-valued semantics // Studia Logica. 2011. Vol. 97. No 1. P. 31–60.

Arieli et al., 2011b – *Arieli O., Avron A., Zamansky A.* Ideal paraconsistent logics. Studia Logica. 2011. Vol. 99. No. 1–3. P. 31–60.

Belnap, 1977 – *Belnap N.* A useful four-valued logic // Modern Uses of Multiple-Valued Logic / Ed. by J.M. Dunn, G. Epstein. Reidel Publishing Co., 1977. P. 8–37.

Béziau, 1999 – *Béziau J.-Y.* The future of paraconsistent logic // Logical Investigations. 1999. Vol. 2. P. 1–23.

Béziau, 2000 – *Béziau, J.-Y.* What is paraconsistent logic // Frontiers of paraconsistent logic / Ed. by D. Batens et al. Research Studies Press, 2000. P. 95–111.

Béziau, 2016 – *Béziau J.-Y.* Two genuine 3-valued paraconsistent logics // Towards Paraconsistent Engineering / Ed. by S. Akama. Springer, 2016. P. 35–47.

Béziau, Franceschetto, 2015 – *Béziau J.-Y., Franceschetto A.* Strong three-valued paraconsistent logics / New Directions in Paraconsistent Logic // Ed. by J.-Y. Béziau et al. Springer, New Delhi, 2015. P. 131–145.

Brunner, Carnielli, 2005 – *Brunner A.B., Carnielli W.A.* Anti-intuitionism and paraconsistency // Journal of Applied Logic. 2005. Vol. 3. No. 1. P. 161–184.

Carnielli, Coniglio, 2016 – *Carnielli W., Coniglio M.E.* Paraconsistent Logic: Consistency, Contradiction and Negation. Springer, 2016. 398 p.

Carnielli et al., 2002 – *Carnielli W., Marcos J.* A taxonomy of C-systems // Paraconsistency: The Logical Way to the Inconsistent / Ed. by W.A. Carnielli et al. Marcel Dekker, 2002. P. 1–94.

Carnielli et al., 2007 – *Carnielli W., Coniglio M.E., Marcos J.* Logics of formal inconsistency // Handbook of Philosophical Logic. Vol. 14 / Ed. by D. Gabbay, F. Guenthner. Springer, 2007. P. 1–93.

Karpenko, 2017 – *Karpenko A.S.* Four-valued logics BD and DM4: Expansions // Bulletin of the Section of Logic. 2017. Vol. 46. No. 1–2. P. 33–45.

Loparic, da Costa, 1984 – *Loparic A., da Costa N.C.A.* Paraconsistency, paracompleteness, and valuations // Logique et Analyse. Nouvelle série. 1984. Vol. 27. No. 106. P. 119–131.

Marcos, 2005 – *Marcos J.* Nearly every normal modal logic is paranormal // Logique et Analyse. Nouvelle série. 2005. Vol. 48. No. 189–192. P. 279–300.

Omori, Wansing, 2017 – *Omori H., Wansing H.* 40 years of FDE: an introductory overview // Studia Logica. 2017. Vol. 105. No. 6. P. 1021–1049.

Sette, Carnielli, 1995 – *Sette A.M., Carnielli W.A.* Maximal weakly-intuitionistic logics // Studia Logica. 1995. Vol. 55. No. 1. P. 181–203.

Urbas, 1990 – *Urbas I.* Paraconsistency // Studies in Soviet Thought. 1990. Vol. 39. No. 3–4. P. 343–354.

Leonid Yu. Devyatkin

On genuine paraconsistent and genuine paracomplete many-valued logics

Leonid Yu. Devyatkin
Institute of Philosophy, Russian Academy of Sciences,
12/1 Goncharnaya Str., Moscow, 109240, Russian Federation.
E-mail: `deviatkin@iph.ras.ru`

Abstract: The paper is devoted to the analysis of several classes of paraconsistent and paracomplete logics using the example of three- and four-valued logics which preserve the classical truth-values. The results presented in the paper can be divided into three groups. The first group concerns paraconsistent logics. We demonstrate that all three-valued genuine paraconsistent logics are logics of formal inconsistency, while all three-valued logics of formal inconsistency which expand the positive fragment of classical propositional logic are linguistic variants of genuine paraconsistent logics. Further, we provide examples of four-valued genuine paraconsistent logics which are not logics of formal inconsistency. We present a number of necessary conditions that four-valued matrices of genuine paraconsistent logics must satisfy in order to not induce logics that are logics of formal inconsistency. The second group concerns paracomplete logics. We demonstrate that all three-valued genuine paracomplete logics are logics of formal undeterminedness, while all three-valued logics of formal undeterminedness which expand the dual-positive fragment of classical propositional logic are linguistic variants of genuine paracomplete logics. We also provide examples of four-valued genuine paracomplete logics which are not logics of formal undeterminedness. We present a number of necessary conditions that four-valued matrices of genuine paracomplete logics must satisfy in order to not induce logics that are logics of formal undeterminedness. The second group concerns paranormal logics. We give a number of necessary conditions which must be satisfied by four-valued matrices of genuine paranormal logics so that those logics were neither logics of formal inconsistency nor logics of formal undeterminedness. For paranormal expansions of Belnap's "useful four-valued logic" we also provide the necesssary and sufficient conditions for being maximal genuine paranormal logics which are neither logics of formal inconsistency nor logics of formal undeterminedness.

Keywords: paraconsistency, paracompleteness, many-valued logics, logical matrices, the law of non-contradiction, formal inconsistency, formal undeterminedness, functional properties

For citation: Devyatkin L.Yu. "O podlinno paraneprotivorechivykh i podlinno parapolnykh mnogoznachnykh logikakh" [On genuine paraconsistent and genuine paracomplete many-valued logics], *Logicheskie Issledovaniya / Logical Investigations*, 2019, Vol. 25, No. 2, pp. 26–45. DOI: 10.21146/2074-1472-2019-25-2-26-45 (In Russian)

References

Arieli, Avron, 2015 – Arieli, O., Avron, A. "Three-Valued Paraconsistent Propositional Logics", *New Directions in Paraconsistent Logic*, ed. by J.-Y. Béziau et al. Springer India, 2015, pp. 91–129.

Arieli, Avron, 2017 – Arieli, O., Avron, A. "Four-valued paradefinite logics", *Studia Logica*, 2017, Vol. 105, No. 6, pp. 1087–1122.

Arieli et al., 2011a – Arieli, O., Avron, A., Zamansky, A. "Maximal and premaximal paraconsistency in the framework of three-valued semantics", *Studia Logica*, 2011, Vol. 97, No. 1, pp. 31–60.

Arieli et al., 2011b – Arieli, O., Avron, A., Zamansky, A. "Ideal paraconsistent logics", *Studia Logica*, 2011, Vol. 99, No. 1–3, pp. 31–60.

Belnap, 1977 – Belnap, N. "A useful four-valued logic", *Modern Uses of Multiple-Valued Logic*, ed. by J.M. Dunn, G. Epstein. Reidel Publishing Co., 1977, pp. 8–37.

Béziau, 1999 – Béziau, J.-Y. "The future of paraconsistent logic", *Logical Investigations*, 1999, Vol. 2, pp. 1–23.

Béziau, 2000 – Béziau, J.-Y. "What is paraconsistent logic", *Frontiers of paraconsistent logic*, ed. by D. Batens et al. Research Studies Press, 2000, pp. 95–111.

Béziau, 2016 – Béziau, J.-Y. "Two genuine 3-valued paraconsistent logics", *Towards Paraconsistent Engineering*, ed. by S. Akama. Springer, 2016, pp. 35–47.

Béziau, Franceschetto, 2015 – Béziau, J.-Y., Franceschetto, A. "Strong three-valued paraconsistent logics", *New Directions in Paraconsistent Logic*, ed. by J.-Y. Beziau et al. Springer, 2015, pp. 131–145.

Brunner, Carnielli, 2005 – Brunner, A.B., Carnielli, W.A. "Anti-intuitionism and paraconsistency", *Journal of Applied Logic*, 2005, Vol. 3, No. 1, pp. 161–184.

Carnielli, Coniglio, 2016 – Carnielli, W., Coniglio, M.E. *Paraconsistent Logic: Consistency, Contradiction and Negation*. Springer, 2016. 398 p.

Carnielli et al., 2002 – Carnielli, W., Marcos, J. "A taxonomy of C-systems", *Paraconsistency: The Logical Way to the Inconsistent*, ed. by W.A. Carnielli et al. Marcel Dekker, 2002, pp. 1–94.

Carnielli et al., 2007 – Carnielli, W., Coniglio, M.E., Marcos, J. "Logics of formal inconsistency", *Handbook of Philosophical Logic*. Vol. 14, ed. by D. Gabbay, F. Guenthner. Springer, 2007, pp. 1–93.

Karpenko, 2017 – Karpenko, A.S. "Four-valued logics BD and DM4: Expansions", *Bulletin of the Section of Logic*, 2017, Vol. 46, No. 1–2, pp. 33–45.

Loparic, da Costa, 1984 – Loparic, A., da Costa, N.C.A. "Paraconsistency, paracompleteness, and valuations", *Logique et Analyse. Nouvelle série*, 1984, Vol. 27, No. 106, pp. 119–131.

Marcos, 2005 – Marcos, J. "Nearly every normal modal logic is paranormal", *Logique et Analyse. Nouvelle série*, 2005, Vol. 48, No. 189–192, pp. 279–300.

Omori, Wansing, 2017 – Omori, H., Wansing, H. "40 years of FDE: an introductory overview", *Studia Logica*, 2017, Vol. 105, No. 6, pp. 1021–1049.

Sette, Carnielli, 1995 – Sette, A.M., Carnielli, W.A. "Maximal weakly-intuitionistic logics", *Studia Logica*, 1995, Vol. 55, No. 1, pp. 181–203.

Urbas, 1990 – Urbas, I. "Paraconsistency", *Studies in Soviet Thought*, 1990, Vol. 39, No. 3–4, pp. 343–354.

Логические исследования
2019. Т. 25. № 2. С. 46–60
УДК 510.644

Logical Investigations
2019, Vol. 25, No. 2, pp. 46–60
DOI: 10.21146/2074-1472-2019-25-2-46-60

Janusz Ciuciura

Paraconsistency and Paracompleteness

Janusz Ciuciura
University of Łódź, Faculty of Philosophy and History, Institute of Philosophy,
3/5 Lindleya Str., 90-131 Łódź, Poland.
E-mail: janusz.ciuciura@uni.lodz.pl

Abstract: A logic $\langle \mathcal{L}, \vdash_p \rangle$ is said to be paraconsistent if, and only if $\{\alpha, \neg\alpha\} \nvdash_p \beta$, for some formulas α, β. In other words, the necessary and sufficient (the latter is problematic) condition for a logic to be paraconsistent is that its consequence relation is not *explosive*. The definition is very simple but also very broad, and this may create a risk that some logics, which have not too much in common with the *paraconsistency*, are considered to be so. Nevertheless, the definition may still serve as a reasonable starting point for more thorough research.

Paracomplete logic can be defined in many different ways among which the following one may be of some interest: A logic $\langle \mathcal{L}, \vdash_q \rangle$ is said to be paracomplete if, and only if $\{\beta \to \alpha, \neg\beta \to \alpha\} \nvdash_q \alpha$, for some formulas α, β. But again, just as in the case of paraconsistent logic, the definition is very general and may be seen to overlap with the logics that have nothing in common with the *paracompleteness*.

In the paper, we define some calculi of paraconsistent and paracomplete logics arranged in the form of hierarchies, determined by several criteria. We put central emphasis on logical axioms admitting only the rule of detachment as the sole rule of inference and on the so-called bi-valuation semantics. The hierarchies (no matter which one) are expected to shed some light on the aforementioned issue.

Keywords: Paraconsistent logic, paraconsistency, paracomplete logic, paracompleteness

For citation: Ciuciura J. "Paraconsistency and Paracompleteness", *Logicheskie Issledovaniya / Logical Investigations*, 2019, Vol. 25, No. 2, pp. 46–60. DOI: 10.21146/2074-1472-2019-25-2-46-60

1. Introduction

Let *var* denote a (non-empty) denumerable set of all propositional variables. The set of formulas $\mathcal{F}$ is inductively defined (in Backus-Naur form) as follows:

$$\varphi ::= p \mid \neg\alpha \mid \alpha \vee \alpha \mid \alpha \wedge \alpha \mid \alpha \to \alpha,$$

where $p \in var$, $\alpha \in \mathcal{F}$ and the symbols $\neg$, $\vee$, $\wedge$, $\to$ denote negation, disjunction, conjunction and implication, respectively.[1]

[1] The connective of equivalence, $\alpha \leftrightarrow \beta$, is treated as an abbreviation for $(\alpha \to \beta) \wedge (\beta \to \alpha)$.

A logic $\langle \mathcal{L}, \vdash_p \rangle$ is said to be paraconsistent if, and only if $\{\alpha, \neg\alpha\} \nvdash_p \beta$, for some formulas α, β. In other words, the necessary and sufficient condition for a logic to be paraconsistent is that its consequence relation is not explosive. Despite this definition being very broad and open to criticisms on a number of fronts, it may still serve as a good basis for further discussion. In what follows, however, we will need some additional criteria to be considered valid, *i.e.*

1. the principles of explosion: $\alpha \to (\neg\alpha \to \beta)$, $(\alpha \wedge \neg\alpha) \to \beta$
2. the law of contradiction: $\neg(\alpha \wedge \neg\alpha)$
3. laws of double negation: $\neg\neg\alpha \to \alpha$, $\alpha \to \neg\neg\alpha$

must not be provable in any calculus of the hierarchy.[2]

2. Paraconsistent Calculus B^1

The paraconsistent calculus B^1 is defined, in Hilbert-style formalization, by the following axiom schemas:

$(A1)$ $\alpha \to (\beta \to \alpha)$
$(A2)$ $(\alpha \to (\beta \to \gamma)) \to ((\alpha \to \beta) \to (\alpha \to \gamma))$
$(A3)$ $((\alpha \to \beta) \to \alpha) \to \alpha$
$(A4)$ $(\alpha \wedge \beta) \to \alpha$
$(A5)$ $(\alpha \wedge \beta) \to \beta$
$(A6)$ $\alpha \to (\beta \to (\alpha \wedge \beta))$
$(A7)$ $\alpha \to (\alpha \vee \beta)$
$(A8)$ $\beta \to (\alpha \vee \beta)$
$(A9)$ $(\alpha \to \gamma) \to ((\beta \to \gamma) \to (\alpha \vee \beta \to \gamma))$
(ExM) $\alpha \vee \neg\alpha$
(DS^2) $\alpha \to (\neg\alpha \to (\neg\neg\alpha \to \beta))$.

The sole rule of inference is *Detachment Rule*, (MP) $\alpha \to \beta, \alpha \,/\, \beta$.[3] It is easily seen that B^1 contains the positive fragment of *Classical Propositional Calculus*. Besides, it is an extension of PI.[4]

[2] For modern discussion on the topic, see *e.g.* [Avron et all, 2018] (Chapter 2) and [Carnielli, Coniglio, 2016] (Chapter 1).

[3] The calculus B^1 originally appeared in [Ciuciura, 2014] as mbC^1. The abbreviation mbC^1 was chosen to emphasise that the calculus mbC proposed by Carnielli, Coniglio and Marcos (see [Carnielli et all, 2007, pp. 37–41]) was a logical inspiration for mbC^1/B^1. We should stress, however, that mbC^1/B^1 is not equivalent to mbC. See [Ciuciura, 2018, p. 140], for details.

[4] In literature, the logic PI is also known as $CLuN$. See [Batens, 1980, pp. 204–205], and [Batens, De Clercq, 2004, p. 229].

Definition 1. Let $\alpha \in \mathcal{F}$ and $\Gamma \subseteq \mathcal{F}$. A formula α is provable from Γ within B^1 ($\Gamma \vdash_{B^1} \alpha$, in symbols) iff there is a finite sequence of formulas, $\beta_1, \beta_2, ..., \beta_n$ such that $\beta_n = \alpha$ and, for each $i \leq n$, at least one of the following is true:

1. $\beta_i \in \Gamma$
2. β_i is an axiom of B^1
3. β_i is obtained from some of the previous β_j by application of the rule of (MP).

Definition 2. A formula α is a thesis of B^1 iff $\emptyset \vdash_{B^1} \alpha$.

Before going any further, we should demonstrate that B^1 meets the criteria specified in the clauses *1*, *2* and *3* of *Introduction*. With that in mind, let us consider the matrix

$$\mathcal{M}_1 = \big\langle \{1,2,0\}, \{1,2\}, \neg, \wedge, \vee, \rightarrow \big\rangle,$$

where $\{1,2,0\}$ is the set of logical values, $\{1,2\}$ is the set of designated values and the connectives $\neg, \wedge, \vee, \rightarrow$ are defined by the tables[5]:

$\rightarrow$	1	2	0
1	1	1	0
2	1	1	0
0	1	1	1

	$\neg$
1	2
2	0
0	1

$\wedge$	1	2	0
1	1	1	0
2	1	1	0
0	0	0	0

$\vee$	1	2	0
1	1	1	1
2	1	1	1
0	1	1	0

Each axiom schema of B^1 is valid in the matrix $\mathcal{M}_1$ and (MP) preserves validity. The principles of explosion take the non-designated value 0: $1 \rightarrow (\neg 1 \rightarrow 0) = 1 \rightarrow (2 \rightarrow 0) = 1 \rightarrow 0 = 0$, $(1 \wedge \neg 1) \rightarrow 0 = (1 \wedge 2) \rightarrow 0 = 1 \rightarrow 0 = 0$; so do the laws of double negation: $\neg\neg 0 \rightarrow 0 = \neg 1 \rightarrow 0 = 2 \rightarrow 0 = 0$, $1 \rightarrow \neg\neg 1 = 1 \rightarrow \neg 2 = 1 \rightarrow 0 = 0$ and the law of (non-)contradiction: $\neg(1 \wedge \neg 1) = \neg(1 \wedge 2) = \neg 1 = 0$.

Lemma 1. *For every $\Gamma, \Delta \subseteq \mathcal{F}$ and α, β, $\gamma \in \mathcal{F}$, we have:*

1. if $\alpha \in \Gamma$, then $\Gamma \vdash_{B^1} \alpha$

2. if $\Gamma \subseteq \Delta$ and $\Gamma \vdash_{B^1} \alpha$, then $\Delta \vdash_{B^1} \alpha$

[5] The truth tables for the binary connectives were of interest to many logicians, *e.g.* da Costa [da Costa, 1974, p. 499] and Sette [Sette, 1973, pp. 176, 179]. The three-valued table for negation was presented in [Post, 1921, pp. 180–181] (the so-called cyclic negation) and [Słupecki, 1939, p. 112].

3. if $\Delta \vdash_{B^1} \alpha$ and, for every $\beta \in \Delta$ such that $\Gamma \vdash_{B^1} \beta$, then $\Gamma \vdash_{B^1} \alpha$
4. if $\Gamma \cup \{\alpha\} \vdash_{B^1} \gamma$ and $\Gamma \cup \{\beta\} \vdash_{B^1} \gamma$, then $\Gamma \cup \{\alpha \vee \beta\} \vdash_{B^1} \gamma$
5. if $\Gamma \cup \{\alpha\} \vdash_{B^1} \gamma$ and $\Delta \vdash_{B^1} \alpha$, then $\Gamma \cup \Delta \vdash_{B^1} \gamma$
(in particular, if $\Gamma \cup \{\alpha\} \vdash_{B^1} \gamma$ and $\emptyset \vdash_{B^1} \alpha$, then $\Gamma \vdash_{B^1} \gamma$)
6. $\Gamma \vdash_{B^1} \alpha$ iff for some finite $\Delta \subseteq \Gamma$, $\Delta \vdash_{B^1} \alpha$.

Proof. The proof is similar to that of the classical case. We refer the reader to [Wójcicki, 1988] and [Pogorzelski, Wojtylak, 2008] for details. ■

Theorem 1. *Deduction theorem holds for B^1.*

Proof. It suffices to observe that B^1 includes (A1), (A2) and the sole rule of inference in B^1 is (MP). ■

Theorem 2. *Some (weaker) variants of the indirect deduction theorem hold for B^1, i.e.*
1. if $\Gamma \cup \{\alpha\} \vdash_{B^1} \{\beta, \neg\beta, \neg\neg\beta\}$, then $\Gamma \vdash_{B^1} \neg\alpha$
2. if $\Gamma \cup \{\neg\alpha\} \vdash_{B^1} \{\beta, \neg\beta, \neg\neg\beta\}$, then $\Gamma \vdash_{B^1} \alpha$.

Proof. First, notice that $(\alpha \to \beta) \to ((\alpha \to \neg\beta) \to ((\alpha \to \neg\neg\beta) \to \neg\alpha))$ and $(\neg\alpha \to \beta) \to ((\neg\alpha \to \neg\beta) \to ((\neg\alpha \to \neg\neg\beta) \to \alpha))$ are provable in B^1. Now assume that $\Gamma \cup \{\alpha\} \vdash_{B^1} \{\beta, \neg\beta, \neg\neg\beta\}$. Then, by the deduction theorem, we obtain that $\Gamma \vdash_{B^1} \{\alpha \to \beta, \alpha \to \neg\beta, \alpha \to \neg\neg\beta\}$. Since $\emptyset \vdash_{B^1} (\alpha \to \beta) \to ((\alpha \to \neg\beta) \to ((\alpha \to \neg\neg\beta) \to \neg\alpha))$, so $\{\alpha \to \beta, \alpha \to \neg\beta, \alpha \to \neg\neg\beta\} \vdash_{B^1} \neg\alpha$. The relation $\vdash_{B^1}$ is transitive (by *Lemma 1*), therefore $\Gamma \vdash_{B^1} \neg\alpha$.

The second item can be proved analogously. ■

Remark 1. The formulas
1. $\neg(\alpha \wedge \neg\alpha \wedge \neg\neg\alpha)$
2. $\alpha \to (\neg\alpha \to \neg\neg\neg\alpha)$
3. $\neg\neg\alpha \to \neg(\alpha \wedge \neg\alpha)$
4. $(\alpha \to \beta) \to (\neg\alpha \vee \beta)$

are provable in B^1.

Remark 2. B^1 is not maximal with respect to P^1.[6]

Proof. Let CB^1 denote the calculus obtained from B^1 by adding a new axiom schema, that is, $\neg\neg\alpha \to \alpha$. Note that the axiom is a theorem of P^1 [Sette, 1973, pp. 174–175] and so are all axioms of B^1 [Ciuciura, 2018, pp. 116–120].

[6] Sette used $\neg$ and $\to$ as primitive connectives. Other connectives, *viz.* conjunction, disjunction and equivalence, were introduced through definitions. See [Sette, 1973, pp. 178–179].

We show now that the formula $(\alpha \to \beta) \to \neg\neg(\alpha \to \beta)$[7] is unprovable in CB^1. To demonstrate this fact, employ the matrix

$$\mathcal{M}_2 = \langle \{1, 2, 0\}, \{1, 2\}, \neg, \wedge, \vee, \to \rangle,$$

where $\{1, 2, 0\}$ consists of the logical values, $\{1, 2\}$ contains the designated values and the connectives $\neg, \wedge, \vee, \to$ are defined by the truth tables:

$\to$	1	2	0
1	1	2	0
2	1	2	0
0	1	1	1

	$\neg$
1	0
2	1
0	1

$\wedge$	1	2	0
1	1	1	0
2	1	1	0
0	0	0	0

$\vee$	1	2	0
1	1	1	1
2	1	1	1
0	1	1	0

All axiom schemas of CB^1 are valid in the matrix $\mathcal{M}_2$ and (MP) preserves validity. Observe that the formula $(\alpha \to \beta) \to \neg\neg(\alpha \to \beta)$ is not valid in $\mathcal{M}_2$ since $(1 \to 2) \to \neg\neg(1 \to 2) = 2 \to \neg\neg 2 = 2 \to \neg 1 = 2 \to 0 = 0$. Hence, there exists a calculus that is both an extension of B^1 and a proper subsystem of P^1. This calculus is CB^1. ■

Below we will propose a semantics for B^1, but first we recall a few simple facts about the calculus. Since they are quite obvious and do not require detailed comments, their proofs will be omitted.

Remark 3. Enriching the set of axiom schemas of B^1 with the formula $\alpha \to \neg\neg\alpha$, results in obtaining the axiom system of *Classical Propositional Calculus.*

Remark 4. Enriching the set of axiom schemas of B^1 with the formulas $\neg\neg\alpha \to \alpha$ and $(\alpha * \beta) \to \neg\neg(\alpha * \beta)$, where $* \in \{\wedge, \vee\ \to\}$, results in obtaining P^1 of Sette.

As a direct consequence of the above remarks, we have the following:

Remark 5. B^1 is a proper subsystem of Sette's calculus P^1.

Remark 6. The calculus B^1 is not maximal with respect to *Classical Propositional Calculus.*

[7]The fifth axiom of P^1. See *ibid.*, p. 173.

Now we present a bi-valuational semantics for B^1.

Definition 3. A B^1-valuation is a function $v : \mathcal{F} \longrightarrow \{1, 0\}$ defined in the following way:
($\vee$) $v(\alpha \vee \beta) = 1$ iff $v(\alpha) = 1$ or $v(\beta) = 1$
($\wedge$) $v(\alpha \wedge \beta) = 1$ iff $v(\alpha) = 1$ and $v(\beta) = 1$
($\rightarrow$) $v(\alpha \rightarrow \beta) = 1$ iff $v(\alpha) = 0$ or $v(\beta) = 1$
($\neg$) if $v(\neg\alpha) = 0$, then $v(\alpha) = 1$
($\neg\neg$) if $v(\neg\neg\alpha) = 1$, then ($v(\alpha) = 0$ or $v(\neg\alpha) = 0$).

Definition 4. A formula α is a B^1-tautology iff for every B^1-valuation v, $v(\alpha) = 1$.

Definition 5. For any $\alpha \in \mathcal{F}$ and $\Gamma \subseteq \mathcal{F}$, α is a semantic consequence of Γ ($\Gamma \models_{B^1} \alpha$, in symbols) iff for any B^1-valuation v: if $v(\beta) = 1$ for any $\beta \in \Gamma$, then $v(\alpha) = 1$.

A doubt might arise as to how some formulas should be interpreted. Let us give an example to illustrate the point. Suppose that we work with the formula $\neg\neg\neg\alpha$. Then the question appears: How should the formula be interpreted, as $\neg(\neg\neg\alpha)$, or maybe rather as $\neg\neg(\neg\alpha)$? The answer is quite obvious: it depends on the logical value we assign to the formula *via* B^1-valuation. To be more precise, if $v(\neg\neg\neg\alpha) = 0$, then $v(\neg\neg\alpha) = 1$, and consequently $v(\alpha) = 0$ or $v(\neg\alpha) = 0$; if $v(\neg\neg\neg\alpha) = 1$, then $v(\neg\alpha) = 0$ or $v(\neg\neg\alpha) = 0$, *etc.*

Theorem 3. *For every $\Gamma \subseteq \mathcal{F}$ and $\alpha \in \mathcal{F}$, $\Gamma \vdash_{B^1} \alpha$ iff $\Gamma \models_{B^1} \alpha$.*

Proof. The proof of soundness can be done in the standard way. The proof of completeness is by contraposition: Assume that $\Gamma \nvdash_{B^1} \alpha$. The method applied in this paper is based on the notion of maximal non-trivial sets of formulas. We use the technique described in [Carnielli, Coniglio, 2016] (see *Section 2.2*). To start with, let us recall some important definitions and results.

Definition 6. Let $\Delta \subseteq \mathcal{F}$ and $\alpha \in \mathcal{F}$, we say that a set Δ is a closed theory of $\langle \mathcal{L}, \vdash_p \rangle$ if, and only if the following holds: $\Delta \vdash_p \alpha$ *iff* $\alpha \in \Delta$.

Definition 7. Let $\Delta \subseteq \mathcal{F}$ and $\alpha \in \mathcal{F}$, we say that a set Δ is maximal non-trivial with respect to α in $\langle \mathcal{L}, \vdash_p \rangle$ iff
1. $\Delta \nvdash_p \alpha$, and
2. for every $\beta \in \mathcal{F}$, if $\beta \notin \Delta$ then $\Delta \cup \{\beta\} \vdash_p \alpha$.

By *Lemma 1*, it follows that the consequence relation $\vdash_{B^1}$ satisfies the so-called *Tarskian* properties (reflexivity, transitivity and monotonicity). Then, the next lemma holds for $\vdash_{B^1}$ as well:

Lemma 2. *Let $\langle \mathcal{L}, \vdash_p \rangle$ be a logic that satisfies the Tarskian properties, then any maximal non-trivial with respect to α in $\langle \mathcal{L}, \vdash_p \rangle$ set of formulas is a closed theory.*[8]

Consequently, we may formulate the so-called Lindenbaum–Łoś' theorem:

Theorem 4. *Let $\langle \mathcal{L}, \vdash_p \rangle$ be a Tarskian and finitary logic over the language $\mathcal{L}$. Let $\Gamma \cup \{\alpha\} \subseteq \mathcal{L}$ be such that $\Gamma \nvdash_p \alpha$. Then there exists a set Δ such that $\Gamma \subseteq \Delta \subseteq \mathcal{L}$ with Δ being maximal non-trivial with respect to α in $\mathcal{L}$.*

Proof. We refer the interested reader to [Carnielli, Coniglio, 2016] (see the proof of *Theorem 2.2.6*) and [Pogorzelski, Wojtylak, 2008] (see *Theorem 3.31*), for details. ■

Now, we need to prove the following lemma:

Lemma 3. *Let $\Delta \subseteq \mathcal{F}$ and $\alpha \in \mathcal{F}$, where Δ is a maximal non-trivial set with respect to α in B^1. The mapping $v : \mathcal{F} \longrightarrow \{1, 0\}$ defined as*

($\star$) $v(\phi) = 1$ if and only if $\phi \in \Delta$,

for every $\phi \in \mathcal{F}$, is a B^1-valuation.

Proof. We limit ourselves to proving that the lemma holds for $(\neg)$ and $(\neg\neg)$. The rest of the proof proceeds in the same way as in *Theorem 2.2.7* of [Carnielli, Coniglio, 2016].

$(\neg)$. Let $\phi = \neg\beta$. Assume that $v(\neg\beta) = 0$ and, by contradiction, $v(\beta) = 0$. Then by $(\star)$, we have $\neg\beta \notin \Delta$ and $\beta \notin \Delta$. Observe that Δ is a maximal non-trivial set with respect to α, so $\Delta \cup \{\beta\} \vdash_{B^1} \alpha$ and $\Delta \cup \{\neg\beta\} \vdash_{B^1} \alpha$. From *Lemma 1(4)*, we obtain $\Delta \cup \{\beta \vee \neg\beta\} \vdash_{B^1} \alpha$. Since the law of excluded middle, $\beta \vee \neg\beta$, is a thesis of B^1, then, by *Lemma 1(5)*, we have $\Delta \vdash_{B^1} \alpha$. Note that Δ is a closed theory. This entails that $\alpha \in \Delta$. But $\alpha \notin \Delta$ by the main assumption, *i.e.* $\Gamma \nvdash_{B^1} \alpha$, and *Theorem 4*. A contradiction. This implies that if $v(\neg\beta) = 0$, then $v(\beta) = 1$. As a result, the mapping v satisfies the clause $(\neg)$ of *Definition 3*.

$(\neg\neg)$. Let $\phi = \neg\neg\beta$. Suppose that $v(\neg\neg\beta) = 1$ and, by contradiction, $v(\beta) = 1$ and $v(\neg\beta) = 1$. Then by $(\star)$, we obtain that $\neg\neg\beta \in \Delta$, $\beta \in \Delta$ and $\neg\beta \in \Delta$; and consequently, $\Delta \vdash_{B^1} \neg\neg\beta$, $\Delta \vdash_{B^1} \beta$ and $\Delta \vdash_{B^1} \neg\beta$, by *Lemma 1(1)*. This means that $\Delta \vdash_{B^1} \{\beta, \neg\beta, \neg\neg\beta\}$. Notice that $\beta \to (\neg\beta \to (\neg\neg\beta \to \gamma))$ is a thesis of B^1. Thus $\{\beta, \neg\beta, \neg\neg\beta\} \vdash_{B^1} \gamma$, by the deduction theorem. The relation $\vdash_{B^1}$ is transitive (by *Lemma 1*), so $\Delta \vdash_{B^1} \gamma$. Observe

[8] *Cit. per* [Carnielli, Coniglio, 2016], *Lemma 2.2.5*.

that Δ is deductively closed, then $\gamma \in \Delta$. Since γ is any formula of B^1, so in particular $\gamma = \alpha$ and $\alpha \in \Delta$. But $\alpha \notin \Delta$. A contradiction. This implies that if $v(\neg\neg\beta) = 1$ then $v(\beta) = 0$ or $v(\neg\beta) = 0$. Therefore, the mapping v satisfies the clause $(\neg\neg)$ of *Definition 3*. ■

Now, recall that $\Gamma \nvdash_{B^1} \alpha$. Let Δ be a maximal non-trivial set with respect to α in B^1 extending Γ. Since *Lemma 3* holds for B^1, there is a valuation function v such that: $v(\beta) = 1$ for any $\beta \in \Gamma$, and $v(\alpha) = 0$. But if $v(\beta) = 1$ for any $\beta \in \Gamma$, and $v(\alpha) = 0$, then $\Gamma \not\models_{B^1} \alpha$. It means that if $\Gamma \nvdash_{B^1} \alpha$, then $\Gamma \not\models_{B^1} \alpha$, and finally that $\Gamma \models_{B^1} \alpha$ implies $\Gamma \vdash_{B^1} \alpha$. ■

We have already noticed that B^1 fulfils the basic criteria to be regarded as a paraconsistent calculus: neither the consequence relation $\vdash_{B^1}$ is explosive nor the law of non-contradiction is provable in B^1. On the other hand, it can be easily proved that $\{\alpha, \neg\alpha, \neg\neg\alpha\} \vdash_{B^1} \beta$, for any formulas α, β and so is the formula $\neg(\alpha \wedge \neg\alpha \wedge \neg\neg\alpha)$ a thesis of B^1. This could be greeted with some scepticism and one might raise the question whether the calculus with $\alpha \to (\neg\alpha \to (\neg\neg\alpha \to \beta))$ being a thesis was paraconsistent at all. If we answer negatively, the next question arrives: What about the calculi with $\alpha \to (\neg\alpha \to (\neg\neg\alpha \to (\neg\neg\neg\alpha \to \beta)))$ or $\alpha \to (\neg\alpha \to (\neg\neg\alpha \to (\neg\neg\neg\alpha \to (\neg\neg\neg\neg\alpha \to \beta))))$ being provable? Are they paraconsistent or not? This turns the issue into a sorites-style argument. To put it metaphorically, the point here is that we are always made to specify how many *destructive* formulas (*i.e.* α, $\neg\alpha$, $\neg\neg\alpha$, $\neg\neg\neg\alpha$, *etc.*) is needed to accept any β.

3. Hierarchy of B^n-calculi ($n \in \mathbb{N}$)

There are several hierarchies of paraconsistent logic among which Newton da Costa's hierarchy of C-systems is probably the most famous one. The hierarchy introduced in this section differs in many respects from the hierarchy C-systems. One of them is that the law of double negation, $\neg\neg\alpha \to \alpha$, does not hold in any B^n-calculus; the other is simplicity.

For each $n \in \mathbb{N}$, let B^n result from $(A1)$–$(A9)$ and (MP) by adding to them the axiom schemas:

(ExM) $\alpha \vee \neg\alpha$
(DS^k) $\alpha \to (\neg\alpha \to (\neg^2\alpha \to (... \to (\neg^k\alpha \to \beta)...)$,

where $k = n + 1$ and $\neg^k\alpha$ is an abbreviation for $\underbrace{\neg\neg...\neg}_{k}\alpha$.[9]

[9] If $n = 0$, then (DS^1) $\alpha \to (\neg\alpha \to \beta)$ is an axiom schema of B^0 (and B^0 is *Classical Propositional Calculus*).

Consequently, the semantics needs to be modified as follows:

Definition 8. Let $n \in \mathbb{N}$. A B^n-valuation is a function $v : \mathcal{F} \longrightarrow \{1, 0\}$ inductively defined in the following way:
($\vee$) $v(\alpha \vee \beta) = 1$ iff $v(\alpha) = 1$ or $v(\beta) = 1$
($\wedge$) $v(\alpha \wedge \beta) = 1$ iff $v(\alpha) = 1$ and $v(\beta) = 1$
($\rightarrow$) $v(\alpha \rightarrow \beta) = 1$ iff $v(\alpha) = 0$ or $v(\beta) = 1$
($\neg$) if $v(\neg\alpha) = 0$ then $v(\alpha) = 1$
($\neg^k$) if $v(\neg^k\alpha) = 1$ then ($v(\alpha) = 0$ or $v(\neg\alpha) = 0$ or ... or $v(\neg^{k-1}\alpha) = 0$), where $k \geqslant 2$.

Definition 9. A formula α is a B^n-tautology iff for every B^n-valuation v, $v(\alpha) = 1$.

Definition 10. For any $\alpha \in \mathcal{F}$ and $\Gamma \subseteq \mathcal{F}$, α is a semantic consequence of Γ ($\Gamma \models_{B^n} \alpha$, in symbols) iff for any B^n-valuation v: if $v(\beta) = 1$ for any $\beta \in \Gamma$, then $v(\alpha) = 1$.

Theorem 5. *For every $\Gamma \subseteq \mathcal{F}$ and $\alpha \in \mathcal{F}$, $\Gamma \vdash_{B^n} \alpha$ iff $\Gamma \models_{B^n} \alpha$.*

Proof. The proof is analogous to that of *Theorem 3.* ■

Observe that each calculus in the hierarchy B^1, B^2, ..., B^n is weaker than the preceding one(s); obviously, except for B^1. To put it more accurately:

Remark 7. For any m, $n \in \mathbb{N}$ such that $m > n$, B^m is a proper subset of B^n.

Proof. Note that the only difference between the axiomatizations B^m and B^n is due to the axiom schema $(DS^{m+1})/(DS^{n+1})$, respectively. Hence, it suffices to demonstrate that, if $m > n$, then (DS^{m+1}) is a thesis of B^n, whereas (DS^{n+1}) is not provable in any B^m-calculus. But this can be easily proved with the help of the completeness theorem and semantics for the calculi. ■

Remark 8. Enriching the set of axiom schemas of any B^n-calculus ($n \in \mathbb{N}$) with the formula $\alpha \rightarrow \neg\neg\alpha$, results in obtaining the axiom system of Classical Propositional Calculus.

From the philosophical viewpoint, each member of the hierarchy brings an answer to the question that has arisen in the section 2: ‘How many *destructive* formulas do we need to accept any β?’

4. Paracomplete calculus Q^1

Paracomplete logic can be defined in many different ways among which the following one may be of some interest: A logic $\langle \mathcal{L}, \vdash_q \rangle$ is said to be paracomplete iff $\{\beta \to \alpha, \neg\beta \to \alpha\} \nvdash_q \alpha$, for some formulas α, β. But, once again, just as in the case of paraconsistent logic (see *Introduction*), the definition is very general and may be seen to overlap with the logics that do not have too much in common with the *paracompleteness*. As a result, some additional criteria should be established to introduce a paracomplete calculus. On the basis of these generalizations, it seems noteworthy to mention at least some the most important and frequently used ones.

Definition 11. A logic $\langle \mathcal{L}, \vdash_q \rangle$ is said to be paracomplete iff it cumulatively meets the following conditions:

1. $\{\beta \to \alpha, \neg\beta \to \alpha\} \nvdash_q \alpha$, for some formulas α, β
2. $\{\alpha\} \nvdash_q \{\beta, \neg\beta\}$, for some formulas α, β
3. $\emptyset \nvdash_q \alpha \vee \neg\alpha$, for a formula α
4. $\emptyset \nvdash_q (\neg\alpha \to \alpha) \to \alpha$, for a formula α
5. $\emptyset \nvdash_q (\alpha \to \neg\alpha) \to \neg\alpha$, for a formula α.

In what follows, we will additionally postulate that each paracomplete calculus must satisfy two extra requirements, *viz.*

6. $\emptyset \nvdash_q \alpha \to \neg\neg\alpha$, for a formula α

7. $\emptyset \nvdash_q \neg\neg\alpha \to \alpha$, for a formula α.[10]

Now we can introduce the first calculus of paracomplete logic. The calculus, denoted as Q^1, is presented in Hilbert-style formalization:

$(A1)$ $\alpha \to (\beta \to \alpha)$
$(A2)$ $(\alpha \to (\beta \to \gamma)) \to ((\alpha \to \beta) \to (\alpha \to \gamma))$
$(A3)$ $((\alpha \to \beta) \to \alpha) \to \alpha$
$(A4)$ $(\alpha \wedge \beta) \to \alpha$
$(A5)$ $(\alpha \wedge \beta) \to \beta$
$(A6)$ $\alpha \to (\beta \to (\alpha \wedge \beta))$
$(A7)$ $\alpha \to (\alpha \vee \beta)$
$(A8)$ $\beta \to (\alpha \vee \beta)$
$(A9)$ $(\alpha \to \gamma) \to ((\beta \to \gamma) \to (\alpha \vee \beta \to \gamma))$

[10] A list of the alternative definitions of paracomplete logic is given, *e.g.*, in [Petrukhin, 2018, pp. 425–426]. Some examples of the paracomplete calculi can be found in [Ciuciura, 2015b], [Karpenko, Tomova, 2017], [Loparić, da Costa, 1984], [Popov, 2002] and [Sette, Carnielli, 1995].

(ExM^2) $\alpha \vee \neg\alpha \vee \neg\neg\alpha$
(DS) $\alpha \to (\neg\alpha \to \beta)$.

The sole rule of inference is *Detachment Rule*, *i.e.* (MP) $\alpha \to \beta,\ \alpha\ /\ \beta$. The definitions of a formal proof (deduction), a syntactic consequence within Q^1 and a thesis of Q^1 are analogous to those given in *Section 2*.

Remark 9. Q^1 can be viewed as a dual counterpart of the paraconsistent calculus B^1 (in a sense given in [Loparić, da Costa, 1984, pp. 119–120]).

To demonstrate that the calculus Q^1 satisfies the conditions specified in the above, it suffices to apply the matrix

$$\mathcal{M}_3 = \langle \{1,2,0\}, \{1\}, \neg, \wedge, \vee, \to \rangle,$$

where 1 is the only designated truth value in $\mathcal{M}_3$, the connectives $\neg, \wedge, \vee, \to$ are defined as follows:

$\to$	1	2	0
1	1	0	0
2	1	1	1
0	1	1	1

	$\neg$
1	0
2	1
0	2

$\wedge$	1	2	0
1	1	0	0
2	0	0	0
0	0	0	0

$\vee$	1	2	0
1	1	1	1
2	1	0	0
0	1	0	0

Notice that that all axiom schemas of Q^1 are valid in $\mathcal{M}_3$ and the rule of detachment preserves validity. To show that Q^1 satisfies the criteria, it is enough to assign 0 to α in the formulas: $\alpha \vee \neg\alpha$, $(\neg\alpha \to \alpha) \to \alpha$, $(\alpha \to \neg\alpha) \to \neg\alpha$ and $\neg\neg\alpha \to \alpha$; and 1 to α in $\alpha \to \neg\neg\alpha$. To prove that, for some $\alpha, \beta \in \mathcal{F}$, neither $\{\beta \to \alpha, \neg\beta \to \alpha\} \vdash_{Q^1} \alpha$ nor $\{\alpha\} \vdash_{Q^1} \{\beta, \neg\beta\}$ holds in Q^1, assign the value 0 (or 2) to α and 0 to β in the former; and 1 to α and 0 to β in the latter.

Remark 10. *Lemma 1* and the deduction theorem hold for Q^1.

Remark 11. The formulas
1. $(\beta \to \alpha) \to ((\neg\beta \to \alpha) \to ((\neg\neg\beta \to \alpha) \to \alpha))$
2. $((\neg\alpha \to \alpha) \to \alpha) \leftrightarrow (\alpha \vee \neg\alpha)$
3. $\neg(\alpha \vee \neg\alpha) \to \neg\neg\alpha$
4. $(\neg\alpha \vee \beta) \to (\alpha \to \beta)$

are provable in Q^1.

A bi-valuational semantics for Q^1 coincides, to some extent, with the semantics presented in *Section 2*. The essential difference lies in the way the connective of negation is defined.

Definition 12. A Q^1-valuation is a function $v : \mathcal{F} \longrightarrow \{1, 0\}$ defined as follows:
($\vee$) $v(\alpha \vee \beta) = 1$ iff $v(\alpha) = 1$ or $v(\beta) = 1$
($\wedge$) $v(\alpha \wedge \beta) = 1$ iff $v(\alpha) = 1$ and $v(\beta) = 1$
($\rightarrow$) $v(\alpha \rightarrow \beta) = 1$ iff $v(\alpha) = 0$ or $v(\beta) = 1$
($\neg$) if $v(\neg\alpha) = 1$ then $v(\alpha) = 0$
($\neg\neg$) if $v(\neg\neg\alpha) = 0$ then ($v(\alpha) = 1$ or $v(\neg\alpha) = 1$).

Definition 13. A formula α is a Q^1-tautology iff for every Q^1-valuation v, $v(\alpha) = 1$.

Definition 14. For any $\alpha \in \mathcal{F}$ and $\Gamma \subseteq \mathcal{F}$, α is a semantic consequence of Γ ($\Gamma \models_{Q^1} \alpha$, in symbols) iff for any Q^1-valuation v: if $v(\beta) = 1$ for any $\beta \in \Gamma$, then $v(\alpha) = 1$.

Theorem 6. *For every $\Gamma \subseteq \mathcal{F}$ and $\alpha \in \mathcal{F}$, $\Gamma \vdash_{Q^1} \alpha$ iff $\Gamma \models_{Q^1} \alpha$.*

Proof. The proof of soundness is standard (by induction), and we omit it here. The proof of completeness is more involved. The proof method presented in this section is based on the notion of relatively maximal sets of formulas. To begin with, assume that $\Gamma \models_{Q^1} \alpha$ and $\Gamma \nvdash_{Q^1} \alpha$. If $\Gamma \nvdash_{Q^1} \alpha$, then there exists $\Delta \subset \mathcal{F}$ such that *1.* $\alpha \notin \Delta$; *2.* Δ is deductively closed, that is, $\Delta \vdash_{Q^1} \beta$ *iff* $\beta \in \Delta$; *3.* Δ is relatively maximal with respect to the formula α, *i.e* $\Delta \nvdash_{Q^1} \alpha$ and, for every $\beta \in \mathcal{F}$, if $\beta \notin \Delta$ then $\Delta \cup \{\beta\} \vdash_{Q^1} \alpha$; *4.* $\Gamma \subset \Delta$.

Now we ought to prove that the Lindenbaum-Asser theorem holds. The proof is similar to the one found in the proof of the completeness of *mbC* (see [Carnielli et all, 2007], *Section 3.3*), so we omit it here. Before introducing the definition of the canonical model for $\vdash_{Q^1}$, we need to prove an auxiliary lemma.

Lemma 4. *Let $\Delta \subseteq \mathcal{F}$ and $\beta, \gamma \in \mathcal{F}$, then*
1. if $\neg\beta \in \Delta$, then $\beta \notin \Delta$
2. if $\neg\neg\beta \notin \Delta$, then $\beta \in \Delta$ or $\neg\beta \in \Delta$
3. $\beta \vee \gamma \in \Delta$ iff $\beta \in \Delta$ or $\gamma \in \Delta$
4. $\beta \wedge \gamma \in \Delta$ iff $\beta \in \Delta$ and $\gamma \in \Delta$
5. $\beta \rightarrow \gamma \in \Delta$ iff $\beta \notin \Delta$ or $\gamma \in \Delta$.

Proof. We only prove the cases *1* and *2.* The proof of the other cases is similar to the ones in *Classical Propositional Calculus.*

1. Suppose that $\neg\beta \in \Delta$ and, by contradiction, $\beta \in \Delta$. Then $\Delta \vdash_{Q^1} \neg\beta$ and $\Delta \vdash_{Q^1} \beta$. It means that $\Delta \vdash_{Q^1} \{\beta, \neg\beta\}$. Observe that $\emptyset \vdash_{Q^1} \beta \to (\neg\beta \to \alpha)$ (DS). Since $\{\beta, \neg\beta\} \vdash_{Q^1} \alpha$ (by the deduction theorem), then $\Delta \vdash_{Q^1} \alpha$ (by the transitivity of $\vdash_{Q^1}$). Δ is deductively closed, so $\alpha \in \Delta$. But $\alpha \notin \Delta$. A contradiction.

2. Assume that $\neg\neg\beta \notin \Delta$ and, by contradiction, $\beta \notin \Delta$, $\neg\beta \notin \Delta$. It results in the following $\Delta \cup \{\neg\neg\beta\} \vdash_{Q^1} \alpha$, $\Delta \cup \{\neg\beta\} \vdash_{Q^1} \alpha$ and $\Delta \cup \{\beta\} \vdash_{Q^1} \alpha$. From *Lemma 1(4)*, we receive $\Delta \cup \{\beta \vee \neg\beta \vee \neg\neg\beta\} \vdash_{Q^1} \alpha$. Since (ExM^2) is a thesis of Q^1, then, by *Lemma 1(5)*, we get $\Delta \vdash_{Q^1} \alpha$. Note that Δ is deductively closed, so $\alpha \in \Delta$. But $\alpha \notin \Delta$. A contradiction. ■

Let us define the canonical Q^1-model for $\vdash_{Q^1}$ as $\mathbb{M}_c = \langle \Delta, v^c \rangle$, where

$$v^c(\beta) = \begin{cases} 1, & \text{if } \beta \in \Delta \\ 0, & \text{if } \beta \notin \Delta. \end{cases}$$

All we have to do, at this point, is to show that the canonical valuation v^c satisfies the conditions $(\neg)$, $(\neg\neg)$, $(\wedge)$, $(\vee)$ and $(\to)$, which is obvious, because *Lemma 4* holds. Now, since $\Delta \nvdash_{Q^1} \alpha$ then, for every $\beta \in \Delta$, $v(\beta) = 1$ and $v(\alpha) = 0$. This implies that $\Delta \not\models_{Q^1} \alpha$. Since $\Gamma \subset \Delta$, so $\Gamma \not\models_{Q^1} \alpha$. But $\Gamma \models_{Q^1} \alpha$. A contradiction. ■

5. Hierarchy of Q^n-calculi ($n \in \mathbb{N}$)

The Q^1 is not the only paracomplete calculus that satisfies the criteria discussed in the previous section. There is a whole family of such calculi: Q^1, Q^2, ..., Q^n, having properties analogous to those of Q^1. We put them into the form of a hierarchy.[11] Each member of the hierarchy is expected to fulfil the following condition: Q^m is a proper subset of Q^n, for any m, $n \in \mathbb{N}$ such that $m > n$. To achieve the goal, we need to replace the axiom (ExM^2) with a more general schema, that is

(ExM^k) $\alpha \vee \neg\alpha \vee \neg\neg\alpha \vee ... \vee \neg^k\alpha$,

where $k = n + 1$, $n \in \mathbb{N}$. This entails replacing the evaluation condition for $(\neg\neg)$ with a more general one:

$(\neg)$ if $v(\neg^k\alpha) = 0$ then $(v(\alpha) = 1$ or $v(\neg\alpha) = 1$ or ... or $v(\neg^{k-1}\alpha) = 1)$,

where $k \geqslant 2$. Roughly speaking, the more negated formulas appear as the disjuncts in (ExM^k), the weaker calculus is.

[11] The hierarchy proposed in this paper is not the only one that appeared in logical literature. There are some interesting hierarchies in da Costa-style presentation, *e.g.* da Costa and Marconi's hierarchy of paracomplete calculi P_n (see [da Costa, Marconi, 1986]) or Arruda and Alves' logic of vagueness (see [Arruda, Alves, 1979a] and [Arruda, Alves, 1979b]).

Theorem 7. *For every* $\Gamma \subseteq \mathcal{F}$ *and* $\alpha \in \mathcal{F}$, $\Gamma \vdash_{Q^n} \alpha$ *iff* $\Gamma \models_{Q^n} \alpha$, $n \in \mathbb{N}$.

Proof. The theorem can be proved in the same manner as in the case where $n = 1$. The only essential difference is that we have to make some changes in the auxiliary lemma. To be precise, we need to replace

2. if $\neg\neg\beta \notin \Delta$ then $\beta \in \Delta$ or $\neg\beta \in \Delta$

with

2.^{k} if $\neg^k\beta \notin \Delta$ then $\beta \in \Delta$ or $\neg\beta \in \Delta$ or ... or $\neg^{k-1}\beta \in \Delta$, where $k \geqslant 2$. ■

Remark 12. For any m, $n \in \mathbb{N}$ such that $m > n$, we have

Q^m is a proper subset of Q^n.

Proof. The proof is analogous to that of *Remark 7.* ■

Remark 13. Enriching the set of axiom schemas of any Q^n-calculus ($n \in \mathbb{N}$) with the formula $\neg\neg\alpha \to \alpha$, results in obtaining the axiom system of *Classical Propositional Calculus.*

In conclusion, let us stress that every member of the hierarchy has the prerequisites for being a *good* paracomplete calculus. The idea behind it is much simpler than that given in [Arruda, Alves, 1979a], [Arruda, Alves, 1979b] or [da Costa, Marconi, 1986], and this is supposed to be an advantage.

References

Arruda, Alves, 1979a – Arruda, A.I., Alves, E.H. "Some remarks on the logic of vagueness", *Bulletin of the Section of Logic*, 1979, Vol. 8, No. 3, pp. 133–138.

Arruda, Alves, 1979b – Arruda, A.I., Alves, E.H. "A semantical study of some systems of vagueness logic", *Bulletin of the Section of Logic*, 1979, Vol. 8, No. 3, pp. 139–144.

Avron et all, 2018 – Avron, A., Arieli, O., Zamansky, A. "Theory of Effective Propositional Paraconsistent Logics", in: *Studies in Logic, Mathematical Logic and Foundations*, Vol. 75. College Publications, 2018.

Batens, 1980 – Batens, D. "Paraconsistent extensional propositional logics", *Logique et Analys*, 1980, Vol. 23, No. 90–91, pp. 195–234.

Batens, De Clercq, 2004 – Batens D., De Clercq, K. "A Rich Paraconsistent Extension of Full Positive Logic", *Logique et Analys*, 2004, Vol. 47, No. 185–188, pp. 227–257.

Carnielli, Coniglio, 2016 – Carnielli, W., Coniglio, M.E. "Paraconsistent Logic: Consistency, Contradiction and Negation", in: *Logic, Epistemology, and the Unity of Science*, Vol. 40, Springer International Publishing, 2016. 398 pp.

Carnielli et all, 2007 – Carnielli, W., Coniglio, M.E., Marcos, J. "Logics of Formal Inconsistency", in D.M. Gabbay, F. Guenthner (eds.) *Handbook of Philosophical Logic*, 2nd edition, Vol. 14. Springer, 2007, pp. 1–93.

Ciuciura, 2018 – Ciuciura, J. *Hierarchies of the paraconsistent calculi*, Wydawnictwo Uniwersytetu Łódzkiego, Łódź, 2018. (In Polish)

Ciuciura, 2014 – Ciuciura, J. "Paraconsistent heap. A Hierarchy of mbCn-systems", *Bulletin of the Section of Logic*, 2014, Vol. 43, No. 3–4, pp. 173–182.

Ciuciura, 2015a – Ciuciura, J. "Paraconsistency and Sette's calculus P1", *Logic and Logical Philosophy*, 2015, Vol. 24, No. 2, pp. 265–273.

Ciuciura, 2015b – Ciuciura, J. "A Weakly-Intuitionistic Logic I1", *Logical Investigations*, 2015, Vol. 21, No. 2, pp. 53–60.

da Costa, 1974 – da Costa, N.C.A. "On the theory of inconsistent formal systems", *Notre Dame Journal of Formal Logic*, 1974, Vol. 15, No. 4, pp. 497–510.

da Costa, Marconi, 1986 – da Costa, N.C.A., Marconi, D. "A note on paracomplete logic", *Atti della Accademia Nazionale dei Lincei*, Classe di Scienze Fisiche, Matematiche e Naturali. 1986. Rendiconti, Serie 8, Vol. 80, No. 7–12, pp. 504–509.

Karpenko, Tomova, 2017 – Karpenko, A., Tomova, N. "Bochvar's three-valued logic and literal paralogics: Their lattice and functional equivalence", *Logic and Logical Philosophy*, 2017, Vol. 26, No. 2, pp. 207–235.

Loparić, da Costa, 1984 – Loparić, A., da Costa, N.C.A. "Paraconsistency, Paracompleteness, and Valuations", *Logique et Analyse*, 1984, Vol. 27, No. 106, pp. 119–131.

Petrukhin, 2018 – Petrukhin, Y. "Generalized Correspondence Analysis for Three-Valued Logics", *Logica Universalis*, 2018, Vol. 12, No. 3–4, pp. 423–460.

Pogorzelski, Wojtylak, 2008 – Pogorzelski, W.A., Wojtylak, P. *Completeness Theory for Propositional Logics*, Studies in Universal Logic. Basel: Birkhäuser, 2008. 178 pp.

Popov, 2002 – Popov, V.M. "On a three-valued paracomplete logic", *Logical Investigations*, 2002, Vol. 9, pp. 175–178. (In Russian)

Post, 1921 – Post, E.L. "Introduction to a general theory of elementary propositions", *American Journal of Mathematics*, 1921, Vol. 43, No. 3, pp. 163–185.

Sette, 1973 – Sette, A.M. "On the propositional calculus P1", *Mathematica Japonicae*, 1973, Vol. 18, No. 3, pp. 173–180.

Sette, Carnielli, 1995 – Sette, A.M., Carnielli, W.A. "Maximal weakly-intuitionistic logics", *Studia Logica*, 1995, Vol. 55, No. 1, pp. 181–203.

Słupecki, 1939 – Słupecki, J. *Dowód aksjomatyzowalności pełnych systemów wielowartościowych rachunku zdań*, Sprawozdania z pos. Tow. Nauk. Warsz, 32, wydz. III, 1939. (In Polish)

Wójcicki, 1988 – Wójcicki, R. *Theory of Logical Calculi. Basic Theory of Consequence Operations*, Synthese Library vol. 199, Netherlands: Springer, 1988. 474 pp.

Логические исследования
2019. Т. 25. № 2. С. 61–74
УДК 510.64

Logical Investigations
2019, Vol. 25, No. 2, pp. 61–74
DOI: 10.21146/2074-1472-2019-25-2-61-74

Giorgi Japaridze

Arithmetics based on computability logic

Giorgi Japaridze
Villanova University,
800 Lancaster Avenue, Villanova, PA 19085, USA.
Institute of Philosophy of RAS,
12/1 Goncharnaya Str., Moscow, 109240, Russian Federation.
E-mail: giorgi.japaridze@villanova.edu

Abstract: This paper is a brief survey of number theories based on *computability logic* (CoL) — a game-semantically conceived logic of computational tasks of resources. Such theories, termed *clarithmetics*, are conservative extensions of first-order Peano arithmetic.

The first section of the paper lays out the conceptual basis of CoL and describes the relevant fragment of its formal language, with so called parallel connectives, choice connectives and quantifiers, and blind quantifiers. Both syntactically and semantically, this is a conservative generalization of the language of classical logic.

Clarithmetics, based on the corresponding fragment of CoL in the same sense as Peano arithmetic is based on classical logic, are discussed in the second section. The axioms and inference rules of the system of clarithmetic named **CLA11** are presented, and the main results on this system are stated: constructive soundness, extensional completeness, and intensional completeness.

In the final section two potential applications of clarithmetics are addressed: clarithmetics as declarative programming languages in an extreme sense, and as tools for separating computational complexity classes. When clarithmetics or similar CoL-based theories are viewed as programming languages, programming reduces to proof-search, as programs can be mechanically extracted from proofs; such programs also serves as their own formal verifications, thus fully neutralizing the notorious (and generally undecidable) program verification problem. The second application reduces the problem of separating various computational complexity classes to separating the corresponding versions of clarithmetic, the potential benefits of which stem from the belief that separating theories should generally be easier than separating complexity classes directly.

Keywords: Computability logic, Peano arithmetic, game semantics, constructive logic, intuitionistic logic, linear logic, interactive computability

For citation: Japaridze G. "Arithmetics based on computability logic", *Logicheskie Issledovaniya / Logical Investigations*, 2019, Vol. 25, No. 2, pp. 61–74. DOI: 10.21146/2074-1472-2019-25-2-61-74

1. Computability logic (CoL): a formal theory of computability in the same sense as classical logic is a formal theory of truth

This talk is about number theories based on *computability logic*. I will be using the abbreviation CoL for the latter. So, first of all, what is computability logic? This is an approach introduced by myself some time ago, which I characterize as a formal theory of computability in the same sense as the classical logic is a formal theory of truth. Let us compare the two logics to see what this means.

In classical logic the central semantical concept is *truth*, formulas represent *statements*, and the main utility of classical logic is that it provides a systematic answer to the questions: 1) Is P (always) *true*? 2) Does *truth* of P (always) follow from *truth* of Q?

Now, what is computability logic and how does it differ from this? Everything is the same, except that truth is replaced with computability. So the central semantical concept here is *computability*. Formulas represent not just statements as before, but *computational problems*, as computability is a property of computational problems. And the logic provides a systematic answer to the questions: 1) Is P (always) computable? 2) Does computability of P (always) follow from computability of Q? Moreover, it provides answers to these two questions in a constructive sense. Namely, when it establishes that P is computable, it not only merely establishes existence of a computation (algorithm) for P, but rather also tells us exactly how to compute P; similarly it tells us how to construct an algorithm for P from an algorithm for Q.

Things are naturally arranged in such a way that classical statements (predicates, propositions) are special cases of computational problems, and classical truth is a special, simplest case of computability. This eventually makes classical logic a conservative fragment of computability logic. Conservative fragment in the sense that the language of CoL is more expressive than that of classical logic, containing the latter just as a fragment, but if we restrict the language back to that of classical logic, CoL's semantics validates nothing less and nothing more than what the classical semantics does.

Anyway, first and foremost, we want to agree on our understanding of what *computational problems* are. If you go back to Church, computational problems are just functions to be computed. But for us the understanding of computational problems is more general. Namely, a computational problem is a zero-sum game between a machine, symbolically namd $\top$, and its environment, symbolically named $\bot$. Functions are just special cases of such games, but otherwise here we have computational problems of arbitrary degrees of interactivity (the problem of computing a function is not very interactive, with only two steps involved: receiving an input and generating an output).

I don't specify or define exactly what is meant by a "machine", but let us understand it as an algorithm. So, instead of a machine you can always think of an interactive algorithm, some mechanical procedure to follow. We say a machine M *wins* (*computes*, *solves*) a game/problem G iff M wins G regardless of how the environment acts. Such an M is said to be an *algorithmic solution* (algorithmic *winning strategy*) for G. A problem/game is *computable* iff it has an algorithmic solution.

CoL's logical operators (connectives, quantifiers) represent operations on games. There is a whole zoo of operators, but in this presentation we only consider the modest fragment of it consisting of

$$\neg, \wedge, \vee, \rightarrow, \forall, \exists, \sqcap, \sqcup, \bigsqcap, \bigsqcup.$$

Here we see all operators of classical logic and something in addition to that. These operators, just like all operators of CoL for that matter, are operations on games. The classically-shaped operators generalize their classical counterparts, and do so in a conservative fashion. That is in the sense that such operators automatically retain their classical meanings when applied to statements that also happen to be legitimate sentences of classical logic.

A *run* of a game is a sequence of moves, each one prefixed with $\top$ or $\bot$ to indicate which player has made the move. I am not giving any formal definitions in this presentation, but of course they do exist.

Atomic sentences such as $2 + 2 = 4$ are moveless games, that is, games whose only legal run is the empty run $\langle\rangle$. Such a game is won by the machine if the sentence is true in the classical sense, and lost if false. The same can be seen to be the case for all formulas built from atoms using only $\neg, \wedge, \vee, \rightarrow, \forall, \exists$ once we define these operators.

So, (the empty run of) $2+2=4$ or $\forall x(x = x)$ is won by the machine, and $2+2=5$ or $0=1 \wedge 2=2$ is lost. This means the problem/game $2+2=4$ or $\forall x(x = x)$ is computable (by a machine that does nothing) while $2+2=5$ or $0=1 \wedge 2=2$ is incomputable.

The bottom line to remember here is that formulas of classical logic represent moveless games. Some may ask in frustration: "how can we call something a game if there are no moves in it?!" Well, let me remind you the situation with the concept of zero. The Romans did not have this concept, and the subsequent European tradition for a long time resisted the idea of accepting zero as a legitimate number. The attitude was that a number is supposed to represent a quantity, but zero means no quantity at all, so it is not a meaningful number. But now we know that we can not do much in mathematics without zero. Similarly, the above moveless sorts of games make perfect sense under CoL's approach.

Now let us look at the operations on games that we will be dealing with.

First comes the *choice conjunction* of two games A and B, written $A \sqcap B$ and read "*A chand B*". This is a game where the first legal move is (only) by the environment, which should choose between the two available moves "*left*" and "*right*". After that the game continues according to the rules of the chosen component A or B, respectively. This choice is not only a privilege of the environment, but also an obligation, because if the environment fails to make a move (choice) here, then it loses, with the machine correspondingly considered to be the winner.

Choice disjunction ("*chor*") $A \sqcup B$ is similar, with the difference that here it is the machine which makes the first move/choice and which loses if no such move is made. So the roles of the machine and the environment are interchanged here.

The *choice universal quantification* of a game $A(x)$ is in fact a "big choice conjunction" in the sense that this game, written $\sqcap x A(x)$ and read "*chall* $xA(x)$", is a game where the first legal move is, just like in the case of choice conjunction, by the environment, which, however, instead of choosing between *left* and *right*, simply chooses a natural number n, after which the game continues as $A(n)$. If no such move is made, then the environment loses.

Choice existential quantification $\sqcup x A(x)$ ("*chexists* $xA(x)$") is similar, with the difference that, in it, it is the machine which makes the first move and which loses if no move is made.

Here is an example. $\langle \bot 6, \top left \rangle$ is a machine-won run of the game $\sqcap x(Even(x) \sqcup Odd(x))$, and the following sequence shows how it "modifies" the game:

$$\sqcap x(Even(x) \sqcup Odd(x)) \Rightarrow Even(6) \sqcup Odd(6) \Rightarrow Even(6).$$

According to this scenario, the environment chose 6 for x, after which the game continued as $Even(6) \sqcup Odd(6)$. In response, the machine made the move *left*, meaning that the left component was chosen, so the game continued as $Even(6)$. It also ended as $Even(6)$, because tno further moves were made (or could have been made). The machine won as $Even(6)$ is a true proposition, and true propositions are automatically won by the machine.

Negation $\neg$, read as "*not*", is a role switch operation: the moves and wins of the machine become those of the environment, and vice versa. More precisely: for a run Φ, let the *negative image* of Φ mean the result of changing all labels in Φ to their opposite. For instance, the negative image of $\langle \bot 6, \top left \rangle$ is $\langle \top 6, \bot left \rangle$. Then, given a game G, $\neg G$ is the game whose legal runs are the negative images of those of G, that is, the environment and the machine have interchanged their moves, and where a given player wins a given run of the game iff the other player wins, in the sense of G, the negative image of that run.

Example: we have $\neg\sqcap x(Even(x) \sqcup Odd(x)) = \sqcup x(Odd(x) \sqcap Even(x))$. Indeed, consider the negation of $\sqcap x(Even(x) \sqcup Odd(x))$. Without a negation this is a universally quantified game, meaning that the environment makes the first move in it. But negation interchanges players' roles, so now it is the machine that can make the first move. That is why $\sqcap x$ becomes $\sqcup x$. For similar reasons, $\sqcup$ becomes $\sqcap$, *Even* becomes *Odd* ($= \neg Even$) and *Odd* becomes *Even*.

We can see that DeMorgan's laws remain valid with choice operators. In fact, CoL has several (4+) sorts of conjunctions, disjunctions and quantifiers, and DeMorgan's laws go through for all of them.

When applied to an atomic sentence S (or any moveless game for that matter), $\neg$ behaves exactly like classical negation, because the only legal run in games represented by atomic sentences is the empty run $\langle\rangle$, and the negative image of $\langle\rangle$ is the same $\langle\rangle$; so, only the winners are interchanged, and the machine wins this "run" of S (in other words, S is true) iff the environment wins it in game $\neg S$ (that is, S is false).

The same can be seen to be the case with all operators that look like operators of classical logic: $\wedge$, $\vee$, $\rightarrow$, $\forall$, $\exists$. When applied to moveless games, the behavior of such operators is exactly classical. Their new meanings coincide with their classical meanings, and this happens naturally/automatically rather than being "manually" postulated.

Whether S is moveless or not, we have $\neg\neg S = S$. The double negation principle remains valid, because interchanging the roles twice brings each player to its original role.

The *parallel conjunction* of games A and B, written $A \wedge B$ and read "*A pand B*", is a game where A and B are played simultaneously (no choice is made between the two), and where, in order to win, the machine needs to win in both components. To indicate in which component a given move is made, it should be prefixed with "*left*" or "*right*".

Parallel disjunction ("*por*") $A \vee B$ is similar, with the only difference that here winning in just one component is sufficient.

Example: $\langle \bot right.6,\ \top left.6,\ \bot left.left,\ \top right.left \rangle$ is a legal run of the game

$$\sqcup x(Odd(x) \sqcap Even(x)) \vee \sqcap x(Even(x) \sqcup Odd(x)).$$

The meaning of the first move $\bot right.6$ is that the environment chooses 6 for x in the right $\vee$-disjunct. As a result, the game turns it into

$$\sqcup x(Odd(x) \sqcap Even(x)) \vee (Even(6) \sqcup Odd(6)).$$

The move $\top left.6$ made by the machine in response signifies choosing the same number 6 for x in the left $\vee$-disjunct, and the game correspondingly continues as

$$(Odd(6) \sqcap Even(6)) \vee (Even(6) \sqcup Odd(6)).$$

The next move $\bot left.left$ by the environment, whose meaning is choosing the left $\sqcap$-conjunct in the left $\vee$-disjunct, further brings the game down $Odd(6) \vee (Even(6) \sqcup Odd(6))$. The final move $\top right.left$ made by the machine turns it into $Odd(6) \vee Even(6))$. The machine wins because $Even(6)$ is true and thus it wins in one of the two $\vee$-disjuncts.

Parallel implication ("*pimplication*") $\rightarrow$ is simply understood as a standard abbreviation: $A \rightarrow B =_{df} \neg A \vee B$. Due to the prefix $\neg$, the players' roles are interchanged in A, turning it into a *computational resource* that can be used by $\top$ in solving B. The computational intuition associated with this combination is the most interesting one as, intuitively, $A \rightarrow B$ can be seen to be the problem of *reducing* B to A. Here is an example. Consider the following two predicates:

- $Halts(x, y)$ = "Turing machine x halts on input y";
- $Accepts(x, y)$ = "Turing machine x accepts input y".

The renowned Halting problem as a decision problem can be written this way: $\sqcap x \sqcap y(Halts(x, y) \sqcup \neg Halts(x, y))$. In this game the environment chooses some particular values for x and y, and the machine should reply by telling whether x halts on y ($\top$*left*) or not ($\top$*right*). Similarly for the Acceptance problem $\sqcap x \sqcap y(Accepts(x, y) \sqcup \neg Accepts(x, y))$. Both problems are known to be undecidable. But the pimplication from one to the other can be shown to be computable.

$$\underbrace{\overbrace{\sqcap x \sqcap y(Halts(x, y) \sqcup \neg Halts(x, y))}^{\text{Halting problem}} \rightarrow \overbrace{\sqcap x \sqcap y(Accepts(x, y) \sqcup \neg Accepts(x, y))}^{\text{Acceptance problem}}}_{\text{Reduction of the acceptance problem to the halting problem}}$$

The winning strategy here relies on reducing the consequent to the antecedent. Roughly it goes like this. While both players have initial legal moves in this game, the machine waits until the environment makes a choice of some values m and n for x and y in the consequent (otherwise it loses) and thus brings the game down to

$$\sqcap x \sqcap y(Halts(x,y) \sqcup \neg Halts(x,y)) \rightarrow Accepts(m,n) \sqcup \neg Accepts(m,n).$$

Then the machine chooses the same m and n in the antecedent, so the game continues as

$$Halts(m,n) \sqcup \neg Halts(m,n) \rightarrow Accepts(m,n) \sqcup \neg Accepts(m,n).$$

Now, again, both players have legal moves: $\top$ in the consequent and $\bot$ in the antecedent, but it is wise for the machine to wait to let the environment move first. If the environment fails to make a move, the environment loses in the antecedent and thus the machine wins the overall game. So, assume the environment makes a move in the antecedent, telling whether m halts on n or not. We may assume that whatever the environment says here is true, or else it loses. If it says that m does not halt on n, then the machine chooses $\neg Accepts(m,n)$ in the consequent and wins because if m does not halt, then it does not accept either. Otherwise, if the environment says that m halts on n, the machine simulates the work of m on input n, and this simulation will show whether the halting was with acceptance or rejection. The machine correspondingly chooses between $Accepts(m,n)$ and $\neg Accepts(m,n)$ in the consequent and wins.

What we call *blind quantifiers* are $\forall$ ("*blall*") and $\exists$ ("*blexists*"). $\exists$ is the DeMorgan dual of $\forall$ ($\exists = \neg\forall\neg$), so let us just look at the blind universal quantification $\forall x A(x)$. Unlike $\sqcap$, no move is associated with $\forall$, i.e., no value for x is specified (by either player); in order to win, the machine needs to play "blindly" in a way that guarantees success in $A(x)$ for every possible value of x.

As an example, consider the game

$$\forall x(Even(x) \sqcup Odd(x) \rightarrow \sqcap y(Even(x+y) \sqcup Odd(x+y))).$$

The following scenario unfolds according to the run $\langle \bot right.5,\ \bot left.right,\ \top right.left\rangle$: The environment chooses 5 for y in the consequent, bringing the game down to

$$\forall x(Even(x) \sqcup Odd(x) \rightarrow Even(x+5) \sqcup Odd(x+5)).$$

The machine has to tell whether $x+5$ is even or odd. But it does not know x. Can it still determine the parity of $x+5$? Yes, it can, if the machine just knows whether x is even or odd without otherwise knowing what particular number x is. And this information about the parity of x can be obtained from the antecedent, where the environment is obligated to move. By making the move $\bot left.right$ and bringing the game down to $\forall x(Odd(x) \rightarrow Even(x+5) \sqcup$

$Odd(x+5))$, the environment says that x is odd. But then $x+y$ is even, so the final move $\top right.left$, resulting in $\forall x(Odd(x) \rightarrow Even(x+5))$, makes the machine the winner. Notice how $\forall$ persisted in the above sequence of games, and so did $\rightarrow$. Generally, the classical structure of a game when it evolves in this fashion will remain unchanged, all changes will happen exclusively in choice ($\sqcap, \sqcup, \bigsqcap, \bigsqcup$) components.

2. Clarithmetics: formal number theories based on CoL

In CoL, the standard concepts of time and space complexities are naturally and conservatively generalized to the interactive level, making them meaningful for games. Also, a new complexity measure — *amplitude complexity* — is introduced. It is concerned with the sizes of $\top$'s moves relative to the sizes of $\bot$'s moves.

Instead of computability-in-principle, we can now just as meaningfully speak about computability with limited resources (amplitude, space, time). For instance, polynomial space computability rather than just computability.

Example: each of the problems is the left column below is polynomial time computable. The right column tells us what this means in standard terms.

$\bigsqcap x \bigsqcap y(x = y \sqcup x \neq y)$	"$=$" is polynomial time decidable
$\bigsqcap x \bigsqcap y \bigsqcup z(z = x + y)$	"$+$" is polynomial time computable
$\bigsqcap x(\exists y(x = y \times y) \rightarrow \bigsqcup y(x = y \times y))$	"square root", when exists, is polynomial time computable
$\bigsqcap x \bigsqcup y(p(x) \leftrightarrow q(y))$ ($A \leftrightarrow B$ abbreviates $(A \rightarrow B) \wedge (B \rightarrow A)$)	p is polynomial time reducible to q

Clarithmetics are formal number theories based on CoL in the same sense as **PA** (Peano arithmetic) is based on classical logic, usually in the language whose logical vocabulary is the one that we surveyed in the preceding section: $\neg, \wedge, \vee, \rightarrow, \forall, \exists, \sqcap, \sqcup, \bigsqcap, \bigsqcup$. The non-logical vocabulary is standard: $0,', +, \times, =$ (x' means $x+1$). We need some technical preliminaries before we proceed.

- By a *bound* we mean a *pterm* (term or pseudoterm) for some monotone function (the term was coined by George Boolos). Pseudoterms are not really terms strictly speaking, but one can pretend that we do have special terms for them in the language. Nothing will change this way because each formula with pseudoterms can be equivalently rewritten as one with only real terms. Terminologically we identify a pterm with the function it represents.

- A *boundclass* is a set of bounds closed under variable renaming.

- A *tricomplexity* is a triple $\mathbf{R} = (\mathbf{R}_{amplitude}, \mathbf{R}_{space}, \mathbf{R}_{time})$ of boundclasses satisfying certain *regularity* conditions. I will not show here those conditions, but they are natural. Suffice it to say that all naturally emerging tricomplexities are regular as long as $\mathbf{R}_{amplitude}$ is at least linear (contains all linear functions), $\mathbf{R}_{space}$ at least logarithmic, and $\mathbf{R}_{time}$ at least polynomial.

- An $\mathbf{R}$ *tricomplexity solution* of a given problem G is a solution for G whose amplitude complexity is upper-bounded by some bound from $\mathbf{R}_{amplitude}$, space complexity by some bound from $\mathbf{R}_{space}$, and time complexity by some bound from $\mathbf{R}_{time}$. In other words, this is a $\top$'s winning strategy/algorithm that runs in time from $\mathbf{R}_{time}$, in space from $\mathbf{R}_{space}$ and in amplitude from $\mathbf{R}_{amplitude}$.

- $|x|$ is the standard arithmetization of function "the length of the binary representation of x", i.e., of "$\lceil log_2(x+1)\rceil$".

- $Bit(x, y)$ is the standard arithmetization of the predicate "the y'th least significant bit of the binary representation of x is 1", i.e., of "$\lfloor x/2^y \rfloor \; mod \; 2 = 1$".

- $\underline{s}$ (resp. $|\underline{s}|$) means a tuple $(s_1, \ldots, s_n)$ (resp. $(|s_1|, \ldots, |s_n|)$), where $s_1, \ldots, s_n$ are variables.

- Let B be a boundclass. We say that a formula F is *B-bounded* iff every $\sqcap$-subformula of F has the form $\sqcap x(|x| \leq b(|\underline{s}|) \rightarrow F)$ and every $\sqcup$-subformula has the form $\sqcup x(|x| \leq b(|\underline{s}|) \wedge F)$, where $x, \underline{s}$ are pairwise distinct variables not bound by $\forall, \exists$ in F, and b is a bound from B.

A number of systems of clarithmetic were developed for various purposes, corresponding to various complexity classes. In this presentation we will look only at one system of clarithmetic, called **CLA11**. It is a scheme of clarithmetical theories rather than a particular theory, generating a particular theory $\mathbf{CLA11}^{\mathbf{R}}$ per each tricomplexity $\mathbf{R}$.

We fix some tricomplexity $\mathbf{R} = (\mathbf{R}_{amplitude}, \mathbf{R}_{space}, \mathbf{R}_{time})$ to define the corresponding theory $\mathbf{CLA11}^{\mathbf{R}}$. The logical basis (axioms, rules) of such a theory is a certain axiomatization **CL12** of CoL, sound and complete in a very strong sense. It is the logical basis of $\mathbf{CLA11^R}$ in the same sense as classical logic is a logical basis of Peano arithmetic. Having said that, here we shall only focus on the nonlogical postulates of $\mathbf{CLA11^R}$.

The nonlogical *axioms* of $\mathbf{CLA11^R}$ are the following:

1. $\forall x \neg(0 = x')$
2. $\forall x \forall y(x' = y' \to x = y)$
3. $\forall x(x + 0 = x)$
4. $\forall x \forall y(x + y' = (x + y)')$
5. $\forall x(x \times 0 = 0)$
6. $\forall x \forall y(x \times y' = (x \times y) + x)$
7. The $\forall$-closure of $F(0) \wedge \forall x(F(x) \to F(x')) \to \forall x F(x)$ for each $\sqcap, \sqcup, \bigsqcap, \bigsqcup$-free formula F
8. $\bigsqcap x \bigsqcup y(y = x')$
9. $\bigsqcap x \bigsqcup y(y = |x|)$
10. $\bigsqcap x \bigsqcap y(Bit(x, y) \sqcup \neg Bit(x, y))$

Formulas (1)–(7) are nothing but the so-called Peano axioms, that is, axioms of standard **PA**. Of course, (7) is a scheme of axioms, generating infinitely many particular axioms. In addition, we have three extra-Peano axioms (8)–(10). The first one expresses the computability of the successor function. The second one expresses the computability of the logarithm function. The third one says that the question of telling whether the y'th least significant bit of (the binary representation of) x is 1 or not is decideable.

Along with $\mathbf{CLA11^R}$ we also consider $\mathbf{CLA11^R} + \mathbf{TA}$, where **TA** stands for "Truth Arithmetic". $\mathbf{CLA11^R} + \mathbf{TA}$ differs from $\mathbf{CLA11^R}$ in that its axioms include all true sentences of classical arithmetic (rather than just Peano axioms) as additional axioms. Of course, this system, unlike $\mathbf{CLA11^R}$, is no longer recursively axiomatizable.

On top of axioms, $\mathbf{CLA11^R}$ has the following two nonlogical *rules* of inference:

- *Induction* $$\frac{F(0) \qquad \bigsqcap x(F(x) \to F(x'))}{\bigsqcap x \leq b(|\underline{s}|)F(x)}$$

  where x and $\underline{s}$ are pairwise distinct variables, $F(x)$ is an $\mathbf{R}_{space}$-bounded formula, and b is a bound from $\mathbf{R}_{time}$;

- *Comprehension* $\dfrac{\sqcap y(p(y) \sqcup \neg p(y))}{\bigsqcup |x| \leq b(|\underline{s}|)\forall y < |x|(Bit(y,x) \leftrightarrow p(x))}$

  where x, y and $\underline{s}$ are pairwise distinct variables, $p(y)$ is a $\sqcap, \sqcup, \bigsqcap, \bigsqcup$-free formula not containing x, and b is a bound from $\mathbf{R}_{amplitude}$.

As we see, the above induction rule, unlike its standard counterpart, has $\bigsqcap$ instead of $\forall$. The intuition here is that, if we know how to compute $F(0)$ and we also know, for all x with $x \leq b(|s|)$, how to reduce $F(x')$ to $F(x)$, then we know how to compute $F(x)$. A restriction is that $F(x)$ should be an $\mathbf{R}_{space}$-bounded formula and the bound b should be a bound taken from $\mathbf{R}_{time}$.

The intuition associated with the comprehension rule is that, if you can decide the predicate p, then you can generate (hence, *chexists*) the number x such that, for any n, the n-th least significant bit of x is a 1 if an only if p is true of n. The decidable predicate p thus generates its own number in the sense that it tells us each bit of the binary representation of x. Again, we have a restriction here, according to which b should be a bound from $\mathbf{R}_{amplitude}$.

Now we are ready to state the main result below after couple of additional terminological conventions. By an *arithmetical problem* we mean a problem/game that is expressed by some formula of the language of $\mathbf{CLA11^R}$. We say that such a problem is *representable* in $\mathbf{CLA11^R}$ if it is expressed by some theorem of $\mathbf{CLA11^R}$. Note that the same arithmetical problem can be expressed by many different formulas and, in order for the problem to qualify as representable, it is sufficient that just one of such formulas be provable.

Theorem 1. *For any tricomplexity* $\mathbf{R}$*, the following holds:*

- ***Constructive soundness****: For every theorem* F *of* $\mathbf{CLA11^R} + \mathbf{TA}$*, the problem expressed by* F *has an* $\mathbf{R}$ *tricomplexity solution, and such a solution can be automatically extracted from a proof of* F*.*

- ***Extensional completeness****: Every arithmetical problem with an* $\mathbf{R}$ *tricomplexity solution is representable in* $\mathbf{CLA11^R}$*.*

- ***Intensional completeness****: Every formula expressing a problem with an* $\mathbf{R}$ *tricomplexity solution is provable in* $\mathbf{CLA11^R} + \mathbf{TA}$*.*

The $\mathbf{R}$ parameter of $\mathbf{CLA11^R}$ can be turned in a mechanical, brute force, "canonical" way to obtain a sound and complete theory with respect to the target computational tricomplexity. For instance, for

linear amplitude + logarithmic space + polynomial time,

we can choose the $\mathbf{R}$ with

$\mathbf{R}_{amplitude}$ = {all terms built from x using $0, ', +$} — you can see that these are exactly the terms that describe all linear functions.

$\mathbf{R}_{space}$ = {all pterms built from $|x|$ using $0, ', +$} — this can be seen as the set of pterms that express all logarithmic functions.

$\mathbf{R}_{time}$ = {all terms built from x using $0, ', +, \times$} — again, you can see that these are exactly those terms that express polynomial functions.

In a similar fashion, with very little effort, you can generate instances of **CLA11** for a huge variety of tricomplexities. All reasonable complexity triples can be captured this way, such as:

- *polynomial amplitude + polynomial space + polynomial time*
- *linear amplitude + linear space + quasipolynomial time*
- *linear amplitude + polynomial space + exponential time*
- *superexponential amplitude + elementary space + primitive recursive time*

... you just name it!

3. Potential applications of clarithmetics

The two main motivations for studying **CLA11** and clarithmetics in general are that (1) such theories can be seen as declarative programming languages in an extreme sense, and (2) they can potentially be used (perhaps, hopefully) as a tool for separating computational classes.

(1) **CLA11** *as a declarative programming language*

Let us say you want a program computing the integer square root function, such that this program runs in polynomial time, logarithmic space and linear amplitude. All you need to do to get such a program is this:

1. Instantiate the **R** parameter with the corresponding tricomplexity (cf. the end of Section 2.);
2. Write the formula $\sqcap x(\exists y(x = y \times y) \to \sqcup y(x = y \times y))$ expressing your goal in the language of $\mathbf{CLA11}^{\mathbf{R}}$;
3. Find a $\mathbf{CLA11}^{\mathbf{R}}$-proof of this formula.

Once you find a proof, the compiler then extracts the sought program from it. With $\sqcap x(\exists y(x = y \times y) \to \sqcup y(x = y \times y))$ being in fact a specification of such a program, the proof automatically also serves as a formal verification of the fact that the program meets its specification. This way, the notorious and generally undecidable problem of program verification is fully neutralized.

Other than that, the proof lines can be seen as (the best possible) comments for the corresponding steps of the program.

Furthermore, — this is from the realm of fiction at this point, but still — if we develop reasonably efficient theorem-provers, step 3 (finding the proof) can be delegated to the compiler, and the "programmer"'s job will be just to write the goal/specification $\sqcap x(\exists y(x = y \times y) \rightarrow \sqcup y(x = y \times y))$. All of us can thus qualify as programmers, because we all can very easily understand the language in which such a formula is written.

(2) **CLA11** *as a tool for separating computational complexity classes.*

The main open problems in the theory of computation are about separating various naturally emerging computational complexity classes, with the P versus NP problem being the best known example of problems of this kind. To show that two (tri)complexity classes **R1** and **R2** are not equal, it is sufficient to separate the two theories $\mathbf{CLA11}^{\mathbf{R1}}$ and $\mathbf{CLA11}^{\mathbf{R2}}$. Separating theories should to be easier than separating complexities directly. After all, we have seen some very impressive success stories of separating theories, such as separating different versions of set theory or proving independence results. We do not have comparable success stories in separating complexities, which mostly has been just a fruitless struggle so far.

An extensive online survey of CoL and CoL-based applied theories can be found at

`www.csc.villanova.edu/~japaridz/CL/`.

Most relevant publications: [Japaridze 2015], [Japaridze 2016c], [Japaridze 2014], [Japaridze 2015], [Japaridze 2016a], [Japaridze 2016b], [Japaridze 2016c].

Acknowledgements. Paper is RAS Institute of Philosophy Seminar Talk, 14 November 2018 (See video `https://youtu.be/w9-1Xm8MMmQ`).

References

Japaridze 2010 – Japaridze, G. "Towards applied theories based on computability logic", *Journal of Symbolic Logic*, 2010, Vol. 75, pp. 565–601.

Japaridze 2011 – Japaridze, G. "Introduction to clarithmetic I", *Information and Computation*, 2011, Vol. 209, pp. 1312–1354.

Japaridze 2014 – Japaridze, G. "Introduction to clarithmetic III", *Annals of Pure and Applied Logic*, 2014, Vol. 165, pp. 241–252.

Japaridze 2015 – Japaridze, G. "On the system CL12 of computability logic", *Logical Methods is Computer Science*, 2015, Vol. 11, No. 3, Paper 1, pp. 1–71.

Japaridze 2016a – Japaridze, G. "Build your own clarithmetic I: Setup and completeness", *Logical Methods is Computer Science*, 2016, Vol. 12, No. 3, Paper 8, pp. 1–59.

Japaridze 2016b – Japaridze, G. "Build your own clarithmetic II: Setup and completeness", *Logical Methods is Computer Science*, 2016, Vol. 12, No. 3, Paper 12, pp. 1–62.

Japaridze 2016c – Japaridze, G. "Introduction to clarithmetic II", *Information and Computation*, 2016, Vol. 247, pp. 290–312.

Логические исследования
2019. Т. 25. № 2. С. 75–93
УДК 510.64

Logical Investigations
2019, Vol. 25, No. 2, pp. 75–93
DOI: 10.21146/2074-1472-2019-25-2-75-93

Alexandra Pavlova

Game-theoretical interpretation of abelian logic A

Alexandra Pavlova
Higher School of Economics,
20 Myasnitskaya Str., Moscow, 101000, Russian Federation.
Saint Petersburg State University,
5 Mendeleevskaya Liniya, St. Petersburg, 199034, Russian Federation.
E-mail: pavlova.alex22@gmail.com

Abstract: In the present paper we introduce a variation of Giles's game that captures the semantics of Slaney and Meyer's Abelian logic. This is a variation of the game earlier proposed for the Łukasiewicz infinitely-valued logic. We discuss two possible interpretations of this game. One of the interpretations involves a reference to different types of agents. We also give a brief description of the Abelian logic which as well corresponds to one of the comparative logics proposed by Casari. By different types of agents, we understand agents with diverse cognitive presumptions and capabilities. This reflects the idea that different agents can be encoded by a game (dialogue) semantics and truth (and validity) can be seen as a product of different types of communications between agents, establishing the relation between various types of moves available to the players and the resulting type of rationality. However, the main focus of the paper is concentrated on the technical result concerning the game proposed in the paper. In a separate section, we prove that this game is adequate to the Abelian logic. The game can be extended to the one allowing for the disjunctive strategies. As immediate future research, we suggest proving that Proponent's winning strategies for some formula F in the game for Abelian logic **A** with disjunctive strategies correspond to a derivation of the formula F in the hypersequent calculus **GA**.

Keywords: Abelian logic, game semantics, epistemic presumptions, hypersequent calculus, non-classical logic, many-valued logic

For citation: Pavlova A. "Game-theoretical interpretation of abelian logic **A**", *Logicheskie Issledovaniya / Logical Investigations*, 2019, Vol. 25, No. 2, pp. 75–93. DOI: 10.21146/2074-1472-2019-25-2-75-93

1. Introduction

In the present paper we introduce a variation of the Giles's game that captures the semantics of the Slaney and Meyer's Abelian logic **A** [Meyer et al., 1989]. The Giles's game is a two-player zero-sum game which can be seen as a *valuation game*, i.e. semantic game that determines truth in a given model. The model is represented by the *risk assignments* for each formula. Giles's game is of a particular interest as it combines two types of games:

- Games determining truth on a model, like Game-Theoretical Semantics of J. Hintikka [Hintikka, 1996];
- Lorenzen's dialogue games determining validity [Lorenzen et al., 1978], [Krabbe, 2006].

Our article comprises five sections two of them being the introduction and conclusion. In the introduction, we informally show a notion of Giles's game as it was presented for Łukasiewicz infinitely-valued logic. This is done in order to make the initial *experiment-based* interpretation of the game more evident for a reader. Later we proceed by suggesting our own interpretation of Giles's game for Abelian logic which is much different from the original *experiment based* interpretation which is due to semantics of Abelian logic. We proceed by presenting the notion of Abelian logic in the section 2. In section 3 the notion of Giles's game for Abelian logic is formally introduced, and finally we prove the adequacy of this game to Abelian logic in section 4.

To begin with, we present the basic idea of Giles's game for Łukasiewicz infinitely-valued logic Ł the way it is presented in [Fermüller, 2009] which will later be tailored to capture Abelian logic (see section 3). The game $G([\Gamma \| \Delta], \rho)$ consists of:

- 2 players, i.e. I (me) and Y (you). In our own presentation of the game for Abelian logic we stick to the Lorenzen's names for players, i.e., *Proponent* for I and *Opponent* for *You*. Players bet on formulae by asserting them. As the game proceeds as decompositions of complex formulae, it ends up in an elementary state, i.e., a state where all the formulae asserted by O and P are atomic;
- Γ is a multiset that contains all the formulae asserted by O and multiset Δ contains all the formulae asserted by P. Those are multisets because they may contain multiple instances of the same formulae unlike ordinary sets. It is important as each instance of a formula adds up its risk assignment to the sum of the risk undertaken by a player in question;
- the language is used in a restricted version. The language for the logic Ł has only one atomic connective $\to$ and a constant $\perp$ representing falsity. Other connectives can be defined as follows:
  - $\neg A =_{def} A \to \perp$ (negation),
  - $A \& B =_{def} \neg(A \to \neg B)$ (strong conjunction),
  - $A \wedge B =_{def} A \& (A \to B)$ (weak conjunction),
  - $A \vee B =_{def} ((A \to B) \to B) \wedge ((B \to A) \to A)$ (disjunction);

- a (repeatable) *elementary experiment* E_q related to some q stating "E_q yields a positive result". If q can be either true or false as in classical logic, then the same experiment should lead to the same result over all repetitions. However, if we allow our experiments to exhibit *dispersion* meaning that the same experiment may yield different results under repetition, then we are not any more in the realm of the classical logic. That means that now the risk associated to asserting each proposition is not a value from the set $\{0, 1\}$ but rather a fixed risk value (denoted $\langle q \rangle$) in the real unit interval $[0, 1]$ is ascribed to any atomic q. That yields the game corresponding to the logic Ł as proved in [Fermüller, 2009];

- fixed *risk value* $\langle \cdot \rangle$ in the closed interval $[0, 1]$ (for non-classical case) for each propositional variable. $\langle \perp \rangle = 1$;

- the risk for a multiset[1] $p_1, p_2, \ldots, p_m$ is the following: $\langle p_1, p_2, \ldots, p_m \rangle = \sum_{i=1}^{m} \langle p_i \rangle$;

- $(R_{\rightarrow})$ if a user X has asserted $A \rightarrow B$ and another user Z attacks this statement by asserting A, the user X has to assert B. The user Z can also grant the formula $A \rightarrow B$ asserted by X. In the latter case, the granted formula $A \rightarrow B$ is just deleted from the X set of assertions.

Possible Interpretations of the Game

Giles's game was motivated by the need to account for logical reasoning in physical theories. Atomic statements represent experiments that have fixed probability of a positive outcome. The idea is that players bet on the expectations related to those experiments, i.e. they agree to pay 1€ for each incorrect statement. A player asserting the initial formula (whom we call a Proponent) wins a game if they expect no loss of money (i.e., P either pays the same amount to O as O pays to P or P even gets some money from O).

Resource based interpretation

Although this interpretation of a game suits well several fuzzy logics, including the Łukasiewicz infinitely-valued logic Ł, it does not seem to be adequate for the Abelian logic **A** since the set of truth values is a proper subset of $\mathbb{R}$ instead of an interval (as for instance in Łukasiewicz infinitely-valued logic Ł: $[0, 1]$). So we suggest another interpretation of the game. We can think of atomic statements (represented by propositional variables) as some sort of special resources that can be both positive and negative, for instance, *equity securities* (e.g., common stocks) or derivatives. Complex formulae would then represent simple operations on such assets, like addition and subtraction. When a user

[1] The notion of a multiset will be formally defined in what follows on page 81.

who is trying to show that the formula is true (we will call them the *Proponent*) in a given model states a complex formula, they state that it's value is non-negative, i.e. after performing all the operations specified in the formula the Proponent will have a non-negative budget. This interpretation seems to be rather close to one of the possible views on Abelian logic as on the comparative logics proposed by Casari in [Casari, 1989].

Bounded rationality interpretation

Initially, the game was proposed by Robin Giles in 1970s to model logical reasoning in physics. Thus, Giles's game can be seen as a game related to the knowledge of the expected probability of positive results of experiments. From that follows that the game can be seen as a type of epistemic game, or more precisely a game related to the epistemic states of agents where an epistemic state of an agent is represented truth-functionally. The game characterisation of many-valued logics is also related to our investigations in the area of cognitive presumptions and types of rationality as many-valued logics can be seen as some alternative variants of characterisation of knowledge and degrees of belief [Kubyshkina et al., 2016].

Given the above idea, there can also be an alternative understanding of the Giles's game for Abelian logic, i.e. in terms of bounded agents with respect to their epistemic presumptions. One of the main features of the game for Abelian logic is that there are no versions of the principle of *limited liability* (sometimes denoted as LLA and LLD):

Definition 1. Limited liability for attack (LLA): A player X can always decide not to attack an occurrence of a formula that has been asserted by another player Y.

Definition 2. Limited liability for defence (LLD): A player X can always assert $\bot$ in reply to an attack by another player Y.

As there is no internal weakening in the corresponding *hypersequent calculus* (cf. [Metcalfe et al., 2005]), thus in the game agents cannot grant formulae (i.e. delete them from the opponents' side), that means that the agents cannot agree on any formula, they need to put all those formulae to the test which represents a very strict understanding of epistemic presuppositions. On the other hand, the absence of internal contraction can be interpreted as agents discussing some factual statements, thus a duplicate of a formula cannot be just added in a run of a game as q being true once, does not grantee it being realised two times. This interpretation is consistent with the first one, it just adds the idea of the rules binding agents' presumptions and capabilities. The detailed study of possible interpretations of Giles's game for **A** is subject of a separate research.

Motivation

The motivation for the paper is twofold. On the one had, the idea is to suggest a game semantics for Abelian logic to get its dynamic interpretation. And this reveals the connection between proof theory and games with respect to many-valued logics. On the other hand, we are interested in investigating the rational agency and its epistemic presumptions that are implied in the many-valued logics. We have discussed a related classification of agent types in our previous work [Pavlova, 2017] and this is one of our directions of investigation with respect to that classification. This direction is related to our study of agency and the potential use of games and fuzzy logics to model different types of agents.

2. Abelian Logic

In this section we briefly present some of the basic notions with respect to Abelian Logic **A**. It was introduced by Meyer and Slaney [Meyer et al., 1989] as a logic of relevance. It also coincides with one of the Casari's comparative logics [Casari, 1989] formalising comparisons of majority, minority, and equality in natural languages. There exists a sequent calculus for **A** provided by Paoli [Paoli, 2001] as well as a hypersequent calculus.

Definition 3. Let P be a countable set of atomic propositions. The language $\mathcal{L}_A$ for Abelian logic is generated by the following BNF:

$$F ::= p \mid F \mid F \wedge F \mid F \vee F \mid F \rightarrow F \mid F + F \mid t,$$

where $p \in P$.

Negation can be defined as follows: $\neg F =_{def} F \rightarrow t$. It is also worth mentioning that truth and canonical falsity are identical in this logic: $\neg t = t \rightarrow t$, thus $t = \neg t$.

Definition 4 (Axioms and rules)**. A** is generated by the following schemes of axioms[2] and rules:

(A1) $A \rightarrow ((A \rightarrow B) \rightarrow B)$,

(A2) $(A \rightarrow B) \rightarrow ((B \rightarrow C) \rightarrow (A \rightarrow C))$,

(A3a) $A \rightarrow (t \rightarrow A)$,

(A3b) $(t \rightarrow A) \rightarrow A$,

[2] Alternatively, we could have used axioms plus substitution rule.

(A4a) $((A \vee B) \to C) \to ((A \to C) \wedge (B \to C))$,

(A4b) $((A \to C) \wedge (B \to C)) \to ((A \vee B) \to C)$,

(A5a) $((A + B) \to C) \to (A \to (B \to C))$,

(A5b) $(A \to (B \to C)) \to ((A + B) \to C)$,

(A6) $(A \wedge B) \to A$,

(A7) $(A \wedge B) \to B$,

(A8) $((A \to B) \wedge (A \to C)) \to (A \to (B \wedge C))$,

(A9) $(A \wedge (B \vee C)) \to ((A \wedge B) \vee (A \wedge C))$,

(A10) $((A \to B) \to B) \to A$,

$$\frac{A \to B \quad A}{B}\ MP, \qquad \frac{A, B}{A \wedge B}\ \wedge I.$$

Some notes on semantics

As for semantic point of view, the appropriate algebras for **A** are lattice-ordered Abelian groups. There are well-established results with respect to the algebraic semantics for Abelian logic, and we are not going into their details (for the reference, see [Metcalfe et al., 2005]). We should only notice once again, that the domain of truth values is the set of real numbers $\mathbb{R}$, whereas the designated value is $\geqslant 0$, i.e., $[0, +\infty)$, and the primitive $t = 0$. One should also keep in mind that intensional disjunction and intensional conjunction are identical, which is one of the differences from the LL linear logic.

Definition 5. The assignment function I assigns each propositional variable of the language $\mathcal{L}_A$ of Abelian logic a real number: $I\colon Prop \to \mathbb{R}$.

Later in section 4, we will need the definition of valuation for our proof of Adequacy of Giles's game for **A** to Abelian logic. Valuation can be defined as an extension of assignment as follows:

Definition 6. A valuation v for **A** is a function from the set of formulae into the set of real numbers $\mathbb{R}$ ($v\colon \mathcal{L}_A \to \mathbb{R}$) that extends an assignment I to propositional variables of values in $\mathbb{R}$ by:

$$\begin{gathered} v(t) = 0 \\ v(A \to B) = v(B) - v(A) \\ v(A \vee B) = min(v(A), v(B)) \\ v(A \wedge B) = max(v(A), v(B)) \\ v(A + B) = v(A) + v(B) \end{gathered}$$

As $\neg A$ is not a primitive as it was defined earlier via t and implication ($\neg A =_{def} A \to t$), one can deduce the valuation for negation the following way:

$$v(\neg A) = v(A \to t) = v(t) - v(A) = 0 - v(A) = -v(A).$$

3. Giles's Game for Abelian logic A

In this section we give a formal and precise definition of a Giles's game and highlight some differences between the game for the Łukasiewicz infinitely-valued logic Ł and the one for Abelian logic discussed in the present paper. Those differences can also be interpreted as representing alternative types of agents featuring their cognitive presumptions.

3.1. The Structure of a Game

We start by providing the basic definitions with respect to the structure of Giles's Game for logic **A**. The general idea is that a game start with the initial state which a sequence of formulae asserted by O and P and ends up in the elementary state of the same form containing, however, only atomic propositions. If players start with the initial state and play until the elementary state according to the rules, we would call this a run of a game. Here follows the formal definition.

Definition 7. A run of a game is a sequence of attacks and defences obeying the logical rules and some regulation ρ that begins with the state $[\Pi \parallel \Sigma]$ a finite (possibly empty) multiset Π of formulae that are initially stated by the Opponent (we will use O as a shortening) and a finite (nonempty) multiset Σ of formulae that are initially stated by Proponent (here and elsewhere we shall use P) and ends with an atomic state of the game.

Here we use the notion of a *multiset* which can be informally described as a modification of the concept of set which allows for multiple instances of the same elements[3]. Ordinary sets are composed of pairwise different elements, i.e., no two elements are the same. As we are making use of *multisets* here, that means that our Π and Σ can contain the same formulae multiple times, for instance, we can have the following state: $[p, p, q \parallel r, q, p, r]$.

[3]For the sake of being precise, we put here a formal definition of a multiset (which is not pertinent to the topic of the paper).

Definition 8. Let S be a set. A multiset over S is just a pair $\langle D, f\rangle$, where D is a set and $f\colon D \to N$ is a function.

What are the states?

There are two types of states in the game: *d-states* and *i-states*. We first provide a definition of a d-state (meaning "dialogue state"):

Definition 9. A dialogue state (d-state) of a game is $[\Pi \parallel \Sigma]$ where $\Pi = \{A_1, A_2, \ldots, A_m\}$ is a multiset of formulae that are currently asserted by the Opponent and $\Sigma = \{B_1, B_2, \ldots, B_n\}$ is a multiset of formulae currently asserted by the Proponent.

Each statement can be attacked at most once. We also introduce a notion of *i-states* that that refers to a special state that indicates the active formula of the corresponding *d-state*. Thus, the i-state follows each d-state (except for the atomic one) in a game:

Definition 10. An i-state is an intermediary statement that reflects a player's choice of active formula, i.e. the formula occurrence that gets attacked or defended (like in the rules for disjunction, for instance). These states are the same states as the corresponding d-states $[\Pi \parallel \Sigma]$ where $\Pi = \{A_1, A_2, \ldots, A_m\}$ and $\Sigma = \{B_1, B_2, \ldots, B_n\}$, that also contain a special marking of an active formula denoted by underlining: $[\Pi, \underline{A_i} \parallel \Sigma, B_j]$ or $[\Pi, A_i \parallel \Sigma, \underline{B_j}]$.

In our definition of a run of a game (as well as in some other definitions that will follow) we used the notion of an elementary state which contains only atomic propositional variables, but no complex formulae. It is time to give a formal definition to it:

Definition 11. A state $[p_1, p_2, \ldots, p_m \parallel q_1, q_2, \ldots, q_n]$ is called elementary (or atomic) if all p_i are atomic propositional variables asserted by O and all q_j are atomic propositional variables asserted by P.

Moving from one state to another

Now that we know what a state is and what types of states constitute a game (and a run of a game), it is important to specify how players go from one state to another in the most general sense (i.e., regardless of the formulae they asserted). We need to specify the protocol of the game which sometimes referred to as structural rules in the literature (especially on Lorenzen games). And the first question that arises is that of whose move it is at a certain state of a particular game. There is no standard way to determine the sequence of moves, e.g., in *Lorenzen's games* (or *Dialogue Logic*) the moves between the Opponent and Proponent alternate whereas in *Hintikka game* (also known as GTS) moves are determined by the main connective or the outermost quantifier (or modality). A peculiar feature of Giles's game is that the order of moves does not make any difference, thus there is no unique way to determine the sequence of moves. We introduce the notion of *regulation* ρ which determines whose move it is at a particular state of a game.

Definition 12. A regulation ρ is a function that assigns to each non-elementary d-state either the label **P** read as "P initiates the next round and chooses a formula to assert" or the label **O**, for "O initiates the next round chooses a formula to assert".

The label for an *i-state* should match to the corresponding *d-state*.

Definition 13. A round consists of the following components:

- Player α[4] who's turn it is to move according to a particular regulation ρ selects an active formula;
- α either attacks the active formula (by either selecting a subformula that β should state or stating a formula itself as in the case of implication) if it is in the β's set of statements or states a formula according to the logical rules if it belongs to α's own set of statements. β should react immediately to each attack, as specified in the following logical rules.

One may notice that the response to an attack (when one is possible according to the logical rules specified below) cannot be postponed. Furthermore, unlike in the Łukasiewicz infinitely-valued logic Ł, in the game for Abelian logic **A**, players cannot grant formulae (i.e. delete them from the states without attacking them). This corresponds to the lack of *internal weakening* in **A**.

Given the above definitions, we are ready to define the game for **A**. We distinguish here several rather similar concepts, namely: a game, a game form, and a run of a game. If a *run of a game* is a precise play that is performed by players, a game form represents all possible strategies (i.e. possible runs of a game) that O and P may have in a game with both fixed initial state $[\Pi \parallel \Sigma]$ and regulation ρ.

Definition 14. A *game form* $\mathbf{G}([\Pi \parallel \Sigma], \rho)$ is a tree of starts with the initial d-state $[\Pi \parallel \Sigma]$ as the root together with all possible successor states S with respect to a particular regulation ρ and the logical rules described below.

A *game* $\mathcal{G}$ is obtained from the *game form* by adding a *playoff function* $\langle\cdot\rangle$ for propositional variables. The playoff function maps all propositional variables to the set of reals $\mathbb{R}$.

[4]Variables *alpha* and β refer to arbitrary players s.t. if α is P, then β is O and *visa versa*.

3.2. Logical Rules

Having defined the general course of the game, we now need to specify the rules for attacks and defences which depend on the logical form of a formula in question. We call them *logical rules* (though sometimes they are also called *particle rules* in the literature on logical games).

Definition 15. The Giles's game $\mathfrak{G}_A$ for Abelian logic $\mathbf{A}$ contains the following logical rules for connectives:

$$\begin{array}{c}[\Pi \parallel \Sigma, \underline{A \supset B}]^{\mathbf{O}} \\ | \\ [A, \Pi \parallel \Sigma, B]\end{array} \quad (R\supset) \qquad\qquad \begin{array}{c}[\underline{A \supset B}, \Pi \parallel \Sigma]^{\mathbf{P}} \\ | \\ [B, \Pi \parallel \Sigma, A]\end{array} \quad (L\supset)$$

$$\begin{array}{c}[\Pi \parallel \Sigma, \underline{A \wedge B}]^{\mathbf{O}} \\ \diagup \quad \diagdown \\ [\Pi \parallel \Sigma, A] \quad [\Pi \parallel \Sigma, B]\end{array} \quad (R\wedge) \qquad \begin{array}{c}[\underline{A \wedge B}, \Pi \parallel \Sigma]^{\mathbf{P}} \\ | \\ [A, \Pi \parallel \Sigma]\end{array} \quad (L\wedge) \qquad \begin{array}{c}[\underline{A \wedge B}, \Pi \parallel \Sigma]^{\mathbf{P}} \\ | \\ [A, \Pi \parallel \Sigma]\end{array} \quad (L\wedge)$$

$$\begin{array}{c}[\Pi \parallel \Sigma, \underline{A \vee B}]^{\mathbf{P}} \\ | \\ [\Pi \parallel \Sigma, A]\end{array} \quad (R\vee) \qquad \begin{array}{c}[\Pi \parallel \Sigma, \underline{A \vee B}]^{\mathbf{P}} \\ | \\ [\Pi \parallel \Sigma, B]\end{array} \quad (L\vee) \qquad \begin{array}{c}[\underline{A \vee B}, \Pi \parallel \Sigma]^{\mathbf{O}} \\ \diagup \quad \diagdown \\ [A, \Pi \parallel \Sigma] \quad [A, \Pi \parallel \Sigma]\end{array} \quad (L\vee)$$

$$\begin{array}{c}[\Pi \parallel \Sigma, \underline{A + B}]^{\mathbf{P}} \\ | \\ [\Pi \parallel \Sigma, A, B]\end{array} \quad (R+) \qquad\qquad \begin{array}{c}[\underline{A + B}, \Pi \parallel \Sigma]^{\mathbf{0}} \\ | \\ [A, B, \Pi \parallel \Sigma]\end{array} \quad (L+)$$

$$\begin{array}{c}[\Pi \parallel \Sigma, \underline{t}]^{\mathbf{P}} \\ | \\ [\Pi \parallel \Sigma]\end{array} \quad (Rt) \qquad\qquad \begin{array}{c}[\underline{t}, \Pi \parallel \Sigma]^{\mathbf{0}} \\ | \\ [\Pi \parallel \Sigma]\end{array} \quad (Lt)$$

We also introduce a separate rule for truth t which is a special case of the *distinguished value* for *Abelian logic* as it coincides with the canonical falsity: $t = \neg t$, i.e., $t = 0$. Thus, *intensional disjunction* and *intentional conjunction* are the same: $A+B = \neg(\neg A + \neg B)$. Given that negation of a formula is defined the standard way via implication and canonical false, i.e. $\neg A = A \supset t$, one can see that the following rules are admissible (and derivable) given the rules for t and the rules for implication (so for simplicity we add it to our logical rules):

Theorem 1 (The rules for negation)**.**

$$\begin{array}{c}[\Pi \parallel \Sigma, \underline{\neg A}]^{\boldsymbol{O}} \\ | \\ [A, \Pi \parallel \Sigma]\end{array} \qquad\qquad \begin{array}{c}[\underline{\neg A}, \Pi \parallel \Sigma]^{\boldsymbol{P}} \\ | \\ [\Pi \parallel \Sigma, A]\end{array}$$

Proof. Given the definition of negation as follows $\neg A =_{def} A \supset t$, we derive the rules for $\neg A$ as follows:

$$\begin{array}{cl} [\Pi \parallel \Sigma, \underline{A \supset t}]^{\mathbf{O}} & (R\supset) \\ | & \\ [A, \Pi \parallel \Sigma, t]^{\mathbf{P}} & \\ | & \\ [A, \Pi \parallel \Sigma, \underline{t}]^{\mathbf{P}} & (Rt) \\ | & \\ [A, \Pi \parallel \Sigma] & \end{array} \qquad\qquad \begin{array}{cl} [\underline{A \supset t}, \Pi \parallel \Sigma]^{\mathbf{P}} & (L\supset) \\ | & \\ [t, \Pi \parallel \Sigma, A]^{\mathbf{O}} & \\ | & \\ [\underline{t}, \Pi \parallel \Sigma, A]^{\mathbf{O}} & (Lt) \\ | & \\ [\Pi \parallel \Sigma, A] & \end{array}$$

■

3.3. Winning Conditions and Strategies

Before we can define the winning conditions for players, it is necessary to make a few remarks on the playoff of the Giles's game for the Abelian logic. As we have stated before, in the original Giles's game we associate to each atomic variable a risk value $\langle r \rangle$ which can be related to the valuation of the formula in Ł as follows: $v(r) = 1 - \langle r \rangle$. As in the Abelian logic $\mathbf{A}$ propositional variables rage over the $\mathbb{R}$, we may directly interpret arbitrary real valued payoffs in a Giles-style game as truth values.

Definition 16. A playoff function $\langle \cdot \rangle$ is a function that assigns each propositional variable a number from the set of real numbers, i.e, $\langle \cdot \rangle = f \colon Prop \to \mathbb{R}$, where $Prop$ is a set of all propositional variables of $\mathcal{L}_A$.

Now we are ready to define the winning conditions (abbreviated as w.c.) for P and O in a run of a game with a given regulation ρ, and playoff function $\langle \cdot \rangle$.

Definition 17. The Proponent wins in a particular game if the atomic state satisfies the following conditions: $\sum_{i=0}^{m} p_i \leqslant \sum_{j=0}^{n} q_j$[5]. Otherwise, the Opponent wins.

However, to define satisfiability and validity via games, we need the concept of a winning strategy for a player in a game. Normally a strategy for a player is defined as a function from states to states that determines a unique choice for that player but includes all the possible actions of the other player (or players if there is more than two). A **strategy** is subtree of a game $\mathcal{G}([\Pi \parallel \Sigma], \rho, \langle \cdot \rangle)$ such that:

1. The root node is the *d-state* $[\Pi \parallel \Sigma]$;
2. All leaf nodes are elementary *d-states*;

[5]Note that the elementary state $[\Pi \parallel \Sigma]$ can be empty (or have $\Pi = \emptyset$ or $\Sigma = \emptyset$) in particular cases of games on the formulae containing t, e.g. $\mathbf{G}([t \parallel t], \rho)$ for some arbitrary ρ.

3. If for some node $[\Pi_i \parallel \Sigma_j]$ in the tree $\rho([\Pi_i \parallel \Sigma_j]) = P$, then $[\Pi_i \parallel \Sigma_j]$ has exactly one successor *i-state* which has only one successor *d-state* which is the choice of the Proponent with respect to the *logical rules*;

4. If for some node $[\Pi_i \parallel \Sigma_j]$ in the tree $\rho([\Pi_i \parallel \Sigma_j]) = O$, then $[\Pi_i \parallel \Sigma_j]$ has a set of all possible successor *i-states* representing the possible marking. These *i-states* has a set of successor *d-states* which represent all possible choices of the Opponent with respect to the *logical rules*;

Definition 18 (Winning Strategy)**.** A finite game tree T is a winning strategy τ for P with respect to a particular playoff function $\langle\cdot\rangle$ iff each leave (of the tree representing the strategy) ends with the elementary state $[p_a, p_2, \ldots, p_m \parallel q_1, q_2, \ldots, q_n]$ satisfying the condition (17): $\sum_{i=0}^{m} p_i \leqslant \sum_{j=0}^{n} q_j$ where $\sum_{j=0}^{n} q_j = \langle q_1, q_2, \ldots, q_n\rangle$ and $\sum_{i=0}^{m} p_i = \langle p_a, p_2, \ldots, p_m\rangle$[6].

We shall define the playoff $\langle\cdot \parallel \cdot\rangle$ of the run of a game $\mathcal{G}([\Pi \parallel \Gamma\rangle], \rho, \langle\cdot\rangle)$ that ends with the elementary state $\langle p_a, p_2, \ldots, p_m \parallel q_1, q_2, \ldots, q_n\rangle$ as follows:

$$\langle \Pi \parallel \Gamma\rangle = \sum_{j=0}^{n} q_j - \sum_{i=0}^{m} p_i$$

.

4. Adequacy of Giles's Games $\mathfrak{G}_A$ to the Abelain logic A

In this subsection we establish the relation between the existence of a winning strategy for the Proponent and validity. However, there are several preliminary steps that should be made before we come to the main theorem of the paper.

Auxiliary remarks

Fist of all, we need also to extend the semantics of **A** from formulae to multisets Γ of formulae as follows (henceforward $F \in \mathcal{L}_A$, i.e., is an arbitrary formula of the above defined language for **A**):

$$\upsilon(\Gamma) =_{def} \sum_{F\in\Gamma} \upsilon(F).$$

Secondly, we should establish the correspondence between the playoffs in the game and valuation in Abelian logic. Unlike Łukasiwicz logic, here the correspondence is direct, i.e., we use the following mapping:

$$\langle p\rangle^{\upsilon} = \upsilon(p).$$

[6]That means that each elementary state should be as follows with respect to risk assignment $\langle q_1, q_2, \ldots, q_n\rangle \geqslant \langle p_a, p_2, \ldots, p_m\rangle$.

The mapping $\langle p\rangle^{\upsilon} = \upsilon(p)$ which places playoff value assignments in one-to-one correspondence with truth value assignments can be extended to:

$$\langle p_a, p_2, \ldots, p_m \parallel q_1, q_2, \ldots, q_n\rangle^{\upsilon} = \upsilon([q_1, q_2, \ldots, q_n]) - \upsilon([p_a, p_2, \ldots, p_m]).$$

Correspondingly, we define the following function for arbitrary states:

$$\langle \Pi \parallel \Sigma\rangle^{\upsilon} = \upsilon(\Sigma) - \upsilon(\Pi).$$

Finally, note that

$$\upsilon(F) = \upsilon([F]) \geqslant 0 \text{ iff } \langle \parallel F\rangle^{\upsilon} \geqslant 0.$$

Thus, we prove the following theorem:

Theorem 2. *A formula F is valid in A iff there exists a winning strategy for Proponent in the game $\mathcal{G}([\parallel F], p, \langle\cdot\rangle)$ with any playoff assignment $\langle\cdot\rangle$ and with respect to an arbitrary consistent regulation ρ.*

Proof. To prove this theorem, we are going to use induction on the complexity of states. First, we observe that each game $\mathcal{G}$ is a finite tree ending up with elementary states. Thus, a winning strategy for P is a finite tree ending with elementary states satisfying the winning conditions for P, i.e. $\sum_{j=0}^{m} q_j \geqslant \sum_{i=0}^{n}$. Given the playoffs $\langle\cdot\rangle$ for propositional variables, we can construct an optimal strategy for P which would maximize the playoff of P (and the playoff of the game the way we defined it in the section 3) as follows:

1. For any choice of the Opponent at a state S, we take the minimal playoff (for P) of all successor states S' that follow from the state S;

2. For a state S where it is the Proponent's choice, we take the maximal possible playoff (for P) of possible successor states S' that follow the state S.

Now we have to show that the notion of the maximal playoff can be extended from the elementary states $[p_a, p_2, \ldots, p_m \parallel q_1, q_2, \ldots, q_n]$ to arbitrary states of the form $[\Pi_i \parallel \Sigma_j]$ such that the following conditions are satisfied:

$$\langle \Pi \parallel \Sigma, A \supset B\rangle = \langle A, \Pi \parallel \Sigma, B\rangle \tag{1}$$

$$\langle A \supset B, \Pi \parallel \Sigma\rangle = \langle A, \Pi \parallel \Sigma, B\rangle \tag{2}$$

$$\langle \Pi \parallel \Sigma, A \vee B\rangle = max(\langle \Pi \parallel \Sigma, A\rangle, \langle \Pi \parallel \Sigma, B\rangle) \tag{3}$$

$$\langle A \vee B, \Pi \parallel \Sigma \rangle = min(\langle A, \Pi \parallel \Sigma \rangle, \langle B, \Pi \parallel \Sigma \rangle) \tag{4}$$

$$\langle \Pi \parallel \Sigma, A \wedge B \rangle = min(\langle \Pi \parallel \Sigma, A \rangle, \langle \Pi \parallel \Sigma, B \rangle) \tag{5}$$

$$\langle A \wedge B, \Pi \parallel \Sigma \rangle = max(\langle A, \Pi \parallel \Sigma \rangle, \langle B, \Pi \parallel \Sigma \rangle) \tag{6}$$

$$\langle \Pi \parallel \Sigma, A + B \rangle = \langle \Pi \parallel \Sigma, A, B \rangle \tag{7}$$

$$\langle A + B, \Pi \parallel \Sigma \rangle = \langle A, B, \Pi \parallel \Sigma \rangle \tag{8}$$

$$\langle \Pi \parallel \Sigma, t \rangle = \langle \Pi \parallel \Sigma \rangle \tag{9}$$

$$\langle t, \Pi \parallel \Sigma \rangle = \langle \Pi \parallel \Sigma \rangle \tag{10}$$

$$\langle \Pi \parallel \Sigma, \neg A \rangle = \langle A, \Pi \parallel \Sigma \rangle \tag{11}$$

$$\langle \neg A, \Pi \parallel \Sigma \rangle = \langle A, \Pi \parallel \Sigma \rangle \tag{12}$$

Now we check that $\langle \Pi \parallel \Gamma \rangle$ is well-defined, i.e. the above conditions 1–12 together with the definition of the Proponent's playoff for elementary states can be simultaneously fulfilled. We have to show that $\langle \cdot \parallel \cdot \rangle$ indeed specifies $P's$ playoff with respect to his optimal game strategy. We proceed by induction on the complexity of the obtained states. The base cases are obvious. For the equation 1, we consider the following induction step:

(1): $\langle \Pi \parallel \Sigma\ , A \supset B \rangle =$
$v(\Sigma) - v(\Pi) + v(A \supset\ B) =$
$v(\Sigma) - v(\Pi) + v(B) - v(A) =$
$\langle \Pi \parallel \Sigma \rangle + v(B) - v(A) =$
$\boldsymbol{\langle A, \Pi \parallel \Sigma, B \rangle}$

(2): $\langle A \supset B, \Pi \parallel \Sigma \rangle =$
$v(\Sigma) - v(\Pi) - v(A \supset B) =$
$v(\Sigma) - v(\Pi) - v(B) + v(A) =$
$\langle \Pi \parallel \Sigma \rangle - v(B) + v(A) =$
$\boldsymbol{\langle B, \Pi \parallel \Sigma, A \rangle}$

It is straightforward to check other connectives, so we obtain the following corresponding induction steps:

(3): $\langle \Pi \parallel \Sigma, A \vee B \rangle =$
$\upsilon(\Sigma) - \upsilon(\Pi) + \upsilon(A \vee B) =$
$\upsilon(\Sigma) - \upsilon(\Pi) + max(\upsilon(A), \upsilon(B)) =$
$\langle \Pi \parallel \Sigma \rangle + max(\upsilon(A), \upsilon(B)) =$
$\boldsymbol{max(\langle \Pi \parallel \Sigma, A \rangle, \langle \Pi \parallel \Sigma, B \rangle)}$

(4): $\langle A \vee B, \Pi \parallel \Sigma \rangle =$
$\upsilon(\Sigma) - \upsilon(\Pi) - \upsilon(A \vee B) =$
$\upsilon(\Sigma) - \upsilon(\Pi) - max(\upsilon(A), \upsilon(B)) =$
$\langle \Pi \parallel \Sigma \rangle + min(-\upsilon(A), -\upsilon(B)) =$
$min(\langle \Pi \parallel \Sigma \rangle - \upsilon(A), \langle \Pi \parallel \Sigma \rangle - \upsilon(B)) =$
$\boldsymbol{min(\langle A, \Pi \parallel \Sigma \rangle, \langle B, \Pi \parallel \Sigma \rangle)}$

(5): $\langle \Pi \parallel \Sigma, A \wedge B \rangle =$
$\upsilon(\Sigma) - \upsilon(\Pi) + \upsilon(A \wedge B) =$
$\upsilon(\Sigma) - \upsilon(\Pi) + min(\upsilon(A), \upsilon(B)) =$
$\langle \Pi \parallel \Sigma \rangle + min(\upsilon(A), \upsilon(B)) =$
$min(\langle \Pi \parallel \Sigma \rangle + \upsilon(A), \langle \Pi \parallel \Sigma \rangle + \upsilon(B)) =$
$\boldsymbol{min(\langle \Pi \parallel \Sigma, A \rangle, \langle \Pi \parallel \Sigma, B \rangle)}$

(6): $\langle A \wedge B, \Pi \parallel \Sigma \rangle =$
$\upsilon(\Sigma) - \upsilon(\Pi) - \upsilon(A \wedge B) =$
$\upsilon(\Sigma) - \upsilon(\Pi) - min(\upsilon(A), \upsilon(B)) =$
$\langle \Pi \parallel \Sigma \rangle + max(-\upsilon(A), -\upsilon(B)) =$
$\boldsymbol{max(\langle A, \Pi \parallel \Sigma \rangle, \langle B, \Pi \parallel \Sigma \rangle)}$

(7): $\langle \Pi \parallel \Sigma, A + B \rangle =$
$\upsilon(\Sigma) - \upsilon(\Pi) + \upsilon(A + B) =$
$\upsilon(\Sigma) - \upsilon(\Pi) + \upsilon(A) + \upsilon(B) =$
$\langle \Pi \parallel \Sigma \rangle + \upsilon(A) + \upsilon(B) =$
$\boldsymbol{\langle \Pi \parallel \Sigma, A, B \rangle}$

(8): $\langle A + B, \Pi \parallel \Sigma \rangle =$
$\upsilon(\Sigma) - \upsilon(\Pi) - \upsilon(A + B) =$
$\upsilon(\Sigma) - \upsilon(\Pi) - \upsilon(A) - \upsilon(B) =$
$\langle \Pi \parallel \Sigma \rangle - \upsilon(A) - \upsilon(B) =$
$\boldsymbol{\langle A, B, \Pi \parallel \Sigma \rangle}$

(9): $\langle \Pi \parallel \Sigma, t \rangle =$
$\upsilon(\Sigma) - \upsilon(\Pi) + \upsilon(t) =$
$\upsilon(\Sigma) - \upsilon(\Pi) + 0 =$
$\langle \Pi \parallel \Sigma \rangle + 0 = \boldsymbol{\langle \Pi \parallel \Sigma \rangle}$

(10): $\langle t, \Pi \parallel \Sigma \rangle =$
$\upsilon(\Sigma) - \upsilon(\Pi) - \upsilon(t) =$
$\upsilon(\Sigma) - \upsilon(\Pi) - 0 =$
$\langle \Pi \parallel \Sigma \rangle - 0 = \boldsymbol{\langle \Pi \parallel \Sigma \rangle}$

And finally the supplementary case for negation:

(11): $\langle \Pi \parallel \Sigma, \neg A \rangle =$
$\upsilon(\Sigma) - \upsilon(\Pi) + \upsilon(\neg A) =$
$\langle \Pi \parallel \Sigma \rangle - \upsilon(A) = \boldsymbol{\langle A, \Pi \parallel \Sigma \rangle}$

(12): $\langle \neg A, \Pi \parallel \Sigma \rangle =$
$\upsilon(\Sigma) - \upsilon(\Pi) - \upsilon(\neg A) =$
$\langle \Pi \parallel \Sigma \rangle + \upsilon(A) = \boldsymbol{\langle \Pi \parallel \Sigma, A \rangle}$

Given the correctness of the statements 1–12, we prove that our formula $F \geqslant 0$ given a certain valuation υ iff P has a winning strategy in a game over F (formally $\mathcal{G}([\Pi \parallel \Gamma, F], \rho, \langle \cdot \rangle)$, where $\Pi = \Gamma = \emptyset$, i.t. $\mathcal{G}([\parallel F], \rho, \langle \cdot \rangle))$ with the playoff function $\langle \cdot \rangle = \upsilon$ and arbitrary regulation ρ.
$\Rightarrow$-direction: Assume that $F \geqslant 0$. We proceed by induction on the length of the winning strategy in a game over F. Assume that F is a game of n moves, and P has a winning strategy in a game of $n-1$ moves:

1. $F = p$ (is atomic). Then we automatically have that $p \geqslant 0$, thus P wins in the first move, so she has a winning strategy;

2. $F = A \supset B$. Then, the next state has the following form: $[A \parallel B]$. By induction hypothesis P has a winning strategy for the state $[A \parallel B]$, thus $B \geqslant A$. By according to the statement 1, $\langle \Pi \parallel \Sigma, A \supset B\rangle = \langle A, \Pi \parallel \Sigma, B\rangle$, thus P still has the strategy for the state $A \supset B$;

3. $F = A \vee B$. Then, the next state has the following one of the following forms: either $[\parallel A]$ or $[\parallel B]$. According to the statement 3, P has a strategy to keep the maximal of the disjunction as it is her choice whether to select A or B. By *IH* (here a later, *IH* refers to the *Induction Hypothesis*), P has a w.s. (= winning strategy) for either $[\parallel A]$ or $[\parallel B]$, so she has a w.s. for F;

4. $F = A \wedge B$. Then according to the *logical rules*, the next step will be either $[\parallel A]$ or $[\parallel B]$. As it is the choice of O and her aim is to minimise the overall playoff for P, we should assume that O choses the minimal conjunct. We have proved that $\langle \Pi \parallel \Sigma, A \wedge B\rangle = min(\langle \Pi \parallel \Sigma, A\rangle, \langle \Pi \parallel \Sigma, B\rangle)$. By our *IH* P has a *w.s.* for the game $n-1$ with the initial state being the minimal (w.r.t. to the P's playoff) of the 2 possible states, namely $[\parallel A]$ or $[\parallel B]$;

5. $F = A + B$. Then, the next state is $[\parallel A, B]$. As we have proved that $\langle \Pi \parallel \Sigma, A + B\rangle = \langle \Pi \parallel \Sigma, A, B\rangle$ (statement 7). By *IH*, P has a *w.s.* in the game of $n-1$ with the initial state being $[\parallel A, B]$, so P has a *w.s.* for the game of n;

6. $F = t$. This case is trivial as $t = 0$;

7. $F = \neg A$ is just a case of implication: $F = A \supset t$.

⇒-direction: Assume that P has a *w.s.* in a game over F. We proceed by induction on the structure of F:

1. $F = p$ (i.e. it is atomic). Then P has a *w.s.* iff $\langle \parallel p\rangle \geqslant 0$. Thus, $\upsilon(p) \geqslant 0$;

2. $F = t$. This case is analogous to n.1;

3. $F = A \supset B$. P has a *w.s.* in a game over $A \supset B$, i.e. $\langle \parallel A \supset B\rangle \geqslant 0$. By proposition 1, $\langle \parallel A \supset B\rangle = \langle A \parallel B\rangle$. By *IH*, as P has a *w.s.* for $[A \parallel B]$, then $\upsilon(B) - \upsilon(A) \geqslant 0$. By definition $\upsilon(B) - \upsilon(A) = \upsilon(A \supset B)$. Thus, $\upsilon(A \supset B) \geqslant 0$;

4. $F = A \vee B$. P has A *w.s.* in a game over $A \vee B$, i.e. $\langle \parallel A \vee B\rangle \geqslant 0$. By proposition 3, $\langle \parallel A \vee B\rangle = max(\langle \Pi \parallel \Sigma, A\rangle, \langle \Pi \parallel \Sigma, B\rangle)$ as it is P who choses a disjunct (thus it is *maximum*) and P has a *w.s.* in one of the

games: either $[\| A]$ or $[\| B]$. Thus, either $\langle \| A\rangle \geqslant 0$ or $\langle \| B\rangle \geqslant 0$. By *IH*, either $v(A) \geqslant 0$ or $v(B) \geqslant 0$. By definition of the valuation function in our semantics, we have $v(A \vee B) = max(v(A), v(B))$, hence $v(A \vee B) \geqslant 0$;

5. $F = A \wedge B$. P has A *w.s.* in a game over $A \wedge B$, i.e. $\langle \| A \wedge B\rangle \geqslant 0$. By proposition 5, $\langle \| A \wedge B\rangle = min(\langle \Pi \| \Sigma, A\rangle, \langle \Pi \| \Sigma, B\rangle)$ as it is O who choses a conjunct (thus it is *minimum*), and P has a *w.s.* in both of the games: $[\| A]$ and $[\| B]$. Thus, both $\langle \| A\rangle \geqslant 0$ and $\langle \| B\rangle \geqslant 0$. By *IH*, both $v(A) \geqslant 0$ and $v(B) \geqslant 0$. By definition of the valuation function in our semantics, we have $v(A \wedge B) = min(v(A), v(B))$, hence $v(A \wedge B) \geqslant 0$;

6. $A + B$. P has A *w.s.* in a game over $A + B$, i.e. $\langle \| A + B\rangle \geqslant 0$. By proposition 7, $\langle \| A + B\rangle = \langle \Pi \| \Sigma, A, B\rangle$ (there is no choice of conjuncts), and P has a *w.s.* in in a game over $[\| A, B]$. Thus, $\langle \| A, B\rangle \geqslant 0$. By *IH*, $v(A, B) \geqslant 0$. By the definition of valuation for multisets[7], we get $v(A, B) = v(A) + v(B)$. But by def. of valuation function in our semantics, we have $v(A + B) = v(A) + v(B)$, hence $v(A + B) \geqslant 0$;

7. $F = \neg A$ is just a case of implication: $F = A \supset t$.

If $v(F) \geqslant 0$, then there is wining strategy for the Proponent for $\mathbf{G}([\| F], \rho)$ with some playoff assignment $\langle\cdot\rangle$ for any consistent regulation ρ[8]. As a formula F is valid iff for any valuation v holds $v(F) \geqslant 0$, $F \geqslant 0$ for every playoff function $\langle\cdot\rangle$. ■

As a future path of research, we would like to extend the game for Abelian logic with *disjunctive strategies* to get a unified strategy for family of games corresponding to one particular formula in question. By a *disjunctive strategy* we understand the one that allow players to *duplicate* states, so that there are 2 kinds of non-leaf nodes:

- playing nodes;
- duplicating nodes.

Let us use $D = S_1 \vee S_2 \vee \ldots \vee S_n$ to denote a *state disjunction* which can be viewed as a multiset of states because there might be several instances of the same state but the order of the states $(S_1, S_2, \ldots, S_n)$ is not relevant. We assume the definition of a disjunctive strategy to be the same as in [Fermüller, 2009], namely:

[7] Cf. 4.
[8] Since 1–12 do not depend on the order in which they are decomposed.

Definition 19. "A disjunctive strategy for D respecting a regulation ρ is a tree of state disjunctions with root D where the successor nodes are in principle determined in the same way as for ordinary strategies".

Definition 20. A disjunctive strategy is wining for a player X iff at every leaf node there is at least one component (an elementary *d-state*) S_i of a state disjunction $S_1 \vee S_2 \vee \ldots \vee S_n$ that is winning for the player X.

It is important that for a collection of games on the same formula there exists a disjunctive winning strategy for a player X iff there is an ordinary strategy for every game in that collection.

5. Conclusion

In the present paper we have proposed a new game interpretation of the Abelian logic **A**. This game is based on the Giles's game explaining how reasoning about experiments in physics proceeds. There is a well studied version of the game for the class of Łukasiewicz many-valued logics, including the infinitely-valued logic Ł. We have constructed a game for Abelian logic in section 3 and provided two possible interpretations of the game in 1. The first interpretation suggests that players reason about the resources/costs and budgeting. As the value might be negative, it is natural to think of these assets as *securities* (i.e., tradable financial assets). This is indeed related to the one of the standard interpretations of **A**. The second interpretation suggests that the moves that are allowed to agents, represent their cognitive presumptions and the type of their rationality. Both interpretations are subject to our future study in more detail.

The main technical result of the paper is the proof of adequacy of the game to the Abelian logic that is shortly described in a separate section. We have provided a full proof in the section 4. This gives rise to the future work related to the game that we have proposed.

Future work

The future work is related to constructing *disjunctive strategies* for game for Abelian logic and proving the correspondence between hypersequent calculus **GA** and the game $\mathcal{G}_A$, where a derivation in the calculus decodes a winning strategy for Proponent in the game with disjunctive strategies. Furthermore, in the future research our aim will be to analyse the game interpretation of fuzzy logic from the point of view of epistemic and other agents' presumptions taking into account the truth-functional interpretation of epistemic states. We shall also look into possibility of interpreting modal operators in the Giles's game and more generally dialogue game framework to attempt to modal epistemic modalities for non-classical logics and information change in this particular game framework.

Acknowledgements. The reported study was funded by RFBR according to the research project № 18-311-00363. The name of the project: *"Truth, cognitive agents and information update in non-classical logics"*.

References

Casari, 1989 – Casari, E. "Comparative logics and abelian ℓ-groups", *Logic Colloquium 88*. Elsevier, 1989, pp. 161–190.

Fermüller, 2009 – Fermüller, C.G. "Giles's Game and the Proof Theory of Łukasiewicz Logic", *Studia Logica*, 2009, Vol. 92, pp. 27–61.

Girard, 1987 – Girard, J.Y. "Linear logic", in: *Theoretical Computer Science*, 50, 1987, pp. 1–102.

Hintikka, 1996 – Hintikka, J. *The Principles of Mathematics Revisited*, Cambridge: Cambridge University Press, 1996.

Krabbe, 2006 – Krabbe, E.C.W. "Dialogue Logic", in: *Handbook of the History of Logic*, vol. 7, eds. D.M. Gabbay and J. Woods, New York: Elsevier, 2006, pp. 665–704.

Kubyshkina et al., 2016 – Kubyshkina, E., Zaitsev, D.V. "Rational Agency From a Truth-Functional Perspective", in: *Logic and Logical Philosophy*, 2016, Vol. 25, No. 4, pp. 499–520.

Lorenzen et al., 1978 – Lorenzen, P., Lorenz, K. *Dialogische Logik*, Darmstadt: Wissenschaftlische Buchgesellschaft, 1978.

Metcalfe et al., 2005 – Metcalfe, G., Olivetti, N., Gabbay, D. "Sequent and Hypersequent Calculi for Abelian and Łukasiewicz Logics", *ACM Transactions on Computational Logic (TOCL)*, 2005, Vol. 6, pp. 578–613.

Meyer et al., 1989 – Meyer, R.K., Slaney, J.K. "Abelian Logic from A to Z", in: *Paraconsistent Logic: Essays on the Inconsistent, Philosophia Verlag*, ed. G. Priest et al., 1989, pp. 245–288.

Paoli, 2001 – Paoli, F. "Logic and groups", in: *Logic and Logical Philosophy*, 2001, No. 9, pp. 109–128.

Pavlova, 2017 – Pavlova, A.M. "What Hamblin's Formal Dialectic Tells About the Medieval Logical Disputation", in: *Logical Investigations*, 2017, Vol. 23, No. 1, pp. 151–176.

Логические исследования
2019. Т. 25. № 2. С. 94–113
УДК 510.64

Logical Investigations
2019, Vol. 25, No. 2, pp. 94–113
DOI: 10.21146/2074-1472-2019-25-2-94-113

Философия и логика
Philosophy and logic

А.В. Конькова

Воображаемая логика-2 Н.А. Васильева как силлогистическая теория

Антонина Викторовна Конькова
МГУ им. М.В. Ломоносова.
Российская Федерация, 119991, г. Москва, Ломоносовский пр-т, д. 27, корп. 4.
Институт философии РАН.
Российская Федерация, 109240, г. Москва, ул. Гончарная, д. 12, стр. 1.
E-mail: konkova@philos.msu.ru

Аннотация: Воображаемая (неаристотелева) логика Н.А. Васильева, одного из основоположников современной неклассической логики, является его самой известной логической системой. Дедуктивная система, предложенная им, представляет собой силлогистику особого типа, в языке которой вместе с формами утвердительных и отрицательных суждений содержатся формы противоречивых (индифферентных) суждений. Последние представляют собой суждения нового качества и содержат связку «есть и не есть одновременно». Статья посвящена изложению результатов исследования одного из вариантов Воображаемой логики Николая Александровича Васильева. Этот вариант Воображаемой логики отличается не только от традиционной силлогистики, но и от основной версии. Здесь с каждым термином категорического суждения связывается не множество индивидов, а совокупность признаков, а силлогистические константы рассматриваются как обозначающие интенсиональные отношения между понятиями. Исследование предполагало рассмотрение этого варианта Воображаемой логики как силлогистической теории и производилось на базе системы, построенной для данной логики В.И. Маркиным и Д.В. Зайцевым. В статье кратко изложена система Воображаемой логики-2, доказаны: законы тождества, законы противоположностей, законы подчинения, законы обращения и законы исключенного четвертого, принимаемые в этой логике. Далее последовательно рассмотрены все четыре фигуры силлогизмов. В каждой фигуре рассмотрены все возможные комбинации посылок (36 комбинаций, для каждой фигуры) со всеми возможными заключениями (шесть возможных заключений, для каждой комбинации посылок). Произведено доказательство правильных силлогизмов каждой фигуры, а также приведены примеры возможных контрмоделей для опровержения всех неправильных модусов. Результатом работы является выделение законов данной силлогистической теории, а также намечено дальнейшее направление исследования, ставится вопрос о возможности формулирования общих правил силлогизма данного варианта Воображаемой логики.

Ключевые слова: Воображаемая логика, логика Н.А. Васильева, неклассическая логика, многозначная логика

Для цитирования: *Конькова А.В.* Воображаемая логика-2 Н.А. Васильева как силлогистическая теория // Логические исследования / Logical Investigations. 2019. Т. 25. № 2. С. 94–113. DOI: 10.21146/2074-1472-2019-25-2-94-113

Введение

В своих трудах [Васильев, 1989] после изложения основного варианта Воображаемой логики, реконструкция идей которой была произведена В.И. Маркиным и Т.П. Костюк [Костюк, Маркин, 1998], [Markin, 2013], ставит вопрос о возможности и других, альтернативных вариантов его логики. Одним из таких вариантов является Воображаемая логика-2 или логика «понятий», где с субъектами и предикатами атрибутивных высказываний можно связывать не множества объектов, а совокупности признаков, т.е. содержания понятий. В данной интерпретации, как и в основном варианте Воображаемой логики используются суждения трех качеств: утвердительные, с абсолютным отрицанием (отрицательные) и с обычным отрицанием (индифферентные). Сам Васильев интерпретирует следующим образом:

(1) «Все S есть P» — все признаки, составляющие предикат, утверждаются и в субъекте.

(2) «Все S не есть P» — все признаки, составляющие предикат, отрицаются в субъекте.

(3) «Все S есть и не есть P» — некоторые признаки, составляющие предикат, утверждаются в субъекте, а некоторые отрицаются.

Важным моментом является то, что Васильев при изложении наброска этого варианта Воображаемой логики пишет только об интерпретации общих суждений [Васильев, 1989], но ничего не говорит о частных. При этом в основном варианте логики он сам же использует частные суждения, так как без них невозможно построить развернутую силлогистику. Поэтому В.И. Маркин и Д.В. Зайцев [Зайцев, Маркин, 1999] при формулировке точной формальной семантики, эксплицирующей указанную трактовку атрибутивных суждений в альтернативном варианте Воображаемой логики и при построении ими исчисления $\boldsymbol{IL2}$, предлагают ввести в язык не только общие, но и неопределенно-частные суждения. Все это позволяет в языке Воображаемой логики построить логическую теорию с иными законами, которые не имели место ни в Традиционной силлогистике, ни в основном варианте Воображаемой логики.

1. Семантика *IL*2

В.И. Маркиным и Д.В. Зайцевым [Зайцев, Маркин, 1999], [Зайцев, 1998] предложена следующая семантика для ***IL*2**:

Определение 1. $\boldsymbol{L}$ — множество *литералов* (положительных и отрицательных признаков): $\{p_1, \sim p_1, p_2, \sim p_2, p_3, \sim p_3, ...\}$.

Определение 2. *Понятие* есть подмножество α множества $\boldsymbol{L}$, которое удовлетворяет условиям: $\alpha \neq \varnothing$; не существует p_i такого, что $p_i \in \alpha$ и $\sim p_i \in \alpha$.

Определение 3. $\boldsymbol{M}$ — множество всех понятий. На множестве $\boldsymbol{M}$ определена функция *, сопоставляющая каждому понятию α противоположное понятие α^*: $p_i \in \alpha^* \iff \sim p_i \in \alpha$; и $\sim p_i \in \alpha^* \iff p_i \in \alpha$.
Функция * удовлетворяет следующим условиям:
$\alpha \cap \alpha^* = \varnothing; \alpha^{**} = \alpha; \alpha \subseteq \beta \Rightarrow \alpha^* \subseteq \beta^*$.

Определение 4. *Интерпретирующая функция* d — функция приписывания значений терминам: $d(P) \in M$, т.е. она сопоставляет каждому термину некоторое понятие. Оценка формул $\|^d$ связана с d.

Определение 5. Для обозначения общих суждений будем использовать букву A, для обозначения частных — букву I, утвердительные суждения обозначаются с использованием нижнего индекса 1, отрицательные — индекса 2, индифферентные — индекса 3.

Как уже отмечено, в данном варианте Воображаемой логики предложена интерпретация для общих табл. 1 и частных табл. 2 суждений.

Таблица 1

Интерпретация общих высказываний в *IL*2

$$| A_1SP |^d = 1 \iff d(P) \subseteq d(S)$$
$$| A_2SP |^d = 1 \iff d(P)^* \subseteq d(S)$$
$$| A_3SP |^d = 1 \iff d(P) \cap d(S) \neq \varnothing \text{ и } d(P)^* \cap d(S) \neq \varnothing;$$

Таблица 2

Интерпретация неопределенно-частных высказываний в *IL*2

$$| I_1SP |^d = 1 \iff d(P)^* \cap d(S) = \varnothing$$
$$| I_2SP |^d = 1 \iff d(P) \cap d(S) = \varnothing$$
$$| I_3SP |^d = 1 \iff d(P) \backslash d(S) \neq \varnothing \text{ и } d(P)^* \backslash d(S) \neq \varnothing;$$

Для сложных формул условия истинности стандартные. Формула общезначима, если она истинна (принимает значение «1») при любой интерпретации d.

2. Аксиоматизация *IL*2

Аксиоматизация исчисления табл. 3 представлена в духе Я. Лукасевича, на основе классического пропозиционального исчисления.

Таблица 3

Аксиоматизация *IL*2

A0. Схемы аксиом Классического исчисления высказываний.

A1.	$(A_1MP\&A_1SM) \supset A_1SP$	A10.	$\neg(A_1SP\&I_2SP)$
A2.	$(A_1MP\&A_2SM) \supset A_2SP$	A11.	$\neg(A_2SP\&I_1SP)$
A3.	$(A_2MP\&A_1SM) \supset A_2SP$	A12.	$I_1SP \supset I_1PS$
A4.	$(A_2MP\&A_2SM) \supset A_1SP$	A13.	$I_2SP \supset I_2PS$
A5.	$(A_1MP\&I_1SM) \supset I_1SP$	A14.	$A_1SP \supset I_1SP$
A6.	$(A_1MP\&I_2SM) \supset I_2SP$	A15.	$A_2SP \supset I_2SP$
A7.	$(A_2MP\&I_1SM) \supset I_2SP$	A16.	$A_3SP \equiv \neg I_1SP\&\neg I_2SP$
A8.	$(A_2MP\&I_2SM) \supset I_1SP$	A17.	$I_3SP \equiv \neg A_1SP\&\neg A_2SP$
A9.	A_1SS		

Единственное правило вывода — *modus ponens*.

Полнота и непротиворечивость системы доказана В.И. Маркиным и Д.В. Зайцевым [Зайцев, Маркин, 1999].

3. Законы *IL*2

«При построении силлогистической теории как дедуктивной системы обычно выделяют следующие наиболее фундаментальные законы и принципы: законы тождества (или их ослабления), законы, основанные на логических отношениях между суждениями с одинаковыми субъектами и одинаковыми предикатами, принципы обращения суждений, правильные модусы четырех фигур простого категорического силлогизма» [Парфенова, 2019].

Следуя этой схеме, были выделены и доказаны следующие законы в ***IL*2**:

1. Законы тождества.
   A_1SS и I_1SS. Закон тождества для общих высказываний постулируется аксиомой (A9), для частных же легко выводится из (A9) и (A14).

2. Законы подчинения.

   Законы подчинения для утвердительных и отрицательных высказываний $A_1SP \supset I_1SP$; $A_2SP \supset I_2SP$ являются аксиомами (A14) и (A15). Закон подчинения для индифферентных высказываний $A_3SP \supset I_3SP$ был доказан нами, приведем доказательство.

   Доказательство.

1.	$A_3SP \equiv \neg I_1SP \& \neg I_2SP$	(A16)
2.	$I_1SP \supset \neg A_3SP$	(1; ЛВ)
3.	$I_2SP \supset \neg A_3SP$	(1; ЛВ)
4.	$A_1SP \supset I_1SP$	(A14)
5.	$A_2SP \supset I_2SP$	(A15)
6.	$I_3SP \equiv \neg A_1SP \& \neg A_2SP$	(A17)
7.	$A_3SP \supset \neg A_1SP$	(2,4; ЛВ)
8.	$A_3SP \supset \neg A_2SP$	(3,5; ЛВ)
9.	$A_3SP \supset I_3SP$	(6,7,8; ЛВ)

   ■

3. Законы противоположностей.

   Законы противоположностей легко доказываются с помощью аксиом (A10), (A11), (A14), (A16) и (A17). Так, в ***IL2*** доказуемы следующие законы противоположностей: $A_1SP \supset \neg I_2SP$; $A_1SP \supset \neg I_3SP$; $A_2SP \supset \neg I_1SP$; $A_2SP \supset \neg I_3SP$; $A_3SP \supset \neg I_1SP$; $A_3SP \supset \neg I_2SP$. Кроме того, законы противоположностей имеют место и для общих высказываний разных качеств: $A_1SP \supset \neg A_2SP$; $A_1SP \supset \neg A_3SP$ и $A_2SP \supset \neg A_3SP$. Приведем здесь наши доказательства этих законов:

   Доказательство.

1.	$\neg(A_1SP \& I_2SP)$	(A10)
2.	$A_2SP \supset I_2SP$	(A15)
3.	$\neg(A_1SP \& A_2SP)$	(1,2; ЛВ)
4.	$A_1SP \supset \neg A_2SP$	(3)

   ■

   Доказательство.

1.	$A_1SP \supset I_1SP$	(A14)
2.	$A_3SP \equiv \neg I_1SP \& \neg I_2SP$	(A16)
3.	$A_1SP \supset \neg A_3SP$	(1,2; ЛВ)

   ■

Доказательство для $A_2SP \supset \neg A_3SP$ аналогично доказательству $A_1SP \supset \neg A_3SP$.

4. Законы исключенного четвертого.

   В данном варианте реконструкции Воображаемой логики-2 принимается закон исключенного четвертого в следующем виде: $A_1SP \vee A_2SP \vee I_3SP$. Он вытекает непосредственно из аксиомы (A17). В данном законе все три члена дизъюнкции попарно несовместимы.

   Из аксиомы (A16) непосредственно выводится другой похожий по форме закон: $I_1SP \vee I_2SP \vee A_3SP$. Но здесь первые два дизъюнкта совместимы по истинности.

   Посредством законов подчинения из этих теорем выводятся более слабые утверждения: $A_1SP \vee I_2SP \vee I_3SP$, $I_1SP \vee A_2SP \vee I_3SP$ и $I_1SP \vee I_2SP \vee I_3SP$. В них тоже имеются пары совместимых по истинности дизъюнктов.

5. Законы обращения.

   Принимается обращение утвердительных и абсолютно отрицательных неопределенно-частных высказываний $I_1SP \supset I_1PS$ и $I_2SP \supset I_2PS$, они являются аксиомами (A12) и (A13) соответственно. Принимаются обращения с ограничением для утвердительных общих высказываний $A_1SP \supset I_1PS$ и абсолютно отрицательных общих высказываний $A_2SP \supset I_2PS$.

Доказательство.

$$\underline{A_1SP \supset I_1PS}$$

1. $A_1SP \supset I_1SP$ (A14)
2. $I_1SP \supset I_1PS$ (A11)
3. $A_1SP \supset I_1PS$ (1,2; ЛВ)

■

Доказательство для абсолютно отрицательных общих высказываний $A_2SP \supset I_2PS$ проводится аналогично с помощью аксиом (A15) и (A13). В данном варианте силлогистики принимается чистое обращение индифферентных общих высказываний $A_3SP \supset A_3PS$.

Доказательство.

$$\underline{A_3SP \supset A_3PS}$$

1.	$A_3SP \equiv \neg I_1SP \& \neg I_2SP$	(A16)
2.	$I_1PS \supset I_1SP$	(A12)
3.	$I_2PS \supset I_2SP$	(A13)
4.	$A_3PS \equiv \neg I_1PS \& \neg I_2PS$	(1,2,3; ЛВ)
5.	$A_3SP \supset A_3PS$	(1,2,3,4; ЛВ)

■

Что касается частных индифферентных суждений, то здесь они не обращаются.

4. Силлогизмы *IL2*

В системе ***IL2*** были рассмотрены все возможные 864 модуса силлогизмов для всех четырех фигур [Парфенова, 2019]. Сам Н.А. Васильев [Васильев, 1989, с. 72–76] следовал Аристотелю и выделял только три фигуры, но для построения полной силлогистической системы [Бочаров, Маркин, 2010, с. 13–61] необходимо рассматривать все четыре фигуры, поэтому *IV фигура* также была рассмотрена. В каждой фигуре было рассмотрено 36 возможных комбинаций посылок с шестью возможными заключениями для каждой комбинации посылок. В ходе проверки были выявлены и доказаны правильные модусы для каждой фигуры и приведены контрмодели для всех остальных модусов.

I Фигура

При рассмотрении первой фигуры были выявлены и доказаны следующие правильные силлогизмы: данные силлогизмы являются аксиомами (A1), (A2), (A3) и (A4) рассматриваемого исчисления: $(A_1MP \& A_1SM) \supset A_1SP$; $(A_1MP \& A_2SM) \supset A_2SP$; $(A_2MP \& A_1SM) \supset A_2SP$; $(A_2MP \& A_2SM) \supset A_1SP$. Интересным среди них является модус с двумя отрицательными посылками, который в данном варианте логики дает утвердительное заключение.

Кроме этих четырех модусов аксиомами исчисления являются и модусы с меньшей частной посылкой таких же качеств (A5), (A6), (A7) и (A8) соответственно. Кроме того, они являются правильными в силу законов подчинения для высказываний.

Также к ним добавляются еще четыре слабых правильных модуса с частным заключением. Интересно, что в данном исчислении правильными оказываются модусы с индифферентными посылками. Два из них

Н.А. Васильев [Васильев, 1989, с. 74] выделяет сам и дает им название Mindalin $(A_3MP\&A_1SM) \supset A_3SP$ и Kindirinp $(A_3MP\&I_1SM) \supset I_3SP$, в них большая посылка общеиндифферентная, а меньшая посылка обще- и частно- утвердительная.

Привлекают внимание силлогизмы с большей посылкой индифферентной, а меньшей — отрицательной
$(A_3MP\&A_2SM) \supset A_3SP$ и $(A_3MP\&I_2SM) \supset I_3SP$.

Таким образом, в данном варианте Воображаемой логики оказываются правильными некоторые модусы с обеими отрицательными посылками (сильным и слабым отрицанием).
Представим доказательство:

Доказательство.

1.	$(A_1SM\&I_1PS) \supset I_1PM$	(A5)
2.	$(A_1SM\&I_2PS) \supset I_2PM$	(A6)
3.	$I_1PM \supset I_1MP$	(A12)
4.	$I_1SP \supset I_1PS$	(A12)
5.	$(I_1SP\&A_1SM) \supset I_1MP$	(1,3,4; ЛВ)
6.	$I_2SP \supset I_2PS$	(A13)
7.	$I_2PM \supset I_2MP$	(A13)
8.	$(I_2SP\&A_1SM) \supset I_2MP$	(2,6,7; ЛВ)
9.	$(\neg I_1MP\&A_1SM) \supset \neg I_1SP$	(5; ЛВ)
10.	$(\neg I_2MP\&A_1SM) \supset \neg I_2SP$	(8; ЛВ)
11.	$(\neg I_1MP\&\neg I_2MP\&A_1SM) \supset (\neg I_1SP\&\neg I_2SP)$	(9,10; ЛВ)
12.	$A_3SP \equiv (\neg I_1SP\&\neg I_2SP)$	(A16)
13.	$A_3MP \equiv (\neg I_1MP\&\neg I_2MP)$	(A16)
14.	$(A_3MP\&A_1SM) \supset A_3SP$	(11,12,13; ЛВ)

■

Доказательство.

1.	$(A_1SP\&I_2MS) \supset I_2MP$	(A6)
2.	$I_2SM \supset I_2MS$	(A13)
3.	$(A_1SP\&I_2SM) \supset I_2MP$	(1,2; ЛВ)
4.	$(\neg I_2MP\&I_2SM) \supset \neg A_1SP$	(3; ЛВ)
5.	$(A_2SP\&I_2MS) \supset I_1MP$	(A8)
6.	$(A_2SP\&I_2SM) \supset I_1MP$	(5,2; ЛВ)
7.	$(\neg I_1MP\&I_2SM) \supset \neg A_2SP$	(6; ЛВ)
8.	$(\neg I_1MP\&\neg I_2MP\&I_2SM) \supset (\neg A_1SP\&\neg A_2SP)$	(4,7; ЛВ)
9.	$A_3MP \equiv (\neg I_1MP\&\neg I_2MP)$	(A16)
10.	$I_3SP \equiv (\neg A_1SP\&\neg A_2SP)$	(17)
11.	$(A_3MP\&I_2SM) \supset I_3SP$	(8,9,10; ЛВ)

■

Доказательство для $(A_3MP\&I_1SM) \supset I_3SP$ и $(A_3MP\&A_2SM) \supset A_3SP$ проводится аналогичным образом, с помощью замены аксиом. Также к этим модусам добавляется еще два слабых с частным заключением.

Как мы уже отмечали выше, для всех возможных модусов, которые оказываются неправильными в данном варианте Воображаемой логики, нами подобраны контрмодели. Для комбинаций посылок $A_1MP\&A_3SM$ и $A_1MP\&I_3SM$; $A_2MP\&A_3SM$ и $A_2MP\&I_3SM$; $A_3MP\&A_3SM$ и $A_3MP\&I_3SM$ попарно можно подобрать общие контрмодели, в которых обе посылки истинны, а заключения I_nSP и A_nSP ложны.

Контрмодели для $A_1MP\&A_3SM$ и $A_1MP\&I_3SM$. Приведем сначала контрмодели, где посылки истинны, но ложны заключения I_1SP и I_2SP табл. 4, а затем контрмодель, где ложно заключение I_3SP табл. 5.

Таблица 4

		для I_1SP и I_2SP
$d(P)$	$=$	$\{p_1, p_2\}$
$d(P)^*$	$=$	$\{\sim p_1, \sim p_2\}$
$d(M)$	$=$	$\{p_1, p_2, p_3\}$
$d(M)^*$	$=$	$\{\sim p_1, \sim p_2, \sim p_3\}$
$d(S)$	$=$	$\{p_1, \sim p_2\}$

Таблица 5

		для I_3SP
$d(P)$	$=$	$\{p_1, p_2\}$
$d(P)^*$	$=$	$\{\sim p_1, \sim p_2\}$
$d(M)$	$=$	$\{p_1, p_2, p_3\}$
$d(M)^*$	$=$	$\{\sim p_1, \sim p_2, \sim p_3\}$
$d(S)$	$=$	$\{p_1, p_2, \sim p_3\}$

Выполняем условия истинности посылок $d(P) \subseteq d(M)$ и $(d(M) \cap d(S) \neq \varnothing$ и $d(M)^* \cap d(S) \neq \varnothing)$ и $(d(M) \backslash d(S) \neq \varnothing$ и $d(M)^* \backslash d(S) \neq \varnothing)$ табл. 4, но $d(P) \cap d(S) \neq \varnothing$ и $d(P)^* \cap d(S) \neq \varnothing$, так как $d(P) \cap d(S) = \{p_1\}$ и $d(P)^* \cap d(S) = \{\sim p_2\}$, значит, заключения I_1SP и I_2SP ложны. Ложным оказывается и заключение I_3SP табл. 5, здесь при истинности посылок в заключении $d(P) \backslash d(S) = \varnothing$, а значит $|I_3SP|^d = 0$.

Контрмодели для $A_3MP\&A_3SM$ и $A_3MP\&I_3SM$. Аналогично первому случаю сначала укажем контрмодель, где ложны заключения I_1SP и I_2SP табл. 6, а затем контрмодель, где ложно заключение I_3SP табл. 7.

Таблица 6

		для I_2SP и I_3SP
$d(P)$	$=$	$\{p_1, p_2\}$
$d(P)^*$	$=$	$\{\sim p_1, \sim p_2\}$
$d(M)$	$=$	$\{p_1, \sim p_2, p_3\}$
$d(M)^*$	$=$	$\{\sim p_1, p_2, \sim p_3\}$
$d(S)$	$=$	$\{p_1, p_2, p_4\}$

Таблица 7

		для I_1SP
$d(P)$	$=$	$\{p_1, \sim p_2\}$
$d(P)^*$	$=$	$\{\sim p_1, p_2\}$
$d(M)$	$=$	$\{p_1, p_2, p_3\}$
$d(M)^*$	$=$	$\{\sim p_1, \sim p_2, \sim p_3\}$
$d(S)$	$=$	$\{\sim p_1, p_3\}$

В представленной контрмодели посылки истинны, а вот заключения, так как $d(P) \cap d(S) = \{p_1, p_2\}$ и $d(P)^* \backslash d(S) = \varnothing$, ложны. Ложным оказывается и заключение I_1SP, так как при истинности посылок в заключении $d(P)^* \cap d(S) = \{\sim p_1\}$.

Контрмодели для $A_2MP\&A_3SM$ и $A_2MP\&I_3SM$ подбираются аналогичным способом.

В I Фигуре нет ни одного правильного модуса, где большая посылка была бы частной, а меньшая — общей. Для силлогизмов с посылками $I_1MP\&A_1SM$, $I_2MP\&A_1SM$, $I_3MP\&A_1SM$ укажем общую контрмодель, в которой обе посылки истинны, но ложны формулы I_1SP и I_2SP табл. 8, а затем I_3SP табл. 9.

Таблица 8

		для I_1SP и I_2SP
$d(P)$	$=$	$\{p_1, p_2\}$
$d(P)^*$	$=$	$\{\sim p_1, \sim p_2\}$
$d(M)$	$=$	$\{p_3\}$
$d(S)$	$=$	$\{p_3, p_1, \sim p_2\}$

Таблица 9

		для I_3SP
$d(P)$	$=$	$\{p_1, p_2\}$
$d(P)^*$	$=$	$\{\sim p_1, \sim p_2\}$
$d(M)$	$=$	$\{p_3\}$
$d(S)$	$=$	$\{p_3, p_1, p_2\}$

В этих моделях соблюдены условия истинности посылок, но так как $d(P) \cap d(S) = \{p_1\}$ и $d(P)^* \cap d(S) = \{\sim p_2\}$, то и заключения I_1SP и I_2SP ложны. Заключение I_3SP также оказывается ложным при истинных посылках.

Для оставшихся комбинаций посылок подбор контрмоделей проводится аналогичным образом.

Мы обосновали следующее метаутверждение:

1. $I_kMP\&A_mSM \nvDash I_nSP$,

где k, m, n – произвольные индексы из $\{1,2,3\}$.
Рассуждая от противного, допустим, что для некоторых k, m, n верно:

+2. $I_kMP\&I_mSM \vDash I_nSP$.

В ***IL2*** справедливы законы подчинения, поэтому:

3. $A_mSM \vDash I_mSM$.

Из (2) и (3), в силу свойств классического отношения следования, вытекает:

4. $I_kMP\&A_mSM \vDash I_nSP$.

Утверждения (1) и (4) противоречат друг другу.

Итак, мы показали, что из двух частных посылок в силлогизмах *I фигуры* не следует никакое заключение вида I_nSP. А в силу законов подчинения из них не следует заключение вида A_nSP.

II Фигура

При рассмотрении второй фигуры, аналогично первой фигуре, были выделены и доказаны правильные модусы и приведены контрмодели для неправильных.

К числу правильных модусов *II фигуры* относятся: $(A_1PM\&A_3SM) \supset A_3SP$, $(A_2PM\&A_3SM) \supset A_3SP$, $(A_3PM\&A_1SM) \supset A_3SP$, $(A_3PM\&A_2SM) \supset A_3SP$, к ним добавляются еще четыре модуса со слабым заключением, а также еще 4: $(A_1PM\&I_3SM) \supset I_3SP$, $(A_2PM\&I_3SM) \supset I_3SP$, $(A_3PM\&I_1SM) \supset I_3SP$, $(A_3MP\&I_2SM) \supset I_3SP$, их доказательство проводится аналогичным образом с помощью закона подчинения для индифферентных высказываний $A_3SM \supset I_3SP$.

Доказательство.

	$(1)\ (A_1PM\&A_3SM) \supset A_3SP$	
1.	$A_3SM \equiv \neg I_1SM\&\neg I_2SM$	(A16)
2.	$I_1SM \supset \neg A_3SM$	(1; ЛВ)
3.	$I_2SM \supset \neg A_3SM$	(1; ЛВ)
4.	$(A_1PM\&I_1SP) \supset I_1SM$	(A5)
5.	$(A_1PM\&A_3SM) \supset \neg I_1SP$	(4,2; ЛВ)
6.	$(A_1PM\&I_2SP) \supset I_2SM$	(A6)
7.	$(A_1PM\&A_3SM) \supset \neg I_2SP$	(6,3; ЛВ)
8.	$A_3SP \equiv \neg I_1SP\&\neg I_2SP$	(A16)
9.	$(A_1PM\&A_3SM) \supset A_3SP$	(5,7,8; ЛВ)

■

(2) $(A_2PM\&A_3SM) \supset A_3SP$ доказывается аналогично; вместо аксиом (A5) и (A6) используются (A7) и (A8).

Доказательство.

	$(3)\ (A_3PM\&A_1SM) \supset A_3SP$	
1.	$(A_1SM\&I_1PS) \supset I_1PM$	(A5)
2.	$(A_1SM\&I_2PS) \supset I_2PM$	(A6)
3.	$I_1SP \supset I_1PS$	(A12)
4.	$(I_1SP\&A_1SM) \supset I_1PM$	(1,3; ЛВ)
5.	$I_2PS \supset I_2SP$	(A13)
6.	$(I_2SP\&A_1SM) \supset I_2PM$	(2,5; ЛВ)
7.	$(\neg I_1PM\&A_1SM) \supset \neg I_1SP$	(4; ЛВ)
8.	$(\neg I_2PM\&A_1SM) \supset \neg I_2SP$	(6; ЛВ)
9.	$(\neg I_1PM\&\neg I_2PM\&A_1SM) \supset (\neg I_1SP\&\neg I_2SP)$	(7,8; ЛВ)
10.	$A_3SP \equiv (\neg I_1SP\&\neg I_2SP)$	(A16)

11.	$A_3PM \equiv (\neg I_1PM \& \neg I_2PM)$	(A16)
12.	$(A_3PM \& A_1SM) \supset A_3SP$	(9,10,11; ЛВ)

■

(4) $(A_3PM \& A_2SM) \supset A_3SP$ доказывается аналогично; вместо аксиом (A5) и (A6) используются (A7) и (A8).

Приведем попарно общие контрмодели для модусов с обеими общими посылками и модусов, где меньшая посылка частная.

Контрмодели для $(A_1PM \& A_1SM)$ и $(A_1PM \& I_1SM)$ табл. 10 и табл. 11.

Контрмодели для $(A_1PM \& A_2SM)$ и $(A_1PM \& I_2SM)$ табл. 12 и табл. 13.

Таблица 10

		для I_1SP и I_1SP
$d(P)$	=	$\{p_1, p_2, p_3\}$
$d(P)^*$	=	$\{\sim p_1, \sim p_2, \sim p_3\}$
$d(M)$	=	$\{p_1, p_2\}$
$d(M)^*$	=	$\{\sim p_1, \sim p_2\}$
$d(S)$	=	$\{p_1, p_2, \sim p_3\}$

Таблица 11

		для I_3SP
$d(P)$	=	$\{p_1, p_2\}$
$d(P)^*$	=	$\{\sim p_1, \sim p_2\}$
$d(M)$	=	$\{p_1, p_2\}$
$d(M)^*$	=	$\{\sim p_1, \sim p_2\}$
$d(S)$	=	$\{p_1, p_2, p_3\}$

Таблица 12

		для I_1SP и I_3SP
$d(P)$	=	$\{p_1, p_2\}$
$d(P)^*$	=	$\{\sim p_1, \sim p_2\}$
$d(M)$	=	$\{p_1\}$
$d(M)^*$	=	$\{\sim p_1\}$
$d(S)$	=	$\{\sim p_1, \sim p_2\}$

Таблица 13

		для I_2SP
$d(P)$	=	$\{p_1, p_2\}$
$d(P)^*$	=	$\{\sim p_1, \sim p_2\}$
$d(M)$	=	$\{p_1\}$
$d(M)^*$	=	$\{\sim p_1\}$
$d(S)$	=	$\{\sim p_1, p_2\}$

Несложно подобрать контрмодели и для остальных комбинаций посылок: $A_2PM \& A_1SM$ и $A_2PM \& I_1SM$; $A_2PM \& A_2SM$ и $A_2PM \& I_2SM$; $A_3PM \& A_3SM$ и $A_3PM \& I_3SM$.

Во второй фигуре, как и в первой, нет правильных силлогизмов с большей частной посылкой. В комбинациях посылок: $I_1PM \& A_1SM$, $I_1PM \& A_2SM$, $I_1PM \& A_3SM$, $I_2PM \& A_1SM$, $I_2PM \& A_2SM$ и $I_2PM \& A_3SM$ большие посылки I_1PM и I_2PM в силу законов обращения (A12) и (A13) эквивалентны в ***IL2*** формулам I_1MP и I_2MP. Поэтому данные комбинации эквивалентны следующим: $I_2PM \& A_1SM$, $I_2PM \& A_2SM$, $I_2PM \& A_3SM$, при рассмотрении первой фигуры мы показали, что правильные заключения из них невыводимы. Для комбинаций посылок легко привести контрмодели аналогично тому, как мы делали это раньше.

Обоснование тезиса $I_kPM\&I_mSM \nvDash I_nSP$ совершенно аналогично тому, которое было представлено выше для случая двух частных посылок в *I фигуре*. Таким образом, из двух частных посылок в силлогизмах *II фигуры* не следует никакое заключение вида I_nSP. А в силу законов подчинения из них не следует заключение вида A_nSP.

III Фигура

При рассмотрении третьей фигуры как и в прошлых двух был проведен анализ всех возможных вариаций модусов, вследствие чего выявлены и доказаны правильные силлогизмы, и представлены опровержения для тех комбинаций посылок, что не дают правильного заключения.

Нами доказано, что в данной фигуре правильными оказываются следующие силлогизмы:
$(A_1MP\&A_1MS) \supset I_1SP$; $(A_1MP\&A_2MS) \supset I_2SP$;
$(A_2MP\&A_1MS) \supset I_2SP$; $(A_2MP\&A_2MS) \supset I_1SP$;
$(A_3MP\&A_1MS) \supset I_3SP$; $(A_3MP\&A_1MS) \supset I_1SP$.

Доказательство.

	(1) $(A_1MP\&A_1MS) \supset I_1SP$			(2) $(A_1MP\&A_2MS) \supset I_2SP$	
1.	$(A_1MP\&I_1SM) \supset I_1SP$	(A5)	1.	$(A_1MP\&I_2SM) \supset I_2SP$	(A6)
2.	$I_1MS \supset I_1SM$	(A12)	2.	$I_2MS \supset I_2SM$	(A13)
3.	$A_1MS \supset I_1MS$	(A14)	3.	$A_2MS \supset I_2MS$	(A15)
4.	$(A_1MP\&A_1MS) \supset I_1SP$	(1,2,3)	4.	$(A_1MP\&A_2MS) \supset I_2SP$	(1,2,3)

■

Силлогизмы (3) $(A_2MP\&A_1MS) \supset I_2SP$ и (4) $(A_2MP\&A_2MS) \supset I_1SP$ легко доказать с использованием (A7) и (A8) соответственно.

Доказательство.

	(5) $(A_3MP\&A_1MS) \supset I_3SP$	
1.	$(A_1SP\&I_1MS) \supset I_1MP$	(A5)
2.	$(A_2SP\&I_1MS) \supset I_2MP$	(A7)
3.	$A_1MS \supset I_1MS$	(A14)
4.	$(\neg I_1MP\&A_1MS) \supset \neg A_1SP$	(1,3; ЛВ)
5.	$(\neg I_2MP\&A_1MS) \supset \neg A_2SP$	(2,3; ЛВ)
6.	$(\neg I_1MP\&\neg I_2MP\&A_1MS) \supset (\neg A_1SP\&\neg A_2SP)$	(4,5; ЛВ)
7.	$A_3MP \equiv (\neg I_1MP\&\neg I_2MP)$	(A16)
8.	$I_3SP \equiv (\neg A_1SP\&\neg A_2SP)$	(A17)
9.	$(A_3MP\&A_1MS) \supset I_3SP$	(6,7,8; ЛВ)

■

Силлогизм (6) $(A_3MP \& A_2MS) \supset I_3SP$ доказывается аналогичным образом с использованием (A6), (A8) и (A15).

К ним добавляются еще четыре силлогизма благодаря применению закона обращения для меньшей посылки в аксиомах (A5), (A6), (A7) и (A8): $(A_1MP \& I_1MS) \supset I_1SP$; $(A_1MP \& I_2MS) \supset I_2SP$; $(A_2MP \& I_1MS) \supset I_2SP$; $(A_2MP \& I_2MS) \supset I_1SP$. А также еще два модуса благодаря применению сначала закона обращения, а затем закона подчинения для меньшей посылки: $(A_3MP \& I_2MS) \supset I_3SP$ и $(A_3MP \& I_1MS) \supset I_3SP$.

Кроме того, в *III Фигуре* появляется шесть правильных модусов с большей частной посылкой:
$(I_1MP \& A_1MS) \supset I_1SP$; $(I_1MP \& A_2MS) \supset I_2SP$;
$(I_2MP \& A_1MS) \supset I_2SP$; $(I_2MP \& A_2MS) \supset I_1SP$;
$(I_3MP \& A_1MS) \supset I_3SP$ и $(I_3MP \& A_2MS) \supset I_3SP$.

Доказательство.

	(1) $(I_1MP \& A_1MS) \supset I_1SP$			(2) $(I_1MP \& A_2MS) \supset I_2SP$	
1.	$(A_1MS \& I_1PM) \supset I_1PS$	(A5)	1.	$(A_2MS \& I_1PM) \supset I_2PS$	(A7)
2.	$I_1MP \supset I_1PM$	(A12)	2.	$I_1MP \supset I_1PM$	(A12)
3.	$I_1PS \supset I_1SP$	(A12)	3.	$I_2PS \supset I_2SP$	(A13)
4.	$(I_1MP \& A_1MS) \supset I_1SP$	(1,2,3)	4.	$(I_1MP \& A_2MS) \supset I_2SP$	(1,2,3)

■

$(I_2MP \& A_1MS) \supset I_2SP$ и $(I_2MP \& A_2MS) \supset I_1SP$ доказываются по аналогии с использованием (A6) и (A8).

Из остальных трех комбинаций посылок $A_1MP \& A_3MS$, $A_2MP \& A_3MS$ и $A_3MP \& A_3MS$ нельзя вывести нужного заключения.

Чтобы обосновать это утверждение, отметим, что эти комбинации, в силу имеющегося в ***IL2*** закона обращения $(A_3SP \equiv A_3PS)$, эквивалентны следующим: $(A_1MP \& A_3SM)$, $(A_2MP \& A_3SM)$ и $(A_3MP \& A_3SM)$. А для последних трех комбинаций нужные контрмодели с истинными посылками и ложными заключениями вида I_nSP уже построены при рассмотрении *I фигуры*. В силу законов подчинения $A_nSP \supset I_nSP$ эти комбинации посылок тоже дают ложное заключение.

IV Фигура

Напомним, что рассмотрение *IV фигуры* является обязательным для построения полной силлогистической теории. Были выявлены восемь правильных силлогизмов с обеими общими посылками, два индифферентных модуса с меньшей частной посылкой: $(A_3PM \& I_1MS) \supset I_3SP$ и $(A_3PM \& I_2MS) \supset I_3SP$, а также четыре модуса в большей частной посылкой:

Силлогизмы: $(A_1PM\&A_1MS) \supset I_1SP$; $(A_1PM\&A_2MS) \supset I_2SP$; $(A_2PM\&A_1MS) \supset I_2SP$; $(A_2PM\&A_2MS) \supset I_1SP$ легко доказуемы из силлогизмов *I фигуры* с помощью аксиом (A12), (A13) и (A14). Из них, в свою очередь с помощью закона подчинения доказуемы силлогизмы с большей частной посылкой: $(I_1PM\&A_1MS) \supset I_1SP$; $(I_2PM\&A_1MS) \supset I_2SP$; $(I_1PM\&A_2MS) \supset I_2SP$; $(I_2PM\&A_2MS) \supset I_1SP$. Кроме того, в *I фигуре* доказуемы силлогизмы с двумя общими посылками, где меньшая является индифферентной: $(A_1PM\&A_3MS) \supset A_3SP$; $(A_2PM\&A_3MS) \supset A_3SP$. Приведем доказательство:

Доказательство.

	$\underline{(5)(A_1PM\&A_3MS) \supset A_3SP}$	
1.	$(A_1PM\&I_1SP) \supset I_1SM$	(A5)
2.	$(A_1PM\&I_2SP) \supset I_1SM$	(A6)
3.	$I_1SM \supset I_1MS$	(A12)
4.	$I_2SM \supset I_2MS$	(A12)
5.	$(A_1PM\&I_1SP) \supset I_1MS$	(1,3)
6.	$(A_1PM\&I_2SP) \supset I_2MS$	(2,4)
7.	$(A_1PM\&\neg I_1MS) \supset \neg I_1SP$	(5; ЛВ)
8.	$(A_1PM\&\neg I_2MS) \supset \neg I_2SP$	(6; ЛВ)
9.	$(A_1PM\&\neg I_1MS\&\neg I_2MS) \supset (\neg I_1SP\&\neg I_2SP)$	(7,8; ЛВ)
10.	$A_3SP \equiv (\neg I_1SP\&\neg I_2SP)$	(A16)
11.	$A_3PM \equiv (\neg I_1PM\&\neg I_2PM)$	(A16)
12.	$(A_1PM\&A_3MS) \supset A_3SP$	(9,10,11; ЛВ)

■

Комбинация $(A_2PM\&A_3MS) \supset A_3SP$ доказывается аналогично с помощью замены аксиом (A5) и (A6) на (A7) и (A8) и также дает заключение A_3SP.

Силлогизмы: $(A_3PM\&A_1MS) \supset I_3SP$; $(A_3PM\&I_1MS) \supset I_3SP$ получаются из силлогизмов Mindalin $(A_3MP\&A_1SM) \supset A_3SP$ и Kindirinp $(A_3MP\&I_1SM) \supset I_3SP$ *I Фигуры* с помощью закона обращения для общих индифферентных высказываний, а также законов подчинения и обращения. Силлогизмы $(A_3PM\&A_2MS) \supset I_3SP$ и $(A_3PM\&I_2MS) \supset I_3SP$ доказываются аналогично.

Из комбинации посылок с двумя индифферентными суждениями нельзя получить правильный силлогизм. Ранее в *I фигуре* мы обосновали невозможность правильного модуса из комбинации посылок $A_3MP\&A_3SM$,

так как эта комбинация посылок в силу закона обращения для индифферентных высказываний эквивалента $A_3PM\&A_3MS$, то и из этой комбинации посылок нельзя вывести правильное заключение. Комбинация посылок $A_3PM\&I_3MS$ в свою очередь эквивалентна $A_3MP\&I_3SM$ первой фигуры, а $I_3PM\&A_3MS$ эквивалентна $I_3MP\&A_3SM$ благодаря законам обращения и подчинения для индифферентных высказываний, а значит тоже не дают правильного заключения. Из комбинаций посылок $A_1PM\&I_1MS$, $A_1PM\&I_2MS$, $A_1PM\&I_3MS$, $A_2PM\&I_1MS$, $A_2PM\&I_2MS$, $A_2PM\&I_3MS$ и $A_3PM\&I_3MS$ нельзя вывести заключение вида A_nSP и I_nSP. Также не дают правильного заключения и комбинации посылок $I_1PM\&A_3MS$, $I_2PM\&A_3MS$, $I_3PM\&A_1MS$, $I_3PM\&A_2MS$.

5. Заключение

В статье мы воспроизвели наше доказательство законов, принимаемых в данном варианте Воображаемой логики, показали, как опровергаются неправильные силлогизмы и доказали следующие правильные [Парфенова, 2019]:

В *I фигуре* 12 правильных силлогизмов.

1.	$(A_1MP\&A_1SM) \supset A_1SP$	7.	$(A_2MP\&A_2SM) \supset A_1SP$
2.	$(A_1MP\&A_2SM) \supset A_2SP$	8.	$(A_2MP\&A_1SM) \supset A_2SP$
3.	$(A_3MP\&A_1SM) \supset A_3SP$	9.	$(A_3MP\&A_2SM) \supset A_3SP$
4.	$(A_1MP\&I_1SM) \supset I_1SP$	10.	$(A_2MP\&I_2SM) \supset I_2SP$
5.	$(A_1MP\&I_2SM) \supset I_2SP$	11.	$(A_3MP\&I_1SM) \supset I_3SP$
6.	$(A_2MP\&I_1SM) \supset I_2SP$	12.	$(A_3MP\&I_2SM) \supset I_3SP$

Во *II фигуре* 12 правильных силлогизмов.

1.	$(A_1PM\&A_3SM) \supset A_3SP$	7.	$(A_2PM\&A_3SM) \supset A_3SP$
2.	$(A_3PM\&A_1SM) \supset A_3SP$	8.	$(A_3PM\&A_2SM) \supset A_3SP$
3.	$(A_1PM\&A_3SM) \supset I_3SP$	9.	$(A_2PM\&A_3SM) \supset I_3SP$
4.	$(A_3PM\&A_1SM) \supset I_3SP$	10.	$(A_3PM\&A_2SM) \supset I_3SP$
5.	$(A_1PM\&I_3SM) \supset I_3SP$	11.	$(A_2PM\&I_3SM) \supset I_3SP$
6.	$(A_3PM\&I_1SM) \supset I_3SP$	12.	$(A_3PM\&I_2SM) \supset I_3SP$

В *III фигуре* 18 правильных силлогизмов.

1.	$(A_1MP\&A_1MS) \supset I_1SP$	10.	$(A_2MP\&A_2MS) \supset I_1SP$
2.	$(A_1MP\&A_2MS) \supset I_2SP$	11.	$(A_3MP\&A_1MS) \supset I_3SP$
3.	$(A_2MP\&A_1MS) \supset I_2SP$	12.	$(A_3MP\&A_2MS) \supset I_3SP$
4.	$(A_1MP\&I_1MS) \supset I_1SP$	13.	$(A_2MP\&I_2MS) \supset I_1SP$

5.	$(A_1MP \& I_2MS) \supset I_2SP$	14.	$(A_3MP \& I_1MS) \supset I_3SP$
6.	$(A_2MP \& I_1MS) \supset I_2SP$	15.	$(A_3MP \& I_2MS) \supset I_3SP$
7.	$(I_1MP \& A_1MS) \supset I_1SP$	16.	$(I_2MP \& A_2MS) \supset I_1SP$
8.	$(I_1MP \& A_2MS) \supset I_2SP$	17.	$(I_3MP \& A_1MS) \supset I_3SP$
9.	$(I_2MP \& A_1MS) \supset I_2SP$	18.	$(I_3MP \& A_2MS) \supset I_3SP$

В *IV фигуре* 14 правильных силлогизмов.

1.	$(A_1PM \& A_1MS) \supset I_1SP$	5.	$(A_2PM \& A_2MS) \supset I_1SP$
2.	$(A_1PM \& A_2MS) \supset I_2SP$	6.	$(A_2PM \& A_1MS) \supset I_2SP$
3.	$(A_3PM \& A_1MS) \supset I_3SP$	7.	$(A_3PM \& A_2MS) \supset I_3SP$
4.	$(A_2PM \& A_3MS) \supset A_3SP$	8.	$(A_1PM \& A_3MS) \supset A_3SP$
9.	$(A_3PM \& I_1MS) \supset I_3SP$	10.	$(A_3PM \& I_2MS) \supset I_3SP$
11.	$(I_1PM \& A_1MS) \supset I_1SP$	12.	$(I_2PM \& A_2MS) \supset I_1SP$
13.	$(I_1PM \& A_2MS) \supset I_2SP$	14.	$(I_2PM \& A_1MS) \supset I_2SP$

В дальнейшем предполагается сформулировать по аналогии с традиционной силлогистикой такую систему правил, которой бы удовлетворял каждый правильный силлогизм Воображаемой логики-2, а любой неправильный в этой теории силлогизм не удовлетворял бы по крайней мере одному из этих правил.

Литература

Бочаров, Маркин, 2010 – *Бочаров В.А., Маркин В.И.* Силлогистические теории. М.: Прогресс–Традиция, 2010. 336 с.

Васильев, 1989 – *Васильев Н.А.* Воображаемая логика. Избранные труды. М.: Наука, 1989. 264 с.

Зайцев, 1998 – *Зайцев Д.В.* Интерпретация воображаемой логики: реконструкция идей Н.А. Васильева // Современная логика, проблемы теории, истории и применения в науке. Материалы V Общероссийской научной конференции. СПб., 1998. С. 113–117.

Зайцев, Маркин, 1999 – *Зайцев Д.В., Маркин В.И.* Незамеченная логическая система Н.А. Васильева: Воображаемая логика-2 или Логика понятий // Смирновские чтения. 2 Международная конференция. М.: ИФ РАН, 1999. С. 107–109.

Костюк, Маркин, 1998 – *Костюк Т.П., Маркин В.И.* Формальная реконструкция воображаемой логики Н.А. Васильева // Современная логика: теория, история и приложения в науке, труды V Всероссийской науч. конф. Санкт-Петербург: Публикация Дом Санкт-Петербургского государственного университета, 1998. С. 154–159.

Парфенова, 2019 – *Парфенова А.В.* Альтернативный вариант воображаемой логики Н.А. Васильева как особая силлогистика // Одиннадцатые Смирновские чтения по логике: материалы Междунар. науч. конф. Москва, 19–21 июня 2019. М.: Современные тетради, 2019. С. 82–84.

Markin, 2013 – *Markin V.I.* What trends in non-classical logic were anticipated by Nikolai Vasiliev // Логические исследования. 2013. Вып. 19. С. 122–135.

Antonina V. Konkova

Imaginary Logic-2 N.A. Vasiliev as a syllogistic theory

Antonina V. Konkova
Lomonosov Moscow State University,
27/4 Lomonosovskiy prospect, Moscow, 119991, Russian Federation.
Institute of Philosophy of Russian Academy of Sciences,
12/1 Goncharnaya Str., Moscow, 109240, Russian Federation.
E-mail: konkova@philos.msu.ru

Abstract: Known logical system N.A. Vasiliev, who is one of the founders of modern non-classical logic, is Imaginary (non-Aristotelian) logic. The deductive system proposed by him is a special type of syllogistic, the language of which, along with the forms of affirmative and negative judgments, contain the forms of contradictory (indifferent) judgments. The latter are the judgments of a new quality and contain a bundle of "is and is not at the same time". The article is devoted to the presentation of the results of the study of one of the alternative "Imaginary logic" Nikolai Alexandrovich Vasiliev. This alternative "Imaginary Logos" differs not only from the traditional syllogistic, but also from the basic version. Here, each term of a categorical statement is associated not with a set of individuals, but with a set of symbols, and syllogistic constants are considered as denoting intentional relations between concepts. The study assumed the consideration of this version of imaginary logic as a syllogistic theory, and was carried out on the basis of a system built for this logic V.I.Markin and D.V. Zaitsev. The article briefly outlines the system of Imaginary Logic-2, proved the laws: the laws of identity, the laws of opposites, the laws of subordination, the laws of inversion and the laws of the excluded fourth, adopted in this logic. Further, all four figures of syllogisms are considered sequentially. In each figure, all possible combinations of parcel (36 combinations, for each figure) with all possible conclusions (six possible conclusions, for each combination of packages) are considered. Proof of the correct syllogisms of each figure was made, as well as examples of possible counterfors to refute all the wrong modes.
The result of the work are proven laws and all possible, proven modes in this system, as well as a further direction of research is outlined, the question is raised of the possibility of formulating general rules of syllogistics for all four figures in this version of "Imaginary Logic".

Keywords: Imaginary logic, logic N.A. Vasiliev, non-classical logic, multi-valued logic

For citation: Konkova A.V. "Voobrazhaemaya logik-2 N.A. Vasil'eva kak sillogisticheskaya teoriya" [Imaginary Logic-2 N.A. Vasiliev as a syllogistic theory], *Logicheskie Issledovaniya / Logical Investigations*, 2019, Vol. 25, No. 2, pp. 94–113. DOI: 10.21146/2074-1472-2019-25-2-94-113 (In Russian)

References

Bocharov, Markin, 2010 – Bocharov, V.A., Markin, V.I. *Sillogisticheskie teorii.* [Syllogistic theories] Moscow: Progress–Tradition, 2010. 336 pp. (In Russian)

Vasilyev, 1989 – Vasilyev, N.A. *Voobrazhaemaya logika. Izbrannye trudy.* [Imaginary logic. Selected Works.] Moscow: Nauka, 1989. 264 pp. (In Russian)

Zaitsev, 1998 – Zaitsev, D.V. "Interpretatsiya voobrazhaemoi logiki: rekonstruktsiya idei N.A. Vasil'eva" [Interpretation of imaginary logic: reconstruction of N.A. Vasiliev's ideas] in: *Sovremennaya logika, problemy teorii, istorii i primeneniya v nauke. Materialy V Obshcherossiiskoi nauchnoi konferentsii.* [Modern logic, problems of theory, history and application in science. Materials in the All-Russian Scientific Conference.] St. Petersburg: Publication House of St. Petersburg State University, 1998, pp. 113–117. (In Russian)

Zaitsev, Markin, 1999 – Zaitsev, D.V., Markin, V.I. "Nezamechennaya logicheskaya sistema N.A. Vasil'eva: Voobrazhaemaya logika-2 ili Logika ponyatii" [Unnoticed logical system of N.A. Vasiliev: Imaginary Logic-2 or Logic of Concepts] in: *Smirnovskie chteniya. 2 Mezhdunarodnaya konferentsiya.* [Smirnov readings. 2 International Conference.] Moscow: IF RAN, 1999, pp. 107–109. (In Russian)

Kostyuk, Markin, 1998 – *Kostyuk, T.P., Markin, V.I.* "Formal'naya rekonstruktsiya voobrazhaemoi logiki N.A. Vasil'eva" [Formal reconstruction of imaginary logic of N.A. Vasiliev] in: *Sovremennaya logika: Problemy teorii, istorii i primeneniya v nauke. Materialy V Obshcherossiiskoi nauchnoi konferentsii, 18–20 iyunya 1998 g., seriya Sovremennaya logika* [Modern logic: Problems of theory, history and application in science. Materials of the V All-Russian Scientific Conference, June 18–20, 1998, a series of Modern Logic] St. Petersburg: Publication House of St. Petersburg State University, 1998, pp. 154–159. (In Russian)

Markin, 2013 – Markin, V.I. "What trends in non-classical logic were anticipated by Nikolai Vasiliev", *Logical Investigations*, Vol. 19. Moscow: Nauka, 2013, pp. 122–135.

Parfenova, 2019 – Parfenova, A.V. "Al'ternativnyi variant voobrazhaemoi logiki N.A. Vasil'eva kak osobaya sillogistika" [An alternative version of N.A. Vasiliev's imaginary logic as a special syllogistic] in: *Odinnadtsatye Smirnovskie chteniya po logike: materialy Mezhdunar. nauch. konf., Moskva, 19–21 iyunya 2019.* [Eleventh Smirnov Readings on Logic: Materials of the Intern. scientific conf.Moscow, June 19–21, 2019]. Moscow: Sovremennye tetradi, 2019, pp. 82–84. (In Russian)

Логические исследования
2019. Т. 25. № 2. С. 114–137
УДК 162.2

Logical Investigations
2019, Vol. 25, No. 2, pp. 114–137
DOI: 10.21146/2074-1472-2019-25-2-114-137

В.И. Маркин, М.М. Легейдо

Интенсиональная семантика логики классов Дж. Венна

Владимир Ильич Маркин
МГУ им. М.В. Ломоносова.
Российская Федерация, 119991, г. Москва, Ломоносовский пр-т, д. 27, корп. 4.
E-mail: markin@philos.msu.ru

Мария Михайловна Легейдо
МГУ им. М.В. Ломоносова.
Российская Федерация, 119991, г. Москва, Ломоносовский пр-т, д. 27, корп. 4.
E-mail: mlegeydo@yandex.ru

Аннотация: В статье развивается предложенный В.И. Шалаком оригинальный подход к построению адекватных семантик для различных систем силлогистики. Его суть состоит в том, что субъектам и предикатам категорических высказываний сопоставляются в качестве значений формулы языка пропозициональной логики, а сами эти высказывания интерпретируются с использованием отношения логического следования. Семантика данного типа строится для логики классов Дж. Венна — силлогистики с нестандартным набором исходных простых высказываний: «Все S есть все P» ($SaaP$), «Все S есть некоторые P» ($SaiP$), «Некоторые S есть все P» ($SiaP$), «Некоторые S есть некоторые P» ($SiiP$), «Ни один S не есть P» (SeP). Каждому из них соответствует одна из пяти круговых диаграмм Эйлера. Существуют две формализации силлогистики Венна с данным набором исходных констант: логика отношений между произвольными классами (система **СΦV**) и логика отношений между непустыми классами (система **С4V**). Сначала семантика в стиле В.И. Шалака формулируется для системы **СΦV**. Значениями общих терминов в ней являются любые пропозициональные формулы. $SaaP$ значима, е.т.е. значения S и P следуют друг из друга; $SaiP$ значима, е.т.е. из значения S следует значение P, но не наоборот; $SiaP$ значима, е.т.е. из значения P следует значение S, но не наоборот; SeP значима, е.т.е. из значения S следует отрицание значения P; $SiiP$ значима, е.т.е. значения S и P не следуют друг из друга и из первого не следует отрицание второго. В семантике для **С4V** значениями общих терминов являются только выполнимые пропозициональные формулы. Доказываются метатеоремы об адекватности данных семантик исчислениям **СΦV** и **С4V**. Далее, семантика для **СΦV** модифицируется за счет замены классического следования на релевантное в определении значимости элементарных силлогистических формул. Строится исчисление **ИСΦV**, аксиоматизирующее класс законов «релевантизированного» варианта силлогистики Венна. В заключение проводится сравнение всех предложенных систем по их дедуктивной силе.

Ключевые слова: силлогистика, Джон Венн, логика классов, интенсиональная семантика, формализация, аксиоматическое исчисление, логическое следование, релевантное следование

Для цитирования: *Маркин В.И., Легейдо М.М.* Интенсиональная семантика логики классов Дж. Венна // Логические исследования / Logical Investigations. 2019. Т. 25. № 2. С. 114–137. DOI: 10.21146/2074-1472-2019-25-2-114-137

1. Интенсиональная интерпретация стандартных систем позитивной силлогистики

В традиционной и современной логике доминирует сугубо экстенсиональное понимание силлогистики как логической теории, которая выделяет законы и способы корректных рассуждений, базирующиеся на отношениях между множествами индивидов. При такой трактовке эти множества выступают в качестве значений общих терминов (субъектов и предикатов категорических высказываний), а силлогистические константы рассматриваются как знаки различных отношений между двумя множествами (объемами понятий). Например, в фундаментальной силлогистике константа a репрезентирует отношение теоретико-множественного включения объема субъекта в объем предиката, константа i — отношение объемной совместимости субъекта и предиката (наличие общих элементов у соответствующих множеств) и т.д.

Чистый позитивный вариант[1] фундаментальной силлогистики аксиоматизирует исчисление **СФ** [Бочаров, Маркин, 2010, с. 66–67], дедуктивно эквивалентное системе Дж. Шефердсона [Shepherdson, 1956]. Схемами аксиом **СФ** являются:

A0. Тавтологии классической логики высказываний;
A1. $(MaP \wedge SaM) \supset SaP$;
A2. $(MeP \wedge SaM) \supset SeP$;
A3. $SeP \supset PeS$;
A4. SaS;
A5. $SiP \supset SiS$;
A6. $SoP \supset SiS$;
A7. $SeP \equiv \neg SiP$;
A8. $SoP \equiv \neg SaP$.

Единственное правило вывода в **СФ** — *modus ponens.*

[1] Язык чистой позитивной силлогистики содержит только один тип нелогических символов — простые общие термины, в нем отсутствуют сингулярные термины и терминообразующие операторы.

В том же самом языке сформулирован целый спектр логических систем, которые отличаются друг от друга классами выделяемых в них законов. Наиболее известной системой указанного типа является силлогистика Я. Лукасевича [Лукасевич, 1959], формализующая традиционную версию чистой позитивной силлогистики. С семантической точки зрения, силлогистические константы репрезентируют здесь те же самые отношения между множествами, что и в фундаментальной силлогистике, однако общим терминам в качестве значений сопоставляются не произвольные, а лишь *непустые* множества индивидов.

Исчисление, дедуктивно эквивалентное силлогистике Лукасевича, может быть получено из **СФ** добавлением новой схемы аксиом

A9. $SaP \supset SiP$.

Следуя В.А. Смирнову, будем называть данное исчисление **С4**.

Менее известен в истории логики иной, альтернативный экстенсиональному подход к трактовке силлогистики. Г. Лейбниц в «Новых опытах о человеческом разумении» поставил задачу обоснования учения о силлогизме в интенсиональном ключе. Силлогистика, по его мнению, может рассматриваться как теория, основанная на отношениях между понятиями *по содержанию*, а не по объему. Тогда, с общими терминами связываются не множества индивидов, а содержания понятий, понимаемые как совокупности *признаков* индивидов. Из приводимых Лейбницем примеров видно, что в содержания понятий могут входить как положительные признаки (они указывают на наличие свойства у предметов), так и отрицательные признаки (фиксирующие отсутствие свойства у предметов).

При таком подходе силлогистические константы рассматриваются как знаки отношений между содержаниями двух понятий: одно из них связано с субъектом категорического высказывания, а другое с его предикатом. Поиску адекватной интерпретации силлогистических констант посвящена работа Лейбница «Элементы исчисления» [Лейбниц, 1982, т. 3, с. 514–523].

Константа a трактуется как знак отношения включения содержания предиката в содержание субъекта. Такая трактовка прямо вытекает из закона обратного отношения между содержаниями и объемами понятий. Таким образом, высказывание формы SaP истинно, если и только если содержание его субъекта S включает в себя все признаки из содержания предиката P. Именно в данном смысле общеутвердительное суждение есть мысль о том, что предикат содержится в субъекте.

Для частноутвердительных высказываний, содержащих силлогистическую константу i, Лейбниц предложил следующую интерпретацию: предикат в этом случае может, но не обязан содержаться в субъекте, достаточно, чтобы он содержался в каком-то *виде* субъекта, причем под *видом* имеется в виду понятие, более богатое, чем субъект, по содержанию. Здесь, правда, сразу возникает вопрос, а не приводит ли такая интерпретация высказываний вида SiP к тому, что любое из них оказывается истинным. Действительно, если добавить к содержанию S все признаки из содержания P, то мы как раз и получим искомый вид субъекта, в котором содержится предикат. Судя по всему, Лейбниц не считал, что любое объединение содержаний двух понятий дает содержание нового понятия. Если одно понятие содержит положительный признак «обладать (неким) свойством», а другое — противоречащий ему отрицательный признак «не обладать (тем же самым) свойством», то в результате объединения содержаний получается противоречивое понятие. Поэтому, чтобы избежать ситуации, при которой все частноутвердительные суждения истинны, достаточно принять предпосылку о *непротиворечивости* понятий (об отсутствии в их содержаниях противоречащих друг другу признаков). Если исключить из сферы рассмотрения понятия с противоречивым содержанием, то лейбницевская трактовка константы i эквивалентна следующей: высказывание формы SiP истинно, если и только если не существует противоречащих друг другу признаков, один из которых входит в содержание S, а другой в содержание P.

В.И. Маркин [Маркин, 2001] построил формальную семантику для языка позитивной силлогистики, в которой общим терминам в качестве значений сопоставляются непустые и непротиворечивые (в указанном выше смысле) совокупности положительных и отрицательных признаков, а условия истинности атомарных формул SaP и SiP (а также противоречащих им формул SoP и SeP) соответствуют лейбницевской трактовке категорических высказываний. Было установлено, что класс общезначимых в этой семантике формул совпадает с множеством теорем исчисления **C4**.

В работе [Маркин, 2002] был поставлен вопрос, как изменится множество законов силлогистики, если отказаться от предпосылки о непротиворечивости содержаний понятий, приписываемых в интенсиональной семантике общим терминам, сохранив при этом условия истинности формул: SaP истинно, если и только если совокупность признаков, сопоставленная P, включается в совокупность признаков, сопоставленную S; SiP истинно, если и только если множества признаков, сопоставленные S и P, не содержат противоречащих друг другу признаков. Оказалось, что не все теоремы фундаментальной силлогистики **СФ** (а тем более, не все теоремы **C4**) общезначимы в модифицированной указанным способом семантике. Класс общезначимых формул (при допущении в сферу рассмотрения понятий с противоречивыми содержаниями) аксиоматизирует исчисление

ИСФ, которое получается из **СФ** за счет отбрасывания аксиомных схем **A5** ($SiP \supset SiS$) и **A6** ($SoP \supset SiS$).

Оригинальный подход к построению семантик для систем позитивной силлогистики был сформулирован В.И. Шалаком [Шалак, 2015]. Он предложил сопоставлять в качестве значений общим терминам языка силлогистики формулы языка классической пропозициональной логики, а силлогистические константы интерпретировать с использованием отношения выводимости в классическом исчислении высказываний. По этой причине он назвал свою трактовку категорических высказываний *синтаксической*. Если значением термина S является пропозициональная формула α, а значением P формула β, то SaP означает, что из α в классической логике высказываний выводима β, а SiP означает, что из формул α и β не выводимо противоречие (константа ложности).

Предложенную В.И. Шалаком семантику можно переформулировать без употребления константы ложности и с использованием вместо отношения классической выводимости его семантического аналога — отношения логического следования (в классической логике высказываний).

Пусть δ — функция, сопоставляющая каждому общему термину формулу языка классической логики высказываний, не содержащую иных связок кроме $\wedge$, $\vee$ и $\neg$. Для оценки силлогистических формул при той или иной интерпретации общих терминов задается двухместный метапредикат $\mathcal{F}$. Запись $\mathcal{F}(A,\delta)$ читается так: «силлогистическая формула A значима при интерпретации общих терминов δ». Определение условий значимости формул силлогистического языка таково:

$$\begin{array}{ll}
\mathcal{F}(SaP,\delta) \Leftrightarrow \delta(S) \vDash \delta(P); & \mathcal{F}(\neg A,\delta) \Leftrightarrow \dot{\neg}\, \mathcal{F}(A,\delta); \\
\mathcal{F}(SeP,\delta) \Leftrightarrow \delta(S) \vDash \neg\delta(P); & \mathcal{F}(A \wedge B,\delta) \Leftrightarrow \mathcal{F}(A,\delta) \mathbin{\dot{\wedge}} \mathcal{F}(B,\delta); \\
\mathcal{F}(SiP,\delta) \Leftrightarrow \delta(S) \nvDash \neg\delta(P); & \mathcal{F}(A \vee B,\delta) \Leftrightarrow \mathcal{F}(A,\delta) \mathbin{\dot{\vee}} \mathcal{F}(B,\delta); \\
\mathcal{F}(SoP,\delta) \Leftrightarrow \delta(S) \nvDash \delta(P); & \mathcal{F}(A \supset B,\delta) \Leftrightarrow \dot{\neg}\, \mathcal{F}(A,\delta) \mathbin{\dot{\vee}} \mathcal{F}(B,\delta).
\end{array}$$

Поясним это определение на примерах. Если термину S функция δ приписывает формулу $q \wedge r$, а термину P формулу $q \vee r$, то силлогистическая формула SaP значима при этой интерпретации, так как из первой пропозициональной формулы логически следует вторая. Если же термину S приписана $q \vee r$, а термину P — формула $\neg q \wedge \neg r$, то силлогистическая формула SiP не является значимой, поскольку из первой следует отрицание второй. Значимой при данной интерпретации оказывается противоречащая ей формула SeP.

Формула A называется $\mathcal{F}$-общезначимой, е.т.е. $\mathcal{F}(A,\delta)$ при любой интерпретации общих терминов δ. Множество $\mathcal{F}$-общезначимых формул, как показал В.И. Шалак [Шалак, 2015], совпадает с множеством теорем силлогистического исчисления **СФ**.

В русле развиваемого им подхода В.И. Шалак предложил также адекватную семантику для силлогистики Лукасевича (системы **С4**). Ее можно получить, если ограничить возможные значения общих терминов классически непротиворечивыми пропозициональными формулами. Иными словами, необходимо вместо функции δ (сопоставляющей общему термину *любую* пропозициональную формулу) ввести в семантику интерпретирующую функцию δ', которая каждому общему термину приписывает в качестве значения некоторую *выполнимую* формулу. Новый предикат значимости $\mathcal{F}'(A, \delta')$ определяется аналогично предикату $\mathcal{F}(A, \delta)$. Разница лишь в том, что функция δ в определении последнего меняется на δ'.

Формула A называется $\mathcal{F}'$-общезначимой, е.т.е. $\mathcal{F}'(A, \delta')$ при любой интерпретации общих терминов δ'. Из полученного В.И. Шалаком результата [Шалак, 2015] следует, что множество $\mathcal{F}'$-общезначимых силлогистических формул равно множеству теорем системы **С4**.

«Синтаксическую» интерпретацию силлогистики, предложенную В.И. Шалаком, не следует противопоставлять интенсиональной интерпретации. Более того, можно считать предложенный им подход *новой версией* интенсиональной семантики для силлогистических систем. Дело в том, что нет никакой разницы в приписывании общим терминам пропозициональных формул ($q \vee r$, $q \wedge r$, $\neg q \wedge \neg r$ и т.п.) и в приписывании им бескванторных формул одноместной логики предикатов с единственной свободной переменной x (например, $Q^1(x) \vee R^1(x)$, $Q^1(x) \wedge R^1(x)$, $\neg Q^1(x) \wedge \neg R^1(x)$). С тем же успехом, в качестве значения общему термину можно сопоставлять первопорядковую формулу $A(x)$, которая содержит единственную переменную x и либо является атомарной, либо представляет собой булеву комбинацию атомарных формул. Но, согласно Е.К. Войшвилло [Войшвилло, 1967], предикат $A(x)$ как раз и фиксирует *содержание понятия* $xA(x)$. Следует, конечно, оговориться, что при таком подходе не будет охвачен весь класс понятий, но тем не менее мы будем иметь дело именно с понятиями и их содержаниями.

В рассмотренных ранее интенсиональных семантиках для систем **С4** и **ИСФ** формула SaP интерпретируется как выражающая утверждение о том, что содержание P есть часть содержания S. Метаутверждение «$A(x) \vDash B(x)$», согласно Войшвилло, также означает, что содержание понятия $xB(x)$ есть часть содержания понятия $xA(x)$. Значит, если субъекту S сопоставлена формула $A(x)$, а предикату P — формула $B(x)$, то «синтаксическая» интерпретация SaP аналогична интенсиональной.

Сходная аналогия между указанными интерпретациями имеет место и для других атомарных силлогистических формул. Так, SeP можно трактовать, с интенсиональной точки зрения, как утверждение о логической несовместимости содержаний субъекта и предиката. Но и при интерпретации В.И. Шалака условие значимости SeP — «$\delta(S) \vDash \neg\delta(P)$» — фиксирует именно это отношение.

В.И. Маркин в [Маркин, 2016a] поставил вопрос о том, изменится ли класс общезначимых формул, если в условиях значимости заменить отношение классического следования на отношение релевантного следования.

Тогда семантика видоизменяется следующим образом. Вводится новый предикат значимости $\mathcal{I}$, который на атомарных силлогистических формулах определяется так:

$$\begin{aligned}
\mathcal{I}(SaP, \delta) &\Leftrightarrow \delta(S) \vDash_{rel} \delta(P);\\
\mathcal{I}(SeP, \delta) &\Leftrightarrow \delta(S) \vDash_{rel} \neg\delta(P);\\
\mathcal{I}(SiP, \delta) &\Leftrightarrow \delta(S) \nvDash_{rel} \neg\delta(P);\\
\mathcal{I}(SoP, \delta) &\Leftrightarrow \delta(S) \nvDash_{rel} \delta(P),
\end{aligned}$$

где δ — функция, сопоставляющая каждому общему термину формулу языка классической логики высказываний, не содержащую иных пропозициональных связок, кроме $\neg$, $\wedge$ и $\vee$, а «$\vDash_{rel}$» — следование в релевантной логике **FDE**. Условия значимости сложных формул остаются прежними.

Хорошо видно, что отличие $\mathcal{I}$ от ранее использовавшегося предиката значимости $\mathcal{F}$ состоит лишь в замене классического следования ($\vDash$) на релевантное ($\vDash_{rel}$).

Силлогистическая формула A называется $\mathcal{I}$-общезначимой, е.т.е. $\mathcal{I}(A, \delta)$ при любой интерпретации δ.

Выяснилось, что множество $\mathcal{I}$-общезначимых формул не совпадает с множеством $\mathcal{F}$-общезначимых формул: первое строго включается во второе. Таким образом, при замене классического следования на релевантное в определении значимости силлогистических формул семантика перестает быть адекватной силлогистике **СФ**. Например, законы фундаментальной силлогистики $SiP \supset SiS$ и $SoP \supset SiS$ не являются $\mathcal{I}$-общезначимыми.

В работе [Маркин, 2016a] было доказано, что класс $\mathcal{I}$-общезначимых формул аксиоматизируется системой **ИСФ**.

Использование релевантного следования при интерпретации форм категорических высказываний представляет интерес именно в контексте построения интенсиональной семантики силлогистики. Е.К. Войшвилло неоднократно подчеркивал, что релевантное следование представляет собой отношение между высказываниями *по информации*, по их содержаниям, в то время как классическое следование фиксирует связь между высказываниям лишь по их значениям. С этой точки зрения, релевантное следование имеет интенсиональную природу, а классическое — экстенсиональную.

Адекватные семантики в духе В.И. Шалака с использованием как классического, так и релевантного следования можно сформулировать не только для упомянутых выше исчислений, но и для других известных систем позитивной силлогистики, которые формулируются в языке со стандартным набором силлогистических констант $\{a, e, i, o\}$ (см. [Маркин, 2016b]). Однако представляет интерес построение интенсиональных семантик для силлогистик с нестандартными силлогистическими константами. Одной из таких теорий является логика классов Дж. Венна.

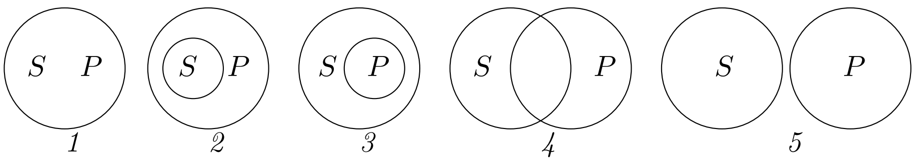
2. Логика классов Дж. Венна и ее формализация

В первой главе своего фундаментального труда «Символическая логика» [Venn, 1881] Дж. Венн дает достаточно подробное изложение оригинальной логической системы, которую можно охарактеризовать как теорию бинарных отношений между классами. Он выделяет пять базовых отношений между двумя множествами:

1. Равенство множеств;
2. Строгое включение первого множества во второе;
3. Строгое включение второго множества в первое;
4. Перекрещивание множеств;
5. Несовместимость (внеположенность) множеств.

Каждому из этих отношений соответствует одна из пяти диаграмм Эйлера–Жергонна, которые приведены на Рис. 1.

Рис. 1. Диаграммы Эйлера–Жергонна



Венн ставит вопрос о способе выражения каждого из этих отношений в языке. При этом он существенно опирается на классификацию суждений, предложенную У. Гамильтоном, который считал необходимым при определении количественной характеристики категорического высказывания принимать во внимание квантификацию не только субъекта, но и предиката. Если в идущей от Аристотеля традиции категорические суждения делятся по количеству на общие и частные, то в учении Гамильтона они должны делиться на обще-общие, обще-частные, частно-общие и частно-частные.

Каждое из отношений *1–4* между двумя множествами адекватно выражается одной из четырех разновидностей утвердительных высказываний с квантифицированными субъектами и предикатами, отношение *5* — обще-общим отрицательным высказыванием (которое Венн считает эквивалентным обычному общеотрицательному высказыванию):

1. Все S есть все P;
2. Все S есть некоторые P;
3. Некоторые S есть все P;
4. Некоторые S есть некоторые P;
5. Ни один S не есть ни один P (Ни один S не есть P).

Далее Венн подробно разбирает силлогизмы первой фигуры, посылками которых являются высказывания этих пяти типов, выделяет среди них корректные и некорректные способы рассуждения.

Таким образом, логическая система Венна может рассматриваться как *силлогистика с нестандартным набором силлогистических констант.* Выбор именно этих констант обусловлен необходимостью репрезентации выделяемых базовых бинарных отношений между классами. Д.В. Дубаков и В.И. Маркин в [Дубаков, Маркин, 2007] предложили следующую символическую запись венновских констант: для отношения *1* используется константа aa, для отношения *2* — константа ai, для отношения *3* — константа ia, для отношения *4* — константа ii, для отношения *5* — стандартная константа e.

При принятии указанных обозначений атомарными формулами силлогистики Венна будут являться выражения видов $SaaP$, $SaiP$, $SiaP$, $SiiP$, SeP, где S и P — общие термины. Если формальную реконструкцию данной логической теории осуществлять в стиле Лукасевича, то есть с использованием в качестве основы классической логики высказываний, то в язык следует также ввести пропозициональные связки и скобки. Сложные формулы задаются при этом обычным способом.

Существуют два аксиоматических исчисления, которые могут претендовать на роль современной реконструкции силлогистической логики классов Дж. Венна: система **C4V** Д.В. Дубакова и В.И. Маркина [Дубаков, Маркин, 2007] и система **CΦV**, построенная В.И. Маркиным в [Маркин, 2011]. Главное различие между ними в том, что в исчислении **CΦV** недоказуемы некоторые из так называемых «законов противоположностей», которые являются теоремами **C4V**:

$$\neg(SaaP \wedge SeP),\ \neg(SaiP \wedge SeP),\ \neg(SiaP \wedge SeP).$$

Причина неоднозначности в выборе адекватной формализации силлогистики Венна, как отмечает В.И. Маркин [Маркин, 2011], состоит в двойственности позиции самого автора по вопросу о принятии «законов противоположностей». С одной стороны, Венн четко заявляет, что каждому из пяти атомарных суждений соответствует ровна одна диаграмма, и тогда они должны быть попарно противоположными. С другой стороны, он дает такую алгебро-логическую интерпретацию этих суждений, при которой допускаются пустые классы в качестве значений субъектов и предикатов. Но при пустых S и P высказывания форм $SaaP$ и SeP оказываются одновременно истинными; $SaiP$ и SeP истинны при пустом S и непустом P; а при пустом P и непустом S также будут вместе истинными высказывания форм $SiaP$ и SeP. Поэтому реконструкция силлогистики Венна может быть осуществлена в двух вариантах: «традиционном» (с исходной предпосылкой о непустоте терминов) и «фундаментальном» (без данной экзистенциальной предпосылки).

«Традиционный» вариант современной реконструкции силлогистики Венна (как логики бинарных отношений между *непустыми* классами) представляется исчислением **C4V**, схемами аксиом которого наряду с пропозициональными тавтологиями (**V0**) являются:

V1. $(MaaP \wedge SaaM) \supset SaaP$;
V2. $(MaaP \wedge SaiM) \supset SaiP$;
V3. $(MaiP \wedge SaaM) \supset SaiP$;
V4. $(MaiP \wedge SaiM) \supset SaiP$;
V5. $(MeP \wedge SaaM) \supset SeP$;
V6. $(MeP \wedge SaiM) \supset SeP$;
V7. $SaaP \supset PaaS$;
V8. $SaiP \supset PiaS$;
V9. $SiaP \supset PaiS$;
V10. $SiiP \supset PiiS$;
V11. $SeP \supset PeS$;
V12. $SaaS$;
V13. $\neg(SaaP \wedge SaiP)$;
V14. $\neg(SaaP \wedge SiaP)$;
V15. $\neg(SaaP \wedge SiiP)$;
V16. $\neg(SaiP \wedge SiaP)$;
V17. $\neg(SaiP \wedge SiiP)$;
V18. $\neg(SaaP \wedge SeP)$;
V19. $\neg(SiiP \wedge SeP)$;
V20. $SaaP \vee SaiP \vee SiaP \vee SiiP \vee SeP$.

Единственное правило вывода этого исчисления — *modus ponens.*

При построении «фундаментального» варианта реконструкции силлогистики Венна как логики *любых* (в том числе, и *пустых*) классов, аксиоматика видоизменяется. Постулатами соответствующей системы **СФV** являются: правило *modus ponens*, **V0**, схемы аксиом **V1–V17**, **V19–V20** системы **C4V**, и две дополнительные схемы аксиом:

V21. $SeS \supset SeP$; **V22.** $SeS \supset (SaaP \vee SaiP)$.

Формулы последних двух типов доказуемы в **C4V**, поэтому исчисление **СФV** является подсистемой **C4V**.

Д.В. Дубаков и В.И. Маркин показали [Дубаков, Маркин, 2007], что исчисление **C4V** рекурсивно эквивалентно системе позитивной фундаментальной силлогистики **C4**, строящейся в языке со стандартными константами, то есть эти исчисления погружаются друг в друга.

Существует перевод υ_1, погружающий систему **C4V** в систему **C4**:

$\upsilon_1(SaaP) = SaP \wedge PaS$; $\upsilon_1(SiiP) = SiP \wedge SoP \wedge PoS$;
$\upsilon_1(SaiP) = SaP \wedge PoS$; $\upsilon_1(SeP) = SeP$;
$\upsilon_1(SiaP) = SoP \wedge PaS$; $\upsilon_1(\neg A) = \neg\upsilon_1(A)$;
$\upsilon_1(A \nabla B) = \upsilon_1(A) \nabla \upsilon_1(B)$, где ∇ — бинарная связка.

Существует также обратный перевод υ_2, погружающий систему **C4** в систему **C4V**:

$\upsilon_2(SaP) = SaaP \vee SaiP$; $\upsilon_2(SiP) = \neg SeP$;
$\upsilon_2(SeP) = SeP$; $\upsilon_2(SoP) = \neg SaaP \wedge \neg SaiP$;
$\upsilon_2(\neg A) = \neg\upsilon_2(A)$; $\upsilon_2(A \nabla B) = \upsilon_2(A) \nabla \upsilon_2(B)$.

В [Маркин, 2011] отмечается, что перевод υ_1 погружает также систему **СФV** (формализующую «фундаментальный» вариант силлогистики Венна) в исчисление **СФ** (со стандартным набором силлогистических констант), а перевод υ_2 погружает **СФ** в **СФV**. Таким образом, исчисления **СФV** и **СФ** также являются рекурсивно эквивалентными.

3. Интенсиональная семантика силлогистик СФV и C4V

Сформулируем сначала интенсиональную семантику, в которой высказывания языка силлогистики Венна интерпретируются через отношение классического следования между формулами пропозициональной логики, для системы **СФV** — формализации «фундаментальной» версии силлогистики Венна.

Пусть δ — функция, сопоставляющая каждому общему термину *любую* формулу языка классической логики высказываний, не содержащую иных пропозициональных связок, кроме $\neg, \wedge, \vee$. Зададим предикат $\mathcal{V}$ значимости формул языка **СФV** при интерпретации δ. Для атомарных формул этот предикат определяется так:

$$\mathcal{V}(SaaP, \delta) \Leftrightarrow \delta(S) \vDash \delta(P) \dot{\wedge} \delta(P) \vDash \delta(S);$$
$$\mathcal{V}(SaiP, \delta) \Leftrightarrow \delta(S) \vDash \delta(P) \dot{\wedge} \delta(P) \nvDash \delta(S);$$
$$\mathcal{V}(SiaP, \delta) \Leftrightarrow \delta(S) \nvDash \delta(P) \dot{\wedge} \delta(P) \vDash \delta(S);$$
$$\mathcal{V}(SiiP, \delta) \Leftrightarrow \delta(S) \nvDash \neg\delta(P) \dot{\wedge} \delta(S) \nvDash \delta(P) \dot{\wedge} \delta(P) \nvDash \delta(S);$$
$$\mathcal{V}(SeP, \delta) \Leftrightarrow \delta(S) \vDash \neg\delta(P).$$

Для сложных формул условия значимости обычные.

Формула A называется $\mathcal{V}$-общезначимой, если и только если $\dot{\forall}\delta\mathcal{V}(A, \delta)$, то есть A значима при любой интерпретации δ.

Условимся, что $\mathbf{L}$ — множество формул силлогистического языка со стандартными исходными константами a, e, i, o, а $\mathbf{L_V}$ — множество формул языка силлогистики Венна, в котором исходными являются константы aa, ai, ia, ii и e.

Для демонстрации адекватности данной семантики исчислению **СФV** необходимо сначала доказать следующую метатеорему:

Теорема 1. *Произвольная формула $A \in \mathbf{L_V}$ $\mathcal{V}$-общезначима, если и только если ее перевод $v_1(A)$ $\mathcal{F}$-общезначим.*

Доказательство. Обоснуем предварительно следующее утверждение:

$$\dot{\forall}A \in \mathbf{L_V}\dot{\forall}\delta(\mathcal{V}(A, \delta) \Leftrightarrow \mathcal{F}(v_1(A), \delta)).$$

Будем использовать возвратную индукцию по числу пропозициональных связок в формуле A.

I. $A = SaaP$.
$\mathcal{V}(SaaP, \delta) \Leftrightarrow \delta(S) \vDash \delta(P) \dot{\wedge} \delta(P) \vDash \delta(S) \Leftrightarrow \mathcal{F}(SaP, \delta) \dot{\wedge} \mathcal{F}(PaS, \delta) \Leftrightarrow \mathcal{F}(SaP \wedge PaS, \delta) \Leftrightarrow \mathcal{F}(v_1(SaaP), \delta)$.

II. $A = SaiP$.
$\mathcal{V}(SaiP, \delta) \Leftrightarrow \delta(S) \vDash \delta(P) \dot{\wedge} \delta(P) \nvDash \delta(S) \Leftrightarrow \mathcal{F}(SaP, \delta) \dot{\wedge} \mathcal{F}(PoS, \delta) \Leftrightarrow \mathcal{F}(SaP \wedge PoS, \delta) \Leftrightarrow \mathcal{F}(v_1(SaiP), \delta)$.

III. $A = SiaP$.
$\mathcal{V}(SiaP, \delta) \Leftrightarrow \delta(S) \nvDash \delta(P) \dot{\wedge} \delta(P) \vDash \delta(S) \Leftrightarrow \mathcal{F}(SoP, \delta) \dot{\wedge} \mathcal{F}(PaS, \delta) \Leftrightarrow \mathcal{F}(SoP \wedge PaS, \delta) \Leftrightarrow \mathcal{F}(v_1(SiaP), \delta)$.

IV. $A = SiiP$.
$\mathcal{V}(SiiP, \delta) \Leftrightarrow \delta(S) \not\models \neg\delta(P) \mathbin{\dot\wedge} \delta(S) \not\models \delta(P) \mathbin{\dot\wedge} \delta(P) \not\models \delta(S) \Leftrightarrow \mathcal{F}(SiP, \delta) \mathbin{\dot\wedge} \mathcal{F}(SoP, \delta) \mathbin{\dot\wedge} \mathcal{F}(PoS, \delta) \Leftrightarrow \mathcal{F}(\upsilon_1(SiiP), \delta)$.

V. $A = SeP$.
$\mathcal{V}(SeP, \delta) \Leftrightarrow \delta(S) \models \neg\delta(P) \Leftrightarrow \mathcal{F}(SeP, \delta) \Leftrightarrow \mathcal{F}(\upsilon_1(SeP), \delta)$.

VI. $A = \neg B$.
$\mathcal{V}(\neg B, \delta) \Leftrightarrow \dot\neg\mathcal{V}(B, \delta) \Leftrightarrow \dot\neg\mathcal{F}(\upsilon_1(B), \delta) \Leftrightarrow \mathcal{F}(\neg\upsilon_1(B), \delta) \Leftrightarrow \mathcal{F}(\upsilon_1(\neg B), \delta)$.

VII. $A = B \supset C$.
$\mathcal{V}(B \supset C, \delta) \Leftrightarrow \dot\neg\mathcal{V}(B, \delta) \mathbin{\dot\vee} \mathcal{V}(C, \delta) \Leftrightarrow \dot\neg\mathcal{F}(\upsilon_1(B), \delta) \mathbin{\dot\vee} \mathcal{F}(\upsilon_1(C), \delta) \Leftrightarrow \mathcal{F}(\upsilon_1(B) \supset \upsilon_1(C), \delta) \Leftrightarrow \mathcal{F}(\upsilon_1(B \supset C), \delta)$.

Другие случаи, когда A есть сложная формула, обосновываются аналогично.

Экививалентные преобразования в пяти базисных пунктах осуществляются на основе определений предикатов $\mathcal{V}$ и $\mathcal{F}$ и перевода υ_1, в индуктивном переходе используется также индуктивное допущение о том, что утверждение леммы верно для формул с меньшим, чем у A, числом пропозициональных связок.

Из доказанного утверждения — $\dot\forall A \in \mathbf{L_V} \dot\forall\delta(\mathcal{V}(A, \delta) \Leftrightarrow \mathcal{F}(\upsilon_1(A), \delta))$ — по законам первопорядковой логики следует:

$$\dot\forall A \in \mathbf{L_V}(\dot\forall\delta\mathcal{V}(A, \delta) \Leftrightarrow \dot\forall\delta\mathcal{F}(\upsilon_1(A), \delta)).$$

Последнее означает, что произвольная формула A $\mathcal{V}$-общезначима в том и только в том случае, когда $\mathcal{F}$-общезначима формула $\upsilon_1(A)$. ■

Докажем теперь метатеорему об адекватности сформулированной выше семантики исчислению **СФV**.

Теорема 2. *Произвольная формула $A \in \mathbf{L_V}$ доказуема в исчислении* **СФV***, если и только если A — $\mathcal{V}$-общезначимая формула.*

Доказательство. В.И. Маркин [Маркин, 2011] установил, что перевод υ_1 погружает «фундаментальный» вариант силлогистики Венна **СФV** в стандартную фундаментальную силлогистику **СФ**, то есть

$$\dot\forall A \in \mathbf{L_V}(\mathbf{C\Phi V} \vdash A \Leftrightarrow \mathbf{C\Phi} \vdash \upsilon_1(A)). \tag{1}$$

Полученный В.И. Шалаком [Шалак, 2015] результат свидетельствует о том, что все теоремы **СФ**, и только они, являются $\mathcal{F}$-общезначимыми формулами:

$$\dot\forall B \in \mathbf{L}(\mathbf{C\Phi} \vdash B \Leftrightarrow \dot\forall\delta\mathcal{F}(B, \delta)). \tag{2}$$

Данная равносильность справедлива и для υ_1-переводов формул из $\mathbf{L_V}$, поскольку эти переводы принадлежат $\mathbf{L}$:

$$\dot{\forall} A \in \mathbf{L_V}(\mathbf{C\Phi} \vdash \upsilon_1(A) \Leftrightarrow \dot{\forall}\delta\mathcal{F}(\upsilon_1(A), \delta)). \tag{3}$$

Согласно доказанной нами ранее **Теореме 1**,

$$\dot{\forall} A \in \mathbf{L_V}(\dot{\forall}\delta\mathcal{V}(A, \delta) \Leftrightarrow \dot{\forall}\delta\mathcal{F}(\upsilon_1(A), \delta)). \tag{4}$$

Элементарным следствием утверждений (1), (3) и (4) является следующий тезис:

$$\dot{\forall} A \in \mathbf{L_V}(\mathbf{C\Phi V} \vdash A \Leftrightarrow \dot{\forall}\delta\mathcal{V}(A, \delta)). \tag{5}$$

Этот тезис означает, что множество теорем **СФV** равно множеству $\mathcal{V}$-общезначимых формул. ■

Сформулируем далее адекватную семантику того же самого типа для системы **C4V** — формализации другого, «традиционного» варианта силлогистики Венна, то есть для его логики бинарных отношений между *непустыми* классами.

Вместо интерпретирующей функции δ, сопоставляющей общим терминам *любую* формулу языка логики высказываний, не содержащую иных связок, кроме $\wedge$, $\vee$ и $\neg$, будем использовать функцию δ', которая сопоставляет каждому общему термину некоторую *выполнимую* формулу указанного типа.

Предикат значимости силлогистической формулы A при интерпретации δ' — $\mathcal{V}'(A, \delta')$ — определяется так же, как и предикат $\mathcal{V}(A, \delta)$, с той лишь разницей, что вместо δ используется δ'. Формула A называется $\mathcal{V}'$-общезначимой, если и только если $\mathcal{V}'(A, \delta')$ для любой интерпретации δ'.

Напомним, что предложенная В.И. Шалаком адекватная семантика системы **C4** со стандартным набором исходных силлогистических констант может быть получена аналогичным образом: заменой в условиях значимости формул системы **СФ** интерпретирующей функции δ на функцию δ'. Действуя таким образом, вместо предиката значимости $\mathcal{F}(A, \delta)$ получим предикат $\mathcal{F}'(A, \delta')$.

Теорема 3. *Произвольная формула $A \in \mathbf{L_V}$ $\mathcal{V}'$-общезначима, если и только если ее перевод $\upsilon_1(A)$ $\mathcal{F}'$-общезначим.*

Доказательство. Воспроизводим доказательство **Теоремы 1** меняя $\mathcal{V}$ на $\mathcal{V}'$, δ на δ', $\mathcal{F}$ на $\mathcal{F}'$. ■

Теорема 4. *Произвольная формула $A \in \mathbf{L_V}$ доказуема в исчислении* **C4V**, *если и только если A — $\mathcal{V}'$-общезначимая формула.*

Доказательство. Доказательство осуществляется по тому же плану, что и в **Теореме 2**. При этом используются: (1) результат Д.В. Дубакова и В.И. Маркина [Дубаков, Маркин, 2007] о том, что υ_1 погружает систему **C4V** в **C4**; (2) результат В.И. Шалака [Шалак, 2015] о том, что множество теорем **C4** равно множеству $\mathcal{V}'$-общезначимых формул; (3) **Теорема 3**. ■

4. Релевантизированная семантика языка силлогистики Венна. Система ИСФV

В предыдущем разделе мы показали, что логические системы Венна, которые строились им как сугубо экстенсиональные логические теории, имеют адекватные интенсиональные интерпретации в духе В.И. Шалака. Можно сделать еще один шаг в «интенсионализации» семантики для силлогистики Венна: использовать в условиях значимости формул из $\mathbf{L_V}$ вместо классического следования релевантное.

Пусть δ — функция, сопоставляющая каждому общему термину произвольную формулу языка классической логики высказываний, не содержащую иных пропозициональных связок, кроме $\neg$, $\wedge$ и $\vee$, а «$\vDash_{rel}$» — следование в релевантной логике **FDE**. Определим соответствующий предикат значимости $\mathcal{W}$:

$$\mathcal{W}(SaaP,\delta) \Leftrightarrow \delta(S) \vDash_{rel} \delta(P) \mathbin{\dot\wedge} \delta(P) \vDash_{rel} \delta(S);$$
$$\mathcal{W}(SaiP,\delta) \Leftrightarrow \delta(S) \vDash_{rel} \delta(P) \mathbin{\dot\wedge} \delta(P) \nvDash_{rel} \delta(S);$$
$$\mathcal{W}(SiaP,\delta) \Leftrightarrow \delta(S) \nvDash_{rel} \delta(P) \mathbin{\dot\wedge} \delta(P) \vDash_{rel} \delta(S);$$
$$\mathcal{W}(SiiP,\delta) \Leftrightarrow \delta(S) \nvDash_{rel} \neg\delta(P) \mathbin{\dot\wedge} \delta(S) \nvDash_{rel} \delta(P) \mathbin{\dot\wedge} \delta(P) \nvDash_{rel} \delta(S);$$
$$\mathcal{W}(SeP,\delta) \Leftrightarrow \delta(S) \vDash_{rel} \neg\delta(P).$$

Для сложных формул условия значимости обычные.

Формула A называется $\mathcal{W}$-общезначимой, если и только если $\dot\forall\delta\mathcal{W}(A,\delta)$.

Некоторые теоремы исчисления **СФV** не являются $\mathcal{W}$-общезначимыми формулами. Адекватное «релевантизированной» семантике исчисление **ИСФV** получается из **СФV** отбрасыванием схем аксиом **V21** и **V22**. Систему **ИСФV** можно также получить из «традиционной» версии силлогистики Венна — системы **C4V**, исключив из постулатов последней схему аксиом **V18** ($\neg(SaaP \wedge SeP)$).

Докажем, что множество теорем **ИСФV** совпадает с множеством $\mathcal{W}$-общезначимых формул.

Продемонстрируем сначала рекурсивную эквивалентность (взаимную погружаемость) исчислений **ИСФV** и **ИСФ**. Погружающими функциями при этом будут заданные в предыдущем разделе переводы υ_1 (из $\mathbf{L_V}$ в $\mathbf{L}$) и υ_2 (из $\mathbf{L}$ в $\mathbf{L_V}$).

Теорема 5. *Перевод* υ_1 *погружает систему* **ИСФV** *в систему* **ИСV**, *а перевод* υ_2 *погружает систему* **ИСФ** *в систему* **ИСФV**, *т.е.*
$\dot{\forall} A \in \mathbf{L_V}(\textbf{ИСФV} \vdash A \Leftrightarrow \textbf{ИСФ} \vdash \upsilon_1(A))$ *и*
$\dot{\forall} A \in \mathbf{L}(\textbf{ИСФ} \vdash A \Leftrightarrow \textbf{ИСФV} \vdash \upsilon_2(A))$.

Доказательство. Данная теорема будет доказываться с использованием следующего критерия взаимной погружаемости двух исчислений, в основе которого лежит известный критерий погружаемости В.А. Смирнова [Смирнов, 2002, с. 127]:

«Исчисление $\mathbf{S_1}$ погружается в исчисление $\mathbf{S_2}$ посредством фукнции υ_1 (из множества формул $\mathbf{S_1}$ в множество формул $\mathbf{S_2}$), а исчисление $\mathbf{S_2}$ погружается в исчисление $\mathbf{S_1}$ посредством фукнции υ_2 (из множества формул $\mathbf{S_2}$ в множество формул $\mathbf{S_1}$), если и только если (a) для каждой формулы A языка $\mathbf{S_1}$ имеет место: $\mathbf{S_1} \vdash A \Rightarrow \mathbf{S_2} \vdash \upsilon_1(A)$, (b) для каждой формулы A языка $\mathbf{S_2}$ имеет место: $\mathbf{S_2} \vdash A \Rightarrow \mathbf{S_1} \vdash \upsilon_2(A)$, (c) для каждой формулы A языка $\mathbf{S_1}$ имеет место: $\mathbf{S_1} \vdash A \equiv \upsilon_2(\upsilon_1(A))$, (d) для каждой формулы A языка $\mathbf{S_2}$ имеет место: $\mathbf{S_2} \vdash A \equiv \upsilon_1(\upsilon_2(A))$».

(a) Докажем, что $\dot{\forall} A \in \mathbf{L_V}(\textbf{ИСФV} \vdash A \Rightarrow \textbf{ИСФ} \vdash \upsilon_1(A))$.

Используем возвратную индукцию по длине доказательства формулы A в исчислении **ИСФV**. Необходимо показать, что υ_1-переводы всех аксиом **ИСФV** доказуемы в **ИСФ**, а также что правило *modus ponens* «сохраняет» доказуемость в **ИСФ** υ_1-переводов формул из $\mathbf{L_V}$.

V0. Переводы классических тавтологий также являются тавтологиями и поэтому доказуемы в **ИСФ**.

V1. $\upsilon_1((MaaP \wedge SaaM) \supset SaaP) = ((MaP \wedge PaM) \wedge (SaM \wedge MaS)) \supset (SaP \wedge PaS)$.

V2. $\upsilon_1((MaaP \wedge SaiM) \supset SaiP) = ((MaP \wedge PaM) \wedge (SaM \wedge MoS)) \supset (SaP \wedge PoS)$.

V3. $\upsilon_1((MaiP \wedge SaaM) \supset SaiP) = ((MaP \wedge PoM) \wedge (SaM \wedge MaS)) \supset (SaP \wedge PoS)$.

V4. $\upsilon_1((MaiP \wedge SaiM) \supset SaiP) = ((MaP \wedge PoM) \wedge (SaM \wedge MoS)) \supset (SaP \wedge PoS)$.

V5. $\upsilon_1((MeP \wedge SaaM) \supset SeP) = (MeP \wedge (SaM \wedge MaS)) \supset SeP$.

V6. $\upsilon_1((MeP \wedge SaiM) \supset SeP) = (MeP \wedge (SaM \wedge MoS)) \supset SeP$.

V7. $\upsilon_1(SaaP \supset PaaS) = (SaP \wedge PaS) \supset (PaS \wedge SaP)$.

V8. $\upsilon_1(SaiP \supset PiaS) = (SaP \wedge PoS) \supset (PoS \wedge SaP)$.

V9. $\upsilon_1(SiaP \supset PaiS) = (SoP \wedge PaS) \supset (PaS \wedge SoP)$.

V10. $\upsilon_1(SiiP \supset PiiS) = (SiP \wedge SoP \wedge PoS) \supset (PiS \wedge PoS \wedge SoP)$.

V11. $\upsilon_1(SeP \supset PeS) = SeP \supset PeS$.

V12. $\upsilon_1(SaaS) = SaS \wedge SaS$.

V13. $\upsilon_1(\neg(SaaP \wedge SaiP)) = \neg((SaP \wedge PaS) \wedge (SaP \wedge PoS))$.

V14. $\upsilon_1(\neg(SaaP \wedge SiaP)) = \neg((SaP \wedge PaS) \wedge (SoP \wedge PaS))$.

V15. $\upsilon_1(\neg(SaaP \wedge SiiP)) = \neg((SaP \wedge PaS) \wedge (SiP \wedge SoP \wedge PoS))$.

V16. $\upsilon_1(\neg(SaiP \wedge SiaP)) = \neg((SaP \wedge PoS) \wedge (SoP \wedge PaS))$.

V17. $\upsilon_1(\neg(SaiP \wedge SiiP)) = \neg((SaP \wedge PoS) \wedge (SiP \wedge SoP \wedge PoS))$.

V19. $\upsilon_1(\neg(SiiP \wedge SeP)) = \neg((SiP \wedge SoP \wedge PoS) \wedge SeP)$.

V20. $\upsilon_1(SaaP \vee SaiP \vee SiaP \vee SiiP \vee SeP) = (SaP \wedge PaS) \vee (SaP \wedge PoS) \vee (SoP \wedge PaS) \vee (SiP \wedge SoP \wedge PoS) \vee SeP$.

В работе [Дубаков, Маркин, 2007] приведены доказательства в исчислении **C4** перечисленных υ_1-переводов аксиом системы **ИСФV**, причем в этих доказательствах используются лишь те постулаты **C4**, которые принимаются в этом же качестве и в ее подсистеме **ИСФ**.

Modus ponens. Допустим, что $\upsilon_1(A \supset B)$ и $\upsilon_1(A)$ доказуемы в **ИСФ**. Поскольку $\upsilon_1(A \supset B) = \upsilon_1(A) \supset \upsilon_1(B)$, то $\upsilon_1(A) \supset \upsilon_1(B)$ является теоремой **ИСФ**. Но $\upsilon_1(A)$ тоже теорема этой системы. Следовательно, $\upsilon_1(B)$ доказуема в **ИСФ**.

(b) Докажем, что $\dot{\forall} A \in \mathbf{L}(\textbf{ИСФ} \vdash A \Rightarrow \textbf{ИСФV} \vdash \upsilon_2(A))$.

Используем тот же метод, что и в пункте (a).

A0. Переводы классических тавтологий также являются тавтологиями и поэтому доказуемы в **ИСФV**.

A1. $\upsilon_2((MaP \wedge SaM) \supset SaP) = ((MaaP \vee MaiP) \wedge (SaaM \vee SaiM)) \supset (SaaP \vee SaiP)$.
Доказывается в **ИСФV** с использованием аксиом **V1**–**V4**.

A2. $\upsilon_2((MeP \wedge SaM) \supset SeP) = (MeP \wedge (SaaM \vee SaiM)) \supset SeP$.
Доказывается в **ИСФV** с использованием аксиом **V5**–**V6**.

A3. $\upsilon_2(SeP \supset PeS) = SeP \supset PeS$.
Аксиома **V11** системы **ИСФV**.

A4. $\upsilon_2(SaS) = SaaS \vee SaiS$.
Выводится из аксиомы **V12** системы **ИСФV**.

A7. $\upsilon_2(SeP \equiv \neg SiP) = (SeP \equiv \neg\neg SeP)$;

A8. $\upsilon_2(SoP \equiv \neg SaP) = ((\neg SaaP \wedge \neg SaiP) \equiv \neg(SaaP \vee SaiP))$.
Классические тавтологии.

Modus ponens. Обосновывается так же, как в предыдущем пункте.

(c) Докажем, что $\dot{\forall} A \in \mathbf{L_V}(\textbf{ИСФV} \vdash (A \equiv \upsilon_2(\upsilon_1(A)))$.

Доказательство ведется возвратной индукцией по числу пропозициональных связок в формуле A.

Пусть A — атомарная формула одного из пяти типов. Если $A \rightleftharpoons SaaP$, то $\upsilon_2(\upsilon_1(A)) = \upsilon_2(SaP \wedge PaS) = (SaaP \vee SaiP) \wedge (PaaS \vee PaiS)$. Если $A \rightleftharpoons SaiP$, то $\upsilon_2(\upsilon_1(A)) = \upsilon_2(SaP \wedge PoS) = (SaaP \vee SaiP) \wedge (\neg PaaS \wedge \neg PaiS)$.

Если $A \rightleftharpoons SiaP$, то $\upsilon_2(\upsilon_1(A)) = \upsilon_2(SoP \wedge PaS) = (\neg SaaP \wedge \neg SaiP) \wedge (PaaS \vee PaiS)$. Если $A \rightleftharpoons SiiP$, то $\upsilon_2(\upsilon_1(A)) = \upsilon_2(SiP \wedge SoP \wedge PoS)) = \neg SeP \wedge (\neg SaaP \wedge \neg SaiP) \wedge (\neg PaaS \wedge \neg PaiS))$. Если $A \rightleftharpoons SeP$, то $\upsilon_2(\upsilon_1(A)) = \upsilon_2(SeP) = SeP$.

Таким образом, необходимо доказать в **ИСФV** следующие теоремы:
$SaaP \equiv ((SaaP \vee SaiP) \wedge (PaaS \vee PaiS))$;
$SaiP \equiv ((SaaP \vee SaiP) \wedge (\neg PaaS \wedge \neg PaiS))$;
$SiaP \equiv ((\neg SaaP \wedge \neg SaiP) \wedge (PaaS \vee PaiS))$;
$SiiP \equiv (\neg SeP \wedge (\neg SaaP \wedge \neg SaiP) \wedge (\neg PaaS \wedge \neg PaiS))$;
$SeP \equiv SeP$.

В работе [Дубаков, Маркин, 2007] приведены доказательства указанных формул в исчислении **C4V**, причем в доказательствах не используется схема аксиом **V18**, а значит эти формулы доказуемы и в системе **ИСФV**.

В тех случаях, когда A есть сложная формула, принимаем допущение, что для любой формулы B, содержащей меньше пропозициональных связок, чем A, верно, что $B \equiv \upsilon_2(\upsilon_1(B))$ доказуема в системе **ИСФV**.

Пусть $A \rightleftharpoons \neg B$. Согласно индуктивному допущению, **ИСФV** $\vdash B \equiv \upsilon_2(\upsilon_1(B))$. По законам логики высказываний отсюда вытекает: **ИСФV** $\vdash \neg B \equiv \neg\upsilon_2(\upsilon_1(B))$. По определению переводов υ_1 и υ_2, имеем: $\upsilon_2(\upsilon_1(\neg B)) = \upsilon_2\neg(\upsilon_1(B)) = \neg\upsilon_2(\upsilon_1(B)))$. Следовательно, в **ИСФV** доказуема формула $\neg B \equiv \upsilon_2(\upsilon_1(\neg B))$.

Пусть $A \rightleftharpoons B \supset C$. Согласно индуктивному допущению, **ИСФV** $\vdash B \equiv \upsilon_2(\upsilon_1(B))$ и **ИСФV** $\vdash C \equiv \upsilon_2(\upsilon_1(C))$. Отсюда по законам логики высказываний вытекает, что и формула $(B \supset C) \equiv (\upsilon_2(\upsilon_1(B)) \supset \upsilon_2(\upsilon_1(C)))$ доказуема в этой системе. Но $\upsilon_2(\upsilon_1(B \supset C)) = \upsilon_2(\upsilon_1(B) \supset \upsilon_1(C)) = \upsilon_2(\upsilon_1(B)) \supset \upsilon_2(\upsilon_1(C))$. Следовательно, **ИСФV** $\vdash (B \supset C) \equiv \upsilon_2(\upsilon_1(B \supset C))$.

Остальные случаи, когда A есть сложная формула, рассматриваются сходным образом.

(d) Докажем, что $\dot{\forall} A \in$ **L(ИСФ** $\vdash (A \equiv \upsilon_1(\upsilon_2(A))))$.

Снова используем возвратную индукцию по числу пропозициональных связок в формуле A.

Сначала рассмотрим четыре случая, когда A — атомарная формула. Если $A \rightleftharpoons SaP$, то $\upsilon_1(\upsilon_2(A)) = \upsilon_1(SaaP \vee SaiP) = ((SaP \wedge PaS) \vee (SaP \wedge PoS))$. Если $A \rightleftharpoons SeP$, то $\upsilon_1(\upsilon_2(A)) = \upsilon_1(SeP) = SeP$. Если $A \rightleftharpoons SiP$, то $\upsilon_1(\upsilon_2(A)) = \upsilon_1(\neg SeP) = \neg\upsilon_1(SeP) = \neg SeP$. Если $A \rightleftharpoons SoP$, то $\upsilon_1(\upsilon_2(A)) = \upsilon_1(\neg SaaP \wedge \neg SaiP) = (\neg(SaP \wedge PaS) \wedge \neg(SaP \wedge PoS))$.

Таким образом, необходимо доказать в **ИСФ** следующие теоремы:
$SaP \equiv ((SaP \wedge PaS) \vee (SaP \wedge PoS))$;
$SeP \equiv SeP$;

$SiP \equiv \neg SeP$;
$SoP \equiv (\neg(SaP \wedge PaS) \wedge \neg(SaP \wedge PoS))$.

В работе [Дубаков, Маркин, 2007] приведены доказательства перечисленных формул с использованием схем **A0**, **A7**, **A8** и правила *modus ponens*. Эти дедуктивные средства входят в число постулатов **ИСФ**, поэтому указанные формулы являются теоремами данной системы.

Индуктивный переход обосновывается аналогично пункту (c).

Обосновав утверждения (a)–(d), мы продемонстрировали взаимную погружаемость силлогистик **ИСФV** и **ИСФ**. ■

Теорема 6. *Произвольная формула $A \in \mathbf{L_V}$ $\mathcal{W}$-общезначима, если и только если ее перевод $\upsilon_1(A)$ $\mathcal{I}$-общезначим.*

Доказательство. Доказательство данной метатеоремы аналогично доказательству **Теоремы 1**.

Предварительно обосновывается следующее утверждение:

$$\dot{\forall} A \dot{\forall} \delta (\mathcal{W}(A, \delta) \Leftrightarrow \mathcal{I}(\upsilon_1(A), \delta).$$

Воспроизводим соответствующую часть доказательства **Теоремы 1**, меняя предикат значимости $\mathcal{V}$ на $\mathcal{W}$, предикат значимости $\mathcal{F}$ на $\mathcal{I}$, классическое следование на релевантное.

Из данной леммы по законам первопорядковой логики получаем:

$$\dot{\forall} A (\dot{\forall} \delta \mathcal{W}(A, \delta) \Leftrightarrow \dot{\forall} \delta \mathcal{I}(\upsilon_1(A), \delta)).$$

Последнее означает, что произвольная формула $A \in \mathbf{L_V}$ $\mathcal{W}$-общезначима в том и только в том случае, когда $\mathcal{I}$-общезначима $\upsilon_1(A)$. ■

Теорема 7. *Для произвольной формулы $A \in \mathbf{L_V}$ верно, что $\upsilon_1(A)$ доказуема в* **ИСФ**, *если и только если $\upsilon_1(A)$ — $\mathcal{I}$-общезначимая формула.*

Доказательство. Семантические непротиворечивость и полнота силлогистики **ИСФ** относительно «релевантизированной» семантики доказаны В.И. Маркиным [Маркин, 2016a]. Произвольная формула из **L** доказуема в данной системе, если и только если она $\mathcal{I}$-общезначима. Поскольку перевод υ_1 любой формулы «венновского» языка из $\mathbf{L_V}$ принадлежит множеству формул стандартного языка **L**, то указанная равносильность (доказуемости в **ИСФ** и $\mathcal{I}$-общезначимости) имеет место и для него. ■

Теорема 8. *Произвольная формула $A \in \mathbf{L_V}$ доказуема в* **ИСФV**, *если и только если A $\mathcal{W}$-общезначима.*

Доказательство. Согласно **Теореме 5**, доказуемость произвольной формулы $A \in \mathbf{L_V}$ в системе **ИСФV** равносильна доказуемости ее перевода $v_1(A)$ в системе **ИСФ**. Согласно **Теореме 7**, доказуемость $v_1(A)$ в **ИСФ** равносильна $\mathcal{I}$-общезначимости $v_1(A)$. И, согласно **Теореме 6**, $\mathcal{I}$-общезначимость $v_1(A)$ равносильна $\mathcal{W}$-общезначимости формулы A. ■

В заключение, сравним три рассмотренных нами системы силлогистики в языке с исходными константами aa, ai, ia, ii и e по их дедуктивной силе.

Системы **C4V**, **СФV** и **ИСФV** очень близки по классам тех силлогистических принципов, которые являются законами этих систем. В этом язык силлогистики Венна серьезно отличается от стандартного силлогистического языка, где переход от «традиционной» к «фундаментальной» версии силлогистики сопровождается отказом от многих известных законов: девяти модусов простого категорического силлогизма, закона обращения для высказываний типа a, многих умозаключений по логическому квадрату и др.

В каждом из исчислений **C4V**, **СФV** и **ИСФV** доказуемы:

- 52 модуса категорического силлогизма (по 13 в каждой фигуре);
- одни и те же законы обращения;
- закон силлогистического тождества $SaaS$;
- закон «исключенного шестого» $SaaP \vee SaiP \vee SiaP \vee SiiP \vee SeP$;
- семь из десяти «законов противоположностей» вида $\neg(SyP \wedge SqP)$, где y и q — различные константы из множества $\{aa, ai, ia, ii, e\}$.

Имеются однако и различия между указанными системами.

Только в **C4V** доказуемы три «закона противоположностей»:

$$\neg(SaaP \wedge SeP),\ \neg(SaiP \wedge SeP),\ \neg(SiaP \wedge SeP).$$

Только в системе **C4V** доказуем аналог «слабого» закона силлогистического тождества:

$$\neg SeS.$$

В системе **СФV** доказуемы ослабления этого закона:

$$SeS \supset SeP,\ \ SeS \supset (SaaP \vee SaiP).$$

А в «релевантизированной» версии «фундаментального» варианта силлогистики Венна **ИСФV** не доказуемы и они.

Литература

Бочаров, Маркин, 2010 – *Бочаров В.А., Маркин В.И.* Силлогистические теории. М.: Прогресс–Традиция, 2010. 333 с.

Войшвилло, 1967 – *Войшвилло Е.К.* Понятие. М.: Изд-во Моск. ун-та, 1967. 287 с.

Дубаков, Маркин, 2007 – *Дубаков Д.В., Маркин В.И.* Система силлогистики с исходными константами, соответствующими круговым диаграммам // Труды научно-исследовательского семинара Логического центра Института философии РАН. Вып. XVIII. М.: ИФ РАН, 2007. С. 63–75.

Лейбниц, 1982 – *Лейбниц Г.В.* Сочинения в 4-х томах. М.: Мысль, 1982–1989.

Лукасевич, 1959 – *Лукасевич Я.* Аристотелевская силлогистика с точки зрения современной формальной логики. М.: Изд-во иностр. лит-ры, 1959. 313 с.

Маркин, 2001 – *Маркин В.И.* Интенсиональная семантика традиционной силлогистики // Логические исследования. Вып. 8. М.: Наука, 2001. С. 82–91.

Маркин, 2002 – *Маркин В.И.* Фундаментальная силлогистика с интенсиональной точки зрения // Логические исследования. Вып. 9. М.: Наука, 2002. С. 119–130.

Маркин, 2011 – *Маркин В.И.* Формальные реконструкции силлогистики Венна // Вестник Московского университета. Серия 7: Философия. 2011. № 1. С. 63–73.

Маркин, 2016a – *Маркин В.И.* Интерпретация категорических высказываний в терминах релевантного следования // Логические исследования. 2016. Т. 22. № 1. С. 70–81.

Маркин, 2016b – *Маркин В.И.* Семантика позитивных силлогистик и релевантное следование // Логико-философские штудии. 2016. Т. 13, № 2. С. 34–39.

Смирнов, 2002 – *Смирнов В.А.* Логические методы анализа научного знания. М.: Эдиториал УРСС, 2002. 263 с.

Шалак, 2015 – *Шалак В.И.* Синтаксическая интерпретация категорических атрибутивных высказываний // Логические исследования. 2015. Т. 21. № 1. С. 60–78.

Shepherdson, 1956 – *Shepherdson J.C.* On the Interpretation of Aristotelian Syllogistic // Journal of Symbolic Logic. 1956. Vol. 21. No. 2. P. 137–147.

Venn, 1881 – *VennJ.* Symbolic Logic. London: Macmillan and Co., 1881. 446 p.

Vladimir I. Markin, Maria M. Legeydo

Intensional Semantics for J. Venn's Logic of Classes

Vladimir I. Markin
Lomonosov Moscow State University,
27/4 Lomonosovskiy prospect, Moscow, 119991, Russian Federation.
E-mail: `markin@philos.msu.ru`

Maria M. Legeydo
Lomonosov Moscow State University,
27/4 Lomonosovskiy prospect, Moscow, 119991, Russian Federation.
E-mail: `mlegeydo@yandex.ru`

Abstract: In this article we expound V.I. Shalack's approach to the adequate semantics for different syllogistic systems construction. The point is that the formulas of propositional logic are associated with the subject and the predicate of the categorical propositions as their meanings. The propositions themselves are interpreted with the help of logical entailment. We constructed semantics of this type for the J. Venn's syllogistic with non-standard primitive propositions: "All S is all P" ($SaaP$), "All S is some P" ($SaiP$), "Some S is all P" ($SiaP$), "Some S is some P" ($SiiP$), "No S is P" (SeP). Each of them corresponds to one of the Euler diagrams. There are two kinds of Venn's syllogistic formalization: one is the theory of the relations between arbitrary classes and another is the theory of the relations between non-empty classes. We construct Shalack's type semantics for the first formalization. We introduce the function δ puts arbitrary propositional formulas in correspondence with the general terms. Let the general terms S and P be interpreted by propositional formulas A and B. $SaaP$ is true under this interpretation iff A entails B and B entails A; $SaiP$ is true iff A entails B and B doesn't entail A; $SiaP$ is true iff A doesn't entail B and B entails A; SeP is true iff A entails the negation of B; $SiiP$ is true iff A doesn't entail B, B doesn't entail A and A doesn't entail the negation of B. Truth definitions for complex syllogistic formulas are standard. The adequate semantics for the second formalization of Venn's syllogistic is constructed by changing the interpretation of general terms: we assign to them only satisfiable propositional formulas. Soundness and completeness theorems are proved for both types of the syllogistic. Also we construct the semantics where we use relevant (**FDE**) entailment in favour of classical entailment in the truth definitions of Venn's syllogistic formulas. We formulate the syllogistic calculus which is adequate to this semantics. In conclusion we compare the deductive power of three Venn's type syllogistics.

Keywords: syllogistic, John Venn, logic of classes, intensional semantics, formalization, axiomatic calculus, logical entailment, relevant entailment

For citation: Markin V.I., Legeydo M.M. "Intensional'naya semantika logiki klassov Dzh. Venna" [Intensional Semantics for J. Venn's Logic of Classes], *Logicheskie Issledovaniya / Logical Investigations*, 2019, Vol. 25, No. 2, pp. 114–137. DOI: 10.21146/2074-1472-2019-25-2-114-137 (In Russian)

References

Bocharov, Markin, 2010 – Bocharov, V.A., Markin, V.I. *Sillogisticheskie teorii* [Syllogistic theories]. Moscow: Progress-tradition Publ., 2010. 333 pp. (In Russian)

Dubakov, Markin, 2007 – Dubakov, D.V., Markin, V.I. "Sistema sillogistiki s ishodnymi konstantami, sootvetstvuyushimi krugovym diagrammam" [The syllogistic system with initial constants corresponding to circular diagrams], in: *Trudy nauchno-issledovatelskogo seminara Logicheskogo centra Instituta filosofii RAN* [Proceedings of scientific research seminar of Logical center Institute of Philosophy RAS]. Vol. XVIII. Moscow: Institute of Philosophy RAS, 2007, pp. 63–75. (In Russian)

Leibniz, 1982 – Leibniz, G. *Sochineniya v 4-h tomah* [Writings in 4 volumes]. Moscow: Mysl', 1982–1989. (In Russian)

Łukasiewicz, 1959 – Łukasiewicz, J. *Aristotelevskaya sillogistika s tochki zreniya sovremennoj formal'noj logiki* [Aristotile's sillogistic from the standpoint of modern formal logic]. Moscow: Foreign Literature Publ., 1959. 313 pp. (In Russian)

Markin, 2001 – Markin, V.I. "Intensional'naya semantika tradicionnoj sillogistiki" [Intensional semantics for traditional syllogistic], in: *Logicheskie issledovaniya* [Logical investigations]. Vol. 8. Moscow: Nauka, 2001, pp. 82–91. (In Russian)

Markin, 2002 – Markin, V.I. "Fundamental'naya sillogistika s intensional'noj tochki zreniya" [Fundamental syllogistic from the intensional standpoint], in: *Logicheskie issledovaniya* [Logical investigations]. Vol. 9. Moscow: Nauka, 2002, pp. 119–130. (In Russian)

Markin, 2011 – Markin, V.I. "Formal'nye rekonstrukcii sillogistiki Venna" [Formal reconstructions of Venn's syllogistic], *Vestnik Moskovskogo universiteta. Seriya 7: Filosofiya* [Moscow University Bulletin. Ser. 7: Philosophy], 2011, No. 1, pp. 63–73. (In Russian)

Markin, 2016a – Markin, V.I. "Interpretaciya kategoricheskih vyskazyvanij v terminah relevantnogo sledovaniya" [Interpretation of categorical propositions in terms of relevant entailment], *Logicheskie issledovaniya* [Logical investigations], 2016, Vol. 22, No. 1, pp. 70–81. (In Russian)

Markin, 2016b – Markin, V.I. "Semantika pozitivnyh sillogistik i relevantnoe sledovanie" [Semantics of positive syllogistics and relevant entailment], *Logiko-filosofskie shtudii* [Logical and philosophical studies], 2016, Vol. 13, No. 2, pp. 34–39. (In Russian)

Shalack, 2015 – Shalack, V.I. "Sintaksicheskaya interpretaciya kategoricheskih atributivnyh vyskazyvanij" [Syntactic interpretation of categorical attributive propositions], *Logicheskie issledovaniya* [Logical investigations], 2015, Vol. 21, No. 1, pp. 60–78. (In Russian)

Shepherdson, 1956 – Shepherdson, J.C. "On the Interpretation of Aristotelian Syllogistic", *Journal of Symbolic Logic*, 1956, Vol. 21, No. 2, pp. 137–147.

Smirnov, 2002 – Smirnov, V.A. *Logicheskie metody analiza nauchnogo znaniya* [Logical methods of the analyses of scientific knowledge]. Moscow: Editorial URSS, 2002. 263 pp. (In Russian)

Venn, 1881 – Venn, J. *Symbolic Logic*. London: Macmillan and Co., 1881. 446 pp.

Voishvillo, 1967 – Voishvillo, E.K. *Ponyatie* [Concept]. Moscow: Moscow St. Univ. Publ., 1967. 287 pp. (In Russian)

Логические исследования
2019. Т. 25. № 2. С. 138–163
УДК 168.3

Logical Investigations
2019, Vol. 25, No. 2, pp. 138–163
DOI: 10.21146/2074-1472-2019-25-2-138-163

В.И. Шалак

Тезис Пирса: логический анализ и онтологические следствия

Владимир Иванович Шалак
Институт философии РАН.
Российская Федерация, 109240, г. Москва, ул. Гончарная, д. 12, стр. 1.
E-mail: shalack@gmail.com

Аннотация: Ч.С. Пирс выдвинул гипотезу о том, что любые отношения могут быть редуцированы к отношениям, местность которых не превышает трех. Эта гипотеза тесно связана с базовыми категориями его феноменологии.

В данной публикации дан семантический анализ и подробное доказательство следующих двух результатов.

1. Любая первопорядковая теория может быть представлена в языке, содержащем конечный набор одноместных функциональных символов. Философски важным следствием этого является равноправие реляционных и функциональных языков и соответствующих им онтологий.

2. Любая первопорядковая теория может быть представлена в языке, содержащем единственный трехместный предикатный символ U и конечный набор индивидных констант. Это подтверждает гипотезу Пирса о фундаментальной роли, которую играют трехместные отношения. Язык, дескриптивные символы которого содержат лишь индивидные константы и единственный трехместный предикат, оказывается универсальным языком для представления любых теорий первого порядка.

Имеется структурное сходство трехместного предиката $U(e, u, x)$ и трехместного предиката $UM(e, u, x)$, представляющего универсальную машину Тьюринга. И тот и другой можно рассматривать как контейнеры одноместных функций. С этой точки зрения предикат U является расширением предиката UM на любые, а не только эффективно вычислимые функции.

Доказанные теоремы заставляют по-новому взглянуть на многие физические теории. В теории относительности фундаментальной структурой считается четырехмерное пространство-время Минковского, которое можно представить в виде четырехместного предиката $S(x, y, z, t)$. Из теоремы о существовании предиката $U(e, u, x)$ следует, что четырехмерное пространство-время Минковского не является фундаментальной физической структурой, поскольку может быть редуцировано к единственному трехместному отношению.

Ключевые слова: тезис Пирса, редукция отношений, отношения между теориями, дефинициальная вложимость теорий, онтологические допущения

Для цитирования: *Шалак В.И.* Тезис Пирса: логический анализ и онтологические следствия // Логические исследования / Logical Investigations. 2019. Т. 25. № 2. С. 138–163. DOI: 10.21146/2074-1472-2019-25-2-138-163

Введение

Мое внимание к редукционному тезису Пирса было привлечено В.А. Смирновым.

> *«Ч. Пирс выдвинул гипотезу, что все отношения могут быть сведены не более чем к трехместным отношениям. Естественно, сведены не в смысле теории множеств — в предположении теории множеств (или теории типов), каждое отношение может быть определено через свойство. Речь идет о сводимости в рамках исчисления предикатов первого порядка. Согласно Ч. Пирсу, имеются одноместные отношения — монады, двухместные — диады и трехместные — триады. С этой классификацией у Пирса связаны важные философские следствия.*
>
> *В связи с этой гипотезой прежде всего отметим, что существуют теории, сформулированные в терминах трехместного отношения, для которых нельзя построить дефиницияльно эквивалентные им теории, сформулированные в терминах не более чем двухместных отношений. Истинность последнего утверждения следует из одного результата Р. Робинсона, который показал, что евклидова (как и гиперболическая) первопорядковая геометрия не может быть сформулирована в терминах двухместных отношений. Однако она может быть сформулирована в терминах одного трехместного отношения»* [Смирнов, 1987, с. 66–67].

Если обратиться к работам Пирса, то можно обнаружить, что редукционный тезис непосредственно связан с базовыми категориями его феноменологии.

> *«Три идеи являются основными: нечто, другое и третье... В этом математическом высказывании (ибо оно таково), как в ореховой скорлупе, заключена вся логика и вся метафизика»*[1].

[1] *«The three ideas are basic: those of something, other, and third... In this mathematical proposition (for such it is shown to be), you have all logic and all metaphysics in a nut-shell».* Цит. по [Herzberger, 1981, p. 41].

Одна из кратких формулировок тезиса звучит следующим образом:

> *«Триада – низшая форма релятивов, из которой могут быть получены все остальные»*[2].

Более того, Пирс утверждал, что доказал теорему о редукции:

> *«Теперь я хочу обратить ваше внимание на замечательную теорему. Каждую полиаду выше триады можно разложить на триады, хотя не каждую триаду можно разложить на диады»* [Пирс, 2005, с. 184].

В разное время логики и философы уже обращались к темам, непосредственно или косвенно связанным с тезисом Пирса [Church, Quine, 1952], [Skidmore, 1971], [Herzberger, 1981], [Kleinert, 2007]. Так А. Черч и У. Куайн показали, что элементарная теория чисел представима в терминах единственного двухместного симметричного отношения. Но арифметика – это всего лишь одна из теорий, а тезис Пирса имеет глобальный характер и распространяется на любые теории. В этом отношении особого внимания заслуживает статья Х. Херцбергера. Несмотря на то что Пирс неоднократно утверждал о существовании доказательства редукционного тезиса, Херцбергер так и не сумел обнаружить его в архивах и потому поставил цель выяснить принципиальную возможность такого доказательства, т.е. попытаться построить его средствами развиваемой Пирсом алгебры отношений.

В качестве основной алгебраической операции Пирс рассматривал относительное произведение отношений, видя в нем аналогию с комбинацией химических элементов. Местность отношений выступала в роли аналога валентности химических элементов, а относительное произведение — аналогом их соединения.

Понятие ρ-редуцируемости Херцбергер определяет следующим образом.

Отношение R ρ-редуцируемо над областью D, если и только если существует такое множество отношений над областью D, что каждое из них имеет меньшую местность, чем R, и R может быть получено из этих отношений с помощью операции относительного произведения [Herzberger, 1981, p. 44].

Легко видеть, что относительное произведение двух отношений местности n и k дает в результате отношение местности $n+k-2$. Отсюда следует, что отношения местности $n \leq 3$ абсолютно нередуцируемы. Это является содержанием первой теоремы Херцбергера.

[2] *«The triad is the lowest form of relative from which all others can be derived»*. Цит. по [Herzberger, 1981, p. 57].

Далее на конкретном примере он показывает, что на области $D = \{a,\ b,\ c\}$ четырехместное отношение $R = \{abba,\ baab,\ cbcb,\ bcbc\}$ не может быть ρ-редуцируемо к двум трехместным. Чтобы убедиться в этом, достаточно рассмотреть следующую таблицу:

R	G	H
$abba$	abx	xba
$baab$	bay	yab
$cbcb$	cbw	wcb
$bcbc$	bcz	zbc

Простое рассуждение показывает, что для того, чтобы посредством операции относительного произведения из отношений G и H получить R, область D должна содержать хотя бы четыре различных элемента $x,\ y,\ w,\ z$, но она содержит всего три. Т.е. размер предметной области является препятствием для выполнения редукционного тезиса [Herzberger, 1981, pp. 45–46].

Далее Херцбергер приходит к двум теоремам, первая из которых гласит, что все отношения местности $n > 3$ ρ-редуцируемы к трехместным для достаточно больших областей D, в которых мощность отношения R не превышает мощности D. Следующая теорема является следствием предыдущей. Согласно ей тезис Пирса выполняется для бесконечных областей. Это имеет место в силу того, что для любой бесконечной области D и любого n ее мощность равна мощности декартова произведения $D \times \ldots^n \times D$ [Herzberger, 1981, p. 48].

Затем Херцбергер выходит за рамки использования одного лишь относительного произведения и определяет операцию *тройного соединения* (triple junction):

$$t(Q, R, S) = \{\langle \mathbf{a,b,c} \rangle |\ \dot{\exists} x(\langle \mathbf{a}, x\rangle \in Q^k, \langle \mathbf{b}, x\rangle \in R^m, \langle \mathbf{c}, x\rangle \in S^n)\},$$

где $\mathbf{a}$ – сокращение для $a_1, \ldots, a_{k-1}$, аналогично для $\mathbf{b}$ и $\mathbf{c}$.

В языке логики предикатов первого порядка операция тройного соединения представима формулой:

$$\exists x(Q(\mathbf{a}, x)\&R(\mathbf{b}, x)\&S(\mathbf{c}, x))$$

Заключительная теорема говорит, что в теории квантификации в достаточно больших предметных областях все трехместные отношения редуцируемы к двухместным. Это позволяет сделать вывод о том, что для стандартной теории определений редукционный тезис проваливается [Herzberger, 1981, pp. 54–55].

В отношении работы Херцбергера можно высказать ряд критических замечаний.

Замечание 1. Все рассуждения Херцбергера проводятся на уровне моделей и могут выходить за рамки использования одних лишь первопорядковых характеристик. Это относится, например, к часто повторяющейся оговорке о *достаточно больших областях.*

Замечание 2. Если последоваить примеру Херцбергера и проводить доказательства на уровне конкретных моделей, то можно вспомнить, что современная алгебра отношений помимо операции относительного произведения включает также операции объединения, пересечения и относительного дополнения отношений соответствующей местности. При наличии относительного произведения и объединения оговорка о достаточно больших областях в теоремах Херцбергера становится излишней. Это легко показать на его контрпримере для трехэлементной области $D = \{a, b, c\}$ и четырехместного отношения $R = \{abba, baab, cbcb, bcbc\}$. Вместо того, чтобы редуцировать исходное отношение R к относительному произведению двух трехместных отношений, возьмем четыре трехместных отношения, где $x \neq y$.

G_1	H_1	G_2	H_2
abx	xba	cbx	xcb
bay	yab	bcy	ybc

В этом случае R редуцируется к отношениям G_1, G_2, H_1, H_2 следующим образом:

$$R = (G_1 \bullet H_1) \cup (G_2 \bullet H_2)$$

Аналогичным образом можно провести редукцию любых отношений на любых конечных областях. Так как теорема о редукции и так имеет место для бесконечных моделей, то теперь она не требует никаких оговорок, но будет иметь вид теоремы существования, поскольку доказательство будет зависеть от размера конкретной предметной области. Такая же теорема существования будет справедлива и для редукции к двухместным отношениям в теории квантификации.

Замечание 3. Одна и та же теория может иметь как конечные, так и бесконечные модели. Херцбергер не приводит единообразного доказательства теоремы, чтобы она имела место для всех моделей.

Цель настоящей работы — проанализировать редукционный тезис Пирса в терминах отношений между первопорядковыми теориями, а не их моделями, что позволит в более общем виде очертить границы его применимости.

1. Виды отношений между теориями

Сигнатура $\Sigma = \langle Const, Func, Pred \rangle$ — это набор нелогических символов языка, которые делятся на индивидные, функциональные и предикатные символы. Множество всех правильно построенных формул сигнатуры Σ будем обозначать посредством $L(\Sigma)$. Если S — некоторое множество формул, то $Cn(S)$ — множество всех его логических следствий.

Под теорией T мы будем понимать множество нелогических аксиом $Ax(T)$, замкнутое относительно выводимости. Запись $S \vdash_T A$ будет использоваться в качестве сокращения для логической выводимости $Ax(T) \cup S \vdash A$.

Определения новых предикатных символов в теории T — это предложения вида $\forall \mathbf{x}(P\mathbf{x} \equiv A)$, где

1. P — новый предикатный символ, который не входит в сигнатуру теории T;
2. $\mathbf{x}$ $(= x_1, \ldots, x_n)$ – попарно различные переменные;
3. Формула A сформулирована в словаре теории T;
4. Все свободные переменные, входящие в формулу A, содержатся среди $x_1, \ldots, x_n$.

Нам понадобятся следующие отношения между теориями, которые были подробно рассмотрены в книге [Смирнов, 1987, с. 35–79].

1. T_2 есть *дефинициальное расширение* T_1 $\Leftrightarrow$ существует такое множество D_2 определений терминов теории T_2, отсутствующих в T_1, в терминах теории T_1, что $T_2 = Cn(T_1 \cup D_2)$.
2. T_1 *дефинициально эквивалентна* T_2 $\Leftrightarrow$ существуют такие дефинициальные расширения T_1 и T_2, что $Cn(T_1 \cup D_2) = Cn(T_2 \cup D_1)$.
3. T_1 *дефинициально вложима* в $T_2 \Leftrightarrow \dot{\exists} D_1 \dot{\forall} A \in L(\Sigma_1)(\vdash_{T1} A \Leftrightarrow D_1 \vdash_{T2} A)$.

2. Редукция к одноместным функциям

Доказательство теоремы мы проведем в два этапа. Сначала содержательно на семантическом уровне проанализируем саму возможность редукции, а затем представим подробное доказательство в терминах отношений между теориями.

2.1. Семантический анализ

Идея теоремы очень проста. Пусть на некоторой предметной области D задано n-местное отношение R, которое условно представим в виде таблицы с, возможно, бесконечным числом строк.

$R(x_1, \ldots, x_n)$			
a_1	a_2	$\ldots$	a_n
b_1	b_2	$\ldots$	b_n
$\ldots$	$\ldots$	$\ldots$	$\ldots$

Если предметная область D бесконечна, то D равномощна n-кратному декартову произведению $D \times \ldots^n \times D$, т.е. $|D| = |D \times \ldots^n \times D|$, и, соответственно, существует сюрьективное отображение $g : D \twoheadrightarrow R$, которое схематично представим в виде таблицы:

D	g	$R(x_1, \ldots, x_n)$			
u_1	$\twoheadrightarrow$	a_1	a_2	$\ldots$	a_n
u_2	$\twoheadrightarrow$	b_1	b_2	$\ldots$	b_n
$\ldots$	$\twoheadrightarrow$	$\ldots$	$\ldots$	$\ldots$	$\ldots$

При помощи сюрьекции g мы как бы индексируем строки таблицы элементами самой предметной области D. Если $g(u_1) = \langle a_1, \ldots, a_n \rangle$ и pr^i — функция проекции на i-й член кортежа, то $a_1 = pr^1(g(u_1)), \ldots, a_n = pr^n(g(u_1))$. Это позволяет нам определить n одноместных функций $f_i(u) = pr^i(g(u))$, после чего таблица примет вид:

D	$R(x_1, \ldots, x_n)$			
u_1	$f_1(u_1)$	$f_2(u_1)$	$\ldots$	$f_n(u_1)$
u_2	$f_1(u_2)$	$f_2(u_2)$	$\ldots$	$f_n(u_2)$
$\ldots$	$\ldots$	$\ldots$	$\ldots$	$\ldots$

Это и есть решение задачи. Определение отношения $R(x_1, \ldots, x_n)$ будет выглядеть следующим образом:

$$\forall x_1 \ldots \forall x_n (Rx_1 \ldots x_n \equiv \exists u (f_1(u) = x_1 \& \ldots \& f_n(u) = x_n)).$$

В том случае, если область D не является бесконечной, то $|D| \neq |D \times \ldots^n \times D|$, и сюрьективное отображение $g : D \twoheadrightarrow R$ может не существовать. Для решения этой проблемы достаточно расширить область D до D' таким образом, что $|R| \leq |D'|$. Это всегда можно сделать.

2.2. Доказательство теоремы о редукции к одноместным функциям

Пусть T_1 – произвольная теория первого порядка в сигнатуре $\Sigma_1 = \langle\emptyset, \emptyset, Pred_1\rangle$ с множеством нелогических аксиом $Ax(T_1)$, представленных замкнутыми формулами логики предикатов первого порядка. Хорошо известно, что любая теория первого порядка может быть приведена к такому виду. Предполагается, что теория T_1 имеет стандартную аксиоматизацию с двумя правилами вывода — *modus ponens* и введение квантора всеобщности $\forall_{in}$.

Определение 1. Для нового одноместного предикатного символа D примем следующее определение:

$(DD): \quad \forall x(Dx \equiv Q \supset Q)$,

где Q — замкнутая формула сигнатуры Σ_1.

Определение 2. Определим операцию релятивизации кванторов ρ:

1. $\rho(x = y) = (x = y)$;
2. $\rho(Px_1..x_n) = Px_1..x_n$;
3. $\rho(\neg A) = \neg\rho(A)$;
4. $\rho(A\nabla B) = \rho(A)\nabla\rho(B) \qquad — \nabla \in \{\&, \vee, \supset, \equiv\}$;
5. $\rho(\exists xA) = \exists x(Dx \,\&\, \rho(A))$;
6. $\rho(\forall xA) = \forall x(Dx \supset \rho(A))$.

В следующей лемме мы формулируем и доказываем важнейшее свойство опреации релятивизации кванторов.

Лемма 1. $(DD) \vdash A \equiv \rho(A)$.

Доказательство.

Доказательство проводится структурной индукцией по построению формулы A с использованием следующих выводимостей:

- $\vdash \forall xDx \equiv \forall x(Dx \equiv Q \supset Q)$;

- $\forall x(Dx \equiv Q \supset Q) \vdash \forall xA \equiv \forall x(Dx \supset A)$;
- $\forall x(Dx \equiv Q \supset Q) \vdash \exists xA \equiv \exists x(Dx \,\&\, A)$.

■

Определим сигнатуру $\Sigma_2 = \langle \emptyset, Func_2, \emptyset \rangle$, где $Func_2 = \{f_0^1\} \cup \{f_{P1}^1, \ldots, f_{Pn}^1 | \, P_n \in Pred_1\}$.

Определение 3. Определим операцию φ замены в формуле A всех вхождений подформул вида Dx на формулу $f_0(x) = x$, а подформул вида $Px_1..x_n$ на $\exists u(f_{P1}(u) = x_1 \,\&..\&\, f_{Pn}(u) = x_n)$.

1. $\varphi(x = y) = (x = y)$;
2. $\varphi(Dx) = (f_0(x) = x)$;
3. $\varphi(Px_1..x_n) = \exists u(f_{P1}(u) = x_1 \& .. \& f_{Pn}(u) = x_n)$;
4. $\varphi(\neg A) = \neg\varphi(A)$;
5. $\varphi(A \nabla B) = \varphi(A) \nabla \varphi(B)$ — $\nabla \in \{\&, \vee, \supset, \equiv\}$;
6. $\varphi(QxA) = Qx\varphi(A)$ — $Q \in \{\forall, \exists\}$.

Нелогическими аксиомами теории T_2 будут $Ax(T_2) = \varphi\rho(Ax(T_1))$.

Определение 4. Примем в языке теории T_2 следующие определения:

$(Df): \ \forall x(Dx \equiv f_0(x) = x)$;

$(Pf): \ \forall x_1..x_n(Px_1..x_n \equiv \exists u(f_{P1}(u) = x_1 \& .. \& f_{Pn}(u) = x_n))$ для всех $P^n \in Pred_1$.

Лемма 2. $(Df), (Pf) \vdash \varphi(A) \equiv A$.

Доказательство.

Утверждение леммы следует из определения операции φ и теоремы о замене эквивалентных [Мендельсон, 1976, с. 82–83]. ■

Теорема 1. $\dot{\forall} A \in L(\Sigma_1) : (DD) \vdash_{T1} \rho(A) \Rightarrow (Df), (Pf) \vdash_{T2} \rho(A)$.

Доказательство.

Поскольку по Лемме 1 $(DD) \vdash A \equiv \rho(A)$, то по условию теоремы будет иметь место $(DD) \vdash_{T1} A$, где формула A не содержит вхождений предикатного символа D. Заменив в формулах вывода $(DD) \vdash_{T1} A$ все вхождения

Dx на $Q \supset Q$, мы получим вывод $\forall x(Q \supset Q \equiv Q \supset Q) \vdash_{T1} A$. Так как $\forall x(Q \supset Q \equiv Q \supset Q)$ – теорема логики, то будет иметь место вывод $\vdash_{T1} A$.

Доказательство теоремы проводим индукцией по построению вывода $\vdash_{T1} A$.

Базис. $A \in Ax(T_1)$.

Так как $Ax(T_2) = \varphi\rho(Ax(T_1))$, то $\vdash_{T2} \varphi\rho(A)$.

По Лемме 2 имеет место $(Df), (Pf) \vdash \varphi\rho(A) \equiv \rho(A)$.

Следовательно, $(Df), (Pf) \vdash_{T2} \rho(A)$.

Индукционный шаг. Формула А получена по одному из правил вывода из предшествующих формул.

Случай 1. Формула A получена по правилу *т.р.* из формул B и $B \supset A$.

По индуктивному допущению имеет место $(Df), (Pf) \vdash_{T2} \rho(B)$ и $(Df), (Pf) \vdash_{T2} \rho(B \supset A)$. Так как $\rho(B \supset A) = \rho(B) \supset \rho(A)$, то $(Df), (Pf) \vdash_{T2} \rho(B) \supset \rho(A)$. Отсюда по *т.р.* получаем, что $(Df), (Pf) \vdash_{T2} \rho(A)$.

Случай 2. Формула A имеет вид $\forall xB$ и получена по правилу $\forall_{in}$ из формулы B.

Из аксиомы логики $\vdash \rho(B) \supset (Dx \supset \rho(B))$ и индуктивного допущения $(Df), (Pf) \vdash_{T2} \rho(B)$ по *т.р.* получаем $(Df), (Pf) \vdash_{T2} (Dx \supset \rho(B))$. Далее по правилу $\forall_{in}$ получаем $(Df), (Pf) \vdash_{T2} \forall x(Dx \supset \rho(B))$. Но $\forall x(Dx \supset \rho(B)) = \rho(\forall xB)$. Следовательно, $(Df), (Pf) \vdash_{T2} \rho(\forall xB)$.

■

Теорема 2. $\dot{\forall} A \in L(\Sigma_1) : (Df), (Pf) \vdash_{T2} \rho(A) \Rightarrow (DD) \vdash_{T1} \rho(A)$.

Доказательство.

Докажем контрпозицию утверждения теоремы. Допустим, не верно, что $(DD) \vdash_{T1} \rho(A)$. В силу теоремы о полноте логики предикатов первого порядка это означает, что существует такая модель $M_1 = \langle W_1, I_1 \rangle$ для аксиом $Ax(T_1)$ теории T_1 и такое приписывание значений индивидным переменным $v \in Val_1 = \{v | v : Var \to W_1\}$, что $M_1, v \vDash (DD)$, но $M_1, v \nvDash \rho(A)$.

Покажем, что в этом случае существует модель $M_2 = \langle W_2, I_2 \rangle$ для аксиом $Ax(T_2)$ теории T_2 и такое приписывание значений индивидным переменным $v \in Val_2 = \{v | v : Var \to W_2\}$, что $M_2, v \vDash (Df)$ и $M_2, v \vDash (Pf)$, но $M_2, v \nvDash \rho(A)$.

Определение 5. Модель $M_2 = \langle W_2, I_2 \rangle$ определим следующим образом.

- $W_2 = W_1 \cup Nat$, где Nat – множество натуральных чисел. Вместо Nat можно взять любое другое бесконечное счетное множество.

- $I_2(D) = W_1$.
- $I_2(P^n) = I_1(P^n)$ для каждого $P^n \in Pred_1$.
- Для каждого $P^n \in Pred_1$ фиксируем сюрьекцию (отображение на) $g_{Pn} : W_2 \twoheadrightarrow I_2(P^n)$, которая существует в силу бесконечности W_2. Пусть $I_2(f_{Pi})(a) = pr^i(g_{Pn}(a))$, т.е. если $g_{Pn}(a) = \langle a_1, \ldots, a_n \rangle$, то $I_2(f_{Pi})(a) = a_i$.
- $$I_2(f_0)(a) = \begin{cases} a, & \text{если } a \in W_1; \\ b, & \text{для некоторого } b \in W_1, \text{ если } a \notin W_1. \end{cases}$$

Для дальнейшего доказательства нам понадобятся две леммы.

Лемма 3. *В модели M_2 имеют место:*
(1) $M_2 \vDash (Df)$;
(2) $M_2 \vDash (Pf)$.

Доказательство.

(1). Покажем, что $M_2 \vDash (Df)$, т.е. $M_2 \vDash \forall x(Dx \equiv f_0(x) = x)$.

$\lceil$+1. $v \in Val_2$	– доп.
$\vert\lceil$ +2 $M_2, v \vDash Dx$	– доп.
$\vert\vert$ 3. $v(x) \in I_2(D)$	– из 2 по опр.
$\vert\vert$ 4. $v(x) \in W_1$	– из 3, так как $I_2(D) = W_1$
$\vert\vert$ 5. $I_2(f_0)(v(x)) = v(x)$	– из 4 по опр. $I_2(f_0)$
$\vert\lfloor$ 6. $M_2, v \vDash f_0(x) = x$	– из 5
$\vert$ 7. $M_2, v \vDash Dx \Rightarrow M_2, v \vDash f_0(x) = x$	– из 2–6
$\vert$ 8. $M_2, v \vDash Dx \supset f_0(x) = x$	– из 7
$\vert\lceil$+9. $M_2, v \vDash f_0(x) = x$	– доп.
$\vert\vert$ 10. $I_2(f_0)(v(x)) = v(x)$	– из 9
$\vert\vert$ 11. $v(x) \in W_1$	– из 10, по опр. $I_2(f_0)$
$\vert\vert$ 12. $v(x) \in I_2(D)$	– из 11 по опр. $I_2(D)$
$\vert\lfloor$13. $M_2, v \vDash Dx$	– из 12
$\vert$ 14. $M_2, v \vDash f_0(x) = x \Rightarrow M_2, v \vDash Dx$	– из 9–13
$\vert$ 15. $M_2, v \vDash f_0(x) = x \supset Dx$	– из 14
$\lfloor$ 16. $M_2, v \vDash Dx \equiv f_0(x) = x$	– из 8, 15
17. $M_2 \vDash \forall x(Dx \equiv f_0(x) = x)$	– из 1, 16

(2). Покажем, что $M_2 \vDash (Pf)$, т.е. $M_2 \vDash \forall x_1..x_n(Px_1..x_n \equiv \exists u(f_{P1}(u) = x_1 \& .. \& f_{Pn}(u) = x_n))$.

$\lceil$+1. $v \in Val_2$ – доп.
$|\lceil$+2. $M_2, v \vDash Dx$ – доп.
$||$ 3. $\langle v(x_1), .., v(x_n)\rangle \in I_2(P)$ – из 2 по опр.
$||$ 4. $g_{Pn}(a) = \langle v(x_1), \ldots, v(x_n)\rangle$ – из 3 по опр. M_2 для некот. $a \in W_2$
$||$ 5. $I_2(f_{Pi})(a) = v(x_i)$ – из 4 по опр. $I_2(f_{Pi})$ для $1 \leq i \leq n$
$||$ 6. $v'(u) = a$ – для некот. $v' \approx_u v$
$||$ 7. $M_2, v' \vDash f_{Pi}(u) = x_i$ – из 5, 6 для всех $1 \leq i \leq n$
$||$ 8. $M_2, v' \vDash f_{P1}(u) = x_1\&..\&f_{Pn}(u) = x_n)$ – из 7
$|\lfloor$ 9. $M_2, v \vDash \exists u(f_{P1}(u) = x_1\&..\&f_{Pn}(u) = x_n))$ – из 6, 8
$|$ 10. $M_2, v \vDash Px_1..x_n \Rightarrow M_2, v \vDash \exists u(fP1(u) = x1\&..\&f_{Pn}(u) = x_n))$ – из 2–9
$|$ 11. $M_2, v \vDash Px_1..x_n \supset \exists u(f_{P1}(u) = x_1\&..\&f_{Pn}(u) = x_n)$ – из 10
$|\lceil$+12. $M_2, v \vDash \exists u(f_{P1}(u) = x_1\&..\&f_{Pn}(u) = x_n)$ – доп.
$||$ 13. $M_2, v' \vDash f_{P1}(u) = x_1\&..\&f_{Pn}(u) = x_n$ – из 12 для $v' \approx_u v$
$||$ 14. $M_2, v' \vDash f_{Pi}(u) = x_i$ – из 13 для всех $1 \leq i \leq n$
$||$ 15. $I_2(f_{Pi})(v'(u)) = v'(x_i)$ – из 14 для всех $1 \leq i \leq n$
$||$ 16. $I_2(f_{Pi})(v'(u)) = pr^i(g_{Pn}(v'(u)))$ – из 15 по опр. $I_2(f_{Pi})$
$||$ 17. $g_{Pn}(v'(u)) = \langle v'(x_1), .., v'(x_n)\rangle$ – из 16 по опр. $I_2(f_{Pi}), g_{Pn}$
$||$ 18. $\langle v'(x_1), \ldots, v'(x_n)\rangle \in I_2(P)$ – из 17 по опр. g_{Pn}
$||$ 19. $M_2, v' \vDash Px_1..x_n$ – из 18
$|\lfloor$ 20. $M_2, v \vDash Px_1..x_n$ – из 19, т.к. $v' \approx_u v$
$|$ 21.$M_2, v \vDash \exists u(f_{P1}(u) = x_1\&..\&f_{Pn}(u) = x_n) \Rightarrow M_2, v \vDash Px_1..x_n$ – из 12-20
$|$ 22. $M_2, v \vDash \exists u(f_{P1}(u) = x_1\&..\&f_{Pn}(u) = x_n) \supset Px_1..x_n$ – из 21
$\lfloor$ 23. $M_2, v \vDash Px_1..x_n \equiv \exists u(f_{P1}(u) = x_1\&..\&f_{Pn}(u) = x_n)$ – из 11, 22
24. $M_2 \vDash \forall x_1..x_n(Px_1..x_n \equiv \exists u(f_{P1}(u) = x_1\&..\&f_{Pn}(u) = x_n))$ – из 1, 23

■

Лемма 4. $\dot{\forall} A \in L(\Sigma_1) : \dot{\forall} v \in Val_1 : M_1, v \vDash \rho(A) \Leftrightarrow M_2, v \vDash \rho(A)$.

Доказательство. Индукцией по построению формулы A.

Базис

Случай 1. $A = (x_1 = x_2)$, $\rho(x_1 = x_2) = (x_1 = x_2)$.

$\lceil$ +1. $M_1, v \vDash (x_1 = x_2)$ – доп.
$\lfloor$ 2. $M_2, v \vDash (x_1 = x_2)$ – из 1, т.к. $Val_1 \subseteq Val_2$
3. $M_1, v \vDash (x_1 = x_2) \Rightarrow M_2, v \vDash (x_1 = x_2)$ – из 1–2

$\lceil$ +1. $M_2, v \vDash (x_1 = x_2)$ – доп.
$\lfloor$ 2. $M_1, v \vDash (x_1 = x_2)$ – из 1, т.к. $v \in Val_1$
3. $M_2, v \vDash (x_1 = x_2) \Rightarrow M_1, v \vDash (x_1 = x_2)$ – из 1–2

Случай 2. $A = Px_1..x_n$, $\rho(Px_1..x_n) = Px_1..x_n$.

$\lceil$ +1. $M_1, v \vDash Px_1..x_n$	– доп.
$\mid$ 2. $\langle v(x_1), \ldots, v(x_n)\rangle \in I_1(P^n)$	– из 1 по опр.
$\mid$ 3. $I_2(P^n) = I_1(P^n)$	– по опр. M_2
$\mid$ 4. $\langle v(x_1), \ldots, v(x_n)\rangle \in I_2(P^n)$	– из 2, 3
$\lfloor$ 5. $M_2, v \vDash Px_1..x_n$	– из 4, т.к. $Val_1 \subseteq Val_2$
6. $M_1, v \vDash Px_1..x_n \Rightarrow M_2, v \vDash Px_1..x_n$	– из 1–5

$\lceil$ +1. $M_2, v \vDash Px_1..x_n$	– доп.
$\mid$ 2. $\langle v(x_1), \ldots, v(x_n)\rangle \in I_2(P^n)$	– из 1 по опр.
$\mid$ 3. $I_2(P^n) = I_1(P^n)$	– по опр. M_2
$\mid$ 4. $\langle v(x_1), \ldots, v(x_n)\rangle \in I_1(P^n)$	– из 2, 3
$\lfloor$ 5. $M_1, v \vDash Px_1..x_n$	– из 4, т.к. $v \in Val_1$
6. $M_2, v \vDash Px_1..x_n \Rightarrow M_1, v \vDash Px_1..x_n$	– из 1–5

Индукционный шаг

Случай 1. $A = \neg B$, $\rho(\neg B) = \neg\rho(B)$.

1. $M_1, v \vDash \rho(B) \Leftrightarrow M_2, v \nvDash \rho(B)$	– инд. доп.
2. $M_1, v \nvDash \rho(B) \Leftrightarrow M_2, v \nvDash \rho(B)$	– из 1
3. $M_1, v \vDash \neg\rho(B) \Leftrightarrow M_2, v \vDash \neg\rho((B)$	– из 2
4. $M_1, v \vDash \rho(\neg B) \Leftrightarrow M_2, v \vDash \rho(\neg B)$	– из 3 по опр. ρ

Случай 2. $A = B \triangledown C$, $\rho(A \triangledown B) = \rho(A) \triangledown \rho(B)$, $\triangledown \in \{\&, \vee, \supset, \equiv\}$.

1. $M_1, v \vDash \rho(B) \Leftrightarrow M_2, v \vDash \rho(B)$	– инд. доп.
2. $M_1, v \vDash \rho(C) \Leftrightarrow M_2, v \vDash \rho(C)$	– инд. доп.
3. $M_1, v \vDash \rho(B) \triangledown \rho(C) \Leftrightarrow M_2, v \vDash \rho(B) \triangledown \rho(C)$	– из 1,2
4. $\rho(B \triangledown C) = \rho(B) \triangledown \rho(C)$	– по опр. ρ
5. $M_1, v \vDash \rho(B \triangledown C) \Leftrightarrow M_2, v \vDash \rho(B \triangledown C)$	– из 3, 4

Случай 3. $A = \forall xB$, $\rho(\forall xB) = \forall x(Dx \supset \rho(B))$.

$\lceil$ +1. $M_1, v \vDash \forall x(Dx \supset \rho(B))$	– доп. для $v \in Val_1$
$\mid\lceil$ +2. $M_2, v \nvDash \forall x(Dx \supset \rho(B))$	– доп.
$\mid\mid$ 3. $M_2, v' \nvDash Dx \supset \rho(B)$	– из 2 для некот. $v' \approx_x v,\ v' \in Val_2$
$\mid\mid$ 4. $M_2, v' \vDash Dx$	– из 3 по опр.
$\mid\mid$ 5. $M_2, v' \nvDash \rho(B)$	– из 3 по опр.
$\mid\mid$ 6. $v'(x) \in I_2(D)$	– из 4 по опр.
$\mid\mid$ 7. $v'(x) \in D_1$	– из 6, так как $I_2(D) = W_1$

$||$ 8. $v' \in Val_1$ – из 7, т.к. $v' \approx_x v$
$||$ 9. $M_1, v' \vDash Dx$ – из 4, 8
$||$ 10. $M_1, v' \nvDash \rho(B)$ – из 5, 8 по инд. доп.
$||$ 11. $M_1, v' \nvDash Dx \supset \rho(B)$ – из 9, 10
$||$ 12. $M_1, v \nvDash \forall x(Dx \supset \rho(B))$ – из 11
$|\lfloor$ 13. прт. – 1, 12
$\lfloor$ 14. $M_2, v \vDash \forall x(Dx \supset \rho(B))$ – из 2, 13
15. $M_1, v \vDash \rho(\forall xB) \Rightarrow M_2, v \vDash \rho(\forall xB)$ – из 1–14

$\lceil$+1. $M_2, v \vDash \forall x(Dx \supset \rho(B))$ – доп. для $v \in Val_1$
$|$ 2. $\dot{\forall} v' \in Val_2 : v' \approx_x v \Rightarrow M_2, v' \vDash Dx \supset \rho(B)$ – из 1
$|$ 3. $\dot{\forall} v' \in Val_1 : v' \approx_x v \Rightarrow M_2, v' \vDash Dx \supset \rho(B)$ – т.к. $Val_1 \subseteq Val_2$
$|$ 4. $\dot{\forall} v \in Val_1 : M_1, v \vDash \rho(B) \Leftrightarrow M_2, v \vDash \rho(B)$ – инд. доп.
$|$ 5. $\dot{\forall} v' \in Val_1 : v' \approx_x v \Rightarrow M_1, v' \vDash Dx \supset \rho(B)$ – из 3, 4
$\lfloor$ 6. $M_1, v' \vDash \forall x(Dx \supset \rho(B))$ – из 5
7. $M_1, v \vDash \rho(\forall xB) \Rightarrow M_2, v \vDash \rho(\forall xB)$ – из 1–6

Случай 4. $A = \exists xB$, $\rho(\exists xB) = \exists x(Dx\&\rho(B))$.

$\lceil$+1. $M_1, v \vDash \exists x(Dx\&\rho(B))$ – доп. для $v \in Val_1$
$|$ 2. $\dot{\exists} v' \in Val_1 : v' \approx_x v$ и $M_1, v' \vDash Dx\&\rho(B)$ – из 1
$|$ 3. $\dot{\exists} v' \in Val_1 : v' \approx_x v$ и $M_1, v' \vDash Dx$ и $M_1, v' \vDash \rho(B)$ – из 2
$|$ 4. $\dot{\forall} v \in Val_1 : M_1, v \vDash \rho(B) \Leftrightarrow M_2, v \vDash \rho(B)$ – инд. доп.
$|$ 5. $\dot{\exists} v' \in Val_1 : v' \approx_x v$ и $M_1, v' \vDash Dx$ и $M_2, v' \vDash \rho(B)$ – из 3, 4
$|$ 6. $\dot{\exists} v' \in Val_2 : v' \approx_x v$ и $M_2, v' \vDash Dx$ и $M_2, v' \vDash \rho(B)$ – из 5, т.к. $Val_1 \subseteq Val_2$
$\lfloor$ 7.$M_2, v \vDash \exists x(Dx\&\rho(B))$ – из 6
8. $M_1, v \vDash \rho(\exists xB) \Rightarrow M_2, v \vDash \rho(\exists xB)$ – из 1–7

$\lceil$+1. $M_2, v \vDash \exists x(Dx\&\rho(B))$ – доп. для $v \in Val_1$
$|\lceil$+2. $M_1, v \nvDash \exists x(Dx\&\rho(B))$ – доп.
$||$ 3. $M_2, v' \vDash Dx\&\rho(B)$ – для некот. $v' \approx_x v, v' \in Val_2$
$||$ 4. $M_2, v' \vDash Dx$ – из 3
$||$ 5. $M_2, v' \vDash \rho(B)$ – из 3
$||$ 6. $v'(x) \in I_2(D)$ – из 4 по опр.
$||$ 7. $v'(x) \in W_1$ – из 6, так как $I_2(D) = W_1$
$||$ 8. $v' \in Val_1$ – из 7, т.к. $v' \approx_x v$
$||$ 9. $M_1, v' \vDash Dx$ – из 4, 8
$||$ 10. $M_1, v' \vDash \rho(B)$ – из 5, 8 по инд. доп.
$||$ 11. $M_1, v \vDash Dx\&\rho(B)$ – из 9, 10
$||$ 12. $M_1, v \vDash \exists x(Dx\&\rho(B))$ – из 11
$|\lfloor$ 13. прт. – 2, 12

$\lfloor$ 14. $M_1, v \vDash \exists x(Dx\&\rho(B))$ – из 2, 13
15. $M_2, v \vDash \rho(\exists xB) \Rightarrow M_1, v \vDash \rho(\exists xB)$ – из 1–14

■

С учетом Лемм 3 и 4 доказательство теоремы будет выглядеть следующим образом.

+1. $(DD) \nvdash_{T1} \rho(A)$ – доп.
2. $Ax(T_1), (DD) \nvDash \rho(A)$ – из 1
3. $M_1, v \vDash Ax(T_1)$ – из 2
4. $M_1, v \vDash (DD)$ – из 2
5. $M_1, v \nvDash \rho(A)$ – из 2
6. $(DD) \vDash Ax(T_1) \equiv \rho(Ax(T_1))$ – из Леммы 1
7. $M_1, v \vDash \rho(Ax(T_1))$ – из 3, 4, 6
8. $M_2, v \vDash \rho(Ax(T_1))$ – из Леммы 4
9. $M_2, v \vDash (Df)$ – из Леммы 3
10. $M_2, v \vDash (Pf)$ – из Леммы 3
11. $M_2, v \vDash \rho(Ax(T_1)) \equiv \varphi\rho(Ax(T_1))$ – из 9, 10 и Леммы 2
12. $M_2, v \vDash \varphi\rho(Ax(T_1))$ – из 8, 11
13. $M_2, v \vDash Ax(T_2)$ – из 12 по опр. $Ax(T_2)$
14. $M_2, v \nvDash \rho(A)$ – из 5 и Леммы 4
15. $Ax(T_2), (Df), (Pf) \nvDash \rho(A)$ – из 9, 10, 13, 14
16. $(Df), (Pf) \nvdash_{T2} \rho(A)$ – из 15

■

Таким образом, на основании Теорем 1 и 2 мы можем утверждать, что между теориями T_1 и T_2 имеет место отношение дефинициального вложения для релятивизированных формул:

$$\dot{\forall} A \in L(\Sigma_1) :\ (DD) \vdash_{T1} \rho(A) \Leftrightarrow (Df), (Pf) \vdash_{T2} \rho(A).$$

Релятивизация является платой за то, что в общем случае теории могут иметь как конечные, так и бесконечные модели. В силу Леммы 1 эта плата несущественна.

Следствие. В частном случае, если все модели исходной теории T_1 бесконечны, будет иметь место обычное отношение дефинициального вложения теории T_1 в T_2:

$$\dot{\forall} A \in L(\Sigma_1) : \vdash_{T1} A \Leftrightarrow (Pf) \vdash_{T2} A.$$

Это утверждение легко получить из уже имеющегося доказательства.

3. Редукция к единственному трехместному предикату

Как и в случае с функциями, мы проведем доказательство теоремы о редукции в два этапа – содержательного семантического обоснования и формального доказательства в терминах отношений между теориями. При этом единственность предиката следует понимать как единственность трехместного предикатного символа языка.

3.1. Семантический анализ

На семантическом уровне идея редукции произвольного набора отношений к единственному трехместному предикату еще более проста, чем в случае редукции к одноместным функциям. Обратим внимание на следующий очевидный факт. Пусть нам дан лист бумаги в клетку, на котором что-то написано.

a_1	a_2	$\ldots$	a_n	$\ldots$
b_1	b_2	$\ldots$	b_n	$\ldots$
$\ldots$	$\ldots$	$\ldots$	$\ldots$	$\ldots$

Все его содержимое может быть закодировано с помощью единственного трехместного предиката $U(col, row, x)$, смысл которого заключается в том, что на пересечении столбца col и строки row листа бумаги записан символ x.

Нашу таблицу для предиката $R(x_1, \ldots, x_n)$ можно рассматривать как такой лист бумаги.

$R(x_1, \ldots, x_n)$			
a_1	a_2	$\ldots$	a_n
b_1	b_2	$\ldots$	b_n
$\ldots$	$\ldots$	$\ldots$	$\ldots$

Если область D бесконечна, то существует сюрьекция $g : D \twoheadrightarrow R$, с помощью которой мы как бы индексируем строки таблицы элементами самой предметной области. Столбцы таблицы упорядочены, и им мы сопоставим отличные друга от друга выделенные элементы предметной области $e_1, \ldots, e_n$.

	$R(x_1, \ldots, x_n)$			
	e_1	e_2	$\ldots$	e_n
u_1	a_1	a_2	$\ldots$	a_n
u_2	b_1	b_2	$\ldots$	b_n
$\ldots$	$\ldots$	$\ldots$	$\ldots$	$\ldots$

Определение отношения $R(x_1, \ldots, x_n)$ будет выглядеть следующим образом:

$$\forall x_1 \ldots \forall x_n (Rx_1 \ldots x_n \equiv \exists u(U(e_1, u, x_1) \& \ldots \& U(e_n, u, x_n))).$$

В том случае, если область D не является бесконечной, то $|D| \neq |D \times \ldots^n \times D|$, и сюрьективное отображение $g : D \twoheadrightarrow R$ может не существовать. Для решения этой проблемы, как и в случае с одноместными функциями, достаточно расширить область D до D' таким образом, что $|R| \leq |D'|$. Это всегда можно сделать.

3.2. Доказательство теоремы о редукции

Опять берем теорию T_1 в сигнатуре $\Sigma_1 = \langle \emptyset, \emptyset, Pred_1 \rangle$ и задаем сигнатуру $\Sigma_3 = \langle Const_3, \emptyset, Pred_3 \rangle$, где

- $Const_3 = \{e_0\} \cup \{e_{P1}, \ldots, e_{Pn} | P^n \in Pred_1\}$;
- $Pred_3 = \{U_3\}$.

Определение 6. Определим операцию ψ замены в формуле A всех вхождений подформул вида Dx на формулу $U(e_0, x, x)$, а подформул вида $Px_1..x_n$ на $\exists u(U(e_{P1}, u, x_1) \& \ldots \& U(e_{Pn}, u, x_n))$:

1. $\psi(x = x) = (x = y)$;
2. $\psi(Dx) = U(e_0, x, x)$;
3. $\psi(Px_1..x_n) = \exists u(U(e_{P1}, u, x_1) \& \ldots \& U(e_{Pn}, u, x_n))$;
4. $\psi(\neg A) = \neg\psi(A)$;
5. $\psi(A \nabla B) = \psi(A) \nabla \psi(B)$ – $\nabla \in \{\&, \vee, \supset, \equiv\}$;
6. $\psi(QxA) = Qx\psi(A)$ – $Q \in \{\forall, \exists\}$.

Нелогическими аксиомами теории T_3 будут $Ax(T_3) = \psi\rho(Ax(T_1))$.

Определение 7. Примем в языке теории T_3 следующие определения:

(DU) : $\forall x(Dx \equiv U(e_0, x, x))$;

(PU) : $\forall x_1..x_n(Px_1..x_n \equiv \exists u(U(e_{P1}, u, x_1) \& \ldots \& U(e_{Pn}, u, x_n)))$ для всех $P^n \in Pred_1$.

Лемма 5. $\dot\forall A \in L(\Sigma_1) : (DU), (PU) \vdash \psi(A) \equiv A$.

Доказательство. Утверждение леммы следует из определения операции ψ и теоремы о замене эквивалентных [Мендельсон, 1976, с. 82–83]. ■

Теорема 3. $\dot{\forall} A \in L(\Sigma_1) : (DD) \vdash_{T1} \rho(A) \Rightarrow (DU), (PU) \vdash_{T3} \rho(A)$.

Доказательство. Аналогично доказательству Теоремы 1. ■

Теорема 4. $\dot{\forall} A \in L(\Sigma_1) : (DU), (PU) \vdash_{T3} \rho(A) \Rightarrow (DD) \vdash_{T1} \rho(A)$

Доказательство.

Докажем контрпозицию утверждения теоремы. Допустим, не верно, что $(DD) \vdash_{T1} \rho(A)$. В силу теоремы о полноте логики предикатов первого порядка это означает, что существует такая модель $M_1 = \langle W_1, I_1 \rangle$ для аксиом $Ax(T_1)$ теории T_1 и такое приписывание значений индивидным переменным $v \in Val_1 = \{v | v : Var \to W_1\}$, что $M_1, v \vDash (DD)$, но $M_1, v \nvDash \rho(A)$.

Покажем, что в этом случае существует модель $M_3 = \langle W_3, I_3 \rangle$ для аксиом $Ax(T_3)$ теории T_3 и такое приписывание значений индивидным переменным $v \in Val_3 = \{v | v : Var \to W_3\}$, что $M_3, v \vDash (DU)$ и $M_3, v \vDash (PU)$, но $M_3, v \nvDash \rho(A)$.

Определение 8. Модель $M_3 = \langle W_3, I_3 \rangle$ определим следующим образом.

- $W_3 = W_1 \cup Nat$, где Nat — множество натуральных чисел. Вместо Nat можно взять любое другое бесконечное счетное множество.
- $I_3(D) = W_3$.
- $I_3(P^n) = I_3(P^n)$ для каждого $P^n \in Pred_1$.
- Если $i \neq j$, то $I_3(e_i) \neq I_3(e_j)$.
- Для каждого $P^n \in Pred_1$ фиксируем сюрьекцию (отображение на) $g_{Pn} : W_3 \twoheadrightarrow I_3(P^n)$, которая существует в силу бесконечности W_3.
- $I_3(U) = I_{e0}(U) \cup I_{P1}(U) \cup \dots \cup I_{Pn}(U) \cup \dots$ — для $P^n \in Pred_1$, где
  - * $I_{e0}(U) = \{\langle I_3(e_0), a, a \rangle | \, a \in D_1\}$;
  - * $I_{Pi}(U) = \{\langle I_3(e_{Pi}), a, b_i \rangle | \, pr^i(g_{Pn}(a)) = b_i, \; P^n \in Pred_1\}$.

Для дальнейшего доказательства нам понадобятся две леммы.

Лемма 6. *В модели M_3 имеют место:*
(1) $M_3 \vDash (DU)$;
(2) $M_3 \vDash (PU)$.

Доказательство.

(1). Покажем, что $M_3 \vDash \forall x(Dx \equiv U(e_0, x, x))$.

$\lceil$+1.$v \in Val_3$ – доп.
$|\lceil$+2. $M_3, v \vDash Dx$ – доп.
$||$3. $v(x) \in I_3(D)$ – из 2 по опр.
$||$4. $v(x) \in W_1$ – из 3, так как $I_3(D) = W_1$
$||$5. $\langle I_3(e_0), v(x), v(x)\rangle \in I_{e_0}(U)$ – из 4 по опр. $I_{e0}(U)$
$||$6. $\langle I_3(e_0), v(x), v(x)\rangle \in I_3(U)$ – из 5 по опр. $I_3(U)$
$|\lfloor$7. $M_3, v \vDash U(e_0, x, x)$ – из 6
$|$8. $M_3, v \vDash Dx \Rightarrow M_3, v \vDash U(e_0, x, x)$ – из 2–7
$|$9. $M_3, v \vDash Dx \supset U(e_0, x, x)$ – из 8
$|\lceil$+10. $M_3, v \vDash U(e_0, x, x)$ – доп.
$||$11. $\langle I_3(e_0), v(x), v(x)\rangle \in I_3(U)$ – из 10 по опр.
$||$12. $\langle I_3(e_0), v(x), v(x)\rangle \in I_{e0}(U)$ – из 11 по опр. $I_3(U)$
$||$13. $v(x) \in W_1$ – из 12, по опр. $I_{e0}(U)$
$||$14. $v(x) \in I_3(D)$ – из 13, так как $I_3(D) = W_1$
$|\lfloor$15. $M_3, v \vDash Dx$ – из 14
$|$16. $M_3, v \vDash U(e_0, x, x) \Rightarrow M_3, v \vDash Dx$ – из 10–15
$|$17. $M_3, v \vDash U(e_0, x, x) \supset Dx$ – из 16
$\lfloor$18. $M_3, v \vDash Dx \equiv U(e_0, x, x)$ – из 9, 17
19. $M_3 \vDash \forall x(Dx \equiv U(e_0, x, x))$ – из 1, 18

(2). Докажем $M_3 \vDash \forall x_1..x_n(Px_1..x_n \equiv \exists u(U(e_{P1}, u, x_1)\&..\&U(e_{Pn}, u, xn)))$.

$\lceil$+1. $v \in Val_3$ – доп.
$|\lceil$+2. $M_3, v \vDash Px_1..x_n$ – доп.
$||$3. $\langle v(x_1), \dots, v(x_n)\rangle \in I_3(P)$ – из 2 по опр.
$||$4. $g_{Pn}(a) = \langle v(x_1), \dots, v(x_n)\rangle$ – из 3 по опр. M_3 для некот. $a \in D_3$
$||$5. $\langle I_3(e_{Pi}), a, v(x_i)\rangle \in I_{Pi}(U)$ – из 4 по опр. $I_{Pi}(U)$ для $1 \leq i \leq n$
$||$6. $\langle I_3(e_{Pi}), a, v(x_i)\rangle \in I_3(U)$ – из 5 по опр. $I_3(U)$ для $1 \leq i \leq n$
$||$7. $v'(u) = a$ – для некот. $v' \approx_u v$
$||$8. $M_3, v' \vDash U(e_{Pi}, u, x_i)$ – из 6, 7 для $1 \leq i \leq n$
$||$9. $M_3, v' \vDash U(e_{P1}, u, x_1)\&\dots\&U(e_{Pn}, u, x_n)$ – из 8
$|\lfloor$10.$M_3, v \vDash \exists u(U(e_{P1}, u, x_1)\&\dots\&U(e_{Pn}, u, x_n))$ – из 7, 9
$|$11. $M_3, v \vDash Px_1..x_n \Rightarrow M_3, v \vDash \exists u(U(e_{P1}, u, x_1)\&\dots\&U(e_{Pn}, u, x_n))$– из 2–10
$|$12. $M_3, v \vDash Px_1..x_n \supset \exists u(U(e_{P1}, u, x_1)\&\dots\&U(e_{Pn}, u, x_n))$ – из 11
$|\lceil$+13. $M_3, v \vDash \exists u(U(e_{P1}, u, x_1)\&\dots\&U(e_{Pn}, u, x_n))$ – доп.
$||$14. $M_3, v' \vDash U(e_{P1}, v'(u), x_1)\&\dots\&U(e_{Pn}, v'(u), x_n)$ – из 13 для $v' \approx_u v$
$||$15. $M_3, v' \vDash U(e_{Pi}, v'(u), x_i)$ – из 14 для $1 \leq i \leq n$

$||16.\ \langle I_3(e_{Pi}), v'(u), v'(x_i)\rangle \in I_3(U)$ – из 15
$||17.\ \langle I_3(e_{Pi}), v'(u), v'(x_i)\rangle \in I_{Pi}(U)$ – из 16 по опр. $I_{Pi}(U)$
$||18.\ g_{Pn}(v'(u)) = \langle v'(x_1), \ldots, v'(x_n)\rangle$ – из 17 по опр. $I_{Pi}(U)$, g_{Pn}
$||19.\ \langle v'(x_1), \ldots, v'(x_n)\rangle \in I_3(P)$ – из 18 по опр. g_{Pn}
$||20.\ M_3, v' \vDash Px_1..x_n$ – из 19
$||\lfloor 21.\ M_3, v \vDash Px_1..x_n$ – из 7, 20, т.к. $v' \approx_u v$
$|22.\ M_3, v \vDash \exists u(U(e_{P1}, u, x_1)\&\ldots\&U(e_{Pn}, u, x_n)) \Rightarrow M_3, v \vDash Px_1..x_n$ – из 13–21
$|23.\ M_3, v \vDash \exists u(U(e_{P1}, u, x_1)\&\ldots\&U(e_{Pn}, u, x_n)) \supset Px_1..x_n$ – из 22
$\lfloor 24.\ M_3, v \vDash Px_1..x_n \equiv \exists u(U(e_{P1}, u, x_1)\&\ldots\&U(e_{Pn}, u, x_n))$ – из 12, 23
$25.\ M_3 \vDash \forall x_1..x_n(Px_1..x_n \equiv \exists u(U(e_{P1}, u, x_1)\&\ldots\&U(e_{Pn}, u, x_n)))$ – из 1, 24

■

Лемма 7. $\dot{\forall} A \in L(\Sigma_1) : \forall v \in Val_1 :\ M_1, v \vDash \rho(A) \Leftrightarrow M_3, v \vDash \rho(A)$.

Доказательство. Доказательство проводится по построению формулы A совершенно аналогично доказательству Леммы 4. ■

С учетом Лемм 6 и 7 доказательство теоремы будет выглядеть следующим образом.

$+1.\ (DD) \nvdash_{T1} \rho(A)$ – доп.
$2.\ Ax(T_1), (DD) \nvDash \rho(A)$ – из 1
$3.\ M_1, v \vDash Ax(T_1)$ – из 2
$4.\ M_1, v \vDash (DD)$ – из 2
$5.\ M_1, v \nvDash \rho(A)$ – из 2
$6.\ (DD) \vDash Ax(T_1) \equiv \rho(Ax(T_1))$ – из Леммы 1
$7.\ M_1, v \vDash \rho(Ax(T_1))$ – из 3, 4, 6
$8.\ M_3, v \vDash \rho(Ax(T_1))$ – из Леммы 7
$9.\ M_3, v \vDash (DU)$ – из Леммы 6
$10.\ M_3, v \vDash (PU)$ – из Леммы 6
$11.\ M_3, v \vDash \rho(Ax(T_1)) \equiv \varphi\rho(Ax(T_1))$ – из 9, 10 и Леммы 2
$12.\ M_3, v \vDash \varphi\rho(Ax(T_1))$ – из 8, 11
$13.\ M_3, v \vDash Ax(T_3)$ – из 12 по опр. $Ax(T_3)$
$14.\ M_3, v \nvDash \rho(A)$ – из 5 и Леммы 7
$15.\ Ax(T_3), (DU), (PU) \nvDash \rho(A)$ – из 9, 10, 13, 14
$16.\ (DU), (PU) \nvdash_{T3} \rho(A)$ – из 15

Таким образом, на основании Теорем 3 и 4 мы можем утверждать, что между теориями T_1 и T_3 имеет место отношение дефинициального вложения для релятивизированных формул:

$$\dot{\forall} A \in L(\Sigma_1) :\ (DD) \vdash_{T1} \rho(A) \Leftrightarrow (DU), (PU) \vdash_{T3} \rho(A).$$

Релятивизация является платой за то, что в общем случае теории могут иметь как конечные, так и бесконечные модели. В силу Леммы 1 эта плата несущественна.

Следствие. В частном случае, если все модели исходной теории T_1 бесконечны, будет иметь место обычное отношение дефинициального вложения теории T_1 в T_3:

$$\dot{\forall} A \in L(\Sigma_1) : \vdash_{T1} A \Leftrightarrow (PU) \vdash_{T3} A.$$

Это утверждение легко получить из уже имеющегося доказательства.

■

4. Заключение

Дефинициальное вложение любой теории первого порядка в теорию, язык которой содержит лишь логический предикат равенства и одноместные функциональные символы, говорит о полноте выразительных возможностей этого языка. Его достаточно для изучения логики предикатов первого порядка. На теоретико-модельном уровне этому языку будет соответствовать онтология предметов и функциональных связей между ними.

Обычно онтологические допущения в логике предикатов первого порядка сводят к допущениям о непустоте предметной области. Знаменитый тезис Куайна — «Быть — значит быть значением связанной переменной». С философской точки зрения, это слишком узкое понимание онтологических допущений.

Приведем цитату из работы Р. Карнапа «Старая и новая логика» в связи с его размышлениями о логике Фреге–Рассела.

> *«Когда Лейбниц осознал возможность использования предложений об отношениях, он смог прийти к правильному истолкованию пространства: не местоположения тел, а их положения по отношению к другим телам, — вот в чем заключается элементарное положение дел. ... К сожалению, его борьба за релятивистское истолкование пространства со сторонниками ньютоновского абсолютного пространства была столь же безуспешной, как и его стремление расширить область логики. Лишь 200 лет спустя его идеи обрели признание: в логике благодаря созданию теории отношений, в физике — благодаря теории относительности»* [Карнап, 2007, с. 110–111].

В этой цитате изучаемым в логике отношениям приписывается онтологический статус правильного истолкования пространства. Можно сказать, что эта точка зрения и сегодня является доминирующей. Ее принимают как само собой разумеющуюся. Как мы уже писали [Шалак, 2010], всякой онтологии отношений соответствует функциональная онтология. Теоремы 1 и 2 усиливают этот результат, позволяя перейти от реляционной к функциональной онтологии, содержащей лишь одноместные функции. То, что логика отношений несет в себе правильный взгляд на окружающий мир, является не более чем иллюзией, ограничивающей кругозор исследователей.

С одной стороны, тезис Пирса проваливается, так как любую теорию мы можем представить в языке одноместных функций, которые, с теретико-множественной точки зрения, являются двухместными отношениями. С другой стороны, существует язык с единственным в определенном смысле универсальным трехместным предикатным символом $U(e, u, x)$, в котором также может быть представлена любая теория. С нашей точки зрения, эта универсальность $U(e, u, x)$ несет в себе определенную онтологическую нагрузку и может рассматриваться как подтверждение тезиса Пирса и его философии троичности.

Логика – это не просто игра в символы. Интерпретируя те или иные теоремы, философы задаются вопросом, что стоит за ними? При онтологической интерпретации смысл трехместного предикатного символа $U(e, u, x)$ заключается в том, что мир может быть представлен как множество индивидов, взаимосвязанных единственным трехместным отношением. Ему соответствует абстрактное универсальное трехмерное пространство, в котором могут быть описаны все законы окружающего мира.

Одной из базовых структур теории относительности является четырехмерное пространство-время Минковского, которое можно представить четырехместным предикатом $S(x, y, z, t)$. Из теоремы о редукции к единственному трехместному предикату $U(e, u, x)$ следует, что пространство-время Минковского не является фундаментальной физической структурой, так как может быть редуцировано к более простому трехместному отношению, физический смысл которого отличен от привычного и потому кажущегося естественным пространственно-временного.

Но возможна и эпистемическая интерпретация предикатного символа $U(e, u, x)$. Не является ли его существование следствием ограниченности структур нашего языка, как конечного средства представления знаний, и невозможности выйти за его границы?

Физики уже много лет размышляют над возможностью построения теории всего [Хокинг, 2018], [Вайнберг]. Из теоремы о редукции к единственному трехместному предикату $U(e, u, x)$ следует, что если такая теория возможна, то фундаментальным ее отношением будет именно трехместное отношение, а все остальные будут определимы через него.

Вспомним универсальную машину Тьюринга и предикат $UM(e, u, x)$, которым можно ее представить. В нем e — это геделев номер конкретной машины Тьюринга, u — входные данные (начальное состояние рабочей ленты), а x — результат вычисления (конечное состояние рабочей ленты). Имеется явный структурный параллелизм между ним и трехместным предикатом $U(e, u, x)$. Предикат $UM(e, u, x)$ — это контейнер всех вычислимых функций, по одной для каждого геделева номера e. Но и предикат $U(e, u, x)$ тоже можно рассматривать как контейнер одноместных функций для каждой конкретной константы e. Это легко видно из определения модели M_3 при доказательстве теоремы о вложении. В этом заключается связь между теоремой о редукции к одноместным функциям и теоремой о редукции к единственному трехместному предикату. Этот предикат, как и предикат универсальной машины Тьюринга, связывает множество одноместных функций в единую структуру. Возможно, за этим стоит нечто большее, но пока не понятно, что.

Литература

Вайнберг – *Вайнберг С.* Мечты об окончательной теории. Физика в поисках самых фундаментальных законов природы. 2-е изд. М.: Едиториал УРСС, 2004. 256 с.

Карнап, 2007 – *Карнап Р.* Старая и новая логика // Журнал «Erkenntnis» («Познание»). Избранное. М.: Издательский дом «Территория будущего», Идея-Пресс, 2007. С. 105–119.

Мендельсон, 1976 – *Мендельсон Э.* Введение в математическую логику. М.: Наука, 1976. 320 с.

Пирс, 2005 – *Пирс Ч.С.* Рассуждение и логика вещей. Лекции для Кембриджских конференций 1898 года. М.: РГГУ, 2005. 371 с.

Смирнов, 1987 – *Смирнов В.А.* Логические методы анализа научного знания. М.: Наука, 1987. 256 с.

Хокинг, 2018 – *Хокинг С.* Теория всего. М.: АСТ, 2018. 160 с.

Шалак, 2010 – *Шалак В.И.* Логика функций vs логика отношений // Логические исследования. Вып. 16. М.: Наука, 2010. С. 259–271.

Church, Quine, 1952 – *Church A., Quine W.* Some Theorems on Definability and Decidability // The Journal of Symbolic Logic. 1952. Vol. 17. No. 3. P. 179–187.

Herzberger, 1981 – *Herzberger H.G.* Peirce's Remarkable Theorem // Pragmatism and Purpose. Toronto: Toronto University Press, 1981. P. 41–58.

Kleinert, 2007 – *Kleinert E.* On the Reducibility of Relations: Variations on a Theme of Peirce // Transactions of the Charles S. Peirce Society. 2007. Vol. 43. No. 3 (Summer, 2007). P. 509–520.

Skidmore, 1971 – *Skidmore A.* Peirce & Triads // Transactions of the Charles S. Peirce Society. 1971. Vol. 7. No. 1 (Winter, 1971). P. 3–23.

Vladimir I. Shalack

Peirce's thesis: logical analysis and ontological consequences

Vladimir I. Shalack
Institute of Philosophy of RAS,
12/1 Goncharnaya Str., Moscow, 109240, Russian Federation.
E-mail: `shalack@gmail.com`

Abstract: C. Peirce put forward the hypothesis that any relations can be reduced to relations whose arity does not exceed three. This hypothesis is closely related to the basic categories of his phenomenology.

In the paper we provide semantic analysis and detailed proof of the following two results.

1. Any first-order theory can be represented in a language containing a finite set of one-place functional symbols. A philosophically important consequence of this is the same expressive power of relational and functional languages and corresponding ontologies.

2. Any first-order theory can be represented in a language containing a single three-place predicate symbol U and a finite set of individual constants. This confirms Peirce's conjecture about the fundamental role that three-place relationships play. A language whose descriptive symbols contain only individual constants and the only three-place predicate turns out to be a universal language for representing any first-order theories.

There is a structural similarity between the three-place predicate $U(e, u, x)$ and the three-place predicate $UM(e, u, x)$, which represents the universal Turing machine. Both can be considered as containers of one-place functions. From this point of view, the predicate U is an extension of the predicate UM to any, and not only effectively computable functions. Proved theorems force us to take a fresh look at many physical theories.

In the theory of relativity, the four-dimensional Minkowski space-time is considered as the fundamental structure, which can be represented as a four-place predicate $S(x, y, z, t)$. It follows from the theorem on the existence of the predicate $U(e, u, x)$ that the four-dimensional Minkowski space-time is not a fundamental physical structure, since it can be reduced to a single three-place relation.

Keywords: Peirce's thesis, reduction of relations, relations between theories, definitional embeddability of theories, ontological assumptions

For citation: Shalack V.I. "Tezis Pirsa: logicheskii analiz i ontologicheskie sledstviya" [Peirce's thesis: logical analysis and ontological consequences], *Logicheskie Issledovaniya / Logical Investigations*, 2019, Vol. 25, No. 2, pp. 138–163. DOI: 10.21146/2074-1472-2019-25-2-138-163 (In Russian)

References

Carnap, 2007 – Carnap, R. "Staraya i novaya logika" [Old and New Logic], in: *ZHurnal "Erkenntnis" ("Poznanie"). Izbrannoe.* Moscow: Izdatel'skij dom "Territoriya budushchego", Ideya–Press, 2007. pp. 105–119. (In Russian)

Church, Quine, 1952 – Church, A., Quine, W. "Some Theorems on Definability and Decidability", *The Journal of Symbolic Logic*, 1952, Vol. 17, No. 3, pp. 179–187.

Hawking, 2018 – Hawking, S. *Teoriya vsego* [The Theory of Everything]. Moscow: AST, 2018. 160 pp. (In Russian)

Herzberger, 1981 – Herzberger, H.G. "Peirce's Remarkable Theorem", in *Pragmatism and Purpose*. Toronto: Toronto University Press, 1981, pp. 41–58.

Kleinert, 2007 – Kleinert, E. "On the Reducibility of Relations: Variations on a Theme of Peirce", in: *Transactions of the Charles S. Peirce Society*, 2007, Vol. 43, No. 3 (Summer, 2007), pp. 509–520.

Mendelson, 1976 – Mendelson, E. *Vvedenie v matematicheskuyu logiku* [Introduction to Mathematical Logic]. Moscow: Nauka, 1976. 320 pp. (In Russian)

Peirce, 2005 – Peirce, Ch.S. *Rassuzhdenie i logika veshchei. Lektsii dlya Kembridzhskikh konferentsii 1898 goda* [Reasoning and the Logic of Things. The Cambridge Conferences Lectures of 1898]. Moscow: RGGU, 2005. 371 pp. (In Russian)

Shalack, 2010 – Shalack, V.I. *Logika funkcij vs logika otnoshenij* [Logic of Functions vs Logic of Relations], in: *Logicheskie issledovaniya*, Vol. 16. Moscow: Nauka, 2010, pp. 259–271. (In Russian)

Skidmore, 1971 – Skidmore, A. "Peirce & Triads", *Transactions of the Charles S. Peirce Society*, 1971, Vol. 7, No. 1 (Winter, 1971), pp. 3–23.

Smirnov, 1987 – Smirnov, V.A. *Logicheskie metody analiza nauchnogo znaniya* [Logical Methods of Analysis of Scientific Knowledge]. Moscow: Nauka, 1987. 256 s. (In Russian)

Weinberg, 2004 – Weinberg, S. *Mechty ob okonchatel'noj teorii. Fizika v poiskah samyh fundamental'nyh zakonov prirody* [Dreams of a Final Theory], 2-e izd. Moscow: Editorial URSS, 2004. 256 pp. (In Russian)

Информация для авторов

• Журнал «Логические исследования» принимает к публикации рукописи, содержащие изложение оригинальных результатов из различных областей современной логики, ранее не публиковавшиеся и не представленные к публикации в других изданиях. (Рубрики см. на сайте журнала `http://logicalinvestigations.ru`)

• Все статьи, планируемые к публикации в журнале «Логические исследования», проходят процедуру анонимного рецензирования.

• Решение о публикации текста принимается главным редактором с учетом мнения редколлегии и оценки рецензентов. Решение о публикации принимается в течение двух месяцев с момента предоставления рукописи.

• Плата за опубликование рукописей не взимается.

• Рукопись должна быть представлена в электронном виде и оформлена в формате LaTeX 2_ε (по согласованию с редколлегией — в MS Word с обязательным предоставлением pdf-файла).

• При подготовке рукописи в LaTeX 2_ε необходимо использовать стилевой класс `LIarticle.cls` и шаблон `LI_template.tex` (если рукопись на русском языке) или `LI_template_eng.tex` (если рукопись на английском языке), которые размещены в правилах предоставления рукописей на сайте `http://logicalinvestigations.ru`. Здесь же размещены подробные рекомендации по подготовке рукописи.

• Объем рукописи не должен превышать 25 стр. (60 тыс. знаков), включая ссылки, примечания, списоки литературы, аннотации (на русском и английском языках).

Статьи следует направлять в электронном виде в редакцию через сайт
`logicalinvestigations@gmail.com`

Information for authors

• *Logical Investigations* accepts for submission papers containing original results in all areas of logic. The papers should not have been published or simultaneously submitted to another publication. (Sections of the journal: http://logicalinvestigations.ru)

• All materials published in *Logical Investigations* undergo peer review process.

• The Editor in Chief makes the decision which of the submitted articles should be published, with due account for opinions of the Editorial Board and the reviewers. The decision is made within two months since the date of submission of the manuscript.

• Authors are not charged for the publication.

• Papers should be submitted electronically in the $\LaTeX 2_\varepsilon$ format (special permission of the editorial board is needed for submissions to be made in the MS Word format).

• While typesetting a paper, the class file `LIarticle.cls` and the template `LI_template_eng.tex` should be used; both files can be accessed at http://logicalinvestigations.ru. Here you can also find detailed guidelines for preparing your paper.

• Papers should not exceed 25 pages in the above mentioned format (including the notes, the bibliography, the abstract).

Submissions should be sent in electronic form through the website:
logicalinvestigations@gmail.com

Научно-теоретический журнал

Логические исследования / Logical Investigations
2019. Том 25. Номер 2

Учредитель и издатель: Федеральное государственное бюджетное учреждение науки Институт философии Российской академии наук

Свидетельство о регистрации СМИ: *ПИ № ФС77-61228 от 03.04.2015 г.*

Главный редактор: *В.И. Шалак*

Ответственный секретарь: *Н.Е. Томова*

Технический редактор: *Е.А. Морозова*, *Ю.В. Хорькова*

Художник: *Н.Н. Попов*, *С.Ю. Растегина*

Подписано в печать с оригинал-макета 09.10.2019.
Формат 70x100 1/16. Печать офсетная. Гарнитура Computer Modern.
Для набора греческого текста исользован пакет Teubner.
Усл. печ. л. 13,5. Уч.-изд. л. 7,8. Тираж 1 000 экз. Заказ № 18.

Оригинал-макет изготовлен в Институте философии РАН

Разработка LaTeX-класса стилевого оформления оригинал-макета: *А.Е. Коньков*

Компьютерная верстка: *Н.Е. Томова*

Отпечатано в ЦОП Института философии РАН
109240, г. Москва, ул. Гончарная, д. 12, стр. 1

Информацию о журнале «Логические исследования» см. на сайте:
`http://logicalinvestigations.ru`