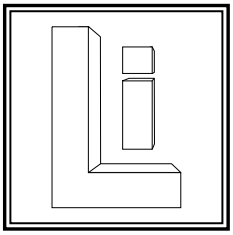


Institute of Philosophy
Russian Academy of Sciences

LOGICAL INVESTIGATIONS

Volume 26. Number 2

Moscow
2020

Федеральное государственное бюджетное учреждение науки
Институт философии Российской академии наук

ЛОГИЧЕСКИЕ ИССЛЕДОВАНИЯ

Том 26. Номер 2

Москва
2020

ISSN 2074-1472 (Print)
ISSN 2413-2713 (Online)

Logical Investigations

Scientific-Theoretical Journal

2020. Volume 26. Number 2

Editorial Board

Editor-in-Chief: *V.I. Shalack* (Moscow), Executive Editor: *N.E. Tomova* (Moscow), *V.A. Bazhanov* (Ulyanovsk), *L.Y. Devyatkin* (Moscow), *V.K. Finn* (Moscow), *I.A. Gerasimova* (Moscow), *I.A. Gorbunov* (Tver), *Y.V. Ivlev* (Moscow), *V.I. Markin* (Moscow), *I.B. Mikirtumov* (St.-Peterburg), *N.N. Nepeivoda* (Pereslavl-Zalessky), *S.P. Odintsov* (Novosibirsk), *V.M. Popov* (Moscow), *M.N. Rybakov* (Tver), *V.L. Vasyukov* (Moscow), *D.V. Zaitsev* (Moscow)

International Editorial Board

Diderik Batens (Belgium), *Johan van Benthem* (Hollald, USA), *Otavio Bueno* (USA), *Walter Carnielli* (Brazil), *Valentin Goranko* (Sweden), *Grzegorz Malinowski* (Poland), *Graham Priest* (Australia, USA), *Gabriel Sandu* (Finland), *Andrew Schumann* (Poland), *Heinrich Wansing* (Germany)

Publisher: Institute of Philosophy, Russian Academy of Sciences

Frequency: 2 times per year

First issue: 1993; the journal is a redesigned continuation of the annual *Logical Investigations* that has been published since 1993 till 2015

The journal is registered with the Federal Service for Supervision of Communications, Information Technology, and Mass Media (Roskomnadzor). The Mass Media Registration Certificate No. FS77-61228 on April 3, 2015

Abstracting and indexing: *Zentralblatt MATH*, *Mathematical Reviews*, *Ulrich's Periodicals Directory*, *EBSCOhost (Philosopher's Index with Full Text)*

The journal is included in the list of peer-reviewed scientific editions acknowledged by the Higher Attestation Commission of the Ministry of Education and Science of the Russian Federation

Subscription index in the United Catalogue *The Russian Press* is 42046

All materials published in *Logical Investigations* undergo peer review process

Editorial address: 12/1 Goncharnaya St., Moscow 109240, Russian Federation
Tel.: +7 (495) 697-96-65; **e-mail:** `logicalinvestigations@gmail.com`
Website: `https://logicalinvestigations.ru`

© Institute of Philosophy, Russian Academy of Sciences, 2020

ISSN 2074-1472 (Print)
ISSN 2413-2713 (Online)

Логические исследования

Научно-теоретический журнал

2020. Том 26. Номер 2

Редакционная коллегия

Гл. редактор: *В.И. Шалак* (Москва), отв. секретарь: *Н.Е. Томова* (Москва), *В.А. Бажанов* (Ульяновск), *В.Л. Васюков* (Москва), *И.А. Герасимова* (Москва), *И.А. Горбунов* (Тверь), *Л.Ю. Девяткин* (Москва), *Д.В. Зайцев* (Москва), *Ю.В. Ивлев* (Москва), *В.И. Маркин* (Москва), *И.Б. Микиртумов* (Санкт-Петербург), *Н.Н. Непейвода* (Переславль-Залесский), *С.П. Одинцов* (Новосибирск), *В.М. Попов* (Москва), *М.Н. Рыбаков* (Тверь), *В.К. Финн* (Москва)

Международный редакционный совет

Дидерик Батенс (Бельгия), *Йохан ван Бентем* (Голландия, США), *Отавио Буено* (США), *Вальтер Карниелли* (Бразилия), *Валентин Горанко* (Швеция), *Гржегорж Малиновский* (Польша), *Грехам Прист* (Австралия, США), *Габриель Санду* (Финляндия), *Эндрю Шуман* (Польша), *Генрих Вансинг* (Германия)

Учредитель и издатель: Федеральное государственное бюджетное учреждение науки Институт философии Российской академии наук

Периодичность: 2 раза в год

Выходит с 1993 г.; журнал является прямым продолжением ежегодника «Логические исследования», издававшегося с 1993 по 2015 г.

Журнал зарегистрирован Федеральной службой по надзору в сфере связи, информационных технологий и массовых коммуникаций (Роскомнадзор). Свидетельство о регистрации СМИ: ПИ № ФС77-61228 от 03 апреля 2015 г.

Журнал реферируется и индексируется: *Mathematical Reviews*, *Zentralblatt MATH*, *Ulrich's Periodicals Directory*, *РИНЦ*, *EBSCOhost (Philosopher's Index with Full Text)*

Журнал включен в Перечень российских рецензируемых научных журналов, рекомендованных ВАК, в которых должны быть опубликованы основные научные результаты диссертаций на соискание ученых степеней доктора и кандидата наук (группа научных специальностей «09.00.00 – философские науки»)

Подписной индекс в Объединенном каталоге «Пресса России» — 42046

Публикуемые материалы прошли процедуру рецензирования и экспертного отбора

Адрес редакции: Российская Федерация, 109240, г. Москва, ул. Гончарная, д. 12, стр. 1, оф. 426
Тел.: +7 (495) 697-96-65; **e-mail:** `logicalinvestigations@gmail.com`

Сайт: `https://logicalinvestigations.ru`

© Институт философии РАН, 2020

TABLE OF CONTENTS

Philosophy and logic

Gleb V. Karpov
Forgiveness as a speech act in logic of action 9

Vladimir I. Markin
Syllogistic as the logic of all relations between two non-empty sets . . . 39

Vladimir I. Shalack
Comparative logical analysis of substantive and processual ontologies . . 58

Alex Citkin
Deductive systems with unified multiple-conclusion rules 87

Mariusz Urbański
Formal modeling of human reasoning: errors, limitations and Baconian bees 106

Non-classical Logic

Leonid Yu. Devyatkin
On the expressive power of certain expansions of Belnap's four-valued logic 116

Natalya E. Tomova
On a class of n-valued literal paraconsistent/paracomplete logics 144

Discussions

Gala Maksudova-Eliseeva
Logical aliens and where to find them 160

Information for authors 177

В НОМЕРЕ

Философия и логика

Г.В. Карпов
Прощение как речевой акт в логике действий 9

В.И. Маркин
Силлогистика как логика всех отношений между двумя непустыми множествами 39

В.И. Шалак
Сравнительный логический анализ субстанциальной и процессуальной онтологий 58

Alex Citkin
Deductive systems with unified multiple-conclusion rules 87

Mariusz Urbański
Formal modeling of human reasoning: errors, limitations and Baconian bees 106

Неклассическая логика

Л.Ю. Девяткин
О выразительных возможностях отдельных расширений четырехзначной логики Белнапа 116

Н.Е. Томова
Об одном классе n-значных литеральных паранепротиворечивых/параполных логик 144

Дискуссии

Gala Maksudova-Eliseeva
Logical aliens and where to find them 160

Информация для авторов 176

Логические исследования
2020. Т. 26. № 2. С. 9–38
УДК 164.3

Logical Investigations
2020, Vol. 26, No. 2, pp. 9–38
DOI: 10.21146/2074-1472-2020-26-2-9-38

Философия и логика

Philosophy and logic

Г.В. Карпов

Прощение как речевой акт в логике действий*

Глеб Викторович Карпов
Санкт-Петербургский государственный университет.
Российская Федерация, 199034, г. Санкт-Петербург, Менделеевская линия, 5.
E-mail: glebsight@gmail.com

Аннотация: Статья посвящена исследованию прощения как речевого акта и как действия, ассоциированного со сложной структурой принятия решения. В первой части статьи мы делаем ряд критических замечаний в отношении методологии так наз. перформативных подходов к прощению. Мы приходим к заключению, что теория речевых актов в действительности не использовалась авторами «перформативных» подходов, и все ссылки на нее носят лишь номинальный характер. Мы устраняем методологические недочеты двух перформативных подходов к прощению, комиссивного и директивного, используя для этого логический аппарат, в основе которого лежат семантические идеи логики действий Белнапа. Нам удается опровергнуть заявления ряда авторов, занятых исследованием прощения, о том, что возможен синтетический подход к данному феномену, объединяющий комиссивную и декларативную интерпретации высказывания «Я тебя прощаю».

Во второй, конструктивной, части статьи мы исследуем возможности классической логики действий, которые та предоставляет для того, чтобы указать на отличие случаев отказа прощать от случаев уклонения от прощения. Мы показываем, что удовлетворительно этот вопрос может быть разрешен средствами логики действия через привлечение специально устроенных языка, модельной структуры и синтаксических определений, обеспечивающих фиксацию двухуровневой структуры принятия решения о прощении, которой пользуется агент-жертва. Мы высказываем предположение, что описанная нами форма принятия решений может быть ассоциирована не только с прощением (в чем мы видим пользу для отрасли философского знания, занятой этим феноменом), но и с другими, подобными ему действиями (в чем мы усматриваем пользу для логики действий в ее прикладном, и, возможно, теоретическом аспектах). Предложенная нами идея агентных доменов, кроме того, применима в общей логике действия при анализе проблем, аналогичных проблеме различения случаев отказа и уклонения.

* Работа выполнена при поддержке гранта РНФ № 20-18-00158 «Формальная философия аргументации и комплексная методология поиска и отбора решений спора». Я благодарен анонимным рецензентам за внимательное отношение к тексту статьи и ряд замечаний. Их проработка сказалась положительным образом на изложении и, кроме того, обратила мое внимание на новые логические сюжеты, непосредственно соприкасающиеся с темой прощения.

© Карпов Г.В.

Ключевые слова: иллокутивная сила, агент, принятие решения, уклонение, действие, структура действия

Для цитирования: *Карпов Г.В.* Прощение как речевой акт в логике действий // Логические исследования / Logical Investigations. 2020. Т. 26. № 2. С. 9–38. DOI: 10.21146/2074-1472-2020-26-2-9-38

1. Подходы к прощению в рамках теории речевых актов

Среди ответов, которые дают философы на вопрос о том, что делает агент, когда произносит предложение «Я тебя прощаю», распространены следующие: она или он сообщает о своем текущем эмоциональном состоянии; дает обещание вести себя определенным образом со своими обидчицей или обидчиком; отпускает обидчице или обидчику некий долг. Порядок в это множество ответов вносит теория речевых актов Джона Остина. Тогда исходный вопрос трансформируется в вопрос об иллокутивной силе речевого акта, выраженного локуцией «Я тебя прощаю». Такая его постановка дает гарантии того, что ответ обязательно будет найден, так как теория речевых актов претендует на то, что она описывает и истолковывает *все* возможные способы говорить, все виды речевого взаимодействия. Кроме этого, вопрос, сформулированный таким образом, предлагает исследователям некоторый метод; их работа больше не сводится к простой фиксации интуиций на тему того, что же такое прощение, так как теперь выяснение философского содержания этого явления, происходит посредством перечисления отличительных свойств типов речевых актов, с которыми прощение предлагается если не отождествлять, то ассоциировать.

В своей работе «Как производить действия при помощи слов» [Остин, 1999], среди прочих способов использования языка, Остин отмечает бехабитивы — речевые действия, с помощью которых агенты выражают отношение к поведению друг друга: одобряют его или, например, выказывают в связи с ним свое возмущение. Предложение «Я тебя прощаю», истолкованное как **бехабитив**, означает, что его автор (в работах, посвященных прощению, — так наз. «жертва») сообщает обидчице или обидчику то, что он или она больше не испытывает того гнева, в связи с нанесенной обидой, который в нем или в ней следовало бы ожидать. Уточняя эту интерпретацию, впервые предложенную Joram Haber [Haber, 1991], Glen Pettigrove пишет, что содержание отношения жертвы к обидчице или к обидчику и ко всей ситуации в целом, переданное бехабитивом «Я тебя прощаю», может быть дано в следующих предложениях: говорящий убежден в том, что ему или ей действительно была нанесена обида адресатом сообщения о прощении; говорящий демонстрирует отсутствие намерения платить обидчику

тем же и свидетельствует о том, что теперь обидчику или обидчице следует рассчитывать на некоторую степень расположения, положительного отношения к ней или к нему со стороны жертвы [Pettigrove, 2004, p. 379].

В соответствии с **комиссивным** подходом к прощению сказать «Я тебя прощаю» — означает совершить комиссивный речевой акт, т. е., например, обещать обидчице или обидчику, что в будущем отношения, разрушенные ее или его словами или поступками, снова станут такими как прежде. Pettigrove указывает на то, что предложение «Я тебя прощаю», интерпретируемое как обещание, служит гарантией, во-первых, того, что жертва не будет платить за обиду тем же, и, во-вторых, того, что он или она готовы проявлять благожелательность по отношению к обидчице или обидчику. Развитие комиссивного подхода, заключающееся в описании содержания накладываемых подобным обещанием обязательств, предложено в [Warmke, 2016]. Здесь, в частности, отмечается, что жертва, осуществляя комиссивный речевой акт, берет на себя обязательства, запрещающие ему или ей порицать обидчицу или обидчика за те действия, которые привели к обиде.

В локуции «Я тебя прощаю» **декларативный** подход предлагает видеть действие, аналогичное действию помилования в судебной системе, отказу от взыскивания долга в сфере финансовых отношений или отпущению грехов. Осуществить прощение-декларатив — значит сделать так, что высказывание, составляющее его пропозициональное содержание, будет считаться истинным именно потому, что была осуществлена соответствующая локуция. Подобно тому как посредством произнесения локуции «Объявляю собрание открытым», собрание действительно открывается и начинает свою работу, посредством локуции «Я тебя прощаю» обидчице или обидчику даруется прощение, и она или он, в тот же самый момент в глазах своей жертвы, становятся теми, кем они были до того, как обида была нанесена.

Таким образом, если бехабитивный подход видит в соответствующей локуции рапорт об изменении эмоционального и когнитивного состояния жертвы, а комиссивный подход отождествляет ее произнесение с действием, создающим те или иные обязательства, которые должны быть исполнены в будущем и жертвой, и обидчицей (обидчиком), то декларативный подход интерпретирует локуцию «Я тебя прощаю» как поступок аналогичный амнистии или разорванной и утратившей из-за этого силу долговой расписке, а ситуацию ее использования — как такую, когда сказать и сделать — одно.

Первоначальный исследовательский интерес к прощению вызван неоднозначностью отношения указанных подходов друг к другу. Конкурируют ли они? Или, напротив, каждый из указанных подходов затрагивает

какое-то одно, наиболее существенное свойство прощения, и, будучи объединенными в рамках некой синтетической теории прощения, они вместе дадут согласные и как можно более полные описание и интерпретацию этого феномена? Научная литература, как и следовало ожидать, дает разные ответы на эти вопросы.

Так, Pettigrove настаивает на комбинированном подходе к прощению, составленном из комиссивной и бехабитивной интерпретации соответствующей локуции, в то время как декларативный подход, уделяющий излишнее внимание обидчику и недостаточно полно анализирующий поведение жертвы и автора локуции-прощения, видится ему наименее приемлемым из всех (см. раздел «The Forgiveness for which We Hope», [Pettigrove, 2004, p. 388] и далее).

Warmke, напротив, разрабатывает синтетический подход, объединяющий комиссивный и декларативный подходы (см. [Warmke, 2016, p. 701]), причем основная аналитическая работа осуществляется им в рамках последнего: именно в его терминах описываются и истолковываются изменения норм и обязательств, связывающих жертву и обидчицу или обидчика, что представляется этому исследователю наиболее важным элементом прощения.

Первый вопрос, на который мы даем ответ в этой статье, это вопрос о том, в каких отношениях находятся между собой два из указанных подходов, комиссивный и декларативный: следует ли рассматривать их как конкурирующие или же они могут дополнять друг друга? Обсуждению этого вопроса предшествует краткое критическое исследование рассматриваемых подходов с точки зрения той методологии, которую они используют. В этом обсуждении мы попытаемся определить действительно ли эти подходы возникают как следствие приложения теории речевых актов к прощению. Этим темам отведена первая, критическая, часть статьи, ее параграфы 2 и 3. Во второй, конструктивной, части мы обращаем внимание на структуру принятия агентом решения о прощении, когда отсутствие действия, ассоциированного с прощением, может пониматься и как отказ жертвы прощать, и как ее уклонение от того, чтобы простить обидчика. В связи с этим феноменом мы даем ответ на два вопроса, касающихся способов интерпретации указанного отличия средствами логики действий. Во-первых, в параграфе 4 мы показываем способ, при помощи которого удается различить отказ и уклонение от прощения средствами классической логики действия белнаповского типа ($STIT$-логики). Во-вторых, в параграфе 5 мы отвечаем на вопрос о том, какие еще есть инструменты в распоряжении логики действия для интерпретации разных действий, оканчивающихся одним и тем же результатом, и предлагаем один из таких инструментов,

благодаря которому прощение интерпретируется как процесс, заключающийся в принятии жертвой нескольких упорядоченных специальным образом, разноуровневых решений о возможных действиях в отношении обидчицы или обидчика. Выводы и дополнительные замечания к обсуждаемым проблемам и формализмам, которые мы использовали для их анализа и решения, мы приводим в заключительном параграфе 6.

2. Прощение и теория речевых актов: приложение или простое описание в терминах?

Если бы теория речевых актов действительно служила инструментом, с помощью которого ищется ответ на вопрос о том, что такое прощение, то такой поиск выглядел бы иначе, чем это имеет место у Haber или Pettigrove. В этом случае естественным было бы, например, такое рассуждение: допуская, что локуция «Я тебя прощаю» осуществляется с иллокутивной силой комиссивного типа, будем считать, что в этом случае форма речевого акта, выражающего прощение, подобна форме комиссивных иллокутивных актов, к числу которых принадлежит, в частности, и обещание. Дальше рассуждение, в рамках приложения теории речевых актов к прощению, могло бы продвигаться двояким путем: или через сопоставление отличительных характеристик комиссивной иллокутивной силы (а не обещания, т. е. конкретного иллокутивного акта, относящегося к типу комиссивов) с феноменологическим описанием действительных практик прощения и обнаружение первого во втором; или через выявление разнообразных феноменов прощения средствами «лингвистической феноменологии» в манере Остина, где сказать «Я тебя прощаю» значит в каком-то смысле пообещать, или связать себя обязательством, или поручиться, или торжественно заявить, или заречься, или помириться, или посчитать заслуживающим доверия или подходящим, или соглашаться на определенные условия и так далее.

Однако приверженцы рассматриваемых подходов склонны использовать теорию речевых актов как не органон, а, опираясь на философию сознания, культурную антропологию или теорию эмоций, скорее как набор терминов, с помощью которых удобно описывать обнаруженные средствами указанных отраслей философского знания свойства прощения. В связи с этим небезынтересно указать на то, что прием, к которому прибегает в своем исследовании прощения, например, Downie, напоминает, как бы мы сегодня сказали, применение принципа кооперации Пола Грайса и поиск с его помощью коммуникативных импликатур предложения «Я тебя прощаю», см. [Downie, 1965]. Используя триаду теории Остина (локуция — иллокуция — перлокуция), можно утверждать, что здесь, как и в указанных подходах вообще, основным предметом интереса становится

не иллокутивный, а перлокутивный акт, не коммуникативная, а прагматическая характеристика соответствующих высказываний.

Следовательно, перед нами не приложение инструмента к некоторой неизвестной области, когда мы не знаем, что такое прощение, но надеемся узнать, сопоставив соответствующим предложениям, в которых оно выражается, формы или структуры, составляющие содержание теории речевых актов (и в том виде, и с теми ограничениями, с которыми они в этой теории представлены), а в большей степени подгонка совокупности высказываний о прощении, полученных другими средствами и из других источников, под терминологический аппарат этой теории.

Если согласиться с тем, что теория речевых актов все же используется как инструмент хотя бы эпизодически, то здесь мы обнаружим своего рода забвение чрезвычайно важного разделения иллокутивного акта на иллокутивную силу и пропозициональное содержание, которое соблюдается неукоснительно, например, Джоном Серлом, но которое периодически «проваливается» в работах основателя теории Остина. Причем нельзя утверждать, что этот факт ускользнул от внимания тех, кто внес существенный вклад в разработку соответствующих подходов к прощению, основав их, тем не менее, именно на работах Остина, а не Серла или Даниэля Вандервекена, которые предложили теоретико-множественную трактовку для основных понятий теории и, кроме того, сформулировали и обосновали для них ряд логических законов.

Так Pettigrove выражает свою обеспокоенность корректностью построения бехабитивного подхода в связи с тем, что соответствующий тип иллокутивных актов определяется Остином «скорее с точки зрения их пропозиционального содержания, а не с точки зрения их иллокутивной силы». Это, однако, не мешает ему пользоваться теорией речевых актов в редакции Остина, ссылаясь на то, что так поступал Haber, «внесший наиболее существенный вклад в исследование иллокутивных сил прощения», см. [Pettigrove, 2004, p. 388].

На основании сказанного мы заключаем, что для того, чтобы внести ясность в вопрос о соотношении подходов к прощению, использующих элементы теории речевых актов, нужно рассуждать так, как если бы их авторы не игнорировали различие иллокутивной силы и пропозиционального содержания. Для того чтобы это сделать, мы намереваемся привлечь к исследованию указанного вопроса формально-логические средства, с помощью которых будет нетрудно фиксировать структуру иллокутивного акта. Инструмент, который мы опишем в параграфе 2, имеет своим основанием формальные исследования речевых актов середины и конца 90-х годов прошлого века; прежде всего они представлены в работе [Searle, Vanderveken,

1985] и, затем, в двухтомнике [Vanderveken, 1990; Vanderveken, 1991]. Так как эти формально-логические штудии речевых актов, в свою очередь, опирались не на оригинальную концепцию Остина, а на теорию Серла, из которой были исключены речевые акты бехабитивного типа, мы также будем следовать этой более поздней и лучшим образом обоснованной классификации типов речевых актов. Из трех упомянутых нами подходов к прощению нас, таким образом, будут интересовать преимущественно два последних. (Бехабитивный подход в силу того, что он касается динамики психологических состояний говорящего, требует, очевидно, несколько иного инструментария, чем тот, который имеется в нашем распоряжении.)

Еще один источник формальных построений, данных в параграфе 2, с помощью которых мы постараемся внести ясность в вопрос о соотношении указанных подходов к прощению, их главный логической двигатель, — логика действий в редакции Н. Белнапа, известная под названием $STIT$-логики. Читатель, знакомый лишь с оригинальными работами Белнапа конца 90-х годов или с монографией Джона Хорти [Horty, 2001] по деонтической логике, где $STIT$-логика широко применяется как средство разрешения философских затруднений, не обнаружит в аппарате, используемом нами, обычных определений для операторов действий *astit*-, *dstit*- и других. Так как предмет нашего интереса, и в особенности это касается первой части статьи, где мы рассматриваем в критическом ключе «перформативные» подходы, заключается в изучении логических свойств действий особого рода, речевых действий, в параграфе 3 мы вводим специальные операторы действия, сообразно с видами речевых актов, в которых воплощается, в свете соответствующих подходов, локуция «Я тебя прощаю»[1]. В параграфе 4 и, в особенности, в параграфе 5, для того, чтобы интерпретировать формулы, описывающие структуру принятия решения агентом-жертвой о прощении своих обидчицы или обидчика, мы снова используем модельные структуры и модели, созданные под влиянием логики действий Белнапа, хотя и не воплощающие его идеи в неизменном виде.

Однако и в основании классических операторов действий, и в основании операторов речевых действий, которые предлагаем мы, лежит одна и та же семантическая идея. В соответствии с ней действие ассоциируется с переходом из данного множества описаний положений дел в множество, отличное от данного. Действие — это транзит, который осуществляет агент, разбивая множество возможных миров на подмножества тех миров, что

[1]Мы используем современную нотацию для операторов действия, когда букве, указывающей тип оператора, отводится место верхнего индекса за квадратными скобками. Например, сегодня вместо $[\alpha\ astit\colon \phi]$ принято писать $[\alpha]^a\phi$, а вместо $[\alpha\ dstit\colon \phi]$ — $[\alpha]^d\phi$ и т. п.; или, если тип агентного оператора не имеет значения, — просто $[\alpha]\phi$.

ему доступны, и тех, доступ к которым он, в результате этого разбиения, теряет.

Семантики, более удобные в обращении, чем предложенная Белнапом семантика ветвящегося времени, и главное, обещающие синтез логики действий и других модальных логик (прежде всего — семейства динамических логик) — упрощенная семантика, где отношение частичного порядка используется лишь номинально для достижения единообразных определений видов агентных операторов, и семантика для действий, основанная на структурах Крипке — используются нами в параграфах 4 и 5 как главное формальное воплощение этой идеи транзита[2].

Другое отличие, отдаляющее наши построения от классических для логики действий построений (но не от семантических и философских оснований всего направления), заключается в том, что мы ассоциируем действие не только с его результатом, но и со способом достижения этого результата. Действие — это не просто переход на множестве возможных миров, а переход, который осуществляется всегда определенным образом. Подобная дополнительная трактовка действия позволит нам, как это будет видно уже в конструктивной части стать на примере уклонения от прощения и отказа прощать, отличать друг от друга действия, оканчивающиеся одним и тем же результатом. В этом случае, с формально-логической точки зрения, мы описываем действие как маркированный специальным образом переход на структуре, образованной множеством возможных миров и определенных типов отношений между ними.

3. Комиссивный и декларативный подходы, данные средствами логики действий $\mathcal{L}_{ill}$

Для того чтобы выяснить соотношение комиссивного и декларативного подходов к прощению, так, как если бы они эксплуатировали корректным образом фундаментальное для всей теории речевых актов различие сил и содержания, мы задействуем модифицированную пропозициональную динамическую логику (речевых) действий ($\mathcal{L}_{ill}$[3]), основанную на семантических идеях $STIT$-логики, классической логики действий белнаповского

[2]О скрещении $STIT$-логики и динамической логики см. [Benthem, Pacuit 2014]; обзор доступных на сегодняшний день семантик для логики действий белнаповского типа см. в [Troquard, 2016].

[3]В данном случае мы игнорируем различие между терминами «иллокутивный» и «речевой» акт, имеющее отношение здесь в большей степени не столько к форме или, на современный манер, — структуре описываемых языковых и коммуникативных явлений, сколько к вопросам истории и генезиса соответствующей теории: исследовательский проект типов речевых актов был заменен самим Остином в его поздних работах проектом исследования иллокутивных сил.

духа, но позволяющую при этом ссылаться на действие как на процесс, протекающий определенным образом.

Определение правильно построенного выражения языка логики действий $\mathcal{L}_{ill}$, где Φ есть множество пропозициональных переменных, а Γ есть множество агентов, задается следующим образом:

Определение 1. $\phi ::= p \mid \neg\phi \mid \phi \wedge \psi \mid [\alpha]^{com}\phi \mid [\alpha]^{dec}\phi$, где $p \in \Phi$, а $\alpha \in \Gamma$.

Мы вводим агентные формулы $[\alpha]^{com}\phi$ и $[\alpha]^{dec}\phi$ для того, чтобы иметь возможность формулировать в предметном языке осмысленные предложения об иллокутивных актах комиссивного и декларативного типов. Так мы надеемся выяснить соотношение «перформативных» подходов к прощению. Первая из двух указанных формул обозначает иллокутивный акт комиссивного типа, а вторая — иллокутивный акт декларативного типа.

Определение 2. Модельная структура $\mathcal{F}$ есть набор элементов $\langle \mathcal{W}, \sim \rangle$, где $\sim$ есть антисимметричное, транзитивное и нерефлективное отношение на $\mathcal{W}$.

Антисимметричность и транзитивность $\sim$ понимаются традиционно[4]. Нерефлексивное[5] свойство $\sim$ означает, что $\sim$ не является ни рефлексивным, ни антирефлексивным. Пусть, например, дано множество $S = \{a, b\}$. Пусть на S задано отношение $R = \{(a, a), (a, b)\}$. Тогда R не является рефлексивным отношением на S, так как пара (b, b) не принадлежит R. В то же время, R не является антирефлексивным отношением на S, так как пара $(a, a) \in R$. Отношение R нерефлексивно на S.

Указывая выше на то, что логика $\mathcal{L}_{ill}$ основана на семантических идеях классической логики действий ($STIT$-логики), мы имели в виду частичное совпадение свойств отношений достижимости на их модельных структурах: действительно, для модельных структур $STIT$-логики характерен такой набор свойств отношений достижимости: транзитивность, антисимметричность, антирефлексивность. Частичный порядок на множестве возможных миров, обеспечивающийся этим набором, выражает философскую, онтологическую идею, лежащую в основе классической логики действий:

[4]Антисимметричность: для всех миров x и для всех миров y верно, что если $\sim$ связывает миры x и y, и $\sim$ связывает миры y и x, то $x = y$. Транзитивность: для всех миров x, y и z верно, что если $\sim$ связывает миры x и y, и $\sim$ связывает миры y и z, то $\sim$ связывает миры x и z.

[5]Нерефлексивное отношение в части английской литературы передается как non-reflexive relation, что не следует путать с irreflexive relation; последним словом обозначают антирефлексивное отношение, когда верно, что ни для одного мира не существует отношения, связывающего этот мир с самим собой.

миры — это моменты времени, в каждом из которых перед агентом открываются возможности поступить так или иначе; при этом выбор, который может совершить агент в каждом возможном мире-моменте, отсекает его или ее от текущего мира-момента, перемещая в следующий, и от всех прочих альтернатив, открытых в нем. Отказываясь от антирефлексивности в пользу нерефлексивности, мы получаем в распоряжение частично упорядоченную структуру, где в некоторых мирах допускается существование «петель». Такие миры (распределение которых на структуре произвольно и определяется самим исследователем) нужны нам для того, чтобы иметь возможность задать условия истинности для формул, указывающих на речевые акты различного типа. «Петли» на структурах позволят нам воспроизвести наиболее адекватным образом фрагмент онтологии теории речевых актов Остина–Серла–Вандервекена, касающийся различия между комиссивами и декларативами. Как конкретно это сделано станет ясно из дальнейшего изложения, из пояснений, которые мы дадим к определению 3. На рис. 1 дан пример произвольной модельной структуры $\langle \mathcal{W}, \sim_\alpha \rangle$[6], обладающей указанными свойствами.

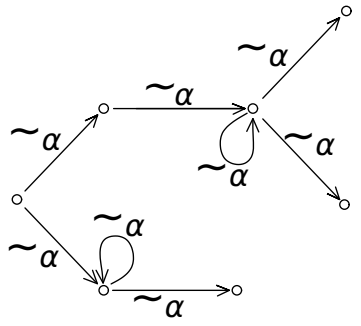


Рис. 1. Модельная структура $\langle \mathcal{W}, \sim_\alpha \rangle$

Определение 3. Модель $\mathcal{M}$ образуется на основе модельной структуры $\mathcal{F}$ присоединением к ней функции означивания v, которая ставит в соответствие атомарным пропозициям языка L_{ill} такое множество миров, где эти пропозиции оказываются истинны; условия истинности формул языка L_{ill} в $\mathcal{M}$ задаются следующими правилами:

(1) $\mathcal{M}, w \models p$ е.т.е. $w \in v(p)$.

(2) $\mathcal{M}, w \models \neg\phi$ е.т.е. $\mathcal{M}, w \not\models \phi$.

[6]Отношение $\sim_\alpha$ антисимметрично, транзитивно и нерефлексивно.

(3) $\mathcal{M}, w \models \phi \wedge \psi$ е.т.е. $\mathcal{M}, w \models \phi$ и $\mathcal{M}, w \models \psi$.

(4) $\mathcal{M}, w \models [\alpha]^{com}\phi$ е.т.е.: (i) для всех w', таких, что $w \sim_\alpha w'$ и $w \neq w'$, верно, что $w' \models \phi$; (ii) $w \not\models \phi$.

(5) $\mathcal{M}, w \models [\alpha]^{dec}\phi$ е.т.е.: (i) для всех w', таких, что $w \sim_\alpha w'$ и $w \neq w'$, верно, что $w' \models \phi$; (ii) для всех w'', таких, что $w \sim_\alpha w''$, и $w = w''$, верно, что $w'' \models \phi$.

В основание различия между комиссивным и декларативным типами речевых актов, зафиксированного в пунктах 4 и 5 определения 3, положено понятие направления реализации соответствия (direction of fit) между словами, которые произносит говорящий (или просто «словами»), и реальным положением дел («миром»). «Словам» в языке L_{ill} соответствуют агентные формулы $[\alpha]^{com}\phi$, $[\alpha]^{dec}\phi$, $[\beta]^{com}\phi, \ldots$, а «миру» — неагентные формулы ϕ, $\psi, \ldots$. Комиссивные речевые акты имеют направление реализации соответствия от мира к словам: их осуществление связано со стремлением говорящего совершить в дальнейшем определенные действия, которые позволят считать пропозициональное содержание речевых актов данного типа истинным. Можно сказать, что «мир» стремится измениться таким образом, чтобы соответствовать «словам». Обнаружение соответствия между пропозициональным содержанием комиссивов, «словами», и «миром» как бы отложено во времени, так как касается будущего положения вещей, отсутствующего в настоящем. Вот почему в пункте 4 определения 3 в данном, текущем мире w имеет место $\neg\phi$, а в мире, который связан агентным переходом с текущим, мире w', напротив, истинной оказывается формула ϕ.

Декларативный речевой акт, в свою очередь, имеет двойное направление реализации соответствия. С одной стороны, посредством осуществления декларатива «мир» изменяется таким образом, чтобы соответствовать «словам». Воспользовавшись снова известными примерами Остина, мы говорим, что осуществление декларатива приводит к тому, что корабль действительно получает имя, а собрание действительно открывается. С другой стороны, пропозициональное содержание декларатива, например ϕ, т. е. неагентная формула, которая находится в области действия агентного оператора $[\alpha]^{dec}$, становится истинной именно благодаря тому, что был осуществлен успешный декларативный речевой акт, выраженный формулой $[\alpha]^{dec}\phi$. Предложения «Корабль наречен именем таким-то» и «Собрание открыто» истинны именно потому, что состоялись, т. е. успешным образом были осуществлены, декларативы, где эти переложения фигурировали в качестве пропозициональных содержаний соответствующих речевых актов. Поэтому в пункте 5 определения 3 агентным отношением связан не только данный, текущий мир w, где осуществляется речевой акт, с миром w',

альтернативным w, где оказывается истинным неагентная формула — пропозициональное содержание декларатива, но и данный, текущий мир w — с самим собой, так как мгновенно, в момент осуществления успешного декларатива, пропозициональное содержание этого речевого акта становится истинным.

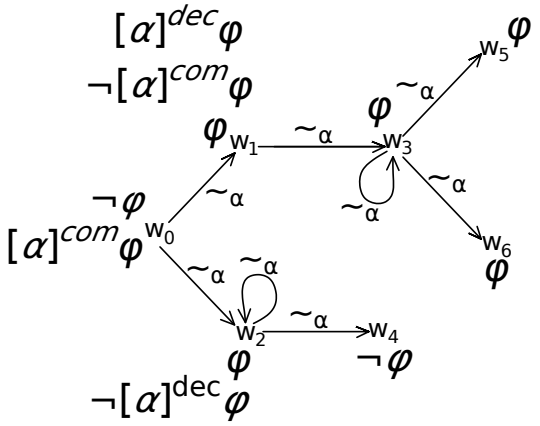


Рис. 2. Пример выполнения условий истинности для $[\alpha]^{com}\phi$ и $[\alpha]^{dec}\phi$

На рис. 2 дан пример модели, полученной из модельной структуры, представленной на рис. 1. Эта модель иллюстрирует работу формул $[\alpha]^{com}\phi$ и $[\alpha]^{dec}\phi$. Например, в мире w_0 истинна формула $[\alpha]^{com}\phi$, так как, в соответствии с пунктом 4 определения 3, во-первых, во всех мирах, связанных с миром w_0 отношением $\sim_\alpha$ (число которых в данном случае ограничивается миром w_1), истинной оказывается формула ϕ, и, во-вторых, так как в самом мире w_0 истинна ϕ. Напротив, в мире w_1 неверно, что истинна формула $[\alpha]^{com}\phi$, так как в этом мире не выполняется условие ii пункта 4 определения 3, и в мире w_1 имеет место формула ϕ.

Теперь исследуем соотношение комиссивного и декларативного подхода к прощению средствами $\mathcal{L}_{ill}$. На рис. 3 представлена типичная модельная структура, объединяющая пару миров w и w' отношением $\sim_\alpha$, которую мы будем использовать для сравнения работы формул $[\alpha]^{com}\phi$ и $[\alpha]^{dec}\phi$ и которую далее мы будем называть характеристической модельной структурой, а модели, полученные на ее основе, — характеристическими моделями.

Пусть агент α — это агент-жертва, который прощает своих обидчицу или обидчика и осуществляет речевые акты комиссивного и декларативного типа, выражающиеся в предметном языке так, как мы условились считать ранее. Пусть формула ϕ означает предложение «агент-обидчица

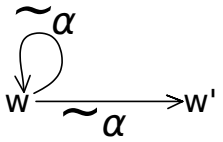


Рис. 3. Характеристическая модельная структура
для анализа «перформативных» подходов к прощению

Таблица 1

Логические отношения прощения-комиссива и -декларатива в характеристической модели

$\langle w, w' \rangle$	Прощение-комиссив, $[\alpha]^{com}\phi$.	Прощение-декларатив, $[\alpha]^{dec}\phi$.
$\langle \phi, \phi \rangle$	Л	И
$\langle \phi, \neg\phi \rangle$	Л	Л
$\langle \neg\phi, \phi \rangle$	И	Л
$\langle \neg\phi, \neg\phi \rangle$	Л	Л

(обидчик) прощены». Таблица 1 показывает все возможные наборы истинностных значений для формулы ϕ в мирах w и w' модели $\mathcal{M}$, заданной на базе характеристической модельной структуры $\mathcal{F}$, и значение формул $[\alpha]^{com}\phi$ и $[\alpha]^{dec}\phi$ в связи с указанными истинностными значениями.

Таблица 1 показывает, что формулы $[\alpha]^{com}\phi$ и $[\alpha]^{dec}\phi$ не совместимы по истинности; вместе с тем, они оказываются совместимыми по ложности. Отсюда следует, что $[\alpha]^{com}\phi$ и $[\alpha]^{dec}\phi$ противоположны друг другу, что в свою очередь означает, что прощение, в том случае если ассоциировать истинность формул $[\alpha]^{com}\phi$ и $[\alpha]^{dec}\phi$ с успешностью речевых актов комиссивного и декларативного типов соответственно, не может состояться одновременно как комиссив и как декларатив. Данный вывод противоречит гипотезе Warmke, согласно которой для агента сказать «Я тебя прощаю» значит не только связать себя, дающего прощение, разного рода обязательствами, но и совершить такое действие, в результате которого обидчица или обидчик будут считаться прощенными [Warmke, 2016, p. 698]. Речевой акт, объединяющий в себе комиссивную и декларативную иллокутивные силы, не может служить характеристическим примером прощения.

Естественно, что в рамках модели, данной на рис. 3, не составит труда показать, что совместимы по истинности, например, формулы $[\alpha]^{com}\phi$ и $[\alpha]^{dec}\psi$. Пусть формула ψ означает высказывание «агент β, нанесший обиду агенту α, прощен», а формула ϕ означает высказывание «агент α принял на себя обязательство не платить за обиду, нанесенную ему или ей агентом β,

тем же». Тогда, действительно, прощение, которое α дает β, может иметь одновременно и комиссивное, и декларативное измерения и выражаться, например, формулой $[\alpha]^{com}\phi \wedge [\alpha]^{dec}\psi$.

Это, однако, не доказывает приемлемость гипотезы об эффективности синтетического, комиссивно-декларативного подхода. Напротив, отсюда мы делаем вывод, что авторы различных версий сочетания бехабитивного, комиссивного и декларативного подходов к прощению на самом деле придерживаются антибикомпонентных взглядов на структуру речевого акта, и, следовательно, их работы, в действительности, не принадлежат традиции теории речевых актов вообще. В пользу этого утверждения говорит также и тот факт, что декларативный подход является, по-видимому, лишь содержательной вариацией на юридическую или культовую темы трактовки прощения как помилования, в то время как комиссивный подход в явной форме эксплуатирует идеи финансовой концепции прощения.

Вне зависимости от того, с каким типом или типами иллокутивных актов следует отождествлять прощение, оно, как действие и как социальная практика, обращает на себя внимание и вызывает исследовательский интерес в связи с целым рядом вопросов. Вот их примерный перечень.

- Существует ли разница между отказом прощать и уклонением агента от прощения своих обидчицы или обидчика?
- Как понимать и как моделировать ситуации условного прощения, когда жертва обещает дать или дает прощение на определенных условиях, исполнение которых находится, например, во власти обидчика или во власти третьего лица?
- Существуют ли, и если да, то какие, виды прощения в рамках комиссивного или декларативного подходов и как их описать?
- Как выразить и как интерпретировать прощение агентом себя? Если допустить, что существует некая логика прощения, заключающаяся в инвариантности форм и сочетаний форм речевых действий, отождествляемых с действиями прощения, то будет ли эта логика сохраняться и в этом случае или здесь следует ожидать некой асимметрии процессов?
- Можно ли описать форму таких видов прощения, когда прощение одного вида допускается брать назад, а другого — нет?[7]

[7]Этот вопрос уже ставился несколькими годами раньше, и ответ на него давался неформальными средствами, см. [Scarre, 2016].

Кроме того, в один ряд с этими «содержательными» вопросами о прощении можно поставить и вопросы в большей степени технического характера, вопросы, аналогичные тем, что заданы о действии и агентных, $STIT$-операторах в статье [Belnap, 1991], которые, несмотря на то, что они порождены скорее особенностями использования формально-логического аппарата в отношении анализа языковых феноменов, не делаются от этого менее ценными, а возможные ответы на них — менее значимыми. Например:

- Если дано прощение, выраженное формулой $[\alpha]^{com}(\phi \wedge \psi)$ или формулой $[\alpha]^{dec}(\phi \wedge \psi)$, то может быть так, что одновременно с этим не дано прощения $[\alpha]^{com}\phi$ или $[\alpha]^{dec}\phi$ соответственно?
- Верно ли, что прощение, выраженное формулами $[\alpha]^{com}\phi$ или $[\alpha]^{dec}\phi$, замкнуто относительно *modus ponens*? И т. п.

Наконец, особое значение приобретают вопросы, возникающие из соединения «содержательных» и «технических» вопросов. Так, например, небезынтересно было бы описать такую структуру действия агента-жертвы, когда ответом на нанесенную обиду служит «полупрощение»: прощение в отношении чего-то одного, отказ простить за что-то другое и уклонение от прощения в связи с чем-то третьим[8].

Если используемые нами формально-логические методы показали свою эффективность тогда, когда потребовалось внести ясность в вопрос о соотношении «перформативных» подходов к прощению, то, возможно, их применение будет оправдано и тогда, когда мы попытаемся ответить на «содержательные» вопросы о прощении и приложим усилия для того, чтобы выяснить, например, разницу между отказом прощать и уклонением от прощения. Мы допускаем, что после этот метод может быть распространен и на остальные вопросы из списка, включая и «технические».

Мы не ставим себе цель дать однозначный ответ на вопрос о том, что такое прощение. Но, подмечая особенности поведения агентов, занятых этой практикой, мы надеемся сделать ряд наблюдений, имеющих отношение к структуре (или форме) не только прощения, но, возможно, и к структурам каких-то других действий, чем-то похожих на прощение.

[8]Структуры прощения переплетаются естественным образом со структурами обид. И то, и другое требует внимания исследователя. В этой статье мы сосредоточимся на структурах прощения, не обусловленных структурой нанесенной обиды. Обида интерпретируется нами холистически и примитивно — как до времени неделимое целое. Заметим также, что подобно тому как созданию многозначных логик предшествовало создание двухзначной логики, работам о прощении, где исследуются ситуации «полупрощения» ($\frac{1}{2}$ прощения), должны быть предпосланы работы, затрагивающие вопросы полного прощения, прощения без полутонов.

4. Уклонение от прощения или отказ прощать — решение в духе Белнапа

Пусть два приятеля, Петр и Ольга, поссорились, при этом зачинщиком ссоры и виноватым в ней является Петр, а Ольга выступает в качестве жертвы. Осознав свою вину, Петр просит у Ольги прощения. Ольга, вместо того, чтобы сразу же простить своего приятеля, говорит о том, что ей нужно на это какое-то время. Они перестают общаться и в течение этого периода Петр ждет, что Ольга его наконец простит и они смогут продолжать дружить как раньше.

Петр может расценивать ситуацию, когда Ольга не сообщает ему о том, что он, наконец, прощен, двояким образом. С одной стороны ее молчание может означать, что жертва отказывается прощать обидчика. С другой стороны, это молчание может объясняться ее неготовностью прощать, притом что Ольга не отказывается от идеи простить Петра полностью. В первом случае Петр допускает, что Ольга совершила выбор между тем, чтобы прощать, и тем, чтобы не прощать, в пользу последнего. Во втором случае Петру следует расценивать поведение Ольги как такое, когда она, не делая выбор между тем, простить ей обидчика или нет, намеренно отказывается совершать этот выбор вообще, выбирая, тем не менее, не выбирать, прощать ей Петра или нет.

Случай Петра и Ольги интересен тем, что, несмотря на полное совпадение последствий поведения жертвы (обидчик не прощен, а отношения, испорченные обидой, остаются неисправленными), выбор, который при этом делает Ольга, может быть организован по-разному. Это замечание интересно сразу в нескольких аспектах.

Во-первых, в нем можно обнаружить своего рода вызов логике действий, которая в общем склонна отождествлять действия и их результаты. Следовательно, если мы хотим выразить уклонение от прощения и отказ прощать, с учетом того, что эти действия выглядят, по крайней мере со стороны обидчика, одинаково (т. е. завершаются одним и тем же), то нам необходимо преодолеть эту склонность — естественно на уровне определений языка, модельных структур и моделей.

Во-вторых, наше замечание имеет теоретическое значение для философской концепции прощения. Его проработка, осуществляющаяся формально-логическими средствами, как мы надеемся, даст ряд наблюдений, не лишенных ценности в контексте философских исследований по этой теме.

В-третьих, указанное замечание имеет прикладное значение. Способность видеть разницу между отказом прощать и уклонением прощать, т. е. знание о том, какова структура выбора, реально сделанного жертвой, или,

по крайней мере, знание о том, что в этом случае следует принять во внимание сам факт существования разных структур выбора, альтернативных друг другу и равно возможных, могло бы помочь обидчику выработать стратегию поведения, направленного на то, чтобы восстановить отношения с жертвой, или, во всяком случае, на то, чтобы не усугубить свое положение и не вызвать своими действиями новую обиду.

Фон Вригт, прорисовывая абрис того, что стало в дальнейшем философским основанием логики действий, задавался вопросом о том, каким образом в рамках будущей дисциплины следовало трактовать воздержание или уклонение от действия. Обмолвившись о том, что уклонение — это тоже «образ действия» (ведь агенты несут ответственность за уклонение от ряда действий, а ответственность полагается именно за действия), фон Вригт в [Вригт, фон, 1986] предложил интерпретировать уклонение в бикомпонентном ключе — как возможность совершить поступок и, сверх того, как факт, свидетельствующий о том, что поступок не был совершен. Тем самым из области действий, в отношении которых было совершено уклонение, исключалось все то, что не принадлежит власти агента, все то, что находится за пределами его «горизонта возможностей». Такая бикомпонентная интерпретация уклонения была, по замечанию самого фон Вригта, все же чрезвычайно широкой, так как не от всего, что агент не делает и может сделать, он воздерживается.

Тогда на помощь философам в 1989 году пришли специалисты в области логики действий. Белнап и Перлофф первые предложили в [Belnap, Perloff, 1989] обозначать уклонение в предметном языке с помощью формулы $[\alpha]\neg[\alpha]\phi$, которую можно прочитать так: агент α делает так, что агент α не совершает такого действия, которое бы привело к положению дел ϕ. Их предложение, которое, конечно, касалось не только синтаксиса предметного языка, и было оформлено в виде ряда соответствующих семантических моделей, хорошо тем, что оно использует минимум ресурсов (суперпозицию агентных операторов и унарный логический союз) и не предполагает того, что исследователь будет обращаться к дополнительным модальным аспектам действия, как это имеет место в случае бикомпонентной трактовки уклонения фон Вригтом, где в анализ включается понятие о том, что агент может и чего он не может.

Мы воспользуемся формулой уклонения для того, чтобы описать разницу между молчанием Ольги, которое интерпретируется Петром или как ее отказ прощать (как выбор не прощать), или как ее нерешительность в вопросе прощения, как уклонение от прощения (когда выбор между прощением и непрощением не совершается).

Для этого зададим ряд определений, вместе составляющих ядро базовой логики действий $\mathcal{L}_{act}$, необходимой нам для анализа уклонения и отказа от прощения. Для того чтобы задать язык этой логики, нам достаточно в определении 1 заменить все виды агентных формул на агентную формулу вида $[\alpha]\phi$, единственную, которая нам понадобится для целей настоящего анализа.

Определение 4. Модельная структура $\mathcal{F}_{act}$ базовой логики действий есть упорядоченная двойка $\langle \mathcal{W}, \sim \rangle$, где $\mathcal{W}$ есть множество возможных миров, а $\sim$ есть рефлексивное, симметричное и транзитивное отношение на $\mathcal{W}$[9].

Определение 5. Модель $\mathcal{M}_{act}$ образуется традиционным способом, через присоединение к $\mathcal{F}_{act}$ функции означивания v, которая среди обыкновенных пунктов, описывающих ее работу, имеет следующий пункт:

- $\mathcal{M}_{act}, w \models [\alpha]\phi$ е. т. е. для всех миров w', таких, что $w \sim_\alpha w'$, справедливо, что $w' \models \phi$.

Этих определений достаточно для того, чтобы сконструировать в $\mathcal{L}_{act}$ модели для действий, выраженных формулами $[O]\neg\phi$ и $[O]\neg[O]\phi$ (где «O» — Ольга, а «ϕ» — предложение «Петр прощен») и указывающих на отказ и на уклонение Ольги прощать Петра соответственно.

На модели ***а*** рис. 4 изображены два класса эквивалентности, сопоставленные с выборами Ольги прощать (класс $[w_0]_o = \{w_0\}$) или не прощать Петра (класс $[w_1]_o = \{w_1, w_2\}$). Выбирая класс $[w_1]_o$, Ольга, тем самым, делает истинной формулу $[O]\neg\phi$. На модели ***б*** рис. 4 изображены три класса эквивалентности, сопоставленные выборам Ольги простить ($[w_0]_o = \{w_0\}$), не прощать ($[w_1]_o = \{w_1\}$) или — ее выбору уклониться от того, чтобы простить Петра ($[w_2]_o = \{w_2, w_3\}$). В этом последнем случае истинной, относительно каждого мира, входящего в класс $[w_2]_o$, оказывается формула $\neg[O]\phi$, и, следовательно, — формула $[O]\neg[O]\phi$. В мирах w_2 и w_3 ситуации «Петр прощен» и «Петр не прощен» неотличимы друг от друга, так как

[9]Здесь мы обращаемся к упрощенной семантике классической логики действий. В ней отношение частичного порядка на множестве возможных миров заменено отношением эквивалентности. Как оказалось, данного инструмента вполне достаточно для того, чтобы выразить отличия между уклонением прощать и отказом прощать. Следует отметить, что в классической логике действий семантика ветвящегося времени (BTS-семантика) и соответствующее ей отношение частичного порядка необходимы в том случае, когда речь идет о так называемом *astit*-операторе, для работы которого временной разрыв, гарантированный антирефлексивностью, между решением о действии и самим действием оказывается существенным. Подробнее об упрощенной семантике и возможностях ее использования см. раздел «The Modal Heart of Choice» в [Benthem, Pacuit 2014].

решения по ним Ольга, уклоняющаяся от того, чтобы прощать и от того, чтобы не прощать, не принимает.

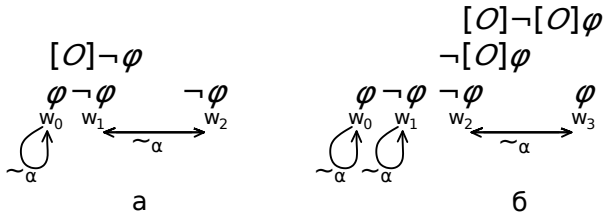


Рис. 4. Ольга отказывается (а) или уклоняется (б) от того, чтобы простить Петра

Использование классических операторов действия, наподобие оператора «$[\alpha]$» логики $\mathcal{L}_{act}$, в моделях с семантикой, основанных на структурах Крипке (т. е. такой, где отсутствует ветвление на структурах, обеспечивающееся отношением частичного порядка, а работа функции выбора $Choice$ классической и упрощенной семантик выполняется отношением эквивалентности, разбивающим множества возможных миров на классы), не показывает структуру выбора Ольги, которая, как это следует из неформальных наблюдений, представлена последовательностью из двух действий, когда каждое из действий последовательности имеет свой специальный предмет. Так, одно из них, второе, касается исключительно решения Ольги о том, прощать ей Петра или нет. Другое, то, которое осуществляется первым, — затрагивает не положение дел в мире, а само решение Ольги в связи с ее возможным выбором как агента. Таким образом, как это видно уже на синтаксическом уровне предложенной Белнапом формулы, в уклонении задействованы разноуровневые выборы. Это отличие никак не фиксируется семантическими средствами логики $\mathcal{L}_{act}$: оба решения (непосредственное и решение о решении) агент принимает как бы мгновенно. Нам необходимы дополнительные инструменты для того, чтобы получить возможность моделировать эти разноуровневые выборы агентов.

5. Агенты, суперагенты, прощение и прочие действия

Избежать смешения уровней принятия решения нам поможет следующая идея. Пусть для всякого агента можно указать множество D, которое мы будем называть областью определения этого агента. Тогда мы можем выделить среди множества агентов классы агентов, в зависимости от содержания их областей определения. В один класс, класс *регулярных* агентов, попадут все те, области определения которых включают в себя неагентные

формулы $\phi, \psi, \ldots$ Другой класс составят *суперагенты*, области определения которых включают в себя агентные формулы $[\alpha]\phi$, $[\alpha]\psi, \ldots$, $[\beta]\phi, \ldots$

Мы допускаем, что пересечение указанных классов не является пустым. В него входит, например, Ольга, жертва обидчика Петра, относительно области определения которой, D_O, мы скажем, что $D_O = \{\phi, \ldots, [O]\phi, \ldots\}$, где ϕ означает «Петр прощен». Наличие $[O]\phi$ в D_O означает, что Ольга является суперагентом в отношении положения дел ϕ, т. е. она принимает решение о своем решении о том, чтобы простить Петра. Так как $\phi \in D_O$, то Ольга, помимо этого, оказывается и регулярным агентом в отношении положения дел ϕ, т. е. она принимает решение о том, чтобы простить Петра непосредственно, предметно. Таким образом, с учетом сказанного об агентных доменах, перед Ольгой открываются как бы два способа действовать: один — в качестве суперагента, другой — как регулярный агент. Покажем, что действие Ольги, занятной прощением Петра, может быть представлено композицией двух указанных способов. Для этого нам потребуется модифицированная логика действий ${\mathcal{L}'}_{act}$, язык и определения которой устроены таким образом, что с их помощью мы можем фиксировать действия Ольги-агента/суперагента, т. е. — разные уровни принятия Ольгой решения о прощении Петра.

Определение 6. Язык модифицированной логики действий ${\mathcal{L}'}_{act}$ содержит следующие выражения (для множества пропозициональных переменных Φ и множества агентов Γ):

$\phi ::= p \mid \neg\phi \mid \phi \wedge \psi \mid [\alpha]^{re}\phi \mid [\alpha]^{su}\phi$, где $p \in \Phi$, а $\alpha \in \Gamma$.

Как регулярный агент, Ольга совершает действия, которым в предметном языке логики ${\mathcal{L}'}_{act}$ соответствуют выражения $[O]^{re}\phi, [O]^{re}\psi, \ldots$; как суперагенту, Ольге доступны действия, выраженные в предметном языке формулами $[O]^{su}[O]^{re}\phi, [O]^{su}[O]^{re}\psi, \ldots$ Заметим, что, хотя определением 6 и допускаются выражения типа $[\alpha]^{su}\phi$, содержательное толкование суперагента как того, кто принимает решения о решениях и не вторгается непосредственно в области, где действует регулярный агент, предписывает нам, во всяком случае, на данном этапе, этапе анализа случая Ольги и Петра, воздерживаться от использования подобных выражений.

Определение 7. Модельная структура $\mathcal{F}'_{act}$ модифицированной логики действий ${\mathcal{L}'}_{act}$ есть упорядоченная пятерка элементов $\langle \mathcal{W}, \sim^{su}, \sim^{re}, \approx^{su}, \approx^{re} \rangle$, где отношения $\sim^{su}$, $\approx^{su}$, $\sim^{re}$ и $\approx^{re}$ обладают свойствами антирефлексивности, антисимметричности и транзитивности[10].

[10]В общем, мы скажем, что во всех случаях использования формально-логических инструментов для прояснения вопросов о прощении — $\mathcal{L}_{ill}$, $\mathcal{L}_{act}$ и ${\mathcal{L}'}_{act}$ — выбор свойств

С их помощью устанавливается отношение частичного порядка на $\mathcal{W}$, когда из элементов $\mathcal{W}$ составляются древовидные структуры, не допускающие обратного ветвления и петель. Отношения $\sim^{su}$ и $\approx^{su}$ отвечают за интерпретацию действий суперагента; $\sim^{re}$ и $\approx^{re}$ используются для того, чтобы указать на действия регулярного агента. Если $\sim^{su}$ и $\sim^{re}$ показывают некий, доступный супер- или регулярному агентам, выбор в некотором данном мире, то $\approx^{su}$ и $\approx^{re}$, в этих случаях, указывают на все те переходы, которые являются альтернативными по отношению к данным миру, агентам и их возможным действиям в нем. Другими словами, с помощью набора отношений из $\mathcal{F}'_{act}$ мы будем указывать различные классы эквивалентности, на которые разбиваются миры, доступные суперагенту и регулярному агентам из данного мира.

Определение 8. Модель $\mathcal{M}'_{act}$ модифицированной логики действий $\mathcal{L}'_{act}$ строится аналогично модели $\mathcal{M}$ (см. определение 3), за исключением пунктов 4 и 5, которые, в соответствии с задачами нашего анализа, заменяются следующими пунктами:
(*) $\mathcal{M}'_{act}, w \models [\alpha]^{re}\phi$ е. т. е. (i) для всех w', таких, что $w \sim^{re} w'$, верно, что $w' \models \phi$, и (ii) найдется такой w'', что $w \approx^{re} w''$ и $w'' \not\models \phi$.
(**) $\mathcal{M}'_{act}, w \models [\alpha]^{su}[\alpha]^{re}\phi$ е. т. е. (i) для всех w', таких, что $w \sim^{su} w'$, верно, что $w' \models [\alpha]^{re}\phi$, и (ii) найдется такой w'', что $w \approx^{su} w''$ и $w'' \not\models [\alpha]^{re}\phi$.

Те из читателей, кому известны определения основных агентных формул $STIT$-логики, увидят, что пункты (i) и (ii) определений 8 в целом повторяют соответственно «положительное» и «отрицательное» условия определений истинности для *dstit*-оператора, см. [Horty, Belnap, 1995, p. 592]. Это, однако, не делает возможную «логику прощения», использующую операторы $[\alpha]^{su}$ и $[\alpha]^{re}$ (так, как предлагаем использовать их мы — т. е. с учетом содержательной интерпретации понятия суперагента и соответствующих ей ограничений, накладываемых в синтаксической части $\mathcal{L}'_{act}$, или любым другим способом), изоморфной классической логике действий как формальной, аксиоматизированной теории. Действительно, если для последней верно, что $[\alpha]\phi \to \phi$, где на месте $[\alpha]$ может быть *cstit*- или *dstit*-оператор, то тот же самый принцип, принцип **T**, очевидно, не выполняется для операторов $[\alpha]^{su}$ и $[\alpha]^{re}$ из-за того, что отношения модельной

отношений достижимости диктовался соответствующими онтологиями. В случае с логикой $\mathcal{L}'_{act}$ мы возвращаемся к анализу, который осуществляется средствами структур частичного порядка, как в классической логике действий. В $\mathcal{L}'_{act}$ мы интерпретируем действие агента как композицию действий супер- и регулярного агентов. Частичный порядок необходим, так как в противном случае мы бы не смогли отличить эти действия: агенты получали бы возможность действовать и как супер-, и как регулярный агенты в каждом возможном мире одновременно.

структуры $\mathcal{F}'_{act}$ лишены свойства рефлексивности. Аналогично обстоит дело и с принципом **4**, выполняющимся для *cstit*- и *dstit*-операторов, но не работающим в том случае, когда на их месте появляются операторы, указывающие на действия супер- и регулярного агентов. Использующиеся нами язык, модельная структура и определения истинности, которые вместе составляют формально-логический инструмент $\mathcal{L}'_{act}$ и которые позволяют нам сформулировать ряд наблюдений, относящихся к форме принятия решения агентом о прощении, являются во многом инструментами *ad hoc*. Об этом их характере свидетельствует оговариваемый на содержательном уровне, но не зафиксированный в определениях запрет на использование формул вида $[\alpha]^{su}\phi$ и $[\alpha]^{re}[\alpha]^{su}$, или — пробел в части содержательной интерпретации формул вида $[\alpha]^{su}[\alpha]^{su}[\alpha]^{re}$. Тем не менее вводимого нами набора определений $\mathcal{L}'_{act}$ оказывается достаточно для того, чтобы выполнить первоочередную задачу — внести ясность в вопрос о различении уклонения от прощения и отказа прощать с помощью понятий супер- и регулярного агента. Как это сделано, может быть видно исходя из рис. 5, на котором представлена модель, основанная на определениях $\mathcal{L}'_{act}$ и описывающая двухуровневую структуру принятия Ольгой решения о прощении Петра. Здесь в мире w_0 истинной оказывается формула $[O]^{su}[O]^{re}\phi$, указывающая на то, что Ольга принимает решение о том, чтобы простить Петра. Причем сначала она принимает решение о том, чтобы рассудить заслуживает ли Петр того, чтобы вопрос о его прощении вообще был поднят. Этому действию соответствует переход из w_0 в w_1 по $\sim_o^{su}$. Затем, после того как это метауровневое решение принято, Ольга рассматривает вопрос о прощении Петра по существу, предметно, и, в соответствии с тем, что показывает наша модель, решает простить его. Этому действию соответствует переход из w_1 в w_3 по $\sim_o^{re}$.

Используя структуру, лежащую в основе модели, данной на рис. 5, можно задавать условия истинности для любых действий Ольги: ее отказа, как регулярного агента, прощать ($[O]^{su}[O]^{re}\neg\phi$) или ее отказа, как суперагента, рассматривать сам вопрос о возможности прощения ($[O]^{su}\neg[O]^{re}\phi$ или $[O]^{su}\neg[O]^{re}\neg\phi$). Тем самым мы фиксируем разные способы принятия Ольгой решения, результатом которых становятся положения дел, неотличимые друг от друга.

Интересно отметить, что в w_2 истинной оказывается не только формула $\neg[O]^{re}\phi$, но и формула $\neg[O]^{re}\neg\phi$. В мире w_2, который связан с w_0 отношением $\approx_o^{su}$, обеспечивающим альтернативный переход для Ольги-суперагента, таким образом, реализуется ситуация, когда та, как суперагент, принимает решение о том, что решение о прощении Петра Ольгой-регулярным агентом не будет принято. Конъюнкции формул $\neg[O]^{re}\phi$ и $\neg[O]^{re}\neg\phi$, истинной

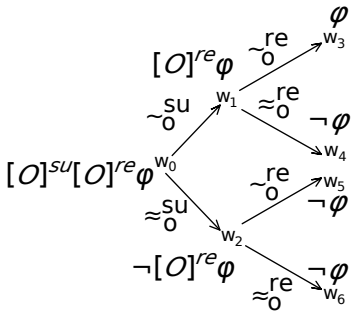


Рис. 5. Ольга решает вопрос о прощении Петра как суперагент

в w_2, может быть дано такое толкование: неверно считать, что Ольга решает простить Петра, и неверно считать, что Ольга принимает решение его не прощать.

Отметим также, что для философской концепции прощения было бы интересно указать на отличие уклонения прощать от уклонения непрощать. Для обидчика-Петра, желающего восстановить свои отношения со старым другом, знать, что Ольга уклоняется от того, чтобы *не простить* его, — значит обладать надеждой на то, что прощение, быть может, будет даровано. При этом такая надежда должна ободрять гораздо сильнее, чем та, которая возникает как следствие знакомства Петра с мыслью о том, что Ольга уклоняется от того, чтобы простить его. Более того, как только мы обогатим наш формально-логический инструмент $\mathcal{L}'_{act}$ определениями истинности для алетических модальностей, мы сможем изучать логические отношения между такими предложениями, как «Агент α может простить агента β», «Если агент α прощает агента β, то он может это сделать», «Если агент α сделает так, что ϕ, то агента β никогда не сможет простить α» т. п. Социальная практика предоставляет поистине неисчерпаемый материал для такого рода анализа.

Развивая наше наблюдение, сделанное в отношении структуры принятия решения о прощении, мы предполагаем, что существуют действия, которые допускают и даже требуют подобной вложенности решений, протекающих поэтому на разных уровнях. Так, например, Раскольников, перед тем как решиться на убийство, тщательно рассматривает саму возможность такого решения, и только допустив ее, т. е. согласившись, как суперагент, рассматривать решение об убийстве всерьез, он приступает к разработке плана, идет на «пробу» и т. п., т. е. продолжает действовать уже в качестве

регулярного агента. Аналогично большинство действуют так, будто такие, метауровневые, решения по множеству вопросов уже, и раз и навсегда, приняты, как, например, решение не убивать, не обманывать или не курить. Будучи принятыми, они позволяют, скажем, бывшему курильщику считать себя действительно *бывшим* — т. е. не курить и, одновременно с этим, не воздерживаться, не уклоняться от курения, так как воздерживается все же тот, кто еще на самом деле не стал бывшим курильщиком[11].

Случай с прощением как и случай с убийством или курением, стоят как бы в одном ряду в связи с вопросом об уклонении. Вероятно, все они имеют что-то общее в своей природе, что представляется нам, в свете этого исследования, сходством их структур. Рискнем предположить, что эта общая природа, обеспечивающая подобие в протекании выбора, заключается в нравственном измерении всех этих действий.

6. Заключение

В начале исследования мы обратили внимание на то, что теория речевых актов, о которой авторы бехабитивного, комиссивного и декларативного подходов к прощению обыкновенно говорят как об инструменте исследования, в действительности оказывается скорее не инструментом, а просто набором терминов, в которых удобно оформлять утверждения, касающиеся прощения, полученные при этом средствами других теорий. Это не значит, что содержание указанных подходов не обладает ценностью. Однако оно относится к теории речевых актов исключительно номинально. Таксономия подходов к прощению (в частности — та, что дана в [Hughes, Warmke, 2017] и отражает представление научного сообщества об их месте в корпусе философского знания о прощении), в таком случае, может быть уточнена: эти подходы не являются «перформативными», так как они не эксплуатируют фундаментальные для теории речевых актов определения и используют ее термины только как ярлыки.

Данное замечание о методологической особенности исследований прощения, проводимых в рамках теории речевых актов, не лишает смысла вопрос о соотношении перформативных подходов, в котором заключен источник нашего исследовательского интереса ко всей теме прощения. Но оно затрудняет поиск соответствующего ответа, так как теперь его необходимо начинать с исправления так называемых перформативных подходов.

[11]Заметим, что понятия агента/суперагента и соответствующая им идея по крайней мере двух уровней принятия решений — может служить важным дополнением к бикомпонентной интерпретации уклонения фон Вригта. Так, каждый, приняв некоторое решение как суперагент, теперь может стать тем, кто не совершает некоторое действие в качестве регулярного агента, но, вместе с тем, и не уклоняется от него.

Под исправлением мы пониманием не столько использование формально-логического аппарата, которое само по себе не может, разумеется, рассматриваться как цель, и перенос всей работы на почву аналитических философских исследований, сколько наведение порядка в множестве, в целом небезынтересных (и с теоретической, и с прикладной точек зрения), утверждений о прощении, сделанных авторами комиссивного и декларативного подходов. При помощи логики $\mathcal{L}_{ill}$ мы стали упорядочивать это множество, начав с критического рассмотрения заявлений о возможном синтетическом подходе, подразумевающем взгляд на прощение одновременно как на комиссивный и как на декларативный речевые акты. Методологические исправления, вносимые средствами $\mathcal{L}_{ill}$, заключались в том, что, в отличие от в действительности лишь псевдоперформативных подходов, наш формально-логический аппарат на самом деле основывался на идеях теории речевых актов. Так, в нем выдержано различие между пропозициональным содержанием и иллокутивной силой, а в основу семантических определений для формул, выражающих виды иллокутивных актов, положено понятие направления реализации соответствия, когда «мир» представлен набором неагентных формул, а «слова» — множеством формул, начинающихся с модальности действия. Речевые акты, которые осуществляют агенты, описываются в $\mathcal{L}_{ill}$ как переходы на антисимметричных, транзитивных и нерефлексивных реляционных структурах, устанавливающие специальным образом, в зависимости от типа иллокуции, связи между «миром» и «словами». В результате нам удалось установить, что заявления о допустимости синтетического подхода к прощению, созданному в рамках теории речевых актов, едва ли оправданы, так как невозможно осуществить речевой акт, который бы объединял в своей структуре одновременно комиссивную и декларативную иллокутивные силы. Тем самым мы показали, что множество характеристических примеров прощения, мыслимое в рамках такого синтетического подхода, является, в действительности, пустым.

В конструктивной части исследования мы показали, что использование модифицированного аппарата логики действий проливает свет на форму прощения как действия тогда, когда, например, среди множества содержательных и технических вопросов о прощении мы выбираем тот, который призван установить отличие между случаем отказа прощать и случаем уклонения от прощения, если оба случая выражены молчанием агента-жертвы.

На примере $\mathcal{L}_{act}$ мы показали, что использование классической логики действий белнаповского типа с семантикой, в основе которой лежат обыкновенные реляционные структуры Крипке с отношением эквивалентности

между мирами, и оператором, близким к оператору *dstit*-, позволяет описывать случаи уклонения от действия и отказа действовать как случаи, которые не сводятся друг к другу. Однако в $\mathcal{L}_{act}$ и уклонение, и отказ совершаются как бы мгновенно, а структура принятия решений агентом в этих случаях остается за рамками семантических моделей. Для того чтобы иметь возможность фиксировать уклонение и отказ, прежде всего, как различные процессы принятия агентом решений, мы предложили логику $\mathcal{L}'_{act}$, в основе которой лежит понятие области определения агента или агентного домена. При помощи этого понятия мы выделили в действиях агента разные уровни: уровень действий регулярного агента, производящего изменения на множестве предложений, описывающих положения дел, и уровень действий суперагента, занятого изменением условий истинности исключительно агентных формул. В результате мы показываем, что отказ и уклонение интерпретируются средствами $\mathcal{L}'_{act}$ не просто как разные формулы, которые соответствуют интуиции исследователя и для которых затем подбираются соответствующие семантические модели, как это происходит в случае с $\mathcal{L}_{act}$, а изначально как разные процессы, представленные композициями отношений $\sim^{su}$ и $\sim^{re}$. Установленное таким образом отличие видов «непрощения» помимо логико-теоретического, вероятно, имеет и теоретическое значение для темы прощения и близких понятий извинения и обиды. Знание того, с какой формой отказа прощать столкнулись обидчица или обидчик, дает им возможность корректировать свое поведение, направленное на то, чтобы получить прощение и загладить свою вину перед жертвой, специальным образом и действовать так, чтобы склонить жертву или к принятию решения о прощении (т. е. добиться от жертвы действий как регулярного агента), или к тому, чтобы, по крайности, рассмотреть вопрос о возможности прощения в принципе (когда жертва согласна действовать как суперагент).

Наблюдение, которое мы сделали в отношении структуры прощения, вероятно, может быть распространено на действия вообще, — во всяком случае, на их некоторое специфическое подмножество. Очевидно, что структура прощения, состоящая из серии решений агента, из вложенных действий, в которых первостепенное значение имеют те, что направлены на самого себя (так наз. действия суперагента), может быть обнаружена не только в ситуациях ожидания и дарования прощения, но и в некоторых других. Это могут быть случаи длительных действий, продолжение которых требует регулярно возобновляемого решения. Вероятно, сюда же можно отнести неординарные решения, имеющие в качестве основного ценностное измерение (и прежде всего — этическое).

Как теоретический, так и прикладной потенциал имеет, на наш взгляд, идея областей определения или доменов агентности, позволяющая рассуждать об агентах не безусловно, а в связи с множеством формул, которые входят в соответствующие агентные области. Уже сейчас это открывает возможности теоретико-множественного описания взаимодействия пары агентов, когда каждый из них представлен как набор <суперагент, регулярный агент>, на разных уровнях — уровнях их суперагентов, регулярных агентов, и смешанном. В дальнейшем эти определения могут быть положены в основу специальной логики действия, исследующей феномены прощения, принесения извинения, обиды и других, через описание логических характеристик, форм речевых актов, выражающих эти феномены.

Литература

Остин, 1999 – *Остин Дж.* Как производить действия при помощи слов // Избранное. М., 1999.

Вригт, фон, 1986 – *фон Вригт Г.Х.* О логике норм и действий // Логико-философские исследования. М.: Прогресс, 1986. С. 245–289.

Belnap, 1991 – *Belnap N.* Backwards and Forwards in the Modal Logic of Agency // Philosophy and Phenomenological Research. 1991. Vol. 51, No. 4. P. 777–807.

Belnap, Perloff, 1989 – *Belnap, N., Perloff, M.* Seeing to it That: A Canonical Form for Agentives // Theoria. 1989. Vol. 54. P. 175–199.

Benthem, Pacuit 2014 – *Benthem van J., Pacuit E.* Connecting Logics of Choice and Change // Nuel Belnap on Indeterminism and Free Action / Ed. by T. Müller. Springer, 2014. P. 291–314.

Downie, 1965 – *Downie S.* Forgiveness // The Philosophical Quarterly Moral Philosophy Number). 1965. Vol. 15. No. 59. P. 128–134.

Haber, 1991 – *Haber J.* Forgiveness: A Philosophical Study. Lanham, Md.: Rowman and Littlefield Publishers, Inc., 1991.

Horty, 2001 – *Horty J.* Agency and Deontic Logic. Oxford: Oxford University Press, 2001. 192 p.

Horty, Belnap, 1995 – *John J.F., Belnap N.* The Deliberative Stit: A Study of Action, Omission, Ability, and Obligation // Journal of Philosophical Logic. 1995. Vol. 24. No. 6. P. 583–644.

Hughes, Warmke, 2017 – *Hughes M., Warmke B.* Forgiveness // Stanford Encyclopedia of Philosophy. 2017. `https://plato.stanford.edu/archives/sum2017/entries/forgiveness` (дата обращения: 20.06.2020).

Pettigrove, 2004 – *Pettigrove G.* The Forgiveness We Speak: The Illocutionary Force of Forgiving // The Southern Journal of Philosophy. 2004. Vol. XLII. P. 371–392.

Scarre, 2016 – *Scarre G.* On Taking Back Forgiveness // Ethic Theory Moral Prac. 2016. Vol. 19. P. 931–944.

Searle, 1979 – *Searle J.* Expression and Meaning: Studies in the Theory of Speech Acts. New York: Cambridge University Press, 1979.

Searle, Vanderveken, 1985 – *Searle J., Vanderveken D.* Foundations of Illocutionary Logic. Cambridge University Press, 1985.

Troquard, 2016 – *Troquard N.* The Modal View of Agency // 28th European Summer School in Logic, Language and Information, Bolzano-Bozen. 2016. URL: `https://esslli2016.unibz.it/wp-content/uploads/2015/10/003-modal-agency.pdf` (дата обращения: 22.06.2020).

Vanderveken, 1990 – *Vanderveken D.* Meaning and Speech Acts: Volume 1, Principles of Language Use. Cambridge University Press, 1991.

Vanderveken, 1991 – *Vanderveken D.* Meaning and Speech Acts: Volume 2, Formal Semantics of Success and Satisfaction. Cambridge University Press, 1991.

Warmke, 2016 – *Warmke B.* The Normative Significance of Forgiveness // Australasian Journal of Philosophy. 2016. Vol. 94. Vol. 4. P. 687–703.

Forgiveness as a speech act in logic of action

Gleb V. Karpov
Saint-Petersburg State University,
5 Mendeleevskaya Liniya, St. Petersburg, 199034, Russian Federation.
E-mail: glebsight@gmail.com

Abstract: In this paper we study forgiveness as a speech act and as an action associated with a complex decision-making structure. In the first part of the paper, we make several critical remarks regarding the methodology of so-called "performative" approaches to forgiveness. We conclude that the theory of speech acts is not used by the authors of these approaches properly and if it is, then only nominally. We eliminate discovered methodological defects of two "performative" approaches to forgiveness (commissive and directive approaches) with the help of logical machinery, which is based on the semantic ideas of Belnapian logic of actions. We refute the statement of several authors who study forgiveness and practices of pardoning that a synthetic approach to these phenomena, combining the commissive and declarative interpretations of the phrase "I forgive you" is possible.

In the second, constructive part of the article, we examine the possibilities of the classical logic of action concerning the analysis of the difference between cases of refusal to forgive and cases of forgiveness refraining. We show that this question can be solved decently via the logic of action via the usage of language, model structure, and syntactic definitions, designed so that they can grasp the two-level structure of the decision on forgiveness used by the victim. We assume that the form of decision making of this kind is associated not only with forgiveness but also with other similar actions. The former association contributes to the philosophy of forgiveness, while the latter contributes to the applied and theoretical aspects of the logic of action. Finally, we believe that the idea of agent domains that we proposed can be applied in the field of general logic of action in the analysis of problems analogous to the problem of distinguishing between cases of non-pardoning and refraining from doing so.

Keywords: illocutionary force, agent, decision making, refraining, action, action structure

For citation: Karpov G.V. "Proshchenie kak rechevoi akt v logike deistvii" [Forgiveness as a speech act in logic of action], *Logicheskie Issledovaniya / Logical Investigations*, 2020, Vol. 26, No. 2, pp. 9–38. DOI: 10.21146/2074-1472-2020-26-2-9-38 (In Russian)

Acknowledgements. The research is supported by RSF № 20-18-00158 "Formal philosophy of argumentation and a comprehensive methodology for the search and selection of dispute solutions".

References

Austin, 1999 – Ostin, Dzh. "Kak proizvodit' dejstviya pri pomoshchi slov" [How to Do Things With Words], in: *Izbrannoe* [Selected Works]. Moscow, 1999. (In Russian)

Belnap, Perloff, 1989 – Belnap, N., Perloff, M. "Seeing to it That: A Canonical Form for Agentives ", *Theoria*, 1989, No. 54, pp. 175–199.

Belnap, 1991 – Belnap, N. "Backwards and Forwards in the Modal Logic of Agency", *Philosophy and Phenomenological Research*, Vol. 51, No. 4 (Dec., 1991), pp. 777–807.

Benthem, Pacuit 2014 – Benthem van, J., Pacuit, E. "Connecting Logics of Choice and Change", in: *Nuel Belnap on Indeterminism and Free Action*, ed. by T. Müller. Springer, 2014, pp. 291–314.

Downie, 1965 – Downie, S. "Forgiveness" , *The Philosophical Quarterly*, Vol. 15, No. 59, Moral Philosophy Number (Apr., 1965), pp. 128–134.

Haber, 1991 – Haber, J. Forgiveness: A Philosophical Study. Lanham, Md.: Rowman and Littlefield Publishers, Inc., 1991.

Horty, 2001 – *Horty, J.* Agency and Deontic Logic. Oxford: Oxford University Press, 2001. 192 p.

Horty, Belnap, 1995 – John, J. F., Belnap, N. "The Deliberative Stit: A Study of Action, Omission, Ability, and Obligation", *Journal of Philosophical Logic*, Vol. 24, No. 6 (Dec., 1995), pp. 583–644.

Hughes, Warmke, 2017 – Hughes M., Warmke B. "Forgiveness", *Stanford Encyclopedia of Philosophy*. 2017. [`https://plato.stanford.edu/archives/sum2017/entries/forgiveness`, accessed on 20.06.2020]

Pettigrove, 2004 – Pettigrove, G. "The Forgiveness We Speak: The Illocutionary Force of Forgiving", *The Southern Journal of Philosophy*, 2004, Vol. XLII. pp. 371–392.

Searle, 1979 – Searle, J. *Expression and Meaning: Studies in the Theory of Speech Acts*. New York: Cambridge University Press, 1979.

Searle, Vanderveken, 1985 – Searle, J., Vanderveken, D. *Foundations of Illocutionary Logic*. Cambridge University Press, 1985.

Scarre, 2016 – Scarre, G. "On Taking Back Forgiveness", *Ethic Theory Moral Prac*, 2016, Vol. 19, pp. 931–944.

Troquard, 2016 – Troquard, N. "The Modal View of Agency", *28th European Summer School in Logic, Language and Information, Bolzano-Bozen*. 2016. [`https://esslli2016.unibz.it/wp-content/uploads/2015/10/003-modal-agency.pdf`, accessed on 22.06.2020]

Vanderveken, 1990 – Vanderveken, D. *Meaning and Speech Acts: Volume 1, Principles of Language Use*. Cambridge University Press, 1991.

Vanderveken, 1991 – Vanderveken, D. *Meaning and Speech Acts: Volume 2, Formal Semantics of Success and Satisfaction*. Cambridge University Press, 1991.

Warmke, 2016 – Warmke, B. "The Normative Significance of Forgiveness", *Australasian Journal of Philosophy*, 2016, Vol. 94, No. 4, pp. 687–703.

Wright, von, 1986 – von Wright, G.H. "O logike norm i deistvij" [On the Logic of Norms and Actions], in: *Logiko-filosofskie issledovanija* [Logical and Philosophical Papers]. Moscow: Progress, 1986, pp. 245–289. (In Russian)

Логические исследования
2020. Т. 26. № 2. С. 39–57
УДК 16

Logical Investigations
2020, Vol. 26, No. 2, pp. 39–57
DOI: 10.21146/2074-1472-2020-26-2-39-57

В.И. Маркин

Силлогистика как логика всех отношений между двумя непустыми множествами

Владимир Ильич Маркин
МГУ им. М.В. Ломоносова.
Российская Федерация, 119991, г. Москва, Ломоносовский пр-т, д. 27, корп. 4.
E-mail: markin@philos.msu.ru

Аннотация: В работе предлагается язык позитивной силлогистики, алфавит которого содержит все силлогистические константы. Сами эти константы понимаются как знаки отношений между двумя непустыми множествами (объемами двух общих терминов). Среди указанных отношений особое место занимают те, которым соответствует в точности одна из пяти диаграмм Эйлера–Жергонна: (1) равенство множеств, (2) строгое включение первого множества во второе, (3) строгое включение второго множества в первое, (4) перекрещивание множеств, (5) несовместимость множеств. Остальные отношения представляют из себя комбинации эйлеровских. Каждая константа k в предлагаемом силлогистическом языке кодируется последовательностью чисел от 1 до 5, указывающих на номера тех эйлеровских отношений, при которых простое высказывание формы SkP принимает значение «истина». Например, отношение включения одного непустого множества в другое репрезентирует константа 12, а отношение совместимости двух непустых множеств — константа 1234. Задается точная теоретико-множественная семантика данного «универсального» языка, соответствующая интуитивному пониманию силлогистических констант. Вводятся понятия выразимости силлогистической константы в «локальном» языке, содержащем лишь некоторые из таких констант, и полноты множества исходных констант некоторого «локального» языка. Константа k выразима в локальном силлогистическом языке с неким набором исходных силлогистических констант, если и только если в этом локальном языке найдется формула A, содержащая в точности два термина S и P, такая что A эквивалентна формуле SkP в семантике универсального силлогистического языка. Множество силлогистических констант $\{k_1, k_2, \ldots, k_m\}$ называется *полным*, если и только если любая силлогистическая константа выразима в языке с исходными силлогистическими константами $k_1, k_2, \ldots, k_m$. В качестве примера доказывается полнота множества исходных констант традиционной силлогистики (a, e, i, o) и множества исходных констант силлогистики Венна (знаков пяти эйлеровских отношений). В универсальном силлогистическом языке строится аксиоматическое исчисление, доказываются метатеоремы о его непротиворечивости и полноте.

Ключевые слова: силлогистика, силлогистическая константа, формализованный язык, семантика, определимость, полная система констант, аксиоматическое исчисление, метатеоремы о непротиворечивости и полноте

Для цитирования: *Маркин В.И.* Силлогистика как логика всех отношений между двумя непустыми множествами // Логические исследования / Logical Investigations. 2020. Т. 26. № 2. С. 39–57. DOI: 10.21146/2074-1472-2020-26-2-39-57

© Маркин В.И.

1. Что такое силлогистическая константа?

Ассерторическая силлогистика, как известно, является учением о выводах из простых категорических высказываний. Эти высказывания можно считать результатом сочленения двух общих терминов с помощью особого логического термина, который принято называть *силлогистической константой*. Силлогистическая константа при таком подходе — это единый термин, включающий и внутреннюю связку, и квантор. Указанное единство особенно наглядно в аристотелевской формулировке категорических высказываний, где на первом месте стоит предикат, на втором силлогистическая константа, а в самом конце субъект, например, «P присуще всякому S», «P не присуще некоторым S». Схоласты формулировали категорические высказывания иначе, с другой последовательностью терминов: квантор — субъект — внутренняя связка — предикат, например, «Все S есть P», «Некоторые S не есть P». Но и они при формальной записи этих высказываний (например, SaP, SoP) соединяли квантор и связку в один логический термин — a, e, i и o.

Что же репрезентируют силлогистические константы? При доминирующем в исследованиях по силлогистике экстенсиональном подходе они рассматриваются как знаки отношений между двумя множествами — объемами субъекта и предиката категорического высказывания. Так, константа a обычно трактуется как знак (нестрогого) включения объема субъекта в объем предиката, константа i — как знак совместимости этих объемов (наличия в данных множествах общих элементов), константа e — как знак несовместимости указанных множеств, константа o — как знак невключения первого объема во второй.

В качестве семантического инструмента в силлогистике широко используются круговые диаграммы:

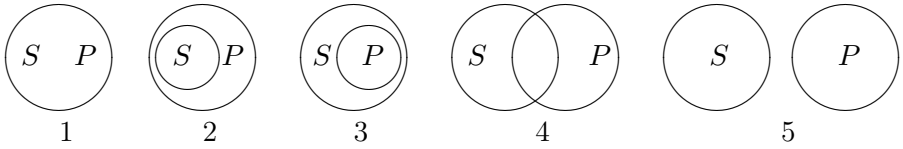


Рис. 1. Диаграммы Эйлера–Жергонна

Каждая из этих диаграмм изображает определенное отношение между двумя множествами, которые являются объемами общих терминов S и P:

1) равенство объемов S и P;

2) строгое включение объема S в объем P;

3) строгое включение объема P в объем S;

4) перекрещивание объемов S и P;

5) несовместимость (внеположенность) объемов S и P.

При этом предполагается, что оба эти множества непусты. Будем называть указанные пять отношений «*эйлеровскими*».

Нетрудно заметить, что лишь одна стандартная силлогистическая константа из четырех (а именно e) репрезентирует эйлеровское отношение (отношение 5). Высказывание формы SeP истинно лишь в том случае, когда объемы S и P не имеют общих элементов. При всех иных эйлеровских отношениях между этими (непустыми) множествами SeP оказывается ложным. Что касается других стандартных силлогистических констант (a, i и o), то категорические высказывания, образованные с их помощью, истинны при нескольких различных эйлеровских отношениях между объемами субъекта и предиката: SaP истинно при отношениях 1–2, SiP — при отношениях 1–4, SoP — при отношениях 3–5.

В истории логики предпринимались попытки построения силлогистических теорий с нестандартными исходными наборами силлогистических констант. Так, Н.А. Васильев [Васильев, 1910] предложил использовать вместо неопределенно-частных высказываний (SiP и SoP) определенно-частное: «Только некоторые S есть P». Оно принимает значение «истина», е.т.е. (если и только если) объемы S и P находятся в отношениях 3 или 4.

Дж. Венн [Venn, 1881] предложил систему силлогистического типа с пятью исходными видами категорических высказываний: четырьмя утвердительными и общеотрицательным. При выделении четырех разновидностей утвердительных высказываний он опирался на классификацию суждений У. Гамильтона, который указывал на необходимость учета квантификации не только субъекта, но и предиката. При таком подходе утвердительные высказывания можно разделить на обще-общие («Все S есть все P»), обще-частные («Все S есть некоторые P»), частно-общие («Некоторые S есть все P») и частно-частные («Некоторые S есть некоторые P»).

Высказывания каждого из пяти видов логики Венна истинны ровно при одном эйлеровском отношении между объемами S и P: общеотрицательные, как уже говорилось, при отношении 5, а что касается утвердительных, то обще-общие истинны при отношении 1, обще-частные при отношении 2, частно-общие при отношении 3, частно-частные при отношении 4. Для каждого из перечисленных видов высказываний можно ввести свою собственную силлогистическую константу, репрезентирующую определенное эйлеровское отношение между двумя непустыми множествами.

Выше уже отмечалось, что кроме эйлеровских имеются и иные бинарные отношения между непустыми множествами: отношение нестрогого включения, соответствующее константе a, отношение объемной совместимости, соответствующее константе i, отношение, фиксирующееся в истинном определенно-частном высказывании, и др. Очевидно, что число всех возможных отношений между двумя непустыми множествами равно мощности множества всех подмножеств $\{1, 2, 3, 4, 5\}$, т. е. тридцати двум. Каждому из этих отношений можно сопоставить свою уникальную силлогистическую константу.

Удобно в запись произвольной силлогистической константы k включать номера тех эйлеровских отношений, при которых категорическое высказывание формы SkP истинно.

Запись констант, репрезентирующих сами эйлеровские отношения, будет включать одно число (от 1 до 5), которое совпадает с номером соответствующего отношения. Тогда, например, формой обще-общих утвердительных высказываний будет выражение $S1P$, а формой общеотрицательных высказываний — выражение $S5P$.

Константы, репрезентирующие 26 неэйлеровских отношений между двумя непустыми множествами, будут представлять собой *многокомпонентные* последовательности чисел. Например, константа a будет записываться как 12 (а форма высказывания «Все S есть P» как $S12P$), константа i как 1234, константа o как 345, а константа, образующая определенно-частное высказывание, как 34. Договоримся располагать числа в составе многокомпонентных констант в порядке их возрастания.

Еще одна константа, которая выделяется с целью общности рассмотрения, является *нулькомпонентной*. Она репрезентирует «пустое» отношение, т. е. такое отношение, в котором не находятся никакие два непустых множества. Форма высказывания, образованного с помощью нулькомпонентной константы, будет фиксироваться выражением SP.

Другим предельным случаем отношения между двумя непустыми множествами является «универсальное» отношение, т. е. отношение, в котором находятся любые два таких множества. Данное отношение репрезентируется константой 12345[1].

Таким образом, *силлогистической константой* назовем последовательность (возможно пустую) $x_1x_2\ldots x_n$ попарно различных чисел из множества $\{1, 2, 3, 4, 5\}$, расположенных по возрастанию.

[1]Нулькомпонентная константа и константа 12345 являются, по сути, силлогистическими аналогами пропозициональных констант ложности и истинности, соответственно. Как будет показано ниже, SP является формой *логически ложного* , а $S12345P$ формой *логически истинного* простого высказывания.

Учитывая, что за каждым числом x_i в составе некоторой силлогистической константы k стоит определенная круговая диаграмма, числовой код $x_1x_2\ldots x_n$ задает полный список эйлеровских отношений, при которых высказывание формы SkP принимает значение «истина». А сама константа k с семантической точки зрения репрезентирует такое отношение между объемами терминов S и P, которое является объединением эйлеровских отношений, кодируемых числами $x_1, x_2, \ldots, x_n$.

2. Универсальный язык позитивной силлогистики и его семантика

Построим позитивную силлогистику, язык которой содержит тридцать две силлогистические константы — знаки всех возможных бинарных отношений между непустыми множествами.

С использованием данного «*универсального*» силлогистического языка и логики, в нем построенной, может быть развита *общая метатеория силлогистических констант* позитивной силлогистики. В ее рамках можно выделять различные свойства этих констант и отношения между ними. Появляется возможность ввести точное понятие выразимости (определимости) силлогистической константы в «*локальном*» силлогистическом языке, содержащем не все силлогистические константы. Также могут быть исследованы различные характеристики множеств (наборов) силлогистических констант, в том числе введено понятие полного множества констант и сформулирована задача по установлению критериев полноты.

Итак, под *универсальным силлогистическим языком* будем понимать язык позитивной силлогистики, алфавит которого содержит все силлогистические константы. Помимо них в алфавит включаются бесконечный список общих терминов, пропозициональные связки и скобки. Атомарные формулы универсального силлогистического языка имеют вид SkP, где S и P — общие термины, а k – произвольная силлогистическая константа (если константа k представляет собой пустую последовательность, то SkP записывается как SP). Сложные формулы образуются обычным способом с помощью пропозициональных связок. Будем обозначать множество всех формул данного языка как $\mathbf{L_U}$.

Сформулируем точную семантику универсального силлогистического языка, основываясь на содержательных интуициях, изложенных в предыдущем разделе.

Моделью назовем пару $\langle \mathbf{D}, \varphi \rangle$, где $\mathbf{D}$ — произвольное непустое множество, φ — функция, сопоставляющая каждому общему термину некоторое непустое подмножество $\mathbf{D}$: $\varphi(S) \subseteq \mathbf{D}$ и $\varphi(S) \neq \varnothing$.

Определим понятие значимости (истинности) формулы $A \in \mathbf{L_U}$ в модели $\langle \mathbf{D}, \varphi \rangle$. С этой целью введем трехместный предикат $\mathcal{V}$. $\mathcal{V}(A, \mathbf{D}, \varphi)$ читается так: «формула A значима в модели $\langle \mathbf{D}, \varphi \rangle$».

Зададим сначала условия значимости атомарных формул, образованных посредством *нулькомпонентной* константы:

$\mathcal{V}_{\varnothing}$. Неверно, что $\mathcal{V}(SP, \mathbf{D}, \varphi)$

(т. е. формулы вида SP не являются значимыми ни в какой модели).

Зададим далее условия значимости атомарных формул, образованных посредством *однокомпонентных* силлогистических констант:

$\mathcal{V}_1$. $\mathcal{V}(S1P, \mathbf{D}, \varphi)$, е.т.е. $\varphi(S) = \varphi(P)$;

$\mathcal{V}_2$. $\mathcal{V}(S2P, \mathbf{D}, \varphi)$, е.т.е. $\varphi(S) \subset \varphi(P)$;

$\mathcal{V}_3$. $\mathcal{V}(S3P, \mathbf{D}, \varphi)$, е.т.е. $\varphi(P) \subset \varphi(S)$;

$\mathcal{V}_4$. $\mathcal{V}(S4P, \mathbf{D}, \varphi)$, е.т.е. $\varphi(S) \cap \varphi(P) \neq \varnothing$ и $\varphi(S) \setminus \varphi(P) \neq \varnothing$ и $\varphi(P) \setminus \varphi(S) \neq \varnothing$;

$\mathcal{V}_5$. $\mathcal{V}(S5P, \mathbf{D}, \varphi)$, е.т.е. $\varphi(S) \cap \varphi(P) = \varnothing$

($\mathcal{V}_1$–$\mathcal{V}_5$ фиксируют в теоретико-множественном языке те же самые эйлеровские отношения, которые изображены на круговых диаграммах 1–5).

Зададим наконец условия значимости атомарных формул, образованных посредством *многокомпонентных* силлогистических констант. Пусть силлогистическая константа k представляет собой последовательность $x_1 x_2 \ldots x_n$ попарно различных чисел из множества $\{1, 2, 3, 4, 5\}$, расположенных по возрастанию, причем $2 \leqslant n \leqslant 5$.

$\mathcal{V}_M$. $\mathcal{V}(Sx_1x_2 \ldots x_nP, \mathbf{D}, \varphi)$, е.т.е. $\mathcal{V}(Sx_1P, \mathbf{D}, \varphi)$ или $\mathcal{V}(Sx_2P, \mathbf{D}, \varphi)$ или $\ldots$ или $\mathcal{V}(Sx_nP, \mathbf{D}, \varphi)$

(формула, образованная с помощью многокомпонентной константы, значима в некоторой модели, е.т.е. в этой модели значима хотя бы одна формула, образованная с помощью однокомпонентной константы, входящей в данную многокомпонентную константу).

$\mathcal{V}_C$. Условия значимости сложных формул стандартные.

Формула $A \in \mathbf{L_U}$ *общезначима* в семантике универсального силлогистического языка ($\mathbf{U}$-*общезначима*), е.т.е. $\mathcal{V}(A, \mathbf{D}, \varphi)$ в любой модели $\langle \mathbf{D}, \varphi \rangle$.

Формула $A \in \mathbf{L_U}$ *выполнима* в семантике универсального силлогистического языка ($\mathbf{U}$-*выполнима*), е.т.е. $\mathcal{V}(A, \mathbf{D}, \varphi)$ по крайней мере в одной модели $\langle \mathbf{D}, \varphi \rangle$.

Из сформулированных выше условий значимости вытекает, что формула вида $S12345P$ общезначима в данной семантике, а формула вида SP не является выполнимой.

Верным является также следующее утверждение: если силлогистическая константа k содержит число 1, то формула SkS общезначима в семантике универсального силлогистического языка; в противном случае формула SkS не является выполнимой. Заметим, что известные законы силлогистического тождества SaS и SiS являются частными случаями общезначимых формул вида SkS, где константа k содержит 1, ведь a в нашей записи — это 12, а i — 1234.

В построенной логике имеют место обобщения других известных законов традиционной силлогистики: силлогистических вариантов законов противоположностей (напр., $\neg(SaP \wedge SeP)$) и законов исключенного третьего (напр., $SiP \vee SoP$). Если константы k_1 и k_2 не содержат в своем составе ни одного одинакового числа, то формула $Sk_1P \wedge Sk_2P$ не является выполнимой (а значит $\neg(Sk_1P \wedge Sk_2P)$ общезначима). Если каждое число из множества $\{1, 2, 3, 4, 5\}$ входит в состав хотя бы одной из констант — k_1 или k_2, то формула $Sk_1P \vee Sk_2P$ общезначима.

Формулы A и B *эквивалентны* в семантике универсального силлогистического языка, е.т.е. для любой модели $\langle \mathbf{D}, \varphi \rangle$ верно, что $\mathcal{V}(A, \mathbf{D}, \varphi)$, е.т.е. $\mathcal{V}(B, \mathbf{D}, \varphi)$.

Из $\mathcal{V}_M$ и $\mathcal{V}_C$ следует, что формула $Sx_1x_2 \ldots x_nP$ эквивалентна формуле $Sx_1P \vee Sx_2P \vee \ldots \vee Sx_nP$.

Можно сформулировать *принцип установления отношения противоречия* между атомарными формулами с одинаковыми субъектами и предикатами: если константы k_1 и k_2 не содержат в своем составе ни одного одинакового числа и каждое число из множества $\{1, 2, 3, 4, 5\}$ входит в состав хотя бы одной из этих констант, то формула Sk_1P эквивалентна формуле $\neg Sk_2P$ и протворечит формуле Sk_2P. Частным случаем этого принципа являются законы диагоналей логического квадрата: SaP (т. е. $S12P$) противоречит SoP (т. е. $S345P$), а SeP (т. е. $S5P$) противоречит SiP (т. е. $S1234P$).

В рамках данной силлогистики можно развить интересное *учение об обращении*. Приведем некоторые результаты, связанные с данным вопросом. Если силлогистическая константа k не содержит чисел 2 и 3 или же содержит как число 2, так и число 3, то формула SkP эквивалентна формуле PkS. Если силлогистическая константа k_1 содержит число 2, но не содержит число 3, а константа k_2 получается из k_1 заменой 2 на 3, то формула Sk_1P эквивалентна формуле Pk_2S. Если силлогистическая константа k_1 содержит число 3, но не содержит число 2, а константа k_2 получается из k_1 заменой 3 на 2, то формула Sk_1P эквивалентна формуле Pk_2S.

Докажем метатеорему об эквивалентной замене.

Теорема 1. *Пусть A и B — произвольные формулы из $\mathbf{L_U}$, C_A — формула данного языка с выделенным вхождением подформулы A, а C_B — формула, получающаяся в результате замены выделенного вхождения A в C_A на формулу B. Если формулы A и B эквивалентны в семантике универсального силлогистического языка, то формулы C_A и C_B также эквивалентны в этой семантике.*

Доказательство. Доказательство ведется индукцией по числу пропозициональных связок в формуле C_A.

Базис индукции. Пусть C_A не содержит пропозициональных связок, т. е. это атомарная формула. Тогда $C_A = A$, а $C_B = B$. Поэтому если A и B эквивалентны в семантике универсального силлогистического языка, то C_A и C_B также эквивалентны в ней.

Индуктивный переход. Допустим, что теорема верна для любой формулы с меньшим, чем у C_A, числом пропозициональных связок.

Пусть главным знаком в формуле C_A является отрицание, тогда C_A имеет вид $\neg D_A$, а C_B имеет вид $\neg D_B$. Формула D_A имеет меньше пропозициональных связок, чем C_A, поэтому, по индуктивному допущению, если A эквивалентна B, то D_A эквивалентна D_B. А из последнего, в силу семантики пропозиционального отрицания, вытекает, что формула $\neg D_A$ эквивалентна формуле $\neg D_B$.

Пусть главным знаком в формуле C_A является конъюнкция, тогда C_A имеет вид $D_A \wedge E$ либо $D \wedge E_A$. В первом случае формула C_B имеет вид $D_B \wedge E$, во втором – $D \wedge E_B$. Рассмотрим первый случай (второй аналогичен). Формула D_A имеет меньше пропозициональных связок, чем C_A, поэтому, по индуктивному допущению, если A эквивалентна B, то D_A эквивалентна D_B. В силу условий значимости конъюнктивных формул, если D_A эквивалентна D_B, то $D_A \wedge E$ (т. е. C_A) эквивалентна $D_B \wedge E$ (т. е. C_B). По транзитивности имеем: если A эквивалентна B, то C_A эквивалентна C_B.

В случаях, когда главным знаком формулы C_A являются иные пропозициональные связки, рассуждение осуществляется аналогично. ■

3. Локальные силлогистические языки и полные множества силлогистических констант

Обычно в язык позитивной силлогистики в качестве исходных вводят не все, а только часть силлогистических констант. Такие языки будем называть «*локальными*». К числу локальных относятся языки традиционной силлогистики, силлогистик Венна и Васильева.

При семантическом построении силлогистики в локальном языке исходным константам сопоставляются некоторые отношения между объемами двух общих терминов (мы будем рассматривать лишь случай, когда эти

термины непусты). Предполагается, однако, что этих отношений достаточно для того, чтобы выразить и все другие бинарные объемные отношения. В таком случае можно считать множество исходных констант *полным.*

Используя семантику универсального силлогистического языка, введем точные определения выразимости константы в локальном языке и полноты множества силлогистических констант.

Пусть $\{k_1,\ k_2,\ldots,\ k_m\}$ — множество исходных силлогистических констант некоторого локального языка. Каждая константа k_j из этого множества записывается с использованием числового кода, о котором шла речь в предыдущем разделе, т. е. основываясь на семантике этого языка, мы в самой записи k_j фиксируем те эйлеровские отношения между объемами S и P, при которых высказывание формы Sk_jP истинно.

Константа k *выразима* в локальном силлогистическом языке с исходными силлогистическими константами $k_1,\ k_2,\ldots,\ k_m$, е.т.е. в этом локальном языке найдется формула A, содержащая в точности два термина S и P, такая что A эквивалентна формуле SkP в семантике универсального силлогистического языка.

Например, константа 12 (т. е. a) выразима в языке силлогистики Венна с исходными константами 1, 2, 3, 4, 5, поскольку в этом языке найдется формула, а именно $S1P \vee S2P$, которая содержит термины S и P и эквивалентна в семантике универсального языка формуле $S12P$.

Другой пример. Константа 1 выразима в языке с исходными константами 12, 1234, 345, 5 (они соответствуют стандартным константам традиционной силлогистики a, i, o, e), так как в этом языке найдется формула, а именно $S12P \wedge P12S$, которая содержит термины S и P и эквивалентна в семантике универсального языка формуле $S1P$.

Множество силлогистических констант $\{k_1,\ k_2,\ldots,\ k_m\}$ называется *полным*, е.т.е. любая силлогистическая константа выразима в языке с исходными силлогистическими константами $k_1,\ k_2,\ldots,\ k_m$.

Рассмотрим два локальных языка (язык силлогистики Венна и язык традиционной силлогистики) и докажем полноту множеств их исходных констант. Пусть $\mathbf{L_V}$ — множество формул языка силлогистики Венна, а $\mathbf{L_T}$ — множество формул языка традиционной силлогистики.

Теорема 2. *Множество исходных констант силлогистики Венна* $\{1, 2, 3, 4, 5\}$ *является полным.*

Доказательство. При семантическом построении силлогистики Венна используем модели того же типа, что и в семантике универсального силлогистического языка. В данном локальном языке имеется всего пять видов

атомарных формул. Условия значимости для них — это $\mathcal{V}_1$–$\mathcal{V}_5$. Для определения условий значимости сложных формул используем $\mathcal{V}_C$. **V**-*общезначимой* назовем формулу $A \in \mathbf{L_V}$, значимую в любой модели при $\mathcal{V}$, включающем $\mathcal{V}_1$–$\mathcal{V}_5$, $\mathcal{V}_C$.

Нужно показать, что все тридцать две силлогистические константы универсального языка выразимы в рассматриваемом локальном языке. Эти константы, как уже говорилось, бывают однокомпонентными, многокомпонентными и нулькомпонентными.

Все однокомпонентные константы входят в множество исходных констант локального языка, а условия значимости атомарных формул с этими константами в семантиках универсального и локального языков совпадают. Поэтому все они выразимы в данном локальном языке.

Произвольная многокомпонентная константа $x_1x_2\ldots x_n$ также выразима в нем, поскольку в семантике универсального языка формуле $Sx_1x_2\ldots x_nP$ эквивалентна формула $Sx_1P \vee Sx_2P \vee \ldots \vee Sx_nP$, содержащая в точности два общих термина S и P.

Нулькомпонентная силлогистическая константа также является выразимой: формуле SP в семантике универсального языка эквивалентна любая невыполнимая формула локального языка, содержащая лишь термины S и P, например, формула $S2S \wedge P2P$. ■

Теорема 2 дает более простой критерий полноты произвольного множества силлогистических констант: множество констант $\{k_1,\ k_2,\ldots,\ k_m\}$ является полным, е.т.е. в языке с исходными константами $k_1,\ k_2,\ldots,\ k_m$ выразимы константы 1, 2, 3, 4, 5.

Будем использовать этот критерий при доказательстве следующей метатеоремы.

Теорема 3. *Множество исходных констант традиционной силлогистики {a, e, i, o} является полным.*

Доказательство. Семантика традиционной позитивной силлогистики обычно строится следующим образом. Используется тот же класс моделей $\langle \mathbf{D}, \varphi \rangle$, где $\mathbf{D} \neq \varnothing$, $\varphi(S) \subseteq \mathbf{D}$ и $\varphi(S) \neq \varnothing$. Условия значимости четырех типов атомарных формул определяются так:

$\mathcal{V}_a$. $\mathcal{V}(SaP, \mathbf{D}, \varphi)$, е.т.е. $\varphi(S) \subseteq \varphi(P)$;

$\mathcal{V}_e$. $\mathcal{V}(SeP, \mathbf{D}, \varphi)$, е.т.е. $\varphi(S) \cap \varphi(P) = \varnothing$;

$\mathcal{V}_i$. $\mathcal{V}(SiP, \mathbf{D}, \varphi)$, е.т.е. $\varphi(S) \cap \varphi(P) \neq \varnothing$;

$\mathcal{V}_o$. $\mathcal{V}(SoP, \mathbf{D}, \varphi)$, е.т.е. $\varphi(S) \setminus \varphi(P) \neq \varnothing$.

Для сложных формул принимаются стандартные условия значимости ($\mathcal{V}_C$). **T**-*общезначимой* назовем формулу $A \in \mathbf{L_T}$, значимую в любой модели при $\mathcal{V}$, включающем $\mathcal{V}_a$, $\mathcal{V}_e$, $\mathcal{V}_i$, $\mathcal{V}_o$, $\mathcal{V}_C$.

Покажем сначала, что каждую исходную константу традиционной силлогистики можно эквивалентным образом заменить некоторой константой универсального силлогистического языка.

$\mathcal{V}(SaP, \mathbf{D}, \varphi)$, е.т.е. (в силу $\mathcal{V}_a$) $\varphi(S) \subseteq \varphi(P)$, е.т.е (в силу связи отношений нестрогого включения, равенства множеств и строгого включения) $\varphi(S) = \varphi(P)$ или $\varphi(S) \subset \varphi(P)$, е.т.е. (в силу $\mathcal{V}_1$ и $\mathcal{V}_2$) $\mathcal{V}(S1P, \mathbf{D}, \varphi)$ или $\mathcal{V}(S2P, \mathbf{D}, \varphi)$, е.т.е. (в силу $\mathcal{V}_M$) $\mathcal{V}(S12P, \mathbf{D}, \varphi)$.

Таким образом, константа a есть та же константа, что и 12.

$\mathcal{V}(SeP, \mathbf{D}, \varphi)$, е.т.е. (в силу $\mathcal{V}_e$) $\varphi(S) \cap \varphi(P) = \varnothing$, е.т.е. (в силу $\mathcal{V}_5$) $\mathcal{V}(S5P, \mathbf{D}, \varphi)$.

Таким образом, константа e есть та же константа, что и 5.

В семантике традиционной силлогистики условия значимости SiP противоречат условиям значимости SeP, а условия значимости SoP противоречат условиям значимости SaP. Согласно сформулированному в предыдущем разделе принципу установления отношения противоречия между атомарными формулами с одинаковыми субъектами и предикатами, формуле $S5P$ в семантике универсального силлогистического языка противоречит формула $S1234P$, а формуле $S12P$ — формула $S345P$. Поэтому i есть та же константа, что и 1234, а o — та же константа, что и 345.

Остается показать, что константы 1, 2, 3, 4, 5 выразимы в языке традиционной силлогистики. Для этого для каждой атомарной формулы $SkP \in \mathbf{L_V}$ укажем формулу из $\mathbf{L_T}$, эквивалентную ей в семантике универсального силлогистического языка и содержащую два термина S и P.

Формуле $S1P$ в семантике универсального силлогистического языка эквивалентна формула $S12P \wedge P12S$, т. е. $SaP \wedge PaS$.

Формуле $S2P$ в семантике универсального языка эквивалентна формула $S12P \wedge P345S$, т. е. $SaP \wedge PoS$.

Формуле $S3P$ в семантике универсального силлогистического языка эквивалентна формула $S345P \wedge P12S$, т. е. $SoP \wedge PaS$.

Формуле $S4P$ в семантике универсального силлогистического языка эквивалентна формула $S1234P \wedge S345P \wedge P345S$, т. е. $SiP \wedge SoP \wedge PoS$.

Формула $S5P$ в семантике универсального силлогистического языка эквивалентна самой себе, т. е. SeP.

Демонстрация справедливости этих утверждений не представляет сложности и основана исключительно на условиях значимости формул в семантике универсального силлогистического языка. ■

Нередки ситуации, когда некоторые константы в полном множестве силлогистических констант оказываются излишними, поскольку выразимы посредством других. Поэтому важным является понятие *минимально полного множества констант.*

Множество силлогистических констант $\{k_1, k_2, \ldots, k_m\}$ называется *минимально полным*, е.т.е. оно является полным, и любое правильное подмножество данного множества не является полным.

Множество исходных констант традиционной силлогистики {12, 1234, 345, 5} не является минимально полным, поскольку, например, константы 1234 и 345 выразимы в языке с исходными константами 12 и 5: формула $S1234P$ эквивалентна $\neg S5P$, а формула $S345P$ эквивалентна $\neg S12P$. Множество констант {12, 5}, а также множества {12, 1234}, {345, 5} и {1234, 345} являются минимально полными.

Множество исходных констант силлогистики Венна {1, 2, 3, 4, 5} также не относится к числу минимально полных. Так, например, константы 3 и 4 выразимы в языке с более узким множеством исходных констант {1, 2, 5}: формула $S3P$ эквивалентна формуле $P2S$, а формула $S4P$ эквивалентна формуле $\neg S1P \wedge \neg S2P \wedge \neg P2S \wedge \neg S5P$.

4. Формализация «универсальной» позитивной силлогистики

Традиционный вариант позитивной силлогистики (множество **T**-общезначимых формул) формализует широко известная силлогистика Я. Лукасевича [Лукасевич, 1959] — аксиоматическое исчисление **C4** по классификации В.А. Смирнова [Смирнов, 2002].

Утверждение 1. *Для любой формулы $A \in \mathbf{L_T}$ верно, что A доказуема в исчислении* **C4**, *е.т.е. A является* **T**-*общезначимой* (см., напр., [Мчедлишвили, 1985]).

С целью формализации силлогистики Венна в [Дубаков, Маркин, 2007] было предложено исчисление **C4V**, схемами аксиом которого являются:

V0. Пропозициональные тавтологии;

V1. $(M1P \wedge S1M) \supset S1P$;

V2. $(M1P \wedge S2M) \supset S2P$;

V3. $(M2P \wedge S1M) \supset S2P$;

V4. $(M2P \wedge S2M) \supset S2P$;

V5. $(M5P \wedge S1M) \supset S5P$;

V6. $(M5P \wedge S2M) \supset S5P$;

V7. $S1P \supset P1S$;

V8. $S2P \supset P3S$;

V9. $S3P \supset P2S$;

V10. $S4P \supset P4S$;

V11. $S5P \supset P5S$;

V12. $S1S$;

V13. $\neg(S1P \wedge S2P)$;

V14. $\neg(S1P \wedge S3P)$;

V15. $\neg(S1P \wedge S4P)$;

V16. $\neg(S2P \wedge S3P)$;

V17. $\neg(S2P \wedge S4P)$;

V18. $\neg(S1P \wedge S5P)$;

V19. $\neg(S4P \wedge S5P)$;

V20. $S1P \vee S2P \vee S3P \vee S4P \vee S5P$.

Единственное правило вывода в **C4V** — *modus ponens*.

Там же был задан следующий перевод υ_1 из множества формул языка силлогистики Венна ($\mathbf{L_V}$) в множество формул языка традиционной силлогистики ($\mathbf{L_T}$):

$$\upsilon_1(S1P) = SaP \wedge PaS; \qquad \upsilon_1(S4P) = SiP \wedge SoP \wedge PoS;$$
$$\upsilon_1(S2P) = SaP \wedge PoS; \qquad \upsilon_1(S5P) = SeP;$$
$$\upsilon_1(S3P) = SoP \wedge PaS; \qquad \upsilon_1(\neg A) = \neg\upsilon_1(A);$$
$$\upsilon_1(A \nabla B) = \upsilon_1(A) \nabla \upsilon_1(B), \qquad \text{где } \nabla \text{ — бинарная связка.}$$

Была доказана следующая метатеорема о погружаемости **C4V** в **C4** посредством перевода υ_1:

Утверждение 2. *Для любой формулы $A \in \mathbf{L_V}$ верно, что A* доказуема в исчислении **C4V**, *е.т.е. $\upsilon_1(A)$ доказуема в* **C4**.

Продемонстрируем справедливость семантического аналога последнего утверждения.

Теорема 4. *Для любой формулы $A \in \mathbf{L_V}$ верно, что A является **V**-общезначимой, е.т.е. формула $\upsilon_1(A)$ является **T**-общезначимой.*

Доказательство. Достаточно показать, что условия **V**-значимости произвольной формулы $A \in \mathbf{L_V}$ и условия **T**-значимости ее перевода $\upsilon_1(A)$ совпадают. Используем индукцию по количеству пропозициональных связок в формуле $A \in \mathbf{L_V}$.

Базис индукции включает пять случаев.

(1) $A = S1P$.

$\mathcal{V}(S1P, \mathbf{D}, \varphi)$, е.т.е. (в силу $\mathcal{V}_1$) $\varphi(S) = \varphi(P)$, е.т.е. (по определению равенства множеств) $\varphi(S) \subseteq \varphi(P)$ и $\varphi(P) \subseteq \varphi(S)$, е.т.е. (в силу $\mathcal{V}_a$) $\mathcal{V}(SaP, \mathbf{D}, \varphi)$ и $\mathcal{V}(PaS, \mathbf{D}, \varphi)$, е.т.е. (в силу $\mathcal{V}_C$) $\mathcal{V}(SaP \wedge PaS, \mathbf{D}, \varphi)$, е.т.е. (по определению υ_1) $\mathcal{V}(\upsilon_1(S1P), \mathbf{D}, \varphi)$.

(2) $A = S2P$.

$\mathcal{V}(S2P, \mathbf{D}, \varphi)$, е.т.е. (в силу $\mathcal{V}_2$) $\varphi(S) \subset \varphi(P)$, е.т.е. (по определению $\subset$) $\varphi(S) \subseteq \varphi(P)$ и $\varphi(P) \setminus \varphi(S) \neq \varnothing$, е.т.е. (в силу $\mathcal{V}_a$ и $\mathcal{V}_o$) $\mathcal{V}(SaP, \mathbf{D}, \varphi)$ и $\mathcal{V}(PoS, \mathbf{D}, \varphi)$, е.т.е. (в силу $\mathcal{V}_C$) $\mathcal{V}(SaP \wedge PoS, \mathbf{D}, \varphi)$, е.т.е. (по определению υ_1) $\mathcal{V}(\upsilon_1(S2P), \mathbf{D}, \varphi)$.

(3) $A = S3P$.

Рассматривается аналогично предыдущему случаю.

(4) $A = S4P$.

$\mathcal{V}(S4P, \mathbf{D}, \varphi)$, е.т.е. (в силу $\mathcal{V}_4$) $\varphi(S) \cap \varphi(P) \neq \varnothing$ и $\varphi(S) \setminus \varphi(P) \neq \varnothing$ и $\varphi(P) \setminus \varphi(S) \neq \varnothing$, е.т.е. (в силу $\mathcal{V}_i$ и $\mathcal{V}_o$) $\mathcal{V}(SiP, \mathbf{D}, \varphi)$ и $\mathcal{V}(SoP, \mathbf{D}, \varphi)$

и $\mathcal{V}(PoS, \mathbf{D}, \varphi)$, е.т.е. (в силу $\mathcal{V}_C$) $\mathcal{V}(SiP \wedge SoP \wedge PoS, \mathbf{D}, \varphi)$, е.т.е. (по определению υ_1) $\mathcal{V}(\upsilon_1(S4P), \mathbf{D}, \varphi)$.

(5) $A = S5P$.
$\mathcal{V}(S5P, \mathbf{D}, \varphi)$, е.т.е. (в силу $\mathcal{V}_5$) $\varphi(S) \cap \varphi(P) = \varnothing$, е.т.е (в силу $\mathcal{V}_e$) $\mathcal{V}(SeP, \mathbf{D}, \varphi)$, е.т.е. (по определению υ_1) $\mathcal{V}(\upsilon_1(S5P), \mathbf{D}, \varphi)$.

Доказательство индуктивного перехода тривиально. ■

Докажем далее, что исчисление **C4V** адекватно формализует сформулированную выше семантику локального силлогистического языка с исходными константами 1, 2, 3, 4, 5.

Теорема 5. *Для любой формулы $A \in \mathbf{L_V}$ верно, что A доказуема в* **C4V**, *е.т.е. A является* ***V****-общезначимой.*

Доказательство. Рассмотрим произвольную формулу $A \in \mathbf{L_V}$. Согласно **Утверждению 2**, A доказуема в **C4V**, е.т.е. $\upsilon_1(A)$ доказуема в **C4**. Формула $\upsilon_1(A)$ является формулой языка традиционной силлогистики (принадлежит $\mathbf{L_T}$). Поэтому, в силу **Утверждения 1**, $\upsilon_1(A)$ доказуема в **C4**, е.т.е. $\upsilon_1(A)$ **T**-общезначима. Согласно **Теореме 4**, $\upsilon_1(A)$ **T**-общезначима, е.т.е. формула A является **V**-общезначимой. Следовательно, произвольная формула $A \in \mathbf{L_V}$ доказуема в исчислении **C4V**, е.т.е. она является **V**-общезначимой. ■

Сформулируем исчисление в языке, включающем все силлогистические константы, и докажем его непротиворечивость и полноту относительно семантики универсального силлогистического языка.

Данное исчисление (назовем его **C4U**) получается из системы **C4V** за счет добавления двух новых схем аксиом:

V21. $\neg SP$;

V22. $Sx_1x_2 \ldots x_nP \equiv (Sx_1P \vee Sx_2P \vee \ldots \vee Sx_nP)$.

Понятие доказательства в **C4U** обычное.

Покажем, что множество теорем **C4U** и множество **U**-общезначимых формул равны.

Теорема 6. *Для любой формулы $A \in \mathbf{L_U}$ верно, что если A доказуема в* **C4U**, *то A является* **U***-общезначимой.*

Доказательство. Метатеорема о семантической непротиворечивости доказывается стандартным способом. Демонстрируется, что аксиомы всех типов **U**-общезначимы, а единственное правило вывода (*modus ponens*) сохраняет свойство «быть **U**-общезначимой формулой». ■

Для доказательства обратной метатеоремы предварительно обоснуем ряд вспомогательных утверждений.

Для системы **C4U** можно доказать синтаксический аналог метатеоремы об эквивалентной замене (**Теоремы 1**).

Теорема 7. *Пусть A и B — произвольные формулы из $\mathbf{L_U}$, C_A — формула данного языка с выделенным вхождением подформулы A, а C_B — формула, получающаяся в результате замены выделенного вхождения A в C_A на формулу B. Если формула $A \equiv B$ доказуема в исчислении* **C4U**, *то и формула $C_A \equiv C_B$ доказуема в нем.*

Доказательство. Исчисление **C4U** строится на базе классического исчисления высказываний. Языки этих двух систем отличаются типами простых формул, а сложные формулы определяются одинаково. Поэтому доказательство данной метатеоремы для **C4U** практически повторяет известное доказательство для классического исчисления высказываний. ■

Пусть C — произвольная формула из $\mathbf{L_U}$. Под C^+ будем понимать результат замены в C всех атомарных подформул вида SP на $S2S \wedge P2P$, а всех атомарных подформул вида $Sx_1x_2\ldots x_nP$ на $Sx_1P \vee Sx_2P \vee \ldots \vee Sx_nP$. При этом преобразовании из исходной формулы удаляются нулькомпонентная константа и все многокомпонентные константы. В составе C^+ остаются лишь однокомпонентные константы. Таким образом, $C^+ \in \mathbf{L_V}$ (оставаясь, конечно, элементом более широкого множества $\mathbf{L_U}$).

Докажем две леммы об эквивалентности C и C^+ как в семантике универсального силлогистического языка, так и в исчислении **C4U**.

Лемма 1. *Для любой формулы $C \in \mathbf{L_U}$ верно, что C и C^+ эквивалентны в семантике универсального силлогистического языка (т. е. $\mathcal{V}(C, \mathbf{D}, \varphi)$, е.т.е. $\mathcal{V}(C^+, \mathbf{D}, \varphi)$ в любой модели $\langle \mathbf{D}, \varphi \rangle$).*

Доказательство. Сначала покажем, что каждая заменяемая подформула в C преобразуется в формулу, эквивалентную ей в семантике универсального силлогистического языка.

Формулы вида SP не являются выполнимыми. Таковыми же будут и формулы вида $S2S \wedge P2P$, поскольку они значимы в модели $\langle \mathbf{D}, \varphi \rangle$, е.т.е. $\varphi(S) \subset \varphi(S)$ и $\varphi(P) \subset \varphi(P)$, а последнее неверно ни в какой модели. Поэтому SP эквивалентна $S2S \wedge P2P$.

Любая формула вида $Sx_1x_2\ldots x_nP$ эквивалентна в семантике универсального силлогистического языка формуле $Sx_1P \vee Sx_2P \vee \ldots \vee Sx_nP$ в силу условия $\mathcal{V}_M$ и условия значимости дизъюнктивных формул.

Для демонстрации семантической эквивалентности C и C^+ необходимое число раз применяем **Теорему 1**. ■

Лемма 2. *Для любой формулы* $C \in \mathbf{L_U}$ *верно, что формула* $C \equiv C^+$ *доказуема в* **C4U**.

Доказательство. Сначала нужно убедиться в том, что формулы видов $SP \equiv (S2S \wedge P2P)$ и $Sx_1x_2\ldots x_nP \equiv Sx_1P \vee Sx_2P \vee \ldots \vee Sx_nP$ доказуемы в исчислении **C4U**.

Формулы второго типа являются аксиомами этой системы (**V22**).

Построим в **C4U** доказательство формул первого типа — $SP \equiv (S2S \wedge P2P)$ (шаги, осуществляемые по производным в исчислении высказываний правилам вывода, сопровождаем в анализе отметкой «ЛВ»):

1. $S1S$;	**V12**
2. $\neg(S1S \wedge S2S)$	**V13**
3. $\neg S2S$	1, 2; ЛВ
4. $\neg(S2S \wedge P2P)$	3; ЛВ
5. $\neg SP$	**V21**
6. $SP \equiv (S2S \wedge P2P)$	4, 5; ЛВ.

Далее, используя нужное число раз **Теорему 7**, приходим к выводу о том, что формула $C \equiv C^+$ доказуема в **C4U**. ■

Докажем, наконец, полноту системы **C4U** относительно семантики универсального силлогистического языка.

Теорема 8. *Для любой формулы* $A \in \mathbf{L_U}$ *верно, что если* A *является* **U**-*общезначимой, то* A *доказуема в* **C4U**.

Доказательство. Рассмотрим произвольную формулу $A \in \mathbf{L_U}$. Допустим, что она является **U**-общезначимой.

Согласно **Лемме 1**, формула A эквивалентна в семантике универсального силлогистического языка формуле A^+. Значит, и A^+ является **U**-общезначимой.

Но формула $A^+ \in \mathbf{L_V}$, поскольку в ней содержатся только однокомпонентные константы. Условия значимости таких формул в семантике универсального языка и в семантике локального языка с исходными константами 1, 2, 3, 4, 5 совпадают. Следовательно, формула A^+ является **V**-общезначимой.

Тогда, в силу **Теоремы 5**, A^+ доказуема в исчислении **C4V**. Но **C4V** является подсистемой **C4U**, поэтому формула A^+ доказуема и в исчислении **C4U**.

Согласно **Лемме 2**, формула $A \equiv A^+$ доказуема в **C4U**. Но поскольку и A^+ является теоремой этой системы, формула A доказуема в **C4U**. ■

5. Заключение

Таким образом, мы построили язык позитивной силлогистики, в алфавите которого содержатся все силлогистические константы, трактуемые как знаки отношений между двумя непустыми множествами. Была сформулирована точная семантика для этого языка и осуществлена ее формализация. Средствами предложенной логической теории предстот решить ряд важных для общего понимания силлогистики вопросов, в частности, установить критерии полноты наборов силлогистических констант.

Одним из возможных направлений развития данного подхода является отказ от требования непустоты субъектов и предикатов категорических высказываний. В этом случае к пяти примитивным, эйлеровским отношениям между двумя непустыми множествами добавятся еще три: объемные отношения между двумя пустыми терминами, между пустым субъектом и непустым предикатом, между непустым субъектом и пустым предикатом. Появится возможность исследовать такие системы позитивной силлогистики в «локальных» языках, которые не являются дефинициально эквивалентными традиционной (системе **C4**).

Литература

Васильев, 1910 – *Васильев Н.А.* О частных суждениях, о треугольнике противоположностей, о законе исключенного четвертого // Ученые записки Казанского университета. Год 77, 1910. Кн. 10. С. 1–47.

Дубаков, Маркин, 2007 – *Дубаков Д.В., Маркин В.И.* Система силлогистики с исходными константами, соответствующими круговым диаграммам // Труды научно-исследовательского семинара Логического центра Института философии РАН. Вып. XVIII. М.: ИФ РАН, 2007. С. 63–75.

Лукасевич, 1959 – *Лукасевич Я.* Аристотелевская силлогистика с точки зрения современной формальной логики. М.: Изд-во иностр. лит-ры, 1959. 313 с.

Мчедлишвили, 1985 – *Мчедлишвили Л.И.* Реконструкция метода эктезиса и системы позитивной силлогисики // Логика Аристотеля. Материалы симпозиума. Тбилиси: Изд-во Тбилисского ун-та, 1985. С. 21–35.

Смирнов, 2002 – *Смирнов В.А.* Логические методы анализа научного знания. М.: Эдиториал УРСС, 2002. 263 с.

Venn, 1881 – *VennJ.* Symbolic Logic. London: Macmillan and Co., 1881. 446 p.

Vladimir I. Markin

Syllogistic as the logic of all relations between two non-empty sets

Vladimir I. Markin
Lomonosov Moscow State University,
27/4 Lomonosovskiy prospect, Moscow, 119991, Russian Federation.
E-mail: `markin@philos.msu.ru`

Abstract: In the paper we offer the language of positive syllogistic the alphabet of which contains all syllogistic constants. These constants are interpreted as the signs of different relationships between two non-empty sets (the extensions of general terms). Among these relationships we give accent to the relationships corresponding only to one from five Euler-Gergonne diagrams: (1) equality, (2) strict inclusion of the first set into the second, (3) strict inclusion of the second set into the first, (4) overlap, (5) exclusion. The other relationships can be represented as various combinations of Eulerian. Every constant k in the 'universal' syllogistic language is encoded with a sequence of numbers from 1 to 5 in accordance with the diagrams where the proposition of the form SkP is true. For example, the constant 12 represents the inclusion relationship of one non-empty set into another, the constant 1234 represents compatibility relationship between two non-empty sets. We formulate the set theoretical semantics based on the intuitive interpretation of syllogistic constants for this 'universal' syllogistic language. We introduce the notion of the definability of a syllogistic constant in a 'local' syllogistic language that contains only some of such constants, and the notion of the completeness of a set of initial constants in such a language. A constant k is definable in a 'local' syllogistic language iff in the language there exists a formula A that contains exactly two general terms S and P, and A is equivalent to the formula SkP in the semantics of the 'universal' syllogistic language. A set of syllogistic constants $\{k_1, k_2, \ldots, k_m\}$ is complete iff any syllogistic constant is definable in the 'local' language with the initial constants $k_1, k_2, \ldots, k_m$. As an example, we demonstrate that the sets of the initial constants of traditional syllogistic (a, e, i, o) and Venn's syllogistic (the signs of five Eulerian relationships) are complete. We construct the axiomatic calculus in the 'universal' syllogistic language and prove soundness and completeness metatheorems.

Keywords: syllogistic, syllogistic constant, formal language, semantics, definability, complete set of constants, axiomatic calcululs, soundness and completeness metatheorems

For citation: Markin V.I. "Sillogistika kak logika vsekh otnoshenii mezhdu dvumya nepustymi mnozhestvami" [Syllogistic as the logic of all relations between two non-empty sets], *Logicheskie Issledovaniya / Logical Investigations*, 2020, Vol. 26, No. 2, pp. 39–57. DOI: 10.21146/2074-1472-2020-26-2-39-57 (In Russian)

References

Vasiliev, 1910 – Vasiliev N.A. "O chastnyh suzhdeniyah, o treugol'nike protivopolozhnostej, o zakone isklyuchennogo chetvertogo" [On particular statements, on the triangle of opposition, on the law of excluded forth], in: *Uchenye zapiski Kazanskogo universiteta* Proceedings of Kazan University. Year 77, 1910. Vol. 10, pp. 1–47. (In Russian)

Dubakov, Markin, 2007 – Dubakov, D.V., Markin, V.I. "Sistema sillogistiki s ishodnymi konstantami, sootvetstvuyushimi krugovym diagrammam" [The syllogistic system with initial constants corresponding to circular diagrams], in: *Trudy nauchno-issledovatelskogo seminara Logicheskogo centra Instituta filosofii RAN* [Proceedings of scientific research seminar of Logical center Institute of Philosophy RAS]. Vol. XVIII. Moscow: Institute of Philosophy RAS, 2007, pp. 63–75. (In Russian)

Łukasiewicz, 1959 – Łukasiewicz, J. *Aristotelevskaya sillogistika s tochki zreniya sovremennoj formal'noj logiki* [Aristotile's sillogistic from the standpoint of modern formal logic]. Moscow: Foreign Literature Publ., 1959. 313 pp. (In Russian)

Mchedlishvili, 1985 – *Mchedlishvili L.I.* "Rekonstrukciya metoda ektezisa i sistemy pozitivnoj sillogisiki" [Reconstruction of ecthesis method and systems of positive syllogistic], in: *Logika Aristotelya. Materialy simpoziuma* [Aristotle's logic. Proceedings of symposium]. Tbilisi: Tbilisi University Publ., 1985, pp. 21–35. (In Russian)

Smirnov, 2002 – Smirnov, V.A. *Logicheskie metody analiza nauchnogo znaniya* [Logical methods of the analyses of scientific knowledge]. Moscow: Editorial URSS, 2002. 263 pp. (In Russian)

Venn, 1881 – Venn, J. *Symbolic Logic.* London: Macmillan and Co., 1881. 446 pp.

Логические исследования
2020. Т. 26. № 2. С. 58–86
УДК 16

Logical Investigations
2020, Vol. 26, No. 2, pp. 58–86
DOI: 10.21146/2074-1472-2020-26-2-58-86

В.И. Шалак

Сравнительный логический анализ субстанциальной и процессуальной онтологий

Владимир Иванович Шалак
Институт философии РАН.
Российская Федерация, 109240, г. Москва, ул. Гончарная, д. 12, стр. 1.
E-mail: shalack@gmail.com

Аннотация: В работах Аристотеля мы находим пример детально построенной субстанциальной онтологии, которой выпала роль философских оснований логики и всей западноевропейской науки. Исторически существовал и другой, процессуальный, взгляд на устройство окружающего мира, наиболее ярким представителем которого был Гераклит.

В настоящей публикации проведен анализ субстанциальной онтологии и предложен подход к построению процессуальной. Основными характеристиками процессов являются их длительность и направленность. Введено отношение $\boldsymbol{D}pxy$ деления по длительности процесса p на два последовательно связанных подпроцесса x и y. Сформулирован ряд интуитивно очевидных аксиом, описывающих это отношение. С помощью данного отношения определено понятие локального времени процесса, обладающего свойствами плотного линейного порядка без первого и последнего элементов.

Предметы в процессуальной онтологии понимаются как «пучки» подпроцессов. Для их характеризации вводится отношение $x \leq y$, означающее, что процесс x является подпроцессом процесса y. Это отношение обладает свойствами частичного порядка с наибольшим элементом $\boldsymbol{W}$, который понимается как глобальный процесс, представляющий мир в целом. Показано, как с помощью данного отношения можно определить основные силлогистические константы для построения рассуждений о подпроцессах.

Поскольку оба отношения описывают две стороны одной и той же онтологии, приняты дополнительные аксиомы связи между ними. Это позволило синхронизировать процессы, определив понятие глобального времени и понятие параллельных процессов.

В завершение статьи показано, как в процессуальной онтологии можно определить понятия, соответствующие понятиям индивидов и свойства процессуальной и субстанциальной онтологий.

Ключевые слова: субстанция, процесс, онтология, алгебра процессов, субстанциальная онтология, процессуальная онтология, длительность, подпроцесс, формальная философия

Для цитирования: *Шалак В.И.* Сравнительный логический анализ субстанциальной и процессуальной онтологий // Логические исследования / Logical Investigations. 2020. Т. 26. № 2. С. 58–86. DOI: 10.21146/2074-1472-2020-26-2-58-86

© Шалак В.И.

1. Введение

В конце 2018 года в публикации [Смирнов, 2019a] был поставлен вопрос о существовании особой процессуальной логики. Возможность такой логики следует из принятых в арабоязычной культуре форм умозаключений, которые опираются на процессуальное понимание окружающего мира. Возникла дискуссия на эту тему [Васильев, 2019; Лекторский, 2019; Михайлов, 2019; Солондаев, 2019; Шалак, 2019a; Шалак, 2019b], получившая продолжение в публикациях, круглых столах и выступлениях на конференциях [Смирнов, 2019b; Шалак, 2019c].

Процессуальный взгляд на окружающий мир своими корнями уходит глубоко в Античность. Наиболее ярко он был представлен в учении Гераклита, но исторически победа осталась за субстанциальной онтологией Аристотеля. Так уж случилось, что в Античности не нашлось никого, кто по своей интеллектуальной мощи был бы сравним с Аристотелем и смог в достаточной степени развить идеи Гераклита. В европейской культуре в Средние века закреплению субстанциальной онтологии способствовали тривиумы образовательной системы с обязательным преподаванием логики Аристотеля, которая была необходимым условием развития науки. Язык и общепринятые способы рассуждений сделали свое дело, отодвинув в сторону и затормозив процессуальное осмысление явлений природы.

В то же время трудно найти философа, который бы не испытал на себе очарования учения Гераклита и отрицал, что окружающий нас мир действительно наполнен изменением. Если долгое время к идее фундаментальности и вездесущности изменений обращались в основном представители школы диалектиков, то в XX веке она стала привлекать внимание более широкого круга философов [Mesle, 2007; Seibt, 2017; Неретина, Огурцов, 2014], в том числе и не чуждых логике [Whitehead, 1920; Whitehead, 1929; Rescher, 1996; Rescher, 2000].

Цель статьи — анализ логических аспектов субстанциальной онтологии и построение процессуальной, но лишь в той степени, в которой она могла бы послужить семантическим обоснованием рассуждений о процессах. Я не претендую на то, чтобы дать окончательные ответы на все вопросы, а хочу всего лишь предложить подход и набор исходных понятий для описания и анализа процессов. С чего-то нужно начать, чтобы в будущем было от чего оттолкнуться, исследуя столь интересную область.

2. Субстанциальная онтология

Успех логики Аристотеля стал возможен благодаря построенной им простой и прозрачной субстанциальной онтологии. В его учении о началах бытия на первом месте стоит категория сущности [Аристотель, 1978,

Категории, 1, 4, 25–31], которая и представляет для логики наибольший интерес.

> *Сущность, называемая так в самом основном, первичном и безусловном смысле, — это та, которая не говорится ни о каком подлежащем и не находится ни в каком подлежащем, как, например, отдельный человек или отдельная лошадь. А вторыми сущностями называются те, к которым как к видам принадлежат сущности, называемые так в первичном смысле, — и эти виды, и их роды; например, отдельный человек принадлежит к виду «человек», а род для этого вида — «живое существо». Поэтому о них говорят как о вторых сущностях, например, «человек» и «живое существо»* [Аристотель, 1978, Категории, 5, 5 11–18].

> *...все другое [помимо первых сущностей] или говорится о первых сущностях как о подлежащих, или же находится в них как в подлежащих. Поэтому, если бы не существовало первых сущностей, не могло бы существовать и ничего другого* [Аристотель, 1978, Категории, 5, 2b 3–7].

Статус существования вторых сущностей отличен от статуса первых.

> *Ничто общее не существует отдельно, помимо единичных вещей* [Аристотель, 1976, Метафизика, VII, 16, 1040b 26–27].

> *...если свойства, скажем движущееся или бледное, не существуют помимо сущностей, то бледное первее бледного человека по определению, но не по сущности: ведь оно не может существовать отдельно, а всегда существует вместе с составным целым (под составным целым я разумею здесь бледного человека)* [Аристотель, 1976, Метафизика, XIII, 3, 1077b 4–9].

В дальнейшем первые сущности стали именовать субстанциями или индивидами, а вторые сущности — просто свойствами. В переводе на язык современной логики можно сказать, что в онтологии Аристотеля существуют лишь индивиды, являющиеся носителями тех или иных не обладающих самостоятельным существованием свойств. Действительно, если обратиться к теоретико-множественным моделям логики предикатов первого порядка, их универсум состоит из индивидов. Предикатные символы языка

не являются обозначающими, так как функция интерпретации всего лишь сопоставляет им множества индивидов, являющихся носителями соответствующих свойств.

Графически эту онтологию можно представить хорошо известным рис. 1.

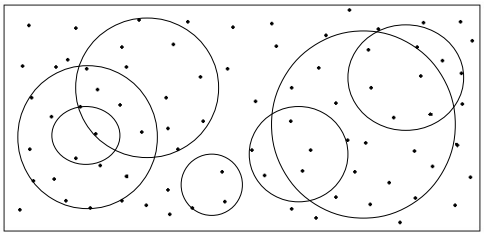


Рис. 1. Субстанциальная онтология

Точки на рисунке — это индивиды, а окружности с точками внутри — совокупности индивидов, обладающих теми или иными свойствами.

2.1. Логика субстанциальной онтологии

Такой простой картины субстанциальной онтологии достаточно, чтобы из нее вывести всю логику Аристотеля. При этом совершенно естественно возникают учения о понятиях и правилах их определения, о суждениях, о непосредственных и силлогистических умозаключениях. Правила умозаключений Аристотель обосновывает исключительно в абстрактных терминах принадлежности свойств субстанциям или отношений между их совокупностями. Получило широкое распространение мнение, будто Аристотель рассматривал отношение между субъектом и предикатом суждения исключительно в терминах присущности предиката субъекту.

> *Формулируя силлогизмы с помощью букв, Аристотель всюду ставит предикат на первое место, а субъект — на второе. Он нигде не говорит «Всякое B есть A», а употребляет вместо этого выражение «A высказывается обо всяком B» или, чаще, «A присуще всякому B»* [Лукасевич, 2000, с. 36–37].

Но это не так. Уже в первой главе первой книги Первой аналитики Аристотель пишет следующее:

> *«Одно целиком содержится в другом» означает то же, что «другое сказывается о первом». А «[одно] сказывается обо*

> *всем [другом]» мы говорим, когда не может быть найдено что-либо из того, что принадлежит подлежащему, о чем другое не сказывалось бы. И точно так же, когда говорим «не сказывается ни об одном»* [Аристотель, 1978, Первая аналитика, Кн. 1, Гл. I, 24b 27–30]

Из двух равноправных вариантов Аристотель выбрал один и следовал ему, но это ни в коем случае не означает, что второй вариант, экстенсиональное понимание отношения между субъектом и предикатом, был ему чужд.

Для описания отношений между выделенными совокупностями субстанций можно использовать хорошо известные операции алгебры множеств — пересечение $S \cap P$, объединение $S \cup P$ и относительное дополнение $S \backslash P$. Их достаточно, чтобы определить отношение включения $S \subseteq P$ и задать интерпретацию категорических атрибутивных суждений. Если в суждениях фиксируются отношения между отдельными совокупностями субстанций, то правила умозаключений позволяют переходить от одних суждений к другим, связывая разрозненные свойства в единую систему. Тем самым логика Аристотеля вполне подходит для изучения мира, описываемого в терминах субстанциальной онтологии.

Современная классическая логика опирается на эту же онтологию, но дополненную отношениями между индивидами. Примерами таких отношений являются «*x больше y*», «*x находится между y и z*» и др. Подкванторные переменные в выражениях, начинающихся с «*для всякого x...*» или «*для некоторого x...*», пробегают по тем же индивидам/субстанциям.

Эта онтология получила дальнейшее развитие. Именно от нее произошла теория множеств, рассматриваемая в качестве оснований для всей математики, используя которую, мы неявно принимаем и субстанциальный взгляд на окружающий мир.

Одним из недостатков субстанциальной онтологии является то, что в ней нет времени. Единственный способ привнести его — это постулировать внешним образом. Отсюда появляются экзотические философские учения, согласно которым в каждое мгновение мир исчезает и измененный рождается вновь. В такой кинематографической картине мира высокая частота смены кадров создает иллюзию непрерывности изменений, что изображено на рис. 2.

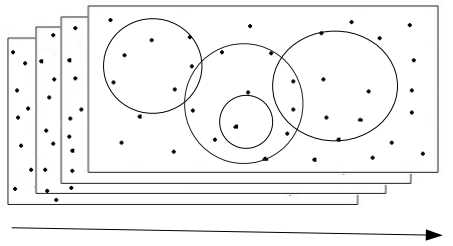


Рис. 2. Время в субстанциальной онтологии

Резюмируя, перечислим основные характеристики субстанциальной онтологии, которые играют важную роль в обосновании способов рассуждения о ней:

- множественность субстанций;
- свойства, существующие посредством субстанций;
- время как последовательность состояний мира.

2.2. Проблемы, порождаемые субстанциальной онтологией

Основные проблемы субстанциальной онтологии связаны с необходимостью редукции непрерывных объектов к совокупностям специальным образом упорядоченных индивидов. Внешнее по отношению к субстанциальной онтологии время вынуждает редуцировать все природные процессы к наборам последовательных состояний. В современной временной логике оно представлено в виде специальных отношений достижимости на возможных мирах. При техническом удобстве это порождает целый ряд философских проблем.

2.2.1. Отождествление предметов в различные моменты времени

Субстанции — это просто носители свойств. Если уникальность отдельных предметов заключается в уникальности тех наборов свойств, которыми они обладают, то на каком основании мы отождествляем предметы, например некоторого человека, в последовательные моменты времени? Очевидно, что *я сегодня* отличен от *меня вчерашнего* и тем более от *меня год назад*. Эти отличия касаются как состояния моей памяти, так и чисто внешних изменений. В современной модальной логике эта далекая от разрешения проблема получила название *кроссидентификации индивидов* в возможных мирах.

2.2.2. Проблема причинной связи

Еще одна хорошо известная философам проблема — это рассмотренная Юмом проблема причинной связи. Если изменение во времени — это

просто упорядоченная последовательность различных состояний, то на каком основании мы можем говорить о существовании причинной связи? Она оказывается не более чем привычкой наблюдать одни и те же кадры кинематографической последовательности.

2.2.3. Редукция непрерывных объектов

Еще на одну проблему обратил внимание К. Гёдель [Патнем, Кетнер, 2005, с. 49–51].

Интерпретируя объекты геометрии в терминах множеств действительных чисел, мы можем найти середину геометрического отрезка, но не можем разделить его на два равных. Равные отрезки должны быть изоморфны, но точка (действительное число), в которой мы хотим разрезать исходный отрезок, будет принадлежать лишь одной из двух его половинок, а вторая половинка вообще не будет иметь ограничивающей ее точки, что не позволит установить требуемый изоморфизм.

Напомним, как это делается в терминах действительных чисел. Дан числовой отрезок $[a; b]$. Его середина — это точка $c = (a+b)/2$. При попытке дихотомического деления в ней мы получим либо отрезок $[a; c]$ и полуинтервал $(c; b]$, либо полуинтервал $[a; c)$ и отрезок $[c; b]$, между которыми нельзя установить изоморфизм. Деление числового отрезка ни у кого не вызывает сомнений, но его геометрический смысл порождает проблемы. Более того, возникает проблема и с измерением посредством откладывания отрезка единичной длины, так как из двух отрезков, интерпретируемых в терминах действительных чисел, нельзя сложить новый, что противоречит чисто геометрическому пониманию операции.

Прямые евклидовой геометрии подразделяют на отрезки (ограниченные с двух концов точками), лучи (ограниченные точкой с одного конца и бесконечные в другую сторону) и прямые, бесконечные в обе стороны. Очевидно, что одна из половинок нашего отрезка вообще не попадает в эту классификацию и потому не является стандартным геометрическим объектом.

2.2.4. Определение объектов

Субстанциальная онтология адекватна многим математическим теориям, объекты которых статичны. В случае же попыток описать реальные объекты окружающего мира мы сталкиваемся с ее ограниченностью. Сравним следующие определения.

1. *Человек — это двуногое и бесперое.*
2. *Человек — это политическое животное.*
3. *Человек — животное, способное производить орудия труда.*
4. *Человек — животное, наделенное членораздельной речью.*

Первое определение может быть осмысленно в субстанциальной онтологии, поскольку в определяющей части перечисляются свойства, присущие человеку как индивиду. Наличие перечисленных легко зафиксировать на мгновенной фотографии человека.

Второе определение очевидным образом процессуально, поскольку быть политическим животным означает участвовать в жизни полиса, что является не свойством, а процессуальной характеристикой, которую невозможно отобразить ни на какой фотографии. Аналогичные замечания справедливы и для определений человека как животного, способного производить орудия труда или наделенного членораздельной речью. И таких примеров много. Нам никуда не деться от процессуальности окружающего мира, поскольку многие его объекты мы можем определить и изучать лишь посредством указания на соответствующие процессуальные характеристики.

3. Процессуальная онтология

Исторически проигравшим конкурентом во взглядах на окружающий мир оказалась процессуальная онтология, получившая выражение в трудах Гераклита с его знаменитым: *«Этот космос, один и тот же для всех, не создал никто из богов, никто из людей, но он всегда был, есть и будет вечно живой огонь, мерно возгорающийся, мерно угасающий»* [Гераклит, 1989, с. 217].

Процессуальный подход мог бы вступить в равноправную конкуренцию с субстанциальным лишь в том случае, если бы удалось построить интуитивно понятную модель процессуальной онтологии, которая послужила бы обоснованию семантики языка для описания процессов и логики для рассуждений о них.

3.1. Отличительные черты процессуальной онтологии

Субстанции, или индивиды, сами по себе не обладают никакими характеристиками, они логически нульмерны. Их единственное назначение — быть носителями свойств и находиться в отношениях с другими индивидами. Если посмотреть на мир вокруг нас глазами последователей Гераклита, все, что попадает в поле нашего восприятия, является процессом. Нет ничего неизменного. Пусть медленно, но изменяют свои очертания горы, текут реки, растут и умирают деревья, копошатся люди, возникают, расцветают и гибнут государства. Отличительными чертами увиденного являются *множественность* процессов, их *длительность (протяженность во времени)* и *направленность*. Эти характеристики можно условно изобразить на рис. 3.

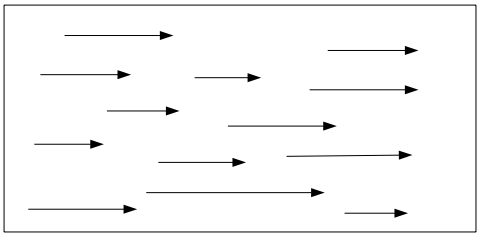


Рис. 3. Процессуальная онтология

Будем считать этот рисунок первым абстрактным приближением к процессуальной модели окружающего мира. Наша задача — описать ее, взяв в качестве исходного понятие процесса, а не индивида и свойств. Тем самым мы изначально лишим себя возможности редуцировать понятие процесса к чему-то другому.

Подходящим вариантом языка для анализа процессов мог бы стать язык алгебры, который позволяет описывать объекты через их «взаимодействие» с другими объектами. Если обратиться к литературе, не составит большого труда обнаружить много публикаций, посвященных алгебрам процессов [Baeten, 2005; Fokkink, 2007]. Однако их общим недостатком является то, что они разрабатывались для описания вычислительных процессов в компьютерах, а не естественных процессов в природе. Вычислительные процессы интерпретировались как отображения множества всех возможных состояний вычислительной системы в себя. Это позволяло рассматривать операции над ними, как всюду определенные. Для любых двух вычислительных процессов P и Q определены и имеют семантическое значение термы *(P;Q)* и *(Q;P)*, представляющие их последовательное выполнение. Если последовательными подпроцессами моей жизни являются процессы *обучения в школе* и *обучения в вузе* с некоторым временным промежутком между ними, то в алгебре процессов одновременно осмыслены термы *(обучение в школе; обучение в вузе)*, *(обучение в вузе; обучение в школе)* и *(обучение в школе; обучение в школе;. . . ; обучение в школе)*, что плохо согласуется с нашим интуитивным пониманием процессов.

Чтобы применить алгебраический подход к природным процессам, нужно перейти или к частичным операциям, что значительно усложнит язык, или к трехзначной (как минимум) логике, чтобы иметь возможность приписывать языковым выражениям значение «*не определено*», а это тоже создаст дополнительные трудности.

Мы не можем уйти от использования естественного языка в качестве метаязыка для первоначального описания и анализа процессов. В тех

случаях, когда требуется повышенная строгость формулировок, дополним его символикой логики предикатов в качестве сокращений для выражений естественного языка. Символы «$\forall$», «$\exists$» и «$\exists!$» будут замещать выражения «*для всякого*», «*найдется*» и «*найдется единственный*», а символы «$\Rightarrow$», «&», «$\vee$» — союзы «*если..., то...*», «*и*», «*или*». Вместо языкового отрицания будем использовать символ отрицания «$\neg$».

Дальнейшее изложение не является аксиоматизацией процессуальной онтологии, а должно рассматриваться с точки зрения формальной философии как попытка зафиксировать в языке и исследовать некоторые ее базисные характеристики.

3.2. Длительность процессов

Можно ли говорить о длительности чего-то, не предполагая хотя бы мысленной возможности разделить это что-то на части? Мы делим историю Земли на геологические эпохи, историю западной цивилизации — на историю до Р.Х. и после Р.Х. Свою жизнь мы делим на периоды до и после чего-то. Возможность такого деления содержится в нашем интуитивном понимании непрерывности времени.

Чтобы зафиксировать возможность деления процессов, введем в язык специальный символ $\boldsymbol{D}$ (от первой буквы английского слова «***D**ivide*»). Если P, Q и R — символы языка, представляющие процессы, то $\boldsymbol{D}PQR$ будет означать, что процесс P можно разделить на два последовательно связанных подпроцесса Q и R, как это условно показано на рис. 4.

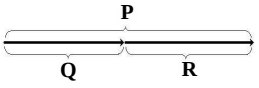


Рис. 4. Деление процесса P на последовательные подпроцессы Q и R

Поскольку в онтологии процессов все есть процесс, то это деление может быть продолжено до бесконечности. Поэтому мы принимаем первую аксиому, которая гласит, что любой процесс может быть разделен на два подпроцесса. На языке логики предикатов она будет выглядеть следующим образом:

Ax.1 $\quad \forall p \exists x \exists y \boldsymbol{D}pxy$

Если мы интуитивно ассоциируем направленность процессов с их протеканием во времени, то в случае деления $\boldsymbol{D}PQR$ было бы естественным сказать, что подпроцесс Q предшествует подпроцессу R, и идею направленности процессов выразить через асимметричность деления. Это и будет содержанием второй аксиомы.

Ax.2 $\quad \boldsymbol{D}pxy \Rightarrow \neg \boldsymbol{D}pyx$

Необходимо обратить внимание на то, что понятие времени в аксиоме никак не фигурирует. Оно лишь на уровне интуиции мотивировало ее принятие.

Любой процесс полностью определяется частями, на которые его можно разделить. Представим, что p — это процесс чтения книги, а x и y — части этого процесса до прочтения какой-то страницы и после нее. Очевидно, что будут выполняться следующие аксиомы:

Ax.3 $\boldsymbol{D}pxy \;\&\; \boldsymbol{D}qxy \Rightarrow p{=}q$
Ax.4 $\boldsymbol{D}pxy \;\&\; \boldsymbol{D}pzy \Rightarrow x{=}z$
Ax.5 $\boldsymbol{D}pxy \;\&\; \boldsymbol{D}pxz \Rightarrow y{=}z$

Представим процесс чтения книги из трех глав. Его можно разбить на чтение первых двух глав, а затем третьей, а можно — на чтение первой главы, а потом двух последних. Это свойство ассоциативности деления процессов. Для большей наглядности это легко изобразить на рис. 5 и рис. 6.

Ax.6 $\boldsymbol{D}pxy \;\&\; \boldsymbol{D}xzu \Rightarrow \exists v(\boldsymbol{D}pzv \;\&\; \boldsymbol{D}vuy)$

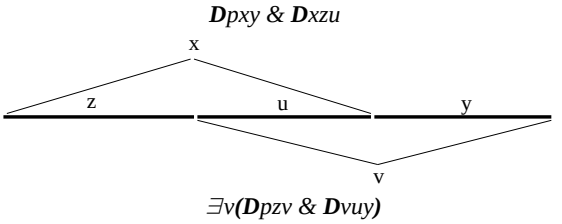


Рис. 5. Ассоциативность деления

Ax.7 $\boldsymbol{D}pxy \;\&\; \boldsymbol{D}yzu \Rightarrow \exists v(\boldsymbol{D}pvu \;\&\; \boldsymbol{D}vxz)$

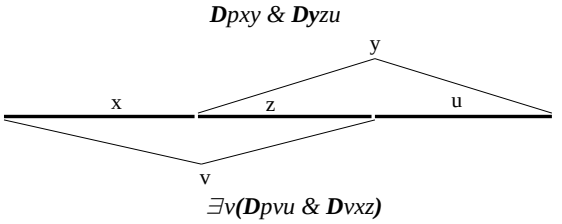


Рис. 6. Ассоциативность деления

В последней аксиоме перечисляются все случаи, как могут соотноситься результаты двух делений $\boldsymbol{D}pxy$ и $\boldsymbol{D}pzu$ одного и того же процесса p.

Ax.8 $\boldsymbol{D}pxy \ \& \ \boldsymbol{D}pzu \Rightarrow \exists v(\boldsymbol{D}zxv \ \& \ \boldsymbol{D}yvu) \vee \exists v(\boldsymbol{D}xzv \ \& \ \boldsymbol{D}uvy) \vee (x{=}z \ \& \ y{=}u)$

Это тоже легко проиллюстрировать на рис. 7.

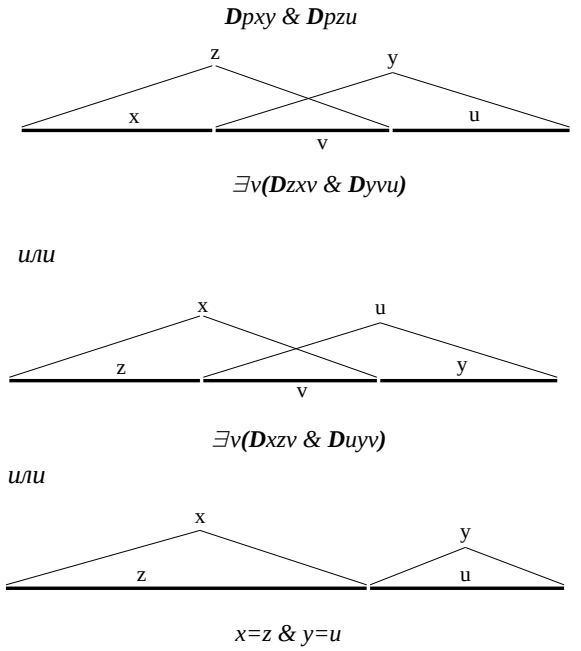


Рис. 7. $\boldsymbol{D}pxy$ и $\boldsymbol{D}pzu$ — два варианта деления процесса p

Принятых аксиом достаточно для описания базовых характеристик того, что мы будем понимать под длительностью процессов. Может показаться, что мы предлагаем понимать процессы детерминистически. Но это не так. Аксиомы *Ax.1–Ax.8* вовсе не исключают «*ветвления*» процессов, как влево, так и вправо, что условно изображено на рис. 8.

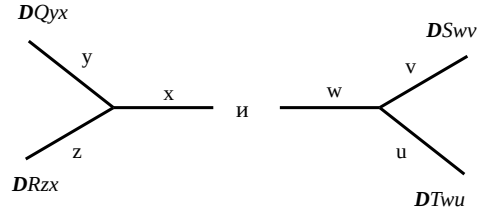


Рис. 8. Возможные конфигурации процессов

Возможно, для решения конкретных задач понадобятся дополнительные аксиомы, но не следует принимать их раньше времени, поскольку наша цель — поиск универсальных характеристик процессуальной онтологии.

Определим полезные вспомогательные отношения с естественным содержательным истолкованием.

Def.1 $\boldsymbol{L}px \Leftrightarrow_{def} \exists y \boldsymbol{D}pxy$ – x является левой частью процесса p.

Def.2 $\boldsymbol{R}px \Leftrightarrow_{def} \exists y \boldsymbol{D}pyx$ – x является правой частью процесса p.

Def.3 $\boldsymbol{P}px \Leftrightarrow_{def} x = p \vee \boldsymbol{L}px \vee \boldsymbol{R}px \vee \exists z(\boldsymbol{R}pz \ \& \ \boldsymbol{L}zx)$ — x является частью процесса p.

Сразу заметим, что в силу *Ax.1* у каждого процесса существует бесконечно много левых и правых частей. В следующей лемме приведем без доказательства ряд полезных свойств рассмотренных нами отношений.

Лемма 1. *Отношения* $\boldsymbol{D}$, $\boldsymbol{L}$, $\boldsymbol{R}$ *и* $\boldsymbol{P}$ *обладают следующими свойствами:*

(1) $\boldsymbol{D}pxy \Rightarrow p \neq x \ \& \ p \neq y$ *— члены деления процесса* p *с ним не совпадают;*

(2) $\boldsymbol{L}yx \ \& \ \boldsymbol{L}xz \Rightarrow \boldsymbol{L}yz$ *— транзитивность отношения* $\boldsymbol{L}$*;*

(3) $\boldsymbol{R}yx \ \& \ \boldsymbol{R}xz \Rightarrow \boldsymbol{R}yz$ *— транзитивность отношения* $\boldsymbol{R}$*;*

(4) $\boldsymbol{P}px \ \& \ \boldsymbol{P}xy \Rightarrow \boldsymbol{P}py$ *— транзитивность отношения* $\boldsymbol{P}$*;*

(5) $\boldsymbol{L}px \ \& \ \boldsymbol{L}py \Rightarrow \boldsymbol{L}xy \vee \boldsymbol{L}yx \vee x{=}y$ *— если* x *и* y *левые части процесса* p*, то или одна из них является левой частью другой, или они совпадают;*

(6) $\boldsymbol{R}px \ \& \ \boldsymbol{R}py \Rightarrow \boldsymbol{R}xy \vee \boldsymbol{R}yx \vee x{=}y$ *— если* x *и* y *правые части процесса* p*, то или одна из них является правой частью другой, или они совпадают.*

3.3. Локальное время

Как уже было сказано, любой процесс Q характеризуется длительностью, которую мы на уровне интуиции ассоциируем с протяженностью во времени. Это предполагает возможность связать с ним понятие локального времени. Есть, по крайней мере, два способа это сделать.

Первый способ заключается в том, чтобы определить моменты времени, как пределы бесконечных последовательностей *сужающихся* процессов по аналогии с тем, как это делается при определении действительных чисел через сходящиеся последовательности. Для этого достаточно определить отношение $x > y \Leftrightarrow_{def} (\boldsymbol{P}xy \ \& \ x \neq y)$ и с его помощью задать семейство $M(Q)$ всех множеств S, удовлетворяющих следующим условиям:

1. $Q \in S$ *— непустота* S*;*
2. $x > y \vee y > x \vee x = y$ *— линейность;*
3. $\forall x \in S(Q > x)$ *—* Q *является первым элементом;*
4. $\forall x \in S \exists y \in S(x > y)$ *— не существует последнего элемента.*

Каждое множество S можно изобразить, как на рис. 9, в виде бесконечного конуса процессов, упорядоченных отношением быть собственной частью предыдущего.

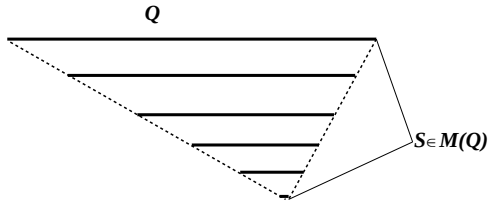


Рис. 9. Момент времени

После этого на $M(Q)$, элементы которого и будут выступать в роли абстрактных моментов времени, можно определить отношение порядка, понимая под ним отношение «раньше-позже» локального времени процесса Q. Полезно сравнить такое определение моментов времени с методом «*extensive abstraction*» Уайтхеда [Whitehead, 1920, p. 74–98].

Второй способ более прост. Он заключается в том, чтобы в качестве моментов времени рассматривать не бесконечные множества сужающихся процессов, а пары $< x, y >$, являющиеся результатами деления $\boldsymbol{D}Qxy$ процесса Q, интуитивно ассоциируя их с отношением «*x раньше y*» между подпроцессами x и y. При таком понимании настоящее — это всего лишь оборот речи, не обладающая самостоятельным существованием абстракция перехода от прошлого к будущему. Поскольку правый член деления в силу *Ax.5* функционально зависит от Q и x, то он избыточен, и мы можем вместо пары $< x, y >$, удовлетворяющей условию $\boldsymbol{D}Qxy$, использовать ее левый член x, который удовлетворяет условию $\boldsymbol{L}Qx$. После этого отношение локального временного порядка на моментах времени можно определить следующим образом:

Def.4 $\quad x \ll_Q y \;\Leftrightarrow_{def}\; \boldsymbol{L}Qx \,\&\, \boldsymbol{L}Qy \,\&\, \boldsymbol{L}yx$

Лемма 2. *Для фиксированного процесса Q отношение «$\ll_Q$» является бесконечным плотным линейным порядком без первого и последнего элементов, т. е. удовлетворяет следующим условиям:*

(1) $\neg(x \ll_Q x)$ — *иррефлексивность;*
(2) $x \ll_Q y \,\&\, y \ll_Q z \Rightarrow x \ll_Q z$ — *транзитивность;*
(3) $x \ll_Q y \;\vee\; y \ll_Q x \;\vee\; x = y$ — *линейность;*
(4) $x \ll_Q y \Rightarrow \exists z(x \ll_Q z \,\&\, z \ll_Q y)$ — *плотность;*
(5) $\forall x \exists y(x \ll_Q y)$ — *нет последнего элемента;*
(6) $\forall x \exists y(y \ll_Q x)$ — *нет первого элемента.*

3.4. Подпроцессы

Отдельные предметы — это, по выражению Н. Решера [Rescher, 2000, с. 9], пучки составляющих их подпроцессов. В отдельном человеке, как в процессе, мы можем выделить подпроцессы физического животного существования от рождения до смерти, интеллектуального развития, семейной жизни, работы и пр. В процессе физического существовании можно выделить подпроцессы пищеварения, дыхания, кровообращения и пр. Семейная жизнь включает подпроцесс воспитания детей, а процесс работы включает подпроцессы работы в разных местах, на разных должностях и пр. Поэтому рис. 3, изображающий мир процессуальной онтологии, должен быть дополнен, как на рис. 10.

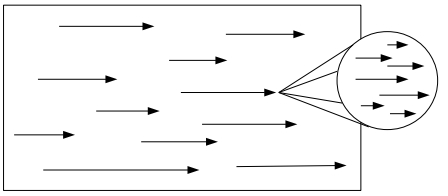


Рис. 10. Предметы, как пучки процессов

В качестве наглядной аналогии процесса представим себе шерстяную нить. Физическую протяженность нити будем понимать как длительность процесса во времени. Нить сплетена из многих волосков шерсти. Волоски имеют меньшую длину, чем нить, но образуют ее, будучи тесно переплетены между собой. Многочисленные нити, в свою очередь, могут быть переплетены в веревку, веревки — в канат и т. д. Волоски, нити, веревки, канаты — это наглядные аналоги предметов процессуальной онтологии как пучков процессов.

Наша задача — описать пучки процессов и отношения между ними. Выберем символ «$\leq$» для обозначения отношения «*быть подпроцессом*».

Вспомним слова Гераклита о мире в целом, как вечно живом огне, и введем для его обозначения константу $\boldsymbol{W}$ (от первой буквы английского слова «$\boldsymbol{W}orld$»). Все процессы являются подпроцессами глобального процесса $\boldsymbol{W}$, и можно сказать, что наше исследование — это исследование его внутренней структуры.

Ax.9 $x \leq \boldsymbol{W}$ — $\boldsymbol{W}$ наибольший элемент.

Примем три аксиомы частичного порядка, которым должно удовлетворять отношение «*быть подпроцессом*».

$Ax.10$ $x \leq x$ — рефлексивность.
$Ax.11$ $x \leq y \,\&\, y \leq z \Rightarrow x \leq z$ — транзитивность.
$Ax.12$ $x \leq y \,\&\, y \leq x \Rightarrow x = y$ — антисимметричность.

Полезным является отношение «*быть собственным подпроцессом*», которое мы обозначим «$\subset$» и определим следующим образом:

$Def.5$ $x \subset y \Leftrightarrow_{def} (x \leq y \;\&\neg\exists z(z \leq x \& \boldsymbol{P}yz))$

Собственные подпроцессы — это процессы более низкого уровня. В качестве примеров собственных подпроцессов человека можно привести процессы его дыхания, кровообращения и интеллектуального развития.

С помощью отношения «*быть подпроцессом*» мы можем определить в метаязыке основные логические константы для построения силлогистических рассуждений о предметах как пучках процессов.

Def.6

1. $S\boldsymbol{a}P \Leftrightarrow_{def} S \leq P$ — S является подпроцессом P
2. $S\boldsymbol{i}P \Leftrightarrow_{def} \exists x(x \leq S \,\&\, x \leq P)$ — процессы S и P сравнимы
3. $S\boldsymbol{e}P \Leftrightarrow_{def} \neg S\boldsymbol{i}P$ — процессы S и P несравнимы
4. $S\boldsymbol{o}P \Leftrightarrow_{def} \neg S\boldsymbol{a}P$ — S не является подпроцессом P

Легко проверить, что мы получим расширенную силлогистику Лукасевича, дополненную аксиомой для наибольшего элемента $\boldsymbol{W}$:

1. $M\boldsymbol{a}P \;\&\; S\boldsymbol{a}M \Rightarrow S\boldsymbol{a}P$ — *Barbara*
2. $M\boldsymbol{a}P \;\&\; M\boldsymbol{i}S \Rightarrow S\boldsymbol{i}P$ — *Datisi*
3. $S\boldsymbol{a}S$
4. $S\boldsymbol{i}S$
5. $S\boldsymbol{a}\boldsymbol{W}$

Возможны и другие определения силлогистических констант, но мы не будем специально останавливаться на этом. Важно лишь отметить, что переход к процессуальной онтологии вовсе не влечет за собой категорического отказа от всех достижений логики, разработанной в рамках субстанциальной онтологии. Это просто два взаимодополняющих взгляда на один и тот же окружающий нас мир. При этом смысл суждений может изменяться.

Представление о предметах как пучках процессов позволяет определить между ними отношения в смысле модальностей *de re*. Например, физические предметы, которые отражают свет, обладают цветом, и в этом смысле он является их необходимой характеристикой. Любой помидор обладает цветом, который в процессе созревания изменяется от зеленого через оттенки желтого к красному. Конкретный цвет не является необходимой характеристикой предметов, даже если сопровождает их на протяжении всего существования. Эти и другие подобные наблюдения приводят к определению, что подпроцесс Q является необходимым подпроцессом процесса R,

если и только если он является собственным подпроцессом R, т. е. $Q \subset R$, и совпадает с R по длительности. Требование быть собственным подпроцессом призвано исключить закон тождества для *de re* модальностей. Совпадение по длительности можно понимать в том смысле, что наименьшая по длительности часть процесса R, которая содержит в качестве подпроцесса процесс Q, должна совпадать с R. Это и зафиксировано в следующем определении.

$Def.7 \quad x \blacktriangleleft y \Leftrightarrow_{def} x \subset y \,\&\, \forall z(\boldsymbol{P}yz \,\&\, x \subset z \Rightarrow z = y)$

Если говорить об акцидентальном отношении между Q и R, его можно понимать в том смысле, что Q является собственным подпроцессом R, но не совпадает с ним по длительности, т. е. является собственным подпроцессом некоторой левой или правой части R.

$Def.8 \quad x \lhd y \Leftrightarrow_{def} \exists z((\boldsymbol{L}yz \vee \boldsymbol{R}yz) \,\&\, x \subset z)$

В будущем интересно было бы исследовать, насколько хорошо отношение $x \blacktriangleleft y$ выражает идею необходимой, а $x \lhd y$ — акцидентальной присущности в смысле *de re*.

3.5. Аксиомы связи

Для описания онтологии процессов мы используем два отношения — отношение *деления процессов по длительности* и отношение *быть подпроцессом*. Пока что они никак не связаны между собой, хотя и характеризуют две стороны одной и той же онтологии. Наша следующая задача — установить эту связь.

Вспомним слова Гераклита о том, что в одну и ту же реку нельзя войти дважды, учитывая на всякий случай, что текущая река — это всего лишь образ длящегося во времени процесса. Если разделить процесс P на два последовательно связанных процесса Q и R, то они являются подпроцессами основного процесса P, которые дизъюнктны между собой. Дизъюнктность понимается в том смысле, что не существует никакого общего для них подпроцесса. Это и будет содержанием следующей аксиомы.

$Ax.13 \quad \boldsymbol{D}pxy \Rightarrow (x \leq p \,\&\, y \leq p \,\&\, \neg\exists z(z \leq x \,\&\, z \leq y))$

В разделе 3.3 для каждого процесса мы определили свой локальный временной порядок *раньше-позже*. В случае единства онтологии все эти порядки должны быть как-то связаны между собой.

Пусть нам даны такие два процесса x и y, что $x \leq y$. Представим, что мы разделили $\boldsymbol{D}xx_1x_2$ процесс x на два последовательных подпроцесса x_1 и x_2. Естественно ожидать, что это деление может быть продолжено на процесс y таким образом, что $\boldsymbol{D}yy_1y_2$, $x_1 \leq y_1$ и $x_2 \leq y_2$. Можно сказать, что деление подпроцесса x индуцирует (влечет) деление процесса y.

Для наглядности изобразим на рис. 11 процессы x и y в виде двух отрезков один под другим. Отношение $x \leq y$ представлено тем, что отрезок x на рисунке находится ниже отрезка y. Вертикальная стрелка символизирует продолжение деления подпроцесса x на процесс y.

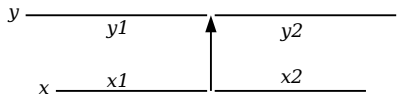


Рис. 11. Деление процесса x индуцирует деление y

Определим отношение $x \uparrow y$ — «*деление процесса x индуцирует деление процесса y*».

$$Def.9 \quad x \uparrow y \Leftrightarrow_{def} \forall x_1 \forall x_2 (\boldsymbol{D}xx_1x_2 \Rightarrow \exists! y_1 \exists! y_2 (\boldsymbol{D}yy_1y_2 \,\&\, x_1 \leq y_1 \,\&\, x_2 \leq y_2))$$

Пусть опять $x \leq y$, но теперь нас интересует, как деление $\boldsymbol{D}yy_1y_2$ процесса y на y_1 и y_2 может повлиять на деление x? Вспомним шерстяную аналогию с нитями и веревками. Мы разрезаем веревку y на две части y_1 и y_2. Поскольку нити, из которых сплетена веревка, как правило, имеют меньшую длину, чем она, то может оказаться, что разрез веревки вообще никак не затронул некоторых нитей. В результате они в первоначальном неразрезанном виде сохраняются или в y_1, или в y_2. Другие же нити оказываются разрезанными на части x_1 и x_2 таким образом, что одна половинка x_1 оказывается теперь в левой половинке веревки y_1, а другая x_2 — в правой y_2. Это условно изображено на рис. 12.

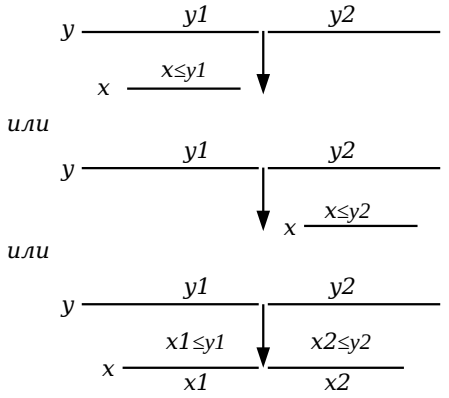


Рис. 12. Как деление процесса y может повлиять на деление процесса x

Нас интересует третий случай. Определим отношение $x \downarrow y$ — «*деление процесса x подчинено делению y*».

$Def.10 \quad x \downarrow y \Leftrightarrow_{def} \forall y_1 \forall y_2 (\boldsymbol{D} y y_1 y_2 \Rightarrow \exists! x_1 \exists! x_2 (\boldsymbol{D} x x_1 x_2 \,\&\, x_1 \leq y_1 \,\&\, x_2 \leq y_2))$

Последняя недостающая аксиома выглядит следующим образом:

$Ax.14 \quad x \leq y \Rightarrow \exists w (\boldsymbol{P} y w \;\; \& \; x \uparrow w \,\&\, x \downarrow w)$

Она говорит, что процесс x является подпроцессом y, е.т.е. существует такая часть w процесса y, что деление процесса x индуцирует деление w, и деление x подчинено делению w. Это условно показано на рис. 13.

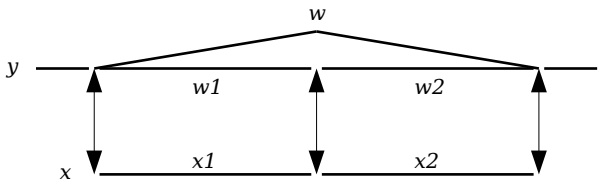


Рис. 13. Иллюстрация аксиомы 14

Заметим, что аксиому *Ax.14* нельзя превратить в определение отношения «$\leq$», так как оно входит не только в левую, но и в правую часть благодаря определениям *Def.9* и *Def.10*.

Определим еще одно полезное отношение $x|y$ — «*x является подпроцессом y равной с ним длительности*».

$Def.11 \quad x|y \Leftrightarrow_{def} x \leq y \,\&\, \forall z (\boldsymbol{P} y z \;\; \& \; x \leq z \Rightarrow y = z)$

Это определение отличается от *Def.7* лишь тем, что в правой части вместо «$\subset$» стоит «$\leq$», т. е. процесс x необязательно является собственным подпроцессом y, а может и совпадать с ним.

В следующей лемме более полно раскрывается смысл аксиомы *Ax.14*.

Лемма 3. *Пусть даны утверждения A, B и C:*

A. $x \leq y \Rightarrow \forall x_1 \forall x_2 (\boldsymbol{D} x x_1 x_2 \Rightarrow \exists! y_1 \exists! y_2 (\boldsymbol{D} y y_1 y_2 \,\&\, x_1 \leq y_1 \,\&\, x_2 \leq y_2))$

B. $x \leq y \Rightarrow \forall y_1 \forall y_2 (\boldsymbol{D} y y_1 y_2 \Rightarrow x \leq y_1 \vee x \leq y_2 \vee \exists! x_1 \exists! x_2 (\boldsymbol{D} x x_1 x_2 \,\&\, x_1 \leq y_1 \,\&\, x_2 \leq y_2))$

C. $x \leq y \Rightarrow \exists w (\boldsymbol{P} y w \,\&\, x|w)$

Обозначим посредством символа «$\vdash$» выводимость из $Ax.1 - Ax.13$. Тогда имеют место следующие утверждения:

(1) *Ax.14* $\vdash$ *A;*

(2) *Ax.14* $\vdash$ *B;*

(3) $Ax.14 \vdash C$;
(4) $A,\ B,\ C \vdash Ax.14$.

3.6. Глобальное время в онтологии процессов

В разделе 3.3 мы показали, каким образом для любого процесса Q можно определить двухместное отношение «$\ll_Q$», которое можно понимать как отношение локального временного порядка.

Поскольку $\boldsymbol{W}$ также является процессом, мы и для него можем определить отношение «$\ll_W$».

$Def.12 \quad x \ll_W y \Leftrightarrow_{def} \boldsymbol{LW}x \ \&\ \boldsymbol{LW}y \ \&\ \boldsymbol{L}yx$

Пусть теперь нам даны два произвольных процесса Q и R и их деления $\boldsymbol{D}Qq_1q_2$, $\boldsymbol{D}Rr_1r_2$. В этом случае в силу аксиом *Ax.9*, *Ax.14* и пункта *(1)* Леммы 3 существуют такие единственные деления $\boldsymbol{DW}w_{q1}w_{q2}$ и $\boldsymbol{DW}w_{r1}w_{r2}$ процесса $\boldsymbol{W}$, что $q_1 \leq w_{q1}$, $q_2 \leq w_{q2}$, $r_1 \leq w_{r1}$ и $r_2 \leq w_{r2}$. Это дает возможность следующим образом определить глобальное отношение временного порядка:

$Def.13 \quad q_1 \ll r_1 \Leftrightarrow_{def} w_{q1} \ll_W w_{r1} \ \&\ Dfn(q_1, r_1, w_{q1}, w_{r1}),$

где $Dfn(q_1, r_1, w_{q1}, w_{r1})$ в правой части определения – это формальное сокращение для сказанного в предыдущем абзаце, т. е. $\exists q \exists r \exists q_2 \exists r_2 (\boldsymbol{D}qq_1q_2 \ \&\ \boldsymbol{D}rr_1r_2 \ \&\ \exists w_{q2} \exists w_{r2} (\boldsymbol{DW}w_{q1}w_{q2} \ \&\ q_1 \leq w_{q1} \ \&\ q_2 \leq w_{q2} \ \&\ \boldsymbol{DW}w_{r1}w_{r2} \ \&\ r_1 \leq w_{r1} \ \&\ r_2 \leq w_{r2}))$.

С этого момента наша онтология оживает и начинает тикать, как одни часы. Заметим, что, если возникнут вопросы, связанные с отсутствием абсолютной одновременности в теории относительности, достаточно в определениях *Def.9* и *Def.10* заменить кванторы единственного существования «$\exists!$» на обычные кванторы существования «$\exists$».

Последнее важное понятие, которое мы хотим ввести, — это понятие параллельных процессов. Процесс x параллелен процессу y, е. и т.е. существует часть w глобального процесса $\boldsymbol{W}$, которая имеет равную длительность с x и y.

$Def.14 \quad x||y \Leftrightarrow_{def} \exists w (\boldsymbol{PW}w \ \&\ x|w \ \&\ y|w)$

Легко доказать следующую лемму.

Лемма 4. *Отношение $x||y$ обладает свойствами отношения эквивалентности:*

(1) $x||x$;
(2) $x||y \Rightarrow y||x$;
(3) $x||y \ \&\ y||z \Rightarrow x||z$.

3.7. Индивиды и свойства в процессуальной онтологии

Последний вопрос, который необходимо затронуть, — это вопрос о том, что в процессуальной онтологии могло бы соответствовать индивидам и свойствам субстанциальной?

Предметы в процессуальной онтологии мы вслед за Решером понимаем как пучки составляющих их подпроцессов. Но предметы — более широкое понятие, чем привязанные к моментам глобального времени процессуальные и субстанциальные индивиды.

Процессуальный индивид x — это процесс x от его начала до некоторого момента глобального времени w.

Def.15 *x есть p-индивид* $\Leftrightarrow_{def} \exists w(\boldsymbol{LW}w \,\&\, (x|w \vee \exists y(\boldsymbol{R}wy \,\&\, x|y)))$

Поясним это с помощью рис. 14.

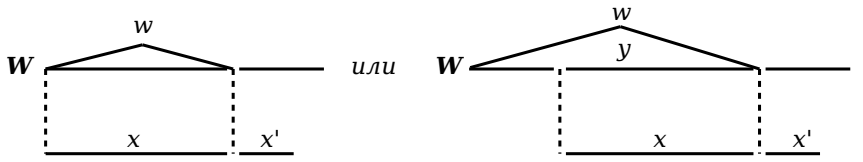


Рис. 14. x есть *p-индивид*

Говоря, что *человек — животное, наделенное членораздельной речью*, мы подразумеваем нахождение в нем соответствующих собственных подпроцессов животного существования и членораздельной речи. Этим мотивировано определение *p-свойств* процессуальной онтологии.

Def.16 *q есть p-свойство* $\Leftrightarrow_{def} \exists x(x$ *есть процесс* $\,\&\, q \subset x \,\&\, q|x)$

Отношение «*p-индивид x обладает p-свойством q*» будем сокращенно записывать в виде $q[x]$. Его смысл задается следующим определением:

Def.17 $q[x] \Leftrightarrow_{def}$ *q есть p-свойство* & *x есть p-индивид* $\,\&\, q \subset x \,\&\, q|x$

Для определения субстанциальных индивидов и свойств нам понадобится понятие предела, к которому стремится процесс. Этот предел не имеет самостоятельного существования, поскольку является идеальным объектом, но его можно представить как бесконечное множество всех правых частей конкретного процесса. Эту конструкцию мы будем называть *правым конусом*. Для обозначения правого конуса процесса x используем оператор в виде шляпки $\hat{x}$. См. рис. 15.

Def.18 $\hat{x}$ *есть правый конус* $\Leftrightarrow_{def}$ $\hat{x} = \{u\colon \boldsymbol{R}xu \vee u = x\})$.

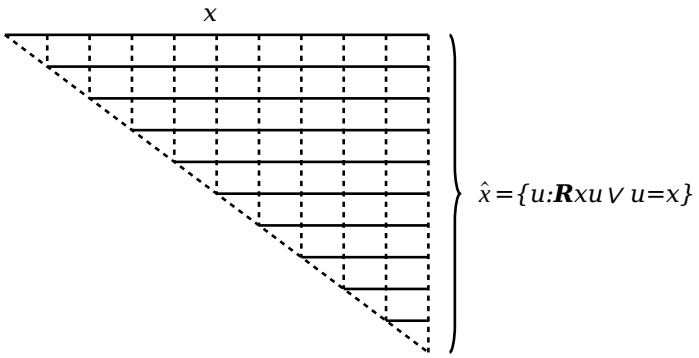


Рис. 15. $\hat{x}$ есть *правый конус*

Различие между процессуальными и субстанциальными индивидами заключается в том, что процессуальный индивид содержит в себе всю историю того, как он пришел к текущему состоянию, а субстанциальный — это лишь бесконечно близкое приближение к мгновенному состоянию в данный момент времени. Всякому процессуальному индивиду x можно поставить в соответствие правый конус $\hat{x}$, который и будет пониматься как субстанциальный индивид, т. е. предел, к которому стремится x.

Def.19 $\hat{x}$ *есть s-индивид* $\Leftrightarrow_{def}$ $\exists y(y$ *есть p-индивид* $\& \, \hat{x} = \hat{y})$.

Поскольку единственное, что является общим для всех элементов множества $\hat{x}$, — это их предел, то любое утверждение B, справедливое относительно $\hat{x}$, должно быть справедливо относительно каждого элемента $\hat{x}$. Это позволяет рассматривать субстанциальные индивиды как некоторые дескрипции идеальных объектов. Утверждение B относительно $\hat{x}$, которое можно условно записать в виде $B(\hat{x})$, равносильно утверждению $\forall y(\boldsymbol{R}xy \Rightarrow B(y))$, не содержащему упоминаний теоретико-множественных понятий.

$Def.20 \quad B(\hat{x}) \Leftrightarrow_{def} \forall y(\boldsymbol{R}xy \Rightarrow B(y))$

Еще одной особенностью такого рода дескрипций является то, что они, в отличие от хорошо известных неопределенных и определенных дескрипций, не предполагают существования «обозначаемых» объектов. Это — обороты речи, не требующие расширения онтологии.

Говоря, что *помидор — красный*, мы подразумеваем, что подпроцесс цвета помидора в своем изменении достиг красного цвета. Этим мотивировано

определение *s-свойств* посредством переделов по аналогии с тем, как было сделано для *s-индивидов*.

Def.21 $\hat{q}$ *есть s-свойство* $\Leftrightarrow_{def}$ $\exists y(y$ *есть p-свойство* $\& \ \hat{q} = \hat{y})$.

Заметим, что, согласно определениям *Def.15–Def.21*, понятия индивида и свойства относительны. То, что на одном уровне рассматривается как индивид, на другом — может рассматриваться как свойство, и наоборот.

Отношение «*s-индивид* $\hat{x}$ *обладает s-свойством* $\hat{q}$» будем сокращенно записывать в виде $\hat{q}\langle\hat{x}\rangle$. Его смысл задается следующим определением:

$Def.22 \quad \hat{q}\langle\hat{x}\rangle \Leftrightarrow_{def} \forall y(\boldsymbol{R}xy \Rightarrow \exists z \exists u(\boldsymbol{R}yz \ \& \ \boldsymbol{R}qu \ \& \ u \subset z \ \& \ u|z))$

Если вернуться к представлению времени в субстанциальной онтологии как кинематографической последовательности состояний, условно изображенному слева на рис. 16, то в процессуальной онтологии ему будут соответствовать изображенные справа деления глобального процесса $\boldsymbol{W}$, а индивидам субстанциальной онтологии будут соответствовать деления подпроцессов, выделенные жирными точками.

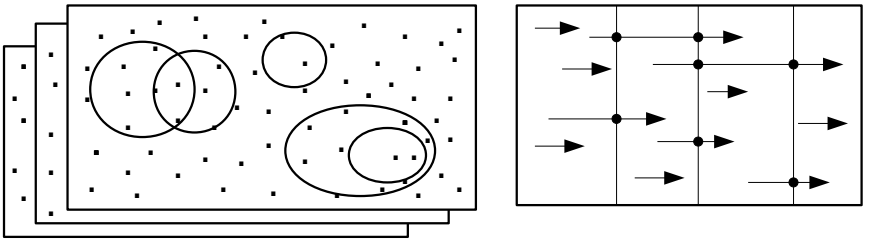


Рис. 16. Индивиды в отдельные моменты времени

На этом мы заканчиваем рассмотрение логических аспектов процессуальной онтологии.

4. Заключение

4.1. Ошибка, которую можно совершить в понимании процессов, — это их механистическая трактовка. Процессуальная онтология представляет собой попытку осмыслить явления окружающего мира в терминах их непрерывного изменения и взаимосвязи. В человеке мы можем выделить процессы дыхания, кровообращения, пищеварения и др. Мы можем сделать их самостоятельными предметами исследования, но они присутствуют в теле человека не самостоятельно, а в теснейшей взаимосвязи с другими

процессами. Процессу интеллектуального развития человека вообще нельзя приписать никакой физической локализации. Лишь сила абстракции позволяет выделить и говорить о каждом из них как отдельном процессе.

4.2. В онтологии процессов недостает возможности сравнения любых двух процессов по длине. Если бы это оказалось возможным, мы смогли бы задать метрику. В геометрии Евклида, чтобы сравнивать геометрические объекты, постулируется возможность их переноса и наложения друг на друга. При этом предполагается, что геометрическая фигура сохраняет все свои свойства. С философской точки зрения сохранение свойств при переносе — это допущение об изотропности пространства. В современной геометрии не говорят о переносе и наложении фигур, этим же целям служит аксиоматически задаваемое отношение конгруэнтности. Такая же проблема возникает и в связи с измерением длительности процессов. Пуанкаре писал: *«Мы не имеем непосредственной интуиции равенства двух промежутков времени. Тот, кто думает, что обладает такой интуицией, обманут иллюзией. Когда я говорю: от двенадцати часов дня до часа проходит то же время, что и от двух до трех, какой смысл имеет это утверждение? При малейшем размышлении обнаруживается, что оно само по себе не имеет никакого смысла»* [Пуанкаре, 1983, с. 171]. Можно попробовать, как и в геометрии, постулировать отношение конгруэнтности между процессами, но нужно ясно осознавать произвольность допущений, которые с этим связаны.

4.3. В тексте статьи много говорилось о субстанциальной и процессуальной онтологиях, которые противопоставлялись друг другу. Не было ли это противопоставление всего лишь игрой слов? Действительно ли мы можем назвать предложенную конструкцию моделью процессуальной онтологии? Очевидно, что в метаязыке мы пользовались языком логики предикатов, которая имеет субстанциальные теоретико-множественные модели. Не предполагает ли это скрытого механизма редукции наших процессов к добрым старым индивидам? Для ответа на этот вопрос необходимо еще раз вспомнить слова Аристотеля о том, что такое первые сущности: *«Сущность, называемая так в самом основном, первичном и безусловном смысле, — это та, которая не говорится ни о каком подлежащем...»* [Аристотель, 1978, Категории, 5, 5 11–12] Первые сущности — это то, что может быть субъектом предложения, но не может быть его предикатом. Допустим, нам дан процесс P, который претендует на то, чтобы его рассматривали как субстанцию, как первую сущность в понимании Аристотеля. Согласно *Ax.1*, в результате деления $\boldsymbol{D}PQR$ у него имеются части (подпроцессы) Q и R. Согласно *Def.1*, Q — это левая часть процесса P. Что такое Q, мы можем определить только через посредство P. Таким образом,

на месте «*подлежащего*» оказывается Q, и процесс P *«говорит»* о нем. Благодаря *Ax.1* мы не можем добраться ни до какого процесса, который не мог бы не *«говорить»* о своих частях как подлежащем. Отсюда можно сделать вывод, что использование общепринятых логически одобренных способов рассуждений, которые имеют субстанциальную семантику, еще не влечет за собой признания ее необходимости. В статье практически ничего не было сказано о специфически процессуальных рассуждениях, которые бы отличались от обычных. Можно лишь высказать предположение, что такие способы рассуждений могут быть связаны с отличиями процессуальных и субстанциальных индивидов и свойств, а также с различением параллельных и последовательных процессов. Еще одной отличительной чертой логики процессов может оказаться ее модализированность по аналогии с тем, как модализирована интуиционистская логика.

Литература

Аристотель, 1976 – *Аристотель.* Соч.: В 4 т. Т. 1. М.: Мысль, 1976. 550 с.

Аристотель, 1978 – *Аристотель.* Соч.: В 4 т. Т. 2. М.: Мысль, 1978. 687 с.

Васильев, 2019 – *Васильев В.В.* Арабский силлогизм и единство разума: о статье А.В. Смирнова // Вопросы философии. 2019. № 2. С. 22–26.

Гераклит, 1989 – *Гераклит.* Фрагменты ранних греческих философов. Ч. I. М.: Наука, 1989. 576 с.

Лекторский, 2019 – *Лекторский В.А.* Комментарий к статье А.В. Смирнова «Процессуальная логика и ее обоснование» // Вопросы философии. 2019. № 2. С. 18–21.

Лукасевич, 2000 – *Лукасевич Я.* Аристотелевская силлогистика с точки зрения современной формальной логики. Биробиджан: ИП «ТРИВИУМ», 2000. 311 с.

Михайлов, 2019 – *Михайлов И.Ф.* Могут ли люди мыслить по-разному? // Вопросы философии. 2019. № 2. С. 27–34.

Неретина, Огурцов, 2014 – *Неретина С., Огурцов А.* Онтология процесса: процесс и время. М.: Голос, 2014. 724 с.

Патнем, Кетнер, 2005 – *Патнем Х., Кетнер К.* Введение: следствия математики // *Пирс Ч.С.* Рассуждения и логика вещей: Лекции для Кембриджских конференций 1898 года. М.: РГГУ, 2005. 371 с.

Пуанкаре, 1983 – *Пуанкаре А.* Пуанкаре о науке / Пер. с франц. М.: Наука, 1983. 560 с.

Смирнов, 2019a – *Смирнов А.В.* Процессуальная логика и ее обоснование // Вопросы философии. 2019. № 2. С. 5–17.

Смирнов, 2019b – *Смирнов А.В.* «Большая культура» и Cogito // Прагматика философского текста: материалы Всероссийской научной конференции XV Таврические философские чтения «Анахарсис» (Республика Крым, Судак,

пос. Новый Свет, 16–19 сентября 2019 г.) под ред.: Зарапин О.В., Рыскельдиева Л.Т., Шапиро О.А., Шкорубская Е.Г., Шоркин А.Д. Симферополь: Крымский федеральный университет им. В.И. Вернадского, 2019. С. 7–8.

Солондаев, 2019 – *Солондаев В.К.* Психологические аспекты процессуальной логики // Вопросы философии. 2019. № 2. С. 41–47.

Шалак, 2019a – *Шалак В.И.* О процессуальной логике // Вопросы философии. 2019. № 2. С. 35–40.

Шалак, 2019b – *Шалак В.И.* Онтология и логика процессов // Философские науки. 2019. Т. 62. № 6. С. 138–150.

Шалак, 2019c – *Шалак В.И.* Онтология и логика процессов // Прагматика философского текста: материалы Всероссийской научной конференции XV Таврические философские чтения «Анахарсис» (Республика Крым, Судак, пос. Новый Свет, 16-19 сентября 2019 г.) под ред.: Зарапин О.В., Рыскельдиева Л.Т., Шапиро О.А., Шкорубская Е.Г., Шоркин А.Д. Симферополь: Крымский федеральный университет им. В.И. Вернадского, 2019. С. 8–10.

Baeten, 2005 – *Baeten, Jos C.M.* A Brief History of Process Algebra // Theoretical Computer Science. 2005. Vol. 335. Is. 2–3. P. 131–146.

Fokkink, 2007 – *Fokkink W.* Introduction to Process Algebra. 2nd edition, Springer-Verlag, Berlin, 2007. 169 p.

Mesle, 2007 – *Mesle R.* Process-relational philosophy: an introduction to Alfred North Whitehead. Templeton Foundation Press, West Conshohocken, Pennsylvania, 2007. 123 p.

Rescher, 1996 – *Rescher N.* Process Metaphysics: An Introduction to Process Philosophy. New York: SUNY Press, 1996.

Rescher, 2000 – *Rescher N.* Process Philosophy: A Survey of Basic Issues. University of Pittsburg Press, 2000. 144 p.

Seibt, 2017 – *Seibt J.* Process Philosophy // Stanford Encyclopedia of Philosophy. 2017. URL: `https://plato.stanford.edu/entries/process-philosophy/` (дата обращения: 25.05.2020)

Whitehead, 1920 – *Whitehead A.N.* The Concept of Nature. Cambridge University Press, 1920. 202 p.

Whitehead, 1929 – *Whitehead A.N.* Process and Reality. An Essay in Cosmology. Macmillan, New York, 1929.

Vladimir I. Shalack

Comparative logical analysis of substantive and processual ontologies

Vladimir I. Shalack
Institute of Philosophy of Russian Academy of Sciences,
12/1 Goncharnaya St., Moscow, 109240, Russian Federation.
E-mail: shalack@gmail.com

Abstract: In the works of Aristotle, we find an example of a thoroughly constructed substantial ontology, which has played the role of the philosophical foundations of logic and all of Western European science. Historically, there was another – a processual view of the structure of the surrounding world, the most prominent representative of which was Heraclitus.

In the paper, we analyze the substantial ontology and propose an approach to the construction of the ontology of processes. We introduce the relation $\boldsymbol{D}pxy$ of dividing by the duration of the process p into two successively connected subprocesses x and y and then formulate a series of intuitively obvious postulates that describe this relation. Using this relationship, we define the notion of local process time, which has the properties of a dense linear order without the first and last elements.

Objects in process ontology are understood as "bundles" of subprocesses. To characterize them, we introduce the relation $x \leq y$, which means that process x is a subprocess of process y. This is a partial order relation with the largest element $\boldsymbol{W}$, which is understood as a global process that is a representative of the world as a whole. Using this relation, one can define syllogistic constants for reasoning about subprocesses.

Since both relations describe two sides of the same ontology, two additional postulates of the connection between them are accepted. This allowed us to define the concept of global time, and the concept of parallel processes.

At the end of the paper, we show how in a process ontology it is possible to define concepts that correspond to the concepts of individuals and properties of a process and substantial ontology.

Keywords: substance, process, ontology, process algebra, substantial ontology, process ontology, duration, subprocess, formal philosophy

For citation: Shalack V.I. "Sravnitel'nyi logicheskii analiz substantsial'noi i protsessual'noi ontologii" [Comparative logical analysis of substantive and processual ontologies], *Logicheskie Issledovaniya / Logical Investigations*, 2020, Vol. 26, No. 2, pp. 58–86. DOI: 10.21146/2074-1472-2020-26-2-58-86 (In Russian)

References

Aristotel, 1976 – Aristotel. *Sochinenie sochinenii* [Collected Works in 4 vol.] Vol. 1. Moscow: Mysl' Publ., 1976. 550 pp. (In Russian)

Aristotel, 1978 – Aristotel. *Sochinenie sochinenii* [Collected Works in 4 vol.] Vol. 2. Moscow: Mysl' Publ., 1978. 687 s. (In Russian)

Baeten, 2005 – Baeten, Jos C.M. "A Brief History of Process Algebra", *Theoretical Computer Science*, 2005, Vol. 335, Is. 2–3, pp. 131–146.

Fokkink, 2007 – Fokkink, W. *Introduction to Process Algebra.* 2nd edition, Springer-Verlag, Berlin, 2007. 169 pp.

Geraklit – Geraklit. *Fragmenty rannikh grecheskikh filosofov* [Fragments of early Greek philosophers]. Chast I. Moscow, Nauka, 1989. 576 pp. (In Russian)

Lektorskij, 2019 – Lektorskij V.A. "Kommentarij k stat'e A.V. Smirnova «Protsessual'naya logika i ee obosnovanie»" [Commentary on the article by A.V. Smirnova "Processual logic and its rationale"], *Voprosy filosofii* [Philosophy issues], 2019, No. 2, pp. 18–21. (In Russian)

Lukasevich, 2000 – Lukasevich, Y. *Aristotelevskaya sillogistika s tochki zreniya sovremennoj formal'noj logiki.* Birobidzhan: IP «TRIVIUM», 2000. 311 s. (In Russian)

Mesle, 2007 – Mesle, R. *Process-relational philosophy: an introduction to Alfred North Whitehead.* Templeton Foundation Press, West Conshohocken, Pennsylvania, 2007. 123 pp.

Mikhajlov,2019 – Mikhajlov, I.F. "Mogut li lyudi myslit po-raznomu?" [Can people think differently?], *Voprosy filosofii* [Philosophy issues], 2019, No. 2, pp. 27–34. (In Russian)

Neretina, Ogurtsov, 2014 – Neretina, S., Ogurtsov, A. *Ontologiya protsessa: protsess i vremya* [Ontology of the process: process and time], Moscow: Golos, 2014. 724 pp. (In Russian)

Patnem, Ketner, 2005 – Patnem, H., Ketner, K. "Vvedenie: sledstviya matematiki", *Pirs CH.S. Rassuzhdeniya i logika veshhej: Lektsii dlya Kembridzhskikh konferentsij 1898 goda* [Peirce C.S. Reasoning and the Logic of Things: Lectures for the 1898 Cambridge Conferences], Moscow: RGGU, 2005. 371 pp. (In Russian)

Puankare, 1983 – Puankare, A. *Puankare o nauke*[Poincare about science], Per. s frants., Moscow: Nauka, 1983. 560 pp. (In Russian)

Rescher, 1996 – Rescher, N. *Process Metaphysics: An Introduction to Process Philosophy.* SUNY Press, New York. 1996.

Rescher, 2000 – Rescher, N. *Process Philosophy: A Survey of Basic Issues.* University of Pittsburg Press, 2000. 144 pp.

Seibt, 2017 – Seibt, J. "Process Philosophy", *Stanford Encyclopedia of Philosophy.* 2017. [`https://plato.stanford.edu/entries/process-philosophy/`, accessed on 25.05.2020]

Shalack, 2019a – Shalack, V.I. "O protsessual'noj logike" [About process logic], *Voprosy filosofii* [Philosophy issues], 2019, No. 2, pp. 35–40. (In Russian)

Shalack, 2019b – Shalack, V.I. “Ontologiya i logika protsessov” [Ontology and logic of processes], *Filosofskie nauki* [Philosophical Sciences], 2019, vol. 62, No. 6, pp. 138–150. (In Russian)

Shalack, 2019c – Shalack, V.I. “Ontologiya i logika protsessov” [Ontology and logic of processes], *Pragmatika filosofskogo teksta: materialy Vserossijskoj nauchnoj konferentsii XV Tavricheskie filosofskie chteniya «Anakharsis»* [The Pragmatics of a Philosophical Text: Materials of the All-Russian Scientific Conference of the XV Taurida Philosophical Readings “Anacharsis”] (Respublika Krym, Sudak, pos. Novyj Svet, 16–19 sentyabrya 2019 g.) pod red: Zarapin O.V., Ryskel’dieva L.T., Shapiro O.A., Shkorubskaya E.G., Shorkin A.D. Simferopol’: Krymskij federal’nyj universitet im. V.I. Vernadskogo, 2019, pp. 8–10. (In Russian)

Smirnov, 2019a – Smirnov, A.V. “Protsessual’naya logika i ee obosnovanie” [Processual logic and its rationale], *Voprosy filosofii* [Philosophy issues], 2019, No. 2, pp. 5–17. (In Russian)

Smirnov, 2019b – Smirnov, A.V. “«Bol’shaya kul’tura» i Sogito” [“Big Culture” and Cogito] *Pragmatika filosofskogo teksta: materialy Vserossijskoj nauchnoj konferentsii XV Tavricheskie filosofskie chteniya «Anakharsis»* [The Pragmatics of a Philosophical Text: Materials of the All-Russian Scientific Conference of the XV Taurida Philosophical Readings “Anacharsis”] (Respublika Krym, Sudak, pos. Novyj Svet, 16–19 sentyabrya 2019 g.) pod red: Zarapin O.V., Ryskel’dieva L.T., SHapiro O.A., SHkorubskaya E.G., SHorkin A.D. Simferopol’: Krymskij federal’nyj universitet im. V.I. Vernadskogo, 2019, pp. 7–8. (In Russian)

Solondaev, 2019 – Solondaev, V.K. “Psikhologicheskie aspekty protsessual’noj logiki” [Psychological aspects of processual logic], *Voprosy filosofii* [Philosophy issues], 2019, No. 2, pp. 41–47. (In Russian)

Vasil’ev, 2019 – Vasil’ev, V.V. “Arabskij sillogizm i edinstvo razuma: o stat’e A.V. Smirnova” [Arab syllogism and the unity of reason: about an article by A.V. Smirnov], *Voprosy filosofii* [Philosophy issues], 2019, No. 2, pp. 22–26. (In Russian)

Whitehead, 1920 – Whitehead, A.N. *The Concept of Nature.* Cambridge University Press, 1920. 202 p.

Whitehead, 1929 – Whitehead, A.N. *Process and Reality. An Essay in Cosmology.* Macmillan, New York, 1929.

Логические исследования
2020. Т. 26. № 2. С. 87–105
УДК 16

Logical Investigations
2020, Vol. 26, No. 2, pp. 87–105
DOI: 10.21146/2074-1472-2020-26-2-87-105

Alex Citkin

Deductive systems with unified multiple-conclusion rules

Alex Citkin
Metropolitan Telecommunications,
55 Water Str., New York, NY 10041, USA.
E-mail: acitkin@gmail.com

Abstract: Our goal is to develop a syntactical apparatus for propositional logics in which the accepted and rejected propositions have the same status and are being treated in the same way. The suggested approach is based on the ideas of Łukasiewicz used for the classical logic and in addition, it includes the use of multiple conclusion rules. More precisely, a consequence relation is defined on a set of statements of forms "proposition A is accepted" and "proposition A is rejected", where A is a proposition, — unified consequence relation. Accordingly, the rules defining a unified consequence relation have statements as premises, and conclusions — unified rules. A special attention is paid to the logics in which each proposition is either accepted or rejected. If we express this property via unified rules and add them to a unified deductive system, such a unified deductive system defines a reversible unified consequence: a statement "proposition B is accepted" is derived from "proposition A is accepted" if and only if a statement "proposition A is rejected" is derived from "proposition B is rejected".

Keywords: propositional logic, logic with refutation, deductive system with rejection, multiple conclusion rules

For citation: Citkin A. "Deductive systems with unified multiple-conclusion rules", *Logicheskie Issledovaniya / Logical Investigations*, 2020, Vol. 26, No. 2, pp. 87–105. DOI: 10.21146/2074-1472-2020-26-2-87-105

1. Introduction

Our goal is to develop a framework for the logics that accommodate rejected propositions along with asserted propositions. We call such logics *unified*[1]. And we abolish the regular implicit assumption that every proposition which is not asserted is rejected.

[1]Sometimes logics with refutations are called "hybrid" (e.g. [Goranko, 2019]); we prefer to call such logics "unified", because the term "hybrid logic" is often used in a different sense (e.g. [Torben, 2011]).

© Citkin A.

Thus, we need to answer the following questions:

(a) What do we prove?

(b) How do we prove it?

The brief answers are:

(a) We prove statements asserting or rejecting a given proposition;

(b) We use the multiple-conclusion rules in which the premises and conclusions are finite sets of such statements.

It is due to Łukasiewiecz that rejection was explicitly included in logic. In the introduction to his 1921 paper translated in [Łukasiewicz, Jan, 1970], he wrote: "The concepts of 'truth', 'falsehood', and 'assertion' I owe to Frege. In adding 'rejection' to 'assertion' I have followed Brentano".

According to Brentano and in contrast to Frege, assertion (or acceptance) and rejection (or refutation, or denial) should have the same status. Let us note that assertion of a negation is much stronger than the rejection (cf. [Restall, 2015]). For instance, in the Classical Logic we reject formula p, where p is a propositional variable (in symbols $\dashv p$), but the assertion $\vdash \neg p$ does not hold.

In particular, Łukasiewicz suggested to endow ordinary calculus (with rule of substitution) defining the Classical Logic (CPC), with the anti-axiom $\dashv p$ and the following two rules:

modus tollens:	$\vdash (A \to B), \dashv B / \dashv A$	(MT)
reversed substitution:	$\dashv \sigma(A) / \dashv A$	(RS)

Independently, in [Carnap, 1942] Carnap suggested to include the rejections into deductive systems: "The rules of deduction usually consist of primitive sentences and rules of inference (defining 'directly definable in K'). Sometimes, K contains also rules of refutation (defining 'directly refutable in K')". Moreover, Carnap also used the multiple-conclusion rules.

Carnap's goal was to achieve the categoricity: if we attempt to axiomatize a two-valued logic, the only (up to isomorphism) model for this logic must be a two-element model.

Our goal is not to limit the class of models. We follow the Brentano-Łukasiewicz path.

Our approach is similar to the approach accepted in [Smiley, 1996] or [Rumfitt, 2000]: we consider the signed propositions and we develop the machinery needed for the derivations of a signed proposition from the signed propositions. This "sign" is different from the truth operator (cf. [von Wright, 1987; Pavlov,

2004; Pavlov, 2011]) because we do not allow the mixed formulas (cf. [von Wright, 1987]): the signed formulas are entities of a metalanguage. For the same reason, the signed formulas are also different from the formulas of Bochvar's logic (cf. [Bochvar, 1939]): we do not allow the signs (which are elements of a metalanguage) to intermingle with the connectives (which are elements of language), and we do not allow the nested signs. The signed formulas can also be viewed as judgments (cf. [Kracht, 2010].)

In the present paper, we further develop the approach introduced in [Citkin, 2015]. In contrast to the aforementioned paper, here we do not consider multiple-conclusion logics in the sense of [Shoesmith and Smiley, 2008] or Carnap's junctives [Carnap, 1943]. We use multiple-conclusion rules merely as the means of derivation of a statement from a set of statements. Additionally, we are focusing on logics in which the laws of excluded middle and non-contradiction are expressed as statements.

From the very general standpoint[2], there are two ways of how to handle refutation syntactically: direct and indirect. To determine whether formula A is refutable one can do one of the two things:

(a) to derive a statement about refutability of A in a meta-logic (Ł-derivation — Łukasiewicz-style derivation)

(b) to derive a formula B that we already know is refuted from A, and apply Modus Tollens (C-derivation — indirect derivation, Carnap's way).

Example 1. Let us consider the classical propositional calculus and compare Ł- and C-derivation of the refutability of the proposition $\neg p$ if we accepted that proposition p is rejected:

Ł-derivation		C-derivation	
$\dashv p$	anti-axiom	$\neg p$	assumption
$\vdash \neg(p \to p) \to p$	tautology	$\neg(p \to p)$	Sb
$\dashv \neg(p \to p)$	MT	$\neg(p \to p) \to p$	tatology
$\dashv \neg p$	RS	p	MP
		reject $\neg p$	because p is rejected

Remark 1. Let us observe that in C-derivations Modus Tollens is not the same as in Ł-derivations:

Ł-drivations	C-drivations
$\vdash (A \to B), \dashv B / \dashv A$	$A \vdash B, \dashv B / \dashv A$

[2]More details about different approaches to refutation systems the reader can find in [Goranko et al., 2020; Goranko, 2019; Wybraniec-Skardowska, 2018; Citkin, 2015].

In Ł-derivations, Modus Tollens is a rule of logic, while in C-derivations, Modus Tollens is a rule of meta-logic. In terms of [Scott, 1974], the first version of Modus Tollens is about connective of implication, while the second one is about relationship of implication.

An existence of an Ł-derivation entails the existence of C-derivation. The converse is true only under some assumptions, more precisely, a weak form of the deduction theorem (cf. [Staszek, 1971]).

The paper is structured as follows. In Section 2, we give the definition of unified logics and we consider some of their properties. In Section 3, we introduce the unified deductive systems — a syntactic way of defining unified logics. In Section 4, we study the standard unified deductive systems — the unified deductive systems in which the rules representing the laws of excluded middle and non-contradiction are derivable.

2. Unified logics

In this section we introduce the notion of unified logic.

2.1. Basic definitions

We consider a propositional language consisting of a countable set of propositional variables P and a finite set of connectives (not including signs $\oplus, \ominus, \odot, \blacktriangledown, \blacktriangle, \vdash$ which are reserved for use in the meta-logic). By formula (or proposition) we understand a propositional formula in this language defined in a regular way. Frm denotes the set of all formulas.

It is customary to define logic as a consequence relation. If assertions and rejections have the same status, we need to consider the consequence relations on sets of *(meta-)statements* of the type "A being asserted" and "A being rejected", and we use $\oplus A$ for the former and $\ominus A$ for the latter. $\blacktriangledown$ and $\blacktriangle$ are two special statements the role of which will become apparent later. Loosely speaking, one can think of $\blacktriangledown$ as a disjunction of an empty set of statements and thus, being always accepted, while $\blacktriangle$ being a conjunction of an empty set of statements and thus, being always rejected.

The statements of the form $\oplus A$ and $\blacktriangledown$ are *positive*, the statements of the form $\ominus A$ and $\blacktriangle$ are *negative*. If α is a statement, $\overline{\alpha}$ denotes a *reversed statement*:

$$\overline{\alpha} = \begin{cases} \ominus A, & \text{if } \alpha = \oplus A; \\ \oplus A, & \text{if } \alpha = \ominus A, \end{cases}$$

and $\overline{\blacktriangledown} = \blacktriangle$, and $\overline{\blacktriangle} = \blacktriangledown$. The statements of form $\oplus A$ and $\ominus A$, where A is a proposition, are *proper*.

If X is a set of propositions, we let

$$X^+ := \{\oplus A \mid A \in X\} \text{ and } X^- := \{\ominus A \mid A \in X\}.$$

Let $\mathcal{S}$ denote a set of all statements. If Γ is a set of statements, Γ^+ and Γ^- denote respectively the subsets of positive and negative statements from Γ.

It is inconvenient for our purposes to use Łukasiewicz's notations $\vdash$ and $\dashv$ for "being asserted" and "being rejected", because the expression like

$$\vdash A_1, \ldots, \vdash A_n \vdash \vdash B$$

looks confusing. The notation[3] $\oplus A$ and $\ominus A$ eliminates the confusion:

$$\oplus A_1, \ldots, \oplus A_n \vdash \oplus B.$$

Definition 1. A *unified logic* is a relation $\vdash$ on $2^{\mathcal{S}} \times \mathcal{S}$ satisfying the following conditions: for any non-empty $\Gamma \subseteq \mathcal{S}$, any $\Delta \subseteq \mathcal{S}$, and any statements α, β,

(R) $\Gamma, \alpha \vdash \alpha$;

(M) $\Gamma \vdash \alpha$ entails $\Gamma \cup \Delta \vdash \alpha$;

(T) $\Gamma \vdash \alpha$ and $\alpha, \Delta \vdash \beta$ entails $\Gamma, \Delta \vdash \beta$;

(C) $\alpha \vdash \blacktriangledown$ and $\blacktriangle \vdash \alpha$;

(P) $\Gamma, \blacktriangledown \vdash \alpha$ entails $\Gamma \vdash \alpha$.

A unified logic $\vdash$ is *finitary* if $\Gamma \vdash \alpha$ yields that there is a finite subset $\Gamma' \subseteq \Gamma$ such that $\Gamma' \vdash \alpha$.

Immediately from (T) and (C) it follows that for any $\Gamma \subseteq \mathcal{S}$, if $\Gamma \vdash \blacktriangle$, then $\Gamma \vdash \beta$ for every statement β.

If σ is a substitution, that is, $\sigma : \mathsf{P} \longrightarrow \mathsf{Frm}$, then, in a natural way, one can extend σ to statements: $\sigma(\blacktriangledown) = \blacktriangledown$, $\sigma(\blacktriangle) = \blacktriangle$ and

$$\sigma(\odot A) = \odot\sigma(A),$$

where $\odot \in \{\oplus, \ominus\}$.

Each unified consequence relation $\vdash$ defines a set of *asserting* (or *positive*) *theses*:

$$\mathsf{Th}^+_{\vdash} := \{\alpha \in \mathcal{S}^+ \mid \blacktriangledown \vdash \alpha\}$$

and a set of *refuting theses* (or *negative*, or *anti-theses*):

$$\mathsf{Th}^-_{\vdash} := \{\alpha \in \mathcal{S}^- \mid \blacktriangledown \vdash \alpha\}.$$

The set $\mathsf{Th}_{\vdash} := \mathsf{Th}^+_{\vdash} \cup \mathsf{Th}^-_{\vdash}$ is a set of *theses*. Let us note that $\blacktriangledown \in \mathsf{Th}^+_{\vdash} \subseteq \mathsf{Th}_{\vdash}$.

[3]The similar notations are used in [Smiley, 1996] and [Rumfitt, 2000].

Proposition 1. Let $\vdash$ be a unified logic and $\alpha \in \mathcal{S}$. If $\alpha \in \mathsf{Th}_{\vdash}$, then $\Gamma \vdash \alpha$ for any $\Gamma \subseteq \mathcal{S}$.

Proof. If $\alpha \in \mathsf{Th}_{\vdash}$, then $\blacktriangledown \vdash \alpha$ and by (M), we have $\Gamma, \blacktriangledown \vdash \alpha$. If $\Gamma = \varnothing$, the statement is trivial. Otherwise, we can apply (P) and obtain $\Gamma \vdash \alpha$. ■

Note, that $\mathsf{Th}^{+}_{\vdash} \cap \mathsf{Th}^{-}_{\vdash} = \varnothing$ simply because $\mathcal{S}^{+} \cap \mathcal{S}^{-} = \varnothing$ by a purely syntactical reason. But the situation is different if we consider the sets of formulas:

$$\begin{array}{ll} \mathsf{L}^{+}_{\vdash} := \{A \in \mathsf{Frm} \mid \oplus A \in \mathsf{Th}_{\vdash}\} & \text{is a set of } \textit{theorems}; \\ \mathsf{L}^{-}_{\vdash} := \{A \in \mathsf{Frm} \mid \ominus A \in \mathsf{Th}_{\vdash}\} & \text{is a set of } \textit{anti-theorems}. \end{array}$$

And it is possible that $\mathsf{L}^{+}_{\vdash} \cap \mathsf{L}^{-}_{\vdash} \neq \varnothing$ and $\mathsf{L}^{+}_{\vdash} \cup \mathsf{L}^{-}_{\vdash} \neq \mathsf{Frm}$.

Definition 2. Let $\vdash$ be a unified logic.

$$\begin{array}{ll} \text{If } \mathsf{L}^{+}_{\vdash} \cap \mathsf{L}^{-}_{\vdash} = \varnothing, & \text{the logic is } \textit{coherent,} \\ \text{if } \mathsf{L}^{+}_{\vdash} \cup \mathsf{L}^{-}_{\vdash} = \mathsf{Frm}, & \text{the logic is } \textit{full}. \end{array}$$

A full and coherent logic is called *conventional*. And $\vdash$ is *trivial* if $\mathsf{L}^{+}_{\vdash} = \mathsf{L}^{-}_{\vdash} = \mathsf{Frm}$.

Clearly, a unified logic $\vdash$ is conventional if and only if $\mathsf{L}^{-} = \mathsf{Frm} \setminus \mathsf{L}^{+}$.

Proposition 2. A unified logic $\vdash$ is is coherent if and only if

$$\alpha \in \mathsf{Th}_{\vdash} \text{ entails } \overline{\alpha} \notin \mathsf{Th}_{\vdash} \text{ (that is, } \mathsf{Th}_{\vdash} \cap \overline{\mathsf{Th}_{\vdash}} = \varnothing),$$

and $\vdash$ is full if and only if for any statement α,

$$\alpha \in \mathsf{Th}_{\vdash} \text{ or } \overline{\alpha} \in \mathsf{Th}_{\vdash} \text{ (that is, } \mathsf{Th}_{\vdash} \cup \overline{\mathsf{Th}_{\vdash}} = \mathcal{S}).$$

Proof. Straightforward. ■

Corollary 1. A unified logic $\vdash$ is conventional if and only if $\overline{\mathsf{Th}_{\vdash}} = \mathcal{S} \setminus \mathsf{Th}_{\vdash}$.

3. Unified deductive systems

In this section, we will see how a unified logic can be defined by a unified deductive system. As usual, a unified deductive system is an ordered pair $\langle \mathsf{Ax}; \mathsf{R} \rangle$, where $\mathsf{Ax} \subseteq \mathcal{S}$ is a set of axioms, and R is a set of unified rules. First, let us clarify what is a unified rule and then, in Section 3.4, we define the unified inference.

3.1. Unified inference rules

If Γ, Δ are finite **non-empty** sets of statements, an ordered pair Γ/Δ (or $\frac{\Gamma}{\Delta}$) is called a *structural multiple-conclusion* or *multiple-alternative* rule (m-rule for short). The premises Γ are viewed conjunctively, while the alternatives (conclusions) Δ are viewed disjunctively.

In rules, $\blacktriangledown$ and $\blacktriangle$ respectively play the role of empty sets of premises and alternatives: the notation $\blacktriangledown/\blacktriangle$ is certainly less misleading than $\varnothing/\varnothing$, or -.

We divide m-rules into two categories: if $\mathsf{r} := \Gamma/\Delta$ is an m-rule, then

r is *conclusive*	if Δ consists of a single statement;
	if $\Delta = \{\blacktriangle\}$, the rule is also *terminating*;
r is *inconclusive*	if Δ consists of more than one statement.

For instance, the rule $\oplus p, \oplus(p \to q)/\oplus q$ is conclusive; the rule $\oplus(p \vee q)/\oplus p, \oplus q$ is inconclusive; the rule $\oplus p, \ominus p/\blacktriangle$ is terminating.

Note that Sb and RS are not m-rules. If R is a set of m-rules, we let $\mathsf{R}^s = \mathsf{R} \cup \{\mathsf{Sb}, \mathsf{RS}\}$.

Multiple-alternative rules allow to explicitly use the proofs by cases. Indeed, in the setting of natural deduction, a proof by cases looks like this:

$$\dfrac{A \vee B \qquad \begin{array}{c}[A]\\ \vdots \\ C\end{array} \qquad \begin{array}{c}[B]\\ \vdots \\ C\end{array}}{C}$$

In the multiple-alternative setting, a proof by cases looks more straightforward:

$$\begin{array}{c} A \vee B \\ \hline A \quad B \\ \vdots \quad \vdots \\ C \quad C \end{array} \; (p \vee q)/p, q$$

By applying rule $(p \vee q)/p, q$, we get the alternatives p and q to be considered separately.

3.2. Admissible m-rules

An m-rule Γ/Δ is *admissible* for a given unified logic $\vdash$, if for each substitution σ,

$$\sigma(\Gamma) \subseteq \mathsf{Th}_{\vdash} \implies \sigma(\Delta) \cap \mathsf{Th}_{\vdash} \neq \varnothing.$$

For instance, a rule $\Gamma/\blacktriangle$ is admissible for a unified logic $\vdash$ if and only if there is no such a substitution σ that $\sigma(\Gamma) \subseteq \mathsf{Th}_{\vdash}$. In particular, the rule $\blacktriangledown/\blacktriangle$ is not admissible for any nontrivial unified logic.

By *unified intermediate logic* we understand a unified logic the set of positive theorems of which extends the set of theorems of the intuitionistic propositional logic (IPC) and is included in the set of the theorems of classical propositional logic (CPC), and the set of anti-theorems coincides with the set of non-theorems.

Proposition 3. For any unified intermediate logic $\vdash$ and for any formula A, rule $\oplus A/\blacktriangle$ is admissible if and only if rule $\blacktriangledown/\oplus\neg A$ is admissible.

Proof. Indeed, if $\blacktriangledown/\oplus\neg A$ is admissible for $\vdash$, then, $\neg A$ is a theorem of $\vdash$ and hence, no substitution makes A a theorem. Thus, $\oplus A/\blacktriangle$ is admissible for $\vdash$.

Conversely, suppose that $\oplus A/\blacktriangle$ is admissible for $\vdash$. Then, there is no substitution σ such that $\sigma(A)$ is a theorem of $\vdash$. In particular, for any substitution $\sigma : \mathsf{P} \longrightarrow \{p \to p, p \wedge \neg p\}$, $\sigma(A)$ is not a theorem of $\vdash$, which means that for any valuation ν in a two-element Boolean algebra, $\nu(A) = 0$ and hence, $\nu(\neg A) = \neg\nu(A) = 1$. Therefore, $\neg A$ is a Boolean tautology and consequently, $\neg A$ is a theorem of CPC. Then, by the Glivenko Theorem, $\neg A$ is a theorem of IPC and hence, $\neg A$ is a theorem of $\vdash$, that is, $\blacktriangledown/\oplus\neg A$ is admissible for $\vdash$. ■

The following proposition is an immediate consequence of the definitions.

Proposition 4. Let $\vdash$ be a unified logic. Then, $\vdash$ is coherent if and only if the following rule is admissible for it:

$$\mathsf{Co} := \frac{\oplus p, \ominus p}{\blacktriangle}. \qquad \text{(Coherency rule)}$$

And $\vdash$ is full if and only if the following rule is admissible for it:

$$\mathsf{Fu} := \frac{\blacktriangledown}{\oplus p, \ominus p}. \qquad \text{(Fullness rule)}$$

In what follows, the above m-rules play the central role.

Proposition 5. Let $\vdash$ be a conventional unified logic (that is, $\vdash$ is full and coherent). Then, for any finite sets Γ, Δ and any proper statement α,

if the rule $\dfrac{\alpha, \Gamma}{\Delta}$ is admissible for $\vdash$, then the rule $\dfrac{\Gamma}{\overline{\alpha}, \Delta}$ is admissible too;

if the rule $\dfrac{\Gamma}{\alpha, \Delta}$ is admissible for $\vdash$, then the rule $\dfrac{\overline{\alpha}, \Gamma}{\Delta}$ is admissible too.

If $\Gamma = \varnothing$, then $\Gamma/\overline{\alpha}, \Delta$ is understood as $\blacktriangledown/\alpha, \Delta$; and if $\Delta = \varnothing$, then $\overline{\alpha}, \Gamma/\Delta$ is understood as $\overline{\alpha}, \Gamma/\blacktriangle$.

In other words, without violating admissibility, one can move a statement from the premises to the alternatives, or vice-versa, with changing the "sign" of the statement.

Proof. Suppose that $\Gamma \neq \varnothing$ and rule $\alpha, \Gamma/\Delta$ is admissible for a unified logic $\vdash$. Then, for any substitution σ such that $\sigma(\Gamma) \subseteq \mathsf{Th}_{\vdash}$, because $\vdash$ is conventional, by Corollary 1, either $\sigma(\alpha) \in \mathsf{Th}_{\vdash}$, or $\sigma(\overline{\alpha}) \in \mathsf{Th}_{\vdash}$. In the former case, $\alpha, \Gamma/\Delta$ is admissible, $\sigma(\Delta) \cap \mathsf{Th}_{\vdash} \neq \varnothing$ and hence, $\sigma(\overline{\alpha}, \Delta) \cap \mathsf{Th}_{\vdash} \neq \varnothing$. In the latter case, obviously, $\sigma(\overline{\alpha}, \Delta) \cap \mathsf{Th}_{\vdash} \neq \varnothing$. Thus, the rule $\overline{\alpha}, \Gamma/\Delta$ is admissible for $\vdash$.

Suppose that rule α/Δ is admissible. Then, because $\vdash$ is conventional, for every substitution σ, either $\sigma(\alpha) \in \mathsf{Th}_{\vdash}$, or $\sigma(\overline{\alpha}) \in \mathsf{Th}_{\vdash}$. In the former case, because rule α/Δ is admissible, $\sigma(\Delta) \cap \mathsf{Th}_{\vdash} \neq \varnothing$ and consequently, $\sigma(\overline{\alpha}, \Delta) \cap \mathsf{Th}_{\vdash} \neq \varnothing$. In the latter case, $\sigma(\overline{\alpha}) \in \mathsf{Th}_{\vdash}$ and consequently, $\sigma(\overline{\alpha}, \Delta) \cap \mathsf{Th}_{\vdash} \neq \varnothing$. Thus, $\sigma(\overline{\alpha}, \Delta) \cap \mathsf{Th}_{\vdash} \neq \varnothing$ for any substitution σ and therefore, the rule $\blacktriangledown/\overline{\alpha}, \Delta$ is admissible.

The rest of the cases can be proved with a similar argument. ■

Example 2. Let $\vdash$ be a unified conventional logic signature of which contains $\to$. If Modus Ponens is admissible for $\vdash$, then, all the following eight variations of Modus Ponens are admissible:

$$\frac{\blacktriangledown}{\ominus p, \ominus(p \to q), \oplus q}; \quad \frac{\oplus p}{\ominus(p \to q), \oplus q}; \quad \frac{\oplus(p \to q)}{\ominus p, \oplus q}; \quad \frac{\ominus q}{\ominus p, \ominus(p \to q)};$$

$$\frac{\oplus p, \oplus(p \to q)}{\oplus q}; \quad \frac{\oplus p, \ominus q}{\ominus(p \to q)}; \quad \frac{\oplus(p \to q), \ominus q}{\ominus p}; \quad \frac{\oplus p, \oplus(p \to q), \ominus q}{\blacktriangle}.$$

Let us note that for conventional logics, admissibility of Modus Ponens entails the admissibility of Modus Tollens.

By the same argument, for the rule of substitution we have two variations which are either simultaneously admissible, or simultaneously not admissible:

$$\frac{\oplus A}{\oplus \sigma(A)}; \quad \frac{\ominus \sigma(A)}{\ominus A}.$$

3.3. Protoinference

Let R be a set of rules (which may include Sb and/or RS) and Γ be a non-empty set of statements. A *protoinference from* Γ *by* R (or $\langle \Gamma; \mathsf{R} \rangle$-*protoinference* for short) is a finite directed tree, the nodes of which are labeled by statements, and it is defined by induction[4].

A leaf of protoinference labeled by $\blacktriangle$ is *terminating* (we have reduced a case to contradiction), otherwise, it is *extendable*.

Like in a Hilbert-style inference, in protoinference we use the assumptions and apply the inference rules.

[4]Note that we define a protoinference from $\langle \Gamma; \mathsf{R} \rangle$ without clarifying what we are deriving.

(a) A tree consisting of a single node (a root) labeled by $\blacktriangledown$ is a $\langle\Gamma;\mathsf{R}\rangle$-protoinference;

(b) *using the assumptions*: if $\mathfrak{I}$ is a $\langle\Gamma;\mathsf{R}\rangle$-protoinference, then any extendable leaf can be extended by adjoining a leaf labeled by a statement from Γ, and the obtained tree is a (Γ,R)-protoinference;

(c) *applying the rules*: if $\mathfrak{I}$ is a $\langle\Gamma;\mathsf{R}\rangle$-protoinference, then any extendable leaf λ can be extended by adjoining the leaves labeled by statements from a finite set Δ, provided there is an instance Ξ/Δ of a rule from R, and each statement from Ξ is labeling a node between λ and the root (see Fig. 1).

The trees obtained in such a way, and only them, are the (Γ,R)-protoinferences.

Let us observe that the rules of form $\blacktriangle,\Gamma/\Delta$ cannot be used in any protoinference, because $\blacktriangle$ labels only a terminating leaf.

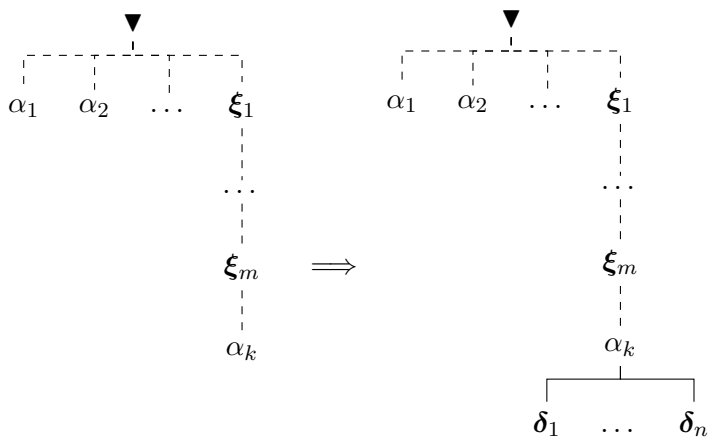


Fig. 1. Application of a rule

If there is a $\langle\Gamma;\mathsf{R}\rangle$-protoinference the leaves of which are labeled by statements only from a finite set of statements Δ, we denote this by $\Gamma \mathrel{|\!\sim}_{\mathsf{R}} \Delta$.

Let us note that immediately from the definition of protoinference, for any finite sets of statements $\Gamma,\Gamma',\Delta,\Delta'$,

$$\Gamma \mathrel{|\!\sim}_{\mathsf{R}} \Delta \qquad \text{entails} \qquad \Gamma\cup\Gamma' \mathrel{|\!\sim}_{\mathsf{R}} \Delta\cup\Delta'. \tag{1}$$

Proposition 6. Suppose that Γ, Δ are finite sets of statements and R is a set of rules. Then the following holds:

$$\begin{array}{ll} (a) & \blacktriangledown, \Gamma \mathrel{|\!\sim_{\mathsf{R}}} \Delta \text{ if and only if } \Gamma \mathrel{|\!\sim_{\mathsf{R}}} \Delta; \\ (b) & \Gamma \mathrel{|\!\sim_{\mathsf{R}}} \blacktriangle, \Delta \text{ if and only if } \Gamma \mathrel{|\!\sim_{\mathsf{R}}} \Delta; \\ (c) & \Gamma \mathrel{|\!\sim_{\mathsf{R}}} \blacktriangledown, \Delta; \\ (d) & \blacktriangle, \Gamma \mathrel{|\!\sim_{\mathsf{R}}} \Delta. \end{array} \tag{2}$$

Proof. (a) follows from the observation that by the definition of protoinference, any $\langle \blacktriangledown, \Gamma; \mathsf{R}\rangle$-protoinference of Δ is at the same time a $\langle \Gamma; \mathsf{R}\rangle$-protoinference of Δ, and vice-versa.

(b) Because by definition the extendable leaves do not contain $\blacktriangle$, the definition of protoinference entails that every $\langle \Gamma; \mathsf{R}\rangle$-protoinference of $\blacktriangle, \Delta$ is at the same time, a $\langle \Gamma; \mathsf{R}\rangle$-protoinference of Δ, and vice-versa: in both cases, extendable leaves contain statements only from Δ.

(c) A tree consisting only of a root labeled by $\blacktriangledown$ is a protoinference, that is, $\Gamma \mathrel{|\!\sim_{\mathsf{R}}} \blacktriangledown, \Delta$.

(d) A tree consisting of two nodes: a root labeled by $\blacktriangledown$, and a leaf labeled by $\blacktriangle$, is a $\langle \blacktriangle; \mathsf{R}\rangle$-protoinference of Δ, that is, $\blacktriangle, \Gamma \mathrel{|\!\sim_{\mathsf{R}}} \Delta$. ■

3.4. Unified inference

Suppose that Γ, Δ are nonempty sets of statements, α is a statement and R is a set of rules.

Definition 3. A $\langle \Gamma; \mathsf{R}\rangle$-protoinference is a $\langle \Gamma; \mathsf{R}\rangle$-*inference* provided all its extendable leaves contain the same statement.

Definition 4. A *statement α is derivable from statements Δ by* $\langle \Gamma; \mathsf{R}\rangle$, if there is a $\langle \Delta \cup \Gamma; \mathsf{R}\rangle$-inference all extendable leaves of which are labeled by α, that is, if $\Delta \cup \Gamma \mathrel{|\!\sim_{\mathsf{R}}} \alpha$.

Note that if a protoinference does not contain any extendable leaves, that is, all its leaves are labeled by $\blacktriangle$, this protoinference is an inference of any statement.

Roughly speaking, α is derivable from Δ if after we have considered every case arisen in the inference, we either have derived α, or we have arrived at a contradiction.

Proposition 7. Any pair $\mathcal{D} = \langle \Gamma; \mathsf{R}\rangle$ consisting of a nonempty set of statements Γ and a set of rules R, defines a unified logic:

$$\Delta \vdash_{\mathcal{D}} \alpha \qquad \leftrightharpoons \qquad \alpha \text{ is derivable from } \Delta \text{ by } \langle \Gamma; \mathsf{R}\rangle.$$

Proof. Properties (R),(M),(C),(P) from Definition 1 are evident.

To prove (T), assume that $\mathfrak{I}$ is an inference of α from Γ, and $\mathfrak{I}'$ is an inference of β from α, Δ. Without loss of generality, we can assume that in $\mathfrak{I}'$ the root labeled by $\blacktriangledown$ has a unique successor labeled by α. Let $\mathfrak{I}'_\alpha$ be a tree obtained from $\mathfrak{I}'$ by removing the root. It is clear that $\mathfrak{I}'_\alpha$ is a rooted labeled tree and its root is labeled by α.

Now we can construct a desired inference $\mathfrak{I}+\mathfrak{I}'$ of β from Γ, Δ by identifying the leaves of $\mathfrak{I}$ labeled by α with the root of $\mathfrak{I}'_\alpha$ (Fig. 2). ■

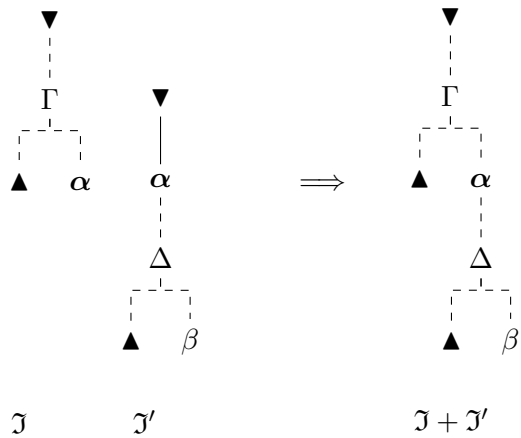


Fig. 2. Transitivity

4. Standard Unified Deductive Systems

Usually logics are defined either by semantic means — matrices, algebras, Kripke models, etc. — or by syntactic means, the deductive systems. Now we are on a position to define the unified deductive systems.

4.1. Unified deductive systems

Definition 5. Unified deductive system is an ordered pair $\langle \mathsf{Ax}; \mathsf{R}^s \rangle$, where Γ is a nonempty set of statements, and R is a set of m-rules. The positive statements from Ax are *axioms*, while the negative statements from Γ are *anti-axioms*.

Example 3. Łukasiewicz's logic with refutation can be defined by the following unified deductive system $\mathcal{C}$:

$$\begin{array}{ll} \text{axioms:} & \{\oplus p \to (q \to p), \\ & \oplus(p \to (q \to r) \to ((p \to q) \to (p \to r))), \\ & \oplus((\neg p \to \neg q) \to (q \to p))\} \\ \text{anti-axiom:} & \{\ominus p\} \\ \text{rules:} & \{\mathsf{MP}, \mathsf{MT}\} \cup \{\mathsf{Sb}, \mathsf{RS}\} \end{array}$$

By Proposition 7, every unified deductive system $\mathcal{D} = \langle \mathsf{Ax}; \mathsf{R}^s \rangle$ defines a unified logic $\vdash_{\mathcal{D}}$, the theses of which we denote by $\mathsf{Th}^+_{\mathcal{D}}$ and $\mathsf{Th}^-_{\mathcal{D}}$, while the sets of theorems and anti-theorems are denoted by $\mathsf{L}^+_{\mathcal{D}}$ and $\mathsf{L}^-_{\mathcal{D}}$.

Let us observe that the set $\mathsf{Th}^+_{\mathcal{D}}$ and consequently, $\mathsf{L}^+_{\mathcal{D}}$ is closed with regard to Sb, and the set $\mathsf{Th}^-_{\mathcal{D}}$ and consequently, $\mathsf{L}^-_{\mathcal{D}}$ is closed relative to RS.

Let $\mathsf{L}^+, \mathsf{L}^- \subseteq \mathsf{Frm}$. An ordered pair $\mathsf{L} = (\mathsf{L}^+, \mathsf{L}^-)$ is *substitutionally closed* (s-closed for short) if L^+ is closed w.r.t. Sb and L^- is closed w.r.t. RS. Clearly, for each s-closed pair $\mathsf{L} = (\mathsf{L}^+, \mathsf{L}^-)$, there is a unified deductive system $\mathcal{D}$ such that $\mathsf{L}^+_{\mathcal{D}} = \mathsf{L}^+$ and $\mathsf{L}^-_{\mathcal{D}} = \mathsf{L}^-$, and we say that $\mathcal{D}$ is *Ł-adequate* for L.

For instance, unified deductive system $\mathcal{C}$ from Example 3 is Ł-adequate for $(\mathsf{L}^+, \mathsf{L}^-)$, where L^+ is a set of all classical tautologies, and L^- is a set of all non-tautologies.

Example 4. Let IPC^+ be a set of statements obtained by preceding by $\oplus$ every axiom of the Intuitionistic propositional logic. Let us consider the unified deductive system $\mathcal{D} = \langle \mathsf{Ax}; \mathsf{R}^s \rangle$, where $\mathsf{Ax}^+ = \mathsf{IPC}^+ \cup \{\oplus((\neg q \to p) \to (((p \to q) \to p) \to p))\}$, $\mathsf{Ax}^- = \{\ominus(\neg\neg p \to p)\}$ and $\mathsf{R}^s = \{\mathsf{MP}, \mathsf{MT}, \mathsf{Sb}, \mathsf{RS}\}$. The unified logic defined by $\mathcal{D}$ gives an Ł-complete axiomatization of the logic of the three element Heyting algebra.

4.2. Derivation of rules

Let R be a set of rules and $\mathsf{r} = \Gamma/\Delta$ be a rule. We say that r *is derivable* from R or r is *reducible* to R (in symbols $\mathsf{R} \vdash \mathsf{r}$), if there is a $\langle \Gamma; \mathsf{R} \rangle$-protoinference all extendable leaves of which contain statements only from Δ, that is, if $\Gamma \mathrel{|\!\sim}_{\mathsf{R}} \Delta$.

If R is a set of rules and r, r' are the rules, we say that r is *derivable from* r' or r is *reducible* to r' *relative* to R (in symbols $\mathsf{r}' \vdash_{\mathsf{R}} \mathsf{r}$), if

$$\mathsf{R}, \mathsf{r}' \vdash \mathsf{r}.$$

$\mathsf{r}' \vdash_{\mathsf{R}} \mathsf{r}$ means that in any protoinference, every application of rule r can be replaced with the suitable applications of rules R and r'. In other words, rule r can be eliminated from any protoinference and replaced by rules R, r'.

The rules Co and Fu allow to derive the different variations of a given rule from each other. Let $\mathsf{S} = \{\mathsf{Co}, \mathsf{Fu}\}$.

Proposition 8. The following holds:

$$(a) \quad \mathsf{Sb} \vdash_{\mathsf{S}} \mathsf{RS};$$
$$(b) \quad \mathsf{MP} \vdash_{\mathsf{S}} \mathsf{MT};$$

If the signature contains $\neg$ and $\mathsf{Ex} = \oplus p, \oplus\neg p/\blacktriangle$ and $\mathsf{S}' = \mathsf{S} \cup \{\mathsf{Sb}, \mathsf{Ex}\}$, then

$$(c) \quad \blacktriangledown \vdash_{\mathsf{S}'} \ominus p.$$

We need to prove (a) $\ominus\sigma A \mathrel{|\!\sim}_{\mathsf{S}} \ominus A$, (b) $\oplus(A \to B), \ominus B \mathrel{|\!\sim}_{\mathsf{S}} \ominus A$, and (c) $\blacktriangledown \mathrel{|\!\sim} \mathsf{S}' \ominus p$. The proofs are depicted in Table 1.

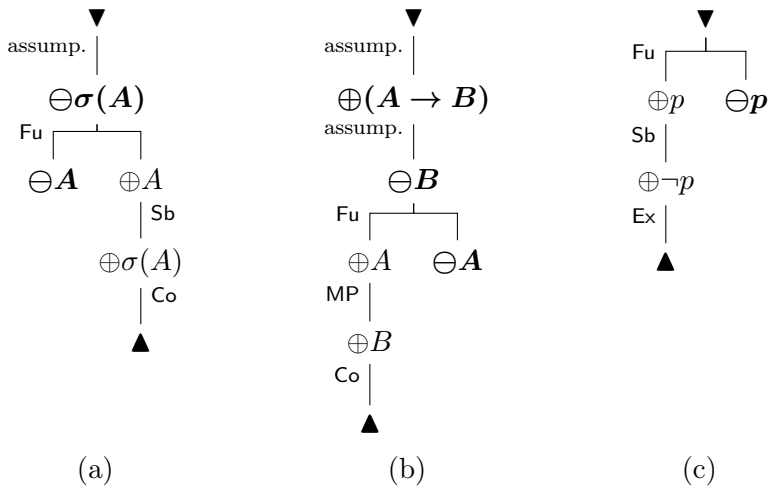


Table 1. Reductions

Example 5. Łukasiewicz's classical logic with refutation can be defined by any of the following unified deductive systems:

axioms:	$\{\oplus p \to (q \to p),$
	$\oplus(p \to (q \to r) \to ((p \to q) \to (p \to r))),$
	$\oplus((\neg p \to \neg q) \to (q \to p))\}$
anti-axiom:	$\{\ominus p\}$
rules:	$\{\mathsf{MP}, \mathsf{Co}, \mathsf{Fu}, \mathsf{Sb}\}$

or

axioms:	$\{\oplus p \to (q \to p),$
	$\oplus(p \to (q \to r) \to ((p \to q) \to (p \to r))),$
	$\oplus((\neg p \to \neg q) \to (q \to p))\}$
rules:	$\{\mathsf{MP}, \mathsf{Co}, \mathsf{Fu}, \mathsf{Sb}, \mathsf{Ex}\}$

Remark 2. There is a very important difference between the traditional deductive systems in which axioms are formulas and rules allow to derive formulas from formulas, and unified deductive systems. In the traditional deductive system, any axiom A can be converted into a rule $\varnothing/A$. In the unified deductive systems, any positive axiom $\oplus A$ can be converted into a rule $\blacktriangledown/\oplus A$, while anti-axioms may not be replaceable by the rules. For instance, $\ominus p$ cannot be replaced either by $\blacktriangledown/\ominus p$, or by $\ominus p/\blacktriangle$.

4.3. Standard deductive systems

A unified deductive system $\mathcal{D}$ is *conventional* if it defines a conventional unified logic, that is, full and coherent logic. $\mathcal{D}$ is conventional if and only if the rules Co and Fu are admissible in it.

Definition 6. Let $\mathcal{D} = \langle \mathsf{Ax}; \mathsf{R}^s \rangle$ be a unified deductive system. A rule r is *derivable from a set of rules* R' *relative to* $\mathcal{D}$ (in symbols, $\mathsf{R}' \vdash_{\mathcal{D}} \mathsf{r}$), if $\mathsf{R}' \vdash_{\mathsf{R}} \mathsf{r}$. A rule r is derivable in $\mathcal{D}$ if $\vdash_{\mathcal{D}} \mathsf{r}$.

Let us point out that to derive rule r from R' relative to $\mathcal{D}$, we use only m-rules of $\mathcal{D}$ and we do not use axioms or rules Sb, RS. The reason for that is that use of anti-axioms in the derivations of rules may lead to undesirable consequences. For instance, the use if anti-axiom $\ominus p$ in the first unified deductive system from Example 5 would allow to derive the rule $\blacktriangledown/\ominus p$ and subsequently, to derive $\ominus(p \to p)$.

Definition 7. A unified deductive system is *standard* if the rules Co and Fu are derivable in it. In particular, every unified deductive system in which the rules Co and Fu are postulated is standard.

In contrast to conclusive rules, a derivable inconclusive rule needs not to be admissible. The rule of fullness $\mathsf{Fu} = \blacktriangledown/\oplus p, \ominus p$ is inconclusive, thus, even if it is derivable in a unified logic, it may be not admissible for it. On the other hand, because rule $\mathsf{Co} = \oplus p, \ominus p/\blacktriangle$ is conclusive, it is admissible in every standard deductive system and hence, every standard deductive system is coherent (while needs not to be full.)

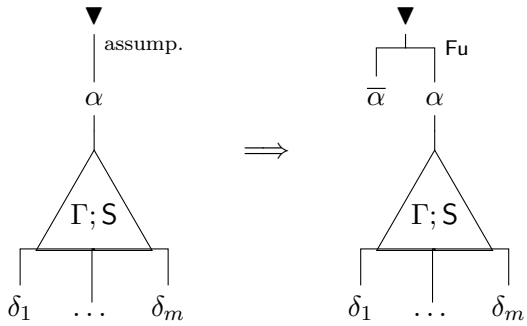
Theorem 1 (About Symmetry)**.** *Let* $\mathsf{S} = \{\mathsf{Co}, \mathsf{Fu}\}$, Γ, Δ *be finite sets of statements and* α *be a statement. Then,*

$$\begin{array}{llrlll} (a) & \textit{if} & \alpha, \Gamma & \mathrel{|\!\sim}_{\mathsf{S}} \Delta, & \textit{then} & \Gamma \mathrel{|\!\sim}_{\mathsf{S}} \Delta, \overline{\alpha}; \\ (b) & \textit{if} & \Gamma & \mathrel{|\!\sim}_{\mathsf{S}} \Delta, \overline{\alpha}, & \textit{then} & \alpha, \Gamma \mathrel{|\!\sim}_{\mathsf{S}} \Delta. \end{array}$$

Proof. (a) If $\alpha = \blacktriangledown$, then by Propositions 6(a) and (b), $\blacktriangledown, \Gamma \mathrel{|\!\sim}_{\mathsf{S}} \Delta$ if and only if $\Gamma \mathrel{|\!\sim}_{\mathsf{S}} \Delta$ and if and only if $\Gamma \mathrel{|\!\sim}_{\mathsf{S}} \Delta, \blacktriangle$.

If $\alpha = \blacktriangle$, by Proposition 6(d) and (c), $\blacktriangle, \Gamma \vdash\!\sim_{\mathsf{S}} \Delta$ and $\Gamma \vdash\!\sim_{\mathsf{S}} \blacktriangledown, \Delta$ both hold.

Suppose that α is a proper statement and $\mathfrak{I}$ is a $\langle \alpha, \Gamma; \mathsf{S}\rangle$-protoinference of Δ. Without loosing generality, one can assume that the root of $\mathfrak{I}$ marked by $\blacktriangledown$ has a unique successor marked by α. The proof follows from the observation that one can construct a $\langle \Gamma; \mathsf{S}\rangle$-protoinference $\mathfrak{I}'$ of $\overline{\alpha}, \Delta$ by applying Fu to $\blacktriangledown$ and then, attaching $\mathfrak{I}$ by identifying $\oplus\alpha$ with the node of $\mathfrak{I}$ marked by α:



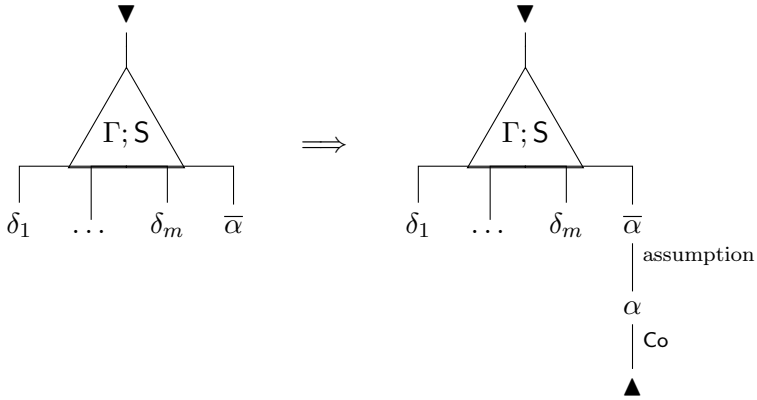
It is not hard to see that the obtained tree $\mathfrak{I}'$ is indeed a $\langle \Gamma; \mathsf{S}\rangle$-protoinference of $\overline{\alpha}, \Delta$.

(b) If $\alpha = \blacktriangledown$, by Proposition 6(c) and (d), $\Gamma \vdash\!\sim_{\mathsf{S}} \blacktriangledown, \Delta$ and $\blacktriangle, \Gamma \vdash\!\sim_{\mathsf{S}} \Delta$ both hold.

If $\alpha = \blacktriangle$, then by Propositions 6(b) and (a), $\Gamma \vdash\!\sim_{\mathsf{S}} \Delta, \blacktriangle$ if and only if $\Gamma \vdash\!\sim_{\mathsf{S}} \Delta$ if and only if $\blacktriangledown, \Gamma \vdash\!\sim_{\mathsf{S}} \Delta$.

Suppose that α is a proper statement and $\mathfrak{I}$ is a $\langle \Gamma; \mathsf{S}\rangle$-protoinference of $\Delta, \overline{\alpha}$. Consider two cases: (i) $\mathfrak{I}$ contains a leaf labeled by $\overline{\alpha}$, and (ii) $\mathfrak{I}$ does not contain a leaf labeled by $\overline{\alpha}$.

(i) The proof follows from the following observation: to construct a $\langle \alpha, \Gamma; \mathsf{S}\rangle$-protoinference $\mathfrak{I}'$ of Δ, because α is an assumption, one can extend every leaf of $\mathfrak{I}$ labeled by $\overline{\alpha}$ with a leaf labeled by α and then apply Co:



It is not hard to see that the obtained tree $\mathfrak{I}'$ is indeed a $\langle \alpha, \Gamma; \mathsf{S} \rangle$-protoinference of Δ.

(ii) Suppose that $\mathfrak{I}$ does not contain a leaf labeled by $\overline{\alpha}$. Thus, only members of Δ appear in the leaves of $\mathfrak{I}$ and hence, $\mathfrak{I}$ is a $\mathcal{D}$-protoinference of Δ from Γ. Then, by (1), $\mathfrak{I}$ is a $\mathcal{D}$-protoinference of Δ from α, Γ. ■

Theorem 1 yields some important consequences.

Corollary 2. Let $\mathcal{D}$ be a standard unified deductive system, Γ, Δ be finite nonempty sets of statements and α be a statement. Then,

$$\begin{array}{llllll} \text{(a)} & \text{if} & \alpha, \Gamma & \vdash_{\mathcal{D}} \Delta, & \text{then} & \Gamma \vdash_{\mathcal{D}} \Delta, \overline{\alpha}; \\ \text{(b)} & \text{if} & \Gamma & \vdash_{\mathcal{D}} \Delta, \overline{\alpha}, & \text{then} & \alpha, \Gamma \vdash_{\mathcal{D}} \Delta. \end{array}$$

Corollary 3. Let $\mathcal{D}$ be a standard unified deductive system and Γ, Δ be finite sets of statements. Then,

$$\text{if } \Gamma \vdash_{\mathcal{D}} \Delta, \text{ then } \overline{\Delta} \vdash_{\mathcal{D}} \overline{\Gamma}.$$

In particular, for any statements α and β,

$$\text{if } \alpha \vdash_{\mathcal{D}} \beta, \text{ then } \overline{\beta} \vdash_{\mathcal{D}} \overline{\alpha}.$$

Corollary 4. Let $\mathcal{D}$ be a standard unified deductive system, Γ, Δ be finite nonempty sets of statements and α be a statement. Then,

$$\Gamma, \alpha/\Delta \vdash_{\mathcal{D}} \Gamma/\Delta, \overline{\alpha} \qquad \text{and} \qquad \Gamma/\Delta, \alpha \vdash_{\mathcal{D}} \Gamma, \overline{\alpha}/\Delta.$$

Two deductive systems $\mathcal{D}_0$ and $\mathcal{D}_1$ are *equivalent* if for any finite sets of statements Γ and Δ,

$$\Gamma \vdash_{\mathcal{D}_0} \Delta \text{ if and only if } \Gamma \vdash_{\mathcal{D}_1} \Delta.$$

Corollary 5. Every standard unified deductive system has an equivalent standard unified deductive system all the rules of which, except for Co and Fu, have no negative statements.

Let us note that Corollary 5 states that any unified deductive system can be transformed into a deductive system containing (except for Fu and Co) only the ordinary rules (without negative statements) and in a way, such a deductive system realizes the Carnap approach to proving rejections with Co used instead of Modus Tollens. If all rules of a unified deductive system except for Fu and Co are positive, Fu can be eliminated from any inference, while, because Co has ▲ as a single conclusion, every applications of Co is always the last application of a rule on a branch of the inference.

Corollary 6. Every standard unified deductive system has an equivalent standard unified deductive system, every m-rule of which, except maybe for Fu, is conclusive.

Recall that all derivable conclusive rules are admissible. Thus, Corollary 7 entails the following.

Corollary 7. In every standard unified deductive system, all postulated m-rules except maybe for Fu, are admissible.

4.4. Conclusion

As we saw, the rules of fullness and coherence are playing a special role in unified deductive system. Despite the fact that they are the reverse of each other, these rules express different principles, namely,

- the rule of fullness $\blacktriangledown/\oplus p, \ominus p$ (and not $\blacktriangledown/\oplus p, \oplus\neg p$, or $\blacktriangledown/\oplus(p \vee \neg p)$) expresses the Law of Excluded Middle:

  Every proposition is asserted or rejected;

- accordingly, the rule of coherence $\oplus p, \ominus p/\blacktriangle$ expresses the Law of Non-Contradiction:

  No proposition is asserted and rejected at the same time.

The laws of Excluded Middle and Non-Contradictions are not about negation: we may have them for the systems without negation.

Postulating rules of fullness and coherence in a deductive system makes derivations in such a system "reversible", and this allows to reduce any rule (except of the rule of coherence) to rules without negative assumptions or conclusions. In addition, any rule in such a system (except for the rules of fullness and coherence) can be reduced to a conclusive rule. This explains perhaps why we do not use the multiple-conclusion rules that often: implicitly, outside of the formal deductive system, we use the rules of fullness and coherence.

References

Bochvar, 1939 – Bochvar, D.A. "On a three valued calculus and its application to the analysis of contradictories", *Matematicheskii Sbornik*, 1939, Vol. 4, No. 2, pp. 287–308.

Carnap, 1942 – Carnap, R. *Introduction to Semantics.* Harvard University Press, Cambridge, Mass, 1942.

Carnap, 1943 – Carnap, R. *Formalization of Logic.* Harvard University Press, Cambridge, Mass, 1943.

Citkin, 2015 – Citkin, A. "A meta-logic of inference rules: syntax", *Log. Log. Philos.*, 2015, Vol. 24, No. 3, pp. 313–337.

Goranko, 2019 – Goranko, V. "Hybrid deduction-refutation systems", *Axioms*, 2019, Vol. 8, No. 4, p. 118.

Goranko et al., 2020 – Goranko, V., Pulcini, G., and Skura, T. "Refutation systems: An overview and some applications to philosophical logics", in: Liu, F., Ono, H., and Yu, J. (eds.) *Knowledge, Proof and Dynamics*, Logic in Asia. Springer, Singapore, 2020, pp. 173–197.

Kracht, 2010 – Kracht, M. "Judgment and consequence relations", *J. Appl. Non-Classical Logics*, 2010, Vol. 20, No. 4, pp. 423–435.

Łukasiewicz, Jan, 1970 – Łukasiewicz, J. "Two-valued logic", in: Borkowski, L., (ed.) *Selected Works*, Studies in Logic and the Foundations of Mathematics. North-Holland, 1970, pp. 89–109. Translation of 1921 paper in Polish.

Pavlov, 2004 – Pavlov, S. *Logika s operatorami istinnosti i lozhnosti* [Logic with truth and falsehood operators]. Institute of Philosophy RAN, 2004. (In Russian)

Pavlov, 2011 – Pavlov, S. "The logic with truth and falsehood operators from a point of view of universal logic", *Log. Univers.*, 2011, Vol. 5, No. 2, pp. 319–325.

Restall, 2015 – Restall, G. "Assertion, denial, accepting, rejecting, symmetry, and paradox", in: Carter, C.R. and Hjortland, O.T. (eds.), *Foundations of Logical Consequence*. Oxford University Press, 2015, pp. 310–321.

Rumfitt, 2000 – Rumfitt, I. " 'Yes' and 'No' ", *Mind*, 2000, Vol. 109, No. 436, pp. 781–823.

Scott, 1974 – Scott, D.S. "Rules and derived rules", in: Stenlund, S., editor, *Logical Theory and Semantic Analysis, Essays dedicated to Stig Kanger*. D. Reidel Publishing Company, 1974, pp. 147–161.

Shoesmith and Smiley, 2008 – Shoesmith, D.J. and Smiley, T.J. *Multiple-conclusion logic*. Cambridge University Press, Cambridge, 2008. Reprint of the 1978 original [MR0500331].

Skura, 2011 – Skura, T. "Refutation systems in propositional logic", in: Gabbay, D. M. and Guenthner, F., editors, *Handbook of Philosophical Logic*, volume 16 of *Handbook of Philosophical Logic*. Springer Netherlands, 2011, pp. 115–157.

Smiley, 1996 – Smiley, T. "Rejection", *Analysis (Oxford)*, 1996, Vol. 56, No. 1, pp. 1–9.

Staszek, 1971 – Staszek, W. "On proofs of rejection", *Studia Logica*, 1971, Vol. 29, pp. 17–25.

Torben, 2011 – Torben, B. *Hybrid Logic and its Proof-Theory*. Springer, 2011.

von Wright, 1987 – von Wright, G. "Truth-logic", *Logique et Analyse*, 1987, Vol. 30, No. 120, pp. 311–334.

Wybraniec-Skardowska, 2018 – Wybraniec-Skardowska, U. "Rejection in Łukasiewicz's and Słupecki's sense", in: *The Lvov-Warsaw school. Past and present*, Stud. Univers. Log. Birkhäuser/Springer, Cham, 2018, pp. 575–597.

Логические исследования
2020. Т. 26. № 2. С. 106–115
УДК 16

Logical Investigations
2020, Vol. 26, No. 2, pp. 106–115
DOI: 10.21146/2074-1472-2020-26-2-106-115

Mariusz Urbański

Formal modeling of human reasoning: errors, limitations and Baconian bees

Mariusz Urbański
Adam Mickiewicz University,
ul. Wieniawskiego 1 61-712 Poznań, Poland.
E-mail: Mariusz.Urbanski@amu.edu.pl

Abstract: Since the end of the XX century we are witnessing a practical, or cognitive, turn in logic. Drawing on enormous achievements brought about by the mathematical turn that started more than a hundred years ago, logic now has came back to its Artistotelian roots as an instrument by which we come to know anything. The re-forged alliance between logic — now well equipped with sophisticated formal tools — and psychology results in more and more substantial developments in studies on human reasoning and problem solving. To reap the fruits of this alliance we need to be aware that it leads to a shift in focal points of interest of such studies as well as to expansion of their methodological repertoire. In this paper I argue that the practical turn in logic results in: (1) the concept of error becoming crucial for formal modeling of human reasoning processes, (2) prescriptive perspective, which takes into account human limitations in information processing, becoming the most interesting vantage point for such research and (3) triangulation of formal methods, quantitative approach and qualitative analyses becoming most effective methodology in formal modeling studies.

Keywords: practical turn in logic, formal modeling, error, reasoning

For citation: Urbański M. "Formal modeling of human reasoning: errors, limitations and Baconian bees", *Logicheskie Issledovaniya / Logical Investigations*, 2020, Vol. 26, No. 2, pp. 106–115. DOI: 10.21146/2074-1472-2020-26-2-106-115

1. Where from, where to?

It has been a long journey for logic. It started with the Aristotelian idea of logic as an instrument (the 'organon') by means of which we come to know anything. Logic went down this path for a long, long time, finally reaching the psychologistic stance that "logic is the part of psychology that investigates relations between thinking and the reality" [Beneke, 1832, p. 12], that it is "the branch of inquiry [...] in which the act of the mind in reasoning is considered" [de Morgan, 1847, p. 26], that it searches for "the fundamental laws of those

© Urbański M.

operations of the mind by which reasoning is performed [and] some probable intimations concerning the nature and constitution of the human mind" [Boole, 1854, p. 1]. But shortly afterwards logic has fallen into antipsychologistic chasm in which Frege [Frege, 1884, p. 38] claimed that logic (and mathematics) is the most exact of all sciences, while psychology is imprecise and vague, and Husserl [Husserl, 1901, §§19–23] added that actual thinking is not driven by the laws of logic. Thus, the one has nothing to do with the other. As a result, logicians and psychologists started to behave "like men and women in the orthodox synagogue. Each group knows of the existence of other, but ignoring the fact is considered a proper form of behavior" [Macnamara, 1986, p. 1]. Logicians claimed that logic is not a science of reasoning. At most, one of the objects of its interests may be correctness of thinking, related to criteria based on objective — and therefore non-psychological — characteristics of linguistic expressions, such as their structure, or logical values. Psychologists, in turn, eagerly agreed that logic is not a science of reasoning, and added that it is completely useless in analysis of their correctness, since objective criteria set forth by logic are completely unrealistic and do not fit to how people really think. However, it soon turned out that the chasm is in fact a diamond mine and that mathematical turn in logic brought enormous developments in conceptual clarity, tools available as well as their sharpness and precision. Step by step – with Tarski's formal semantics, Gödel limitations theorems, developments in philosophical logic, logical pragmatics, logic in AI and even proper logical analysis of fallacies – logical theories and systems started to look like a useful tool for real-life applications. Diamonds in the mine are just some hard objects and their true beauty demands sunlight to be appreciated. Thus, here we go again with the idea of logic as an instrument. With this practical [Gabbay and Woods, 2005], or cognitive [Urbański, 2011] turn logic aquires a new task of "systematically keeping track of changing representations of information" [van Benthem, 2008, p. 73] (and not only linguistic representations), and it becomes more and more capable of modeling actual cognitive activity of real life agents. The New Psychologism, or Cognitivism, claims that it is not the case that logic has nothing to do with how we think and also contests the claim that distinction between descriptive and normative account on analysis of reasoning is disjoint and exhaustive. Twelve years ago van Benthem [Ibid., p. 77] imagined "a world where a logician who has created a new logical system does two things instead of one: like now, submit to a logic conference, usually far abroad, but also: telephone the psychologist next door to see if some new nice experiment can be done". Today we are even talking to each other face to face (see [Stenning and van Lambalgen, 2008; Zajenkowski et al., 2014; Żelechowska et al., 2020] for instructive examples).

2. What is the Precious?

But now: what the topic of these conversations should be? We, who are interested in formal modeling of human reasoning, in identifying regularities in human problem-solving which can be accounted for by logic — what exactly are we supposed to be focusing on? One obvious answer is, that we should be looking for norms against which quality of human reasoning may be evaluated. Establishing such norms allows for correctness of reasoning to be defined, allows for comparative assessment of both the process — reasoning — and the product — conclusions — to be carried out. As a result we would be able to discriminate between what's good and what's bad in human reasoning, what's safe and what's not from the point of view of knowledge development, what — ultimately — brings us closer to, well, the Truth. And this is a legitimate and well justified approach. However, I'd like to propose a different standpoint. If we are interested in looking through the window into reasoning processes and in learning about what humans really do while processing information, and if we are interested in how they could perform better, then our Holy Grail is the flipside of normative correctness: it is the error. It is the error which offers us an insight into how humans solve problems, how they process information, how they reason. If all the experimenters have access to in their studies are data — solutions to reasoning tasks — that are correct from a normative point of view, then all they know is that their subjects are probably well educated in formal methods, like logic, programming or so. More often than not the tasks themselves are not exemplary of real life problem-solving, so correct solutions do not tell much about real life problem-solving either. Analyses of errors, systematic errors in particular, allow to apply our very sophisticated formal tools to model actual reasoning processes.

Certainly, in order to identify something as an error you need to relate it to some concept of correctness. Thus, I am not claiming that we should abandon studies of formal logical systems: they are indispensable if we're going to step beyond idiographic studies of particular episodes of reasoning into the realm of modeling inter-subject regularities of information processing. What I am claiming is, that it is error in reasoning which lets us learn what these inter-subject regularities really are. So, it is more like a matter of where to start and how to proceed: top-down, implementing some standard of correctness, or bottom-up, identifying it with a little help of the data. I prefer the latter approach.

The concept of norm and normative correctness is somewhat ambiguous. Some time ago we abandoned the idea of deduction as the normative yardstick for evaluation of reasoning quality [Evans, 2012]. Now we have a plethora of different accounts on information processing which offer different takes on

what does it mean for a reasoning to be correct (or, at least, more correct than others). To some extent the same holds in case of the concept of error. However, in case of error the ambiguity stems not just from the fact that there are so many normative standards available against which a reasoner may sin. There are many substantially different modes of erring in reasoning. I shall identify just a couple of them. In that, I'll employ an abstract characteristic of the logical structure of reasoning, proposed by [Kurtz et al., 1999]:

$$y = F(x, k)$$

In this schema y represents the inferential product of the reasoning process (the conclusion). F stands for a summary of the set of computational tools used to manipulate, recombine or transform the input information. The initial available information (the premises) is represented by x. Finally, k stands for stored knowledge and experience, not identified explicitly as a part of x.

Now let's turn to the modes of erring in reasoning.

1. Your conclusion does not follow from your premises, which means that your F is faulty. This is probably the most obvious possible mode of error to be construed. It begs the question: in what sense of 'follow', exactly? Which concept of entailment is violated?

2. Your premises are not sufficiently justified: reliability of this particular x is dubious. This raises the issue of what does it mean to be sufficiently justified?

3. You misinterpreted the premises: your x is not exactly what you consider it to be. A good example here is deontological interpretation of the rule in the Wason Selection Task in the abstract setting [Stenning and van Lambalgen, 2008, see ch. 3], but with a caveat: what is a misinterpretation from the point of view of the eager experimenter need not to be such from the point of view of the subject.

4. You misconstrued the task: you applied F which is not best suited for what you were supposed to perform. It's a kind of exam pitfall, when e.g. the students asked to compare concepts A and B just give their definitions instead.

5. Your reasoning leads you to some kind of wilderness, or desert, or snake pit. It's again an F-related problem: we usually reason not just for the sheer fun of the act, but in a goal-directed manner, with some purpose guiding the process. This issue has a lot to do with Hintikka's [Hintikka, 2007] distinction of definitory rules (which are merely permissive, like in

deduction) vs strategic rules (which tell what to do in order increase one's chances of reaching the goal).

6. You are not able to gather information needed to even start the reasoning. Here F does not kick of with the available x, so to speak, or you lack appropriate k: this is the Holmesian 'I need data!'.

7. You ask for information which is not needed for your purposes: your x is not relevant to the task at hand (which is kind of the flipside of the previous one).

8. You're not able to process the amount of information needed in the time available. This is an F issue, but significantly going beyond the abstract account of [Kurtz et al., 1999]: our bounded resources enter the picture here, again related to the Hintikka's strategic perspective and also to the Peircean distinction of corrolarial vs theoremic reasoning [Levy, 1997]. This may be just a selection or an ability issue.

9. You don't know which tool to use, how to process your initial information: F issue again, more ability- than just selection-related.

3. What is the measure?

An error in reasoning occurs because an agent fails to meet certain criteria of correctness. What are they, then? What type of yardstick are we going to use in order to assess quality of reasoning? [Stanovich, 1999] introduced a useful distinction between three types of rules which may be used to this end; *a fortiori*, these are also three different perspectives in research on the topic (see also [Stenning and van Lambalgen, 2008, p. 6]):

- normative rules, that account for reasoning as it ideally should be;
- descriptive rules, that address reasoning as it is actualy practiced;
- prescriptive rules, that result from taking into account our bounded rationality, i.e., computational limitations and storage limitations.

Logicians are probably not that much interested in descriptive rules (unlike psychologists, cognitive scientists or argumentation theorists), but along normative rules, prescriptive ones are of interests to them. We the humans have neither all the time in the world nor all the computational power needed to solve our problems by reasoning, thus we should be very much interested in answering the question: What is the best use to which humans may put their bounded reasoning and problem solving resources? Van Benthem captures this

idea with his remark that what is now of crucial importance to logic is not the static notion of correctness, but the dynamic one of correction and with the following claim:

> Logic is of course not experimental, or even theoretical, psychology, and it approaches human reasoning with purposes of its own. And a logical theory is not useless if people do not quite behave according to it. But the boundary is delicate. And I think the following should be obvious: if logical theory were totally disjoint from actual reasoning, it would be no use at all, for whatever purpose! [van Benthem, 2008, p. 69]

But then another issue arises instantly: what exactly can we achieve with our formal models being applied to human reasoning processes? What types of regularities can we discover? Again, Stanovich [Stanovich, 1999, pp. 4–9] together with Stenning and van Lambalgen [Stenning and van Lambalgen, 2008, pp. 6–7] offer a useful frame to determine one's position on this issue in terms of four possible stances on the relationship between reasoning and normative/prescriptive standards:

- Panglossian: Human reasoning competence and performance is actually normatively correct. What appears to be incorrect reasoning can be explained by such maneuvers as different task construal, a different interpretation of logical terms, etc.
- Apologist: Actual human performance follows prescriptive rules, but the latter are in general (and necessarily) subnormal, because of the heavy computational demands of normatively correct reasoning.
- Meliorist: Actual human reasoning falls short of prescriptive standards, which are themselves subnormal; there is therefore much room for improvement by suitable education.
- Eliminativist: Reasoning rarely happens in real life, and mainly in institutional contexts such as schools. By contrast, true rationality is adaptiveness: we have developed "fast and frugal algorithms" which allow us to take quick decisions which are optimal given constraints of time and energy.

At this point it should be obvious that wherever we start, from the top or from the bottom, at some point we cannot anymore ignore the concept of a standard, against which human performance in reasoning could be evaluated.

One trouble is that the Sun of classical logic is no longer the center of the logical universe. Even the Milky Way of logics employing a monotonic version of entailment is but a set of options to be chosen or not. With mathematicised logical systems developed so widely and deeply we have now a tool for every occasion: in fact one can probably model any way of processing information by using logical tools. So, are there any errors in reasoning — really? Isn't it that Panglossians are right, albeit not in their intended way: you may always find some norm according to which your reasoning will be correct, thus anything goes? And what about prescriptive standard becoming a kind of acting norm in lack of the proper one? One possible argument would be that it is a matter of selection of the contextually appropriate standard. But this is a fast-track slippery slope into a version of Aristotelian third man argument. Apparently, fundamental issues of the philosophy of science are inescapable in science. With the bottom-up approach I prefer to stay low, down-to-earth even, endorsing a position quite close to Haack's [Haack, 1993] foundherentism, imposing two kinds of constraints on each epistemic decision (as Haack does on rational belief): experiential anchoring and explanatory integration. Thus, I claim that an appropriate methodology for (mind you, interdisciplinary) research on modeling real human reasoning must involve a careful system of checks and balances of formal and computational methods, qualitative analyses and statistical quantitative approach. Such a triangulation brings about its own problems, but safeguards that reasonable amount of attention is paid to intertwined data of different character, as witnessed in, e.g., [Urbański et al., 2016; Urbański and Grzelak, 2019; Żelechowska et al., 2020].

Research so construed are located somewhere inbetween Apologist and Meliorist stances, probably closer to the latter. Occasionally we reach prescriptive standards in reasoning, but this requires some effort. Thus, more often that not we fall short of them, and there is plenty of room for appropriate logical/critical thinking education [Kisielewska et al., 2016].

4. A paradigm shift

In [Urbański and Klawiter, 2018, pp. 588–590] we have argued that there are three types of questions answers to which could be of interest in any scientific endeavour. The first one is substantialist question: What is X? This is a question concerning the essence, or nature, or definition of a phenomenon or object under consideration. The second, functionalist question asks: What X is for? What is its function? Finally, the instrumentalist question concerns the use of X: how it is used? The focus on substantialist question is the key feature of what [Evans, 2012] identifies as the 'old' paradigm in the research on deduction. It starts with logical entailment as its constitutive property

and only eventually proceeds to noticing that deduction is sometimes used in episodes of real reasoning. The 'new' paradigm, characterized by a situated approach, starts with the identification of the contexts in which deduction is used. Within this new paradigm reasoning, judgement, decision making are viewed as involving similar processes. As a result, within the new paradigm deduction loses its privileged status as the ultimate normative yardstick for the evaluation of the correctness of reasoning and becomes more a strategic concept, "a form of reasoning that high-ability participants might engage in when suitably instructed and motivated to make deductive effort. [...] Rather than being a built-in function of the human mind, deductive reasoning can be seen as just one of many kinds of problem solving and formal thinking in which people of sufficient IQ can engage" [Evans, 2012, pp. 7–8]. *Mutatis mutandis*, a similar shift may be observed in case of other types of reasoning, although not in all the cases the analogy is exact. In case deduction or induction we do have precise answers to substantialist question. Thus, we may start with the definition of the type of reasoning in question, go to the data, if needed, and then go back, if necessary. It's different in case of, for example, abduction. There is no satisfactory (that is, most of all, commonly accepted) answer to the substantialist question concerning abduction: we do not have a precise definition of this type of reasoning. What we have is just some general schema proposed by Peirce [Peirce, 1958, 5.189], that may be interpreted in a number of ways. In this case to start with the data is indispensable: it is an answer to the instrumentalist question which is of crucial importance, an answer to the functionalist question is a derivative and to the substantialist question — a nice bonus [Urbański and Klawiter, 2018, p. 591].

This or that way, reality of human reasoning processes becomes more and more important for logical investigations, be it as an empirical source of inspiration, a testbed or a figure to be at least partially represented in a formal system. Where do the models of reasoning processes come from, then? The possibility that they appear out of the blue is still legitimate: it is how they fit the data what matters, not their provenience. They may also be excavated from the data, as regularities in subjects' reasoning or problem-solving reports. And finally, they may be cooked on our own, as it is often the case with ingenious applications of proof methods or modeling reasoning processes with Artificial Neural Networks.

Thus, if you want to account for human reasoning processes, subjected to limitations and errors, then put your logic to the proper Baconian use: in such an endavour there is no place for Antmen or Spidermen, men of just experiment or men of just dogmas. Only the Beeman will be successful, the one who "gathers its material from the flowers of the garden and of the field,

but transforms and digests it by a power of its own" [Bacon, 1855, p. 78]. And if you're serious about your formal models being about something *real*, you can't escape some triangulation of formal methods, quantitative approach and qualitative studies, because practicality matters: "understanding interpretation sometimes leads to clarification of what subjects are trying to do, and that often turns out to be quite different than the experimenter assumes" [Stenning and van Lambalgen, 2008, p. 90].

Acknowledgements. Research reported in this paper were supported by the National Science Centre, Poland (DEC-2013/10/E/HS1/00172).

References

Bacon, 1855 – Bacon, F. *The Novum Organon, Or a True Guide to the Interpretation of Nature: Book One*. Oxford: Oxford University Press, 1855. 375 pp.

Beneke, 1832 – Beneke, F.E. *Lehrbuch der Logik als Kunstlehre des Denkens*. Berlin: Ernst Siegfrieg Mittler, Posen und Bromberg, 1832. 196 pp.

Boole, 1854 – Boole, G. *An Investigation of the Laws of Thought*. London: Walton and Maberly, 1854. 424 pp.

de Morgan, 1847 – de Morgan, A. *Formal Logic, or The Calculus of Inference, Necessary and Probable*. London: Taylor and Walton, 1847. 336 pp.

Evans, 2012 – Evans, J.S.B.T. "Questions and challenges for the new psychology of reasoning", *Thinking & Reasoning*, 2012, Vol. 18, No. 1, pp. 5–31.

Frege, 1884 – Frege, G. *Die Grundlagen der Arithmetik: Eine logisch mathematische Untersuchung über den Begriff der Zahl*. Breslau: W.Koebner, 1884.

Gabbay and Woods, 2005 – Gabbay, D.M. and Woods, J. *The Reach of Abduction. Insight and Trial*. Elsevier, 2005. 476 pp.

Haack, 1993 – Haack, S. *Evidence and Inquiry: Towards Reconstruction in Epistemology*. Oxford: Blackwell, 1993. 272 pp.

Hintikka, 2007 – Hintikka, J. "Abduction – Inference, Conjecture, or an Answer to a Question?", in: *Socratic Epistemology. Explorations of Knowledge-Seeking by Questioning*. Cambridge: Cambridge University Press, 2007, pp. 38–60.

Husserl, 1901 – Husserl, E. *Logische Untersuchungen*. Halle: Max Niemeyer Verlag, 1900/1901.

Kisielewska et al., 2016 – Kisielewska, M., Urbański, M., and Paluszkiewicz, K. "Abduction in One Intelligence Test. Types of Reasoning Involved in Solving Raven's Advanced Progressive Matrices", in: *Model-Based Reasoning in Science and Technology*, Magnani, L. and Casadio, C. (eds.). Springer, 2016, pp. 419–435.

Kurtz et al., 1999 – Kurtz, K.J., Gentner, D. and Gunn, V. "Reasoning", in: *Cognitive Science, Handbook of Perception and Cognition*, B. M. Bly (ed.), 2d ed. Elsevier, 1999, pp. 145–200.

Levy, 1997 – Levy, S.H. "Peirce's theoremic/corollarial distinction and the interconnections between mathematic and logic", in: *Studies in the Logic of Charles*

Sanders Peirce, Houser, N., Roberts, D.D., and Evra, J.V. (eds.). Bloomington, IN: Indiana University Press, 1997, pp. 85–110.

Macnamara, 1986 – Macnamara, J. *A Border Dispute. The Place of Logic in Psychology.* Cambridge, MA: MIT Press, 1986.

Peirce, 1958 – Peirce, C.S. *Collected Works.* C. Hartshorne, P. Weiss and A.W. Burks (eds.) Cambridge, MA: Harvard University Press, 1958.

Stanovich, 1999 – Stanovich, K.E. *Who Is Rational? Studies of Individual Differences in Reasoning.* Mahwah, NJ: Lawrence Erlbaum, 1999. 296 pp.

Stenning and van Lambalgen, 2008 – Stenning, K. and van Lambalgen, M. *Human Reasoning and Cognitive Science.* Cambridge, MA: MIT Press, 2008. 424 pp.

Urbański, 2011 – Urbański, M. "Logic and cognition: the faces of psychologism", *Log. Log. Philos.*, 2011, Vol. (20), pp. 175–185.

Urbański and Grzelak, 2019 – Urbański, M. and Grzelak, J. "On two simple models for one simple game: 'guess who?', Inferential Erotetic Logic, and situational semantics", in: *Reasoning: Logic, Cognition, Games*, Urbański, M., Skura, T. and Łupkowski, P. (eds.). London: College Publications, 2019, pp. 1–18.

Urbański and Klawiter, 2018 – Urbański, M. and Klawiter, A. "Abduction: some conceptual issues", *Log. Log. Philos.*, 2018, Vol. (27), pp. 583–597.

Urbański et al., 2016 – Urbański, M., Żyluk, N., Paluszkiewicz, K., and Urbańska, J. "A Formal Model of Erotetic Reasoning in Solving Some what Ill-Defined Problems", in: *Argumentation and Reasoned Action Proceedings of the 1st European Conference on Argumentation, Lisbon 2015*, Mohammed, D. and Lewiński, M. (eds.). London: College Publications, 2016, pp. 973–983.

van Benthem, 2008 – van Benthem, J. "Logic and Reasoning: do the facts matter?", *Studia Logica*, 2008, Vol. 88, No. 1, pp. 67–84.

Zajenkowski et al., 2014 – Zajenkowski, M., Garraffa, M., and Szymanik, J. "Working memory mechanism in proportional quantifier verification", *Journal of Psycholinguistic Research*, 2014, Vol. 43, Is. 6, pp. 839–853.

Żelechowska et al., 2020 – Żelechowska, D., Żyluk, N., and Urbański, M. "Find Out: a new method to study abductive reasoning in empirical research", *Int. J. of Qualitative Methods*, 2020, Vol. 19, pp. 1–11.

Логические исследования
2020. Т. 26. № 2. С. 116–143
УДК 16+519.716.3

Logical Investigations
2020, Vol. 26, No. 2, pp. 116–143
DOI: 10.21146/2074-1472-2020-26-2-116-143

Неклассическая логика

Non-classical Logic

Л.Ю. Девяткин

О выразительных возможностях отдельных расширений четырехзначной логики Белнапа

Леонид Юрьевич Девяткин
Институт философии РАН.
Российская Федерация, 109240, г. Москва, ул. Гончарная, д. 12, стр. 1.
E-mail: deviatkin@iph.ras.ru

Аннотация: Статья посвящена замкнутым классам функций четырехзначной логики. Мы представляем следующие результаты.

(1) Базовые операции логики, полученной расширением четырехзначной алгебры Де Моргана оператором конфляции, порождают замкнутый класс всех функций, которые одновременно сохраняют классические истинностные значения и самодвойственны относительно конфляции. Этот класс предполон в классе всех функций, сохраняющих классические истинностные значения.

(2) Между замкнутым классом, порожденным базовыми операциями логики истины фон Вригта и классом всех функций, сохраняющих классические истинностные значения, лежит в точности два замкнутых класса. Каждый из них представляет собой класс всех функций, одновременно сохраняющих классические истинностные значения и одно из трехэлементных надмножеств множества классических истинностных значений.

(3) Базовые операции тетравалентной модальной логики, полученной расширением четырехзначной алгебры Де Моргана оператором необходимости, порождают замкнутый класс всех функций, которые одновременно сохраняют классические истинностные значения, самодвойственны относительно конфляции, а также сохраняют оба трехэлементных надмножества множества классических истинностных значений. Мы показываем, что данный класс предполон в классе всех функций, которые одновременно сохраняют классические истинностные значения и самодвойственны относительно конфляции. Кроме того, мы демонстрируем, что между этим классом и замкнутым классом, порожденным операциями логики истины фон Вригта, находится в точности один замкнутый класс.

Таким образом, мы получаем семиэлементную решетку, состоящую из всех возможных четырехзначных расширений тетравалентной модальной логики, которые сохраняют классические истинностные значения.

Ключевые слова: алгебра Де Моргана, четырехзначная логика Белнапа, логика истины фон Вригта, логика истины Tr, тетравалентная модальная логика, замкнутые классы функций

© Девяткин Л.Ю.

Для цитирования: *Девяткин Л.Ю.* О выразительных возможностях отдельных расширений четырехзначной логики Белнапа // Логические исследования / Logical Investigations. 2020. Т. 26. № 2. С. 116–143. DOI: 10.21146/2074-1472-2020-26-2-116-143

Введение

Многозначные логики выступают полезным инструментом во многих областях современных логических исследований. В числе наиболее известных многозначных логик находится «полезная четырехзначная логика» Н. Белнапа [Belnap, 1977], которую мы будем обозначать $\mathbf{B}_4$. Как отмечает А.С. Карпенко [Карпенко, 2015, §5], $\mathbf{B}_4$ оказалась удобной «базовой» системой, обогащая которую можно получить интересные новые логики. Существует обширная литература, посвященная логикам, которые являются расширениями **FDE**. Особую роль играют расширения $\mathbf{B}_4$, полученные с помощью пополнения языка этой логики новыми истинностно-функциональными операторами, такими как, например, модальные операторы, оператор формальной противоречивости, импликация и отрицание, обладающие свойствами, характерными для данных связок в классической логике. Обстоятельный обзор подобных расширений доступен в [Petrukhin, Shangin, 2019].

А.С. Карпенко принадлежит серия работ, посвященных выразительным возможностям отдельных четырехзначных языковых расширений $\mathbf{B}_4$ [Karpenko, 2013; Карпенко, 2015; Karpenko, 2017]. Эта работа лежит в русле указанных исследований. Основной задачей является проверка выдвинутой в [Karpenko, 2017] гипотезы о выразительных возможностях языков «логики истины» $\mathbf{T}''$ Г.Х. фон Вригта и логики **Tr**, полученной добавлением к связкам $\mathbf{B}_4$ оператора «конфляции»[1]. Методы исследования близки к таковым в работах А. Аврона и О. Ариэли, посвященных выразительным возможностям расширений $\mathbf{B}_4$: [Avron, 1999; Arieli, Avron, 1998; Arieli, Avron, 2017]. Мы анализируем замкнутые классы функций на множестве $\{\mathbf{t}, \mathbf{b}, \mathbf{n}, \mathbf{f}\}$, порожденные наборами базовых операций интересующих нас расширений $\mathbf{B}_4$. Это требует уточнения.

Обычно многозначные логики определяются с помощью логических матриц. Логическая матрица представляет собой структуру, состоящую из алгебры и подмножества D множества-носителя этой алгебры, называемого классом выделенных значений. Матрицы с совпадающими алгебрами и различающимися классами выделенных значений порождают различающиеся логики. В матрице четырехзначной логики Белнапа используется алгебра Де Моргана и два выделенных значения

[1] Необходимые формальные определения будут даны ниже.

(см. [Omori, Wansing, 2017, §2.1]). Но логические матрицы, базирующиеся на алгебре Де Моргана, могут иметь и другое число выделенных значений: одно или три. Основанные на алгебре Де Моргана логики с одним выделенным значением описываются в [Karpenko, 2017]. Вопрос о свойствах четырехзначной логики Белнапа с расширенным или суженным классом выделенных значений специально исследуется в [Shramko et al., 2017; Shramko et al., 2019].

В настоящей работе мы рассматриваем алгебры вне связи с классами выделенных значений. Таким образом, полученные результаты носят обобщенный характер. Они касаются не только четырехзначных расширений $\mathbf{B}_4$ с двумя выделенными значениями, но и родственных систем с однм и тремя выделенными значениями.

Дальнейшая структура работы такова. В оставшейся части Введения мы даем базовые определения, необходимые для точной постановки основной задачи исследования, и осуществляем такую постановку. В Разделе 1 исследуются свойства замкнутого класса функций Tr, порожденного базовыми операциями логики **Tr**. В Разделе 2 исследуются свойства замкнутого класса функций T'', порожденного базовыми операциями логики $\mathbf{T}''$. В Разделе 3 мы показываем, что замкнутый класс TML, порожденный операциями четырехзначной модальной логики **TML** [Карпенко, 2015, §7], представляет собой наибольший общий замкнутый подкласс Tr и T'', и исследуем свойства TML. В Заключении мы даем общее резюме полученных результатов, главным из которых является полное описание решетки замкнутых классов функций, лежащих между TML и $Ł_4$ — замкнутым классом функций, порожденным операциями четырехзначной логики Лукасевича.

Перейдем к формальной постановке целей и задач исследования. Приведенные ниже определения заимствуем из книги [Марченков, 2004, С. 8–12]. Там же можно найти более подробное изложение данного материала.

Определение 1 (Реализация функции формулой)**.** Пусть R — непустое множество функций, заданных на некотором множестве. Каждой функции из этого множества сопоставим синтаксическую конструкцию, которую будем называть *формулой над* R. Пусть символом f обозначена функция из R от n переменных, а $x_1, \ldots, x_n$ — символы переменных. Тогда выражение $f(x_1, \ldots, x_n)$ — *формула над* R. Формуле $f(x_1, \ldots, x_n)$ сопоставляем ту функцию из R, которая имеет обозначение f, и говорим, что функция f *реализуется формулой* $f(x_1, \ldots, x_n)$. Так как любой функции из R можно сопоставить формулу над R описанным выше способом, также верно, что любая функция из R реализуется некоторой формулой над R.

Пусть символом g обозначена функция из R от m переменных, а $\Phi_1, \ldots, \Phi_m$ — формулы над R или символы переменных (необязательно различные). В этом случае $g(\Phi_1, \ldots, \Phi_m)$ — *формула над* R. Допустим, что выражениям Φ_i, не являющимся символами переменных, сопоставлены функции f_i. Выражениям Φ_j, которые суть символы переменных $x_{p(j)}$, сопоставим функции $f_j(x_{p(j)})$, где $f_j(x_{p(j)}) = x_{p(j)}$. В этом случае формуле $g(\Phi_1, \ldots, \Phi_m)$ сопоставляем функцию $g(f_1, \ldots, f_m)$, *реализуемую этой формулой.*

Определение 2 (Суперпозиция)**.** Если функция f реализуется формулой, которая содержит только символы функций $f_1, \ldots, f_s$, а также символы переменных, то говорим, что функция f является *суперпозицией* функций $f_1, \ldots, f_s$, или что f получена из функций $f_1, \ldots, f_s$ с помощью *операции суперпозиции.*

Определение 3 (Замкнутость)**.** Пусть R — произвольное множество функций, заданных на некотором множестве. *Замыканием* R называем множество $[R]$ всех функций, которые являются суперпозициями функций из R. Если $[R]$ — замыкание R, называем R *порождающей системой* $[R]$. Говорим, что множество функций R (функционально) *замкнуто*, если $R = [R]$. Множества такого рода также будем называть *замкнутыми классами.*

Определение 4 (Предполнота)**.** Замкнутый класс Q *предполон* в замкнутом классе R, если для всех таких g, что $g \in R$ и $g \notin Q$, имеет место $[Q \cup \{g\}] = R$.

Предметом настоящего исследования являются отношения между замкнутыми классами функций на множестве $\{\mathbf{t}, \mathbf{b}, \mathbf{n}, \mathbf{f}\}$, порожденными следующими системами операций: $\{\vee, \wedge, \neg\}$, $\{\wedge, \vee, \neg, e_2\}$, $\{\wedge, \vee, \neg, -\}$, $\{\wedge, \vee, \neg, -, \supset\}$. Табличные определения соответствующих операций таковы:

$\wedge$	**t**	**b**	**n**	**f**
t	**t**	**b**	**n**	**f**
b	**b**	**b**	**f**	**f**
n	**n**	**f**	**n**	**f**
f	**f**	**f**	**f**	**f**

$\vee$	**t**	**b**	**n**	f
t	**t**	**t**	**t**	**t**
b	**t**	**b**	**t**	**b**
n	**t**	**t**	**n**	**n**
f	**t**	**b**	**n**	**f**

x	$\neg x$
t	**f**
b	**b**
n	**n**
f	**t**

$\supset$	**t**	**b**	**n**	**f**
t	**t**	**b**	**n**	**f**
b	**t**	**b**	**n**	**f**
n	**t**	**t**	**t**	**t**
f	**t**	**t**	**t**	**t**

x	$-x$
t	**t**
b	**n**
n	**b**
f	**f**

x	$e_2(x)$
t	**t**
b	**t**
n	**f**
f	**f**

Следуя [Karpenko, 2017], примем следующие обозначения: $DM4 = [\{\vee, \wedge, \neg\}]$; $T'' = [\{\wedge, \vee, \neg, e_2\}]$; $Tr = [\{\wedge, \vee, \neg, -\}]$. Кроме того, полагаем $Ł_4 = [\{\wedge, \vee, \neg, -, \supset\}]$. В последнем случае мы заменяем порождающую систему для $Ł_4$ из работы А.С. Карпенко на эквивалентную, но более для нас удобную, которую заимствуем из работы [Avron, 1999, Th. 3.15]. Интересующие нас наборы операций также рассматриваются в [Omori, Sano, 2015] с другими обозначениями: $DM4$ — $\mathcal{BD}$, T'' — $\mathcal{BD}-$, Tr — $\mathcal{BD}\Delta$.

Исследованию сравнительных свойств $DM4$, T'', Tr и $Ł_4$ специально посвящены работы [Karpenko, 2013], [Карпенко, 2015], [Karpenko, 2017]. В них описаны известные в литературе четырехзначные логики, наборы базовых операций которых порождают эти замкнутые классы. Автор указывает на следующие факты: $Tr \nsubseteq T''$, $T'' \nsubseteq Tr$, $Tr \subset Ł_4$, $T'' \subset Ł_4$. Однако остается открытым вопрос о том, существует ли такой замкнутый класс K, что $Tr \subset K \subset Ł_4$ или $T'' \subset K \subset Ł_4$. В этой связи А.С. Карпенко выдвинул следующую гипотезу [Karpenko, 2017].

Классы операций T'' и Tr предполны в $Ł_4$.

Иными словами, не существует замкнутых классов, которые были бы собственными надклассами T'' или Tr и одновременно собственными подклассами $Ł_4$. Основная задача нашего исследования состоит в проверке данной гипотезы. Ее решение осуществляется в следующих двух разделах. Первый из них посвящен вопросу о предполноте Tr в $Ł_4$. Второй — предполноте T'' в $Ł_4$. Еще одна задача работы состоит в поиске наибольшего общего замкнутого подкласса Tr и T'', а также разрешения вопроса о его предполноте в Tr и T''. Решению этой задачи посвящен третий раздел.

1. Предполнота Tr в $Ł_4$

В этом разделе мы покажем, что Tr предполон в $Ł_4$. Нам потребуются дополнительныне определения.

Определение 5 (Сохранение множества функцией)**.** Говорим, что функция f, определенная на некотором надмножестве множества A, *сохраняет множество* A (иначе — A-*замкнута*), когда выполняется следующее условие: если $(a_1, \ldots, a_n) \in A^n$, то $f(a_1, \ldots, a_n) \in A$.

Определение 6 (Самодвойственность)**.** Называем функцию f *самодвойственной* относительно перестановки ι на A, когда $f(a_1, \ldots, a_n) = \iota f(\iota a_1, \ldots, \iota a_n)$.

Известно, что $Ł_4$ — класс всех функций, сохраняющих $\{\mathbf{t}, \mathbf{f}\}$ [Avron, 1999, Th. 3.15]. Демонстрация предполноты Tr в $Ł_4$ сводится к обоснованию двух утверждений: (1) Tr — класс всех функций, которые одновременно $\{\mathbf{t}, \mathbf{f}\}$-замкнуты и самодвойственны относительно $-x$; (2) класс всех функций, которые одновременно $\{\mathbf{t}, \mathbf{f}\}$-замкнуты и самодвойственны относительно $-x$, предполон в классе всех функций, сохраняющих $\{\mathbf{t}, \mathbf{f}\}$.

Введем ряд вспомогательных обозначений: $J_{\mathbf{t}}(x) = x \wedge -x$; $J_{\mathbf{f}}(x) = \neg J_{\mathbf{t}}(x)$; $\bullet x = \neg(J_{\mathbf{t}}(x) \vee J_{\mathbf{f}}(x))$. Указанные операции отвечают таблицам, приведенным ниже.

x	$J_{\mathbf{t}}(x)$
t	**t**
b	**f**
n	**f**
f	**f**

x	$J_{\mathbf{f}}(x)$
t	**f**
b	**f**
n	**f**
f	**t**

x	$\bullet(x)$
t	**f**
b	**t**
n	**t**
f	**f**

Теорема 1. *Tr — класс всех функций, которые одновременно $\{\mathbf{t}, \mathbf{f}\}$-замкнуты и самодвойственны относительно $-x$.*

Доказательство.

Пусть $\psi(x_1, \ldots, x_n)$ — произвольная функция, сохраняющая множество $\{\mathbf{t}, \mathbf{f}\}$ и самодовойственная относительно $-x$, т. е. $\psi(x_1, \ldots, x_n) = -\psi(-x_1, \ldots, -x_n)$. Пусть $\vec{a} = (a_1, \ldots, a_n)$, $\vec{a} \in \{\mathbf{t}, \mathbf{b}, \mathbf{n}, \mathbf{f}\}^n$ и $\psi(\vec{a}) = \mathbf{t}$. Так как $\psi(x_1, \ldots, x_n) = -\psi(-x_1, \ldots, -x_n)$, верно также, что $-\psi(-\vec{a}) = \psi(-\vec{a}) = \mathbf{t}$ для набора $-\vec{a} = (-a_1, \ldots, -a_n)$.

Сделаем небольшое отступление, чтобы разъяснить используемую ниже нотацию. Если дана функция $\psi(x_1, \ldots, x_n)$, зависящая от n переменных, и такой набор значений $\vec{a} = (a_1, \ldots, a_n)$, что $\vec{a} \in \{\mathbf{t}, \mathbf{b}, \mathbf{n}, \mathbf{f}\}^n$, осуществим разбиение $(x_1, \ldots, x_n)$ на четыре упорядоченных лексикографически набора в зависимости от того, какое значение a_i соответствует переменной x_i в наборе $\vec{a}$ для каждого из $i \in \{1, \ldots, n\}$: если $a_i = \mathbf{t}$, то x_i является компонентом $\vec{x}_t$; если $a_i = \mathbf{b}$, то x_i является компонентом $\vec{x}_b$; если $a_i = \mathbf{n}$, то x_i является компонентом $\vec{x}_n$, если $a_i = \mathbf{f}$, то x_i является компонентом $\vec{x}_f$.

Проиллюстрируем описанное построение примером. Для этого рассмотрим функцию $\psi(x_1, x_2, x_3, x_4, x_5, x_6, x_7, x_8)$ и набор $\vec{a} = (\mathbf{t}, \mathbf{t}, \mathbf{b}, \mathbf{n}, \mathbf{b}, \mathbf{b}, \mathbf{n}, \mathbf{f})$. В этом случае имеем $\vec{x}_t = (x_1, x_2)$; $\vec{x}_b = (x_3, x_5, x_6)$; $\vec{x}_n = (x_4, x_7)$; $\vec{x}_f = (x_8)$. При обобщенном описании будем использовать для элементов $\vec{x}_t$, $\vec{x}_b$, $\vec{x}_n$, $\vec{x}_f$ индексы вида i_t, i_b, i_n, i_f соответственно. Эти индексы трактуем как переменные для исходных индексов, использованных в наборе $(x_1, \ldots, x_n)$. То есть в случае нашего примера, $x_{1_t} = x_1$; $x_{2_t} = x_2$; $x_{1_b} = x_3$; $x_{2_b} = x_5$; $x_{3_b} = x_6$; $x_{1_n} = x_4$; $x_{2_n} = x_7$; $x_{1_n} = x_8$. Порядок индексов (буквы под цифрами) должен быть именно таким, поскольку наборы индексов $(t_1, \ldots t_k)$,

$(b_1, \ldots b_k)$, $(n_1, \ldots n_k)$ и $(f_1, \ldots f_k)$ полагаются равномощными, в отличие от наборов $(1_t, \ldots k_t)$, $(1_b, \ldots k_b)$, $(1_n, \ldots k_n)$ и $(1_f, \ldots k_f)$. Так как наборы могут быть разной длины, в индексах для последнего элемента набора используется метапеременная k. То есть в случае нашего примера, $x_{k_t} = x_{2_t}$; $x_{k_b} = x_{3_b}$; $x_{k_n} = x_{2_n}$; $x_{f_n} = x_{1_n}$.

Так как $(x_1, \ldots, x_n)$ — список переменных, от которых зависит ψ, все элементы в нем попарно различны. Таким образом, всегда попарно различны и элементы $\vec{x}_t$, $\vec{x}_b$, $\vec{x}_n$, $\vec{x}_f$. Для каждого из этих наборов будем обозначать число его элементов как $|\vec{x}_t|$, $|\vec{x}_b|$, $|\vec{x}_n|$, $|\vec{x}_f|$ соответственно.

Возвращаемся к построению доказательства. Рассмотрим формулу $\Phi^t_{\vec{a}}(x_1, \ldots, x_n)$, которая реализует функцию $\Phi^t_{\vec{a}}$:

$$\Phi^t_{\vec{a}}(x_1, \ldots, x_n) = \Delta(\vec{x}_t) \wedge \Theta(\vec{x}_f) \wedge \Xi(\vec{x}_b, \vec{x}_n),$$

Условимся считать, что обозначения $\Delta(\vec{x}_t) = \emptyset$, $\Theta(\vec{x}_f) = \emptyset$ и $\Xi(\vec{x}_b, \vec{x}_n) = \emptyset$ служат метаязыковыми указаниями на необходимость опустить один или более конъюнктов при построении формулы $\Phi^t_{\vec{a}}(x_1, \ldots, x_n)$. Например, если $\Delta(\vec{x}_t) = \emptyset$, $\Theta(\vec{x}_t) \neq \emptyset$, $\Xi(\vec{x}_t) \neq \emptyset$, то $\Phi^t_{\vec{a}}(x_1, \ldots, x_n)$ принимает вид $\Theta(\vec{x}_f) \wedge \Xi(\vec{x}_b, \vec{x}_n)$. Если же $\Delta(\vec{x}_t) = \emptyset$, $\Theta(\vec{x}_t) = \emptyset$, $\Xi(\vec{x}_t) \neq \emptyset$, то $\Phi^t_{\vec{a}}(x_1, \ldots, x_n)$ принимает вид $\Xi(\vec{x}_b, \vec{x}_n)$, и так далее. Обратим внимание, что каждый набор $\vec{a}$ содержит по меньшей мере одно истинностое значение, поэтому хотя бы один конъюнкт в $\Phi^t_{\vec{a}}(x_1, \ldots, x_n)$ всегда остается на месте. Переходим к расшифровке $\Delta(\vec{x}_t)$, $\Theta(\vec{x}_f)$ и $\Xi(\vec{x}_b, \vec{x}_n)$.

$$\Delta(\vec{x}_t) = \begin{cases} \emptyset, \text{ если } |\vec{x}_t| = 0, \\ J_{\mathbf{t}}(x_{1_t}), \text{ если } |\vec{x}_t| = 1, \\ J_{\mathbf{t}}(x_{1_t} \wedge \ldots \wedge x_{k_t}), \text{ если } |\vec{x}_t| = k_t \geqslant 2. \end{cases}$$

$$\Theta(\vec{x}_f) = \begin{cases} \emptyset, \text{ если } |\vec{x}_f| = 0, \\ J_{\mathbf{f}}(x_{1_f}), \text{ если } |\vec{x}_f| = 1, \\ J_{\mathbf{f}}(x_{1_f} \vee \ldots \vee x_{k_t}), \text{ если } |\vec{x}_f| = k_f \geqslant 2. \end{cases}$$

Функция $\Xi(\vec{x}_b, \vec{x}_n)$ описывается приведенной ниже таблицей, где $\tilde{x}$ обозначает $x \wedge \neg x$.

$\lvert\vec{x}_b\rvert$	$\lvert\vec{x}_n\rvert$	$\Xi(\vec{x}_b, \vec{x}_n)$
0	0	$\emptyset$
1	0	$\bullet(x_{1_b})$
$k_b \geqslant 2$	0	$\bullet(\tilde{x}_{1_b} \wedge \ldots \wedge \tilde{x}_{k_b})$
0	1	$\bullet(x_{1_n})$
1	1	$\bullet(x_{1_b} \wedge -x_{1_n})$
$k_b \geqslant 2$	1	$\bullet((\tilde{x}_{1_b} \wedge \ldots \wedge \tilde{x}_{k_b}) \wedge -\tilde{x}_{1_n})$
0	$k_n \geqslant 2$	$\bullet(\tilde{x}_{1_n} \wedge \ldots \wedge \tilde{x}_{k_n})$
1	$k_n \geqslant 2$	$\bullet(\tilde{x}_{1_b} \wedge -(\tilde{x}_{1_n} \wedge \ldots \wedge \tilde{x}_{k_n}))$
$k_b \geqslant 2$	$k_n \geqslant 2$	$\bullet((\tilde{x}_{1_b} \wedge \ldots \wedge \tilde{x}_{k_b}) \wedge -(\tilde{x}_{1_n} \wedge \ldots \wedge \tilde{x}_{k_n}))$

По построению, $\Phi^t_{\vec{a}}$ принимает значение $\mathbf{t}$ на наборах $\vec{a}$ и $-\vec{a}$, а на всех остальных наборах она принимает значение $\mathbf{f}$.

Пусть $T = \{\vec{a}_1, \ldots, \vec{a}_k\}$ — множество всех таких наборов, что $\psi(\vec{a_i}) = \mathbf{t}$ для всех $i \in \{1, \ldots, k\}$. Функция $\Phi^t_T = \Phi^t_{\vec{a}_1} \vee \ldots \vee \Phi^t_{\vec{a}_k}$ принимает значение $\mathbf{t}$ на каждом наборе значений из T и принимает значение $\mathbf{f}$ во всех остальных случаях.

Теперь пусть $\vec{a} = (a_1, \ldots, a_n)$, $\vec{a} \in \{\mathbf{t}, \mathbf{b}, \mathbf{n}, \mathbf{f}\}^n$ и $\psi(\vec{a}) = \mathbf{b}$. Так как $\psi(x_1, \ldots, x_n) = -\psi(-x_1, \ldots, -x_n)$, верно также, что $\psi(-\vec{a}) = \mathbf{n}$ для набора $-\vec{a} = (-a_1, \ldots, -a_n)$ (см. выше). Аналогично, если $\psi(\vec{a}) = \mathbf{n}$, то $\psi(-\vec{a}) = \mathbf{b}$. То есть класс $B \subseteq \{\mathbf{t}, \mathbf{b}, \mathbf{n}, \mathbf{f}\}^n$ всех наборов, на которых ψ принимает значение $\mathbf{b}$, и класс $N \subseteq \{\mathbf{t}, \mathbf{b}, \mathbf{n}, \mathbf{f}\}^n$ всех наборов, на которых ψ принимает значение $\mathbf{n}$, изоморфны относительно $-x$.

Рассмотрим функцию, реализуемую формулой $\Phi^b_{\vec{a}}(x_1, \ldots, x_n)$:

$$\Phi^b_{\vec{a}}(x_1, \ldots, x_n) = \Delta(\vec{x}_t) \wedge \Theta(\vec{x}_f) \wedge \Xi(\vec{x}_b, \vec{x}_n),$$

где $\Delta(\vec{x}_t)$ и $\Theta(\vec{x}_f)$ определяются так же, как для $\Phi^t_{\vec{a}}$, а функция $\Xi(\vec{x}_b, \vec{x}_n)$ описывается приведенной ниже таблицей. Обратим внимание, что $|\vec{x}_b| \neq 0$ или $|\vec{x}_n| \neq 0$, так как ψ сохраняет множество $\{\mathbf{t}, \mathbf{f}\}$.

$\lvert\vec{x}_b\rvert$	$\lvert\vec{x}_n\rvert$	$\Xi(\vec{x}_b, \vec{x}_n)$
1	0	$\tilde{x}_{1_b}$
$k_b \geqslant 2$	0	$\tilde{x}_{1_b} \wedge \ldots \wedge \tilde{x}_{k_b}$
0	1	$\tilde{x}_{1_n}$
1	1	$\tilde{x}_{1_b} \wedge -\tilde{x}_{1_n}$
$k_b \geqslant 2$	1	$(\tilde{x}_{1_b} \wedge \ldots \wedge \tilde{x}_{k_b}) \wedge -\tilde{x}_{1_n}$
0	$k_n \geqslant 2$	$\tilde{x}_{1_n} \wedge \ldots \wedge \tilde{x}_{k_n}$
1	$k_n \geqslant 2$	$\tilde{x}_{1_b} \wedge -(\tilde{x}_{1_n} \wedge \ldots \wedge \tilde{x}_{k_n})$
$k_b \geqslant 2$	$k_n \geqslant 2$	$(\tilde{x}_{1_b} \wedge \ldots \wedge \tilde{x}_{k_b}) \wedge -(\tilde{x}_{1_n} \wedge \ldots \wedge \tilde{x}_{k_n})$

По построению, $\Phi^b_{\vec{a}}$ принимает значение $\mathbf{b}$ на наборе $\vec{a}$ и значение $\mathbf{n}$ на наборе $-\vec{a}$, а на всех остальных наборах она принимает значение $\mathbf{f}$.

В силу изоморфизма множеств B и N, имеем следующее. Функция $\Phi_B^b = \Phi_{\vec{a}_1}^b \vee \ldots \vee \Phi_{\vec{a}_k}^b$ принимает значение $\mathbf{b}$ на каждом наборе значений из B, принимает значение $\mathbf{n}$ на каждом наборе значений из N и принимает значение $\mathbf{f}$ во всех остальных случаях. Так как $\mathbf{f} \vee a = a$ для любого $a \in \{\mathbf{t}, \mathbf{b}, \mathbf{n}, \mathbf{f}\}$, получаем: $\psi = \Phi_T^t \vee \Phi_B^b$.

Таким образом, каждая функция, которая одновременно $\{\mathbf{t}, \mathbf{f}\}$-замкнута и самодвойственна относительно $-x$, содержится в Tr. Поскольку, кроме того, каждая функция из множества $\{\wedge, \vee, \neg, -\}$ также $\{\mathbf{t}, \mathbf{f}\}$-замкнута и самодвойственна относительно $-x$, Tr — класс всех функций, которые одновременно $\{\mathbf{t}, \mathbf{f}\}$-замкнуты и самодвойственны относительно $-x$. ■

Теорема 2. *Класс Tr предполон в $Ł_4$.*

Доказательство.

Вспомним, что $Tr = [\{\wedge, \vee, \neg, -\}]$ и $Ł_4 = [\{\wedge, \vee, \neg, -, \supset\}]$ (см. стр. 120). Кроме того, имеет место равенство $x \supset y = \neg e_2(x) \vee y$. Таким образом, для доказательства теоремы достаточно обосновать следующее утверждение: если $\varphi \notin Tr$ и $\varphi \in Ł_4$, то $e_2 \in [Tr \cup \{\varphi\}]$.

Согласно Теореме 1, Tr — класс всех функций, которые одновременно $\{\mathbf{t}, \mathbf{f}\}$-замкнуты и самодвойственны относительно $-x$; $Ł_4$ — класс всех функций, сохраняющих $\{\mathbf{t}, \mathbf{f}\}$.

Пусть φ — произвольная $\{\mathbf{t}, \mathbf{f}\}$-замкнутая функция, не самодовойственная относительно $-x$, и формула $\varphi(x_1, \ldots, x_n)$ реализует функцию φ. По условию, найдется такой набор $(a_1, \ldots, a_n) \in \{\mathbf{t}, \mathbf{b}, \mathbf{n}, \mathbf{f}\}^n$, что $\varphi(a_1, \ldots, a_n) \neq -\varphi(-a_1, \ldots, -a_n)$. Произведем такую подстановку ϵ в $\varphi(x_1, \ldots, x_n)$, что для каждой переменной x_i $(1 \leqslant i \leqslant n)$ имеет место

$$\epsilon(x_i) = \begin{cases} \neg(J_{\mathbf{t}}(x) \wedge \neg J_{\mathbf{t}}(x)), \text{ если } a_i = \mathbf{t}; \\ x, \text{ если } a_i = \mathbf{b}; \\ -x, \text{ если } a_i = \mathbf{n}; \\ J_{\mathbf{t}}(x) \wedge \neg J_{\mathbf{t}}(x), \text{ если } a_i = \mathbf{f}. \end{cases}$$

Формула $\varphi(\epsilon(x_1), \ldots, \epsilon(x_n))$ реализует функцию φ^* от одной переменной, которая $\{\mathbf{t}, \mathbf{f}\}$-замкнута и не самодовойственна относительно $-x$, так как, по построению, $\varphi^*(\mathbf{b}) \neq -\varphi^*(-\mathbf{b})$. Поскольку $-\mathbf{b} = \mathbf{n}$, также имеем $\varphi^*(\mathbf{b}) \neq -\varphi^*(\mathbf{n})$. Теперь разберем случаи.

1. $\varphi^*(\mathbf{b}) = \mathbf{t}$, $-\varphi^*(\mathbf{n}) \neq \mathbf{t}$.

   (a) $-\varphi^*(\mathbf{n}) = \mathbf{b}$, $\varphi^*(\mathbf{n}) = \mathbf{n}$; $J_{\mathbf{n}}x = \bullet\varphi^*(x)$.

(b) $-\varphi^*(\mathbf{n}) = \mathbf{n}$, $\varphi^*(\mathbf{n}) = \mathbf{b}$; $J_{\mathbf{n}}x = \bullet\varphi^*(x)$.

(c) $-\varphi^*(\mathbf{n}) = \mathbf{f}$, $\varphi^*(\mathbf{n}) = \mathbf{f}$; $J_{\mathbf{n}}x = \neg(\neg \bullet x \vee \varphi^*(x))$.

2. $\varphi^*(\mathbf{b}) = \mathbf{b}$, $-\varphi^*(\mathbf{n}) \neq \mathbf{b}$.

   (a) $-\varphi^*(\mathbf{n}) = \mathbf{t}$, $\varphi^*(\mathbf{n}) = \mathbf{t}$; $J_{\mathbf{b}}x = \bullet\varphi^*(x)$.

   (b) $-\varphi^*(\mathbf{n}) = \mathbf{n}$, $\varphi^*(\mathbf{n}) = \mathbf{b}$; $J_{\mathbf{b}}x = \bullet(\varphi^*(x) \vee (x \vee \neg x))$.

   (c) $-\varphi^*(\mathbf{n}) = \mathbf{f}$, $\varphi^*(\mathbf{n}) = \mathbf{f}$; $J_{\mathbf{b}}x = \bullet\varphi^*(x)$.

3. $\varphi^*(\mathbf{b}) = \mathbf{n}$, $-\varphi^*(\mathbf{n}) \neq \mathbf{n}$.

   (a) $-\varphi^*(\mathbf{n}) = \mathbf{t}$, $\varphi^*(\mathbf{n}) = \mathbf{t}$; $J_{\mathbf{b}}x = \bullet\varphi^*(x)$.

   (b) $-\varphi^*(\mathbf{n}) = \mathbf{b}$, $\varphi^*(\mathbf{n}) = \mathbf{n}$; $J_{\mathbf{b}}x = \bullet(\varphi^*(x) \wedge (x \wedge \neg x))$.

   (c) $-\varphi^*(\mathbf{n}) = \mathbf{f}$, $\varphi^*(\mathbf{n}) = \mathbf{f}$; $J_{\mathbf{b}}x = \bullet\varphi^*(x)$.

4. $\varphi^*(\mathbf{b}) = \mathbf{f}$, $-\varphi^*(\mathbf{n}) \neq \mathbf{f}$.

   (a) $-\varphi^*(\mathbf{n}) = \mathbf{t}$, $\varphi^*(\mathbf{n}) = \mathbf{t}$; $J_{\mathbf{n}}x = \bullet x \wedge \varphi^*(x)$.

   (b) $-\varphi^*(\mathbf{n}) = \mathbf{b}$, $\varphi^*(\mathbf{n}) = \mathbf{n}$; $J_{\mathbf{n}}x = \bullet\varphi^*(x)$.

   (c) $-\varphi^*(\mathbf{n}) = \mathbf{n}$, $\varphi^*(\mathbf{n}) = \mathbf{b}$; $J_{\mathbf{n}}x = \bullet\varphi^*(x)$.

Нетрудно убедиться, что выполняются следующие условия: $J_{\mathbf{b}}(x) \in \{\mathbf{t}, \mathbf{f}\}$ и $J_{\mathbf{b}}(x) = \mathbf{t} \Leftrightarrow x = \mathbf{b}$; $J_{\mathbf{n}}(x) \in \{\mathbf{t}, \mathbf{f}\}$ и $J_{\mathbf{n}}(x) = \mathbf{t} \Leftrightarrow x = \mathbf{n}$.

Теперь покажем, что $e_2 \in [\{\wedge, \vee, \neg, -, J_{\mathbf{b}}\}]$ и $e_2 \in [\{\wedge, \vee, \neg, -, J_{\mathbf{n}}\}]$. Для этого достаточно следующих тождеств: $e_2(x) = J_{\mathbf{t}}(x) \vee J_{\mathbf{b}}(x)$; $e_2(x) = \neg(J_{\mathbf{n}}(x) \vee J_{\mathbf{f}}(x))$. Теорема доказана. ■

2. Надклассы T'', предполные в $Ł_4$

В этом разделе мы демонстрируем, что между T'' и $Ł_4$ лежит ровно два замкнутых класса, причем T'' предполон в каждом из этих классов, и оба этих класса предполны в $Ł_4$.

Теорема 3. *T'' — класс всех функций, сохраняющих множества $\{\mathbf{t}, \mathbf{f}\}$, $\{\mathbf{t}, \mathbf{b}, \mathbf{f}, \}$ и $\{\mathbf{t}, \mathbf{n}, \mathbf{f}\}$.*

Доказательство.

Известно, что $[\{\neg, \wedge, \supset, \mathbf{f}\}]$ есть в точности класс всех функций, обладающих каждым из следующих свойств: $\{\mathbf{t}, \mathbf{b}, \mathbf{f}\}$-замкнутость, $\{\mathbf{t}, \mathbf{n}, \mathbf{f}\}$-замкнутость, $\{\mathbf{t}, \mathbf{f}\}$-замкнутость [Arieli, Avron, 1998, Th. 14]. Поэтому достаточно доказать, что $T'' = [\{\neg, \wedge, \supset, \mathbf{f}\}]$.

Поскольку операции $\wedge, \vee, \neg, e_2$ обладают каждым из трех указанных свойств, для завершения доказательства достаточно следующих тождеств: $\mathbf{f} = e_2(x) \wedge \neg e_2(x)$; $x \supset y = \neg e_2(x) \vee y$. ■

Как следствие, между T'' и $Ł_4$ лежат по меньшей мере два замкнутых класса — класс $T^\star$ всех функций, сохраняющих множества $\{\mathbf{t}, \mathbf{f}\}$ и $\{\mathbf{t}, \mathbf{n}, \mathbf{f}\}$, а также класс $T^{\star\star}$ всех функций, сохраняющих множества $\{\mathbf{t}, \mathbf{f}\}$ и $\{\mathbf{t}, \mathbf{b}, \mathbf{f}\}$.

Теорема 4. *Класс T'' предполон в $T^\star$.*

Доказательство.

Достаточно доказать следующее утверждение: если $\sigma \notin T''$ и $\sigma \in T^\star$, то $[T'' \cup \{\sigma\}] = T^\star$.

Пусть σ — функция, которая сохраняет множества $\{\mathbf{t}, \mathbf{f}\}$ и $\{\mathbf{t}, \mathbf{n}, \mathbf{f}\}$ и не сохраняет множество $\{\mathbf{t}, \mathbf{b}, \mathbf{f}\}$, и формула $\sigma(x_1, \ldots, x_n)$ реализует функцию σ. По условию, найдется такой набор $(a_1, \ldots, a_n) \in \{\mathbf{t}, \mathbf{b}, \mathbf{f}\}^n$, что $\sigma(a_1, \ldots, a_n) = \mathbf{n}$. Произведем такую подстановку ϵ в $\sigma(x_1, \ldots, x_n)$, что для каждой переменной x_i $(1 \leqslant i \leqslant n)$ имеет место

$$\epsilon(x_i) = \begin{cases} \neg(J_{\mathbf{t}}(x) \wedge \neg J_{\mathbf{t}}(x)), \text{ если } a_i = \mathbf{t}; \\ x, \text{ если } a_i = \mathbf{b}; \\ J_{\mathbf{t}}(x) \wedge \neg J_{\mathbf{t}}(x), \text{ если } a_i = \mathbf{f}. \end{cases}$$

Формула $\sigma(\epsilon(x_1), \ldots, \epsilon(x_n))$ реализует функцию $\sigma^*(x)$ от одной переменной, которая отвечает следующим условиям: $\sigma^*(x) \in \{\mathbf{t}, \mathbf{n}, \mathbf{f}\}$, $x = \mathbf{b} \Rightarrow \sigma^*(x) = \mathbf{n}$.

Известно, что $T'' = [\{\neg, \wedge, \vee, J_{\mathbf{t}}, J_{\mathbf{b}}, J_{\mathbf{n}}, J_{\mathbf{f}}\}]$ [Karpenko, 2013, §3]. Как следствие, $J_{\mathbf{b}}(x) \wedge \sigma^*(x) \in [T'' \cup \{\sigma\}]$.

Обозначим $J_{\mathbf{b}}(x) \wedge \sigma^*(x)$ как $\star x$. Имеет место следующее:

$$\star x = \begin{cases} \mathbf{n}, \text{ если } x = \mathbf{b}; \\ \mathbf{f} \text{ в противном случае.} \end{cases}$$

Теперь покажем, что $T^\star = [\{\neg, \wedge, \supset, J_{\mathbf{t}}, J_{\mathbf{b}}, J_{\mathbf{n}}, J_{\mathbf{f}}, \star\}]$.

Пусть $\psi(x_1, \ldots, x_n)$ — произвольная функция, сохраняющая множества $\{\mathbf{t}, \mathbf{f}\}$ и $\{\mathbf{t}, \mathbf{n}, \mathbf{f}\}$. Пусть $\vec{a} = (a_1, \ldots, a_n)$, $\vec{a} \in \{\mathbf{t}, \mathbf{b}, \mathbf{n}, \mathbf{f}\}^n$ и $\psi(\vec{a}) = \mathbf{t}$.

Определим функцию $\Phi^t_{\vec{a}}$ для набора $\vec{a}$ следующим образом: $\Phi^t_{\vec{a}}(x_1, \ldots, x_n) = J_{i_1}(x_1) \wedge \ldots \wedge J_{i_n}(x_n)$, где $i_j = a_j$. В силу определений $\wedge, J_{\mathbf{t}}, J_{\mathbf{b}}, J_{\mathbf{n}}, J_{\mathbf{f}}$,

$$\Phi^t_{\vec{a}}(x_1, \ldots, x_n) = \begin{cases} \mathbf{t}, \text{ если } x_j = a_j \text{ для всех } j \in \{1, \ldots, n\}; \\ \mathbf{f} \text{ в противном случае.} \end{cases}$$

Пусть $T = \{\vec{a}_1, \ldots, \vec{a}_k\}$ — множество всех таких наборов, что $\psi(\vec{a}_i) = \mathbf{t}$ для всех $i \in \{1, \ldots, k\}$. Функция $\Phi^t_T = \Phi^t_{\vec{a}_1} \vee \ldots \vee \Phi^t_{\vec{a}_k}$ принимает значение $\mathbf{t}$

на каждом наборе значений из T и принимает значение $\mathbf{f}$ во всех остальных случаях.

Теперь пусть $\vec{a} = (a_1, \ldots, a_n)$, $\vec{a} \in \{\mathbf{t}, \mathbf{b}, \mathbf{n}, \mathbf{f}\}^n$ и $\psi(\vec{a}) = \mathbf{b}$.

Определим функцию $\Phi^b_{\vec{a}}$ для набора $\vec{a}$ следующим образом: $\Phi^b_{\vec{a}}(x_1, \ldots, x_n) = \phi_1(x_1) \wedge \ldots \wedge \phi_n(x_n)$, где для каждого $i \in \{1, \ldots, n\}$

$$\phi_i(x_i) = \begin{cases} x_i \wedge J_{\mathbf{b}}(x_i), \text{ если } a_i = \mathbf{b}; \\ J_{a_i}(x_i), \text{ если } a_i \in \{\mathbf{t}, \mathbf{n}, \mathbf{f}\}. \end{cases}$$

Согласно условию, ψ сохраняет $\{\mathbf{t}, \mathbf{n}, \mathbf{f}\}$, поэтому значение $\mathbf{b}$ встречается в наборе $\vec{a}$ по меньшей мере один раз. Это означает, в силу определений J-операторов и конъюнкции, что функция $\Phi^b_{\vec{a}}$ принимает значение $\mathbf{b}$ на наборе $\vec{a}$ и принимает значение $\mathbf{f}$ на всех прочих наборах.

Пусть $B = \{\vec{a}_1, \ldots, \vec{a}_k\}$ — множество всех таких наборов, что $\psi(\vec{a_i}) = \mathbf{b}$ для всех $i \in \{1, \ldots, k\}$. Так как $\mathbf{f} \vee \mathbf{b} = \mathbf{b}$, функция $\Phi^b_B = \Phi^b_{\vec{a}_1} \vee \ldots \vee \Phi^b_{\vec{a}_k}$ принимает значение $\mathbf{b}$ на каждом наборе значений из B и принимает значение $\mathbf{f}$ в любом другом случае.

Теперь пусть $\vec{a} = (a_1, \ldots, a_n)$, $\vec{a} \in \{\mathbf{t}, \mathbf{b}, \mathbf{n}, \mathbf{f}\}^n$ и $\psi(\vec{a}) = \mathbf{n}$.

Определим функцию $\Phi^n_{\vec{a}}$ для набора $\vec{a}$ следующим образом: $\Phi^n_{\vec{a}}(x_1, \ldots, x_n) = \phi'_1(x_1) \wedge \ldots \wedge \phi'_n(x_n)$, где для каждого $i \in \{1, \ldots, n\}$

$$\phi'_i(x_i) = \begin{cases} \star x_i, \text{ если } a_i = \mathbf{b}; \\ x_i \wedge J_{\mathbf{n}}(x_i), \text{ если } a_i = \mathbf{n}; \\ J_{a_i}(x_i), \text{ если } a_i \in \{\mathbf{t}, \mathbf{f}\}. \end{cases}$$

По условию теоремы, ψ сохраняет множества $\{\mathbf{t}, \mathbf{f}\}$ и $\{\mathbf{t}, \mathbf{n}, \mathbf{f}\}$, однако может и не сохранять множество $\{\mathbf{t}, \mathbf{b}, \mathbf{f}\}$. Это означает, что $\vec{a}$ содержит по меньшей мере одно вхождение $\mathbf{n}$ или $\mathbf{b}$. В силу определений J-операторов, конъюнкции и оператора $\star x$, функция $\Phi^n_{\vec{a}}$ принимает значение $\mathbf{n}$ на наборе $\vec{a}$ и принимает значение $\mathbf{f}$ на всех прочих наборах.

Пусть $N = \{\vec{a}_1, \ldots, \vec{a}_k\}$ — множество всех таких наборов, что $\psi(\vec{a_i}) = \mathbf{n}$ для всех $i \in \{1, \ldots, k\}$. Так как $\mathbf{f} \vee \mathbf{n} = \mathbf{n}$, функция $\Phi^n_N = \Phi^n_{\vec{a}_1} \vee \ldots \vee \Phi^n_{\vec{a}_k}$ принимает значение $\mathbf{n}$ на каждом наборе значений из N и принимает значение $\mathbf{f}$ в любом другом случае.

Так как $\mathbf{f} \vee a = a$ для любого $a \in \{\mathbf{t}, \mathbf{b}, \mathbf{n}, \mathbf{f}\}$, получаем $\psi = \Phi^t_T \vee \Phi^b_B \vee \Phi^n_N$. Таким образом, $T^\star \subseteq [\{\vee, \wedge, J_{\mathbf{t}}, J_{\mathbf{b}}, J_{\mathbf{n}}, J_{\mathbf{f}}, \star\}]$. Кроме того, ясно, что $[\{\vee, \wedge, J_{\mathbf{t}}, J_{\mathbf{b}}, J_{\mathbf{n}}, J_{\mathbf{f}}, \star\}] \subseteq T^\star$, поскольку каждая операция из $\{\vee, \wedge, J_{\mathbf{t}}, J_{\mathbf{b}}, J_{\mathbf{n}}, J_{\mathbf{f}}, \star\}$ сохраняет множества $\{\mathbf{t}, \mathbf{f}\}$ и $\{\mathbf{t}, \mathbf{n}, \mathbf{f}\}$. ■

Теорема 5. *Класс $T^\star$ предполон в $Ł_4$.*

Доказательство.

Класс $T^\star$ — это класс всех функций, которые сохраняют множества $\{\mathbf{t}, \mathbf{f}\}$ и $\{\mathbf{t}, \mathbf{n}, \mathbf{f}\}$. $Ł_4$ — класс всех функций, которые сохраняют множество $\{\mathbf{t}, \mathbf{f}\}$. Достаточно обосновать следующее утверждение: если $\varphi \notin T^\star$ и $\varphi \in Ł_4$, то $-x \in [T^\star \cup \{\varphi\}]$.

Пусть φ — функция, которая сохраняет множество $\{\mathbf{t}, \mathbf{f}\}$, но не сохраняет множество $\{\mathbf{t}, \mathbf{n}, \mathbf{f}\}$, и формула $\varphi(x_1, \ldots, x_n)$ реализует функцию φ. По условию, найдется такой набор $(a_1, \ldots, a_n) \in \{\mathbf{t}, \mathbf{n}, \mathbf{f}\}^n$, что $\varphi(a_1, \ldots, a_n) = \mathbf{b}$. Произведем такую подстановку ϵ в $\varphi(x_1, \ldots, x_n)$, что для каждой переменной x_i $(1 \leqslant i \leqslant n)$ имеет место

$$\epsilon(x_i) = \begin{cases} \neg(J_{\mathbf{t}}(x) \wedge \neg J_{\mathbf{t}}(x)), \text{ если } a_i = \mathbf{t}; \\ x, \text{ если } a_i = \mathbf{n}; \\ J_{\mathbf{t}}(x) \wedge \neg J_{\mathbf{t}}(x), \text{ если } a_i = \mathbf{f}. \end{cases}$$

Формула $\varphi(\epsilon(x_1), \ldots, \epsilon(x_n))$ реализует функцию $\varphi^*(x)$ от одной переменной, которая отвечает следующим условиям: $\varphi^*(x) \in \{\mathbf{t}, \mathbf{b}, \mathbf{f}\}$, $x = \mathbf{n} \Rightarrow \varphi^*(x) = \mathbf{b}$. Теперь для завершения доказательства достаточно следующего тождества: $-x = (J_{\mathbf{n}}(x) \wedge \varphi^*(x)) \vee J_{\mathbf{t}}(x) \vee \star x$. ■

Теорема 6. *Класс T'' предполон в $T^{\star\star}$.*

Доказательство. Аналогично Теореме 4. ■

Теорема 7. *Класс $T^{\star\star}$ предполон в $Ł_4$.*

Доказательство. Аналогично Теореме 5. ■

Теорема 8. *Если $T'' \subset K \subseteq Ł_4$ и $K \notin \{T^\star, T^{\star\star}\}$, то $K = Ł_4$.*

Доказательство.

Пусть $T'' \subset K \subseteq Ł_4$ и $K \notin \{T^\star, T^{\star\star}\}$. Тогда K содержит (необязательно различные) функции σ и φ, которые отвечают следующим условиям: σ сохраняет множество $\{\mathbf{t}, \mathbf{f}\}$, но не сохраняет множество $\{\mathbf{t}, \mathbf{b}, \mathbf{f}\}$; φ сохраняет множество $\{\mathbf{t}, \mathbf{f}\}$, но не сохраняет множество $\{\mathbf{t}, \mathbf{n}, \mathbf{f}\}$.

В этом случае, как вытекает из Теоремы 4, K также содержит такую функцию σ^* от одной переменной, что $\sigma^*(x) \in \{\mathbf{t}, \mathbf{n}, \mathbf{f}\}$, $x = \mathbf{b} \Rightarrow \sigma^*(x) = \mathbf{n}$. Кроме того, как следует из Теоремы 5, K содержит такую функцию φ^* от одной переменной, что $\varphi^*(x) \in \{\mathbf{t}, \mathbf{b}, \mathbf{f}\}$, $x = \mathbf{n} \Rightarrow \varphi^*(x) = \mathbf{b}$.

В ходе доказательства Теоремы 3 мы установили, что $T'' = [\{\neg, \wedge, \supset, \mathbf{f}\}]$. Из этого вытекает, что $[T'' \cup \{-x\}] = Ł_4$. Таким образом, для завершения доказательства достаточно следующего тождества: $-x = J_{\mathbf{t}}(x) \vee (J_{\mathbf{b}}(x) \wedge \sigma^*(x)) \vee (J_{\mathbf{n}}(x) \wedge \varphi^*(x))$. ■

В Разделах 1 и 2 мы рассмотрели четыре замкнутых класса: T'', Tr, $T^\star$ и $T^{\star\star}$. Их объединяет интересная особенность. В статье [De, Omori, 2015] рассмотрены четыре функции на $\{\mathbf{t}, \mathbf{b}, \mathbf{n}, \mathbf{f}\}$, являющиеся аналогами классического отрицания (нотация изменена):

	$\sim_1$	$\sim_2$	$\sim_3$	$\sim_4$
t	**f**	**f**	**f**	**f**
b	**n**	**n**	**f**	**f**
n	**b**	**t**	**b**	**t**
f	**t**	**t**	**t**	**t**

Имеют место следующие факты: (1) $Tr = [DM4 \cup \{\sim_1\}]$; (2) $T^\star = [DM4 \cup \{\sim_2\}]$; (3) $T^{\star\star} = [DM4 \cup \{\sim_3\}]$; (4) $T'' = [DM4 \cup \{\sim_4\}]$. Утверждение (1) истинно в силу тождеств $\sim_1 x = -\neg x$ и $-x = \sim_1 \neg x$. Утверждение (2) истинно, так как $\sim_2$ сохраняет множества $\{\mathbf{t}, \mathbf{f}\}$ и $\{\mathbf{t}, \mathbf{n}, \mathbf{f}\}$, но не сохраняет множество $\{\mathbf{t}, \mathbf{n}, \mathbf{f}\}$, и $e_2(x) = \sim_2 \sim_2 x$, т. е. $T'' \subset [DM4 \cup \{\sim_2\}]$ (см. Теорему 4). Доказательство утверждения (3) аналогично таковому для утверждения (2) с очевидными модификациями, используется Теорема 6 и тот факт, что $e_2(x) = \sim_3 \sim_3 x$. Истинность утверждения (4) подтверждают тождества $\sim_4 x = \neg e_2(x)$ и $e_2(x) = \neg \sim_4 x$. Таким образом, все четыре рассмотренных нами замкнутых класса порождены расширением $DM4$ посредством одного из «классических» отрицаний.

3. Наибольший общий подкласс Tr и T''

Этот раздел посвящен наибольшему общему замкнутому подклассу Tr и T''. В [Карпенко, 2015, §7] автор рассматривает выразительные возможности тетравалентной модальной логики **TML**. Набор базовых операций **TML** имеет вид $\{\wedge, \vee, \neg, \Box\}$, где $\Box x = J_{\mathbf{t}} x$. А.С. Карпенко демонстрирует, что класс функций, порождаемый базовыми операциями этой логики (который мы обозначим как TML), содержится как в Tr, так и в T''.

В [Omori, Sano, 2014] строится паранепротиворечивая логика с базовыми операциями $\{\wedge, \vee, \neg, \circ\}$, где $\circ x = J_{\mathbf{t}}(x) \vee J_{\mathbf{t}}(\neg x)$. В [Omori, Sano, 2015] замкнутый класс, порожденный этим набором обозначается как $\mathcal{BD}\circ$. В то же время, $\mathcal{BD}\circ$ есть TML, так как $J_{\mathbf{t}} x = x \wedge \circ x$. Подобно А.С. Карпенко, Омори и Сано указывают, что $\mathcal{BD}\circ \subset T''$ и $\mathcal{BD}\circ \subset Tr$ (T'' и Tr обозначаются как $\mathcal{BD}\Delta$ и $\mathcal{BD}-$ соответственно).

Мы демонстрируем, что TML является не просто общим подклассом Tr и T'', а наибольшим замкнутым классом, обладающим таким свойством (Теорема 9). Кроме того, мы показываем, что TML предполон в Tr (Теорема 10), а также что между TML и T'' лежит в точности один замкнутый класс (Теоремы 12 и 13).

Перед тем как перейти к изложению основных результатов, отметим, что, в отличие от Tr, T'', $T^{\star}$ и $T^{\star\star}$, класс TML не содержит классического отрицания. Однако он содержит два отрицания так наз. литеральных паралогик, т. е. логик, которые отличаются от классической только на уровне литералов — пропозициональных переменных и их итерированных отрицаний. В статье [Томова, 2018] рассматриваются четыре подобных отрицания. Интересующие нас отвечают следующим тождествам: $\neg_1 x = \neg J_{\mathbf{t}}(x)$; $\neg_2 x = J_{\mathbf{t}}(\neg x)$. Поскольку также имеет место $J_{\mathbf{t}}(x) = \neg\neg_1 x$ и $J_{\mathbf{t}}(x) = \neg_2\neg x$, выполняется тождество $[\{\wedge, \vee, \neg, \neg_1\}] = [\{\wedge, \vee, \neg, \neg_2\}] = TML$.

Теорема 9. $TML = [\{\neg, \wedge, \vee, J_{\mathbf{t}}\}]$ *есть наибольший общий подкласс* Tr *и* T''.

Доказательство.

Необходимо и достаточно обосновать следующие утверждения:

1. Если $f \in Tr$ и $f \in T''$, то $f \in TML$.

2. Если $f \in TML$, то $f \in Tr$ и $f \in T''$.

Докажем первое утверждение. Если $f \in Tr$, то f $\{\mathbf{t}, \mathbf{f}\}$-замкнута и самодвойственна относительно $-x$ (Теорема 1). Если $f \in T''$, то f сохраняет множества $\{\mathbf{t}, \mathbf{f}\}$, $\{\mathbf{t}, \mathbf{b}, \mathbf{f}, \}$ и $\{\mathbf{t}, \mathbf{n}, \mathbf{f}\}$ (Теорема 3). Таким образом, для доказательства достаточно обосновать, что TML есть класс всех функций, одновременно обладающих следующими свойствами: $\{\mathbf{t}, \mathbf{f}\}$-замкнутость, $\{\mathbf{t}, \mathbf{b}, \mathbf{f}, \}$-замкнутость, $\{\mathbf{t}, \mathbf{n}, \mathbf{f}\}$-замкнутость, самодовойственность относительно $-x$.

Определим вспомогательную операцию: $x \boxplus y = J_{\mathbf{t}}(((x \wedge \neg x) \wedge \bullet y) \vee (\bullet x \wedge (y \wedge \neg y))) \wedge (\bullet x \wedge (y \wedge \neg y))$. Операция $\boxplus$ отвечает следующей таблице:

$\boxplus$	**t**	**b**	**n**	**f**
t	**f**	**f**	**f**	**f**
b	**f**	**f**	**b**	**f**
n	**f**	**n**	**f**	**f**
f	**f**	**f**	**f**	**f**

Рассмотрим функцию ψ, которая одновременно $\{\mathbf{t}, \mathbf{f}\}$-замкнута, $\{\mathbf{t}, \mathbf{b}, \mathbf{f}, \}$-замкнута, $\{\mathbf{t}, \mathbf{n}, \mathbf{f}\}$-замкнута и самодовойственна относительно

$-x$. Пусть $\psi(x_1, \ldots, x_n)$ принимает значение $\mathbf{t}$ на наборе $\vec{a} = (a_1, \ldots, a_n)$. Так как $\psi(x_1, \ldots, x_n) = -\psi(-x_1, \ldots, -x_n)$, $\psi(x_1, \ldots, x_n)$ также принимает значение $\mathbf{t}$ на наборе $-\vec{a} = (-a_1, \ldots, -a_n)$.

Рассмотрим функцию, реализуемую формулой $\Phi^t_{\vec{a}}(x_1, \ldots, x_n)$:

$$\Phi^t_{\vec{a}}(x_1, \ldots, x_n) = \Delta(\vec{x}_t) \wedge \Theta(\vec{x}_f) \wedge \Xi(\vec{x}_b, \vec{x}_n),$$

где Δ и Θ определяются так же, как в Теореме 1, а функция $\Xi(\vec{x}_b, \vec{x}_n)$ описывается приведенной ниже таблицей.

$\lvert\vec{x}_b\rvert$	$\lvert\vec{x}_n\rvert$	$\Xi(\vec{x}_b, \vec{x}_n)$
0	0	$\emptyset$
1	0	$\bullet(x_{1_b})$
$k_b \geqslant 2$	0	$\bullet(\tilde{x}_{1_b} \wedge \ldots \wedge \tilde{x}_{k_b})$
0	1	$\bullet(x_{1_n})$
1	1	$\bullet(x_{1_b} \boxplus x_{1_n})$
$k_b \geqslant 2$	1	$\bullet((\tilde{x}_{1_b} \wedge \ldots \wedge \tilde{x}_{k_b}) \boxplus \tilde{x}_{1_n})$
0	$k_n \geqslant 2$	$\bullet(\tilde{x}_{1_n} \wedge \ldots \wedge \tilde{x}_{k_n})$
1	$k_n \geqslant 2$	$\bullet(\tilde{x}_{1_b} \boxplus (\tilde{x}_{1_n} \wedge \ldots \wedge \tilde{x}_{k_n}))$
$k_b \geqslant 2$	$k_n \geqslant 2$	$\bullet((\tilde{x}_{1_b} \wedge \ldots \wedge \tilde{x}_{k_b}) \boxplus (\tilde{x}_{1_n} \wedge \ldots \wedge \tilde{x}_{k_n}))$

По построению, $\Phi^t_{\vec{a}}$ принимает значение $\mathbf{t}$ на наборах $\vec{a}$ и $-\vec{a}$, а на всех прочих наборах она принимает значение $\mathbf{f}$.

Теперь пусть $\psi(x_1, \ldots, x_n)$ принимает значение $\mathbf{b}$ на наборе $\vec{a} = (a_1, \ldots, a_n)$. Так как $\psi(x_1, \ldots, x_n) = -\psi(-x_1, \ldots, -x_n)$, $\psi(x_1, \ldots, x_n)$ также принимает значение $\mathbf{n}$ на наборе $-\vec{a} = (-a_1, \ldots, -a_n)$. Поскольку ψ сохраняет множества $\{\mathbf{t}, \mathbf{f}\}$ и $\{\mathbf{t}, \mathbf{n}, \mathbf{f}\}$, $\vec{a}$ содержит по меньшей мере одно вхождение $\mathbf{b}$.

Рассмотрим функцию, реализуемую формулой $\Phi^b_{\vec{a}}(x_1, \ldots, x_n)$:

$$\Phi^b_{\vec{a}}(x_1, \ldots, x_n) = \Delta(\vec{x}_t) \wedge \Theta(\vec{x}_f) \wedge \Xi(\vec{x}_b, \vec{x}_n),$$

где Δ и Θ определяются так же, как в Теореме 1, а функция $\Xi(\vec{x}_b, \vec{x}_n)$ описывается приведенной ниже таблицей.

$\lvert\vec{x}_b\rvert$	$\lvert\vec{x}_n\rvert$	$\Xi(\vec{x}_b, \vec{x}_n)$
1	0	$\tilde{x}_{1_b}$
$k_b \geqslant 2$	0	$\tilde{x}_{1_b} \wedge \ldots \wedge \tilde{x}_{k_b}$
1	1	$x_{1_b} \boxplus x_{1_n}$
$k_b \geqslant 2$	1	$(\tilde{x}_{1_b} \wedge \ldots \wedge \tilde{x}_{k_b}) \boxplus \tilde{x}_{1_n}$
1	$k_n \geqslant 2$	$\tilde{x}_{1_b} \boxplus (\tilde{x}_{1_n} \wedge \ldots \wedge \tilde{x}_{k_n})$
$k_b \geqslant 2$	$k_n \geqslant 2$	$(\tilde{x}_{1_b} \wedge \ldots \wedge \tilde{x}_{k_b}) \boxplus (\tilde{x}_{1_n} \wedge \ldots \wedge \tilde{x}_{k_n})$

Функция $\Phi^b_{\vec{a}}$ принимает значение $\mathbf{b}$ на наборе $\vec{a}$ и значение $\mathbf{n}$ на наборе $-\vec{a}$, а на всех остальных наборах она принимает значение $\mathbf{f}$.

Как и в доказательстве Теоремы 1, в силу изоморфизма множества B всех наборов, на которых ψ принимает значение $\mathbf{b}$, и множества N всех наборов, на которых ψ принимает значение $\mathbf{n}$, имеем следующее. Функция $\Phi^b_B = \Phi^b_{\vec{a}_1} \vee \ldots \vee \Phi^b_{\vec{a}_k}$ принимает значение $\mathbf{b}$ на каждом наборе значений из B, принимает значение $\mathbf{n}$ на каждом наборе значений из N и принимает значение $\mathbf{f}$ во всех остальных случаях.

Так как $\mathbf{f} \vee a = a$ для любого $a \in \{\mathbf{t}, \mathbf{b}, \mathbf{n}, \mathbf{f}\}$, получаем $\psi = \Phi^t_T \vee \Phi^b_B$. Таким образом, каждая функция, которая одновременно $\{\mathbf{t}, \mathbf{f}\}$-замкнута, $\{\mathbf{t}, \mathbf{b}, \mathbf{f}, \}$-замкнута, $\{\mathbf{t}, \mathbf{n}, \mathbf{f}\}$-замкнута и самодовойственна относительно $-x$, содержится в TML.

Поскольку, кроме того, каждая функция из множества $\{\wedge, \vee, \neg, J_{\mathbf{t}}\}$ также обладает всеми из перечисленных выше свойств, TML действительно есть класс всех функций, которые одновременно $\{\mathbf{t}, \mathbf{f}\}$-замкнуты, $\{\mathbf{t}, \mathbf{b}, \mathbf{f}, \}$-замкнуты, $\{\mathbf{t}, \mathbf{n}, \mathbf{f}\}$-замкнуты и самодовойственны относительно $-x$. Из этого факта тривиальным образом следует и второе утверждение: если $f \in TML$, то $f \in Tr$ и $f \in T''$. ■

Теорема 10. *Класс TML предполон в Tr.*

Доказательство.

Вспомним, что $TML = [\{\neg, \wedge, \vee, J_{\mathbf{t}}\}]$ (стр. 129) и $Tr = [\{\wedge, \vee, \neg, -\}]$ (стр. 120). Таким образом, для доказательства теоремы достаточно обосновать следующее утверждение: если $\varphi \notin TML$ и $\varphi \in Tr$, то $-x \in [TML \cup \{\varphi\}]$.

TML — класс всех функций, одновременно обладающих следующими свойствами: $\{\mathbf{t}, \mathbf{f}\}$-замкнутость, $\{\mathbf{t}, \mathbf{b}, \mathbf{f}, \}$-замкнутость, $\{\mathbf{t}, \mathbf{n}, \mathbf{f}\}$-замкнутость, самодовойственность относительно $-x$; Tr — класс всех функций, которые одновременно $\{\mathbf{t}, \mathbf{f}\}$-замкнуты и самодвойственны относительно $-x$. Пусть φ — произвольная $\{\mathbf{t}, \mathbf{f}\}$-замкнутая функция, самодовойственная относительно $-x$, которая не сохраняет множество $\{\mathbf{t}, \mathbf{b}, \mathbf{f}, \}$ или $\{\mathbf{t}, \mathbf{n}, \mathbf{f}, \}$, и формула $\varphi(x_1, \ldots, x_n)$ реализует функцию φ.

Допустим, найдется такой набор $(a_1, \ldots, a_n) \in \{\mathbf{t}, \mathbf{b}, \mathbf{f}\}^n$, что $\varphi(a_1, \ldots, a_n) = \mathbf{n}$. Произведем такую подстановку ϵ в $\varphi(x_1, \ldots, x_n)$, что для каждой переменной x_i $(1 \leqslant i \leqslant n)$ имеет место

$$\epsilon(x_i) = \begin{cases} \neg(J_{\mathbf{t}}(x) \wedge \neg J_{\mathbf{t}}(x)), \text{ если } a_i = \mathbf{t}; \\ x, \text{ если } a_i = \mathbf{b}; \\ J_{\mathbf{t}}(x) \wedge \neg J_{\mathbf{t}}(x), \text{ если } a_i = \mathbf{f}. \end{cases}$$

Формула $\varphi(\epsilon(x_1), \ldots, \epsilon(x_n))$ реализует функцию φ^* от одной переменной, которая $\{\mathbf{t}, \mathbf{f}\}$-замкнута, самодовойственна относительно $-x$ и не сохраняет множество $\{\mathbf{t}, \mathbf{b}, \mathbf{f}, \}$. То есть $\varphi^*(\mathbf{b}) = \mathbf{n}$. В то же время, в силу самодвойственности, $\varphi^*(\mathbf{b}) = -\varphi^*(-\mathbf{b}) = -\varphi^*(\mathbf{n})$. Таким образом, $\varphi^*(\mathbf{n}) = \mathbf{b}$. Однако тогда выполняется следующее тождество: $-x = (\varphi^*(x) \wedge \neg J_{\mathbf{t}}(x) \wedge \neg J_{\mathbf{t}}(\neg x)) \vee J_{\mathbf{t}}(x)$.

Теперь допустим, что найдется такой набор $(a_1, \ldots, a_n) \in \{\mathbf{t}, \mathbf{n}, \mathbf{f}\}^n$, для которого $\varphi(a_1, \ldots, a_n) = \mathbf{b}$. Чтобы провести построение, аналогичное только что рассмотренному случаю, достаточно очевидной модификации определения подстановки ϵ: $\epsilon(x_i) = x$, если $a_i = \mathbf{n}$. ■

Итак, мы установили, что TML предполон в Tr. Теперь установим отношения между TML и T''. Для этого используем понятие *сохранения матрицы функцией*. Подробнее о этом можно прочитать в [Марченков, 2004, §1.6].

Определение 7 (Сохранение матрицы функцией)**.** Пусть дана матрица[2] вида $\mathfrak{M} = \begin{pmatrix} a_{11} & \ldots & a_{1p} \\ \ldots & \ldots & \ldots \\ a_{m1} & \ldots & a_{mp} \end{pmatrix}$, где $a_{kl} \in A$ для всех $k \in \{1, \ldots, m\}$, $l \in \{1, \ldots, p\}$, и $f(x_1, \ldots, x_n)$ — функция на A от n переменных. Обозначим как $\mathfrak{M}_n$ матрицу $\begin{pmatrix} a_{1i_1} & \ldots & a_{1i_n} \\ \ldots & \ldots & \ldots \\ a_{mi_1} & \ldots & a_{mi_n} \end{pmatrix}$, где $i_j \in \{1, \ldots, p\}$ для всех $j \in \{1, \ldots, n\}$.

Говорим, что функция $f(x_1, \ldots, x_n)$ *сохраняет матрицу* $\mathfrak{M}$, если для всех $\mathfrak{M}_n$ имеет место $f \begin{pmatrix} a_{1i_1} & \ldots & a_{1i_n} \\ \ldots & \ldots & \ldots \\ a_{mi_1} & \ldots & a_{mi_n} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} f(a_{1i_1} & \ldots & a_{1i_n}) \\ \ldots & & \\ f(a_{mi_1} & \ldots & a_{mi_n}) \end{pmatrix} \in \mathfrak{M}$.

Теперь рассмотрим операцию $\circledcirc$, которая отвечает следующей таблице:

$\circledcirc$	**t**	**b**	**n**	**f**
t	**f**	**f**	**f**	**f**
b	**f**	**f**	**t**	**f**
n	**f**	**f**	**f**	**f**
f	**f**	**f**	**f**	**f**

Эта операция не самодвойственна относительно $-x$, так как $\mathbf{b} \circledcirc \mathbf{n} = \mathbf{t}$, однако $\mathbf{n} \circledcirc \mathbf{b} \neq \mathbf{t}$. В то же время все операции из набора $\{\vee, \wedge, \neg, \circledcirc\}$ сохраняют матрицу $\mathfrak{S}$, где

[2]Как это обычно делается при исследовании замкнутых классов функций, матрица используется в качестве более удобного обозначения *множества* упорядоченных наборов (см. [Марченков, 2004, §1.6]).

$$\mathfrak{S} = \begin{pmatrix} \mathbf{b} & \mathbf{f} & \mathbf{t} \\ \mathbf{n} & \mathbf{f} & \mathbf{t} \end{pmatrix}.$$

Приведенные ниже теоремы демонстрируют, что $TML' = [\{\vee, \wedge, \neg, \circledcirc\}]$ является единственным замкнутым классом между TML и T''.

Теорема 11. $TML' = [\{\vee, \wedge, \neg, \circledcirc\}]$ — *класс всех функций, которые содержатся в* T'' *и сохраняют матрицу* $\mathfrak{S}$.

Доказательство. Если $f \in T''$, то f сохраняет множества $\{\mathbf{t}, \mathbf{f}\}$, $\{\mathbf{t}, \mathbf{b}, \mathbf{f}, \}$ и $\{\mathbf{t}, \mathbf{n}, \mathbf{f}\}$ (Теорема 3). Пусть ψ — произвольная функция, не самодовойственная относительно $-x$, которая сохраняет множества $\{\mathbf{t}, \mathbf{f}\}$, $\{\mathbf{t}, \mathbf{b}, \mathbf{f}, \}$ и $\{\mathbf{t}, \mathbf{n}, \mathbf{f}, \}$, а также сохраняет матрицу $\mathfrak{S}$.

Пусть $\psi(x_1, \ldots, x_n)$ принимает значение $\mathbf{t}$ на наборе $\vec{a} = (a_1, \ldots, a_n)$. Поскольку ψ сохраняет матрицу $\mathfrak{S}$, $\psi(x_1, \ldots, x_n)$ также принимает значение $\mathbf{t}$ на наборе $-\vec{a} = (-a_1, \ldots, -a_n)$.

Рассмотрим функцию, реализуемую формулой $\Phi^t_{\vec{a}}(x_1, \ldots, x_n)$:

$$\Phi^t_{\vec{a}}(x_1, \ldots, x_n) = \Delta(\vec{x}_t) \wedge \Theta(\vec{x}_f) \wedge \Xi(\vec{x}_b, \vec{x}_n),$$

где $\Delta(\vec{x}_t)$ и $\Theta(\vec{x}_f)$ определяются так же, как в Теореме 1, а $\Xi(\vec{x}_b, \vec{x}_n)$ описывается приведенной ниже таблицей.

$\lvert\vec{x}_b\rvert$	$\lvert\vec{x}_n\rvert$	$\Xi(\vec{x}_b, \vec{x}_n)$
0	0	$\emptyset$
1	0	$\bullet(x_{1_b})$
$k_b \geqslant 2$	0	$\bullet(\tilde{x}_{1_b} \wedge \ldots \wedge \tilde{x}_{k_b})$
0	1	$\bullet(x_{1_n})$
1	1	$x_{1_b} \circledcirc x_{1_n}$
$k_b \geqslant 2$	1	$(\tilde{x}_{1_b} \wedge \ldots \wedge \tilde{x}_{k_b}) \circledcirc x_{1_n}$
0	$k_n \geqslant 2$	$\bullet(\tilde{x}_{1_n} \wedge \ldots \wedge \tilde{x}_{k_n})$
1	$k_n \geqslant 2$	$x_{1_b} \circledcirc (\tilde{x}_{1_n} \wedge \ldots \wedge \tilde{x}_{k_n})$
$k_b \geqslant 2$	$k_n \geqslant 2$	$(\tilde{x}_{1_b} \wedge \ldots \wedge \tilde{x}_{k_b}) \circledcirc (\tilde{x}_{1_n} \wedge \ldots \wedge \tilde{x}_{k_n})$

Если один из наборов $\vec{x}_b$, $\vec{x}_n$ является пустым, а второй непуст, то формула $\Phi^t_{\vec{a}}$ принимает значение $\mathbf{t}$ на наборах $\vec{a}$ и $-\vec{a}$, а на всех остальных наборах она принимает значение $\mathbf{f}$. Если же наборы $\vec{x}_b$, $\vec{x}_n$ одновременно пусты или одновременно непусты, то формула $\Phi^t_{\vec{a}}$ принимает значение $\mathbf{t}$ на одном лишь наборе $\vec{a}$ и значение $\mathbf{f}$ на всех остальных наборах.

Пусть $T = \{\vec{a}_1, \ldots, \vec{a}_k\}$ — множество всех таких наборов, что $\psi(\vec{a}_i) = \mathbf{t}$ для всех $i \in \{1, \ldots, k\}$. Поскольку ψ сохраняет матрицу $\mathfrak{S}$, имеет место следующее: $\psi(\vec{a}) = \mathbf{t} \Leftrightarrow \psi(-\vec{a}) = \mathbf{t}$ для всех $\vec{a} \in \{\mathbf{t}, \mathbf{b}, \mathbf{f}\}^n \cup \{\mathbf{t}, \mathbf{n}, \mathbf{f}\}^n$.

Функция $\Phi^t_T = \Phi^t_{\vec{a}_1} \vee \ldots \vee \Phi^t_{\vec{a}_k}$ принимает значение $\mathbf{t}$ на каждом наборе значений из T и принимает значение $\mathbf{f}$ во всех остальных случаях.

Теперь пусть $\vec{a} = (a_1, \ldots, a_n)$, $\vec{a} \in \{\mathbf{t}, \mathbf{b}, \mathbf{n}, \mathbf{f}\}^n$ и $\psi(\vec{a}) = \mathbf{b}$. Поскольку ψ сохраняет множество $\{\mathbf{t}, \mathbf{n}, \mathbf{f}\}$, $\vec{a}$ содержит по меньшей мере одно вхождение $\mathbf{b}$.

Определим функцию $\Phi^b_{\vec{a}}$ для набора $\vec{a}$ следующим образом:

$$\Phi^b_{\vec{a}}(x_1, \ldots, x_n) = \Delta(\vec{x}_t) \wedge \Theta(\vec{x}_f) \wedge \Xi(\vec{x}_b, \vec{x}_n),$$

где $\Delta(\vec{x}_t)$ и $\Theta(\vec{x}_f)$ определяются так же, как и выше, а $\Xi(\vec{x}_b, \vec{x}_n)$ описывается приведенной ниже таблицей.

$\lvert\vec{x}_b\rvert$	$\lvert\vec{x}_n\rvert$	$\Xi(\vec{x}_b, \vec{x}_n)$
1	0	$\tilde{x}_{1_b}$
$k_b \geqslant 2$	0	$\tilde{x}_{1_b} \wedge \ldots \wedge \tilde{x}_{k_b}$
1	1	$\tilde{x}_{1_b} \wedge (x_{1_b} \circledcirc x_{1_n})$
$k_b \geqslant 2$	1	$(\tilde{x}_{1_b} \wedge \ldots \wedge \tilde{x}_{k_b}) \wedge (x_{1_b} \circledcirc x_{1_n})$
1	$k_n \geqslant 2$	$\tilde{x}_{1_b} \wedge (x_{1_b} \circledcirc x_{1_n} \wedge \ldots \wedge x_{1_b} \circledcirc x_{k_n})$
$k_b \geqslant 2$	$k_n \geqslant 2$	$(\tilde{x}_{1_b} \wedge \ldots \wedge \tilde{x}_{k_b}) \wedge (x_{1_b} \circledcirc x_{1_n} \wedge \ldots \wedge x_{1_b} \circledcirc x_{k_n})$

Если $|\vec{x}_n| = 0$, то формула $\Phi^b_{\vec{a}}$ принимает значение $\mathbf{b}$ на наборе $\vec{a}$ и значение $\mathbf{n}$ на наборе $-\vec{a}$, а на всех остальных наборах она принимает значение $\mathbf{f}$. Если $|\vec{x}_n| \neq 0$, то формула $\Phi^b_{\vec{a}}$ принимает значение $\mathbf{b}$ на одном лишь наборе $\vec{a}$ и значение $\mathbf{f}$ на всех остальных наборах.

Пусть $B = \{\vec{a}_1, \ldots, \vec{a}_k\}$ — множество всех таких наборов, что $\psi(\vec{a_i}) = \mathbf{b}$ для всех $i \in \{1, \ldots, k\}$, а $N = \{\vec{a}'_1, \ldots, \vec{a}'_k\}$ — множество всех таких наборов, что $\psi(\vec{a_i}) = \mathbf{n}$ для всех $i \in \{1, \ldots, k\}$. Функция $\Phi^b_B = \Phi^b_{\vec{a}_1} \vee \ldots \vee \Phi^b_{\vec{a}_k}$ принимает значение $\mathbf{b}$ на каждом наборе значений из B, принимает значение $\mathbf{n}$ на каждом таком наборе $\vec{a}'$ из N, что $\vec{a}' \in \{\mathbf{t}, \mathbf{n}, \mathbf{f}\}^n$, и принимает значение $\mathbf{f}$ во всех остальных случаях.

Наконец, пусть $\vec{a} = (a_1, \ldots, a_n)$, $\vec{a} \in \{\mathbf{t}, \mathbf{b}, \mathbf{n}, \mathbf{f}\}^n$ и $\psi(\vec{a}) = \mathbf{n}$. Поскольку ψ сохраняет множество $\{\mathbf{t}, \mathbf{b}, \mathbf{f}\}^n$, $\vec{a}$ содержит по меньшей мере одно вхождение $\mathbf{n}$.

Определим функцию $\Phi^n_{\vec{a}}$ для набора $\vec{a}$ следующим образом:

$$\Phi^n_{\vec{a}}(x_1, \ldots, x_n) = \Delta(\vec{x}_t) \wedge \Theta(\vec{x}_f) \wedge \Xi(\vec{x}_b, \vec{x}_n),$$

где $\Delta(\vec{x}_t)$ и $\Theta(\vec{x}_f)$ определяются так же, как и выше, а $\Xi(\vec{x}_b, \vec{x}_n)$ описывается приведенной ниже таблицей.

$\lvert\vec{x}_b\rvert$	$\lvert\vec{x}_n\rvert$	$\Xi(\vec{x}_b, \vec{x}_n)$
0	1	$\tilde{x}_{1_n}$
1	1	$(x_{1_b} \circledcirc x_{1_n}) \wedge \tilde{x}_{1_n}$
$k_b \geqslant 2$	1	$((x_{1_b} \circledcirc x_{1_n}) \wedge \ldots \wedge (x_{k_b} \circledcirc x_{1_n})) \wedge \tilde{x}_{1_n}$
0	$k_n \geqslant 2$	$\tilde{x}_{1_n} \wedge \ldots \wedge \tilde{x}_{k_n}$
1	$k_n \geqslant 2$	$(x_{1_b} \circledcirc x_{1_n}) \wedge (\tilde{x}_{1_n} \wedge \ldots \wedge \tilde{x}_{k_n})$
$k_b \geqslant 2$	$k_n \geqslant 2$	$((x_{1_b} \circledcirc x_{1_n}) \wedge \ldots \wedge (x_{k_b} \circledcirc x_{1_n})) \wedge (\tilde{x}_{1_n} \wedge \ldots \wedge \tilde{x}_{k_n})$

Если $|\vec{x}_b| = 0$, то формула $\Phi^n_{\vec{a}}$ принимает значение $\mathbf{n}$ на наборе $\vec{a}$ и значение $\mathbf{b}$ на наборе $-\vec{a}$, а на всех остальных наборах она принимает значение $\mathbf{f}$. Если $|\vec{x}_b| \neq 0$, то формула $\Phi^n_{\vec{a}}$ принимает значение $\mathbf{n}$ на одном лишь наборе $\vec{a}$ и значение $\mathbf{f}$ на всех остальных наборах.

Функция $\Phi^b_N = \Phi^n_{\vec{a}_1} \vee \ldots \vee \Phi^n_{\vec{a}_k}$ принимает значение $\mathbf{n}$ на каждом наборе значений из N, принимает значение $\mathbf{b}$ на каждом таком наборе $\vec{a}'$ из B, что $\vec{a}' \in \{\mathbf{t}, \mathbf{b}, \mathbf{f}\}^n$, и принимает значение $\mathbf{f}$ во всех остальных случаях.

Так как $\mathbf{f} \vee a = a$ для всех $a \in \{\mathbf{t}, \mathbf{b}, \mathbf{n}, \mathbf{f}\}$, получаем $\psi = \Phi^b_T \vee \Phi^b_B \vee \Phi^b_N$. ■

Теорема 12. *Класс TML предполон в TML'.*

Доказательство. Вспомним, что $TML = [\{\neg, \wedge, \vee, J_{\mathbf{t}}\}]$ (стр. 129) и $TML' = [\{\neg, \wedge, \vee, J_{\mathbf{t}}, \circledcirc\}]$ (стр. 134). Таким образом, для доказательства теоремы достаточно обосновать следующее утверждение: если $\varphi \notin TML$ и $\varphi \in TML'$, то $\circledcirc \in [Tr \cup \{\varphi\}]$.

TML — класс всех функций, одновременно обладающих следующими свойствами: $\{\mathbf{t}, \mathbf{f}\}$-замкнутость, $\{\mathbf{t}, \mathbf{b}, \mathbf{f}, \}$-замкнутость, $\{\mathbf{t}, \mathbf{n}, \mathbf{f}\}$-замкнутость, самодовойственность относительно $-x$; TML' — класс всех функций, которые одновременно $\{\mathbf{t}, \mathbf{f}\}$-замкнуты, $\{\mathbf{t}, \mathbf{b}, \mathbf{f}, \}$-замкнуты, $\{\mathbf{t}, \mathbf{n}, \mathbf{f}\}$-замкнуты, а также сохраняют матрицу $\mathfrak{S}$.

Пусть φ — произвольная $\{\mathbf{t}, \mathbf{f}\}$-замкнутая, $\{\mathbf{t}, \mathbf{b}, \mathbf{f}, \}$-замкнутая, $\{\mathbf{t}, \mathbf{n}, \mathbf{f}\}$-замкнутая функция, не самодовойственная относительно $-x$ и сохраняющая матрицу $\mathfrak{S}$, которую реализует формула $\varphi(x_1, \ldots, x_n)$. По условию, найдется такой набор $(a_1, \ldots, a_n) \in \{\mathbf{t}, \mathbf{b}, \mathbf{n}, \mathbf{f}\}^n$, что $\varphi(a_1, \ldots, a_n) \neq -\varphi(-a_1, \ldots, -a_n)$. Произведем такую подстановку ϵ в $\varphi(x_1, \ldots, x_n)$, что для каждой переменной x_i $(1 \leqslant i \leqslant n)$ имеет место

$$\epsilon(x_i) = \begin{cases} \neg(J_{\mathbf{t}}(x) \wedge \neg J_{\mathbf{t}}(x)), \text{ если } a_i = \mathbf{t}; \\ x, \text{ если } a_i = \mathbf{b}; \\ y, \text{ если } a_i = \mathbf{n}; \\ J_{\mathbf{t}}(x) \wedge \neg J_{\mathbf{t}}(x), \text{ если } a_i = \mathbf{f}. \end{cases}$$

Формула $\varphi(\epsilon(x_1), \ldots, \epsilon(x_n))$ реализует функцию φ^* от двух переменных, которая $\{\mathbf{t}, \mathbf{f}\}$-замкнута, $\{\mathbf{t}, \mathbf{b}, \mathbf{f}, \}$-замкнута, $\{\mathbf{t}, \mathbf{n}, \mathbf{f}\}$-замкнута, не самодовойственна относительно $-x$ и сохраняет матрицу $\mathfrak{S}$.

Обратим внимание, что $\boxplus \in TML$ (см. стр. 130). Пусть $\varphi^{\boxplus}(x,y) = (\varphi^*(x,y) \wedge \bullet(x \boxplus y))$. Тогда имеет место следующее:

$$\varphi^{\boxplus}(x,y) = \begin{cases} \varphi^*(x,y), \text{ если } (x,y) \in \{(\mathbf{b},\mathbf{n}),(\mathbf{n},\mathbf{b})\}; \\ \mathbf{f} \text{ в противном случае.} \end{cases}$$

Теперь разберем случаи.

1. $\varphi^*(\mathbf{b},\mathbf{n}) = \mathbf{t}$, $-\varphi^*(\mathbf{n},\mathbf{b}) \neq \mathbf{t}$.
   (a) $-\varphi^*(\mathbf{n},\mathbf{b}) = \mathbf{b}$, $\varphi^*(\mathbf{n},\mathbf{b}) = \mathbf{n}$; $x \circledcirc y = J_{\mathbf{t}}(\varphi^{\boxplus}(x,y))$.
   (b) $-\varphi^*(\mathbf{n},\mathbf{b}) = \mathbf{n}$, $\varphi^*(\mathbf{n},\mathbf{b}) = \mathbf{b}$; $x \circledcirc y = J_{\mathbf{t}}(\varphi^{\boxplus}(x,y))$.
   (c) $-\varphi^*(\mathbf{n},\mathbf{b}) = \mathbf{f}$, $\varphi^*(\mathbf{n},\mathbf{b}) = \mathbf{f}$; $x \circledcirc y = J_{\mathbf{t}}(\varphi^{\boxplus}(x,y))$.
2. $\varphi^*(\mathbf{b},\mathbf{n}) = \mathbf{b}$, $-\varphi^*(\mathbf{n},\mathbf{b}) \neq \mathbf{b}$.
   (a) $-\varphi^*(\mathbf{n},\mathbf{b}) = \mathbf{t}$, $\varphi^*(\mathbf{n},\mathbf{b}) = \mathbf{t}$; $x \circledcirc y = J_{\mathbf{t}}(\varphi^{\boxplus}(y,x))$.
   (b) $-\varphi^*(\mathbf{n},\mathbf{b}) = \mathbf{n}$, $\varphi^*(\mathbf{n},\mathbf{b}) = \mathbf{b}$; $x \circledcirc y = \neg J_{\mathbf{f}}(\varphi^{\boxplus}(x,y) \wedge (x \boxplus y))$.
   (c) $-\varphi^*(\mathbf{n},\mathbf{b}) = \mathbf{f}$, $\varphi^*(\mathbf{n},\mathbf{b}) = \mathbf{f}$; $x \circledcirc y = J_{\mathbf{f}}(\varphi^{\boxplus}(y,x))$.
3. $\varphi^*(\mathbf{b},\mathbf{n}) = \mathbf{n}$, $-\varphi^*(\mathbf{n},\mathbf{b}) \neq \mathbf{n}$.
   (a) $-\varphi^*(\mathbf{n},\mathbf{b}) = \mathbf{t}$, $\varphi^*(\mathbf{n},\mathbf{b}) = \mathbf{t}$; $x \circledcirc y = J_{\mathbf{t}}(\varphi^{\boxplus}(y,x))$.
   (b) $-\varphi^*(\mathbf{n},\mathbf{b}) = \mathbf{b}$, $\varphi^*(\mathbf{n},\mathbf{b}) = \mathbf{n}$; $x \circledcirc y = J_{\mathbf{t}}(\varphi^{\boxplus}(x,y) \vee (x \boxplus y))$.
   (c) $-\varphi^*(\mathbf{n},\mathbf{b}) = \mathbf{f}$, $\varphi^*(\mathbf{n},\mathbf{b}) = \mathbf{f}$; $x \circledcirc y = J_{\mathbf{f}}(\varphi^{\boxplus}(y,x))$.
4. $\varphi^*(\mathbf{b},\mathbf{n}) = \mathbf{f}$, $-\varphi^*(\mathbf{n},\mathbf{b}) \neq \mathbf{f}$.
   (a) $-\varphi^*(\mathbf{n},\mathbf{b}) = \mathbf{t}$, $\varphi^*(\mathbf{n},\mathbf{b}) = \mathbf{t}$; $x \circledcirc y = J_{\mathbf{f}}(\varphi^{\boxplus}(y,x))$.
   (b) $-\varphi^*(\mathbf{n},\mathbf{b}) = \mathbf{b}$, $\varphi^*(\mathbf{n},\mathbf{b}) = \mathbf{n}$; $x \circledcirc y = J_{\mathbf{f}}(\varphi^{\boxplus}(y,x))$.
   (c) $-\varphi^*(\mathbf{n},\mathbf{b}) = \mathbf{n}$, $\varphi^*(\mathbf{n},\mathbf{b}) = \mathbf{b}$; $x \circledcirc y = J_{\mathbf{f}}(\varphi^{\boxplus}(y,x))$.

Теорема доказана. ■

Теорема 13. *Класс TML' предполон в T''.*

Доказательство. Вспомним, что $TML' = [\{\neg, \wedge, \vee, J_{\mathbf{t}}, \circledcirc\}]$ (стр. 134) и $T'' = [\{\neg, \wedge, \vee, J_{\mathbf{t}}, J_{\mathbf{b}}, J_{\mathbf{n}}, J_{\mathbf{f}}\}]$ (см. Теорему 4). Кроме того, выполняются следующие тождества: $J_{\mathbf{b}}(x) = \neg(J_{\mathbf{t}}(x) \vee J_{\mathbf{n}}(x) \vee J_{\mathbf{f}}(x))$; $J_{\mathbf{n}}(x) = \neg(J_{\mathbf{t}}(x) \vee J_{\mathbf{b}}(x) \vee J_{\mathbf{f}}(x))$. Таким образом, для доказательства теоремы достаточно обосновать следующее утверждение: если $\varphi \notin TML'$ и $\varphi \in T''$, то $\{J_{\mathbf{b}}, J_{\mathbf{n}}\} \cap [Tr \cup \{\varphi\}] \neq \emptyset$.

Класс TML' — это класс всех функций, которые одновременно $\{\mathbf{t},\mathbf{f}\}$-замкнуты, $\{\mathbf{t},\mathbf{b},\mathbf{f},\}$-замкнуты, $\{\mathbf{t},\mathbf{n},\mathbf{f}\}$-замкнуты, а также сохраняют матрицу $\mathfrak{S}$; T'' есть класс всех функций, которые одновременно $\{\mathbf{t},\mathbf{f}\}$-замкнуты, $\{\mathbf{t},\mathbf{b},\mathbf{f},\}$-замкнуты и $\{\mathbf{t},\mathbf{n},\mathbf{f}\}$-замкнуты.

Пусть φ — произвольная $\{\mathbf{t},\mathbf{f}\}$-замкнутая, $\{\mathbf{t},\mathbf{b},\mathbf{f},\}$-замкнутая и $\{\mathbf{t},\mathbf{n},\mathbf{f}\}$-замкнутая функция, не сохраняющая матрицу $\mathfrak{S}$, которую реализует формула $\varphi(x_1,\ldots,x_n)$. По условию, найдутся такие наборы $(a_{11},\ldots,a_{1n})$ и $(a_{21},\ldots,a_{2n})$, что $\varphi\begin{pmatrix} a_{11} & \ldots & a_{1n} \\ a_{21} & \ldots & a_{2n}\end{pmatrix} \notin \begin{pmatrix}\mathbf{b} & \mathbf{f} & \mathbf{t} \\ \mathbf{n} & \mathbf{f} & \mathbf{t}\end{pmatrix}$, однако $\begin{pmatrix} a_{1i} \\ a_{2i}\end{pmatrix} \in \begin{pmatrix}\mathbf{b} & \mathbf{f} & \mathbf{t} \\ \mathbf{n} & \mathbf{f} & \mathbf{t}\end{pmatrix}$ для всех $i \in \{1,\ldots,n\}$.

Произведем такую подстановку ϵ в $\varphi(x_1,\ldots,x_n)$, что для каждой переменной x_i $(1 \leqslant i \leqslant n)$ имеет место

$$\epsilon(x_i) = \begin{cases} \neg(J_{\mathbf{t}}(x) \wedge \neg J_{\mathbf{t}}(x)), \text{ если } a_{1i} = a_{2i} = \mathbf{t}; \\ x, \text{ если } a_{1i} = \mathbf{b}, a_{2i} = \mathbf{n}; \\ J_{\mathbf{t}}(x) \wedge \neg J_{\mathbf{t}}(x), \text{ если } a_{1i} = a_{2i} = \mathbf{f}. \end{cases}$$

Формула $\varphi(\epsilon(x_1),\ldots,\epsilon(x_n))$ реализует функцию φ^* от одной переменной, которая $\{\mathbf{t},\mathbf{f}\}$-замкнута, $\{\mathbf{t},\mathbf{b},\mathbf{f},\}$-замкнута, $\{\mathbf{t},\mathbf{n},\mathbf{f}\}$-замкнута и не сохраняет матрицу $\mathfrak{S}$. Поскольку φ^* $\{\mathbf{t},\mathbf{b},\mathbf{f},\}$-замкнута и $\{\mathbf{t},\mathbf{n},\mathbf{f}\}$-замкнута, $\varphi^*(\mathbf{b}) \in \{\mathbf{t},\mathbf{b},\mathbf{f}\}$ и $\varphi^*(\mathbf{n}) \in \{\mathbf{t},\mathbf{n},\mathbf{f}\}$.

Теперь разберем случаи.

1. $\varphi^*(\mathbf{b}) = \mathbf{t}$; $\varphi^*(\mathbf{n}) \neq \mathbf{t}$;
   (a) $\varphi^*(\mathbf{b}) = \mathbf{t}$; $\varphi^*(\mathbf{n}) = \mathbf{n}$; $J_{\mathbf{n}}(x) = \neg(J_{\mathbf{t}}(\varphi^*(x)) \vee J_{\mathbf{t}}(x) \vee J_{\mathbf{f}}(x))$.
   (b) $\varphi^*(\mathbf{b}) = \mathbf{t}$; $\varphi^*(\mathbf{n}) = \mathbf{f}$; $J_{\mathbf{n}}(x) = \neg(\varphi^*(x) \vee J_{\mathbf{t}}(x) \vee J_{\mathbf{f}}(x))$.
2. $\varphi^*(\mathbf{b}) = \mathbf{b}$; $\varphi^*(\mathbf{n}) \neq \mathbf{n}$;
   (a) $\varphi^*(\mathbf{b}) = \mathbf{b}$; $\varphi^*(\mathbf{n}) = \mathbf{t}$; $J_{\mathbf{b}}(x) = \neg(J_{\mathbf{t}}(\varphi^*(x)) \vee J_{\mathbf{t}}(x) \vee J_{\mathbf{f}}(x))$.
   (b) $\varphi^*(\mathbf{b}) = \mathbf{b}$; $\varphi^*(\mathbf{n}) = \mathbf{f}$; $J_{\mathbf{b}}(x) = \neg(J_{\mathbf{f}}(\varphi^*(x)) \vee J_{\mathbf{t}}(x) \vee J_{\mathbf{f}}(x))$.
3. $\varphi^*(\mathbf{b}) = \mathbf{f}$; $\varphi^*(\mathbf{n}) \neq \mathbf{f}$;
   (a) $\varphi^*(\mathbf{b}) = \mathbf{f}$; $\varphi^*(\mathbf{n}) = \mathbf{n}$; $J_{\mathbf{n}}(x) = \neg(J_{\mathbf{f}}(\varphi^*(x)) \vee J_{\mathbf{t}}(x) \vee J_{\mathbf{f}}(x))$.
   (b) $\varphi^*(\mathbf{b}) = \mathbf{f}$; $\varphi^*(\mathbf{n}) = \mathbf{t}$; $J_{\mathbf{b}}(x) = \neg(\varphi^*(x) \vee J_{\mathbf{t}}(x) \vee J_{\mathbf{f}}(x))$.

Теорема доказана. ■

Поскольку в доказательстве Теоремы 13 не используется тот факт, что $\{\circledcirc\} \in TML$, имеем также следующее.

Следствие 1. Если $[TML \cup \{f\}] \subseteq T''$ и $[TML \cup \{f\}] \nsubseteq TML'$, то $[TML \cup \{f\}] = T''$.

Таким образом, TML' — единственный класс, являющийся собственным надклассом TML и собственным подклассом T''.

Теорема 14. *Если $TML \subset K \subseteq Ł_4$ и $K \notin \{T^\star, T^{\star\star}, Tr\}$, то $K = Ł_4$.*

Доказательство.

Пусть φ_1 — произвольная функция, которая $\{\mathbf{t}, \mathbf{f}\}$-замкнута и не $\{\mathbf{t}, \mathbf{n}, \mathbf{f}, \}$-замкнута, т. е. $\varphi_1 \notin T^\star$; φ_2 — произвольная функция, которая $\{\mathbf{t}, \mathbf{f}\}$-замкнута и не $\{\mathbf{t}, \mathbf{b}, \mathbf{f}, \}$-замкнута, т. е. $\varphi_2 \notin T^{\star\star}$; φ_3 — произвольная функция, которая $\{\mathbf{t}, \mathbf{f}\}$-замкнута и не самодвойственна относительно $-x$, т. е. $\varphi_3 \notin Tr$.

Существует такой набор $(a_1, \ldots, a_n) \in \{\mathbf{t}, \mathbf{n}, \mathbf{f}\}^n$, что $\varphi_1(a_1, \ldots, a_n) = \mathbf{b}$. Произведем такую подстановку ϵ в $\varphi(x_1, \ldots, x_n)$, что для каждой переменной x_i $(1 \leqslant i \leqslant n)$ имеет место

$$\epsilon(x_i) = \begin{cases} \neg(J_{\mathbf{t}}(x) \wedge \neg J_{\mathbf{t}}(x)), \text{ если } a_i = \mathbf{t}; \\ x, \text{ если } a_i = \mathbf{n}; \\ J_{\mathbf{t}}(x) \wedge \neg J_{\mathbf{t}}(x), \text{ если } a_i = \mathbf{f}. \end{cases}$$

Формула $\varphi_1(\epsilon(x_1), \ldots, \epsilon(x_n))$ реализует функцию φ_1^* от одной переменной, которая $\{\mathbf{t}, \mathbf{f}\}$-замкнута и не $\{\mathbf{t}, \mathbf{n}, \mathbf{f}\}$-замкнута. Поскольку φ_1^* $\{\mathbf{t}, \mathbf{f}\}$-замкнута, $\varphi_1^*(\mathbf{t}) \in \{\mathbf{t}, \mathbf{f}\}$, $\varphi_1^*(\mathbf{f}) \in \{\mathbf{t}, \mathbf{f}\}$. Поскольку φ_1^* в то же время не сохраняет множество $\{\mathbf{t}, \mathbf{n}, \mathbf{f}\}$, $\varphi_1^*(\mathbf{n}) = \mathbf{b}$.

Допустим, что φ_1^* самодвойственна относительно $-x$. Тогда $\varphi_1^*(\mathbf{b}) = \mathbf{n}$. В этом случае имеет место следующее тождество: $-x = \varphi_1^*(x) \vee J_{\mathbf{t}}(x) \wedge \neg J_{\mathbf{f}}(x)$. Вспомним, что $Tr = [\{\wedge, \vee, \neg, -\}]$ (стр. 120). Это означает, что $Tr \subseteq [TML \cup \{\varphi_1\}]$. В силу Теоремы 2, $[TML \cup \{\varphi_1, \varphi_3\}] = Ł_4$.

Теперь допустим, что φ_1^* не самодвойственна относительно $-x$. Тогда $\varphi_1^*(\mathbf{b}) \in \{\mathbf{t}, \mathbf{f}\}$. В этом случае имеет место равенство $J_{\mathbf{n}}(x) = \bullet\varphi_1^*(x)$. Вспомним, что $T'' = [\{\neg, \wedge, \vee, J_{\mathbf{t}}, J_{\mathbf{b}}, J_{\mathbf{n}}, J_{\mathbf{f}}\}]$ (см. Теорему 4) и $J_{\mathbf{t}} \in TML$ (стр. 129). Кроме того, $J_{\mathbf{f}} = J_{\mathbf{t}}(\neg x)$ и $J_{\mathbf{b}}(x) = \neg(J_{\mathbf{t}}(x) \vee J_{\mathbf{n}}(x) \vee J_{\mathbf{f}}(x))$. Таким образом, $T'' \subseteq [TML \cup \{\varphi_1\}]$. В силу Теоремы 8, $[TML \cup \{\varphi_1, \varphi_2\}] = Ł_4$. ■

Эта теорема показывает, что TML включается в ровно три предполных класса $Ł_4$ — $T^\star$, $T^{\star\star}$ и Tr.

Заключение

Мы рассмотрели отношения между несколькими замкнутыми классами функций четырехзначной логики. Приведенная ниже таблица содержит сжатое резюме полученных результатов.

Свойства	$Ł_4$	$T^\star$	$T^{\star\star}$	Tr	T''	TML'	TML
$\{\mathbf{t},\mathbf{f}\}$-замкнутость	$+$	$+$	$+$	$+$	$+$	$+$	$+$
$\{\mathbf{t},\mathbf{n},\mathbf{f}\}$-замкнутость	$-$	$+$	$-$	$-$	$+$	$+$	$+$
$\{\mathbf{t},\mathbf{b},\mathbf{f}\}$-замкнутость	$-$	$-$	$+$	$-$	$+$	$+$	$+$
Самодвойственность	$-$	$-$	$-$	$+$	$-$	$-$	$+$
Сохранение матрицы $\mathfrak{S}$	$-$	$-$	$-$	$-$	$-$	$+$	$+$
Предполнота в $Ł_4$	$-$	$+$	$+$	$+$	$-$	$-$	$-$
Предполнота в $T^\star$	$-$	$-$	$-$	$-$	$+$	$-$	$-$
Предполнота в $T^{\star\star}$	$-$	$-$	$-$	$-$	$+$	$-$	$-$
Предполнота в Tr	$-$	$-$	$-$	$-$	$-$	$-$	$+$
Предполнота в T''	$-$	$-$	$-$	$-$	$-$	$+$	$-$
Предполнота в TML'	$-$	$-$	$-$	$-$	$-$	$-$	$+$

Эти результаты демонстрируют, что между TML и $Ł_4$ лежит в точности пять замкнутых классов, которые можно упорядочить по отношению вложимости, как это отражено на рис. 1.

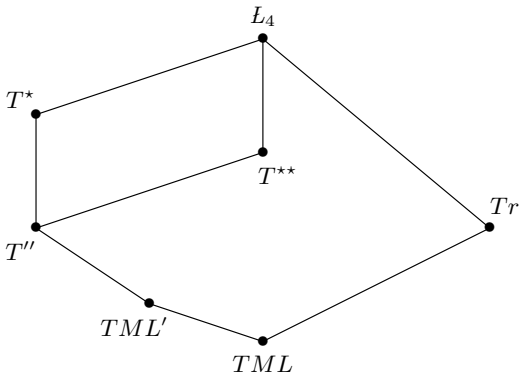


Рис. 1

Данный результат дает нам простой алгоритм, который позволяет установить выразительные возможности языка любой четырехзначной логики, если она является языковым расширением **TML**, и все ее операции $\{\mathbf{t},\mathbf{f}\}$-замкнуты. Добавим к системе операций $\{\neg,\wedge,\vee,J_{\mathbf{t}}\}$ произвольную $\{\mathbf{t},\mathbf{f}\}$-замкнутую функцию g, определенную на $\{\mathbf{t},\mathbf{b},\mathbf{n},\mathbf{f}\}$. Тогда $[\{\neg,\wedge,\vee,J_{\mathbf{t}},g\}]\in\{TML,TML',Tr,T'',T^\star,T^{\star\star},Ł_4\}$. Чтобы установить, с каким именно из перечисленных семи классов совпадает $[\{\neg,\wedge,\vee,J_{\mathbf{t}},g\}]$, достаточно проверить g на обладание следующими свойствами: $\{\mathbf{t},\mathbf{f}\}$-замкнутость, $\{\mathbf{t},\mathbf{n},\mathbf{f}\}$-замкнутость, $\{\mathbf{t},\mathbf{b},\mathbf{f}\}$-замкнутость, самодвойственность относительно $-x$, сохранение матрицы $\mathfrak{S}$.

Литература

Карпенко, 2015 – *Карпенко А.С.* Решетки четырехзначных модальных логик // Логические исследования. 2015. Т. 21. № 1. С. 122–137.

Марченков, 2004 – *Марченков С.С.* Функциональные системы с операцией суперпозиции. М.: ФИЗМАТЛИТ, 2004. 104 с.

Томова, 2018 – *Томова Н.Е.* О четырехзначных паранормальных логиках // Логические исследования. 2018. Т. 24. № 2. С. 137–143.

Avron, 1999 – *Avron A.* On the expressive power of three-valued and four-valued languages // Journal of Logic and Computation. 1999. Vol. 9. No. 6. P. 977–994.

Arieli, Avron, 1998 – *Arieli O., Avron A.* The value of the four values // Artificial Intelligence. 1998. Vol. 102. No. 1. P. 97–141.

Arieli, Avron, 2017 – *Arieli O., Avron A.* Four-valued paradefinite logics // Studia Logica. 2017. Vol. 105. No. 6. P. 1087–1122.

Belnap, 1977 – *Belnap N.* A useful four-valued logic // Modern Uses of Multiple-Valued Logic / Ed. by J.M. Dunn, G. Epstein. D. Reidel Publishing Co., 1977. P. 8–37.

De, Omori, 2015 – *De M., Omori H.* Classical Negation and Expansions of Belnap–Dunn Logic // Studia Logica. 2015. Vol. 103. No. 5. P. 825–851.

Karpenko, 2013 – *Karpenko A.S.* Von Wright's truth-logic and around // Logical Investigations. 2013. Vol. 19. P. 39–50.

Karpenko, 2017 – *Karpenko A.S.* Four-valued logics BD and DM4: Expansions // Bulletin of the Section of Logic. 2017. Vol. 46. No. 1–2. P. 33–45.

Omori, Sano, 2014 – *Omori H., Sano K.* da Costa meets Belnap and Nelson // Recent Trends in Philosophical Logic / Ed. by R. Ciuni, H. Wansing, C. Willkommen. Springer, 2014. P. 145–166.

Omori, Sano, 2015 – *Omori H., Sano K.* Generalizing functional completeness in Belnap–Dunn logic // Studia Logica. 2015. Vol. 103. No. 5. P. 883–917.

Omori, Wansing, 2017 – *Omori H., Wansing H.* 40 years of FDE: an introductory overview // Studia Logica. 2017. Vol. 105. No. 6. P. 1021–1049.

Petrukhin, Shangin, 2019 – *Petrukhin Ya.I., Shangin V.O.* Correspondence analysis and automated proof-searching for first degree entailment // European Journal of Mathematics. 2019. P. 1–44.

Shramko et al., 2017 – *Shramko Y., Zaitsev D., Belikov A.* First-Degree Entailment and its Relatives // Studia Logica. 2017). Vol. 105. P. 1291–1317.

Shramko et al., 2019 – *Shramko Y., Zaitsev D., Belikov A.* The FMLA-FMLA Axiomatizations of the Exactly True and Non-falsity Logics and Some of Their Cousins // Journal of Philosophical Logic. 2019. Vol. 48. P. 787–808.

Leonid Yu. Devyatkin

On the expressive power of certain expansions of Belnap's four-valued logic

Leonid Yu. Devyatkin
Institute of Philosophy, Russian Academy of Sciences,
12/1 Goncharnaya Str., Moscow, 109240, Russian Federation.
E-mail: deviatkin@iph.ras.ru

Abstract: The paper is devoted to closed classes of functions of four-valued logic. We present the following results:

(1) The basic operations (i.e. the algebraic functions used to interpret the corresponding connectives) of the logic obtained by expanding the four-valued De Morgan algebra by the conflation operator generate the closed class of all functions that simultaneously preserve the classical truth values and are self-dual with respect to conflation. This class is precomplete in the class of all functions that preserve the classical truth values.

(2) There are exactly two closed classes between the closed class generated by the basic operations of von Wright's truth logic and the class of all functions that preserve the classical truth values. Each of them is a class of all functions that simultaneously preserve the classical truth values and one of the three-element supersets of the set of the classical truth values.

(3) The basic operations of TML, the tetravalent modal logic obtained by expanding the four-valued De Morgan algebra by the necessity operator, generate the closed class of all functions that simultaneously preserve the classical truth values, are self-dual with respect to conflation, and also preserve both three-element supersets of the set of the classical truth values. We show that this class is precomplete in the class of all functions that simultaneously preserve the classical truth values and are self-dual with respect to conflation. In addition, we demonstrate that between this class and the closed class generated by the operations of von Wright's truth logic, there is exactly one closed class.

By virtue of those results, we obtain a seven-element lattice consisting of all possible four-valued expansions of TML that preserve classical truth values.

Keywords: De Morgan algebra, Belnap's four-valued logic, von Wright's truth logic, truth logic Tr, tetravalent modal logic, closed classes of functions

For citation: Devyatkin L.Yu. "O vyrazitel'nykh vozmozhnostyakh otdel'nykh rasshirenii chetyrekhznachnoi logiki Belnapa" [On the expressive power of certain expansions of Belnap's four-valued logic], *Logicheskie Issledovaniya / Logical Investigations*, 2020, Vol. 26, No. 2, pp. 116–143. DOI: 10.21146/2074-1472-2020-26-2-116-143 (In Russian)

References

Карпенко, 2015 – Karpenko, A.S. "Reshetki chetyrekhznachnykh modal'nykh logik" [Lattices of four-valued modal logics], *Logical Investigations*, 2015, Vol. 21, No. 1, pp. 122–137.

Марченков, 2004 – Marchenkov, S.S. *Funktsional'nye sistemy s operatsiei superpozitsii* [Functional systems with superposition operation], M., 2004. 104 p.

Томова, 2018 – Tomova, N.E. "O chetyrekhznachnykh paranormal'nykh logikakh" [On four-valued paranormal logics], *Logical Investigations*, 2018, Vol. 24, No. 2, pp. 137–143.

Avron, 1999 – Avron, A. "On the expressive power of three-valued and four-valued languages", *Journal of Logic and Computation*, 1999, Vol. 9, No. 6, pp. 977–994.

Arieli, Avron, 1998 – Arieli, O., Avron, A. "The value of the four values", *Artificial Intelligence*, 1998, Vol. 102, No. 1, pp. 97–141.

Arieli, Avron, 2017 – Arieli, O., Avron, A. "Four-valued paradefinite logics", *Studia Logica*, 2017, Vol. 105, No. 6, pp. 1087–1122.

Belnap, 1977 – Belnap, N. "A useful four-valued logic", *Modern Uses of Multiple-Valued Logic*, ed. by J.M. Dunn, G. Epstein. D. Reidel Publishing Co., 1977, pp. 8–37.

De, Omori, 2015 – De, M., Omori, H., "Classical Negation and Expansions of Belnap–Dunn Logic", *Studia Logica*, 2015, Vol. 103, No. 5, pp. 825–851.

Karpenko, 2013 – Karpenko, A.S., "Von Wright's truth-logic and around", *Logical Investigations*, 2013, Vol. 19, pp. 39–50.

Karpenko, 2017 – Karpenko, A.S., "Four-valued logics BD and DM4: Expansions", *Bulletin of the Section of Logic*, 2017, Vol. 46, No. 1–2, pp. 33–45.

Omori, Sano, 2014 – Omori, H., Sano, K. "da Costa meets Belnap and Nelson", *Recent Trends in Philosophical Logic*, ed. by R. Ciuni, H. Wansing, C. Willkommen. Springer, 2014. pp. 145–166.

Omori, Sano, 2015 – Omori, H., Sano, K. "Generalizing functional completeness in Belnap–Dunn logic", *Studia Logica*, 2015, Vol. 103, No. 5, pp. 883–917.

Omori, Wansing, 2017 – Omori, H., Wansing, H. "40 years of FDE: an introductory overview", *Studia Logica*, 2017, Vol. 105, No. 6, pp. 1021–1049.

Petrukhin, Shangin, 2019 – Petrukhin, Ya.I., Shangin, V.O. "Correspondence analysis and automated proof-searching for first degree entailment", *European Journal of Mathematics*, 2019, pp. 1–44.

Shramko et al., 2017 – Shramko, Y., Zaitsev, D., Belikov, A. "First-Degree Entailment and its Relatives", *Studia Logica*, 2017, Vol. 105, pp. 1291–1317.

Shramko et al., 2019 – Shramko, Y., Zaitsev, D., Belikov, A. "The FMLA-FMLA Axiomatizations of the Exactly True and Non-falsity Logics and Some of Their Cousins", *Journal of Philosophical Logic*, 2019, Vol. 48, pp. 787–808.

Логические исследования
2020. Т. 26. № 2. С. 144–159
УДК 510.644

Logical Investigations
2020, Vol. 26, No. 2, pp. 144–159
DOI: 10.21146/2074-1472-2020-26-2-144-159

Н.Е. Томова

Об одном классе n-значных литеральных паранепротиворечивых/параполных логик

Наталья Евгеньевна Томова
Институт философии РАН.
Российская Федерация, 109240, г. Москва, ул. Гончарная, д. 12, стр. 1.
E-mail: natalya-tomova@yandex.ru

Аннотация: Паранепротиворечивые и параполные логики позволяют работать с противоречивой и неполной информацией. В статье рассмотрен небольшой класс n-значных литеральных паранепротиворечивых/параполных логик. Представителями данного класса являются известная трехзначная логика Сетте $\mathbf{P}^1$ и дуальная ей логика $\mathbf{I}^1$. Существует несколько методов конструирования литеральных паранепротиворечивых/параполных логик, одним из них является метод комбинирования изоморфов классической логики. А.С. Карпенко было установлено, что паранепротиворечивая логика Сетте $\mathbf{P}^1$ и дуальная ей параполная логика $\mathbf{I}^1$ могут быть получены в результате комбинирования изоморфов классической логики, содержащихся в трехзначной логике Бочвара. В статье рассматривается обобщение данного алгоритма на n-значный случай, и построен класс n-значных литеральных паранепротиворечивых/параполных логик. В данном классе логик выделены паранепротиворечивые системы: приведены два вида логических матриц, доказаны соответствующие утверждения. Также доказано, что оба вида матриц задают ту же паранепротиворечивую теорию, что и матрица, определяющая паранепротиворечивую логику Сетте $\mathbf{P}^1$. Также посредством указания двух видов логических матриц были выделены и параполные логики. Доказано, что эти два вида матриц задают ту же параполную теорию, что и матрица, определяющая параполную логику $\mathbf{I}^1$. В качестве перспективы исследования указывается изучение функциональных свойств полученных n-значных обобщений, вероятно, как в случае с трехзначными и четырехзначными логиками, паранепротиворечивые и параполные логики будут попарно функционально эквивалентны. Поставлен также вопрос о классе n-значных обобщений паранормальных систем.

Ключевые слова: паранепротиворечивость, параполнота, многозначные логики, логические матрицы, изоморфы

Для цитирования: *Томова Н.Е.* Об одном классе n-значных литеральных паранепротиворечивых/параполных логик // Логические исследования / Logical Investigations. 2020. Т. 26. № 2. С. 144–159. DOI: 10.21146/2074-1472-2020-26-2-144-159

© Томова Н.Е.

1. Введение

Статья продолжает цикл исследований, посвященных изучению литеральных паранепротиворечивых/параполных логик (литеральных паралогик или LPP-логик) — логик, в которых свойства паранепотиворечивости и (или) параполноты имеют место только на уровене литералов[1], т. е. пропозициональных переменных и их отрицаний.

Изучению LPP-логик посвящено немало работ. Так, например, в работах [Puga, Da Costa, 1988; Petrukhin, 2019; Popov, 1999; Девяткин, 2018; Fernández, Coniglio, 2003; Карпенко, Томова, 2016] изложены некоторые результаты относительно логик данного класса. К классу LPP-логик относятся известная трехзначная паранепротиворечивая логика Сетте $\mathbf{P}^1$ [Sette, 1953] и дуальная ей параполная логика $\mathbf{I}^1$ [Sette, Carnielli, 1995].

Р. Левин и И. Микенберг в [Lewin, Mikenberg, 2006] задают алгоритм построения LPP-матриц, определяющих весь класс таких логик.

Иной алгоритм конструирования литеральных паралогик — посредством комбинирования изоморфов классической логики — рассмотрен в работах [Karpenko, 2000; Карпенко, Томова, 2016; Tomova, 2020]. При этом классы литеральных паралогик, полученные посредством вышеуказанных методов не эквивалентны. Класс, полученный методом комбинирования изоморфов является лишь подклассом класса логик, заданных LPP-матрицами.

Известно, что трехзначная паранепротиворечивая логика Сетте $\mathbf{P}^1$ [Sette, 1953] и параполная логика $\mathbf{I}^1$ [Sette, Carnielli, 1995] могут быть представлены как результат комбинирования логических операций двух изоморфов классической логики, содержащихся в трезначной логике Бочвара [Karpenko, 2000]. В работе [Tomova, 2020] метод построения LPP-логик посредством комбинирования изоморфов классической логики рассмотрен на четырехзначном случае.

Если комбинирование двух трехзначных изоморфов приводит к построению двух LPP-логик — паранепротиворечивой логики $\mathbf{P}^1$ и параполной логики $\mathbf{I}^1$, то комбинирование операций четырех четырехзначных изоморфов классической логики позволяет получить пять паранепротиворечивых, пять параполных и две паранормальные логики [Карпенко, Томова, 2016, с. 69].

Тот факт, что логики $\mathbf{P}^1$ и $\mathbf{I}^1$ представляют собой комбинацию изоморфов, является существенным их свойством в том смысле, что, применяя

[1] Литералами называем множество Lit всех формул вида $\neg^k p$, где $\neg^0 p = p$ и $\neg^{k+1} p = \neg(\neg^k p)$, для $p \in Var$, Var — счетное множество пропозициональных переменных.

этот метод уже на четырехзначном случае, мы получаем обобщения $\mathbf{P}^1$ и $\mathbf{I}^1$, в которых сохраняются важные свойства этих трехзначных LPP-логик. Так, известно, что $\mathbf{P}^1$ и $\mathbf{I}^1$ функционально эквивалентны [Карпенко, Томова, 2016, с. 44], так же и полученные 10 обощений попарно функционально эвивалентны, кроме того, четырехзначные паранепротиворечивые обобщения задают одну и ту же паранепротиворечивую теорию, что и $\mathbf{P}^1$, а параполные — ту же параполную теорию, что и $\mathbf{I}^1$ [Tomova, 2020].

В данной работе мы покажем, что n-значные обобщения $\mathbf{P}^1$ и $\mathbf{I}^1$, полученные посредством комбинирования соответствующих изоморфов классической логики, задают те же теории, что и паранепротиворечивая логика $\mathbf{P}^1$ и параполная логика $\mathbf{I}^1$.

2. Определения

Для наших целей в данной статье удобно представление логических систем посредством логических матриц. Приведем здесь базовые определения.

Определение 1. Пусть $Var = \{p, q, r \dots\}$ — счетное множество пропозициональных переменных и $Con = \{F_1, \dots F_n\}$ — конечное множество пропозициональных связок, где каждой связке F_i сопоставлено натуральное число $a(F_i)$, которое обозначает число ее аргументов. Хотя бы для одного $i \in \{1, \dots n\}$ имеет место $a(F_i) \neq 0$. Множество For определяется индуктивно:

(1) $Var \subseteq For$,

(2) Для каждого такого $F_i \in Con$, что $a(F_i) = k$, $F_i(A_1, \dots, A_k) \in For$, если $A_1, \dots, A_k \in For$,

(3) Ничто иное не принадлежит For.

Алгебру формул $\mathcal{L} = \langle For, F_1, \dots, F_m \rangle$ будем называть *пропозициональным языком.*

Пусть $\mathcal{A} = \langle V, f_1, \dots, f_m \rangle$ алгебра того же типа, что пропозициональный язык $\mathcal{L}$, где V — множество истинностных значений и f_i — функция на V той же местности, что и F_i.

Определение 2. Упорядоченная тройка $\mathfrak{M} = \langle V, f_1, \dots, f_m, D \rangle$, где $D \subseteq V$ — непустое собственное подмножество V, называется *логической матрицей* для $\mathcal{L}$. Элементы D будем называть *выделенными значениями* $\mathfrak{M}$.

Определение 3. *Оценкой* v формулы A в матрице $\mathfrak{M}$ для языка $\mathcal{L}$ называется такое отображение $\mathcal{L}$ в $\mathcal{A} = \langle V, f_1, \dots, f_m \rangle$, что

1. если p — пропозициональная переменная, тогда $v(p) \in V$;
2. если $A_1, A_2, \ldots, A_n$ — формулы и F^n — n-местная связка языка $\mathcal{L}$, тогда $v(F^n(A_1, A_2, \ldots, A_n)) = f^n(v(A_1), v(A_2), \cdots, v(A_n))$, где f^n — функция на V, соответствующая F^n.

Определение 4. Некоторая формула A есть *тавтология* в $\mathfrak{M}$ (сокращенно — $\vDash_{\mathfrak{M}} A$), е.т.е. для каждой оценки v в $\mathfrak{M}$ верно, что $v(A) \in D$.

Определение 5. Теорией, порождаемой $\mathfrak{M}$, называем множество всех тавтологий в $\mathfrak{M}$ и обозначаем его как $E(\mathfrak{M})$.

Определение 6. Формула B логически следует из множества формул $\Gamma = \{A_1, A_2, \ldots, A_n\}$ в $\mathfrak{M}$ (сокращенно — $\Gamma \vDash_{\mathfrak{M}} B$), е.т.е. не существует такой оценки v в $\mathfrak{M}$, что $v(A_i) \in D$ для каждой $A_i \in \Gamma$, и $v(B) \notin D$.

Определение 7. Отношением следования, порождаемым $\mathfrak{M}$, называем множество $Cn(\mathfrak{M})$ упорядоченных пар $\langle \Gamma, B \rangle$ таких, что для всякой оценки v в $\mathfrak{M}$, если $v(\Gamma) \subseteq D$, то $v(B) \in D$.

Тогда под логикой L будем понимать пару $\langle \mathcal{L}, Cn(\mathfrak{M}) \rangle$.

Пусть матрица $\mathfrak{M}_1$ со множеством базовых матричных операций Φ_1 порождает логику L_1, матрица $\mathfrak{M}_2$ со множеством базовых матричных операций Φ_2 порождает логику L_2. При этом матрицы $\mathfrak{M}_1$ и $\mathfrak{M}_2$ — матрицы одинаковой мощности.

Определение 8. Логика L_1 *функционально вложима* в логику L_2, е.т.е. любая функция из Φ_1 может быть представлена как суперпозиция[2] функций из Φ_2.

Определение 9. Логика L_1 *функционально эквивалентна* логике L_2, е.т.е.

(1) логика L_1 *функционально вложима* в логику L_2 и

(2) логика L_2 is *функционально вложима* в логику L_1.

Определение 10. *Изоморфом классической пропозициональной логики* называется логическая матрица, характеризующая классический класс тавтологий.

Существуют различные формальные и содержательные критерии, характеризующие паранепротиворечивость, параполноту, паранормальность.

В работе [Karpenko, 1999] подробно рассмотрен критерий Яськовского для построения паранепротиворечивых логических систем. В нашем исследовании мы будем использовать его «импликативно-негативную» часть:

[2]Операцией суперпозиции называют операцию порождения одних функций через другие с помощью формул.

Определение 11. В системе *паранепротиворечивой* логики не верифицируется *закон Дунса Скота* $A \to (\neg A \to B)$ [Jaskowski, 1969].

Определение 12. В системе *параполной* логики не верифицируется *закон Клавия* $(\neg A \to A) \to A$ [Ciuciura, 2015].

Определение 13. Логика называется *паранормальной*, если она одновременно является и паранепротиворечивой, и параполной.

3. Логики $\mathbf{P}^1$ и $\mathbf{I}^1$

Паранепротиворечивая логика $\mathbf{P}^1$ [Sette, 1953] и параполная логика $\mathbf{I}^1$ [Sette, Carnielli, 1995] играют центральную роль в нашем исследовании.

Исчисления P^1 и I^1 представлены в языке, включающем отрицание и импликацию в качестве исходных связок.

Аксиоматизация P^1:

(A1) $A \to (B \to A)$

(A2) $(A \to (B \to C)) \to ((A \to B) \to (A \to C))$

(A3) $(\neg A \to \neg B) \to ((\neg A \to \neg\neg B) \to A)$

(A4) $(A \to B) \to \neg\neg(A \to B)$

Правило вывода: *modus ponens* [Sette, Alves, 1973].

Исчисление P^1 семантически полно относительно следующей трехзначной логической матрицы:

$\mathfrak{M}^{P1} = \langle \{1, 1/2, 0\}, \neg_{P1}, \to_{P1}, \{1, 1/2\} \rangle,$

где $\neg_{P1}$ и $\to_{P1}$ определяются таблицами

x	$\neg_{P1}x$
1	0
$1/2$	1
0	1

$\to_{P1}$	1	$1/2$	0
1	1	1	0
$1/2$	1	1	0
0	1	1	1

Исчисление I^1 аксиоматизировано посредством следующих схем аксиом:

(A1) $A \to (B \to A)$

(A2) $(A \to (B \to C)) \to ((A \to B) \to (A \to C))$

(A3') $(\neg\neg A \to \neg B) \to ((\neg\neg A \to B) \to \neg A)$

(A4') $\neg\neg(A \to B) \to (A \to B)$

Правило вывода: *modus ponens* [Sette, Carnielli, 1995].

Исчисление I^1 семантически полно относительно следующей трехзначной логической матрицы:

$\mathfrak{M}^{I1} = \langle\{1, 1/2, 0\}, \neg_{I1}, \to_{I1}, \{1\}\rangle$,

где $\neg_{I1}$ и $\to_{I1}$ определяются таблицами

x	$\neg_{I1}x$
1	0
$1/2$	0
0	1

$\to_{I1}$	1	$1/2$	0
1	1	0	0
$1/2$	1	1	1
0	1	1	1

Отметим некоторые свойства $\mathbf{P}^1$ и $\mathbf{I}^1$.

Логика $\mathbf{P}^1$ функционально эквивалетна логике $\mathbf{I}^1$ [Карпенко, Томова, 2016, с. 44].

$\mathbf{P}^1$ и $\mathbf{I}^1$ являются комбинацией логических операций двух изоморфов классической логики, содержащихся в трехзначной логике Бочвара [Karpenko, 2000, p. 34].

В работе [Tomova, 2020] приведены четырехзначные обобщения логик $\mathbf{P}^1$ и $\mathbf{I}^1$, полученные методом комбинирования изоморфов классической логики. Доказано, что (1) пять четырехзначных обобщений $\mathbf{P}^1$ задают ту же паранепротиворечивую теорию, что и $\mathbf{P}^1$; (2) пять четырехзначных обобщений $\mathbf{I}^1$ задают ту же параполную теорию, что и $\mathbf{I}^1$. В этой же работе было сделано следующее предположение:

> все n-значные литеральные паранепротиворечивые матрицы (и не параполные) и все n-значные литеральные параполные матрицы (и не паранепротиворечивые), полученные посредством комбинирования изоморфов классической логики, порождают те же теории, что и $\mathfrak{M}^{P1}$ и $\mathfrak{M}^{I1}$.

Далее, перейдем к рассмотрению вышеизложенного предположения.

4. Построение изоморфов классической логики

Для построения изоморфов классической логики используются функции перевода промежуточных истинностных значений. Такая функция каждому промежуточному значению сопоставляет одно из классических значений — 0 или 1. Так, на трехзначном случае имелось только две функции перевода: первая переводила истинностное значение $1/2$ в 0, а вторая — в 1 [Карпенко, Томова, 2016, с. 17]. На четырехзначном случае имеем уже четыре такие функции [Там же, с. 66].

В случае n-значной логики имеем $2^{(n-2)}$ функций перевода:

1. $f_1(x)$ переводит все промежуточные значения $\frac{n-2}{n-1}, \ldots, \frac{2}{n-1}, \frac{1}{n-1}$ в 0;

2. $f_2(x)$ переводит все промежуточные значения $\frac{n-2}{n-1}, \ldots, \frac{2}{n-1}, \frac{1}{n-1}$ в 1;

3. $f_3(x)$ переводит промежуточные значения $\frac{n-2}{n-1}, \ldots, \frac{2}{n-1}$ в 1 и $\frac{1}{n-1}$ в 0;

...

$\mathbf{2^{(n-2)}}$**.** $f_{2^{(n-2)}}(x)$ переводит промежуточное значение $\frac{n-2}{n-1}$ в 0 и промежуточные значения $\frac{n-3}{n-1}, \ldots, \frac{2}{n-1}, \frac{1}{n-1}$ в 1.

Логическая матрица n-значных изоморфов классической логики выглядит следующим образом[3]:

$$\mathfrak{M} = \langle V_n, \neg_i, \rightarrow_i, D \rangle,$$

где $V_n = \{1, \frac{n-2}{n-1}, \ldots, \frac{2}{n-1}, \frac{1}{n-1}, 0\}$ — множество истинностных значений, $i = 1, 2, \ldots, 2^{(n-2)}$, D — множество выделенных значений.

Используя соответствующие функции перевода, получаем $2^{(n-2)}$ отрицаний и $2^{(n-2)}$ импликаций. Приведем несколько примеров соответствующих таблиц истинности.

x	$\neg_1 x$	$\neg_2 x$	$\neg_3 x$	$\cdots$	$\neg_{2^{(n-2)}} x$
1	0	0	0	$\cdots$	0
$\frac{n-2}{n-1}$	1	0	0	$\cdots$	1
$\frac{n-3}{n-1}$	1	0	0	$\cdots$	0
$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$
$\frac{2}{n-1}$	1	0	0	$\cdots$	0
$\frac{1}{n-1}$	1	0	1	$\cdots$	0
0	1	1	1	$\cdots$	1

[3]В рамках нашего исследования рассматриваются логические системы, сформулированные в пропозициональном языке, включающем только лишь отрицание и импликацию в качестве исходных связок.

$\to_1$	1	$\frac{n-2}{n-1}$	$\frac{n-3}{n-1}$	$\cdots$	$\frac{2}{n-1}$	$\frac{1}{n-1}$	0
1	1	0	0	$\cdots$	0	0	0
$\frac{n-2}{n-1}$	1	1	1	$\cdots$	1	1	1
$\frac{n-3}{n-1}$	1	1	1	$\cdots$	1	1	1
$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$
$\frac{2}{n-1}$	1	1	1	$\cdots$	1	1	1
$\frac{1}{n-1}$	1	1	1	$\cdots$	1	1	1
0	1	1	1	$\cdots$	1	1	1

$\to_2$	1	$\frac{n-2}{n-1}$	$\frac{n-3}{n-1}$	$\cdots$	$\frac{2}{n-1}$	$\frac{1}{n-1}$	0
1	1	1	1	$\cdots$	1	1	0
$\frac{n-2}{n-1}$	1	1	1	$\cdots$	1	1	0
$\frac{n-3}{n-1}$	1	1	1	$\cdots$	1	1	0
$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$
$\frac{2}{n-1}$	1	1	1	$\cdots$	1	1	0
$\frac{1}{n-1}$	1	1	1	$\cdots$	1	1	0
0	1	1	1	$\cdots$	1	1	1

Тогда имеем следующие логические матрицы, соответствующие изоморфам классической логики:

$$\mathfrak{M}_1 = \langle\{1, \tfrac{n-2}{n-1}, \ldots, \tfrac{2}{n-1}, \tfrac{1}{n-1}, 0\}, \neg_1, \to_1, \{1\}\rangle,$$
$$\mathfrak{M}_2 = \langle\{1, \tfrac{n-2}{n-1}, \ldots, \tfrac{2}{n-1}, \tfrac{1}{n-1}, 0\}, \neg_2, \to_2, \{1, \tfrac{n-2}{n-1}, \ldots, \tfrac{2}{n-1}, \tfrac{1}{n-1}\}\rangle,$$
$$\mathfrak{M}_3 = \langle\{1, \tfrac{n-2}{n-1}, \ldots, \tfrac{2}{n-1}, \tfrac{1}{n-1}, 0\}, \neg_3, \to_3, \{1, \tfrac{n-2}{n-1}, \ldots, \tfrac{2}{n-1}\}\rangle,$$
$$\ldots$$
$$\mathfrak{M}_{2^{(n-2)}} = \langle\{1, \tfrac{n-2}{n-1}, \ldots, \tfrac{2}{n-1}, \tfrac{1}{n-1}, 0\}, \neg_{2^{(n-2)}}, \to_{2^{(n-2)}}, \{1, \tfrac{n-3}{n-1}, \ldots, \tfrac{2}{n-1}, \tfrac{1}{n-1}\}\rangle.$$

Таким образом, используя функции перевода, возможно построить $2^{(n-2)}$ изоморфов классической логики. Класс выделенных значений D в вышеприведенных матрицах зависит от того, какие зачения функции перевода $f_1(x), f_2(x), \ldots, f_{2^{(n-2)}}$ сопоставляют промежуточным значениям, если промежуточному значению сопоставляется 1, тогда это значение включается в класс выделенных значений D.

Метод комбинирования изоморфов состоит в построении такой логической матрицы, в класс матричных операций которой входят операции

из двух различных изоморфов. При этом класс выделенных значений D берется точно такой же, как в изоморфе, из которого взята импликация[4].

Далее, применив метод комбинирования изоморфов классической логики, мы получим класс n-значных LPP-логик. Этот класс состоит из $2^{(2n-4)}$ логик, включая сами изоморфы, или $2^{(2n-4)} - 2^{(n-2)}$ LPP-логик без изоморфов.

5. N-значные LPP-логики

Относительно класса LPP-логик, полученных посредством комбинированя изоморфов классической логики, справедливы следующие утверждения.

Утверждение 1. Логические матрицы вида
$\mathfrak{M}_1^\circ = \langle\{1, \frac{n-2}{n-1}, \ldots, \frac{2}{n-1}, \frac{1}{n-1}, 0\}, \neg_1, \to_k, D\rangle$, где $k = 2, 3, \ldots, 2^{(n-2)}$ и $k \neq 1$, D — множество выделенных значений[5], и
$\mathfrak{M}_2^\circ = \langle\{1, \frac{n-2}{n-1}, \ldots, \frac{2}{n-1}, \frac{1}{n-1}, 0\}, \neg_i, \to_2, \{1, \frac{n-2}{n-1}, \ldots, \frac{2}{n-1}, \frac{1}{n-1}\}\rangle$, где $i = 1, 3, \ldots, 2^{(n-2)}$ и $i \neq 2$, определяют класс паранепротиворечивых логик.

Доказательство. Согласно определению 11 в логических матрицах, задающих паранепротиворечивые системы, не верифицируется закон Дунса Скота $A \to (\neg A \to B)$. Покажем, что матрицы $\mathfrak{M}_1^\circ$ и $\mathfrak{M}_2^\circ$ отвечают определению 11.

(1) Докажем утверждение для матрицы $\mathfrak{M}_1^\circ$. Необходимо показать, что найдется такая оценка v в $\mathfrak{M}_1^\circ$, что $v(A \to_k (\neg_1 A \to_k B)) = 0$.

Импликация $\to_k$ $(k \neq 1)$ такова, что найдется по крайней мере одно такое промежуточное значение $*$, что $v(* \to 0) = 0$.

Допустим, $v(A) = *$ и $v(B) = 0$.

Тогда $v(\neg_1 A) = 1$ (согласно таблице для $\neg_1$) и $v(\neg_1 A \to_k B) = 0$, а, значит, и $v(A \to_k (\neg_1 A \to_k B)) = 0$.

Таким образом, мы обосновали, что в $\mathfrak{M}_1^\circ$ найдется такая оценка v, что $v(A \to_k (\neg_1 A \to_k B)) = 0$.

(2) Докажем утверждение для матрицы $\mathfrak{M}_2^\circ$. Необходимо показать, что найдется такая оценка v в $\mathfrak{M}_2^\circ$, что $v(A \to_2 (\neg_i A \to_2 B)) = 0$.

Допустим, $v(A) = *$, где $*$ — такое промежуточное значение, что $\neg_i(*) = 1$ $(i \neq 2)$, и $v(B) = 0$. Тогда $v(\neg_i A \to_2 B) = 0$. В силу определения для $\to_2$, очевидно, что $v(A \to_2 (\neg_i A \to_2 B)) = 0$.

[4]Это важно, если логика рассматривается в качестве дедуктивной системы. Таким образом выбранный класс D гарантирует, что в случае паранепротиворечивой логики соответствующее отношение логического следования не будет эксплозивным, в случае параполной логики не будет имплозивным (соотвествующие определения см. в [Карпенко, Томова, 2016, с. 32–33]).

[5]выбирается в зависимости от $\to_k$.

Таким образом, мы обосновали, что в $\mathfrak{M}_2^\circ$ найдется такая оценка v, что $v(A \to_2 (\neg_i A \to_2 B)) = 0$. ■

Утверждение 2. Логические матрицы вида
$\mathfrak{M}_1^\bullet = \langle\{1, \frac{n-2}{n-1}, \ldots, \frac{2}{n-1}, \frac{1}{n-1}, 0\}, \neg_k, \to_1, \{1\}\rangle$, где $k = 2, 3, \ldots, 2^{(n-2)}$ и $k \neq 1$, и
$\mathfrak{M}_2^\bullet = \langle\{1, \frac{n-2}{n-1}, \ldots, \frac{2}{n-1}, \frac{1}{n-1}, 0\}, \neg_2, \to_i, D\rangle$, где $i = 1, 3, \ldots, 2^{(n-2)}$ и $i \neq 2$ и D — множество выделенных значений[6], определяют класс параполных логик.

Доказательство. Согласно определению 12 в логических матрицах, задающих параполные системы, не верифицируется закон Клавия $(\neg A \to A) \to A$. Покажем, что матрицы $\mathfrak{M}_1^\bullet$ и $\mathfrak{M}_2^\bullet$ отвечают определению 12.

(1) Докажем утверждение для матрицы $\mathfrak{M}_1^\bullet$. Необходимо показать, что найдется такая оценка v в $\mathfrak{M}_1^\bullet$, что $v((\neg_k A \to_1 A) \to_1 A) = 0$.

Допустим, $v(A) = *$, где $*$ — такое промежуточное значение, что $\neg_k(*) = 0$ $(k \neq 1)$.

Тогда $v(\neg_k A) = 0$, а, значит, $v(\neg_k A \to_1 A) = 1$. Тогда, в силу определения $\to_1$, очевидно, что $v((\neg_k A \to_1 A) \to_1 A) = 0$.

Таким образом, мы обосновали, что в $\mathfrak{M}_1^\bullet$ найдется такая оценка v, что $v((\neg_k A \to_1 A) \to_1 A) = 0$.

(2) Докажем утверждение для матрицы $\mathfrak{M}_2^\bullet$. Необходимо показать, что найдется такая оценка v в $\mathfrak{M}_2^\bullet$, что $v((\neg_2 A \to_i A) \to_i A) = 0$.

Допустим, $v(A) = *$, где $*$ — такое промежуточное значение, что $v(1 \to_i *) = 0$ $(i \neq 2)$.

Тогда $v(\neg_2 A) = 0$ (согласно таблице для $\neg_2$) и $v(\neg_2 A \to_i A) = 1$. Далее имеем, что $v((\neg_2 A \to_i A) \to_i A) = 0$.

Таким образом, мы обосновали, что в $\mathfrak{M}_2^\bullet$ найдется такая оценка v, что $v((\neg_2 A \to_i A) \to_i A) = 0$. ■

Таким образом, утверждения 1 и 2 определяют свойства логических матриц, определяющих классы n-значных паранепротиворечивых и параполных логик.

Далее, можно показать, что матрицы $\mathfrak{M}_1^\circ$ и $\mathfrak{M}_2^\circ$ задают ту же паранепротиворечивую теорию, что и $\mathfrak{M}^{P1}$, а матрицы $\mathfrak{M}_1^\bullet$ и $\mathfrak{M}_2^\bullet$ задают ту же параполную теорию, что и $\mathfrak{M}^{I1}$. Докажем соответствующие утверждения.

Утверждение 3. Логическая матрица вида
$\mathfrak{M}_1^\circ = \langle\{1, \frac{n-2}{n-1}, \ldots, \frac{2}{n-1}, \frac{1}{n-1}, 0\}, \neg_1, \to_k, D\rangle$, где $k = 2, 3, \ldots, 2^{(n-2)}$ и $k \neq 1$, индуцирует ту же паранепротиворечивую теорию, что и матрица $\mathfrak{M}^{P1}$.

[6] выбирается в зависимости от $\to_i$.

Доказательство. Доказательство утверждения следует из фактов:

(1) если матрица $\mathfrak{M}$ является гомоморфным прообразом матрицы $\mathfrak{N}$, тогда $E(\mathfrak{M}) = E(\mathfrak{N})$ [Bolc, 1992, p. 21].

(2) матрица $\mathfrak{M}_1^\circ$ есть гомоморфный прообраз матрицы $\mathfrak{M}^{P1}$ относительно отображения h:

$$h(x) = \begin{cases} 0, & \text{если } x \in \{\frac{n-2}{n-1}, \ldots, \frac{2}{n-1}, \frac{1}{n-1}\} \text{ и } x \to_k y = 0 \to_k y, \\ 1/2, & \text{если } x \in \{\frac{n-2}{n-1}, \ldots, \frac{2}{n-1}, \frac{1}{n-1}\} \text{ и } x \to_k y = 1 \to_k y, \\ x, & \text{если } x \in \{1, 0\}, \end{cases}$$

где $y \in \{1, \frac{n-2}{n-1}, \ldots, \frac{2}{n-1}, \frac{1}{n-1}, 0\}$, $k = 2, 3, \ldots, 2^{(n-2)}$ и $k \neq 1$.

■

Утверждение 4. Логическая матрица вида $\mathfrak{M}_2^\circ = \langle\{1, \frac{n-2}{n-1}, \ldots, \frac{2}{n-1}, \frac{1}{n-1}, 0\}, \neg_i, \to_2, \{1, \frac{n-2}{n-1}, \ldots, \frac{2}{n-1}, \frac{1}{n-1}\}\rangle$, где $i = 1, 3, \ldots, 2^{(n-2)}$ и $i \neq 2$, индуцирует ту же паранепротиворечивую теорию, что и матрица $\mathfrak{M}^{P1}$.

Доказательство. Доказательство утверждения следует из фактов:

(1) если матрица $\mathfrak{M}$ является гомоморфным прообразом матрицы $\mathfrak{N}$, тогда $E(\mathfrak{M}) = E(\mathfrak{N})$ [Bolc, 1992, p. 21].

(2) матрица $\mathfrak{M}_2^\circ$ есть гомоморфный прообраз матрицы $\mathfrak{M}^{P1}$ относительно отображения h:

$$h(x) = \begin{cases} 1, & \text{если } x \in \{\frac{n-2}{n-1}, \ldots, \frac{2}{n-1}, \frac{1}{n-1}\} \text{ и } \neg_i(x) = 0, \\ 1/2, & \text{если } x \in \{\frac{n-2}{n-1}, \ldots, \frac{2}{n-1}, \frac{1}{n-1}\} \text{ и } \neg_i(x) = 1, \\ x, & \text{если } x \in \{1, 0\}, \end{cases}$$

где $i = 1, 3, \ldots, 2^{(n-2)}$ и $i \neq 2$.

■

Утверждение 5. Логическая матрица вида $\mathfrak{M}_1^\bullet = \langle\{1, \frac{n-2}{n-1}, \ldots, \frac{2}{n-1}, \frac{1}{n-1}, 0\}, \neg_k, \to_1, \{1\}\rangle$, где $k = 2, 3, \ldots, 2^{(n-2)}$ и $k \neq 1$, индуцирует ту же параполную теорию, что и матрица $\mathfrak{M}^{I1}$.

Доказательство. Доказательство утверждения следует из фактов:

(1) если матрица $\mathfrak{M}$ является гомоморфным прообразом матрицы $\mathfrak{N}$, тогда $E(\mathfrak{M}) = E(\mathfrak{N})$ [Bolc, 1992, p. 21].

(2) матрица $\mathfrak{M}_1^\bullet$ есть гомоморфный прообраз матрицы $\mathfrak{M}^{I1}$ относительно отображения h:

$$h(x) = \begin{cases} 0, & \text{если } x \in \{\frac{n-2}{n-1}, \ldots, \frac{2}{n-1}, \frac{1}{n-1}\} \text{ и } \neg_k(x) = 1, \\ 1/2, & \text{если } x \in \{\frac{n-2}{n-1}, \ldots, \frac{2}{n-1}, \frac{1}{n-1}\} \text{ и } \neg_k(x) = 0, \\ x, & \text{если } x \in \{1, 0\}, \end{cases}$$

где $k = 2, 3, \ldots, 2^{(n-2)}$ и $k \neq 1$.

■

Утверждение 6. Логическая матрица вида $\mathfrak{M}_2^\bullet = \langle\{1, \frac{n-2}{n-1}, \ldots, \frac{2}{n-1}, \frac{1}{n-1}, 0\}, \neg_2, \rightarrow_i, D\rangle$, где $i = 1, 3, \ldots, 2^{(n-2)}$ и $i \neq 2$, индуцирует ту же параполную теорию, что и матрица $\mathfrak{M}^{I1}$.

Доказательство. Доказательство утверждения следует из фактов:

(1) если матрица $\mathfrak{M}$ является гомоморфным прообразом матрицы $\mathfrak{N}$, тогда $E(\mathfrak{M}) = E(\mathfrak{N})$ [Bolc, 1992, p. 21].

(2) матрица $\mathfrak{M}_2^\bullet$ есть гомоморфный прообраз матрицы $\mathfrak{M}^{I1}$ относительно отображения h:

$$h(x) = \begin{cases} 1, & \text{если } x \in \{\frac{n-2}{n-1}, \ldots, \frac{2}{n-1}, \frac{1}{n-1}\} \text{ и } x \rightarrow_i y = 1 \rightarrow_i y, \\ 1/2, & \text{если } x \in \{\frac{n-2}{n-1}, \ldots, \frac{2}{n-1}, \frac{1}{n-1}\} \text{ и } x \rightarrow_i y = 0 \rightarrow_i y, \\ x, & \text{если } x \in \{1, 0\}, \end{cases}$$

где $y \in \{1, \frac{n-2}{n-1}, \ldots, \frac{2}{n-1}, \frac{1}{n-1}, 0\}$, $i = 1, 3, \ldots, 2^{(n-2)}$ и $k \neq 2$.

■

6. Заключение

В работе было изложено обобщение алгоритма построения n-значных LPP-логик посредством комбинирования n-значных изоморфов классической логики. Были определены свойства логических матриц, соответствующих паранепротиворечивым и параполным логикам. Доказано, что матрицы $\mathfrak{M}_1^\circ$ и $\mathfrak{M}_2^\circ$ задают ту же паранеротиворечивую теорию, что и логика $\mathbf{P}^1$, а матрицы $\mathfrak{M}_1^\bullet$ и $\mathfrak{M}_2^\bullet$ ту же параполную теорию, что и логика $\mathbf{I}^1$. В этом смысле они могут рассматриваться как n-значные обобщения $\mathbf{P}^1$ и $\mathbf{I}^1$. В данной статье не затрагивался вопрос о функциональных свойствах обобщений, однако, вероятно, как в случае с трехзначными и четырезначными логиками, паранепротиворечивые и параполные обобщения будут попарно функционально эквивалентны. Относительно паранормальных LPP-логик сделаем предположение, что логические матрицы вида

$\mathfrak{M} = \langle\{1, \frac{n-2}{n-1}, \ldots, \frac{2}{n-1}, \frac{1}{n-1}, 0\}, \neg_i, \rightarrow_k, D\rangle$,

где $i = 3, \ldots, 2^{(n-2)}$, $k = 3, \ldots, 2^{(n-2)}$ и $i \neq k$,

определяют класс паранормальных логик.

Литература

Девяткин, 2018 – *Девяткин Л.Ю.* О континуальном классе четырехзначных максимально паранормальных логик // Логические исследования / Logical Investigations. 2018. Т. 24. № 2. С. 85–91.

Карпенко, Томова, 2016 – *Карпенко А.С., Томова Н.Е.* Трехзначная логика Бочвара и литеральные паралогики. М.: ИФ РАН, 2016. 110 с.

Томова, 2018 – *Томова Н.Е.* О свойствах одного класса четырехзначных паранормальных логик // Логические исследования / Logical Investigations. 2018. Т. 24. № 1. С. 75–89.

Bolc, 1992 – *Bolc L., Borowik P.* Many-Valued Logics: 1: Theoretical Foundations. Springer-Verlag Berlin Heidelberg, 1992. 288 p.

Ciuciura, 2015 – *Ciuciura J.* A weakly-intuitionistic logic I1 // Logical Investigations. 2015. Vol. 21. No. 2. P. 53–60.

Fernández, Coniglio, 2003 – *Fernández V.L., Coniglio M.E.* Combining valuations with society semantics // Journal of Applied Non-Classical Logics. 2003. Vol. 13. No. 1. P. 21–46.

Jaskowski, 1969 – *Jaśkowski S.* A propositional calculus for inconsistent deductive systems // Studia Logica. 1969. Vol. 24. P. 143–157.

Karpenko, 1999 – *Karpenko A.S.* Jaśkowski's criterion and three-valued paraconsistent logics // Log. Log. Philos. 1999. Vol. 7. P. 81–86.

Karpenko, 2000 – *Karpenko A.S.* A maximal paraconsistent logic: The combination of two three-valued isomorphs of classical propositional logic // Frontiers of Paraconsistent Log., Batens, D. et al. (eds.), Baldock Research Studies Press, 2000. P. 181–187.

Lewin, Mikenberg, 2006 – *Lewin R.A., Mikenberg I.F.* Literal-paraconsistent and literal-paracomplete matrices // Math. Log. Quart. 2006. Vol. 52. No. 5. P. 478–493.

Petrukhin, 2019 – *Petrukhin Ya.I.* Deduction Normalization Theorem for Sette's Logic and Its Modifications // Moscow University Mathematics Bulletin. 2019. Vol. 74. No. 1. P. 25–31.

Popov, 1999 – *Popov V.M.* On the logics related to A. Arruda's system V1 // Logic and logical philosophy. 1999. Vol. 7. P. 87–90.

Puga, Da Costa, 1988 – *Puga L.Z., Da Costa N.C.A.* On the imaginary logic of N.A. Vasiliev // Z. Math. Logik Grundl. Math. 1988. Vol. 34. P. 205–211.

Sette, 1953 – *Sette A.M.* On propositional calculus P1 // Mathemetica Japonicae. 1973. Vol. 18. P. 173–180.

Sette, Alves, 1973 – *Sette A.M., Alves E.H.* On the equivalence between some systems of non-classical logic // Bul. Sec. Log. 1973. Vol. 25. No. 2. P. 68–72.

Sette, Carnielli, 1995 – *Sette A.M., Carnielli W.A.* Maximal weakly-intuitionistic logics // Studia Logica. 1995. Vol. 55. No. 1. P. 181–203.

Tomova, 2020 – *Tomova N.* A Semi-lattice of Four-valued Literal-paraconsistent-paracomplete Logics // Bulletin of the Section of Logic. 2020. (In print)

Natalya E. Tomova

On a class of n-valued literal paraconsistent/paracomplete logics

Natalya E. Tomova
Institute of Philosophy, Russian Academy of Sciences,
12/1 Goncharnaya Str., Moscow, 109240, Russian Federation.
E-mail: natalya-tomova@yandex.ru

Abstract: Paraconsistent and paracomplete logics allow to work with contradictory and incomplete information. The paper considers a small class of n-valued literal paraconsistent / paracomplete logics. Representatives of this class are the well-known three-valued Sette's logic $\mathbf{P}^1$ and its dual logic $\mathbf{I}^1$. There are several methods for constructing literal paraconsistent / paracomplete logics, one of them is the method of combining isomorphs of classical logic. A.S. Karpenko found that paraconsistent Sette's logic $\mathbf{P}^1$ and its dual paracomplete logic $\mathbf{I}^1$ can be obtained by combining isomorphs of classical logic contained in the three-valued Bochvar's logic. The paper considers a generalization of this algorithm to the n-valued case, and a class of n-valued literal paranesistent / paracomplete logics is regarded. We specify the properties of logical matrices corresponding to paranconsistent logics, two types of such matrices are given, the corresponding statements are proved. It is also proved that both types of matrices induce the same paraconsistent theory as the matrix of paraconsistent Sette's logic $\mathbf{P}^1$. Also, we specify the properties of two types of logical matrices corresponding to paracomplete logics, the corresponding statements are proved. And we show that both types of matrices induce the same paracomplete theory as three-valued matrix of paracomplete logic $\mathbf{I}^1$. As a research perspective, the study of the functional properties of the obtained n-valued generalizations is indicated. It is likely that, as in the case of three-valued and four-valued logics, paraconsistent and paracomplete logics will be functionally equivalent in pairs. The question is also raised about the class of n-valued generalizations of paranormal systems.

Keywords: paraconsistency, paracompletness, many-valued logics, logical matrices, isomorphs

For citation: Tomova N.E. "Ob odnom klasse n-znachnykh literal'nykh paraneprotivorechivykh/parapolnykh logik" [On a class of n-valued literal paraconsistent/paracomplete logics], *Logicheskie Issledovaniya / Logical Investigations*, 2020, Vol. 26, No. 2, pp. 144–159. DOI: 10.21146/2074-1472-2020-26-2-144-159 (In Russian)

References

Bolc, 1992 – Bolc, L., Borowik, P. *Many-Valued Logics: 1: Theoretical Foundations.* Springer-Verlag Berlin Heidelberg, 1992. 288 p.

Ciuciura, 2015 – Ciuciura, J. "A weakly-intuitionistic logic I1", *Logical Investigations*, 2015, Vol. 21, No. 2, pp. 53–60.

Devyatkin, 2018 – Devyatkin, L.Yu. "O kontinual'nom klasse chetyrekhznachnykh maksimal'noparanormal'nykh logik" [On a continual class of four-valued maximally paranormal logics], *Logical Investigations*, 2018, Vol. 24, No. 2, pp. 85–91. (In Russian)

Fernández, Coniglio, 2003 – Fernández, V.L., Coniglio, M.E. "Combining valuations with society semantics", *Journal of Applied Non-Classical Logics*, 2003, Vol. 13, No. 1, pp. 21–46.

Jaskowski, 1969 – Jaśkowski, S. "A propositional calculus for inconsistent deductive systems", *Studia Logica*, 1969, Vol. 24, pp. 143–157.

Karpenko, 1999 – Karpenko, A.S. "Jaśkowski's criterion and three-valued paraconsistent logics", *Log. Log. Philos.*, 1999, Vol. 7, pp. 81–86.

Karpenko, 2000 – Karpenko, A.S. "A maximal paraconsistent logic: The combination of two three-valued isomorphs of classical propositional logic", in: *Frontiers of Paraconsistent Log.*, Batens, D. et al. (eds.), Baldock Research Studies Press, 2000, pp. 181–187.

Karpenko, Tomova, 2016 – Karpenko, A.S., Tomova, N.E. *Trekhznachnaya LogikaBochvara i Literal'nye Paralogiki* [Bochvar's three-valued logic and literal paralogics]. Moscow: IPh RAS, 2016. 110 pp. (In Russian)

Lewin, Mikenberg, 2006 – Lewin, R.A., Mikenberg, I.F. "Literal-paraconsistent and literal-paracomplete matrices", *Math. Log. Quart.*, 2006, Vol. 52, No. 5, pp. 478–493.

Petrukhin, 2019 – Petrukhin, Ya.I. "Deduction Normalization Theorem for Sette's Logic and Its Modifications", *Moscow University Mathematics Bulletin*, 2019, Vol. 74, No. 1, pp. 25–31.

Popov, 1999 – Popov, V.M. "On the logics related to A. Arruda's system V1", *Log. Log. Philos.*, 1999, Vol. 7, pp. 87–90.

Puga, Da Costa, 1988 – Puga, L.Z., Da Costa, N.C.A. "On the imaginary logic of N.A. Vasiliev", *Z. Math. Logik Grundl. Math.*, 1988, Vol. 34, pp. 205–211.

Sette, 1953 – Sette, A.M. "On propositional calculus P1", *Mathemetica Japonicae*, 1973, Vol. 18, pp. 173–180.

Sette, Alves, 1973 – Sette, A.M., Alves, E.H. "On the equivalence between some systems of non-classical logic", *Bul. Sec. Log.*, 1973, Vol. 25, No. 2, pp. 68–72.

Sette, Carnielli, 1995 – Sette, A.M., Carnielli, W.A. "Maximal weakly-intuitionistic logics", *Studia Logica*, 1995, Vol. 55, No. 1, pp. 181–203.

Tomova, 2018 – Tomova, N.E. "O svoistvakh odnogo klassa chetyrekhznachnykh paranormal'nykh logik" [On properties of a class of four-valued paranormallogics], *Logical Investigations*, 2018, Vol. 24, No. 1, pp. 75–89.

Tomova, 2020 – Tomova, N. "A Semi-lattice of Four-valued Literal-paraconsistent-paracomplete Logics", *Bul. Sec. Log.*, 2020. (In print)

Логические исследования
2020. Т. 26. № 2. С. 160–175
УДК 16

Logical Investigations
2020, Vol. 26, No. 2, pp. 160–175
DOI: 10.21146/2074-1472-2020-26-2-160-175

Дискуссии
Discussions

Gala Maksudova-Eliseeva

Logical aliens and where to find them

Gala Maksudova-Eliseeva
National Research University Higher School of Economics,
20 Myasnitskaya St., Moscow, 101000, Russian Federation.
E-mail: maks.gala22@gmail.com

Abstract: This paper is concerned with Frege's logical aliens argument against psychologism in logic that leans on the ideas of uniqueness of logic and the understanding of normativity of logic in such a way that everybody should obey the rules of the classical logic system in all circumstances. The paper argues that this argument becomes too radical in the context of current philosophy in logic. The possible answer to Frege's argument could be inspirited by the philosophical ideas of later Wittgenstein: we play different language games, and some of them are logical games. Logical reasoning is to be understood as a kind of dialogical practice and in the process of the ontogeny people learn some sorts of logical games typical for their culture and concerned with their activity. However, different people have different criteria of certainty and not all of them can play logical games. The capacity to play logical games depends on various factors (e.g. culture, educational level, motivation, etc.) and it is connected with main practices that one involved in. In order to talk about logical aliens one should first find out what criteria of certainty his opponent has and what language game he or she plays. This gives new comprehension of the normativity of logic that shows that there are no logical aliens in absolute sense. This view can give in turn a new understanding of what rationality is and show why logic and psychology should interact.

Keywords: Frege, logical aliens, logical pluralism, logical reasoning, normativity of logic, psychologism

For citation: Maksudova-Eliseeva G. "Logical aliens and where to find them", *Logicheskie Issledovaniya / Logical Investigations*, 2020, Vol. 26, No. 2, pp. 160–175. DOI: 10.21146/2074-1472-2020-26-2-160-175

Introduction

The aim of this paper is to reconsider the logical aliens argument. The term "logical aliens" was coined by James Conant [Conant, 1991], while the argument originates in the Introduction to Frege's book "Grundgesetze der Arithmetik" [Frege, 1893] where Frege argues against psychologism and its understanding of what kind of thing the law of logic is. He suggests that we should imagine that

© Maksudova-Eliseeva G.

if men or other beings were discovered who could reason successfully basing on the other laws of logic. For Frege it is impossible, and therefore is to be considered as a "hitherto unknown type of madness" [Frege, 1964, XVI]. This argument is a part of Frege's whole conception of logic, which is essentially antipsychologistical. The triumph of antipsychologism as a result of the controversy over psychologism in logic on the cusp of the 19th and 20th centuries formed a language of the philosophy of logic and its basic distinctions for a significant period. However, a growing number of recent researches suggest some new categories in which logic could be understood. This gives an opportunity to catch the logical aliens. Therefore, in order to investigate who logical aliens are, one should first find out how logic relates to human reasoning. In that regard, the normativity of logic is of our greatest interest. In the first section, I want to present the logical aliens argument. Then I will outline some current ideas in philosophy of logic. The third section will be a step back to logical aliens in order to establish that the possibility of logical aliens' existence includes non-logical dimensions.

Still, why do we need to make efforts to find out who logical aliens are? This problem looks like another variation of the philosophical problem of the Other. It is formulated with respect to the defined professional group, whether that be philosophers, logicians, psychologists, etc. There are a lot of possible characteristics of division. And there a pertinent question arises, whether we really need another one, based on the specific character of the logical reasoning. Within this context, three kinds of risk are possible. First, there is a danger to divide people straightforwardly and uncompromisingly into two categories: people who reason like me/we/all of us/the majority and the Others. It looks like a logical orientalism. From historical perspective it became a problem in the days of the construction of the first intelligence tests. The second kind of risk is to ignore the consistent profiles of the reasoning in favour of globalism. The third one is relativism, so that logic loses the connection with rationality and cannot be appointed as "arbiter in the conflict of opinions" [Ibid., XIX]. How is it possible to avoid these traps?

1. Logical aliens argument

Some of Frege's ideas concerning philosophy of logic will be our starting point in our search. Since Frege attempts to underpin arithmetic by using logical axioms, he first has to provide some evidence that logic has an independent existence from the mind. In the introduction to "Grundgesetze der Arithmetik" he gets into an argument with psychologists regarding the question of the origin of the logical laws. First of all, the laws of logic and the psychological laws should not be confused, otherwise it leads to the breaking of

the distinction between the objective and subjective. The laws of logic are the laws of truth itself, while psychological ones only concern "taken to be true". For this reason, it is impossible to discover the former kind of laws by describing someone's thoughts. Controversially, logic appears as an absolute point of view and, therefore, takes on the role of the court, which points out whose reasoning is correct. In this sense, logic is descriptive (it describes the laws of truth) and normative for thought. Its laws are "the most general laws, which prescribe universally the way in which one ought to think if one is to think at all" [Frege, 1964, XV]. Only in this sense, they can have a special title "laws of thought".

Nevertheless, there are no creatures "whose laws of thought flatly contradicted ours and therefore frequently led to contrary results even in practice" [Ibid., XVI]. For Frege, here it would be a kind of madness, that, however, nobody saw, whereas in contrast the psychological logician could only say: "those laws hold for them, these laws hold for us" [Ibid., XV]. Frege concedes that there could be some beings governed by induction rather than deduction, but they obtain the same result using other proceeds. Thus, Frege postulates the one world, and logic correctness remains the unique criterion for reasoning correctness. In other words, the laws of logic are constitutive for rationality. However, there remain two main questions. The first one inherited from Plato: if these laws are ideal and we cannot furthermore see or touch them, how can we conceive them? We cannot perceive these laws in order to characterise them. We cannot use consistency of the system as well, because there can be more than one unique consistent system. We have to refer to some of our intuitions or experience or to establish in a formalised manner what to start with. The last decision pertains to David Hilbert, and Frege strongly disagreed with this approach. The second is, even though it is possible to discover logical laws, it should be first justified why we should follow them.

Frege's conception of logic is directly related to the basic notions and distinctions of his time. The uniqueness of logic was a common point for all researchers involved in this argument, and logicians should find foundation for this logic. The controversy was about three main issues: constitutiveness of logic, descriptiveness, and normativity. The first issue is, whether this unique logic is constitutive for our reason, that is, if we really cannot help but think in accordance with its rules. The second is concerned with the possibility of logic as empirical science, which had its substance in the psychology of thought. The third issue is about normativity. The statement that logic is normative for reasoning is widespread. This was a common point for some psychologism supporters (e.g., Wilhelm Wundt) and antipsychologists, so it would be inaccurate to say, that there is an opposition between logic as descriptive (psychologists) and normative, or prescriptive (antipsychologists) science. If there is only one

correct system and it is normative, one should inviolately follow its rules under any circumstances in order to stay rational. Then logic becomes a Procrustean bed for human reasoning. On the other hand, it is inappropriate to deny the laws of logic as irrelevant to human reasoning or to relativise rationality towards different kinds of societies.

2. Challenging Frege

There is a plethora of problems related to the controversy over psychologism. Some of them receded into historical distance, for example, by now nobody holds a view that logic is a descriptive science with its grounds in the empirical psychology of thought. The idea of constitutiveness of logic is not widespread as well. Some of the questions appear in a new light, while some hold their sway. However, the Frege's argument is challenged due to the ideas that will be presented below.

2.1. Constitutiveness of logic

The idea of constitutiveness was more typical for psychologists, because they undertook attempts to derive logic from real thoughts. However, not only they advocate this idea. At least Kant and early Frege were of the same belief. Frege forewent this thesis only in "Grundgesetze der Arithmetik" [Linnebo, 2003]. For example, Robert Hanna tries to defend the "broadly Kantian theory of human rationality", namely, that there is a protologic constitutive for human cognition. All the logical systems are developed on the base of this protologic. However, "protologic itself is neither a classical or elementary logic, nor a nonclassical logic, nor strictly speaking even a logical system as such, but is instead an all-purpose logical tool-kit used for cognitively constructing, analyzing, and comparatively evaluating logical systems" [Hanna, 2006, p. 133]. We are hardly capable to say something about such protologic. In any case, if it even exists, it does not lead to the innateness of logic. Logical form is not something preset and "revealing of the logical form is an inventive, design, engineering activity that uses a limited set of tools and is focused on specific goals" [Dragalina-Chernaya, 2015, p. 126], therefore, we are responsible for this process. Logic is neither an inborn component of our reason, nor a kind of necessarily developing (in Piaget-style) competence.

Participants of the controversy over psychologism dissented on what the boundary of logic is. It was more typical for psychologistic thinkers to base their theories upon traditional logic, while the antipsychologistic view is inextricably connected with the origin of symbolic logic. Nevertheless, both groups could not even imagine the possibility of alternative logic systems. The controversy over logical pluralism became possible after the first alternative logic systems

had been offered. The main claim of logical monists[1] is that there is only one correct logic. On the other hand, logical pluralists underline the idea that there is more than one correct logic[2]. Nevertheless, no matter what belief one holds, the notion of the uniqueness of logic has been challenged.

2.2. Normativity of logic

The issue of the normativity of logic remains dominant. A significant number of articles are published annually with the focus on this question. Several authors have abandoned this idea completely [Łukasiewicz, 1957; Zaytsev, 2018; Shramko, 2014; Shramko, 2018], because logic appears to be a science concerned with ontology and has nothing to do with reasoning. This approach is a part of the realistic view on logic, that is, "the fundamental principles of one logic or another turn out to be just specific ontological preconditions imposed on the given logical world" [Shramko, 2014, p. 126]. On the other hand, Van Benthem writes: "And I think the following should be obvious: if logical theory were totally disjoint from actual reasoning, it would be no use at all, for whatever purpose!" [van Benthem, 2008, p. 69]. Moreover, let us imagine a logician who does not follow identity law (here we refrain from the discussion about the question, what it means to follow the logical laws). We would be startled by such a meeting. Possibly, we would even exclaim, that this is "a hitherto unknown type of madness!"

Of course, there are some difficulties with the normativity thesis. Only the most important will be presented below. Firstly, a sufficient amount of experiments (e.g., the classical ones undertaken by [Wason, 1966] and [Byrne, 1989])[3] have shown that not only did the people with mental disorders or uneducated people commit logical fallacies systematically, but also educated western people did. Nevertheless, it does not look like they all are not rational at all. "If the rules of inference are considered to be an a priori condition of the possibility of rationality as such, people who statistically violate these rules should be deemed as irrational. However, how can non-rational beings act adaptively, survive and even evolve?" [Dragalina-Chernaya, 2015, p. 126]. Secondly, logicians can formalise, or develop a logical model of the particular aspects of different subjects' reasoning. For example, Stenning and Lambalgen have modeled some patterns of reasoning of autistic people and children with ADHD (attention deficit hyperactivity disorder) [Stenning, van Lambalgen, 2007]. If these patterns are persistent, can be formalised and sometimes lead us to new unusual

[1] See, e.g., [Read, 2006].
[2] See, e.g., [Shapiro, 2014].
[3] Some details concerning cross-cultural studies will be discussed in the next section.

practical results[4], where is a clear dividing line between such models and other logical systems? Should we regard such models as normative? Thirdly, there are many logical systems, which have a different conception of what logical consequence is. This is a big question of whether we are able to prefer one system to another. If yes, how do we choose the correct one? If there is no core, or canonical application of logic, we should assign the incommensurability of the different forms of reasoning. Nevertheless, even if we want to find only one system, which is correct and normative in an absolute sense, we get caught in a vicious circle. Justifying the normativity of logic towards reasoning, we postulate an ideal reasoning subject, but the normativity of such a subject's reasoning is due to the fact that he is guided by logical norms [MacFarlane, 2004; Dragalina-Chernaya, 2015]. Fourthly, deductive reasoning warrants too many resources, so in some situations it is not rational to inference taking into account all possible models. There are some situations when it is not rational to perform deductive inference.

Stenning and Lambalgen offer to abandon the idea of the normativity of logic in a traditional sense, namely, that everybody should obey the rules of the classical logic system in all circumstances. Their claim is that absolute distinction between valid and invalid arguments cannot been found. Our reasoning is domain dependent and the valid schemata is governed by the domain in which one reasons and by an individual's purpose. Therefore, reasoning can be viewed as consisting of two levels. On the first level one establishes the domain of reasoning and its formal properties ("reasoning to an interpretation"), and only after this within this domain one starts to use formal laws and is guided by them ("reasoning from an interpretation"). The first part is informal, while on the second level we can consider the normativity of logic in a familiar sense. So that we can speak about logical fallacies in frames of every system [Stenning, van Lambalgen, 2008]. Vladimir Vasyukov accounts as well that in the era of non-classical science the choosing of a logical system involves also a non-logical dimension, and "scientific pluralism should also be perceived as a consequence of the variability of the system of social values and goals, dictating the choice of various research strategies" [Vasyukov, 2015, p. 82].

It is one of the possible approaches to the normativity of logic. As one can see, Stenning and Lambalgen try to maintain the idea of normativity, and they are constrained to take into account an informal reasoning: in order to understand if someone follows the logical laws, we should first establish how one has interpreted the task.

[4]For example, some big companies have started adjusting working areas for autistic people [Patterson, 2018].

2.3. Logic and culture

Frege (whose starting point was logical theory) argued the normative status of logic for all people, including people from other cultures: if one does not think logically, one does not think at all. Anthropologists (who observe people of other cultures) noticed that people could think successfully violating basic logical laws, and sociologist David Bloor relativised logic towards social institutes. Bloor analysed some reasoning patterns of the Azande people when they were asked about some aspects of magic, which was a significant part of their lives. The Azande took as true two beliefs in contradiction and did not change them after researchers highlighted the contradiction. Bloor concluded, that there were a lot of forms of logics, for instance, logic of the Azande, western logic etc. and noted: "The Azande have the same psychology as us but radically different institutions. If we relate logic to the psychology of reasoning we shall be inclined to say that they have the same logic; if we relate logic more closely to the institutional framework of thought then we shall incline to the view the two cultures have the different logics" [Bloor, 1976, pp. 129–130].

Nevertheless, it is not difficult to cognise, that the Azande do not have logic as a theory of formal systems, they have some patterns in their reasoning. What Bloor is talking about is not logic. May be the Azande do not think at all, as Frege believed? However, they are successful in their practices and logical analysis of their beliefs can even destroy their practice. Six years earlier in 1931–1932 the soviet psychologist Alexander Luria undertook a seemingly similar study with undereducated people that lived in kishlaks of Uzbekistan. However, he distinguished between logic and the process of reasoning, and he proceeded from the thesis of the uniqueness of logic. Luria gave to participants various tasks and observed how different groups deviate from the logical solution. He showed that the ways of reasoning and problem solving were dependent on the forms of the activity typical for every society: farmers without any education were unable to solve syllogisms, while farmers of elementary education were capable to solve syllogisms with premises based on their actual experience. And none of them could infer from the premises that were not connected with their practice. [Luria, 1976]. So, this research counts in favour of the culturally based disposition of logical reasoning. Catarina Dutilh Novaes follows this idea and points out, that we can expect reasoning in accordance with logical laws only if a subject has studied logic. Logic could be named normative science only in a few situations of the explicit dispute [Dutilh Novaes, 2013; Dutilh Novaes, 2015].

3. Back to logical aliens

At the present some researches are going to change some basic points of the antipsychologistic philosophy of logic, even bringing in some psychological details to Frege's conception [Bryushinkin, 1998]. The former philosophy of logic lets us only deny the possibility of logical aliens (or in an extreme view, we cannot even meaningfully think of such a possibility [Conant, 1991]) or encounter beings who think in brand new ways. The new perspective gives us an ability to understand that logical aliens are not an absolute category, and they can be among us.

The possible decision that helps to avoid both relativism and Frege's dogmatism is to conceive human activity not excepting reasoning as consisting of different language games[5] in Wittgenstein-style. These games serve the purposes of the subjects of the particular culture, and people learn such games in the process of ontogeny. Different games concern with a different understanding of what is rational. Language games, as a form of life, incorporate a practical component, so there can be games within spiritual practices (where contradiction does not constitute a problem, and a man can be a turtle at the same time[6])[7], within household practices, etc. There is also a subset of logical games. The main characteristic of logical games is a competence to separate form from content and consequently ability to inference in isolation from experience. This subset is not homogeneous. We should distinguish between logical games in the narrow sense and in the broad sense. Gilbert Harman points out that "it is crucial not to confuse issues of implication with issues of inference" that are "very different things" [Harman, 2002, p. 1]. Logic is a theory of implication as a direct relation between propositions that uses formal systems as its method, whereas the theory of inference, where inference is understood as a psychological process leading to possible changes in belief or intentions. Logical games in the narrow sense are something only logicians can play. Christian Greiffenhagen and Wes Sharrock notice "even if formal logic has been developed in one

[5]Only situations where a subject expresses the process of one's solution in language and does not limit oneself to silently pointing to the correct answer will be considered.

[6][Frazer, 2005].

[7]Emile Durkheim notices that following logical laws differs in every society: "Today the principle of identity governs scientific thought; but there are vast systems of representation [...], in which it is commonly ignored. These systems are the mythologies [...]. Mythologies deal with beings that have the most contradictory attributes at the same time, that are one and many, material and spiritual, and capable of subdividing themselves indefinitely without losing that which makes them what they are" [Durkheim, 1995, p. 12]. However, for Durkheim these illogical forms remain in the past. Nevertheless, we can find such a kind of out-of-logic practices in modern society, for example, in religion. One person can be very logical while working with scientific concepts and uses concepts that contain contradictive characteristics while reasoning about God.

culture, it is not really the whole culture which has done so. Rather, formal logic has typically been developed as part of some highly specialized practices" [Greiffenhagen, Sharrock, 2006, p. 280]. This kind of games are connected with very special practices of developing and studying logical systems. The diversity of logical systems is not ontologically rooted in the human minds and in the ways of how human beings reason or solve tasks. However, the practice of logical systems' developing helps to acquire competencies in playing logical language games.

Logical games in a broad sense concern the presence of the question of rational justification and with the understanding that logical correctness is an important part of reasoning. However, it does not mean that people who can play such games can consciously reflect on the rules of logic. Paul Boghossian poses a problem of blind reasoning: how is "blind but blameless inference — a way of moving between thoughts that is justified even in the absence of any reflectively appreciable support for it" possible? [Boghossian, 2003, p. 248]. Boghossian examines the problem addressing inferences of the modus ponens (MP) form as an example and concludes that MP is a precondition for possession of the concept of "conditional". However, we obtain this kind of inference from practice (otherwise how could MP be a "precondition" providing that we do not have notice of it?), that is, our parents say something to us in the form "if ..., then ...", our teachers show us how to use calendars and timetables, they also direct our attention to regularities, etc. Indeed, we do not commit logical fallacies in familiar, everyday situations (for instance, "if today is the 20th, then Martha Argerich is playing today in Carnegie Hall. Today is 20th. Then ..." [Boghossian, 2003, p. 225]) Moreover, we do not even conceive this situation as a logical one. Nevertheless, as mentioned above, people from our culture commit logical mistakes systematically when solving some kind of tasks that demand logical reasoning. If the task content is connected with the practice or an important domain, people cope with it far better[8]. However, western people demonstrate a modicum of logical competence when solving abstract tasks as well. They have some intuitions about logical correctness, which can be reflected in a greater or lesser degree. This is because they have been involved in particular dialogical practices during their education. For example, schooling forms that include such a kind of dialogical interaction where a teacher formulates claims that other participants accept as true statements and try to reason thereupon. [Dutilh Novaes, 2015]. So, by the logical games in a broad sense, we mean such a kind of games where rational agents have an idea of logical correctness, and they are capable of recognising the situations that demand logical thinking. This group of games is heterogeneous as

[8]See, e.g. [Fiddick et al., 2000].

well, for example, scientific challenges require maximum accurate consideration with explication of all premises, exceptions and threads of argumentation, while practical reasoning by no means always demand such accuracy. It does not mean that people do not need logic in everyday life — in fact, they do need it. However, deduction demands too much timing, computational and storage budgets, so that, in ordinary cases, it is rational to fast track a decision rather than make a deductive inference.

However, not all cultures play logical games, because they are not familiar with this practice and cannot even understand what the researcher expects. "These examples [of performing the tasks] show that syllogisms are not perceived by these subjects as unified logical systems. The subjects repeat different parts of the syllogisms as isolated, logically unrelated phrases" [Luria, 1976, p. 106]. Finally, "the subjects refused to resort to logical inference from the given premises" [Ibid., p. 108]. It does not exclude that they have some forms of "epistemically blameless blind reasoning" (from a logical point of view), when the task concerns their practice, but it does not mean that they are using laws of classical logic. They also can give a correct answer for syllogism or manage with a task like "The meal in the round dish is poisoned" and refuse this dish, however, the explanation will be non-logical. People from these cultures have an idea of reasoning correctness, the correctness of changing in belief as well, yet it is concerned with another understanding of the possible ways of their judgements' justification: it is not a rational, logical justification. For instance, uneducated Uzbeks appealed to experience while dealing with syllogism: "we've never been anywhere, so we don't know" [Ibid., p. 106]. As a result of the elimination of illiteracy, these subjects get acquainted with logical games and learn the skill to separate the form from content.

Nevertheless, it does not mean that logical relativism is to be supported. It leads to an opposite view: there are no logical aliens at all (because all people have their own style in reasoning) or that every human can be called a logical alien by any other human (for the same reason). Something that could be named "relative relativism" or a weak version of logical constructivism looks more appropriate [Dutilh Novaes, 2013], that is, there are rules of deductive logic that establish rules for ideal situations and real reasoning in different situations. Furthermore, different logical systems[9] can be normative as described above — in some particular situations, for some kinds of language games. I suppose, that the apprehension of somebody as a logical alien concerns not only logical dimension but also social and psychological ones. In which situations is it relevant to speak about logical aliens? It depends on two interrelated factors:

[9]See Stenning and Lambalgen's idea on two levels of reasoning.

1. The components of a subject's certainty. 2. A subject's expectations within a particular language game.

Subjects involved in different practices have different criteria of certainty [Wittgenstein, 1970]. Following Wittgenstein, certainty is one's set of basic beliefs about the world, which one rests upon in his practice or thinking without bringing these beliefs into question. That's why doubt about them is non-productive and meaningless, consequently making a person "a madman". For a logician, who can play logical games in the narrow sense, logical laws themselves grow into one's certainty. It means that they do not need too many resources to solve a logical puzzle (like the Wason-test), they have an inner weapon for such puzzles and can extend logical thinking to a broader set of situations. Of course, this does not mean that all logical games they can play (for example, with material implication) pertain to their basic beliefs. However, they acquire a form of life that includes the possibility to play logical games. The question is, whether logicians doubt the logical laws. May-be they do, but some particular laws, not logic as such. For example, relevant logic started as an attempt to avoid some counter-intuitive paradoxes of material implication. Though, this doubt is possible only within logic. Students, after a basic course of logic, make little less mistakes than they did before the class (according to my own observation). It can be interpreted in such a way that for such students, the laws of logic did not become a part of the thought practice, whereas professors of logic hardly ever make a mistake in this task. Students have an idea of logical correctness, but logical canons are not reflected by them. For instance, van Benthem writes about a psychologist mentioning that he had never met an experimental subject who did not understand the logical solution of the Wason-task when it was explained to him [van Benthem, 2008].

Therefore, a rough distinguishing could be made between people with logical education and people without it. No logician (after the Wason-task) expects an uneducated person to reason in absolute accordance with the formal rules, but so called ordinary people may anticipate that logicians reason like an ideal reasoner mentioned above (presumably[10] ordinary people, if we ask them, would answer that logical laws are normative for reasoning and appear to be supporters of the naive psychologism). Another distinguishing factor is between people without any education and people with some logical competence. This contrasts with Wittgenstein's idea. People from different cultures or even inside one culture may have different criteria of certainty.

[10]Bryushinkin mentions "interpretation of the laws of logic and logical forms as forms and laws of thought is in their eyes the single justification for the complex set of logical studies. We can say that the 'man from the street' is always a 'naive psychologist'" [Bryushinkin, 1998].

It is crucial to find out whether our opponent plays the same game (and understand at large what kind of game it is). One may not know this game or can prefer not to play a logical game and take a risk to use another tool. Susan Haack writes: "Logic, I suggested, is prescriptive of reasoning in the limited sense that inference in accordance with logical principles is safe. (Of course, safety needn't be an overriding consideration; one might, quite rationally, prefer fruitful but risky to safe but relatively uninteresting procedures...)" [Haack, 1978, p. 241]. If a proponent is not familiar with such a kind of games (like the Azande) or has different practical interests (and one's reasoning is successful in the frames of one's basic interests), this person can be named neither a logical alien nor a logical relative.

Concerning this problem, it is more interesting to examine the thought of people with the modicum of logical competence including logicians. People expect that their opponents have the same criteria of certainty, while playing particular language game. There are two possible examples of situations where it is possible to speak about logical aliens:

1. Two logical monists discuss one particular case. At one moment one of them conceives that one's opponent adheres to another system of implication (for example, relevant logic), while the proponent uses the classic system. In the frames of this particular game both of them could consider each other as logical aliens.

2. A teacher of logic says to students that a falsehood implies any proposition. This is a real surprise for students. Logic is illogical, we do not think in this way![11]

There are also some other kinds of activities that include logical language games as their components: particular tasks in the employment interview, diagnosis of cognitive functions within the psychiatric clinic[12], homework preparation, etc. Considering this, we can point out the following dimensions in searching for logical aliens:

1. Cultural: one should comprehend that his or her opponent has the same criteria of basic certainty. A lot of questions remain within cross-cultural studies regarding the boundaries of rationality in different cultures. However, we can expect some unfamiliar patterns in reasoning. These patterns can lead to success in some special tasks' solutions that are connected with practices.

[11] Only a few students during the course can cognise this issue. I suppose, it confirms the idea that student do not engage logical principles as a part of their practice.

[12] See, e.g. [Vygotsky, 1956].

2. Logical: it is crucial to make sure that one's opponent is at least familiar with some kinds of logical games, that is, one can separate form from content.

3. Psychological: one should have some expectations about the current logical game. Participants should have a shared sense of purpose. Sometimes our colleagues turn out to be more aliens than people of other cultures. Thus, somebody could be called "a logical alien" if one is situated within a particular language game. This foreignness is not absolute, and a person can be good in some kinds of games, and bad in other ones.

4. Summary

The logical aliens' argument was very important for antipsychologism. However, some current ideas of philosophy of logic offer the possibility to review the categoricity of Frege's approach. Frege's conception of logical aliens correlates with the particular view on what logic is and how it can be normative. In spite of the fact that relations between logic and real reasoning are still not obvious and remain under the process of revision by philosophers and psychologists, the philosophy of logic as well as logic itself, has achieved significant progress. Nevertheless, with this progress came new problems, new kinds of dispute. Current philosophy of logic has some new basic oppositions: the debating on logical pluralism and logical monism displaces the issue whether logic is constitutive for our reason, the idea of logic as description of psychological processes is substituted by the possibility of modelling the reasoning patterns. Moreover, the philosophers of logic conceived, that there is a multiplicity of circumstances where we have to reason, and every situation is governed by its own purpose. These changes encourage us to review the logical normativity problem.

In order to catch the logical aliens, we should take into account not only logical factors, but also cultural, social and psychological ones, because the rationality could not be reduced to logical thinking. Logic is not more a Procrustean bed for human reasoning, but still remains the factor of correctness. Logic does not need to be relativised against culture and has something to do with truth. Every language game, whether it be logical or shamanistic, has its own experts. However, people who have greater logical competence when they find derailments from the rules in other people's reasoning, assess the rationality in terms of logical games and in terms of logical correctness, but it is not a criteria of what is rational for practices of other cultures. So, it becomes possible to speak about different logical games and to consider the problem of logical aliens' existence concerning different situations, so that we can assess the particularities of reasoning without tagging people. We must remember,

that first of all we all are people, and only then do we have different patterns in reasoning.

Acknowledgements. The article was prepared within the framework of the HSE University Basic Research Program.

References

Bloor, 1976 – Bloor, D. *Knowledge and Social Imagery.* London: Routledge, 1976. 156 pp.

Boghossian, 2003 – Boghossian, P. "Blind reasoning". *Proceedings of the Aristotelian Society*, 2003, Supplementary Volume, No. 77, pp. 225–248.

Bryushinkin, 1988 – Bryushinkin, V.N. *Logika, myshlenie, informatsiya* [Logic, thinking, information]. Saint Petersburg: Izdatelstvo Leningradskogo universiteta, 1988. 152 pp. (In Russian)

Bryushinkin, 1998 – Bryushinkin, V.N. "Psikhologizm na poroge XXI veka" [Psychologism around the turn of the millennium], in: *Logicheskoe kantovedenie-4: Trudy mezhdunarodnogo seminara* [Logical Kant studies: Materials of the international workshop]. Kaliningrad: Kaliningr. un-t., 1998. pp. 84–99. (In Russian)

Byrne, 1989 – Byrne, R. "Suppressing valid inferences with conditionals", *Cognition*, 1989, Vol. 31, pp. 61–83.

Conant, 1991 – Conant, J. "In Search of Logical Alien Thought — Descartes, Kant, Frege and the Tractatus", *Philosophical Topics*, 1991, Vol. 20, No. 1, pp. 115–180.

Dragalina-Chernaya, 2015 – Dragalina-Chernaya, E.G. *Neformal'nye zametki o logicheskoi forme* [Nonformal notes on the logical form]. Saint Petersburg: Aletheia, 2015. 202 pp. (In Russian)

Durkheim, 1995 – Durkheim, E. *Elementary Forms Of The Religious Life.* New York: Free Press, 1995. 464 pp.

Dutilh Novaes, 2013 – Dutilh Novaes, C. "A Dialogical Account of Deductive Reasoning as a Case Study for how Culture Shapes Cognition", *Journal of Cognition and Culture*, 2013, Vol. 13, pp. 459–482.

Dutilh Novaes, 2015 – Dutilh Novaes, C. "A Dialogical, multi-agent account of the normativity of logic", *Dialectica*, 2015, Vol. 69, No. 4, pp. 587–609.

Fiddick et al., 2000 – Fiddick, L., Cosmides, L. and Tooby, J. "No interpretation without representation: the role of domain-specific representations and inferences in the Wason selection task", *Cognition*, 2000, Vol. 77, pp. 1–79.

Frege, 1893 – Frege, G. *Grundgesetze der Arithmetik. Bd. 1. Begriffsschriftlich abgeleitet.* Jena: Verlag Hermann Pohle, 1893. XXXII+254 pp.

Frege, 1964 – Frege, G. *Basic laws of arithmetic.* Berkeley and Los Angeles: University of California Press, 1964. LXIII+144 pp.

Frazer, 2005 – Frazer, J.G. *The Golden Bough: a study of magic and religion.* New York: Cosimo Classics, 2005. XIV+718 pp.

Greiffenhagen, Sharrock, 2006 – Greiffenhagen, C., Sharrock, W. "Logical relativism: logic, grammar, and arithmetic in cultural comparison", *Configurations*, 2006, Vol. 14, No. 3, pp. 275–301.

Haack, 1978 – Haack, S. *Philosophy of logics*. Cambridge: Cambridge University Press, 1978. 276 pp.

Hanna, 2006 – Hanna, R. *Rationality and logic*. Cambridge, MA: The MIT Press, 2006. 316 pp.

Harman, 2002 – Harman, G. "Internal Critique: A Logic is not a Theory of Reasoning and a Theory of Reasoning is not a Logic", in: *Handbook of the Logic of Argument and Inference: The Turn Towards the Practical*, ed. by D.M. Gabbay et al. Amsterdam: Elsevier Science B.V., 2002. pp. 171–186

Łukasiewicz, 1957 – Łukasiewicz, J. *Aristotle's Syllogistic From the Standpoint of Modern Formal Logic*. Oxford: At the clarendon press, 1957. XIV+222 pp.

Linnebo, 2003 – Linnebo, O. "Frege's conception of logic: from Kant to Grundgesetze", *Manuscrito*, 2003, Vol. 26, No. 2, pp. 235–252.

Luria, 1976 – Luria, A.R. *The Cognitive Development: Its Cultural and Social Foundations*. Cambridge: Harvard University Press, 1976. XVI+176 pp.

MacFarlane, 2004 – MacFarlane, J. "In what sense (if any) is logic normative for thought?", unpublished manuscript, 2004.

Patterson, 2018 – Patterson, G. "Fighting cybercrime with neurodiversity". *Project Syndicate*. 2018. [`https://www.project-syndicate.org/commentary/neuro-diversity-cybersecurity-autism-asperger-by-gavin-patterson-2018-01`, accessed on 13.01.2020]

Read, 2006 – Read, S. "Monism: The one true logic", in: *A Logical Approach to Philosophy: Essays in honour of Graham Solomon*, ed. by D. DeVidi, T. Kenyon. Berlin: Springer, 2006. pp. 193–209.

Shapiro, 2014 – Shapiro, S. *Varieties of Logic*. Oxford: Oxford University Press, 2014. IX+226 pp.

Shramko, 2014 – Shramko, Ya.V. "The logical way of being true: Truth values and the ontological foundation of logic", *Logic and Logical Philosophy*, 2014, Vol. 23. pp. 119–131.

Shramko, 2018 – Shramko, Ya.V. "Logicheskii sposob bytiya istiny" [Logical way of truth being], in: *Sovremennaya logika: osnovaniya, predmet i perspektivyi razvitiya* [Contemporary logic: foundations, subject, and perspectives of development], ed. D. Zaitsev. Moscow: Forum, 2018, pp. 96–110. (In Russian)

Stenning, van Lambalgen, 2007 – Stenning, K., van Lambalgen, M. "Logic in the study of psychiatric disorders: Executive function and rule-following", *Topoi*, 2007, Vol. 26, pp. 97–114.

Stenning, van Lambalgen, 2008 – Stenning, K., van Lambalgen, M. *Human reasoning and cognitive science*. Cambridge, MA: MIT University Press, 2008. XVI+407 pp.

van Benthem, 2008 – van Benthem, J. "Logic and reasoning: do facts matter?", *Studia Logica*, 2008, Vol. 88, No. 1, pp. 61–84.

Vasyukov, 2015 – Vasyukov, V.L. "Gorizonty nauchnogo plyuralizma" [Horizons of scientific pluralism], *Filosofiya, metodologiya i istoriya nauki* [Philosophy, methodology and history of science], 2015, Vol. 1, No. 1, pp. 68–85. (In Russian)

Vygotsky, 1956 – Vygotsky, L.S. "Narushenie ponyatiy pri shizofrenii" [Thought in schizophrenia], in: *L.S. Vygotsky, Izbrannyie psihologicheskie issledovaniya* [L.S. Vygotsky, Selected psychological research]. Moscow: izdatelstvo akademii pedagogicheskih nauk RSFSR, 1956. pp. 481–496. (In Russian)

Wason, 1966 – Wason, P. "Reasoning about a rule", *Quarterly Journal of Experimental Psychology*, 1966, Vol. 20, pp. 273–281.

Wittgenstein, 1970 – Wittgenstein, L. *Über Gewißheit*. Frankfurt: Suhrkamp Verlag, 1970. 179 pp.

Wittgenstein, 1999 – Wittgenstein, L. *Philosophical investigations / Philosophische Untersuchungen*. Oxford: Basil Blackwel, 1999. 272 pp.

Zaytsev, 2018 – Zaytsev, D.V. "Logika, rassuzhdeniya, informatsiya" [Logic, reasonings, information], in: *Sovremennaya logika: osnovaniya, predmet i perspektivyi razvitiya* [Contemporary logic: foundations, subject, and perspectives of development], ed. D. Zaitsev. Moscow: Forum, 2018, pp. 111–127. (In Russian)

Информация для авторов

• Журнал «Логические исследования» принимает к публикации рукописи, содержащие изложение оригинальных результатов из различных областей современной логики, ранее не публиковавшиеся и не представленные к публикации в других изданиях. (Рубрики см. на сайте журнала `http://logicalinvestigations.ru`)

• Все статьи, планируемые к публикации в журнале «Логические исследования», проходят процедуру анонимного рецензирования.

• Решение о публикации текста принимается главным редактором с учетом мнения редколлегии и оценки рецензентов. Решение о публикации принимается в течение двух месяцев с момента предоставления рукописи.

• Плата за опубликование рукописей не взимается.

• Рукопись должна быть представлена в электронном виде и оформлена в формате LaTeX 2_ε (по согласованию с редколлегией — в MS Word с обязательным предоставлением pdf-файла).

• При подготовке рукописи в LaTeX 2_ε необходимо использовать стилевой класс `LIarticle.cls` и шаблон `LI_template.tex` (если рукопись на русском языке) или `LI_template_eng.tex` (если рукопись на английском языке), которые размещены в правилах предоставления рукописей на сайте `http://logicalinvestigations.ru`. Здесь же размещены подробные рекомендации по подготовке рукописи.

• Объем рукописи не должен превышать 25 стр. (60 тыс. знаков), включая ссылки, примечания, списоки литературы, аннотации (на русском и английском языках).

Статьи следует направлять в электронном виде в редакцию через сайт
`http://logicalinvestigations.ru`

Information for authors

• *Logical Investigations* accepts for submission papers containing original results in all areas of logic. The papers should not have been published or simultaneously submitted to another publication. (Sections of the journal: `http://logicalinvestigations.ru`)

• All materials published in *Logical Investigations* undergo peer review process.

• The Editor in Chief makes the decision which of the submitted articles should be published, with due account for opinions of the Editorial Board and the reviewers. The decision is made within two months since the date of submission of the manuscript.

• Authors are not charged for the publication.

• Papers should be submitted electronically in the LaTeX 2_ε format (special permission of the editorial board is needed for submissions to be made in the MS Word format).

• While typesetting a paper, the class file `LIarticle.cls` and the template `LI_template_eng.tex` should be used; both files can be accessed at `http://logicalinvestigations.ru`. Here you can also find detailed guidelines for preparing your paper.

• Papers should not exceed 25 pages in the above mentioned format (including the notes, the bibliography, the abstract).

Submissions should be sent in electronic form through the website:
`http://logicalinvestigations.ru`

Научно-теоретический журнал

Логические исследования / Logical Investigations
2020. Том 26. Номер 2

Учредитель и издатель: Федеральное государственное бюджетное учреждение науки Институт философии Российской академии наук

Свидетельство о регистрации СМИ: *ПИ № ФС77-61228 от 03.04.2015 г.*

Главный редактор: *В.И. Шалак*

Ответственный секретарь: *Н.Е. Томова*

Технический редактор: *Е.А. Морозова*

Художник: *Н.Н. Попов*, *С.Ю. Растегина*

Подписано в печать с оригинал-макета 09.10.2020.
Формат 70x100 1/16. Печать офсетная. Гарнитура Computer Modern.
Для набора греческого текста исользован пакет Teubner.
Усл. печ. л. 14,51. Уч.-изд. л. 9,28. Тираж 1 000 экз. Заказ № 14.

Оригинал-макет изготовлен в Институте философии РАН

Разработка LaTeX-класса стилевого оформления оригинал-макета: *А.Е. Коньков*

Компьютерная верстка: *Н.Е. Томова*

Отпечатано в ЦОП Института философии РАН
109240, г. Москва, ул. Гончарная, д. 12, стр. 1

Информацию о журнале «Логические исследования» см. на сайте:
`http://logicalinvestigations.ru`